Escola Federal
de Engenharia de Itajubá
1978

Estudo de controlabilidade e observabilidade de representações de sistemas de controle

Tesista:
José Francisco F, Corrêa
Orientador:
Prof. Jaime Feinstein

TRABALHO DE TESE

ESTUDO DE CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE DE REPRESENTAÇÕES DE SISTEMAS DE CONTROLE

Tesista: José Francisco Fonseca Corrêa

Orientador: Prof. Jaime Feinstein

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

1 9 7 8

PREFÁCIO DO AUTOR

A idéia de se fazer um trabalho de tese que abordasse o tema Controlabilidade e Observabilidade surgiu a partir do Curso de "Variáveis de Estado" e de "Controle" que cursei em 1977, cujas aulas foram ministradas pelo Ilmo. Professor Jaime Feinstein.

Após ter cursado esta cadeira, senti despertado em mim o desejo de se fazer uma pesquisa sobre um assunto que pudesse aplicar os ensinamentos que obtive. Sob a orientação do Prof. Feinstein escolhi o tema abordado neste trabalho, que encaro como uma extensão ao curso que participei, e que me deu uma noção mais aprimorada de "Controle".

Este trabalho servirá talvez de base para futuros estudos que pretendo realizar no campo de controle, assim como permitirá que eu introduza estes conceitos aos alunos do curso de "Controle e Servo-mecanismo" da Universidade do Amazonas, onde pretendo desempenhar atividade de docência durante (e pelo menos) o próximo biênio.

Para finalizar este prefácio, deixo aqui os meus agradecimentos a todos os professores da E.F.E.I., pelo excelente curso de mestrado que nos proporcionaram, e de um modo especial para o orientador desta tese.

José Francisco F. Corrêa

Novembro, 1978

Í N D I C E

1- *ABREVIATURAS ENCONTRADAS NO TEXTO*

Co - Controlabilidade - Controlável

CoE - De Estado completamente Controlável

$\overline{\text{CoE}}$ - De Estado não completamente Controlável

CoY - De Saída Controlável - Controlabilidade de Saída

EE - Equação de Estado

ES - Equação de Saída

FC - Forma Canônica

FT - Função Transferência

Ob - Observabilidade - Observável

$\overline{\text{Ob}}$ - Não Observabilidade - Não Observável

VE - Variáveis de Estado

2 - PRINCIPAIS CONVENÇÕES NOTACIONAIS

Os sistemas segundo considerados neste trabalho, serão representados fundamentalmente por seu modelo de estado e ocasionalmente pelo modelo transferencial.

2.1 - *Modelo de estado*

Neste modelo é importante distinguir os sinais e o sistema.

2.1.1 - *Sinais*

Podem ser externos ou internos.

Externos: $u(t)$, controle ou entrada

$y(t)$, saída

Internos: $x(t)$ variáveis de estado. Cada um desses sinais são vetoriais, de componentes $u_i(t)$, $y_i(t)$, $x_i(t)$. Essas componentes são definidas como funções $R \to C$, porém na maioria das situações de interesse o contradomínio é real.

As ordens genéricas dos vetores apresentam-se na tabela 1.

Função	Dom.	Co.Dom. Geral	Co.Dom. Usual
$x(t)$	R	C^n	R^n
$y(t)$	R	C^m	R^m
$u(t)$	R	C^r	R^r

Tabela 1

Em problemas concretos, é usual a restrição do do mínio para $\{t_o, t_f\}$, onde t_o e t_f são os instantes inicial e final dos processos descritos pelo modelo de estado. Assim $x(t_o) = x_o$ é o valor do estado no instante inicial e similarmente para $x(t_f) = x_f$, e para as entradas e saídas.

Salvo aviso em contrário, um vetor será considerado como coluna. Assim:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

mas seguindo uma prática usual e para poupar espaço, será indicado como o transposto de um vetor coluna ou seja um vetor fila.

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \text{-----} & x_n(t) \end{bmatrix}$$

Dado que o domínio dos sinais $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ é sempre o tempo, nenhuma confusão irá se produzir se o argumento é suprimido. Assim a última equação poderá ser escrita como :

$$x' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & x_n \end{bmatrix}$$

2.1.2 - Sistema

O Sistema está representado pelas equações vinculando a mudança no estado e a saída, com os sinais.

Para expressar a mudança no estado, adotar-se-á o modelo contínuo, onde o tempo é o conjunto real R, ou um subconjunto $\{t_o, t_f\}$. Neste modelo, as equações resultam diferenci ais (No outro modelo comum, o discreto, não usado neste trabalho, as equações são do tipo de diferencias finitas).

Sendo o estado e a saída funções vetoriais, as equações do sistema resultaram da seguinte maneira :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x,u,t) \qquad (2.1.2\text{-}1)$$

$$y = g(x,u,t) \qquad (2.1.2\text{-}2)$$

onde obviamente f e g são funções da ordem do estado (n) e da saida (m) respectivamente.

Considerando o caso mais comum de vetores com componentes reais, elas ficam formalmente definidas como :

$$f : R^n x\ R^r\ xR \rightarrow R^n$$

$$g : R^n x R^r x R \rightarrow R^m$$

Uma particularização muito importante de (2.1.2-1), e (2.1.2-2) é o modelo livre caracterizado pela ausência de entrada.

$$\dot{x} = f(x,t) \qquad (2.1.2\text{-}3)$$

$$y = g(x,t) \qquad (2.1.2\text{-}4)$$

Outra particularização, constitue os sistemas lineares

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\ u \qquad (2.1.2\text{-}5)$$

$$y = C(t)x + D(t)\ u \qquad (2.1.2\text{-}6)$$

ou ainda os invariantes

$$\dot{x} = f(x,u) \qquad (2.1.2\text{-}7)$$

$$y = g(x,u) \qquad (2.1.2\text{-}8)$$

Casos especiais resultam da combinação dos 3 modelos acima . Entre eles destacam-se os modelos :

Livre e invariante; ou autônomo.

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1.2-9}$$

$$y = g(x) \tag{2.1.2-10}$$

Autônomo linear

$$\dot{x} = Ax \tag{2.1.2-11}$$

$$y = Cx \tag{2.1.2-12}$$

Finalmente citamos o modelo mais usual, o linear invariante.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.1.2-13}$$

$$y = Cx + Du \tag{2.1.2-14}$$

As 4 matrizes de (2.1.2-5 -6 -13 -14) possuem suas ordens compatíveis com as operações indicadas.

Assim sendo, suas ordens estão indicadas na tabela 2.

Matriz	Ordem	Denominação
A	n x n	de sistema ou planta
B	n x r	de entrada de controle
C	m x n	de saída
D	m x r	de transmissão

Tabela 2

Na tabela 2, foram acrescentadas na última coluna, as denominações usuais para as matrizes.

Note que estas matrizes podem ser de elementos va riáveis (2.1.2-5-6) ou invariáveis (2.1.2-13-14).

Elas se distinguiram notacionalmente pela indicação do argumento (t) ou sua ausência.

O conjunto das 4 matrizes A, B, C, D se indicará coletivamente como (A,B,C,D).

Este quádruplo denomina-se: Realização ou representação do sistema que se modeliza.

2.2 - *Modelo Transferencial*

Este modelo só está definido nos sistemas lineares invariantes, e constitue um caso particular das chamadas representações (ou modelos) externas. Vem dado no caso multivariável (várias entradas ou saídas) como uma matriz cujos elementos são "funções de transferência".

Por sua vez uma função de transferência, G(s), é uma função $C \to C$, expressada como um quociente de polinômios (não consideraremos aqui expressões mais gerais, embora existam, que modelam por exemplo, sistemas com parâmetros distribuídos retardos de tempo, etc). No caso monovariável ou escalar (uma entrada e uma saída), é claro que o modelo transferencial é do tipo G(s).

3 - INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE DE SISTEMAS

O objetivo deste trabalho é o de introduzir ao leitor os conceitos de controlabilidade e de observabilidade de sistemas.

Considera-se de grande importância para quem estuda controle, porque este tema nos dá uma visão bastante prática do papel das variáveis de estado (VE) de um sistema, ou em outras palavras, podemos avaliar o desempenho de um sistema, baseando-se no tipo de estrutura que ele tem. Consequentemente, classificamos diversos tipos de sistemas segundo as suas equações de estado (EE) e equações de saída (ES), tendo em vista uma possível aplicação prática.

A literatura existente para este tema é bastante vasta. Contudo, os autores que o tratam não se diferenciam nos princípios básicos, havendo apenas uma diferença quanto a notação empregada por cada um.

Em nosso estudo serão considerados só os sistemas lineares, sejam invariantes ou variantes. Quanto aos sistemas não-lineares, eles não o serão, pois em se tratando de um trabalho introdutório, este estudo se coloca como um tema muito mais avançado em relação aos outros. No entanto, o leitor interessado nesse tema, de modo nenhum pode prescindir da consideração desses conceitos em sistemas lineares.

4 - INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS DE CONTROLABILIDADE (CO) E DE OBSERVABILIDADE (OB)

Consideremos o seguinte exemplo :

$$\dot{x}_1 = x_1 + u \qquad (4.1)$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + u \qquad (4.2)$$

Subtraindo-se (4.2) de (4.1) teremos :

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -(x_1 - x_2)$$

Definindo uma variável auxiliar z como

$$z = x_1 - x_2$$

teremos :

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = \dot{z} = -z \qquad (4.4)$$

cuja solução será

$$z(t) = z(t_o)\, e^{-(t-t_o)} = z_o\, e^{-(t-t_o)}$$

ou seja

$$x_1(t) - x_2(t) = [x_1(t_o) - x_2(t_o)]\, e^{-(t-t_o)} \qquad (4.5)$$

A diferença entre x_1 e x_2 tende a zero para $t \to \infty$ em forma monótona, (ou seja a trajetória, tende a reta $x_1 = x_2$ assintoticamente no tempo), porém o fato importante a ressaltar aqui, é que a solução não depende da entrada u(t). Assim, qualquer que seja esta, um estado inicial $x(t_o) = x_o$ situada num dos semiplanos $x_1 \gtrless x_2$ jamais poderá passar ao outro. A figura 1 mostra dois estados iniciais e uma possível trajetória de cada um deles.

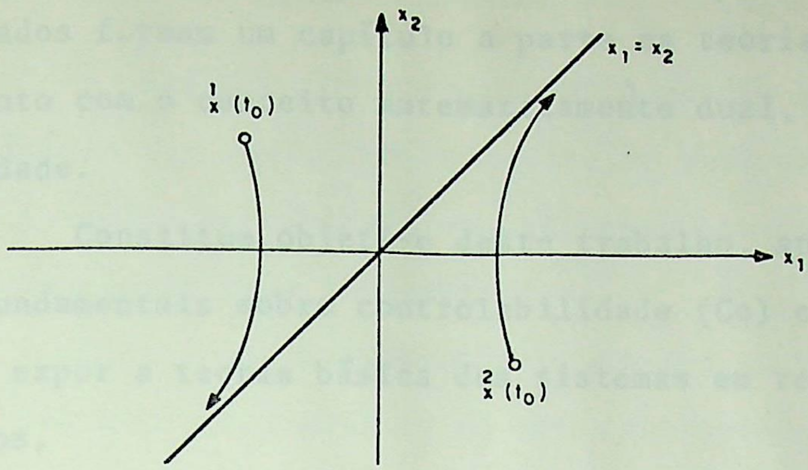


FIG. 1

Este exemplo mostra que nem sempre é possível desenhar controles adequados para certos sistemas e pode constituir uma das motivações do estudo que se efetuará neste trabalho, já que desperta uma série de perguntas, algumas das quais são :

1. Quais são as condições necessárias para que a saída de um sistema descrito pelo modelo de estado possa ser levado a algum valor desejado ?
2. Idem com respeito ao seu estado.
3. Suposto resolvido 1 e 2, o que se pode dizer sobre o tempo que leva para se chegar à solução ?
4. Existem soluções alternativas das quais uma exige menos tempo que as demais ?
5. De uma maneira geral, existem soluções que minimizem um certo índice de custo, ou maximizem um certo índice de ganho (em geral otimizem um certo índice de performance) ?

