

TESE

136

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBA



ESTUDOS DAS FUNÇÕES
HIPERBÓLICAS E APLICAÇÕES
À ENGENHARIA

Prof. Aécio Zózimo Bustamante

1974

ITAJUBA

MINAS

1

AECIO ZÓZIMO BUSTAMANTE

ESTUDO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E
APLICAÇÕES À ENGENHARIA

Tese apresentada à Comissão de
Pós-Graduação da Escola Federal
de Engenharia de Itajubá, como
parte dos requisitos para a ob
tenção do título de "MESTRE EM
CIÊNCIAS".

1974

ITAJUBÁ

MINAS

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de "MESTRE EM CIÊNCIAS" e aprovada em sua forma original pelo Orientador e pela Comissão de Pós-Graduação.

ORIENTADOR:

Prof. Fernando José Costanti

COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO:

Prof. Francisco de Assis Ferreira

Prof. Irany de Andrade Azevedo

Prof. Anadeu Casal Caminha
Coordenador dos Cursos de
Pós-Graduação

A B S T R A C T

In this job, we presented a study about the hyperbolic functions, in the real numbers joint, as well as in the complex numbers joint, and of its several applications an Engineering course.

We developed, at first, the study of the real hyperbolic functions, emphasising the graphic study, geometric interpretation of the hyperbolic argument, and their derivation and integration.

We made a study of the complex numbers joint, detaching the holomorphic functions that always define a conformal transformation, a powerful and smart instrument for the solution of problems of an Engineering Course.

Then, we developed a study of the complex, hyperbolic functions, showing that these are holomorphic.

Finally, we presented applications of the hyperbolic functions, either real or complex ones, in several problems of and Engineering Course.

S U M Á R I O

Neste trabalho, apresentou-se um estudo sobre as funções hiperbólicas tanto no conjunto dos números reais, como no conjunto dos números complexos, bem como de suas mais variadas aplicações à Engenharia.

Desenvolveu-se inicialmente o estudo das funções hiperbólicas reais, dando ênfase ao estudo gráfico, interpretação geométrica do argumento hiperbólico, derivação e integração das mesmas.

Fez-se um estudo do conjunto dos números complexos, bem como das funções complexas, destacando as funções holomorfas que sempre definem uma transformação conforme, um poderoso e elegante instrumento matemático para solução de problemas da Engenharia.

A seguir desenvolveu-se o estudo das funções hiperbólicas complexas, mostrando que as mesmas são holomorfas.

Finalmente, apresentou-se aplicações das funções hiperbólicas tanto reais, como complexas, em vários problemas de Engenharia.

A G R A D E C I M E N T O S

Agradeço a todos que, de alguma forma,
tenham contribuído para a realização deste trabalho,
especial ao Orientador do mesmo Prof. FERNANDO JOSÉ
TANTI.

te
em
COS

À minha esposa Terezinha
Aos meus filhos Thais, Hernani,
Nelma e Edgar.

CAPÍTULO II

- CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS.....	2.1
2.1 - Definição e propriedades dos números complexos	2.1
2.2 - Operações algébricas de números complexos na forma binomial	2.4
2.3 - Interpretação geométrica dos números complexos	2.6
2.4 - Representação polar dos números complexos	2.7
2.5 - Conjunto de pontos	2.11

CAPÍTULO III

3 - FUNÇÕES DE VARIÁVEIS COMPLEXAS	3.1
3.1 - Variável complexa	3.1
3.2 - Função complexa	3.1
3.3 - Transformações	3.2
3.4 - Coordenadas curvilíneas	3.4
3.5 - Limite das funções complexas	3.5
3.6 - Continuidade	3.7
3.7 - Derivação	3.8
3.8 - Função holomorfa	3.10
3.9 - Equação de Cauchy-Riemann	3.12
3.10- Transformação conforme	3.17
3.11- Integração	3.23
3.12- Derivação de uma função holomorfa,,	3.37
3.13- Desigualdade de Cauchy	3.41
3.14- Equação de Laplace	3.42

Í N D I C E

PÁG.

CAPÍTULO I

1 - FUNÇÕES HIPERBÓLICAS DEFINIDAS NO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS	1.1
1.1 - Origem	1.1
1.2 - Símbolos	1.3
1.3 - Funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico	1.3
1.4 - Outras funções hiperbólicas	1.4
1.5 - Variação e gráfico das funções hiperbólicas diretas	1.6
1.6 - Relação entre as funções hiperbólicas	1.12
1.7 - Interpretação geométrica do argumento hiperbólico	1.13
1.8 - Interpretação geométrica das funções hiperbólicas diretas	1.16
1.9 - Fórmulas decorrentes das definições das funções hiperbólicas diretas..	1.20
1.10- Relações entre funções hiperbólicas e funções trigonométricas	1.22
1.11- Funções hiperbólicas inversas	1.26
1.12- Derivação das funções hiperbólicas	1.35
1.13- Integração das funções hiperbólicas	1.38

CAPÍTULO IV

4 - FUNÇÕES HIPERBÓLICAS COMPLEXAS	4.1
4.1 - Definições das funções hiperbólicas complexas	4.1
4.2 - Propriedades	4.2
4.3 - Holomorfismo das funções hiperbóli- cas complexas	4.2
4.4 - Transformação conforme	4.4
4.5 - Funções hiperbólicas inversas com plexas	4.17
4.6 - Derivação e integração das funções hiperbólicas complexas	4.18

CAPÍTULO V

5 - APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS EM PROBLEMAS DE ENGENHARIA	5.1
5.1 - Introdução	5.1
5.2 - Aplicações das funções hiperbólicas reais	5.1
5.3 - Aplicações das funções hiperbólicas complexas	5.28
6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	6,1

ÍNDICE DE FIGURAS

FIG.	PÁG.
1.1 - Gráfico de $y = \operatorname{sh}x$	1.6
1.2 - Gráfico de $y = \operatorname{ch}x$	1.7
1.3 - Gráfico de $y = \operatorname{tgh}x$	1.8
1.4 - Gráfico de $y = \operatorname{cotgh}x$	1.9
1.5 - Gráfico de $y = \operatorname{sech}x$	1.10
1.6 - Gráfico de $y = \operatorname{cosech}x$	1.11
1.7 - Interpretação geométrica do argumento tri- gonométrico	1.13
1.8 - Interpretação geométrica do argumento <u>hi</u> perbólico	1.14
1.9 - Interpretação geométrica das Funções <u>Hi</u> perbólicas Diretas	1.17
1.10- Gráfico da função inversa da função <u>se</u> no hiperbólico	1.26
1.11- Gráfico da função inversa da função cosse- no hiperbólico	1.28
1.12- Gráfico da função inversa da função <u>tangen</u> te hiperbólica	1.29
1.13- Gráfico da função inversa da função <u>co</u> tangente hiperbólica	1.31
1.14- Gráfico da função inversa da função <u>se</u> cante hiperbólica	1.32
1.15- Gráfico da função inversa da função cosse- cante hiperbólica	1.34

FIG.	PÁG.
2.1 - Interpretação vetorial do número complexo	2.6
2.2 - Interpretação vetorial do número complexo	2.7
2.3 - Representação polar dos números complexos.	2.8
2.4 - Curva contínua orientada	2.14
2.5 - a-Domínio simplesmente conexo b,c - Domínio multiplicamente conexo	2.16
3.1 - Transformação da curva PQ em P'Q'	3.3
3.2 - Representação geométrica da transformação $w = f(z)$	3.4
3.3 - Coordenadas curvilíneas	3.5
3.4 - Representação geométrica do $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	3.6
3.5 - Caminhos percorridos por z	3.9
3.6 - Ângulo de duas curvas orientadas	3.17
3.7 - Sentido da tangente a γ no ponto z_0	3.19
3.8 - Conservação do ângulo de duas curvas na transformação conforme	3.20
3.9 - Integral de linha	3.23
3.10- Caminho fechado γ contido em E	3.28
3.11- Corte de um domínio multiplicamente conexo,,	3.29
3.12- Caminho de z_0 a z	3.32
3.13- Caminho fechado γ que encerra z_0	3.36

FIG.

PÁG.

3.14 - Caminho simples fechado γ que encerra z_0 .	3.38
4.1 - a - Mapeamento da função $w = shz$	4.7
4.1 - b - Plano w	4.8
4.2 - a - Mapeamento da função $w = chz$	4.12
4.2 - b - Plano w	4.13
4.3 - Transformação $w = ch \frac{\pi z}{a}$	4.16
4.4 - Transformação $w = \cotgh \frac{\pi z}{2}$	4.16
4.5 - Transformação $w = L \cotgh \frac{z}{2}$	4.17
5.1 - Ponto P repellido pelo ponto fixo 0	5.3
5.2 - Trajetória de uma partícula eletrizada ..	5.6
5.3 - Cabo sujeito ao esforço de tração	5.8
5.4 - Cabo sujeito ao esforço de tração	5.9
5.5 - Cabo sujeito ao esforço de tração	5.9
5.6 - Fio sujeito ao proprio peso	5.10
5.7 - Posição da catenária	5.13
5.8 - Tensão num ponto qualquer M	6.16
5.9 - Esquema do problema 5.4	5.16
5.10 - Esquema de uma linha telegráfica de A até B	5.18
5.11 - Esquema do problema 5.5	5.20
5.12 - Esquema do problema 5.7	5.29

LISTA DE SÍMBOLOS

		UNIDADES
A	constante	
a	constante	
a	aceleração	[m/s ²]
B	constante	
b	constante	
b	susceptância capacitiva unitária média (ou de serviço) por fase, linha	[Mho/km]
C	conjunto dos números complexos	
C, C ₁ , C ₂	constantes de integração	
C(f)	contra domínio da função	
C	capacidade unitária média	[Farad/km]
D(f)	domínio da função	
d	distância	
E	domínio simplesmente conexo	
E ₁ , E _A , E _B	força eletromotriz	[V]
e	base dos logaritmos neperianos	
F, F ₁ , F ₂	força	[N]
F _x , F _y	força de direções x e y	
f	função	
f	flexa	
g	função	
g	aceleração da gravidade	[m/s ²]
g	condutibilidade de dispersão média, por fase, da linha	Unitária [Mho/km]

UNIDADES .

corrente	[A]
fasor representativo da corrente em uma fase da linha situada a distância x do receptor	[A]
corrente no lado do transmissor	[A]
corrente no lado do receptor	[A]
unidade imaginária	
Jacobiano	
unidade imaginária	
número inteiro	
indusância unitária média	[Henry/km]
logaritmo neperiano	
distância	
comprimento total da linha	[Km]
constante	
número inteiro	
massa do elemento	[Kg]
número natural	
peso	[N]
carga	[C]
conjunto dos números reais	
conjunto dos números reais menos o zero	
conjunto dos números reais não negativos	
reação em A e B	
módulo de z	

	UNIDADES
	resistência unitária [Ohm/km]
o	constante característica
	conjunto
S _m	soma
s	área do setor circular
s	área do setor hiperbólico
s	comprimento do arco
T, T _A , T _B	tensão [N]
Ū _x	fator representativo da tensão para neutro da linha a distância x do receptor [V]
Ū ₁	tensão no lado do transmissor [V]
Ū ₂	tensão no lado do receptor [V]
u	número complexo
v	número complexo
v	velocidade [m/S]
v _o	velocidade inicial [m/S]
x	coordenada, deslocamento
x _C	reatância capacitiva unitária média [Ohm/km]
x _L	reatância indutiva unitária média [Ohm/km]
W	constante real
w	número complexo (variável)
z	coordenada, deslocamento
ȳ	admitância unitária média [Mho/km]
Z	conjunto dos números inteiros
Z, Z _o , Z ₁ ...Z _n	- números complexos (variáveis)

UNIDADES

\bar{z}	conjugado do complexo z	
\bar{z}	impedância unitária média	[Ohm/km]
α	constante característica	
α	argumento hiperbólico	
α	ângulo	
β	ângulo, constante	
$\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$	curva contínua orientada	
$\dot{\gamma}$	função de propagação	
δ	infinitésimo	
ϵ	infinitésimo	
λ	constante	

CAPÍTULO 1

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS DEFINIDAS NO CONJUNTODOS NÚMEROS REAIS1.1 - ORIGEM

Em muitas aplicações, quer na resolução de equações diferenciais, quer na resolução de problemas da Física, as funções exponenciais, definidas por $z_1 = e^\alpha$, $z_2 = e^{-\alpha}$, não aparecem isoladas, mas sim em combinações do tipo:

$$z_3 = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}, \quad z_4 = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \quad (1.1)$$

$$z_5 = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \quad \text{etc....} \quad (1.2)$$

Devido a esse motivo, se julgou conveniente, atribuir a tais combinações de exponenciais, denominações especiais. É fácil verificar que as expressões (1.1) verificam, a equação da hipérbole equilátera.

$$x^2 - y^2 = 1 \quad (1.3)$$

De (1.1) e (1.3) podemos então escrever:

$$\text{abscissa da hip. equilátera: } x = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \quad (1.4)$$

1.2

ordenada da hip. equilátera: $y = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$ (1.5)

Sabemos ainda que a abscissa e a ordenada da circunferência de raio unitário de equação

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1.6)$$

são chamadas, respectivamente, "cosseno de α " e "seno de α ", isto é:

$$x = \cos \alpha \quad (1.7)$$

$$y = \sin \alpha \quad (1.8)$$

logo, não é difícil concluir, que as denominações apropriadas para as expressões (1.4) e (1.5), analogamente a (1.7) e (1.8), são, respectivamente, cosseno hiperbólico de α e seno hiperbólico de α .

Em vista de tal justificativa temos:

DEFINIÇÃO 1.1

Cosseno hiperbólico de α é a expressão:

$$\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

DEFINIÇÃO 1.2

Seno hiperbólico de α é a expressão:

$$\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

1.2 - SÍMBOLOS

Usamos os símbolos:

ch = cosseno hiperbólico

sh = seno hiperbólico

Logo:

$$x = \text{ch } \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \quad (1.9)$$

$$y = \text{sh } \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \quad (1.10)$$

1.3 - FUNÇÕES COSSENO HIPERBÓLICO E SENO HIPERBÓLICO

DEFINIÇÃO 1.3

Chama-se função cosseno hiperbólico a correspondência que associa o número real α ao número real $\text{ch } \alpha$.

Em símbolos:

Função ch: $\alpha \rightarrow \text{ch } \alpha$

DEFINIÇÃO 1.4

Chama-se função seno hiperbólico a correspondência que associa o número real α ao número real $\text{sh } \alpha$.

Em símbolos:

Função sh: $\alpha \rightarrow \text{sh } \alpha$

1.4 - OUTRAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Definimos ainda, em analogia com as fun
ções circulares, as seguintes funções hiperbólicas diretas:

DEFINIÇÃO 1.5

Função tgh: $\alpha \rightarrow \text{tgh}\alpha$

tal que:

$$\text{tgh}\alpha = \frac{\text{sh}\alpha}{\text{ch}\alpha} \quad \text{para } \text{ch}\alpha \neq 0 \quad (1.11)$$

DEFINIÇÃO 1.6

Função cotgh: $\alpha \rightarrow \text{cotgh}\alpha$

tal que:

$$\text{cotgh}\alpha = \frac{\text{ch}\alpha}{\text{sh}\alpha} \quad \text{para } \text{sh}\alpha \neq 0 \quad (1.12)$$

DEFINIÇÃO 1.7

Função sech: $\alpha \rightarrow \text{sech}\alpha$

tal que:

$$\text{sech}\alpha = \frac{1}{\text{ch}\alpha} \quad \text{para } \text{ch}\alpha \neq 0 \quad (1.13)$$

DEFINIÇÃO 1.8

Função cosech: $\alpha \rightarrow cosech\alpha$

tal que:

$$cosech\alpha = \frac{1}{sh\alpha} \quad \text{para } sh\alpha \neq 0 \quad (1.14)$$

Das definições 1.5; 1.6; 1.7 e 1.8 con
clui-se que:

$$tgh\alpha = \frac{sh\alpha}{ch\alpha} = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} \quad (1.15)$$

$$cotgh\alpha = \frac{ch\alpha}{sh\alpha} = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \quad (1.16)$$

$$sech\alpha = \frac{1}{ch\alpha} = \frac{2}{e^\alpha + e^{-\alpha}} \quad (1.17)$$

$$cosech\alpha = \frac{1}{sh\alpha} = \frac{2}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \quad (1.18)$$

OBS.: O número real α é chamado argumento hiperbólico.

1.5 - VARIAÇÃO E GRÁFICO CARTESIANO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICASDIRETAS

1.5.1 - Função seno hiperbólico

Seja a função definida por:

$$\text{sh}: x \rightarrow y = \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

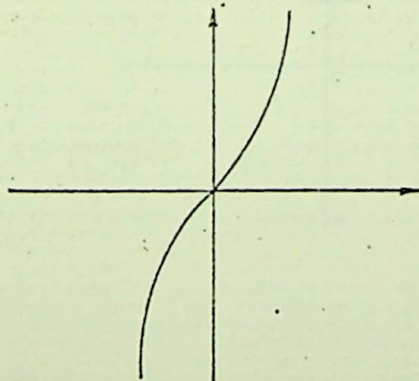
QUADRO DE VARIAÇÃO

Valores de x	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$
Valores de y	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$

Logo:

$$D(\text{sh}) = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < \infty\} \quad \text{ou} \quad D(\text{sh}) = \mathbb{R}$$

$$C(\text{sh}) = \{y \in \mathbb{R} / -\infty < y < \infty\} \quad \text{ou} \quad C(\text{sh}) = \mathbb{R}$$

FIG. 1.1 - GRÁFICO DE $y = \text{sh}x$

1.5.2 - Função cosseno hiperbólico

Seja a função definida por:

$$\text{ch: } x \rightarrow y = \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

QUADRO DE VARIACÃO

Valores de x	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$
Valores de y	$+\infty$	\searrow	1	\nearrow	$+\infty$

Logo:

$$D(\text{ch}) = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < \infty\} \quad \text{ou} \quad D(\text{ch}) = \mathbb{R}$$

$$C(\text{ch}) = \{y \in \mathbb{R} / 1 \leq y < \infty\} \quad \text{ou} \quad C(\text{ch}) = [1, \infty)$$

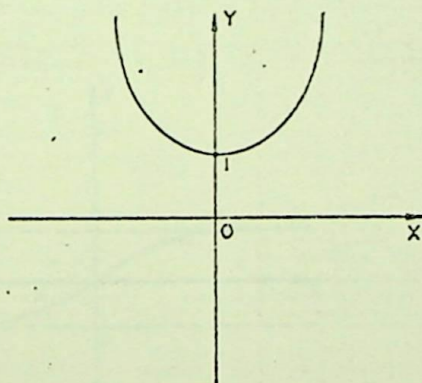


FIG. 1.2 - GRÁFICO DE $y = \text{ch}x$

OBS.: Tal curva se chama catenária.

1.5.3 - Função tangente hiperbólica.

Seja a função definida por:

$$\operatorname{tgh}; x \rightarrow y = \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

QUADRO DE VARIACÃO

Valores de x	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$
Valores de y	-1	\nearrow	0	\nearrow	+1

Logo:

$$D(\operatorname{tgh}) = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < \infty\} \quad \text{ou} \quad D(\operatorname{tgh}) = \mathbb{R}$$

$$C(\operatorname{tgh}) = \{y \in \mathbb{R} / -1 < y < 1\} \quad \text{ou} \quad C(\operatorname{tgh}) = (-1, 1)$$

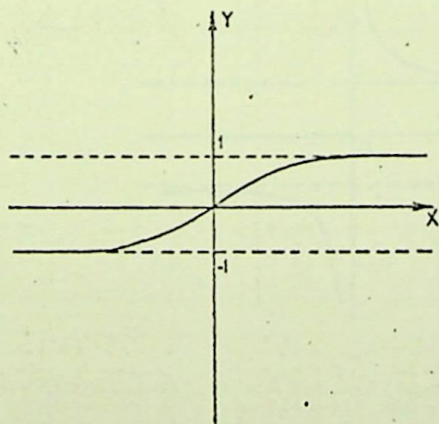


FIG. 1.3 - Gráfico de $y = \operatorname{tgh} x$

1.5.4 - Função cotangente hiperbólica

Seja a função definida por:

$$\text{cotgh: } x \rightarrow y = \text{cotgh}x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

QUADRO DE VARIACÃO

Valores de x	$-\infty$ ↗	$0 \mp \epsilon$	↘	$+\infty$
Valores de y	-1 ↘	$\mp \infty$	↗	$+1$

Logo:

$$D(\text{cotgh}) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} \text{ ou } D(\text{cotgh}) = \mathbb{R}^*$$

$$C(\text{cotgh}) = \{y \in \mathbb{R} / -\infty < y < -1 \text{ ou } 1 < y < \infty\}$$

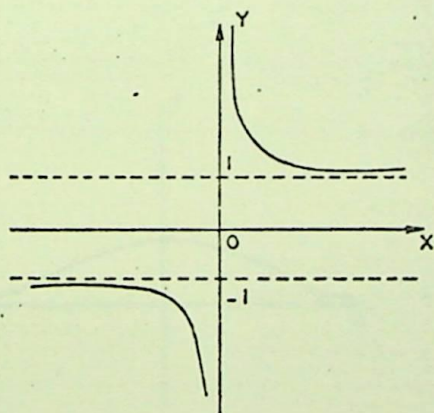


FIG. 1.4 - GRÁFICO DE $y = \text{cotgh}x$

1.5.5 - Função secante hiperbólica

Seja a função definida por:

$$\text{sech: } x \rightarrow y = \text{sech } x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

QUADRO DE VARIACÃO

Valores de x	$-\infty$	\nearrow	0	\searrow	$+\infty$
Valores de y	0	\nearrow	1	\searrow	0

Logo:

$$D(\text{sech}) = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < \infty\} \text{ ou } D(\text{sech}) = \mathbb{R}$$

$$C(\text{sech}) = \{y \in \mathbb{R} / 0 < y < 1\} \text{ ou } C(\text{sech}) = (0, 1)$$

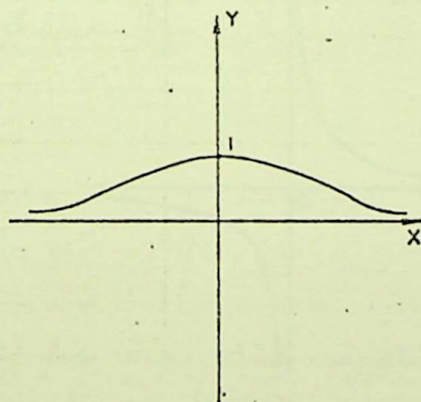


FIG. 1.5 - GRÁFICO DE $y = \text{sech } x$

1.5.6 - Função cossecante hiperbólica

Seja a função definida por:

$$\text{cosech: } x \quad y = \text{cosech } x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

QUADRO DE VARIACÃO

Valores de x	$-\infty$ ↗	$0 \mp \varepsilon$ ↗	$+\infty$
Valores de y	0 ↘	$\mp \infty$ ↘	0

Logo:

$$D(\text{cosech}) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} \quad \text{ou} \quad D(\text{cosech}) = \mathbb{R}^*$$

$$C(\text{cosech}) = \{x \in \mathbb{R} / y \neq 0\} \quad \text{ou} \quad C(\text{cosech}) = \mathbb{R}^*$$

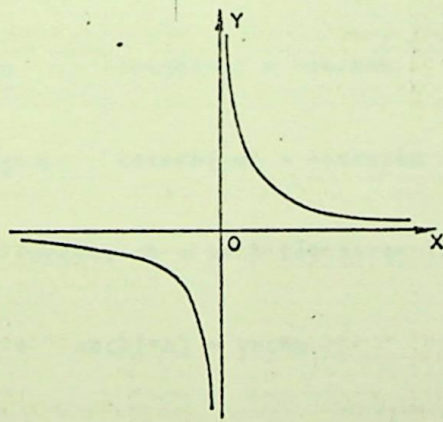


FIG. 1.6 - GRÁFICO DE $y = \text{cosech } x$

1.6 - RELAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

De (1.9), (1.10), (1.15), (1.16), (1.17)
e (1.18) tiramos as relações:

$$a) \operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1 \quad (1.19)$$

$$b) \operatorname{tgh} \alpha \cdot \operatorname{cotgh} \alpha = 1 \quad (1.20)$$

$$c) \operatorname{sech}^2 \alpha = 1 - \operatorname{tgh}^2 \alpha \quad (1.21)$$

$$d) \operatorname{cosech}^2 \alpha = \operatorname{cotgh}^2 \alpha - 1 \quad (1.22)$$

$$e) \operatorname{cha} + \operatorname{sha} = e^\alpha \quad (1.23)$$

$$f) \operatorname{cha} - \operatorname{sha} = e^{-\alpha} \quad (1.24)$$

g) Estudo da paridade

As funções sh , tgh , cotgh e cosech são ímpares, isto é:

$$\operatorname{sh}(-\alpha) = -\operatorname{sha} \quad \operatorname{cotgh}(-\alpha) = -\operatorname{cotgh} \alpha$$

$$\operatorname{tgh}(-\alpha) = -\operatorname{tgh} \alpha \quad \operatorname{cosech}(-\alpha) = -\operatorname{cosech} \alpha \quad (1.25)$$

As funções ch e sech são pares isto é:

$$\operatorname{ch}(-\alpha) = \operatorname{cha} \quad \operatorname{sech}(-\alpha) = \operatorname{secha} \quad (1.26)$$

1.7 - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO ARGUMENTO HIPERBÓLICOS

1.7.1 - Argumento Trigonométrico

Sabemos que, para as funções trigonométricas (circulares) definidas por $y = \text{sen}x$, $y = \text{cos}x$, etc... o argumento trigonométrico (ou a variável independente x) é uma número real que representa a medida, em radianos, quer do arco orientado AP , quer do ângulo orientado AOP , conforme, Fig. 1.7.

