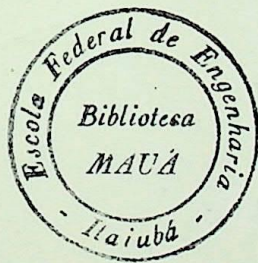


TESE

205

ANÁLISE DE CURTO-CIRCUITO
POR COMPONENTES dq0

ANÁLISE DE CURTO-CIRCUITO POR
COMPONENTES dq0.



ANÁLISE DE CURTO-CIRCUITO
POR COMPONENTES dq0

Trabalho apresentado como Te
se de Mestrado em Máquinas E
lêtricas, na Escola Federal
de Engenharia de Itajubã .

José Carlos de Oliveira

Itajubã - MG
1974

CL. 621.3.064.11621,313.322 (043.2)

CUI 048 a

TOMBO 205

ANEXO DE LIBRO-CIENCO
400 COMPONENTES 400

Trabajo presentado como Tg
de la Facultad de Ciencias
Físicas, en la Escuela Federal
de Experimentos de Física

José Carlos de Castro

Libro - 1971
1971

Agradecimientos

A Dios, por todo.

A Deus, por tudo.

A minha esposa e meus filhos ,
cujo apoio e resignação me per
mitiram atingir esta meta.

Ao professor Hêlio Mocarzel, a quem devo o despertar para esta área e a orientação deste trabalho, meu eterno reconhecimento.

Aos professores e funcionários do Departamento de Eletricidade, a quem devo a existência deste trabalho.

Agradeço, em especial, às senhoritas Sônia Faria, Jane Coli e Valdete Rezende, e ao desenhista Anchieta Guimarães.

PREFÁCIO

Ao tratarmos da máquina síncrona, devemos seguir um procedimento muito comum na engenharia moderna, que consiste em se estabelecer um modelo matemático do sistema, e, na base deste modelo, desenvolver análises referentes aos diversos estados de operação.

Para tanto, desenvolveremos, no capítulo I, os fundamentos da máquina síncrona trifásica, como um conjunto de bobinas acopladas, onde a natureza das auto e indutâncias mútuas é especificada como uma consequência lógica da geometria da máquina e das suposições ideais.

As relações básicas de um circuito elétrico serão, então, aplicadas e, os resultados conduzirão a uma série completa de equações, que seriam bastante incômodas para um contínuo manuseio, conforme será necessário nos desenvolvimentos. De modo a eliminarmos este problema, a transformação $dq0$ será introduzida neste ponto, correspondendo ao capítulo II deste trabalho. Sob o ponto de vista matemático, a transformação $dq0$ é meramente uma mudança linear de variáveis, porém, com igual importância, aparece o significado físico para a transformação. Este significado físico está relacionado fundamentalmente com a substituição do sistema estacionário do estator, por bobinas que no regime permanente, giram com a mesma velocidade do rotor. Assim sendo, o sistema de bobinas acopladas, cujas indutâncias antes dependiam da posição do rotor, passarão, agora, a comportar-se tal como se estivessem relati-

vamente estacionárias; em consequência disto teremos uma máquina idealizada cujos manuseios matemáticos e físico são radicalmente simplificados.

Considerando as vantagens já conhecidas dos Sistemas Por Unidade, no capítulo III faremos a sua apresentação, bem como, aplicação para a máquina em análise. Para a introdução deste tratamento, dividiremos o estudo em duas partes, abordando inicialmente, os valores por unidade das grandezas próprias das bobinas do estator e do rotor, sendo que nada de especial será acrescentado neste ponto. Entretanto, quando o problema da transformação atingir as grandezas envolvendo simultaneamente bobinas do estator e rotor, será apresentado um método que será responsável por uma igualdade entre todas as indutâncias mútuas estator-rotor, situadas sobre um mesmo eixo. Isto simplificará, ainda mais, as equações obtidas nos capítulos precedentes.

De posse do modelo, ou seja, das equações gerais aplicáveis à máquina, para qualquer condições de operação, partiremos para as particularizações das mesmas.

Inicialmente, desenvolveremos, no capítulo IV, toda a teoria pertinente à operação em regime permanente, com carga equilibrada. Neste ponto, serão introduzidas todas as simplificações cabíveis, resultando em um sistema de equações, que possibilitarão a obtenção das diversas informações desejadas para a operação correspondente. Serão então, analisados os problemas referentes às potências desenvolvidas e o diagrama vetorial, para a máquina de polos salientes.

A análise transitória será realizada no capítulo V, onde, ainda, não nos teremos preocupado com o problema do curto-circuito. Neste capítulo será analisado substancialmente o problema das respostas dos fluxos enlacados, para alterações processadas da tensão de alimentação do circuito de campo e, das correntes do estator. Serão então, definidas e conceituadas as diversas reatâncias e constantes de tempo, correspondentes à operação transitória, as quais serão de grande valia na análise do curto-circuito trifásico.

Finalmente, reunindo todos os elementos fornecidos pelos capítulos anteriores, passaremos ao objetivo do trabalho, que será tratado no capítulo VI, sob a denominação - *Análise do Curto-Circuito Trifásico*. Serão então, estudado detalhadamente o problema do curto-circuito trifásico, para a máquina cujos efeitos dos enrolamentos amortecedores podem ser desprezados. Consequentemente, as respostas transitórias que serão obtidas não se iniciarão pelo conhecido regime subtransitório, porém, pelo regime transitório. O motivo desta simplificação prende-se ao fato de que, sendo o objetivo deste trabalho, apresentar um método relativamente rigoroso para o desenvolvimento das equações das correntes de curto-circuito, a idéia estará formada, mesmo desprezando os efeitos dos citados enrolamentos.

Assim, de uma maneira geral, apresentamos todo o trabalho a ser desenvolvido, com o propósito de obtermos os resultados procurados.

Itajubá-MG, Dezembro de 1974

José Carlos de Oliveira

ÍNDICE

CAPÍTULO	SEÇÃO	PÁGINA
I	DESENVOLVIMENTO DE EQUAÇÕES BÁSICAS PARA AS MÁQUINAS SÍNCRONAS.	
	1.1 - Objetivo	1
	1.2 - Características Físicas da Máquina Síncrona	1
	1.3 - Fluxo e Fluxo Enlaçado	10
	1.4 - Enrolamento Amortecedor	15
	1.5 - Análise Matemática da Máquina Sín- crons	18
	1.5.1. Circuitos do Estator	18
	1.5.2. Circuitos do rotor	20
	1.5.3. Análise Matemática	23
	1.6 - Análise das auto e indutâncias Mú- tuas	28
	1.6.1. Estator	29
	1.6.2. Rotor	31
	1.6.3. Estator-rotor	31
II	TRANSFORMAÇÃO dq0	
	2.1 - Objetivo	33
	2.2 - Equações de Fluxos Transformados..	33
	2.3 - Equações de Tensões Transformadas.	39
	2.4 - Equações de Potência e Torques - Transformados	44
III	SISTEMAS POR UNIDADE	
	3.1 - Objetivo	46
	3.2 - Grandezas Base	46
	3.2.1. Quantidades Base do Estator	49
	3.2.3. Quantidades Base do Rotor .	53

CAPÍTULO	SEÇÃO	PÁGINA
IV	OPERAÇÃO EM REGIME PERMANENTE	
	4.1 - Objetivo	64
	4.2 - Operação em Regime Permanente	64
	4.2.1. Operação em circuito aberto	68
	4.2.2. Equações para o Estado Per manente - Diagrama Vetorial	71
	4.2.3. Efeito da Saturação	80
	4.2.4. Potências Ativa e Reativa .	85
V	OPERAÇÃO EM REGIME TRANSITÓRIO	
	5.1 - Objetivo	88
	5.2 - Circuito Equivalente	88
	5.3 - Métodos Operacionais	94
	5.4 - Reatâncias Transitória e Subtransi tória - Constantes de tempo da Mā quina	103
	- Resposta do fluxo ou da tensão - para alterações em \bar{e}_{fd}	105
	- Respostas dos fluxos ou das ten- sões para variações das corren- tes do estator. \bar{T}_d e/ou \bar{T}_q	114
VI	ANÁLISE DO CURTO-CIRCUITO TRIFÁSICO	
	6.1 - Objetivo	125
	6.2 - Teorema dos Fluxos Constantes	126
	6.3 - Aplicação do Teorema dos Fluxos - Constantes para curto-circuitos em māquinas síncronas	128
	6.4 - Curto-circuito trifásico para uma māquina síncrona cujas resistências e enrolamentos Amortecedores podem ser desprezados	133

CAPÍTULO	SEÇÃO	PAGINA
	- Máquina anteriormente a vazio	136
	- Máquina anteriormente em carga	140
6.5	- Efeito aproximado das resistências	146
6.6	- Representação Fasorial - Valores Eficazes das correntes de Curto Circuito	163
	CONCLUSÕES	176
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	181
	BIBLIOGRAFIA	181

SIMBOLOGIA

- A = área limitada por uma espira
 B = indução magnética
 e_{kd} = tensão ou fem instantânea do enrolamento amortecedor de ei xo direto
 e_{kq} = tensão ou fem instantânea do enrolamento amortecedor de ei xo em quadratura
 e_{fd} = tensão aplicada ao circuito de campo
 e_a, e_b, e_c = tensão ou fems referentes as fases a, b, e c, respectivamente
 e_d = tensão instantânea transformada ao sistema dq0, relativa a bobina de eixo direto
 e_q = tensão instantânea transformada ao sistema dq0, relativa a bobina de eixo em quadratura
 e_o = tensão instantânea transformada ao sistema dq0, relativa a bobina de sequência nula
 E = tensão interna permanente ou fem em regime permanente
 E'_q = componente de eixo em quadratura da tensão interna transitória.
 E' = tensão interna transitória
 E'_d = componente de eixo direto da tensão interna transitória
 f = frequência
 f_{mm} = força magneto-motriz
 i_{kd} = corrente instantânea na bobina amortecedora de eixo direto
 i_{kq} = corrente instantânea na bobina amortecedora de eixo em quadratura
 i_{fd} = corrente instantânea do enrolamento de campo
 i_a, i_b, i_c = correntes instantâneas referentes as fases a, b, e c, respectivamente.

- i_d = corrente instantânea transformada ao sistema dq0, relativa a bobina de eixo direto
 i_q = corrente instantânea transformada ao sistema dq0, relativa a bobina de eixo em quadratura.
 i_o = corrente instantânea transformada ao sistema dq0, relativa a bobina de sequência nula
 I = valor eficaz da corrente do estator
 I_m = valor máximo de uma corrente do estator
 $i_{a(\omega)}$ = componente de frequência fundamental da corrente de curto circuito da fase a
 $i_{a(DC)}$ = componente contínua da corrente de curto-circuito da fase a
 $i_{a(2\omega)}$ = componente de frequência dupla da corrente de curto-circuito da fase a
 $i_{a(\omega)}$ = módulo do fasor da componente de frequência fundamental
 $i_{a(DC)}$ = módulo do fasor da componente contínua
 $I_{a(2\omega)}$ = módulo do fasor da componente de frequência dupla
 I_a = módulo do fasor da corrente total.
 ℓ_{ii} = valor instantâneo da auto indutância da bobina i
 ℓ_{ij} = valor instantâneo da indutância mútua entre as bobinas i e j
 L_{ii} = valor máximo da auto-indutância da bobina i
 L_{ij} = valor máximo da indutância mútua entre as bobinas i e j
 L_d = indutância síncrona ou permanente relativa a bobina de eixo direto
 L_q = indutância síncrona ou permanente relativa a bobina de eixo em quadratura
 L_o = indutância relativa a bobina de sequência nula
 L_e = parcela de L_d e L_q , devido a fluxos de dispersão nas bobinas de eixo direto e em quadratura, respectivamente.

L_{ad} = parcela de L_d , devido a fluxo que se estabelece pelo circuito magnético do rotor, sendo denominado por indutância mútua estator/rotor de eixo direto

L_{aq} = parcela de L_q , devido a fluxo que se estabelece pelo circuito magnético do rotor sendo denominada por indutância mútua estator/rotor de eixo em quadratura.

L_{fd} = indutância de dispersão do campo

L_{kd} = indutância de dispersão do amortecedor de eixo direto

L_{kq} = indutância de dispersão do amortecedor de eixo em quadratura.

L'_d = indutância transitória de eixo direto

L''_d = indutância subtransitória de eixo direto

L'_q = indutância subtransitória de eixo em quadratura

L_{ffd} = auto indutância do campo

L_{kkd} = auto indutância do amortecedor de eixo direto

L_{kkq} = auto indutância do amortecedor de eixo em quadratura

N = número de espiras

p = potência instantânea total

P = potência ativa total

Q = potência reativa total

R = resistência dos enrolamentos do estator

R_{fd} = resistência do enrolamento de campo

R_{kd} = resistência do enrolamento amortecedor de eixo direto

R_{kq} = resistência do enrolamento amortecedor de eixo em quadratura

t = tempo

T = torque desenvolvido.

v = tensão instantânea nos terminais de uma fase em carga

V_m = valor máximo da tensão nos terminais de uma fase em carga

V = valor eficaz da tensão nos terminais de uma fase em carga

- X_d = reatância síncrona ou permanente de eixo direto
 X_q = reatância síncrona ou permanente de eixo em quadratura
 X'_d = reatância transitória de eixo direto
 X''_d = reatância subtransitória de eixo direto
 X''_q = reatância subtransitória de eixo em quadratura
 X_0 = reatância de sequência nula
 Z = impedância
 $Y(S)$ = corresponde a uma grandeza na condição de saturada
 $Y(NS)$ = corresponde a uma grandeza na condição de não-saturada
 $Y(S)$ = corresponde a uma grandeza definida em termos operacionais dos operadores Laplacianos
 $Y(DC)$ = componente contínua da grandeza
 $Y(S)$ = componente senoidal da grandeza
 $Y(C)$ = componente cossenoidal da grandeza
 $Y(0)$ = corresponde ao valor inicial da grandeza definida
 $Y(p)$ = valor da grandeza para o regime permanente
 $Y(L)$ = valor anterior da grandeza, estando a máquina em carga
 ψ = fluxo
 ψ_i = fluxo enlaçado, relativo a bobina i
 ψ_{kd} = fluxo enlaçado relativo a bobina amortecedora de eixo direto
 ψ_{kq} = fluxo enlaçado relativo a bobina amortecedora de eixo em quadratura
 ψ_{fd} = fluxo enlaçado relativo a bobina de campo
 ψ_d = fluxo enlaçado transformado ao sistema $dq0$, relativo a bobina de eixo direto.
 ψ_q = fluxo enlaçado transformado ao sistema $dq0$, relativo a bobina de eixo em quadratura.
 ψ_0 = fluxo enlaçado transformado ao sistema $dq0$, relativo a bobina de sequência nula.

τ'_{do} = constante de tempo transitória de campo, em circuito aberto.

τ''_{do} = constante de tempo subtransitória de campo, em circuito aberto.

τ''_{qo} = constante de tempo subtransitória de eixo em quadratura, em circuito aberto

τ_{kd} = constante de tempo do enrolamento amortecedor de eixo direto.

τ_{kq} = constante de tempo do enrolamento amortecedor de eixo em quadratura

τ'_d = constante de tempo transitória de curto-circuito, de eixo direto

τ''_d = constante de tempo subtransitória de curto circuito, de eixo direto.

τ''_q = constante de tempo subtransitória de curto-circuito, de eixo em quadratura

τ_a = constante de tempo de curto-circuito da armadura

γ = ângulo marcado a partir do centro da fase tomada como referência, que determina um ponto sobre o estator.

ω = pulsação angular

R = relutância magnética

ρ = permeância magnética

θ = posição angular do eixo direto, relativamente ao centro da fase a

θ_0 = posição inicial do eixo direto, relativamente ao centro da fase a

δ = ângulo de potência

ϕ = variável introduzida de modo a efetuar uma mudança do ângulo referência.

α, β = fatores de decremento

ÍNDICE

1.1 - OBJETIVO

Neste capítulo, procuraremos efetuar uma rápida revisão a respeito das principais idéias referentes às máquinas elétricas, focalizando de modo especial as partes que se relacionam no interior das máquinas e seus correspondentes circuitos equivalentes.

CAPITULO I

DESENVOLVIMENTO DE EQUAÇÕES BÁSICAS PARA MÁQUINAS SÍNCRONAS

As equações e as suas respectivas condições de aplicação para o estudo do funcionamento de uma máquina síncrona em condições de operação em regime permanente e transitório, estando que em cada caso sejam impostas as condições correspondentes.

Finalmente, todas as análises serão realizadas para as máquinas linearizadas, sendo que os efeitos de saturação serão oportunamente corrigidos.

1.2 - CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DE UMA MÁQUINA SÍNCRONA

No decorrer do livro, tomaremos como referência que trabalhar de introduzir equações envolvendo os fluxos que se desenvolvem no interior das máquinas, além de se separarem os componentes correspondentes, sendo que os efeitos de saturação

I - DESENVOLVIMENTO DE EQUAÇÕES BÁSICAS PARA AS MÁQUINAS SÍNCRONAS

1.1 - OBJETIVO

Neste capítulo, procuraremos efetuar uma rápida revisão a respeito dos principais tópicos referentes as máquinas síncronas, focalizando de modo especial as fmms que se desenvolvem no interior da máquina e seus correspondentes circuitos magnéticos.

Serão desenvolvidas equações das diversas induções em função da posição do rotor, as quais introduzidas nas expressões dos fluxos permitirão uma análise da máquina como um conjunto de bobinas acopladas.

As equações a serem deduzidas constituem um sistema geral que pode traduzir o funcionamento de uma máquina síncrona nas condições de operação em regime permanente e transitório, bastando que em cada caso sejam impostas as condições correspondentes.

Finalmente, toda a análise será realizada para a máquina linearizada, sendo que os efeitos de saturação serão oportunamente corrigidos.

1.2 - CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DE UMA MÁQUINA SÍNCRONA

No decorrer do texto, inúmeras vezes ter-se-á que trabalhar ou introduzir equações envolvendo os fluxos que se desenvolvem na citada máquina, além de os separarmos em componentes ortogonais, quando trabalharmos com os conhecidos

rotores de polos salientes. Assim sendo, procuraremos efetuar um estudo dos diversos fluxos, focalizando sobretudo as suas características físicas.

Inicialmente, a título de recordação, façamos uma rápida revisão a respeito da conceituação de :-

- ângulo mecânico;
- ângulo elétrico.

Para tal, tomemos a figura 1.1 indicando a disposição das bobinas do estator de uma máquina trifásica, bem como de um rotor de 2 polos ou 1 par de polos.

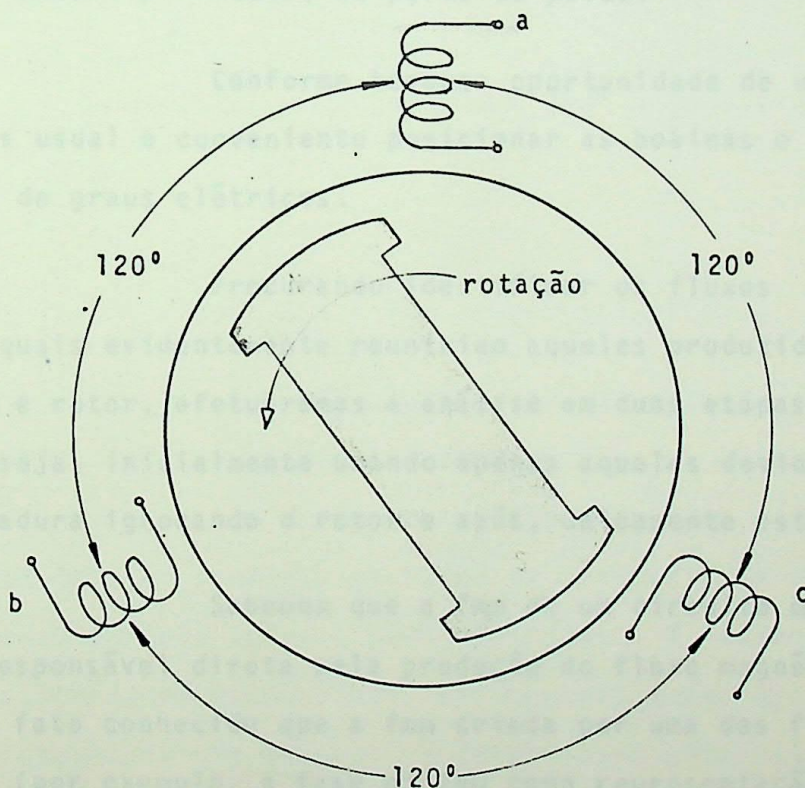


Fig. 1.1 - A máquina síncrona trifásica em sua concepção básica.

Neste caso, para a realização de um ciclo da fem gerada, ou seja, a complementação de 360° elétricos, o rotor deverá completar também um ângulo mecânico de 360° . Entretanto, se o rotor apresentar um número de pares de polos igual a 2, fato este acompanhado pela armadura que apresente cada fase com enrolamento em conjuntos correspondentemente múltiplos de bobinas, então o rotor descrevendo um ângulo mecânico de 180° , já teremos completo um ciclo elétrico. Assim, de um modo geral, a relação entre graus elétricos e mecânicos seria :-

$$\text{graus elétricos} = p \text{ (graus mecânicos)}$$

onde : p = número de pares de polos.

Conforme teremos oportunidade de verificar, é mais usual e conveniente posicionar as bobinas e polos em termos de graus elétricos.

Procurando identificar os fluxos existentes, os quais evidentemente reuniriam aqueles produzidos pelo estator e rotor, efetuaremos a análise em duas etapas distintas, ou seja, inicialmente usando apenas aqueles devido ao sistema armadura ignorando o rotor e após, unicamente este último.

Sabemos que a fmm de um circuito magnético é a responsável direta pela produção do fluxo magnético. É também fato conhecido que a fmm criada por uma das fases do estator (por exemplo, a fase α) tem como representação a figura 1.2, onde colocamos em ordenadas os valores da fmm, e, em abscissas as distâncias ao longo da periferia do estator retificado. No caso, indicamos a fmm criada apenas por uma das fa-

ses, as quais seriam constituídas de bobinas distribuídas pela carcaça da máquina.

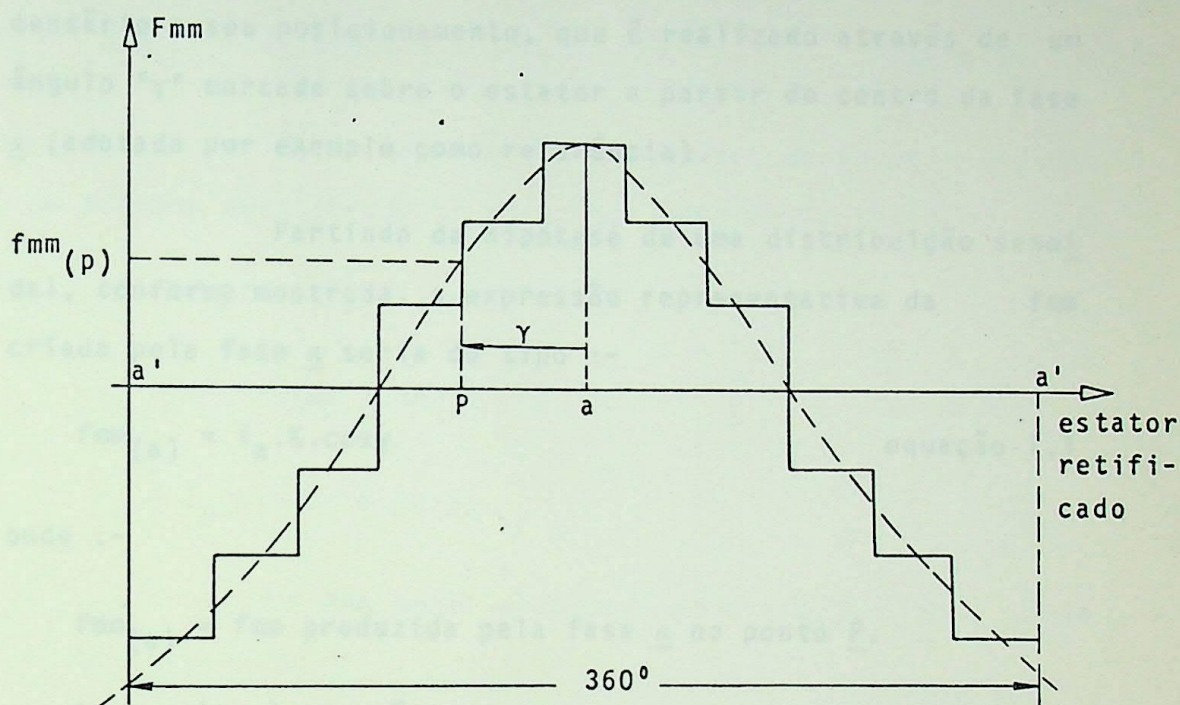


Fig. 1.2 - Fmm criada pela fase a.

É fácil conceber que aumentando-se o número de espiras da fase a, diminuiremos os *degraus* acima indicados, de modo que a partir de um certo número teremos a fmm com uma distribuição senoidal ao longo da periferia da armadura, que tem um período igual a 360° elétricos. É evidente que esta suposição, em termos reais não ocorre, sendo que o aspecto aproximado de uma senoide, é responsável pela existência de componentes harmônicos de fmm, o que nos leva a afirmar que o período anteriormente citado, corresponde àquele da onda fundamental. Na figura 1.2 temos ainda representada a senoide

que deve ser compreendida como indicando a distribuição da fmm ao longo da periferia da máquina. Assim se desejarmos saber qual a fmm em um ponto P qualquer do estator, torna-se necessário o seu posicionamento, que é realizado através de um ângulo " γ " marcado sobre o estator a partir do centro da fase a (adotado por exemplo como referência).

Partindo da hipótese de uma distribuição senoidal, conforme mostrada, a expressão representativa da fmm criada pela fase a seria do tipo :-

$$f_{mm}(a) = i_a \cdot K \cdot \cos \gamma \quad \text{equação 1.1}$$

onde :-

$f_{mm}(a)$ = fmm produzida pela fase a no ponto P .

i_a = valor instantâneo da corrente que se estabelece pela fase em pauta (que pode ter forma senoidal ou outra qualquer).

K = constante responsável pela uniformidade de unidades do primeiro e segundo membros.

γ = ângulo marcado a partir do centro de a , e, que determina um ponto P sobre a periferia; para o qual estamos determinando a fmm.

Como última interpretação para a distribuição obtida, deve-se ter sempre em mente que a onda não se propaga no espaço, mas sim, tem a amplitude variando com o tempo, pois i_a o tem. Em outras palavras, a onda da fmm criada por cada fase é do tipo pulsante no tempo.

Analogamente, para as fases b e c :-

$$f_{mm(b)} = i_b \cdot K \cdot \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{equação 1.2}$$

$$f_{mm(c)} = i_c \cdot K \cdot \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{equação 1.3}$$

Considerando que as bobinas do estator compõem um sistema equilibrado de correntes senoidais, então :-

$$i_a = I_m \cdot \text{sen}\omega t$$

$$i_b = I_m \cdot \text{sen}(\omega t - 2\pi/3) \quad \text{equações 1.4}$$

$$i_c = I_m \cdot \text{sen}(\omega t + 2\pi/3)$$

A fmm total produzida pelo estator, no ponto P, seria :-

$$f_{mm} = f_{mm(a)} + f_{mm(b)} + f_{mm(c)} \quad \text{equação 1.5}$$

Substituindo 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4, e usando das propriedades da trigonometria, a fmm produzida pela ação conjunta dos três enrolamentos do estator será dada pela equação a seguir.

$$f_{mm} = \frac{3}{2} \cdot K \cdot I_m \cdot \text{sen}(\omega t - \gamma) \quad \text{equação 1.6}$$

Esta equação mostra que a fmm produzida pelo estator de uma máquina síncrona corresponde a uma onda que se propaga através da armadura com uma velocidade igual a síncrona. Isto nos permite afirmar que em condições normais de ope

ração, com as bobinas da parte estacionária da máquina sendo percorridas por correntes equilibradas, a fmm permanece relativamente estacionária ao rotor. A figura 1.3 representa tal efeito.

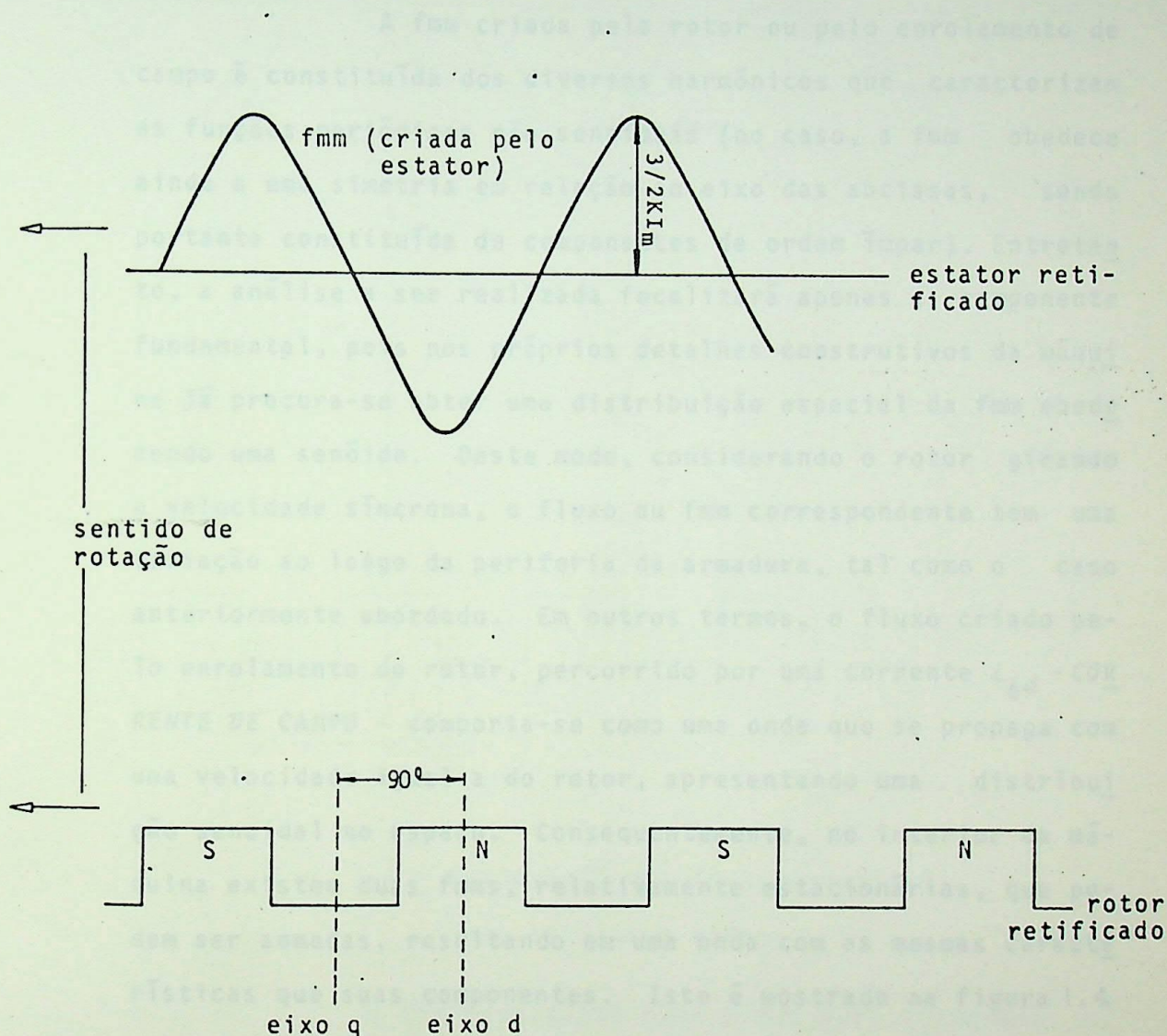


Fig. 1.3 - Propagação da onda de fmm produzida pelo estator.

Dois termos que serão largamente utilizados no desenvolvimento do assunto, correspondem a *EIXO DIRETO* (eixo d) e *EIXO EM QUADRATURA* (eixo q), sendo os mesmos evidencia-

dos na figura 1.3, e, devendo-se constatar que o primeiro compreende o centro de um polo norte, ao passo que o eixo q está adiantado de 90° elétricos, no sentido da rotação.

A fmm criada pelo rotor ou pelo enrolamento de campo é constituída dos diversos harmônicos que caracterizam as funções periódicas não senoidais (no caso, a fmm obedece ainda a uma simetria em relação ao eixo das abcissas, sendo portanto constituída de componentes de ordem ímpar). Entretanto, a análise a ser realizada focalizará apenas a componente fundamental, pois nos próprios detalhes construtivos da máquina já procura-se obter uma distribuição espacial da fmm obedecendo uma senóide. Deste modo, considerando o rotor girando a velocidade síncrona, o fluxo ou fmm correspondente tem uma variação ao longo da periferia da armadura, tal como o caso anteriormente abordado. Em outros termos, o fluxo criado pelo enrolamento do rotor, percorrido por uma corrente i_{fd} - CORRENTE DE CAMPO - comporta-se como uma onda que se propaga com uma velocidade igual a do rotor, apresentando uma distribuição senoidal no espaço. Consequentemente, no interior da máquina existem duas fmm's, relativamente estacionárias, que podem ser somadas, resultando em uma onda com as mesmas características que suas componentes. Isto é mostrado na figura 1.4

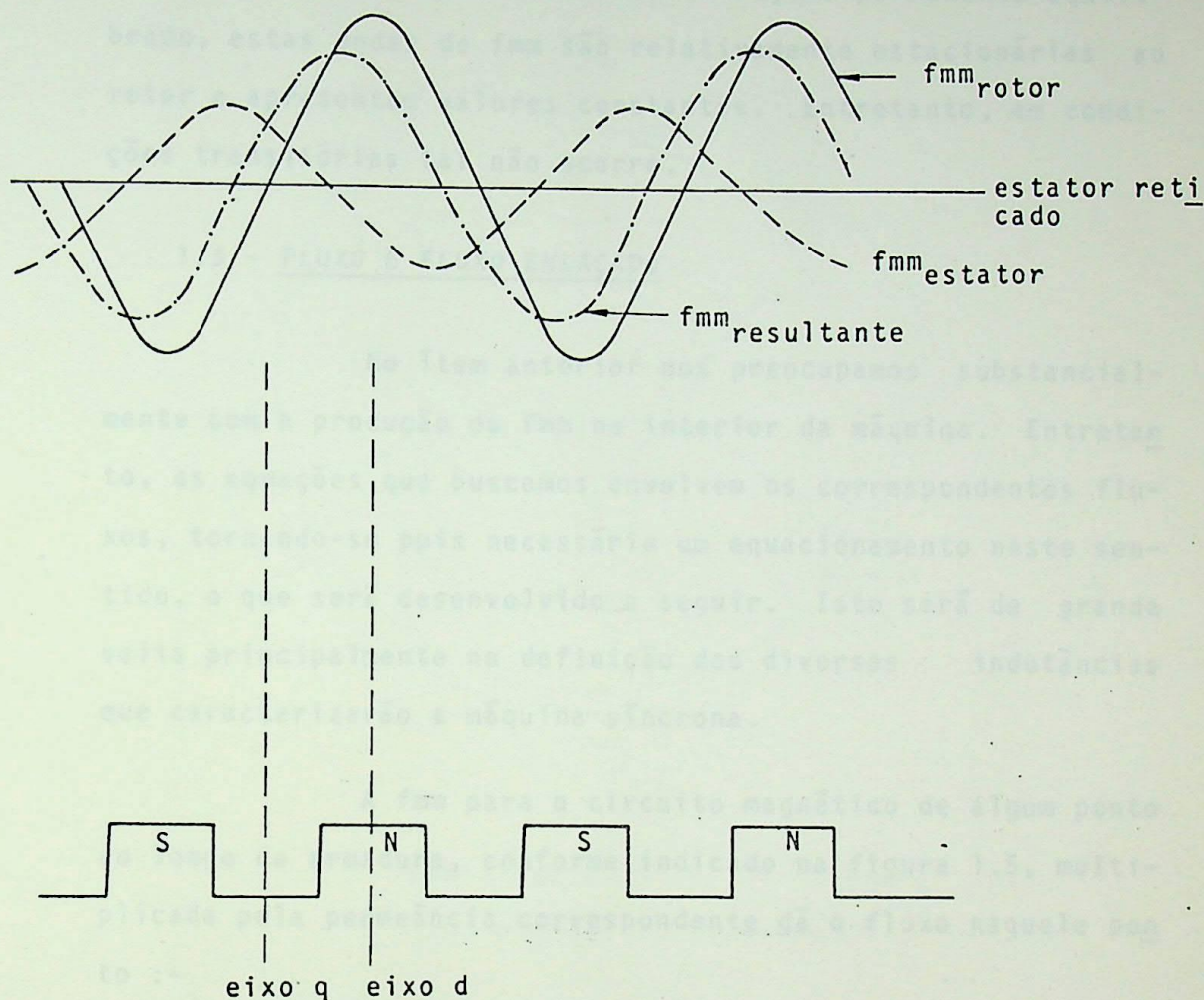


Fig. 1.4 - Composição das fmm's produzidas pelo estator e rotor.

A fmm resultante pode ainda ser decomposta em duas ondas com as mesmas características físicas, porém defasadas de 90° elétricos, uma apresentando o valor de pico positivo no alinhamento do eixo q e a outra, no eixo d. A componente que apresenta o pico coincidente com o eixo q é denominada f_{mm} de eixo q ou f_{mm_q} e aquela que coincide com o eixo d é conhecida por f_{mm} de eixo d ou f_{mm_d} . É importante salien

tar que, para operação em estado ou regime permanente equilibrado, estas ondas de fmm são relativamente estacionárias ao rotor e apresentam valores constantes. Entretanto, em condições transitórias tal não ocorre.

1.3 - FLUXO E FLUXO ENLAÇADO

No ítem anterior nos preocupamos substancialmente com a produção da fmm no interior da máquina. Entretanto, as equações que buscamos envolvem os correspondentes fluxos, tornando-se pois necessário um equacionamento neste sentido, o que será desenvolvido a seguir. Isto será de grande valia principalmente na definição das diversas indutâncias que caracterizarão a máquina síncrona.

A fmm para o circuito magnético de algum ponto ao longo da armadura, conforme indicado na figura 1.5, multiplicada pela permeância correspondente dá o fluxo naquele ponto :-

$$\rho = \frac{\phi}{f_{mm}}$$

equação 1.7

onde :-

ρ = permeância;

ϕ = fluxo em webers;

fmm = força magneto-motriz em Ampere-espiras.

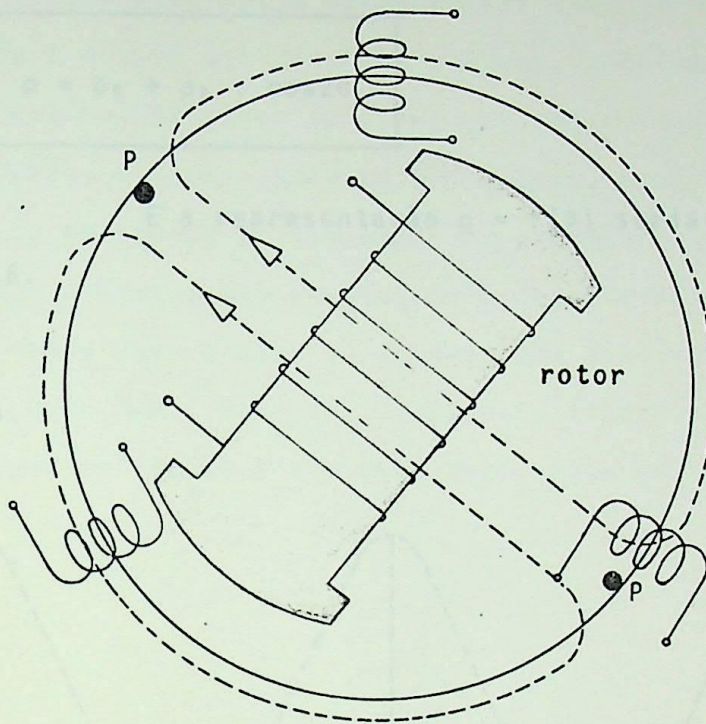


Fig. 1.5 - Conceituação do circuito magnético que define a permeância.

A respeito da fmm, no ítem anterior já analisamos detalhadamente, resta-nos agora efetuar um estudo da variação da permeância para um circuito do estator. Naturalmente, a permeância magnética em P para máquinas de polos salientes varia com a posição do rotor, visto a variação do entre-ferro. Assim, poder-se-á levantar uma curva relacionando em ordenadas o valor da permeância para um ponto P e em abcissas, uma grandeza representativa da posição do rotor: chamando de θ o ângulo existente entre o polo norte do rotor (eixo d) e o ponto P, a equação para a permeância será do tipo :-

$$\rho = \rho_0 + \rho_2 \cdot \cos 2\theta$$

equação 1.8

E a representação $\rho = f(\theta)$ seria dada pela figura 1.6.

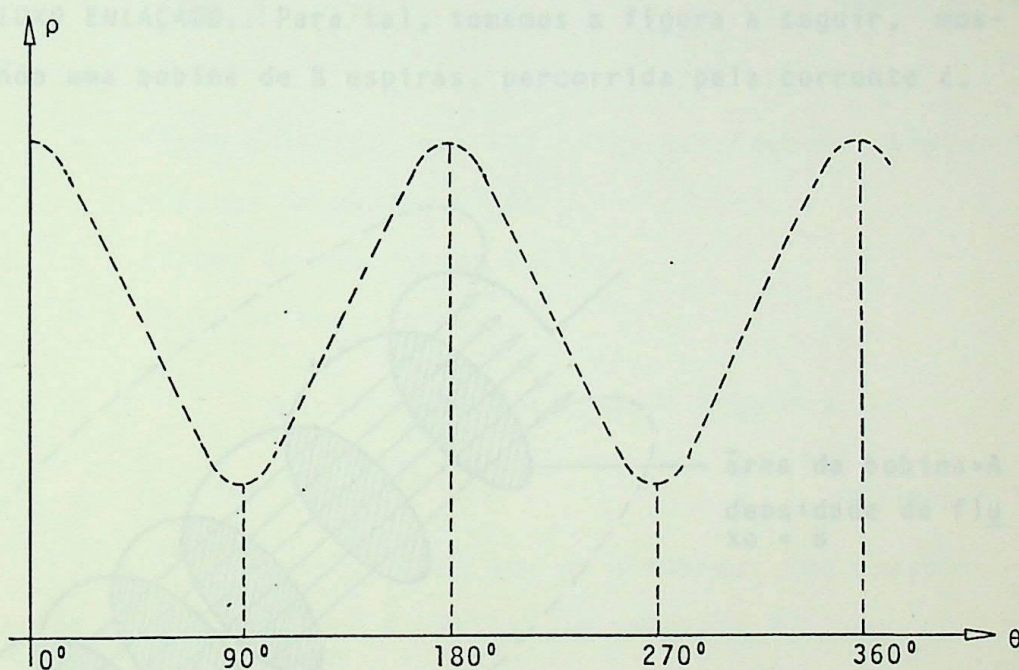


Fig. 1.6 - Variação da permeância de um circuito do estator com a posição do rotor.

É natural que tenhamos a representação acima pois quando os polos norte ou sul do rotor estão coincidentes com o ponto P, a relutância será mínima ($\theta = 0^\circ = 180^\circ = 360^\circ$) aumentando gradativamente de valor até que o máximo é atingido, isto quando o entre-ferro é também máximo ($\theta = 90^\circ = 270^\circ$).

Estas considerações são de relevante importân-

cia, pois, as análises a serem feitas incluirão indutâncias próprias e mútuas das diversas bobinas. Realmente, a indutância de uma bobina sendo definida por uma relação entre o fluxo produzido e a correspondente corrente, pode ser colocada em função do número de espiras e da permeância do circuito magnético. Antes, entretanto, de escrevermos as equações de fluxo, temos necessidade de efetuar uma distinção entre *FLUXO* e *FLUXO ENLAÇADO*. Para tal, tomemos a figura a seguir, mostrando uma bobina de *N* espiras, percorrida pela corrente *i*.

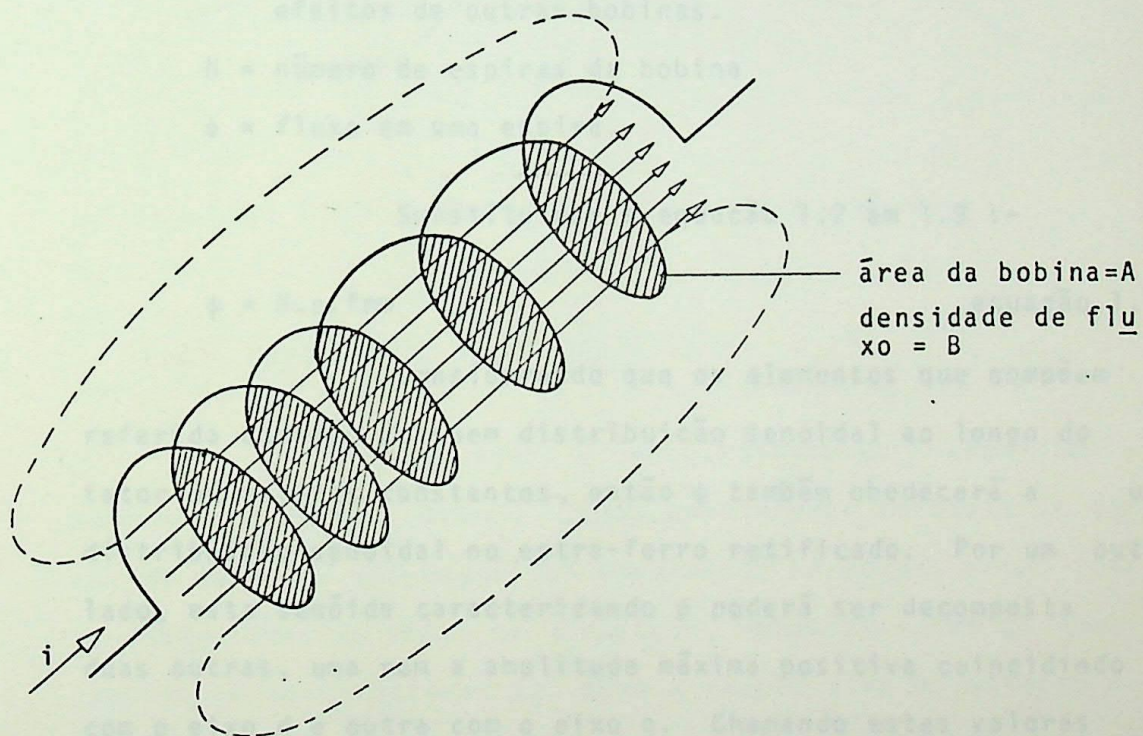


Fig. 1.7 - Conceituação de fluxo enlaçado.

As espiras de área *A* sendo cortadas por linhas de indução de densidade igual a *B*, originam em cada uma, um fluxo magnético ou quantidade de linhas de indução que cortam a área *A*, dada por :-

$$\phi = B.A$$

Se entretanto considerarmos duas espiras de mesma área, o fluxo total será igual a 2ϕ . De modo a generalizar, para uma bobina constituída de N espiras, o fluxo total será $N.\phi$, sendo que a este fluxo total atribuímos a designação-**FLUXO ENLAÇADO**, o qual será dado por :-

$$\psi = N.\phi \quad \text{equação 1.9}$$

onde :-

ψ = fluxo enlacado, que nos casos mais gerais, englobará efeitos de outras bobinas.

N = número de espiras da bobina

ϕ = fluxo em uma espira.

Substituindo a equação 1.7 em 1.9 :-

$$\psi = N.p.fmm \quad \text{equação 1.10}$$

Considerando que os elementos que compõem a referida equação possuem distribuição senoidal ao longo do estator ou valores constantes, então ψ também obedecerá a uma distribuição senoidal no entre-ferro retificado. Por um outro lado, esta senóide caracterizando ψ poderá ser decomposta em duas outras, uma com a amplitude máxima positiva coincidindo com o eixo d e outra com o eixo q . Chamando estes valores de ψ_d e ψ_q , temos que os mesmos são constantes para a operação em regime permanente, entretanto, alteram de valor desde que haja uma velocidade relativa entre os campos produzidos pelo rotor e estator. A figura 1.8 ilustra o exposto.

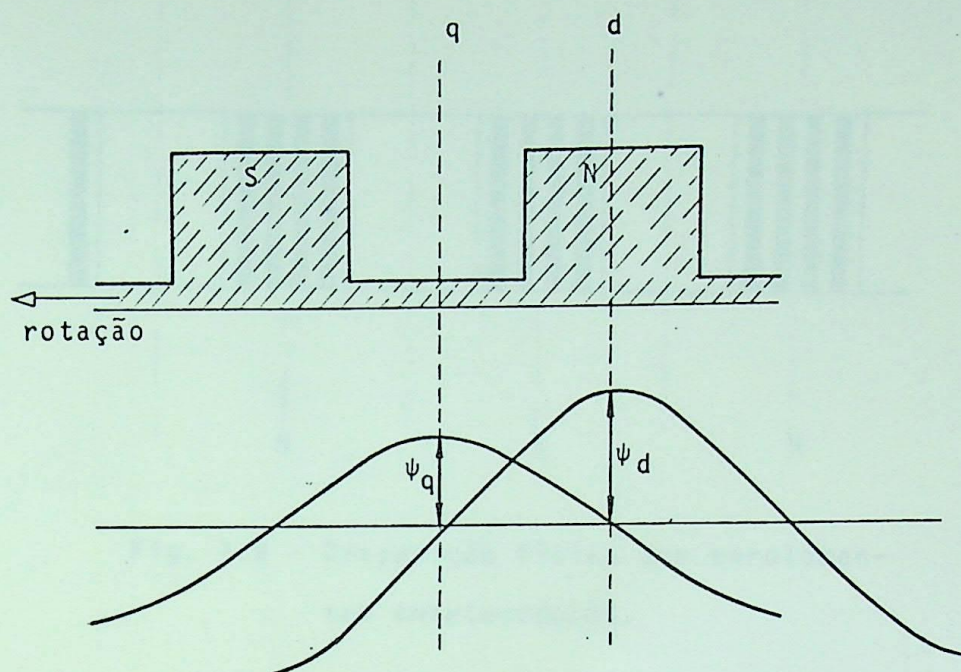


Fig. 1.8 - Componentes de eixo d e q do fluxo enlaçado.