Este problema foi considerado primeiramente por

Kalman, precisamente em relação a problemas de controle ótimo. Seus resultados formam um capítulo a parte na teoria moderna de controle junto com o conceito matematicamente dual, que é o de observabilidade.

Constitue objetivo deste trabalho, apresentar os conceitos fundamentais sobre controlabilidade (Co) e observabilidade (Ob) e expor a teoria básica dos sistemas em relação a estes conceitos.

Feito isto, teremos dado respostas a algumas das perguntas anteriores.

Sem dúvida, as 2 últimas requerem a penetração na teoria de controle ótimo, saindo dos limites impostos a este trabalho.

5 - *PRIMEIRA CONSIDERAÇÃO DOS CONCEITOS DE Co e Ob*

É objetivo desta seção familiarizar o leitor com as idéias básicas que serão apresentadas, de modo que os desenvolvimentos matemáticos posteriores não tragam nenhum problema para a compreensão do tema fundamental.

Para isto, retomaremos o exemplo da seção 4, considerando-o com a técnica gráfica do DFS correspondente ao exemplo citado (figura 2).

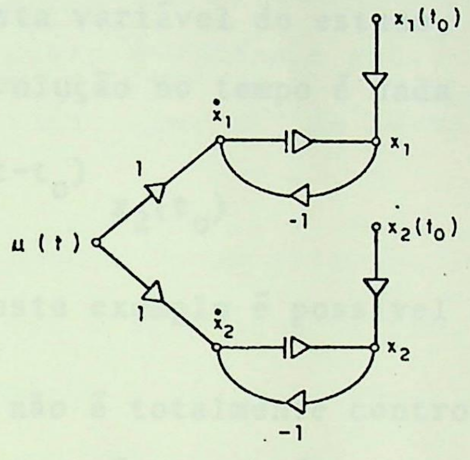


FIG. 2

Dele se observa a razão do "descontrole" de x_1 e x_2, pois eles não podem ser controlados independentemente por $u(t)$.

É possível imaginar outros casos de "não controlabilidade". Por exemplo o do sistema representado pelo DFS da figura 3 onde qualquer que seja a entrada $u(t)$, esta jamais poderá controlar x_2.

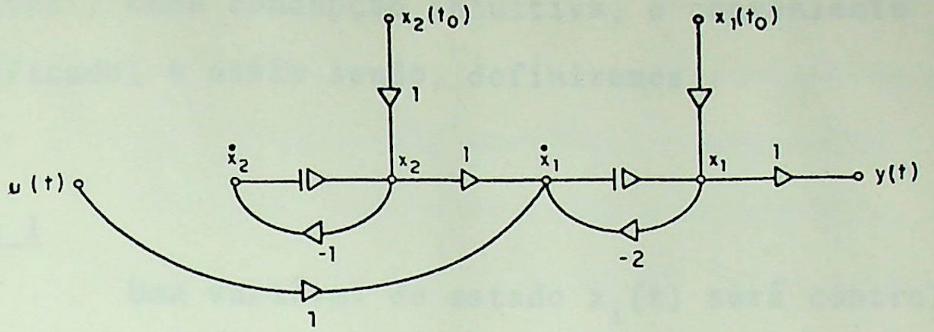


FIG. 3

Esta variável de estado, depende só de seu estado inicial, e sua evolução no tempo é dada por :

$$x_2(t) = e^{-(t-t_o)} \; x_2(t_o) \quad .$$

Deste exemplo é possível concluir que :

1. O estado não é totalmente controlável
2. A variável x_1 é controlável
3. A saída $y = x_1$ é controlável

Isto nos indica que se pode estabelecer várias definições sobre controlabilidade.

Em primeiro lugar uma definição referida a cada VE que será apresentada como definição 1.

Em segundo lugar uma referida ao estado em sua totalidade (definição 2).

E em terceiro lugar, uma referida à saída (definição 3).

Esta última justifica que o estado do sistema pode não ser completamente controlável, porém sua saída sim.

Nos parágrafos anteriores, usou-se o vocábulo "controlável", numa concepção intuitiva, é conveniente precisar seu significado, e assim sendo, definiremos :

Definição 1

Uma variável de estado $x_i(t)$ será controlável, se for possível atuar sobre ela, de modo a levá-la desde um estado inicial $x_{io} = x_i(t_o)$, até um estado final $x_{if} = x_i(t_f)$, $t_f \geq t_o$.

Na definição 1, não se diz como se atua sobre $x_i(t)$ porém obviamente é mediante outra função, convencionalmente denominada entrada, atue ela de forma direta, ou através de parte do sistema.

Tampouco foram estabelecidas exigências a respeito do tempo que leva à ação do controle.

Supondo o sistema controlável, o tempo pode ser : infinito, finito, ou infinitesimal.

O primeiro caso, é de interesse clássico, e são considerados um grande número de sistemas que chegam a um certo estado final para $t \to \infty$.

Sem dúvida, uma reflexão sobre o problema, nos permitirá retirar os "controles de tempo infinito" de nossa consideração, pelo seguinte motivo :

Em grande parte destes casos, a entrada está fixada, por exemplo, consideram-se entradas típicas cujas transformadas de Laplace são da forma s^n.

Se $n \geq 0$ tem-se funções impulsivas, se $n < 0$, teremos as familiares funções degrau, rampa e parábola de diversas ordens.

Porém, não há porque restringir-se a estas ou outras particulares funções u(t) senão que poderemos considerar quaisquer funções (desde que elas possam ser matematicamente manipuláveis e que possam ser implementadas praticamente).

Assim, se uma determinada entrada u(t), leva x_{io} a um valor desejado x_{if}, em $t \to \infty$, existirá geralmente outra u(t) que a leve em um tempo finito.

Então, esta não restrição nas entradas faz com que não seja necessário considerar Co em intervalos de tempo infinitos.

Também parece intuitivo, que esta liberdade na escolha de entradas, permitirá, em certos casos resolver o problema em tempos infinitesimais. Este problema será discutido mais adiante, porém o que foi dito basta para que em nossas primeiras considerações sobre Co, consideremos tempos finitos (ou nulos só como limite).

Definição 2

"Um sistema se diz de estado completamente controlável se, para qualquer $t_f \geq t_o$ é possível que todas as suas VE sejam controláveis".

A definição 2 não é condição nem necessária e nem suficiente para a existência de uma solução para a controlabilidade de saída.

Definição 3

"Um sistema se diz de saída completamente controlável se é possível construir um apropriado sinal de entrada u(t) que leve a saída desde um valor inicial $y(t_o)$ para um desejado valor final $y(t_f)$ num intervalo de tempo finito $t_f - t_o \geq 0$".

Ainda que em geral a completa controlabilidade é uma condição necessária para a existência de uma solução do problema de controle, onde a variável t é indefinida, necessita-se de uma propriedade mais forte de controlabilidade, quando o processo de controle está confinado a não exceder de intervalos de tempo fixos.

Esta propriedade pode se chamar de controlabilidade total.

Definição 4

"Um sistema se diz ser (de estado ou de saída) totalmente controlável se é completamente controlável em cada intervalo de tempo $t_o \leq t \leq t_f$".

A figura 4 ilustra-nos esta definição.

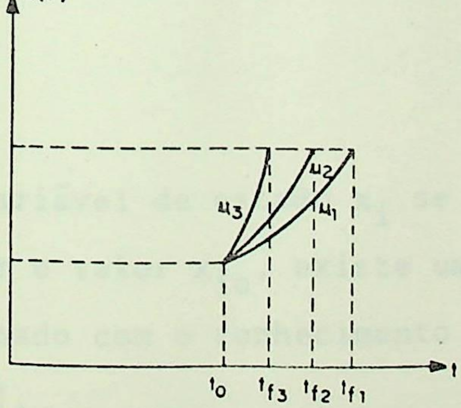


FIG.4

Onde podemos notar que o estado x(t) é completamente controlável "entre" t_o e t_f, e também que pode existir uma função de controle a qual nos dá o valor de x_f para qualquer t_f.

Antes de darmos as definições do conceito dual ao de controlabilidade que é o de observabilidade, é conveniente fixar esta dualidade de forma intuitiva.

Para isto recorremos ao DFS da figura 5.

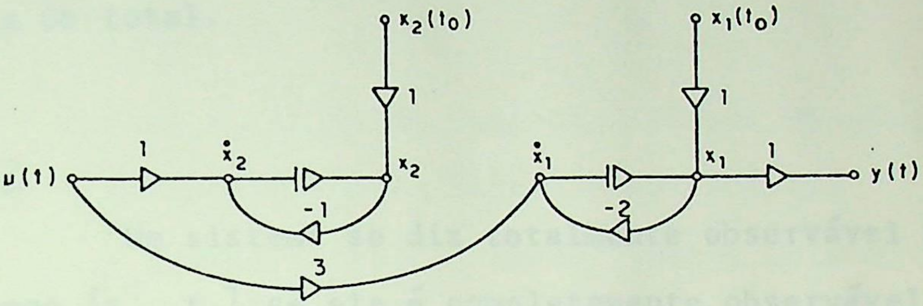


FIG. 5

Mesmo sem escrever as equações deste sistema, pode-se afirmar que como x_2 não está conectado com a saída, não será possível obter informações sobre esta variável mediante a medições efetuadas na saída y(t), o que é possível com x_1. Então se diz que x_2 não é observável.

Definição 5

"Uma variável de estado x_i se diz observável em t_o se qualquer que for o valor x_{io}, existe um $t_1 > t_o$ tal que x_{io} possa ser determinado com o conhecimento das entrada u(t) e saída y(t) em $[t_o, t_1]$.

Se isso não ocorrer, x_i dir-se-á "inobservável".

Estendendo este conceito para todas as variáveis de estado que compõem o vetor de estado, teremos :

Definição 6

"Um sistema se diz completamente observável em $[t_o, t_1]$ se cada VE é observável".

Essencialmente um sistema é completamente observável se cada transição no estado afeta as saídas do mesmo.

E da mesma maneira que se fez com Co aqui cabe mencionar a Ob total.

Definição 7

"Um sistema se diz totalmente observável no intervalo de tempo $[t_o, t_1]$ se ele é completamente observável em cada um de seus sub-intervalos".