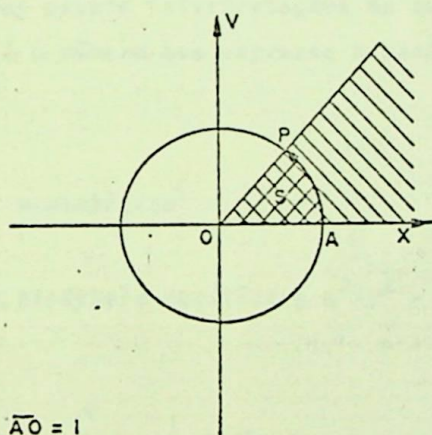


FIG. 1.7- Interpretação geométrica do argumento trigonométrico

Procuremos agora qual a relação existente entre o número S , que expressa a área do setor circular OAP , e o argumento trigonométrico x .

Da Geometria Euclidiana, temos que:

exis
cír

$$S = \frac{\text{raio} \times \widehat{AP}}{2} = \frac{1 \cdot x}{2} = \frac{x}{2}$$

ou

$$x = 2S$$

(1.27)

isto é:

O argumento trigonométrico x também representa, geometricamente, o dobro do número que expressa a área do setor circular.

OBS.: Notemos que se poderia construir toda a trigonometria, baseada nesta interpretação geométrica do argumento trigonométrico, ao invés das usuais interpretações de que o argumento trigonométrico é o número que expressa a medida do arco ou do ângulo.

1.7.2 - Argumento Hiperbólico

Seja a hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = 1$ (1.28)

conforme a Fig. 1.8.

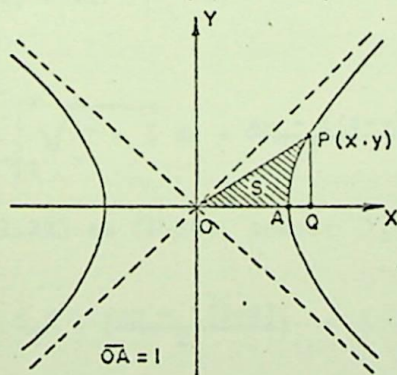


Fig. 1.8 Interpretação geométrica do argumento hiper-

Tomemos sobre o ramo direito da hipérbole um ponto $P(x,y)$, onde:

$$x = \operatorname{ch} \alpha \quad \text{e} \quad y = \operatorname{sh} \alpha \quad (1.29)$$

conforme foi visto em 1.1.

Calculemos o número S que expressa a área do setor hiperbólico AOP . Na Fig. 8 vemos que: S é igual a medida da área do $\triangle APO$ menos a medida da área APO , ou

$$S = \frac{x \cdot y}{2} - \int_1^x y \, dx \quad (1.30)$$

$$\text{Cálculo de } I = \int_1^x y \, dx \quad (1.31)$$

De (1.28) tiramos:

$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

logo (1.31) fica:

$$I = \int_1^x \sqrt{x^2 - 1} \, dx = \frac{xy - L(x+y)}{2} \quad (1.32)$$

levando (1.32) em (1.30), temos:

$$S = \frac{x \cdot y}{2} - \left(\frac{xy - L(x+y)}{2} \right) \quad \text{e}$$

$$S = \frac{1}{2} L(x+y) \quad (1.33)$$

1.16

levando (1.29) em (1.33) vem:

$$S = \frac{1}{2} L (sh\alpha + ch\alpha)$$

de (1.23) temos:

$$S = \frac{1}{2} L e^\alpha = \frac{1}{2} \alpha$$

ou

$$\alpha = 2S$$

(1.34)

isto é:

O argumento hiperbólico representa, geomêtricamente, o dobro do número que expressa a área do setor hiperbólico.

OBS.: Notamos que existe analogia entre a interpretação geométrica do argumento hiperbólico e uma das interpretações geométricas do argumento trigonométrico.

1.8 - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS DIRETAS

Baseados na interpretação geométrica de argumento hiperbólico, podemos dar uma interessante interpretação geométrica as funções hiperbólicas diretas, análoga à interpretação geométrica das funções trigonométricas. Se não, vejamos:

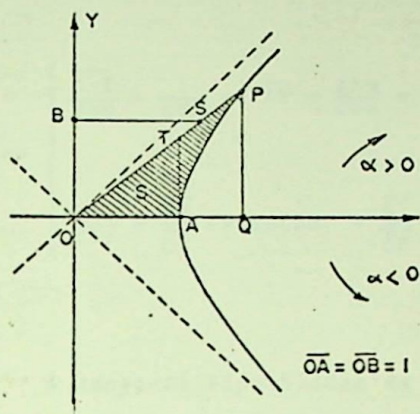


FIG. 1.9 - Interpretação geométrica das Funções Hiperbólicas Diretas

Seja a convenção:

$\alpha < 0$ para S acima de $O\bar{X}$

$\alpha < 0$ para S abaixo de $O\bar{X}$

Na figura 1.9 temos:

$$\text{sh } \alpha = \overline{QP} \quad (\text{ordenada de } P) \quad (1.35)$$

$$\text{ch } \alpha = \overline{OP} \quad (\text{abscissa de } P) \quad (1.36)$$

1º) ΔOPQ - ΔOTA daí as relações

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} \quad \text{ou devido a (1.35) e (1.36)}$$

$$\frac{\overline{AT}}{\operatorname{sh}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha} = \frac{\overline{OT}}{OP} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{AT}}{\operatorname{sh}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha} \Rightarrow \overline{AT} = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha} = \operatorname{tgh}\alpha \\ \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha} = \frac{\overline{OT}}{OP} \Rightarrow \operatorname{sech}\alpha = \frac{\overline{OT}}{OP} \end{array} \right.$$

isto é:

A tangente hiperbólica de α representa geometricamente a ordenada do ponto T.

A secante hiperbólica de α representa geometricamente a razão entre as medidas algébricas dos segmentos OT e OP.

29) $\triangle OPQ - \triangle OBS$ daí as relações

$$\frac{\overline{BS}}{OQ} = \frac{\overline{OB}}{QP} = \frac{\overline{OS}}{OP} \quad \text{ou devido a (1.35) e (1.36)}$$

$$\frac{\overline{BS}}{\operatorname{ch}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha} = \frac{\overline{OS}}{OP} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{BS}}{\operatorname{ch}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha} \Rightarrow \overline{BS} = \frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha} = \operatorname{cotgh}\alpha \\ \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha} = \frac{\overline{OS}}{OP} \Rightarrow \operatorname{cosech}\alpha = \frac{OS}{OP} \end{array} \right.$$

isto é:

A cotangente hiperbólica de α representa geo

metricamente a abscissa do ponto S.

A cosecante hiperbólica de α representa geometricamente a razão entre as medidas algébricas dos segmentos OS e OP.

OBS.:

- a) Relação entre o argumento hiperbólico e o ângulo θ do setor hiperbólico correspondente.

Na Fig. 1.9, seja $\theta = \widehat{AOT}$ então no ΔOAT temos:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \theta = \overline{AT} \\ \operatorname{tgh} \alpha = \overline{AT} \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tgh} \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} \right) \quad (1.37)$$

- b) Definindo 1 radiano hiperbólico ou "1 rad-hip" como o argumento hiperbólico unitário correspondente à área do setor hiperbólico cuja medida é $\frac{1}{2}$ (u.a), temos em (1.37) para $\alpha = 1$ rad.hip

$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}} \right)$ que, no sistema sexagesimal de medida de ângulos, nos dá aproximadamente:

$$\theta = 37^{\circ}17'33",7$$

logo para:

$$\alpha = 1 \text{ rad.hip} \Rightarrow \theta = 37^{\circ}17'33",7$$

1.9 - FÓRMULAS DECORRENTES DAS DEFINIÇÕES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS DIRETAS

1.9.1 - Funções hiperbólicas da adição e subtração de argumentos hiperbólicos.

$$\operatorname{sh}(a \pm b) = \operatorname{sh}a \operatorname{ch}b \pm \operatorname{sh}b \operatorname{ch}a \quad (1.38)$$

$$\operatorname{ch}(a \pm b) = \operatorname{ch}a \operatorname{ch}b \pm \operatorname{sh}a \operatorname{sh}b \quad (1.39)$$

$$\operatorname{tgh}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tgh}a \pm \operatorname{tgh}b}{1 \pm \operatorname{tgh}a \operatorname{tgh}b} \quad (1.40)$$

$$\operatorname{cotgh}(a \pm b) = \frac{1 \pm \operatorname{cotgh}a \operatorname{cotgh}b}{\operatorname{cotgh}a \pm \operatorname{cotgh}b} \quad (1.41)$$

1.9.2 - Funções hiperbólicas de argumentos múltiplos e divisão de argumentos

$$\operatorname{sh}2x = 2 \operatorname{sh}x \operatorname{ch}x \quad (1.42)$$

$$\operatorname{ch}2x = \operatorname{ch}^2x + \operatorname{sh}^2x \quad (1.43)$$

$$\operatorname{tgh} 2x = \frac{2 \operatorname{tgh}x}{1 + \operatorname{tgh}^2x} \quad (1.44)$$

$$\operatorname{cotgh}2x = \frac{1 + \operatorname{cotgh}^2x}{2 \operatorname{cotgh}x} \quad (1.45)$$

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x - 1}{2}} \quad (1.46)$$

$$\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x + 1}{2}} \quad (1.47)$$

$$\operatorname{tgh} \frac{x}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 x}}{\operatorname{tgh} x} \quad (1.48)$$

1.9.3 - Fórmulas de transformação de somas ou diferenças de funções hiperbólicas em produtos ou quociente e vice-versa

$$\operatorname{sh}(a + b) + \operatorname{sh}(a - b) = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b \quad (1.49)$$

$$\operatorname{sh}(a + b) - \operatorname{sh}(a - b) = 2 \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a \quad (1.50)$$

$$\operatorname{ch}(a + b) + \operatorname{ch}(a - b) = 2 \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \quad (1.51)$$

$$\operatorname{ch}(a + b) - \operatorname{ch}(a - b) = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \quad (1.52)$$

$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2} \quad (1.53)$$

$$\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \quad (1.54)$$

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2} \quad (1.56)$$

$$\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \quad (1.56)$$

$$\operatorname{th} p \pm \operatorname{tgh} q = \frac{\operatorname{sh}(p \pm q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q} \quad (1.57)$$

$$\operatorname{cotgh} p \pm \operatorname{cotgh} q = \frac{\operatorname{sh}(p \pm q)}{\operatorname{sh} p \operatorname{sh} q} \quad (1.58)$$

$$\operatorname{sech} p + \operatorname{sech} q = \frac{2 \operatorname{ch}(\frac{p+q}{2}) \operatorname{ch}(\frac{q-p}{2})}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q} \quad (1.59)$$

$$\operatorname{sech} p - \operatorname{sech} q = \frac{2 \operatorname{sh}(\frac{p+q}{2}) \operatorname{sh}(\frac{q-p}{2})}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q} \quad (1.60)$$

$$\operatorname{cosech} p \pm \operatorname{cosech} q = \frac{2 \operatorname{sh}(\frac{p+q}{2}) \operatorname{ch}(\frac{q-p}{2})}{\operatorname{sh} p \operatorname{sh} q} \quad (1.61)$$

1.10 - RELACÕES ENTRE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1.10.1 - Fórmulas de Euler

No estudo das séries temos que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad (1.62)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} \quad (1.63)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (1.64)$$

Fazendo em (1.62) $x = \alpha j$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$j = \sqrt{-1}$, vem:

$$e^{\alpha j} = 1 + \alpha j - \frac{\alpha^2}{2!} - j \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + j \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^6}{6!} - j \frac{\alpha^7}{7!} + \dots \quad (1.65)$$

Reagrupando os termos em j :

$$e^{\alpha j} = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots + j \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots \right) \quad (1.66)$$

Levando (1.63) e (1.64) em (1.66) temos

$$e^{\alpha j} = \cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha \quad (1.67)$$

Fazendo $\alpha = -\alpha$ em (1.67) vem:

$$e^{-\alpha j} = \text{cosa} - j \text{ sena} \quad (1.68)$$

(1.67) e (1.68) são chamadas fórmulas de Euler.

Das fórmulas de Euler podemos expressar, sena e cosa em função das exponenciais $e^{\alpha j}$ e $e^{-\alpha j}$ e temos:

$$\text{cosa} = \frac{e^{\alpha j} + e^{-\alpha j}}{2} \quad (1.69)$$

$$\text{sena} = \frac{1}{j} \left(\frac{e^{\alpha j} - e^{-\alpha j}}{2} \right) \quad (1.70)$$

1.10.2 - Relações entre funções hiperbólicas de argumentos imaginários e funções trigonométricas de argumentos reais.

Sejam as fórmulas:

$$\text{cha}j = \frac{e^{\alpha j} + e^{-\alpha j}}{2} \quad (1.71)$$

$$\text{sha}j = \frac{e^{\alpha j} - e^{-\alpha j}}{2} \quad (1.72)$$

comparando com (1.69) e (1.70), respectivamente temos:

$$\text{cha}j = \text{cosa} \quad (1.73)$$

$$\text{sha}j = j \text{ sena} \quad (1.74)$$

daí concluímos que:

$$\operatorname{tgh}aj = j \operatorname{tga} \quad (1.75)$$

$$\operatorname{cotgh}aj = -j \operatorname{cotga} \quad (1.76)$$

$$\operatorname{sech}aj = \operatorname{seca} \quad (1.77)$$

$$\operatorname{cosech}aj = -j \operatorname{coseca} \quad (1.78)$$

1.10.3 - Relações entre as funções trigonométricas de argumentos imaginários e as funções hiperbólicas de argumentos reais

No item anterior fazendo $\alpha = aj$ segue:

$$\operatorname{sen}aj = j \operatorname{sha} \quad (1.79)$$

$$\operatorname{cos}aj = \operatorname{cha} \quad (1.80)$$

$$\operatorname{tg}aj = j \operatorname{tgha} \quad (1.81)$$

$$\operatorname{cotg}aj = -j \operatorname{cotgha} \quad (1.82)$$

$$\operatorname{secaj} = \operatorname{secha} \quad (1.83)$$

$$\operatorname{cosecaj} = -j \operatorname{cosecha} \quad (1.84)$$

1.10.4 - Funções seno e cosseno hiperbólico desenvolvidas em série de Maclaurin

Sabemos que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad (1.85)$$

para $x = -x$, temos:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad (1.86)$$

Fazendo (1.85) + (1.86) e (1.85) - (1.86) respectivamente temos

$$e^x + e^{-x} = 2 + 2 \frac{x^2}{2!} + 2 \frac{x^4}{4!} + \dots + 2 \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (1.87)$$

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2 \frac{x^3}{3!} + 2 \frac{x^5}{5!} + \dots + 2 \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (1.88)$$

dividindo (1.87) e (1.88) por 2 e das Definições I e II, concluimos:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (1.89)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (1.90)$$

(1.89) e (1.90) são o desenvolvimento de ch e sh em série de Maclaurin.

1.11 - FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

1.11.1 - Função Inversa da função seno hiperbólico ...

1.11.1.1 - Gráfico Cartesiano

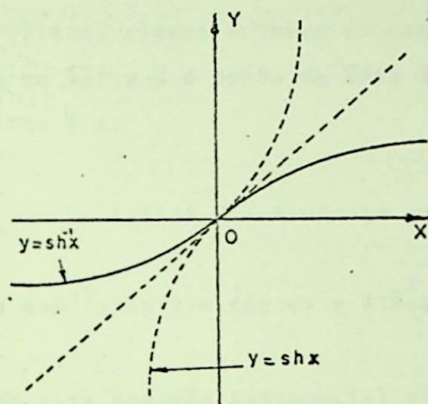


FIG. 1.10 Gráfico da função inversa da função seno hiperbólico

Sabemos que a função inversa possui a propriedade de ter o seu gráfico cartesiano simétrico ao gráfico da função direta, em relação à bissetriz do Iº e IIIº quadrantes.

Baseados em tal propriedade, na Fig. 1.10 temos construído o gráfico de $y = \text{sh}x$ e o gráfico da função inversa $y = \text{sh}^{-1}x$.

1.11.1.2 - Notação

$$y = \text{sh}^{-1}x \quad \text{ou} \quad y = \arg \text{sh}x$$

OBS.: Devido a 1.7 (Interpretação geométrica de argumento hiperbólico) alguns autores empregam a notação $y = \text{arshx}$, que se lê: y é o dobro da área do setor cujo seno hiperbólico é x .

1.11.1.3 - Sentença que define $y = \text{sh}^{-1}x$

$$y = \text{seh}^{-1}x \Rightarrow x = \text{sh}y \Rightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

resolvendo esta equação exponencial em y temos:

$$y = L(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

logo:

$$y = \text{seh}^{-1}x = L(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (1.91)$$

sendo:

$$D(\text{sh}^{-1}) = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad C(\text{sh}^{-1}) = \mathbb{R}$$

1.11.2 - Função inversa da função cosseno hiperbólico

1.11.2.1 - Gráfico Cartesiano

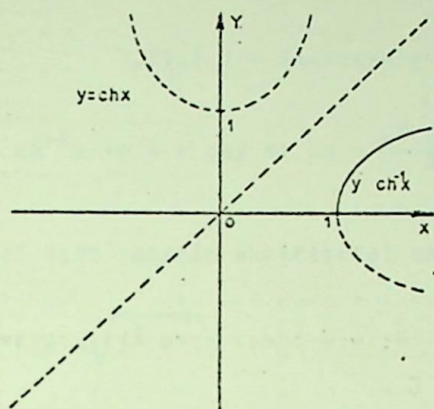


FIG. 1.11 Gráfico da função inversa da função cosseno hiperbolico

Na Fig. 1.11 temos construido o gráfico cartesiano da função $y = chx$ e o gráfico da função inversa $y = ch^{-1}x$.

OBS.: Como a função direta $y = chx$ não é bijetora fizemos uma restrição ao seu domínio, isto é:

$$D(ch) = \mathbb{R}^+$$

e assim sendo, o gráfico de $y = ch^{-1}x$ é somente o ramo positivo da curva simétrica à curva $y = chx$, em relação ao Iº e IIIº quadrantes.

1.11.2.2. - Notação

$$y = ch^{-1}x \quad \text{ou} \quad y = \operatorname{argch}x$$

1.11.2.3 - Sentença que define $y = \text{ch}^{-1}x$

$$y = \text{ch}^{-1}x \Rightarrow x = \text{chy} \Rightarrow x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

resolvendo esta equação exponencial em y temos:

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

logo:

$$y = \text{ch}^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (1.92)$$

sendo:

$$D(\text{ch}^{-1}) = [1, \infty) \quad \text{e} \quad C(\text{ch}^{-1}) = \mathbb{R}^+$$

1.11.3 - Função Inversa da Função Tangente Hiperbólica

1.11.3.1 - Gráfico Cartesiano

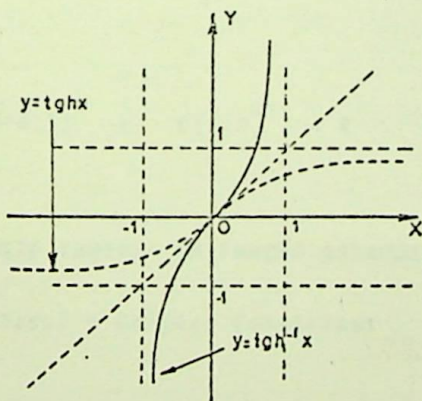


FIG. 1.12 Gráfico da função inversa da função tangente hiperbólica

Na Fig. 1.12 temos construído o gráfico cartesiano da função $y = \operatorname{tgh} x$ e o gráfico da função inversa $y = \operatorname{tgh}^{-1} x$.

1.11.3.2 - Notação

$$y = \operatorname{tgh}^{-1} x \quad \text{ou} \quad y = \operatorname{argtgh} x$$

1.11.3.3 - Sentença que define $y = \operatorname{tgh}^{-1} x$

$$y = \operatorname{tgh}^{-1} x \Rightarrow x = \operatorname{tgh} y \Rightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

resolvendo esta equação exponencial em y temos:

$$y = \frac{1}{2} L \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

logo:

$$y = \operatorname{tgh}^{-1} x = \frac{1}{2} L \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (1.93)$$

sendo:

$$D(\operatorname{tgh}^{-1}) = (-1, 1) \quad \text{e} \quad C(\operatorname{tgh}^{-1}) = \mathbb{R}$$

1.11.4 - FUNÇÃO INVERSA DA FUNÇÃO COTANGENTE HIPERBÓLICA

1.11.4.1 - Gráfico Cartesiano

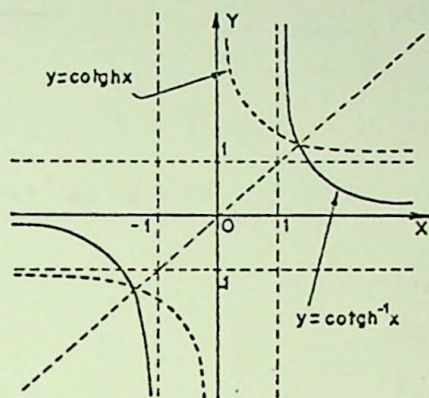


FIG. 1.13 Gráfico da função inversa da função cotangente hiperbólica

Na Fig. 1.13 temos construído o gráfico cartesiano da função $y = \text{cotgh} x$ e o gráfico da função inversa $y = \text{cotgh}^{-1} x$.

1.11.4.2 - Notação

$$y = \text{cotgh}^{-1} x \quad \text{ou} \quad y = \arg \text{cotgh} x$$

1.11.4.3 - Sentença que define $y = \text{cotgh}^{-1} x$

$$y = \text{cotgh}^{-1} x \Rightarrow x = \text{cotgh} y \Rightarrow x = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$$

resolvendo esta equação exponencial em y temos:

$$y = \frac{1}{2} L \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

ogb:

$$y = \operatorname{cotgh}^{-1} x = \frac{1}{2} L \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad (1.94)$$

endo:

$$D(\operatorname{cotgh}^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} / x < -1 \text{ ou } x > 1\}$$

$$C(\operatorname{cotgh}^{-1}) = \mathbb{R}^*$$

1.11.5 - FUNÇÃO INVERSA DA FUNÇÃO SECANTE HIPERBÓLICA

1.11.5.1 - Gráfico Cartesiano

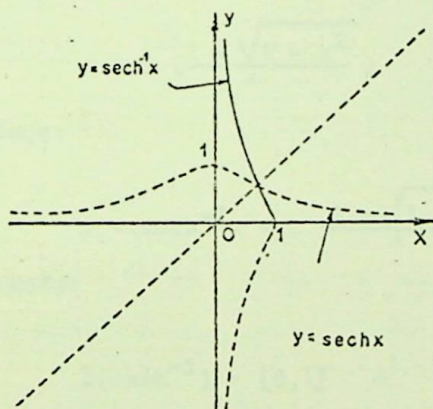


FIG. 1.14 Gráfico da função inversa da função secante hiperbólica

Na Fig. 1.14 temos construído o gráfico car
tesiano da função $y = \operatorname{sech} x$ e o gráfico da função inversa
 $y = \operatorname{sech}^{-1} x$.