1.4 - ENROLAMENTO AMORTECEDOR

Vejamos agora a representação do enrolamento amortecedor de uma máquina. Este enrolamento consiste de barras de material não-magnético envolvendo os polos, sendo curto-circuitadas em ambos os terminais, formando então um enrolamento curto-circuitado tal como a *gaiola* para os motores de indução. Este enrolamento é uma característica de algumas máquinas de polos salientes, pois as de polos lisos têm o efeito desejado de amortecedor, produzido pelas correntes parasitas que se desenvolvem no rotor.

Retificando-se a periferia cilíndrica do rotor, os enrolamentos amortecedores apareceriam como :-

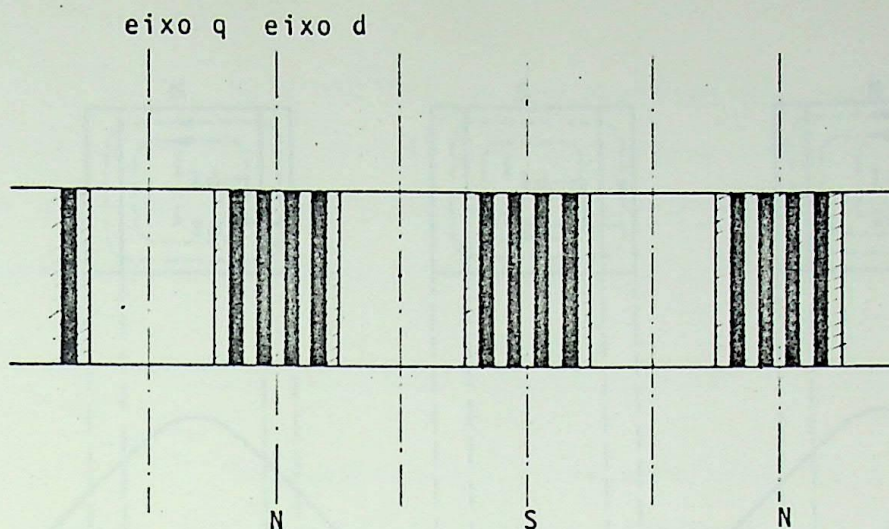


Fig. 1.9 - Disposição física dos enrolamentos amortecedores.

Em condições transitórias, quando são induzidas correntes nos enrolamentos em pauta, as mesmas, circulando pelas diversas malhas existentes, criam um fluxo ϕ que por sua vez pode ser decomposto em duas componentes, uma de eixo direto (ϕ_d) e outra em quadratura (ϕ_q). Isto equivale a dividirmos as correntes de malha que se estabelecem, em dois grupos :-

i_{kd} - responsável por ϕ_d .

i_{kq} - responsável por ϕ_q .

As figuras a seguir mostram tais correntes bem como os correspondentes fluxos, e deve-se ter em mente que em bora tenhamos feito figuras separadas, os efeitos existem simultaneamente. Deve-se também observar que os sentidos adotados são totalmente arbitrários.

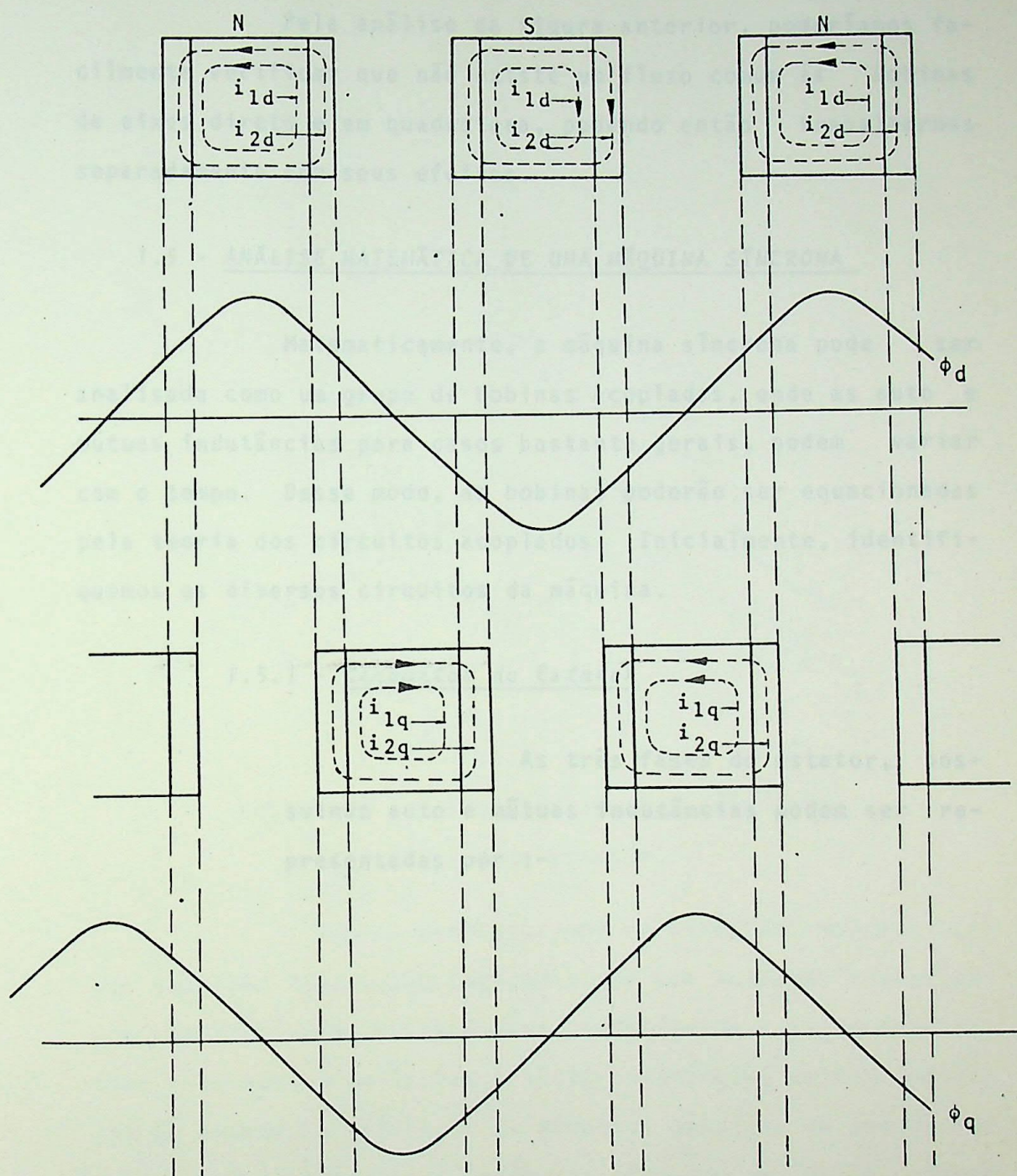


Fig. 1.10 - Decomposição do fluxo produzido pelos enrolamentos amortecedores.

Pela análise da figura anterior, poderíamos facilmente verificar que não existe um fluxo comum às bobinas de eixos direto e em quadratura, podendo então trabalharmos separadamente com seus efeitos.

1.5 - ANÁLISE MATEMÁTICA DE UMA MÁQUINA SÍNCRONA

Matematicamente, a máquina síncrona pode ser analisada como um grupo de bobinas acopladas, onde as auto e mútuas indutâncias para casos bastante gerais, podem variar com o tempo. Desse modo, as bobinas poderão ser equacionadas pela teoria dos circuitos acoplados. Inicialmente, identifiquemos os diversos circuitos da máquina.

1.5.1 - Circuitos do Estator

As três fases do estator, possuindo auto e mútuas indutâncias podem ser representadas por :-

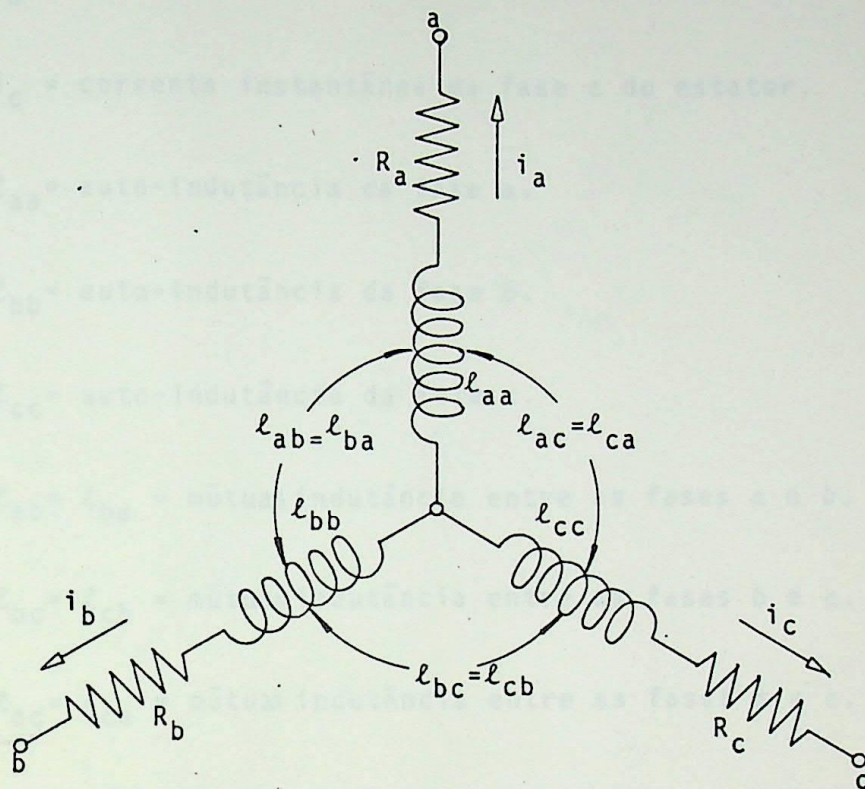


Fig. 1.11 - Circuito equivalente às três fases do estator.

Vemos, portanto, que os circuitos representativos das três fases, são indicados por uma estrela equivalente, constituída de resistências, indutâncias e mútuas indutâncias. As auto-indutâncias e mútuas indutâncias sofrem influência do estado de saturação da máquina, bem como da posição do rotor (polos salientes); então, os símbolos usados se referem às indutâncias variáveis, representando seus valores para uma determinada condição de funcionamento e posição do rotor.

Na figura 1.11 :-

i_a = corrente instantânea da fase a do estator.

i_b = corrente instantânea da fase b do estator.

i_c = corrente instantânea da fase c do estator.

ℓ_{aa} = auto-indutância da fase a .

ℓ_{bb} = auto-indutância da fase b .

ℓ_{cc} = auto-indutância da fase c .

$\ell_{ab} = \ell_{ba}$ = mútuas indutância entre as fases a e b .

$\ell_{bc} = \ell_{cb}$ = mútuas indutância entre as fases b e c .

$\ell_{ac} = \ell_{ca}$ = mútuas indutância entre as fases a e c .

R_a = resistência total da fase a .

R_b = resistência total da fase b .

R_c = resistência total da fase c .

1.5.2 - Circuitos do Rotor

Facilmente, verifica-se que as bobinas de campo estão alinhadas sobre o eixo d , portanto ao nos referirmos ao circuito equivalente do enrolamento de campo, é suficiente o traçado do sistema correspondente a figura 1.12.

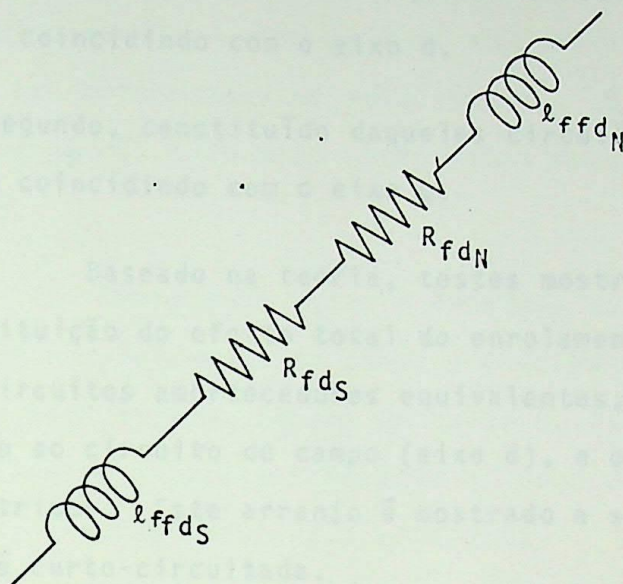


Fig. 1.12 - Circuito equivalente ao rotor.

Onde na figura anterior, temos agrupados os efeitos dos polos norte e sul. Reunindo as indutâncias e resistências, teríamos :-

L_{fd} = auto-indutância total do circuito de campo.

R_{fd} = resistência total do circuito de campo.

Embora existam, não foram mostradas na figura, as mútuas indutâncias entre o campo e os outros circuitos.

Em se tratando dos enrolamentos amortecedores do rotor, o problema torna-se mais complicado.

Tal como foi realizado, apesar de alguma aproximação, separamos os circuitos constituindo enrolamentos amor

tecedores, em dois grupos :-

- Um primeiro, constituído daqueles circuitos que têm seu eixo coincidindo com o eixo d.
- Um segundo, constituído daqueles circuitos que têm seu eixo coincidindo com o eixo q.

Baseado na teoria, testes mostraram que é válida a substituição do efeito total do enrolamento amortecedor, por dois circuitos amortecedores equivalentes; um deles alinhado junto ao circuito de campo (eixo d), e outro, deslocado de 90° elétricos. Este arranjo é mostrado a seguir, onde cada bobina é curto-circuitada.

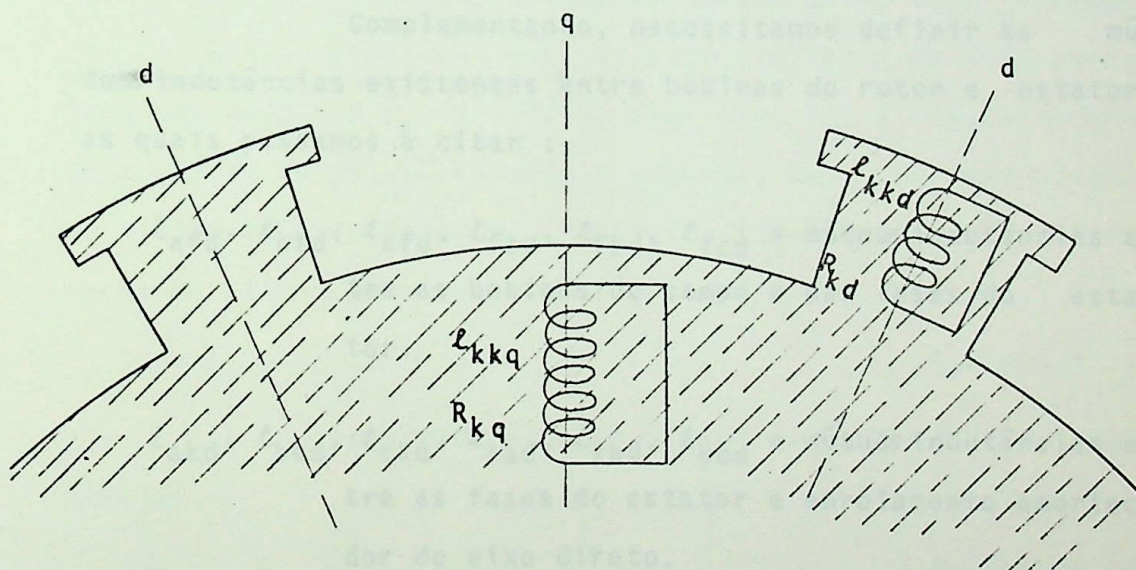


Fig. 1.13 - Circuitos equivalentes do enrolamento amortecedor.

Tal como para máquinas de polos salientes, o efeito total das correntes induzidas na massa do rotor das máquinas de polos lisos, pode ser representado por duas bobinas idênticas indicadas na figura apresentada.

Cada uma das bobinas apresenta uma auto-indutância (l_{kkd} ou l_{kkq}), onde kk designa o enrolamento amortecedor e o outro índice o eixo ao qual se refere, o mesmo ocorrendo com as correspondentes resistências. É evidente que o coeficiente de mútua-indução entre estas duas bobinas terá um valor nulo.

Analisando agora o problema das mútuas indutâncias, entre o enrolamento de campo e o correspondente ao amortecedor de eixo direto, haverá um valor de l_{kfd} . Entretanto, entre o primeiro e aquele referente ao amortecedor de eixo em quadratura, a mútua indutância será nula.

Complementando, necessitamos definir as mútuas indutâncias existentes entre bobinas do rotor e estator, as quais passamos a citar :-

$l_{afd}, l_{bfd}, l_{cfd}, l_{fad}, l_{fbd}, l_{fcd}$ = mútuas indutâncias entre as bobinas de campo e das fases do estator.

$l_{akd}, l_{bkd}, l_{ckd}, l_{kad}, l_{kbd}, l_{kcd}$ = mútuas indutâncias entre as fases do estator e enrolamento amortecedor de eixo direto.

$l_{akq}, l_{bkq}, l_{ckq}, l_{kaq}, l_{kbq}, l_{kcq}$ = mútuas indutâncias entre as fases do estator e enrolamento amortecedor de eixo em quadratura.

1.5.3 - Análise Matemática

Seja a figura 1.14, indicando na sua concepção mais simples, o acoplamento magnético entre dois circuitos.

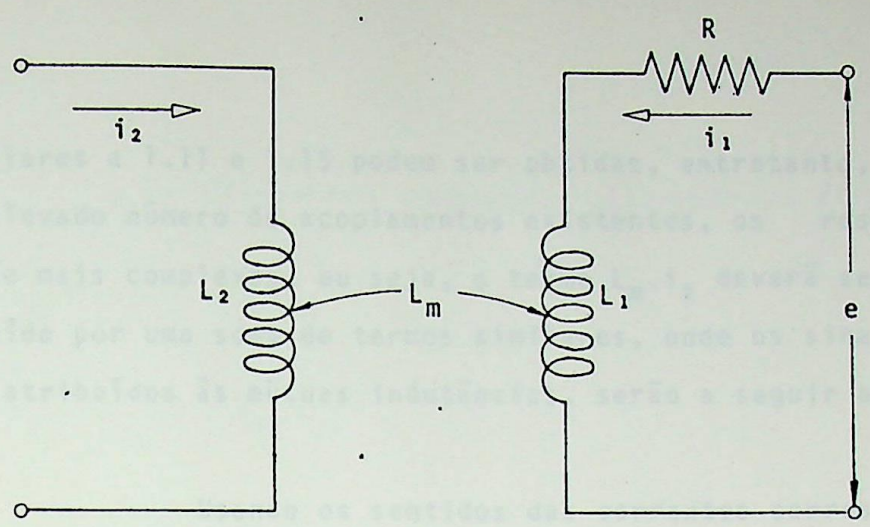


Fig. 1.14 - Acoplamento magnético.

Para o circuito anterior, podemos escrever :-

$$e = \frac{d\psi}{dt} + i_1.R \quad \text{equação 1.11}$$

Sendo ψ um fluxo produzido pelas duas correntes, i_1 e i_2 . É natural que possamos dividir ψ em duas parcelas, uma primeira ψ_m , devido ao efeito de i_2 , e, representando o efeito de mútua indução; a segunda, ψ_1 , corresponderia ao efeito de auto-indução. Portanto, não levando em consideração os sinais de ambas as parcelas :-

$$\psi = \psi_m + \psi_1 \quad \text{equação 1.12}$$

Lembrando das definições de auto e mútuas induções :-

$$\psi_m = L_m i_2 \quad \text{equação 1.13}$$

$$\psi_1 = L_1 i_1 \quad \text{equação 1.14}$$

Assim :-

$$\psi = L_m \cdot i_2 + L_1 \cdot i_1$$

equação 1.15

Para o caso das máquinas síncronas, equações

similares a 1.11 e 1.15 podem ser obtidas, entretanto, devido ao elevado número de acoplamentos existentes, os resultados serão mais complexos, ou seja, o termo $L_m \cdot i_2$ deverá ser substituído por uma soma de termos similares, onde os sinais a serem atribuídos às mútuas indutâncias, serão a seguir analisados.

Usando os sentidos das correntes correspondentes à convenção de gerador, para a máquina indicada na figura 1.15, com um enrolamento amortecedor em cada eixo, temos :-

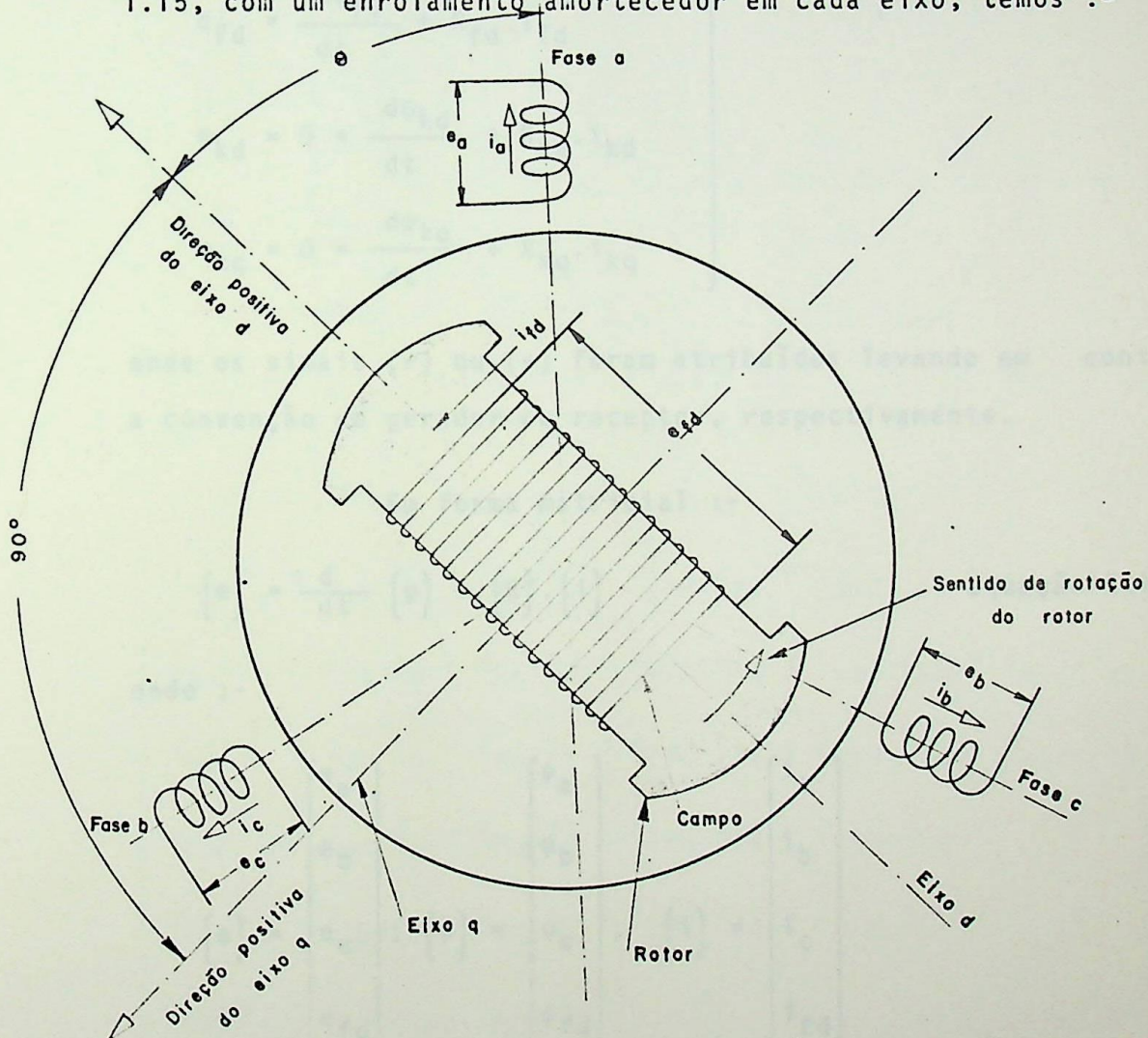


Fig. 1.15 - Convenções de correntes e tensões para a máquina síncrona.

Utilizando a equação 1.11, podemos escrever :-

$$\left. \begin{aligned}
 e_a &= \frac{d\psi_a}{dt} - R_a \cdot i_a \\
 e_b &= \frac{d\psi_b}{dt} - R_b \cdot i_b \\
 e_c &= \frac{d\psi_c}{dt} - R_c \cdot i_c \\
 e_{fd} &= \frac{d\psi_{fd}}{dt} + R_{fd} \cdot i_{fd} \\
 e_{kd} &= 0 = \frac{d\psi_{kd}}{dt} + R_{kd} \cdot i_{kd} \\
 e_{kq} &= 0 = \frac{d\psi_{kq}}{dt} + R_{kq} \cdot i_{kq}
 \end{aligned} \right\} \text{equações 1.16}$$

onde os sinais (-) ou (+) foram atribuídos levando em conta a convenção de gerador ou receptor, respectivamente.

Em forma matricial :-

$$\begin{bmatrix} e \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \end{bmatrix} \quad \text{equação 1.17}$$

onde :-

$$\begin{bmatrix} e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_{fd} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_{fd} \\ \psi_{kd} \\ \psi_{kq} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_{fd} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{pmatrix} -R_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{fd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{kd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{kq} \end{pmatrix}$$

$$[\psi] = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_{fd} \\ \psi_{kd} \\ \psi_{kq} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -l_{aa} \cdot i_a + l_{ab} \cdot i_b + l_{ac} \cdot i_c + l_{afd} \cdot i_{fd} + l_{akd} \cdot i_{kd} + l_{akq} \cdot i_{kq} \\ l_{ba} \cdot i_a - l_{bb} \cdot i_b + l_{bc} \cdot i_c + l_{bfd} \cdot i_{fd} + l_{bkd} \cdot i_{kd} + l_{bkq} \cdot i_{kq} \\ l_{ca} \cdot i_a + l_{cb} \cdot i_b - l_{cc} \cdot i_c + l_{cfd} \cdot i_{fd} + l_{ckd} \cdot i_{kd} + l_{ckq} \cdot i_{kq} \\ -l_{fad} \cdot i_a - l_{fbd} \cdot i_b - l_{fcd} \cdot i_c + l_{ffd} \cdot i_{fd} + l_{fkd} \cdot i_{kd} + 0 \\ -l_{kad} \cdot i_a - l_{kbd} \cdot i_b - l_{kcd} \cdot i_c + l_{kfd} \cdot i_{fd} + l_{kkd} \cdot i_{kd} + 0 \\ -l_{kaq} \cdot i_a - l_{kbq} \cdot i_b - l_{kcq} \cdot i_c + 0 + 0 + l_{kkq} \cdot i_{kq} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} -l_{aa} & l_{ab} & l_{ac} & l_{afd} & l_{akd} & l_{akq} \\ l_{ba} & -l_{bb} & l_{bc} & l_{bfd} & l_{bkd} & l_{bkq} \\ l_{ca} & l_{cb} & -l_{cc} & l_{cfd} & l_{ckd} & l_{ckq} \\ -l_{fad} & -l_{fbd} & -l_{fcd} & l_{ffd} & l_{fkd} & 0 \\ -l_{kad} & -l_{kbd} & -l_{kcd} & l_{kfd} & l_{kkd} & 0 \\ -l_{kaq} & -l_{kbq} & -l_{kcq} & 0 & 0 & l_{kkq} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_{fd} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} = \\
 &= \mathbf{[l]} \mathbf{[i]} \qquad \qquad \qquad \text{equação 1.18}
 \end{aligned}$$

Os sinais das mútuas indutâncias a serem determinados dependem da construção física da máquina.

Com relação aos sinais atribuídos aos fluxos na matriz (ψ), deve-se ter em mente que os fluxos mútuos entre as bobinas do rotor e estator são positivos, porém, aqueles de dispersão são negativos, quando estamos equacionando os fluxos nas bobinas do estator. Em termos de rotor, o campo e enrolamento amortecedor produzem fluxos no mesmo sentido, sendo portanto atribuído a ambos, o sinal (+); por outro lado, aqueles devidos às fases a, b e c nos enrolamentos do rotor, possuem sinal (-) que se deve à tendência natural de se oporem a causa que os produziu.

1.6 - ANÁLISE DAS AUTO E MÚTUAS INDUTÂNCIAS

Conforme foi referido, as indutâncias introduzidas nas equações analisadas, correspondem a grandezas variáveis. Nesta análise nos preocuparemos em colocá-las em fun-

ção da posição do rotor. Para tanto, devemos efetuar uma série de aproximações, todas elas baseadas em motivos físicos.

Quanto ao efeito da saturação, posteriormente e efetuaremos a devida consideração.

1.6.1 - Estator

Seja a máquina de polos salientes :-

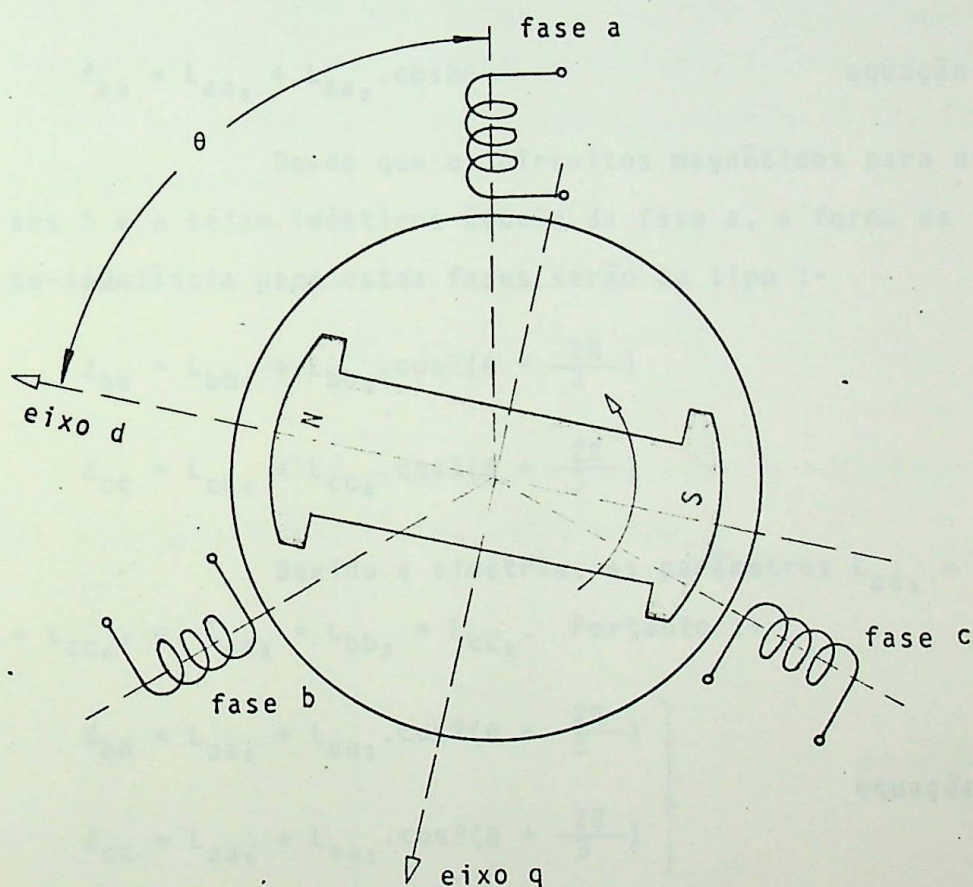


Fig. 1.17 - Influência da posição do rotor, na auto-indutância.

onde :-

θ = ângulo entre o eixo d e o centro da fase a.

Sabemos que a auto-indutância de uma bobina é dada por :-

$$L = \frac{N^2}{R} = N^2 \rho \quad \text{equação 1.19}$$

Por outro lado, a permeância para o circuito magnético da bobina a , varia com a posição do rotor, segundo a equação 1.8. Em consequência, a auto-indutância da fase a seria do tipo :-

$$\ell_{aa} = L_{aa_0} + L_{aa_2} \cdot \cos 2\theta \quad \text{equação 1.20}$$

Desde que os circuitos magnéticos para as fases b e c sejam idênticos àquele da fase a , a forma da auto-indutância para estas fases serão do tipo :-

$$\ell_{bb} = L_{bb_0} + L_{bb_2} \cdot \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\ell_{cc} = L_{cc_0} + L_{cc_2} \cdot \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Devido a simetria, os parâmetros $L_{aa_0} = L_{bb_0} = L_{cc_0}$, e, $L_{aa_2} = L_{bb_2} = L_{cc_2}$. Portanto :-

$$\left. \begin{aligned} \ell_{bb} &= L_{aa_0} + L_{aa_2} \cdot \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \ell_{cc} &= L_{aa_0} + L_{aa_2} \cdot \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} \quad \text{equações 1.21}$$

As mútuas indutâncias entre as bobinas do estator, são também função da permeância do correspondente circuito magnético. Deste modo, é suficiente que tenhamos a equação da correspondente permeância e, a da procurada mútua indutância será similar. Neste caso, o mínimo valor da permeância ocorrerá quando o rotor estiver em uma posição equidistan

te às fases consideradas. Nestas condições, as expressões para as mútuas indutâncias serão :-

$$\left. \begin{aligned} \ell_{ab} = \ell_{ba} &= L_{ab_0} + L_{ab_2} \cdot \cos 2(\theta + \pi/6) \\ \ell_{bc} = \ell_{cb} &= L_{ab_0} + L_{ab_2} \cdot \cos 2(\theta - \pi/2) \\ \ell_{ca} = \ell_{ac} &= L_{ab_0} + L_{ab_2} \cdot \cos 2(\theta + \frac{5}{6}\pi) \end{aligned} \right\} \text{ equações 1.22}$$

Onde $L_{ab_0} = L_{bc_0} = L_{ac_0}$, e, $L_{ab_2} = L_{bc_2} = L_{ac_2}$ devido a simetria do circuito magnético. Embora sem demonstrarmos os termos de 2º harmônico das equações 1.20, 1.21 e 1.22 são iguais.

$$L_{ab_2} = L_{aa_2}$$

1.6.2 - Rotor

Como a permeância do circuito magnético para as auto-indutâncias é constante, então :-

$$\left. \begin{aligned} \ell_{ffd} &= L_{ffd} \\ \ell_{kkd} &= L_{kkd} \\ \ell_{kkq} &= L_{kkq} \\ \ell_{kfd} &= L_{kfd} \end{aligned} \right\} \text{ equações 1.23}$$

1.6.3 - Estator-Rotor

Neste caso, ocorre um outro tipo de variação, pois, estando o rotor em movimento de rotação, há posições em

que os eixos das bobinas do rotor e estator se superpõem, posições para as quais os mesmos são ortogonais. Assim sendo, as mútuas indutâncias entre enrolamentos do estator e do rotor serão :-

$$\text{campo-estator} \left\{ \begin{array}{l} \ell_{afd} = \ell_{fad} = L_{afd} \cdot \cos\theta \\ \ell_{bfd} = \ell_{fbd} = L_{afd} \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \ell_{cfd} = \ell_{fcd} = L_{afd} \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{array} \right\} \text{eq. 1.24}$$

$$\text{amortecedor d estator} \left\{ \begin{array}{l} \ell_{akd} = \ell_{kad} = L_{akd} \cdot \cos\theta \\ \ell_{bkd} = \ell_{kbd} = L_{akd} \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \ell_{ckd} = \ell_{kcd} = L_{akd} \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{array} \right\} \text{eq. 1.25}$$

$$\text{amortecedor q estator} \left\{ \begin{array}{l} \ell_{akq} = \ell_{kaq} = -L_{akq} \cdot \text{sen}\theta \\ \ell_{bkq} = \ell_{kbq} = -L_{akq} \cdot \text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \ell_{ckq} = \ell_{kcq} = -L_{akq} \cdot \text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{array} \right\} \text{eq. 1.26}$$

1.1 - INTRODUÇÃO

1.2 - OBJETIVO

As análises anteriormente realizadas consideraram a representação dos fenômenos elétricos em termos de equações de fluxo e tensão, conforme será necessário ao decorrer do texto. Neste momento, um outro tratamento matemático faz-se necessário neste ponto, e aqui será empregado por uma mudança de variáveis. Desde que estas novas variáveis sejam introduzidas, os resultados serão caracterizados por equações bastante simplificadas, cujas formas serão vistas.

CAPITULO II

TRANSFORMAÇÃO d q o

transformações, as quais denominamos por transformação d q o apresentam também um caráter físico, segundo será oportunamente observado.

1.1 - EQUAÇÕES DE FLUXOS TRANSFORMADOS

Substituindo-se as equações obtidas para as indutâncias nas expressões dos fluxos do rotor, encontramos expressões do tipo:

$$\lambda_{d1} \cos \theta = \lambda_{d1} \cos(\theta + 2\pi/3) + \lambda_{d1} \cos(\theta - 2\pi/3)$$

$$\lambda_{q1} \sin \theta = \lambda_{q1} \sin(\theta + 2\pi/3) + \lambda_{q1} \sin(\theta - 2\pi/3)$$

Logo sugere a substituição a seguir, e que será empregada somente para cada uma das variáveis.

II - TRANSFORMAÇÃO d q o

2.1 - OBJETIVO

As análises anteriormente realizadas conduziram a resultados bastante complexos, o que torna difícil o manuseio das equações de fluxo e tensões, conforme será necessário no decorrer do texto. Deste modo, um outro tratamento matemático faz-se necessário neste ponto, o qual será conseguido por uma mudança de variáveis. Desde que estas novas variáveis sejam introduzidas nas relações obtidas, os resultados serão caracterizados por equações bastante simplificadas, conforme será visto.

Além deste aspecto matemático, as citadas transformações, as quais denominamos por TRANSFORMAÇÃO d q o apresentam também um caráter físico, segundo será oportunamente observado.

2.2 - EQUAÇÕES DE FLUXOS TRANSFORMADOS

Substituindo-se as equações obtidas para as indutâncias nas expressões dos fluxos do rotor, encontraremos expressões do tipo :-

$$i_a \cos\theta + i_b \cos(\theta - 2\pi/3) + i_c \cos(\theta + 2\pi/3)$$

$$-i_a \sin\theta - i_b \sin(\theta - 2\pi/3) - i_c \sin(\theta + 2\pi/3)$$

Isto sugere a substituição a seguir, a qual até o presente momento nada mais seria do que uma simples mudança de variáveis :-

$$\left. \begin{aligned} i_d &= \frac{2}{3} \left(i_a \cos\theta + i_b \cos(\theta - 2\pi/3) + i_c \cos(\theta + 2\pi/3) \right) \\ i_q &= -\frac{2}{3} \left(i_a \sin\theta + i_b \sin(\theta - 2\pi/3) + i_c \sin(\theta + 2\pi/3) \right) \\ i_o &= \frac{1}{3} (i_a + i_b + i_c) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{eq.} \\ 2.1 \end{array}$$

A corrente i_o foi introduzida, pois, desde que as correntes i_a , i_b e i_c foram eliminadas, em geral, três variáveis substitutas são necessárias. O fator $2/3$ foi introduzido para que em condições de operação equilibrada de correntes senoidais, os valores de i_d e i_q fossem os mesmos das amplitudes das correntes i_a , i_b e i_c . Um outro ponto a ser considerado é que em regime permanente, as correntes i_d e i_q serão grandezas constantes.

Das expressões de ψ_{fd} , ψ_{kd} e ψ_{kq} , substituindo as indutâncias pelas expressões obtidas, e, introduzindo a conceituação de i_d , i_q e i_o , temos :-

$$\left. \begin{aligned} \psi_{fd} &= -\frac{3}{2} L_{afd} \cdot i_d + L_{ffd} \cdot i_{fd} + L_{fkd} \cdot i_{kd} \\ \psi_{kd} &= -\frac{3}{2} L_{akd} \cdot i_d + L_{kfd} \cdot i_{fd} + L_{kkd} \cdot i_{kd} \\ \psi_{kq} &= -\frac{3}{2} L_{akq} \cdot i_q + L_{kkq} \cdot i_{kq} \end{aligned} \right\} \text{equações 2.2}$$

Nas equações acima, notamos importantes detalhes, os quais passamos a citar.

- Todas as indutâncias que compõem as equações são constantes, fato este que era de se esperar, pois as bobinas estão agora estacionárias entre si. Esta última conclusão é fácil de se verificar, uma vez que a influência da posição do rotor foi introduzida nas novas variáveis

veis, e os resultados obtidos independem do ângulo θ .

- Somente foram transformadas as grandezas do estator, de modo que, as correntes e indutâncias do rotor continuam sendo as mesmas definidas para a máquina original.

Com o objetivo de efetuarmos as análises mais facilmente, é de grande interesse trabalharmos com as equações na forma matricial. Para tanto, introduziremos uma matriz transformada (T) , montada por observação das equações 2.1 e 2.2.

$$(T) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cos \theta & \frac{2}{3} \cos(\theta - 2\pi/3) & \frac{2}{3} \cos(\theta + 2\pi/3) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} \sin \theta & -\frac{2}{3} \sin(\theta - 2\pi/3) & -\frac{2}{3} \sin(\theta + 2\pi/3) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que terá como matriz inversa :-

$$(T)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta - 2\pi/3) & -\sin(\theta - 2\pi/3) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta + 2\pi/3) & -\sin(\theta - 2\pi/3) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que :-

$$(\psi) = (\ell)(i)$$

Multiplicando ambos os membros por (T) ,

$$(T)(\psi) = (T)(\ell)(i)$$

Considerando que,

$$(T)(T)^{-1} = (T)^{-1}(T) = (1)$$

a equação anterior pode ser escrita :-

$$(T)(\psi) = (T)(\ell) \underbrace{(T)^{-1}(T)}_{(1)}(i) \quad \text{equação 2.3}$$

O produto $(T)(i)$ corresponde à matriz corrente transformada ao sistema $d q o$, ou seja:-

$$(T)(i) = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \\ i_{fd} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{2}{3})(i_a \cdot \cos\theta + i_b \cdot \cos(\theta - 2\pi/3) + i_c \cdot \cos(\theta + 2\pi/3)) \\ (\frac{2}{3})(-i_a \cdot \sin\theta - i_b \cdot \sin(\theta - 2\pi/3) - i_c \cdot \sin(\theta + 2\pi/3)) \\ (\frac{1}{3} i_a + \frac{1}{3} i_b + \frac{1}{3} i_c) \\ i_{fd} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{bmatrix} \quad \text{equação 2.4}$$

Considerando que o produto $(T)(\ell)(T)^{-1}$ é :-

$$\begin{aligned}
 & [T] [\ell] [T]^{-1} = \\
 & = \begin{pmatrix}
 -(L_{aa_0} + L_{ab_0} + \frac{3}{2}L_{aa_2}) & 0 & 0 & L_{afd} & L_{akd} & 0 \\
 0 & -(L_{aa_0} + L_{ab_0} - \frac{3}{2}L_{aa_2}) & 0 & 0 & 0 & L_{akd} \\
 0 & 0 & -(L_{aa_0} - 2L_{ab_0}) & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{3}{2}L_{afd} & 0 & 0 & L_{ffd} & L_{fkd} & 0 \\
 -\frac{3}{2}L_{akd} & 0 & 0 & L_{kfd} & L_{kkd} & 0 \\
 0 & -\frac{3}{2}L_{akq} & 0 & 0 & 0 & L_{kkq}
 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

equação 2.5

Substituindo 2.4 e 2.5 em 2.3, e, visto que o produto $[T] [\psi]$ se refere à matriz fluxo transformado, concluímos que as equações dos fluxos enlaçados do estator ψ_a , ψ_b e ψ_c são substituídas por expressões do tipo :-

$$\psi_d = \frac{2}{3} \left(\psi_a \cdot \cos\theta + \psi_b \cdot \cos(\theta - 2\pi/3) + \psi_c \cdot \cos(\theta + 2\pi/3) \right)$$

$$\psi_q = -\frac{2}{3} \left(\psi_a \cdot \sin\theta + \psi_b \cdot \sin(\theta - 2\pi/3) + \psi_c \cdot \sin(\theta + 2\pi/3) \right) \quad \begin{array}{l} \text{equações} \\ 2.6 \end{array}$$

$$\psi_o = \frac{1}{3} (\psi_a + \psi_b + \psi_c)$$

as quais notamos ser do mesmo tipo de i_a , i_b e i_c , transformadas ao sistema $d q o$. Esta afirmação foi possível, uma vez que o produto $[T] [\ell] [T]^{-1}$, conforme pode-se constatar, corresponde a uma matriz formada por grandezas constantes, as quais naturalmente não poderiam alterar a forma das equações resultantes do produto $[T] [i]$.

Efetuada as operações matriciais impostas pela equação 2.3, ou, substituindo ψ_a , ψ_b e ψ_c por suas correspondentes expressões em função das indutâncias, encontraríamos o resultado a seguir.

$$\left. \begin{aligned} \psi_d &= -(L_{aa_0} + L_{ab_0} + \frac{3}{2}L_{aa_2})i_d + L_{afd} \cdot i_{fd} + L_{akd} \cdot i_{kd} \\ \psi_q &= -(L_{aa_0} + L_{ab_0} - \frac{3}{2}L_{aa_2})i_q + L_{akq} \cdot i_{kq} \\ \psi_o &= -(L_{aa_0} - 2L_{ab_0})i_o \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{equa-} \\ \text{ções} \\ 2.7 \end{array}$$

Chamando :-

$$\left. \begin{aligned} L_d &= L_{aa_0} + L_{ab_0} + \frac{3}{2}L_{aa_2} \\ L_q &= L_{aa_0} + L_{ab_0} - \frac{3}{2}L_{aa_2} \\ L_o &= L_{aa_0} - 2L_{ab_0} \end{aligned} \right\} \text{equações 2.8}$$

Então :-

$$\left. \begin{aligned} \psi_d &= -L_d \cdot i_d + L_{afd} \cdot i_{fd} + L_{akd} \cdot i_{kd} \\ \psi_q &= -L_q \cdot i_q + L_{akq} \cdot i_{kq} \\ \psi_o &= -L_o \cdot i_o \end{aligned} \right\} \text{equações 2.9}$$

Neste ponto, algumas observações podem ser feitas. Os fluxos, correntes e indutâncias referentes ao rotor, não foram transformados, permanecendo os mesmos definidos anteriormente. Com referência às transformações realizadas, podemos atribuir-lhes um aspecto físico, baseando-nos para tanto, nas fms anteriormente abordadas. Foi verificado que em regi

me permanente de operação, a interação entre a fmm produzida pelo estator da máquina, comporta-se como uma onda estacionária relativamente ao rotor, podendo ser decomposta em duas componentes: uma com seu valor máximo coincidente com o eixo direto e outra com o eixo em quadratura. Portanto, poderíamos conceber as correntes i_d e i_q como responsáveis por estas fmm's.

2.3 - EQUAÇÕES DE TENSÕES TRANSFORMADAS

A seguir, procuraremos obter as equações de tensões no sistema $d q o$. Com tal objetivo, multipliquemos ambos os termos da equação 1.17 pela matriz $[T]$.

$$[T] [e] = [T] \frac{d}{dt} [\psi] + [T] [R] [i] \quad \text{equação 2.10}$$

Sabemos que o produto $[T] [\psi]$ corresponde à matriz transformada do fluxo, a qual poderíamos designar por matriz $[\psi_t]$. Assim :-

$$[\psi] = [T]^{-1} [\psi_t]$$

Analogamente :-

$$[i] = [T]^{-1} [i_t]$$

Substituindo estas últimas expressões na equação 2.10 :-

$$[T] [e] = [T] \cdot \frac{d}{dt} [T]^{-1} [\psi_t] + [T] \cdot [R] \cdot [T]^{-1} [i_t]$$

Como foi realizado para o caso anterior, a análise da equação acima nos leva a concluir que :-

$$[T] \cdot [e] = [e_t] = \begin{pmatrix} e_d \\ e_q \\ e_o \\ e_{fd} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{equação 2.11}$$

Onde :-

$$\left. \begin{aligned} e_d &= \frac{2}{3} \left(e_a \cdot \cos\theta + e_b \cdot \cos(\theta - 2\pi/3) + e_c \cdot \cos(\theta + 2\pi/3) \right) \\ e_q &= -\frac{2}{3} \left(e_a \cdot \sin\theta + e_b \cdot \sin(\theta - 2\pi/3) + e_c \cdot \sin(\theta + 2\pi/3) \right) \\ e_o &= \frac{1}{3} (e_a + e_b + e_c) \end{aligned} \right\}$$

equações 2.12

Substituindo e_a , e_b e e_c por suas equações em função de fluxo e corrente, bem como a introdução dos conceitos de correntes e fluxos transformados, as equações 2.12 podem ser dadas por :-

$$\left. \begin{aligned} e_d &= \frac{d\psi_d}{dt} - \psi_q \cdot \frac{d\theta}{dt} - R \cdot i_d \\ e_q &= -\frac{d\psi_q}{dt} + \psi_d \cdot \frac{d\theta}{dt} - R \cdot i_q \\ e_o &= \frac{d\psi_o}{dt} - R \cdot i_o \end{aligned} \right\} \quad \text{equações 2.13}$$

Onde $R = R_a = R_b = R_c$

Estas são as conhecidas equações de PARK, às quais poderíamos atribuir o significado físico de equações de tensão aplicadas às bobinas d e q anteriormente supostas. Ocorre, entretanto, que os termos $\psi_q \cdot \frac{d\theta}{dt}$ e $\psi_d \cdot \frac{d\theta}{dt}$ impossibilitam tal suposição, sendo inclusive estes termos preponderantes nas equações 2.13, pois, analisando por exemplo o regime permanente, i_d e i_q serão constantes, o mesmo ocorrendo com ψ_d e ψ_q , sendo, em consequência, as derivadas dos fluxos iguais a zero. Isto justifica em alguns casos a retirada de $d\psi_d/dt$ e $d\psi_q/dt$, sem causar erros significantes, mesmo para o caso da operação transitória.