6 - CONTROLABILIDADE DE ESTADO DE SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES

Considere um sistema representado por suas equações de estado e saída.

$$\dot{x} = Ax + B\,u \tag{6.1}$$

$$y = Cx + D\,u \tag{6.2}$$

Para o estudo da controlabilidade de estado (CoE) deste sistema encontramos duas importantes teorias.

A primeira delas é imediatamente extensível a sistemas variantes, mas não permite em geral nos casos em que o sistema for não CoE (que indicaremos como $\overline{\text{CoE}}$) a determinação das variáveis de estado que causam a não controlabilidade. A segunda não é facilmente extensível, porém permite usualmente esta determinação.

Assim, considerando só os sistemas lineares invariantes, apenas a segunda teoria bastaria para a determinação da CoE, porém como veremos em seções posteriores, consideraremos outros tipos de sistemas. Por isso é conveniente a apresentação de ambas as teorias.

De cada uma delas poderemos obter um procedimento concreto para a determinação da CoE.

Apresentaremos também a teoria baseada na matriz de transferência "estado a entrada" de um sistema, que como veremos, pode-se considerar como a complementação da primeira teoria.

6.1 - *Teoria Baseada na Solução da Equação de Estado*

Consideremos nesta teoria, que o sistema linear e invariante é contínuo no tempo.

As equações deste sistema já foram dadas em (6.1) e (6.2), mas repetiremos aqui por ser conveniente. Então teremos :

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{6.1.1}$$

$$y = Cx + Du \tag{6.1.2}$$

x = n - vetor (estado)

u = r - vetor (controle)

y = m - vetor (saída)

A = n x n - matriz (sistema)

B = n x r - matriz (controle)

C = m x n - matriz (saída)

D = m x r - matriz (transmissão)

A CoE deste sistema pode ser determinada através do seguinte teorema :

Teorema 1

Um sistema contínuo no tempo será de estado completamente Co se e somente se a matriz P, de ordem n x nr dada por

$$P = \left[B \;\vdots\; AB \;\vdots\; \ldots\ldots \;\vdots\; A^{n-1}B \right]$$

tiver classe igual a n (a matriz P tem n x r colunas)

Demonstração

Suponhamos que o sistema seja de estado completamente Co, então qualquer estado inicial $x_i(t_o)$ pode ser transferido para a origem do espaço de estado, em um intervalo de tempo finito $t_o \leq t \leq t_f$.

Sabemos que a solução da equação (6.1.1) é dada por (veja por exemplo (1), pp 385)

$$x(t) = e^{At}\left[x(t_o) + \int_{t_o}^{t_f} e^{-A\tau}\, Bu(\tau)\, d\tau\right]$$

sem perda de generalidade, supõe-se que $t_o = 0$, então para $t = t_f$:

$$0 = e^{At_f}\, x(o) + \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}\, Bu(\tau)\, d\tau$$

e dado que e^{At_f} nunca é singular

$$x(o) = -\int_0^{t_f} e^{-A\tau}\, Bu(\tau)\, d\tau$$

Podemos escrever $e^{-A\tau}$ da seguinte forma :
(Ref. (1) Sec 6-4)

$$e^{-A\tau} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i\, A^i$$

onde p é o grau do polinomio mínimo de A.

Como α_i é uma função de τ podemos escrever

$$e^{-A\tau} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(\tau)\, A^i$$

então teremos :

$$x(o) = - \sum_{i=0}^{p-1} \int_0^{t_f} \alpha_i(\tau)\, A^iBu(\tau)\, d\tau \tag{6.1.3}$$

u (τ) pode ser escrito como :

$$u(\tau) = \sum_{j=1}^{r} u_j(\tau)\, k_j$$

onde k_j é um vetor unitário que contém 1 na fila j e zeros nas outras.

Assim (6.1.3) fica :

$$x(o) = - \sum_{i=o}^{p-1} \sum_{j=1}^{r} \left(\int_0^{t_f} \alpha_i(\tau).u_j(\tau).d\tau \right) A^iB_j$$

onde B_j é a j-ésima coluna de B

Definindo

$$\int_0^{t_f} \alpha_i(\tau)\, u_j\, (\tau)\, d\tau = \beta_{ij} = \text{escalar}$$

então teremos

$$x(o) = - \sum_{i=o}^{p-1} \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij}\, A^iB_j \tag{6.1.4}$$

Da equação (6.1.4) nós vemos que qualquer estado inicial que possa ser transferido para a origem do espaço de estado, tem que ser uma combinação linear de :

B_j , AB_j ..... , $A^{p-1}B_j$ (j = 1,2 .... r)

Assim, se a classe da matriz

$$Q = \left[B_1 \middle| \ldots \middle| B_r \middle| AB_1 \middle| \ldots \middle| AB_r \middle| A^2B_1 \middle| \ldots \middle| A^2B_r \middle| \ldots \right.$$

$$\left. \middle| A^{p-1}B_1 \middle| \ldots \middle| A^{p-1}B_r \right]$$

$$= \left[B \middle| AB \middle| \ldots\ldots \middle| A^{p-1}B\right]$$

for igual a n, ou seja, a dimensão do espaço de estado, o x(o) que é transferido para a origem pode estar em qualquer parte do espaço de estado.

Por sua vez se a classe de Q for menor que n (vamos supor q, $q<n$), os estados iniciais transferíveis pertencem a um subespaço do inteiro espaço de estado e os x(o) que não perençam a este subespaço não poderão ser transferidos para a origem (equivalentemente, as componentes fora deste subespaço não serão controláveis).

Então a condição de controlabilidade é $p = n$ (polinômio mínimo = polinômio característico, ou equivalentemente à matriz A deve ser não derrogatória).

Mas se $p = n$, $Q = P$ e o sistema será CoE se classe de $P = n$, c.s.q.d.

Exemplo 1

Dado o sistema cujas EE são :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

determinar se o sistema é CoE ou $\overline{\text{CoE}}$

Solução

Sabemos que o sistema será CoE se e somente se a matriz P

$$P = \left[B \;\vdots\; AB \;\vdots\; \dots. \;\vdots\; A^{n-1}B \right]$$

tiver classe n, que no caso deste exemplo será 2, assim

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} n = 2 \\ n - 1 = 1 \end{matrix}$$

$$P = \left[B \quad AB \right]$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A classe de P é igual a um, e portanto, o sistema resulta $\overline{\text{CoE}}$.

Exemplo 2

Dado um sistema representado pelas seguintes EE

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

determinar sua CoE

Solução

A matriz P será dada por :

$$P = \left[B \;\vdots\; AB \;\vdots\; A^2B \;\vdots\; A^3B \right]$$

Excluindo deste trabalho o desenvolvimento tere mos :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de onde deveremos verificar se a classe da matriz P é igual a $n = 4$.

A classe de P será igual a 4 se existir qualquer sub-matriz pertencente a P, que tenha esta ordem e seja não-singular, e podemos constatar que existe tal sub-matriz como por exemplo, a sub-matriz formada pelas colunas 1, 3, 5 e 8.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta sub-matriz denominada de C, tem classe igual a 4, portanto, a classe de P será igual a 4 e o sistema resulta então CoE.

A teoria exposta expressa então, a condição de ser ou não controlável um sistema, em função das matrizes A e B.

Porém, no caso de não ser controlável o sistema , esta teoria não nos indica quais são as variáveis de estado não controláveis.

6.2 - *Teoria Baseada na Cancelação da Função de Transferência Estado a Entrada*

Um importante teorema, relacionado com o teorema 1, e diretamente aplicável a sistemas de uma entrada, é o seguinte :

Teorema 2

Se a função de transferência estado a entrada de um sistema, $G(s) = \dfrac{X(s)}{U(s)}$ dada pelo vetor

$$(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{|sI - A|} \cdot \begin{bmatrix} P_1 (s) \\ P_2 (s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n (s) \end{bmatrix}$$

onde

B = matriz n x 1

$P_i(s)$ = polinômios na variável complexa s

contiver cancelações em qualquer um de seus polinômios $P_i(s)$, então a classe da matriz

$$P = \left[B \;\vdots\; AB \;\vdots\; \ldots\ldots \;\vdots\; A^{n-1} B \right]$$

será menor que n e o sistema resultará $\overline{CoE}$

Por cancelações entende-se que $|sI - A|$ e algum $P_i(s)$ tenham raízes comuns.

A demonstração deste teorema é muito extensa e o leitor interessado poderá consultar por exemplo (1), 7-3, teoremas 7-8, 7-9.

Exemplo 1

O sistema cujas EE são :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

tem a seguinte matriz

$$P = [B \quad AB]$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

A classe desta matriz é igual a 1, portanto, o sistema é $\overline{\text{CoE}}$, e em sua função de transferência deve ocorrer cancelações, como veremos :

$$\frac{X(s)}{U(s)} = (sI - A)^{-1} B$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s + 3 & -1 \\ 2 & s - 1,5 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = (s + 2,5)\ (s - 1)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+2,5)(s-1)} \begin{bmatrix} s - 1,5 & +1 \\ -2 & s + 3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s+2,5)(s-1)} \begin{bmatrix} s - 1,5 & +1 \\ -2 & s + 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

de onde

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\begin{bmatrix} s + 2{,}5 \\ 4s + 10 \end{bmatrix}}{(s+2{,}5)(s-1)}$$

É visível a existência de uma cancelação em $X_1(s)$.

6.3 - *Teoremas Baseados Na Passagem a F.C. de Jordan*

Foi dito no início desta seção que encontramos duas importantes teorias para se determinar a controlabilidade de um sistema linear e invariante.

A primeira delas, que já foi apresentada na seção (6.1), não nos permite identificar quais VE não são controláveis.

Os teoremas que iremos apresentar agora, permitem-nos identificar quais VE não são controláveis, pelo menos, numa FC particular, a FC de Jordan. Estes teoremas serão apresentados divididos nos seguintes casos :

1º) matrizes A diagonalizáveis (por uma transformação de similaridade), e

2º) matrizes não diagonalizáveis, (e portanto, transformáveis por similaridade para a forma de Jordan).

6.3.1 - *Matriz A diagonalizável*

Neste caso, existe uma matriz T (que denominaremos matriz "modal") que diagonaliza A por similaridade

$$\exists\, T : T^{-1} AT = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}_1^n$$

onde os λ_i são os auto-valores de A.

Uma vez efetuada a transformação, a equação de estado (6.1.1) toma a seguinte forma :

$$\dot{z}(t) = \Lambda z(t) + \hat{B}u(t) \qquad (6.3.1.1)$$

onde

$$z(t) = T^{-1}\, x(t) \;;\; \hat{B} = T^{-1}B$$

Desenvolvendo a i-ésima fila da equação (6.3.1.1) teremos :

$$\dot{z}_i = \lambda_i\, z_i + \sum_{k=1}^{r} \hat{B}_{ik}\, u_k$$

Observa-se que existe um desacoplamento entre as VE (z_i), pois não existe somatória que as envolvam.

Em consequência disto, se alguma fila de $\hat{B}$ for nula, o estado ao qual pertence esta fila (z_i), não poderá ser controlado por nenhuma das entradas escalares u_k, (ou componentes escalares do vetor u(t) de entrada). Isto nos permite concluir o seguinte teorema :

<u>Teorema 3</u>

"Um sistema representado pela equação de estado (6.3.1.1) será CoE se sua matriz $\hat{B}$ não possuir nenhuma fila inteiramente nula".