OBS.: Como a função direta $y = \operatorname{sech} x$ não é bijetora fizemos uma restrição ao seu domínio, isto é: $D(\operatorname{sech}) = \mathbb{R}^+$ e assim sendo, o gráfico de $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ é somente o ramo positivo da curva simétrica à curva $y = \operatorname{sech} x$, em relação ao Iº e IIIº quadrantes.

1.11.5.2 - Notação

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \quad \text{ou} \quad y = \arg \operatorname{sech} x$$

1.11.5.3 - Sentença que define $y = \operatorname{sech}^{-1} x$

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \Rightarrow x = \operatorname{sech} y \Rightarrow x = \frac{2}{e^y + e^{-y}}$$

resolvendo esta equação exponencial em y temos:

$$y = L \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right)$$

logo:

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x = L \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) \quad (1.95)$$

sendo:

$$D(\operatorname{sech}^{-1}) = (0, 1] \quad \text{e} \quad C(\operatorname{sech}^{-1}) = \mathbb{R}^+$$

1.11.6 - FUNÇÃO INVERSA DA FUNÇÃO COSSECANTE HIPERBÓLICA.

1.11.6.1 - Gráfico Cartesiano

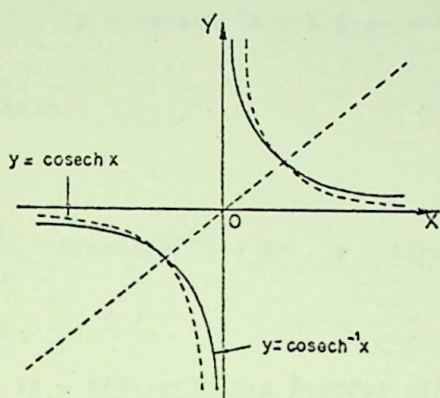


FIG. 1.15 Gráfico da função inversa da função cossecante hiperbolica

Na Fig. 1.15 temos construido o gráfico cartesiano da função $y = \operatorname{cosech} x$ e o gráfico da função inversa, $y = \operatorname{cosech}^{-1} x$.

1.11.6.2 - Notação

$$y = \operatorname{cosech}^{-1} x \quad \text{ou} \quad y = \arg \operatorname{cosech} x$$

1.11.6.3 - Sentença que define $y = \operatorname{cosech}^{-1} x$

$$y = \operatorname{cosech}^{-1} x \Rightarrow x = \operatorname{cosech} y \Rightarrow x = \frac{2}{e^y - e^{-y}}$$

resolvendo esta equação exponencial em y temos:

$$y = L \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|} \right)$$

logo:

$$y = \operatorname{cosech}^{-1} x = L \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \right) \quad (1.96)$$

sendo:

$$D(\operatorname{cosech}^{-1}) = R^* \quad \text{e} \quad C(\operatorname{cosech}^{-1}) = R^*$$

1.12 - DERIVAÇÃO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

1.12.1 - FÓRMULAS DE DERIVAÇÃO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS DIRETAS

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x \quad (1.97)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x \quad (1.98)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tgh} x = \operatorname{sech}^2 x \quad (1.99)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cotgh} x = -\operatorname{cosech}^2 x \quad (1.100)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x \quad (1.101)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cosech} x = -\operatorname{cosech} x \operatorname{cotgh} x \quad (1.102)$$

OBS.: Tais fórmulas podem ser obtidas conforme exemplo a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{sh} x &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (e^x - e^{-x}) = \\ &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x \end{aligned}$$

1.12.1 - FÓRMULAS DE DERIVAÇÃO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arg} \operatorname{sh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (1.103)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arg} \operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{para } |x| > 1 \quad (1.104)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arg} \operatorname{tgh} x = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{para } |x| < 1 \quad (1.105)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arg} \operatorname{cotgh} x = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{para } |x| > 1 \quad (1.106)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arg} \operatorname{sech} x = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad \text{para } 0 < x \leq 1 \quad (1.107)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arg} \operatorname{cosech} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}} \quad \text{para } x \neq 0 \quad (1.108)$$

OBS.: Tais fórmulas podem ser obtidas conforme exemplo a seguir: Seja:

$$y = \arg \operatorname{sh} x \Rightarrow \quad (1.109)$$

$$\Rightarrow x = \operatorname{sh} y \quad (1.110)$$

derivando em relação a y vem:

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{ch} y$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{ch} y}$$

de (1.19) vem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}}$$

de (1.110) vem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

de (1.109) vem:

$$\frac{d}{dx} \arg \operatorname{sh} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

conforme (1.103).

1.13 - INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

1.13.1 - FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS DIRETAS

$$\int \text{sh } f(x) \cdot f'(x) \, dx = \text{ch } f(x) + C \quad (1.111)$$

$$\int \text{ch } f(x) \cdot f'(x) \, dx = \text{sh } f(x) + C \quad (1.112)$$

$$\int \text{tgh } f(x) \cdot f'(x) \, dx = L \text{ch } f(x) + C \quad (1.113)$$

$$\int \text{cotgh } f(x) \cdot f'(x) \, dx = L \text{sh } f(x) + C \quad (1.114)$$

$$\int \text{sech } f(x) \cdot f'(x) \, dx = 2 \text{arctg } e^{f(x)} + C \quad (1.115)$$

$$\int \text{cosech } f(x) \cdot f'(x) \, dx = L \text{tgh } \frac{f(x)}{2} + C \quad (1.116)$$

OBS.: As fórmulas de (1.111) a (1.115) são imediatas, o mesmo não acontece com (1.116) cujo cálculo segue:

$$\int \text{cosech } f(x) \cdot f'(x) \, dx = \int \frac{2}{e^{f(x)} - e^{-f(x)}} \cdot f'(x) \, dx$$

fazendo:

$$e^{f(x)} = t \Rightarrow \quad (1.117)$$

$$\Rightarrow e^{f(x)} : f'(x) \, dx = dt$$

logo:

$$\int \operatorname{cosech} f(x) \cdot f'(x) dx = -2 \int \frac{dt}{1-t^2} \quad (1.118)$$

Notar que:

$$y = \arg \operatorname{cotg} t \Rightarrow \quad (1.119)$$

$$\Rightarrow dy = \frac{dt}{1-t^2}$$

Integrando membro a membro vem:

$$y = \int \frac{dt}{1-t^2} + C$$

de (1.119) temos:

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \arg \operatorname{cotg} t + C$$

de (1.94) segue:

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} L \left(\frac{t+1}{t-1} \right) + C$$

levando em (1.118) temos:

$$\int \operatorname{cosech} f(x) \cdot f'(x) dx = -2 \cdot \frac{1}{2} L \left(\frac{t+1}{t-1} \right) + C$$

De (1.117) temos:

$$\int \operatorname{cosech} f(x) \cdot f'(x) dx = L \frac{e^{\frac{f(x)}{2}} - 1}{e^{\frac{f(x)}{2}} + 1} + C =$$

$$= L \frac{e^{\frac{f(x)}{2}} - e^{-\frac{f(x)}{2}}}{e^{\frac{f(x)}{2}} + e^{-\frac{f(x)}{2}}} + C =$$

$$= L \operatorname{tgh} \frac{f(x)}{2} + C$$

1.13.2 - FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

$$\int \operatorname{argsh} x dx = x \operatorname{argsh} x - \sqrt{1+x^2} + C \quad (1.120)$$

ou de (1.91):

$$\int L(x + \sqrt{x^2+1}) dx = x L(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{1+x^2} + C \quad (1.121)$$

$$\int \operatorname{argchs} x dx = x \operatorname{argchs} x - \sqrt{x^2-1} + C \quad (1.122)$$

ou de (1.92)

$$\int L(x + \sqrt{x^2-1}) dx = x L(x + \sqrt{x^2-1}) - \sqrt{x^2-1} + C \quad (1.123)$$

$$\int \operatorname{argtgh} x dx = x \operatorname{argtgh} x + L\sqrt{1-x^2} + C \quad (1.124)$$

ou de (1.93)

$$\int L\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = x L\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + L\sqrt{1-x^2} + C \quad (1.125)$$

$$\int \operatorname{argcotgh} x dx = x \operatorname{argcotgh} x + L\sqrt{1-x^2} + C \quad (1.126)$$

ou de (1.94):

$$\int L\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = x L\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + L\sqrt{1-x^2} + C \quad (1.127)$$

$$\int \arg \operatorname{sech} x dx = x \operatorname{argsech} x + \operatorname{arcsen} x + C \quad (1.128)$$

de (1.95)

$$\int L\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) dx = x L\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + \operatorname{arcsen} x + C \quad (1.129)$$

$$\int \operatorname{argcosech} x dx = x \operatorname{argcosech} x \pm \operatorname{argsh} x + C \quad (1.130)$$

de (1.96)

$$\int L\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right) dx = x L\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right) \pm \operatorname{argsh} x + C \quad (1.131)$$

Em (1.130) e (1.131) usamos + para $x > 0$ e para $x < 0$.

BS.: As fórmulas de (1.120) a (1.131) podem ser calculadas, usando integração por partes, conforme mostramos a seguir: Seja resolver:

$$\int \operatorname{argsh} x dx$$

$$u = \operatorname{argsh} x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{de (1.103)}$$

$$dv = dx = v = x$$

Logo:

$$\int \operatorname{argsh} x dx = x \operatorname{argsh} x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = x \operatorname{argsh} x - \sqrt{1+x^2} + C$$

1.13.3 - INTEGRAIS IMEDIATAS DECORRENTES DE 3.1.2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsh}x + C \quad (1.132)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argch}x + C \quad (1.133)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{argtgh}x + C \quad \text{para } |x| < 1 \quad (1.134)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{argcotgh}x + C \quad \text{para } |x| > 1 \quad (1.135)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{argsech}x + C \quad (1.136)$$

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2+1}} = -\operatorname{arg cosech}x + C \quad (1.137)$$

CAPÍTULO 2

CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS2.1 - DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Seja R o conjunto dos números reais. Sabemos que se a, b, c, d pertencem a R então os pares ordenados

$$(a, b) = (c, d) \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \quad (2.1)$$

Seja agora C o conjunto de todos os pares ordenados de números reais, para os quais definimos as operações adição e multiplicação, respectivamente, pelas relações seguintes:

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d) \quad (2.2)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+bc) \quad (2.3)$$

Demonstra-se facilmente o teorema que diz que o conjunto C é um corpo, isto é: Para todo z_1, z_2, z_3 pertencente a C , temos:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (\text{comutatividade da adição}) \quad (2.4)$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad (\text{associatividade da adição}) \quad (2.5)$$

2.2

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \text{ (associatividade da multiplicação)} \quad (2.7)$$

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \text{ (distributividade)} \quad (2.8)$$

\exists um $\bar{u} \in C$, sendo $\bar{u} = (0,0)$, tal que:

$$z + \bar{u} = z \quad \forall z \in C \quad (2.9)$$

\exists um $\bar{w} \in C$, sendo $\bar{w} = (1,0)$ tal que $z \cdot \bar{w} = z \quad \forall z \in C$ (2.10)

\exists um $\bar{u} = (-a, -b)$ tal que:

$$(a,b) + (-a,-b) = (0,0) \quad (2.11)$$

\exists um $\bar{u} = (a,b)^{-1}$ tal que:

$$(a,b) \cdot (a,b)^{-1} = (1,0) \quad (2.12)$$

DEFINIÇÃO 2.1

O conjunto C é chamado conjunto dos números complexos. Os elementos de C se chamam números complexos.

Se $z = (a,b) \in C$ então o número real \underline{a} se chama parte real, e o número real \underline{b} parte imaginária do número complexo z e denotamos:

$$a = \text{Re}(z), \quad b = \text{Im}(z)$$

Os números da forma $(a,0)$ formam um subconjunto de C que tem correspondência bi-unívoca com o con

junto R , isto é $(a,0) \longleftrightarrow a$, e como:

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0) \longleftrightarrow a+b$$

$$(a,0) \cdot (b,0) = (ab,0) \longleftrightarrow ab$$

onde vemos que os números complexos da forma $(a,0)$ e os reais se comportam identicamente em relação a adição e multiplicação, então podemos identificar $(a,0)$ com \underline{a} o que resulta que $R \subset C$. Por outro lado se $i = (0,1)$ de (2.3) resulta $(0,1)^2 = (-1,0)$ ou $i^2 = -1$, e o número i é chamado unidade imaginária.

Seja agora um complexo $z = (a,b)$ como:

$$(a,0) + (0,1) \cdot (b,0) = (a,b)$$

ou

$$a + ib = (a,b)$$

resulta que todo $z \in C$ pode ser representado pela forma:

$$z = a + ib \tag{2.13}$$

chamada forma binomial dos números complexos.

DEFINIÇÃO 2.2

Dados dois números complexos u e v o número z solução da equação $u + z = v$, se chama diferença do minuendo, u e subtraendo v e se denota $z = v - u$.

DEFINIÇÃO 2.3

Dados dois números complexos u e $v \neq 0$ o número z , solução da equação $u = v \cdot z$, se chama quociente de u por v e se denota $z = \frac{u}{v}$.

2.2 - OPERAÇÕES ALGÉBRICAS DE NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA BINOMIAL

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + (b+d)i \quad (\text{adição}) \quad (2.14)$$

$$(a+ib) - (c+id) = (a-c) + (b-d)i \quad (\text{subtração}) \quad (2.15)$$

$$(a+ib) \cdot (c+id) = (ac-bd) + (ad+bc)i \quad (\text{multiplicação}) \quad (2.16)$$

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i \quad (\text{divisão, se } c^2+d^2 > 0) \quad (2.17)$$

DEFINIÇÃO 2.4

O conjugado \bar{z} de um número complexo:

$$z = (a, b) = a + bi$$

é o número $\bar{z} = (a, -b) = a - bi$

São imediatas as propriedades:

$$\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v} \quad (2.18)$$

$$\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v} \quad (2.19)$$

$$\overline{u - v} = \bar{u} - \bar{v} \quad (2.20)$$

$$\left(\frac{\bar{u}}{v}\right) = \frac{\bar{u}}{v} \quad (v \neq 0) \quad (2.21)$$

$$\overline{\bar{u}} = u \quad (2.22)$$

$$\operatorname{Re}(u) = \frac{1}{2}(u + \bar{u}), \quad \operatorname{Im}(u) = \frac{1}{2}(u - \bar{u}) \quad (2.23)$$

$$u \in \mathbb{R} \iff u = \bar{u} \quad (2.24)$$

DEFINIÇÃO 2.5

O módulo ou valor absoluto $|z|$ de um número complexo $z = (a, b) = a + bi$ é o número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

São imediatas as propriedades

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \iff z = 0 \quad (2.25)$$

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \quad (2.26)$$

$$|z| = |-z| = |z| \quad (2.27)$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} \quad (2.28)$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (2.29)$$

2.3 - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Ao conjunto dos números complexos $z=(a,b)$ podemos associar o conjunto dos pontos $P(a,b)$ do plano cartesiano. Desta correspondência bi-unívoca, resulta podermos interpretar geometricamente o número complexo como sendo um ponto do plano cartesiano, que passa a se chamar plano complexo, sendo o eixo das abscissas chamado de eixo real e o eixo das ordenadas de eixo imaginário.

Podemos ainda interpretar um número complexo, $z = a + bi$ como sendo o vetor localizado \vec{OP} conforme Fig.2.1.

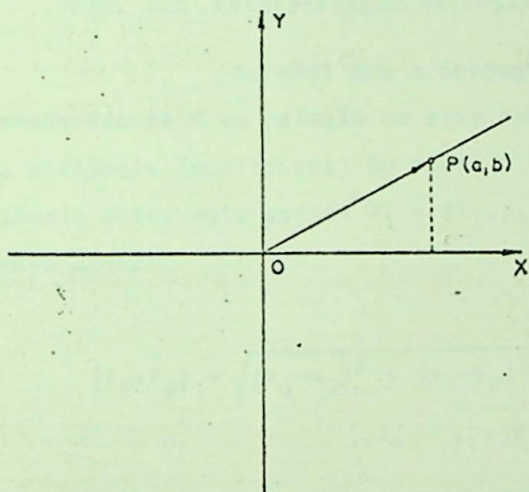


FIG. 2.1 Interpretação vetorial do número complexo

Logo o número complexo $z_1 - z_2$ é interpretado, como sendo o vetor $\vec{P_1 P_2}$ conforme figura 2.2.

$\vec{P_1 P_2}$

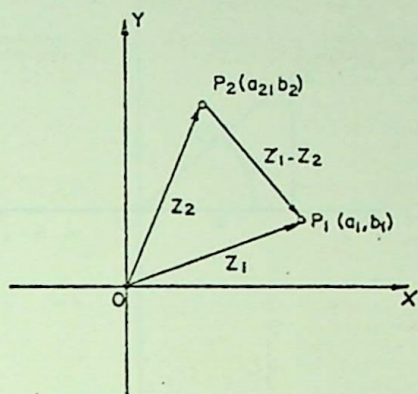


FIG. 2.2 Interpretação vetorial do número complexo

Notamos que o conjugado \bar{z} de z é um ponto simétrico de z em relação ao eixo real. O módulo de z é a distância (euclidiana) do ponto z à origem. Ainda, a distância entre dois pontos $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, nada mais é que:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (2.30)$$

2.4 - REPRESENTAÇÃO POLAR DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Seja $z = x + iy$ um ponto diferente de $z = 0$, isto é,

$$r = |z| \neq 0 \text{ e,}$$

θ o ângulo medido em radianos, formado pela direção positiva do eixo real e pelo vetor \overline{Oz}

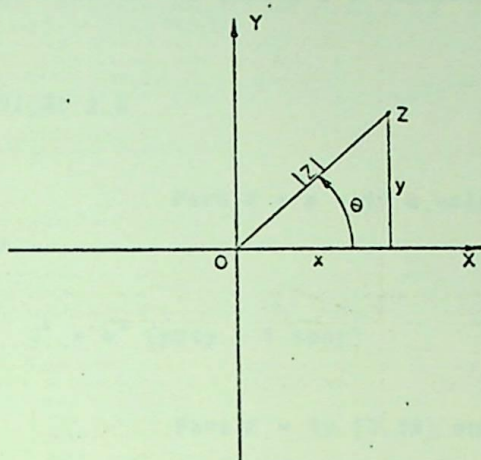


FIG. 2.3 Representação polar dos números complexos

A medida de θ (igual na trigonometria), a menos de um só múltiplo de 2π , se chama argumento de z e denotamos $\arg(z)$. Como $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$, todo número $z = x + yi \neq 0$ se pode escrever na forma:

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

Se dos infinitos valores de θ se toma:

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

chamado argumento principal de z , que denotamos $\text{Arg}(z)$, então se obtém para $k \in \mathbb{Z}$

$$z = r (\cos\theta + i \sin\theta) \quad (2.31)$$

$$(r = |z|, \theta = \arg(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi \text{ para } z \neq 0).$$

Os números r , $\theta = \text{Arg}(z)$ se chamam coordena -

das polares de z e (2.31) é a representação polar de z .

DEFINIÇÃO 2.6

Para $z = x + iy$ o valor de e^z é dado pela fórmula:

$$e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad (2.32)$$

Para $z = iy$ (2.32), nos dá:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \quad (\text{fórmula de Euler})$$

já que $e^0 = 1$. Portanto (2.31) pode ser dada na forma:

$$z = r e^{i\theta} \quad (r = |z| ; \theta = \arg(z)) \quad (2.33)$$

A expressão e^z goza das seguintes propriedades:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad (2.34)$$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z} \quad (2.35)$$

$$e^z \neq 0 \quad \forall z \quad (2.36)$$

$$|e^z| = e^x, \quad y = \arg(e^z) \quad (z = x + iy) \quad (2.37)$$

$$e^z = 1 \iff z = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.38)$$

Destas relações resultam importantes conclusões:

2.10

a) operando por iteração em (2.34) se obtêm para $n \in \mathbb{N}$ $(e^z)^n = e^{nz}$. Se $z = i\theta$, temos:

$$(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta} \quad (\text{Fórmula de Moivre}) \quad (2.39)$$

que comumente escrevemos:

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) \quad (2.40)$$

b) Se $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ então:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

como:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2) e^{i \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2)}$$

segue que:

$$e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2)}$$

ou

$$e^{i[\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) - (\theta_1 + \theta_2)]} = 1$$

logo de (2.38) concluímos que:

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.41)$$

$$c) e^{z_1} = e^{z_2} \quad z_1 - z_2 = 2k\pi i \quad \text{sendo } k \in \mathbb{Z}.$$

Isto é uma consequência de (2.38) e da equi-
valência $e^{z_1} = e^{z_2} \iff e^{z_1 - z_2} = 1$

OBS.: Uma aplicação da fórmula de Moivre é a determinação das n -ésimas raízes da unidade.

2.5 - CONJUNTO DE PONTOS

Ao conjunto de pontos do plano complexo chamamos bidimensional ou simplesmente conjunto de pontos.

Veremos algumas definições fundamentais.

VIZINHANÇAS

DEFINIÇÃO 2.7

O conjunto de todos os pontos z tais que:

$$|z - z_0| < \delta, \delta > 0$$

é chamado "δ vizinhança de um ponto z_0 ".

Uma "δ vizinhança perfurada de z_0 " é uma vizinhança de z_0 que não contém z_0 , isto é:

$$0 < |z - z_0| < \delta.$$

PONTO DE ACUMULAÇÃO

DEFINIÇÃO 2.8

Dado um conjunto de pontos S , z_0 é chamado ponto de acumulação de S , se toda δ vizinhança perfurada de z_0 contém os pontos de S .

Notar que z_0 pode ou não pertencer a S .

CONJUNTO FECHADO

DEFINIÇÃO 2.9

Um conjunto S é chamado conjunto fechado se todo ponto de acumulação de S pertence a S .

CONJUNTO LIMITADO

DEFINIÇÃO 2.10

Um conjunto S é dito limitado se podemos de terminar uma constante M tal que $|z| < M$ para todo $z \in S$.

Um conjunto ilimitado é um conjunto que não é limitado. Se S é limitado e fechado é também chamado compacto.

PONTOS INTERIORES, EXTERIORES E DE FRONTEIRA

DEFINIÇÃO 2.11

Um ponto z_0 é chamado um ponto interior de um conjunto S se podemos determinar uma δ -vizinhança de z_0 inteiramente contida em S .

Se toda δ -vizinhança de z_0 contém pontos pertencentes a S e também pontos não pertencentes a S , z_0 é chamado um ponto da fronteira.

Se um ponto não é interior nem um ponto da fronteira de S então ele é um ponto exterior de S .

CONJUNTO ABERTO

DEFINIÇÃO 2.12

Um "conjunto aberto" é um conjunto que con têm somente pontos interiores.

CURVAS PLANAS

DEFINIÇÃO 2.13

Seja a aplicação $z: t \in [a, b] \rightarrow z(t) \in \mathbb{C}$ a qual se representa por $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Tem-se:

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

sendo:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

funções reais definidas em $[a, b]$. Diz-se que $z = z(t)$ é contínua em $[a, b]$ quando as funções reais $x = x(t)$, $y = y(t)$ forem contínuas em $[a, b]$. Diz-se que $z = z(t)$ é derivável, em (a, b) quando $x = x(t)$, $y = y(t)$ forem aí deriváveis. Uma função contínua $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ diz-se segmentariamente, continuamente derivável em (a, b) quando existe uma decomposição de $[a, b]$ em um número finito de intervalos.

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$$

com:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

de modo que a restrição $z = z(t)$ a cada um dos subintervalos (t_{i-1}, t_i) seja aí continuamente derivável possuindo limites, laterais finitos nos t_i .

CURVA CONTÍNUA

DEFINIÇÃO 2.14

Denomina-se curva contínua ao subconjunto γ de C , imagem de um intervalo $[a, b]$ de R , por uma função contínua $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Diz-se que $z = z(t)$ é a representação paramétrica da curva γ , sendo t denominado o parâmetro, de γ .

Seja γ dada por $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$.

Quando $a \leq t_1 \leq t_2 < b$, diz-se que $z(t_1)$ precede $z(t_2)$ sobre γ . Logo quando t cresce de a até b os pontos $z(t)$ percorrem γ de $z(a)$ até $z(b)$. $z(a)$ e $z(b)$ são os extremos de γ sendo $z(a)$ a origem de $z(b)$ o ponto terminal. Vemos então que γ é uma curva orientada conforme a Fig. 2.4.

