

TESE
97

Federal de Engenharia

Ilhabela

Analise e Representação de Maquinas Assíncronas
Em Regime Transitorio



Tese de Mestrado

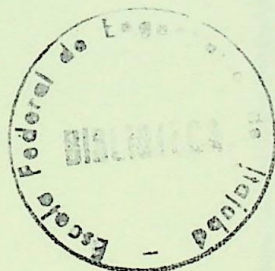
Prof. Ronaldo Rossi

1975

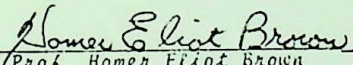
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

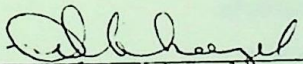
TESE DE MESTRADO

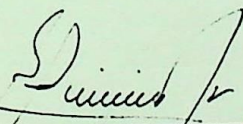
Prof. RONALDO ROSSI



À Banca Examinadora


Prof. Homer Eliot Brown


Prof. Helio Mokarzel


Prof. Guillermo J. Izisari

ANÁLISE E REPRESENTAÇÃO DAS
MÁQUINAS ASSÍNCRONAS EM
REGIME TRANSITÓRIO

ANÁLISE E REPRESENTAÇÃO DAS MÁQUINAS ASSÍNCRONAS
EM REGIME TRANSITÓRIO

S U M Á R I O

CAP. I - Noções Fundamentais sobre Transitórios Elétricos

- I.1 - Introdução
- I.2 - Parametros dos Circuitos Elétricos
- I.3 - Formulação Matemática e Interpretação Física dos Transitórios.
- I.4 - A Aplicação do Princípio da Superposição em Transitórios
- I.5 - Transitórios de Chaveamento em Circuitos de Corrente Alternada.
- I.6 - Referencias.

CAP. II - A Máquina Síncrona

- II.1 - Generalidades
- II.2 - A Máquina Síncrona Trifásica
- II.3 - A Máquina Síncrona em Regime Permanente
- II.4 - Transitórios em Máquinas Síncronas.
- II.5 - Referências.

CAP. III - A Máquina de Indução Trifásica

- III.1 - Generalidades
- III.2 - O Motor de Indução em Regime Permanente
- III.3 - Análise Teórica do Motor de Indução Trifásico
- III.4 - Análise de Potência e Torque no Motor de Indução em Regime Permanente.
- III.5 - Referências.

CAP. IV - Motores de Indução em Regime Transitório

- IV.1 - Representação dos Motores de Indução Durante o Estudo da Estabilidade Transitória de um Sistema de Potência
- IV.2 - O Comportamento do Motor de Indução em Regime Transitório.
- IV.3 - Referências

CAP.V - Simulação do Motor de Indução

- V.1 - As equações para a simulação*
- V.2 - Programa de Simulação*
- V.3 - Resultados Obtidos*
- V.4 - Referências*

CAP. VI - Apêndices

- VI.1 - Apêndice A*
- VI.2 - Apêndice B*
- VI.3 - Apêndice C*
- VI.4 - Apêndice D*
- VI.5 - Apêndice E*

CAP.VII - Conclusões

DEDICATÓRIA

À

Fátima e Adriana

que pela colaboração e compreensão permitiram
a realização deste trabalho, eu o dedico.

AGRADECIMENTO

Aos professores Homer E. Broen, Guillermo Iri
sarri, Hêlio Mokarzel, deixo aqui o meu agradecimento pelas
colaborações e participações na realização deste trabalho.

CAPÍTULO I

NOÇÕES FUNDAMENTAIS SOBRE TRANSITÓRIOS ELÉTRICOS

I.1 - Introdução -

Um transitório elétrico é a manifestação evidente de uma alteração brusca das condições existentes em um circuito elétrico, tal como a abertura ou o fechamento de um disjuntor ou a ocorrência de uma falta no sistema.

O período transitório é em geral, muito curto. O tempo que um sistema permanece em estado transitório é normalmente, insignificante comparado com o que ele opera em regime permanente.

Esses curtos períodos são entretanto, extremamente importantes, pois neles as partes componentes do sistema sofrem as maiores solicitações por excesso de tensão ou corrente, podendo até mesmo resultar na danificação de uma máquina ou de aparelhos, bem como desligar uma central elétrica total ou parcialmente, dependendo da natureza da alteração ocorrida e do circuito considerado.

Por esta razão uma análise dos eventos que ocorrem durante o período transitório é essencial para um melhor entendimento do comportamento dos circuitos elétricos.

Esses transitórios são matematicamente calculados podendo se não evitados, pelo menos serem controlados, de maneira a não se tornarem prejudiciais ao circuito ou aos sistemas nos quais eles aparecem.

Analisaremos, a seguir alguns conceitos básicos sobre transitórios elétricos, os quais servirão de base para as considerações posteriores.

I.2 - Parametros Dos Circuitos Elétricos -

Um exame de qualquer circuito elétrico mostra a

existencia de três tipos de parâmetros:

Resistência R
 Indutância L
 Capacitância C

Todos os componentes pertencentes a um sistema de energia elétrica, quer seja industrial ou eletrônica ou um outro qualquer, possuem esses parâmetros em maior ou menor proporção.

Sob condições de regime permanente, em geral predomina um deles, por exemplo, a indutância em um reator.

No estado transitório, no entanto, podem acontecer modificações consideráveis, como por exemplo a capacitância distribuída nos enrolamentos de um reator se tornar momentaneamente sua característica mais importante.

A resistência, a indutância, e a capacitância de um circuito são grandezas distribuídas, isto é, cada parte de um circuito, por pequena que seja, possui a sua parcela.

Verifica-se no entanto, que frequentemente podem ser consideradas como "concentradas" em determinados ramos do circuito, sem com isso comprometer a precisão dos cálculos. Quando esta técnica não puder ser aplicada, como no caso dos circuitos contendo linhas de transmissão longas, recorrem-se então a outros métodos.

Os parâmetros L e C se caracterizam pela possibilidade de armazenar energia no campo magnético e elétrico respectivamente do circuito.

A energia acumulada é função dos valores máximos da corrente I e da tensão V respectivamente, conforme mostrado abaixo:

a) Indutância -

$$dE = v \cdot i \cdot dt$$

ou

$$dE = L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i \cdot dt$$

donde

$$E = \int_0^I L \cdot i \cdot di$$

ou seja

$$E = \frac{1}{2} L I^2 \quad \text{Eq. I.1}$$

b) Capacitância -

$$dE = v \cdot i \cdot dt = v \cdot dq$$

ou

$$dE = v \cdot C \cdot dv$$

donde

$$E = \int_0^v C \cdot v \cdot dv$$

ou seja

$$E = \frac{1}{2} C \cdot v^2 \quad \text{Eq. I.2}$$

Por outro lado, o parâmetro R é um dissipador de energia, sendo a razão de dissipação em cada instante dada por

$$P = R I^2 \quad \text{Eq. I.3}$$

Em condições de regime permanente, a energia acumulada nas varias indutâncias e capacitâncias de um circuito de corrente contínua é constante.

Em um circuito de corrente alternada, a energia é transferida ciclicamente entre os L e os C do circuito, a medida que a corrente cresce e decresce na razão da frequência da fonte de alimentação.

Neste caso, o processo é acompanhado por certas quantidades de perdas, que dependem da resistência presente, sendo que, todavia elas são supridas pelas fontes do sistema.

Quando ocorre qualquer alteração brusca em um circuito, geralmente ocorre uma redistribuição de energia, a fim de

satisfazer as novas condições no circuito e de certa forma, é sobre esse assunto que faremos nossos estudos referentes a natureza dos transitórios.

É importante lembrarmos que essa redistribuição de energia não pode ocorrer instantaneamente, por duas razões :

1 - Uma variação da energia magnética requer uma variação da corrente, porém, a variação de corrente em um indutor tem em oposição uma FEM de valor $L \frac{dI}{dt}$. Uma mudança instantânea no valor da corrente exigiria dessa forma uma tensão de valor infinitamente grande para vencer esta FEM. Uma vez que isso é impossível na prática, correntes em circuitos indutivos não variam bruscamente, de forma que não pode haver redistribuições instantâneas de energia magnética acumulada.

2 - Uma variação de energia elétrica requer uma variação de tensão. A tensão entre as placas de um capacitor é dada por : $V = \frac{Q}{C}$, sendo Q a sua carga. A razão de variação da tensão serão então

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \dot{I}$$

isto é,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\dot{I}}{C}$$

Eq. I-4

Esta equação nos mostra que para uma variação instantânea da tensão necessitaríamos de uma corrente infinita, o que também é impossível na prática.

Consequentemente a tensão em um capacitor não pode variar bruscamente como também não pode variar bruscamente a energia associada ao seu campo elétrico.

A redistribuição de energia que suceder a uma alta razão em um circuito, exige portanto um tempo finito e o processo durante esse intervalo é governado pelo princípio da conservação da energia, isto é, a razão de suprimento de energia a um circuito é igual a razão de armazenamento, somada com a razão de dissipação ~~des~~sa energia.

Estes três fatores mencionados :

- a) a corrente através de um indutor não pode variar bruscamente,
- b) a tensão de um capacitor não pode mudar bruscamente,
- c) a conservação da energia deve ser preservada em todos os instantes, são fundamentais para o entendimento dos transistórios elétricos.

I.3 Formulação Matemática e Interpretação Física dos Transistórios

A formulação matemática de qualquer problema de transistórios em um circuito começa com o estabelecimento da equação diferencial ou equações que descrevem o comportamento do sistema quando excitado. Isso é em geral realizado com a aplicação das Leis de Kirchhoff.

Façamos como ilustração, a análise da corrente nos circuitos séries RL , RC e RLC , utilizando o processo das transformadas de Laplace para a solução das equações diferenciais.

1º Caso - Circuito RL -

Consideremos a energização do ramo RL na Fig. I-1, através da aplicação de uma diferença de potencial constante, pelo fechamento da chave K em $t=0$.

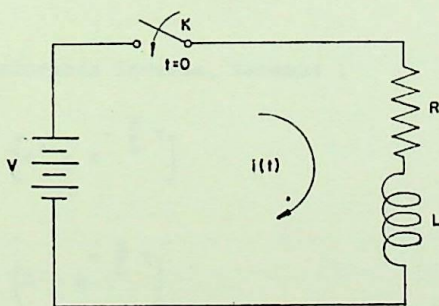


Fig. I-1 - O circuito RL

A equação geral para equilíbrio de tensões no circuito é obtida por Kirchhoff :

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) = V \quad \text{Eq. I.5}$$

Sendo L , R e V constantes, aplicando as transformadas de Laplace, teremos :

$$L \cdot sI(s) + R \cdot I(s) = \frac{V}{s}$$

onde

$$I(s) = \mathcal{L} \{ i(t) \} \quad \text{e} \quad i(0) = 0$$

logo

$$I(s) [R + sL] = \frac{V}{s}$$

ou

$$I(s) = \frac{V}{s[R + sL]} = \frac{V}{R} \cdot \frac{1}{[s + s^2 \cdot \frac{L}{R}]}$$

As raízes em s são :

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = -\frac{R}{L}$$

Portanto, pela transformada inversa, teremos :

$$i(t) = \frac{V}{R} \left[e^0 - e^{-\frac{R}{L}t} \right]$$

ou seja

$$i(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

ou ainda

$$i(t) = \underbrace{\frac{V}{R}}_{\substack{\text{termo de} \\ \text{estado -} \\ \text{permanen} \\ \text{te}}} - \underbrace{\frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t}}_{\substack{\text{termo} \\ \text{transit} \\ \text{rio}}}$$

Eq. I.6

Em condições normais, o termo de estado permanente pode ser calculado em função de conceitos elementares de circuitos enquanto que o termo transitório pode ser usualmente determinado em função de componentes exponenciais simples se os parâmetros do circuito são constantes.

A interpretação física da equação acima, nos mostra que o termo de estado permanente, V/R , independe do tempo, enquanto que o termo transitório, tem um valor $-V/R$ para $t=0$ e aproxima-se de zero exponencialmente quando o tempo aumenta. Os dois termos se combinam para formar a corrente que realmente flui no circuito RL durante o período transitório.

Analisemos graficamente essas componentes :

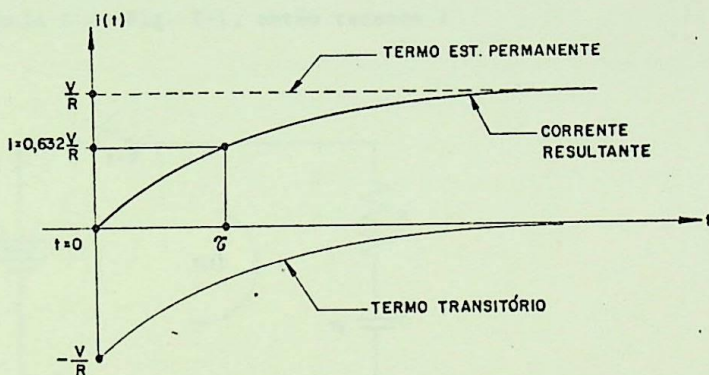


Fig. I-2 - A corrente transitória no circuito RL

Observar que a transição na corrente, é desde zero até um valor permanente de corrente contínua igual a V/R .

Define-se ainda, em certos tipos elementares de circuitos, *constante de tempo do circuito*, como sendo o intervalo de tempo necessário para a corrente alcançar 63,2% de sua transição total.

Para o circuito RL acima, a constante de tempo é dada por :

$$\tau = L/R$$

que é o valor de t que nos fornece $i = 0,632 \frac{V}{R}$.

OBS - Este exemplo considerado foi referente a uma equação dife - renciais de 2ª ordem. Para um sistema geral, cujas componen - tes transitórias assumem ordem n , recorre-se então aos méto - dos de soluções de equações diferenciais classicos, onde as componentes transitórias seriam da forma $I_n e^{p_n t}$ onde os va - lores de p_n são determinados para os coeficientes de $I_n e^{p_n t}$ iguais a zero.

2º Caso - Circuito RC -

Se um capacitor de C unidades de capacitância , substituir a indutância L da fig. I-1, então teremos :

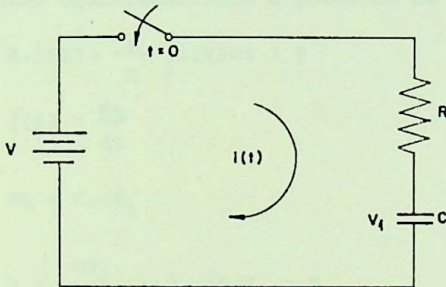


Fig. I-3 - O circuito RC

Usando a 2ª Lei de Kirchoff teremos :

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t)dt = V \quad \text{Eq. I.7}$$

Sendo $\xi i(t) = I(s)$ podemos escrever :

$$RI(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = \frac{V}{s}$$

ou

$$I(s) \left[R + \frac{1}{sC} \right] = \frac{V}{s}$$

ou

$$I(s) = \frac{V}{s \left[R + \frac{1}{sC} \right]} = \frac{V}{R} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC} \right)}$$

A raiz em s é $s_1 = -\frac{1}{RC}$ e aplicando a transformada inversa, teremos :

$$i(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{1}{RC} t} \quad \text{Eq. I.8}$$

Esta é a equação de carregamento do capacitor do circuito da fig. I-3, através da resistência R .

Se pretendessemos determinar a tensão V_1 no capacitor, então equacionaríamos o problema da seguinte forma :

$$R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V$$

mas $i(t) = \frac{dq}{dt}$

e $dq = C \cdot dV_1$

donde

$$R \cdot C \cdot \frac{dV_1}{dt} + \frac{1}{C} \int C dV_1 = V$$

ou seja

$$\frac{dV_1}{V - V_1} = \frac{dt}{RC}$$

a qual resolvida nos fornece

$$V_1(t) = V - A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Sendo $V_1 = 0$ para $t = 0$, então $A = V$ donde :

$$V_1(t) = V \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right]$$

Eq. I.9

Essas soluções para $i(t)$ e V_1 no carregamento do capacitor estão representadas graficamente na fig. I-4 abaixo:

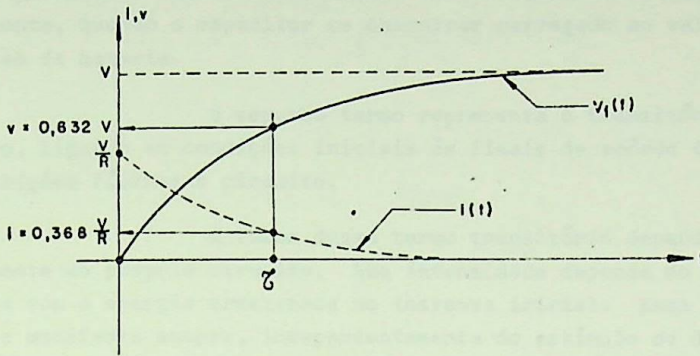


Fig. I-4 - Correntes e tensões no carregamento de capacitor.

Quando o capacitor é ligado à fonte, sua tensão não atinge instantaneamente o valor da tensão da bateria porém ~~crece~~ cresce para atingi-esse valor através de um transitório que neste caso tem a forma de uma exponencial.

Analogamente definimos *constante de tempo* para este circuito, como sendo o intervalo de tempo necessário para que esta tensão atinja 63,2% de seu valor máximo, ou que a corrente atinja o valor de 36,8% de seu valor máximo.

Em qualquer das hipóteses, substituindo esses valores nas equações de $i(t)$ ou de $V_1(t)$ encontraremos o tempo dado por :

$$\tau = \frac{1}{RC}$$

Aqui em analogia ao que se fez com a corrente do circuito RL , podemos dizer que a tensão no capacitor

$$V_1(t) = V \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right]$$

pode ser considerada como a soma de duas parcelas.

$$V_1(t) = V - V e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{Eq. I.10}$$

O primeiro termo V , representa a tensão final ou de estado permanente, quando o capacitor se encontrar carregado ao valor da tensão da bateria.

O segundo termo representa o transitório verdadeiro, ligando as condições iniciais às finais de acordo com as restrições físicas do circuito.

A forma desse termo transitório depende essencialmente do próprio circuito. Sua intensidade depende do que acontece com a energia armazenada no instante inicial. Essa exponencial se manifesta sempre, independentemente do estímulo ou da solicitação que cria a perturbação.

Realmente se em um circuito como o da fig. I-3, não houvesse uma fonte para criar uma excitação, a energia armazenada no capacitor seria dissipada da mesma forma característica; a tensão através do capacitor decresce exponencialmente com a fonte curto-circuitada, isto é,

$$RC \frac{dV_1}{dt} + V_1(t) = 0.$$

donde

$$V_1(t) = V_1(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{Eq. I.11}$$

3º Caso - Circuito RLC -

Consideremos o circuito série RLC mostrado na fig. I-5 abaixo:

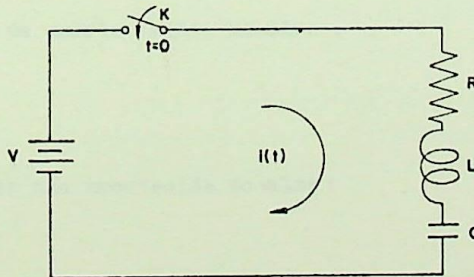


Fig. I-5 - O circuito série RLC

Analisemos o comportamento da corrente transitória no circuito quando for aplicado uma tensão constante V , através do fechamento da chave K , em $t=0$.

Usando a 2ª Lei de Kirchhoff, temos,

$$Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t)dt = V \quad \text{Eq. I.12}$$

Aplicando a transformada de Laplace, teremos :

$$R \cdot I(s) + L \cdot sI(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} I(s) = \frac{V}{s}$$

donde

$$I(s) = \frac{V}{s(R+sL+\frac{1}{sC})}$$

ou

$$I(s) = \frac{V}{(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})L}$$

As raízes em s são :

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Chama-se constante de amortecimento ao valor :

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

e frequência angular não amortecida do valor :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e seja

$$b = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Aplicando a Transformada Inversa, teremos :

$$i(t) = I_1 e^{s_1 t} + I_2 e^{s_2 t} \quad \text{Eq. I.13}$$

A componente de estado permanente é nula pois neste caso, temos uma tensão constante contínua aplicada ao capacitor.

Para as condições iniciais :

$$t=0, \quad i(t)=0 \quad \text{e} \quad q(t)=Q_0$$

teremos

$$I_1 = -I_2 = \frac{CV - Q_0}{2CLb}$$

donde

$$i(t) = \frac{CV - Q_0}{\sqrt{R^2 C^2 - 4LC}} \cdot \left[e^{s_1 t} - e^{s_2 t} \right] \quad \text{Eq. I.14}$$

Como

$$b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad \text{pode ser Real, Imaginário ou Nulo,} \quad \text{há}$$

três casos a serem considerados :

a) Caso I -

$$\text{Quando } \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \quad \text{ou} \quad \alpha^2 > \omega_0^2$$

Nessas condições, as raízes s_1 e s_2 são reais. Para $t=0$ a corrente é nula e a quantidade de carga no capacitor é o seu valor inicial antes do fechamento da chave K.

Para $t \rightarrow \infty$ os termos exponenciais tendem a zero e portanto a corrente tende a zero enquanto que a carga no capacitor tende a $Q \pm CV$ conforme mostrado no gráfico da fig.I-6.

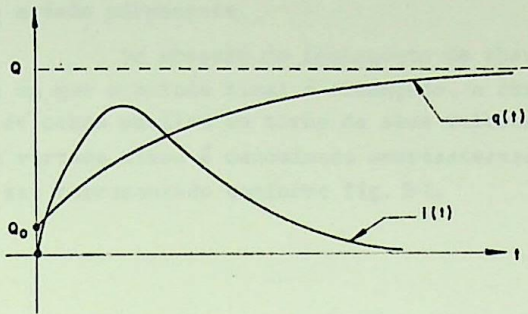


Fig. I-6 - O amortecimento supercrítico

Quando esta condição $\alpha^2 > \omega_0^2$ é verificada dizemos que a corrente sofre um *amortecimento supercrítico*.

b) Caso II

Quando $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ ou $\alpha^2 < \omega_0^2$

Nessas condições β torna-se imaginário. Podemos então escrever :

$$\sqrt{(-1)\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = j\beta$$

onde :

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Teremos então para a corrente

$$i(t) = \frac{CV - Q_0}{\sqrt{R^2 C^2 - 4LC}} \cdot \left[e^{(-\alpha + j\beta)t} - e^{(-\alpha - j\beta)t} \right]$$

que simplificada pode ser escrita

$$i(t) = \frac{2(CV - Q_0)}{\sqrt{4LC - R^2 C^2}} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \text{sen}\beta t \quad \text{Eq. I.15}$$

Um estudo da equação acima, indica que após um

tempo infinito, a corrente torna-se nula, que é a correspondente ao estado permanente.

Do momento do fechamento da chave até que o instante em que o estado final é alcançado, a corrente e a quantidade de carga oscilam em torno de seus valores finais. O caso II em virtude disso é denominado *amortecimento oscilatório*, e pode ser representado conforme fig. I-7.

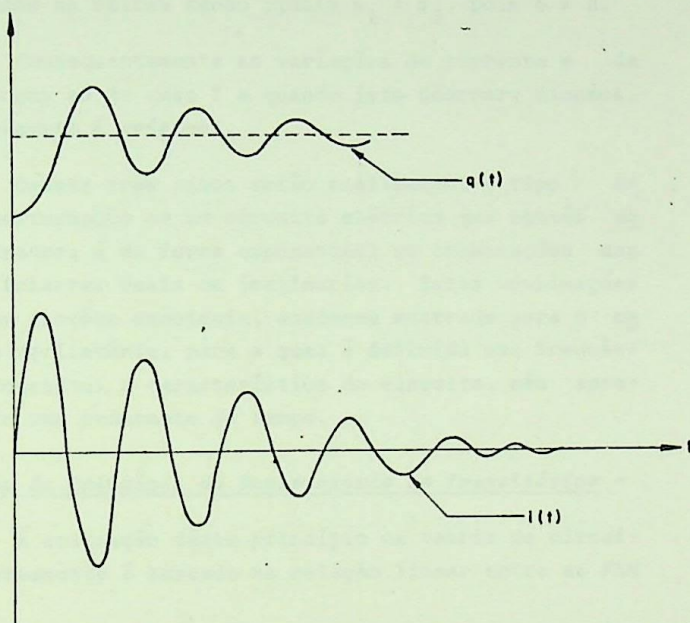


Fig. I-7 - O amortecimento Oscilatório.

Conforme o gráfico nos mostra, a frequência dessas oscilações são iguais para a corrente e a carga, é dada por

$$\beta T = 2\pi$$

donde

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\beta}$$

ou seja

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad \text{Eq. I.16}$$

c) Caso III -

$$\text{Quando } \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \text{ ou } \alpha^2 = \omega_0^2$$

Nessas condições as raízes serão iguais $s_1 = s_2$, pois $b = 0$.

Consequentemente as variações de corrente e de carga são análogas ao do caso I e quando isto ocorrer, dizemos, que o *amortecimento é crítico*.

Desses três casos então analisados, o tipo de resposta a uma perturbação em um circuito elétrico que contém parâmetros concentrados, é da forma exponencial ou combinações das mesmas, com coeficientes reais ou imaginários. Estas combinações podem resultar em funções senoidais, conforme mostrado para o caso III, condição oscilatória, para a qual é definida uma frequência natural que constitui a característica do circuito, não apresentando portanto uma constante de tempo.

I.4 - A Aplicação do Princípio da Superposição em Transitórios -

A aplicação deste princípio na teoria de circuitos em regime permanente é baseado na relação linear entre as FEM e correntes.

Nessas condições em um circuito que contém vários ramos, com n fontes distribuídas, as correntes podem ser calculadas em qualquer ramo em particular, pela determinação da soma algébrica das correntes que cada uma das fontes de tensão provocariam individualmente, isto é, com as $(n-1)$ fontes restantes em curto-circuito.

O princípio da superposição é igualmente válido, para a análise de circuitos em regime transitório, como o é para regime permanente, de tal forma que transitórios podem se somar a transitórios. Existe uma aplicação deste princípio que é de

importância fundamental em transitorios: são os transitórios provenientes das operações de chaveamento, incluindo a aplicação acidental de faltas bem como sua remoção como também a abertura e fechamento de disjuntores.

Deve-se lembrar finalmente que o princípio da superposição só é aplicável a circuitos lineares. Existem certos componentes de sistemas elétricos que não são lineares, como por exemplo os elementos saturáveis, tais como o núcleo de ferro de um reator, ou de um transformador a vazio, etc.

Nestes casos, as correntes não são proporcionais às tensões, exigindo que se estabeleçam limites para a validade da aplicação do princípio.

Restringe-se ainda a aplicação do princípio a resistores não lineares e retificadores, de uso muito frequente - em dispositivos de proteção e de controle dos sistemas elétricos.

I.5 - Transitórios de Chaveamento em Circuitos de Corrente Alternada -

O circuito a ser estudado neste item é o da fig. I-8 que para efeito de simplicidade e de importância futura, a carga será apenas uma combinação série de uma resistência e uma indutância, cujo fator de potência em regime permanente é dado por :

$$\cos \phi = \frac{R}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}} \quad \text{Eq. I.17}$$

e

$$\phi = \arctg \frac{\omega L}{R}$$

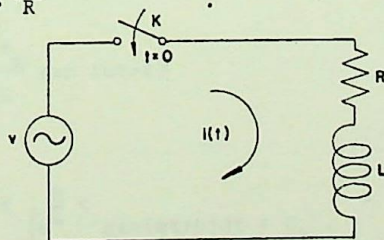


Fig. I-8 - Um circuito RL excitado por tensão senoidal

Admitiremos que a impedância da fonte seja desprezível comparada com aquela da carga. A tensão da fonte é :

$$v = V_m \text{ sen}(\omega t + \theta) \quad \text{Eq. I.18}$$

Quando a chave K é fechada, a equação que exprime a corrente é :

$$R i(t) + L \frac{di}{dt} = V_m \text{ sen}(\omega t + \theta) \quad \text{Eq. I.19}$$

A inclusão de um ângulo de fase θ arbitrário permite o fechamento da chave em qualquer instante no ciclo da tensão.

Conforme sabemos, é claro que após um certo tempo a corrente atingirá um valor de regime permanente, atrasada de um ângulo ϕ da tensão e igual a :

$$i(t) = \frac{V_m}{Z} \text{ sen}(\omega t + \theta - \phi) \quad \text{Eq. I-20}$$

No entanto a corrente não pode atingir este valor instantaneamente, pois a indutância do circuito impõe que a corrente seja inicialmente nula, o que nos permite concluir que deve haver um transitório que conduza o valor da corrente ao seu valor final de regime permanente, e por se tratar de um circuito RL a exponencial $e^{-\frac{R}{L}t}$ terá um papel importante nessa solução.