Sistemas originariamente na forma diagonal são poucos, e assim, o teorema 3 não é de muita utilidade. Portanto, seria desejável tirar conclusões sobre a CoE do primitivo sistema (6.1.1) antes da passagem por equivalência à forma diagonal.

Isto pode ser feito considerando o

Teorema 4

A CoE de um sistema linear invariante é invariante sob transformações de equivalência.

Demonstração

Consideremos um sistema de equações (6.1.1), (repetidas aqui por conveniência) :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du \qquad (6.3.1.2)$$

e um sistema equivalente a ele cuja EE é dada por

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \qquad (6.3.1.3)$$

onde

$$\hat{A} = T^{-1} AT, \ \hat{B} = T^{-1} B \quad \hat{x} = T^{-1} x \qquad (6.3.1.4)$$

Para que o sistema (6.3.1.2) seja CoE é necessário e suficiente que a matriz $P = [B|AB| \ldots . |A^{n-1}B]$ seja também de classe n.

Provaremos então este teorema, demonstrando que classe P = classe de $\hat{P}$, e consequentemente, quando o sistema primitivo for CoE, o sistema equivalente também será e vice-versa.

Pelas equações (6.3.1.4), podemos escrever

$$\hat{P} = [TB \mid TAB \mid \ldots\ldots \mid TA^{n-1}B] = T \ [B \mid AB \mid \ldots . \mid A^{n-1}B]$$

$$\hat{P} = TP$$

Como a classe de uma matriz não muda pela sua multiplicação por uma matriz não singular (ref (3) teorema 2-7), fica demonstrado o que se pretendia

Os teoremas 3 e 4 conjuntamente são de grande utilidade pois permite-nos averiguar sobre a CoE de um sistema diagonalizável, mas, originariamente, em qualquer forma canônica (ou em nenhuma reconhecível). Isto enuncia-se como :

Teorema 5

Um sistema de EE (6.1.1), com A diagonalizável por uma transformação de similaridade de matriz T, será CoE se a matriz $\hat{B} = T^{-1}B$ não possuir nenhuma fila nula.

Vamos apresentar 2 exemplos :

O primeiro é o caso comum de que A possui auto-valores diferentes.

O segundo apresenta A diagonalizável com auto-valores repetidos (A derrogatória).

Exemplo 1

Seja estudar a controlabilidade de estado do exemplo 1 sec. 6.1.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os auto-valores e auto vetores resultam respectivamente :

$$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = -1 \qquad (*)$$

(*) Sendo a A triangular, é conhecido que seus elementos diagonais são os seus autovalores.

$$\overset{1}{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \qquad \overset{2}{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\hat{B}$ possue uma fila nula, portanto o sistema é $\overline{\text{CoE}}$

Vemos neste exemplo que a variável de estado z_2 não é controlável, mas disto não devemos concluir que a variável x_2 do sistema primitivo não é controlável.

<u>Exemplo 2</u>

Seja o sistema :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} . u \qquad (6.3.1.5)$$

Verificar a CoE

Por qualquer método, achamos que a matriz modal T é :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ então } T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = T^{-1}A\,T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Então o sistema (6.3.1.5) é $\overline{\text{CoE}}$.

Na FC diagonal, a VE incontrolável é z_2 e a equação de estado fica :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

6.3.2 - Matriz A não Diagonalizável

Quando existem auto-valores múltiplos, a matriz A usualmente será não diagonalizável.

Para estender este caso à teoria vista em 6.3.1, devemos levar a matriz A à FC de Jordan, podendo aparecer na matriz similar a A, denominada J, diversos blocos.

Os dois grandes casos que poderão aparecer são :

1) Diferentes blocos de Jordan são associados a auto-valores distintos (matriz A não derrogatória).
2) Existem diferentes blocos de Jordan associados a um mesmo auto-valor. Neste caso A é derrogatória.

Um exemplo do primeiro caso será o de uma matriz A, possuindo 4 auto-valores, com três deles iguais e tal que sua J seja :

$$J = T^{-1}\,AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

indicando que A possue apenas 2 auto-vetores linearmente independentes.

As equações de estado deste exemplo ficam estruturadas da seguinte maneira :

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + z_2 + \sum_{k=1}^{r} \hat{B}_{1k} u_k$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_1 z_2 + z_3 + \sum_{k=1}^{r} \hat{B}_{2k} u_k$$

$$\dot{z}_3 = \lambda_1 z_3 \qquad + \sum_{k=1}^{r} \hat{B}_{3k} u_k$$

$$\dot{z}_4 = \lambda_2 z_4 \qquad + \sum_{k=1}^{r} \hat{B}_{4k} u_k$$

Notam-se que as z_i estão totalmente desacopladas na fila que corresponde a última fila de cada bloco de Jordan.

Portanto, o controle destas z_i depende unicamente das $\Sigma\hat{B}_{ik}u_k$ o que nos permite, considerando o Teorema 4, enunciar o seguinte :

Teorema 6

"Um sistema será CoE se cada fila de $\hat{B}$ correspondente à última fila dos distintos blocos de Jordan for não nula".

Neste caso, também as variáveis de estado que causam o descontrole ficam identificadas. A condição para o segundo caso, ou seja, auto-valores múltiplos e vários blocos de Jordan associados com o mesmo auto-valor (matriz A derrogatória), tem sido tratada por vários autores.

Uma das dificuldades de sua exposição é a existência de uma notação que seja adequada a generalidade do caso .

Aqui usaremos a da ref. (3) válida tanto para ' sistemas contínuos (6.3.2.1) como para discretos (6.3.2.2), por isso abandonaremos neste seção somente a convenção para as ordens das matrizes estabelecidas na Secão 2.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad (6.3.2.1)$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \qquad k = 0,1,2 \dots \end{aligned} \qquad (6.3.2.2)$$

Em ambos os casos as matrizes serão

$$\underset{(n \times n)}{A} = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_m \end{bmatrix} \quad \underset{(n \times p)}{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}$$

$$\underset{(q \times n)}{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_m \end{bmatrix} \qquad (6.3.2.3)$$

$$\underset{(n_i \times n_i)}{A_i} = \begin{bmatrix} A_{i1} & & \\ & A_{i2} & \\ & & \ddots \\ & & & A_{ir(i)} \end{bmatrix} \quad \underset{(n_i \times p)}{B_i} = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ \vdots \\ B_{ir(i)} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(q \times n_i)}{C_i} = \begin{bmatrix} C_{i1} & C_{i2} & \cdots\cdots & C_{ir(i)} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(n_{ij} \times n_{ij})}{A_{ij}} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \end{bmatrix} \qquad B_{ij} = \begin{bmatrix} b_{ij} \\ b_{2ij} \\ \\ b_{\ell ij} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{fij} & C_{2ij} & \cdots\cdots & C_{\ell ij} \end{bmatrix}$$

"A" é uma matriz constante de ordem $(n \times n)$ e está expressada na forma canônica de Jordan, com m $(m \leq n)$ auto-valores distintos $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_m$

Denomina-se A_i ao conjunto dos blocos de Jordan associados com o auto valor λ_i, e $r(i)$ o número de blocos que A_i contém.

Seja A_{ij}, o j-ésimo bloco de Jordan de A_i, então

$A_i = \text{Diag}\,(A_{i1}, A_{i2} \ldots\ldots A_{ir(i)})$ e

$A = \text{Diag}\,(A_1, A_2 \ldots\ldots A_m)$

Sejam n_i e n_{ij} as ordens de A_i e A_{ij} respectivamente, então :

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r(i)} n_{ij}$$

B e C são matrizes constantes, de ordens $(n \times p)$ e $(q \times n)$ respectivamente.

Correspondentemente com A_i e A_{ij}, B e C estão particionadas como mostram as equações (6.3.2.3).

b_{fij} e $b_{\ell ij}$ são a primeira e última fila de B_{ij}, C_{fij} e $C_{\ell ij}$ a primeira e última fila de C_{ij} respectivamente.

Com todos estes dados podemos formular a condição de controlabilidade para este caso mais geral :

<u>Teorema 7</u>

"Um sistema, cuja matriz A transformada por similaridade apresentar a forma das equações (6.3.2.3) será CoE se e somente se para cada i = 1,2 ..... m , o conjunto dos r(i) vetores p-dimensionais $b_{\ell i1}$, $b_{\ell i2}$ ..... $b_{\ell ir(i)}$ é linearmente independente".

A demonstração deste teorema não será dada aqui. O leitor interessado poderá consultar a ref. (3) já mencionada.

Como comentário final a esta última condição de CoE, pode-se concluir que, quando existe um problema deste tipo, a menos que ele seja extremamente simples, precisaremos recorrer a métodos computacionais para verificar a independência ou não dos vetores a que nos referimos neste teorema.

6.4 - *A não Invariancia da Controlabilidade de Estado em Relação a Escolha das V E*

A controlabilidade de estado não tem porque ser invariante com respeito a uma dada escolha de V.E.

Este problema não pode ser esclarecido independentemente do conceito de observabilidade, e por isso será considerado logo após da introdução deste tema na seção (9), onde exemplificaremos a propriedade negativa a que se refere o título des ta seção, porém aqui nos referimos a esta propriedade, porque resulta algo de surpreendente a primeira vez que a consideremos.

Isto ressalta-nos uma faceta interessante do moderno enfoque de estado, ou seja que a escolha das VE é uma forma de cálculo que não expressa "características absolutas" do sistema.

E isto nos leva a formular a seguinte pergunta : O que se sucede com a possibilidade de controlar a saída, já que ela depende neste enfoque das variáveis de estado. Isto será considerado na seção seguinte.

7 - CONTROLABILIDADE DA SAÍDA

Quando se desenha um sistema, em geral, o que se pretende controlar é a saída sendo que é bom lembrar aqui que a CoE não é condição nem necessária e nem suficiente para a existência da controlabilidade de saída.

O modelo matemático de estado é dado usualmente por duas equações matriciais.

A primeira delas refere-se à variação do estado, e a segunda expressa a saída.

É óbvio que a condição matemática da controlabilidade da saída, deverá ser expressa em termos das matrizes desta segunda equação ou seja C e D

Porém, as VE também afetam a saída, o que faz com que a controlabilidade da saída dependa também das matrizes A e B.

É possível demonstrar, seguindo um critério semelhante com o desenvolvido para o Teorema 1, o seguinte teorema (a prova é muito extensa, e não será considerada aqui; o leitor interessado pode consultar (1), 7.3).

Teorema 1

Um sistema será de saída completamente controlável (CoY), se a matriz :

$$[CoY] = [CB \mid CAB \mid CA^2B \mid \ldots\ldots\ldots \mid CA^{n-1}B \mid D]$$

tiver classe m.

Lembrando que: as ordens de C,A,B e D são (m x n), (n x n), (n x r), (m x r) respectivamente e que a ordem de CoY = m x (n+1)r, então a condição do teorema exige que a classe de CoY seja a máxima possível.

8 - OBSERVABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES INVARIANTES

O conceito de observabilidade é de certo modo dual ao de controlabilidade.

Essencialmente, um sistema é de estado observável se cada uma de suas V E afeta alguma das saídas.