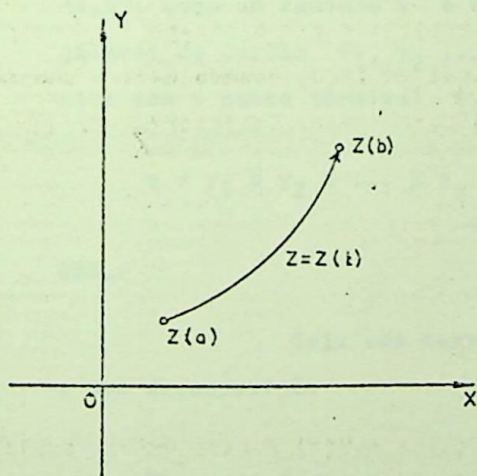


FIG. 2.4 Curva contínua orientada

ARCOS DE JORDAN

DEFINIÇÃO 2.14

Uma curva contínua γ de equação paramétrica $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, tal que para todo $a < t_1 < t_2 < b$ tem-se $z(t_1) \neq z(t_2)$ é denominada arco de Jordan.

OBS.: Se em γ $z(a) = z(b)$ então γ que é uma curva contínua, fechada é denominada curva de Jordan.

DEFINIÇÃO 2.15

Um arco de Jordan γ , com equação paramétrica $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, denomina-se regular, quando $z = z(t)$, for continuamente derivável em (a, b) . Ele denomina-se segmentariamente regular, ou um caminho γ no plano complexo, quando $z = z(t)$ for segmentariamente continuamente derivável em (a, b) . Logo um caminho γ é uma coleção finita de arcos regulares de Jordan $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ tais que a origem de γ_i coincide com o ponto terminal γ_{i+1} . Escreve-se que:

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$$

OBS.:

Seja uma curva contínua $z = z(t)$, $a < t \leq b$, e uma decomposição

$$D: a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

de $[a, b]$. Seja $S(D)$ o número real definido por:

$$S(D) = \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})|$$

diz-se que a curva γ possui comprimento finito ou \bar{e} retificável, quando o conjunto $\{S(D)\}$ for limitado. Neste caso o supremo de $\{S(D)\}$ denomina-se comprimento de γ e representamos por $C(\gamma)$, isto \bar{e} :

$$C(\gamma) = \text{Sup } \{S(D)\}$$

Vemos então que um segmento de reta \bar{e} um arco de Jordan regular. Poligonal \bar{e} um caminhy , cujos arcos regulares de Jordan γ_i que compoem γ são segmentos de reta. Resulta que uma poligonal possui comprimento finito.

DOMÍNIO SIMPLEMENTE CONEXO

DEFINIÇÃO 2.16.

Diz-se que um domínio $E \subset \mathbb{C}$ \bar{e} simplesmente conexo quando toda curva de Jordan , retificável contida em E , possui o seu interior constituído somente de pontos de E . Os E que não são simplesmente conexo denominam-se multiplicamente conexos. Ver Fig. 2.5.

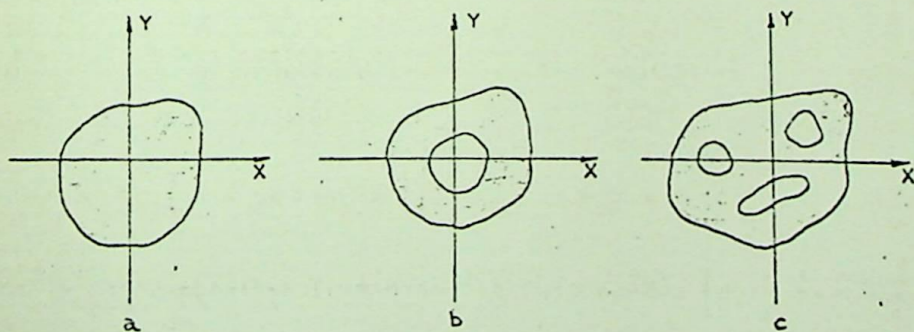


FIG. 2.5-a: Domínio simplesmente conexo
 b-c: Domínios multiplicamente

CONJUNTO CONEXO

DEFINIÇÃO 2.17

Um conjunto S é dito conexo se quaisquer dois pontos dele podem ser ligados por um caminho constituído de segmentos de reta (caminho poligonal) inteiramente contido em S .

REGIÕES ABERTAS OU DOMÍNIOS

DEFINIÇÃO 2.18

Um conjunto conexo aberto é chamado região aberta ou domínio.

CAPÍTULO 3

FUNÇÕES DE VARIÁVEIS COMPLEXAS3.1 - VARIÁVEL COMPLEXA

Se x e y variáveis reais então

$$z = x + iy$$

z é uma variável complexa.

3.2 - FUNÇÃO COMPLEXA

DEFINIÇÃO 3.1

Se $E \subset \mathbb{C}$, denomina-se função complexa toda correspondência unívoca definida em E com valores em \mathbb{C} .

Denotamos:

$$f: E \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{ou} \quad f: z \in E \rightarrow f(z) \in \mathbb{C}$$

ou ainda

$$w = f(z)$$

O sub-conjunto E , onde está definida a

fun

3.2

ção, denomina-se domínio de f e representamos por:

$$E = D(f)$$

A parte de C igual a $\{f(z)/z \in E\}$ denomina-se conjunto imagem de f ou contra-domínio de f e representamos por $C(f)$.

3.3 - TRANSFORMAÇÕES

Se $w = u + iv$ (onde u e v são funções reais), é dado por $w = f(z)$, sendo $z = x + iy$ (onde x e y são variáveis reais), podemos escrever:

$$w = f(z) \tag{3.1}$$

ou

$$u + iv = f(x + iy) \tag{3.2}$$

igualando as partes reais e imaginárias temos:

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \tag{3.3}$$

Assim a um ponto $P(x,y)$ do plano XY , conforme Fig. 3.1, corresponde um ponto $P'(u,v)$ do plano UV .

O conjunto das equações (3.3) ou o equivalente (3.1) é chamado transformação.

Dizemos que o ponto P é transformado no ponto P' , por meio da transformação f . P' é a imagem de P .

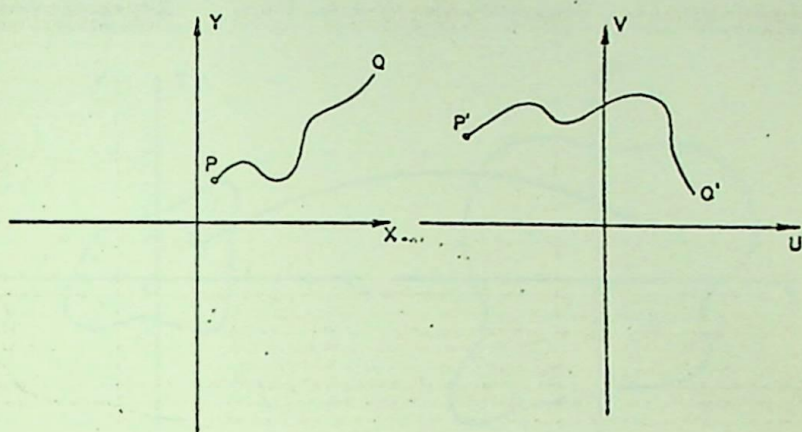


FIG. 3.1 Transformação da curva PQ em P'Q'

OBS.:

Em geral uma transformação f leva um conjunto de pontos do plano XY, tal como os pontos da curva PQ em um conjunto de pontos do plano UV, tal como os pontos da curva P'Q' conforme Fig. 3.1.

Genericamente uma transformação $w = f(z)$, é representada, geometricamente conforme a Fig. 3.2.

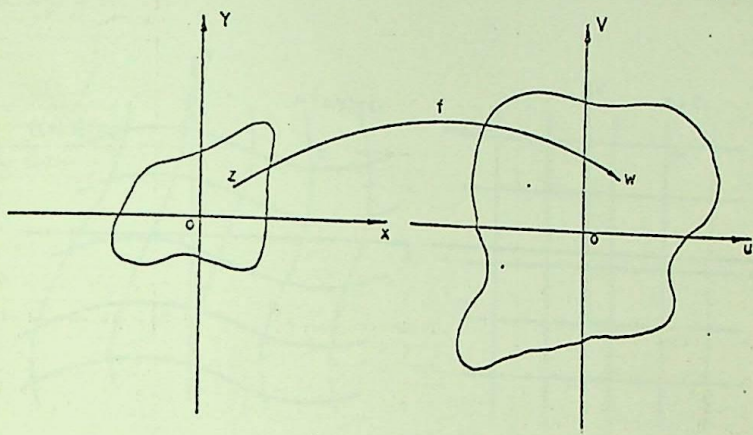


FIG. 3.2 Representação geométrica da transformação
 $w = f(z)$.

3.4 - COORDENADAS CURVILÍNEAS

Dada a transformação $w = f(z)$ dizemos que (x, y) são as coordenadas retangulares do ponto P no plano z (Plano XY) e (u, v) são as coordenadas curvilineas de P no plano XY .

As curvas $u(x, y) = C_1$, $v(x, y) = C_2$, onde C_1 e C_2 são constantes reais, são ditas curvas coordenadas e cada par dessas curvas intercepta em um ponto. Estas curvas transformam-se em retas, mutuamente ortogonais no plano w (Plano UV) conforme a figura 3.3.

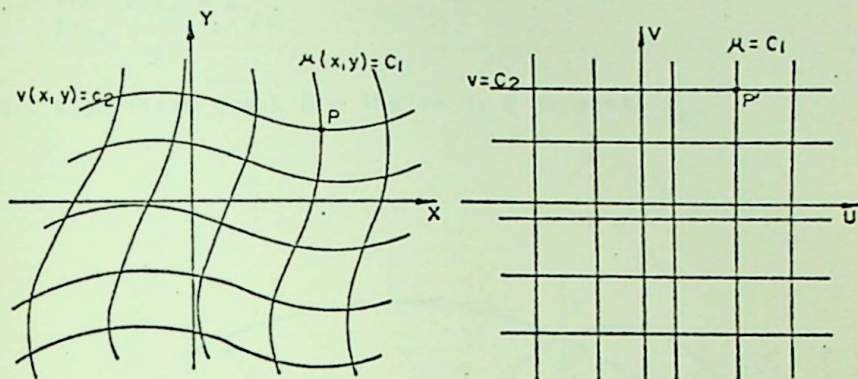


FIG. 3.3 Coordenadas curvilíneas

3.5 - LIMITE DAS FUNÇÕES COMPLEXAS

DEFINIÇÃO 3.2

Sejam E um subconjunto de \mathbb{C} , z_0 um ponto de acumulação de E e $f: E \rightarrow \mathbb{C}$.

Diz-se que um número complexo L é limite de f em Z_0 quando, para cada $\epsilon > 0$, existe um número positivo $\delta = \delta(\epsilon, z_0)$ tal que:

$$|f(z) - L| < \epsilon \quad \text{para todo } z \in E \text{ tal que:}$$

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

Usa-se a notação:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$$

para significar que L é o limite de f no ponto z_0 .

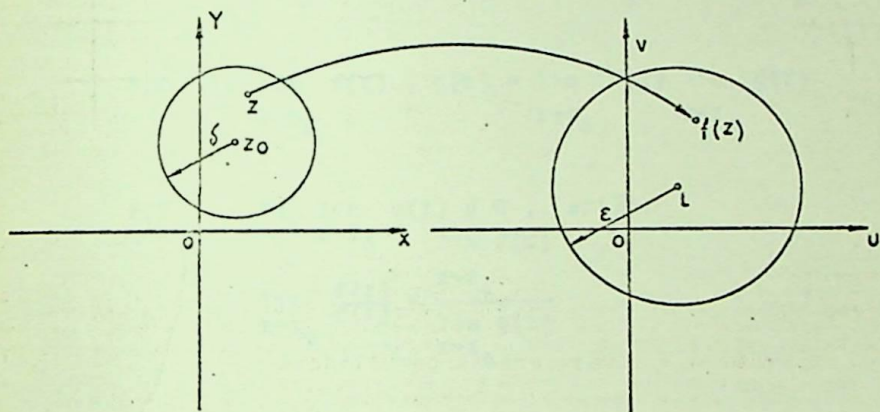


FIG. 3.4 Representação geométrica do $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$

Obs.:

a) note que, na definição de limite, exige-se apenas que $|z - z_0| < \delta$, ou, para os z de uma vizinhança perfurada de z_0 . Isto é, não é necessário que f esteja definida em z_0 para que ela aí possua limite.

b) da definição de limite demonstra-se:

- 1) a unicidade do limite de uma função em um ponto.
- 2) que, se f possui limite L em um ponto z_0 , então f é limitada em z_0
- 3) que, supondo $f: E \rightarrow C$, $g: E \rightarrow C$ e que existam os limites de f e g em z_0 , então, valem as seguintes igualdades:

$$P.1 - \lim_{z \rightarrow z_0} (\lambda f(z) + \mu g(z)) = \lambda \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \mu \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$P.2 - \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$P.3 - \text{Se } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0, \text{ então:}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}$$

3.6 - CONTINUIDADE

Seja $f: E \rightarrow C$ e z_0 um ponto de acumulação de E pertencendo a E . Diz-se que f é contínua em z_0 , quando o limite de f em z_0 for igual $f(z_0)$.

Diz-se que $f: E \rightarrow C$ é contínua em E , quando for contínua em cada ponto de $E \cap E'$, sendo E' o conjunto de todos os pontos de acumulação de E . Quando $E' = \emptyset$ diz-se que $f: E \rightarrow C$ é contínua em E .

3.7 - DERIVAÇÃO

Seja $E \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Tomemos um ponto $z_0 \in E$ e definamos a função $\Delta(f, z_0)$ em $E - \{z_0\}$ do seguinte modo:

$$\Delta(f, z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad z \in E - \{z_0\}$$

DEFINIÇÃO 3.3

Quando existe o limite da função $\Delta(f, z_0)$ no ponto $z_0 \in E$, diz-se que f é derivável em z_0 , sendo este limite denominado a derivada da função $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ no ponto $z_0 \in E$.

Representamos a derivada de f no ponto z_0

por:

$$f'(z_0) \quad \text{ou} \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$$

logo temos:

$$f'(z_0) = \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (3.4)$$

OBS.:

Na definição de derivada de função com
plexa, quando se diz que

$$\lim \Delta(f, z_0)$$

existe, fica subtendido que ele é um número complexo w_0 que independe do caminho seguido por z ao tender para z_0 .

EXEMPLO

Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \bar{z}$ a qual é contínua. Seja z_0 um ponto qualquer de \mathbb{C} . tem-se:

$$\Delta(f, z_0) = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{(x-x_0) - i(y-y_0)}{(x-x_0) + i(y-y_0)} \quad (3.5)$$

ora:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \Delta(f, z_0)$$

Examinemos se existe $\lim_{z \rightarrow z_0} \Delta(f, z_0)$ para diferentes caminhos seguidos por z .

Na Fig. 3.5 temos assinalados os caminhos I e II seguidos por z ao tender para z_0 .

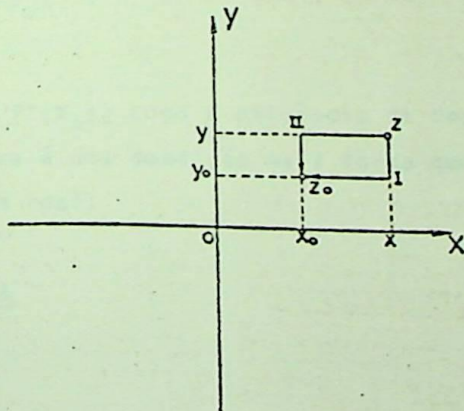


FIG. 3.5 Caminhos percorridos por z

Para o caminho I em (3.5) primeiramente fa
zemos $y \rightarrow y_0$ e seguir $x \rightarrow x_0$ o que resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{x-x_0 - i(y-y_0)}{x-x_0 + i(y-y_0)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x-x_0 - i(y-y_0)}{x-x_0 + i(y-y_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \end{aligned}$$

Para o caminho II em (3.5) primeiramente fa
zemos $x \rightarrow x_0$ e a seguir $y \rightarrow y_0$ o que resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{x-x_0 - i(y-y_0)}{x-x_0 + i(y-y_0)} &= \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x-x_0 - i(y-y_0)}{x-x_0 + i(y-y_0)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{-i(y-y_0)}{i(y-y_0)} = -1 \end{aligned}$$

logo:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{x-x_0 - i(y-y_0)}{x-x_0 + i(y-y_0)} = \cancel{\neq}$$

e portanto não existe $f'(z_0)$. Logo a exigência de derivabilidade de função complexa é uma condição mais forte que a de
rivabilidade de função real.

3.8 - FUNÇÃO HOLOMORFA

DEFINIÇÃO 3.4

Seja E um domínio e $f: E \rightarrow \mathbb{C}$. Diz-se que f

f é holomorfa em E quando f for derivável em cada ponto z_0 de E . Diz-se que f é holomorfa em um ponto z_0 , quando f for holomorfa em um domínio E que contém z_0 .

OBS.:

O termo holomorfa foi proposto por Briot (1817/1882) e Bouquet (1819/1895).

Laqrance (1736/1813) usava o termo função analítica e alguns autores usam ainda o termo monôgena em z_0 e analítica ou regular em um domínio E , uma função que é monôgena em cada ponto de E .

Demonstra-se que

PROPOSIÇÃO I

Se f for holomorfa em um domínio E ela é contínua em E .

PROPOSIÇÃO II

Sejam g e f funções holomorfas em um domínio E . Então, as funções $f+g$, λf , $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \cdot g$, f/g , onde $g(z) \neq 0$ são holomorfas em E , valendo as seguintes regras de derivação:

$$a) \quad (f+g)'(z) = f'(z) + g'(z) \quad (3.6)$$

$$b) \quad (\lambda f)'(z) = \lambda f'(z) \quad (3.7)$$

$$c) \quad (f \cdot g)'(z) = f'(z) g(z) + f(z) g'(z) \quad (3.8)$$

$$d) \left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{g(z) f'(z) - f(z) g'(z)}{g^2(z)} \quad (3.9)$$

PROPOSIÇÃO III

Seja $h = g \circ f$ a função composta de f com g . Se f for derivável em z_0 , g derivável em $w_0 = f(z_0)$, então h é derivável em z_0 , valendo a seguinte regra de derivação:

$$h'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \quad (3.10)$$

3.9 - EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

Veremos a seguir que o problema de sabermos se uma função complexa f é holomorfa em um ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ pertencente a E se reduz a questão de sabermos se as partes real e imaginária de f são parcialmente deriváveis em (x_0, y_0) . Seja $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, sendo $E \subset \mathbb{C}$ um domínio e escrevamos f sob a forma:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (3.11)$$

sendo:

$$u: E \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad v: E \rightarrow \mathbb{R}$$

TEOREMA 3.1

Seja $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 = x_0 + iy_0$. Uma condição necessária para que f seja derivável em z_0 é que u e v pos suas derivadas parciais de primeira ordem em (x_0, y_0) , satisfazendo a seguinte condição:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} = - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} \quad (3.12)$$

DEMONSTRAÇÃO

Se f é derivável em z_0 podemos escrever:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x + iy + x_0 - iy_0} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i \left[v(x, y) - v(x_0, y_0) \right]}{x - x_0 + i(y - y_0)} \quad (3.13) \end{aligned}$$

Para o caminho I, fazemos em (3.13) primeiramente $y \rightarrow y_0$ e a seguir $x \rightarrow x_0$ e resulta:

3.14

$$f'(z_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x,y) - u(x_0, y_0) + i(v(x,y) - v(x_0, y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)} = 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

ou

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} \quad (3.14)$$

Para o caminho II, fazemos em (3.13) primeiramente $x \rightarrow x_0$ e a seguir $y \rightarrow y_0$ e resulta:

$$f'(z_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x,y) - u(x_0, y_0) + i(v(x,y) - v(x_0, y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)}$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

ou

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} - i \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} \quad (3.15)$$

De (3.15) e (3.14) segue que:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} = - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} \quad \text{que é (3.12)}$$

Supondo f holomorfa em um domínio E , resulta, do Teorema 3.1, que u e v possuem derivadas parciais de primeira ordem em E , satisfazendo a condição:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.16)$$

As equações (3.16) são chamadas equações de Cauchy-Riemann.

TEOREMA 3.2

Sejam u e v funções reais definidas em um domínio $E \subset \mathbb{R}^2$, possuindo derivadas de primeira ordem contínuas em E e satisfazendo as condições de Cauchy-Riemann, então, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é holomorfa em um domínio E .

DEMONSTRAÇÃO

Seja $z = x + iy$ um ponto de E . Como E é um domínio ele contém um ponto qualquer $z_1 = x + \Delta x + i(y + \Delta y)$, tal que o segmento $z_1 z$ está contido em E e de acordo com o Teorema do valor médio das funções reais de várias variáveis, segue que:

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y) = \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.17)$$

as derivadas sendo calculadas em um ponto adequado do segmento $z_1 z$. Fazendo: seg

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

e

$$z_1 - z = \Delta x + i \Delta y$$

obtemos de (3.16):

$$f(z_1) - f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) \quad (3.18)$$

Substituindo em (3.18) as condições de Cauchy-Riemann de (3.16) segue:

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (z_1 - z) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dividindo (3.19) por $z_1 - z \neq 0$ temos:

$$\frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.20)$$

Em (3.20) fazendo $z_1 \rightarrow z$ as derivadas do segundo membro passam a ser calculadas em (x,y) e existem de acordo com a hipótese, então existe o limite do primeiro membro, e de (3.4) vemos que ele vale $f'(z)$. Logo $f(z)$ é holomorfa em E .

3.10 - TRANSFORMAÇÃO CONFORME

3.10.1 - ÂNGULO DE DUAS CURVAS

Sejam as curvas orientadas $\gamma_1 \subset C$ e $\gamma_2 \subset C$ tal que $\gamma_1 \cap \gamma_2 = z_0$ conforme Fig. 3.6.

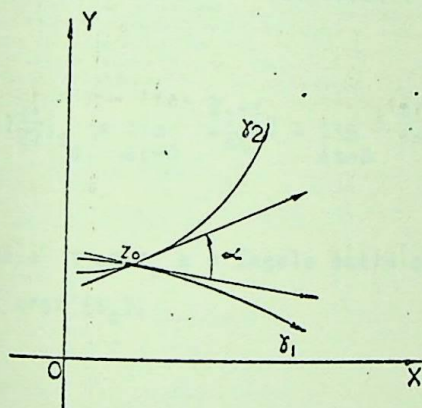


FIG. 3.6 Ângulo de duas curvas orientadas

DEFINIÇÃO 3.5

O ângulo α , $0 \leq \alpha \leq \pi$, de duas curvas orientadas γ_1 e γ_2 é o ângulo entre as tangentes orientadas às curvas no ponto z_0 .

OBS.:

As curvas orientadas γ_1 e γ_2 são arcos de Jordan regulares daí determinar, cada uma delas, apenas uma tangente orientada no ponto z_0 . De fato, a tangente a γ em um ponto $z_0 = z(t_0)$ é definida como a posição limite da reta que passa por z_0 e por outro ponto $z_1 = z(t_0 + \Delta t)$ quando $z_1 \rightarrow z_0$ ao longo de γ , isto é, quando $\Delta t \rightarrow 0$. Como o número complexo $z_1 - z_0$ pode ser representado pelo vetor de z_0 a z_1 , item 2.3, conforme Fig. 3.7, o vetor correspondente, a $(z_1 - z_0)/\Delta t$, onde $\Delta t > 0$, possui o mesmo sentido que aquele vetor. Segue que o vetor correspondente a

$$z'(t_0) = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \quad (3.21)$$

é tangente a γ em z_0 e o ângulo entre este vetor e o semi-eixo \vec{Ox} é $\arg z'(t_0)$.

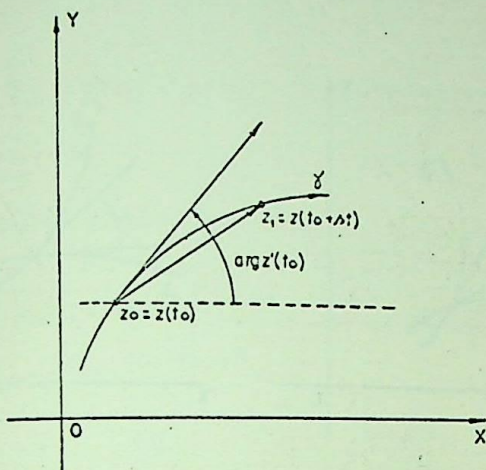


FIG. 3.7 Sentido da tangente a γ no ponto z_0

DEFINIÇÃO 3.6

Uma transformação $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $w = f(z)$ dizemos que é uma transformação conforme, se os ângulos entre as curvas orientadas do plano complexo Z , são mantidos, tanto em grandeza quanto em sentido, para as curvas orientadas imagens correspondentes do plano complexo w . Ver Fig. 3.8.