Então resolvendo a equação diferencial :

$$Ri(t) + L \frac{di}{dt} = V_m \text{ sen}(\omega t + \theta)$$

teremos :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{V_m}{L} \text{ sen}(\omega t + \theta)$$

que tem como diretiva :

$$i(t) = \frac{V_m}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int e^{\frac{R}{L}t} \text{ sen}(\omega t + \theta) dt + C_1 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

e que resolvida para $t=0, i(t)=0$, teremos :

$$i(t) = \underbrace{\frac{V_m}{Z} \text{sen}(\omega t + \theta - \phi)}_{\text{termo est. permanente}} - \underbrace{\frac{V_m}{Z} \text{sen}(\theta - \phi) e^{-\frac{R}{L} t}}_{\text{termo transitório}} \quad \text{Eq. I.21}$$

onde

$$Z = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}$$

e

$$\phi = \text{arc tg } \frac{\omega L}{R}$$

Graficamente, temos a representação abaixo :

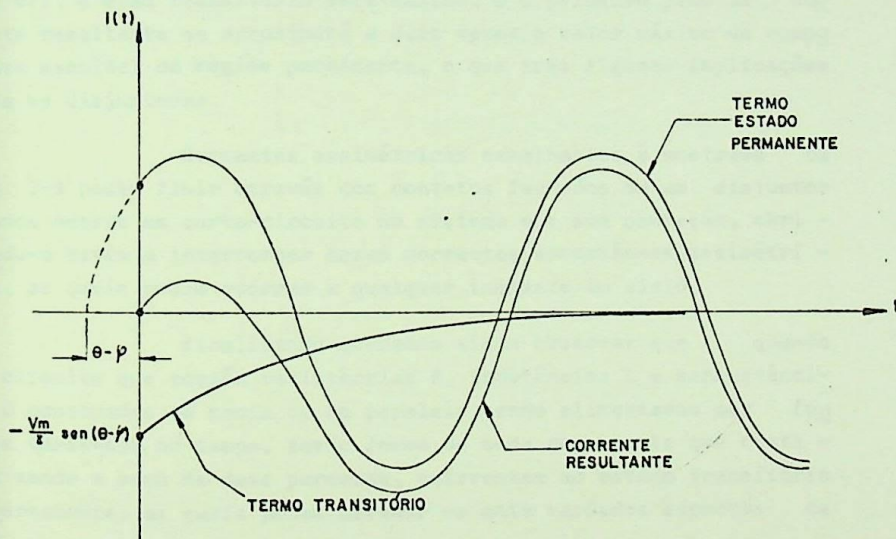


Fig. I-9 - Corrente Alternada Assimétrica

Na equação :

$$i(t) = \frac{V_m}{Z} \text{sen}(\omega t + \theta - \phi) - \frac{V_m}{Z} \text{sen}(\theta - \phi) e^{-\frac{R}{L} t} \quad \text{Eq. I.22}$$

O primeiro termo representa o valor final da corrente em regime permanente, sua amplitude é V_m/Z e realmente possui um ângulo de fase ϕ com relação a tensão.

O segundo termo é o transitório. Envolve como era de se esperar, a exponencial $e^{-\frac{R}{L} t}$ e ainda mais, para $t = 0$, o seu valor é igual e oposto ao do termo de regime permanente assegurando que a corrente inicial seja nula.

No caso particular em que a chave for fechada quando $\theta = \phi$ o termo transitório será nulo e a corrente será simétrica.

Por outro lado, se a chave for fechada quando $\theta - \phi = \pm \pi/2$, o termo transitório será máximo, e o primeiro pico da corrente resultante se aproximará a duas vezes o valor máximo da componente senoidal de regime permanente, o que traz algumas implicações para os disjuntores.

Correntes assimétricas semelhantes à mostrada na fig. I-9 podem fluir através dos contatos fechados de um disjuntor quando ocorre um curto-circuito no sistema sob sua proteção, obrigando-o assim a interromper essas correntes momentâneas assimétricas, as quais podem ocorrer a qualquer instante do ciclo.

Finalizando queremos ainda observar que quando um circuito que contém resistências R , indutâncias L e capacitâncias C conectadas em série ou em paralelo, sendo alimentadas por funções variáveis no tempo, terão forma de onda resultante que continua sendo a soma de duas parcelas, referentes ao estado transitório e permanente, as quais podem assumir os mais variados aspectos de ondas.

A análise desses circuitos são normalmente feitos através de simulação em computadores analógicos, que dada a flexibilidade de recursos que eles apresentam, poderemos ter os resultados da análise plotados graficamente conforme nos mostra a fig. I-12, a qual corresponde ao circuito série RLC mostrado na fig. I-10 abaixo e cuja programação correspondente é o da fig. I-11 da pag. 22.

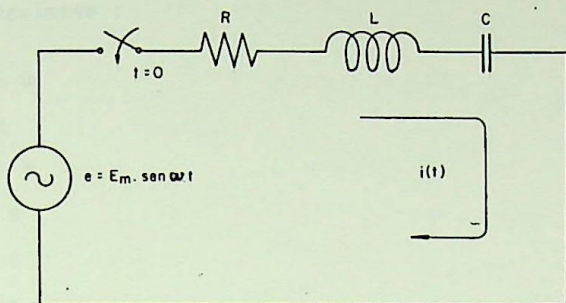


Fig. I-10 - O circuito série RLC com alimentação alternada

Para este circuito podemos escrever :

$$R \cdot i(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = E_m \cdot \text{sen} \omega t$$

ou então

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q = \frac{E_m}{L} \cdot \text{sen} \omega t$$

Eq. I-23

Cuja programação analógica é o da fig. I-11 a seguir :

Os potenciômetros e valores iniciais foram ajustados para os seguintes :

$$R = 1,5 \Omega$$

$$L = 3 \text{ H}$$

$$C = 0,1 \text{ F}$$

$$q(0) = 0$$

$$i(0) = 0$$

$$\omega = 3,14 \text{ rd/s}$$

$$E_m = 4,5 \text{ V.}$$

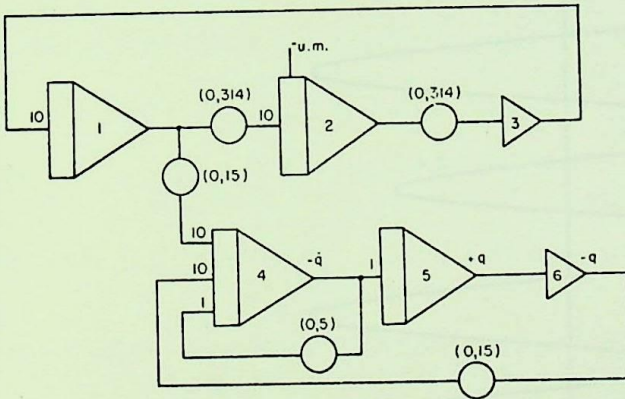


Fig. I-11 - Programação analógica para o circuito RLC da fig. I-10

e cuja resposta a este sistema; é o gráfico mostrado na fig. I-12 seguinte.

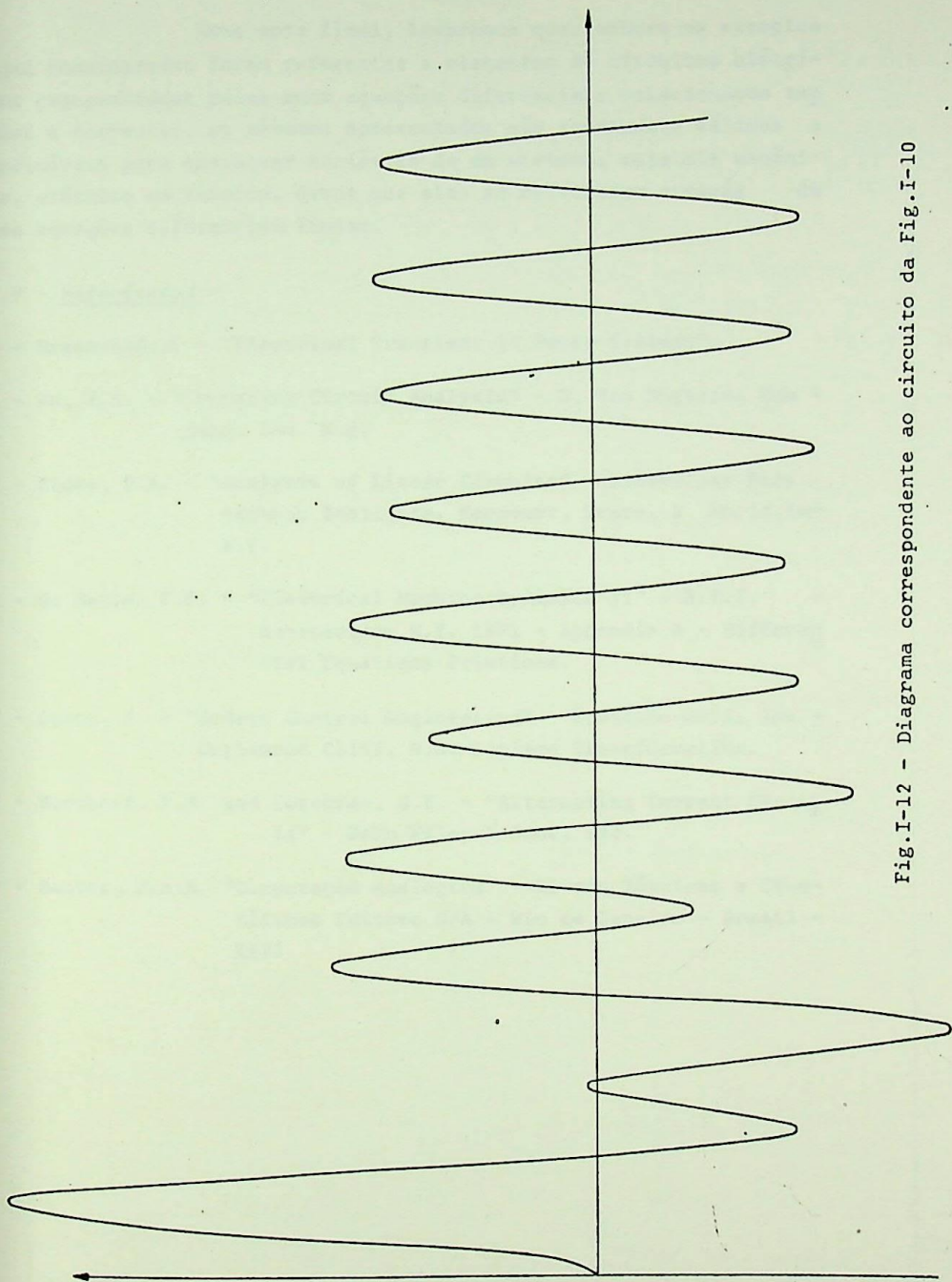


Fig. I-12 - Diagrama correspondente ao circuito da Fig. I-10

Como nota final, lembramos que, embora os exemplos aqui considerados foram referentes a elementos de circuitos elétricos representados pelas suas equações diferenciais relacionando tensões e correntes, os métodos apresentados são igualmente válidos e aplicáveis para quaisquer variáveis de um sistema, seja ele mecânico, elétrico ou térmico, desde que elas se relacionem através de uma equações diferencial linear.

1.6 - Referências -

- 1 - Greenwood, A - "Electrical Transient in Power Systems".
- 2 - Ku, Y.H. - "Transient Circuit Analysis" - D. Van Nostrand Company, Inc. N.J.
- 3 - Close, C.M. - "Analysis of Linear Circuits" - Rensselaer Polytechnic Institute. Harcourt, Brace, S World, Inc N.Y.
- 4 - de Mello, F.P. - "Electrical Machine Dynamics II" - P.T.I. - Schenectady N.Y. 1971 - Appendix A - Differential Equations Solutions.
- 5 - Ogata, K. - "Modern Control Engineering" - Prentice-Hall, Inc. - Englewood Cliff, N.J. Laplace Transformation.
- 6 - Kerchner, R.M. and Corcoran, G.F. - "Alternating Current Circuits" - John Wiley & Sons, Inc.
- 7 - Santos, J.A.R. "Computação Analógica" - Livros Técnicos e Científicos Editora S/A - Rio de Janeiro - Brasil - 1973

CAPÍTULO II

A MÁQUINA SÍNCRONA

II.1 - Generalidades -

Este capítulo foi reservado a análise dos fundamentos básicos de operação e de comportamento das *Máquinas Síncronas* em *Regime Permanente* e em *Regime Transitório*.

Queremos todavia, salientar que o objetivo deste trabalho, é proceder a análise do comportamento transitório das *Máquinas Assíncronas*, o que justifica o condensamento dos tópicos contidos neste capítulo, apresentados apenas para efeito de referências futuras e de comparações entre as grandezas comuns às duas máquinas.

Nestes termos, faremos uma análise das equações de tensão, corrente, fluxo, potência e torque ou máquina síncrona nos dois regimes, e apoiados nelas, mostraremos os diagramas vetoriais e circuitos equivalentes representativos da mesma.

II.2 - A Máquina Síncrona Trifásica -

Uma vez que as máquinas síncronas sendo atualmente construídas são projetadas para operação trifásica, nossas considerações serão portanto, referidas exclusivamente a elas.

Para facilitar o nosso desenvolvimento, consideremos a máquina síncrona representada esquematicamente pela fig. II-1 abaixo:

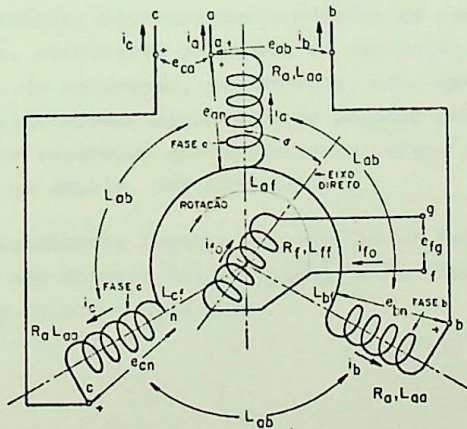


Fig. II-1 - A máquina Síncrona Trifásica.

Eletricamente, ela é constituída de quatro enrolamentos, sendo três deles, a , b , c estacionários, iguais entre si, simetricamente distribuidos, tendo seus eixos defasados de 120° um do outro, e que constitui o *Estator* da máquina, enquanto que o quarto enrolamento é rotativo em relação aos três anteriores, e constitui o enrolamento de campo, normalmente montado sobre o *Rotor* da máquina e representado por f_d .

Os três enrolamentos estacionarios a , b , c , constituem as fases da máquina, e apresentam resistências R_a e auto-indutâncias L_{aa} , além de possuírem ainda uma indutância mútua com o campo L_{afd} , a qual depende da posição relativa dos enrolamentos, com relação a bobina de campo.

Teremos também a auto-indutância L_{ff} do enrolamento de campo, além das indutâncias mútuas L_{ab} , L_{bc} e L_{ca} , iguais entre si, existente entre dois quaisquer enrolamentos adjacentes das fases do estator.

Serão considerados ainda as indutâncias mútuas L_{akd} e L_{akq} entre o enrolamento de fase e os enrolamentos amortecedores de eixo direto e eixo em quadratura.

A máquina síncrona costuma ser analisada, tanto em regime permanente como em transitório, através de seus circuitos equivalentes e diagramas vetoriais. Nestes, as indutâncias normalmente são substituídas pelas reatâncias correspondentes, definidas para cada regime especial de operação da máquina.

A análise rigorosa das condições de operação de uma máquina síncrona, envolveria problemas de excitação, de saturação transitória, de saturação, de controle, etc, que fogem ao nosso objetivo; limitaremos apenas a fazer algumas considerações sobre o efeito de saturação que normalmente surgem nas máquinas e desprezaremos os demais. Ver apêndice C.

Inicialmente façamos uma análise em Regime Permanente da máquinas com rotores cilíndricos de polos lisos e de pois nas com rotores de polos salientes.

II.3 - A Máquina Síncrona em Regime Permanente -

a) Máquinas Síncronas de Polos Lisos

Em regime permanente, a máquina síncrona de polos lisos pode ser representada pela fig. II-2 abaixo, lembrando que esses circuitos equivalentes são referidos a uma fase apenas da máquina.

Vetorialmente sabemos que :

$$\vec{E}_T = \vec{E}_I - \left[R_a + j\omega(L_{aa} + L_{ab}) \right] \vec{I}_a \quad \text{Eq. II-1}$$

quando os efeitos de saturação são desprezados.

A expressão $\omega(L_{aa} + L_{ab})$ tem a dimensão de uma reatância, e é definida como a reatância síncrona da máquina, X_s . Então :

$$X_s = \omega(L_{aa} + L_{ab}) \quad \text{Eq. II-2}$$

e por substituição teremos

$$\vec{E}_T = \vec{E}_I - (R_a + jX_s) \vec{I}_a \quad \text{Eq. II-3}$$

o que nos permite construir o circuito equivalente .

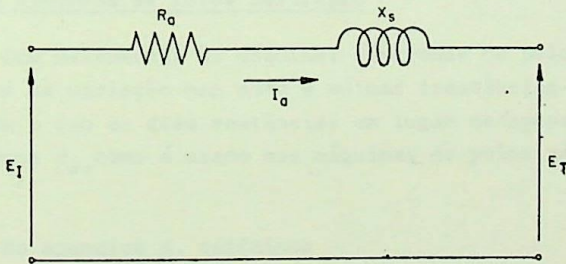


Fig.II-2 - Circuito equivalente de um gerador síncrono, rotor liso, com Impedância Síncrona constante e E_f . Saturação desprezível.

Esta representação nos permite ainda construir o diagrama vetorial da fig.II-3 abaixo:

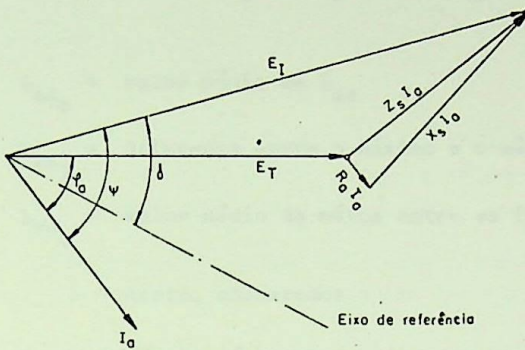


Fig. II-3 - Diagrama Vetorial para a M.S. da Fig. II-2.

Essas considerações apresentadas, são substancialmente válidas para as máquinas de rotores cilíndricos lisos ou de polos não-salientes, com os efeitos de saturação desprezados, e em Regime Permanente, operando como um gerador.

b) Máquina Síncrona de Polos Salientes

Com referência às máquinas síncronas de polos salientes, os efeitos da variação nas auto e mútuas indutâncias na armadura, requerem o uso de duas reatâncias em lugar de apenas uma, a reatância síncrona X_s , como é usado nas máquinas de polos não-salientes.

No apêndice A, definimos

$$L_d = (L_{aa_0} + L_{ma_0} + \frac{3}{2} L_{aa_2})$$

$$L_q = (L_{aa_0} + L_{ma_0} - \frac{3}{2} L_{aa_2})$$

Eq. II-4

e em correspondência a essas indutâncias, temos :

$$X_d = \omega L_d = \omega \cdot (L_{aa_0} + L_{ma_0} + \frac{3}{2} L_{aa_2})$$

Eq. II-5

$$X_q = \omega L_q = \omega \cdot (L_{aa_0} + L_{ma_0} - \frac{3}{2} L_{aa_2})$$

onde :

L_{aa_0} + valor médio de L_{aa}

L_{aa_2} + diferença entre o máximo e o médio valor de L_{aa}

L_{ma_0} + valor médio da mútua entre as fases a e b

Assim, chamaremos :

X_d + reatância síncrona de eixo direto

X_q + reatância síncrona de eixo em quadratura.

A corrente na armadura também é dividida em duas componentes :

- a componente de eixo em quadratura I_q em fase com a tensão induzida.
- e a componente de eixo direto I_d , atrasada da tensão induzida de 90° .

Conforme mostrado na fig. II-4

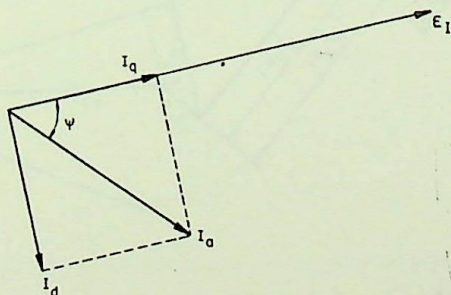


Fig. II-4 - A decomposição da corrente da armadura

Para a representação da máquina síncrona através de seus circuitos equivalentes, devemos retornar as equações deduzidas no Apêndice A dadas pelas eqs. II-8 e II-9 abaixo :

$$\phi_d = (L_l + L_{md})i_d + L_{md} \cdot I_{fd} + L_{md} \cdot i_{kd}$$

$$e_{fd} = r_{fd} \cdot i_{fd} + (L_{md} + L_{fd})p i_{fd} + L_{md} \cdot p(i_{kd} + i_d) \quad \text{Eq. II-8}$$

$$0 = L_{md} \cdot p i_{fd} + r_{kd} \cdot i_{kd} + (L_{md} + L_{kd})p \cdot i_{kd} + L_{md} \cdot p \cdot i_d$$

e ainda

$$\phi_q = (L_l + L_{mq}) \cdot i_q + L_{mq} \cdot i_{kq}$$

Eq. II-9

$$0 = r_{kq} \cdot i_{kq} + (L_{mq} + L_{kq})p i_{kq} + L_{mq} \cdot p i_q$$

Este conjunto de equações II-8 estará representado pelo circuito de eixo d e as equações II-9 pelo circuito de eixo q da fig. II-6 abaixo :

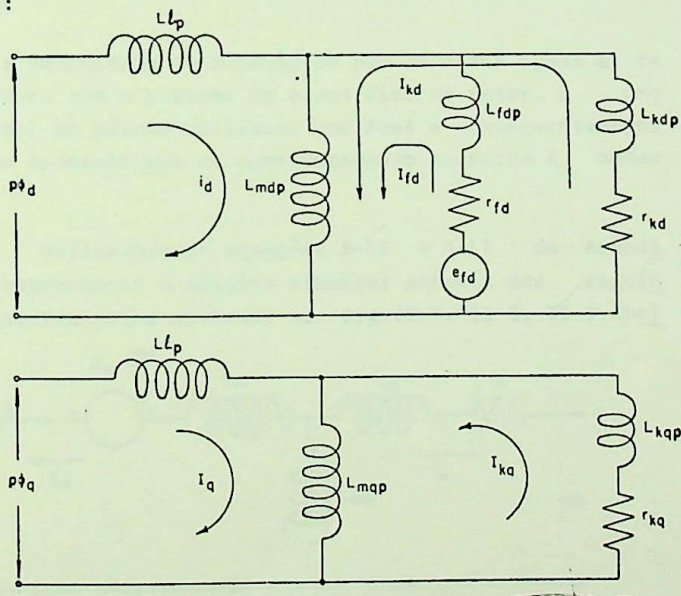


Fig. II-6 - Circuito equivalente de eixo d e q para uma máquina síncrona

As equações que expressam as tensões, correntes, fluxos, potência e conjugado das máquinas síncronas e suas expressões em termos das componentes d,q,0, estão desenvolvidas e apresentadas no Apêndice A deste trabalho.

Uma outra consideração, que cabe ainda sobre máquinas síncronas, é o método da análise que envolve uma mudança de variáveis, numa forma mais compacta, através da transformação das variáveis da máquina para um par comum de eixos de referência semelhante aos eixos direto e em quadratura analisados no Apêndice A.

Os fundamentos desta teoria bem como sua aplicação as máquinas síncronas, estão mostradas no Apêndice B. Neste apêndice deu-se um tratamento matricial ao problema, permitindo - assim que o processo seja também analisado por métodos computacionais.

Cumpre-nos observar que para

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta_r}{dt} \quad \text{Eq. II.10}$$

ou seja, para a velocidade de rotação do par de eixos igual a velocidade do rotor, com o sistema de eixos fixo no rotor, o processo acima recai no método utilizado por Park e conseqüentemente as equações são as mesmas que as apresentadas no Apêndice A dadas por A-17.

Utilizando as equações B-16 e B-17 do Apêndice B, podemos representar a máquina síncrona através dos seguintes circuitos equivalentes mostrado nas fig. II-7, II-8, II-9 abaixo :

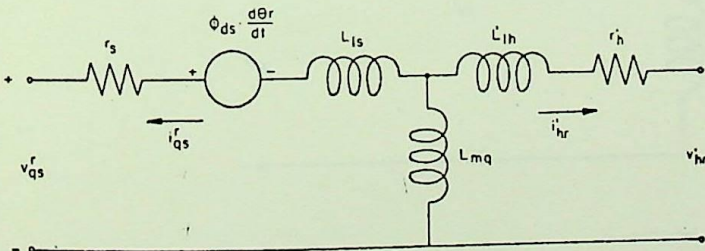


Fig. II-7 - Circuito de eixo q para uma M.S.

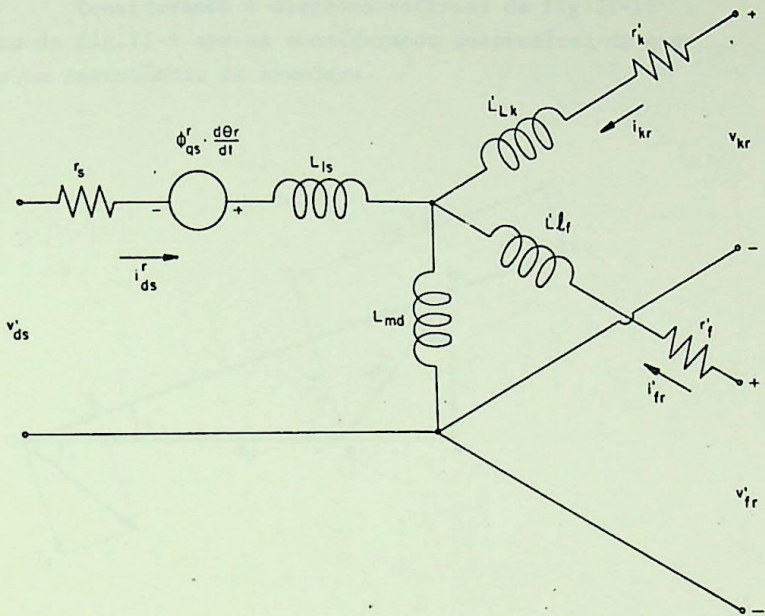


Fig. II-8 - Circuito de eixo d para uma M.S.

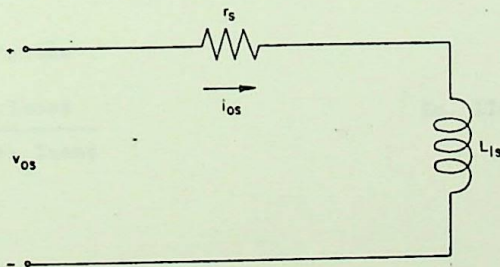


Fig. II-9 - Circuito de seqüência zero para uma M.S.

c) Característica Potência x Ângulo para uma máquina síncrona -

Consideramos o diagrama vetorial da fig.II-10 , que é o mesmo da fig.II-5 apenas considerando desprezível a queda de tensão na resistência da armadura.

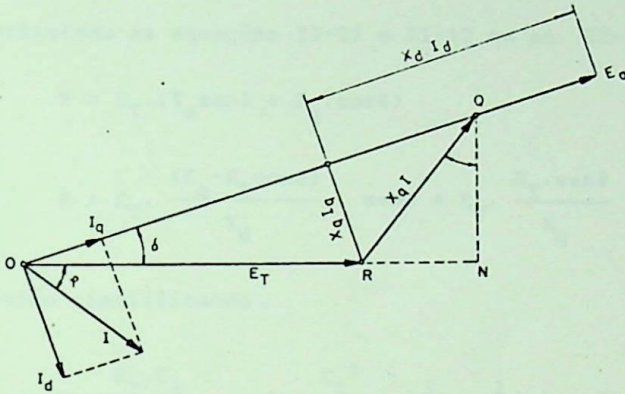


Fig. II-10 - Diagrama vetorial simplificado para a M.S

Temos então :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{QN}{ON} = \frac{x_q \cdot I \cos \phi}{E_T + x_q I \operatorname{sen} \phi} \quad \text{Eq. II-11}$$

e ainda.

$$I \cos \phi = I_d \cdot \operatorname{sen} \delta + I_q \cdot \cos \delta \quad \text{Eq. II.12}$$

$$I \operatorname{sen} \phi = I_d \cdot \cos \delta - I_q \cdot \operatorname{sen} \delta$$

$$E_q - E_T \cos \delta = I_d \cdot X_d \quad \text{Eq. II-13}$$

$$E_T \sin \delta = I_q \cdot X_q$$

A potência de um gerador é dada em cada fase por

$$P = E_T \cdot I \cdot \cos \phi \quad \text{Eq. II-14}$$

Substituindo as equações II-12 e II-13 na eq. II-14, teremos :

$$P = E_T \cdot (I_d \sin \delta + I_q \cdot \cos \delta)$$

$$P = E_T \cdot \frac{(E_q - E_T \cos \delta)}{X_d} \cdot \sin \delta + E_T \cdot \frac{E_T \cdot \sin \delta}{X_q} \cdot \cos \delta$$

ou então simplificando ,

$$P = \frac{E_T \cdot E_q}{X_d} \cdot \sin \delta + \frac{E_T^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta \quad \text{Eq. II-15}$$

Esta equação II-15 é aplicável tanto para geradores como para motores, dependendo se está escrito em termos do ângulo de geração ou do ângulo de carga. Graficamente ela está representada pela fig. II-11 a seguir :

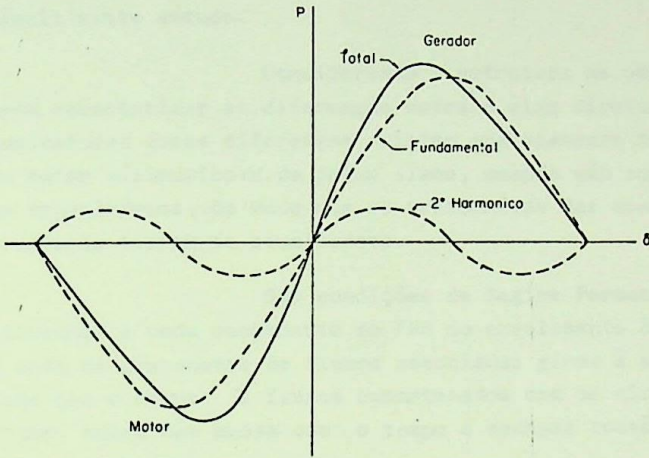


Fig. II-11 - Características Potência x Angulo δ para uma máquina síncrona de polos salientes em regime permanente.

