TESE
325

tese

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca
MAUÁ
Itajubá

Publicado pela Editora da

Escola Federal de Engenharia de Itajubá

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
11 FEV 1982
BIBLIOTECA MAUÁ

"MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE FLUXO HARMÔNICO EM SISTEMAS ELÉTRICOS"

ORIENTADOR - PROF. JOSÉ CARLOS DE OLIVEIRA

ORIENTADO - LUIZ CARLOS TAVARES VILLELA

DATA DE DEFESA - 1982

CLASS. 621.3.018.3.001.57:621.316(043.2)
CUTT. Y135m
TOMBO 3215

INDICE

CAPÍTULO I

Ia - Conceituação dos Harmônicos.....01

Ib - Problemas provocados pelos Harmônicos.....02

Ic - Necessidade e dificuldade para se estabelecer métodos de limitação dos Harmônicos 05

Id - Recomendações sobre Limites dos Harmônicos 07

CAPÍTULO II

Fontes de Harmônicos

Introdução 12

II.1 - Geradores em C.A. 13

II.2 - Transformadores.....15

II.3 - Conversores Estáticos 17

II.4 - Compensadores Estáticos de Energia Reativa...22

II.5 - Fornos à arco.....23

CAPÍTULO III

Valores de Parâmetros utilizados para modelagem dos componentes.

Introdução.....25

III.1 - Representação da Impedância do Sistema C.A.26

1.a Impedância de Curto-Circuito.....29

1.b Simulação da Impedância por circuitos paralelos.....29

1.c Recomendação ASEA.....33

1.d Representação através de um ângulo de impedância.....35

III.2 - Modelo e Parâmetros para os Transformadores..35

- Indutância dos Transformadores.....36

— Capacitância dos Transformadores.....40

Resistência dos Transformadores.....50

III.3 - Reatores Limitadores.....51

III.4 - Representação dos Geradores e Motores.....53

III.5 - Valores de Parâmetros para Linhas de Transmissão e Cabos.....56

5.1 - Cabos de Fôrça.....63

III.6 - Características dos Barramentos.....66

III.7 - Considerações sobre Transformadores para Instrumentos.....69

III.8 - Impedância do Filtro de Harmônicos.....70

III.9 - Representação das Cargas.....73

III.10- Formulação Geral.....75

CAPITULO IV

Programa Digital

Introdução.....81

- Dados do Sistema.....83

- Programa Principal- Variáveis.....84

Fluxograma do Programa Principal.....87

Subrotina Shunt.....88

Subrotina TMAG E IMPR.....89

Subrotina MAPROG e MULM.....90

Subrotina CSHP.....91

CAPÍTULO V

RESULTADOS E CONCLUSÕES

1 - Introdução..... 93

2 - Resultados - Sistema I..... 94

2.1 - Sistema I completo sem Filtro..... 94

2.2 - Sistema I com Filtro..... 95

3 - Resultados - Sistema II.....102

3.1 - Sistema II em condições normais de operação.....104

3.2 - Sistema II com filtros.....105

3.3 - Sistema II com resistências praticamente nulas.....106

3.4 - Sistema II com capacitâncias próximas de zero.....107

3.5 - Sistema II com representação da fonte conforme critério de J.P.Bowles.....108

3.6 - Sistema II com representação da fonte de acordo com a referência 32 (Impedância de Curto-Circuito).....109

4 - Conclusões Gerais.....109

CAPÍTULO I

Ia) CONCEITUAÇÃO DOS HARMÔNICOS PRODUZIDOS POR UMA ONDA PERIÓDICA NÃO-SENOIDAL

Entende-se por *harmônicos* os componentes múltiplos da frequência fundamental de tensão e corrente. Com base no estudo das ondas não-senoidais periódicas, qualquer onda distorcida de tensão ou de corrente pode ser decomposta pela série de Fourier em uma *onda senoidal* de mesma frequência que a onda distorcida, usualmente chamada *onda fundamental*, e em outras ondas também senoidais de frequências múltiplas da fundamental, denominadas Harmônicas.