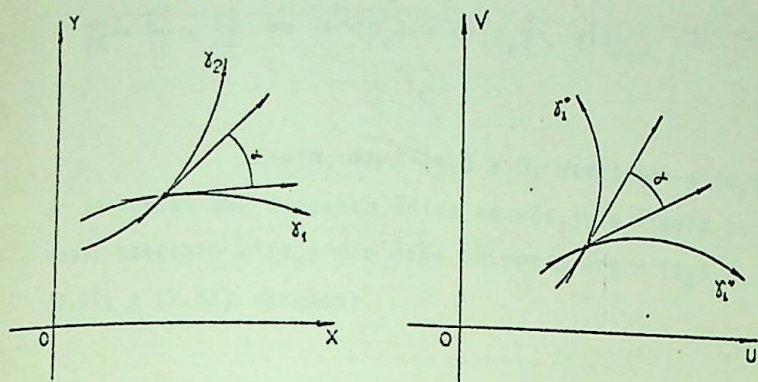


FIG. 3.8 Conservação do ângulo de duas curvas na transformação conforme

TEOREMA 3.3

Se a função $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em E e $f'(z) \neq 0$, então, a transformada $w = f(z)$ é conforme para todo $z \in E$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ tal que $\gamma \subset E$ é dada por $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$.

Então a imagem de γ , pela função f , é a curva orientada transformada γ^* do plano complexo w , definida por γ^* de equação $w = w(t) = f(z(t))$, $a \leq t \leq b$.

O ponto $z_0 = z(t_0)$ corresponde ao ponto $w(t_0)$ de γ^* e $w'(t_0)$ representa um vetor tangente a γ^* nesse

De acordo com (3.10) temos:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \quad \text{ou} \quad w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0) \quad (3.22)$$

Assim, se $f'(z_0) \neq 0$, vemos que $w'(t_0) \neq 0$, e γ^* possui uma tangente única em $w(t_0)$, o ângulo entre o vetor tangente $w'(t_0)$ e o eixo \overline{OU} sendo $\arg w'(t_0)$. De (2.41) e (3.22) obtemos:

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0) \quad (3.23)$$

Então, nesta transformação, a tangente ori-
entada a γ , em z_0 , gira de um ângulo

$$\arg w'(t_0) - \arg z'(t_0) = \arg f'(z_0) \quad (3.24)$$

que é o ângulo entre os dois vetores tangentes a γ e γ^* . Como o segundo membro de (3.24) é independente da escolha de γ , vemos que este ângulo é independente de γ ; assim a transformação $w = f(z)$ gira as tangentes a todas as curvas, que passam por z_0 de um mesmo ângulo $\arg f'(z_0)$. Logo, as curvas que passam por z_0 e que formam um certo ângulo em z_0 são transformadas em curvas que formam o mesmo ângulo, tanto em sentido quanto em grandeza, no ponto imagem w_0 de z_0 . Portanto $w = f(z)$ é transformação conforme.

OBS.:

a) o ponto em que $f'(z_0) = 0$ é chamado ponto crítico, e nele a transformação não é conforme.

b) vemos ainda que de (3.4):

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|$$

Por isso, a transformação $w = f(z)$ amplia os comprimentos dos segmentos pequenos por um fator de ordem de $|f'(z_0)|$. A imagem de uma pequena figura possui aproximadamente a mesma forma. Entretanto, como $f'(z)$ varia de ponto para ponto, uma grande figura pode possuir uma imagem cuja forma é bem diferente da figura original. Vemos ainda que de acordo com (3.14) e (3.16):

$$\begin{aligned} |f'(z)|^2 &= \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

isto é:

$$|f'(z)|^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)} = J \quad (3.25)$$

onde o determinante é chamado "Jacobiano da transformação"

$w = f(z)$ que sob a forma real é:

$$u = u(x,y) \quad v = v(x,y)$$

logo a condição $f'(z_0) \neq 0$ implica $J \neq 0$ em z_0 . Demonstra-se, que esta é uma condição suficiente para que a transformação conforme dada por $w = f(z)$ seja unívoca em uma vizinhança suficientemente pequena de z_0 .

3.11.1 - INTEGRAL DE LINHA

DEFINIÇÃO 3.7

Seja $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, contínua, sendo z_0, z_n extremos de γ um arco de Jordan segmentariamente regular contido em E . Seja γ dada por

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad a \leq t \leq b \quad (3.26)$$

Subdividimos γ pelos pontos z_1, z_2, \dots, z_n conforme Fig. 3.9.

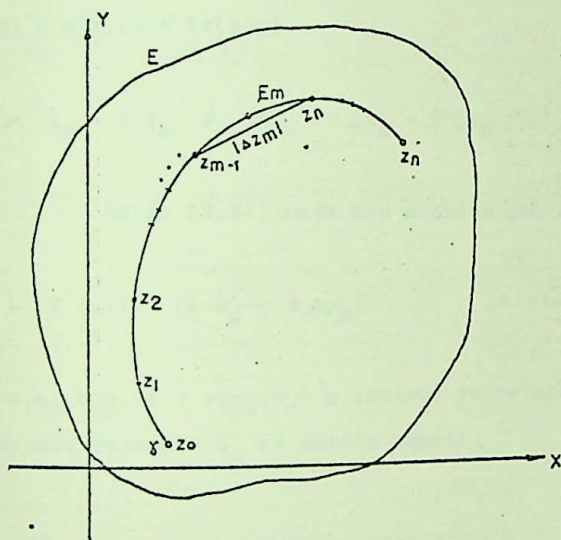


FIG. 3.9 Integral de Linha

Sobre cada intervalo da subdivisão escolhemos um ponto arbitrário ϵ_m , logo $\epsilon_m \in [z_{m-1}, z_m]$ e formamos

a soma:

$$S_n = \sum_{m=1}^n f(\epsilon_m) \Delta z_m \quad \text{onde} \quad \Delta z_m = z_m - z_{m-1} \quad (3.27)$$

Tal divisão, para $n = 2, 3, \dots$, é feita de uma maneira independente, mas tal que o máximo $|\Delta z_m| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. Logo obtemos uma sucessão de números complexos S_2, S_3, \dots . O limite desta sucessão é chamado "integral de linha" de f ao longo de γ e representamos por:

$$\int_{\gamma} f(z) dz \quad (3.28)$$

A existência de (3.28) decorre das hipóteses, feitas. De fato façamos

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

e

$$\epsilon_m = \alpha_m + i \beta_m \quad \text{e} \quad \Delta z_m = \Delta x_m - i \Delta y_m \quad (3.29)$$

Então (3.27) pode ser escrito sob a forma

$$S_n = \sum (u+iv) (\Delta x_m + i \Delta y_m) \quad (3.30)$$

onde $u = u(\alpha_m, \beta_m)$, $v = v(\alpha_m, \beta_m)$ e somamos em relação a m de 1 a n . Podemos decompor S_n em quatro somas:

$$S_n = \sum u \Delta x_m - \sum v \Delta y_m + i \left(\sum u \Delta y_m + \sum v \Delta x_m \right) \quad (3.31)$$

(3.31) é uma soma real. Como f é contínua u e v são. Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$ então máximos $\Delta x_m \rightarrow 0$ e

$\Delta y_m \rightarrow 0$ e cada soma do segundo membro de (3.31) se torna uma integral de linha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - \int_{\gamma} v dy + i \left(\int_{\gamma} u dy + \int_{\gamma} v dx \right) \quad (3.32)$$

Isto mostra que (3.28) existe e que seu valor independe da escolha das subdivisões e dos pontos z_m . Além disso, do cálculo integral real, cada integral de (3.32) pode ser expressada como segue:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b u x' dt - \int_a^b v y' dt + i \left(\int_a^b u y' dt + \int_a^b v x' dt \right) \quad (3.33)$$

onde:

$$u = u(x(t), y(t)) \quad \text{e} \quad v = v(x(t), y(t))$$

podemos abreviar (72) escrevendo:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (u+iv) (x'+iy') dt \quad (3.34)$$

ou mais abreviadamente, ainda:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \quad (3.35)$$

PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

Da definição de integrais de linha complexa, podemos imediatamente deduzir as seguintes propriedades:

$$P.1) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

tal que:

$$\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset \quad \text{e} \quad \gamma_1 \cup \gamma_2 = \gamma \quad (3.36)$$

$$P.2) \quad \int_{z_0}^{z_n} f(z) dz = - \int_{z_n}^{z_0} f(z) dz \quad (3.37)$$

$$P.3) \quad \int_{\gamma} \left[k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z) \right] dz = k_1 \int_{\gamma} f_1(z) dz + k_2 \int_{\gamma} f_2(z) dz \quad (3.38)$$

$$P.4) \quad \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \ell \quad (3.39)$$

onde ℓ é o comprimento de γ e M uma constante real tal que $|f(z)| \leq M$ (3.40).

TEOREMA 3.4 - TEOREMA INTEGRAL DE CAUCHY

Se $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em um domínio E simplesmente conexo, então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para toda curva de Jordan, regular, contida em E .

DEMONSTRAÇÃO

Seja $f(z) = u + iv$ continuamente derivável em E e de (3.33) obtêm-se:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (udx - vdy) + i \int_{\gamma} (udy + vdx) \quad (3.41)$$

$f(z)$ é holomorfa e portanto existe $f'(z)$. Cauchy acrescentou a hipótese que $f'(z)$ é contínua. Então u e v possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em E . Portanto, estas derivadas parciais são contínuas no fecho do interior de γ . Seja tal fecho E_1 , conclui-se ser γ a sua fronteira. Pela fórmula de Green, da integral de linha real, temos:

$$\int_{\gamma} (udx - vdy) = \int_{E_1} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.42)$$

$$\int_{\gamma} (vdx + xdv) = \int_{E_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.43)$$

como f é holomorfa então u e v são soluções das equações de Cauchy-Riemann; como consequência os segundos membros de (3.42) e (3.43) são nulos. Logo ambas as parcelas do segundo membro de (3.41) são nulas, provando o Teorema.

OBS.:

a) Goursat demonstrou o Teorema de Cauchy sem supor que $f'(z)$ fosse contínua, o que representa um importante resultado.

b) O teorema de Cauchy ainda é válido se γ for um caminho fechado em E ao invés de uma curva de Jordan, regular.

EXEMPLO: Se γ é o perímetro de um polígono, subdividimos o polígono em triângulos, conforme Fig. 3.10.

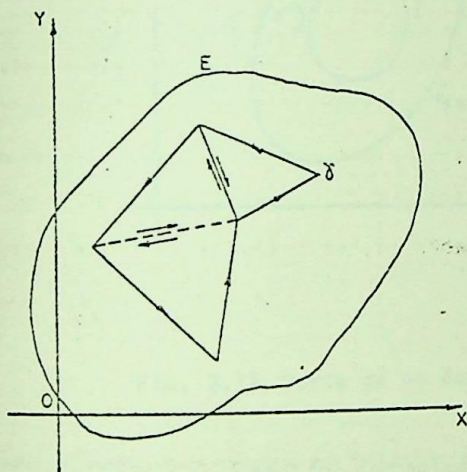


FIG. 3.10 Caminho fechado γ contido em E

A soma dessas integrais é igual a integral sobre γ , porque integramos ao longo de cada segmento de divisão em ambos os sentidos, de sorte que as integrais se cancelam aos pares, só restando a integral sobre γ .

c) Seja E um domínio múltiplamente conexo e
 $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, neste caso podemos efetuar um corte de
 maneira que resulte um domínio simplesmente conexo, conforme Fig. 3.11.

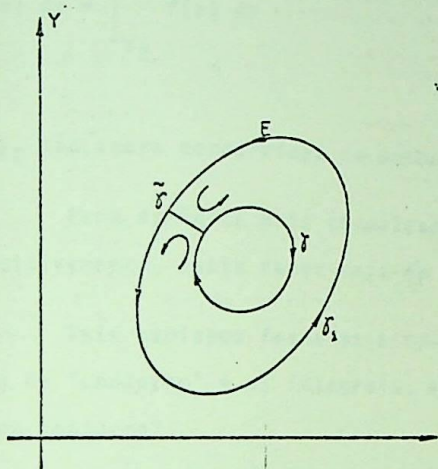


FIG. 3.11 Corte de um domínio múltiplamente conexo

Se $f(z)$ for holomorfa em E ; e em
 da ponto de γ_1, γ_2 , então, γ_1, γ_2 e $\tilde{\gamma}$ limitam uma região
 simplesmente conexa segue-se do teorema de Cauchy que
 integral de f tomada sobre $\gamma_1, \tilde{\gamma}, \gamma_2$ no sentido indicado na
 Fig. 3.11 possui o valor zero. Como integramos ao longo
 $\tilde{\gamma}$ em ambos os sentidos, as integrais correspondentes
 cancelam e obtemos:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0 \quad (3.44)$$

onde γ_1 é percorrida num sentido e γ_2 no sentido retrógrado. Podemos escrever (3.44) como segue:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad (3.45)$$

onde γ_1 e γ_2 são agora percorridas no mesmo sentido.

Para domínios mais complicados (mais de um buraco), intuitivamente, basta fazer mais de um corte.

Tais caminhos fechados simples são chamados muitas vezes de "contorno" e as integrais, ao longo deles de "integrais de contorno".

3.11.3 - CÁLCULO DAS INTEGRAIS DE LINHA MEDIANTE INTEGRACÃO INDEFINIDA

Como no cálculo real distinguimos as integrais definidas e as integrais indefinidas cujas antiderivadas. Uma integral indefinida é uma função cuja derivada é igual a uma função holomorfa dada em um domínio. Por meio de inversão de fórmulas de derivação conhecidas podemos encontrar muitos tipos de integrais indefinidas.

Se $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ for holomorfa em E um domínio simplesmente conexo, e se $F(z)$ for uma integral indefinida de $f(z)$, então para todos os caminhos, contidos em E que ligam os dois pontos $z_1, z_2 \in E$:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1) \quad (3.46)$$

DEMONSTRAÇÃO

Seja:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z^*) dz^* \quad (3.47)$$

uma função de z para todos os caminhos que existem em E e unem z_0 a z . Mostraremos que $F(z)$ é uma função holomorfa de z em E , e $F'(z) = f(z)$.

Mantemos z fixo. Como E é um domínio, uma vizinhança V de z está contida em E . Em V escolhemos um ponto $z + \Delta z$. Então o segmento de reta com pontos terminais z e $z + \Delta z$ está contido em E , e de um obtemos:

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(z^*) dz^* - \int_{z_0}^z f(z^*) dz^* = \int_z^{z + \Delta z} f(z^*) dz^* \quad (3.48)$$

onde podemos integrar de z a $z + \Delta z$ ao longo daquele segmento.

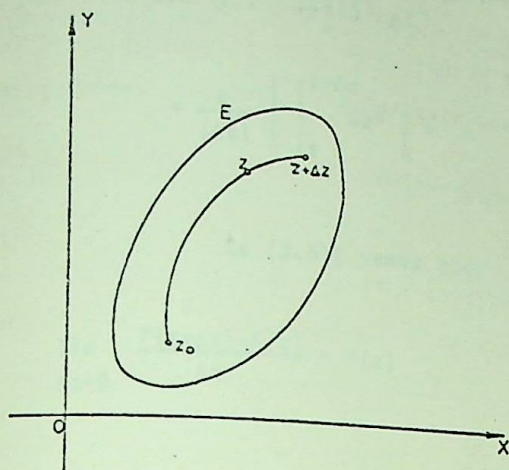


FIG. 3.12 Caminho de z_0 a z

Assim de (3.48) temos:

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(z^*) - f(z)] dz^* \quad (3.49)$$

porque z é mantido fixo e de (3.48) fica:

$$-\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) dz^* = -\frac{f(z)}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} dz^* = -f(z) \quad (3.50)$$

sabemos que $f(z)$ é contínua. Assim, para $\epsilon > 0$ podemos de
terminar um $\delta > 0$ tal que:

$$|f(z^*) - f(z)| < \epsilon \quad \text{quando} \quad |z^* - z| < \delta$$

em consequência, se $|\Delta z| < \delta$ então:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} (f(z^*) - f(z)) dz^* \right| < \\ &< \frac{\epsilon}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} dz^* \right| = \epsilon \end{aligned} \quad (3.51)$$

De (3.51) vemos que:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

ou

$$F'(z) = f(z) \quad (3.52)$$

Então $F(z)$ é uma antiderivada de $f(z)$ ou

$$F(z) = \int f(z) dz \quad (3.53)$$

então $F(z)$ é holomorfa em E , cuja derivada é $f(z)$.

De (3.47) segue-se que se z_0 for substituído por um outro ponto fixo de E , a função $F(z)$ é alterada por uma constante aditiva. Se $F'(z) = f(z)$, $G'(z) = f(z)$ então $F'(z) - G'(z) \equiv 0$. Assim a função $F(z) - G(z)$ é constante. Isto mostra que as duas integrais indefinidas $F(z)$ e $G(z)$ diferem unicamente por uma constante. De (3.47) temos para quaisquer pontos $z_1, z_2 \in E$ e qualquer caminho em E de z_1 a z_2 .

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \int_{z_0}^{z_2} f(z) dz - \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

e fica demonstrado o teorema.

OBS.:

Este teorema permite o cálculo das integrais de linha complexas por meio da integral indefinida complexa.

3.11.4 - FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

TEOREMA 3.6

Seja $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em E um domínio simplesmente conexo. Então para qualquer ponto $z_0 \in E$ e qualquer caminho fechado $\gamma \subset E$ que encerra z_0

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad (3.54)$$

"Fórmula integral de Cauchy" a integração sendo efetuada no sentido direto.

DEMONSTRAÇÃO

$$\text{Escrevendo } f(z) = f(z_0) + \left| f(z) - f(z_0) \right| \quad (3.55)$$

e partindo de igualdade:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \quad (3.56)$$

Cálculo de:

$$\int_Y \frac{dz}{z - z_0} = \int_Y (z - z_0)^{-1} dz \quad (3.57)$$

$f(z) = (z - z_0)^{-1}$ não é holomorfa para $z = z_0$.

Seja γ um caminho fechado descrito pela equação

$$z(t) = z_0 + \rho (\cos t + i \sin t) = z_0 + \rho e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (3.58)$$

que é uma circunferência orientada de raio ρ e centro z_0 .

De (3.57) tiramos:

$$(z - z_0)^{-1} = \rho^{-1} e^{-it}$$

e

$$dz = i \rho e^{it} dt \quad (3.59)$$

levando (3.59) em (3.57) temos:

$$\int_Y \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \rho^{-1} e^{-it} \cdot i \rho e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \quad (3.60)$$

levando (3.60) em (3.56) temos:

$$\int_Y \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) + \int_Y \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \quad (3.61)$$

Mostremos que:

$$\int_Y \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

Podemos substituir por uma pequena
 conferência k com centro em z_0 sem alterar o valor da
 tegral, Fig. 3.13. cir
in

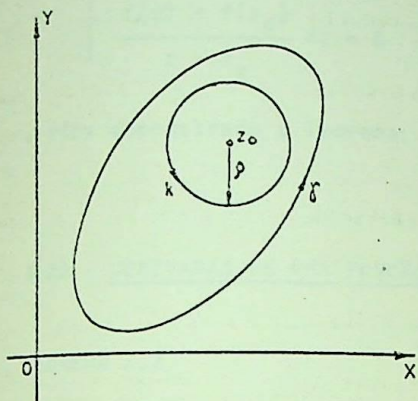


FIG. 3.13 Caminho fechado γ que encerra z_0

Como $f(z)$ é holomorfa é contínua. Então da
 do um $\epsilon > 0$ podemos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

para todo z na vizinhança $|z - z_0| < \delta$.

Escolhendo o raio ρ de k menor que δ te
 mos:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\epsilon}{\rho} \quad (3.62)$$

em cada ponto de k . O comprimento de k é $2\pi\rho$, assim de acor
 do com (3.40)

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon \quad (3.63)$$

como ϵ pode ser tomado arbitrariamente pequeno segue que:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

e fica demonstrado o Teorema.

3.12 - DERIVADAS DE UMA FUNÇÃO HOLOMORFA.

TEOREMA 3.7

Se $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ for holomorfa no domínio E , então ela possui derivadas de todas as ordens em E , que são também funções holomorfas em E . Os valores destas derivadas em um ponto $z_0 \in E$ são dados pelas fórmulas:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \quad (3.64)$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz \quad (3.65)$$

e em geral:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.66)$$

onde $\gamma \subset E$ é qualquer caminho simples fechado que encerra z_0 e é percorrido no sentido direto, Fig. 3.14.

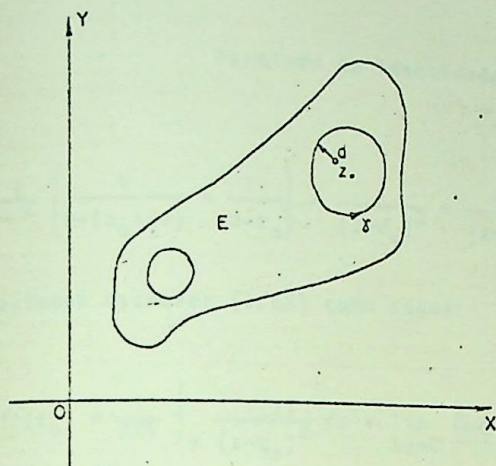


FIG. 3.14 Caminho simples fechado γ que encerra z_0

DEMONSTRAÇÃO

Demonstraremos apenas (3.64) com procedimento análogo se demonstra (3.65) e por indução fica demonstrado (3.66). De (3.4) temos:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{ou para } \Delta z = z - z_0$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (3.67)$$

De (3.67) e (3.54) segue que:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i \Delta z} \left(\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)} dz - \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right) \quad (3.68)$$

Partindo da identidade:

$$\frac{1}{\Delta z} \left(\frac{1}{z - (z_0 + \Delta z)} - \frac{1}{z - z_0} \right) = \frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2}$$

podemos escrever (3.68) como segue:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz \quad (3.69)$$

Assim (3.64) fica demonstrado se mostrarmos, que a segunda parcela do segundo membro de (3.69) possui o valor zero.

Sobre γ $f(z)$ é contínua e, portanto, limitada em valor absoluto, $|f(z)| < M$. Seja d a distância de um ponto genérico de γ que é mais próximo de z_0 . Então para todo $z \in \gamma$.

$$|z - z_0| \geq d \quad \text{e} \quad \frac{1}{|z - z_0|} \leq \frac{1}{d} \quad (3.70)$$

Além disso $|\Delta z| \leq \frac{d}{2}$ então para todos aque-

les z :

$$|z - z_0 - \Delta z| \geq \frac{d}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} \leq \frac{2}{d}$$

Representando por L o comprimento de γ e de

(3.40) obtemos:

$$\left| \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)} dz \right| < \frac{|\Delta z|}{2} \frac{M}{d} L \quad (3.71)$$

Se $\Delta z \rightarrow 0$ o segundo membro de (3.71) ten
de a zero, logo a segunda parcela do segundo membro de
(3.69) é nula.

Obs.:

Tal teorema nos mostra que uma função holomor
fa complexa se comporta de uma maneira mais simples que uma
função real que ao ser uma vez derivável nada se conclui da
existência das derivadas de ordem superior.

TEOREMA 3.8 - TEOREMA DE MORERA

Se $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ for contínua em E um domínio sim
plesmente conexo e se $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para todo caminho fe
chado $\gamma \subset E$, então f é holomorfa em E .

DEMONSTRAÇÃO

De (3.46) e (3.52) vimos que se $f(z)$ é holo
morfa em E então $F(z) = \int_{z_0}^z f(z^*) dz^*$ é holomorfa em E e

$F'(z) = f(z)$. Na demonstração empregamos unicamente a con
tinuidade de $f(z)$ e a propriedade de sua integral em torno de
qualquer caminho fechado $\gamma \subset E$ ser nula. Destas hipóteses con
cluimos que $F(z)$ é holomorfa. De acordo com (3.64) a derivada
de $F(z)$ é holomorfa em E , ficando demonstrado o teorema.

Seja γ de (3.66) uma circunferência de raio r com centro em z_0 e M o máximo de $f(z)$ sobre γ . Então, aplicando (3.40) encontramos:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r$$

ou simplesmente:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n} \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.72)$$

que é a desigualdade de Cauchy

TEOREMA 3.9 - TEOREMA DE LIOUVILLE

Se $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ for holomorfa e limitada em valor absoluto em E , para z (finito) qualquer, então $f(z)$ é uma constante.