Estes fatos levam a concluir que para as equações obtidas, não poderíamos ter um modelo físico, ficando como interpretação apenas uma mudança de variáveis. Entretanto, é comum obtermos um circuito representativo que satisfaça as equações de fluxos e tensões transformadas ao sistema $d q o$.

O circuito correspondente apresenta mudanças radicais na parte referente ao estator da máquina, enquanto que fisicamente o rotor permanece inalterado. A figura 2.1 corresponde a representação das alterações realizadas, onde constata-se a substituição das 3 bobinas estacionárias que caracterizavam o estator, por outras 3 bobinas as quais passamos a comentar.

Inicialmente, com seu eixo coincidente com o eixo d da máquina, temos a bobina de eixo d , possuindo um coeficiente de indutância mútua com relação ao rotor, igual a L_{afd} , portanto um valor constante. É evidente que isto só poderia ser conseguido caso a bobina de eixo d girasse no mes

mo sentido do rotor, o que vai em confronto à concepção formada para esta bobina. Verifica-se ainda que adicionamos à bobina de eixo d , uma fonte de fem de valor $\psi_q \cdot \frac{d\theta}{dt}$, conforme impõe a equação de e_d . Acrescentamos ainda que assim como existe a indutância mútua entre a bobina de eixo d e de campo, existirá também um coeficiente entre esta primeira e o enrolamento amortecedor de eixo d , sendo que esta indutância mútua é representada por L_{akd} .

Analogamente haverá um bobina de eixo q , a qual poder-se-ia efetuar um comentário similar ao acima realizado.

Quanto a componente de sequência nula, verificamos que a mesma não apresenta nenhum efeito mútuo com relação aos demais componentes do sistema. Assim sendo, a sua representação poderia ser feita por uma bobina de auto-indutância L_0 e resistência R , estacionária e localizada de modo a não haver nenhum acoplamento com as demais bobinas do circuito.

Finalmente, o procurado circuito poderia ser dado por :-

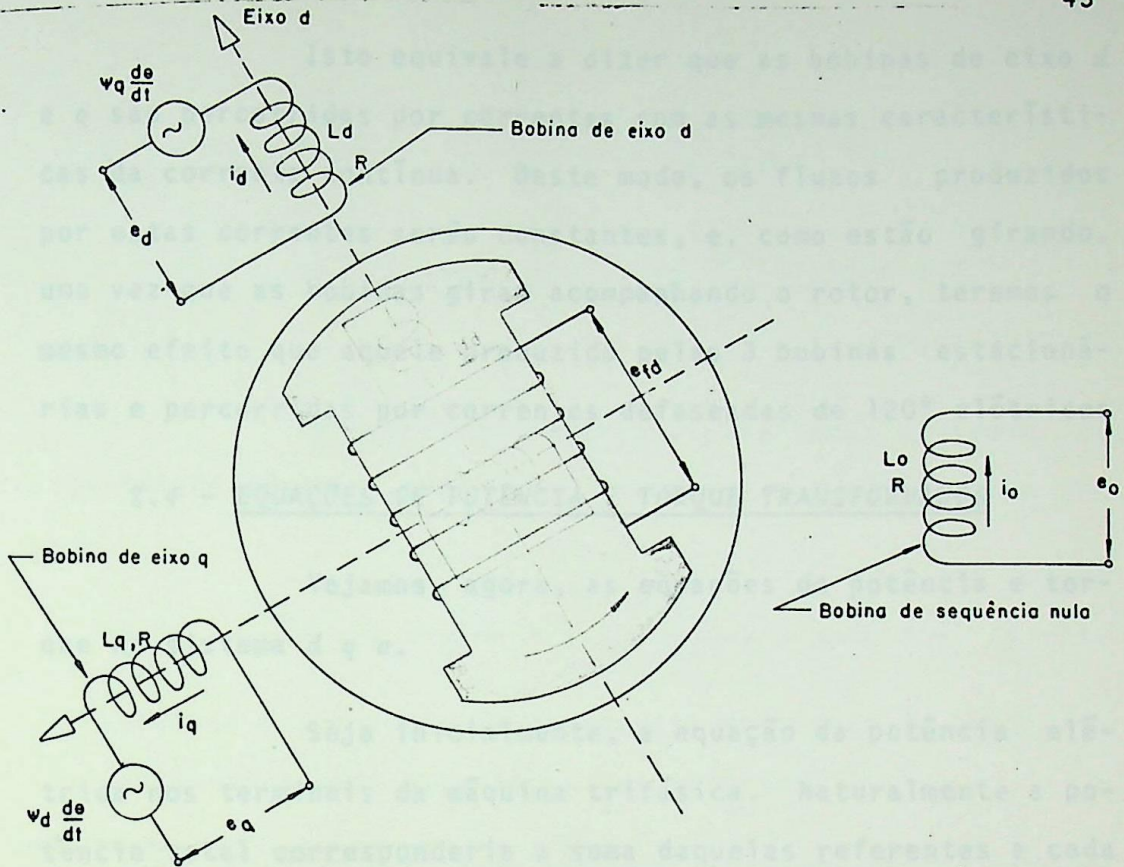


Fig. 2.1 - Representação física da transformação $d q o$.

Procurando ainda uma formação física para as transformações realizadas, consideremos o caso particular do regime permanente, portanto :-

$$i_a = I \cdot \text{sen} \omega t$$

$$i_b = I \cdot \text{sen}(\omega t - 2\pi/3)$$

$$i_c = I \cdot \text{sen}(\omega t + 2\pi/3)$$

Substituindo nas expressões de i_d , i_q e i_o , encontraremos :-

$$i_d = I \text{ sen } \theta_0$$

$$i_q = I \text{ cos } \theta_0$$

$$i_o = 0$$

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

Isto equivale a dizer que as bobinas de eixo d e q são percorridas por correntes com as mesmas características da corrente contínua. Deste modo, os fluxos produzidos por estas correntes serão constantes, e, como estão girando, uma vez que as bobinas giram acompanhando o rotor, teremos o mesmo efeito que aquele produzido pelas 3 bobinas estacionárias e percorridas por correntes defasadas de 120° elétricos

2.4 - EQUAÇÕES DE POTÊNCIA E TORQUE TRANSFORMADOS

Vejamos, agora, as equações de potência e torque no sistema $d q o$.

Seja inicialmente, a equação da potência elétrica nos terminais da máquina trifásica. Naturalmente a potência total corresponderia a soma daquelas referentes a cada bobina e, seria dada por :-

$$p = e_a \cdot i_a + e_b \cdot i_b + e_c \cdot i_c$$

Substituindo as tensões e_a , e_b e e_c bem como as correntes i_a , i_b e i_c pelas correspondentes expressões no sistema $d q o$, temos :-

$$p = \frac{3}{2}(e_d \cdot i_d + e_q \cdot i_q + 2 \cdot e_o \cdot i_o) \quad \text{equação 2.14}$$

Que poderia também ser dada pela equação a seguir, onde as tensões anteriores foram substituídas pelas expressões dadas por 2.13.

$$p = \frac{3}{2} \left(i_d \left(\frac{d\psi_d}{dt} - \psi_q \frac{d\theta}{dt} - R \cdot i_d \right) + i_q \left(\frac{d\psi_q}{dt} + \psi_d \cdot \frac{d\theta}{dt} - R \cdot i_q \right) + 2 \cdot i_o \left(\frac{d\psi_o}{dt} - R \cdot i_o \right) \right)$$

ou

$$p = \frac{3}{2} \left(i_d \cdot \frac{d\psi_d}{dt} + i_q \cdot \frac{d\psi_q}{dt} + 2 \cdot i_o \cdot \frac{d\psi_o}{dt} \right) +$$

$$+ \frac{3}{2} (i_q \cdot \psi_d - i_d \cdot \psi_q) \frac{d\theta}{dt} - \frac{3}{2} R (i_d^2 + i_q^2 + 2 \cdot i_o^2)$$

equação 2.15

Na expressão anterior, poderíamos atribuir um significado físico a cada termo, conforme nos referimos a seguir.

$\frac{3}{2} \left(i_d \cdot \frac{d\psi_d}{dt} + i_q \cdot \frac{d\psi_q}{dt} + 2 \cdot i_o \cdot \frac{d\psi_o}{dt} \right)$ = potência correspondente a uma variação da energia magnética da armadura, existente apenas durante os transitórios.

$\frac{3}{2} (i_q \cdot \psi_d - i_d \cdot \psi_q) \frac{d\theta}{dt}$ = potência eletromagnética transferida através do entre-ferro.

$\frac{3}{2} R (i_d^2 + i_q^2 + 2 \cdot i_o^2)$ = perdas por efeito Joule nos enrolamentos da armadura.

Dividindo pois, a parcela da potência referente à potência eletromagnética, por $d\theta/dt$, teremos o conjugado ou torque desenvolvido. Portanto :-

$$T = \frac{3}{2} (i_q \cdot \psi_d - i_d \cdot \psi_q)$$

equação 2.16

CAPITULO III

VALORES POR UNIDADE

III - SISTEMAS POR UNIDADE

3.1 - OBJETIVO

Pelas vantagens já conhecidas do uso de valores por unidade ou porcentuais, preocuparemos neste ítem em transformar as equações anteriormente obtidas, em equações adimensionais. Assim procedendo, simplificaremos ainda mais o manuseio com as equações transformadas.

Para a eliminação das dimensões das equações é suficiente que os termos que compõem as equações primitivas sejam divididos pelos correspondentes valores-bases, e este será o objetivo do capítulo em pauta.

3.2 - GRANDEZAS BASE

Com relação aos valores-bases, vejamos através de um exemplo, o modo de obtê-los, bem como, a simbologia a ser empregada nas equações a serem obtidas.

A lei de Ohm aplicada a um circuito elétrico nos permite escrever :-

$$E = R.I$$

onde :-

$$[E] \rightarrow \text{volt}$$

$$[R] \rightarrow \text{ohms}$$

$$[I] \rightarrow \text{ampere}$$

Na equação acima, encontramos duas grandezas independentes. Assim, tomando :-

E_{base} → volt

I_{base} → ampere

Podemos, agora, definir a outra grandeza-base, dependente, que seria dada por :-

$$R_{\text{base}} = \frac{E_{\text{base}}}{I_{\text{base}}}$$

ou :-

$$E_{\text{base}} = R_{\text{base}} \cdot I_{\text{base}}$$

Dividindo a equação correspondente à lei de Ohm pela expressão anterior :-

$$\frac{E}{E_{\text{base}}} = \frac{I}{I_{\text{base}}} \cdot \frac{R}{R_{\text{base}}}$$

As relações acima são denominadas respectivamente por :-

$$\frac{E}{E_{\text{base}}} = \bar{E} = \text{valor por unidade de tensão.}$$

$$\frac{I}{I_{\text{base}}} = \bar{I} = \text{valor por unidade de corrente.}$$

$$\frac{R}{R_{\text{base}}} = \bar{R} = \text{valor por unidade de resistência.}$$

onde a inclusão das barras designa o valor por unidade da grandeza correspondente.

As diversas equações introduzidas dos capítulos I e II são compostas das seguintes variáveis :-

GRANDEZA	UNIDADE
i	ampere
e	volt
ψ	weber.espira
fmm	ampere.espira
R	ohm
L	Henry
θ	radiano
t	segundo

Deve-se observar para o caso das equações apresentadas, que as tensões e correntes foram colocadas nas formas instantâneas. As ondas do estator foram ainda colocadas em função dos valores máximos (de pico), o que não deve ser esquecido quando na escolha dos valores bases.

Quanto a escolha dos valores base, basta que sejam arbitradas três variáveis independentes como base; e as demais serão automaticamente estabelecidas por aplicação das expressões apresentadas. É evidente que uma terceira grandeza se faz necessária, uma vez que estando trabalhando na forma instantânea, o tempo constitui uma outra variável.

A seguir, analisaremos o problema do estator e em seguida nos preocuparemos com o rotor da máquina.

3.2.1 - Quantidades base do estator

Adotemos as seguintes variáveis independentes como valores base para o estator :-

$e_{s(\text{base})}$ = valor máximo ou valor de pico da tensão na fase, expressa em volt.

$i_{s(\text{base})}$ = valor máximo ou valor de pico da corrente na fase, expressa em ampere.

onde o índice s indica que a grandeza se refere ao estator.

De posse destas duas grandezas, outras podem ser obtidas, conforme será efetuado a seguir.

Pela lei de Ohm, a impedância-base pode ser calculada por :-

$$Z_{s(\text{base})} = \frac{e_{s(\text{base})}}{i_{s(\text{base})}} \quad \text{equação 3.1}$$

ou

$$e_{s(\text{base})} = i_{s(\text{base})} \cdot Z_{s(\text{base})}$$

Neste caso, conforme dissemos, trabalhando com as equações em sua forma instantânea, outra grandeza base fundamental se faz necessária. Assim, tomando :-

$$f_{(\text{base})} = \text{frequência base em Hz.}$$

Podemos definir :-

$$\omega_{(\text{base})} = 2\pi f_{(\text{base})} = \text{pulsção base ou frequência angular base, em rd/s.}$$

Neste ponto, uma importante observação deve ser feita. Na definição dos valores base, estes devem ter a mesma unidade da grandeza que vai ser dividida pelo correspondente valor base. É também importante lembrar que os elementos a serem divididos devem ser do mesmo tipo. Entretanto, em

alguns casos, parece que tal não ocorre, porém, dimensionalmente o problema é satisfeito. Isto é o caso de uma impedância constituída de apenas uma indutância L , conforme ilustramos a seguir.

$$Z = \omega L = 2\pi fL$$

onde :-

Z = impedância em ohm.

f = frequência em Hertz.

L = indutância em Henry.

Desde que dimensionalmente a equação seja correta, para encontrarmos o valor de L_{base} é suficiente

$$L_{s(\text{base})} = \frac{Z_{s(\text{base})}}{2\pi f(\text{base})} = \frac{Z_{s(\text{base})}}{\omega(\text{base})} \text{ (Henry)} \quad \text{equação 3.2}$$

Na equação de $e_{s(\text{base})}$, substituindo $Z_{s(\text{base})}$ por $L_{s(\text{base})} \cdot \omega(\text{base})$:-

$$e_{s(\text{base})} = \omega(\text{base}) \cdot L_{s(\text{base})} \cdot i_{s(\text{base})}$$

Sabemos que :-

$$L_{s(\text{base})} \cdot i_{s(\text{base})} = \psi_{s(\text{base})}$$

Portanto :-

$$e_{s(\text{base})} = \omega(\text{base}) \cdot \psi_{s(\text{base})} \quad \text{equação 3.3}$$

Uma outra variável dependente será a potência. Considerando a máquina trifásica, a potência total em VA de-

envolvida no estator será :-

$$P_{\text{base}} = 3 \cdot E_{s(\text{base})} \cdot I_{s(\text{base})}$$

onde :-

P_{base} = potência base do estator, em VA.

$E_{s(\text{base})} = \frac{e_{s(\text{base})}}{\sqrt{2}}$ = valor eficaz da tensão fase-neutro do estator.

$I_{s(\text{base})} = \frac{i_{s(\text{base})}}{\sqrt{2}}$ = valor eficaz da corrente na fase do estator.

Substituindo os valores eficazes pelos correspondentes valores máximos :-

$$P_{\text{base}} = \frac{3}{2} e_{s(\text{base})} \cdot i_{s(\text{base})} \quad \text{equação 3.4}$$

É fácil verificar que para um circuito monofásico, a potência base seria :-

$$P_{\text{base}(1\phi)} = E_{s(\text{base})} \cdot I_{s(\text{base})} = \frac{1}{2} e_{s(\text{base})} \cdot i_{s(\text{base})} \quad \text{equação 3.5}$$

Nas equações de tensão, transformadas ao sistema $d q o$, foi verificado que aquelas referentes ao estator, foram denominadas por equações de Park, as quais transcrevemos abaixo :-

$$e_d = \frac{d\psi_d}{dt} - \psi_q \cdot \frac{d\theta}{dt} - R \cdot i_d$$

$$e_q = \frac{d\psi_q}{dt} + \psi_d \cdot \frac{d\theta}{dt} - R \cdot i_q$$

$$e_o = \frac{d\psi_o}{dt} - R \cdot i_o$$

Deve-se observar que nestas expressões, as diversas grandezas ali introduzidas são todas correspondentes ao estator da máquina.

Dividindo por exemplo a 1ª equação por $e_s(\text{base})$, teremos :-

$$\frac{e_d}{e_s(\text{base})} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi_d}{\omega(\text{base}) \cdot \psi_s(\text{base})} \right) - \frac{\psi_q \cdot d\theta/dt}{\psi_s(\text{base}) \cdot \omega(\text{base})} - \frac{R \cdot i_d}{Z_s(\text{base}) \cdot i_s(\text{base})}$$

Melhorando a forma da equação acima :-

$$\frac{e_d}{e_s(\text{base})} = \frac{d}{dt \cdot \omega(\text{base})} \cdot \left(\frac{\psi_d}{\psi_s(\text{base})} \right) - \frac{\psi_q}{\psi_s(\text{base})} \cdot \frac{d\theta/dt}{\omega(\text{base})} - \frac{R}{Z_s(\text{base})} \cdot \frac{i_d}{i_s(\text{base})}$$

Portanto :-

$$\bar{e}_d = \frac{d}{dt \cdot \omega(\text{base})} \cdot (\bar{\psi}_d) - \bar{\psi}_q \cdot \bar{\omega} - \bar{R} \cdot \bar{i}_d$$

A equação por unidade poderia permanecer neste aspecto. Entretanto, de modo a simplificar a representação, seja a introdução de um t_{base} . Sabemos que :-

$$T_{\text{base}} = \frac{1}{f_{\text{base}}}$$

onde T_{base} = período base.

Dividindo ambos os termos por 2π :-

$$\frac{T_{\text{base}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi f_{\text{base}}} = \frac{1}{\omega_{\text{base}}}$$

onde $T_{\text{base}}/2\pi$ é igual ao tempo necessário para que uma onda percorra 1 rd. Chamando este tempo de t_{base} :-

$$t_{\text{base}} = \frac{1}{\omega_{\text{base}}} \quad \text{equação 3.6}$$

Introduzindo esta definição na expressão de \bar{e}_d :-

$$\bar{e}_d = \frac{d\bar{\psi}_d}{d\bar{t}} - \bar{\psi}_q \cdot \bar{\omega} - \bar{R} \cdot \bar{i}_d \quad \text{equação 3.7}$$

onde todas as variáveis encontram-se em seus correspondentes valores por unidade. Analogamente :-

$$\bar{e}_q = \frac{d\bar{\psi}_q}{d\bar{t}} + \bar{\psi}_d \cdot \bar{\omega} - \bar{R} \cdot \bar{i}_q \quad \text{equação 3.8}$$

$$\bar{e}_o = \frac{d\bar{\psi}_o}{d\bar{t}} - \bar{R} \cdot \bar{i}_o \quad \text{equação 3.9}$$

Como observação, $\bar{\omega}$ pode também ser representado por $d\theta/d\bar{t}$, senão vejamos :-

$$\bar{\omega} = \frac{d\theta}{dt \cdot \omega_{\text{base}}} = \frac{d\theta}{dt/t_{\text{base}}} = \frac{d\theta}{d\bar{t}} \quad \text{equação 3.10}$$

3.2:2 - Quantidades base do rotor

Quanto aos princípios básicos, o procedimento é análogo ao anterior, entretanto, certos cuidados devem ser tomados.

Foi verificado que existem mútuas indutâncias entre as bobinas do estator e rotor, as quais são recíprocas

(por exemplo, $L_{afd} = L_{fad}$). Quando dividimos as indutâncias por seus correspondentes valores base, devemos observar que grandezas do estator (por exemplo: L_{afd}) serão divididas por valores base do estator, bem como aquelas referentes ao rotor (por exemplo: L_{fad}) pelo correspondente valor base. Deste modo, se os valores base do rotor não forem convenientemente escolhidos, pode ocorrer que a indutância \bar{L}_{afd} seja diferente de \bar{L}_{fad} , ou seja, os valores por unidade não serão recíprocos, o que seria evidentemente uma grande desvantagem para o sistema introduzido. Assim, procuraremos desenvolver os valores-base do rotor de tal modo que fatos como este não ocorram, ou em outras palavras, que as mútuas indutâncias por unidade continuem sendo recíprocas. Para que isto ocorra, conforme veremos, é suficiente que as potências base do estator e dos diversos enrolamentos do rotor, sejam iguais.

Satisfeita a condição acima, podemos ainda escolher certos valores típicos de corrente-base para os diversos enrolamentos do rotor e, com isso, fazer com que as diversas mútuas indutâncias por unidade sejam ainda iguais. Este ponto será visto detalhadamente mais tarde.

Com o propósito de obtermos as grandezas-bases do rotor, tomemos um conjunto de equações que envolvam elementos do estator e rotor, e, tratemos de obtê-las em valores por unidade. Este raciocínio é semelhante ao realizado anteriormente com as equações de Park.

Sejam as equações de fluxos enlaçados do estator, transformadas ao sistema $d q o$:-

$$\psi_d = - L_d \cdot i_d + L_{afd} \cdot i_{fd} + L_{akd} \cdot i_{kd}$$

$$\psi_q = -L_q \cdot i_q + L_{akq} \cdot i_{kq}$$

$$\psi_o = -L_o \cdot i_o$$

Inicialmente, efetuaremos a alteração na primeira equação, isto é, dividiremos todos os termos de ψ_d , que são fluxos no estator, pelo fluxo base do estator, bem como, consideraremos que $\psi_{s(\text{base})} = L_{s(\text{base})} \cdot i_{s(\text{base})}$.

$$\frac{\psi_d}{\psi_{s(\text{base})}} = - \frac{L_d \cdot i_d}{L_{s(\text{base})} \cdot i_{s(\text{base})}} + \frac{L_{afd} \cdot i_{fd}}{L_{s(\text{base})} \cdot i_{s(\text{base})}} +$$

$$+ \frac{L_{akd} \cdot i_{kd}}{L_{s(\text{base})} \cdot i_{s(\text{base})}}$$

Ocorre que nesta equação entraram elementos do estator e rotor. Por exemplo, no segundo termo do segundo membro, temos uma corrente do rotor, mais especificamente do enrolamento de campo, dividida por uma corrente base do estator. Sem dúvida, esta relação não tem significado, devendo-se proceder alterações nos termos que se encontram nesta condição.

Poderíamos supor a existência de uma corrente base para o enrolamento de campo $\{i_{fd(\text{base})}\}$, bem como, de uma corrente base para o enrolamento amortecedor de eixo direto $\{i_{kd(\text{base})}\}$.

A equação anterior poderia ser então escrita:-

$$\frac{\psi_d}{\psi_{s(\text{base})}} = - \frac{L_d \cdot i_d}{L_{s(\text{base})} \cdot i_{s(\text{base})}} +$$

$$+ \frac{L_{afd} \cdot i_{fd}}{L_{s(\text{base})} \cdot i_{s(\text{base})}} \cdot \frac{i_{fd(\text{base})}}{i_{fd(\text{base})}} +$$

$$+ \frac{L_{akd} \cdot i_{kd}}{L_s(\text{base}) \cdot i_s(\text{base})} \cdot \frac{i_{kd(\text{base})}}{i_{kd(\text{base})}}$$

ou :-

$$\begin{aligned} \frac{\psi_d}{\psi_s(\text{base})} &= - \frac{L_d}{L_s(\text{base})} \cdot \frac{i_d}{i_s(\text{base})} + \\ &+ \frac{L_{afd}}{L_s(\text{base}) \cdot \frac{i_s(\text{base})}{i_{fd(\text{base})}}} \cdot \frac{i_{fd}}{i_{fd(\text{base})}} + \\ &+ \frac{L_{akd}}{L_s(\text{base}) \cdot \frac{i_s(\text{base})}{i_{kd(\text{base})}}} \cdot \frac{i_{kd}}{i_{kd(\text{base})}} \end{aligned} \quad \text{equação 3.11}$$

É evidente que na equação acima :-

$$\bar{L}_{afd} = \frac{L_{afd}}{L_s(\text{base}) \cdot \frac{i_s(\text{base})}{i_{fd(\text{base})}}} = \text{indutância por unidade entre fase e campo} \quad \text{equação 3.12}$$

$$\bar{L}_{akd} = \frac{L_{akd}}{L_s(\text{base}) \cdot \frac{i_s(\text{base})}{i_{kd(\text{base})}}} = \text{indutância por unidade entre fase e amortecedor de eixo d.} \quad \text{equação 3.13}$$

Na equação 3.11, considerando que uma corrente dividida pelo correspondente valor base se refira ao correspondente valor de corrente por unidade :-

$$\bar{\psi}_d = - \bar{L}_d \cdot \bar{i}_d + \bar{L}_{afd} \cdot \bar{i}_{fd} + \bar{L}_{akd} \cdot \bar{i}_{kd} \quad \text{equação 3.14}$$

Analogamente :-

$$\bar{\psi}_q = - \bar{L}_q \cdot \bar{i}_q + \bar{L}_{akq} \cdot \bar{i}_{kq} \quad \text{equação 3.15}$$

$$\bar{\psi}_0 = - \bar{L}_0 \cdot \bar{i}_0 \quad \text{equação 3.16}$$

onde :-

$$\bar{L}_{akq} = \frac{L_{akq}}{L_{s(\text{base})} \cdot \frac{i_{s(\text{base})}}{i_{kq(\text{base})}}} \quad \text{equação 3.17}$$

Quanto aos demais valores unitários, as expressões serão bastante simples, sendo suficiente a divisão da grandeza pela correspondente base.

Condição Para Que as Mútuas Indutâncias Por Unidade Sejam Recíprocas

Tomemos agora as equações de fluxos enlaçados do rotor :-

$$\psi_{fd} = - \frac{3}{2} L_{fad} \cdot i_d + L_{ffd} \cdot i_{fd} + L_{fkd} \cdot i_{kd}$$

$$\psi_{kd} = - \frac{3}{2} L_{kad} \cdot i_d + L_{kfd} \cdot i_{fd} + L_{kkd} \cdot i_{kd}$$

$$\psi_{kq} = - \frac{3}{2} L_{kaq} \cdot i_q + L_{kkq} \cdot i_{kq}$$

Novamente temos uma equação de fluxo envolvendo elementos do estator e rotor. Entretanto, neste caso, os fluxos que se apresentam como primeiros membros são todos referentes ao rotor. Conseqüentemente, poderíamos dividir cada uma das equações acima por $\psi_{fd(\text{base})}$, $\psi_{kd(\text{base})}$ e $\psi_{kq(\text{base})}$, respectivamente.

Analisando por exemplo a primeira equação, e considerando que $\psi_{fd(\text{base})} = L_{fd(\text{base})} \cdot i_{fd(\text{base})}$, bem como,

efetuando a multiplicação e divisão por correntes base, tal como foi realizado anteriormente, teremos :-

$$\frac{\psi_{fd}}{\psi_{fd(base)}} = - \frac{3}{2} \cdot \frac{L_{fad} \cdot i_d}{L_{fd(base)} \cdot i_{fd(base)}} \cdot \frac{i_{s(base)}}{i_{s(base)}} +$$

$$+ \frac{L_{ffd} \cdot i_{fd}}{L_{fd(base)} \cdot i_{fd(base)}} + \frac{L_{fkd} \cdot i_{kd}}{L_{fd(base)} \cdot i_{fd(base)}} \cdot \frac{i_{kd(base)}}{i_{kd(base)}}$$

Melhorando a forma :-

$$\frac{\psi_{fd}}{\psi_{fd(base)}} = - \frac{3}{2} \cdot \frac{L_{fad}}{L_{fd(base)} \cdot \frac{i_{fd(base)}}{i_{s(base)}}} \cdot \frac{i_d}{i_{s(base)}} +$$

$$+ \frac{L_{ffd}}{L_{fd(base)}} \cdot \frac{i_{fd}}{i_{fd(base)}} +$$

$$+ \frac{L_{fkd}}{L_{fd(base)} \cdot \frac{i_{fd(base)}}{i_{kd(base)}}} \cdot \frac{i_{kd}}{i_{kd(base)}} \quad \text{equação 3.18}$$

Da equação anterior, podemos definir :-

$$\bar{L}_{fad} = \frac{L_{fad}}{\frac{2}{3} \cdot L_{fd(base)} \cdot \frac{i_{fd(base)}}{i_{s(base)}}} = \text{indutância por unidade de entre campo e fase.}$$

equação 3.19

$$\bar{L}_{fkd} = \frac{L_{fkd}}{L_{fd(base)} \cdot \frac{i_{fd(base)}}{i_{kd(base)}}} = \text{indutância por unidade de entre campo e amortecedor de eixo direto.}$$

equação 3.20

Substituindo 3.19 e 3.20 em 3.18, e, conside-

rando a simbologia de valores por unidade para as demais relações :-

$$\bar{\psi}_{fd} = - \bar{L}_{fad} \cdot \bar{i}_d + \bar{L}_{ffd} \cdot \bar{i}_{fd} + \bar{L}_{fkd} \cdot \bar{i}_{kd} \quad \text{equação 3.21}$$

Analogamente :-

$$\bar{\psi}_{kd} = - \bar{L}_{kad} \cdot \bar{i}_d + \bar{L}_{kfd} \cdot \bar{i}_{fd} + \bar{L}_{kkq} \cdot \bar{i}_{kq} \quad \text{equação 3.22}$$

$$\bar{\psi}_{kq} = - \bar{L}_{kaq} \cdot \bar{i}_q + \bar{L}_{kkq} \cdot \bar{i}_{kq} \quad \text{equação 3.23}$$

onde :-

$$\bar{L}_{kad} = \frac{L_{kad}}{\frac{2}{3} \cdot L_{kd(\text{base})} \cdot \frac{i_{kd(\text{base})}}{i_{s(\text{base})}}} = \text{indutância por unidade de entre amortecedor de eixo direto e fase.}$$

equação 3.24

$$\bar{L}_{kfd} = \frac{L_{kfd}}{L_{kd(\text{base})} \cdot \frac{i_{kd(\text{base})}}{i_{fd(\text{base})}}} = \text{indutância por unidade entre enrolamento amortecedor de eixo direto e campo.}$$

equação 3.25

$$\bar{L}_{kaq} = \frac{L_{kaq}}{\frac{2}{3} \cdot L_{kq(\text{base})} \cdot \frac{i_{kq(\text{base})}}{i_{s(\text{base})}}} = \text{indutância por unidade de entre amortecedor de eixo q e fase.}$$

equação 3.26

Quanto aos demais valores por unidade, estes foram obtidos simplesmente dividindo-se a grandeza pelo correspondente valor base.

Comparando, por exemplo, as equações 3.20 e 3.25, temos em ambas as equações a mútua indutância por unidade de entre enrolamentos de campo e amortecedor de eixo direto. Sabendo que $L_{fkd} = L_{kfd}$, resta-nos agora fazer $\bar{L}_{fkd} = \bar{L}_{kfd}$. Para tanto :-

$$\frac{L_{fkd}}{L_{fd(base)} \cdot \frac{i_{fd(base)}}{i_{kd(base)}}} = \frac{L_{kfd}}{L_{kd(base)} \cdot \frac{i_{kd(base)}}{i_{fd(base)}}}$$

ou :-

$$L_{fd(base)} \cdot (i_{fd(base)})^2 = L_{kd(base)} \cdot (i_{kd(base)})^2$$

Multiplicando ambos os membros por $\omega_{(base)}$, e, considerando que $\omega_{base} \cdot L_{base} \cdot i_{base} = e_{base}$, a equação anterior pode ser dada por :-

$e_{fd(base)} \cdot i_{fd(base)} = e_{kd(base)} \cdot i_{kd(base)}$	equação 3.27
---	-----------------

que nos permite afirmar :-

"PARA QUE TENHAMOS DOIS ENROLAMENTOS COM MÚTUAS INDUTÂNCIAS POR UNIDADE RECÍPROCAS, É NECESSÁRIO QUE AS POTÊNCIAS EM VOLT-AMPERE PARA AMBOS OS ENROLAMENTOS SEJAM AS MESMAS".

Poderíamos facilmente demonstrar mais uma vez a afirmação anterior, verificando a condição necessária para que $\bar{L}_{afd} = \bar{L}_{fad}$. Neste caso encontraríamos :-

$$\frac{3}{2} e_{s(\text{base})} \cdot i_{s(\text{base})} = e_{fd(\text{base})} \cdot i_{fd(\text{base})}$$

equação
3.28

Da equação acima, observamos que para que as mútuas indutâncias por unidade, entre os circuitos do rotor e estator, sejam recíprocas, a base volt-ampere nos circuitos do rotor deve ser a mesma do estator, fato este que vem confirmar o que dissemos anteriormente.

Escolha da Corrente Base do Rotor

Até o presente momento, para os circuitos do rotor, foram especificadas apenas as potências-base. Como existem sempre duas variáveis independentes que podem ser tomadas como base, então uma outra condição deve ser estabelecida de modo a escolhermos, por exemplo, a tensão ou corrente como valor base independente. Feito isto, teremos as demais grandezas base do rotor.

As indutâncias L_d e L_q são as auto-indutâncias totais dos enrolamentos do estator. Estas auto-indutâncias compreendem duas partes :-

- Uma parcela correspondente a um fluxo que não atinge os enrolamentos do rotor;
- Outra que atinge os enrolamentos do rotor.

Considerando que os primeiros se referem a linhas de força que se estabelecem por caminhos de mesma relutância, podemos adotar tanto para o eixo direto como para o eixo em quadratura, as indutâncias correspondentes, iguais.

Nestas condições, separando os efeitos :-

$$L_d = L_e + L_{ad}$$

equações 3.29

$$L_q = L_e + L_{aq}$$

onde :-

L_e - exprime o efeito do fluxo que se estabelece por dispersão na própria bobina.

L_{ad} , L_{aq} - exprimem o efeito do fluxo que atinge o enrolamento do rotor.

As indutâncias L_{ad} , L_{afd} e L_{akd} são portanto indutâncias que pertencem a um mesmo eixo. Escolhendo para as mesmas uma base apropriada, podemos fazer com que :-

$$\bar{L}_{ad} = \bar{L}_{afd} = \bar{L}_{akd} \quad \text{-equação 3.30}$$

Assim como para as indutâncias pertencentes ao eixo q :-

$$\bar{L}_{aq} = \bar{L}_{akq} \quad \text{equação 3.31}$$

As equações 3.30 e 3.31 mostram que se deseja ainda que as mútuas indutâncias por unidade pertencentes a um determinado eixo, sejam iguais.

Tomando a equação 3.30 e considerando as respectivas equações por unidade :-

$$\bar{L}_{ad} = \frac{L_{ad}}{L_{s(\text{base})}} = \bar{L}_{afd} = \frac{L_{afd}}{L_{s(\text{base})} \cdot \frac{i_{s(\text{base})}}{i_{fd(\text{base})}}} =$$

$$= \bar{L}_{akd} = \frac{L_{akd}}{L_{s(base)} \cdot \frac{i_{s(base)}}{i_{kd(base)}}}$$

De onde podemos escrever que :-

$$i_{fd(base)} = \frac{L_{ad}}{L_{afd}} \cdot i_{s(base)} \quad \text{equação 3.32}$$

$$i_{kd(base)} = \frac{L_{ad}}{L_{akd}} \cdot i_{s(base)} \quad \text{equação 3.33}$$

De modo semelhante :-

$$i_{kq(base)} = \frac{L_{aq}}{L_{akq}} \cdot i_{s(base)} \quad \text{equação 3.34}$$

IV - OPERAÇÃO EM REGIME PERMANENTE

4.1 - OBJETIVO

Até o presente momento foram desenvolvidas a maioria das pesquisas que caracterizam a máquina síncrona, não sendo ainda possível nos resultados obtidos, nenhuma conclusão quanto ao seu regime de operação.

Neste capítulo, utilizando as citadas pesquisas, serão analisados os fenômenos que ocorrem durante a operação em regime permanente a partir do instante em que a máquina é colocada em carga. Após essa análise, serão ainda deduzidas as condições que permitem a operação em regime permanente.

CAPITULO IV

OPERAÇÃO EM REGIME PERMANENTE

Quando a máquina é colocada em carga, a corrente de excitação é mantida constante, e a tensão de saturação, até agora não levada em consideração, começa a variar. Quanto a este ponto, serão apresentadas as reações que se produzem e como sofrerão correção, bem como, o estado empregado para a análise.

4.1 - OPERAÇÃO EM REGIME PERMANENTE

Antes de entrarmos diretamente no problema que nos propomos, apresentaremos a nomenclatura a ser utilizada ao longo do texto, a qual consistirá no seguinte:

1 - A bobina dos terminais de uma determinada bobina, que se refere ao eixo da máquina a que se refere. Natureza física, de acordo com a bobina, se a bobina é do eixo, esta bobina apresentará a força eletromotriz induzida. Posteriormente, quando nos referirmos ao eixo,

IV - OPERAÇÃO EM REGIME PERMANENTE

4.1 - OBJETIVO

Até o presente momento foram desenvolvidas e -
quações gerais que caracterizam a máquina síncrona, não sendo
ainda imposta nos resultados obtidos, nenhuma condição quanto
ao seu regime de operação.

Neste capítulo, utilizando as citadas equações
gerais, procuraremos analisar a máquina operando inicialmente
em regime permanente a vazio e, posteriormente em carga. Após
estas análises, serão ainda deduzidas as equações que permi-
tem o traçado do diagrama vetorial para as máquinas síncro-
nas.

Um outro problema a ser abordado refere-se ao
efeito de saturação, até agora não levado em consideração.
Quanto a este ponto, serão apresentadas as reatâncias que de-
vem sofrer correção, bem como, o método empregado para tal
fim.

4.2 - OPERAÇÃO EM REGIME PERMANENTE

Antes de entrarmos diretamente no problema a
que nos propomos, apresentaremos a nomenclatura a ser utiliza-
da no desenvolvimento, a qual consistirá no seguinte :-

e = Tensão nos terminais de uma determinada bobina, onde
um índice designa a bobina a que se refere. Natural-
mente, no regime a vazio, se a bobina é do estator
esta grandeza corresponderá a força eletromotriz indu-
zida. Posteriormente, quando nos referimos ao funcio

\bar{e} , \bar{i} e $\bar{\psi}$ correspondem as amplitudes da fem, corrente e fluxo, em valores por unidade.

Utilizando das transformações $d q o$ e, considerando que $\theta = \omega t + \theta_0$, onde θ_0 corresponde ao ângulo que dá a posição inicial do eixo d do rotor, relativamente à fase a , as equações acima se transformam em :-

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_d &= \bar{e} \cdot \cos \theta_0 \\ \bar{e}_q &= -\bar{e} \cdot \sin \theta_0 \\ \bar{e}_o &= 0 \end{aligned} \right\} \text{equações 4.1}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_d &= \bar{i} \cdot \cos(\theta_0 - \phi) \\ \bar{i}_q &= -\bar{i} \cdot \sin(\theta_0 - \phi) \\ \bar{i}_o &= 0 \end{aligned} \right\} \text{equações 4.2}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}_d &= \bar{\psi} \cdot \cos(\theta_0 - \beta) \\ \bar{\psi}_q &= -\bar{\psi} \cdot \sin(\theta_0 - \beta) \\ \bar{\psi}_o &= 0 \end{aligned} \right\} \text{equações 4.3}$$

Lembrando das equações de e_d , e_q e e_o dadas por 3.7, 3.8 e 3.9 e, visto que todas as grandezas acima são quantidades constantes, as parcelas :-

$$\frac{d\bar{\psi}_q}{d\bar{t}} \quad \text{e} \quad \frac{d\bar{\psi}_d}{d\bar{t}}$$

serão nulas, assim como $\bar{\omega} = 1,0$, pois estando a máquina em regime permanente, então $\omega = \omega_{(base)}$. Com tais considerações e agrupando às equações 4.1 as expressões 3.7, 3.8 e 3.9 resultantes da imposição destas considerações, teremos :-

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_d &= -\bar{\psi}_q - \bar{R} \cdot \bar{i}_d \\ \bar{e}_q &= \bar{\psi}_d - \bar{R} \cdot \bar{i}_q \\ \bar{e}_o &= 0 \\ \bar{e}_{fd} &= \bar{R}_{fd} \cdot \bar{i}_{fd} \end{aligned} \right\}$$

Quanto aos fluxos $\bar{\psi}_d$, $\bar{\psi}_q$, $\bar{\psi}_o$, $\bar{\psi}_{fd}$, $\bar{\psi}_{kd}$ e $\bar{\psi}_{kq}$ dados pelas equações 3.14, 3.15, 3.16, 3.21, 3.22 e 3.23, os mesmos podem ser resumidos conforme mostraremos a seguir, pois no regime permanente $i_{kd} = i_{kq} = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}_d &= -\bar{L}_d \cdot \bar{i}_d + \bar{L}_{afd} \cdot \bar{i}_{fd} \\ \bar{\psi}_q &= -\bar{L}_q \cdot \bar{i}_q \\ \bar{\psi}_o &= 0 \\ \bar{\psi}_{fd} &= -\bar{L}_{fad} \cdot \bar{i}_d + \bar{L}_{ffd} \cdot \bar{i}_{fd} \\ \bar{\psi}_{kd} &= -\bar{L}_{kad} \cdot \bar{i}_d + \bar{L}_{kfd} \cdot \bar{i}_{fd} \\ \bar{\psi}_{kq} &= -\bar{L}_{kaq} \cdot \bar{i}_q \end{aligned} \right\}$$

Com relação as indutâncias que compõem estas equações é interessante lembrar que :-

$$\bar{L}_d = \bar{L}_e + \bar{L}_{ad}$$

$$\bar{L}_q = \bar{L}_e + \bar{L}_{aq}$$

$$\bar{L}_{ad} = \bar{L}_{afd} = \bar{L}_{akd} = \bar{L}_{fad} = \bar{L}_{kad}$$

$$\bar{L}_{aq} = \bar{L}_{akq} = \bar{L}_{kaq}$$

4.2.1 - Operação em circuito aberto - Determinação de \bar{L}_{ad} :-

Nestas condições i_a , i_b e i_c serão nulas e consequentemente $i_d = i_q = 0$. Deste modo as equações anteriores podem ser dadas por :-

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_d &= -\bar{\psi}_q \\ \bar{e}_q &= \bar{\psi}_d \\ \bar{e}_{fd} &= \bar{R}_{fd} \cdot \bar{i}_{fd} \end{aligned} \right\} \text{equações 4.4}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}_d &= \bar{L}_{afd} \cdot \bar{i}_{fd} = \bar{L}_{ad} \cdot \bar{i}_{fd} \\ \bar{\psi}_q &= 0 \\ \bar{\psi}_{fd} &= \bar{L}_{ffd} \cdot \bar{i}_{fd} \\ \bar{\psi}_{kd} &= \bar{L}_{kfd} \cdot \bar{i}_{fd} \end{aligned} \right\} \text{equações 4.5}$$

Substituindo $\bar{\psi}_d$ e $\bar{\psi}_q$ em 4.4 :-

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_d &= 0 \\ \bar{e}_q &= \bar{L}_{afd} \cdot \bar{i}_{fd} = \bar{L}_{ad} \cdot \bar{i}_{fd} \\ \bar{e}_{fd} &= \bar{R}_{fd} \cdot \bar{i}_{fd} \end{aligned} \right\} \text{equações 4.6}$$

Naturalmente estas equações poderão retornar àquelas válidas para a máquina física. Uma vez que a máquina está operando a vazio, a tensão nos terminais dos enrolamentos do estator seria a própria fem induzida no enrolamento, a qual como já é conhecido, é representada pela letra e . Assim, colocando-se ainda, um índice para especificar o enrolamento

a que se refere, podemos dizer que e_a corresponde a fem induzida na fase a da máquina física.

Do mesmo modo como conseguimos obter e_d , e_q e e_o a partir de e_a , e_b e e_c , poderíamos efetuar uma operação inversa, obtendo como resultado uma expressão que nos permitirá obter as fems nas três fases da máquina, desde que sejam conhecidas as correspondentes no sistema $d q o$. Assim procedendo:

$$\bar{e}_a = \bar{e}_d \cdot \cos\theta - \bar{e}_q \cdot \sin\theta + \bar{e}_o \quad \text{equação 4.7}$$

Para o caso do funcionamento a vazio, uma vez que $\bar{e}_d = \bar{e}_o = 0$, teremos:

$$\bar{e}_a = -e_q \cdot \sin\theta$$

Considerando que a fem na fase a tem uma expressão do tipo $\bar{e}_a = \bar{e} \cdot \cos(\omega t)$, então \bar{e}_q deverá ser igual a amplitude de \bar{e}_a . Colocando esta amplitude (e) em função do valor eficaz,

$$e = \sqrt{2} \cdot E$$

Sabemos também que a amplitude da tensão do estator está relacionada com seu valor eficaz por :-

$$e_{s(\text{base})} = \sqrt{2} \cdot E_{s(\text{base})}$$

Dividindo $e = \sqrt{2} \cdot E$ por esta última equação :-

$$\bar{e} = \bar{E} = \bar{e}_q$$

Substituindo \bar{e}_q por sua correspondente expressão dada por 4.6:

$$\bar{E} = \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{fd} \quad \text{equação 4.8}$$

Baseando-nos na expressão 4.8 surge um método para a determinação de \bar{L}_{ad} . Para tanto, suponhamos conhecida a característica a vazio da máquina $E = f(i_{fd})$, e, tomemos um ponto de operação tal que $i_{fd} = i_{fd}(\text{base})$.

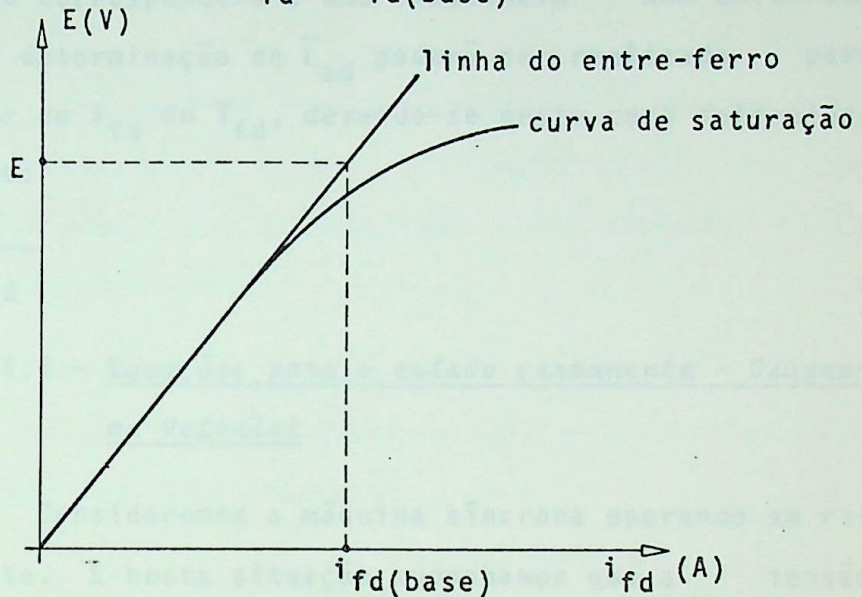


Fig. 4.1 - Característica a vazio da máquina síncrona $E = f(i_{fd})$.

Nestas condições como $\bar{i}_{fd} = 1$, a equação anteriormente referida resume-se em :-

$$\bar{E} = \bar{L}_{ad} = \frac{E}{E_s(\text{base})} \quad \text{equação 4.9}$$

Conhecida pois E e $E_s(\text{base})$ pode-se calcular a procurada indutância por unidade.

Naturalmente, poderíamos também construir a característica já com as grandezas em valores por unidade, e, nesta situação, para o ponto de operação correspondente a corrente de excitação nominal, podemos escrever :-

$$\bar{L}_{ad} = \bar{E}$$

Um outro ponto que deve ser observado é que, considerando que os valores de \bar{L}_{ad} são determinados através da linha do entre-ferro, conforme indicamos na figura, então o valor encontrado corresponderá a uma indutância *NÃO-SATURADA*. Deste modo, a determinação de \bar{L}_{ad} poderá ser realizada para qualquer valor de i_{fd} ou T_{fd} , devendo-se neste caso determinar \bar{L}_{ad} utilizando:

$$\bar{L}_{ad} = \frac{\bar{E}}{T_{fd}}$$

4.2.2 - Equações para o estado permanente - Diagrama Vetorial

Consideremos a máquina síncrona operando em regime permanente. E nesta situação suponhamos que a tensão a vazio nos terminais da fase a seja:

$$\bar{e}_a = \bar{e} \cdot \cos \bar{\omega} t$$

Neste estudo como o objetivo é o traçado do diagrama vetorial, o importante não é o valor máximo da onda anterior, mas sim, o seu ângulo de fase, uma vez que esta grandeza nos permite posicionar os fasores nos diagramas a serem obtidos.