Do mesmo modo que em CoE, a condição para um sistema ser completamente observável (abreviada por Ob) é determinado por duas teorias duais as apresentadas em 6.1 e 6.3 que são as seguintes:

8.1 - *Teoria Baseada na olução da Equação de Estado*

Teorema 1

"O sistema descrito pelas seguintes equações :

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx$$

onde

y = escalar (sinal de saída)

C = matriz de ordem (m x n)

será completamente observável se a matriz [Ob] de ordem (n x mn), onde

$$[Ob] = \left[C^* \,\vdots\, A^*C^* \,\vdots\, \ldots\ldots \,\vdots\, (A^*)^{n-1}\, C^* \right]$$

tiver classe igual a n.

A demonstração deste teorema será aqui omitida, pois segue os mesmos detalhes da desenvolvida para o teorema 6.1.

Nota: Em alguns textos, a matriz [Ob] vem dada pela sua transposta (veja p. ex. (3) pp 188).

8.2 - *Teoria Baseada na F.C. de Jordan*

A semelhança formal desta teoria com a que foi desenvolvida para controlabilidade (seção 6.3) faz com que seja igualmente sub-dividida.

8.2.1 - *Matriz A diagonalizável*

No caso da CoE, exigia-se a diagonalização de A, na primeira equação "Standard" de estado, por meio de uma transformação de similaridade.

Uma vez produzida, a segunda equação "Standard" do sistema fica na forma :

$$y = \hat{C}z + Du$$

onde z é o novo estado e $\hat{C} = CT$

Nota: Sabe-se que $\hat{D} = D$.

Então toma-se $\hat{C}$, e verifica-se existe alguma coluna nula.

Suponhamos que a j-ésima coluna seja nula. Neste caso a variável z não se refletirá na saída, não podendo ser observada.

Se na equação primitiva se cumprir a nulidade da j-ésima coluna de C, (agora A não é diagonal) a j-ésima VE poderia ainda exercer influência na saída por intermédio das outras VE, através de A não podendo então determinar se o sistema é observável ou não.

Exemplo explicativo: Seja um sistema monovariável de $2^{\underline{a}}$ ordem :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Como A não é diagonal, a coluna nula de C não indica se x_2 é Ob ou não.

Se em um caso concreto é ou não Ob, isto vai depender dos valores atuais dos a_{ij} e c_1.

Formando a [Ob] :

$$[Ob] = \begin{bmatrix} c_1 & a_{11}c_1 \\ 0 & a_{12}c_1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 & a_{11} \\ 0 & a_{12} \end{bmatrix}$$

vemos que a classe de [Ob] independe dos valores de a_{11}, a_{21}, e a_{22}, e também do c_1, com a restrição de que $c_1 \neq 0$. Se $a_{12} = 0$ o sistema é $\overline{Ob}$, se $a_{12} \neq 0$ é Ob. Vamos considerar um caso numérico em ambas as possibilidades.

1º) Sistema $\overline{Ob}$. Escolhe-se para isto $a_{12} = 0$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x \ ; \ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Dada a forma triangular de A, os auto-valores são 1,2, e um simples cálculo conduz aos auto-vetores

$$v_1' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \ ; \ \text{e} \ v_2' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \ \therefore$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \ CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \hat{C}$$, indicativo de $\overline{Ob}$ pelo

procedimento de passagem a FC diagonal.

Nota: Aqui não é preciso calcular $\hat{A} = T^{-1} AT$, já que se sabe que resultará diagonal.

2º) Sistema Ob - Basta para isto que $a_{12} \neq 0$, por exemplo $a_{12} = 1$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x \; ; \; y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

a A fica na forma companheira, sendo imediato escrever T como

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \hat{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

não sendo necessário aqui também obter $\hat{A}$ mediante $T^{-1} AT$.

Este exemplo ilustrou o fato de que um sistema com A não diagonal, e com colunas nulas em C pode ser ou não Ob, mas se A passa para a FC Diagonal então a presença (ausência) de colunas nulas na $\hat{C}$ é indicativa de Ob ($\overline{Ob}$) e isso com caráter necessário e suficiente.

A formalização dos conceitos anteriores pode-se fazer mediante teoremas duais aos considerados na subseção 6.3 . 1.

Assim sendo podemos omitir o dual do teorema 6.3. por sua pouca utilidade quando usado isoladamente e enunciar o dual do teorema 6.4.

<u>Teorema 2</u>

"A Ob de um sistema é preservada sob transformações de equivalência".

E passar para o

Teorema 3

"Se um sistema possui uma A diagonalizável por uma transformação de similaridade de matriz T, tal sistema será Ob se a matriz $\hat{C} = CT$ não possuir colunas nulas, e $\overline{Ob}$ se as possuir.

O caso de A não diagonalizável é tratado na próxima subseção.

8.2.2 - Matriz A não Diagonalizável

O estudo da Ob de sistemas com A não diagonalizável segue passo a passo o efetuado para a CoE na subseção 6.3.2.

Se A for derrogatória, então :

Teorema 4

Um sistema será Ob se cada coluna de $\hat{C}$ correspondente a primeira coluna dos distintos blocos de Jordan for não nula.

Se A for derrogatória, então :

Teorema 5

Um sistema, cuja matriz transformada por similaridade apresentar a forma das equações (6.3.2.3), será Ob se e somente se para cada i = 1,2, ..., m o conjunto dos r (i) vetores q-dimensionais C_{fi1} , C_{fi2} ..... $C_{fir(i)}$ for linearmente independente.

9 - INFLUÊNCIA DA Co E DA Ob NA REALIZAÇÃO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Uma realização de um modelo de estado consiste em achar as quatro matrizes que determinam totalmente a representação de estado, ou seja, o quádruplo (A,B,C e D).

Nesta seção suponhamos conhecido o problema da realização, e consideraremos a influência da Co e da Ob nesse problema, quando os dados originais estão na forma de uma F T.

É conhecido o fato de que existem infinitas representações de estado associadas com uma única F T racional e própria.

Dessas infinitas representações apenas umas poucas têm importância em certos problemas específicos na teoria de controle.

Essas representações especiais, ou distinguidas são reconhecíveis por inspeção das matrizes (A,B,C e D) o que significa que estas matrizes apresentam particulares estruturas.

Um dos exemplos mais visíveis de estrutura particular é para a matriz A, a forma diagonal ou sua extensão, a forma de Jordan.

Em relação ao problema que vamos considerar, existem duas formas canônicas, caracterizadas por possuirem a A na forma companheira e na dual à companheira, e as matrizes B e C em formas correspondentes às de A conforme indicaremos no que seguirá.

Quanto a "D" é simples demonstrar que se ela existir, é invariante a qualquer que seja a representação do estado.

Em certas literaturas técnicas, essas duas formas são conhecidas como variações da chamada "FC variável de fase", mas em relação ao problema desta seção, elas serão nomeadas como "FC Controlável" e "FC Observável". A razão desta nomenclatura está esclarecida na Seção seguinte.

9.1 - *Formas Canônicas "Controlável" e "Observável"*

Se a função transferência G(s) for própria, mas não em sentido estrito (*), então qualquer uma de suas representações de estado possue $D \neq 0$.

Aliás D é o quociente dos coeficientes de maior grau do numerador e do denominador se o grau desses polinômios for o mesmo.

Se esse for o caso, uma divisão leva G(s) à forma :

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = d + \frac{Q_1(s)}{P(s)} \tag{9.1.1}$$

onde agora grau $Q_1(s)$ < grau P(s). O "d" de (9.1.1) é o D da realização e por ser invariante em todas as realizações dessa G(s), não influi em nada do que se vai considerar.

Por isso vamos supor daqui em diante que a dada G(s) é estritamente própria, já que as expressões a apresentar serão mais simples.

Então, a FT mais geral que consideraremos é a seguinte :

(*) Vamos definir uma FT racional como própria se grau num. ≤ grau den. e estritamente própria se grau num. < grau den.

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + b_1 s + b_o}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 s + a_o} \qquad (9.1.2)$$

Baseado na informação dos coeficientes b_i e a_j, é possível escrever uma realização de (9.1.2) como (*) :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 1 \\ -a_o & -a_1 & & \ldots\ldots\ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (9.1.3)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_o & b_1 & \ldots\ldots & b_{n-1} \end{bmatrix} x \qquad (9.1.4)$$

que será denominada "FC Controlável".

A razão dessa denominação, é que (9.1.3) e (9.1.4) será sempre CoE quaisquer que forem os coeficientes a_i, b_i.

A demonstração do que foi afirmado está dada no que se segue :

A matriz $P = \left[B \mid AB \mid \ldots\ldots \mid A^{n-1}B \right]$ desta forma canônica, só contém os elementos do conjunto $\{a_i\}$ já que todos os b_i estão contidos na C.

Aliás, as colunas de P, serão B, AB, ...,$A^{n-1}B$, e dada a estrutura de B, as colunas a partir da segunda até a n-ésima serão as últimas colunas de A, A^2, ... A^{n-1}.

(*) Ver p. exemplo (2), cap. 3, 3.1.1.

É simples ver que A^2, A^3, etc possuem na última coluna o 1 nas filas n-3, n-4 até a primeira para A^{n-1}.

Então a (P) resulta triangular inferior com "uns" na diagonal não principal, portanto seu determinante será igual a "-1" independente dos a_i. Sendo isto assim, a classe de (P) é a máxima possível, isto é, n.

A outra realização importante de (9.1.2) é uma forma companheira dual a (9.1.3) e (9.1.4) denominada F C observável que vem dada como :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & -a_1 \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u \qquad (9.1.5)$$

$$y = [1 \quad 0 \cdots\cdots 0]\, x \qquad (9.1.6)$$

O motivo da denominação F C Observável é que (9.1.5) e (9.1.6) será sempre observável quaisquer que forem os coeficientes a_i e b_i.

A demonstração do que foi afirmado é bastante simples, basta verificar que a matriz P de (9.1.3) e (9.1.4) será sempre igual à matriz [Ob] de (9.1.5) e (9.1.6) dada por

$$[Ob] = \left[C^* \,\vdots\, A^*C^* \,\vdots\, (A^*)^2\, C^* \,\vdots \cdots \vdots\, (A^*)^{n-1}\, C^*\right]$$

e que as exigências para ambas são as mesmas, então o sistema descrito por (9.1.5) e (9.1.6) será sempre Ob.

9.2 - O Problema da Cancelação

Seja o modelo transferencial (9.1.2). Se o numerador Q(s) e o denominador P(s) possuirem raízes comuns, é algebricamente possível cancelar os fatores $(s - \lambda_c)$, (onde λ_c : raíz comum) de ambos os P(s) e Q(s).

Nesta seção consideraremos o problema da Co e da Ob de uma tal G(s).

O tema será abordado, considerando que pelo visto em 9.1 , é sempre possível, e só com a informação dos a_i e b_i, escrever as FC Co e Ob de uma dada G(s), donde se deduz que seguramente e ainda no caso de raízes comuns, existe uma realização Co, e outra Ob da G(s).

Entretanto, o que ocorre nestes casos, é que a FC Co é $\overline{Ob}$ (sistema não completamente observável), e a FC Ob é $\overline{Co}$.