DEMONSTRAÇÃO

Por hipótese $|f(z)|$ é limitada, seja então $|f(z)| < k$ para qualquer z .

De (3.72) segue-se que $|f'(z_0)| < \frac{k}{r}$. Como isto é verdadeiro para qualquer r , podemos considerar r tão grande quanto desejamos, e concluir que $f'(z_0) = 0$. Como z_0 é arbitrário, $f'(z) = 0$, para qualquer z finito e $f(z)$ é uma constante. Fica pois demonstrado o teorema.

3.14 - EQUAÇÃO DE LAPLACE

As partes real e imaginária de uma função complexa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ que é holomorfa em um domínio E são soluções da equação de Laplace

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (3.73)$$

em E e possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, em E .

DEMONSTRAÇÃO

Do teorema 3.7, (3.66) conclui-se que $u(x,y)$ e $v(x,y)$ terão derivadas parciais contínuas de todas as ordens em E .

De (3.16) temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

derivando estas equações, respectivamente, em relação a x e a y obtemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

como as derivadas cruzadas são iguais comparando (3.74) com (3.75) segue que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

ficando demonstrado o teorema.

OBS.:

a) como uma solução da equação de Laplace que possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas é chamada "função harmônica" conclui-se que as partes real e imaginária de uma função holomorfa são funções harmônicas. E se uma função $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em E , então $u(x,y)$ é chamada função harmônica conjugada de $v(x,y)$ em E e vice-versa. Logo, $u(x,y)$ e $v(x,y)$ formam um par de funções harmônicas conjugadas em E .

b) (3.73) constitui uma das principais razões da grande importância da "Análise complexa" na matemática aplicada à Engenharia.

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS COMPLEXAS4.1 - DEFINIÇÕES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS COMPLEXAS

As funções hiperbólicas complexas são de finidas analogamente as funções hiperbólicas reais como segue

DEFINIÇÃO 4.1 - FUNÇÃO SENO HIPERBÓLICO

$$\text{sh: } z \rightarrow \text{shz} \quad \text{tal que} \quad \text{shz} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

DEFINIÇÃO 4.2 - FUNÇÃO COSSENO HIPERBÓLICO

$$\text{ch: } z \rightarrow \text{chz} \quad \text{tal que} \quad \text{chz} = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

DEFINIÇÃO 4.3 - FUNÇÃO TANGENTE HIPERBÓLICA

$$\text{tgh: } z \rightarrow \text{tghz} \quad \text{tal que} \quad \text{tghz} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

DEFINIÇÃO 4.4 - FUNÇÃO COTANGENTE HIPERBÓLICA

$$\text{cotgh: } z \rightarrow \text{cotghz} \quad \text{tal que} \quad \text{cotghz} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

para $z \neq 0$

DEFINIÇÃO 4.5 - FUNÇÃO SECANTE HIPERBÓLICA

$$\text{sech: } z \rightarrow \text{sechz} \quad \text{tal que} \quad \text{sechz} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}$$

DEFINIÇÃO 4.6 - FUNÇÃO COSSECANTE HIPERBÓLICA

$\operatorname{cosech} z \rightarrow \operatorname{cosech} z$ tal que $\operatorname{cosech} z = \frac{2}{e^z - e^{-z}}$

para $z \neq 0$

4.2 - PROPRIEDADES

Devido as definições de 3.1 e a analogia com as funções hiperbólicas reais são válidas para as funções hiperbólicas complexas as propriedades das funções reais descritas em 1.6 e 1.9.

4.3 - HOLOMORFISMO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS COMPLEXAS

TEOREMA 4.1

As funções hiperbólicas complexas são holomorfas.

DEMONSTRAÇÃO

Faremos a demonstração apenas para a função seno hiperbólico. Para as demais funções a demonstração tem raciocínio análogo.

Seja $sh: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $w = shz$, fazendo:

$z = x + yi$, temos:

$w = sh(x + yi)$ de (1.38) segue

$w = shxchy + shychx$ de (1.73) e (1.74)

$$w = \operatorname{sh}x \operatorname{cos}y + i \operatorname{sen}y \operatorname{ch}x \quad (4.1)$$

Sejam as funções reais:

$$u = \operatorname{sh}x \operatorname{cos}y \quad (4.2)$$

$$v = \operatorname{sen}y \operatorname{ch}x \quad (4.3)$$

Aplicando a (4.2) e (4.3) as condições de Cauchy-Riemann (3.16) temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{ch}x \operatorname{cos}y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\operatorname{sh}x \operatorname{sen}y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{sen}y \operatorname{sh}x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{cos}y \operatorname{ch}x$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{ch}x \operatorname{cos}y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\operatorname{sh}x \operatorname{sen}y$$

Do teorema 3.2 fica provado que $w = u + iv = \operatorname{sh}z$ é

holomorfa em \mathbb{C} .

4.4 - TRANSFORMAÇÃO CONFORME

Do teorema 4.1 segue que, além das partes imaginária e real das funções hiperbólicas complexas serem funções reais conjugadas harmônicas, as funções hiperbólicas complexas definem uma transformação conforme, daí a importância de seu estudo, devido ao poderoso instrumento matemático que elas representam para a solução de variados problemas de Engenharia. Veremos a seguir, como ilustração, algumas transformações definidas por funções hiperbólicas complexas. Para investigar as propriedades específicas de $w = \text{sh}z$ e $w = \text{ch}z$ faremos as curvas definidas por $u(x,y) = \text{constante}$ e $v(x,y) = \text{constante}$ no plano z , isto é estudaremos as curvas de nível das funções u e v .

4.4.1 - TRANSFORMAÇÃO $w = \text{sh}z$

Seja $w = \text{sh}z$ para $z = x + iy$ de (4.1):

$$w = \text{sh}x \cos y + i \text{sen}y \text{ch}x$$

e de (4.2)

$$u = \text{sh}x \cos y \tag{4.4}$$

e de (4.3)

$$v = \text{sen}y \text{ch}x \tag{4.5}$$

Para $u = \text{constante}$ e $v = \text{constante}$ tiramos:

$$y = \arccos\left(\frac{u}{\text{sh}x}\right) \tag{4.6}$$

$$y = \arcsen \left(\frac{v}{\operatorname{ch}x} \right) \quad (4.7)$$

Aplicando (4.6) e (4.7) construímos Tabela 4.1 e os respectivos gráficos cartesianos, Fig. 4.1 das curvas de nível de u e v .

OBS.:

a) de acordo com (3.25) o Jacobiano da transformação pode ser calculado no sistema formado por (4.4) e (4.5) e obtemos:

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \operatorname{ch}^2 x \cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sen}^2 y \neq 0$$

para $z \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)i$ e portanto a transformação $w = \operatorname{sh}z$ é unívoca em $C - \left\{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)i\right\}$

b) Na Fig. 4.1 vemos que a região M , um quadrilátero curvilíneo, do plano z é transformada na região M' , um quadrado, do plano w .

TABELA 4.1 $v = 5Hz$

$U=-3$		$U=-1$		$U=1$		$U=3$		$V=-3$		$V=-1$		$V=1$		$V=3$	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
$-\infty$	1,57	$-\infty$	1,57	$-\infty$	1,57	$-\infty$	1,57	$-\infty$	0	$-\infty$	0	$-\infty$	0	$-\infty$	0
-3,4	1,3	-2,1	1,3	-2,1	1,8	-3,4	1,8	-3,2	-0,3	-2,1	-0,3	-2,1	0,3	-3,2	0,3
-2,5	1,07	-1,4	1	-1,4	2,1	-2,5	2,1	-2,5	-0,5	-1,3	-0,5	-1,3	0,5	-2,5	0,5
-2,1	0,7	-1,1	0,7	-1,1	2,5	-2,1	2,5	-2,1	-0,8	-0,3	-0,8	-0,3	0,8	-2,1	0,8
-1,9	0	-0,9	0	-0,9	3,14	-1,9	3,14	-1,8	-1,57	0	-1,57	0	1,57	-1,8	1,57
1,9	3,14	0,9	3,14	0,9	0	1,9	0	1,8	-1,57	0,3	-0,8	0,3	0,8	1,8	1,57
2,1	2,5	1,1	2,5	1,1	0,7	2,1	0,7	2,1	-0,8	1,3	-0,5	1,3	0,5	2,1	0,8
2,5	2,1	1,4	2,1	1,4	1	2,5	1,07	2,5	-0,5	2,1	-0,3	2,1	0,3	2,5	0,5
3,4	1,8	2,1	1,8	2,1	1,3	3,4	1,3	3,2	-0,3	$+\infty$	0	$+\infty$	0	3,2	0,3
$+\infty$	1,57	$+\infty$	1,57	$+\infty$	1,57	$+\infty$	1,57	$+\infty$	0	$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$	0

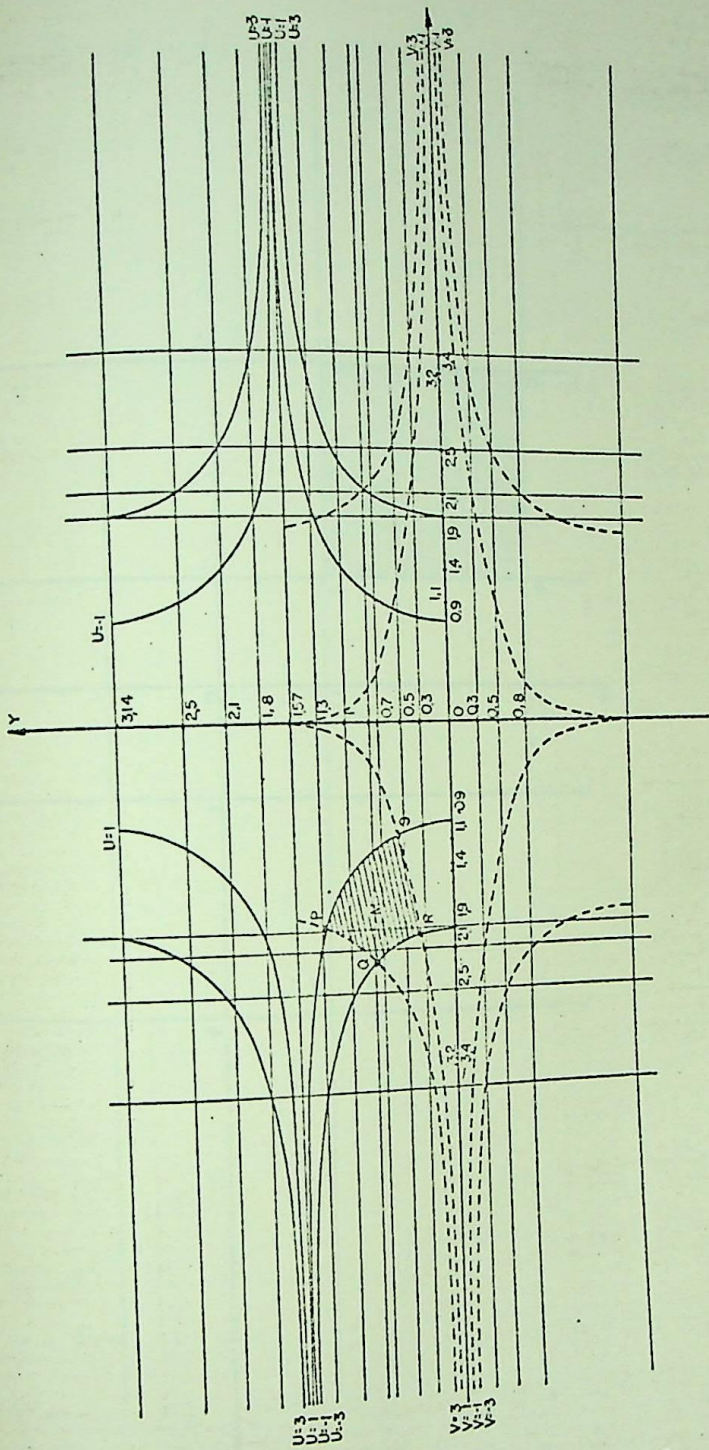
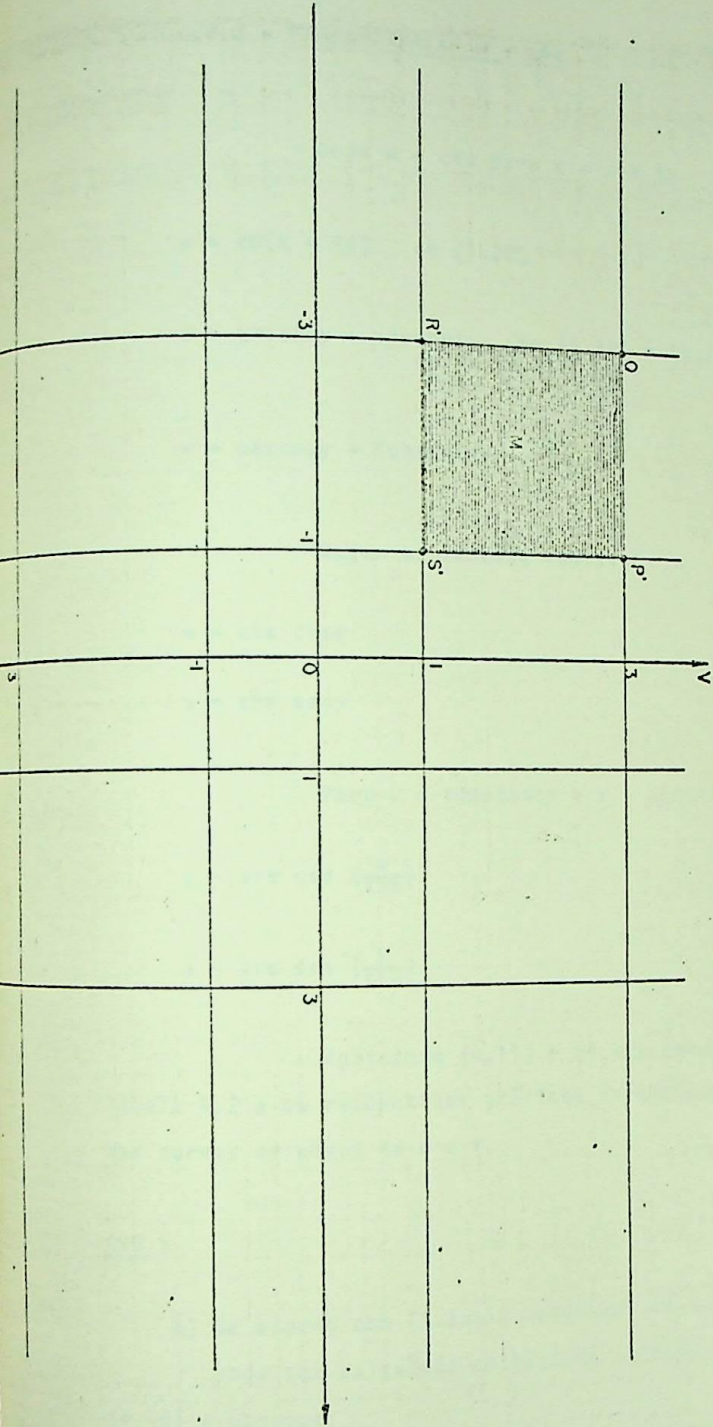


FIG. 4.1.a - Mapeamento da função $v = shz$



4.4.2 - TRANSFORMAÇÃO $w = chz$

Seja $w = chz$ para $z = x + iy$

$$w = ch(x + iy) \quad \text{de (1.39)}$$

$$w = chxchiy + shxshyi \quad \text{de (1.73) e (1.74)}$$

$$w = chxcosy + ishxseny \quad (4.8)$$

Sejam as funções reais:

$$u = chx cosy \quad (4.9)$$

$$v = shx seny \quad (4.10)$$

Para $u = \text{constante}$ e $v = \text{constante}$ tiramos:

$$y = \arccos\left(\frac{u}{chx}\right) \quad (4.11)$$

$$y = \arcsen\left(\frac{v}{shx}\right) \quad (4.12)$$

Aplicando (4.11) e (4.12) construímos a Tabela 4.2 e os respectivos gráficos cartesianos, Fig. 4.2, das curvas de nível de u e v .

OBS.:

a) de acordo com (3.25) o Jacobiano da transformação pode ser calculado no sistema formado por (4.9) e (4.10) e obtemos:

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x \cos^2 y \neq 0$$

para $z \neq k\pi i$ e portanto a transformação $w = \operatorname{ch} z$ é unívoca, em $C - \{k\pi i\}$.

b) Na Fig. 4.2 vemos que a região M , um quadrilátero curvilíneo, do plano z , é transformada na região M' um quadrado do plano w .

TABELA 4.2 $v = chz$

$u = -3$		$u = -1$		$u = 1$		$u = 3$		$v = -3$		$v = -1$		$v = 1$		$v = 3$	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
$-\infty$	1,57	$-\infty$	1,57	$-\infty$	1,57	$-\infty$	1,57	$-\infty$	0	$-\infty$	0	$-\infty$	0	$-\infty$	0
-3,1	1,6	-2,1	1,6	-2,1	1,2	-3,1	1,2	-3,2	0,3	-2,1	0,3	-2,1	-0,3	-3,2	-0,3
-2,4	2,1	-1,3	2,1	-1,3	1,05	-2,4	1,05	-2,5	0,5	-1,5	0,5	-1,5	-0,5	-2,5	-0,5
-2,05	2,4	-0,8	2,4	-0,8	0,6	-2,05	0,6	-2,1	0,8	-1,1	0,8	-1,1	-0,8	-2,1	-0,8
-1,75	3,14	0	3,14	0	0	-1,75	0	-1,8	1,57	-0,9	1,57	-0,9	-1,57	-1,8	-1,57
1,75	3,14	0,8	2,4	0,8	0,6	1,75	0	1,8	-1,57	0,9	-1,57	0,9	1,57	1,8	1,57
2,05	2,4	1,3	2,1	1,3	1,05	2,05	0,6	2,1	-0,8	1,1	-0,8	1,1	0,8	2,1	0,8
2,4	2,1	2,1	1,6	2,1	1,2	2,4	1,05	2,5	-0,5	1,5	-0,5	1,5	0,5	2,5	0,5
3,1	1,6	$+\infty$	1,57	$+\infty$	1,57	3,1	1,2	3,2	-0,3	2,1	-0,3	2,1	0,3	3,2	0,3
$+\infty$	1,57					$+\infty$	1,57	$+\infty$	0	$+\infty$	0	$+\infty$	0	$+\infty$	0

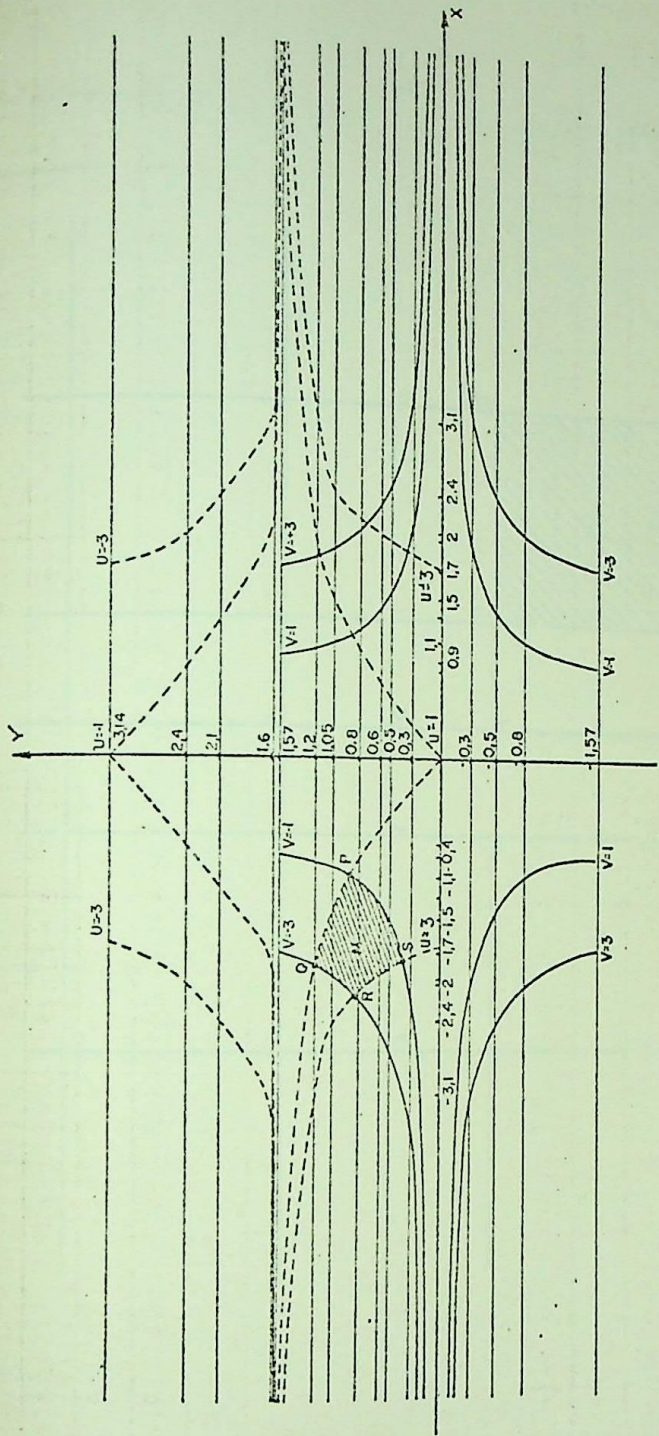


FIG. 4.2.a - Mapeamento da função $w = chz$

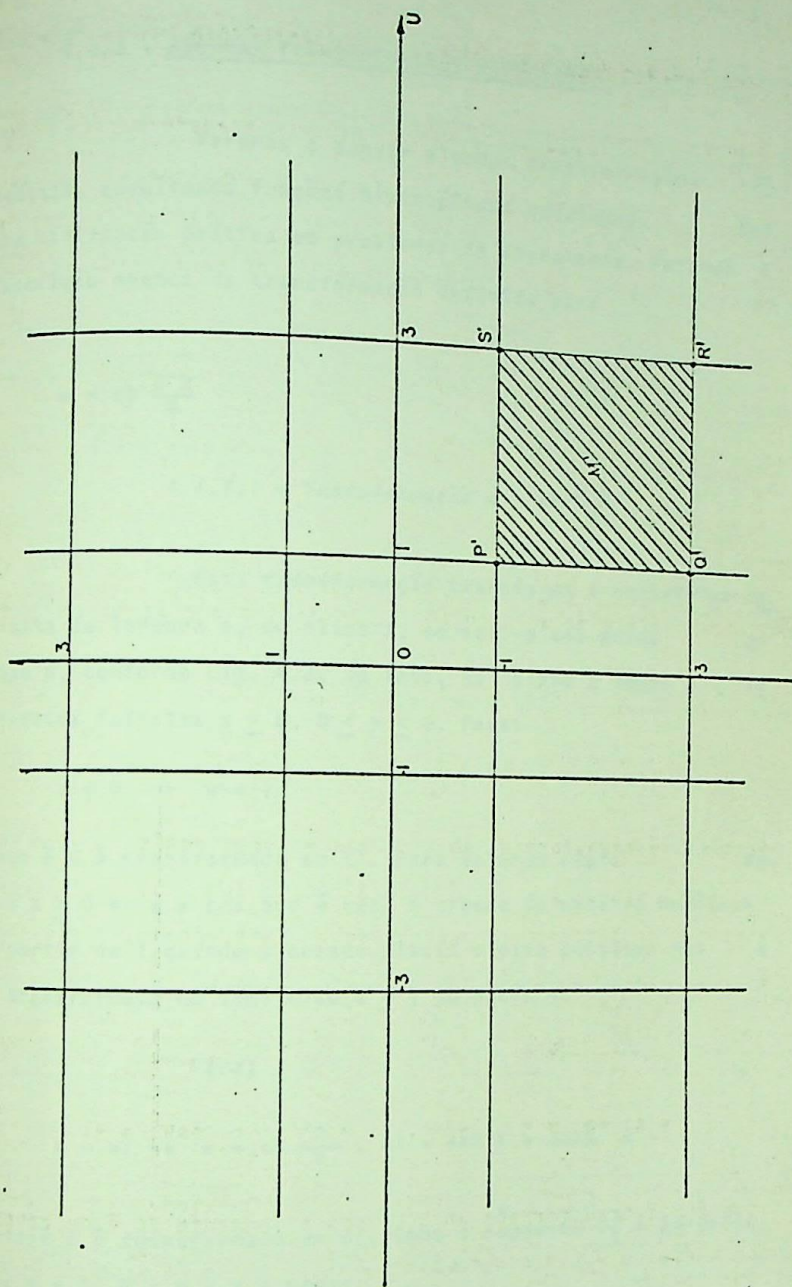


FIG. 4.2.b - Plano W

4.4.3 - ALGUMAS TRANSFORMAÇÕES ESPECIAIS

Veremos a seguir algumas transformações especiais, envolvendo funções hiperbólicas complexas, que tem utilização prática em problemas de Engenharia. Faremos a descrição apenas da transformação definida por:

$$w = ch \frac{\pi z}{a}$$

4.4.3.1 - Transformação $w = ch \frac{\pi z}{a}$

Esta transformação transforma a semi-faixa infinita de largura a , do plano z , no semi-plano acima do eixo u , conforme Fig. 4.3. De fato, no plano z temos a semi-faixa infinita $x \geq 0$, $0 \leq y \leq a$. Para:

$$z = 0 \Rightarrow w = 1$$

isto \bar{C} é transformado em C' . Para valores reais de $z = x \geq 0 \Rightarrow w = chx$ que é real e cresce de maneira monótona a partir de 1 quando x cresce. Assim o eixo positivo dos x é transformado no semi eixo $u \geq 1$ do plano w .