Observemos ainda que para as máquinas síncronas com rotores cilíndricos lisos, o segundo termo da equação II-15 desaparece, e o gráfico da fig.II-11 toma a forma de uma senoide normal.

II.4 - Transitórios em Máquinas Síncronas -

a) Fundamentos Básicos

Para melhor entendermos a complexidade dos transitórios em Máquinas Síncronas, consideremos os diagramas esquemáticos das figuras II-12 e II-13, abaixo, onde os circuitos de amortecimento do rotor estão incluídos dada a sua importância neste estudo.

Considerando a estrutura de polos salientes para caracterizar as diferenças entre o eixo direto e o eixo em quadratura; essas diferenças existem analogamente nas máquinas de rotor cilíndrico ou de polos lisos, quando são considerados, os transitórios, de modo que os tratamentos das duas classes estruturais tornam-se semelhantes.

Sob condições de Regime Permanente, e equilibradas, a onda componente de FMM do enrolamento do estator e a onda de componente de fluxos associadas giram à mesma velocidade que o rotor. Os fluxos concatenados com os circuitos do rotor, então não mudam com o tempo e nenhuma tensão é induzida nestes circuitos.

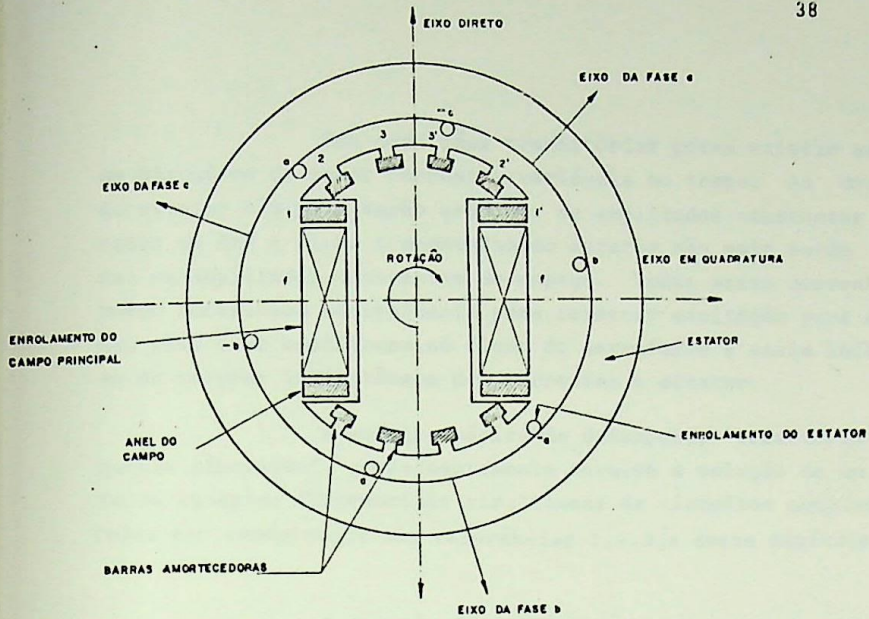


Fig. II-12 - Diagrama esquemático para uma máquina Síncrona.

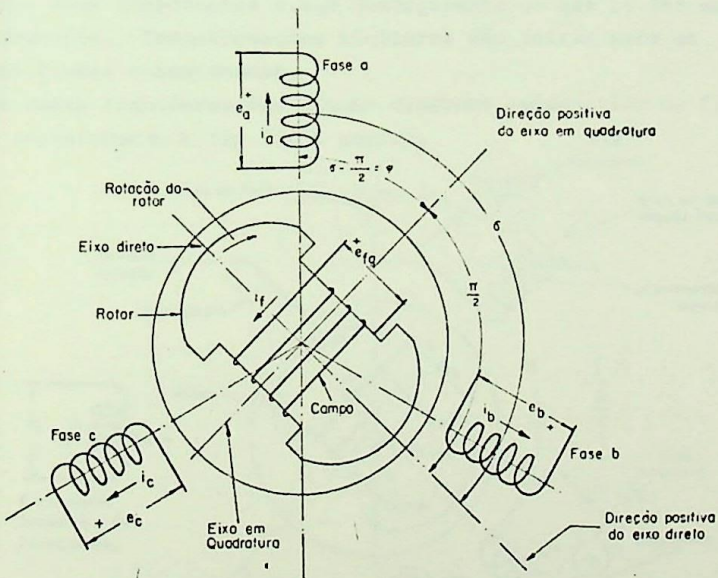


Fig. II-13 - Diagrama esquemático para uma máquina Síncrona.

Sob condições transitórias podem existir em todos os circuitos do rotor correntes variáveis no tempo. As correntes do estator não mais serão senóides de amplitudes constantes e as ondas de FMM e fluxo componentes do estator não mais serão senóides de amplitudes constantes no espaço. Todas essas correntes do rotor contribuem naturalmente para fornecer excitação para a máquina, pois elas contribuem ao fluxo do entreferro e assim influenciam os valores instantâneos das correntes do estator.

A análise básica de desempenho "transitório de máquinas síncronas", conseqüentemente envolve a solução de um conjunto de equações diferenciais simultâneas de circuitos acoplados, que podem ser encontradas nas referências 1,2,3,4 deste capítulo

A solução dessas equações mesmo com apenas um circuito amortecedor em cada eixo, é uma tarefa complexa. A solução é muito facilitada pela transformação linear de variáveis na qual as três correntes de fase do estator i_a, i_b, i_c são substituídas pelas suas componentes $d, q, 0$ analogamente ao que se fez em Regime-Permanente. Transformações similares são feitas para as tensões e os fluxos concatenados.

Com essas transformações $d, q, 0$, o diagrama esquemático da fig.II-13 se transforma na fig.II-14 abaixo.

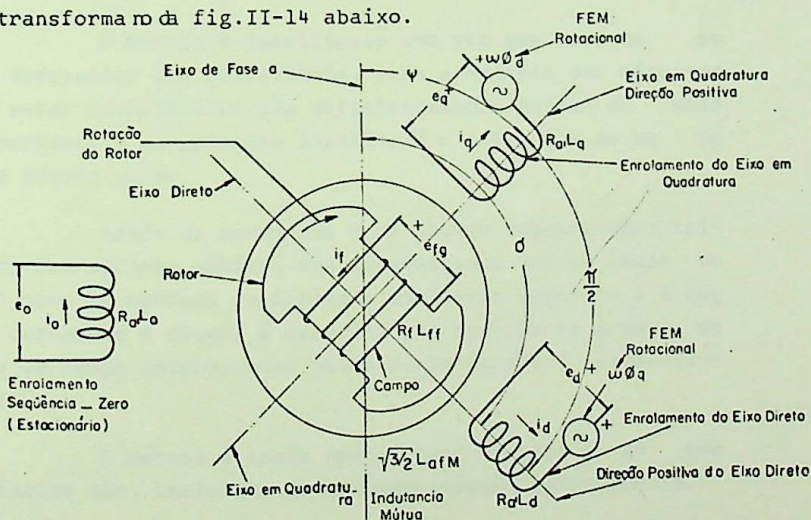


Fig. II-14 - Representação de uma máquina síncrona pelos enrolamentos de eixos direito em quadratura e de sequência zero.

Um dos detalhes importantes para interpretar os resultados de análises de transitórios é o tratamento das resistências, de circuitos.

Desprezar completamente as resistências, simplifica consideravelmente o problema.

Então na ausência de capacitância os fluxos concatenados totais com qualquer circuito fechado no rotor, não podem variar quando ocorre uma perturbação mas precisam permanecer constantes aos valores iniciais. Esta constância é justificada pelo fato de que se os fluxos concatenados com um tal circuito fossem, uma tensão induzida apareceria necessariamente no circuito, violando a 2ª lei de Kirchhoff.

Qualquer tendência para os fluxos concatenados, provocada por um rápido aumento na corrente do estator em decorrência de um curto-circuito por exemplo é portanto contrabalançada por uma corrente induzida de valor apropriado, para manter as constâncias dos fluxos concatenados.

O cálculo das correntes então limita-se em determinar os diversos fluxos concatenados antes da perturbação e resolver em seguida as equações dos circuitos acoplados que estabelecem esta constância após a perturbação.

O método é justificado uma vez que, embora os circuitos apresentem uma resistência, para a maioria das máquinas síncronas estas resistências são suficientemente baixas de modo que o comportamento no primeiro instante é o mesmo que se as resistências fossem nulas.

Assim as correntes e os fluxos concatenados iniciais, após uma mudança súbita, são determinadas por um grupo de reatâncias como se nenhuma resistência estivesse presente e a que da destas correntes e fluxos é descrita por meio de um grupo de constantes de tempo determinadas pelas resistências e reatâncias do circuito.

O método é assim aproximado, no sentido de que as resistências são, incluídas na solução somente indiretamente.

Considere-se por exemplo um gerador síncrono operando na velocidade síncrona com uma tensão contínua constante nos anéis coletores. Além do enrolamento de campo, consideremos ainda barras amortecedoras no rotor da máquina.

Consideremos a máquina operando inicialmente a vazio e apliquemos um curto-circuito subitamente aos seus terminais.

A onda de corrente resultante no estator em curto-circuito é a mostrada na fig.II-15 abaixo, onde a componente D C foi desprezada resultando portanto uma corrente simétrica de curto-circuito no estator.

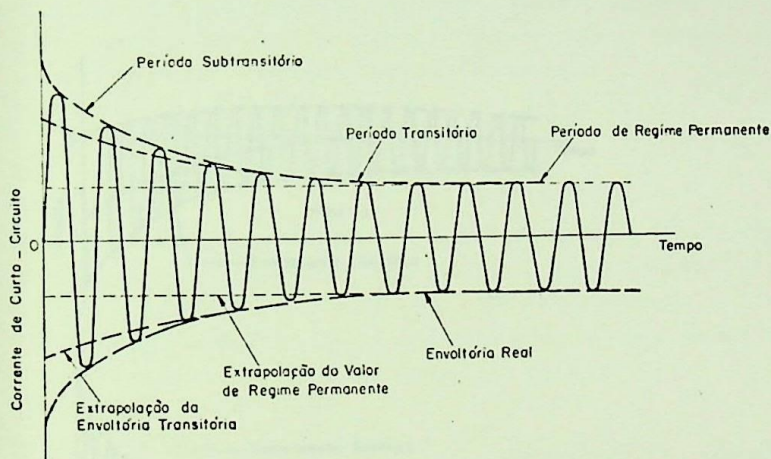


Fig. II-15 - Corrente simétrica em curto-circuito na armadura de uma máquina síncrona

A onda de corrente da fig.II-15 cuja envoltória está representada na fig.II-16, pode ser dividida em três períodos ou regime de tempo:

O regime subtransitário, o período transitório, e o período de regime permanente.

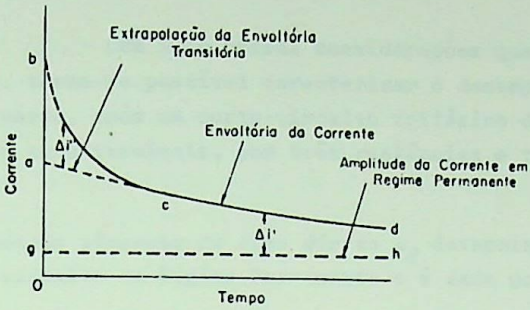


Fig.II-16 - Envoltria da corrente simétrica de curto circuito de uma máquina síncrona.

As ondas de correntes de curto-circuito considerando também as componentes D.C. estão mostradas na fig.II-17 abaixo:

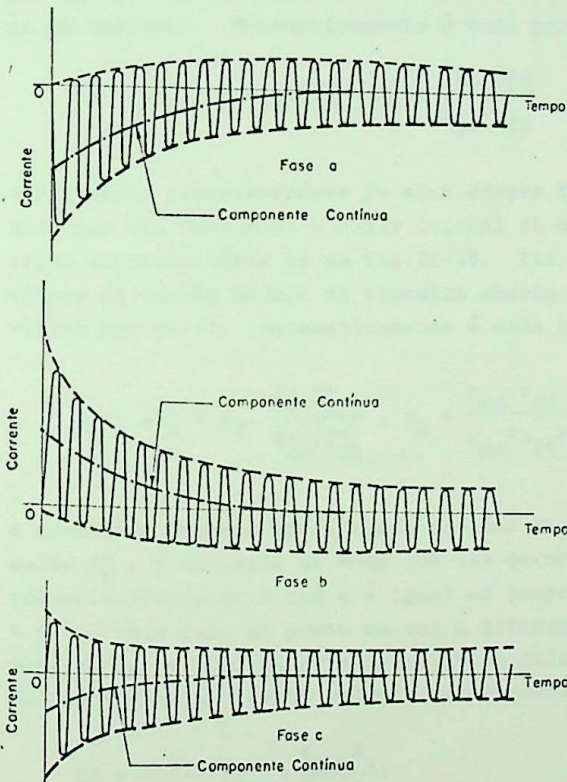


Fig.II-17 - Correntes de curto-circuito nas 3φ de um MS

Com base nessas considerações que acabamos de apresentar, torna-se possível caracterizar o desempenho de uma máquina em vazio, após um curto-circuito trifásico diretamente aplicado em seus terminais, por três reatâncias e três constantes de tempo :

a) A reatância síncrona de eixo direto x_d determina a corrente de curto-circuito em Regime Permanente e é dada por:

$$x_d = x_l + x_{md} \quad \text{Eq. II-16}$$

b) A reatância transitória de eixo direto x'_d é definido de modo que ela determina o valor inicial $0a$ da envoltória simétrica transitória acd mostrados na fig.II-16. Ela é igual ao valor eficaz da tensão em circuito aberto antes do curto, dividida por $0a/\sqrt{2}$, uma vez que acd é a envoltória dos valores de pico da corrente. Matematicamente é dada por :

$$x'_d = \omega L'_d = x_d \cdot T'_d / T''_{do} = x_l + \frac{x_{md} \cdot x_{fd}}{x_{md} + x_{fd}} \quad \text{Eq. II-17}$$

c) A reatância subtransitória de eixo direto x''_d , é definida de modo que ela determine o valor inicial $0b$ da envoltória simétrica subtransitória bc da fig.II-16. Ela é igual ao valor eficaz da tensão de fase de circuito aberto antes do curto, dividida por $0b/\sqrt{2}$. Matematicamente é dada por :

$$x''_d = \omega L''_d = x_d \cdot \frac{T'_d \cdot T''_d}{T'_{do} \cdot T''_{do}} = x_l + \frac{x_{md} \cdot x_{fd} \cdot x_{kd}}{x_{md} + x_{fd} + x_{kd}} \quad \text{Eq. II-18}$$

d) A constante de tempo transitória de eixo direto em curto-circuito T'_d , é definida de modo que ela determina a queda da envoltória transitória acd e é igual ao tempo necessário para a envoltória cair ao ponto em que a diferença entre ela e a envoltória de R.P. seja de 36,8% da diferença inicial ga . Matematicamente podemos expressá-la por :

$$T'_d = \frac{1}{\omega \cdot r_{fd}} \left(X_{fd} + \frac{X_{md} \cdot X_a}{X_{md} + X_a} \right) \quad \text{Eq. II-19}$$

e) A constante de tempo subtransitória de eixo direto em curto-circuito T_d'' , é definida de modo que ela determine a queda da envoltória subtransitória bc e é igual ao tempo necessário para a envoltória cair ao ponto onde a diferença entre ela e a envoltória transitória acd seja de 36,8% da diferença inicial-ab. Matematicamente podemos expressá-la por :

$$T_d'' = \frac{1}{\omega \cdot r_{kd}} \left(x_{kd} + \frac{x_{md} \cdot x_a \cdot x_{fd}}{x_{md} + x_a + x_{fd}} \right) \quad \text{Eq. II-20}$$

f) A constante de tempo da armadura T_a , é definida de modo que ela determina a queda da componente contínua, e é igual ao tempo necessário para essa componente cair a 36,8% de seu valor inicial. Matematicamente é expressa por :

$$T_a = \frac{L_2}{r_a} = \frac{x_2}{\omega r_a} \quad \text{Eq. II-21}$$

onde

$$x_2 = \frac{x_d'' + x_q''}{2}$$

é a Reatância de sequência negativa.

Completando o quadro de definições, acrescentamos ainda,

g) A constante de tempo transitória de eixo direto em circuito aberto, T_{do}' - Esta constante de tempo controla a mudança da corrente do campo, em resposta a uma repentina variação da FEM no circuito do campo e matematicamente ela tem uma expressão - similar à do circuito R-L,

$$T_{do}' = \frac{L_{ff}}{R_f} \quad \text{Eq. II-23}$$

h) A constante de tempo subtransitória de eixo direto em circuito aberto T_{do}'' , - Esta constante é relativa ao controle do circuito amortecedor e é dada por :

$$T''_{do} = \frac{1}{\omega \cdot r_{kd}} \cdot \left(x_{kd} + \frac{x_{md} \cdot x_{fd}}{x_{md} + x_{fd}} \right) \quad \text{Eq. II-24}$$

Estas reatâncias são constantes da máquina apropriadas para o uso não somente em curto-circuito, como também para qualquer aplicação envolvendo uma subita mudança na corrente de eixo direto.

Nas redes puramente reativas, em curto-circuito trifásico, somente eventos de eixo direto são considerados.

Quando a máquina tem uma carga de potência ativa antes da perturbação, as quantidades do eixo em quadratura estão também envolvidas pois são de se esperar variações na corrente i_q do eixo em quadratura. Também os fluxos concatenados com os circuitos do rotor no eixo q devem permanecer constante.

Quando estes aspectos são incluídos, intervem a reatância transitória X'_q , a reatância subtransitória X''_q e as constantes de tempo T'_q e T''_q , cujas definições são análogas as de eixo direto, apresentadas matematicamente no Apendice B.

Quando não existe circuitos efetivos no tor $X_q = X'_q = X''_q$.

Se o circuito de eixo q é composto de barras amortecedoras em máquinas de polos salientes, como o da fig. II-18, então :

$$X'_q = X_q \quad \text{e} \quad X''_q < X'_q$$

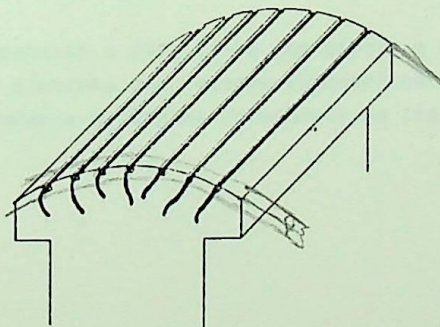


Fig. II-18 - Enrolamento amortecedor de uma máquina Síncrona de polos Salientes

II-5 - Referências -

- 1 - The Principles of Synchronous Machines-Lewis, W.A
Illinois Institute of Technology - Chicago - Illinois.
- 2 - Electrical Machines Dynamics - I - de Mello, F.P.
Power Technologies Inc. - Schenectady - N.Y.
- 3 - The General Theory of Electrical Machines - Adkin, B.
Editorial Chapman & Hall - Londres.
- 4 - Power System Stability
Synchronous Machines
Kimbark, E.W.
Dover Publications, Inc. N.Y.
- 5 - Modern Concepts of Power System Dynamics
IEEE Tutorial Course
- 6 - Two-Reaction Theory of Synchronous Machines - Generalized
Method of Analysis - Part I
R.H.Park - AIEE Transactions Vol. 48 - 1929 pp 716-730
- 7 - Introduction to Synchronous Machine Theory
Krause, P.C. - University of Pardue Course Notes Lafayette -
Indiana - Ind. 1969
- 8 - Simulation of Symmetrical Induction Machinery
Krause, P.C. and Thomas, C.H.
AIEE, Pas-84 pp 1038/1053 - 1965
- 9 - Synchronous Machines - Concordia, C. - John Wiley & Sons Inc.
N.Y.

CAPÍTULO III

A MÁQUINA DE INDUÇÃO TRIFÁSICA

III.1 - Generalidades -

A máquina de indução trifásica é basicamente constituída de um enrolamento primário trifásico, ligado a uma fonte de alimentação estabelecendo uma distribuição espacial de campo, que gira com a mesma frequência angular da rede de alimentação. Este enrolamento primário, constitui o *Estator* do motor de indução.

O campo criado no estator, concatena-se através do entreferro com um enrolamento secundário, normalmente em curto-circuito denominado *Rotor*, que pode ser do tipo "Enrolado" ou de "Aneis" ou então do tipo "Gaiola de Esquilo", conforme nos mostra as fig. III-1 e III-2 abaixo.

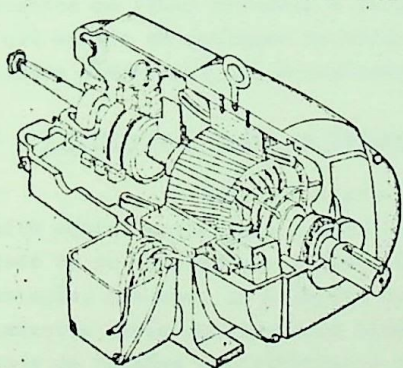


Fig. III-1-

Motor de Indução com Rotor
tipo Aneis

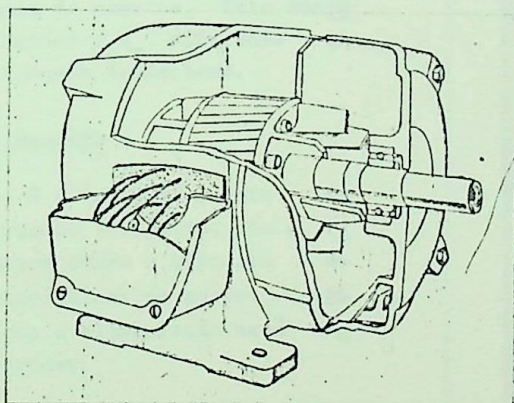


Fig. III-2 -

Motor de indução com rotor
tipo Gaiola de Esquilo

No rotor são induzidas FEM e correntes, que na interação com o fluxo, dá origem a um conjugado, que, se livre para girar, coloca o rotor em movimento.

A medida que aumenta a velocidade do rotor, diminui a frequência das correntes do secundário, em função de uma grandeza denominada "escorregamento" e definida por :

$$S_g = \frac{n_{\text{campo}} - n_{\text{rotor}}}{n_{\text{campo}}} \times 100 \quad \text{Eq. III-1}$$

Se nenhum conjugado fosse aplicado ao rotor, sua rotação aumentaria até a velocidade síncrona, onde o enrolamento secundário permaneceria estacionário em relação ao fluxo produzido pelo primário e sua tensão induzida seria nula, e portanto, a corrente e o fluxo secundário seriam iguais a zero.

Em operação normal, o conjugado necessário para vencer o conjugado resistente aplicado ao eixo do motor, inclusive conjugado de atrito e ventilação e requerido para manter constante a velocidade do motor, provém das intensidades de campo magnético no interior da máquina, bem como, pelo ângulo de conjugado entre as componentes de fluxo primário e secundário da máquina. Este conjugado que existe em qualquer velocidade mecânica n_r , diferente da velocidade síncrona n_c , é denominado *Conjugado Assíncrono*.

III.2 - O Motor de Indução em Regime Permanente -

O objetivo deste item, é o desenvolvimento de circuitos equivalentes para o motor de indução trifásico, com a finalidade de se analisar os efeitos do motor sobre o circuito de alimentação, bem como, as próprias características do motor. Os enrolamentos serão considerados simétricos e a alimentação será considerada de tensões equilibradas e simétricas.

Analisemos separadamente o primário e secundário uma vez que as frequências neles induzidas são diferentes.



a) Estador :-

A onda de fluxo no entreferro, girando síncronicamente, gera FCEM simétricas nas fases do estator. A tensão terminal do estator difere da FCEM pela queda de tensão na resistência e na reatância de dispersão do estator ou seja

$$\vec{V}_T = -\vec{E}_1 + (r_1 + jx_1) \vec{I}_1 \quad \text{Eq. III-2}$$

representada pelo circuito equivalente da Fig. III-3.

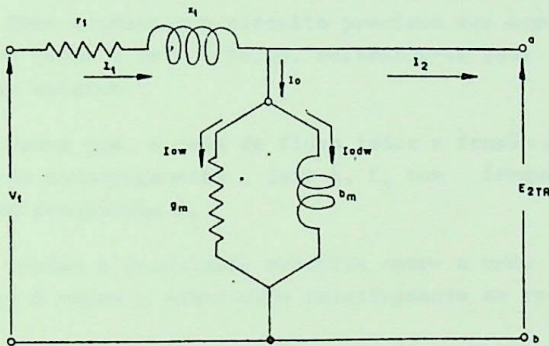


Fig. III-3 - Circuito equivalente para o estator de um motor de indução trifásico.

A corrente do estator pode ser decomposta em duas componentes, uma de carga e outra de excitação. A componente de carga I_2 produz uma FMM que contrabalança exatamente a FMM do rotor.

A componente de excitação I_o , destina-se a criação do fluxo do entreferro, sendo também decomposta em duas parcelas:

- a) I_{ow} que tem a finalidade de suprir as perdas no ferro, que ocorrem pelos efeitos de Histerese e pelas corrente de Foucault, sendo portanto em fase com E_1 .
- b) I_{odw} , componente de magnetização, responsável pela manutenção do fluxo principal da máquina.

No circuito equivalente, a corrente de excitação é considerada através de um ramo paralelo formado pela condutância de perdas no ferro, g_m , e pela susceptância de magnetização b_m , ligadas através de E_1 .

b) Rotor :-

Para completar o circuito precisam ser acrescentados os valores do rotor e isto é feito, referindo-se suas grandezas em relação ao estator.

Temos que, a onda de fluxo induz a tensão no rotor na frequência de escorregamento, isto é, E_2 com frequência sf_1 , e a FCEM E_1 na frequência f_1 .

Devido a velocidade relativa entre a onda de fluxo e o rotor ser S vezes a velocidade relativamente ao estator então temos :

$$E_2 = s.E_{2TR} \quad \text{Eq. III-3}$$

Para a corrente no rotor, podemos escrever :

$$I_2 = \frac{E_2}{r_2 + j.sx_2} = \frac{s E_{2TR}}{r_2 + j.sx_2} \quad \text{Eq. III-4}$$

donde :

$$\frac{E_{2TR}}{I_2} = \frac{r_2}{s} + jx_{2TR} \quad \text{Eq. III-5}$$

Esta condição representada pela Eq. III-5 é idêntica ao resultado de ligar uma impedância $Z_2 = \frac{r_2}{s} + jx_{2TR}$ nos terminais de E_{2TR} na fig. III-3 anterior, permitindo assim que se incorpore o efeito do rotor ao mencionado circuito equivalente.

O resultado final está mostrado na fig. III-4 onde o efeito da carga no eixo e a resistência do rotor apareceu representada por $\frac{r_2}{s}$, função do escorregamento e portanto da carga mecânica.