Se a tensão a vazio é mantida como referência e a máquina é colocada suprimindo uma determinada carga, então, a tensão nos seus terminais que era \bar{e}_a assume a forma:

$$\bar{e}_a(\text{carga}) = \bar{v}_a = \bar{v} \cdot \cos(\bar{\omega} t - \delta)$$

onde:

\bar{v} = amplitude da tensão nos terminais da fase α , estando

a máquina em carga.

δ = ângulo entre a tensão e a fem, que depende da carga. Este ângulo é normalmente designado por *ângulo de potência*.

Esta análise inicial é importante para os estudos que serão realizados a seguir, onde serão obtidas as expressões das grandezas que caracterizam o funcionamento em carga de uma máquina síncrona.

Conforme foi visto, estando a máquina a vazio, o correspondente sistema de tensões do estator, transformado ao sistema $d q o$ tem como resultado:

$$\bar{e}_d = 0$$

$$\bar{e}_q = \bar{\psi}_d = \bar{L}_{afd} \cdot \bar{i}_{fd} = \bar{L}_{ad} \cdot \bar{i}_{fd} = \bar{E}$$

$$\bar{e}_o = 0$$

Se efetuarmos as transformações inversas, no sentido de obter \bar{e}_a , \bar{e}_b e \bar{e}_c , chegaremos aos resultados apresentados a seguir, onde podemos confrontar, por exemplo, a fem e_a com aquela expressão anteriormente apresentada, bastando para tanto que se faça $\theta = (\omega t - 90^\circ)$. Naturalmente esta seria uma situação particularizada para θ_0 .

$$\bar{e}_a = -\bar{E}_q \cdot \text{sen} \theta = -\bar{E} \cdot \text{sen} \theta$$

$$\bar{e}_b = -\bar{E}_q \cdot \text{sen} \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) = -\bar{E} \cdot \text{sen} \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\bar{e}_c = -\bar{E}_q \cdot \text{sen} \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) = -\bar{E} \cdot \text{sen} \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

Ao se conectar uma carga trifásica equilibrada aos

terminais da máquina, a tensão que antes era e passa a ser v , conforme mostramos anteriormente.

Portanto:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_a &= -\bar{v} \cdot \text{sen}(\theta - \delta) = \bar{v} \cdot \text{sen}(\delta - \theta) \\ \bar{v}_b &= -\bar{v} \cdot \text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3} - \delta\right) = \bar{v} \cdot \text{sen}\left(\delta - \theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \bar{v}_c &= -\bar{v} \cdot \text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3} - \delta\right) = \bar{v} \cdot \text{sen}\left(\delta - \theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{equações} \\ 4.10 \end{array}$$

Utilizando das componentes d q o , o sistema acima pode ser dado por:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_d &= \bar{v} \cdot \text{sen} \delta \\ \bar{v}_q &= \bar{v} \cdot \text{cos} \delta \\ \bar{v}_o &= 0 \end{aligned} \right\} \text{equações 4.11}$$

É evidente que a amplitude da tensão, por unidade de (\bar{v}), é igual ao correspondente valor eficaz por unidade.

$$\bar{v} = \bar{V}$$

Portanto:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_d &= \bar{V} \cdot \text{sen} \delta \\ \bar{v}_q &= \bar{V} \cdot \text{cos} \delta \\ \bar{v}_o &= 0 \end{aligned} \right\} \text{equações 4.12}$$

Onde o ângulo δ , conforme dissemos, está vinculado com a carga alimentada pelo gerador.

As relações dadas por 4.12 permitem o traçado a seguir.

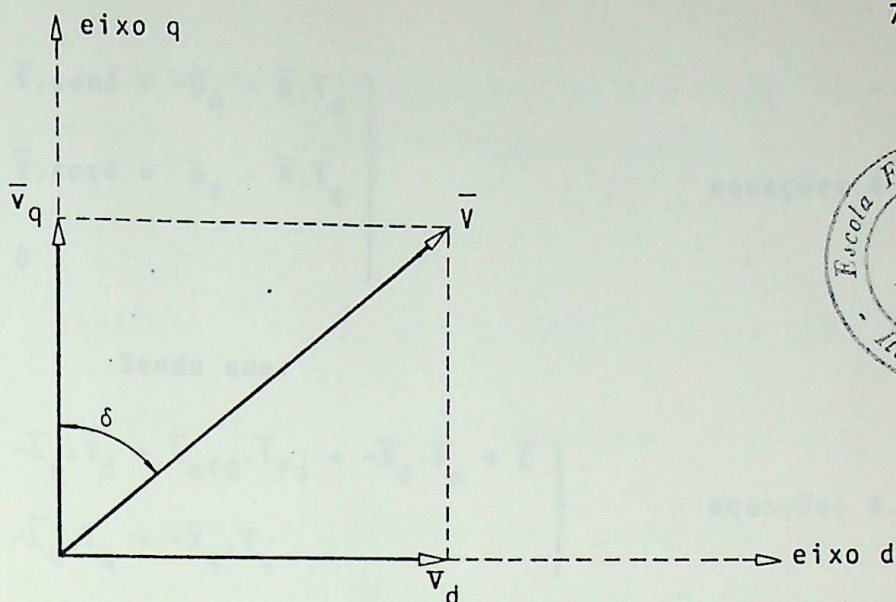


Fig. 4.2 - Representação da tensão nos terminais da máquina e suas componentes sobre os eixos d e q .

Sabe-se que sendo:

$$X = \omega L$$

Podemos ter:

$$X_{(\text{base})} = \omega_{(\text{base})} \cdot L_{(\text{base})}$$

Usualmente, a frequência ou pulsação base é escolhida como aquela nominal do sistema sob condições normais de funcionamento. Conseqüentemente, os valores por unidade das reatâncias e correspondentes indutâncias serão as mesmas, ou seja:

$$\bar{L} = \bar{X}$$

Com relação às equações 4.12, as mesmas podem ser dadas por:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_d &= \bar{V} \cdot \text{sen} \delta = -\bar{\psi}_q - \bar{R} \cdot \bar{i}_d \\ \bar{v}_q &= \bar{V} \cdot \text{cos} \delta = \bar{\psi}_d - \bar{R} \cdot \bar{i}_q \\ \bar{v}_o &= 0 \end{aligned} \right\} \text{equações 4.13}$$

Sendo que:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}_d &= -\bar{L}_d \cdot \bar{i}_d + \bar{L}_{afd} \cdot \bar{i}_{fd} = -\bar{X}_d \cdot \bar{i}_d + \bar{E} \\ \bar{\psi}_q &= -\bar{L}_q \cdot \bar{i}_q = -\bar{X}_q \cdot \bar{i}_q \end{aligned} \right\} \text{equações 4.14}$$

Substituindo estas equações de fluxo em 4.13 e, resolvendo relativamente a \bar{i}_d e \bar{i}_q , encontraríamos:

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_d &= \frac{-\bar{R} \cdot \bar{V} \cdot \text{sen} \delta + \bar{X}_q (\bar{E} - \bar{V} \cdot \text{cos} \delta)}{\bar{X}_d \cdot \bar{X}_q + \bar{R}^2} \\ \bar{i}_q &= \frac{\bar{X}_d \cdot \bar{V} \cdot \text{sen} \delta + \bar{R} (\bar{E} - \bar{V} \cdot \text{cos} \delta)}{\bar{X}_d \cdot \bar{X}_q + \bar{R}^2} \end{aligned} \right\} \text{equações 4.15}$$

As equações apresentadas acima serão de relevante importância para a dedução da expressão da potência transferida, razão pela qual as apresentamos neste ponto, uma vez que estamos trabalhando com as correntes do estator. Posteriormente apresentaremos estas mesmas correntes em forma bem mais simplificada, utilizando para tanto as definições básicas da transformação $d q o$.

As correntes dadas por 4.15 se referem a correntes i_a , i_b e i_c , transformadas ao sistema $d q o$. Portanto, é possível retornar ao sistema primitivo de correntes, aplicando-se expressões similares aquelas anteriormente apresentadas para as tensões.

Supondo que as correntes de fase estão atrasadas das tensões \bar{v}_a , \bar{v}_b e \bar{v}_c de um ângulo ϕ , então:

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_a &= -\bar{i} \cdot \text{sen}(\theta - \delta - \phi) = \bar{i} \cdot \text{sen}(\delta + \phi - \theta) \\ \bar{i}_b &= -\bar{i} \cdot \text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3} - \delta - \phi\right) = \bar{i} \cdot \text{sen}\left(\delta + \phi - \theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \bar{i}_c &= -\bar{i} \cdot \text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3} - \delta - \phi\right) = \bar{i} \cdot \text{sen}\left(\delta + \phi - \theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} \text{eq. 4.16}$$

Como estas correntes têm a mesma forma das tensões \bar{v}_a , \bar{v}_b e \bar{v}_c , então, as mesmas retornando ao sistema $d q o$ tomam a forma:

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_d &= \bar{i} \cdot \text{sen}(\delta + \phi) \\ \bar{i}_q &= \bar{i} \cdot \text{cos}(\delta + \phi) \\ \bar{i}_o &= 0 \end{aligned} \right\} \text{equações 4.17}$$

Desde que $i = I$, onde I é o valor eficaz por unidade da corrente de fase, então:

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_d &= \bar{I} \cdot \text{sen}(\delta + \phi) \\ \bar{i}_q &= \bar{I} \cdot \text{cos}(\delta + \phi) \end{aligned} \right\} \text{equações 4.18}$$

que representadas no diagrama da figura anterior:

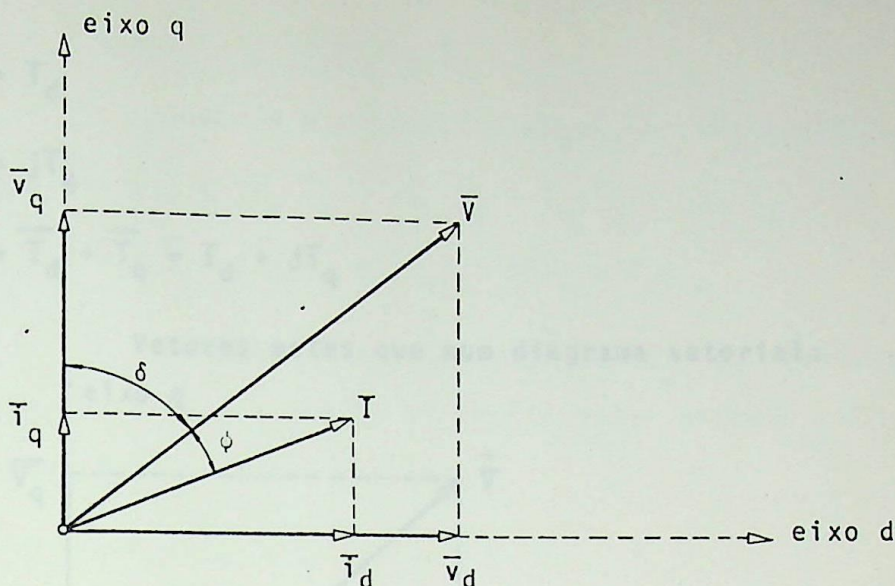


Fig. 4.3 - Representação da tensão e corrente e suas componentes sobre os eixos d e q .

Embora as quantidades anteriores (figura 4.3) sejam grandezas escalares, elas podem ser expressas simbolicamente como vetores, estando todas as quantidades do eixo q adiantadas de 90° das quantidades de eixo d . Uma escolha de relações vetoriais seria ter o eixo d como eixo real e o eixo q como eixo imaginário. Deve-se ter em mente que estes eixos giram no espaço a uma velocidade igual a do rotor e, neste sentido, estão conceitualmente relacionadas ao fasor, representando uma quantidade alternada que conforme sabemos corresponde a um vetor que gira com velocidade síncrona.

Com tais suposições, podemos chamar:

$$\vec{\bar{v}}_d = \bar{v}_d$$

$$\vec{\bar{v}}_q = j\bar{v}_q$$

$$\vec{\bar{v}} = \vec{\bar{v}}_d + \vec{\bar{v}}_q = \bar{v}_d + j\bar{v}_q$$

Analogamente:

$$\vec{i}_d = \bar{i}_d$$

$$\vec{i}_q = j\bar{i}_q$$

$$\vec{i} = \vec{i}_d + \vec{i}_q = \bar{i}_d + j\bar{i}_q$$

Vetores estes que num diagrama vetorial:

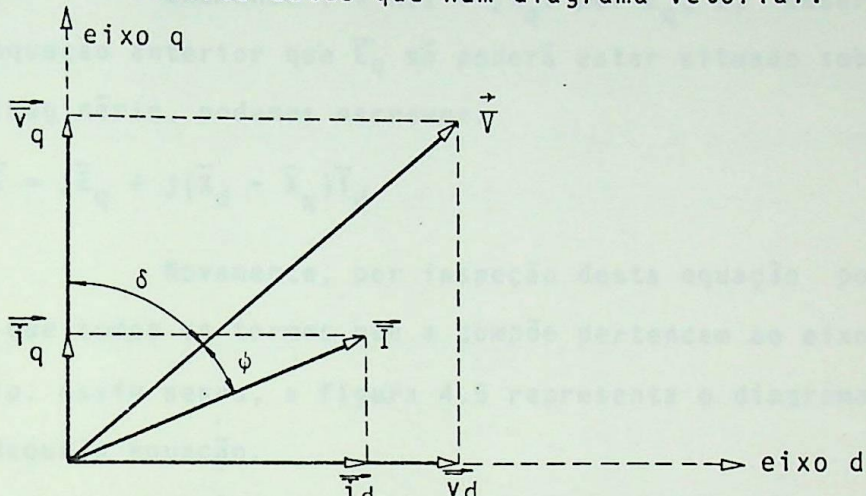


Fig. 4.4 - O diagrama vetorial com as grandezas representadas por fasores.

Procurando a elaboração do diagrama vetorial completo, façamos algumas considerações com as equações anteriormente obtidas. Foi visto pelas equações 4.13 que:

$$\bar{v}_d = \bar{V} \cdot \text{sen} \delta = \bar{X}_q \cdot \bar{i}_q - \bar{R} \cdot \bar{i}_d$$

$$\begin{aligned} j\bar{v}_q &= j\bar{V} \cdot \text{cos} \delta = j(-\bar{X}_d \cdot \bar{i}_d + \bar{E} - \bar{R} \cdot \bar{i}_q) \\ &= -j\bar{X}_d \cdot \bar{i}_d + j\bar{E} - j\bar{R} \cdot \bar{i}_q \end{aligned}$$

Somando-as membro a membro:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \bar{X}_q \cdot \bar{i}_q - \bar{R} \cdot \bar{i}_d - j\bar{X}_d \cdot \bar{i}_d + j\bar{E} - j\bar{R} \cdot \bar{i}_q = \\ &= j\bar{E} - R(\bar{i}_d + j\bar{i}_q) + \bar{X}_q \cdot \bar{i}_q - j\bar{X}_d \cdot \bar{i}_d \end{aligned}$$

ou:

$$j\bar{E} = \bar{V} + R \cdot \bar{I} - \bar{X}_q \cdot \bar{I}_q + j\bar{X}_d \cdot \bar{I}_d$$

Somando e subtraindo $jX_q \cdot i_d$ no 2º membro:

$$j\bar{E} = \bar{V} + \bar{R} \cdot \bar{I} + j\bar{X}_q \cdot \bar{I}_d - j\bar{X}_q \cdot \bar{I}_d - \bar{X}_q \cdot \bar{I}_q + j\bar{X}_d \cdot \bar{I}_d$$

$$j\bar{E} = \bar{V} + \bar{R} \cdot \bar{I} + j\bar{X}_q(\bar{I}_d + j\bar{I}_q) + j(\bar{X}_d - \bar{X}_q)\bar{I}_d$$

Chamando $\bar{V} + \bar{R} \cdot \bar{I} + j\bar{X}_q \bar{I}$ por \bar{E}_q , e, observando pela equação anterior que \bar{E}_q sô poderá estar situado sobre o eixo imaginário, podemos escrever:

$$j\bar{E} = j\bar{E}_q + j(\bar{X}_d - \bar{X}_q)\bar{I}_d$$

Novamente, por inspeção desta equação podemos notar que todos os termos que a compõe pertencem ao eixo imaginário. Assim sendo, a figura 4.5 representa o diagrama vetorial daquela equação.

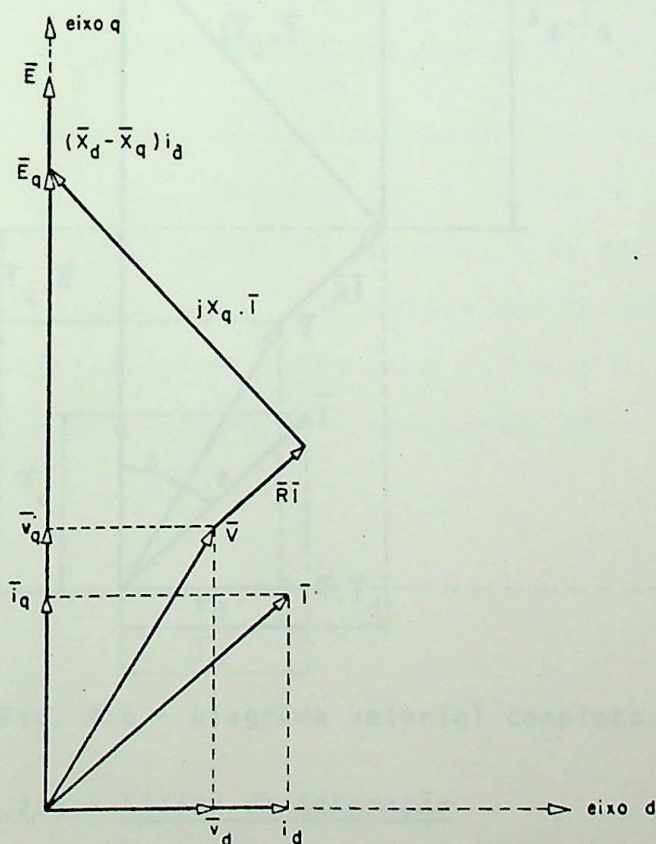


Fig. 4.5 - Diagrama vetorial com as quedas de tensão.

No diagrama anterior os termos $\vec{R}\vec{I}$ e $j\vec{X}_q\vec{I}$, podem ter a corrente \vec{I} substituída por $\vec{I}_d + j\vec{I}_q$. Portanto:

$$\vec{R}\vec{I} = \vec{R}\vec{I}_d + j\vec{R}\vec{I}_q$$

$$j\vec{X}_q\vec{I} = j\vec{X}_q\vec{I}_d + j\vec{X}_q\cdot j\vec{I}_q = -\vec{X}_q\vec{I}_q + j\vec{X}_q\vec{I}_d$$

Estando evidentemente os últimos termos situados sobre o eixo imaginário. Conseqüentemente, no diagrama anterior poderíamos acrescentar alguns pontos, e o diagrama final tomaria a forma indicada na figura 4.6.

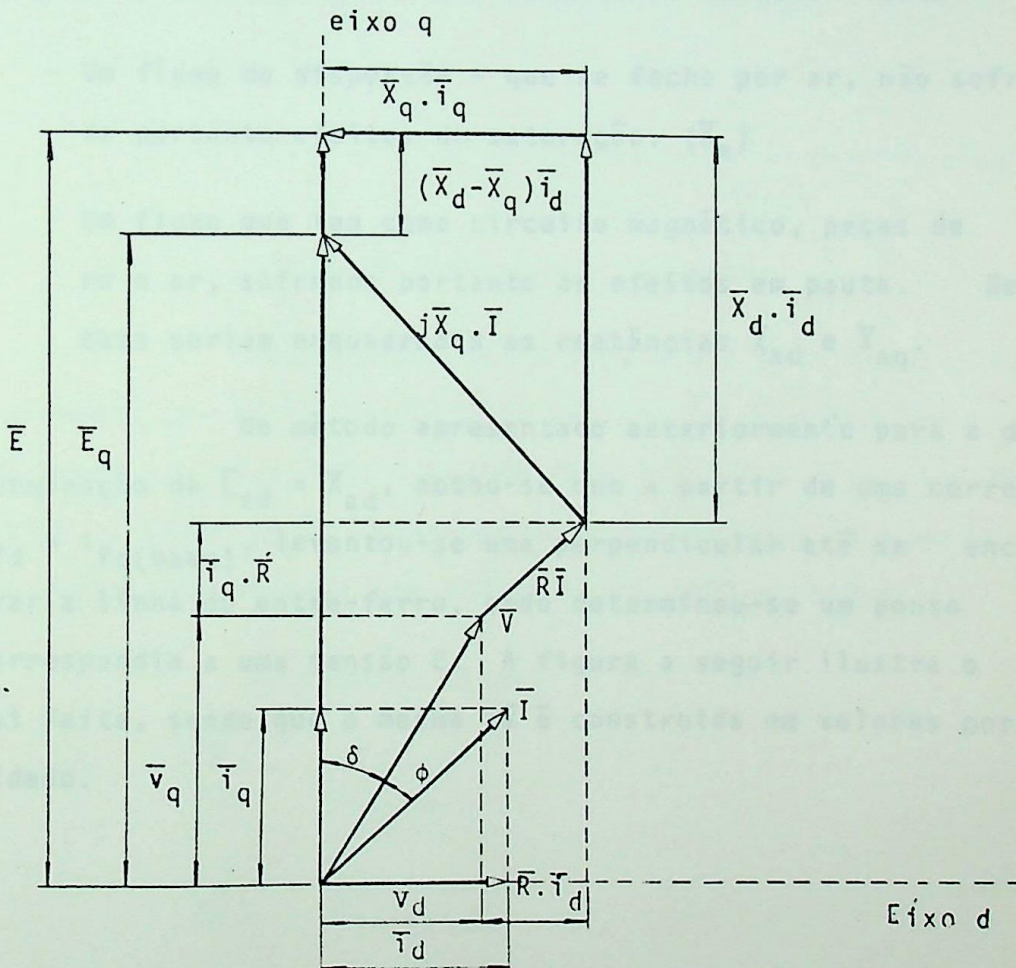


Fig. 4.6 - Diagrama vetorial completo.

4.2.3 - Efeito da Saturação

Quando se efetua experimentalmente, a determina

ção das reatâncias \bar{X}_d e \bar{X}_q , que entram como componentes do diagrama vetorial correspondente a figura 4.6, os métodos empregados, podem ou não, levar em consideração o efeito da saturação das máquinas. Se, o processo utilizado não levou em consideração este fator, então algumas correções deverão ser efetuadas, as quais serão objetivo deste nosso desenvolvimento.

Antes, entretanto, de entrarmos diretamente no assunto, devemos recordar que \bar{X}_d e \bar{X}_q são reatâncias por unidade que representam os efeitos combinados de dois fluxos.

- Um fluxo de dispersão - que se fecha por ar, não sofrendo portanto efeitos de saturação. (\bar{X}_e)
- Um fluxo que tem como circuito magnético, peças de ferro e ar, sofrendo portanto os efeitos em pauta. Neste caso seriam enquadradas as reatâncias \bar{X}_{ad} e \bar{X}_{aq} .

No método apresentado anteriormente para a determinação de $\bar{L}_{ad} = \bar{X}_{ad}$, notou-se que a partir de uma corrente $i_{fd} = i_{fd}(\text{base})$, levantou-se uma perpendicular até se encontrar a linha do entre-ferro, onde determinou-se um ponto que correspondia a uma tensão E. A figura a seguir ilustra o que foi feito, sendo que a mesma já é construída em valores por unidade.

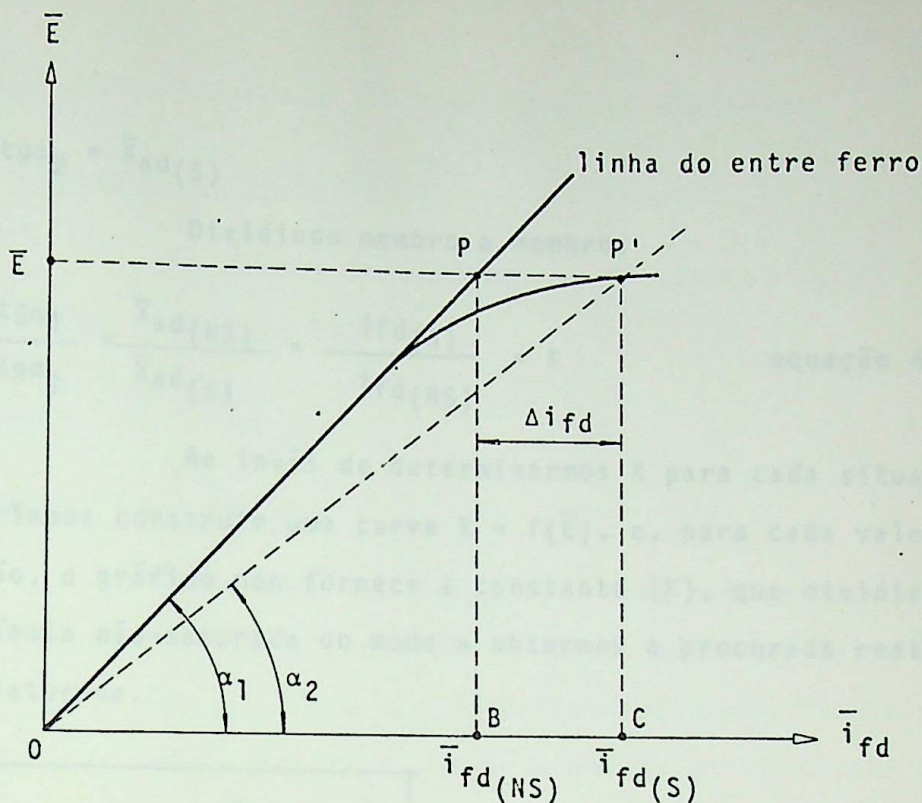


Fig. 4.7 - Efeito da Saturação.

Observa-se que na figura 4.7 para que se tenha realmente uma certa tensão E , é necessário um acréscimo Δi_{fd} à corrente $i_{fd(NS)}$, onde o índice (NS) significa NÃO SATURADO. Assim, o valor de \bar{X}_{ad} anteriormente determinado, assume um novo valor, o qual pode ser determinado, como se segue:

Da figura, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{PB}{OB} = \frac{E}{\bar{i}_{fd(NS)}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{P'C}{OC} = \frac{E}{\bar{i}_{fd(S)}}$$

Pelas expressões anteriormente apresentadas para o cálculo de $\bar{L}_{ad} = \bar{X}_{ad}$, podemos escrever:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \bar{X}_{ad(NS)}$$

É evidente que:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \bar{X}_{ad}(S)$$

Dividindo membro a membro:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\bar{X}_{ad}(NS)}{\bar{X}_{ad}(S)} = \frac{i_{fd}(S)}{i_{fd}(NS)} = K \quad \text{equação 4.19}$$

Ao invés de determinarmos K para cada situação poderíamos construir uma curva $K = f(\bar{E})$, e, para cada valor de tensão, o gráfico nos fornece a constante (K), que dividirá a reatância não-saturada de modo a obtermos a procurada reatância saturada.

$$X_{ad}(S) = \frac{X_{ad}(NS)}{K} \quad \text{equação 4.20}$$

Quanto à curva $K = f(\bar{E})$, a mesma teria o aspecto:

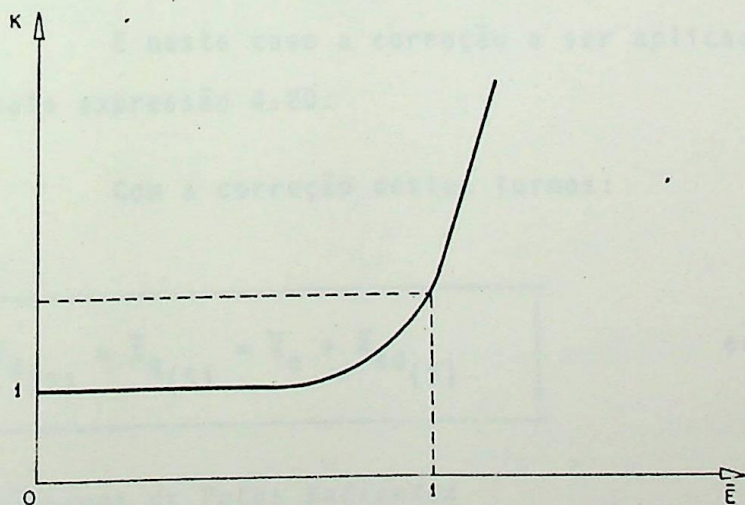


Fig. 4.8 - Fator de correção como uma função de \bar{E} .

Analisado o problema da correção, vejamos como

introduzĩ-lo para os dois tipos de m̃quinas s̃ncronas.

a - M̃quinas de Polos Lisos

Suponhamos serem dadas as reatâncias \bar{X}_d e \bar{X}_q ño saturadas. Sabemos que:

$$\bar{X}_{d(NS)} = \bar{X}_e + \bar{X}_{ad(NS)}$$

$$\bar{X}_{q(NS)} = \bar{X}_e + \bar{X}_{aq(NS)}$$

E evidente que $\bar{X}_{e(NS)}$ ño deve sofrer correç̃o, pois ẽ devida a um fluxo que se estabelece pelo ar. J̃ os termos $\bar{X}_{aq(NS)}$ e $\bar{X}_{ad(NS)}$, como s̃o correspondentes aos fluxos que se fecham por partes de ferro, devem estar sujeitos a esta correç̃o.

Quanto ̃s m̃quinas de polos lisos, como os circuitos magñticos de eixo d e q s̃o iguais, ent̃o:

$$\bar{X}_{aq(NS)} = \bar{X}_{ad(NS)}$$

E neste caso a correç̃o a ser aplicada, ẽ aquela dada pela express̃o 4.20.

Com a correç̃o destes termos:

$$\boxed{\bar{X}_{d(S)} = \bar{X}_{q(S)} = \bar{X}_e + \bar{X}_{ad(S)}} \quad \text{equaç̃o 4.21}$$

b - M̃quinas de Polos Salientes

Para tal tipo de m̃quina, devemos lembrar que o circuito magñtico para o eixo q possui um relevante entre

ferro, o que justifica desprezarmos a relutância da parte de ferro. Assim, o termo \bar{X}_{aq} não deverá sofrer correção de saturação, o mesmo ocorrendo com \bar{X}_q . Já para a reatância \bar{X}_d , o procedimento será análogo ao descrito anteriormente.

4.2.4 - Potências Ativa e Reativa

Estando a máquina operando em regime permanente, como gerador, a potência ativa entregue é dada por:

$$\bar{P} = \text{Real}\{\vec{V} \cdot \vec{I}^*\}$$

Sabemos que podemos decompor a tensão e corrente nos eixos d e q. Deste modo:

$$\vec{V} = \bar{v}_d + j\bar{v}_q$$

$$\vec{I} = \bar{i}_d + j\bar{i}_q$$

Na equação de potência:

$$\bar{P} = \text{Real}\{\bar{v}_d \bar{i}_d + \bar{v}_q \bar{i}_q + j(\bar{v}_q \bar{i}_d - \bar{v}_d \bar{i}_q)\}$$

Foi visto que:

$$\bar{v}_d = \bar{V} \text{sen} \delta$$

$$\bar{v}_q = \bar{V} \text{cos} \delta$$

Substituindo \bar{i}_d e \bar{i}_q pelas equações 4.15 vem:

$$\bar{P} = \frac{\bar{E}\bar{V}(\bar{X}_q \text{sen} \delta + \bar{R} \text{cos} \delta) - \bar{R}\bar{V}^2 + \frac{\bar{V}^2}{2}(\bar{X}_d - \bar{X}_q) \text{sen} 2\delta}{\bar{X}_d \bar{X}_q + \bar{R}^2}$$

equação 4.23

Uma vez que a resistência dos enrolamentos pode ser considerada desprezível, a equação anterior, ficaria resu-

mida a:

$$\bar{P} = \frac{\bar{E}\bar{V}}{\bar{X}_d} \operatorname{sen}\delta + \frac{\bar{V}^2(\bar{X}_d - \bar{X}_q)}{2\bar{X}_d\bar{X}_q} \operatorname{sen}2\delta \quad \text{equação 4.24}$$

Naturalmente esta equação poderá também ser usada para uma máquina de polos lisos. Nesta condição $X_d = X_q$ e a equação de potência ativa desenvolvida pela máquina assumirá a forma a seguir:

$$\bar{P} = \frac{\bar{E}\bar{V}}{\bar{X}_d} \operatorname{sen}\delta \quad \text{equação 4.25}$$

As equações 4.24 e 4.25 podem ser representadas pelas figuras abaixo.

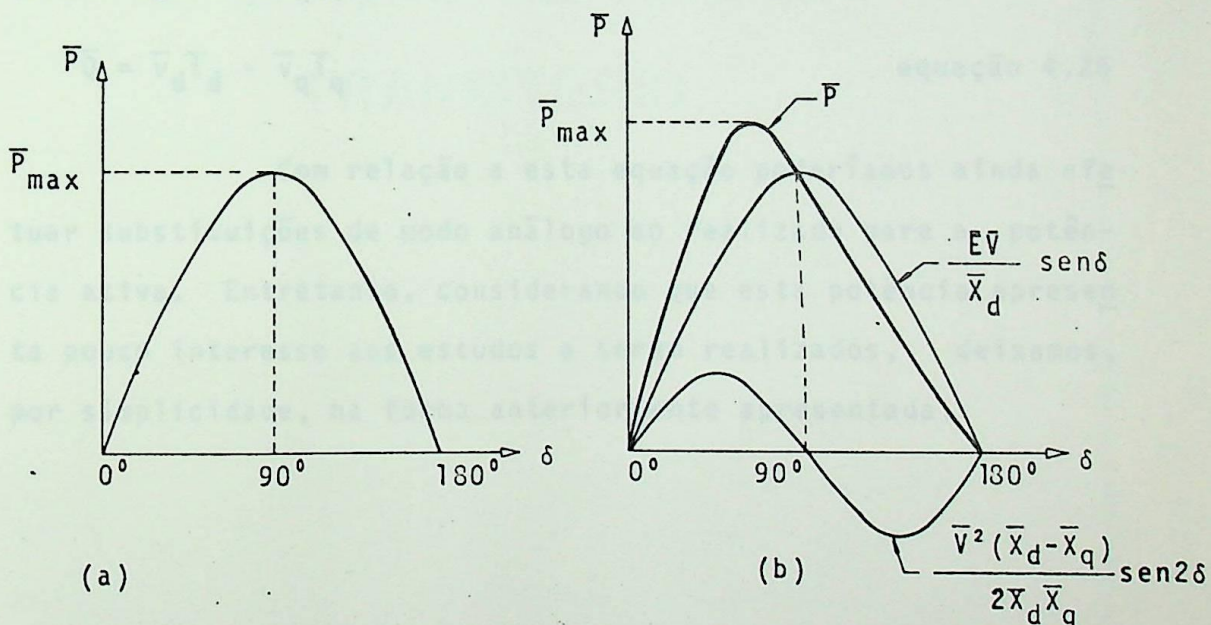


Fig. 4.9 - Variação da potência ativa desenvolvida em uma máquina síncrona, para $R \cong 0$.

a - Máquina de polos lisos.

b - Máquina de polos salientes.

Observando os gráficos anteriores vemos que o efeito da saliência dos polos, responsável pela existência do termo:

$$\frac{\bar{V}^2(x_d - x_q)}{2x_d x_q} \text{sen}2\delta$$

denominado por *potência de relutância*, faz com que a potência ativa máxima ocorra para um ângulo de potência inferior a 90° , bem como, o valor de P_{max} seja superior ao caso de considerarmos uma máquina de polos lisos, para mesmos valores de E e V.

Estas equações serão largamente utilizadas no estudo de Estabilidade de Sistemas Elétricos.

Finalmente da equação 4.22, tomando a parte imaginária, de potência em sua forma complexa, teremos a potência reativa dada por:

$$\bar{Q} = \bar{v}_d \bar{i}_d - \bar{v}_q \bar{i}_q \quad \text{equação 4.26}$$

Com relação a esta equação poderíamos ainda efetuar substituições de modo análogo ao realizado para a potência ativa. Entretanto, considerando que esta potência apresenta pouco interesse aos estudos a serem realizados, deixamos, por simplicidade, na forma anteriormente apresentada.

2 - OPERAÇÃO EM REGIME TRANSITÓRIO

2.1 - OBJETIVO

Este capítulo das precauções em análise de sistemas sob condições transitórias de operação, focaliza substancialmente questões nos fluxos de energia. Antes, em vista, de abordarmos a referida questão, algumas considerações técnicas se fazem necessárias, pois, por exemplo, de fato, a operação de sistemas de energia elétrica é considerada essencialmente estacionária, com as variáveis

CAPITULO V

OPERAÇÃO EM REGIME TRANSITÓRIO

- 1 - Circuitos de energia
- 2 - Métodos de análise
- 3 - Restrições operacionais e de segurança

2.1 - OBJETIVO

Este capítulo é dedicado a ser escrito para fornecer ao leitor uma visão geral da operação em regime transitório, de modo que possa compreender os fenômenos que ocorrem durante a operação em regime transitório, bem como as condições operacionais, para que se possa evitar os danos ao sistema.

V - OPERAÇÃO EM REGIME TRANSITÓRIO

5.1 - OBJETIVO

Neste capítulo nos preocuparemos em analisar a máquina sob condições transitórias de operação, focalizando substancialmente o efeito nos fluxos enlacados. Antes, entretanto, de abordarmos o referido assunto, algumas considerações teóricas se fazem necessárias, pois, por exemplo, em tal regime de operação as reatâncias anteriormente consideradas constantes apresentaram-se como se assumissem valores variáveis.

Com o propósito de se efetuar as análises transitórias serão destacados três tópicos principais:

- 1 - Circuito Equivalente.
- 2 - Métodos Operacionais
- 3 - Reatâncias transitória e subtransitória - constantes de tempo da máquina.

5.2 - CIRCUITO EQUIVALENTE

Embora o circuito a ser obtido seja também verdadeiro para a operação em regime permanente, só fizemos sua referência neste ponto, devido ao grande interesse na análise de condições transitórias, fato este que não ocorre no regime permanente.

Para a sua obtenção tomemos as equações de flu-

fluxos e tensões transformados ao sistema d q o.

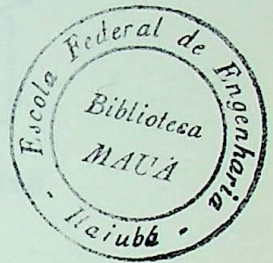
$$\text{fluxos transformados do estator} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_d = -(\bar{L}_e + \bar{L}_{ad})\bar{i}_d + \bar{L}_{ad}\bar{i}_{fd} + \bar{L}_{ad}\bar{i}_{kd} \\ \bar{\psi}_q = -(\bar{L}_e + \bar{L}_{aq})\bar{i}_q + \bar{L}_{aq}\bar{i}_{kq} \\ \bar{\psi}_0 = -\bar{L}_0\bar{i}_0 \end{array} \right.$$

$$\text{fluxos transformados do rotor} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{fd} = -\bar{L}_{ad}\bar{i}_d + \bar{L}_{ffd}\bar{i}_{fd} + \bar{L}_{fkd}\bar{i}_{kd} \\ \bar{\psi}_{kd} = -\bar{L}_{ad}\bar{i}_d + \bar{L}_{fkd}\bar{i}_{fd} + \bar{L}_{kkd}\bar{i}_{kd} \\ \bar{\psi}_{kq} = -\bar{L}_{aq}\bar{i}_q + \bar{L}_{kkq}\bar{i}_{kq} \end{array} \right.$$

$$\text{tensões transformadas do estator} \left\{ \begin{array}{l} \bar{e}_d = \frac{d\bar{\psi}_d}{d\bar{t}} - \bar{\psi}_q\bar{\omega} - \bar{R}\bar{i}_d \\ \bar{e}_q = \frac{d\bar{\psi}_q}{d\bar{t}} + \bar{\psi}_d\bar{\omega} - \bar{R}\bar{i}_q \\ \bar{e}_0 = \frac{d\bar{\psi}_0}{d\bar{t}} - \bar{R}\bar{i}_0 \end{array} \right.$$

$$\text{tensões transformadas do rotor} \left\{ \begin{array}{l} \bar{e}_{fd} = \frac{d\bar{\psi}_{fd}}{d\bar{t}} + \bar{R}_{fd}\bar{i}_{fd} \\ 0 = \frac{d\bar{\psi}_{kd}}{d\bar{t}} + \bar{R}_{kd}\bar{i}_{kd} \\ 0 = \frac{d\bar{\psi}_{kq}}{d\bar{t}} + \bar{R}_{kkq}\bar{i}_{kq} \end{array} \right.$$

Consideremos o circuito a seguir, representando todas as equações de eixo d, indicadas anteriormente.



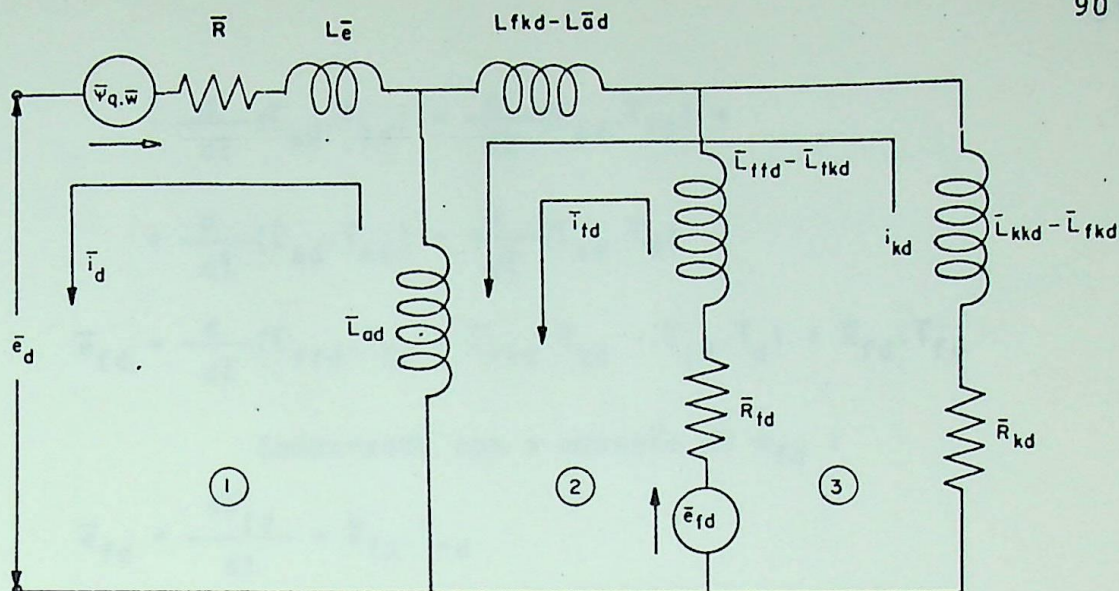


Fig.5.1 - Circuito equivalente das equações de eixo direto.

De modo a verificarmos se o circuito anterior satisfaz as equações apresentadas, facemos um percurso pela malha (2), de modo a se obter uma expressão para \bar{e}_{fd} , a qual evidentemente, deverá ser a mesma anteriormente apresentada.

Assim como será realizado para \bar{e}_{fd} poderíamos também efetuar para as demais tensões correspondentes às bobinas situadas sobre o eixo d.

$$\begin{aligned} \bar{e}_{fd} &= \bar{R}_{fd} \cdot \bar{i}_{fd} + \frac{d}{dt} \left[(\bar{L}_{ffd} - \bar{L}_{fk_d}) \bar{i}_{fd} \right] + \\ &+ \frac{d}{dt} \left[(\bar{L}_{fk_d} - \bar{L}_{ad}) \cdot (\bar{i}_{fd} + \bar{i}_{kd}) \right] \\ &+ \frac{d}{dt} \left[\bar{L}_{ad} (\bar{i}_{fd} + \bar{i}_{kd} - \bar{i}_d) \right] \end{aligned}$$

Desenvolvendo :

$$\begin{aligned} \bar{e}_{fd} &= \bar{R}_{fd} \cdot \bar{i}_{fd} + \frac{d}{dt} (\bar{L}_{ffd} \cdot \bar{i}_{fd}) - \frac{d}{dt} (\bar{L}_{fk_d} \cdot \bar{i}_{fd}) + \\ &+ \frac{d}{dt} (\bar{L}_{fk_d} \cdot \bar{i}_{fd}) - \frac{d}{dt} (\bar{L}_{ad} \cdot \bar{i}_{fd}) + \frac{d}{dt} (\bar{L}_{fk_d} \cdot \bar{i}_{kd}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{d}{dt}(\bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{kd}) + \frac{d}{dt}(\bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{fd}) + \\
 & + \frac{d}{dt}(\bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{kd}) - \frac{d}{dt}(\bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_d) \\
 \bar{e}_{fd} = & \frac{d}{dt}(\bar{L}_{ffd} \cdot \bar{I}_{fd} + \bar{L}_{fkd} \cdot \bar{I}_{kd} - \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_d) + \bar{R}_{fd} \cdot \bar{I}_{fd}
 \end{aligned}$$

Comparando com a equação de ψ_{fd} :

$$\bar{e}_{fd} = \frac{d\bar{\psi}_{fd}}{dt} + \bar{R}_{fd} \cdot \bar{I}_{fd}$$

que verifica a equação de tensão para a bobina de campo.

Equacionando a mesma malha em termos de fluxo:

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}_{fd} = & (\bar{L}_{ffd} - \bar{L}_{fkd}) \bar{I}_{fd} + (\bar{L}_{fkd} - \bar{L}_{ad})(\bar{I}_{fd} + \bar{I}_{kd}) + \\
 & + \bar{L}_{ad}(\bar{I}_{fd} + \bar{I}_{kd} - \bar{I}_d)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}_{fd} = & \bar{L}_{ffd} \cdot \bar{I}_{fd} - \bar{L}_{fkd} \cdot \bar{I}_{fd} + \bar{L}_{fkd} \cdot \bar{I}_{fd} - \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{fd} + \\
 & + \bar{L}_{fkd} \cdot \bar{I}_{kd} - \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{kd} + \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{fd} + \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{kd} - \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_d
 \end{aligned}$$

$$\bar{\psi}_{fd} = -\bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_d + \bar{L}_{ffd} \cdot \bar{I}_{fd} + \bar{L}_{fkd} \cdot \bar{I}_{kd}$$

Vemos, portanto, que também a equação de fluxo para a bobina de campo, é satisfeita.

Tal como fizemos para a malha nº 2, poderíamos também verificar as demais equações de eixo *direto*, bastando para tanto percorrer as malhas 1 e 3.

De modo a representarmos as equações de eixo q , tomemos o circuito:

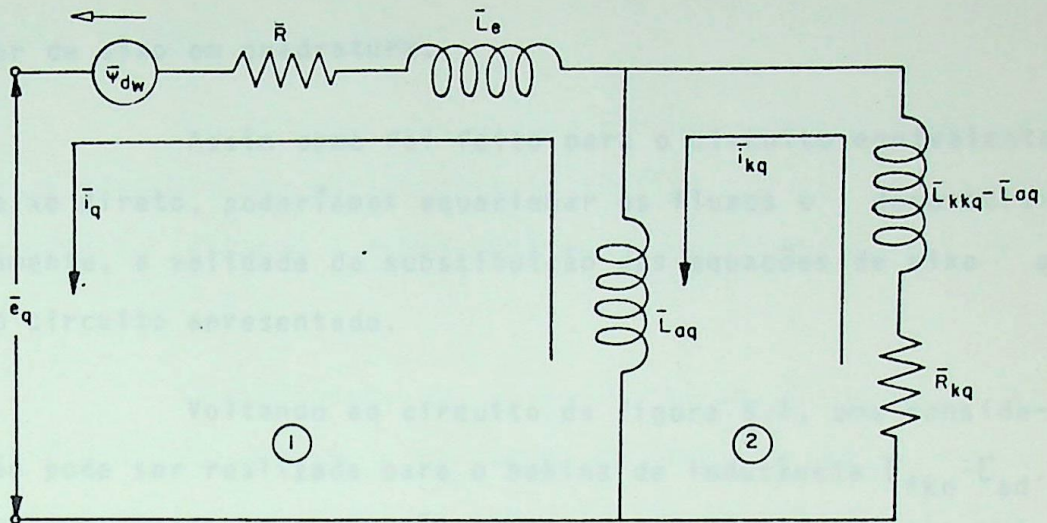


Fig.5.2 - Circuito equivalente das equações de eixo em quadratura

Percorrendo a malha 2, em termos de tensão :

$$0 = \bar{R}_{kq} \cdot \bar{i}_{kq} + \frac{d}{d\bar{t}} \left[(\bar{L}_{kkq} - \bar{L}_{aq}) \cdot \bar{i}_{kq} \right] +$$

$$+ \frac{d}{d\bar{t}} \left[\bar{L}_{aq} (\bar{i}_{kq} - \bar{i}_q) \right]$$

$$0 = \bar{R}_{kq} \cdot \bar{i}_{kq} + \frac{d}{d\bar{t}} \bar{L}_{kkq} \cdot \bar{i}_{kq} - \frac{d}{d\bar{t}} \bar{L}_{aq} \cdot \bar{i}_{kq} +$$

$$+ \frac{d}{d\bar{t}} \bar{L}_{aq} \cdot \bar{i}_{kq} - \frac{d}{d\bar{t}} \bar{L}_{aq} \cdot \bar{i}_q$$

Ou :

$$0 = \frac{d}{d\bar{t}} \left[\bar{L}_{kkq} \cdot \bar{i}_{kq} - \bar{L}_{aq} \cdot \bar{i}_q \right] + \bar{R}_{kq} \cdot \bar{i}_{kq}$$

que comparada à equação de ψ_{kq} :

$$0 = \frac{d}{d\bar{t}} \bar{\psi}_{kq} + \bar{R}_{kq} \cdot \bar{i}_{kq}$$

que vem confirmar a equação de tensão para o enrolamento amorte

cedor de eixo em quadratura.