Efetuaremos a demonstração deste teorema apenas para a FC Co porque a da FC Ob é dual a esta.

Se Q(s) e P(s) possuem raízes comuns, e λ_c é uma dessas, então obviamente

$$Q(\lambda_c) = 0 \tag{9.2.1}$$

$$P(\lambda_c) = 0 \tag{9.2.2}$$

Vamos introduzir por simplicidade de notação o vetor

$$\alpha' = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_c & \lambda_c^2 & \ldots\ldots\ldots & \lambda_c^{n-1} \end{bmatrix}$$

Então considerando o vetor C da FCCo, (9.1.4) e a (9.2.1) desta seção teremos :

$$C\alpha = \begin{bmatrix} b_o + b_1 \lambda_c + b_2 \lambda_c^2 + \ldots\ldots + b_{n-1} \lambda_c^{n-1} \end{bmatrix} = 0 \tag{9.2.3}$$

Além disto,

$$A\alpha = \begin{bmatrix} \lambda_c \\ \lambda_c^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_c^{n-1} \\ -a_o - a_1 \lambda_c - \ldots\ldots - a_{n-1} \lambda_c^{n-1} \end{bmatrix}$$

e considerando (9.1.2), a última fila de $A\alpha$ será λ_c^n.

Então

$$A\alpha = \lambda_c \alpha \qquad (9.2.4)$$

o que incidentalmente poderia ter sido escrito diretamente já que λ_c, sendo raíz de P(s), deve ser um auto-valor de A ($P(\lambda_c) = (\lambda_c I - A)$), e α, na forma em que foi definida um auto-vetor de A (veja (2), cap. 2 ap. III).

Pré-multiplicando (9.2.4) por A, teremos :

$A.A\alpha = A^2\alpha = \lambda_c A\alpha = \lambda_c^2\alpha$. Em consequência, $A_\alpha^i = \lambda_c^i\alpha$, e por (9.2.3) vemos que: $CA\alpha = C\lambda_c\alpha = \lambda_c C\alpha = 0$ e similarmente $CA^i\alpha = \lambda_c^i C\alpha = 0$. O produto $[Ob]\alpha$ resultará então :

$$[Ob]\alpha = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} C\alpha \\ CA\alpha \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1}\alpha \end{bmatrix} = 0 \qquad (9.2.5)$$

Como $\alpha \neq 0$, obtém-se: "Classe $[Ob] < n$" (*) então fica demonstrado que se há cancelação a FC Co é $\overline{Ob}$.

Se λ_c não for raiz comum a Q(s) e P(s) mas for raiz de um destes polinômios, então revisando a demonstração acima, obtém-se que o produto $[Ob]\alpha$ de (9.2.5) é diferente de zero (agora ou (9.2.3) é diferente de zero ou a última fila de A não poderá igualar-se a λ_c^n, e (9.2.4) não será correta).

Se não existir nenhuma raiz comum (9.2.5) não pode ser válida para nenhum α, e o sistema é Ob. Porém já era Co.

9.3 - *Co e Ob na Equivalência de Sistemas*

Lembrando que duas realizações $S_1 = (A,B,C,D)$, $S_2 = (\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D})$ são ditas equivalentes se existir uma matriz T não singular, tal que

$$\begin{aligned} \hat{A} &= T^{-1}AT \\ \hat{B} &= T^{-1}B \\ \hat{C} &= CT \\ \hat{D} &= D \end{aligned} \qquad (9.3.1)$$

sabe-se que uma G(s) apresentando cancelações pode-se realizar em forma Co mas $\overline{Ob}$, ou vice-versa.

Sabe-se ainda que a Co é preservada por mudanças de coordenadas no espaço de estado (teorema 6.4), e dualmente para Ob (teorema 8.2). Então conclui-se que :

(*) Ord. $[Ob] = n \times n$. Vamos demonstrar que $|Ob| = 0$. Suponha que não é. Então $\exists\ [Ob]^{-1}$, e pré-multiplicando (9.2.5) por $[Ob]^{-1}$, teria-se $\alpha = 0$, em contradição com sua definição.

1º) Uma G(s) com cancelações pode ser representada por infinitas realizações Co ou por infinitas Ob, mas qualquer representação de um desses conjuntos não é equivalente a qualquer outra do outro.

Teorema 1

Se uma realização monovariável é Co(Ob), então ela pode ser transformada equivalentemente para a FC Co (FCOb).

Demonstração

Consideremos então uma realização que seja Co.

Sabemos pelo teorema (6.1) que a matriz $P = [B \mid AB \mid \ldots\ldots \mid A^{n-1}B]$ desta realização contém um conjunto de vetores (colunas) linearmente independentes. Além disto, para sistemas escalares, ord $P = n \times n$. Portanto, todas suas colunas devem ser linearmente independentes.

Por este motivo, o seguinte conjunto de $n \times 1$ vetores

$$
\begin{aligned}
t^n &= B \\
t^{n-1} &= At^n + a_{n-1}t^n = AB + a_{n-1}B \qquad (9.3.2)\\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
t^1 &= At^2 + a_{n-1}t^n = A^{n-1}B + a_{n-1}A^{n-2}B + \ldots\ldots + a_1B
\end{aligned}
$$

é linearmente independente e qualifica-se como base para o espaço de estado em questão.

E na (9.3.2), os a_i foram escolhidos como os coeficientes do polinômio denominador da função transferência correspondente ao quádruplo (A,B,C,D) eq. (9.1.2).

Se os vetores t^1, t^2, ... , t^n são usados como uma base, então a i-ésima coluna da nova representação $\hat{A}$, é a representação de At^i em relação a base t^1, t^2, ... , t^n.

Observe que :

$$At^1 = (A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1A + a_oI)\ B - a_oB$$

Dada a escolha dos a_i, a equação característica de A é

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\ \lambda^{n-1} + ...\ a_1\lambda + a_o = 0$$

e pelo teorema de Cayley - Hamilton deve também ser satisfeita por A, então por isto o parênteses da expressão acima, é igual a zero.

$$At^1 = -a_oB = -a_ot^n = \left[t^1,\ t^2,\ .....\ ,\ t^n\right] . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -a_o \end{bmatrix} .$$

$$At^2 = t^1 - a_1t^n = \left[t^1,\ t^2,\ .....\ t^n\right] . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -a_1 \end{bmatrix}$$

$$At^n = t^{n-1} - a_{n-1}t^n = \left[t^1,\ t^2 \ldots\ldots t^n\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Assim se nós escolhemos $t^1, t^2, \ldots\ldots, t^n$ como uma nova base para o espaço de estado, então A passa para uma $\hat{A}$ que forma-se justapondo as colunas da seguinte maneira :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & 1 \\ -a_o & -a_1 & -a_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & -a_n & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

É claro que $\hat{A}$ resulta semelhante a A : $\hat{A} = T^{-1}AT$, e a matriz T é :

$$T = \left[t^1,\ t^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ t^n\right] = P^{-1}$$

Então as matrizes $\hat{B}$ e $\hat{C}$ serão :

$$\hat{B} = T^{-1}B, \quad \hat{C} = CT. \qquad \text{Portanto :}$$

$$T\hat{B} = \left[t^1,\ t^2,\ \ldots\ t^n\right]\ \hat{B} = B = t^n$$

onde a última igualdade é pela primeira das (9.3.2).

Comparando os 2º e 4º membros :

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Agora, CT é um vetor fila dado por :

$$\hat{C} = CT = \left[b_o, \ b_1, \ \ldots\ldots\ b_{n-1} \right]$$

e comparando com (9.1.4), os b_i terão que ser os coeficientes do polinômio numerador.

10 - CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE DE SISTEMAS COMPOSTOS

Nesta seção, a controlabilidade e a observabilidade de sistemas compostos é descrita a partir da controlabilidade e da observabilidade de seus subsistemas.

Apresentaremos teoremas, que se referem a conexão de dois sub-sistemas, conectados em paralelo, em série, e de sistemas realimentados.

Sucessivas aplicações destes teoremas, estendem o resultado para sistemas compostos que consistem de vários subsistemas conectados em paralelo e em série.

Um fato importante a comentar aqui é que se levarmos os subsistemas a FC diagonal (não considerando a FC de Jordan geral por simplicidade , como já foi visto na seção 6.3.1.2), a representação dos sistemas compostos será muito mais simples e a teoria que se segue será uma aplicação direta da vista em (6.3.1). Por este motivo todos os sistemas considerados nesta seção são primitivamente diagonais ou sistemas não diagonais diagonalizados.

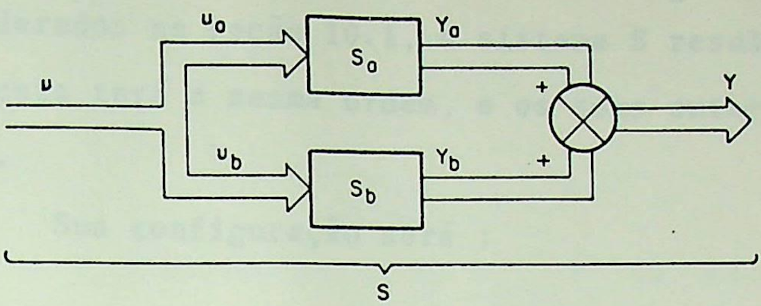
10.1 - *Conexão em Paralelo*

Dado dois sistemas S_a e S_b, de dimensões n_a, n_b e auto-valores $\lambda_{1a}, \lambda_{2a} \dots\dots \lambda_{naa}$ e $\lambda_{1b}, \lambda_{2b} \dots\dots \lambda_{nbb}$, o sistema S resultante da conexão em paralelo terá :

Ordem $S = n = n_a + n_b$

Auto-valores de $S = \lambda_1, \lambda_2 \dots\dots \lambda_n = \{\lambda_{ia}\}_1^{n_a}, \{\lambda_{ib}\}_1^{n_b}$

e o seguinte diagrama :



e suas EE e ES terão a seguinte forma :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \Lambda_a & 0 \\ 0 & \Lambda_b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u \tag{10.1.1}$$

$$y = [C_a \quad C_b] \, x + [D_a + D_b] \, u \tag{10.1.2}$$

onde

$$u = u_a = u_b, \quad x = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}, \quad y = [y_a + y_b]$$

Uma vez que apresentamos S podemos enunciar o seguinte teorema :

<u>Teorema 1</u>

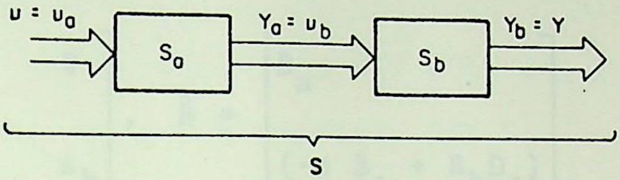
A condição necessária e suficiente para que S seja CoE (Ob) é que ambos S_a e S_b sejam CoE (Ob).

A prova deste teorema pode ser verificada pela simples inspeção das eq. (10.1.1) e (10.1.2).

10.2 - *Conexão em Cascata*

Se considerarmos dois sistemas S_a e S_b idênticos aos já considerados na seção 10.1, o sistema S resultante da conexão em Cascata terá a mesma ordem, e os seus auto-valores os de S de 10.1.