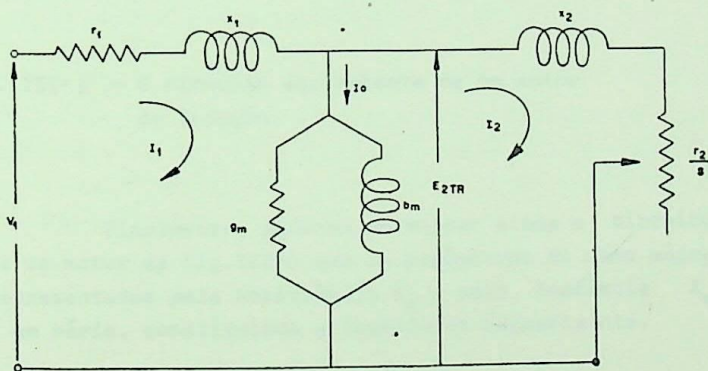


Fig. III-4 - Circuito equivalente de um motor de indução.

ou ainda, com a finalidade de destacar os aspectos de potências envolvidas, temos:

$$\frac{r_2}{s} = r_2 + r_2 \left(\frac{1-s}{s}\right)$$

Eq. III-6

o que nos permite construir a fig. III-5.

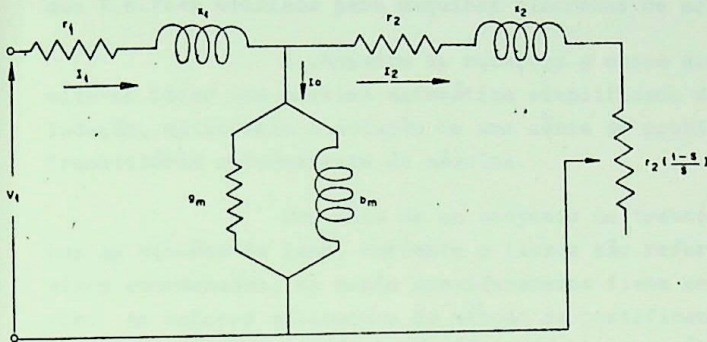


Fig. III-5 - O circuito equivalente de um motor de indução.

Finalmente, podemos encontrar ainda o circuito equivalente do motor da fig. III-5 com os parâmetros do ramo magnetizante, representados pela Resistência R_m e pela Reatância X_m conectados em série, constituindo a Impedância Magnetizante.

$$Z_m = R_m + jX_m$$

Eq. III-7

III.3 - Análise Teórica do Motor de Indução Trifásico -

a) As equações de Stanley-Kron -

A análise do motor de indução através do circuito equivalente mostrado no item III.2, fig.III- 5 , é inadequado para determinar os efeitos das variações de velocidades, devido a complexidade das equações diferenciais envolvidas.

Um método que permite uma análise com boa aproximação, consiste no uso de um sistema de eixos fijos, semelhante ao que R.H.Park utilizou para máquinas síncronas de polos salientes.

O conjunto de equações a serem apresentadas, permite-se fazer uma análise matemática simplificada das máquinas de indução, aplicáveis à solução de uma série de problemas em Regime - Transistório e Permanente da máquina.

Por meio de um conjunto de transformações lineares as tensões de fase, corrente e fluxos são referidos ao par de eixos coordenados, os quais consideraremos fixos em relação ao estator. As maiores aplicações do método se justificam para problemas onde a velocidade do rotor não é constante. A análise é apresentada considerando as seguintes condições :

- a) Enrolamentos do estator e do rotor equilibrados.
- b) Os coeficientes das indutâncias mútuas entre os enrolamentos do estator e do rotor são funções cossenoidais do ângulo elétrico entre os dois eixos dos enrolamentos e as auto-indutâncias independem da posição do rotor.
- c) Serão desprezados os efeitos de saturação, histerese, e de correntes parasitas de Foucault.

Nessas condições podemos escrever que :

Para o Rotor :-

$$\ell_1 = p\phi_1 + ri_1$$

$$\ell_2 = p\phi_2 + ri_2$$

$$\ell_3 = p\phi_3 + ri_3$$

Eq. III-8

e para o Estator :-

$$l_a = p\phi_a + Ri_a$$

$$l_b = p\phi_b + Ri_b$$

$$l_c = p\phi_c + Ri_c$$

Eq. III-9

Mas o fluxo ϕ é uma função linear das correntes dos enrolamentos ,
então :

$$\phi_1 = l \cdot i_1 + M_R(i_2+i_3) + M \left[i_a \cos\theta + i_b \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

Eq. III-10

A fig.III-6 abaixo, nos mostra a posição das vari
as bobinas com as setas indicando a direção positiva da corrente ,
fluxo e tensão aplicada.

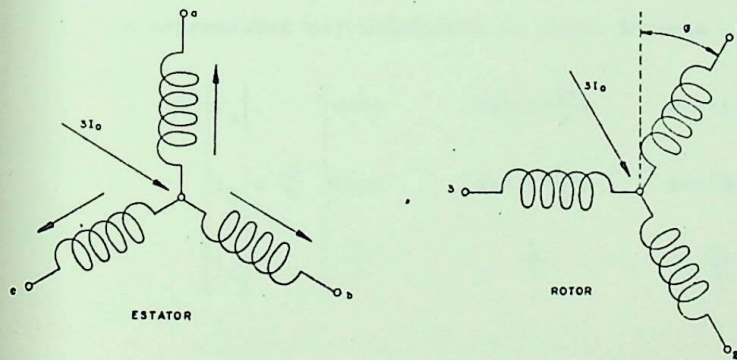


Fig. III-6 - Posição relativa dos eixos magnéticos dos enrolamentos do estator e do rotor.

A substituição desta eq. III-10 e suas similares nas equações III-8 e III-9, nos fornecem um conjunto de seis equações lineares em $i_1, i_2, i_3, i_a, i_b, i_c$ cuja demonstração não nos interessa aqui, mas que pode ser encontrada na referência III-a (Levine). Através de mudanças de eixos de referências, poderemos obter este conjunto de equações simplificada-mente dado por :

$$\begin{aligned} i_1 &= i_a \cdot \cos\theta + i_b \cdot \text{sen}\theta + i_o \\ i_2 &= i_a \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + i_b \cdot \text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + i_o \\ i_3 &= i_a \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_b \cdot \text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_o \end{aligned} \quad \text{Eq. III-11}$$

e

$$\begin{aligned} i_a &= I_a + I_o \\ i_b &= -\frac{1}{2} I_a + \frac{\sqrt{3}}{2} I_b + I_o \\ i_c &= -\frac{1}{2} I_a - \frac{\sqrt{3}}{2} I_b + I_o \end{aligned} \quad \text{Eq. III-12}$$

ou expressadas matricialmente na forma inversa :

$$\begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_o \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{sen}\theta & \text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

Eq. III-13

e :

$$\begin{pmatrix} I_{\alpha} \\ I_{\beta} \\ I_{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \quad \text{Eq. III-14}$$

Da mesma forma que fizemos para corrente, faremos para tensões, transformando $e_1, e_2, e_3, e_a, e_b, e_c$ em $e_{\alpha}, e_{\beta}, e_{\gamma}$, $E_{\alpha}, E_{\beta}, E_{\gamma}$ e para os fluxos $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_a, \phi_b, \phi_c$ em $\phi_{\alpha}, \phi_{\beta}, \phi_{\gamma}$, $\psi_{\alpha}, \psi_{\beta}, \psi_{\gamma}$. A transformação inversa é dada pela mesma matriz da eqs. III-13 e III-14 .

Assim por exemplo, as equações dos fluxos se riam dadas por :

$$\phi_{\alpha} = \frac{2}{3} \left| \phi_1 \cdot \cos \theta + \phi_2 \cdot \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \phi_3 \cdot \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right| \quad \text{Eq. III-15}$$

$$\phi_{\beta} = \frac{2}{3} \left| \phi_1 \cdot \sin \theta + \phi_2 \cdot \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \phi_3 \cdot \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right| \quad \text{Eq. III-16}$$

Derivando a eq. III-15 obtemos :

$$\begin{aligned} p\phi_{\alpha} &= \frac{2}{3} \left| p\phi_1 \cdot \cos \theta + p\phi_2 \cdot \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + p\phi_3 \cdot \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right| - \\ &- \frac{2}{3} \left| \phi_1 \cdot \sin \theta + \phi_2 \cdot \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \phi_3 \cdot \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right| p\theta \end{aligned} \quad \text{Eq. III-17}$$

Substituindo as eq. III-8 e III-16 em III-17 , e simplificando teremos :

$$e_{\alpha} = p\phi_{\alpha} + ri_{\alpha} + \phi_{\beta} \cdot |p\theta| \quad \text{Eq. III-18}$$

e de maneira análoga, tiramos :

$$e_{\beta} = p\phi_{\beta} + ri_{\beta} - \phi_{\alpha} \cdot |p\theta| \quad \text{Eq. III-19}$$

e também

$$e_o = p\phi_o + ri_o \quad \text{Eq. III-20}$$

Seguindo este mesmo processo, as equações do estator correspondentes ao do rotor acima mostradas, serão :

$$E_{\alpha} = p\psi_{\alpha} + RI_{\alpha}$$

$$E_{\beta} = p\psi_{\beta} + RI_{\beta} \quad \text{Eq. III-21}$$

$$E_o = p\psi_o + RI_o$$

Então, nessas novas condições podemos escrever:

$$\phi_{\alpha} = \ell_o i_{\alpha} + M_o I_{\alpha}$$

$$\phi_{\beta} = \ell_o i_{\beta} + M_o I_{\beta}$$

$$\phi_o = (\ell + 2M_R) \cdot i_o \quad \text{Eq. III-22}$$

$$\psi_{\alpha} = L_o I_{\alpha} + M_o i_{\alpha}$$

$$\psi_o = (L + 2M_S) \cdot I_o$$

$$\psi_{\beta} = L_o I_{\beta} + M_o i_{\beta}$$

O conjunto de eq.III-22 substituindo nas equações III-18 a III-21

$$\begin{pmatrix} E_\alpha \\ E_\beta \\ e_\alpha \\ \dot{e}_\beta \\ E_o \\ e_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R+L_o p) & 0 & M_o p & 0 \\ 0 & (R+L_o p) & 0 & M_o p \\ M_o p & M_o p \theta & (r+l_o p) & l_o p \theta \\ -M_o p \theta & M_o p & -l_o p \theta & (r+l_o p) \\ & & R+(L+2M_s) p & \\ & & r+(l+2M_R) p & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_\alpha \\ I_\beta \\ i_\alpha \\ i_\beta \\ I_o \\ i_o \end{pmatrix}$$

Eq. III-23.

A eq. III-23 especifica completamente as relações entre correntes, tensões e velocidade do rotor.

Essas são as equações que resultariam se as tensões E_α e E_β fossem aplicadas aos terminais de dois enrolamentos no estator, com resistência R e auto-indutância L_o , dispostos em quadratura entre si.

A correspondente tensão no rotor e_α e e_β seriam aplicadas aos terminais de duas bobinas com resistência r e auto-indutância l_o orientadas com seus eixos coincidentes com os eixos α e β respectivamente.

As correntes I_o e i_o são as que fluem nos neutros do estator e do rotor.

b) A equação do Torque -

O valor do torque magnético num acoplamento entre bobinas que transportam correntes, é dado por :

$$T = \frac{1}{2} I_1^2 \cdot \frac{dL_1}{d\theta} + \frac{1}{2} I_2^2 \cdot \frac{dL_2}{d\theta} + I_1 I_2 \frac{dM}{d\theta} \quad \text{Eq. III-24}$$

Onde :

I_1 e I_2 são as correntes nas bobinas

L_1 e L_2 são as auto-indutâncias das bobinas

M é a indutância-mútua entre as bobinas

θ é o deslocamento angular relativo entre os eixos das bobinas.

Para um motor de indução de rotor enrolado, as auto indutâncias são constantes e teremos :

$$T = \int I_R I_S \frac{d}{d\theta} M_{Rs} \quad \text{Eq. III-25}$$

Então para um motor de indução trifásica, teremos :

$$\begin{aligned} T = & -(i_a i_1 + i_b i_2 + i_c i_3) M \sin \theta - \\ & (i_a i_2 + i_b i_3 + i_c i_1) M \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) - \\ & (i_a i_3 + i_b i_1 + i_c i_2) M \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \quad \text{Eq. III-26} \end{aligned}$$

que substituindo as eq. III-11 e III-12 nela, nos fornece.

$$T = -\frac{3}{2} I_\alpha M_o i_\beta + \frac{3}{2} I_\beta M_o i_\alpha \quad \text{Eq. III-27}$$

As equações III-23 e III-27 representam completamente o desempenho da máquina em termos de tensões aplicadas e torques. A eq. III-27 é análoga a eq. D-2 do Apêndice D.

c) Método das Referências Múltiplas de Eixos- Equações de Krause

Este método de análise é diferente do método das componentes simétricas e é uma generalização do caso apresentado no item a anterior. O método das referências múltiplas pode ser empregado para o cálculo do desempenho de uma máquina de indução com velocidade constante, usando a teoria dos circuitos DC.

O método pode ser aplicado para resolver qual-

quer problema que envolva máquina de indução simétrica e linear, que possam ser resolvidos por componentes simétricas, sem se referir a fasores e impedâncias complexas. Permite ainda que se analise rigorosamente os transistores elétricos a velocidades constantes, devido a tensões aplicadas de qualquer forma periódica.

b.1 - Equações das máquinas na referencia arbitrária de eixos -

Consideremos a fig.III-7 abaixo, para as considerações de nossos desenvolvimentos :

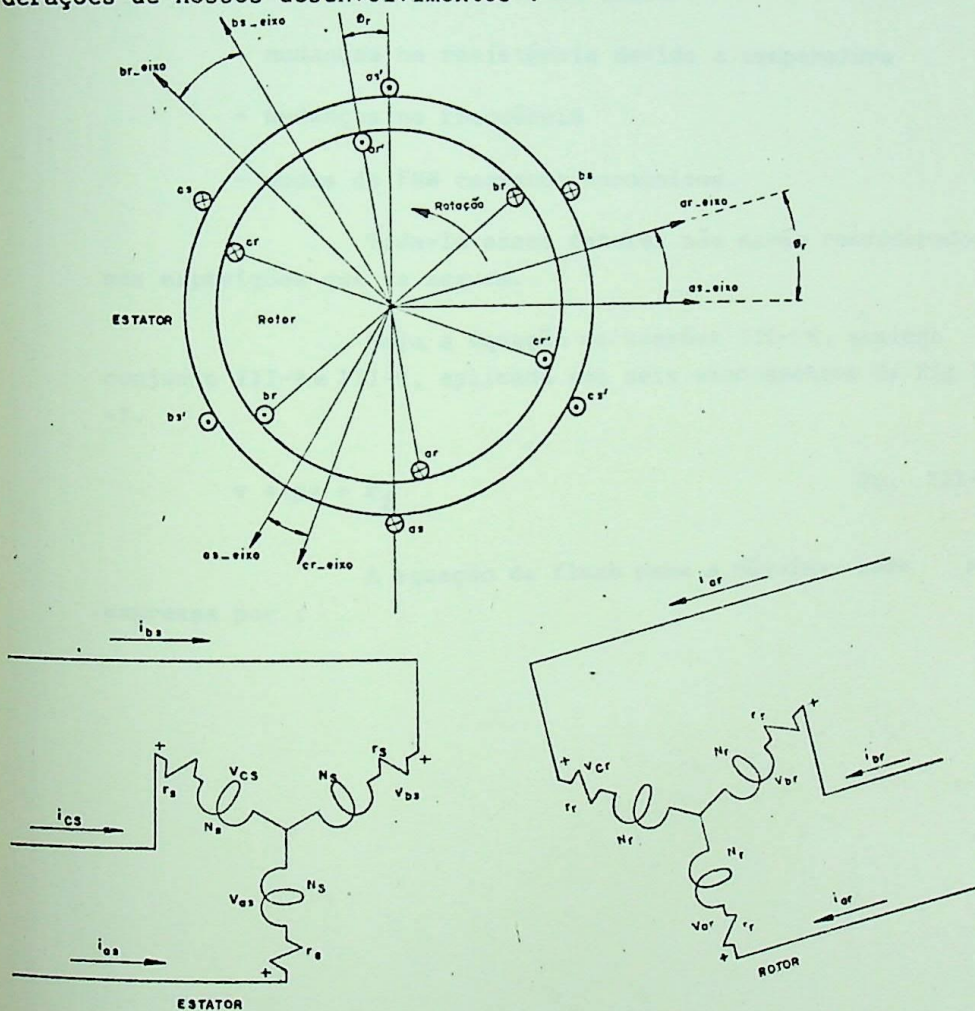


Fig.III-7 - Uma máquina de indução trifásica, com dois polos.

Os enrolamentos do estator da máquina são idênticos entre si, e distribuídos de tal forma que apenas uma onda de FMM rotativa seja estabelecida pelas correntes do estator.

Da mesma forma, no rotor apenas uma FMM será estabelecida.

Alguns fatores importantes que afetam o comportamento da máquina são :

- circuito magnético não linear
- mudanças na resistência devido a temperatura
- mudanças na frequência
- ondas de FMM contendo harmônicos.

Todavia esses fatores não serão considerados, nas exposições que se seguem.

Seja a equação de tensões III-28, análoga ao conjunto III-8 e III-9, aplicada aos seis enrolamentos da fig. III-7.

$$v = p\phi + r_i \quad \text{Eq. III-28}$$

A equação de fluxo para a máquina, pode ser expressa por :

$$\begin{pmatrix} \phi_{as} \\ \phi_{bs} \\ \phi_{cs} \\ \phi_{ar} \\ \phi_{br} \\ \phi_{cr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{ss} & 0 & 0 & L_{sr} \cos \theta_r & L_{sr} \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & L_{sr} \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ 0 & L_{ss} & 0 & L_{sr} \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & L_{sr} \cos \theta_r & L_{sr} \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ 0 & 0 & L_{ss} & L_{sr} \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & L_{sr} \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & L_{sr} \cos \theta_r \\ L_{sr} \cos \theta_r & L_{sr} \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & L_{sr} \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & L_{rr} & 0 & 0 \\ L_{sr} \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & L_{sr} \cos \theta_r & L_{sr} \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & 0 & L_{rr} & 0 \\ L_{sr} \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & L_{sr} \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & L_{sr} \cos \theta_r & 0 & 0 & L_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{pmatrix}$$

Eq. III-29

onde :

$$L_{ss} = L_s - L_{sm}$$

Eq. III-30

$$L_{rr} = L_r - L_{rm}$$

Devido a variação senoidal da indutância mútua com relação ao deslocamento θ_r , aparecerão coeficientes variáveis em função do tempo na equação de tensões. Estas variações poderão ser eliminadas por uma mudança de variáveis que transformam ambas tensões e correntes do estator e do rotor a um par de eixos comum de referência.

Consideremos a fig. III-8 abaixo que nos mostra as relações angulares dos eixos do estator e do rotor de uma máquina trifásica com um terceiro par de eixos ortogonais entre si (d-q) girando com uma velocidade angular arbitrária ω . Consideraremos o conjunto as - bs - cs fixa no estator e ar - br - cr fixa no rotor, e portanto girando a uma velocidade angular ω_r .

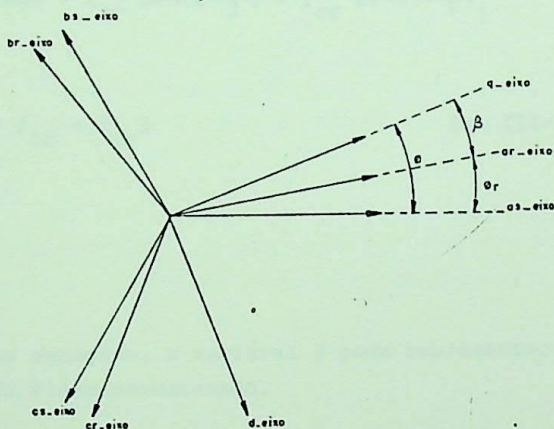


Fig. III-8 - Os eixos de uma máquina simétrica trifásica.

As equações de transformação que relacionam as grandezas mostradas na Fig. III-8 acima são :-

Estator -

$$f_{qs} = \frac{2}{3} \left| f_{as} \cos\theta + f_{bs} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + f_{cs} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right|$$

$$f_{ds} = \frac{2}{3} \left| f_{as} \operatorname{sen}\theta + f_{bs} \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + f_{cs} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right|$$

$$f_{os} = \frac{1}{3} (f_{as} + f_{bs} + f_{cs}) \quad \text{Eq. III-31}$$

Rotor -

$$f_{qr} = \frac{2}{3} \left| f_{ar} \cos\beta + f_{br} \cos\left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right) + f_{cr} \cos\left(\beta + \frac{2\pi}{3}\right) \right|$$

$$f_{dr} = \frac{2}{3} \left| f_{ar} \operatorname{sen}\beta + f_{br} \operatorname{sen}\left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right) + f_{cr} \operatorname{sen}\left(\beta + \frac{2\pi}{3}\right) \right|$$

$$f_{or} = \frac{1}{3} (f_{ar} + f_{br} + f_{cr}) \quad \text{Eq. III-32}$$

Onde :-

$$\beta = \theta - \theta_r$$

Nessas equações, a variável f pode representar , ou tensão ou corrente ou fluxo concatenado.

Observemos que, sendo somente considerados sistemas trifásicos a 3 fios, as componentes de sequência zero normalmente não são consideradas.

Usando as equações de transformação acima para transformar tensões e correntes do estator e do rotor para o mesmo sistema de referências, teremos :

$$\left. \begin{aligned} v_{qs} &= p\phi_{qs} + \phi_{ds}p\theta + r_s i_{qs} \\ v_{ds} &= p\phi_{ds} - \phi_{qs}p\theta + r_s i_{ds} \\ v_{qr} &= p\phi_{qr} + \phi_{dr}p\beta + r_r i_{qr} \\ v_{dr} &= p\phi_{dr} - \phi_{qr}p\beta + r_r i_{dr} \end{aligned} \right\} \text{Eq. III-33}$$

onde :

$$\left. \begin{aligned} \phi_{qs} &= L_{ss} i_{qs} + \frac{3}{2} L_{sr} i_{cr} \\ \phi_{ds} &= L_{ss} i_{ds} + \frac{3}{2} L_{sr} i_{dr} \\ \phi_{qr} &= L_{rr} i_{qr} + \frac{3}{2} L_{sr} i_{qs} \end{aligned} \right\} \text{Eq. III-34}$$

Geralmente os parâmetros da máquina são referidos ao estator, sendo conveniente ter todas grandezas a ele referidas.

Com as variáveis do rotor referidas ao estator e com as auto-indutâncias separadas em indutância de dispersão e de magnetização, então a eq. III-33 de tensões assumem a seguinte forma :

$$\left. \begin{aligned} v_{qs} &= p\phi_{qs} + \phi_{ds}p\theta + r_s i_{qs} \\ v_{ds} &= p\phi_{ds} - \phi_{qs}p\theta + r_s i_{ds} \\ v_{qr}' &= p\phi_{qr}' + \phi_{dr}'p\beta + r_r i_{qr}' \\ v_{dr}' &= p\phi_{dr}' - \phi_{qr}'p\beta + r_r i_{dr}' \end{aligned} \right\} \text{Eq. III-35}$$

onde :-

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_{qs} &= L_{ls} i_{qs} + M(i_{qs} + i_{qr}') \\
 \phi_{ds} &= L_{ls} i_{ds} + M(i_{ds} + i_{dr}') \\
 \phi_{qr}' &= L_{lr}' i_{qr}' + M(i_{qs} + i_{qr}') \\
 \phi_{dr}' &= L_{lr}' i_{dr}' + M(i_{ds} + i_{dr}')
 \end{aligned} \right\} \text{Eq. III-36}$$

e onde :

$$\left. \begin{aligned}
 L_{ls} &= L_{ss} - \frac{3}{2} L_{ms} \\
 L_{lr}' &= L_{rr}' - \frac{3}{2} L_{ms} \\
 M &= \frac{3}{2} L_{ms} \\
 L_{ms} &= \frac{N_s}{N_r} L_{sr}
 \end{aligned} \right\} \text{Eq. III-37}$$

Ou em forma matricial, teremos :

$$\begin{pmatrix} v_{qs} \\ v_{ds} \\ v_{qr}' \\ v_{dr}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 + L_{ss} p & \omega L_{ss} & M p & \omega M \\ -\omega L_{ss} & r_s + L_{ss} p & -\omega M & M p \\ M p & (\omega - \omega_r) M & r_r' + L_{rr}' p & (\omega - \omega_r) L_{rr}' \\ -(\omega - \omega_r) M & M p & -(\omega - \omega_r) L_{rr}' & r_r' + L_{rr}' p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qr}' \\ i_{dr}' \end{pmatrix}$$

Eq. III-38

É claro que as equações de tensão das máquinas síncricas de indução, podem ser expressas em relação a qualquer referência, sendo necessário para tanto, que se escolha uma velocidade conveniente para o sistema de referência, ω , de acordo com o que se de seja. Por exemplo :

- a) Se pretendermos as equações de tensão expressadas em função de uma referência estacionária, basta fazermos $\omega = 0$ e simplificar - mos a eq.III-38, e esta particularização permite-nos recair nas equações de Stanley e Kron mostradas anteriormente, no item III-3.a.
- b) Da mesma forma, se a referência for fixa no rotor, teremos $\omega = \omega_r$. A equação de tensões III-38 será portanto um caso generalizado das equações de Park mostradas no capítulo II e no Apêndice A.
- c) Finalmente se pretendermos que os eixos de referência girem sín cronicamente com a frequência angular da rede de alimentação, bas ta fazermos $\omega = \omega_e$ na equação III-38 e teremos as equações de ten são correspondente.

b.2 - Expressão do Torque -

O torque eletromagnético instantâneo, é dado por:

$$T = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{P}{2}\right) (i_{qs} \cdot \phi_{ds} - i_{ds} \cdot \phi_{qs}) \quad \text{Eq. III-39}$$

conforme deduzido genericamente no Apêndice A, onde :

$m = n^\circ$ de fases da máquina

$P = n^\circ$ de polos da máquina.

e ainda, lembrando que :

$$\begin{aligned} \phi_{ds} &= \frac{3}{2} L_{sm} \cdot (i'_{dr} + i_{ds}) + L_{ls} \cdot i_{ds} \\ \phi_{qs} &= \frac{3}{2} L_{sm} \cdot (i'_{qr} + i_{qs}) + L_{ls} \cdot i_{qs} \end{aligned} \quad \text{Eq. III-40}$$

ou ainda :

$$\phi_{ds} = M \cdot i'_{dr} + (M + L_{ls}) i_{ds}$$

$$\phi_{qs} = M \cdot i'_{qr} + (M + L_{ls}) i_{qs}$$

Eq. III-41

pois para sistema trifásico, a indutância mútua em eixo d e q é três vezes a indutância magnetizante L_{sm} por fase.

Substituindo estas equações III-41 em III-39 teremos então :

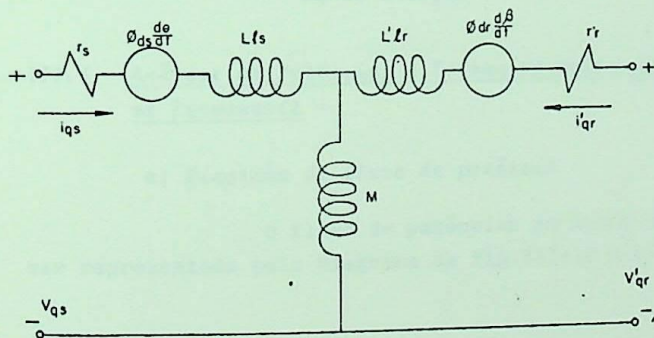
$$T = \frac{m}{2} \cdot \frac{P}{2} (i_{qs} \cdot i'_{dr} - i_{ds} \cdot i'_{qr}) \cdot M$$

donde para a máquina trifásica .