Assim como foi feito para o circuito equivalente de eixo direto, poderíamos equacionar os fluxos e demonstrar novamente, a validade da substituição das equações de eixo q pelo circuito apresentado.

Voltando ao circuito da figura 5.1, uma consideração pode ser realizada para o bobina de indutância $\bar{L}_{fkd} - \bar{L}_{ad}$. Calculando estas duas indutâncias, encontraríamos valores muito próximos, ou seja:

$$\bar{L}_{fkd} \cong \bar{L}_{ad}$$

Em consequência o circuito equivalente assumiria o aspecto :

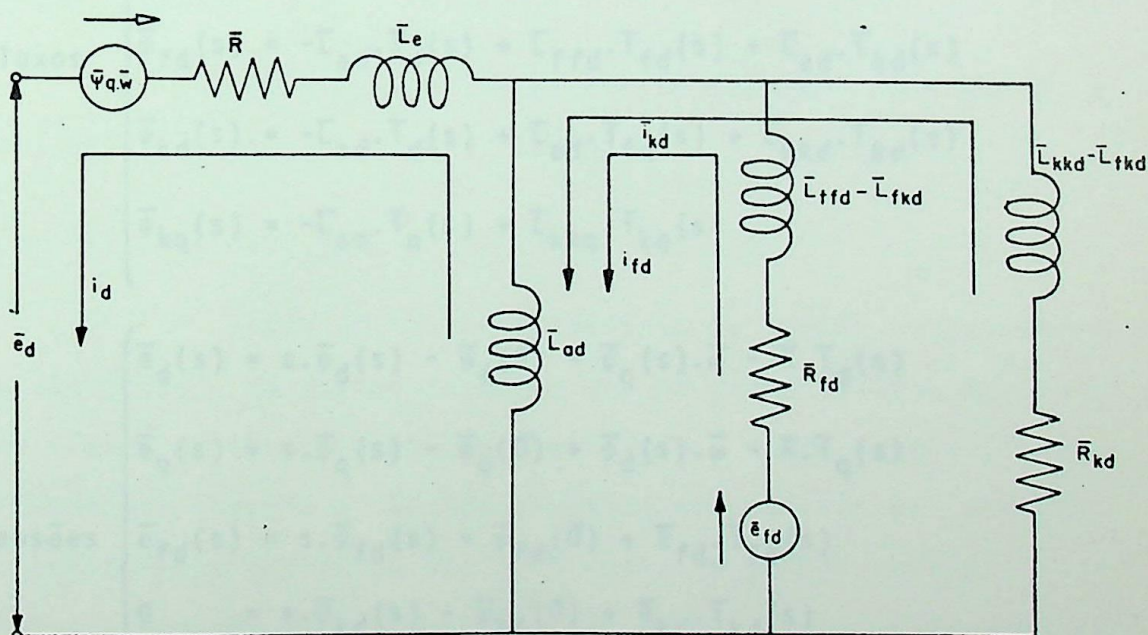


Fig. 5.3 - Circuito equivalente de eixo direto, simplificado.

5.3 - MÉTODOS OPERACIONAIS

No decorrer deste item teremos oportunidade de analisar física e matematicamente os efeitos que se processam com a máquina, estando a mesma numa condição qualquer de transitório.

Considerando que neste regime as correntes, tensões e fluxos são variaveis no tempo, as equações que reunem tais grandezas já adaptadas ao circuito equivalente simplificado, assumem a forma a seguir. Estas expressões foram obtidas por aplicação das transformadas de Laplace aos sistemas inicialmente apresentados.

$$\text{Fluxos} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_d(s) = -L_d \cdot \bar{i}_d(s) + L_{ad} \cdot \bar{i}_{fd}(s) + L_{ad} \cdot \bar{i}_{kd}(s) \\ \bar{\psi}_q(s) = -L_q \cdot \bar{i}_q(s) + L_{aq} \cdot \bar{i}_{kq}(s) \\ \bar{\psi}_{fd}(s) = -L_{ad} \cdot \bar{i}_d(s) + L_{ffd} \cdot \bar{i}_{fd}(s) + L_{ad} \cdot \bar{i}_{kd}(s) \\ \bar{\psi}_{kd}(s) = -L_{ad} \cdot \bar{i}_d(s) + L_{ad} \cdot \bar{i}_{fd}(s) + L_{kkd} \cdot \bar{i}_{kd}(s) \\ \bar{\psi}_{kq}(s) = -L_{aq} \cdot \bar{i}_q(s) + L_{kkq} \cdot \bar{i}_{kq}(s) \end{array} \right.$$

$$\text{Tensões} \left\{ \begin{array}{l} \bar{e}_d(s) = s \cdot \bar{\psi}_d(s) - \bar{\psi}_d(0) - \bar{\psi}_q(s) \cdot \bar{\omega} - R \cdot \bar{i}_d(s) \\ \bar{e}_q(s) = s \cdot \bar{\psi}_q(s) - \bar{\psi}_q(0) + \bar{\psi}_d(s) \cdot \bar{\omega} - R \cdot \bar{i}_q(s) \\ \bar{e}_{fd}(s) = s \cdot \bar{\psi}_{fd}(s) - \bar{\psi}_{fd}(0) + R_{fd} \cdot \bar{i}_{fd}(s) \\ 0 = s \cdot \bar{\psi}_{kd}(s) - \bar{\psi}_{kd}(0) + R_{kd} \cdot \bar{i}_{kd}(s) \\ 0 = s \cdot \bar{\psi}_{kq}(s) - \bar{\psi}_{kq}(0) + R_{kq} \cdot \bar{i}_{kq}(s) \end{array} \right.$$

Para os resultados acima deve-se admitir a análise

se de um transitório trifásico, razão pela qual foram omitidos os termos correspondentes a sequência nula.

Deve-se considerar também que estas equações foram obtidas do circuito equivalente simplificado, onde com relativa aproximação pudemos fazer:

$$L_{ad} \cong L_{fkd} = L_{kfd}$$

Nas equações das tensões, uma vez que estas estão relacionadas com derivadas de fluxo, o desenvolvimento obedecendo o estabelecido pelas transformadas de Laplace originou as condições iniciais dos fluxos, pois conforme sabemos :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(s)}{dt} \right\} = s f(s) - f(\bar{0})$$

Onde $f(\bar{0})$ indica a condição inicial ($t=\bar{0}$) para a função $f(t)$.

Considerando um distúrbio qualquer no sistema, o novo valor de uma função $f(t)$ seria:

$$f(t) + \Delta f(t)$$

Onde $\Delta f(t)$ corresponderia ao efeito provocado pelo distúrbio. No desenvolvimento que se segue teremos uma imagem física do termo "distúrbio" utilizado. Será constatado que estando por exemplo a máquina operando em determinada condição e, súbitamente ocorre um curto circuito, o efeito será de uma brusca alteração das características de operação. Este fato seria encarado como um "distúrbio" para o sistema.

Admitindo-se pois uma alteração de modo a vir a afetar o sistema de campo, seja a aplicação das conclusões acima

obtidas para a equação de tensão do campo.

$$\bar{e}_{fd}(s) + \Delta\bar{e}_{fd}(s) = s \left[\bar{\psi}_{fd}(s) + \Delta\bar{\psi}_{fd}(s) \right] - \bar{\psi}_{fd}(0) + \bar{R}_{fd} \left[\bar{i}_{fd}(s) + \Delta\bar{i}_{fd}(s) \right] \quad \text{equação 5.1}$$

De modo a calcularmos a variação em torno do valor primitivo:

$$\Delta\bar{e}_{fd}(s) = s \cdot \Delta\bar{\psi}_{fd}(s) + \bar{R}_{fd} \cdot \Delta\bar{i}_{fd}(s) \quad \text{equação 5.2}$$

Tomando a equação de $\bar{\psi}_{fd}(s)$ e, aplicando-se o mesmo critério teremos $\Delta\bar{\psi}_{fd}(s)$ que substituído em 5.2, nos conduziria a:

$$\Delta\bar{e}_{fd}(s) = s \left[-L_{ad} \cdot \Delta\bar{i}_d(s) + L_{ffd} \cdot \Delta\bar{i}_{fd}(s) + L_{ad} \cdot \Delta\bar{i}_{kd}(s) \right] + \bar{R}_{fd} \cdot \Delta\bar{i}_{fd}(s) \quad \text{equação 5.3}$$

O objetivo será a obtenção de uma relação entre as variáveis $\Delta\bar{e}_{fd}(s)$, $\Delta\bar{i}_{fd}(s)$ e $\Delta\bar{i}_d(s)$. Para tanto devemos eliminar $\Delta\bar{i}_{kd}(s)$ da equação 5.3, o que será feito tomando-se o incremento da equação correspondente à tensão do enrolamento amortecedor de eixo direto.

$$0 = s \cdot \Delta\bar{\psi}_{kd}(s) + \bar{R}_{kd} \cdot \Delta\bar{i}_{kd}(s) \quad \text{equação 5.4}$$

a partir da expressão de $\bar{\psi}_{kd}$, podemos obter $\Delta\bar{\psi}_{kd}(s)$, o qual substituído acima e isolando $\Delta\bar{i}_{kd}(s)$, nos permite escrever:

$$\Delta\bar{i}_{kd}(s) = \frac{[\Delta\bar{i}_d(s) - \Delta\bar{i}_{fd}(s)] \cdot s \cdot L_{ad}}{s \cdot L_{kkd} + \bar{R}_{kd}} \quad \text{equação 5.5}$$

Substituindo na equação de $\Delta\bar{e}_{fd}(s)$:

$$\Delta \bar{e}_{fd}(s) = \Delta \bar{T}_{fd}(s) \left(s \cdot \bar{L}_{ffd} - \frac{s^2 \cdot \bar{L}_{ad}^2}{s \cdot \bar{L}_{kkd} + \bar{R}_{kd}} + \bar{R}_{fd} \right) +$$

$$+ \Delta \bar{T}_d(s) \left(-s \cdot \bar{L}_{ad} + \frac{s^2 \cdot \bar{L}_{ad}^2}{s \cdot \bar{L}_{kkd} + \bar{R}_{kd}} \right) \quad \text{equação 5.6}$$

Desenvolvendo :

$$\Delta \bar{e}_{fd}(s) \left(s \cdot \bar{L}_{kkd} + \bar{R}_{kd} \right) = \Delta \bar{T}_{fd}(s) \left(s^2 \cdot \bar{L}_{ffd} \cdot \bar{L}_{kkd} + \right.$$

$$+ s \cdot \bar{L}_{ffd} \cdot \bar{R}_{kd} - s^2 \cdot \bar{L}_{ad}^2 + s \cdot \bar{L}_{kkd} \cdot \bar{R}_{fd} + \bar{R}_{kd} \cdot \bar{R}_{fd} \left. \right) +$$

$$+ \Delta \bar{T}_d(s) \left(-s^2 \cdot \bar{L}_{ad} \cdot \bar{L}_{kkd} - s \cdot \bar{L}_{ad} \cdot \bar{R}_{kd} + s^2 \cdot \bar{L}_{ad}^2 \right)$$

equação 5.7

Chamando :

$$A(s) = s^2 (\bar{L}_{kkd} \cdot \bar{L}_{ffd} - \bar{L}_{ad}^2) + s (\bar{L}_{kkd} \cdot \bar{R}_{fd} + \bar{L}_{ffd} \cdot \bar{R}_{kd}) +$$

$$+ \bar{R}_{kd} \cdot \bar{R}_{fd}$$

Introduzindo A(s) em 5.7 e isolando $\Delta \bar{T}_{fd}(s)$ teremos o seguinte resultado :

$$\Delta \bar{T}_{fd}(s) = \frac{1}{A(s)} \left((\bar{R}_{kd} + s \bar{L}_{kkd}) \Delta \bar{e}_{fd}(s) + \right.$$

$$\left. + s \cdot \bar{L}_{ad} (\bar{R}_{kd} + s \cdot \bar{L}_{kd}) \cdot \Delta \bar{T}_d(s) \right) \quad \text{equação 5.9}$$

Analogamente poderíamos obter :

$$\Delta i_{kd}(s) = \frac{1}{A(s)} \left[-s \cdot \Gamma_{ad} - \Gamma_{ad} \cdot \Delta \bar{e}_{fd}(s) + s \cdot \Gamma_{ad} (\bar{R}_{fd} + s \Gamma_{fd}) \Delta \Gamma_d(s) \right]$$

equação 5.10

E :

$$\Delta \bar{i}_{kq}(s) = \frac{s \cdot \Gamma_{aq}}{\bar{R}_{kq} + s \cdot \Gamma_{kkq}} \cdot \Delta \bar{i}_q(s)$$

equação 5.11

Deve-se observar que para atingirmos tais resultados, deve-se imaginar que as auto-indutâncias Γ_{ffd} , Γ_{kkd} e Γ_{kkq} , foram subdivididos nos efeitos correspondentes a :

- fluxos de dispersão
- fluxos que se estabelecem pelos circuitos magnéticos que originaram anteriormente Γ_{ad} e Γ_{aq} .

Assim sendo, as citadas auto-indutâncias foram em determinadas situações substituídas por :

$$\Gamma_{ffd} = \Gamma_{ad} + \Gamma_{fd}$$

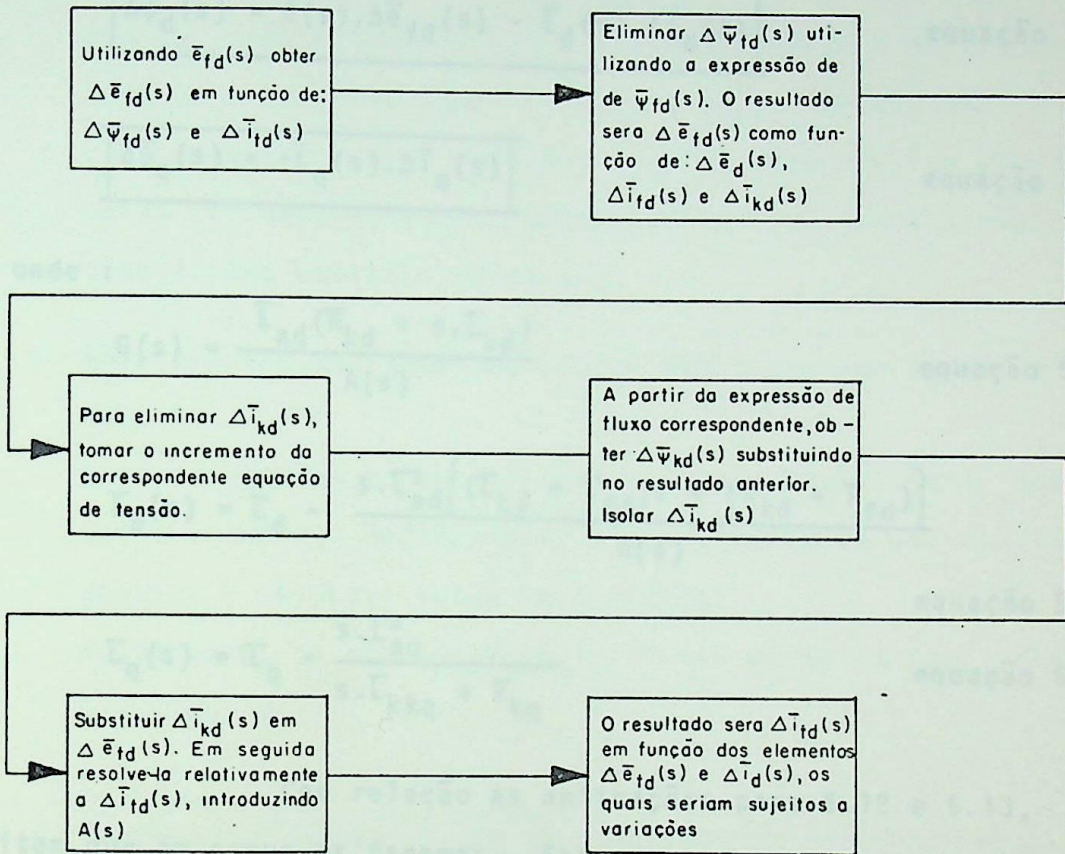
$$\Gamma_{kkd} = \Gamma_{ad} + \Gamma_{kd}$$

$$\Gamma_{kkq} = \Gamma_{aq} + \Gamma_{kq}$$

Onde Γ_{fd} , Γ_{kd} e Γ_{kq} são correspondentes aos fluxos de dispersão.

Com relação ao procedimento utilizado para obtermos as equações 5.9, 5.10 e 5.11, constatou-se um longo e trabalhoso método. Naturalmente é fácil perdermos a idéia do conjun-

to, e por este motivo, transcrevemos novamente o que foi realizado em forma de blocos, colocados na mesma sequência obedecida. Deve-se observar que exemplificaremos o diagrama para a obtenção de $\Delta \bar{i}_{fd}(s)$.



Finalmente, devemos tomar os incrementos das equações de $\psi_d(s)$ e $\psi_q(s)$ e, substituindo nestes resultados as correntes incrementais pelas expressões 5.9, 5.10 e 5.11 chegaremos aos resultados apresentados abaixo.

$$\boxed{\Delta\bar{\psi}_d(s) = G(s) \cdot \Delta\bar{e}_{fd}(s) - \bar{L}_d(s) \cdot \Delta\bar{i}_d(s)}$$

equação 5.12

$$\boxed{\Delta\bar{\psi}_q(s) = -\bar{L}_q(s) \cdot \Delta\bar{i}_q(s)}$$

equação 5.13

onde :

$$G(s) = \frac{\bar{L}_{ad}(\bar{R}_{kd} + s \cdot \bar{L}_{kd})}{A(s)}$$

equação 5.14

$$\bar{L}_d(s) = \bar{L}_d - \frac{s \cdot \bar{L}_{ad}^2 \left[(\bar{L}_{kd} + \bar{L}_{fd})s + (\bar{R}_{kd} + \bar{R}_{fd}) \right]}{A(s)}$$

equação 5.15

$$\bar{L}_q(s) = \bar{L}_q - \frac{s \cdot \bar{L}_{aq}^2}{s \cdot \bar{L}_{kq} + \bar{R}_{kq}}$$

equação 5.16

Com relação as aplicações para 5.12 e 5.13, no item que se segue as faremos. Entretanto, como podemos observar pelos resultados apresentados, as citadas equações tem por função mostrar as variações dos fluxos nas bobinas de eixo d e q , respectivamente. Com respeito aos efeitos responsáveis por estas variações temos :

- Campo : $G(s) \cdot \Delta\bar{e}_{fd}(s)$ - esta parcela corresponde a resposta em ψ_d , devido a alterações da tensão aplicadas ao circuito de excitação.
- Estator: $\bar{L}_d(s) \cdot \Delta\bar{i}_d(s)$ ou $\bar{L}_q(s) \cdot \Delta\bar{i}_q(s)$ - estas parcelas, correspondem a influência das variações das correntes do estator, uma vez que estas definem os valores de i_d e i_q .

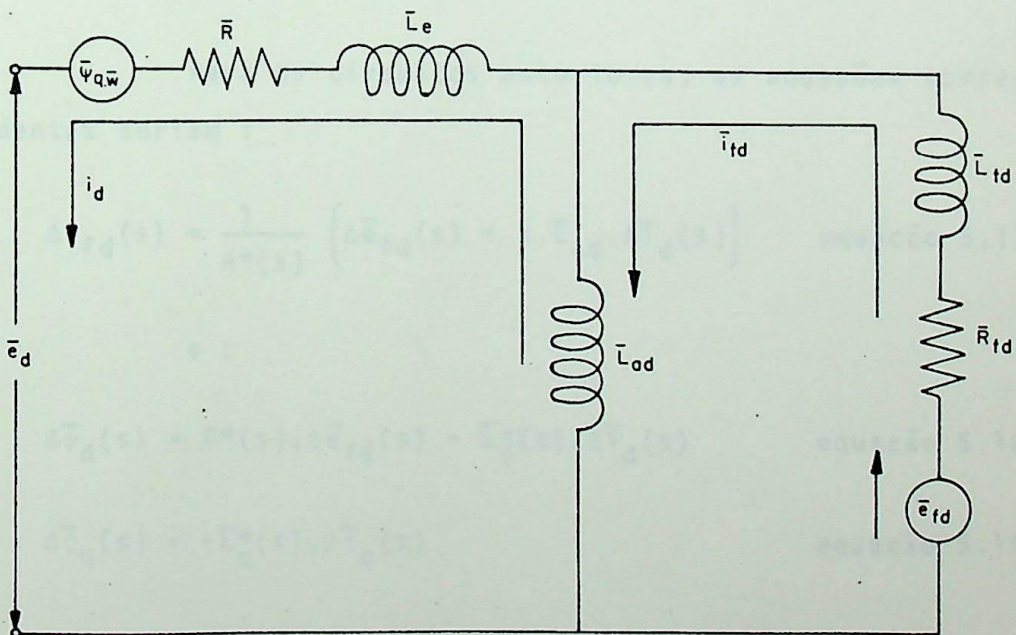
A título de complementação dos estudos realizados, facamos ainda dois tipos de análise.

a) Influência da indutância ($\bar{L}_{fkd} - \bar{L}_{ad}$). Conforme foi devidamente esclarecido, os desenvolvimentos realizados admitiram, que \bar{L}_{fkd} fôsse igual a \bar{L}_{ad} , o que nos levou a desprezar a bobina de indutância igual a ($\bar{L}_{fkd} - \bar{L}_{ad}$). Se tivermos o caso onde este termo deva ser considerado, então, novas equações deverão ser desenvolvidas, sendo que os resultados serão sem dúvida alguma bastante complexos.

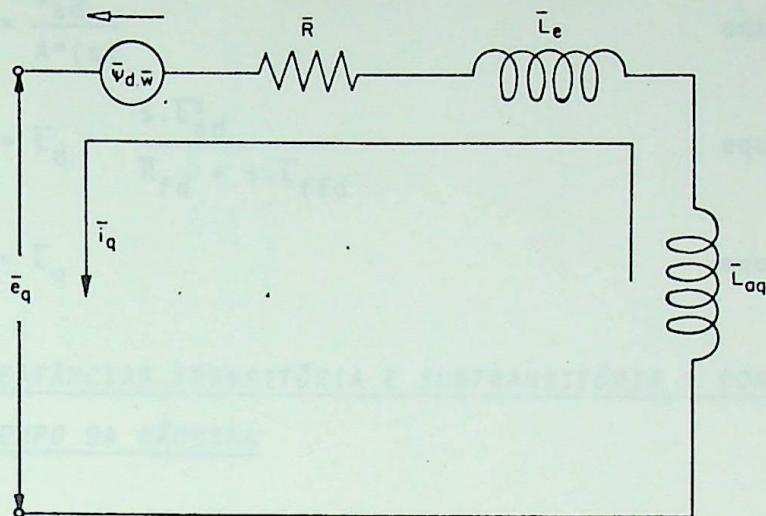
b) Enrolamentos Amortecedores cujos efeitos podem ser desprezados.

Se temos o caso de uma máquina onde os enrolamentos amortecedores podem ser desprezados, os resultados de uma análise idêntica a anterior serão mais simples.

Neste caso, os circuitos equivalentes apresentados ficariam resumidos a:



(a)



(b)

Fig. 5.4 - Circuitos equivalentes para máquina cujos enrolamentos amortecedores podem ser desprezados.

(a) - Circuito equivalente de eixo d

(b) - Circuito equivalente de eixo q.

Para os circuitos anteriores, as equações correspondentes seriam :

$$\Delta \bar{i}_{fd}(s) = \frac{1}{A^*(s)} \left[\Delta \bar{e}_{fd}(s) + s \cdot \bar{L}_{ad} \cdot \Delta \bar{i}_d(s) \right] \quad \text{equação 5.17}$$

e :

$$\Delta \bar{\psi}_d(s) = G^*(s) \cdot \Delta \bar{e}_{fd}(s) - \bar{L}_d^*(s) \cdot \Delta \bar{i}_d(s) \quad \text{equação 5.18}$$

$$\Delta \bar{\psi}_q(s) = -\bar{L}_q^*(s) \cdot \Delta \bar{i}_q(s) \quad \text{equação 5.19}$$

Onde :

$$A^*(s) = \bar{R}_{fd} + s \cdot \bar{L}_{ffd} \quad \text{equação 5.20}$$

$$G^*(s) = \frac{\bar{L}_{ad}}{A^*(s)} \quad \text{equação 5.21}$$

$$\bar{L}_d^*(s) = \bar{L}_d - \frac{s \cdot \bar{L}_{ad}^2}{\bar{R}_{fd} + s \cdot \bar{L}_{ffd}} \quad \text{equação 5.22}$$

$$\bar{L}_q^*(s) = \bar{L}_q \quad \text{equação 5.23}$$

5.4 - REATÂNCIAS TRANSITÓRIA E SUBTRANSITÓRIA - CONSTANTE DE TEMPO DA MÁQUINA

As equações anteriormente concluídas, podem ser apresentadas pelo diagrama em blocos a seguir, o qual constitui um modo prático para a obtenção das citadas relações.

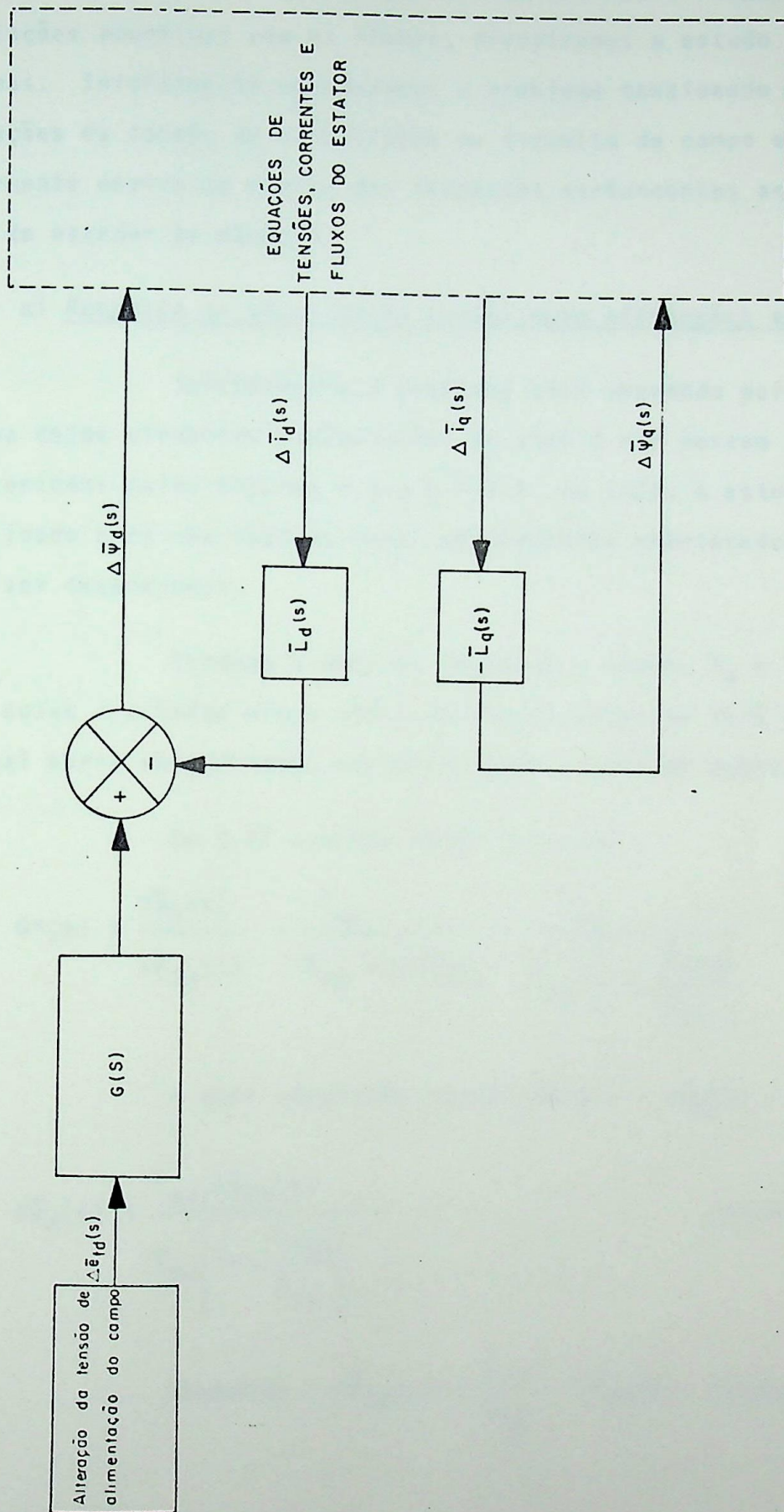


Fig. 5.5 - Representação em blocos das equações para variações dos fluxos ψ_d e ψ_q , para perturbações ocorridas no sistemas estator e campo de uma máquina síncrona.

Para a realização de uma análise a respeito de variações ocorridas com os fluxos, dividiremos o estudo em duas etapas. Inicialmente abordaremos o problema ocasionado por alterações da tensão de alimentação do circuito de campo e, posteriormente devido ao efeito das correntes pertencentes as bobinas do estador da máquina.

a) Resposta do fluxo ou da tensão para alterações em e_{fd}

Inicialmente o problema será abordado para a máquina cujos circuitos equivalentes de eixo d e q possam ser representados pelas figuras 4.3.a e 4.3.b, ou seja, o estudo será realizado para uma máquina cujos enrolamentos amortecedores possam ser desprezados.

Estando a máquina operando a vazio, τ_d e τ_q serão nulas e o único bloco ativo da figura anterior será o $G(s)$, o qual seria representado por $G^*(s)$ para o caso em pauta.

De 5.12 podemos então escrever :

$$G^*(s) = \frac{\Delta \bar{\psi}_d(s)}{\Delta \bar{e}_{fd}(s)} = \frac{\tau_{ad}}{R_{fd} + s \cdot \tau_{ffd}} = \frac{\tau_{ad}}{R_{fd} \left(1 + s \frac{\tau_{ffd}}{R_{fd}} \right)} \quad \text{equação 5.24}$$

A qual resolvida relativamente a $\Delta \bar{\psi}_d(s)$:

$$\Delta \bar{\psi}_d(s) = \frac{\tau_{ad} \cdot \Delta \bar{e}_{fd}(s)}{R_{fd} \left(1 + s \cdot \frac{\tau_{ffd}}{R_{fd}} \right)} \quad \text{equação 5.25}$$

$$\text{Chamando : } \Delta \bar{E}_{fd}(s) = \frac{\tau_{ad}}{R_{fd}} \cdot \Delta \bar{e}_{fd}(s) \quad \text{equação 5.26}$$

$$\tau'_{do} = \frac{L_{ffd}}{R_{fd}}$$

equação 5.27

Substituindo 5.26 e 5.27 em 5.25 :

$$\Delta \bar{\psi}_d(s) = \frac{\Delta \bar{E}_{fd}(s)}{(1 + s \cdot \tau'_{do})}$$

equação 5.28

Imaginemos agora o circuito de campo submetido a uma tensão \bar{e}_{fd} e que súbitamente a mesma sofra uma brusca variação. Esta alteração corresponderia a um degrau em $\Delta \bar{E}_{fd}(s)$. Em consequência, o fluxo $\bar{\psi}_d$ (e portanto a correspondente tensão) responderá exponencialmente, com uma constante de tempo igual a relação L_{ffd}/R_{fd} , a qual, conforme indicamos, é representada por τ'_{do} e é chamada por *constante de tempo de campo em circuito aberto de eixo d*.

Gráficamente, o problema poderia ser representado como segue.

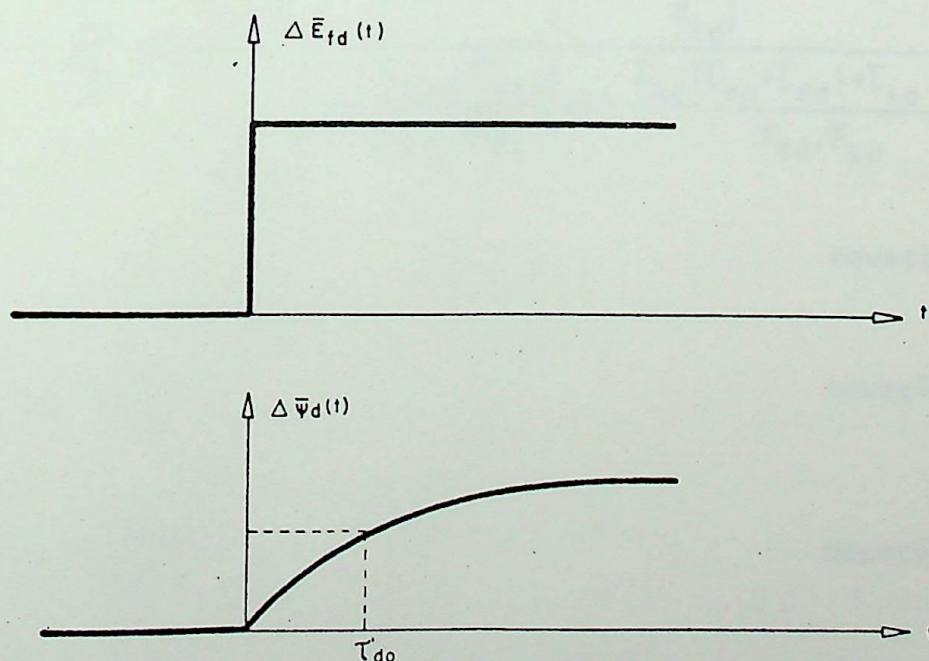


Fig.5.6 - Resposta de fluxo para uma variação degrau da tensão aplicada ao circuito de campo. Enrolamentos amortecedores desprezados.

Naturalmente $\Delta\bar{\psi}_q(s)$ será igual a zero, uma vez que estando a máquina a vazio não haverá \bar{I}_q e, a mudança das características do campo não afeta o fluxo no eixo q .

Consideremos agora o mesmo problema, porém aplicado para uma máquina cujos circuitos equivalentes sejam referentes à fig. 5, ou seja, para o caso onde os efeitos dos enrolamentos amortecedores devam ser admitidos.

Tomando então o caso da operação em circuito aberto $\Delta\bar{I}_d(s) = 0$ e assim :

$$G(s) = \frac{\Delta\psi_d(s)}{\Delta e_{fd}(s)} = \frac{L_{ad}(\bar{R}_{kd} + s \cdot L_{kd})}{A(s)} \quad \text{equação 5.29}$$

Substituindo $A(s)$ pela sua correspondente expressão, e, resolvendo a equação relativamente a $\Delta\bar{\psi}_d(s)$:

$$\Delta\bar{\psi}_d(s) = \frac{L_{ad}}{\bar{R}_{fd}} \cdot \Delta\bar{e}_{fd}(s) \cdot \frac{\left(1 + s \frac{L_{kd}}{\bar{R}_{kd}}\right)}{\left[1 + s \left(\frac{L_{kkd}}{\bar{R}_{kd}} + \frac{L_{ffd}}{\bar{R}_{fd}}\right) + s^2 \frac{L_{ad}(L_{kd} + L_{fd}) + L_{kd} \cdot L_{fd}}{\bar{R}_{fd} \cdot \bar{R}_{kd}}\right]}$$

equação 5.30

Chamando :

$$\tau_{kd} = \frac{L_{kd}}{\bar{R}_{kd}} \quad \text{equação 5.31}$$

$$\tau_1 = \frac{L_{ffd}}{\bar{R}_{fd}} = \tau'_{do} \quad \text{equação 5.32}$$

$$\tau_2 = \frac{L_{kkd}}{\bar{R}_{kd}} \quad \text{equação 5.33}$$

$$\tau_3 = \frac{1}{\bar{R}_{kd}} \left(\bar{L}_{kd} + \frac{\bar{L}_{ad} \cdot \bar{L}_{fd}}{\bar{L}_{ffd}} \right) \quad \text{equação 5.34}$$

Substituindo estas expressões em 5.30, bem como introduzindo $\Delta \bar{E}_{fd}(s)$:

$$\Delta \bar{\psi}_d(s) = \Delta \bar{E}_{fd}(s) \cdot \frac{\left[1 + s \cdot \tau_{kd} \right]}{\left[1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2 \tau_1 \tau_3 \right]} \quad \text{equação 5.35}$$

Fatorando este denominador vem :

$$\Delta \bar{\psi}_d(s) = \Delta \bar{E}_{fd}(s) \frac{\left[1 + s \cdot \tau_{kd} \right]}{(1 + s \cdot \tau'_{do})(1 + s \cdot \tau''_{do})} \quad \text{equação 5.36}$$

Naturalmente τ'_{do} e τ''_{do} seriam dadas por equações que envolveriam τ_1 , τ_2 e τ_3 , cujos resultados seriam bastante complexos. Entretanto, devido aos valores relativos, das resistências \bar{R}_{fd} e \bar{R}_{kd} , o valor de τ'_{do} é usualmente maior que τ''_{do} , e da mesma forma τ_1 é maior que τ_2 e τ_3 . Nestas condições, poderíamos considerar com alguma aproximação que $(1+s\tau_1)(1+s\tau_3)$ seria o denominador da equação 5.36, e que :

$$\tau_1 = \tau'_{do} = \frac{\bar{L}_{ffd}}{\bar{R}_{fd}} \quad \text{equação 5.37}$$

$$\tau_3 = \tau''_{do} = \frac{1}{\bar{R}_{kd}} \left(\bar{L}_{kd} + \frac{\bar{L}_{ad} \cdot \bar{L}_{fd}}{\bar{L}_{ffd}} \right) \quad \text{equação 5.38}$$

Introduzindo, tal como no caso anterior, uma brusca variação em $\Delta \bar{E}_{fd}(s)$, por exemplo um degrau, então a resposta do fluxo será em forma exponencial, conforme a figura 5.6 nos mostra. Deve-se atentar para o fato de que o efeito do enrolamento amortecedor de eixo d , é de diminuir a velocidade de aumento do fluxo $\bar{\psi}_d$. Isto é lógico sob o aspecto físico, uma vez que

estando os enrolamentos amortecedor sujeito a uma variação de fluxo, ocasionado por uma alteração da tensão aplicada ao circuito de excitação, o mesmo reagirá tendendo a se opor a esta variação. Por outro lado, por uma análise matemática da equação 5.6 chegaremos a uma mesma conclusão, pois o fator $(1+s\tau_{kd}) / (1+s\tau_{do}'')$ tem por função apresentar uma redução da velocidade de variação de $\bar{\psi}_d$, conforme foi referido. Para esta relação deve-se observar que $\tau_{do}'' \cong 2 \cdot \tau_{kd}$, sendo que para a obtenção desta a aproximação devemos fazer com que em 5.38 τ_{ffd} seja aproximadamente igual a τ_{ad} .

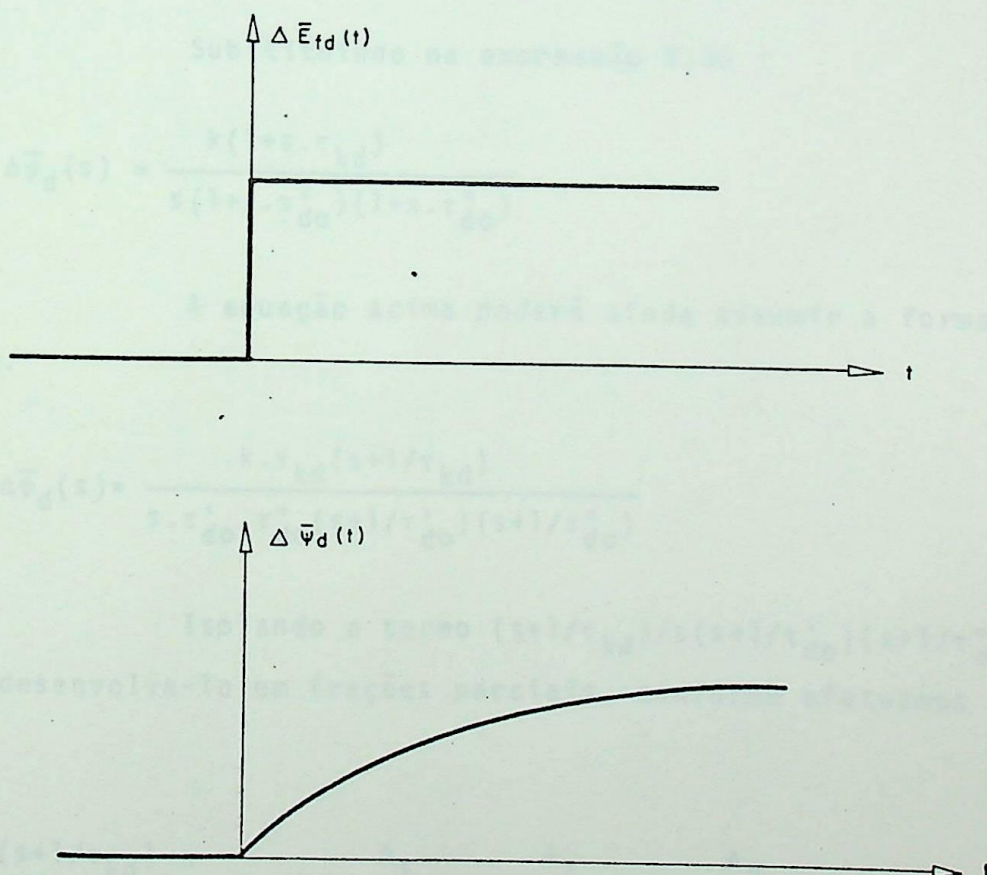


Fig. 5.7 - Resposta de fluxo para uma variação degrau da tensão aplicada ao circuito de campo - Influência dos enrolamentos amortecedores.

Procurando dar maior rigor às análises efetuadas introduziremos um tratamento matemático, para as respostas de $\bar{\psi}_d$ para variações degrau em $\Delta\bar{e}_{fd}$.

Consideremos para tanto último caso, analisado, ou seja, a variação ocorrida com o fluxo $\bar{\psi}_d$ para uma máquina com enrolamentos amortecedores, sujeitas a um degrau em $\Delta\bar{e}_{fd}$ ou $\Delta\bar{E}_{fd}$.

Deste modo, para um $\Delta\bar{E}_{fd} = k$, o que corresponde a uma variação degrau no domínio do tempo.

$$\Delta\bar{E}_{fd}(s) = \frac{k}{s}$$

Substituindo na expressão 5.36 :

$$\Delta\bar{\psi}_d(s) = \frac{k(1+s\tau_{kd})}{s(1+s\tau'_{do})(1+s\tau''_{do})}$$

A equação acima poderá ainda assumir a forma a seguir.

$$\Delta\bar{\psi}_d(s) = \frac{k\tau_{kd}(s+1/\tau_{kd})}{s\tau'_{do}\tau''_{do}(s+1/\tau'_{do})(s+1/\tau''_{do})}$$

Isolando o termo $(s+1/\tau_{kd})/s(s+1/\tau'_{do})(s+1/\tau''_{do})$ podemos desenvolvê-lo em frações parciais, conforme efetuamos abaixo.

$$\frac{(s+1/\tau_{kd})}{s(s+1/\tau'_{do})(s+1/\tau''_{do})} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1/\tau'_{do}} + \frac{A_3}{s+1/\tau''_{do}}$$

Para o cálculo de A_1 , A_2 e A_3 :

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{(s+1/\tau_{kd})}{(s+1/\tau'_{do})(s+1/\tau''_{do})} \right] = \frac{1/\tau_{kd}}{1/\tau'_{do} \cdot \tau''_{do}} = \frac{\tau'_{do} \cdot \tau''_{do}}{\tau_{kd}}$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{\tau'_{do}}} \left[\frac{(s+1/\tau_{kd})}{s(s+1/\tau''_{do})} \right] = \left[\frac{\left(-\frac{1}{\tau'_{do}} + \frac{1}{\tau_{kd}} \right)}{\left(-\frac{1}{\tau'_{do}} \right) \left(-\frac{1}{\tau'_{do}} + \frac{1}{\tau''_{do}} \right)} \right] =$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{\tau'_{do} - \tau_{kd}}{\tau'_{do} \cdot \tau_{kd}} \right)}{\left(\frac{1}{\tau'_{do}^2} - \frac{1}{\tau'_{do} \cdot \tau''_{do}} \right)} \right] = \left[\frac{\left(\frac{\tau'_{do} - \tau_{kd}}{\tau'_{do} - \tau_{kd}} \right)}{\left(\frac{\tau''_{do} - \tau'_{do}}{\tau'_{do}^2 \cdot \tau''_{do}} \right)} \right] =$$

$$= \frac{(\tau'_{do} - \tau_{kd})(\tau'_{do} \cdot \tau''_{do})}{(\tau''_{do} - \tau'_{do})\tau_{kd}}$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{\tau''_{do}}} \left[\frac{(s+1/\tau_{kd})}{s(s+1/\tau'_{do})} \right] = \left[\frac{\left(-\frac{1}{\tau''_{do}} + \frac{1}{\tau_{kd}} \right)}{\left(-\frac{1}{\tau''_{do}} \right) \left(-\frac{1}{\tau''_{do}} + \frac{1}{\tau'_{do}} \right)} \right] =$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{\tau''_{do} - \tau_{kd}}{\tau''_{do} \cdot \tau_{kd}} \right)}{\left(\frac{1}{\tau''_{do}^2} - \frac{1}{\tau'_{do} \cdot \tau''_{do}} \right)} \right] = \left[\frac{\left(\frac{\tau''_{do} - \tau_{kd}}{\tau''_{do} \cdot \tau_{kd}} \right)}{\left(\frac{\tau'_{do} - \tau''_{do}}{\tau'_{do} \cdot \tau''_{do}^2} \right)} \right] =$$

$$= \frac{(\tau''_{do} - \tau_{kd})(\tau'_{do} \cdot \tau''_{do})}{(\tau'_{do} - \tau''_{do})\tau_{kd}}$$

Substituindo estes coeficientes na expressão

$\Delta\bar{\psi}_d(s)$:

$$\Delta\bar{\psi}_d(s) = \frac{k \tau_{kd}}{\tau'_{do} \cdot \tau''_{do}} \left[\frac{\tau'_{do} \cdot \tau''_{do}}{\tau_{kd}} \cdot \frac{1}{s} + \frac{(\tau'_{do} - \tau_{kd})(\tau'_{do} \cdot \tau''_{do})}{(\tau''_{do} - \tau'_{do}) \cdot \tau_{kd}} \cdot \frac{1}{(s+1/\tau'_{do})} + \frac{(\tau''_{do} - \tau_{kd})(\tau'_{do} \cdot \tau''_{do})}{(\tau'_{do} - \tau''_{do}) \cdot \tau_{kd}} \cdot \frac{1}{s+1/\tau''_{do}} \right]$$

Desenvolvendo e simplificando :

$$\Delta\bar{\psi}_d(s) = k \left[\frac{k}{s} + \frac{(\tau'_{do} - \tau_{kd})}{(\tau''_{do} - \tau'_{do})} \cdot \frac{1}{(s+1/\tau'_{do})} + \frac{(\tau''_{do} - \tau_{kd})}{(\tau'_{do} - \tau''_{do})} \cdot \frac{1}{(s+1/\tau''_{do})} \right]$$

Cuja anti-transformada corresponderá a :

$$\Delta\bar{\psi}_d(t) = k \left[1 + \frac{(\tau_{kd} - \tau'_{do})}{(\tau'_{do} - \tau''_{do})} \cdot e^{-t/\tau_{do}} + \frac{(\tau''_{do} - \tau_{kd})}{(\tau'_{do} - \tau''_{do})} \cdot e^{-t/\tau''_{do}} \right]$$

Equação esta que nos permite verificar todas as afirmações anteriormente realizadas. No resultado acima observar que para $t = 0$ o fluxo não pode variar, fato este que vem a ser comprovado se efetuarmos a substituição do tempo e desenvolvermos o resultado. Um outro ponto que deve ser constatado refere-se as constantes de tempo que ditam a velocidade do transit̄o rio, pois conforme foi demonstrado correspondem aquelas que constituíram o denominador da equação de $\Delta\bar{\psi}_d(s)$ dada por 5.36.