Sua configuração será :



E suas EE e ES serão (veja (5)).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \Lambda_a & 0 \\ B_b C_a & \Lambda_b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b D_a \end{bmatrix} u \qquad (10.2.1)$$

$$y = [D_b C_a \quad C_b]\, x + [D_b D_a] u \qquad (10.2.2)$$

Pela simples inspeção de (10.2.1) e (10.2.2) não se pode tirar nenhuma conclusão sobre suas CoE e Ob, pois elas não estão na FC diagonal.

No entanto, é possível diagonalizá-la através da seguinte matriz T.

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \beta & I \end{bmatrix}$$

onde

$$\beta_{ij} = \frac{(B_bC_a)_{ij}}{\lambda_{ia} - \lambda_{jb}}$$

e

$$\lambda_{ia} \neq \lambda_{jb} \quad \text{para} \quad \forall\ i,\ j$$

$(B_bC_a)_{ij}$ denota os elementos ij de B_bC_a e as novas matrizes Λ, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ ficarão

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_a & 0 \\ 0 & \Lambda_b \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} B_a \\ (-\beta\ B_a + B_bD_a) \end{bmatrix}$$

$$\overline{C} = [(D_bC_a + C_b\beta)\ C_b] \qquad D = [D_a . D_b]$$

A partir do que foi escrito, podemos enunciar o seguinte teorema :

Teorema 2

Para que S seja CoE (Ob) é necessário mas insuficiente que S_a e S_b sejam CoE (Ob).

A demonstração deste teorema é a seguinte :

Se S_a é $\overline{\text{CoE}}$, pelo menos uma fila de B_a será zero, portanto S será $\overline{\text{CoE}}$. Inversamente, se S_a é CoE, nenhuma fila de B_a será zero.

Se S_b é $\overline{\text{CoE}}$ (pelo menos) uma fila de B_b será zero.

Isto implica que B_bD_a possuirá esta fila igual a zero, também β e portanto $-\beta\ B_a$.

Logo, é necessário que S_b seja CoE para ter a possibilidade da submatriz inferior de $\overline{B}$, não possuir filas nulas. Mas ainda sendo S_b CoE, a expressão $B_bD_a - \beta\ B_a$ da submatriz inferior possibilita a aparição de uma fila nula na submatriz inferior de $\overline{B}$.

A demonstração da parte Ob é dual, fazendo-se o mesmo raciocínio com a $\overline{C}$.

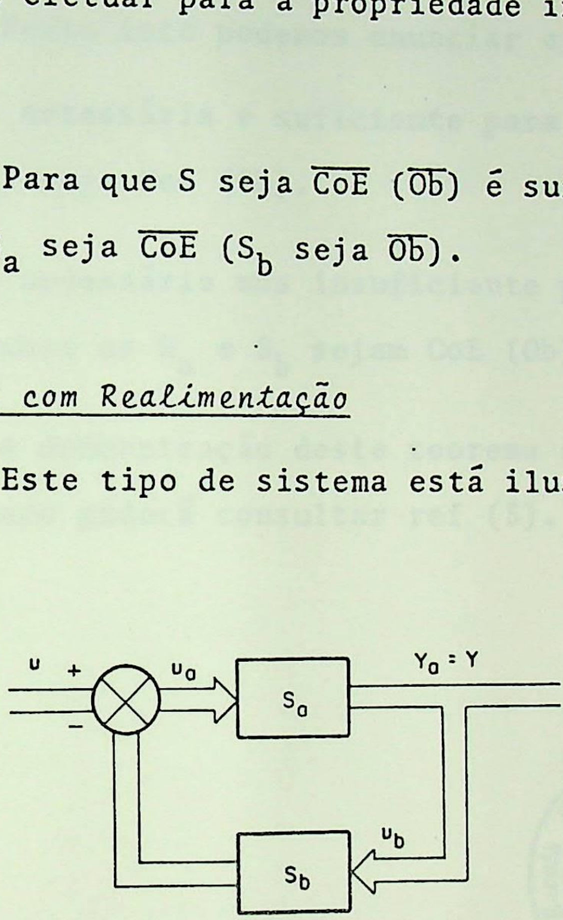
Estes raciocínios indicam que um enunciado mais preciso pode-se efetuar para a propriedade inversa :

Teorema 2

Para que S seja $\overline{CoE}$ ($\overline{Ob}$) é suficiente, mas desnecessário, que S_a seja $\overline{CoE}$ (S_b seja $\overline{Ob}$).

10.3 - Sistemas com Realimentação

Este tipo de sistema está ilustrado na figura abaixo.



Este sistema S quanto à ordem é idêntico aos anteriores ($n = n_a + n_b$).

Antes de introduzirmos a teoria a respeito deste sistema definiremos :

S_c = conexão em cascata de S_a seguido de S_b

S_o = conexão em cascata de S_b seguido de S_a

Dado que a realimentação altera os autovalores, não existem aqui relações simples entre λ_a e λ_b e os λ de S, e assumiremos que a matriz $(I + D_a D_b)$ é não singular, pois se não for, o ganho estático do sistema dado por $D = (I + D_a D_b)^{-1} D_a = D_a (I + D_b D_a)^{-1}$ não pode ser definido. (*)

Feito isto podemos enunciar o seguinte teorema :

1) Uma condição necessária e suficiente para que S seja CoE (Ob) é que S_c (S_o) seja CoE (Ob).

2) Uma condição necessária mas insuficiente para que S seja CoE (Ob) é que ambas as S_a e S_b sejam CoE (Ob).

A demonstração deste teorema será omitido aqui, o leitor interessado poderá consultar ref (5).

(*) Neste caso $D \neq 0$.

11 - CONTROLABILIDADE e OBSERVABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES VARIANTES

Nas definições básicas apresentadas na seção 5, nada é dito a respeito de que as "x" ou "y" que intervêm nelas pertençam a sistemas invariantes ou variantes. Assim sendo a Co e Ob de sistemas lineares variantes, podem ser baseadas nas mesmas definições 1 até 7.

A metodologia para se verificar a CoE, CoY, e Ob nesses sistemas é a mesma que para os sistemas invariantes, ou seja: determinar condições a partir do modelo de estado que agora se escreve como :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned} \tag{11.1}$$

e expressar essas condições como teoremas.

Assim sendo, não é preciso voltar a apresentar os desenvolvimentos com todo o detalhe, como foi feito para sistemas invariantes, conformando-se com a apresentação de um teorema para cada uma das características CoE, CoY, e Ob (para as suas demonstrações indicamos por exemplo (1), 7.5)

Teorema 1

Dado o sistema (11.1), ele será CoE em $t_o \leq t \leq t_f$ se e somente se a matriz W (t_o, t_f) dada por

$$W(t_o, t_f) = \int_{t_o}^{t_f} \Phi(t_o,t)\, B(t)B^*(t)\, \Phi^*(t_o,t)dt \tag{11.2}$$

for não singular.

Em (11.2), $\Phi(t_o,t) = \Phi^{-1}(t,t_o)$ e $\Phi(t,t_o)$ é a matriz de transição correspondente a A(t).

Nota

No caso de sistemas variantes, a matriz de transição não é mais em geral, obtida por exp (At) e nem sequer está garantido que ela poderá ser dada por expressões formulísticas , embora existam muitas situações particulares onde isto é possível.

Em geral $\Phi(t_o,t)$ pode-se expressar a partir de uma matriz fundamental do dado sistema, sendo esta qualquer matriz quadrada de ordem n que satisfaz a mesma equação de estado homogênea que o dado sistema.

Se $\Psi(t)$ é tal matriz então $\dot{\Psi}(t) = A(t)\ \Psi(t)$ e a matriz de transição se obtém como $\phi(t,t_o) = \Psi(t)\ \Psi^{-1}\ (t_o)$ (veja p. ex. (3),4.2). - Fim de nota.

O integrando de (11.2) permite-nos reconhecer a $W(t_o,t_f)$ como uma matriz de Gram (*), e assim sendo W só pode ser definida ou semi-definida positiva ((1), 7.2).

No primeiro caso W é não singular, no segundo, singular.

A importância desta observação baseia-se no fato de que tomada a $W\ (t_o,t_f)$, a não singularidade ou singularidade pode-se determinar, aplicando-se critérios existentes para veri-

(*) Uma matriz de Gram pode-se definir de várias formas equivalentes, sendo uma delas como o produto GG^* de uma matriz G (em geral retangular) por sua transposta conjugada. Aqui $G = \Phi B$.

ficar se a W é positiva definida ou não (veja ref (4) X.4).

<u>Teorema 2</u>

Dado o sistema (11.1), ele será CoY em $t_o \leq t \leq t_f$ se e só se a matriz $V(t_o,t_f)$ dada por

$$V(t_o,t_f) = \int_{t_o}^{t_f} C(t_f)\Phi\,(t_f,t)\; B(t)\; B^*(t)\; \Phi^*(t_f,t).C^*(t_f)dt$$

for não singular.

Observe-se que V é também uma matriz de Gram, e aplicam-se as mesmas observações formuladas no parágrafo precedente ao teorema.

<u>Teorema 2</u>

Dado o sistema (11.1), ele será Ob se e somente se a matriz $M(t_o,t_f)$ dada por

$$M(t_o,t_f) = \int_{t_o}^{t_f} \Phi^*(t,t_o)\; C^*(t)\; C(t)\Phi\,(t,t_o)\; dt \qquad (11.4)$$

for não-singular.

12 - RELAÇÃO ENTRE A CONTROLABILIDADE E A OBSERVABILIDADE

Nesta seção discutiremos a relação entre a controlabilidade e a observabilidade de sistemas dinâmicos.

A analogia aparente entre a controlabilidade e a observabilidade, pode ser expressa pelo princípio de dualidade que se deve a Kalman.

12.1 - *Princípio de Dualidade*

Considere o sistema S_1 definido por

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{12.1.1}$$

$$y = C(t)x \tag{12.1.2}$$

onde seus elementos foram dados na seção 11 e o sistema dual S_2 definido por :

$$\dot{z} = A^*(t)z + C^*(t)v$$

$$w = B^*(t)z$$

onde

z = n vetor (vetor de estado)

v = m vetor (vetor de controle)

w = r vetor (vetor de saída)

e o asterisco indica "transposta conjugada".

O princípio de dualidade estabelece que S_1 é de estado completamente controlável (observável) se e somente se o sistema S_2 for completamente observável (de estado completamente controlável).

Para verificar este princípio, escrevemos a condição necessária e suficiente para a CoE e a Ob de S_1 e S_2.

Para o sistema S_1 teremos :

1) S_1 será CoE se

$$\int_{t_o}^{t_1} \Phi(t,t_o)\; B(t)\; B^*(t)\; \Phi^*(t_o,t)\; dt$$

for não singular.