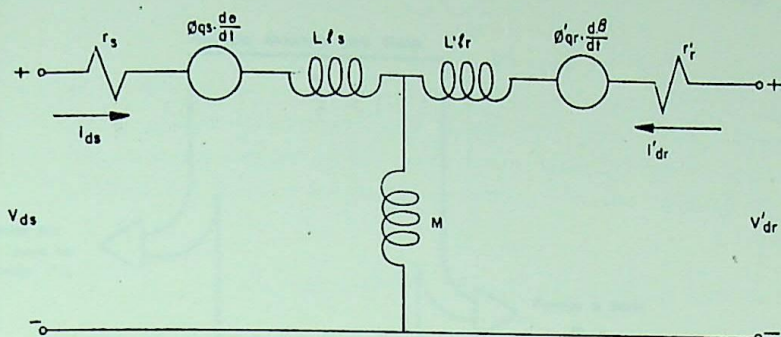
$$T = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{2} \cdot M \cdot (i_{qs} \cdot i'_{dr} - i_{ds} \cdot i'_{qr})$$

Eq. III-42

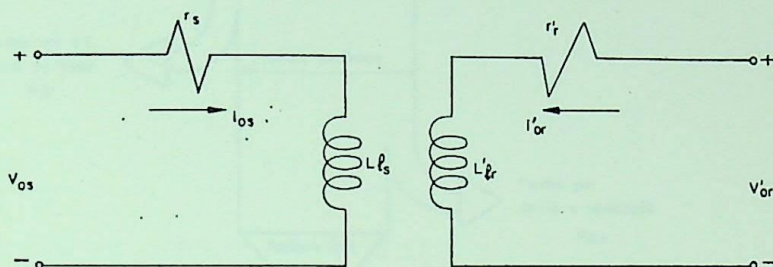
b.3 - As equações de tensão III-35 bem como as equações de fluxo III-36, mostradas acima, sugere o circuito equivalente para uma máquina de indução, conforme o da fig.III9 seguinte :



Circuito de eixo q



Circuito de eixo d



Circuito seq.zero-estator

Circuito seq.zero-rotor

Fig.III-9 - Circuito equivalente $dq0$ para uma máquina de indução

III.4 - Análise de Potências e Torque no Motor de Indução em Regime Permanente -

a) Diagrama de fluxo de potência -

O fluxo de potências no motor de indução pode ser representado pelo diagrama da fig.III-10 a seguir:

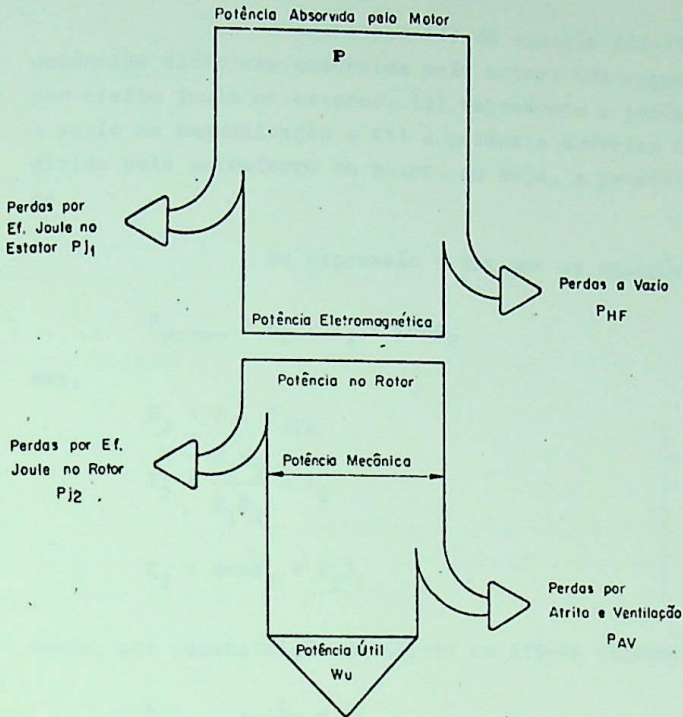


Fig. III-10 - Diagrama de fluxo de potência para um motor de indução.

Do diagrama vetorial do primário do motor tiramos, as equações para o estator -

$$V_1 I_1 \cos \phi_1 = r_1 I_1^2 + E_1 I_1 \cos \psi_1 \quad \text{Eq. III-43}$$

mas

$$I_1 \cos \psi_1 = I_o \text{sen} \alpha + I_2' \cos \phi_2 \quad \text{Eq. III-44}$$

donde

$$V_1 I_1 \cos \phi_1 = r_1 I_1^2 + E_1 I_o \text{sen} \alpha + E_1 I_2' \cos \phi_2 \quad \text{Eq. III-45}$$

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

A expressão (1) da equação III-45 corresponde a potências elétricas absorvida pelo motor; (2) representa a perda por efeito joule no estator, (3) representa a potência consumida a vazio na magnetização e (4) a potência elétrica do estator transmitida pelo entreferro ao rotor, ou seja, a potência eletromagnética.

Da expressão 4 tiramos as equações para o rotor.

$$P_{\text{rotor}} = E_2 \cdot I_2' \cdot \cos\phi_2 \quad \text{Eq. III-46}$$

mas,

$$\left. \begin{aligned} E_2 &= S \cdot E_{2TR} \\ I_2' &= \frac{K_2 N_2}{K_1 N_1} \cdot I_2 \\ E_2 &= \cos\phi_2 = R_2 I_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{Eq. III-47}$$

donde, por substituição de III-47 em III-46 tiramos :

$$P_{\text{rotor}} = \frac{1}{S} r_2 I_2'^2 \quad \text{Eq. III-48}$$

Sendo as perdas no cobre dadas por

$$P_{\text{cobre}} = r_2 I_2'^2 \quad \text{Eq. III-49}$$

então

$$P_{\text{cobre}} = S \cdot P_{\text{rotor}} \quad \text{Eq. III-50}$$

e a potência mecânica será :

$$P_{\text{mec.}} = (1 - S) \cdot P_{\text{rotor}} \quad \text{Eq. III-51}$$

e o torque do motor será dado por :

$$T = \frac{P_{\text{mec}}}{\omega_{\text{rotor}}} \quad \text{Eq. III-52}$$

ou ainda :

$$T = \frac{P_{\text{rotor}}}{\frac{\omega_{\text{rotor}}}{1-s}} = \frac{P_{\text{rotor}}}{\omega_{\text{campo}}} \quad \text{Eq. III-53}$$

e para uma máquina de "p" pares de polos e "m₂" fases teremos :

$$T = \frac{m_2 P}{s \cdot \omega_1} \cdot r_2 I_2^2 \quad \text{Eq. III-54}$$

Para uma análise mais completa sobre o torque de um motor de indução vamos recorrer ao circuito equivalente da fig. III-5 referido ao primário do motor.

Sejam as expressões :

$$T = \frac{m_2 P}{s \cdot \omega_1} \cdot r_2 I_2^2 \quad \text{Eq. III-55}$$

$$I_2' = K \cdot I_2' \quad \text{Eq. III-56}$$

$$r_2 = r_2' / K^2 \quad \text{Eq. III-57}$$

então por substituição de III-56 e III-57 em III-55 teremos

$$T = \frac{m_1 \cdot P}{\omega_1} \cdot r_2' \cdot I_2'^2 \quad \text{Eq. III-58}$$

mas

$$I_2' = \frac{E_{2TR}}{Z_{2TR}' + R_T'} \quad \text{Eq. III-59}$$

e ainda :

$$\vec{V}_1 = Z_1 \vec{I}_1 + \vec{E}_{2TR} = \vec{E}_{2TR} + Z_1 \vec{I}_2 + Z_1 \vec{I}_0 \quad \text{Eq. III-60}$$

ou seja :

$$\vec{V}_1 = \vec{E}_{2TR} + Z_1 \cdot \frac{\vec{E}_{2TR}}{Z'_{2TR} + R'} \quad \text{Eq. III-61}$$

Sendo :

$$Z'_{2TR} = \sqrt{r_2'^2 + X_{2TR}'^2} \quad \text{Eq. III-62}$$

e desprezando

$$\frac{Z_1}{Z_m}$$

desenvolvendo e simplificando teremos :

$$E_{2TR} = \frac{(r_2'/S)^2 + X_{2TR}'^2}{(X_1 + X_{2TR}')^2 + (r_1 + r_2'/S)^2} \quad \text{Eq. III-63}$$

Substituindo as equações III- 63 e III- 59 em III- 58 e simplifi-
cando teremos :

$$T = \frac{m_1 P}{\omega_1} \cdot \frac{V_1^2 \cdot (r_2'/S)}{(X_1 + X_{2TR}')^2 + (r_1 + \frac{r_2'}{S})^2} \quad \text{Eq. III-64}$$

A eq. III-64 nos permite verificar que o torque de-
senvolvido pelo motor varia proporcionalmente como quadrado da ten-
são aplicada ao estator. Isto faz com que o motor seja muito sen-
sível à tensão de alimentação.

b) *Escorregamento Correspondente ao Torque Máximo -*

Para se obter o escorregamento correspondente ao máximo torque desenvolvido pelo motor devemos fazer :

$$\frac{dT}{ds} = 0 \quad \text{na Eq. III-64}$$

que após as simplificações necessárias nos fornece :

$$s_{cr} = \frac{r_2'}{|r_1^2 + (X_1 + X_{2TR}')^2|^{1/2}} \cong \frac{r_2'}{X_1 + X_{2TR}'} \quad \text{Eq. III-65}$$

e o torque será :-

$$T_{max} = \frac{m_1 p}{2\omega_1} \cdot \frac{V_1^2}{X_1 + X_{2TR}' + r_1} \quad \text{Eq. III-66}$$

A análise da expressão III-64 nos mostra que o valor do Torque máximo independe da resistência do rotor o que nos permite deslocar o ponto de T_{max} em função de s sem alterar o seu valor.

O levantamento gráfico da característica Torque x Escorregamento, está mostrado na fig.III-11 abaixo.

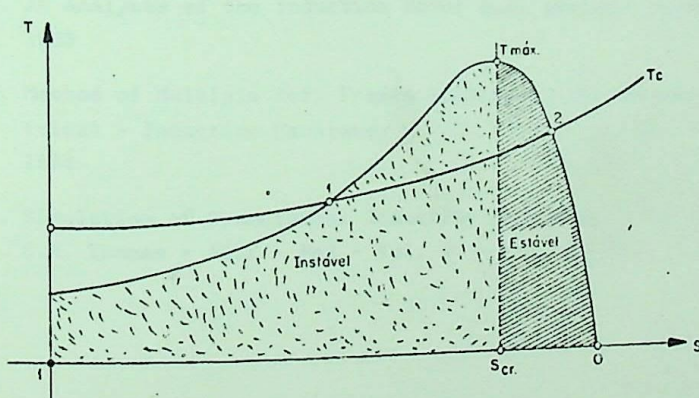


Fig. III-11 - Característica Torque x Escorregamento de um MIT.

Analisemos o que ocorre quando uma carga mecânica de Torque TC esteja atuando no eixo do motor.

Uma variação crescente do torque da carga no ponto-1, implicaria em reduzir o escorregamento, ou seja, aumentar a velocidade, o que é incoerente, uma vez que, quando colocamos carga no motor, aumentamos o seu escorregamento. Concluimos então que a região a esquerda do escorregamento crítico é Instável pois não há uma tendência de manter o equilíbrio dinâmico entre os torques elétrico e mecânico motor, possibilitando assim, que o motor acelere ou não de acordo com a equação dinâmica :

$$T_e - T_m = J \cdot \frac{dw}{dt} \quad \text{Eq. III-67}$$

Por outro lado, a direita de S_{cr} o comportamento do motor é normal e é portanto a região Estável de operação dele.

III.5 - Referências -

1. Electric Machinery - Fitzgerald & Kingsley - McGraw-Hill Book Co. Inc.
2. Electrical Machines - Siskind, C.S. - McGraw-Hill Book Co. Inc.
3. Electrical Machines - Kostenko & Piotrovsky - Mir Publishers
4. An Analysis of The Induction Machines H.C. Stanley - AIEE - PAS Vol. 57 - pp.751-757 - 1938
5. An Analysis of the Induction Motor S.J. Levine - AIEE - PAS - May 1935
6. Method of Multiple Ref. Frames Applied to the Analysis of Symmetrical - Induction Machinery - P.C. Krause - AIEE - PAS - January 1968
7. Simulation of Symmetrical Induction Machinery - P.C. Krause and C.H. Thomas - AIEE - PAS - Vol. 84 - Nov. 1965.

CAPÍTULO IV

MOTORES DE INDUÇÃO EM REGIME TRANSITÓRIO

IV.1 - Representação dos Motores de Indução Durante o Estudo da Estabilidade Transitória de um Sistema de Potência -

Na maioria dos estudos de estabilidade transitória nos sistemas de potencias, as cargas são representadas por impedâncias em paralelo e são comumente tratadas como impedâncias estáticas.

Este método é especialmente usado, quando se pretende fazer calculos manuais imediatos ou através de um analisador de circuitos.

Naturalmente nem todas as cargas se comportam como impedâncias estáticas, o que nos obriga a procurar outros métodos que consideram as variações das potências ativas e reativas do sistema em função das mudanças de tensão e de frequências do mesmo.

É técnica usual concentrar as cargas dos motores de indução instalados no sistema, em estudo de estabilidade, sendo necessário considerar a inércia das máquinas de indução bem como, os transitórios mecanicos dela advindo. Em alguns casos esses transitórios tem igual importância a aqueles que se imaginam nas oscilações de geradores.

No caso de motores de indução, várias representações podem ser usadas, dependendo da precisão desejada.

Uma dessas representações, é o próprio circuito equivalente usado para estudos de estado permanente, o qual permite o cálculo do torque elétrico em cada ponto da curva de balanço; devido ao pequeno efeito relativo da constante de tempo do rotor, esta representação é perfeitamente admissível.

Em outros casos quando a resistência do rotor for

pequena e a reatância do estator muito grande, então a constante de tempo não deve ser desprezada, exigindo que se inclua também os transitórios elétricos do estator, sendo que todavia na maioria dos estudos de estabilidade eles não são considerados.

Quando o distúrbio no sistema é tal que os motores de indução são parcialmente ou completamente desligados de suas fontes de potencia, através de um curto-circuito, por exemplo, a maior constante de tempo a ser considerada, é a constante de tempo do rotor, efetiva da máquina.

O efeito do transitório no estator da máquina é introduzir uma componente d-c de corrente de fase na armadura e oscilar o torque elétrico. A representação deste efeito em todo o estudo do sistema é impraticável exceto durante uma falta trifásica.

Quando a constante de tempo do rotor for pequena é comum em análise transitória, devido a curto-circuito, desprezar tanto a constante de tempo do rotor como do estator.

Neste caso o comportamento do motor de indução é analisado, usando as familiares equações de estado permanente, com apropriados valores de reatância, resistência e escorregamento, através do circuito equivalente da figura abaixo:

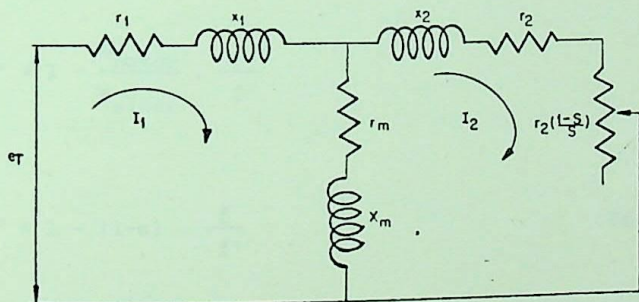


Fig. IV.1 - O circuito equivalente para um Motor de Indução em Regime Permanente.

Este circuito também é utilizado para considerar as variações na frequência da tensão nos terminais do motor.

Seja por exemplo f a frequência normal de operação do sistema, e s o escorregamento referido a estas frequências.

Se uma nova frequência f' for aplicada ao motor, os valores dos parâmetros acima mudam e sejam :

s' - o escorregamento referido a f'

$$X'_1 = X_1 \cdot (f'/f) \quad \text{Eq. IV-1}$$

$$X'_2 = X_2 \cdot (f'/f) \quad \text{Eq. IV-2}$$

$$X'_m = X_m \cdot (f'/f) \quad \text{Eq. IV-3}$$

$$s = 1 - \frac{\eta_{\text{rotor}}}{\eta_{\text{sincr}}} \quad \text{Eq. IV-4}$$

$$s' = 1 - \frac{\eta_{\text{rotor}}}{\eta'_{\text{sincr}}} \quad \text{Eq. IV-5}$$

$$\text{mas } \eta'_{\text{sincr}} = \eta_{\text{sincr}} \cdot f'/f \quad \text{Eq. IV-6}$$

donde :

$$s' = 1 - \frac{\eta_{\text{rotor}}}{\eta_{\text{sincr}}} \cdot \frac{f}{f'}$$

ou seja

$$s' = 1 - (1-s) \cdot \frac{f}{f'} \quad \text{Eq. IV-7}$$

o que nos permite representar o motor pela figura IV-2.

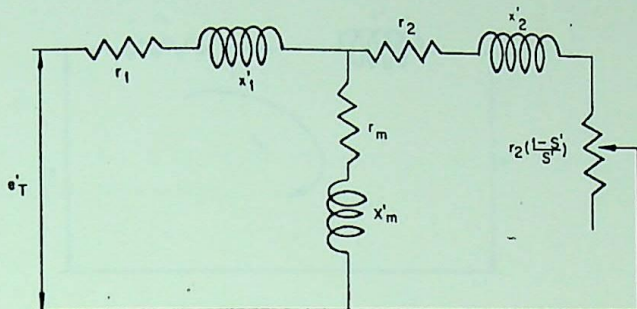


Fig. IV-2 - Circuito equivalente para o motor de indução com frequência f' .

Quando o motor de indução é completamente desligado da fonte de potência devido a uma condição de abertura de circuito, ou quando os parâmetros do motor e do sistema são tais que a constante de tempo do rotor deve ser considerada então o transitório do motor pode ser calculado usando as equações transitórias. Para assegurar que a representação seja a mais rigorosa possível, é desejável deduzir estas equações transitórias a partir das equações normais de um motor de indução.

Partindo com as equações diferenciais do motor referido a uma rotação síncrona do eixo, e desprezando o transitório do estator, no Apêndice E estão deduzidas as equações que representam o motor de indução em regime transitório, isto é :

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{T'_{do}} \left| e - j(X-X')i_1 \right| + je' \frac{d\theta}{dt} \quad \text{Eq. IV-8}$$

e

$$i_1 = \frac{e_T - e'}{r_1 + jX'} \quad \text{Eq. IV-9}$$

Nessas condições, o motor de indução pode ser representado pelo circuito equivalente da fig. IV-3 a seguir :

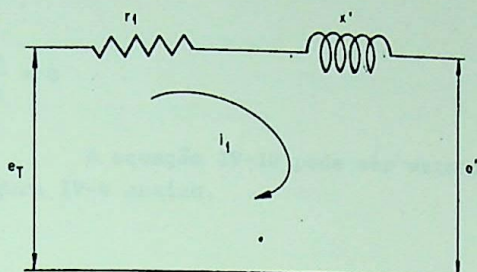


Fig. IV-3 - O circuito equivalente de um motor de indução referente a eq. IV-9

Resumindo a representação dos motores de indução - nos estudos de estabilidade transitória, podemos dizer que essencialmente o motor é tratado como uma reatância transitória X' e uma tensão transitória e' atrás desta reatância, analogamente, às máquinas síncronas.

Todavia, e' não é fixada no rotor como nas máquinas síncronas, mas é determinada pela excitação recebida do sistema. Assim, em estabilidade transitória, motor de indução tem uma tensão interna atrás da reatância transitória, que permanece constante momentaneamente no instante da falta.

Isto permite determinar a corrente no motor logo após a ocorrência da falta desde que todas as demais FEM do circuito sejam conhecidas. A potência pode ser determinada a partir da tensão e corrente do motor. Observar que o ângulo do rotor não é o ângulo da tensão atrás da reatância transitória uma vez que esta tensão não está fixada no rotor da máquina de indução.

Assim para a eq. IV-8 mostrada anteriormente e agora em termos de variação de tensões, teremos :

é transitoriamente estável, utilizando suas tensões terminais e escorregamento, toma-se por base o levantamento gráfico da figura IV-5 abaixo.

Se a curva "velocidade x torque" de um motor é levantada baseada em uma série de valores de tensões constantes nos terminais do motor, então teremos:

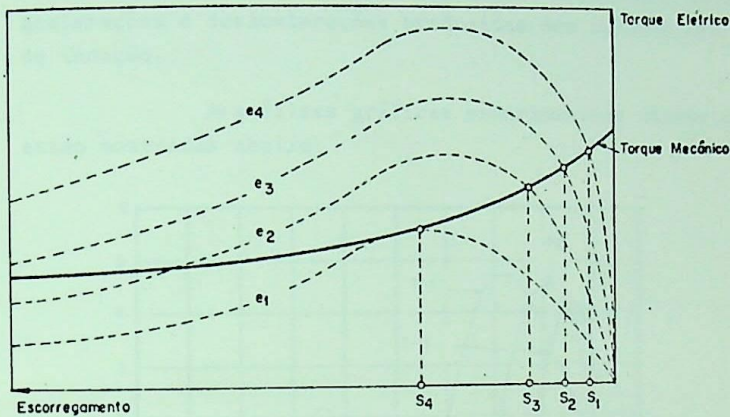


Fig. IV-5 - Característica torque x escorregamento para um motor de indução

Se o valor do escorregamento para o qual o torque elétrico para uma dada tensão são colocadas em um gráfico em relação às tensões nos terminais do motor, então obtemos:

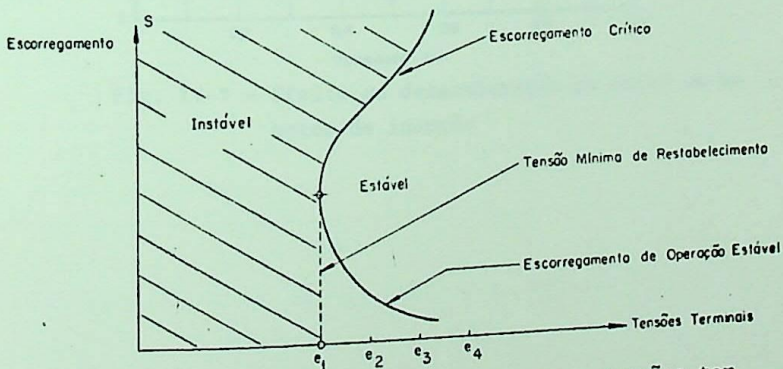


Fig. IV-6 - Característica "escorregamento x tensões terminais" de um motor de indução

A tensão no terminal do motor depois da última operação deve aumentar acima da tensão mínima de restabelecimento, para que o motor seja estável.

Se a característica durante o distúrbio transitório for tal que o motor continua a operar na região instável, então ele será considerado instável transitóriamente.

Uma outra verificação usual da estabilidade transitória dos motores de indução, é feita através das curvas "torque x velocidade" em condições transitórias, levantadas em função de acelerações e desacelerações produzidas nos rotores dos motores de indução.

As análises gráficas experimentais destas condições estão mostradas abaixo:

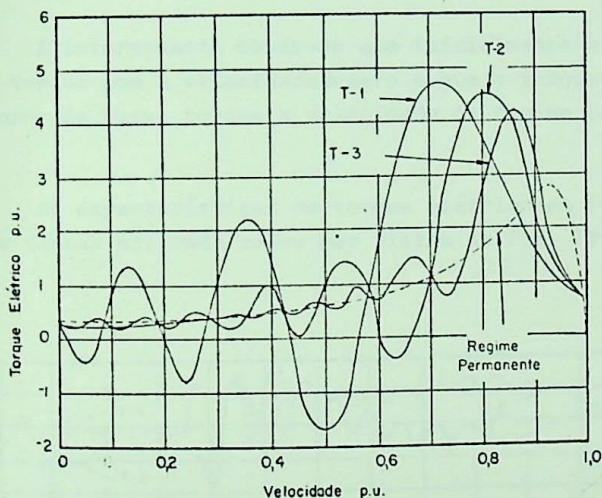


Fig. IV-7 - Efeito da desaceleração do rotor de um motor de indução

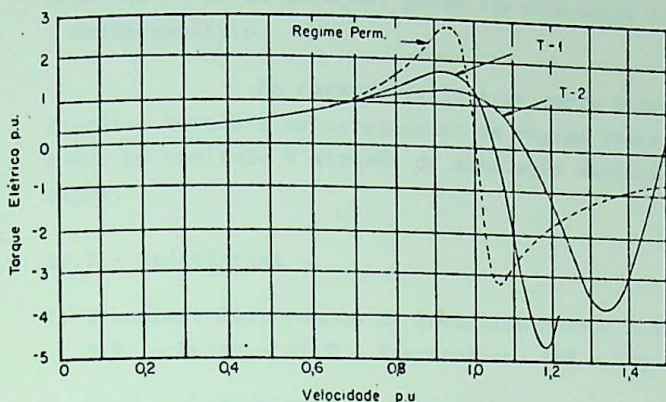


Fig. IV-8 - Efeito da aceleração do rotor de um motor de indução

É interessante observar que inicialmente a razão de variação do torque com a velocidade é zero e que o torque elétrico oscila em torno da curva torque x velocidade de regime permanente do motor.

As características do torque elétrico em função das variações da tensão aplicada podem ser vistas na fig. IV-9 abaixo

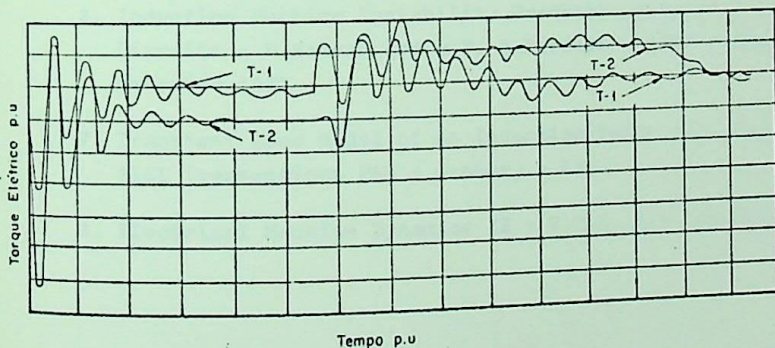


Fig. IV-9 - Efeitos das variações de tensão no estator do motor.

Outras características transitórias do torque elétrico no motor de indução, podem ser observadas nas referências 2 e 3 deste capítulo.

As características de curto-circuito, velocidade do rotor torque e escorregamento em regime transitório serão analisadas no capítulo V através da simulação analógica do motor de indução.

IV.3 - Referências -

1. Transient Performance of Induction Motors F.J. Maginniss and M.R. Schultz - AIEE - Transactions PAS - Vol. 63 - Sept. 1944
2. Transient Stability Studies I - Synchronous and Induction Machines - D.F. Shankle, C.M. Murphy, R.W. Long, E.L. Harder - AIEE - Transactions - PAS - February - 1955
3. Transient Starting Torques in Induction Motors - A.M. Wahl, L.A. Kirgore - AIEE Transactions - PAS - November - 1940
4. An Analysis of the Induction Machine H.C. Stanley - AIEE Transactions - PAS - Vol. 57 - 1938.
5. Dynamic Equivalents of Asynchronous Motor - Loads in System Stability Studies - F. Iliceto and A. Capasso - AIEE - Transactions - PAS - November - 1973
6. Induction Machine Instability Predictions Based on Equivalents - Circuits - M. Ramesh and D.T. Robertson - AIEE - Transactions PAS December 1971
7. Transient Load Model of an Induction Motor J.J. Cavin, A.K. Ayoub AIEE Transactions PAS - January - 1973
8. Electrical Machine Dynamics II - P.T.I. F.P. de Mello.