Representando gráficamente as componentes de $\Delta\psi_d(t)$, bem como esta última, teríamos :

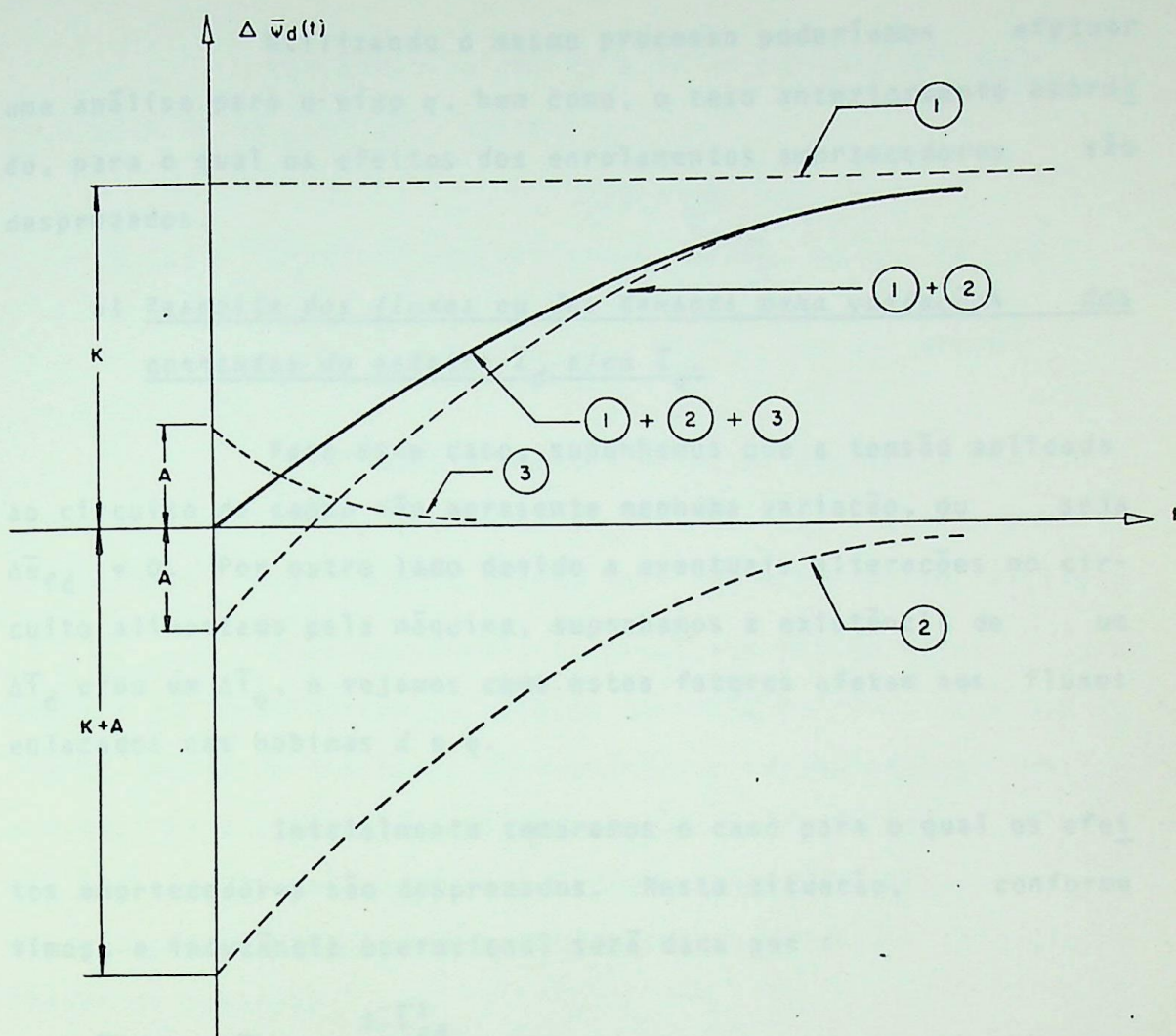


Fig. 5.8 - Resposta do fluxo enlaçado na bobina de eixo d para uma variação degrau na tensão do campo. Efeitos dos amortecedores considerados.

Na figura anterior, temos as seguintes correspondências :

$$\textcircled{1} \rightarrow k$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \frac{k(\tau_{kd} - \tau'_{do})}{(\tau'_{do} - \tau''_{do})} \cdot e^{-t/\tau'_{do}}$$

$$\textcircled{3} \rightarrow \frac{k(\tau''_{do} - \tau_{kd})}{(\tau'_{do} - \tau''_{do})} \cdot e^{-t/\tau''_{do}}$$

Utilizando o mesmo processo poderíamos efetuar uma análise para o eixo q , bem como, o caso anteriormente abordado, para o qual os efeitos dos enrolamentos amortecedores são desprezados.

b) Resposta dos fluxos ou das tensões para variações das correntes do estator \bar{i}_d e/ou \bar{i}_q .

Para este caso, suponhamos que a tensão aplicada ao circuito de campo não apresente nenhuma variação, ou seja $\Delta \bar{e}_{fd} = 0$. Por outro lado devido a eventuais alterações no circuito alimentado pela máquina, suponhamos a existência de um $\Delta \bar{i}_d$ e/ou um $\Delta \bar{i}_q$, e vejamos como estes fatores afetam nos fluxos enlacados nas bobinas d e q .

Inicialmente tomaremos o caso para o qual os efeitos amortecedores são desprezados. Nesta situação, conforme vimos, a indutância operacional será dada por :

$$\bar{L}_d^*(s) = \bar{L}_d - \frac{s \cdot \bar{L}_{ad}^2}{R_{fd} + s \cdot \bar{L}_{ffd}}$$

Considerando que $\bar{L}_d = \bar{L}_{ad} + \bar{L}_e$ e que $\bar{L}_{ffd} = \bar{L}_{fd} + \bar{L}_{ad}$, podemos efetuar estas substituições na expressão acima, sendo que após manipulações e introduzindo a definição de τ'_{do} teremos o resultado a seguir.

$$\bar{L}_d^*(s) = \frac{\bar{L}_d \left(1 + \frac{\bar{L}'_d}{\bar{L}_d} \cdot \tau'_{do} \cdot s \right)}{1 + s \cdot \tau'_{do}} \quad \text{equação 5.39}$$

$$\text{onde : } \bar{L}'_d = \bar{L}_e + \frac{\bar{L}_{ad} \cdot \bar{L}_{fd}}{\bar{L}_{ffd}} \quad \text{equação 5.40}$$

Por substituição de 5.39 na equação de $\Delta\bar{\psi}_d(s)$ para o caso de $\Delta\bar{e}_{fd}(s) = 0$, teremos :

$$\Delta\bar{\psi}_d(s) = -\bar{L}_d^*(s) \cdot \Delta\bar{i}_d(s) = - \frac{L_d \left(1 + \frac{L'_d}{L_d} \cdot \tau'_{do} \cdot s\right)}{1 + s \cdot \tau'_{do}} \cdot \Delta\bar{i}_d(s)$$

equação 5.41

Imaginando a existência de um distúrbio que corresponda a um aumento degrau em $\Delta\bar{i}_d(t)$, veremos a seguir como o fluxo reage. Este aumento degrau será representado por $\Delta\bar{i}_d(t) = k$

Pela semelhança do resultado obtido acima, com aqueles correspondentes ao caso da resposta do fluxo para uma variação degrau na tensão de alimentação do campo, podemos imaginar qual será a reação do fluxo para uma variação degrau em $\Delta\bar{i}_d(t)$. Verificamos então que o fluxo responderá exponencialmente, e a seguir, procuraremos determinar as condições iniciais e finais do processo.

Para a determinação de $\Delta\bar{\psi}_d(0^+)$ e $\Delta\bar{\psi}_d(\infty)$ utilizaremos os teoremas do valor inicial e do valor final, os quais nos permitem calcular os citados valores como segue :

$$\Delta\bar{\psi}_d(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s |\Delta\bar{\psi}_d(s)| \quad - \text{valor inicial de } \Delta\bar{\psi}(t)$$

e :

$$\Delta\bar{\psi}_d(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s |\Delta\bar{\psi}_d(s)| \quad - \text{valor final de } \Delta\bar{\psi}_d(t)$$

Deste modo, para a variação degrau na corrente, o teorema do valor inicial aplicado à equação 5.41 fornece :

$$\boxed{\Delta\bar{\psi}_d(0^+) = -\bar{L}'_d \cdot k}$$

equação 5.42

Isto nos mostra que no instante $t = 0^+$, a indutância oferecida pela bobina de eixo d é \bar{L}'_d , ou, a reatância oferecida pela bobina é \bar{X}'_d , denominada por *Reatância Transitória*. Para o resultado obtido notar que não há nenhuma influência dos enrolamentos amortecedores.

De modo análogo, podemos também aplicar o teorema do valor final e encontraríamos :

$$\boxed{\Delta\bar{\psi}_d(\infty) = -\bar{L}_d \cdot k}$$

equação 5.43

Estes resultados nos mostram que sendo a máquina submetida a rápidas alterações de condição de funcionamento a indutância ou reatância oferecida pela bobina de eixo d é \bar{L}'_d ou \bar{X}'_d , assim que ocorra o distúrbio. Em seguida, a reatância aumentaria até que para o novo estado permanente a indutância ou reatância oferecida pela bobina fosse \bar{L}_d ou \bar{X}_d . Comparando os valores das reatâncias : transitória de eixo d e síncrona de eixo d , podemos dizer que $\bar{X}'_d < \bar{X}_d$.

A figura a seguir mostra a alteração no fluxo enlacado de eixo direto, em função do tempo, para uma alteração repentina na componente de corrente de eixo direto.

Observar que a transição a partir do valor inicial $\Delta\bar{\psi}_d(=0^+) = -\bar{L}'_d \cdot k$ para o valor final $\Delta\bar{\psi}_d(\infty) = -\bar{L}_d \cdot k$, ocorre com uma constante de tempo igual a τ'_{d0} .

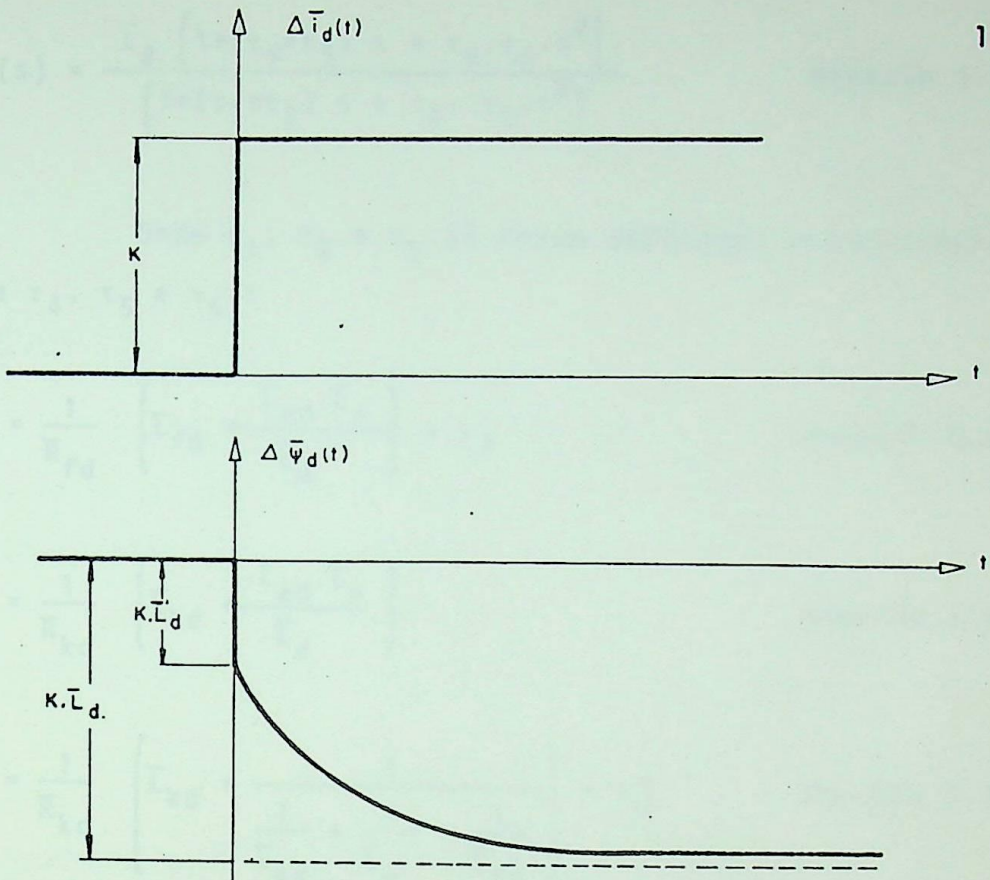


Fig.5.9 - Resposta do fluxo enlacado de eixo direto para uma alteração degrau na correspondente corrente. Enrolamentos amortecedores desprezados.

Com relação ao comportamento do fluxo enlacado de eixo q , uma vez que não existe nenhuma bobina que reagirá contra o crescimento do fluxo, então este responderá instantaneamente. Em outras palavras, para um aumento degrau em $\Delta \bar{i}_q(t)$, o fluxo $\Delta \bar{\psi}_q(t)$ apresentará uma resposta da mesma forma.

Examinaremos a seguir o mesmo problema, porém considerando a influência dos enrolamentos amortecedores.

A indutância operacional para este caso pode ser dada por :

$$\bar{L}_d(s) = \frac{\bar{L}_d \left(1 + (\tau_4 + \tau_5) s + \tau_4 \cdot \tau_6 \cdot s^2 \right)}{\left(1 + (\tau_1 + \tau_2) s + \tau_1 \cdot \tau_3 \cdot s^2 \right)} \quad \text{equação 5.44}$$

Onde τ_1 , τ_2 e τ_3 já foram definidos anteriormente
Quanto a τ_4 , τ_5 e τ_6 :

$$\tau_4 = \frac{1}{R_{fd}} \left(L_{fd} + \frac{L_{ad} \cdot L_e}{L_d} \right) = \tau_d' \quad \text{equação 5.45}$$

$$\tau_5 = \frac{1}{R_{kd}} \left(L_{kd} + \frac{L_{ad} \cdot L_e}{L_d} \right) \quad \text{equação 5.46}$$

$$\tau_6 = \frac{1}{R_{kd}} \left(L_{kd} + \frac{1}{\frac{1}{L_{ad}} + \frac{1}{L_e} + \frac{1}{L_{fd}}} \right) = \tau_d'' \quad \text{equação 5.46}$$

Nas equações acima, τ_d' e τ_d'' são normalmente designadas por :

τ_d'' = constante de tempo de curto-circuito subtransitório .

τ_d' = constante de tempo de curto-circuito transitório.

Do mesmo modo como fizemos arranjos com o numerador e denominador da expressão de $G(s)$, os efetuaremos para a expressão 5.44.

Estas alterações consistem em fazer :

$$\left(1 + (\tau_4 + \tau_5) s + \tau_4 \cdot \tau_6 \cdot s^2 \right) = \left(1 + \tau_d' \cdot s \right) \left(1 + \tau_d'' \cdot s \right) \quad \text{equação 5.47}$$

$$\left(1 + (\tau_1 + \tau_2) s + \tau_1 \cdot \tau_3 \cdot s^2 \right) = \left(1 + \tau_{do}' \cdot s \right) \left(1 + \tau_{do}'' \cdot s \right) \quad \text{equação 5.48}$$

Substituindo 5.47 e 5.48 em $\bar{L}_d(s)$ dada por 5.44 ,

teremos :

$$\bar{L}_d(s) = \bar{L}_d \frac{(1 + \tau_d' \cdot s)(1 + \tau_d'' \cdot s)}{(1 + \tau_{do}' \cdot s)(1 + \tau_{do}'' \cdot s)} \quad \text{equação 5.49}$$

Com o propósito de eliminar as constantes de tempo τ_d'' e τ_d' , colocando-as em função de τ_{do}'' , τ_{do}' , e das reatâncias \bar{L}_d , \bar{L}_d' e \bar{L}_d'' , sejam as equações a seguir, correspondentes as indutâncias equivalentes que figuram nas expressões de τ_d'' e τ_d' .

$$\text{indutância equivalente de } \tau_d'' = \left[\bar{L}_{kd} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{L}_{ad}} + \frac{1}{\bar{L}_e} + \frac{1}{\bar{L}_{fd}}} \right]$$

$$\text{indutância equivalente de } \tau_d' = \left[\bar{L}_{fd} + \frac{\bar{L}_{ad} \cdot \bar{L}_e}{\bar{L}_d} \right]$$

Anteriormente definimos a expressão da reatância transitória como sendo :

$$\bar{L}_d' = \bar{X}_d' = \bar{L}_e + \frac{\bar{L}_{ad} \cdot \bar{L}_{fd}}{\bar{L}_{ffd}}$$

De modo similar chamaremos :

$$\bar{L}_d'' = \bar{X}_d'' = \bar{L}_e + \frac{1}{\frac{1}{\bar{L}_{ad}} + \frac{1}{\bar{L}_{fd}} + \frac{1}{\bar{L}_{kd}}} \quad \text{equação 5.50}$$

Considerando que :

$$\tau_{do}' = \frac{\bar{L}_{ffd}}{R_{fd}}$$

$$\tau_{do}'' = \frac{1}{R_{kd}} \left[\bar{L}_{kd} + \frac{\bar{L}_{ad} \cdot \bar{L}_{kd}}{\bar{L}_{ffd}} \right]$$

Podemos então escrever :

$$\frac{\tau_d'}{\tau_{do}'} = \frac{\frac{1}{R_{fd}} \left(L_{fd}' + \frac{L_{ad} \cdot L_e}{L_d} \right)}{\frac{1}{R_{fd}} \cdot L_{ffd}} = \frac{L_{fd}' + \frac{L_{ad} \cdot L_e}{L_d}}{L_{ffd}} =$$

$$= \frac{L_{fd} \cdot L_d + L_{ad} \cdot L_e}{L_{ffd} \cdot L_d}$$



Lembrando que $L_{ffd} = L_{fd} + L_{ad}$, e que $L_{fd} \ll L_{ad}$, podemos fazer com alguma aproximação $L_{ffd} = L_{ad}$, e nestas circunstâncias :

$$\frac{\tau_d'}{\tau_{do}'} = \frac{L_{fd} \cdot L_d + L_{ad} \cdot L_e}{L_{ffd} \cdot L_d} = \frac{1}{L_d} \left(L_e + \frac{L_{fd} \cdot L_d}{L_{ffd}} \right)$$

Sabemos também que $L_d = L_{ad} + L_e$ e que $L_e \ll L_{ad}$.

Portanto.:

$$\frac{\tau_d'}{\tau_{do}'} = \frac{1}{L_d} \left(L_e + \frac{L_{fd} \cdot L_{ad}}{L_{ffd}} \right)$$

Que comparada com a expressão da indutância transitória resulta :

$$\boxed{\frac{\tau_d'}{\tau_{do}'} = \frac{L_d'}{L_d}}$$

equação 5.51

De modo análogo podemos verificar que :

$$\boxed{\frac{\tau_d''}{\tau_{do}''} = \frac{\bar{\tau}_d''}{\bar{\tau}_d'} \cdot \frac{\tau_{do}'}{\tau_d'} = \frac{\bar{\tau}_d''}{\bar{\tau}_d'}} \quad \text{equação 5.52}$$

De 5.51 e 5.52 podemos obter expressões para τ_d' e τ_d'' em função dos elementos já referidos. Substituindo então, estas constantes de tempo na expressão 5.49, temos o resultado a baixo :

$$\bar{\tau}_d(s) = \bar{\tau}_d \cdot \frac{\left(1 + s \cdot \frac{\bar{\tau}_d'}{\bar{\tau}_d} \cdot \tau_{do}'\right) \left(1 + s \cdot \frac{\bar{\tau}_d''}{\bar{\tau}_d'} \cdot \tau_{do}''\right)}{\left(1 + s \cdot \tau_{do}'\right) \left(1 + s \cdot \tau_{do}''\right)} \quad \text{equação 5.53}$$

Que substituída em $\Delta\bar{\Psi}(s)$:

$$\Delta\bar{\Psi}_d(s) = -\bar{\tau}_d \cdot \frac{\left(1 + s \cdot \frac{\bar{\tau}_d'}{\bar{\tau}_d} \cdot \tau_{do}'\right) \left(1 + s \cdot \frac{\bar{\tau}_d''}{\bar{\tau}_d'} \cdot \tau_{do}''\right)}{\left(1 + s \cdot \tau_{do}'\right) \left(1 + s \cdot \tau_{do}''\right)} \Delta\bar{\tau}_d(s) \quad \text{equação 5.54}$$

Considerando a existência de um distúrbio que provoque um aumento degrau em $\Delta\bar{\tau}_d(t)$, veremos como o fluxo responderá a este efeito.

Para tanto consideraremos que $\Delta\bar{\tau}_d(t) = k$, ou seja que $\Delta\bar{\tau}_d(s) = k/s$. Substituindo em 5.54 :

$$\Delta\bar{\psi}_d(s) = -\bar{L}_d \cdot \frac{\left(1+s \cdot \frac{\bar{L}_d'}{\bar{L}_d} \cdot \tau_{do}'\right) \left(1+s \cdot \frac{\bar{L}_d''}{\bar{L}_d'} \cdot \tau_{do}''\right)}{\left(1+s \cdot \tau_{do}'\right) \left(1+s \cdot \tau_{do}''\right)} \cdot \frac{k}{s}$$

Com relação a este resultado podemos concluir que o fluxo responderá exponencialmente, fato este que poderíamos com provar matematicamente desde que fôsse obtida a anti-transformada do resultado obtido.

Se desejarmos conhecer o valor inicial, assim co mo, o valor final de $\Delta\psi_d(t)$, podemos utilizar dos teoremas já abordados atrás, os quais nos conduziriam aos seguintes resultados :

$$\boxed{\Delta\bar{\psi}_d(0+) = -\bar{L}_d'' \cdot k} \quad \text{equação 5.54}$$

e :

$$\boxed{\Delta\bar{\psi}_d(\infty) = -\bar{L}_d \cdot k} \quad \text{equação 5.55}$$

Estes resultados indicam que sendo a máquina sujeita a rápidas alterações de condição de funcionamento, a indutância ou reatância oferecida pela bobina de eixo d é \bar{L}_d'' ou \bar{X}_d'' . A medida que o tempo decorre, a indutância cresce, passando por um valor igual a \bar{L}_d' ou \bar{X}_d' e finalmente assumindo o valor \bar{L}_d ou \bar{X}_d , quando então estariam desaparecidos os efeitos do campo e do amortecedor de eixo direto e a máquina estaria operando no regime permanente imposto pela nova condição de funcionamento.

Comparando os valores destas indutâncias ou rea -

tâncias, podemos dizer que :

$$\bar{X}_d'' = \bar{\Gamma}_d'' < \bar{X}_d' = \bar{\Gamma}_d' < \bar{X}_d = \bar{\Gamma}_d$$

A figura a seguir mostra a alteração no fluxo enlacado de eixo direto, em função do tempo, para uma variação de grau em $\Delta \bar{\Gamma}_d(t)$. Nesta figura podemos constatar a existência inicial dos efeitos dos enrolamentos amortecedores e de campo, sendo que após um curto período temos a caracterização apenas deste último, uma vez que devido ao baixo valor da constante de tempo dos enrolamentos amortecedores, estas influenciam no transitório por um tempo bastante reduzido, porém, com efeitos significativos.

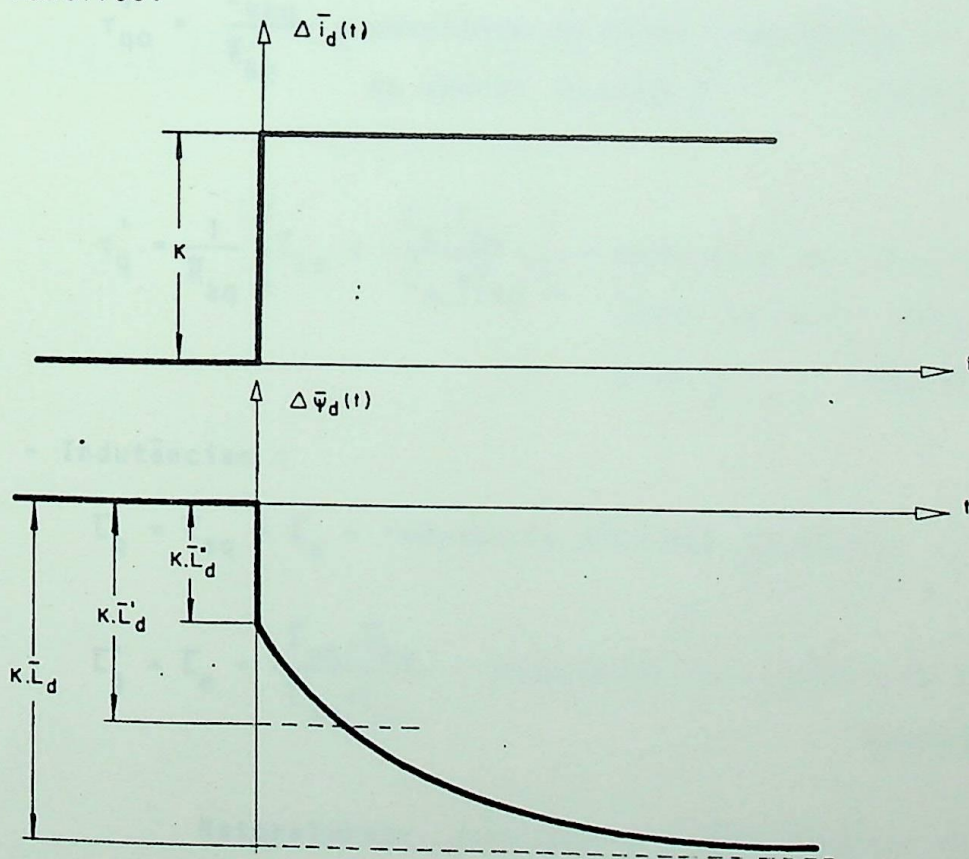


Fig.5.10 - Resposta do fluxo enlacado de eixo direto para uma alteração degrau em $\Delta \bar{\Gamma}_d(t)$. Enrolamentos amortecedores considerados.

Do mesmo modo como procedemos para o eixo direto, poderíamos ainda efetuar as análises para o eixo em quadratura, o que entretanto não será realizado neste trabalho. A seguir a apresentamos as equações que seriam obtidas para o eixo q.

- Indutância operacional :

$$\bar{L}_q(s) = \bar{L}_q \frac{\left(1 + s \cdot \tau'_q\right)}{\left(1 + s \cdot \tau'_{q0}\right)} = \bar{L}_q \cdot \frac{\left(1 + s \cdot \frac{\bar{L}'_q}{\bar{L}_q} \cdot \tau'_{q0}\right)}{\left(1 + s \cdot \tau'_{q0}\right)} \quad \text{equação 5.56}$$

- Constantes de tempo :

$$\tau'_{q0} = \frac{\bar{L}_{kkq}}{\bar{R}_{kq}} = \text{constante de tempo transitória de circuito aberto do eixo } q. \quad \text{equação 5.57}$$

$$\tau'_q = \frac{1}{\bar{R}_{kq}} \left(\bar{L}_{kq} + \frac{\bar{L}_e \cdot \bar{L}_{aq}}{\bar{L}_{aq} + \bar{L}_{kq}} \right) = \text{constante de tempo transitória de curto circuito do eixo } q. \quad \text{equação 5.58}$$

- Indutâncias :

$$\bar{L}_q = \bar{L}_{aq} + \bar{L}_e = \text{indutância síncrona de eixo } q.$$

$$\bar{L}'_q = \bar{L}_e + \frac{\bar{L}_{aq} \cdot \bar{L}_{kq}}{\bar{L}_{aq} + \bar{L}_{kq}} = \text{indutância transitória do eixo } q. \quad \text{equação 5.59}$$

Naturalmente, para uma alteração degraus em $\Delta \bar{I}_q(t)$ o fluxo reagirá exponencialmente, até que desapareça o efeito do enrolamento amortecedor de eixo q.

CAPITULO VI

ANALISE DO CURTO-CIRCUITO TRIFÁSICO

VI - ANÁLISE DO CURTO-CIRCUITO TRIFÁSICO

6.1 - OBJETIVO

A solução rigorosa dos problemas envolvendo transitórios em máquinas síncronas tem sido realizada para poucos casos especiais. Nos demais, particularmente para aqueles que envolvem condições de circuitos desequilibrados, as equações diferenciais têm coeficientes variáveis e as soluções não são realizadas por qualquer método usual. Um dos mais satisfatórios métodos de análise de transitórios é baseado no Teorema dos Fluxos Enlacados Constantes. Deste modo, desenvolveremos inicialmente este teorema para a análise do problema a que nos propomos.

Cabe-nos ainda considerar que um dos casos, para o qual é possível se obter uma solução rigorosa é o do *Curto-Circuito Trifásico sem Enrolamentos Amortecedores*, e este será o objetivo de nossas análises.

Além deste aspecto, um método bastante rigoroso será também muito extenso para o uso na solução dos problemas cotidianos, o que sugere, mesmo para este caso, a utilização de métodos aproximados.

Finalmente, de modo a simplificar o desenvolvimento, desprezaremos o efeito de saturação.

6.2 - TEOREMA DOS FLUXOS CONSTANTES

A tensão nos terminais de uma bobina de resistência R e mutuamente acoplada com outras será dada por:

$$e = \frac{d\psi}{dt} + R.i \quad \text{equação 6.1}$$

onde:

R = resistência da bobina

ψ = fluxo enlaçado, devido à ação de todas as correntes.

Da equação anterior:

$$\frac{d\psi}{dt} = e - R.i$$

Integrando de um tempo t_1 a t_2 :

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \int_{t_1}^{t_2} (e - R.i) : dt$$

ou

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_{t_1}^{t_2} (e - R.i) . dt \quad \text{equação 6.2}$$

Onde ψ_1 e ψ_2 são os fluxos enlaçados para os instantes t_1 e t_2 .

Observando a equação 6.2, desde que a integral é contínua se e e i forem finitos, o que ocorre nos casos práticos, segue-se que o fluxo enlaçado deve ser contínuo para circuito que satisfaça a equação 6.1. Em outras palavras, o fluxo enlaçado de qualquer *circuito indutivo fechado*, não deve variar bruscamente, mas gradualmente e continuamente. A

este resultado, já tínhamos chegado anteriormente, quando analisamos as diversas respostas dos fluxos para alterações das condições de operação.

Observando o problema por uma outra maneira, se o intervalo $(t_2 - t_1)$ for tomado infinitesimal, a integral à direita da equação 6.2 será aproximadamente nula, o que resulta em $\psi_2 - \psi_1 = 0$, não importando que variações finitas ocorram em e , R ou i durante este intervalo de tempo. Assim, verificamos novamente, a impraticabilidade de uma brusca variação do fluxo para um circuito fechado onde nem a tensão nem a corrente são infinitas.

Se os terminais da bobina ou do circuito forem curto-circuitados, temos $e = 0$. Considerando ainda que a resistência seja desprezível, para este caso a integral do 2º membro de 6.2 será sempre nula, o que nos permite escrever

$$\psi_2 = \psi_1 \quad \text{equação 6.3}$$

Esta é a expressão básica do Teorema dos Fluxos Constantes, cujo enunciado é:

"NUM CIRCUITO INDUTIVO DE RESISTÊNCIA DESPREZÍVEL, COM SEUS TERMINAIS EM CURTO-CIRCUITO, O FLUXO ENLAÇADO DEVE SER O MESMO PARA QUALQUER VALOR DE TEMPO".

Naturalmente, caso a resistência não seja desprezada, a equação 6.2 será resumida a:

$$\psi_2 - \psi_1 = - \int_{t_1}^{t_2} R \cdot i \cdot dt$$

o que implica que o fluxo varia numa razão que depende da re-

sistência e da corrente.

6.3 - APLICAÇÃO DO TEOREMA DOS FLUXOS CONSTANTES PARA CURTO-CIRCUITOS EM MÁQUINAS SÍNCRONAS

Para o conjunto de bobinas que constituem a máquina síncrona, podemos escrever um sistema de equações, similares à expressão 6.1, anteriormente apresentada. Este conjunto de equações foi introduzido no Capítulo I, correspondendo ao que chamamos por equações 1.16. Nestas expressões devemos suprimir e_{kd} e e_{kq} , uma vez que as análises serão realizadas para o caso onde os enrolamentos amortecedores são desprezados.

Como foi dito anteriormente, a resistência da armadura é muito pequena, de forma que com alguma aproximação, podemos desprezã-la. Nesta situação, podemos aplicar o Teorema dos Fluxos Constantes à cada fase, a qual estando curto circuitada, terá a tensão em seus terminais reduzida a zero.

Se ψ_{a0} , ψ_{b0} e ψ_{c0} são os fluxos enlaçados para $t = 0$, após um certo instante da ocorrência do curto, os fluxos enlaçados de cada fase terão os mesmos valores que aqueles correspondentes a $t = 0$, então:

$$\psi_a = \psi_{a0}$$

$$\psi_b = \psi_{b0}$$

$$\psi_c = \psi_{c0}$$

equações 6.4

onde ψ_a , ψ_b e ψ_c serão os fluxos para um certo tempo após ter ocorrido a falta.

Naturalmente, se temos um curto-circuito desequilibrado estas equações não se aplicam às fases que não foram curto-circuitadas.

Analisando agora o problema do campo, temos que considerar inicialmente os valores relativos de L_{ffd} e R_{fd} , pois sendo grande o número de espiras deste enrolamento, e, possuindo um circuito magnético de alta permeância, podemos como uma primeira aproximação desprezar R_{fd} .

Sob condições de regime permanente, a relação entre a tensão aplicada ao circuito de campo (e_{fd}) e a correspondente corrente (i_{fd0}), será:

$$e_{fd} = R_{fd} \cdot i_{fd} \quad \text{equação 6.5}$$

Com a corrente i_{fd} estabelecida, consideremos agora que a resistência R_{fd} seja reduzida gradualmente até zero. Para que a corrente e o fluxo enlaçado continuem inalterados, a tensão e_{fd} deve ser também reduzida proporcionalmente à diminuição de R_{fd} . Deste modo, no caso extremo de R_{fd} assumir um valor tão pequeno, de modo que possamos admiti-la nula, então e_{fd} deverá ser também zero. Em outras palavras, uma vez que a corrente foi estabelecida, em estado permanente, nenhuma tensão é necessária para fazê-la circular ou mantê-la, caso a resistência seja reduzida a zero.

Sob tais considerações, podemos também aplicar ao circuito do campo, o Teorema dos Fluxos Constantes, mesmo que as condições estacionárias sejam ou não mantidas. Então, se ψ_{fd0} representa o fluxo enlaçado de campo para $t = 0$, o fluxo enlaçado para um tempo t qualquer será:

$$\psi_{fd} = \psi_{fd_0}$$

equação 6.6

De posse destes resultados poderíamos desenvolver as equações das correntes transitórias. Isto seria realizado partindo das equações dos fluxos dados por 1.18, substituindo as indutâncias pelas expressões apresentadas em função da posição do rotor. Em seguida, com as equações 6.4 e 6.6, formaremos um sistema que poderá ser resolvido fornecendo i_a , i_b , i_c e i_{fd} em termos de ψ_{a_0} , ψ_{b_0} , ψ_{c_0} e ψ_{fd_0} . A substituição de valores apropriados destes últimos, valores estes derivados das condições antes do curto-circuito, permitirá a determinação das correntes de curto-circuito para qualquer instante após $t = 0$, sujeitas às considerações de que todas as resistências foram desprezadas.

Este procedimento poderá ser realizado, porém introduzindo para o caso dos sistemas trifásicos, as variáveis d e q , e o trabalho tornar-se-á ainda mais simplificado.

Estas novas variáveis foram caracterizadas anteriormente pelas expressões:

equações 2.1 - Obtenção de i_d , i_q e i_o a partir de i_a , i_b e i_c .

equações 2.6 - Obtenção de ψ_d , ψ_q e ψ_o a partir de ψ_a , ψ_b e ψ_c .

equações 2.12 - Obtenção de e_d , e_q e e_o a partir de e_a , e_b e e_c .

E das equações:

equações 2.13 - Equações de Park

equações 2.7 e 2.8 - Equações de ψ_d , ψ_q e ψ_o em função de correntes e de indutâncias.

Observando as equações 2.13, devido às tensões geradas serem representadas pelos termos $\psi_q \cdot \omega$ e $\psi_d \cdot \omega$, como foi visto anteriormente nos circuitos equivalentes de eixo direto e em quadratura, as condições para aplicação do Teorema não são satisfeitas, e, mesmo sendo ou não desprezada a resistência, o teorema não pode ser diretamente aplicado. Entretanto, quando a citada resistência pode ser desprezada, podemos proceder uma modificação do Teorema, conforme mostraremos a seguir.

A modificação poderá ser feita de dois modos. Inicialmente, nas duas primeiras equações de 2.13, e_d e e_q podem ser feitas iguais a zero e R poderá ser desprezada. Como resultado, teremos duas equações diferenciais em ψ_d e ψ_q que são inter-relacionadas e, suas soluções simultâneas dão as expressões desejadas para ψ_d e ψ_q .

Como uma alternativa, os valores constantes de ψ_a , ψ_b e ψ_c dados pelas equações 6.4 podem ser inseridos nas duas primeiras expressões de 2.6. Isto dá:

$$\left. \begin{aligned} \psi_d &= -\frac{2}{3} \left\{ \psi_{a0} \cdot \cos\theta + \psi_{b0} \cdot \cos(\theta - 2\pi/3) + \psi_{c0} \cdot \cos(\theta + 2\pi/3) \right\} \\ \psi_q &= -\frac{2}{3} \left\{ \psi_{a0} \cdot \sin\theta + \psi_{b0} \cdot \sin(\theta - 2\pi/3) + \psi_{c0} \cdot \sin(\theta + 2\pi/3) \right\} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{equa-} \\ \text{ções} \\ 6.7 \end{array}$$

Para $t = 0$, correspondente ao momento a partir do qual os enrolamentos são admitidos em curto-circuito, os

valores de ψ_d e ψ_q podem ser denotados por ψ_{d0} e ψ_{q0} , respectivamente. Os valores de ψ_{d0} e ψ_{q0} podem ser obtidos pelas equações anteriores pela substituição de $\theta = \omega t + \theta_0$ por :

$$\theta = \theta_0$$

Os valores de ψ_d e ψ_q para qualquer instante após $t = 0$ podem ser expressos em termos de ψ_{d0} e ψ_{q0} pela substituição de θ por $\omega t + \theta_0$.

Expandindo as expressões trigonométricas e substituindo θ pela sua correspondente expressão, bem como introduzindo a conceituação apresentada para ψ_{d0} e ψ_{q0} , chegaremos a:

$$\left. \begin{aligned} \psi_d &= \psi_{d0} \cdot \cos \omega t - \psi_{q0} \cdot \sin \omega t \\ \psi_q &= \psi_{q0} \cdot \cos \omega t + \psi_{d0} \cdot \sin \omega t \end{aligned} \right\} \text{equação 6.8}$$

Deste modo, para os enrolamentos de eixo direto e em quadratura, o fluxo enlacado não se mantém constante durante o curto-circuito, mas varia como uma função do tempo, de acordo com as equações 6.8.

Para as expressões de e_o e e_{fd} , uma vez que estas são do mesmo tipo daquela desenvolvida quando no estudo do Teorema, o Teorema dos Fluxos Constantes para ser aplicado diretamente, desde que as tensões e as resistências sejam consideradas nulas. Como resultado teríamos :

$$\psi_o = \psi_{o0}$$

$$\psi_{fd} = \psi_{fdo}$$

6.4 - CURTO-CIRCUITO TRIFÁSICO PARA UMA MÁQUINA SÍNCRONA
CUJAS RESISTÊNCIAS E ENROLAMENTOS AMORTECEDORES PO
DEM SER DESPREZADOS:

Se todas as resistências forem desprezadas, as equações 6.4 e 6.6 são aplicadas a partir do momento que ocorre o curto-circuito ($t = 0$) até a sua remoção. As relações entre os fluxos enlaçados antes e após o curto, conforme verificamos são dadas por:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}_d &= \bar{\psi}_{d0} \cdot \cos \bar{\omega}t - \bar{\psi}_{q0} \cdot \sin \bar{\omega}t \\ \bar{\psi}_q &= \bar{\psi}_{q0} \cdot \cos \bar{\omega}t + \bar{\psi}_{d0} \cdot \sin \bar{\omega}t \\ \bar{\psi}_o &= \bar{\psi}_{o0} \\ \bar{\psi}_{fd} &= \bar{\psi}_{fd} \end{aligned} \right\} \text{ equações 6.9}$$

Onde a introdução dos valores por unidade já é por demais conhecida, razão pela qual omitimos qualquer comentário.

Os valores dos fluxos enlaçados, para qualquer instante, podem ser também expressos pelas equações 2.9, as quais transcrevemos abaixo, já em valores por unidade e desprezando o efeito dos amortecedores.

$$\bar{\psi}_d = -\bar{L}_d \cdot \bar{i}_d + \bar{L}_{ad} \cdot \bar{i}_{fd}$$

$$\bar{\psi}_q = -\bar{L}_q \cdot \bar{i}_q$$

$$\bar{\psi}_o = -\bar{L}_o \cdot \bar{i}_o$$

$$\bar{\psi}_{fd} = -\bar{L}_{ad} \cdot \bar{i}_d + \bar{L}_{ffd} \cdot \bar{i}_{fd}$$

Igualando as expressões de $\bar{\psi}_d$, $\bar{\psi}_q$, $\bar{\psi}_o$ e $\bar{\psi}_{fd}$,

temos:-

$$\left. \begin{aligned} -\bar{L}_d \cdot \bar{i}_d + \bar{L}_{ad} \cdot \bar{i}_{fd} &= \bar{\psi}_{do} \cdot \cos \bar{\omega} t - \bar{\psi}_{qo} \cdot \sin \bar{\omega} t \\ -\bar{L}_q \cdot \bar{i}_q &= \bar{\psi}_{qo} \cdot \cos \bar{\omega} t + \bar{\psi}_{do} \cdot \sin \bar{\omega} t \\ -\bar{L}_o \cdot \bar{i}_o &= \bar{\psi}_{oo} \\ -\bar{L}_{ad} \cdot \bar{i}_d + \bar{L}_{ffd} \cdot \bar{i}_{fd} &= \bar{\psi}_{fdo} \end{aligned} \right\} \text{ equações 6.10}$$

Resolvendo estas equações relativamente às correntes:-

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_d &= + \frac{\bar{L}_{ad} \cdot \bar{\psi}_{fdo}}{\bar{L}_{ffd} \left(+\bar{L}_d - \frac{\bar{L}_{ad}^2}{\bar{L}_{ffd}} \right)} - \frac{\bar{\psi}_{do} \cdot \cos \bar{\omega} t - \bar{\psi}_{qo} \cdot \sin \bar{\omega} t}{+\bar{L}_d - \frac{\bar{L}_{ad}^2}{\bar{L}_{ffd}}} \\ \bar{i}_q &= - \frac{\bar{\psi}_{qo} \cdot \cos \bar{\omega} t + \bar{\psi}_{do} \cdot \sin \bar{\omega} t}{\bar{L}_q} \\ \bar{i}_o &= - \frac{\bar{\psi}_{oo}}{\bar{L}_o} \\ \bar{i}_{fd} &= \frac{\bar{L}_d}{+\bar{L}_d - \frac{\bar{L}_{ad}^2}{\bar{L}_{ffd}}} \cdot \frac{\bar{\psi}_{fdo}}{\bar{L}_{ffd}} - \frac{\bar{L}_{ad}}{\bar{L}_{ffd}} \cdot \frac{\bar{\psi}_{do} \cdot \cos \bar{\omega} t - \bar{\psi}_{qo} \cdot \sin \bar{\omega} t}{\left(\bar{L}_d - \frac{\bar{L}_{ad}^2}{\bar{L}_{ffd}} \right)} \end{aligned} \right\} \text{ equações 6.11}$$

O termo $\bar{L}_d - \frac{\bar{L}_{ad}^2}{\bar{L}_{ffd}}$, que aparece nas expressões acima, pode ser convenientemente arranjado como segue:

$$\bar{L}_d - \frac{\bar{L}_{ad}^2}{\bar{L}_{ffd}} = \frac{\bar{L}_d \bar{L}_{ffd} - \bar{L}_{ad}^2}{\bar{L}_{ffd}}$$

Considerando que:

$$\bar{L}_d = \bar{L}_{ad} + \bar{L}_e$$

$$\bar{L}_{ffd} = \bar{L}_{ad} + \bar{L}_{fd}$$

Podemos substituir acima, e o resultado será:-

$$\begin{aligned} \bar{L}_d - \frac{\bar{L}_{ad}^2}{\bar{L}_{ffd}} &= \frac{(\bar{L}_{ad} + \bar{L}_e)(\bar{L}_{ad} + \bar{L}_{fd}) - \bar{L}_{ad}^2}{\bar{L}_{ffd}} \\ &= \frac{\bar{L}_{ad} \cdot \bar{L}_{ad} + \bar{L}_{ad} \cdot \bar{L}_{fd} + \bar{L}_e \bar{L}_{ad} + \bar{L}_e \bar{L}_{fd} - \bar{L}_{ad}^2}{\bar{L}_{ffd}} \\ &= \frac{\bar{L}_e(\bar{L}_{ad} + \bar{L}_{fd}) + \bar{L}_{ad} \cdot \bar{L}_{fd}}{\bar{L}_{ffd}} = \bar{L}_e + \frac{\bar{L}_{ad} \cdot \bar{L}_{fd}}{\bar{L}_{ffd}} \end{aligned}$$

que comparada com a expressão anteriormente apresentada para $\bar{L}'_d = \bar{X}'_d$, nos permite escrever :-

$$\bar{L}'_d = \bar{X}'_d = \bar{L}_e + \frac{\bar{L}_{ad} \cdot \bar{L}_{fd}}{\bar{L}_{ffd}} = \bar{L}_d - \frac{\bar{L}_{ad}}{\bar{L}_{ffd}} \quad \text{equação 6.12}$$

Por motivos que poderão ser evidenciados mais tarde, é conveniente definir uma tensão proporcional a $\bar{\psi}_{fdo}$ na primeira das equações 6.11. Desta forma, definimos a "COMPONENTE DE EIXO EM QUADRATURA DA TENSÃO ATRÁS DA REATÂNCIA TRANSITÓRIA" como:-

$$\bar{E}'_q = \frac{\bar{L}_{ad} \cdot \bar{\psi}_{fdo}}{\bar{L}_{ffd}} \quad \text{equação 6.13}$$

Substituindo 6.12 e 6.13 nas expressões 6.11:-

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{i}_d &= \frac{E'_q}{X'_d} - \frac{\bar{\psi}_{do} \cdot \cos \bar{\omega}t - \bar{\psi}_{qo} \cdot \sin \bar{\omega}t}{X'_d} \\
 \bar{i}_q &= - \frac{\bar{\psi}_{qo} \cdot \cos \bar{\omega}t + \bar{\psi}_{do} \cdot \sin \bar{\omega}t}{X_q} \\
 \bar{i}_o &= - \frac{\bar{\psi}_{oo}}{X_o} \\
 \bar{i}_{fd} &= \frac{X_d}{X_d} \cdot \frac{\bar{\psi}_{fdo}}{L_{ffd}} - \frac{X_d - X'_d}{X'_d} \cdot \frac{\bar{\psi}_{do} \cdot \cos \bar{\omega}t - \bar{\psi}_{qo} \cdot \sin \bar{\omega}t}{L_{ad}}
 \end{aligned} \right\} \text{equações 6.14}$$

Com relação aos valores iniciais dos fluxos, duas considerações podem ser realizadas, quanto ao estado anterior de operação da máquina.

a) Máquina anteriormente a vazio

Se antes da ocorrência do curto-circuito, a máquina estava operando a vazio, mas com uma corrente de campo permanente igual a \bar{i}_{fdo} , as correntes i_a , i_b , i_c , i_d , i_q e i_o serão nulas. Em consequência:

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\psi}_{do} &= L_{ad} \cdot \bar{i}_{fdo} \\
 \bar{\psi}_{qo} &= 0 \\
 \bar{\psi}_{oo} &= 0 \\
 \bar{\psi}_{fdo} &= L_{ffd} \cdot \bar{i}_{fdo}
 \end{aligned} \right\} \text{equações 6.15}$$

Substituindo $\bar{\psi}_{fdo}$ da equação 6.13 pela última expressão acima, bem como, introduzindo $\bar{\psi}_{do}$, temos:

$$\bar{E}'_q = \Gamma_{ad} \cdot \bar{I}_{fdo} = \bar{\psi}_{do}$$

Então, para um curto-circuito a partir de uma condição sem carga, para $t = 0$, com todas as resistências desprezadas, as correntes serão :

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_d &= \frac{\bar{E}'_q}{\bar{X}'_d} (1 - \cos \bar{\omega}t) \\ \bar{I}_q &= - \frac{\bar{E}'_q}{\bar{X}_d} \cdot \text{sen} \bar{\omega}t \\ \bar{I}_o &= 0 \\ \bar{I}_{fd} &= \bar{I}_{fdo} \left[1 + \frac{\bar{X}_d - \bar{X}'_d}{\bar{X}'_d} (1 - \cos \bar{\omega}t) \right] \end{aligned} \right\} \text{equações 6.16}$$

Uma vez obtidas as componentes dqo , basta voltarmos ao sistema original e teremos as correntes de curto-circuito desejadas.

As correntes dadas pelas expressões 6.16 são mostradas a seguir, onde devemos notar que :

- a) \bar{I}_d consiste de uma componente contínua e de uma alternada de amplitude igual ao valor da componente contínua. Isto se faz necessário devido a impraticabilidade da corrente alterar instantaneamente de valor (antes do curto, igual a zero).
- b) \bar{I}_q possui apenas uma componente alternada
- c) a corrente de campo \bar{I}_{fd} consiste de uma componente contínua e uma alternada adicionada à corrente de campo inicial.