Para:

$$z = ai \Rightarrow w = ch \frac{\pi}{a} \cdot ai = ch\pi i = \cos\pi = -1$$

isto \bar{B} é transformado em B' . Como o segmento BC é descrito por $x = 0$, $0 \leq y \leq a$ e como:

$$w = \operatorname{ch} \frac{\pi}{a} y i = \cos \frac{\pi}{a} y \Rightarrow v = 0, -1 \leq u \leq 1$$

então o segmento BC é transformado no segmento B'C'.

Para o semi eixo BA, $x \geq 0$,

$$y = a \Rightarrow w = \operatorname{ch} \frac{\pi}{a} (x+ai) = \operatorname{ch} \frac{\pi x}{a} \cos \pi + i \operatorname{sh} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \pi =$$

$$= - \operatorname{ch} \frac{\pi x}{a} \Rightarrow v = 0, u = - \operatorname{ch} \frac{\pi x}{a}, \text{ como } x \geq 0 \quad e$$

$\operatorname{ch} \frac{\pi x}{a}$ cresce de maneira monótona a partir de 1, segue que o semi-eixo BA será transformado em $u \leq -1, v = 0$ com o sentido de A' para B'.

Os pontos interiores da faixa são transformados em pontos do semi plano $v > 0$ e u real no plano w . Exemplo: Seja o ponto:

$$z = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} i \Rightarrow w = \operatorname{ch} \frac{\pi}{a} \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} i \right) =$$

$$= \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}$$

que está no semi plano $v \geq 0$ e u real.

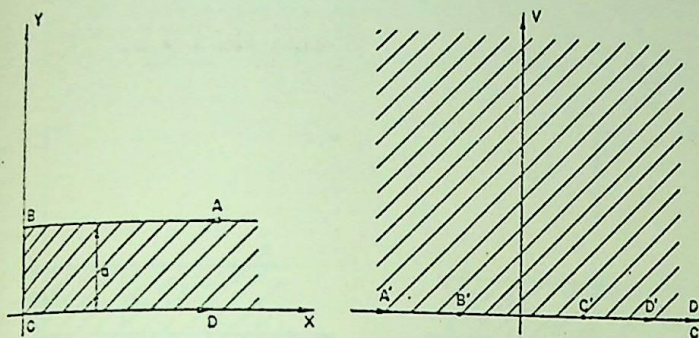


FIG. 4.3 Transformação $w = \operatorname{ch} \frac{\pi z}{a}$

4.4.3.2 - Transformação $w = \operatorname{cotgh} \frac{\pi z}{z}$

Esta transformação transforma o semi-plano com buraco circular, de raio unitário e centro em $z = 1$, do plano z , no semi-plano acima do eixo u conforme Fig. 4.4.

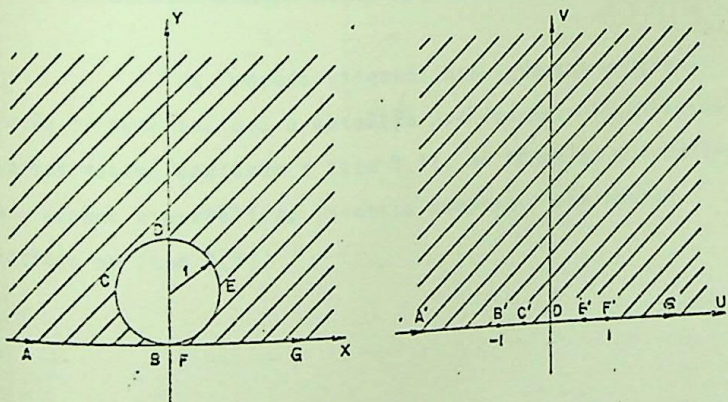


FIG. 4.4 Transformação $w = \operatorname{cotgh} \frac{\pi z}{z}$

Esta transformação transforma a semi-faixa infinita, do plano z , numa faixa infinita do plano w conforme fig. 4.5.

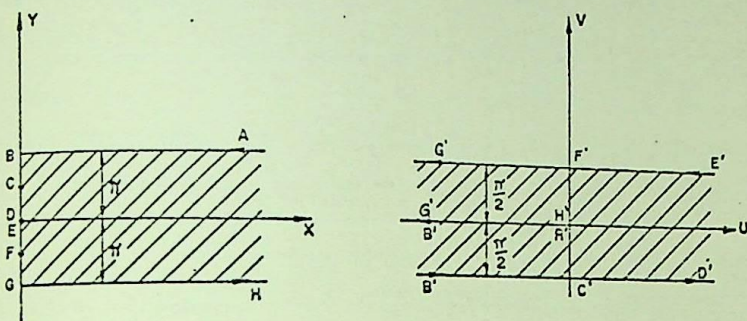


FIG. 4.5 Transformação $w = L \operatorname{cothg} \frac{z}{2}$

4.5 - FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS COMPLEXAS

As funções hiperbólicas inversas complexas se obtêm de modo análogo a obtenção das funções hiperbólicas inversas reais, conforme o item 1.11. As fórmulas que definem as funções hiperbólicas inversas complexas são iguais as obtidas no item 1.11.

4.6 - DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS COMPLEXAS

A derivação e integração das funções hiperbólicas complexas nos darão fórmulas análogas as de derivação e integração de funções hiperbólicas reais, conforme os itens 1,12 e 1,13 respeitando o estudo feito de derivação e integração complexa.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS EM PROBLEMAS
DE ENGENHARIA5.1 - INTRODUÇÃO

Devido o grande número de aplicações das funções hiperbólicas em problemas da Engenharia, procuramos neste trabalho, selecionar aqueles que julgamos de maior ocorrência na prática.

5.2 - APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS REAIS5.2.1 - QUEDA LIVRE DOS CORPOS

PROBLEMA 5.1

A resistência do ar na queda dos corpos em um paraquedas é proporcional ao quadrado da velocidade com a qual o corpo se move. Achar a velocidade máxima de queda.

SOLUÇÃO

As forças que atuam no corpo são:

$$F_1 = mg \quad (5.1)$$

decorrente do peso do corpo e

$$F_2 = -kv^2 \quad k > 0 \quad (5.2)$$

5.2

decorrente da resistência do ar. Como:

$$\sum_{i=1}^n F_i = ma \quad (5.3)$$

levando (5.1) e (5.2) em (5.3) temos:

$$mg - kv^2 = ma \quad \text{ora} \quad a = \frac{dv}{dt}$$

então:

$$mg - kv^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (5.4)$$

Separando as variáveis em (5.4):

$$\frac{m}{mg - kv^2} dv - dt = 0$$

integrando:

$$\frac{m}{k} \int \frac{dv}{\frac{mg}{k} - v^2} - t = C. \quad (5.5)$$

De 1.134 temos:

$$\int \frac{dv}{\frac{mg}{k} - v^2} = \sqrt{\frac{k}{mg}} \operatorname{arg} \operatorname{tgh} \sqrt{\frac{k}{mg}} v$$

levando em (5.5)

$$\frac{m}{k} \cdot \sqrt{\frac{k}{mg}} \operatorname{arg} \operatorname{tgh} \sqrt{\frac{k}{mg}} v - t = C \quad (5.6)$$

em (5.6) para $t = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\frac{m}{k} \cdot \sqrt{\frac{k}{m g}} \operatorname{arg} \operatorname{tgh} \sqrt{\frac{k}{m g}} v - t = 0$$

ou

$$v = \sqrt{\frac{m g}{k}} \operatorname{tgh} \sqrt{\frac{k g}{m}} t \quad (5.7)$$

A velocidade máxima (v_{\max}) se obtém para um tempo muito grande, isto é, em (5.7) para

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow v \rightarrow v_{\max}$$

logo:

$$v_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{m g}{k}} \operatorname{tgh} \sqrt{\frac{k g}{m}} t \quad \text{de (1.5.3) resulta:}$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{m g}{k}}$$

5.2.2 - MOVIMENTO DE UM CORPO REPELIDO POR UM CENTRO FIXO O PROPORCIONALMENTE A DISTÂNCIA

PROBLEMA 5.2

Na Fig. 5.1 determinar a equação do movimento de um ponto P, de massa m repellido pelo ponto fixo O.

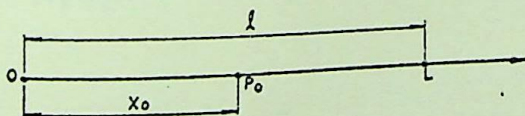


FIG. 5.1 Ponto P repellido pelo ponto fixo O

SOLUÇÃO:

Seja p_0 a posição inicial de abscissa x_0 e v_0 a velocidade inicial orientada para A. A força que age sobre o corpo é $F = k^2 x$, $k^2 \in \mathbb{R}^+$

(5.8)

Como $\sum_{i=1}^n F_i = ma$, temos:

$$k^2 x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (5.9)$$

fazendo:

$$\frac{k^2}{m} = w^2 \quad (5.10)$$

e levando em (5.9) temos:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - w^2 x = 0 \quad (5.11)$$

cuja solução é:

$$x = C_1 e^{wt} + C_2 e^{-wt} \quad (5.12)$$

De (1.23) e (1.24) em (5.12) temos:

$$x = C_1 (\text{chwt} + \text{shwt}) + C_2 (\text{chwt} - \text{shwt})$$

$$x = (C_1 + C_2) \text{chwt} + (C_1 - C_2) \text{shwt} \quad (5.13)$$

fazendo:

$$C_1 + C_2 = A \quad \text{e} \quad C_1 - C_2 = B$$

(5.13) fica:

$$x = A \operatorname{ch} wt + B \operatorname{sh} wt \quad (5.14)$$

derivando (5.14) temos:

$$v = \frac{dx}{dt} = Aw \operatorname{sh} wt + w B \operatorname{ch} wt \quad (5.15)$$

para $t = 0 \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow x_0 = A$ em (5.14)

para $t = 0 \Rightarrow v = v_0 \Rightarrow v_0 = wB$ em (5.15)

logo (5.14) fica:

$$x = x_0 \operatorname{ch} wt + \frac{v_0}{w} \operatorname{sh} wt \quad (5.16)$$

que é a solução procurada.

5.2.3 - TRAJETÓRIA DE UMA PARTÍCULA ELETRIZADA

PROBLEMA 5.3

Determinar a trajetória plana de uma partícula eletrizada que é repelida por um centro fixo, O , com uma força proporcional à distância.

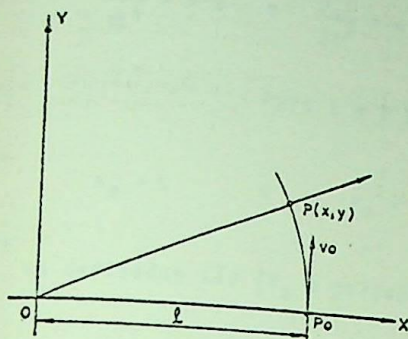


FIG. 5.2 Trajetória de uma partícula eletrizada

SOLUÇÃO

Seja P_0 a posição inicial e v_0 a velocidade inicial suposta perpendicular a \overline{OX} . Seja a partícula de massa m situada em um ponto qualquer $P(x,y)$ e F a força central, então:

$$F = k^2 \cdot OP = ma \quad (5.17)$$

cujas projeções sobre os eixos são

$$F_x = k^2 x \quad \text{e} \quad F_y = k^2 y \quad (5.18)$$

ou devido a (5.17)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = k^2 x \quad \text{e} \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = k^2 y \quad (5.19)$$

fazendo $\frac{k^2}{m} = w^2$ em (5.19) vem:

5.7

$$\frac{d^2x}{dt^2} = w^2x \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = w^2y \quad (5.20)$$

Para $t = 0$ temos (em P_0)

$$x_0 = 2 \quad \text{e} \quad y_0 = 0 \quad (5.21)$$

as derivadas são (V_0 é perpendicular a \vec{OX})

$$\frac{dx}{dt} = x'_0 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = y'_0 = v_0 \quad (5.22)$$

No Problema 5.2 vimos que a solução (5.20)

é:

$$x = x_0 \operatorname{ch} wt + \frac{x'_0}{w} \operatorname{sh} wt \quad (5.23)$$

$$y = y_0 \operatorname{ch} wt + \frac{y'_0}{w} \operatorname{sh} wt \quad (5.24)$$

levando (5.21) e (5.22) em (5.23) e (5.24) temos:

$$x = 2 \operatorname{ch} wt \quad \text{ou} \quad \operatorname{ch} wt = \frac{x}{2} \quad (5.25)$$

$$y = \frac{v_0}{w} \operatorname{sh} wt \quad \text{ou} \quad \operatorname{sh} wt = \frac{y w}{v_0} \quad (5.26)$$

como $\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1$ de (5.25) e (5.26) resulta:

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2 w^2}{v_0^2} = 1 \quad (5.27)$$

que é a equação procurada da trajetória, uma hipérbole de centro 0.

5.2.4 - EQUILÍBRIO DOS FIOS SUSPENSOS

5.2.4.1 - Introdução

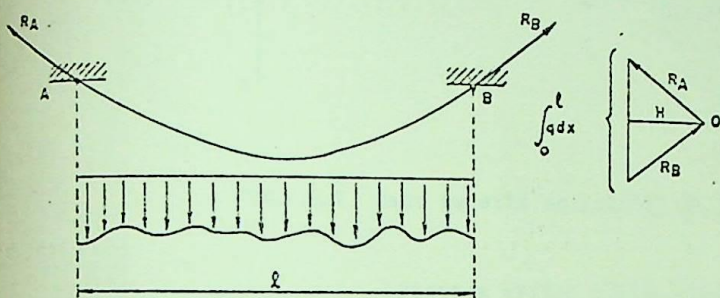


FIG. 5.3 Cabo sujeito ao esforço de tração

Na Fig. 5.3 temos o caso da suspensão de carga por um cabo sujeito exclusivamente ao esforço de tração. A configuração de equilíbrio dos fios suspensos é de uma das curvas funiculares de cargas distribuídas que sustentam cuja equação geral é:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{q}{H} \quad (5.28)$$

Esta equação foi estabelecida para os

eixos X e Y nas condições da Figura 5.4.

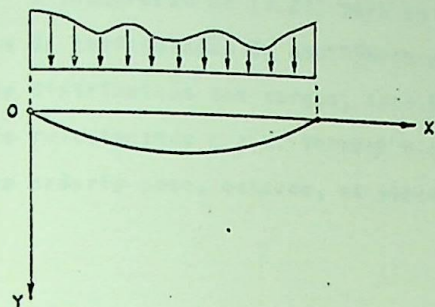


FIG. 5.4 Cabo sujeito ao esforço da tração

Podemos evitar o sinal menos em (5.28) tendo o cuidado de inverter novamente o sentido do eixo \overline{OY} , conforme a Fig. 5.5.

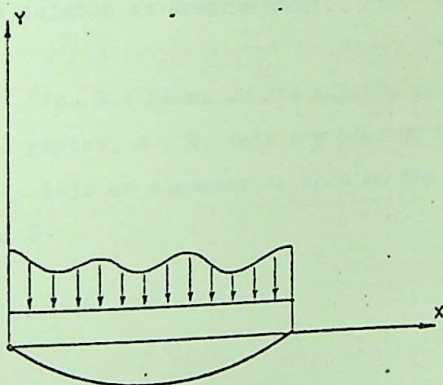


FIG. 5.5 Cabo sujeito ao esforço da tração

Então usamos a equação:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{q}{H} \quad (5.29)$$

A integração de (5.29) para se obter a equação cartesiana da configuração do equilíbrio do fio irá depender da lei de distribuição das cargas, isto é, da natureza da função relacionando q a x . Veremos o caso em que o fio é sujeito ao próprio peso, estando, os pontos de apoio, no mesmo nível.

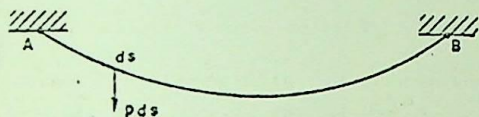


FIG. 5.6 Fio sujeito ao próprio peso

Na Fig. 5.6 temos um fio sujeito ao próprio peso e suspenso por 2 pontos, A e B. Seja p o peso da unidade de comprimento do fio. Seja um elemento do arco do fio ds . O peso desse elemento é:

$$dQ = p ds \quad (5.30)$$

e portanto a taxa de distribuição q será:

$$q = \frac{dQ}{ds} = p \frac{ds}{dx} \quad (5.31)$$

levando (5.31) em (5.29) temos:

5.11

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{H} \frac{ds}{dx} \quad (5.32)$$

façamos:

$$\frac{H}{p} = b \quad b \in \mathbb{R} \quad (5.33)$$

e temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{b} \frac{ds}{dx} \quad (5.34)$$

como:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{em (5.34) temos:}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (5.35)$$

Seja:

$$\frac{dy}{dx} = z \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} \quad (5.36)$$

levando (5.36) em (5.35):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{b} \sqrt{1 + z^2}$$

separando as variáveis:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{b}$$

integrando de acordo com (1.132) temos

$$\operatorname{arg} \operatorname{sh} z = \frac{x}{b} + C_1$$

ou

$$z = \operatorname{sh} \left(\frac{x}{b} + C_1 \right)$$

levando (5.36) fica:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} \left(\frac{x}{b} + C_1 \right) \quad (5.37)$$

Tomemos a posição conveniente dos eixos de referência para que a constante C_1 se anule. Supondo $C_1 = 0$ e $x = 0$ teremos $\frac{dy}{dx} = 0$. Isto significa que o eixo \overline{OY} deve passar pelo vértice da curva. Nestas condições (5.37) fica:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} \frac{x}{b} \quad (5.38)$$

integrando vem:

$$y = b \operatorname{ch} \frac{x}{b} + C_2 \quad (5.39)$$

Para $C_2 = 0$ e $x = 0 \Rightarrow y = b$, Isto significa que o eixo \overline{OX} deve ficar a uma distância b do vértice, da curva. Nestas condições (5.39) será:

$$y = b \operatorname{ch} \frac{x}{D} \quad (5.40)$$

A curva, que é uma catenária deve ser referida aos eixos \overline{OX} e \overline{OY} nas condições da Fig. 5.7.

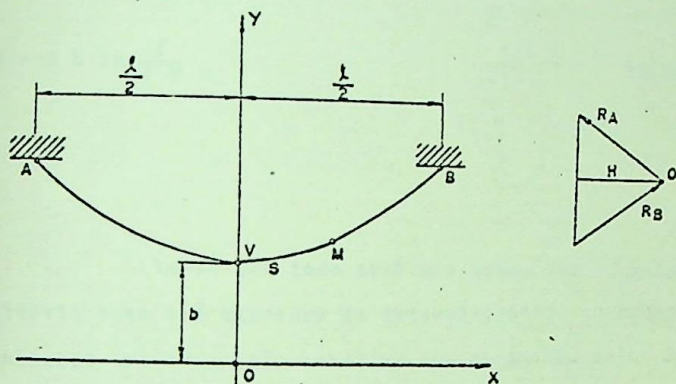


FIG. 5.7 Posição da catenária

5.2.4.2 - Comprimento do Fio

O comprimento do fio desde o vértice a um ponto M qualquer se obtém de (5.34) onde:

$$ds = b \frac{d^2 y}{dx^2} dx \quad (5.41)$$

integrando de V a M

5.14

$$s = b \frac{dv}{dx} \quad (5.42)$$

de (5.38):

$$s = b \operatorname{sh} \frac{x}{b} \quad (5.43)$$

Então o comprimento de todo o cabo de A até B será:

$$S = 2 b \operatorname{sh} \frac{\ell}{2b} \quad (5.44)$$

OBS.:

Ve-se que todo problema sobre fio sujeito ao seu próprio peso irá depender da determinação do parâmetro b . Determinemos uma expressão auxiliar que muito facilita as aplicações.

Como:

$$\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1 \quad \text{de (5.40) e (5.43) temos:}$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{s^2}{b^2} = 1$$

ou

$$y^2 = b^2 + s^2 \quad (5.45)$$

5.2.4.3 - Tensão num ponto qualquer

Seja um segmento qualquer do fio VM de comprimento S em cuja extremidade M queremos determinar a tensão T . Conforme esclarece o dinâmico, Fig. 5.8, o equilíbrio nesse segmento, de peso ps , é realizado a custa da tensão no vértice H e da tensão na extremidade M. O triângulo ovm do dinâmico nos dá:

$$T^2 = p^2 s^2 + H^2 \quad (5.46)$$

como $H = pb$ (5.33) vem:

$$T^2 = p^2 s^2 + p^2 b^2 = p^2 (s^2 + b^2) \quad (5.47)$$

de (5.45) resulta:

$$T^2 = p^2 y^2$$

e

$$T = py \quad (5.48)$$

que nos dá a expressão da tensão num ponto qualquer.

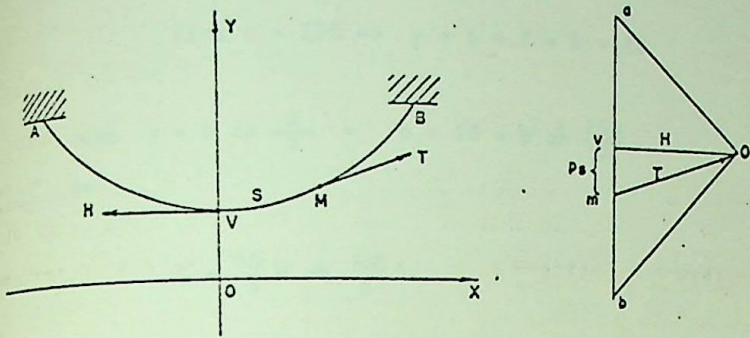


FIG. 5.8 Tensão num ponto qualquer M

PROBLEMA 5.4

Um fio pesando 100 gramas por metro, \bar{e} suspenso de 2 pontos no mesmo nível e distantes 500 m. A flecha \bar{e} de 20 m. Determinar a tensão máxima e o comprimento do fio.

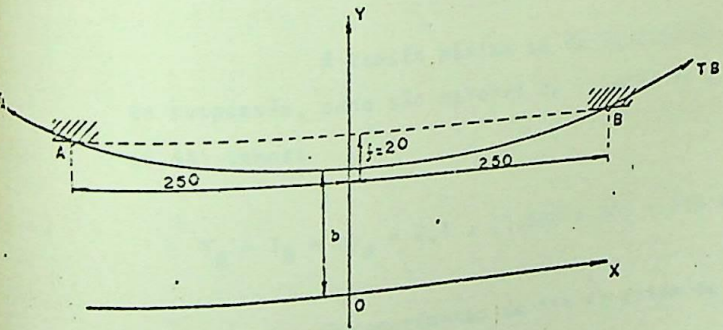


FIG. 5.9 Esquema do Problema 5.4

$$\text{Para } x = 250 \Rightarrow y = b + f = b + 20$$

$$\text{como } y = b \operatorname{ch} \frac{x}{b} = b + 20 = b \operatorname{ch} \frac{250}{b}$$

ou

$$1 + \frac{20}{b} = \operatorname{ch} \frac{250}{b}$$

(5.49)

Vemos que (5.49) é uma equação transcendental em b e mediante a Tabela 5.3, na qual sucessivos valores de b são experimentados podemos atingir a precisão desejada.