CAPÍTULO V

SIMULAÇÃO DO MOTOR DE INDUÇÃO

V.1 - As Equações Para a Simulação -

Consideremos o motor de indução da figura abaixo :

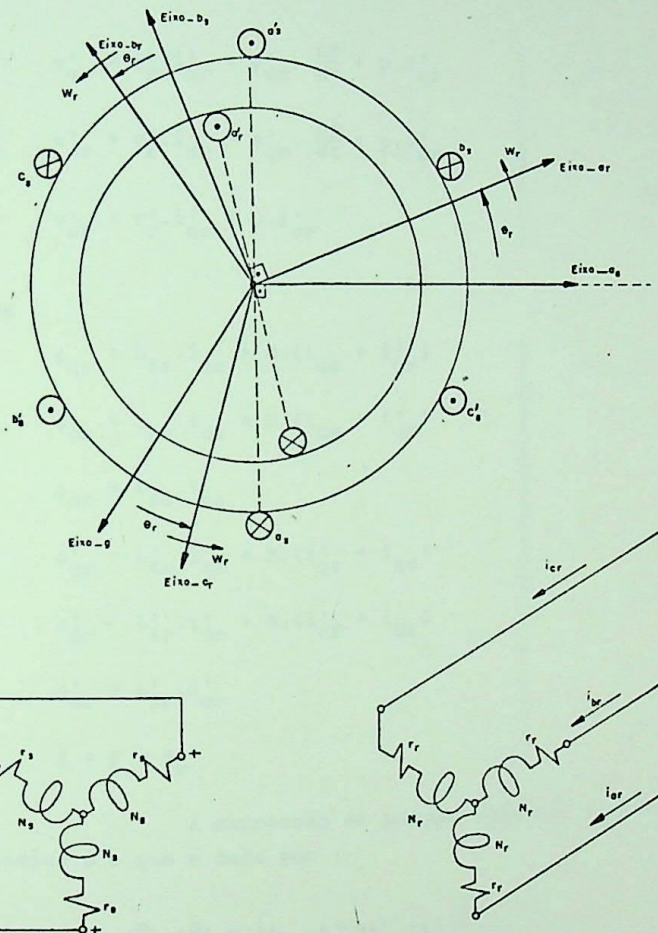


Fig. V-1 - O motor de indução esquematicamente

Para o motor de indução da figura acima, conforme vimos no capítulo III, as equações que o representam são :

$$\left. \begin{aligned} v_{qs} &= r_s \cdot i_{qs} + \phi_{ds} \cdot \frac{d\theta}{dt} + p \cdot \phi_{qs} \\ v_{ds} &= r_s \cdot i_{ds} - \phi_{qs} \cdot \frac{d\theta}{dt} + p \cdot \phi_{ds} \\ v_{os} &= r_s \cdot i_{os} + p \cdot \phi_{os} \end{aligned} \right\} \text{Eq. V-1}$$

$$\left. \begin{aligned} v'_{qr} &= r'_r \cdot i'_{qr} + \phi'_{dr} \cdot \frac{d\beta}{dt} + p \cdot \phi'_{qr} \\ v'_{dr} &= r'_r \cdot i'_{dr} - \phi'_{qr} \cdot \frac{d\beta}{dt} + p \cdot \phi'_{dr} \\ v'_{or} &= r'_r \cdot i'_{or} + p \cdot \phi'_{or} \end{aligned} \right\} \text{Eq. V-2}$$

onde

$$\left. \begin{aligned} \phi_{qs} &= L_{\ell s} \cdot i_{qs} + M \cdot (i_{qs} + i'_{qr}) \\ \phi_{ds} &= L_{\ell s} \cdot i_{ds} + M \cdot (i_{ds} + i'_{dr}) \\ \phi_{os} &= L_{\ell s} \cdot i_{os} \\ \phi'_{qr} &= L'_{\ell r} \cdot i'_{qr} + M \cdot (i'_{qr} + i_{qs}) \\ \phi'_{dr} &= L'_{\ell r} \cdot i'_{dr} + M \cdot (i'_{dr} + i_{ds}) \\ \phi'_{or} &= L'_{\ell r} \cdot i'_{or} \\ \beta &= \theta - \theta_r \end{aligned} \right\} \text{Eq. V-3}$$

A expressão do torque elétrico está deduzida no apêndice D e que é dada por :

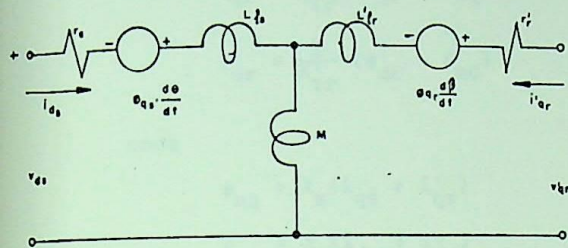
$$T_e = \left(\frac{p}{2}\right) \cdot \left(\frac{p}{2}\right) \cdot M \cdot \left(i_{qs} \cdot i'_{dr} - i'_{qr} \cdot i_{ds}\right) \quad \text{Eq. V-4}$$

ou então :

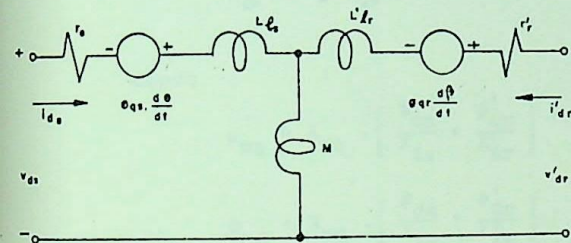
$$T_e = \left(\frac{m}{2}\right) \cdot \left(\frac{p}{2}\right) \cdot \left(\phi'_{qr} \cdot i'_{dr} - \phi'_{dr} \cdot i'_{qr}\right)$$

Eq. V-5

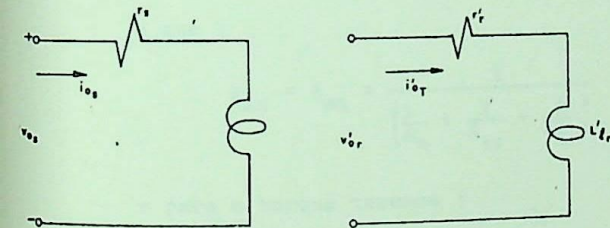
As equações acima sugerem o circuito equivalente da figura V-2 abaixo:



Circuito de eixo q



Circuito de eixo d



Circuito de eixo zero

Fig.V-2 - Os circuitos d, q, 0 para um motor de indução

Essas correntes do estator e as do rotor referidas ao estator, podem ser expressas em função das reatâncias de dispersão e de fluxos vinculados de acordo com as expressões abaixo :

$$\begin{aligned}
 i_{qs} &= \frac{1}{X_{\ell s}} (\psi_{qs} - \psi_{mq}) \\
 i_{ds} &= \frac{1}{X_{\ell s}} (\psi_{ds} - \psi_{md}) \\
 i'_{qr} &= \frac{1}{X'_{\ell r}} (\psi'_{qr} - \psi_{mq}) \\
 i'_{dr} &= \frac{1}{X'_{\ell r}} (\psi'_{dr} - \psi_{md})
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \end{aligned}} \right\} \text{Eq. V-6}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \psi_{mq} &= X_m (i_{qs} + i'_{qr}) \\
 \psi_{md} &= X_m (i_{ds} + i'_{dr}) \\
 \psi_{qs} &= \omega_e \cdot \phi_{qs} \quad \text{etc.}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \psi_{mq} \\ \psi_{md} \\ \psi_{qs} \end{aligned}} \right\} \text{Eq. V-7}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \psi_{mq} &= X_{mq} \cdot \left[\frac{\psi_{qs}}{X_{\ell s}} + \frac{\psi'_{qr}}{X'_{\ell r}} \right] \\
 \psi_{md} &= X_{md} \cdot \left[\frac{\psi_{ds}}{X_{\ell s}} + \frac{\psi'_{dr}}{X'_{\ell r}} \right]
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \psi_{mq} \\ \psi_{md} \end{aligned}} \right\} \text{Eq. V-8}$$

e que :

$$X_{md} = X_{mq} = \frac{1}{\left(\frac{1}{X_m} + \frac{1}{X_{\ell s}} + \frac{1}{X'_{\ell r}} \right)} \quad \text{Eq. V-9}$$

e para o torque teremos :

$$T_e = \left(\frac{m}{2} \right) \cdot \left(\frac{p}{2} \right) \cdot \frac{1}{\omega_e} \left[\psi'_{qr} \cdot i'_{dr} - \psi'_{dr} \cdot i'_{qr} \right] \quad \text{Eq. V.10}$$

Substituindo nas eq. V-1 e V-2 os valores dos fluxos nos respectivos eixos por :

$$\psi = \omega_e \cdot \phi$$

e analisando sua variação no tempo, temos :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{p}{\omega_e} \psi_{qs} &= v_{qs} - p\theta \cdot \frac{\psi_{ds}}{\omega_e} - r_s i_{qs} \\
 \frac{p}{\omega_e} \psi_{ds} &= v_{ds} + p\theta \cdot \frac{\psi_{qs}}{\omega_e} - r_s i_{ds} \\
 \frac{p}{\omega_e} \psi'_{qr} &= v'_{qr} + p\beta \frac{\psi'_{dr}}{\omega_e} - r'_r i'_{qr} \\
 \frac{p}{\omega_e} \psi'_{dr} &= v'_{dr} + p\beta \frac{\psi'_{qr}}{\omega_e} - r'_r i'_{dr}
 \end{aligned} \right\} \text{Eq. V-11}$$

Mas, observando que :

$$p\theta = \omega$$

$$p\beta = \omega - \omega_r$$

e sendo para o computador $t = \frac{\tau}{a}$ e portanto $dt = \frac{d\tau}{a}$ pela substituição das eqs. V-6 em V-11 teremos :

$$\left. \begin{aligned}
 \psi_{qs} &= \frac{\omega_e}{a} \int \left[v_{qs} - \frac{\omega}{\omega_e} \psi_{ds} + \frac{r_s}{X_{\ell s}} (\psi_{mq} - \psi_{qs}) \right] d\tau \\
 \psi_{ds} &= \frac{\omega_e}{a} \int \left[v_{ds} + \frac{\omega}{\omega_e} \psi_{qs} + \frac{r_s}{X_{\ell s}} (\psi_{md} - \psi_{ds}) \right] d\tau \\
 \psi'_{qr} &= \frac{\omega_e}{a} \int \left[v'_{qr} - \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_e} \right) \psi'_{dr} + \frac{r'_r}{X'_{\ell r}} (\psi_{mq} - \psi'_{qr}) \right] d\tau \\
 \psi'_{dr} &= \frac{\omega_e}{a} \int \left[v'_{dr} + \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_e} \right) \psi'_{qr} + \frac{r'_r}{X'_{\ell r}} (\psi_{md} - \psi'_{dr}) \right] d\tau
 \end{aligned} \right\} \text{Eq. V-12}$$

Finalmente para a análise dinâmica temos que :

$$T_e - T_m = \left(\frac{2}{p} \right) J \cdot p\omega_r \quad \text{Eq. V-13}$$

O conjunto de equações V-6 para as correntes , V-12 para os fluxos, V-10 para o torque e V-13 para a equação dinâmica expressadas por unidade permite-se fazer de indução, conforme o programa mostrado no item V-2.

V.2 - Programa de Simulação -

As equações apresentadas no item anterior, permitem uma análise bem flexível da máquina, sob os aspectos de localização do sistema de eixos de referência. Assim, é conveniente observar que as tensões e as correntes durante operações equilibradas da máquina terão :

- a) eixo de referências girando sincronicamente com o campo se $\omega = \omega_e$
- b) eixo de referências fixado no rotor se $\omega = \omega_r$
- c) eixo de referências fixado no estator se $\omega = 0$

No nosso caso particular, utilizamos o sistema - fixo no estator. A simulação foi realizada com o programa da figura V-3. O exemplo é referente a um motor de indução que tem as seguintes características por unidade :

$$\bar{r}_s = 0,0453 \text{ pu}$$

$$\bar{r}'_r = 0,0222 \text{ pu}$$

$$\bar{X}_{ls} = 0,0775 \text{ pu}$$

$$\bar{X}'_{lr} = 0,0322 \text{ pu}$$

$$\bar{X}_m = 2,0420 \text{ pu}$$

$$H = 1,0 \text{ seg.}$$

$$p = 1$$

$$\frac{2}{V} = 1$$

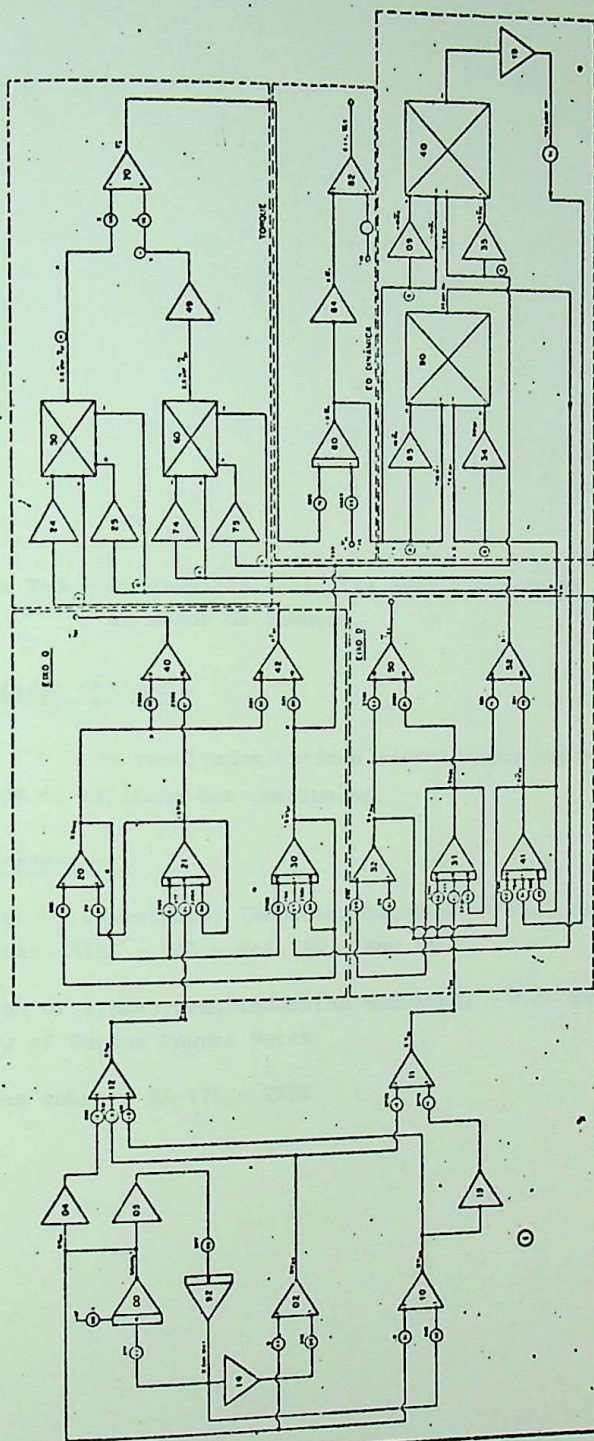


Fig. V-3 - Programação analógica para a simulação de um motor de indução.

V.3 - Resultados Obtidos -

Os resultados obtidos encontram-se plotados em folhas anexas no capítulo das conclusões.

V.4 - Referências -

1. Simulation of Symmetrical Induction Machinery - P.C. Krause and C.H. Thomas - AIEE - PAS - Vol. 84 - Nov.1965
2. Simulation of Symmetrical Induction Machinery - P.C. Krause - University of Purdue Course Notes
3. Instruções sobre o RA-770 - EFEI

CAPÍTULO VIAPÊNDICES

VI.1 - APÊNDICE A

Equações de Fluxo, Tensão, Corrente, Potência e Conjugado nas Máquinas Síncronas e Suas Expressões em Termos de Componentes d , q , 0 .

VI.2 - APÊNDICE B

A Teoria das Referências Múltiplas para Máquinas Síncronas.

VI.3 - APÊNDICE C

O Efeito da Saturação nas Máquinas Síncronas

VI.4 - APÊNDICE D

Determinação do Torque Elétrico nos Motores de Indução.

VI.5 - APÊNDICE E

As equações de Tensão e Corrente para Representar o Motor de Indução nos Estudos de Estabilidade - Transitória.

APENDICE AEQUAÇÕES DE FLUXO, TENSÃO, CORRENTE, POTÊNCIA E CONJUGADO NAS MÁQUINAS SÍNCRONAS E SUAS EXPRESSÕES EM TERMOS DE COMPONENTES d , q , 0 .a) Equações de Fluxo -

Consideremos um ponto P na periferia do estator e seja α o ângulo que define este ponto e o centro da fase a da máquina.

Considerando uma distribuição espacial senoidal, equilibrada e uniforme das bobinas de fases ao longo das ranhuras do estator, a contribuição da FMM de cada fase em qualquer instante será :

$$FMM_a \propto i_a \cdot \cos \alpha$$

$$FMM_b \propto i_b \cdot \cos (\alpha - 2\pi/3) \quad \text{Eq. A-1}$$

$$FMM_c \propto i_c \cdot \cos (\alpha + 2\pi/3)$$

Sejam as correntes do estator :

$$i_a = I_m \cdot \sin \omega t$$

$$i_b = I_m \cdot \sin (\omega t - 2\pi/3) \quad \text{Eq. A-2}$$

$$i_c = I_m \cdot \sin (\omega t + 2\pi/3)$$

Substituindo as equações A-2 em A-1 e desenvolvendo, teremos para a FMM total o seguinte :

$$FMM_{\text{total}} \propto \frac{3}{2} I_m \cdot \sin(\omega t - \alpha) \quad \text{Eq. A-3}$$

o que nos mostra que a FMM desloca-se ao longo da periferia com

uma velocidade ω .

A partir da teoria do acoplamento magnético de circuitos, para qualquer instante de tempo podemos definir indutância própria e mútua entre circuitos da armadura e circuitos do rotor e escrever o enlaçamento de fluxo total no circuito da armadura na fase a como :

$$\begin{aligned} \phi_a = & - \ell_{aa} \cdot i_a - \ell_{ab} \cdot i_b - \ell_{ac} \cdot i_c \\ & + \ell_{afd} \cdot I_{fd} + \ell_{akd} \cdot I_{kd} + \ell_{akq} \cdot I_{kq} \end{aligned} \quad \text{Eq. A-4}$$

Em função da geometria do circuito magnético e da posição do rotor essas indutâncias passam a ser expressas por :

$$\begin{aligned} \ell_{aa} &= L_{aao} + L_{aa2} \cos 2\theta \\ \ell_{afd} &= L_{afd} \cos \theta \end{aligned} \quad \text{Eq. A-5}$$

$$-\ell_{ma} = L_{mao} + L_{ma2} \cos(2\theta + \frac{\pi}{3})$$

e assim,

$$\begin{aligned} \phi_a = & -i_a (L_{aao} + L_{aa2} \cos 2\theta) + L_{mao} (i_b + i_c) \\ & + L_{aa2} i_b \cos(2\theta + \frac{\pi}{3}) + L_{aa2} i_c \cos(2\theta - \frac{\pi}{2}) \\ & + L_{afd} \cdot I_{fd} \cos \theta + L_{akd} \cdot I_{kd} \cdot \cos \theta \\ & - L_{akq} \cdot I_{kq} \cdot \text{sen} \theta \end{aligned} \quad \text{Eq. A-6}$$

e analogamente para as fase b e c .

Para os fluxos enlaçados no rotor temos :

$$\begin{aligned} \phi_{fd} = & L_{ffd} \cdot I_{fd} + L_{fkd} \cdot I_{kd} - \\ & - L_{afd} \left[i_a \cos \theta + i_b \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + i_c \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \right] \end{aligned}$$

$$\phi_{kd} = L_{fkd} \cdot I_{fd} + L_{kkd} \cdot I_{kd} - \quad \text{Eq. A-7}$$

$$- L_{akd} \left[i_a \cos\theta + i_b \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$\phi_{kq} = L_{fkq} \cdot I_{kq} + L_{akq} \cdot \left[i_a \sin\theta + i_b \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

Essas equações também podem ser expressas em termos de componentes d,q,0 a saber :

$$\phi_{fd} = L_{ffd} \cdot I_{fd} + L_{fkd} \cdot i_{kd} - \frac{3}{2} L_{afd} \cdot i_d$$

$$\phi_{kd} = L_{fkd} \cdot I_{fd} + L_{kkd} \cdot I_{kd} - \frac{3}{2} L_{akd} \cdot i_d$$

$$\phi_{kq} = L_{kkq} \cdot I_{kq} - \frac{3}{2} L_{akq} \cdot i_q \quad \text{Eq. A-8}$$

Os fluxos enlaçados na armadura, também podem ser expressos em componentes d,q,0 por :

$$\phi_d = \frac{2}{3} \left[\phi_a \cos\theta + \phi_b \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \phi_c \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$\phi_q = -\frac{2}{3} \left[\phi_a \sin\theta + \phi_b \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \phi_c \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \quad \text{Eq. A-9}$$

$$\phi_0 = \frac{1}{3} \left[\phi_a + \phi_b + \phi_c \right]$$

Essas equações A-9 podem ainda, serem desenvolvidas considerando as componentes i_d , i_q , i_0 semelhantes a esta para correntes, e as expressões dos fluxos, eqs. A-6, que simplifi-

casas nos fornece :

$$\phi_d = -(L_{aao} + L_{mao} + \frac{3}{2} L_{aa2}) i_d + L_{afd} I_{fd} + L_{akd} I_{kd}$$

$$\phi_q = -(L_{aao} + L_{mao} - \frac{3}{2} L_{aa2}) i_q + L_{akq} I_{kq}$$

$$\phi_0 = -(L_{aao} - 2L_{mao}) i_0 \quad \text{Eq. A-10}$$

ou ainda,

$$\phi_d = -L_d \cdot i_d + L_{afd} \cdot I_{fd} + L_{akd} \cdot I_{kd}$$

$$\phi_q = -L_q \cdot i_q + L_{akq} \cdot I_{kq}$$

$$\phi_0 = -L_0 i_0 \quad \text{Eq. A-11}$$

Notar que estas equações A-11, em termos das variáveis transformadas contém todos os termos de indutância constantes e esta é a razão básica para o uso das componentes d,q,0, ao se trabalhar com problemas de máquinas elétricas.

b) Equações de Tensão -

As equações básicas aplicadas ao circuito da armadura são :

$$v_a = \frac{d\phi_a}{dt} + r i_a \quad \text{Eq. A-12}$$

$$v_b = \frac{d\phi_b}{dt} + r i_b$$

$$v_c = \frac{d\phi_c}{dt} + r i_c$$

No circuito de campo temos :

$$v_{fd} = \frac{d\phi_{fd}}{dt} + r_{fd} \cdot i_{fd} \quad \text{Eq. A-13}$$

Nos circuitos amortecedores, eixo direto e em quadratura temos :

$$0 = \frac{d\phi_{kd}}{dt} + r_{kd} i_{kd} \quad \text{Eq. A-14}$$

$$0 = \frac{d\phi_{kq}}{dt} + r_{kq} i_{kq}$$

O conjunto de eqs. A-12 transformadas em componentes d, q, 0 fornece :

$$v_d = \frac{2}{3} \left[v_a \cdot \cos\theta + v_b \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + v_c \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$v_q = -\frac{2}{3} \left[v_a \cdot \sin\theta + v_b \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + v_c \cdot \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$v_0 = \frac{1}{3} \left[v_a + v_b + v_c \right] \quad \text{Eq. A-15}$$

ou ainda pelo uso das relações de transformação d-q teremos :

$$v_d = \frac{2}{3} \left[\cos\theta \frac{d\phi_a}{dt} + \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\phi_b}{dt} + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\phi_c}{dt} \right] + r \cdot i_d \quad \text{Eq. A-16}$$

$$v_q = -\frac{2}{3} \left[\sin\theta \frac{d\phi_a}{dt} + \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\phi_b}{dt} + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{d\phi_c}{dt} \right] + r \cdot i_q$$



Observar que o circuito do campo sobre o rotor é o mesmo que o circuito de campo real.

No circuito da armadura, agora nós temos três circuitos imaginários :

- O circuito de eixo direto, montado sobre o eixo direto do rotor e que gira em sincronismo com ele.

- O circuito de eixo em quadratura, deslocado de $\frac{\pi}{2}$ rad do anterior.

- O circuito de sequência zero, que pode ser considerado estacionário e que não tem acoplamento com nenhum dos três outros circuitos.

c) Equações de Correntes - -

As correntes da armadura projetadas sobre o eixo direto, e em quadratura fornece:

para o eixo direto -

$$i_a \cdot \cos\theta + i_b \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

e para o eixo em quadratura -

$$i_a \cdot \text{sen}\theta + i_b \cdot \text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \cdot \text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

onde θ é o ângulo de avanço do eixo direto em relação ao centro da fase a.

Para que tenhamos as intensidades de pico I_m constante, devemos ter :

$$i_d = \frac{2}{3} \left[i_a \cos\theta + i_b \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$i_q = - \frac{2}{3} \left[i_a \text{sen}\theta + i_b \text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$i_0 = \frac{1}{3} \left[i_a + i_b + i_c \right]$$

o que permite ainda escrever em forma matricial, como segue :

$$\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \cos\theta & 2/3 \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 2/3 \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -2/3 \cos\theta & 2/3 \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 2/3 \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix}$$

Eq. A-20

d) Equações de Conjugado e Potência -

A potência instantânea nos terminais da máquina é

$$P = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c \quad \text{Eq. A-21}$$

ou em termos de componentes d,q,0.

$$P = \frac{3}{2} [v_d \cdot i_d + v_q \cdot i_q + 2v_0 i_0] \quad \text{Eq. A-22}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} P = \frac{3}{2} & \left[i_d \cdot \left(\frac{d\phi_d}{dt} - \phi_q \cdot \frac{d\theta}{dt} - r i_d \right) + \right. \\ & + i_q \left(\frac{d\phi_q}{dt} + \phi_d \cdot \frac{d\theta}{dt} - r i_q \right) + \\ & \left. + 2 \cdot i_0 \left(\frac{d\phi_0}{dt} - r i_0 \right) \right] \quad \text{Eq. A-23} \end{aligned}$$

isto é :

$$P = \frac{3}{2} \left(i_d \frac{d\phi_d}{dt} + i_q \frac{d\phi_q}{dt} + 2i_o \frac{d\phi_o}{dt} \right) +$$

taxa de redução da energia magnética na armadura

$$+ \frac{3}{2} \left(i_q \phi_d - i_d \phi_q \right) \frac{d\theta}{dt} - \frac{3}{2} r \left(i_d^2 + i_q^2 + 2i_o^2 \right)$$

potência de saída

transferência de potência através do entreferro

perdas por resistência na armadura

Para o conjugado do entreferro teremos :

$$\tau = \frac{\frac{3}{2} \left(i_q \phi_d - i_d \phi_q \right) \frac{d\theta}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} \quad \text{Eq. A-24}$$

ou seja

$$\tau = \frac{3}{2} \left(i_q \phi_d - i_d \phi_q \right) \quad \text{Eq. A-25}$$

Para efeito de representação através do circuito equivalente o conjunto de equações A-11 passa a ser constituído por :

$$\phi_d = -(L_\ell + L_{md})i_d + L_{md} \cdot I_{fd} + L_{md} \cdot I_{kd}$$

$$\phi_q = -(L_\ell + L_{mq})i_q + L_{mq} \cdot I_{kq}$$

$$\phi_o = -L_o \cdot i_o$$

Eq. A-26

Notar que :

$$L_d = L_\ell + L_{md}$$

$$L_q = L_\ell + L_{mq}$$

ou seja, as auto-indutâncias da armadura dos enrolamentos de eixos d e q , são subdivididas numa componente de dispersão L_d correspondente ao fluxo de dispersão que não enlaçam o rotor e o componente mútuo L_{md} e L_{mq} correspondente aos fluxos que enlaçam o rotor e estamos admitindo que :

$$L_{afd} = L_{akd} = L_{md} \equiv L_{fkd}$$

$$L_{akq} = L_{mq}$$

Eq. A-27

$$L_{fd} = L_{ffd} - L_{md}$$

Esse conjunto A-26 e A-27 ao lado das equações do rotor A-13 e A-14 estão convenientemente representadas no circuito equivalente da fig. A-2.

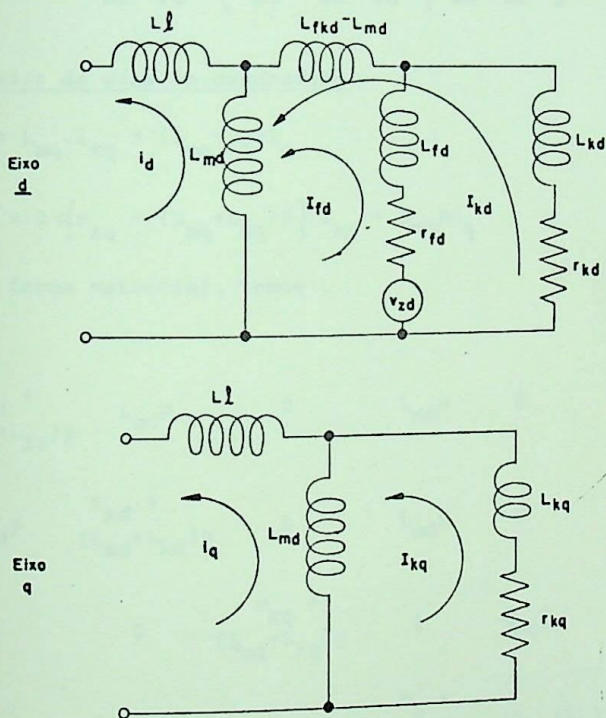


Fig. A-2 - Circuitos equivalentes de eixo d e q para uma máquina síncrona.

Estes circuitos equivalentes também são utilizados para efeito de estudos do comportamento em Regime Transitório das máquinas síncronas.

A fig.A-2 da página anterior nos permite ainda escrever as equações de tensão e fluxos nos diversos circuitos, ou seja:

Para o circuito de eixo direto -

$$\phi_d = L_m \cdot i_{fd} + L_{md} \cdot i_{kd} + (L_{md} + L_\ell) i_d$$

$$e_{fd} = \left\{ r_{fd} + (L_{md} + L_{fd})p \right\} i_{fd} + L_{md} p i_{kd} + L_{md} p i_d$$

$$e_{kd} = 0 = L_{md} p i_{fd} + \left\{ r_{kd} + (L_{md} + L_{kd})p \right\} i_{kd} + L_{md} p i_d$$

Para o circuito de eixo em quadratura -

$$\phi_q = L_{mq} \cdot i_{kq} + (L_{mq} + L_\ell) i_q$$

$$e_{kq} = 0 = \left\{ r_{kq} + (L_{mq} + L_{kq})p \right\} i_{kq} + L_{mq} p i_q$$

ou ainda na forma matricial, temos :

$$\begin{pmatrix} e_{fd} \\ e_{kd} \\ e_{kq} \\ e_d \\ e_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{fd} + (L_{md} + L_{fd})p & L_{md}p & 0 & L_{md}p & 0 \\ L_{md}p & r_{kd} + (L_{md} + L_{kd})p & 0 & L_{md}p & 0 \\ 0 & 0 & r_{kq} + (L_{mq} + L_{kq})p & 0 & L_{mq}p \\ L_{md}p & L_{md}p & L_{mq}p\theta & (L_{md} + L_\ell)p & (L_{mq} + L_\ell)p\theta \\ -L_{md}p\theta & -L_{md}p\theta & L_{mq}p & (L_{md} + L_\ell)p\theta & (L_{ma} + L_\ell)p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{fd} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \\ i_d \\ i_q \end{pmatrix}$$

APENDICE B

A TEORIA DAS REFERÊNCIAS MÚLTIPLAS PARA
MÁQUINA SÍNCRONA

Consideremos a máquina síncrona da figura abaixo, contendo os enrolamentos do estator a_s, b_s, c_s e os enrolamentos a_r e b_r e de campo f no circuito do rotor.