2) S_1 será Ob se

$$\int_{t_o}^{t_1} \Phi^*(t,t_o)\; C^*(t)\; C(t)\Phi\;(t,t_o)dt$$

for não singular

Para S_2 teremos :

1) S_2 será CoE se

$$\int_{t_1}^{t_o} \psi(t_o,t)\; C^*(t)\; C(t)\; \psi^*(t_o,t)dt$$

for não singular

2) S_2 será Ob se

$$\int_{t_1}^{t_o} \psi^*(t,t_o)\; B(t)\; B^*(t)\; \psi(t,t_o)dt$$

for não singular, onde: $\Phi(t,t_o)$ e $\psi(t,t_o)$ são as matrizes de transição de S_1 e S_2 respectivamente. Tais matrizes devem satisfazer as seguintes equações:

$$\frac{d}{dt} \; \Phi(t,t_o) = A(t) \; \Phi(t,t_o), \quad \Phi(t_o,t_o) = I$$

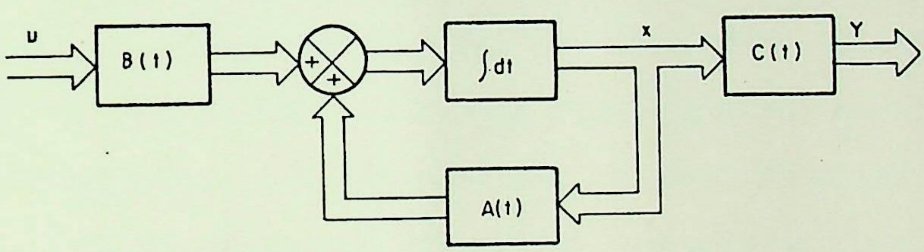
$$\frac{d\psi}{dt} (t,t_o) = A^*(t) \; \psi(t,t_o), \quad \psi(t_o t_o) = I$$

Como os sistemas S_1 e S_2 são adjuntos (veja (1). 7.2), as matrizes de transição estão relacionadas por :

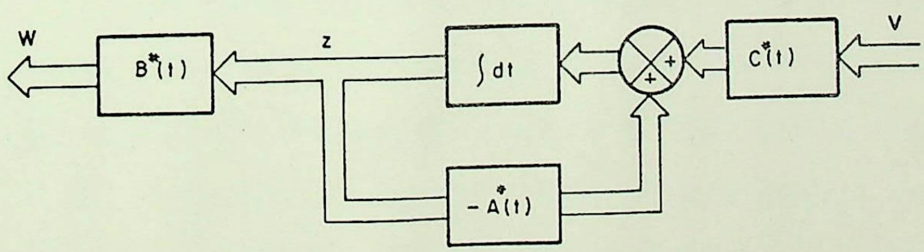
$$\psi^*(t,t_o) = \Phi^{-1}(t,t_o) = \Phi(t_o,t)$$

Pela simples comparação das condições de CoE e Ob de S_1 e S_2 poderemos constatar a veracidade do princípio de dualidade.

A figura ilustra os sistemas duais S_1 e S_2.



SISTEMA 1



Um importante ponto a considerar a respeito do princípio de dualidade é que um sistema limitado à saída pode ser convertido em um sistema limitado à entrada.

Assim, a solução do tempo mínimo de observação será idêntica à solução do tempo mínimo de controle.

Note que as propriedades de CoE e Ob de um sistema são invariantes em relação a uma transformação linear não singular.

13 - A IMPORTÂNCIA DAS Co e Ob - CONCLUSÕES

Para finalizar este trabalho surge-nos a seguinte pergunta: Qual é a importância dos conceitos expostos nele ?

As referências iniciais sobre eles foram devidas a Kalman, e apareceram em 1960.

A nosso conhecimento, a primeira publicação é (6) de abril desse ano, onde na seção 5, aparece tratada a controlabilidade em relação ao problema de controle ótimo.

Quase a seguir, vem o trabalho (7) (junho 27, a julho 7), e a partir de lá, os trabalhos sobre o tema multiplicam-se. A existência de Abstracts periódicos (veja por exemplo SCIENCE ABSTRACTS, section B - Electrical Engineering) nos exime de fazer uma listagem exaustiva sobre o tema.

Assim, desde o início, Co aparece vinculada ao problema de controle ótimo, já que parece natural que antes de se tentar controlar "otimamente" uma variável de estado, se averigua a respeito de que se é possível controlá-la (não otimamente).

O autor desta tese, é claro, é um estudante sobre o tema, e por isso acha conveniente sintetizar a opinião de pesquisadores e autores conhecidos, sobre o tema desta seção.

Começamos com (1), 7.6, porque começa relacionando Co e Ob com o controle ótimo. Ogata opina :

1) "Os conceitos de Co e Ob fornecem uma solução completa ao problema do regulador ótimo. As condições de independência linear para Co e Ob são de importância fundamental na análise e síntese de sistemas de controle multivariáveis.

A familiaridade com os conceitos de Co e Ob permite-nos formular problemas de controle significativos e efetuar as suposições necessárias (se for preciso alguma) no começo da análise.

2) Co e Ob são duais. Portanto, o problema da filtragem de Wiener pode ser considerado dual ao problema do regulador ótimo.

3) Os conceitos de Co e Ob esclarecem a relação entre o sistema dinâmico linear e a função de resposta ao impulso (ou a função de transferência)".

Passa-se agora para (8), onde citamos o já clássico resultado de Wonham sobre ré-locação de polos, nas palavras do próprio autor :

"A Co de um sistema de laço aberto é equivalente à possibilidade de destinar um conjunto arbitrário de polos à matriz transferência do sistema de laço fechado, formada por meio de uma adequada realimentação linear de estado".

Finalmente resumimos de (9) :

"Os conceitos de controlabilidade e de observabilidade são de particular importância no projeto de controladores realimentados e filtros lineares para sistemas estacionários lineares, em presença de perturbações gaussianas brancas.

É um fato importante que se o sistema é CoE então o sistema realimentado linear obtido usando a teoria de controle ótimo com um custo quadrático é assintoticamente estável".

(O conceito de Ob tem uma interpretação dual em termos de teoria de filtragem de Kalman, que foge ao escopo desta tese).

"Os conceitos de Co e Ob são também importantes , em relação com a construção de modelos matemáticos. Verdadeiramente, ainda querendo usar um modelo de espaço de estado para efetuar um projeto analítico, nós frequentemente partimos com um modelo entrada-saída que pode ter sido obtido experimentalmente.

Ao realizar o modelo de espaço de estado que produz a desejada relação entrada-saída nós poderemos resolver dois problemas ao mesmo tempo, requerendo para isto que esta realização seja mínima, isto é, que seja uma representação exata que não introduza nenhum fenômeno que não figure ainda que implicitamente na descrição entrada-saida.

Pois bem, sucede-se mais ou menos acidentalmente que essa minimalidade, está intimamente relacionada com o círculo de conceitos que incluem Co e Ob".

É interessante o esclarecimento dos autores de (9) acerca do vocábulo "acidentalmente" que aparece no parágrafo anterior :

"Não queremos implicar que não exista uma explicação intuitiva simples porque isto deve ser assim.

O que dizemos é que parece não haver nenhuma razão apriori porque a possibilidade de alcançar Co e Ob está relacionada com estes aspectos de construção de modelos".

Uma vez que já citamos nos parágrafos anteriores a importância da Co e da Ob, é interessante indicar que nem todos os autores concordam que estes conceitos tão comuns na moderna teoria de controle tenham realmente a importância atribuida pela maioria dos autores.

Como exemplo de opiniões diferentes achamos interessante transcrever o parágrafo final de (10) que sintetiza os argumentos desse paper (10) e outros anteriores nele referenciados :

"O preço principal pago pelos benefícios da realimentação, é que a velocidade de resposta dos laços de realimentação, tem que ser muito mais rápida que os do sistema considerado como um todo.

Em sistemas lineares invariantes, esta rápida velocidade de resposta está associada com as faixas de largura das funções de transmissão de laço. O real desafio da engenharia são os projetos de múltiplos laços e a exploração de variáveis internas que possam ser detectadas, com o fim de reduzir drasticamente as faixas de largura de transmissão de laço.

A moderna teoria de controle realimentado não tem respondido a este desafio.

Também, os conceitos de Co e Ob, que se tornaram "incontestáveis" na moderna teoria de controle, podem ser totalmente ignorados em projetos de controle de sistemas realimentados lineares invariantes, sempre que a incerteza paramétrica seja devidamente considerada, como deveria ser em qualquer teoria de sínteses competente".

Os autores de (10) tiveram por objetivo quando o escreveram a desmistificação do uso das variáveis de estado na resolução de problemas relacionados com representações matemáticas de sistemas.

Especificamente, em relação a controlabilidade , eles afirmam a não necessidade das variáveis de estado citando Chen (11) como resolvendo por métodos transferenciais problemas relacionados com Co.

Uma outra crítica que eles fazem as variáveis de estado, crítica esta que eles defendem literalmente, é o fato de que as saídas do sistema são na grande maioria dos casos funções contínuas no tempo, e não um conjunto de estados para algum instante, como é considerado no conceito de controlabilidade.

O autor desta tese, reconhece que não tem meios para contestar ou apoiar (10). No entanto, pela limitada experiência que tem na área de controle pode afirmar que particularmente considera pelo menos em princípio, o método de variáveis de estado na determinação da controlabilidade de representações matemáticas de sistemas, bastante válido porque a seu ver simplifica as equações matemáticas, e permite-nos encontrar métodos extremamente simples e entendíveis para obter resposta a certos problemas (p. ex. re-locação de polos, cuja possibilidade é fortemente dependente na controlabilidade da planta).

Por outro lado, a grande maioria dos autores que tratam do problema da controlabilidade de sistemas, resolvem o problema usando métodos que necessitam de variáveis de estado e usando métodos que não as necessitam. Uma vez que estes métodos são aplicados ao mesmo exemplo, e obtem os mesmos resultados, então podemos afirmar que pelo menos na literatura citada neste trabalho, o método de estado (incluindo Co-Ob) é tão ou até mais válido que o transferencial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) - K. Ogata - State Space Analysis of Control Systems - Prentice Hall Inc. - 1967.

(2) - J. Feinstein - Teoria de los Sistemas de Control: enfoque por variables de estado.

(3) - C.T. Chen - Introduction to a Linear System Theory - H.R.W. - 1970.

(4) - F.R. Gantmacher - The Theory of Matrices - Chelsea -1959.

(5) - E.G. Gilbert - Controllability and Observability in Multivariable Control Systems - J.S.I.A.M. Control - Series A, Vol. 2, Nº 1, 1963.

(6) - R.E. Kalman - Contributions to the Theory of Optimal Control - Boletin de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol 5, 2ª Serie, Nº 1, April, 1960 - PP 102 - 119.

(7) - R.E. Kalman - On the General Theory of Control Systems - Proc. of the 1 st. International Congress of Automatic Control, Moscow, 1960.

(8) - W.M. Wonhan - On pole assignement in multivariable controllable linear systems - IEEE - AC 12 Nº 6 Dec. 67 - PP 660/665.

(9) - J.C. Willens - S.K. Mitter - Controllability, Observability, Pole Allocation, and State Reconstruction - IEEE Trans. on AC - AC 16 Nº 6 Dec 1971 - PP 582/595.

(10) - I.M. Horowitz - U. Shaked - Superiority of Transfer Functions over State-Variable Methods in Linear Tima - Invariant System Design - IEEE Trans. on AC Vol AC-20 Nº 1, february, 1975 PP 84/97.

(11) - C.T. Chen, "Representations of linear time-invariant composite systems", IEEETrans. Automat. Contr., vol. AC-13, pp. 277 - 283, June 1968.