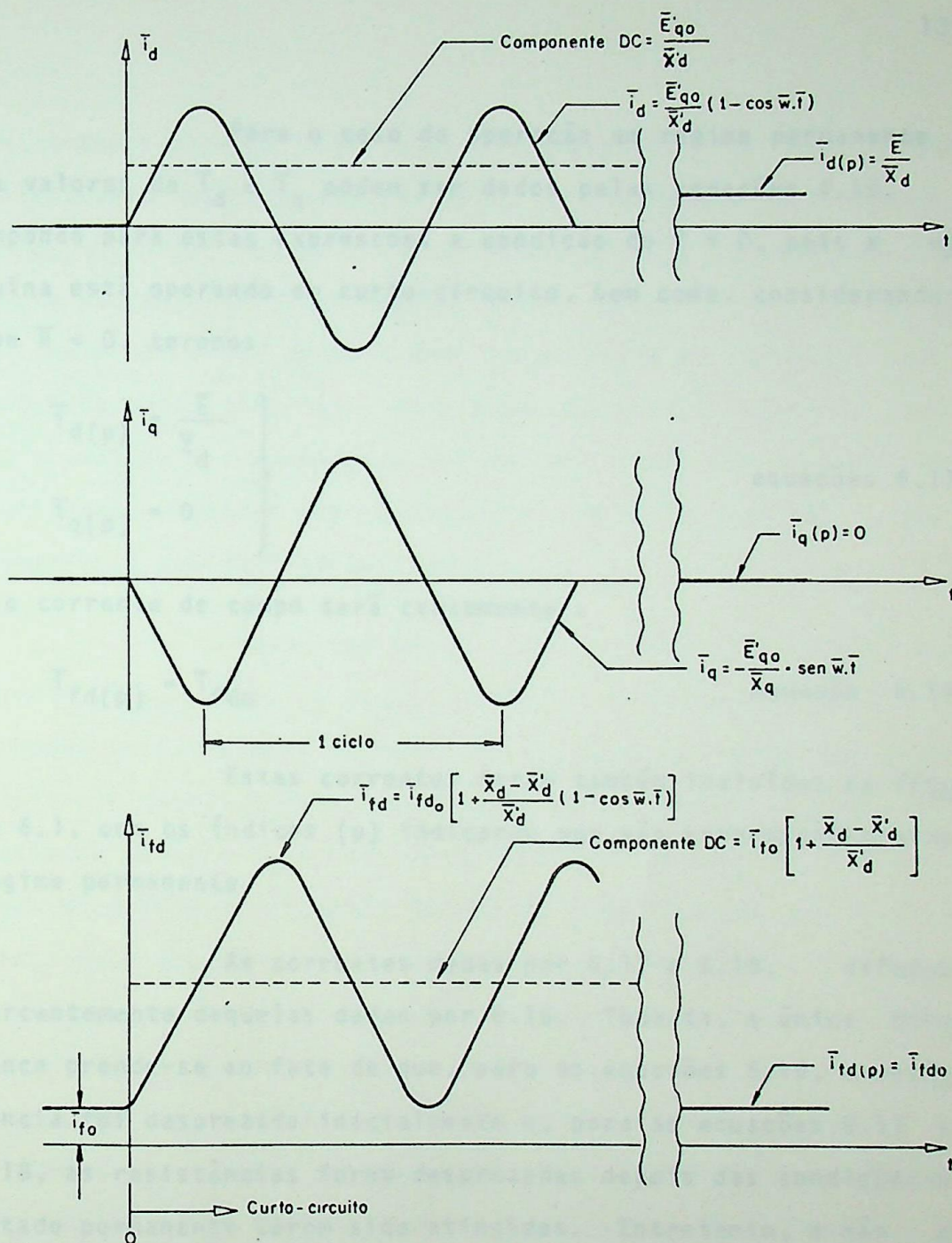


Fig.6.1 - Valores iniciais e permanentes das correntes de curto-circuito de eixo direto, em quadratura e campo, quando as resistências são desprezadas.

Para o caso de operação em regime permanente, os valores de \bar{I}_d e \bar{I}_q podem ser dados pelas equações 4.15. Impondo para estas expressões a condição de $\bar{V} = 0$, pois a máquina está operando em curto-circuito, bem como, considerando que $\bar{R} = 0$, teremos:

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_d(p) &= \frac{\bar{E}}{\bar{X}_d} \\ \bar{I}_q(p) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{equações 6.17}$$

e a corrente de campo será certamente :

$$\bar{I}_{fd}(p) = \bar{I}_{fdo} \quad \text{equação 6.18}$$

Estas correntes foram também incluídas na figura 6.1, com os índices (p) indicando que são correspondentes ao regime permanente.

As correntes dadas por 6.17 e 6.18, diferem marcadamente daquelas dadas por 6.16. Todavia, a única diferença prende-se ao fato de que, para as equações 6.16, a resistência foi desprezada inicialmente e, para as equações 6.17 e 6.18, as resistências foram desprezadas depois das condições de estado permanente terem sido atingidas. Entretanto, a não existência de fatores de amortecimento nas primeiras, impede que a diferença entre os valores iniciais e finais das correntes possa gradualmente extinguir-se. Deste modo, devemos concluir que devido a presença de resistências (mesmo que sejam pequenas), a passagem das correntes dadas pelas equações 6.16 para aquelas dadas por 6.17 e 6.18, será realizada gradualmente, ainda que seja lentamente (caso de baixas resistências). As-

sim, quando pequenas resistências estão presentes, o que é inevitável para qualquer máquina real, as equações 6.16 representam as correntes iniciais de curto-circuito, e as equações 6.17 e 6.18 representam as correntes finais de curto-circuito ou como é mais comumente denominadas, representam as correntes permanentes de curto-circuito. As citadas diferenças entre os regimes transitório e permanente decaem numa razão que depende das magnitudes relativas das resistências, assunto este que será devidamente abordado neste trabalho.

Desde que nenhuma das correntes de estado permanente, $\bar{i}_{d(p)}$, $\bar{i}_{q(p)}$ e $\bar{i}_{fd(p)}$ contenha qualquer componente alternada, as parcelas alternadas de \bar{i}_d , \bar{i}_q e \bar{i}_{fd} devem ser transitórias e eventualmente decaem para zero. Quanto às parcelas contínuas de \bar{i}_d e \bar{i}_{fd} , que são maiores que os valores finais, essas deverão evidentemente decrescer gradualmente, mas não a zero. Como uma componente contínua de \bar{i}_d corresponde a uma componente alternada de frequência fundamental nas correntes de fase, isto significa que o valor eficaz da corrente de fase não é constante, como em um circuito simples, mas sim, decresce de um alto valor inicial caracterizado pela corrente subtransitória, até um valor final de estado permanente. Este fenômeno é uma característica geral de uma máquina síncrona em curto-circuito.

Vejamos a seguir, o problema do curto-circuito para a máquina anteriormente na condição de carga.

b) Máquina anteriormente em carga

Se antes da ocorrência do curto-circuito, a máquina

quina estava alimentando uma carga equilibrada, as correntes de curto-circuito serão diferentes, conforme será concluído neste desenvolvimento.

Conforme foi demonstrado no capítulo IV, as equações 4.17 traduziam as correntes equilibradas i_a , i_b e i_c transformadas ao sistema dqo . Assim, colocando-se um índice(L) junto a estas correntes, com o propósito de diferenciá-las das posteriores correntes de curto-circuito, teremos :

$$\bar{i}_d(L) = \bar{i}_{(L)} \text{sen}(\delta + \phi) = I_{(L)} \text{sen}(\delta + \phi)$$

$$\bar{i}_q(L) = \bar{i}_{(L)} \text{cos}(\delta + \phi) = I_{(L)} \text{cos}(\delta + \phi)$$

$$\bar{i}_o(L) = 0$$

Então, as equações dos fluxos enlacados para $t = 0$, seriam :

$$\bar{\psi}_{do} = -\bar{L}_d \cdot \bar{i}_d(L) + \bar{L}_{ad} \cdot \bar{i}_{fdo}$$

$$\bar{\psi}_{qo} = -\bar{L}_q \cdot \bar{i}_q(L)$$

$$\bar{\psi}_{oo} = 0$$

$$\bar{\psi}_{fdo} = -\bar{L}_{ad} \cdot \bar{i}_d(L) + \bar{L}_{ffd} \cdot \bar{i}_{fdo}$$

equações 6.19

De 6.13 tínhamos :

$$\bar{E}'_q = \frac{\bar{L}_{ad} \cdot \bar{\psi}_{fdo}}{\bar{L}_{ffd}}$$

Substituindo $\bar{\psi}_{fdo}$, pela expressão encontrada a cima:

$$\bar{E}'_q = \frac{\bar{L}_{ad}}{\bar{L}_{ffd}} (\bar{L}_{ffd} \cdot \bar{I}_{fdo} - \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_d(L)) = \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{fdo} - \frac{\bar{L}_{ad}^2}{\bar{L}_{ffd}} \cdot \bar{I}_d(L)$$

equações 6.20

Facilmente constata-se que $(\bar{L}_{ad}^2/\bar{L}_{ffd})$ é igual a $\bar{X}_d - \bar{X}'_d$. Logo:

$$\bar{E}'_q = \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{fdo} - (\bar{X}_d - \bar{X}'_d) \cdot \bar{I}_d(L) \quad \text{equação 6.21}$$

Nos desenvolvimentos realizados quando se analisou a máquina síncrona operando em regime permanente, concluímos que $\bar{E} = \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{fd}$ (equação 4.8). Entretanto, de modo a aplicá-la nas relações anteriores, torna-se necessário designar o tempo para o qual esta tensão é aplicada. Assim, a tensão interna permanente ou atrás da reatância para $t = 0$ é definida como :

$$\bar{E} = \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{fdo} \quad \text{equação 6.22}$$

Substituindo na equação 6.21, vem :

$$\bar{E}'_q = \bar{E} - (\bar{X}_d - \bar{X}'_d) \bar{I}_d(L) \quad \text{equação 6.23}$$

Consequentemente, a componente de eixo em quadratura da tensão interna transitória (\bar{E}'_q), para $t = 0$, é a tensão proporcional ao fluxo enlaçado do campo, para $t = 0$, e difere da tensão interna permanente no mesmo instante (\bar{E}), pela queda de tensão $(\bar{X}_d - \bar{X}'_d) \cdot \bar{I}_d(L)$. A utilidade de \bar{E}'_q vem do fato que, desde que sendo proporcional ao fluxo enlaçado de campo, o qual se mantém constante no instante da falta, esta tensão tem o mesmo valor antes e após a falta. Se as resistências são desprezadas, o valor de \bar{E}'_q também não se altera após $t = 0$. Complementando, conforme se pode facilmente verificar, se antes da falta a máquina

estava a vazio, então $E'_q = E$.

Substituindo 6.22 na primeira das equações 6.19, resulta :

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{do} &= -\bar{L}_d \cdot \bar{I}_{d(L)} + E = -\bar{X}_d \cdot \bar{I}_{d(L)} + \\ &+ E'_q + \bar{X}_d \cdot \bar{I}_{d(L)} - \bar{X}'_d \cdot \bar{I}_{d(L)} \\ \bar{\psi}_{do} &= -\bar{L}_d \cdot \bar{I}_{d(L)} + E = \\ &= -\bar{X}_d \cdot \bar{I}_{d(L)} + E'_d + (\bar{X}_d - \bar{X}'_d) \bar{I}_{d(L)} \\ &= E'_q - \bar{X}'_d \cdot \bar{I}_{d(L)}\end{aligned}\quad \text{equação 6.24}$$

Substituindo estes resultados nas equações 6.14, teremos as equações das correntes de curto-circuito, estando a máquina alimentando anteriormente, uma carga equilibrada.

$$\begin{aligned}\bar{I}_d &= \frac{E'_q}{\bar{X}'_d} (1 - \cos \bar{\omega} \bar{t}) \bar{I}_{d(L)} \cdot \cos \bar{\omega} \bar{t} + \frac{\bar{X}_q}{\bar{X}'_d} \cdot \bar{I}_{q(L)} \text{sen} \bar{\omega} \bar{t} \\ \bar{I}_q &= -\frac{E'_q}{\bar{X}_q} \text{sen} \bar{\omega} \bar{t} - \bar{I}_{q(L)} \cdot \cos \bar{\omega} \bar{t} + \frac{\bar{X}'_d}{\bar{X}_q} \cdot \bar{I}_{d(L)} \cdot \text{sen} \bar{\omega} \bar{t} \\ \bar{I}_o &= 0 \\ \bar{I}_{fd} &= \bar{I}_{fdo} \left(1 + \frac{\bar{X}_d - \bar{X}'_d}{\bar{X}'_d} (1 - \cos \bar{\omega} \bar{t}) \right) - \frac{\bar{X}_d}{\bar{X}'_d} \cdot \frac{(\bar{X}_d - \bar{X}'_d)}{\bar{L}_{ad}} \cdot \bar{I}_{d(L)} (1 - \cos \bar{\omega} \bar{t}) - \\ &- \frac{\bar{X}_q}{\bar{X}'_d} \cdot \frac{(\bar{X}_d - \bar{X}'_d)}{\bar{L}_{ad}} \cdot \bar{I}_{q(L)} \cdot \text{sen} \bar{\omega} \bar{t}\end{aligned}$$

equações 6.25

Estes resultados diferem substancialmente daqueles anteriormente concluídos nas equações 6.16, correspondentes às correntes de curto-circuito, estando a máquina anteriormente a vazio. Esta diferença reside no fato de aparecerem termos adicionais, os quais dependem de $\bar{T}_d(L)$ e $\bar{T}_q(L)$, sendo que estes termos adicionais são todos alternados. A corrente de campo, \bar{T}_{fd} , entretanto, apresenta termos contínuos, os quais dependem das correntes de operação antes da falta.

Tal como ocorreu para o caso anterior, considerando a existência de resistências, após um certo tempo teremos as correntes permanentes de curto-circuito, as quais surgirão, tão logo seja decorrido o período transitório. Nesta situação as correntes seriam dadas pelas já apresentadas equações 6.17 e 6.18. Deste modo, concluímos que, desde que resistências estejam presentes no processo, então os termos adicionais das equações deverão ser transitórios e, estas parcelas desaparecerão antes de o regime permanente ser atingido.

Procurando obter as expressões para as correntes \bar{x}_a , \bar{x}_b e \bar{x}_c , deveremos empregar as equações de transformação de grandezas do sistema dqo para o sistema físico. Estas equações seriam do tipo :

$$\bar{T}_a = \bar{T}_d \cdot \cos\theta - \bar{T}_q \cdot \text{sen}\theta + \bar{T}_o$$

$$\bar{T}_b = \bar{T}_d \cdot \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) - \bar{T}_q \cdot \text{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \bar{T}_o$$

$$\bar{T}_c = \bar{T}_d \cdot \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) - \bar{T}_q \cdot \text{sen}(\theta + \frac{2\pi}{3}) + \bar{T}_o$$

Substituindo \bar{T}_d , \bar{T}_q e \bar{T}_o , dadas por 6.25 teremos para \bar{T}_a , a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 i_a = & \frac{E'_q}{X'_d} \cdot \cos\theta + \\
 & + \frac{X'_d + X_q}{2X'_d \cdot X_q} \cdot \left((-E'_q + X'_d \cdot \bar{T}_{d(L)}) \cos\theta - X_q \cdot \bar{T}_{q(L)} \cdot \text{sen}\theta \right) + \\
 & + \frac{X'_d - X_q}{2X'_d \cdot X_q} \cdot \left((E'_q - X'_d \cdot \bar{T}_{d(L)}) \cos(2\bar{\omega}t + \theta) - X_q \cdot \bar{T}_{q(L)} \text{sen}(2\bar{\omega}t + \theta) \right)
 \end{aligned}$$

equação 6.26

Deste resultado constata-se que a corrente consiste basicamente de 3 componentes de frequências diferentes, que separadas, nos permitem escrever :

$$\bar{T}_{a(\omega)} = \frac{E'_q}{X'_d} \cdot \cos\theta \quad \text{equação 6.27}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_{a(DC)} &= \frac{X'_d + X_q}{2X'_d \cdot X_q} \left((-E'_q + X'_d \cdot \bar{T}_{d(L)}) \cos\theta - X_q \cdot \bar{T}_{q(L)} \cdot \text{sen}\theta \right) \\
 &= \frac{X'_d + X_q}{2X'_d \cdot X_q} (-\bar{\psi}_{d0} \cdot \cos\theta - \psi_{q0} \cdot \text{sen}\theta) \quad \text{equação 6.28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_{a(2\omega)} &= \frac{X'_d - X_q}{2X'_d \cdot X_q} \left((E'_q - X'_d \cdot \bar{T}_{d(L)}) \cos(2\bar{\omega}t + \theta) - X_q \cdot \bar{T}_{q(L)} \text{sen}(2\bar{\omega}t + \right. \\
 & \left. + \theta) \right) \quad \text{equação 6.29}
 \end{aligned}$$

Onde :

$\bar{T}_{a(\omega)}$ = componente de frequência fundamental

$\bar{T}_{a(DC)}$ = componente contínua

$\bar{T}_{a(2\omega)}$ = componente de 2ª harmônico.

E a segunda forma da equação de $\bar{T}_{a(DC)}$ foi

obtida por introdução das expressões anteriormente apresentadas para os fluxos $\bar{\psi}_{do}$ e $\bar{\psi}_{qo}$.

Naturalmente, a corrente \bar{I}_a seria dada por :

$$\bar{I}_a = \bar{I}_{a(\omega)} + \bar{I}_{a(DC)} + \bar{I}_{a(2\omega)}$$

Do mesmo modo, como procedemos para a fase a, poderíamos determinar as correntes para as demais fases.

Como uma importante observação, devemos observar que a tensão de alimentação do circuito de campo permanece inalterada. Assim, se considerarmos a existência de resistências em tal circuito, podemos concluir que a corrente final de campo, após o transitório, será a mesma, que existia antes da falta.

6.5 - EFEITO APROXIMADO DAS RESISTÊNCIAS

As expressões para as correntes nos vários enrolamentos durante um curto-circuito trifásico, obtidas no item anterior, seriam rigorosas soluções das equações diferenciais, se todas as resistências fossem feitas iguais a zero. Entretanto, numa máquina real, as resistências, embora relativamente pequenas, têm um importante efeito na mudança gradual das correntes de curto-circuito.

Conforme vimos, as correntes calculadas a partir do Teorema dos Fluxos Constantes diferem em muito daquelas calculadas pelos métodos empregados nos regimes permanentes, sendo que as resistências foram desprezadas em ambos os casos. Entretanto, devemos encontrar algum método aproximado de modifica



ção dos resultados anteriores para incluir o mais importante e feito da resistência e para harmonizar a citada diferença encontrada.

Foi mostrado que, para todos os enrolamentos físicos de uma máquina real, o fluxo enlaçado não muda no instante do curto-circuito. É, entretanto, razoável concluir que as correntes calculadas com tais suposições seriam aquelas existentes nos primeiros instantes após a ocorrência do curto-circuito.

Estas correntes, possuem componentes contínuas uma ou mais componentes alternadas de frequência fundamental e de um modo mais geral, apresentam componentes de 2º harmônico. Se estas expressões para as correntes, são aproximadamente válidas, quando as resistências são incluídas, para os primeiros instantes, podemos proceder uma alteração no teorema anteriormente empregado. Baseando-nos, então, no fato de que aquelas correntes calculadas são verdadeiras para os primeiros instantes, após a ocorrência da falta. A mudança dos fluxos enlaçados de quaisquer enrolamentos reais curto-circuitados, no intervalo de tempo de t_1 a t_2 , pode ser aproximada pela substituição das expressões encontradas para as correntes, na expressão 6.2, com $e = 0$ e R igual à resistência do enrolamento em estudo. Introduzindo pois a notação de valores por unidade, teríamos :

$$\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 = - \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \bar{R} \cdot \bar{I} \cdot d\bar{t} \quad \text{equação 6.30}$$

Nesta equação, se o intervalo de t_1 , a t_2 for

um ciclo do termo fundamental, ou do 2º harmônico, quando apenas um estiver presente, o valor da integral será nulo. Por outro lado, desde que a componente contínua apresente um valor constante, a equação 6.30 será diretamente proporcional ao tempo, e o fluxo enlaçado em cada enrolamento deverá diminuir, devido ao sinal (-) junto ao 2º membro da expressão, segundo uma razão diretamente proporcional ao valor da componente contínua da corrente naquele enrolamento. Se entretanto, o intervalo sobre o qual se calcula a integral difere de um ciclo, as integrais dos termos alternados não estarão muito longe de zero, pois as áreas formadas pelas correspondentes funções do tipo $\bar{R} \cdot \bar{i}$ formarão áreas positivas e negativas com o eixo dos tempos, sobre o qual a integral é calculada. Desde que ainda a magnitude da componente contínua, possa ser em princípio, maior que os valores de pico das componentes alternadas, pode ser concluído que somente a componente contínua da corrente tem um importante efeito progressivo nas mudanças dos fluxos enlaçados de um enrolamento curto-circuitado. Naturalmente, esta conclusão constitui uma aproximação.

Se aplicarmos este princípio (influência apenas da componente DC da corrente) junto à equação :

$$\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 = - \int_{t_1}^{\bar{t}_2} \bar{R} \cdot \bar{i} \cdot d\bar{t}$$

Concluiremos que todos os termos AC do 2º membro serão considerados desprezíveis.

Estas observações sugerem um método, sujeito a uma verificação mais rigorosa, para modificação das equações das correntes de curto-circuito, de modo a incluir o efeito das resistências. Estas correntes são primeiramente calculadas para

as condições desejadas, com todas as resistências desprezadas, quando então são obtidas as diversas componentes. Para as condições aqui consideradas, as componentes DC destas correntes serão constantes e os valores eficazes de cada componente AC serão também constantes. Quando as resistências são introduzidas, os valores destas grandezas poderão estar sujeitos a uma variação gradual do mesmo tipo que a componente DC do fluxo de cada enrolamento, o qual conforme vimos, cai segundo uma relação proporcional ao produto da resistência pela componente DC da corrente do mesmo enrolamento. Desde que as correntes foram computadas nas bases de que os fluxos enlacados são constantes para todos os enrolamentos com tensões nulas em seus terminais, as componentes alternadas do fluxo enlacado em cada enrolamento tornar-se-ão nulas no momento do curto-circuito e de acordo com o princípio já estabelecido, qualquer variação das componentes das correntes deverá ser de tal maneira, que estes termos tornem-se nulos.

Para a aplicação do que foi exposto, verifica-se a necessidade de termos tensões nulas nos terminais dos enrolamentos, pois caso contrário, os fluxos enlacados, ao invés de diminuírem, aumentarão numa razão proporcional a $(\bar{e} - \bar{R} \cdot \bar{x}_{(DC)})$. Se entretanto, \bar{e} for menor que $\bar{R} \cdot \bar{x}_{(DC)}$, ou negativa, então os fluxos enlacados diminuirão.

Para o circuito de campo, a fem aplicada é \bar{e}_{fd} , a qual foi considerada ser reduzida a zero, quando \bar{r}_{fd} o foi também. Se agora a resistência é introduzida na equação 6.2, a tensão de campo \bar{e}_{fd} deverá também ser incluída, sendo que esta tensão será dada pela equação 6.5, se o seu valor não alterar durante o curto-circuito.

Embora o método sugerido aqui para modificar as correntes de curto-circuito, de modo a incluir os efeitos das resistências, seja uma tentativa, uma vez que suas bases não são rigorosas, pode-se dizer que os resultados obtidos são satisfatórios, comparando os resultados que poderíamos obter por processos rigorosos ou por testes.

De modo a aplicar o método apresentado, aos resultados anteriores, consideremos inicialmente o problema do circuito de campo.

Conforme demonstrado, quando as resistências são desprezadas, a corrente de campo é dada pela última das equações 6.25. Devido a existência de termos contínuos, se noidais e cossenoidais, podemos escrever :

$$\bar{i}_{fd} = \bar{i}_{fd(DC)} + \bar{i}_{fd(C)} \cdot \cos \bar{\omega} \bar{t} + \bar{i}_{fd(S)} \cdot \sin \bar{\omega} \bar{t}$$

equação 6.31

Nos primeiros instantes, ou em geral, se a resistência for inteiramente ignorada, estas componentes são

$$\begin{aligned} \bar{i}_{fd(DC)} &= \bar{i}_{fdo} \left[1 + \frac{(\bar{X}_d - \bar{X}'_d)}{\bar{X}'_d} \right] - \frac{\bar{X}_d}{\bar{X}'_d} \frac{(\bar{X}_d - \bar{X}'_d)}{\bar{L}_{ad}} \cdot \bar{i}_d(L) \\ \bar{i}_{fd(C)} &= - \frac{(\bar{X}_d - \bar{X}'_d)}{\bar{X}'_d} \cdot \bar{i}_{fdo} + \frac{\bar{X}_d}{\bar{X}'_d} \cdot \frac{(\bar{X}_d - \bar{X}'_d)}{\bar{L}_{ad}} \cdot \bar{i}_d(L) \\ \bar{i}_{fd(S)} &= - \frac{\bar{X}_q}{\bar{X}'_d} \cdot \frac{(\bar{X}_d - \bar{X}'_d)}{\bar{L}_{ad}} \cdot \bar{i}_q(L) \end{aligned}$$

equações 6.32

Conforme vimos :

$$\bar{v}_{fd} = -\bar{L}_{ad} \cdot \bar{i}_d + \bar{L}_{ffd} \cdot \bar{i}_{fd}$$

Deste modo, para efetuarmos análises com a equação acima, devemos inicialmente observar a expressão de \bar{i}_d .

Da expressão 6.25, podemos verificar que a forma de \bar{i}_d nos permite escrever :

$$\bar{i}_d = \bar{i}_d(\text{DC}) + \bar{i}_d(\text{C}) \cdot \cos \bar{\omega} \bar{t} + \bar{i}_d(\text{S}) \cdot \text{sen} \bar{\omega} \bar{t} \quad \text{equação 6.33}$$

Para a qual nos primeiros instantes, ou em geral, quando as resistências são desprezadas :

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_d(\text{DC}) &= \frac{E'_q}{X'_d} \\ \bar{i}_d(\text{C}) &= \bar{i}_d(\text{L}) - \frac{E'_q}{X'_d} \\ \bar{i}_d(\text{S}) &= \frac{X_q}{X'_d} \cdot \bar{i}_q(\text{L}) \end{aligned} \right\} \quad \text{equações 6.33}$$

Consequentemente, o fluxo enlacado de campo vale:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{fd} &= L_{ffd} \cdot \bar{i}_{fd}(\text{DC}) - L_{ad} \cdot \bar{i}_d(\text{DC}) + (L_{ffd} \cdot \bar{i}_{fd}(\text{C}) - L_{ad} \cdot \bar{i}_d(\text{C})) \\ &\quad \cos \bar{\omega} \bar{t} + (L_{ffd} \cdot \bar{i}_{fd}(\text{S}) - L_{ad} \cdot \bar{i}_d(\text{S})) \text{sen} \bar{\omega} \bar{t} \end{aligned} \quad \text{equação 6.34}$$

De acordo com o procedimento aproximado já desenvolvido, a parte contínua de $\bar{\psi}_{fd}$ aumenta numa razão igual a $(\bar{e}_{fd} - \bar{r}_{fd} \cdot \bar{i}_{fd}(\text{DC}))$ e as partes alternadas deverão ser mantidas iguais a zero. Então :

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left(L_{ffd} \cdot \bar{i}_{fd}(\text{DC}) - L_{ad} \cdot \bar{i}_d(\text{DC}) \right) = \bar{e}_{fd} - \bar{r}_{fd} \cdot \bar{i}_{fd}(\text{DC})$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{L}_{ffd} \cdot \bar{I}_{fd}(C) - \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_d(C) &= 0 \\ \bar{L}_{ffd} \cdot \bar{I}_{fd}(S) - \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_d(S) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ equações 6.35}$$

Estas equações contêm 6 componentes desconhecidos, cujos valores são conhecidos apenas para $t = 0$, como mostrado pelas equações 6.32 e 6.33. Desde que possuímos apenas 3 equações, outras equações deverão ser obtidas, o que é realizado por aplicação dos mesmos princípios gerais aos outros enrolamentos.

Os fluxos dos enrolamentos de fase, serão mais facilmente determinados se conhecermos $\bar{\psi}_d$, $\bar{\psi}_q$ e $\bar{\psi}_o$. A corrente \bar{I}_q , dada pela segunda das equações 6.25, consiste de um termo senoidal e outro cossenoidal de frequência igual a fundamental. Para a corrente \bar{I}_q , podemos escrever :

$$\bar{I}_q = \bar{I}_q(C) \cdot \cos \bar{\omega} t + \bar{I}_q(S) \cdot \sin \bar{\omega} t \quad \text{equação 6.36}$$

Onde nos instantes iniciais, ou em geral, quando as resistências são inteiramente desprezadas, teremos para $\bar{I}_q(C)$ e $\bar{I}_q(S)$ as expressões a seguir :

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_q(C) &= -\bar{I}_q(L) \\ \bar{I}_q(S) &= \frac{\bar{X}'_d}{\bar{X}_q} \cdot \bar{I}_d(L) = \frac{\bar{E}'_d}{\bar{X}_q} \end{aligned} \right\} \text{ equações 6.37}$$

Substituindo as equações 6.31, 6.33 e 6.36, nas expressões para $\bar{\psi}_d$, $\bar{\psi}_q$ e $\bar{\psi}_o$:

$$\bar{\psi}_d = \left\{ -L_d \cdot \bar{i}_d(\text{DC}) + L_{ad} \cdot \bar{i}_{fd}(\text{DC}) \right\} + \left\{ -L_d \cdot \bar{i}_d(C) + L_{ad} \cdot \bar{i}_{fd}(C) \right\} \\ \cos \bar{\omega} \bar{t} + \left\{ -L_d \cdot \bar{i}_d(S) + L_{ad} \cdot \bar{i}_{fd}(S) \right\} \text{sen} \bar{\omega} \bar{t}$$

$$\bar{\psi}_q = -L_q \cdot \bar{i}_q(C) \cdot \cos \bar{\omega} \bar{t} - L_q \cdot \bar{i}_q(S) \cdot \text{sen} \bar{\omega} \bar{t}$$

$$\bar{\psi}_o = 0$$

equações 6.38

Obtidos os fluxos $\bar{\psi}_d$, $\bar{\psi}_q$ e $\bar{\psi}_o$, através de equação para transformação de fluxos do sistema dqo para o sistema físico, temos o seguinte resultado para $\bar{\psi}_a$:

$$\bar{\psi}_a = \left\{ -L_d \cdot \bar{i}_d(C) - L_q \bar{i}_q(S) + L_{ad} \cdot \bar{i}_{fd}(C) \right\} \cos \theta_o - \\ - \left\{ -L_d \cdot \bar{i}_d(S) + L_q \cdot \bar{i}_q(C) + L_{ad} \cdot \bar{i}_{fd}(S) \right\} \text{sen} \theta_o + \\ + \left\{ -L_d \cdot \bar{i}_d(\text{DC}) + L_{ad} \cdot \bar{i}_{fd}(\text{DC}) \right\} \cos \theta + \\ + \left\{ -L_d \cdot \bar{i}_d(C) + L_q \cdot \bar{i}_q(S) + L_{ad} \cdot \bar{i}_{fd}(C) \right\} \cos(2\bar{\omega} \bar{t} + \theta_o) + \\ + \left\{ -L_d \cdot \bar{i}_d(S) - L_q \cdot \bar{i}_q(C) + L_{ad} \cdot \bar{i}_{fd}(S) \right\} \text{sen}(2\bar{\omega} \bar{t} + \theta_o)$$

equação 6.39

Para aplicar a regra aproximada de que todas as componentes alternadas são nulas e que a componente DC de cresce à uma razão proporcional ao produto da componente continua pela correspondente resistência, primeiramente devemos expressar \bar{i}_a em termos das componentes \bar{i}_d e \bar{i}_q . Para tanto, substituindo as expressões 6.33 e 6.36 na equação para obtenção de \bar{i}_a a partir das citadas componentes, teremos :

$$\begin{aligned} \bar{I}_a = & \left(\bar{I}_{d(C)} - \bar{I}_{q(S)} \right) \cos \theta_0 - \left(\bar{I}_{d(S)} + \bar{I}_{q(C)} \right) \operatorname{sen} \theta_0 + \\ & + \bar{I}_{d(DC)} \cdot \cos(\bar{\omega} \bar{t} + \theta_0) + \left(\bar{I}_{d(C)} + \bar{I}_{q(S)} \right) \cos(2\bar{\omega} \bar{t} + \theta_0) + \\ & + \left(\bar{I}_{d(S)} - \bar{I}_{q(C)} \right) \operatorname{sen}(2\bar{\omega} \bar{t} + \theta_0) \end{aligned} \quad \text{equação 6.40}$$

Aplicando a regra :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\bar{t}} \left(-\bar{L}_d \cdot \bar{I}_{d(C)} - \bar{L}_q \cdot \bar{I}_{q(S)} + \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{fd(C)} \right) \cos \theta_0 - \\ & - \frac{d}{d\bar{t}} \left(-\bar{L}_d \cdot \bar{I}_{d(S)} + \bar{L}_q \cdot \bar{I}_{q(C)} + \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{fd(S)} \right) \operatorname{sen} \theta_0 = \\ & = \bar{R} \left(\left(\bar{I}_{d(C)} - \bar{I}_{q(S)} \right) \cos \theta_0 - \left(\bar{I}_{d(S)} + \bar{I}_{q(C)} \right) \operatorname{sen} \theta_0 \right) \end{aligned} \quad \text{equação 6.41}$$

Bem como :

$$\left. \begin{aligned} -\bar{L}_d \cdot \bar{I}_{d(DC)} + \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{fd(DC)} &= 0 \\ -\bar{L}_d \cdot \bar{I}_{d(C)} + \bar{L}_q \cdot \bar{I}_{q(S)} + \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{fd(C)} &= 0 \\ -\bar{L}_d \cdot \bar{I}_{d(S)} - \bar{L}_q \cdot \bar{I}_{q(S)} + \bar{L}_{ad} \cdot \bar{I}_{fd(S)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{equações 6.42}$$

Estas relações são mais quatro equações adicionais para a determinação das componentes desconhecidas das correntes. Entretanto, a 1ª destas equações é válida para qualquer valor arbitrário de θ_0 . Se θ_0 é zero, os termos em seno se anulam, resultando apenas aqueles em cosseno, assim como, se θ_0 for igual a $\pi/2$, permanecerão apenas os termos em seno. Então, esta equação poderia ser desmembrada em duas outras, resultando :

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left(-\bar{L}_d \cdot \bar{T}_d(C) - \bar{L}_q \cdot \bar{T}_q(S) + \bar{L}_{ad} \cdot \bar{T}_{fd}(C) \right) = \bar{R}(\bar{T}_d(C) - \bar{T}_q(S))$$

equação 6.43

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left(-\bar{L}_d \cdot \bar{T}_d(S) + \bar{L}_q \cdot \bar{T}_q(C) + \bar{L}_{ad} \cdot \bar{T}_{fd}(S) \right) = \bar{R}(\bar{T}_d(S) + \bar{T}_q(S))$$

equação 6.44

Portanto, temos um total de 5 equações, as quais adicionadas às 3 equações 6.35, formam um total de 8 equações com 8 componentes desconhecidas, das correntes. Em geral, será possível encontrarmos estas componentes, resolvendo o sistema obtido.

Poderá ser observado que somente duas das equações contêm $\bar{e}_d(DC)$ e $\bar{T}_{fd}(DC)$, sendo que poderíamos operá-las separadamente. Resolvendo a primeira das equações 6.42, para $\bar{T}_d(DC)$ e substituindo o resultado na primeira das expressões 6.35, dá :

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left(\bar{L}_{ffd} \cdot \bar{T}_{fd}(DC) - \frac{\bar{L}_{ad}^2}{\bar{L}_d} \cdot \bar{T}_{fd}(DC) \right) = \bar{e}_{fd} - \bar{R}_{fd} \cdot \bar{T}_{fd}(DC)$$

Ou :

$$\left(\bar{L}_{ffd} - \frac{\bar{L}_{ad}^2}{\bar{L}_d} \right) \cdot \frac{d \bar{T}_{fd}(DC)}{d\bar{t}} + \bar{R}_{fd} \cdot \bar{T}_{fd}(DC) = \bar{e}_{fd} \quad \text{equação 6.45}$$

Esta equação poderia ainda ser modificada para :

$$\frac{\bar{X}'_d}{\bar{X}_d} \cdot \bar{L}_{ffd} \cdot \frac{d \bar{T}_{fd}(DC)}{d\bar{t}} + \bar{R}_{fd} \cdot \bar{T}_{fd}(DC) = \bar{e}_{fd} \quad \text{equação 6.46}$$

que é uma equação diferencial linear de 1ª ordem e 1º grau, com coeficientes constantes, sendo que a sua solução pode ser realizada por diversos métodos. Por exemplo, multiplicando a equação

peelo fator de integração $e^{-\alpha \bar{t}}$, onde α é um coeficiente a determinar, teremos após um arranjo, a forma abaixo para a expressão 6.46.

$$e^{-\alpha \bar{t}} \cdot \frac{d \bar{i}_{fd}(DC)}{d\bar{t}} + \frac{\bar{X}_d \cdot \bar{R}_{fd}}{\bar{X}'_d \cdot \bar{L}_{ffd}} \cdot \bar{i}_{fd}(DC) \cdot e^{-\alpha \bar{t}} = \frac{\bar{X}_d \cdot \bar{e}_{fd}}{\bar{X}'_d \cdot \bar{L}_{ffd}} \cdot e^{-\alpha \bar{t}}$$

equação 6.47

Considerando a derivada da função $\bar{i}_{fd}(DC) \cdot e^{-\alpha \bar{t}}$ em relação a \bar{t} , teremos :

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left(\bar{i}_{fd}(DC) \cdot e^{-\alpha \bar{t}} \right) = e^{-\alpha \bar{t}} \cdot \frac{d \bar{i}_{fd}(DC)}{d\bar{t}} - \alpha \cdot \bar{i}_{fd}(DC) \cdot e^{-\alpha \bar{t}}$$

equação 6.48

$$\text{Se } \alpha = - \frac{\bar{X}_d \cdot \bar{R}_{fd}}{\bar{X}'_d \cdot \bar{L}_{ffd}}, \text{ o lado direito da equação}$$

anterior é o mesmo lado esquerdo da 6.47. Então :

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left(\bar{i}_{fd}(DC) \cdot e^{-\alpha \bar{t}} \right) = \frac{\bar{X}_d \cdot \bar{e}_{fd}}{\bar{X}'_d \cdot \bar{L}_{ffd}} \cdot e^{-\alpha \bar{t}}$$

Integrando de zero a t :

$$\bar{i}_{fd}(DC) \cdot e^{-\alpha \bar{t}} \Big|_0^{\bar{t}} = \int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{X}_d \cdot \bar{e}_{fd}}{\bar{X}'_d \cdot \bar{L}_{ffd}} \cdot e^{-\alpha \bar{t}} \cdot d\bar{t}$$

Ou :

$$\bar{i}_{fd}(DC) = \left(\bar{i}_{fd}(DC) \right)_{t=0} \cdot e^{\alpha \bar{t}} + \frac{\bar{X}_d \cdot e^{\alpha \bar{t}}}{\bar{X}'_d \cdot \bar{L}_{ffd}} \int_0^{\bar{t}} \bar{e}_{fd} \cdot e^{-\alpha \bar{t}} \cdot d\bar{t}$$

equação 6.49

Quando \bar{e}_{fd} é constante, a integração pode ser facilmente realizada. Sendo \bar{e}_{fd} dada pela equação $\bar{e}_{fd} = \bar{R}_{fd} \cdot \bar{i}_{fd}$ e o valor de $\bar{i}_{fd}(DC)$ para $t = 0$, apresentado na 1ª das e

quações 6.32, o resultado será :

$$\bar{T}_{fd(DC)} = \bar{T}_{fdo} + \bar{T}_{fdo} \cdot \frac{(\bar{X}_d - \bar{X}'_d)}{\bar{X}'_d} \cdot e^{\alpha \bar{t}} - \frac{\bar{X}_d}{\bar{X}'_d} \cdot \frac{(\bar{X}_d - \bar{X}'_d)}{\bar{L}_{ad}} \cdot \bar{T}_{d(L)} \cdot e^{\alpha \bar{t}}$$

equação 6.50

Substituindo este resultado na 1ª das equações 6.42 e, resolvendo para $\bar{T}_{d(DC)}$ teremos a expressão abaixo, a qual para ser obtida foi necessário introduzirmos as equações de \bar{E} e \bar{E}_{q0} apresentadas anteriormente.

$$\bar{T}_{d(DC)} = \left(\frac{\bar{E}}{\bar{X}_d} + \left(\frac{\bar{E}_q}{\bar{X}'_d} - \frac{\bar{E}}{\bar{X}_d} \right) e^{\alpha \bar{t}} \right)$$

equação 6.51

As seis equações restantes caem em dois grupos um envolvendo $\bar{T}_{fd(C)}$, $\bar{T}_{d(C)}$ e $\bar{T}_{q(S)}$ e o outro relacionando $\bar{T}_{fd(S)}$, $\bar{T}_{d(S)}$ e $\bar{T}_{q(C)}$. Resolvendo cada grupo do mesmo modo como procedemos atrás, encontraremos :

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_{d(C)} &= \left(\bar{T}_{d(L)} - \frac{\bar{E}'_q}{\bar{X}'_d} \right) e^{\beta \bar{t}} \\ \bar{T}_{d(S)} &= \frac{\bar{X}_q}{\bar{X}'_d} \cdot \bar{T}_{q(L)} \cdot e^{\beta \bar{t}} \\ \bar{T}_{q(S)} &= \left(\frac{\bar{X}_d}{\bar{X}_q} \cdot \bar{T}_{d(L)} - \frac{\bar{E}'_q}{\bar{X}_q} \right) e^{\beta \bar{t}} \\ \bar{T}_{q(C)} &= -\bar{T}_{q(L)} \cdot e^{\beta \bar{t}} \\ \bar{T}_{fd(C)} &= \left(-\frac{(\bar{X}_d - \bar{X}'_d)}{\bar{X}'_d} \cdot \bar{T}_{fdo} + \frac{\bar{X}_d}{\bar{X}'_d} \cdot \frac{(\bar{X}_d - \bar{X}'_d)}{\bar{L}_{ad}} \cdot \bar{T}_{d(L)} \right) e^{\beta \bar{t}} \\ \bar{T}_{fd(S)} &= -\frac{\bar{X}_q}{\bar{X}'_d} \cdot \frac{(\bar{X}_d - \bar{X}'_d)}{\bar{L}_{ad}} \cdot \bar{T}_{q(L)} \cdot e^{\beta \bar{t}} \end{aligned} \right\}$$

equações 6.52

Onde :

$$\beta = -\bar{R} \frac{(\bar{X}'_d + \bar{X}'_q)}{\bar{X}_d \cdot \bar{X}_q} \quad \text{equação 6.53}$$

Substituindo estes resultados em 6.31, 6.33 e 6.36, teremos as expressões finais para \bar{I}_{fd} , \bar{I}_d e \bar{I}_q :

$$\begin{aligned} \bar{I}_{fd} = & \bar{I}_{fdo} \left(1 + \frac{\bar{X}_d - \bar{X}'_d}{\bar{X}'_d} \left[e^{\alpha \bar{t}} - e^{\beta \bar{t}} \cdot \cos \bar{\omega} \bar{t} \right] \right) + \\ & + \frac{\bar{X}_d}{\bar{X}'_d} \cdot \frac{(\bar{X}_d - \bar{X}'_d)}{\bar{L}_{ad}} \cdot \bar{I}_{d(L)} \left(-e^{\alpha \bar{t}} + e^{\beta \bar{t}} \cdot \cos \bar{\omega} \bar{t} \right) - \\ & - \frac{\bar{X}_q}{\bar{X}_d} \cdot \frac{(\bar{X}_d - \bar{X}'_d)}{\bar{L}_{ad}} \cdot \bar{I}_{q(L)} \cdot e^{\beta \bar{t}} \cdot \sin \bar{\omega} \bar{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_d = & \frac{\bar{E}}{\bar{X}_d} + \left(\frac{\bar{E}'_{q0}}{\bar{X}'_d} - \frac{\bar{E}}{\bar{X}'_d} \right) e^{\alpha \bar{t}} + \bar{I}_{d(L)} \cdot e^{\beta \bar{t}} \cdot \cos \bar{\omega} \bar{t} - \\ & \frac{\bar{E}'_{q0}}{\bar{X}'_d} \cdot e^{\beta \bar{t}} \cdot \cos \bar{\omega} \bar{t} + \frac{\bar{X}_q}{\bar{X}'_d} \cdot \bar{I}_{q(L)} \cdot e^{\beta \bar{t}} \cdot \sin \bar{\omega} \bar{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_q = & -\bar{I}_{q(L)} \cdot e^{\beta \bar{t}} \cdot \cos \bar{\omega} \bar{t} + \frac{\bar{X}'_d}{\bar{X}_q} \cdot \bar{I}_{d(L)} \cdot e^{\beta \bar{t}} \cdot \sin \bar{\omega} \bar{t} - \frac{\bar{E}'_q}{\bar{X}_q} e^{\beta \bar{t}} \cdot \\ & \cdot \sin \bar{\omega} \bar{t} \end{aligned} \quad \text{equações 6.54}$$

$$\bar{I}_o = 0$$

Naturalmente, se o curto ocorre numa situação a vazio, logicamente $\bar{I}_{d(L)}$ e $\bar{I}_{q(L)}$ serão nulas.

Para mostrar o efeito do decaimento, a figura a seguir mostra as correntes \bar{I}_d , \bar{I}_q e \bar{I}_{fd} para o caso de um curto-circuito ocorrido para a máquina operando anteriormente a vazio.

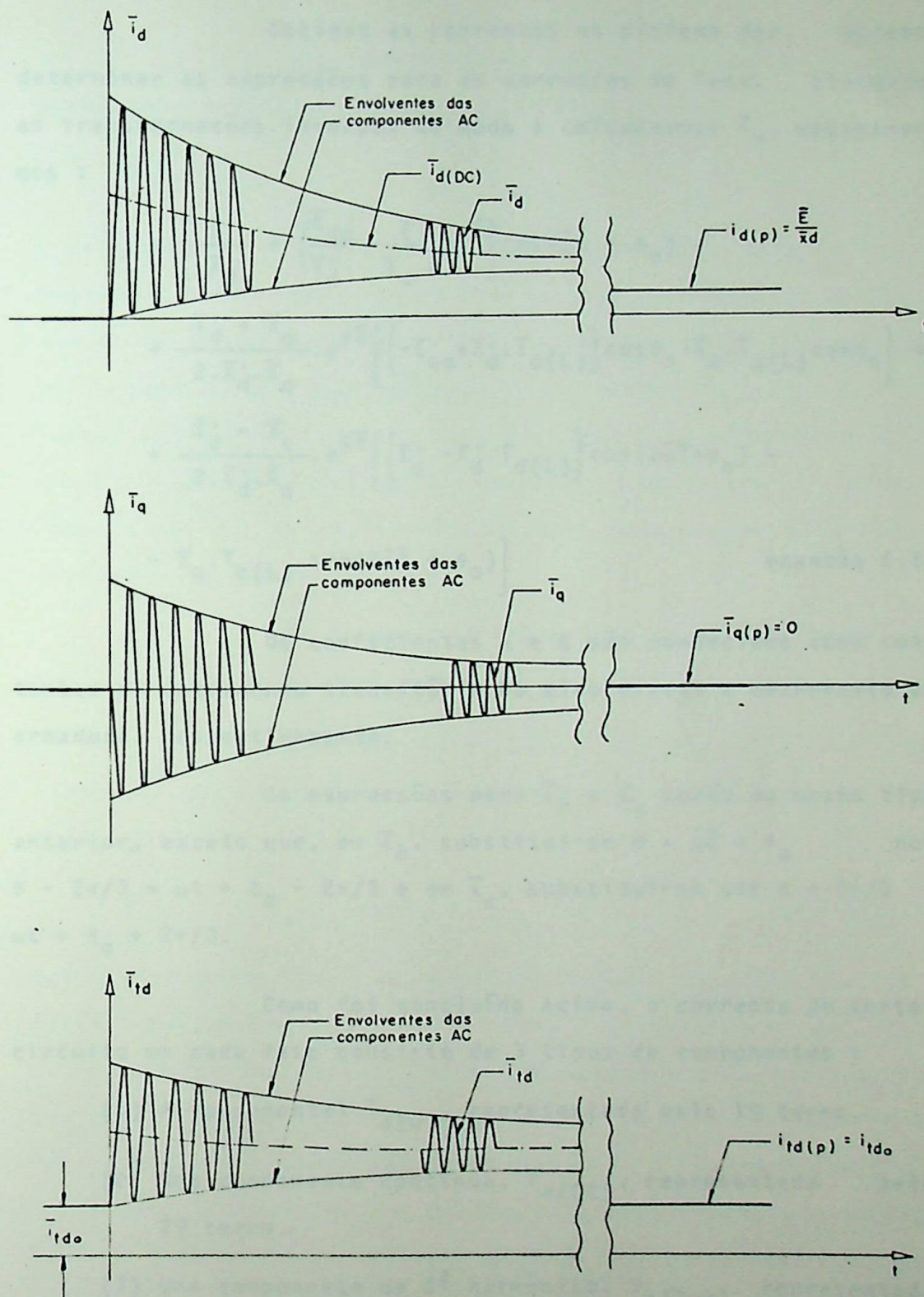


Fig.6.2 - Correntes transitórias e permanentes de eixo direto, em quadratura e de campo, quando as resistências são consideradas.