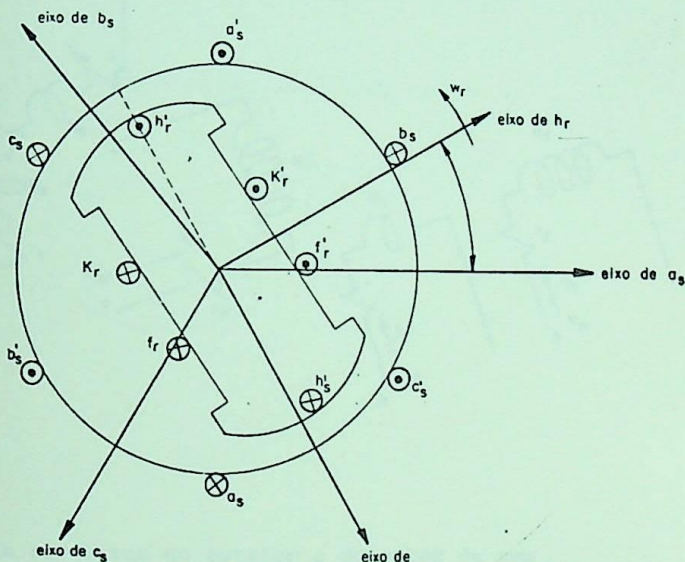


Fig. B-1 - A máquina síncrona trifásica e seus enrolamentos.

Os três enrolamentos do estator idênticos, simetricamente distribuídos com N_Δ espiras por fase e de resistência r_Δ por fase.

O rotor é equipado com um enrolamento de campo com N_f espiras e resistência r_f , e dois enrolamentos amortecedores, um com N_k espiras e resistência r_k no mesmo eixo magnético que o do campo, e o segundo enrolamento amortecedor com N_h espiras e resistência r_h , representados esquematicamente na figura abaixo:

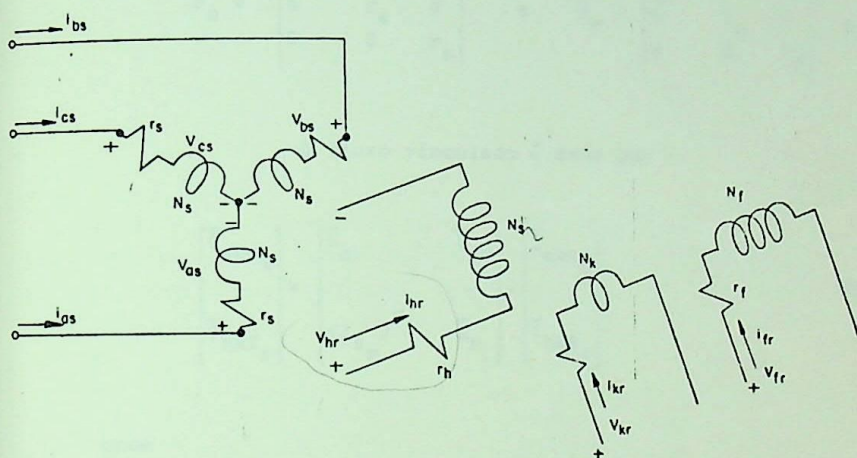


Fig. B-2 - Os circuitos do estator e do rotor de uma Máquina Síncrona

As equações de tensão podem ser representadas matricialmente por :

$$\bar{V}_{abc_s} = \bar{r}_s \cdot \bar{i}_{abc_s} + p \cdot \bar{\phi}_{abc_s}$$

Eq. B-1

$$\bar{V}_{hkf_r} = \bar{r}_r \cdot \bar{i}_{hkf_r} + p \cdot \bar{\phi}_{hkf_r}$$

onde :

$$\begin{pmatrix} f_{abc_s} \end{pmatrix}^T = \begin{vmatrix} f_{a_s} & \vdots & f_{b_s} & \vdots & f_{c_s} \end{vmatrix}$$

Eq. B-2

$$\begin{pmatrix} f_{hkf_r} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f_{h_r} & \vdots & f_{k_r} & \vdots & f_{f_r} \end{vmatrix}$$

e ainda

$$\bar{r}_s = \begin{vmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{vmatrix} \quad e \quad \bar{r}_r = \begin{vmatrix} r_h & 0 & 0 \\ 0 & r_k & 0 \\ 0 & 0 & r_f \end{vmatrix} \quad \text{Eq. B-3}$$

O fluxo vinculado é dado por :

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_{abc_s} \\ \bar{\phi}_{hkf_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{L}_s & \bar{L}_{sr} \\ (L_{sr})^T & \bar{L}_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{i}_{abc_s} \\ \bar{i}_{hkf_r} \end{pmatrix} \quad \text{Eq. B-4}$$

onde

$$L_s = \begin{pmatrix} L_{aa_s} & L_{ab_s} & L_{ac_s} \\ L_{ba_s} & L_{bb_s} & L_{bc_s} \\ L_{ca_s} & L_{cb_s} & L_{cc_s} \end{pmatrix} \quad \text{Eq. B-5}$$

e

$$\bar{L}_r = \begin{pmatrix} L_{hh_r} & L_{hk_r} & L_{hf_r} \\ L_{kh_r} & L_{kk_r} & L_{kf_r} \\ L_{fh_r} & L_{fk_r} & L_{ff_r} \end{pmatrix} \quad \text{Eq. B-6}$$

$$\bar{L}_{s_r} = \begin{pmatrix} L_{ash_r} & L_{ask_r} & L_{asf_r} \\ L_{bsh_r} & L_{bsh_r} & L_{bsf_r} \\ L_{csh_r} & L_{csh_r} & L_{csf_r} \end{pmatrix} \quad \text{Eq. B-7}$$

As expressões das matrizes indutâncias \bar{L}_s , \bar{L}_r e \bar{L}_{rs} tem longos desenvolvimentos, conforme mostrado na referências II - 5,7 sem maior importância aqui, motivo pelo qual apenas tomaremos os resultados finais, ou seja:

$$\bar{L}_s = \begin{pmatrix} L_{2s} + L_A - L_B \cdot \cos 2\theta_r & -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos 2(\theta_r - \frac{\pi}{3}) & -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos 2(\theta_r + \frac{\pi}{3}) \\ -\frac{1}{2}L_A - L_B \cdot \cos 2(\theta_r - \frac{\pi}{3}) & L_{2s} + L_A - L_B \cos 2(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos 2(\theta_r + \pi) \\ -\frac{1}{2}L_A - L_B \cdot \cos 2(\theta_r + \frac{\pi}{3}) & -\frac{1}{2}L_A - L_B \cos 2(\theta_r + \pi) & L_{2s} + L_A - L_B \cos 2(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \quad \text{Eq. B-8}$$

$$\bar{L}_r = \begin{pmatrix} L_{\ell h} + L_{mh} & 0 & 0 \\ 0 & L_{\ell k} + L_{mk} & L_{kf} \\ 0 & L_{kf} & L_{\ell f} + L_{mf} \end{pmatrix} \quad \text{Eq. B-9}$$

e ainda

$$\bar{L}_{sr} = \begin{pmatrix} L_{sh} \cos \theta_r & L_{sk} \cdot \text{sen} \theta_r & L_{sf} \cdot \text{sen} \theta_r \\ L_{sh} \cdot \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & L_{sk} \cdot \text{sen}(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & L_{sf} \cdot \text{sen}(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ L_{sh} \cdot \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & L_{sk} \cdot \text{sen}(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & L_{sf} \cdot \text{sen}(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \quad \text{Eq. B-10}$$

onde

$$L_A = \left(\frac{N_s}{2}\right)^2 \pi \cdot \frac{\ell \mu_o r}{2} \left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2}\right) \quad \text{eq. B-11}$$

$$L_B = \left(\frac{N_s}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{\ell \mu_o r}{2} \left(\frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2}\right)$$

Sendo ainda,

ℓ → comprimento na direção axial do rotor

μ_o → permeabilidade magnética do meio

g_1 → comprimento mínimo do entreferro

g_2 → comprimento máximo do entreferro

r → raio interno do estator

L_{ℓ} → indutâncias de dispersão

L_{mf} → indutância de magnetização

$$L_{sf} = \frac{N_f}{N_s} \cdot (L_A + L_B)$$

Eq. B-12

$$L_{mf} = \left(\frac{N_s}{N_s}\right)^2 \cdot (L_A + L_B)$$

e finalmente as reatâncias de magnetização de eixo direto e em quadratura a serem introduzidas :

$$L_{mq} = \frac{3}{2} (L_A - L_B)$$

Eq. B-13

$$L_{md} = \frac{3}{2} (L_A + L_B)$$

Na análise das máquinas síncronas as variáveis do rotor costumam ser referidas ao estator. As equações de transformação das variáveis abc para o sistema de eixos de referencia fixa do no rotor é a mesma utilizada nas equações de Park do Apêndice A que conforme já mencionamos, pode ser analisada como um caso particular do mostrado abaixo, fazendo $\theta_{ct} = 0$, e ainda $\theta = \theta_r$ ou seja $\omega = \omega_r$, isto é,

$$\bar{f}_{qdo} = \bar{A}_3 \cdot \bar{f}_{abc}$$

Eq. B-14

$$\bar{f}_{abc} = \bar{A}_3^{-1} \cdot \bar{f}_{qdo}$$

e sendo a matriz \bar{A}_3 dada por :

$$\bar{A}_3 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos\beta & \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) \\ \text{sen}\beta & \text{sen}(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \text{sen}(\beta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Eq. B-15

onde

$$v_0' = \frac{d\phi_0}{dt} + r \cdot i_0$$

Expressando ϕ_a , ϕ_b , ϕ_c em termos de ϕ_d , ϕ_q , ϕ_0 através da transformação inversa, diferenciando em relação a t e simplificando temos :

$$v_d = \frac{d\phi_d}{dt} - \phi_q \cdot \frac{d\theta}{dt} + r i_d$$

$$v_q = \frac{d\phi_q}{dt} + \phi_d \cdot \frac{d\theta}{dt} + r i_q$$

Eq. A-17

$$v_0 = \frac{d\phi_0}{dt} + r i_0$$

Este conjunto de equações A-17 constituem as chamadas *Equações de Park* em homenagem a R.H.Park que as desenvolveu.

As equações de Park podem ser melhor entendidas, procedendo a uma análise no diagrama da fig.A-1

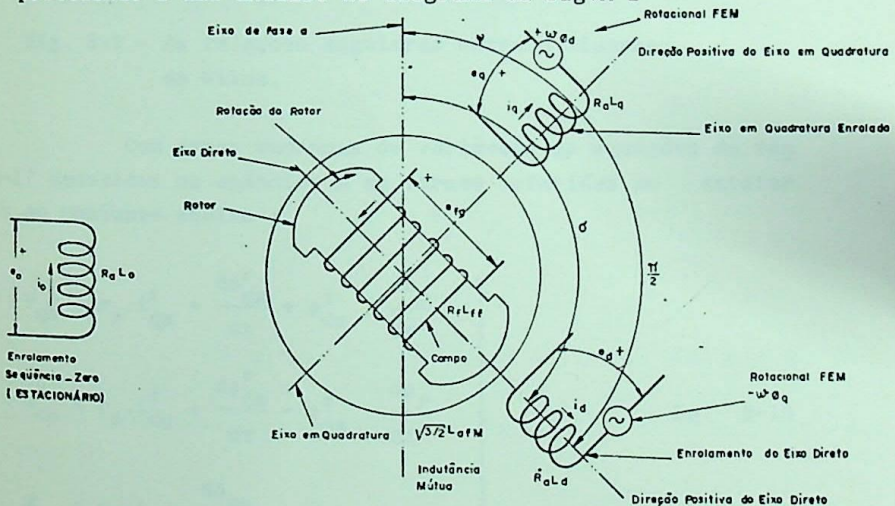


Fig. A-1- Representação de uma Máquina Síncrona pelos Eixo Direto, Eixo em Quadratura e o Enrolamento de Sequência Zero.

$$\beta = \theta - \theta_{ct}$$

Conforme a figura abaixo :

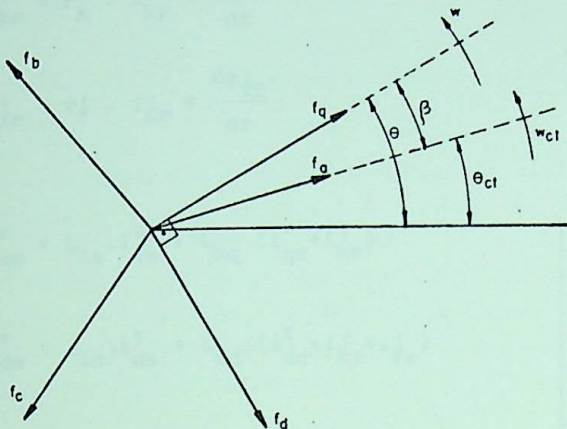


Fig. B-3 - As relações angulares entre o sistema de eixos.

Com essas mudanças de variáveis as equações de tensão A-17 deduzidas no apêndice A se tornam referidas ao estator iguais ao conjunto abaixo :

$$\left. \begin{aligned} v_{qs}^r &= r_s \cdot i_{qs}^r + \frac{d\phi_{qs}^r}{dt} + \phi_{ds}^r \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ v_{ds}^r &= r_s \cdot i_{ds}^r + \frac{d\phi_{ds}^r}{dt} - \phi_{qs}^r \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ v_{os} &= r_s \cdot i_{os} + \frac{d\phi_{os}}{dt} \end{aligned} \right\} \text{Eq. B-16}$$

$$\begin{aligned}
 v'_{hr} &= r'_h \cdot i'_{hr} + \frac{d\phi'_{hr}}{dt} \\
 v'_{kr} &= r'_k \cdot i'_{kr} + \frac{d\phi'_{kr}}{dt} \\
 v'_{fr} &= r'_f \cdot i'_{fr} + \frac{d\phi'_{fr}}{dt}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} v'_{hr} \\ v'_{kr} \\ v'_{fr} \end{aligned}} \right\} \text{Eq. B-17}$$

onde :

$$\begin{aligned}
 \phi^r_{qs} &= L_{\ell s} \cdot i^r_{qs} + L_{mq} (i^r_{qs} + i'_{hr}) \\
 \phi^r_{ds} &= L_{\ell s} \cdot i^r_{ds} + L_{md} (i^r_{ds} + i'_{kr} + i'_{fr}) \\
 \phi_{os} &= L_{\ell s} \cdot i_{os}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \phi^r_{qs} \\ \phi^r_{ds} \\ \phi_{os} \end{aligned}} \right\} \text{Eq. B-18}$$

$$\begin{aligned}
 \phi'_{hr} &= L'_{\ell h} \cdot i'_{hr} + L_{mq} (i_{qs} + i'_{hr}) \\
 \phi'_{kr} &= L'_{\ell k} \cdot i'_{kr} + L_{md} (i_{ds} + i'_{kr} + i'_{fr}) \\
 \phi'_{fr} &= L'_{\ell f} \cdot i'_{fr} + L_{md} (i_{ds} + i'_{kr} + i'_{fr})
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \phi'_{hr} \\ \phi'_{kr} \\ \phi'_{fr} \end{aligned}} \right\} \text{Eq. B-19}$$

As equações B-16 e B-17 sugerem a montagem do circuito equivalente para uma máquina síncrona com os eixos d e q fixos no rotor, conforme mostrado nas figs. II-7, II-8 e II-9 do capítulo II.

APÊNDICE C

O EFEITO DA SATURAÇÃO NAS
MÁQUINAS SÍNCRONAS

A saturação é um efeito baseado no fluxo do entreferro da máquina.

Consideremos o diagrama vetorial da fig.II-3 e façamos a análise dos fluxos na máquina. O fluxo no entreferro ϕ_a induz no enrolamento da armadura a tensão E_I a qual é proporcional a ϕ_a e atrasado, de 90° dele, conforme fig.C-I. Para produzir o fluxo ϕ_a , deve-se existir uma FMM, $n_{fd} \cdot I_T$, onde n_{fd} é o número de espiras do enrolamento do campo e I_T é a corrente do campo que nos fornece a tensão na armadura E_I .

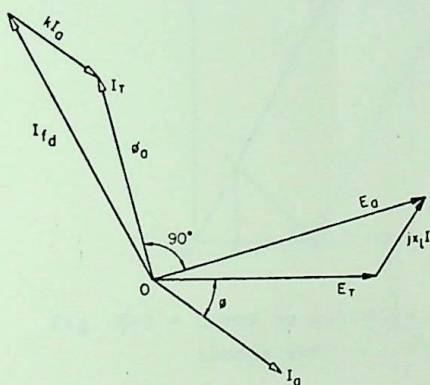


Fig.C-I - Diagrama vetorial de uma M.S. de polos não salientes.

A FMM $n_{fd} \cdot I_T$ é constituída de duas componentes, ou seja, a FMM $n_{fd} \cdot I_{fd}$ do campo e a FMM $n_a I_a$ da reação da armadura, isto é,

$$n_{fd} \cdot \dot{I}_T = n_{fd} \cdot \dot{I}_{fd} + n_a \dot{I}_a$$

Eq. C-1

ou

$$I_T = I_{fd} + \frac{n_a}{n_{fd}} \cdot I_a = I_{fd} + k \cdot I_a$$

Esses valores estão relacionados graficamente pela fig. C-2.

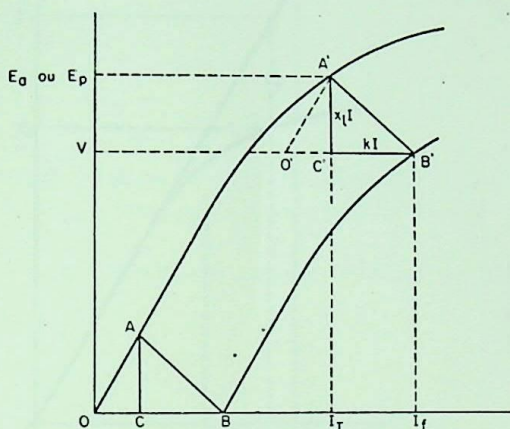


Fig. C-2 - Curva de saturação a vazio, com fator de potência zero, e o triângulo de Potier.

Da figura C-2 tiramos as seguintes relações aritméticas :

$$E_T = E_q - x_l \cdot I_q$$

Eq. C-2

$$I_{fd} = I_T + k I_a$$

O fato das duas curvas da fig. C-2 serem aproximadamente paralelas, permitiu-nos definir uma nova reatância, X_p , a

reatância de Potier, dada pelo cateto vertical do triângulo de Potier. Ela substitui a reatância de dispersão X_d no diagrama vetorial, e a tensão E_p atrás da reatância X_p substitui a tensão E_a da fig. C-1, e a saturação passa a ser considerada em termos de E_p ao invés de E_a .

Quando se pretende representar o efeito da saturação nos diagramas vetoriais normalmente recorreremos ao gráfico da fig. C-3 para determinarmos as componentes de corrente de campo I_s e tensão da armadura E_s .

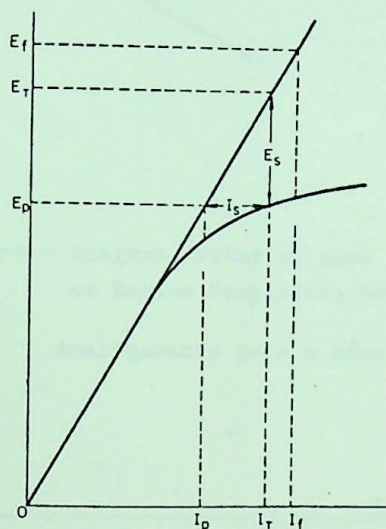


Fig. C-3 - Efeito da saturação nas máquinas síncronas
Determinação das componentes E_s e I_s .

Procedendo às substituições mencionadas anteriormente, o diagrama da fig. II-3 passará a ser representado por :

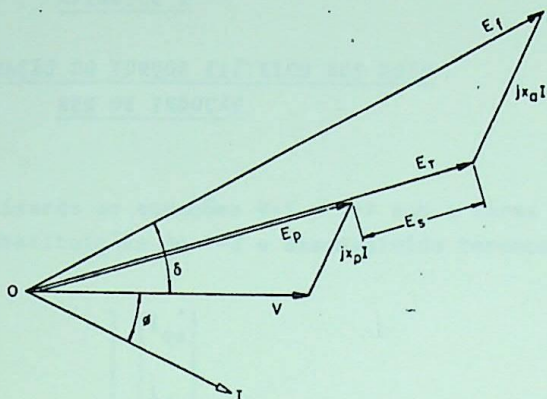


Fig.C-4 - Diagrama vetorial para uma M.S. de Rotor liso, em Regime Permanente sob efeito de saturação.

Analogamente para a máquina de polos salientes

teremos :

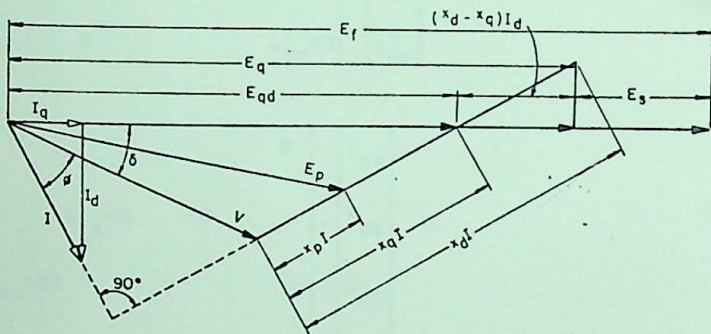


Fig.C-5 - Diagrama vetorial para uma M.S. de polos salientes em R. Permanente, sob efeito de saturação.

APÊNDICE D

DETERMINAÇÃO DO TORQUE ELÉTRICO NOS MOTORES DE INDUÇÃO

Utilizando as equações V-1 e V-2 sob a forma matricial, efetuadas as substituições de V-3 e desenvolvido teremos :

$$\begin{pmatrix} v_{qs} \\ v_{ds} \\ v'_{qr} \\ v'_{dr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s & & & \\ & r_s & & \\ & & r'_r & \\ & & & r'_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \end{pmatrix} + \\
 + \begin{pmatrix} L_{\ell s} + M & & & \\ & L_{\ell s} + M & & \\ M & & L'_{\ell r} + M & \\ & & & L'_{\ell r} + M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \end{pmatrix} + \\
 + \omega \begin{pmatrix} & & & M \\ & L_{\ell s} + M & & -M \\ -(L_{\ell s} + M) & & & \\ & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \end{pmatrix} -$$

$$\begin{aligned}
 & -\omega \begin{pmatrix} M & L'_{\ell r} + M \\ -M & -(L'_{\ell r} + M) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \end{pmatrix} \\
 & + \omega'_r \begin{pmatrix} -M & -(L'_{\ell r} + M) \\ M & (L'_{\ell r} + M) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad \text{Eq. D-1}$$

Para m fase e p polos no rotor, teremos para o torque,

$$\begin{aligned}
 T_e &= \left(\frac{m}{2}\right) \cdot \left(\frac{p}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} i_{qs} & i_{ds} & i'_{qr} & i'_{dr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{m}{2}\right) \cdot \left(\frac{p}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} i_{qs} & i_{ds} & i'_{qr} & i'_{dr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mi_{ds} & -(L'_{\ell r} + M)i'_{dr} \\ Mi_{qs} & +(L'_{\ell r} + M)i'_{qr} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

que desenvolvido e simplificado nos fornece :

$$T_e = \left(\frac{m}{2}\right) \cdot \left(\frac{D}{2}\right) \cdot M \cdot \left(i_{qs} \cdot i'_{dr} - i'_{qr} \cdot i_{ds} \right)$$

Eq. D-2

ou ainda :

$$T_e = \left(\frac{m}{2}\right) \cdot \left(\frac{D}{2}\right) \cdot \left(M i_{qs} \cdot i'_{dr} - M i'_{qr} \cdot i_{ds} + (L'_r i_{qr} i'_{dr} - L'_r i'_{qr} i_{dr}) \right) \\ + \left(\frac{m}{2}\right) \cdot \left(\frac{D}{2}\right) \cdot \left((M i_{qs} + L'_r i'_{qr}) i'_{dr} - (M i_{ds} + L'_r i'_{dr}) i'_{qr} \right)$$

ou

$$T_e = \left(\frac{m}{2}\right) \cdot \left(\frac{D}{2}\right) \cdot \left(\phi'_{qr} \cdot i'_{dr} - \phi'_{dr} \cdot i'_{qr} \right)$$

Eq. D-3

APÊNDICE E

EQUAÇÕES PARA REPRESENTAÇÃO DE UM
MOTOR DE INDUÇÃO NOS ESTUDOS DE
ESTABILIDADE TRANSITÓRIA

Consideremos o circuito da figura E-1 abaixo e sejam as equações de Stanley (componentes α e β) a ele associadas :

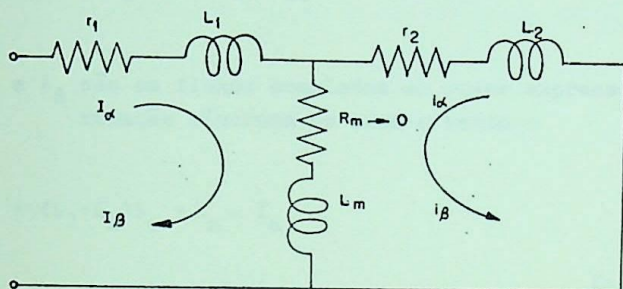


Fig. E-1 - Circuito Equivalente de um motor de indução.

a) Tensões no Estator -

$$E_{\alpha} = r_1 I_{\alpha} + \frac{d\phi_{\alpha}}{dt} - \phi_{\beta} \cdot \omega \quad \text{Eq. E-1}$$

onde :

$$\phi_{\beta} = (L_1 + L_m) I_{\beta} + L_m \cdot i_{\beta}$$

e ainda,

$$E_{\beta} = r_1 I_{\beta} + \frac{d\phi_{\beta}}{dt} + \phi_{\alpha} \cdot \omega \quad \text{Eq. E-2}$$

onde:

$$\phi_{\alpha} = (L_1 + L_m) I_{\alpha} + L_m \cdot i_{\alpha}$$

Para condições equilibradas de operação, E_α e E_β serão quantidades contínuas.

ϕ_α e ϕ_β serão fluxos acoplados ao estator.

b) Tensões no Rotor -

$$0 = \frac{d\lambda_\alpha}{dt} + r_2 i_\alpha + \lambda_\beta \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Eq. E-3

$$0 = \frac{d\lambda_\beta}{dt} + r_2 i_\beta - \lambda_\alpha \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

onde:

λ_α e λ_β são os fluxos acoplados ao rotor expressos na rotação síncrona do eixo e sendo :

$$\lambda_\alpha = (L_2 + L_m) i_\alpha + L_m \cdot I_\alpha$$

e

Eq. E-4

$$\lambda_\beta = (L_2 + L_m) i_\beta + L_m \cdot I_\beta$$

Podemos então expressar o torque elétrico pela seguinte expressão :

$$T_e = \lambda_\beta \cdot i_\alpha - \lambda_\alpha \cdot i_\beta$$

Eq. E-5

Sob condições normais de estado permanente

$\frac{d\phi_\alpha}{dt}$ e $\frac{d\phi_\beta}{dt}$ são iguais a zero (para o estator).