1	2	3	4
b	$1 + \frac{20}{b}$	$\operatorname{ch} \frac{250}{b}$	Diferença 2 - 3
1.000	1,02.000	1.0314	-0,011
2.000	1,01.000	1.0078	+0,0022
1.500	1,01 333	1.0139	-0,0006
1.600	1,01 250	1.0122	+0,0003
1.560	1,01282	1.0128	+0,00002

A tensão máxima se dá justamente nos pontos de suspensão, onde são maiores os valores de y então de (5.48) temos:

$$T_A = T_B = py_m = 0,1 \cdot (1.520 + 20) = 158 \text{ kg}$$

O comprimento do fio se obtém de (5.44)

$$S = 2b \operatorname{sh} \frac{\ell}{2b} = 2.1560 \operatorname{sh} \frac{500}{2.1560}$$

$$S = 3120 \text{ sh } 0,16026$$

$$S = 3120 \cdot 0,1610 = 502,3 \text{ m}$$

5.2.5 - LINHA TELEGRÁFICA

Suponhamos que numa linha telegráfica se estabeleceu um "estado contínuo" de fluxo de eletricidade de A, estação transmissora, para B, estação receptora, com lamento perfeito e fluxo linear uniforme.

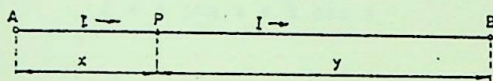


FIG. 5.10 Esquema de uma linha telegráfica de A até B.

Seja P um ponto intermediário entre as duas estações e consideremos:

a força eletromotriz (volts), f.e.m E_A em A

E_B em B

E em P (5.50)

As constantes características α e r_0 (5.51)

cujos valores dependem da resistência linear e do fluxo. Elas são números positivos.

Seja $x = AP$, demonstra-se, em Engenharia Elétrica, que E e I são funções de x satisfazendo as equações:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} - \alpha^2 E = 0 \quad (5.52)$$

$$r_0 \alpha I = - \frac{dE}{dx} \quad (5.53)$$

Desejamos achar a f.e.m., E , e a intensidade, da corrente I , em P .

Vemos que (5.52) é uma equação diferencial análoga a (5.11) cuja solução, de (5.14) será da forma:

$$E = A \operatorname{sh} \alpha x + B \operatorname{ch} \alpha x \quad (5.54)$$

levando (5.54) em (5.53) temos:

$$r_0 \alpha I = - \frac{d}{dx} (A \operatorname{sh} \alpha x + B \operatorname{ch} \alpha x)$$

ou

$$r_0 \alpha I = - A \alpha \operatorname{ch} \alpha x - B \alpha \operatorname{sh} \alpha x$$

ou

$$r_0 I = - A \operatorname{ch} \alpha x - B \operatorname{sh} \alpha x \quad (5.55)$$

para $x = 0 \Rightarrow E = E_A$ e $I = I_A$

levando estas condições, respectivamente em (5.54) e (5.55) encontramos:

$$B = E_A \quad \text{e} \quad A = - r_0 I_A$$

levando estes valores em (5.54) e (5.55) temos:

5.20

$$E = -r_0 I_A \text{ sh}x + E_A \text{ ch}x \quad (5.56)$$

$$r_0 I = r_0 I_A \text{ ch}x - E_A \text{ sh}x$$

ou

$$I = I_A \text{ ch}x - \frac{E_A}{r_0} \text{ sh}x \quad (5.57)$$

PROBLEMA 5.5

Numa linha telegráfrica se estabeleceu um estado contínuo de fluxo de eletricidade de A, com f.e.m. de 200 (v) para B, a 500 km de A. Sendo as constantes características $\alpha = 0,0025$ e $r_0 = 4.000$ (ohms) e nula a intensidade da corrente em B. Achar a intensidade da corrente em A e a força eletromotriz em B.

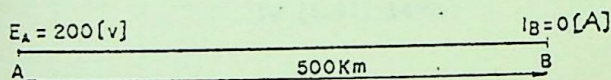


FIG. 5.11 Esquema do Problema 5.5

Em (5.56) e (5.57) temos:

$$E = 4.000(\text{ohm}) I_A \text{ sh}0,0025x + 200 (\text{v}) \text{ ch } 0,0025x$$

$$I = I_A \operatorname{ch} 0,0025x - \frac{200(v)}{4000(\operatorname{oh})} \operatorname{sh} 0,0025 x$$

ou

$$E = -4.000 I_A \operatorname{sh} \frac{x}{400} + 200 \operatorname{ch} \frac{x}{400} \quad (5.58)$$

$$I = I_A \operatorname{ch} \frac{x}{400} - \frac{1}{20} \operatorname{sh} \frac{x}{400} \quad (5.59)$$

Para $x = 0 \Rightarrow E = E_B$ e $I_B = 0$, levando tais valores, respectivamente em (5.58) e (5.59):

$$E_B = -4.000 I_A \operatorname{sh} \frac{500}{400} + 200 \operatorname{ch} \frac{500}{400} \quad (5.60)$$

$$0 = I_A \operatorname{ch} \frac{500}{400} - \frac{1}{20} \operatorname{sh} \frac{500}{400} \quad (5.61)$$

De (5.61) temos:

$$I_A = \frac{1}{20} \operatorname{tgh} \frac{5}{4} = 0,04238 \text{ [A]}$$

levando I_A em (5.60) temos:

$$E_B = -4.000 \frac{1}{20} \operatorname{tgh} \frac{5}{4} \cdot \operatorname{sh} \frac{5}{4} + 200 \operatorname{ch} \frac{5}{4}$$

$$E_B = -200 - \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{5}{4}}{\operatorname{ch} \frac{5}{4}} + 200 \operatorname{ch} \frac{5}{4}$$

$$E_B = 200 \left(\operatorname{ch} \frac{5}{4} - \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{5}{4}}{\operatorname{ch} \frac{5}{4}} \right)$$

$$E_B = 200 \left(\frac{\operatorname{ch}^2 \frac{5}{4} - \operatorname{sh}^2 \frac{5}{4}}{\operatorname{ch} \frac{5}{4}} \right)$$

$$E_B = \frac{200}{\operatorname{ch} \frac{5}{4}} = 200 \operatorname{sech} \frac{5}{4} = 105,8 \text{ (v)}$$

5.2.6 - APLICACÖES DAS EQUACÖES GERAIS DAS LINHAS DE
TRANSMISSÃO EXCITADAS POR CORRENTES ALTERNADAS
SENODIAIS

5.2.6.1 - Equaçöes das linhas homogêneas excita
 das por tensöes senoidais, também co
 nhecidas como "equaçöes de telegrafia"

$$\dot{U}_x = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_C}{2} e^{\sqrt{\dot{z}\dot{y}}x} + \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \dot{Z}_C}{2} e^{-\sqrt{\dot{z}\dot{y}}x} \quad (5.62)$$

$$\dot{I}_x = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_C}{2 \dot{Z}_C} e^{\sqrt{\dot{z}\dot{y}}x} - \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \dot{Z}_C}{2 \dot{Z}_C} e^{-\sqrt{\dot{z}\dot{y}}x} \quad (5.63)$$

que nos permite determinar os valores das tensöes e correntes
 em qualquer ponto ao longo da linha.

Em (5.62) e (5.63) introduzindo a notação $\dot{\gamma} = \sqrt{\dot{z}\dot{y}}$ para a função de propagação temos:

$$\dot{U}_x = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_C}{2} e^{\dot{\gamma}x} + \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \dot{Z}_C}{2} e^{-\dot{\gamma}x} \quad (V) \quad (5.64)$$

$$\dot{I}_x = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_C}{2 \dot{Z}_C} e^{\dot{\gamma}x} - \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \dot{Z}_C}{2 \dot{Z}_C} e^{-\dot{\gamma}x} \quad (A) \quad (5.65)$$

PROBLEMA 5.6

Uma linha de transmissão trifásica possui os seguintes parâmetros: resistência ôhmica:

$$r = 0,0715 \text{ (ohm/km) por fase}$$

- reatância indutiva:

$$x_L = 0,512 \text{ (ohm/km) por fase}$$

- condutibilidade de dispersão:

$$g = 0 \text{ (Mho/km) por fase}$$

- susceptância capacitiva:

$$b = 3,165 \times 10^{-6} \text{ (Mho/km) por fase}$$

Se $f = 60$ (Hz) a frequência do sistema, o comprimento da linha $\ell = 600$ (km), e opere com tensão no receptor constante e igual a 380.000 (V), entre fases, de terminar:

a) qual deve ser a tensão no transmissor quando a linha ope

ra em vazio, afim de que o valor da tensão no receptor não seja ultrapassada?

b) qual o valor da corrente de carga da linha quando esta o
pera em vazio?

SOLUÇÃO

Como, na operação em vazio, consideramos a linha terminada em uma indutância de valor infinito, de forma que $\dot{I}_2 = 0$, as equações (5.64) e (5.65) se tornam:

$$\dot{U}_{x_0} = \frac{\dot{U}_2}{Z} (e^{\dot{\gamma}x} + e^{-\dot{\gamma}x}) \quad (V) \quad (5.66)$$

$$\dot{I}_{x_0} = \frac{\dot{U}_2}{ZC} (e^{\dot{\gamma}x} - e^{-\dot{\gamma}x}) \quad (A) \quad (5.67)$$

a) Empregando (5.66) temos:

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_2}{2} (e^{\dot{\gamma}l} + e^{-\dot{\gamma}l}) \quad (V) \quad (5.68)$$

como $\frac{e^{\dot{\gamma}l} + e^{-\dot{\gamma}l}}{2} = \text{ch} \dot{\gamma}l$ em (5.68) vem:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \text{ch} \dot{\gamma}l \quad (5.69)$$

$$\text{como } \dot{\gamma} = \sqrt{\dot{z}\dot{y}} = \sqrt{(r + jx_L)(g + jb)}$$

ou

$$\dot{\gamma} = \sqrt{(0,0715 + j0,512)(j3,165 \times 10^{-6})}$$

$$\dot{\gamma} = 10^{-3} \sqrt{0,226297j - 1,72048} \quad (5.70)$$

$$\dot{Y} = \alpha + j\beta \quad \text{então:}$$

(5.71)

$$\alpha + j\beta = 10^{-3} \sqrt{0,22697j - 1,72048} = \sqrt{\rho e^{j\theta}} 10^{-3} \quad (5.72)$$

devido a (2.33), então:

$$\rho = \sqrt{(0,226207)^2 + (1,72048)^2} = 1,635841 \quad (5.73)$$

$$\theta = \arctg \left(-\frac{0,226297}{1,72048} \right) = 172,04 \quad (5.74)$$

então:

$$\alpha + j\beta = \sqrt{\rho e^{j\theta}} \cdot 10^{-3} = \sqrt{1,635841} \cdot 10^{-3} e^{j86,02}$$

$$\alpha + j\beta = 1,279 \times 10^{-3} e^{j86,02} \quad (5.75)$$

aplicando (1.67) em (5.75) vem:

$$\alpha + j\beta = 1,279 \times 10^{-3} (\cos 86,02 + j \sin 86,02)$$

e portanto:

$$\alpha = 1,279 \times 10^{-3} \cos 86,02 = 0,0867 \times 10^{-3} \quad (5.76)$$

e

$$\beta = 1,279 \times 10^{-3} \sin 86,02 = 1,276 \times 10^{-3} \quad (5.77)$$

levando (5.71) em (5.69) vem:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch}(+j)\ell \quad \text{que de (1.39)}$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 (\operatorname{ch}\alpha l \operatorname{ch}\beta l + \operatorname{sh}\alpha l \operatorname{sh}\beta l) \quad (5.78)$$

De (1.73) e (1.74) em (5.78) temos:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 (\operatorname{ch}\alpha l \cos\beta l + j \operatorname{sh}\alpha l \operatorname{sen}\beta l) \quad (V) \quad (5.79)$$

ora:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch}\alpha l = \operatorname{ch}0,086 \times 10^{-3} \times 600 = \operatorname{ch}0,0502 = 1,0014 \\ \cos\beta l = \cos1,276 \times 10^{-3} \times 600 = \cos0,7656 = 0,7218 \\ \operatorname{sh}\alpha l = \operatorname{sh}0,0502 = 0,052 \\ \operatorname{sen}\beta l = \operatorname{sen}0,7656 = 0,6921 \end{array} \right. \quad (5.80)$$

levando (5.80) em (5.79)

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 (1,0014 \times 0,7218 + j0,052 \times 0,6921) \quad (V)$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 (0,7319 + j0,036) \quad (V) \quad (5.81)$$

Tomando $\dot{U}_2 = U_2$ isto \bar{e} , como refer \bar{e} ncia temos

$$\dot{U}_1 = \frac{380.000}{3} (0,7319 + j0,036) \quad (V).$$

ou

$$\dot{U}_1 = 161.194 e^{j2,8^\circ} \quad (V)$$

b) o valor da corrente de carga da linha pode ser calculado, a partir de (5.67)

$$\dot{i}_{10} = \frac{\dot{U}_2}{2\dot{Z}_C} (e^{\dot{\gamma}l} - e^{-\dot{\gamma}l}) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_C} \operatorname{sh} \dot{\gamma}l \quad (\text{A}) \quad (5.82)$$

De (5.71) em (5.82) :

$$\dot{i}_{10} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_C} \operatorname{sh}(\alpha + \beta j)l \quad (\text{A}) \quad \text{aplicando (1.38) e (1.73), (1.74),} \\ \text{temos:}$$

$$\dot{i}_{10} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_C} (\operatorname{sh}\alpha l \cos\beta l + j \operatorname{ch}\alpha l \operatorname{sen}\beta l) \quad (\text{A}) \quad (5.83)$$

levando (5.80) em (5.83):

$$\dot{i}_{10} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_C} (0,052 \times 0,7218 + j1,0014 \times 0,6921) \quad (\text{A})$$

$$\dot{i}_{10} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_C} (0,0375 + j0,6931) \quad (\text{A}) \quad (5.84)$$

Tomando \dot{U}_2 como referência:

$$\dot{i}_{10} = \frac{380.000}{3 \dot{Z}_C} (0,0375 + j0,6931) \quad (\text{A}) \quad (5.85)$$

ora:

$$\dot{Z}_C = \sqrt{\frac{\dot{z}}{\dot{y}}} = \sqrt{\frac{\dot{z}}{\dot{y}}} = \frac{r + jx_L}{g + jb} = \frac{0,0715 + j0,512}{13,165 \times 10^{-3}}$$

ou

$$\dot{z}_C = 403,9 e^{-j3,980} \text{ (ohm)}$$

levando em (5.85) vem:

$$\dot{i}_{10} = 545 e^{-j3,980} (0,0375 + j0,6931) \text{ (A)}$$

$$\dot{i}_{10} = 378,24 e^{j90,90} \text{ (A)}$$

5.3 - APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS COMPLEXAS

PROBLEMA 5.7

Determinar a temperatura $T(x,y)$ na faixa con siderada no item 4.4.3.1, se a temperatura no contorno for:

$$T = T_0 \text{ no segmento de } 0 \text{ a } \pi i.$$

$$T = 0 \text{ nas fronteiras superior e inferior.}$$

SOLUÇÃO

Como a temperatura T não depende do tempo, (distribuição de temperatura de estado estacionário) a equação do calor se reduz a equação de Laplace.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (5.86)$$

e temos que determinar uma solução de (5.86) que satisfaça as

condições de contorno. Para resolver este problema representamos a faixa por meio de $w = chz$ (5.87), sobre a metade superior do plano w . Como o segmento $0 \leq y \leq \pi$ do eixo OY é representado sobre o segmento $-1 \leq u \leq 1$ do eixo OU , as condições de contorno do plano w são:

$$T = T_0 \text{ sobre o segmento de } -1 \text{ a } 1 \quad (5.88)$$

$$T = 0 \text{ sobre as demais porções do eixo } OU \quad (5.89)$$

conforme Fig. 5.12.

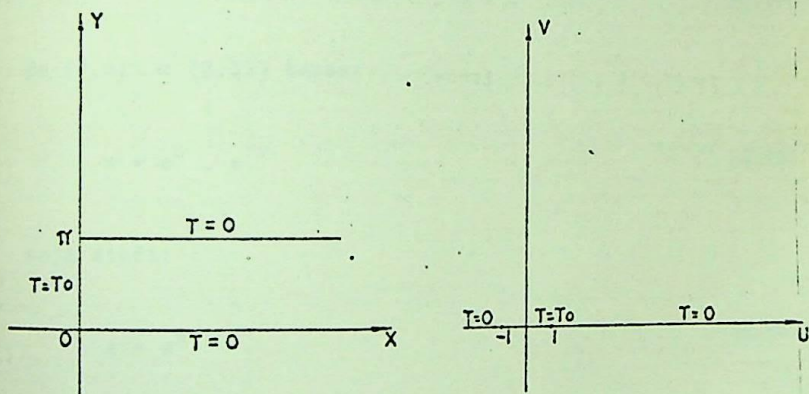


FIG. 5.12 Esquema do problema 5.7

No item 3.14 vimos que a parte real e imaginária das funções holomorfas são soluções da equação de Laplace. Devemos então determinar uma solução $T(u,v)$ na metade superior do plano w , que satisfaça as condições de contorno. Para tal finalidade consideremos as funções

5.30

$$L(w+1) = L |w+1| + i \theta_1 \quad (5.90)$$

$$L(w-1) = L |w-1| + i \theta_2 \quad (5.91)$$

OBS.: Justificativa das funções (5.90) e (5.91).

Seja:

$$z = x + iy \quad (5.92)$$

de (2.33) temos:

$$z = |z| e^{i\theta} \quad \text{para } \theta = \text{Arg}z \quad (5.93)$$

$$\text{Seja } w = u + iv \quad (5.94)$$

de (2.32) e (2.33) temos:

$$w = e^u \cdot e^{iv} \quad (5.95)$$

seja ainda:

$$z = e^w \quad (5.96)$$

e a inversa:

$$w = Lz \quad (5.97)$$

levando (5.93) e (5.95) em (5.96) temos

$$z | e^{i\theta} = e^u \cdot e^{iv} \Rightarrow \begin{cases} u = L |z| \\ v = \theta \end{cases}$$

levando (5.98) e (5.99) em (5.94); temos:

5.31

$w = L|z| + i\theta$ de (5.97) podemos escrever:

$$Lz = L|z| + i\theta$$

(5.100)

em (5.100) lembrar que:

$$\theta = \text{Arg}z = \text{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{e} \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

Então de (5.90) e (5.91) temos:

$$\theta_1 = \text{Arg}(w+1) = \text{arctg} \frac{v}{u+1}$$

(5.101)

$$\theta_2 = \text{Arg}(w-1) = \text{arctg} \frac{v}{u-1}$$

(5.102)

Como $\theta_1(u,v)$ e $\theta_2(u,v)$ são funções harmônicas, então $\theta_2 - \theta_1$ é harmônica. Se $w = u$ for real e menor que -1 , então $\theta_2 - \theta_1 = \pi - \pi = 0$; para um valor real $w = u$, no intervalo $-1 < u < 1$ temos $\theta_2 - \theta_1 = \pi - 0 = \pi$, e, para valores reais $w = u > 1$, temos $\theta_2 - \theta_1 = 0 - 0 = 0$. Assim a função

$$T(u,v) = \frac{T_0}{\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (5.103)$$

é harmônica no semi plano $v > 0$ e satisfaz as condições de contorno no plano w . De (5.101) e (5.102) temos:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{v}{u+1} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{v}{u-1}$$

segue-se que:

$$\operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1}{1 + \operatorname{tg} \theta_2 \operatorname{tg} \theta_1}$$

então:

$$\operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1}$$

ou

$$\theta_2 - \theta_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1} \quad (5.104)$$

levando (5.104) em (5.103) temos:

$$T(u, v) = \frac{T_0}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1} \quad (5.105)$$

De (5.87) temos:

$$w = u+iv = \operatorname{ch}(x+iy) = \operatorname{ch}x \operatorname{cos}y + i \operatorname{sh}x \operatorname{sen}y$$

então:

$$u = \operatorname{ch}x \operatorname{cos}y \quad (5.106)$$

e

$$v = \operatorname{sh}x \operatorname{sen}y \quad (5.107)$$

então:

$$u^2 + v^2 - 1 = \operatorname{ch}^2x \operatorname{cos}^2y + \operatorname{sh}^2x \operatorname{sen}^2y = \operatorname{sh}^2x - \operatorname{sen}^2y \quad (5.108)$$

levando (5.107) e (5.108) em (5.105) e representando

$T(u(x,y), v(x,y))$ por $T^*(x,y)$, temos:

$$T^*(x,y) = \frac{T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{sh}x \operatorname{sen}y}{\operatorname{sh}^2x - \operatorname{sen}^2y} \quad (5.109)$$

Notando que o numerador e o denominador são respectivamente, as partes imaginárias e real da função $(\operatorname{sh}x + i\operatorname{sen}y)^2$ podemos escrever:

$$T^*(x,y) = \frac{T_0}{\pi} \arg \left| (\operatorname{sh}x + i\operatorname{sen}y)^2 \right| \quad (5.110)$$

como:

$$\arg(z^2) = 2 \arg z \quad (5.111)$$

De fato:

$$\arg(x^2 - y^2 + 2xyi) = 2 \arg(x + yi)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{2xy}{x^2 - y^2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

tomando tg membro a membro:

$$\frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2 \frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}}$$

e

$$\frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Então (5.110) devido a (5.111) fica:

$$T^*(x,y) = 2 \frac{T_0}{\pi} \arg (\operatorname{sh}x + i \operatorname{sen}y)$$

ou

$$T^*(x,y) = \frac{2 T_0}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{sen}y}{\operatorname{sh}x} \right) \quad (5.112)$$

e (5.112) é a solução procurada, pois esta função é harmônica no interior da faixa e satisfaz as condições de contorno. De fato:

$$T^* = 0 \quad \text{para } y = 0 \quad \text{ou } y = \pi$$

e

$$T^* = T_0 \quad \text{para } x = 0$$

As isotérmicas (curvas de igual temperatura)

são:

$$\frac{\operatorname{sen}y}{\operatorname{sh}x} = k \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{R}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1) AHLFORS, L.V. - "Complex Analysis" - McGraw-Hill Book Company, Inc, New York - 1953.
- 2) BIEBERBACH, L - "Conformal Mapping" - Chelsea Publishing Company, New York - 1953
- 3) CHURCHILL, RUEL, V - "Complex Variables and Applications" - McGraw-Hill Book Company, Inc, New York - 1960
- 4) FONSECA, A - "Curso de Mecânica" - Ao Livro Técnico S.A - Rio de Janeiro - 1969.
- 5) FUCHS, R.D. - "Linhas Aéreas de Transmissão de Energia Elétrica" - EFEI - Itajubá - 1973.
- 6) GIBBS, W.J. - "Conformal Transformations in Electrical Engineering" - Chapman & Hall Ltd., London - 1958.
- 7) GRANVILLE, A.W.; SMITH, P.F. - LONGLEY, W.R. - "Elementos de Cálculo Diferencial e Integral", Editora Científica, Rio de Janeiro, 1961
- 8) HAUSER Jr., A.A. - "Variáveis Complexas" Livros Técnicos e Científicos do Brasil Ltda. Rio de Janeiro - 1972.

- 9) HILLE, E. - "Analytic Function Theory" - Ginn & Company
Boston, 1959.
- 10) IRVING, J. and MULLINEUX H. - "Mathematics in Physics and
Engineering" - Academic Press, Inc. - 1959.
- 11) KREYZIG, E. - "Matemática Superior" - Livros Técnicos e
Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro, 1969.
- 12) MAURER, W.A. - "Curso de Cálculo Diferencial e Integral" -
Editora Edgar Bucher Ltda, São Paulo - 1968.
- 13) MEDEIROS, L.A.J. - "Introdução aos Funções Complexas", Editô
ra McGraw-Hill do Brasil, Ltda. São Paulo, 1972.
- 14) NIETO, J.I. - "Funciones de Variable Compleja" - Departamen
to de Assuntos Científicos de la Union Panameri
cana, Editora Eva V Chesneau, Universidade de
Maryland, EEUU - 1968.
- 15) PIZOT, C.; ZAMASKY, M. - "Mathématiques Générales" - Dunod ,
Paris, 1966.
- 16) QUINET, J. - "Matemática Superior" - Editora Globo, Porto Ale
gre - 1969.
- 17) SPIEGEL, M.R. - "Variáveis Complexas" - Editora McGraw-Hill
do Brasil Ltda - São Paulo, 1972.