Obtidas as correntes no sistema dqo , podemos determinar as expressões para as correntes de fase. Efetuando as transformações inversas de modo a calcularmos \bar{i}_a , encontraremos :

$$\begin{aligned} \bar{i}_a = & \left(\frac{\bar{E}}{\bar{X}_d} + \left(\frac{\bar{E}_{q0}}{\bar{X}'_d} - \frac{\bar{E}}{\bar{X}_d} \right) e^{\alpha \bar{t}} \right) \cos(\bar{\omega} \bar{t} + \theta_0) + \\ & + \frac{\bar{X}'_d + \bar{X}_q}{2 \cdot \bar{X}'_d \cdot \bar{X}_q} \cdot e^{\beta \bar{t}} \left(\left(-\bar{E}'_{q0} + \bar{X}'_d \cdot \bar{i}_{d(L)} \right) \cos \theta_0 - \bar{X}_q \cdot \bar{i}_{q(L)} \operatorname{sen} \theta_0 \right) + \\ & + \frac{\bar{X}'_d - \bar{X}_q}{2 \cdot \bar{X}'_d \cdot \bar{X}_q} \cdot e^{\beta \bar{t}} \left(\left(\bar{E}'_q - \bar{X}'_d \cdot \bar{i}_{d(L)} \right) \cos(2\bar{\omega} \bar{t} + \theta_0) - \right. \\ & \left. - \bar{X}_q \cdot \bar{i}_{q(L)} \cdot \operatorname{sen}(2\bar{\omega} \bar{t} + \theta_0) \right) \end{aligned} \quad \text{equação 6.55}$$

Os coeficientes α e β são conhecidos como constantes de decaimento transitório do eixo direto e decaimento da armadura, respectivamente.

As expressões para \bar{i}_b e \bar{i}_c serão do mesmo tipo anterior, exceto que, em \bar{i}_b , substitui-se $\theta = \bar{\omega} \bar{t} + \theta_0$ por $\theta - 2\pi/3 = \omega t + \theta_0 - 2\pi/3$ e em \bar{i}_c , substitui-se por $\theta + 2\pi/3 = \omega t + \theta_0 + 2\pi/3$.

Como foi concluído acima, a corrente de curto-circuito em cada fase consiste de 3 tipos de componentes :

- (1) A fundamental $\bar{i}_{a(\omega)}$, representada pelo 1º termo.
- (2) Uma componente contínua, $\bar{i}_{a(DC)}$, representada pelo 2º termo.
- (3) Uma componente de 2ª harmônico, $\bar{i}_{a(2\omega)}$, representada pelo 3º termo.

O primeiro termo tem uma componente de regime permanente que concorda com a equação :

$$\bar{i}_a = \frac{\bar{E}}{\bar{X}_d}$$

e uma componente transitória que decresce com o fator $e^{\alpha t}$. O segundo e o terceiro termos mostram que a componente contínua e a de 2ª harmônico decaem com o fator β . Verifica-se também, que a componente $\bar{i}_{a(2\omega)}$ depende da diferença $\bar{X}'_d - \bar{X}_q$ e é nula quando estes elementos são iguais. Como \bar{X}_q é geralmente maior que \bar{X}'_d , o 2º harmônico sempre aparece, a menos que as expressões já obtidas sejam modificadas pela presença de circuitos a dicionais no rotor.

Na figura 6.3 temos as 3 correntes componentes, assim como, a total.

A partir da equação 6.55, podemos também verificar que para $t = 0$, todos os termos contendo \bar{E} e \bar{E}'_{q0} se cancelam, e a expressão fica :

$$\bar{i}_a(t=0) = \bar{i}_d(L) \cdot \cos\theta_0 - \bar{i}_q(L) \cdot \sin\theta_0 \quad \text{equação 6.56}$$

que é exatamente igual ao valor da corrente de carga num instante imediatamente anterior à falta. Naturalmente, se temos a máquina operando a vazio antes da ocorrência do curto-circuito, então $\bar{i}_a(t=0) = 0$. Um outro ponto que deve ser observado, refere-se às variações das componentes de \bar{i}_a da condição pré-falta para a pós-falta, as quais, individualmente, variam bruscamente para os novos valores, entretanto, conforme é constatado, a corrente total tem uma variação gradativa entre os valores pré e pós-falta.

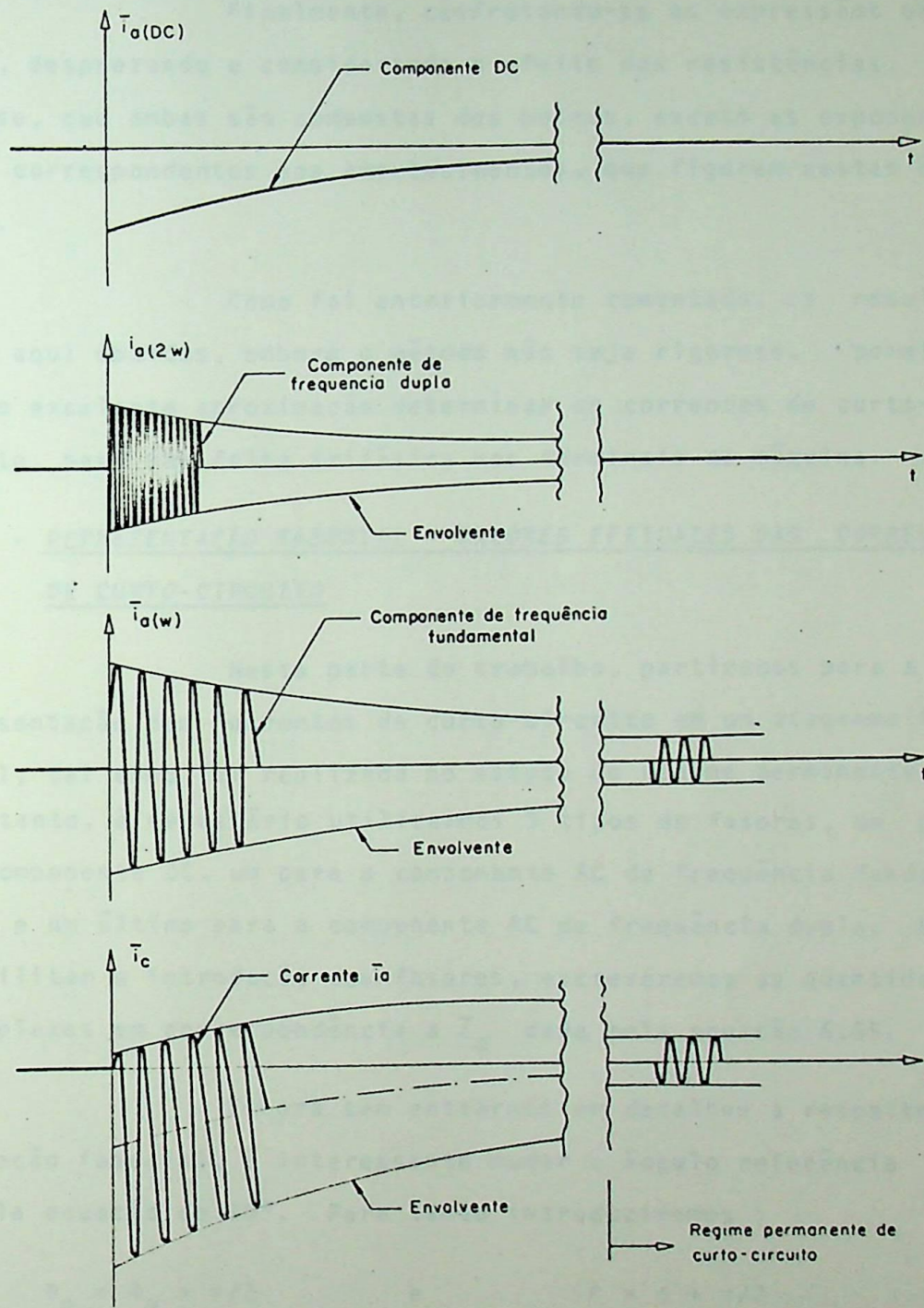


Fig.6.3 - Oscilogramas das componentes e da corrente total, para um curto circuito trifásico.

Finalmente, confrontando-se as expressões obtidas, desprezando e considerando o efeito das resistências, nota-se, que ambas são compostas dos mesmos, exceto as exponenciais correspondentes aos amortecimentos, que figuram nestas últimas.

Como foi anteriormente comentado, os resultados aqui obtidos, embora o método não seja rigoroso, permitem como excelente aproximação determinar as correntes de curto-circuito, para uma falta trifásica nos terminais da máquina.

6.6 - REPRESENTAÇÃO FASORIAL - VALORES EFEICAZES DAS CORRENTES DE CURTO-CIRCUITO

Nesta parte do trabalho, partiremos para a representação das correntes de curto-circuito em um diagrama fasorial, tal como foi realizado no estudo do regime permanente. Entretanto, é necessário utilizarmos 3 tipos de fasores, um para a componente DC, um para a componente AC de frequência fundamental e um último para a componente AC de frequência dupla. Para facilitar a introdução dos fasores, escreveremos as quantidades complexas em correspondência a \bar{I}_α dada pela equação 6.55.

Embora sem entrarmos em detalhes a respeito da notação fasorial, é interessante mudar o ângulo referência da da aquela equação de 90° . Para tanto introduziremos :

$$\theta_0 = \phi_0 + \pi/2 \quad \text{e} \quad \theta = \phi + \pi/2$$

equações 6.57

sendo que, substituindo esta mudança de variáveis na equação de \bar{I}_α , poderemos obter esta corrente a partir do correspondente

fasor, do seguinte modo :

$$\vec{T}_a(t) = \text{P.R.} \left(\frac{\vec{T}_a \cdot e^{j\omega t}}{j} \right)$$

Então, a corrente complexa \vec{T}_a , será :

$$\vec{T}_a = \vec{T}_{a(\omega)} + \vec{T}_{a(\text{DC})} + \vec{T}_{a(2\omega)} \quad \text{equação 6.58}$$

Onde :

$$\vec{T}_{a(\omega)} = - \left(\frac{\bar{E}}{j\bar{X}_d} + \left(\frac{\bar{E}'_q}{j\bar{X}'_d} - \frac{\bar{E}}{j\bar{X}_d} \right) e^{\alpha t} \right) \cdot e^{j(\omega t + \phi_0)}$$

$$\vec{T}_{a(\text{DC})} = - \frac{\bar{X}'_d + \bar{X}_q}{j2\bar{X}'_d \cdot \bar{X}_q} \left(-\bar{E}'_q + \bar{X}'_d \cdot \bar{T}_{d(L)} + j\bar{X}_q \cdot \bar{T}_{q(L)} \right) e^{\beta t} \cdot e^{j\phi_0}$$

$$\vec{T}_{a(2\omega)} = - \frac{\bar{X}'_d - \bar{X}_q}{j2\bar{X}'_d \cdot \bar{X}_q} \left(\bar{E}'_q - \bar{X}'_d \cdot \bar{T}_{d(L)} + j\bar{X}_q \cdot \bar{T}_{q(L)} \right) e^{\beta t} \cdot e^{j(2\omega t + \phi_0)}$$

equações 6.59

A corrente instantânea i_a será a parte real da equação 6.58, ou seja, será a soma das partes reais das equações 6.59. Desenvolvendo as expressões acima, podemos definir os fasores das tensões e correntes de carga como sendo :

$$\vec{E}'_q = \bar{E}'_q \cdot e^{j\phi_0}$$

$$\vec{E} = \bar{E} \cdot e^{j\phi_0}$$

$$\vec{T}_d = \bar{T}_d \cdot e^{j\phi_0}$$

$$\vec{T}_q = \bar{T}_q \cdot e^{j\phi_0}$$

que substituídos em 5.59 :

$$\vec{i}_a(\omega) = - \left[\frac{\vec{E}}{j\bar{X}_d} + \left(\frac{\vec{E}'_q}{j\bar{X}'_d} - \frac{\vec{E}}{j\bar{X}_d} \right) e^{\alpha\bar{t}} \right] e^{j\bar{\omega}\bar{t}}$$

$$\vec{i}_a(\text{DC}) = - \frac{\bar{X}'_d + \bar{X}_q}{j2\bar{X}'_d \cdot \bar{X}_q} \left(-\vec{E}'_q + \bar{X}'_d \cdot \vec{i}_{d(L)} + j\bar{X}_q \cdot \vec{i}_{q(L)} \right) e^{\beta\bar{t}}$$

$$\vec{i}_a(2\omega) = - \frac{\bar{X}'_d - \bar{X}_q}{j2\bar{X}'_d \cdot \bar{X}_q} \left(\vec{E}'_q - \bar{X}'_d \cdot \vec{i}_{d(L)} + j\bar{X}_q \cdot \vec{i}_{q(L)} \right) e^{\beta\bar{t}} \cdot e^{j2\bar{\omega}\bar{t}}$$

equações 6.60

A primeira componente contém $e^{j\bar{\omega}\bar{t}}$ e, portanto o correspondente fasor gira com velocidade $\bar{\omega}$, ao mesmo tempo que o seu módulo diminui, devido à existência do termo $e^{\alpha\bar{t}}$. A segunda ou componente contínua, não contém $\bar{\omega}\bar{t}$ como um fator exponencial, e como resultado, está estacionária. Entretanto, devido ao fator $e^{\beta\bar{t}}$, ela decresce até zero. Finalmente, a terceira componente contém o fator $e^{j2\bar{\omega}\bar{t}}$ e, portanto, gira com uma velocidade angular 2ω , ao mesmo tempo que decresce até zero, devido à exponencial $e^{\beta\bar{t}}$. Deste modo, os fasores correspondentes deverão apresentar quantidades que possuam estas 3 diferentes notações.

Quando os fasores representam formas senoidais, costuma-se considerar o módulo do fasor igual ao valor eficaz da onda representada. Acrescentando-se a quantidade, a qual seria normalmente periódica, é sujeita a uma variação exponencial, o módulo do fasor que representa esta onda varia exponencialmente da mesma forma. Então quando o fasor é motivado a girar, devido aplicação do operador exponencial $e^{jk\bar{\omega}\bar{t}}$, na qual k seria a ordem do harmônico, a projecção do fasor sobre o eixo de referência dá o valor instantâneo da componente. Deve-se

observar que desde que estamos trabalhando com valores por unidade não é necessário multiplicar o módulo do fasor, por $\sqrt{2}$, com o propósito de se obter a amplitude da componente. Quanto ao termo DC, o qual não é uma função periódica, não possuindo, portanto, um valor eficaz, devido à concepção de valores eficazes, devemos proceder uma nova conceituação. Para o propósito a ser atingido será conveniente definir um fasor para representar a componente DC, que será igual à componente complexa $\vec{I}_a(\text{DC})$, sendo que os valores instantâneos poderão ser obtidos do mesmo modo como para as componentes alternadas.

De acôrdo com estes comentários, definiremos - fasores para representar as 3 componentes de \vec{I}_a , pelas relações:

$$\left. \begin{aligned} \vec{I}_{a(\omega)} &= - \left[\frac{\vec{E}}{j\bar{X}_d} + \left(\frac{\vec{E}'_q}{j\bar{X}'_d} - \frac{\vec{E}}{j\bar{X}_d} \right) e^{\alpha t} \right] \\ \vec{I}_a(\text{DC}) &= - \frac{\bar{X}'_d + \bar{X}_q}{j2\bar{X}'_d \cdot \bar{X}_q} \left[-\vec{E}'_q + \bar{X}'_d \cdot \vec{I}_{d(L)} + j\bar{X}_q \cdot \vec{I}_{a(L)} \right] e^{\rho t} \\ \vec{I}_{a(2\omega)} &= - \frac{\bar{X}'_d - \bar{X}_q}{j2\bar{X}'_d \cdot \bar{X}_q} \left[\vec{E}'_q - \bar{X}'_d \cdot \vec{I}_{d(L)} + j\bar{X}_q \cdot \vec{I}_{a(L)} \right] e^{\beta t} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{equa} \\ \text{cões} \\ 6.61 \end{array}$$

Em termos dos fasores, as componentes complexas das correntes, bem como, a corrente total, seriam :

$$\begin{aligned} \vec{i}_{a(\omega)} &= \vec{I}_{a(\omega)} \cdot e^{j\omega t} \\ \vec{i}_a(\text{DC}) &= \vec{I}_a(\text{DC}) \\ \vec{i}_{a(2\omega)} &= \vec{I}_{a(2\omega)} \cdot e^{j2\omega t} \\ \vec{i}_a &= \vec{i}_{a(\omega)} + \vec{i}_a(\text{DC}) + \vec{i}_{a(2\omega)} = \vec{I}_{a(\omega)} \cdot e^{j\omega t} + \vec{I}_a(\text{DC}) + \vec{I}_{a(2\omega)} \cdot e^{j2\omega t} \end{aligned}$$

equações 6.62

Os 3 fasores, para um curto-circuito trifásico, estando a máquina anteriormente a vazio, podem ser apresentados, conforme indicamos a seguir, para $t = 0$

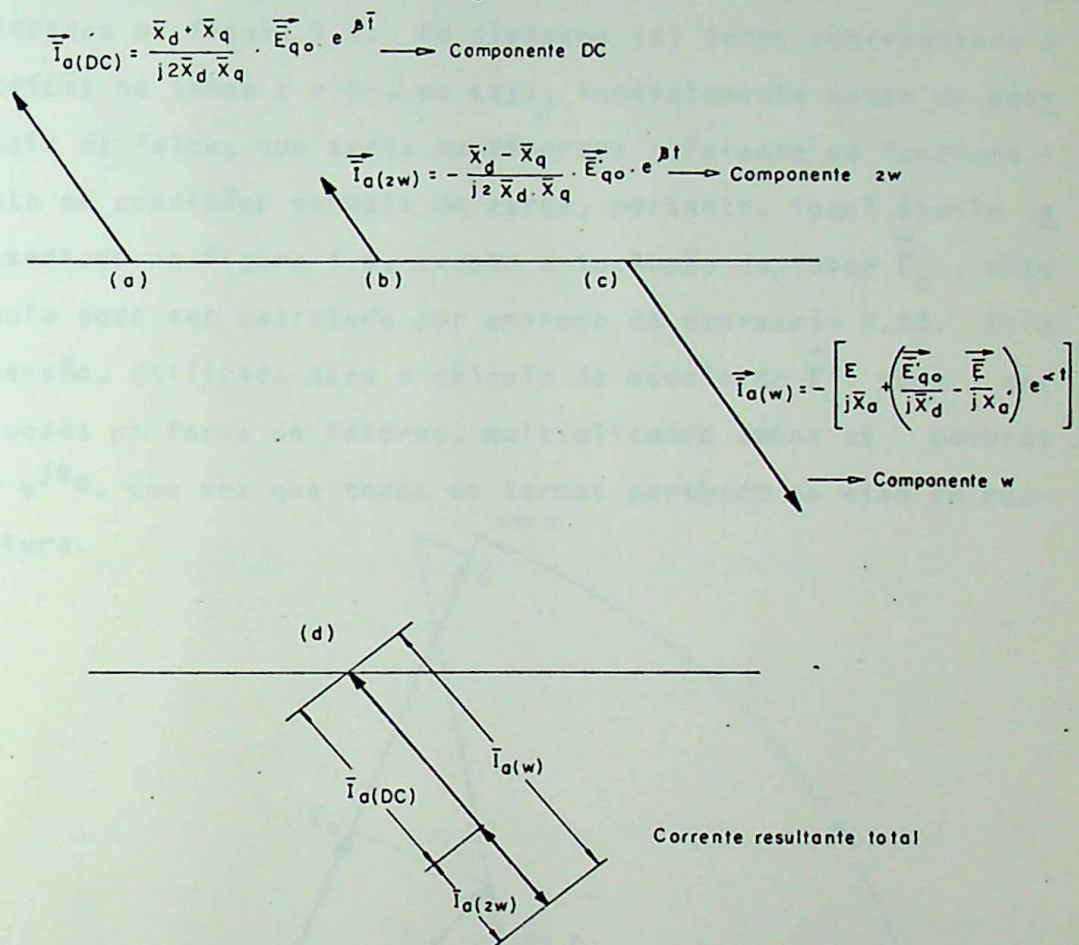
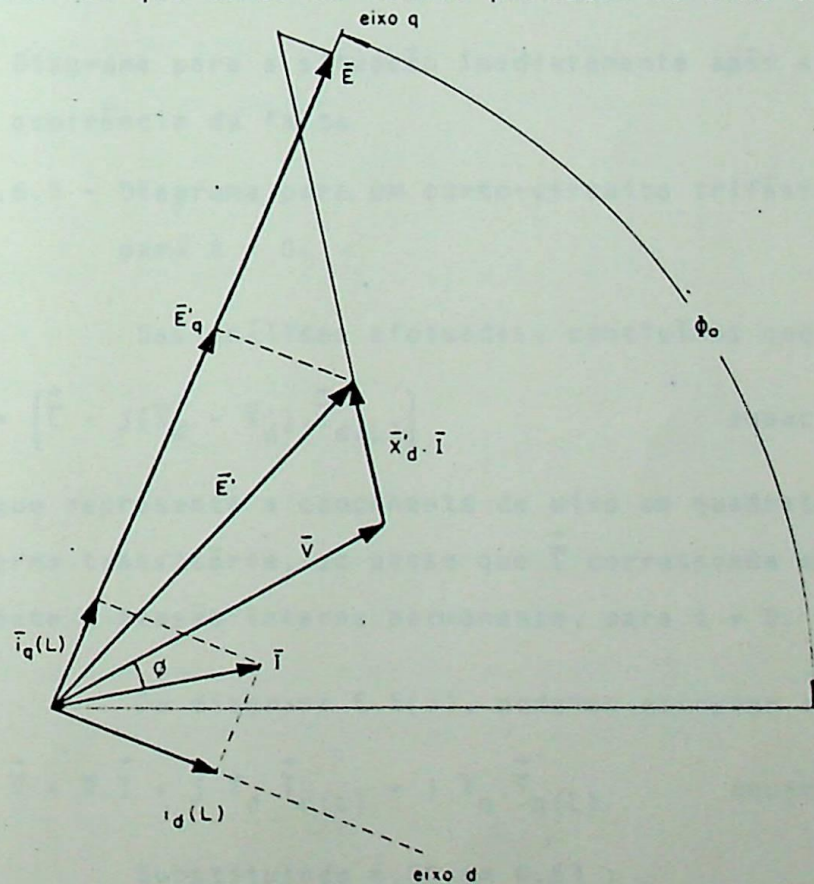


Fig.6.4 - Representação dos fasores das componentes e da corrente resultante, para $t = 0$, correspondente a um curto-circuito trifásico e, para valores conhecidos de ψ_0 ou θ_0 .

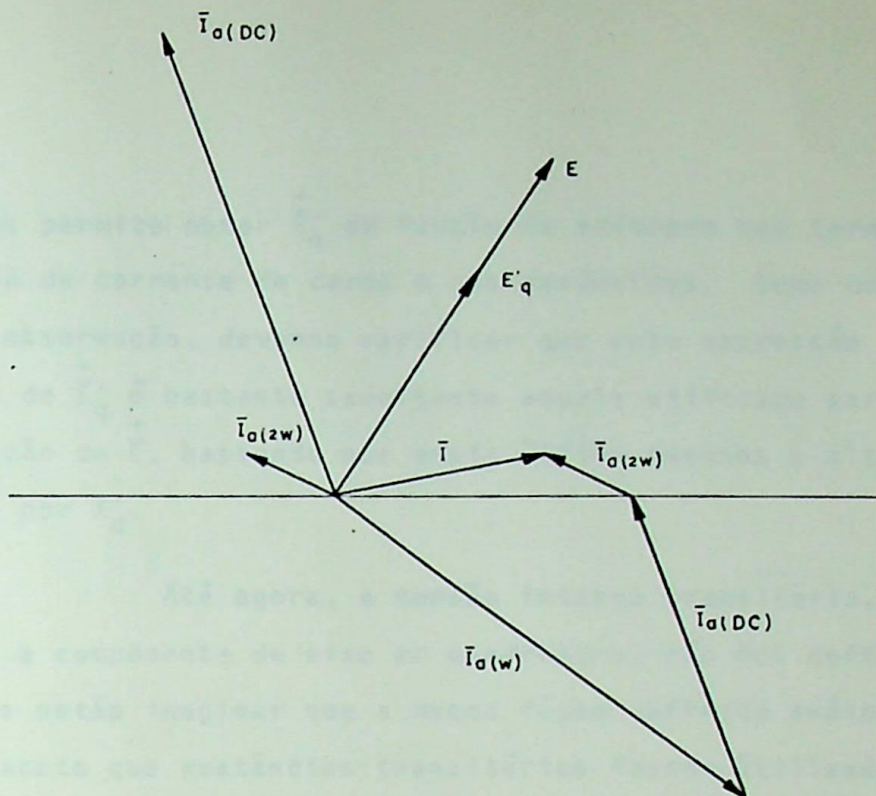
A partir da figura acima, ou, da equação 6.61, verifica-se que para $t = 0$:

$$\vec{I}_a(\omega)(t=0) + \vec{I}_a(\text{DC})(t=0) + \vec{I}_a(2\omega)(t=0) = 0$$

As correspondentes relações para um curto-cir-
cuito ocorrendo para a máquina anteriormente em carga, são i-
lustradas na figura 6.5. No diagrama (a) temos representada a
condição no tempo $t = 0^-$, ou seja, imediatamente antes da ocor-
rência da falta, que seria um diagrama referente ao funciona-
mento em condições normais de carga, portanto, igual àquele a-
presentado na figura 4.6, exceto a inclusão do fasor \vec{E}'_q , cujo
módulo pode ser calculado por emprego da expressão 6.23. Esta
expressão, utilizada para o cálculo do módulo de \vec{E}'_q , pode ser
colocada em forma de fasores, multiplicando ambos os membros
por $e^{j\phi_0}$, uma vez que todos os termos pertencem ao eixo em qua-
dratura.



(a) Diagrama para a situação imediatamente antes da falta.



(b) Diagrama para a situação imediatamente após a ocorrência da falta

Fig.6.5 - Diagrama para um curto-circuito trifásico , para t = 0.

Das análises efetuadas, concluímos que :

$$\vec{E}'_q = \left[\vec{E} - j(\bar{X}_d - \bar{X}'_d) \cdot \vec{I}_d(L) \right] \quad \text{equação 6.63}$$

\vec{e} é o fasor que representa a componente de eixo em quadratura da tensão interna transitória, ao passo que \vec{E} corresponde ao fasor que representa a tensão interna permanente, para t = 0.

Do diagrama 6.5(a), podemos escrever :

$$\vec{E} = \vec{V} + R \cdot \vec{I} + j \bar{X}_d \cdot \vec{I}_d(L) + j \bar{X}_q \cdot \vec{I}_q(L) \quad \text{equação 6.64}$$

Substituindo 6.64 em 6.63 :

$$\vec{E}'_q = \vec{V} + R \cdot \vec{I} + j \bar{X}'_d \cdot \vec{I}_d(L) + j \bar{X}_q \cdot \vec{I}_q(L) \quad \text{equação 6.65}$$

a qual nos permite obter \vec{E}'_q em função da voltagem nos terminais da máquina da corrente de carga e dos parâmetros. Como uma importante observação, devemos verificar que esta expressão para o cálculo de \vec{E}'_q é bastante semelhante aquela utilizada para a determinação de \vec{E} , bastando que nesta última façamos a alteração de \bar{X}_d por \bar{X}'_d .

Até agora, a tensão interna transitória, da qual \vec{E}'_q é a componente de eixo em quadratura, não foi definida. Poderíamos então imaginar que a mesma fosse definida analogamente a \vec{E} , exceto que reatâncias transitórias fossem utilizadas em substituição as permanentes. Entretanto, desde que não existe nenhum enrolamento no eixo em quadratura, além da bobina de eixo d , conforme vimos no capítulo anterior, não existirá a reatância transitória de eixo em quadratura. Porém, se esta tensão for definida, é necessário assumir uma reatância para o uso de \bar{I}_q . Há certas vantagens para a escolha de \bar{X}'_d ou \bar{X}'_q , como a substituta para a reatância transitória de eixo em quadratura. Se \bar{X}'_q é usada, a tensão interna transitória \vec{E} , torna-se igual a sua componente de eixo q (\vec{E}'_q). Se \bar{X}'_d é escolhido, a tensão interna transitória é calculada como se a máquina fosse de polos lisos. Para estudos de estabilidade e outros cálculos envolvendo métodos aproximados, a última consideração oferece vantagens, de modo que substituiremos \bar{X}'_q da expressão para o cálculo de \vec{E} , para \bar{X}'_d , de modo a determinarmos a tensão \vec{E}' .

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \vec{V} + R \cdot \vec{I} + j \bar{X}'_d (\vec{I}_d(L) + \vec{I}_q(L)) \\ &= \vec{V} + (\bar{R} + j \bar{X}'_d) \vec{I}\end{aligned}\quad \text{equação 6.66}$$

Na figura 6.5. (a) é desprezada a queda de ten

são na resistência e, \vec{E}' é dada pela soma vetorial da tensão nos terminais da máquina mais a queda na reatância sutransitória, como mostrado.

Se \vec{E}' é colocado em termos de suas componentes de eixo direto e em quadratura

$$\vec{E}' = \vec{E}'_q + \vec{E}'_d \quad \text{equação 6.67}$$

Onde :

$$\begin{aligned} \vec{E}'_q &= \vec{V} + R \cdot \vec{I} + j X'_d \cdot \vec{I}_d(L) + j X_q \cdot \vec{I}_q(L) \\ \vec{E}'_d &= j(X'_d - X_q) \cdot \vec{I}_q(L) \end{aligned} \quad \text{equações 6.68}$$

Conhecidos, pois, os fasores \vec{E}'_q e \vec{I} , os fasores, que representam as 3 componentes das correntes de curto-circuito, podem ser facilmente determinados, por aplicação das expressões 6.61. Estes fasores são mostrados na figura 6.5(b)

Se são desejadas as correntes instantâneas de curto-circuito, \vec{E}'_q poderá ser determinada, como já foi discutido anteriormente, e seu módulo poderá ser utilizado nas expressões de τ_a , τ_b e τ_c , sendo que em 6.55 temos a equação válida para o cálculo de τ_a . Quanto à corrente de campo, a 1ª das equações 6.54 resolve o problema, porém, raramente esta corrente se apresenta na forma de fasores, razão pela qual não abordaremos esta representação para a corrente em pauta.

De modo a atender a alguns propósitos, é desejável computar os valores eficazes da corrente total de curto-circuito. Como as componentes alternadas sempre não são perfeitamente periódicas, devido ao decaimento, a definição bási-

ca de valores eficazes não é rigorosamente aplicada a estes casos. Entretanto, para ondas de corrente deste tipo, é usual definir os valores eficazes por uma relação válida para ondas perfeitamente periódicas, a qual estabelece que o valor eficaz de uma onda complexa é dado pela raiz quadrada da soma dos quadrados dos valores eficazes de cada componente individual. Se não há decremento, o valor eficaz por unidade coincide em número com a amplitude por unidade da onda, porém, se o decremento está presente, o valor eficaz é considerado ser igual ao valor eficaz da onda periódica inicial, reduzida pelo fator de amortecimento. Neste caso, os valores eficazes das componentes fundamental e de 2º harmônico correspondem aos próprios módulos dos fasores respectivos, para qualquer valor desejado de tempo após $t = 0$. Quanto a componente contínua, não há período para o qual o valor eficaz possa ser determinado, porém, se este valor é determinado através da equação desprezando o efeito da resistência, considerando um intervalo igual ao período da onda de frequência fundamental, o resultado terá o mesmo valor que o valor instantâneo permanente. Se admitirmos o efeito das resistências, é usual tomar o valor eficaz da componente DC, como o produto daquele valor encontrado sem efeito da resistência, pelo fator de decremento, no instante para o qual a corrente é desejada. Resumindo, o valor eficaz da componente DC, com decremento, nada mais é que simplesmente o valor instantâneo da componente no instante desejado, sendo portanto seu valor calculado pela segunda linha da equações 6.55, na qual substituindo θ_0 por $\theta_0 + \pi/2$:

$$I_a(\text{DC}) = \frac{X'_d + X_q}{2X'_d \cdot X_q} \cdot e^{-\alpha t} \left((E'_q - X'_d \cdot I_d(L)) \sin \theta_0 - X_q \cdot I_q(L) \cos \theta_0 \right)$$

equação 6.69

Este valor \bar{I}_a é o mesmo que dá a projecção de $\vec{I}_a(\text{DC})$ sobre o eixo horizontal na figura 6.5(b).

A partir destas componentes, o valor eficaz da corrente total será :

$$|\bar{I}_a| = \sqrt{I_{a(\omega)}^2 + I_{a(\text{DC})}^2 + I_{a(2\omega)}^2} \quad \text{equação 6.70}$$

Para as fases b e c, a componente fundamental, bem como, a de 2º harmônico apresentarão os mesmos valores eficazes que o da fase a porém $\bar{I}_b(\text{DC})$ e $\bar{I}_c(\text{DC})$ dependerão das relações $(\phi_0 - 2\pi/3)$ e $(\phi_0 + 2\pi/3)$ em substituição a ϕ_0 .

O valor eficaz da corrente de curto-circuito, é mais frequentemente utilizado na especificação de disjuntores os quais interromperão o circuito durante os curtos-circuitos. É importante notar que o valor de $\bar{I}_a(\text{DC})$ varia grandemente com os ângulos θ_0 ou ϕ_0 , nos quais o curto-circuito se inicia, e cujos valores podem variar de 0 a um valor máximo positivo ou negativo. Consequentemente o valor eficaz da corrente total varia apreciavelmente, mas ele não é afetado pelo sinal da corrente contínua, visto que ela entra na fórmula elevada ao quadrado. Desde que o disjuntor é requerido para interromper o curto-circuito para qualquer caso, a corrente de interrupção requerida é determinada pela seleção de θ_0 ou ϕ_0 , tal que $\bar{I}_a(\text{DC})$ seja máxima (positiva ou negativa).

Observando agora a existência das 3 fases, certamente, não mais que uma fase, tem o valor máximo de corrente durante o curto-circuito, porém, não é possível predizermos, em qual das fases ocorrerá este valor máximo. Este fato nos le

va a concluir que os limites de corrente para as 3 fases deverão ser iguais, ou seja, para o cálculo dos valores máximos possíveis de \bar{I}_a , \bar{I}_b e \bar{I}_c utilizar-se-á um mesmo valor da componente DC.

Finalmente, com o propósito de mostrar as variações dos valores eficazes das diversas componentes e da corrente total, plotamos estas variações na figura a seguir.

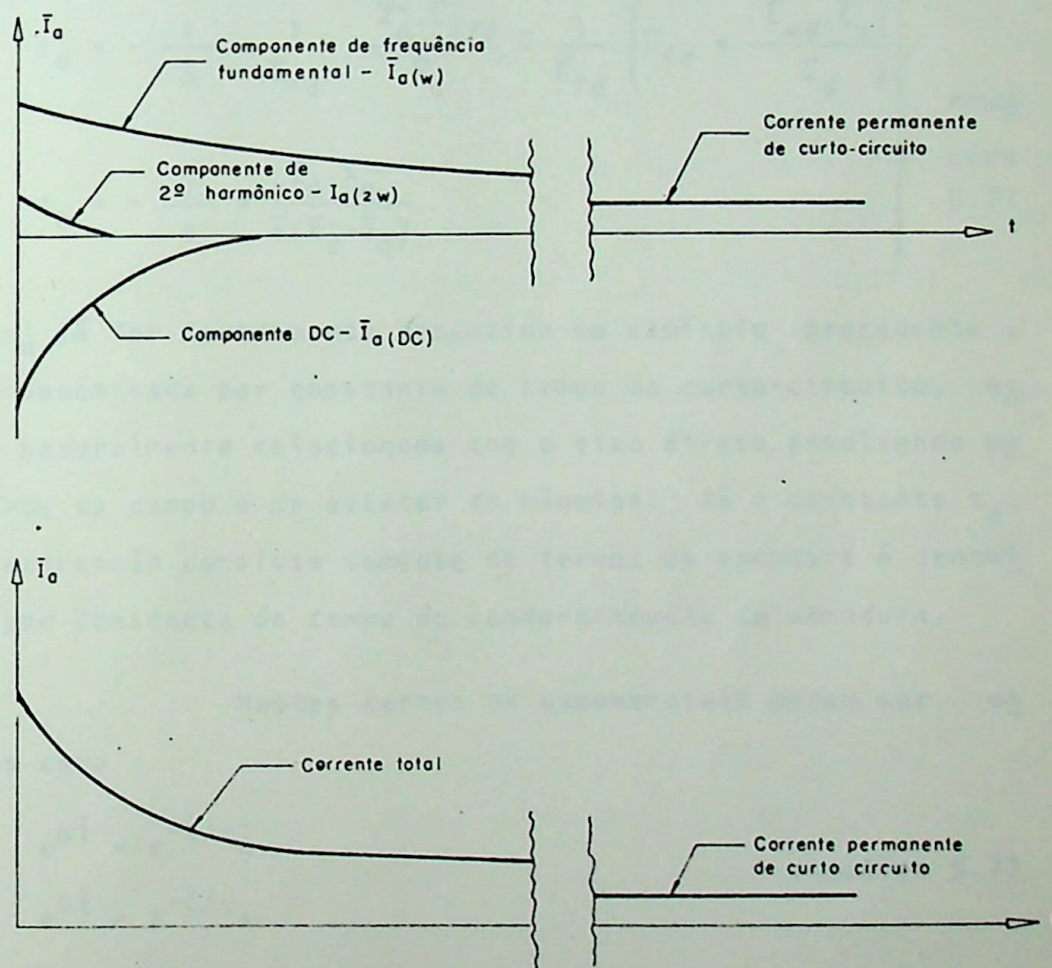


Fig.6.6 - Valores eficazes das componentes e da corrente total para um curto-circuito trifásico em uma máquina sem enrolamentos amortecedores.

Nas análises precedentes, os fatores de decremento foram escritos em termos dos coeficientes α e β , sendo que tal foi realizado meramente por conveniência para simplificações no manuseio das expressões obtidas. Porém, na prática, estes coeficientes são frequentemente substituídas pelas conhecidas constantes de tempo, que seriam dadas pelos recíprocos negativos dos coeficientes, como segue.

$$\left. \begin{aligned} \tau'_d &= -\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{R_{fd}} \cdot \frac{\bar{X}'_d \cdot \bar{L}_{ffd}}{\bar{X}_d} \equiv \frac{1}{R_{fd}} \left(\bar{L}_{fd} + \frac{\bar{L}_{ad} \cdot \bar{L}_e}{\bar{L}_d} \right) \\ \tau_a &= -\frac{1}{\beta} = \frac{\bar{X}_d \cdot \bar{X}_q}{\bar{e}(\bar{X}'_d + \bar{X}_q)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{equa} \\ \text{ções} \\ 6.71 \end{array}$$

onde τ'_d já foi devidamente discutido no capítulo precedente, sendo denominada por constante de tempo de curto-circuito, estando naturalmente relacionada com o eixo direto envolvendo paramêtros do campo e do estator da máquina. Já a constante τ_a , cuja expressão consiste somente de termos da armadura \bar{e} denominada por *Constante de tempo de curto-circuito da armadura*.

Nestes termos as exponenciais podem ser escritas como :

$$\begin{aligned} e^{\alpha \bar{t}} &= e^{-\bar{t}/\tau'_d} \\ e^{\beta \bar{t}} &= e^{-\bar{t}/\tau_a} \end{aligned} \quad \text{equações 6.72}$$

As quais poderão ser substituídas nas expressões anteriores, sempre que desejado.

CONCLUSÕES

Fundamentalmente, uma concepção simples da máquina síncrona emerge das considerações realizadas. A máquina pode ser encarada como uma reatância, atrás da qual existe uma tensão facilmente determinada, por aplicação dos processos apresentados. No regime permanente, a reatância refere-se à reatância permanente ou síncrona, e a tensão interna é a própria fem. Sob condições transitórias, a reatância oferecida, pela máquina sofre um decaimento, surgindo, daí, o conceito da denominada reatância transitória, e, para os casos mais gerais, teríamos antes desta condição, a fase subtransitória, da qual praticamente nada foi comentado, devido ao motivo exposto no prefácio. Nesta situação, a tensão interna, que é dependente dos fluxos, assume valor inferior àquele existente na operação permanente.

O procedimento obedecido para determinarmos as correntes de curto-circuito, conforme visto, consistiu um modo estritamente matemático, o que difere substancialmente dos convencionais. Nestes últimos, procura-se analisar inicialmente os efeitos físicos e, posteriormente escrever equações que os justifiquem. Para o método apresentado, o problema surge de modo inverso, ou seja, inicialmente são apresentadas as equações, e em seguida, as análises físicas correspondentes. O fato de trabalharmos em forma bastante matemática, sem dúvida alguma conduziram a um conjunto de equações, que traduzem a operação da máquina, as quais, com grande facilidade, permitem a utilização dos computadores para a solução de problemas relativos

às máquinas síncronas.

Com relação ao ponto básico de partida, as correntes de curto-circuito foram anteriormente determinadas, com base no teorema dos fluxos constantes, admitindo as resistências desprezíveis.

Evidentemente, os resultados obtidos são válidos apenas nos primeiros instantes após a ocorrência da falta, quando então os fluxos permanecem praticamente inalterados pois para as máquinas reais, as resistências por menores que sejam, apresentam seus efeitos de amortecimento. Deste modo, foi feita uma complementação, com o propósito de incluir as resistências, e, com isto, possibilitar a passagem física e matemática, do regime transitório para o permanente de curto-circuito.

Algumas outras conclusões podem ser extraídas, utilizando, por exemplo, a primeira das equações 6.61, referente ao fasor da componente de frequência fundamental, da corrente de curto-circuito. Para $\bar{t} \rightarrow \infty$, o valor do fasor reduz-se ao valor final obtido diretamente pela análise do regime permanente, pois nesta condição, temos o regime permanente de curto-circuito. Para $\bar{t} = 0$, ou seja, o instante imediatamente após a ocorrência da falta, o expoente $\alpha \cdot \bar{t}$ nulo, o primeiro termo cancela o terceiro, e apenas o segundo termo permanece. Este termo é igual ao primeiro, exceto que a reatância \bar{X}'_d substitui \bar{X}_d e a tensão \bar{E}'_0 substitui \bar{E} . Assim, em geral, o valor inicial do fasor de frequência fundamental, tem uma equação similar ao do estado permanente, com as modificações acima referidas. A diferença entre os valores inicial e final da corrente, decai exponencialmente até zero, com uma constante de

tempo igual a τ'_d .

Conforme foi referido anteriormente, existem, portanto, dois valores significativos para a reatância de eixo direto; a reatância síncrona ou permanente de eixo direto, que é usada para os cálculos em regime permanente junto à tensão E , e a reatância transitória \bar{X}'_d , que é aplicada nos primeiros instantes, após a ocorrência da variação das condições de operação da máquina e é utilizada junto a tensão E'_q . A reatância transitória surge do fato físico de que, no instante da transição, o fluxo de ligação do campo não pode variar, e uma corrente transitória de campo é induzida para se opor ao efeito da nova corrente da armadura. Como resultado, o efeito das correntes da armadura é parcialmente anulado e a reatância aparente é substancialmente reduzida. Como a tensão do campo é insuficiente para manter a corrente transitória de campo, tão logo esta corrente desapareça, a reatância de eixo direto é restaurada ao seu antigo valor. Embora não tenhamos incluído o efeito dos enrolamentos amortecedores, gostaríamos de tecer alguns comentários a respeito dos mesmos. Assim como a corrente transitória de campo originou um efeito tal que a reatância aparente de eixo direto foi diminuída, durante os instantes iniciais, os enrolamentos amortecedores se comportariam da mesma forma. Em consequência, as correntes induzidas nos amortecedores fazem com que a redução da reatância seja ainda maior, ou seja, a reatância aparente assumia inicialmente, um valor \bar{X}''_d , denominado reatância subtransitória de eixo direto. Considerando que, para o circuito correspondente ao enrolamento amortecedor, a constante de tempo é bastante inferior à do campo, então seu efeito logo desaparece, permanecendo apenas o do campo. Portanto, a operação da máquina, na condição de um curto circuito, por exemplo, pode ser dividida de um modo



geral, em 3 fases :

- subtransitória
- transitória
- permanente

sendo que, para a primeira, tal como ocorreu para as demais, e xiste, também, uma tensão atrás da reatância, inferior àquelas já comentadas.

A segunda e a terceira das equações 6.61 re presentam componentes da corrente que estão presentes, sempre que a componente de frequência fundamental é sujeita a uma sú bita variação, e juntas têm um valor inicial igual à diferença entre os fasores de frequência fundamental imediatamente antes e após a ocorrência da falta.

O efeito da saturação, que foi desprezado, distorce as expressões das correntes obtidas, quando o grau de saturação muda. Entretanto, não existem expressões analíticas manuseáveis, as quais podem representar os efeitos da saturação, de tal modo que na prática usa-se uma função exponencial, que representa este problema, fazendo com que as correntes, ob tidas pelos cálculos, se aproximem mais dos valores reais. Is to significa que, as constantes de tempo a serem usadas diferi rão das expressões apresentadas, quando o efeito da saturação estiver presente, e terão valores diferentes para cada problema. Quando as variações da saturação são importantes, é neces sário se estabelecer as condições para as quais cada valor da constante de tempo é válida.

A respeito das vantagens do método apresentado, destacamos, fundamentalmente, o processo relativamente ri goroso com que os resultados foram obtidos. De modo a comple-

mentar o assunto, poder-se-iam realizar estudos, considerando os efeitos dos enrolamentos amortecedores e, ainda, uma comparação experimental destes resultados. Estes assuntos, acreditamos, correspondem a trabalhos de novas teses a serem desenvolvidas.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- Ref. 1 : CONCORDIA, C. - Synchronous Machines - New York, John Wiley & Sons (C.1951)
- Ref. 2 : MELO, F. P. - Dinâmica de Máquinas Síncronas - Itajubá, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, 1973
- Ref. 3 : LEWIS, W. A. - The principles of synchronous machines 3.ed. - Chicago, Illinois Institute of Technology 1959.
- Ref. 4 : YOUNG, C.C. - Synchronous Machine Theory - Schenectady, General Electric Co, 1969.

BIBLIOGRAFIA

- 1 : FITZGERALD, A.E. - Electric Machinery (by) A.E. Fitzgerald, C. Kingsley (and) A. Kusko - 3. ed - Tokyo, McGraw-Hill (C.1971).
- 2 : ADKINS, B. - Teoria general de las máquinas electricas - Bilbao, Ediciones Urmo, 1967.
- 3 : CRARY, S. B. - Power System Stability, Vol. I - Steady State Stability - John Wiley, 1945
- 4 : KIMBARK, E. W. - Power System Stability: Synchronous Machines - Dover Publications, Inc - New York, 1968.
- 5 : DOHERTY, R. E. - A Simplified Method of Analyzing Short-circuit problems - Transactions of the AIEE,

New York, pag 841-849 - Jun 1923

- 6 : DOHERTY, R.E. and NICKLE, C.A. - Synchronous Machines I:
An extension of Blondel's Two-Reaction Theory -
Transactions of the AIEE, New York, pag 912 a 926 -
Jun 1926
- 7 : DOHERTY, R.E. and NICKLE, C.A. - Synchronous Machines
II: Steady State Power-angle Characteristics -
Transactions of the AIEE, New York, pag 927 a 947 -
Jun 1926
- 8 : DOHERTY, R.E. and NICKLE, C.A. - Synchronous Machines V:
Three-phase Short Circuit - Transactions AIEE - New
York, pag 700 a 714 - Apr. 1930
- 9 : KILGORE, L.A. - Calculations of Synchronous Machine
Constants - Transactions AIEE, New York, pag 1201
a 1214 - Dec. 1931
- 10 : PARK, R.H. - Two reaction theory of Synchronous Machines
- part I - Transactions AIEE, New York, pag 716 a
730 - Jul. 1929
- 11 : PARK, R. H. - Two reaction theory of Synchronous Machin
es - part II - Transactions AIEE, New York, pag 352
a 355 - Jun. 1933
- 12 : PARK, R.H. - Definition of an ideal Synchronous Machines
and formula for the armature flux linkages - General
Electric Review - Schenectady, New York, Vol 31, pag
332 - 334, 1928

- 13 : RANKIN, A.W. - The equations of the idealized Synchronous Machines - General Electric Review - Schenectady, New York, Vol.47 - pag 31-36, 1945
- 14 : RANKIN, A.W. - Per unit impedances of Synchronous Machines - Part I - Transactions AIEE - New York, pags 569 - 573 - Aug. 1945
- 15 : RANKIN, A.W. - Per unit impedances of Synchronous Machines - Part II - Transactions of the AIEE - New York, pags 839 a 841 - Dec. 1945
- 16 : RANKIN, A.W. - The direct and quadrature - axis equivalents circuits of the Synchronous Machines - Transac. AIEE - New York, pags 861 a 868 - Dec. 1945
- 17 : KIRSCHBAUM, H.S. - Per unit indutances of Synchronous Machines - Part I - Transactions AIEE - New York, pag 231 a 234 - 1950
- 18 : LEWIS, W.A. - A basic Analysis of Synchronous Machines - Part I - IEEE Transactions Power apparatus and Systems - New York, Aug. 1958