Todavia para o rotor não podemos desprezar uma vez que essas quantidades variam com a frequência escorregamento assim:

$$\frac{d\lambda}{dt} \neq 0$$

Portanto podemos escrever para o estator

$$E_{\alpha} = r_1 I_{\alpha} - \phi_{\beta} \cdot \omega$$

Eq. E-6

$$E_{\beta} = r_1 I_{\beta} - \phi_{\alpha} \cdot \omega$$

Expressando essas tensões em termos da corrente do estator (eixos α e β) na expressão E-4 de λ_{β} acima, teremos :

$$i_{\beta} = \frac{\lambda_{\beta} - L_m \cdot I_{\beta}}{L_2 + L_m}$$

Eq. E-7

Substituindo i_{β} na expressão de ϕ_{β} teremos

$$E_{\alpha} = r_1 I_{\alpha} - \omega(L_1 + L_m - \frac{L_m^2}{L_2 + L_m}) I_{\beta} - \frac{\omega L_m}{L_2 + L_m} \cdot \lambda_{\beta}$$

Eq. E-9

e analogamente :

$$i_{\alpha} = \frac{\lambda_{\alpha} - L_m i_{\alpha}}{L_2 + L_m}$$

donde :

$$\phi_{\alpha} = (L_1 + L_m) I_{\beta} + L_m \frac{\lambda_{\alpha} - L_m i_{\alpha}}{L_2 + L_m}$$

Eq. E-10

portanto :

$$E_{\beta} = r_1 I_{\beta} + \omega(L_1 + L_m - \frac{L_m^2}{L_2 + L_m}) I_{\alpha} + \frac{\omega L_m}{L_2 + L_m} \lambda_{\alpha}$$

Eq. E-11

de E_{α} tiramos I_{β} e de E_{β} tiramos I_{α}

$$I_{\alpha} = \frac{E_{\beta} - \omega \cdot (\frac{L_m^2}{L_2 + L_m} \lambda_{\alpha})}{\omega \cdot (L_1 + L_m - \frac{L_m^2}{L_2 + L_m})} - \frac{r_1}{\omega \cdot (L_1 + L_m - \frac{L_m^2}{L_2 + L_m})} \cdot I_{\beta}$$

Eq. E-12

$$I_{\beta} = \frac{-(E_{\alpha} + \omega \frac{L_m}{L_2 + L_m} \cdot \lambda_{\beta})}{\omega(L_1 + L_m - \frac{L_m^2}{L_2 + L_m})} = \frac{r_1}{\omega(L_1 + L_m - \frac{L_m^2}{L_2 + L_m})} I_{\alpha}$$

Eq. E-13

fazendo :

$$\lambda'_{\alpha} = \frac{L_m}{L_2 + L_m} \cdot \lambda_{\alpha}$$

$$\lambda'_{\beta} = \frac{L_m}{L_2 + L_m} \cdot \lambda_{\beta}$$

Eq. E-14

$$L' = L_1 + L_m - \frac{L_m^2}{L_2 + L_m}$$

teremos :

$$I_{\alpha} = \frac{E_{\beta} - \omega \lambda'_{\alpha} - r_1 I_{\beta}}{\omega L'}$$

Eq. E-15

$$I_{\beta} = \frac{-(E_{\alpha} + \omega \lambda'_{\beta}) - r_1 I_{\alpha}}{\omega L'}$$

Voltando ao item b, equações do rotor tiramos:

$$\frac{d\lambda_{\alpha}}{dt} = -r_2 i_{\alpha} - \lambda_{\beta} \frac{d\theta}{dt}$$

Eq. E-16

$$\frac{d\lambda_{\beta}}{dt} = -r_2 i_{\beta} + \lambda_{\alpha} \frac{d\theta}{dt}$$

Substituímos os valores de i_{α} e i_{β} encontrados anteriormente, temos :

$$\frac{d\lambda_{\alpha}}{dt} = \frac{-r_2}{L_2 + L_m} \cdot \lambda_{\alpha} + \frac{r_2 L_m}{L_2 + L_m} I_{\alpha} - \lambda_{\beta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\lambda_{\beta}}{dt} = \frac{-r_2}{L_2+L_m} \lambda_{\beta} + \frac{r_2+L_m}{L_2+L_m} I_{\beta} + \lambda_{\alpha} \frac{d\theta}{dt}$$

Substituindo os valores de λ'_{α} e λ'_{β} e simplificando temos :

$$\frac{d\lambda'_{\alpha}}{dt} = -\frac{r_2}{L_2+L_m} \cdot \lambda'_{\alpha} + \frac{r_2 L_m^2}{(L_2+L_m)^2} \cdot I_{\alpha} - \lambda'_{\beta} \frac{d\theta}{dt} \quad \text{Eq. E-17}$$

analogamente :

$$\frac{d\lambda'_{\beta}}{dt} = -\frac{r_2}{L_2+L_m} \cdot \lambda'_{\beta} + \frac{r_2 L_m^2}{(L_2+L_m)^2} I_{\beta} + \lambda'_{\alpha} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad \text{Eq. E-18}$$

a) Determinação da Expressão de Corrente -

Sejam as composições :

$$\lambda' = \lambda'_{\alpha} + j \lambda'_{\beta}$$

$$i'_1 = I_{\alpha} + j I_{\beta} \quad \text{Eq. E-19}$$

$$e = E_{\alpha} + j E_{\beta}$$

Como os eixos α e β são ortogonais passaremos a usar o novo sistema de variáveis complexas conforme composições indicadas.

$$i'_1 = I_{\alpha} + j I_{\beta}$$

Das expressões de I_{α} e I_{β} temos :

$$I_{\alpha} + j I_{\beta} = \frac{E_{\beta} - \omega \lambda'_{\alpha} - r_1 I_{\beta}}{\omega L'} + j \left| \frac{-(E_{\alpha} + j \omega \lambda'_{\beta}) - r_1 I_{\alpha}}{\omega L'} \right| \quad \text{Eq. E-20}$$

$$i_1' = \frac{1}{\omega L'} \cdot (E_\beta - jE_\alpha) - \frac{1}{L'} (\lambda_\alpha' + j\lambda_\beta') - \frac{r_1}{\omega L'} (I_\beta - jI_\alpha)$$

ou

$$i_1' = \underbrace{\frac{1}{j\omega L'} (E_\alpha + jE_\beta)}_{= e} - \frac{1}{L'} \underbrace{(\lambda_\alpha' + j\lambda_\beta')}_{= x} - \frac{r_1}{j\omega L'} \underbrace{(I_\alpha + jI_\beta)}_{= i_1'}$$

donde :

$$i_1' = \frac{-1}{\omega L'} (\omega \lambda' + je) + j \frac{r_1}{\omega L'} i_1' \quad \text{Eq. E-21}$$

Com o mesmo raciocínio anterior :

$$\frac{d\lambda'}{dt} = \frac{d\lambda_\alpha'}{dt} + j \cdot \frac{d\lambda_\beta'}{dt}$$

que desenvolvidos teremos :

$$\frac{d\lambda'}{dt} = \frac{-r_2}{L_2 + L_m} \lambda' + \frac{r_2 L_m^2}{(L_2 + L_m)^2} i_1' + j\lambda' \frac{d\theta}{dt} \quad \text{Eq. E-22}$$

Da expressão de i_1' temos :

$$\omega L' \cdot i_1' = -\omega \lambda' - je + jr_1 i_1'$$

ou

$$j\omega L' i_1' = e - j\omega \lambda' - r_1 i_1'$$

definindo $j\omega \lambda' = e'$, teremos :

$$j\omega L' i_1' = (e - e') - r_1 i_1'$$

donde

$$i_1' = \frac{e - e'}{r_1 + j\omega L'} \quad \text{Eq. E-23}$$

b) Determinação da Expressão Referente a Tensão - $\frac{de'}{dt}$ -

Seja :

$$\frac{d\lambda'}{dt} = \frac{d\lambda'_\alpha}{dt} + j \frac{d\lambda'_\beta}{dt}$$

ou

$$\frac{d\lambda'}{dt} = \frac{-r_2}{L_2 + L_m} \cdot \lambda' + \frac{r_2 L_m^2}{(L_2 + L_m)^2} \cdot i'_1 + j \lambda' \frac{d\theta}{dt}$$

Multiplicando membro a membro por $j\omega$, temos

$$\frac{dj\omega\lambda'}{dt} = \frac{-r_2}{L_m + L_2} j\omega\lambda' + \frac{j\omega \cdot r_2 L_m^2}{(L_2 + L_m)^2} \cdot i'_1 + j j\omega\lambda' \frac{d\theta}{dt}$$

Como $j\omega\lambda' = e'$, vem :

$$\frac{de'}{dt} = \frac{-r_2}{L_2 + L_m} \cdot e' + j \cdot \omega \frac{r_2 L_m^2}{(L_2 + L_m)^2} i'_1 + je' \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Eq. E-24

Definindo :

$$T'_{do} = \frac{L_2 + L_m}{r_2}$$

teremos :

$$\frac{r_2 L_m^2}{(L_2 + L_m)^2} = \frac{1}{T'_{do}} \cdot (L_1 + L_m - L')$$

e substituindo na equação E-24, temos :

$$\frac{de'}{dt} = \frac{-1}{T'_{do}} \left[e' - j\omega (L_1 + L_m - L') i'_1 \right] + je' \frac{d\theta}{dt} \quad \text{Eq. E-25}$$

O conjunto de equações i'_1 e $\frac{de'}{dt}$ deduzidas ante

riormente constitui uma conveniente forma de representar um motor de indução no estudo de estabilidade, dinâmica, onde os transitórios elétricos do rotor serão considerados.

O motor pode ser representado por uma tensão interna e' a qual é uma variável de estado complexa, em série, com uma impedância $r_1 + jX'$ onde :

r_1 = resistência do estator

$$X' = (X_1 + X_m) - \frac{X_m^2}{X_2 + X_m}$$

O diagrama de blocos correspondente está mostrado na fig. E-2 abaixo.

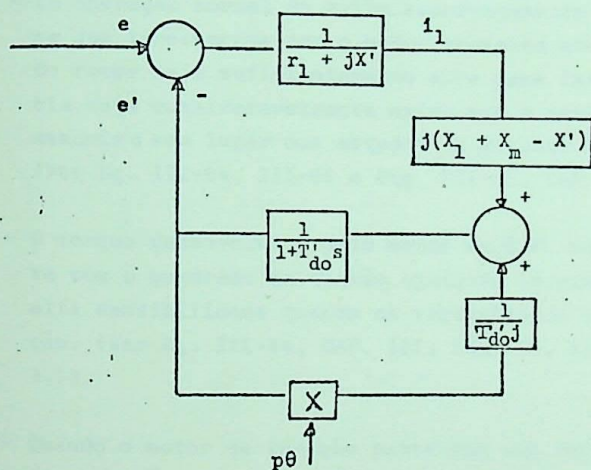


Fig. E-2 - Diagrama de blocos para o estudo dinâmico do motor de indução em regime transitório.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

Neste capítulo final de nosso trabalho, procuraremos mostrar e comentar alguns dos resultados encontrados praticamente na análise de simulação, bem como, a interpretação teórica de algumas características que ocorrem nas condições transitórias' de operação de uma máquina de indução.

Mencionaremos a seguir as conclusões que julgamos ser as mais importantes na realização deste trabalho :

- 1 - A aplicação de uma tensão alternada repentina a um circuito reativo, produzirá um fluxo e uma corrente transitória que depende do ponto em que a onda de tensão é tomada no instante do fechamento da chave de energização. (Ver Eq. I-21 CAP. I pág. 19).
- 2 - Em operação normal de baixo escorregamento o torque cresce quase que linearmente com o escorregamento até que a frequência do rotor seja suficientemente alta para fazer com que a reatância seja consideravelmente maior que a resistencia, para então assumiro seu lugar nos estudos da máquina de indução. (Ver Eq. III-64, III-66 e Fig. III-11, CAP. III págs. 75 e 76)
- 3 - O torque desenvolvido pelo motor em R.P. varia proporcionalmente com o quadrado da tensão aplicada ao estator, o que lhe dá alta sensibilidade quanto as variações de tensão de alimentação. (Ver Eq. III-64, CAP. III, Pág. 75, Fig. IV-9 e REF. IV-3,1).
- 4 - Quando o motor de indução parte com uma repentina tensão aplicada, terá um torque elétrico transitório na frequência fundamental. Se partir a plena tensão, o máximo torque elétrico pode ser duas vezes ou mais o torque normal entregue. (Ver Eq. III-66 e REF. IV-3, 3 pág. 87).
- 5 - Em condições transitórias, o torque do motor pode ser desenvolvido em velocidades acima da síncrona e o torque do gerador pode ser desenvolvido em velocidades abaixo da síncrona. (Ver Eq. D-2, D-3 pág. 121, e REF. IV-3,1).

- 6 - Grandes erros podem ser introduzidos pelo uso da característica "Torque x escorregamento" de estado permanente, em condições transitórias. (Ver REF: IV-3,1).
- 7 - O uso do sistema de eixos de referências múltiplas, permite a análise da máquina segundo as Equações de Stanley-Kron se a referência for fixa no estator $\omega = 0$, ou segundo as equações de Park se a referência for fixa no rotor, $\omega = \omega_r$, ou uma análise síncrona se o sistema de eixos girar com a mesma frequência angular que a do sistema, isto é, $\omega = \omega_e$.
- 8 - Comparativamente a máquina de indução é representada por uma reatância transitória x' e uma tensão transitória e' atrás desta reatância nos estudos de estabilidade transitória; nas máquinas síncronas é usual proceder de maneira análoga. (Ver Rq. IV-8, IV-10, Fig. IV-4, Fig. II-20 e REFS. II-5,4 e IV-3,2).
- 9 - A programação analógica analisada através do computador analógico da EFEI RA-770 mostrou-se satisfatória conseguindo os resultados esperados para as correntes i_{qs} , i_{ds} , $i_{q'r}$ e $i_{d'r}$, bem como para os fluxos correspondentes conforme se pode observar nos gráficos plotados anexos.
- 10- A análise do torque elétrico obtido através da simulação, acabou apresentando uma pequena oscilação em função do tempo, o que foi interpretado como anomalia entre os resultados esperados.
- 11- A velocidade do rotor em função do tempo cresce relativamente rápida atingindo a ordem de $1,2 \mu$ quando então tem-se os primeiros sinais de sobrecarga no computador.
- 12- A característica "Torque x escorregamento" obtida também não foi satisfatório, devido a oscilação apresentada.
- 13- Julgamos estranhas essas respostas quando comparadas com as obtidas por programa idêntico, mostradas em xerox anexas.
- 14- As características de curto-circuito da máquina também foram analisadas através do mesmo programa, e em etapas futuras, pre

tendemos compará-las com os resultados que serão obtidos a partir da programação digital que se encontra em andamento.

15- Finalmente queremos lembrar que, quando são feitos estudos de estabilidade transitória, são usados diversos modelos para representar os motores de indução. Usualmente em regime permanente são utilizados as representações por :

- a) Impedancia constante
- b) Potencia constante
- c) Corrente constante
- d) Uma combinação destes métodos.

cujos resultados podem ser considerados satisfatórios, dependendo do grau de precisão desejada.

Atualmente tem sido desenvolvido um novo modelo através do uso da teoria de sistemas lineares que nos fornecem soluções próximas as obtidas por soluções numéricas de equações diferenciais não lineares que descrevem o comportamento dos motores de indução. O modelo requer um tempo de computador bem menor que o solicitado nas soluções de equações não lineares.

A utilização destes métodos de linearização das equações que descrevem o comportamento do motor de indução constituirá a nossa próxima etapa de trabalhos na área de máquinas Elétricas. (REF. IV-3,7 pág. 87).

Itajubá, 06 de dezembro de 1975.

N O M E N C L A T U R A

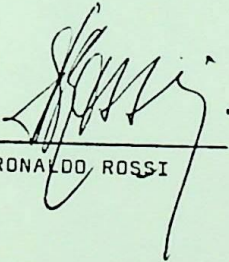
FEM	- Força eletro-motriz induzida
FMM	- Força magneto-motriz induzida
e_{ab}, e_{bc}, e_{ca}	- Tensões entre fases da M.S.
e_a, e_b, e_c ou	- Tensões nas fases da M.S.
V_a, V_b, V_c	
i_a, i_b, i_c	- Correntes nas fases da M.S.
$L_{ab} = L_{bc} = L_{ca} = L_{ma}$	- Coeficiente de indutância mútua <u>en</u> tre as fases <u>a, b, c</u> da M.S.
R_f	- Resistência do enrolamento de campo
L_{ff}	- Coeficiente de auto indutância do campo
$R_a = r$	- Resistência dos enrolamentos da <u>ar</u> madura.
L_{aa}	- Coeficiente de auto indutância do enrolamento da armadura.
$L_a Kd, L_a Kq$	- Coeficiente de indutância mútua <u>en</u> tre os enrolamentos de fase e os enrolamentos amortecedores de eixo direto e em quadratura.
$L_a fd$	- Coeficiente de indutância mútua <u>en</u> tre enrolamento de fase e o enro- lamento de campo.
E_T ou V_T	- Tensões nos terminais da M.S.

- E_I - Tensão induzida nos enrolamentos da M.S.
- X_S - Reatância síncrona da M.S. de polos lisos.
- X_d, X_q - Reatância síncrona de eixo direto e em quadratura de uma M.S.
- E_{2TR} - Tensão induzida nos enrolamentos do rotor quando estiver parado.
- I_d, I_q - Correntes de eixo direto e em quadratura.
- $\varnothing_d, \varnothing_q, \varnothing_o$ - Fluxos da armadura de uma M.S. em eixos direto, em quadratura e de sequência zero.
- $\varnothing_a, \varnothing_b, \varnothing_c$ - Fluxos da armadura de uma M.S.
- \varnothing_{fd} - Fluxo enlaçados no rotor.
- $\varnothing_{Kd} \text{ e } \varnothing_{Kq}$ - Fluxos enlaçados com os amortecedores em eixo direto e em quadratura.
- L_ℓ - Indutância de dispersão de um enrolamento.
- r_{Kd}, r_{Kq} - Resistências dos enrolamentos amortecedores em eixo direto e em quadratura.
- V_d, V_q, V_o - Tensões nos eixos, em quadratura e de sequência zero de uma M.S.
- δ - Deslocamento angular entre o eixo de uma fase e o eixo direto do enrolamento de campo.

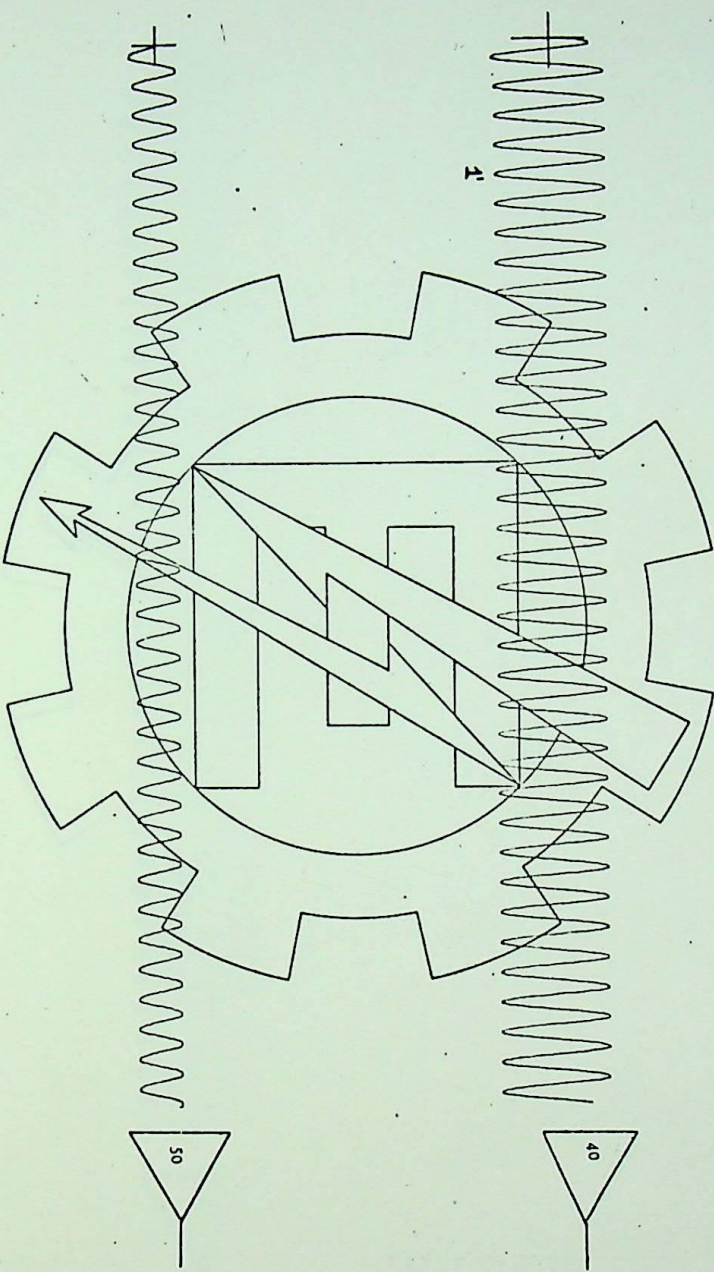
L_{md}, L_{mq}	- Coeficientes de indutâncias mútuas entre os enrolamentos de fase e os de eixos direto e em quadratura
a_s, b_s, c_s	- Enrolamentos de fase do estator.
K_r, h_r, f_r	- Enrolamentos amortecedores e de campo no rotor.
$V_{a,b,c,s}$	- Tensões de fase no estator.
$i_{a,b,c,s}$	- Correntes de fase no estator.
T	- Torque ou conjugado da máquina.
P	- Potência elétrica da máquina
ω	- Frequência angular da rede de <u>ali</u> mentação.
δ	- Ângulo de potência entre E_I e E_T .
E_p	- Tensão de Potier
X_p	- Reatância de Potier
	- Ângulo do fator de potência
r_s e r_r	- Resistências dos enrolamentos do estator e do rotor.
L_{ls} e L_{lr}	- Coeficientes de indutâncias de <u>dis</u> persão do estator e do rotor.
M	- Coeficiente de indutância mútua <u>en</u> tre os enrolamentos do estator e do rotor.
m	- Número de fases da máquina.

- P - Número de polos da máquina
- p - Operador $\frac{d}{dt}$
- I_α, I_β, I_0 - Componentes das correntes do estator segundo os eixos $\alpha, \beta, 0$, de Stanley.
- i_α, i_β, i_0 - Idem para as correntes do rotor.
- E_α, E_β, E_0 - Componentes das tensões do estator, segundo os eixos $\alpha, \beta, 0$ de Stanley
- e_α, e_β, e_0 - Idem para as tensões do rotor.
- $\phi_\alpha, \phi_\beta, \phi_0$ - componentes dos fluxos do rotor e estator segundo os eixos $\alpha, \beta, 0$
- $\psi_\alpha, \psi_\beta, \psi_0$

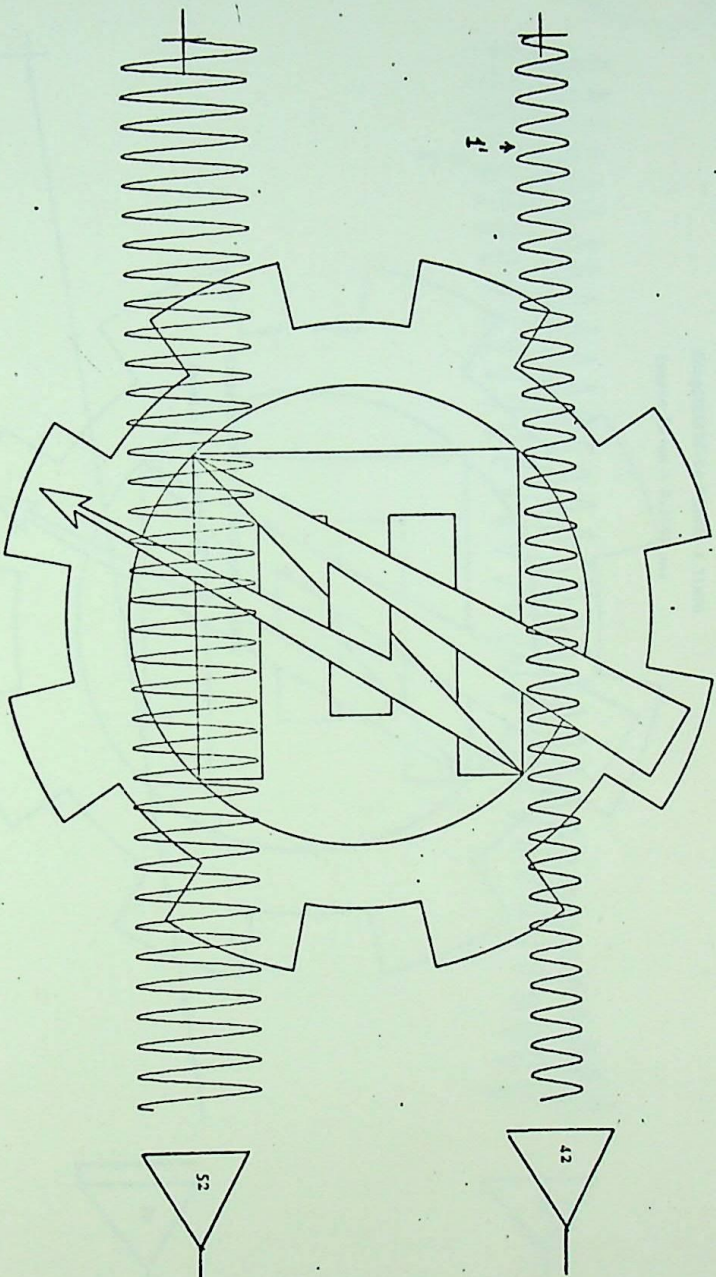
Itajubá, 5 de dezembro de 1975



RONALDO ROSSI



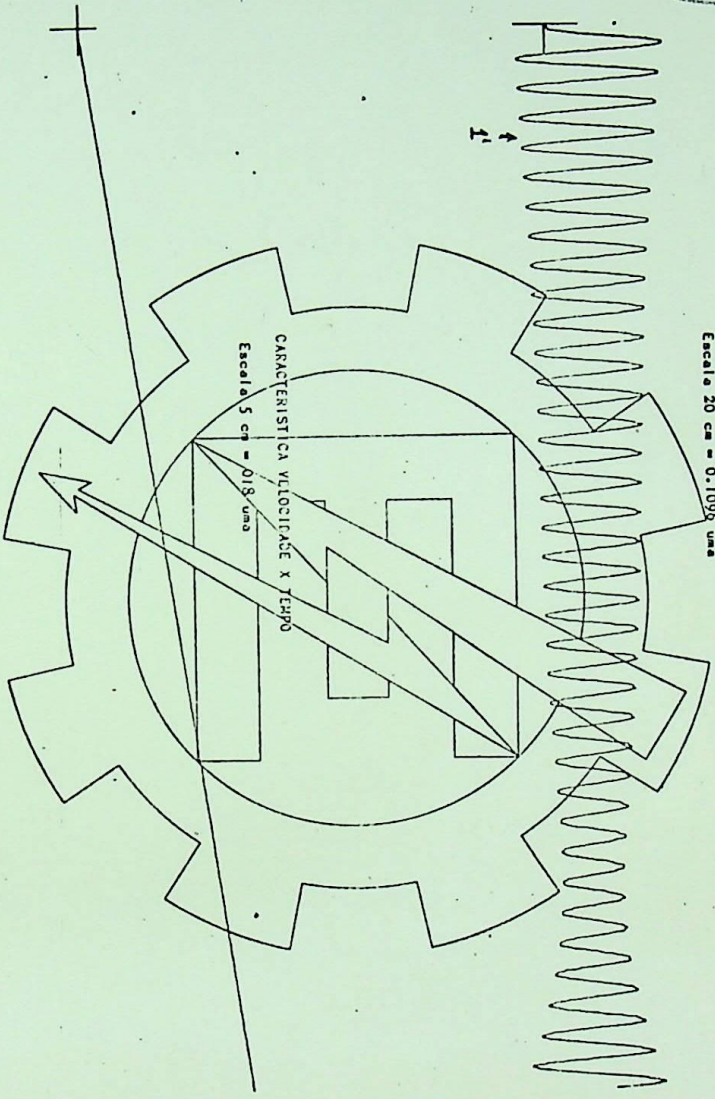
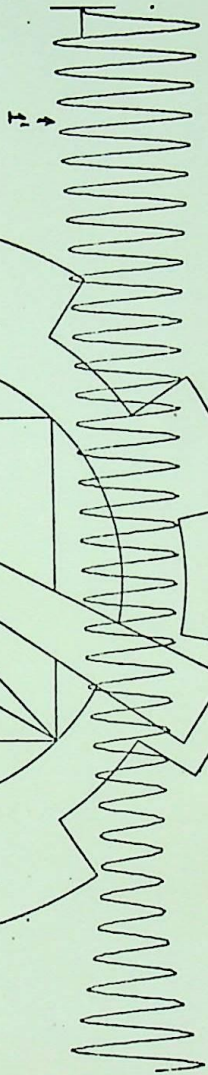
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE LAJUBÁ - DCA - LGS



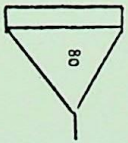
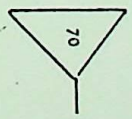
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE CARACAS - DCA - LGS



CARACTERÍSTICA TORQUE X TEMPO
Escala 20 cm = 0.1096 uma



CARACTERÍSTICA VELOCIDADE X TEMPO
Escala 5 cm = 0.18 uma



ESCOLA FEDERAL DE PERNAMBUCO - CAMPUS DE CARUARU - DCA - LCS