Qualquer circuito não-linear injeta tais ondas distorcidas de corrente no sistema de alimentação. A composição das ondas harmônicas no sistema irá causar uma distorção da onda de tensão, isto é, devido ao fluxo das correntes distorcidas através das impedâncias do sistema que dá origem a quedas de tensão.também distorcidas deformando a onda de tensão.

Conforme será comentado *no capítulo II*, como exemplo de fontes de harmônicos, encontram-se os conversores estáticos de potência (retificadores ou inversores) que podem ser considerados como uma das principais fontes geradoras de correntes harmônicas no sistema de corrente alternada (C.A); tais conversores são compostos de dispositivos eletrônicos de chaveamento controlado, chamados tiristores, capazes de converter grandes blocos de potência C.A.para C.C.

Ib) *PROBLEMAS PROVOCADOS PELOS HARMÔNICOS :*

Os principais problemas causados pela presença de valores elevados dos harmônicos em sistemas de potência são basicamente os seguintes:

- Perdas adicionais por excesso de calor nos geradores e compensadores síncronos face aos harmônicos na forma de onda da corrente. As correntes harmônicas, originadas dos conversores estáticos, de ordem qn + 1 (7ª, 13ª, 25ª, 37ª, 49ª, ..., para q = 1, 2, ... e n = 6 por exemplo) são correntes de sequência de fase positiva e ãs de qn - 1 (5ª, 11ª, 23ª, 35ª, 47ª, ...) são de sequência de fase negativa; os efeitos destas correntes se somam causando aquecimento no rotor e estator das máquinas.

- Distorções da onda de tensão no barramento da concessionária e no sistema de distribuição devido a circulação de correntes harmônicas, particularmente no caso de ressonância paralela com os elementos indutivos e capacitivos do sistema, originando correntes e tensões bastante elevadas para as frequências harmônicas médias ou altas.

- Aumento das perdas nos motores para os quais suas impedâncias à correntes de frequências harmônicas são relativamente menores que a frequência fundamental. No caso de cargas críticas, torques pulsantes causados pelas correntes harmônicas nos motores C.A. podem ser prejudiciais, por exemplo, ao processo de laminação. Estes torques podem também estabelecer condições de ressonância se as frequências naturais do sistema mecânico são excitadas pelos harmônicos.

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca MAUÁ
Itajubá

- Sobrecarga nos capacitores, pois suas impedâncias variam na proporção inversa da frequência, ($X_C = 1/WC$), portanto estes tendem a absorver os sinais de alta frequência.

- Aumento das perdas no próprio sistema devido ao fluxo de correntes harmônicas através de elementos resistivos.

- Distúrbios em medidores ou instrumentos tipo disco de indução (medidores de KWh ou relês de sobrecorrente) e em aparelhos controladores nos quais podem ocorrer assimetria na operação das tres fases.

- Interferências em circuitos de comunicação, como por exemplo distorções em sinais de controle usados na própria malha do sistema C.A. ou ainda interferência em sistemas de sinalização de estrada de ferro principalmente durante a aceleração da locomotiva.

- Medições e calibrações de corrente de "*pick-up*" e tensões de relês por exemplo, no campo ou laboratório, podem ser bastante afetadas pelos harmônicos, quando se exige maior precisão nos resultados.

- Sistemas de Carrier que controlam dispositivos remotos (relógios e controles de cargas de pico) podem vir a operar com erros se os harmônicos são gerados próximos ao sinal de Carrier; estes sistemas são usados em linhas de transmissão em alta tensão para enviar ou receber sinais de desligamento aos disjuntores e outros.

- Nos sistemas de distribuição que alimentam cargas residenciais, a interferência no sinal de TV pelas correntes harmônicas geradas pelos conversores é normalmente uma considerável in

dicação da existência de harmônicos.

- Exemplos dos efeitos de distorções harmônicas mais drásticas em sistemas de média tensão são os apresentados nas figuras 1.1 e 1.2, mostrando elevadas distorções das tensões dos barramentos alimentadores.

Os oscilogramas indicam a impraticabilidade de operação de tais sistemas e ilustram a necessidade, de ainda, se possível, na fase de projeto de tais esquemas, de um estudo detalhado de problema de harmônicos.

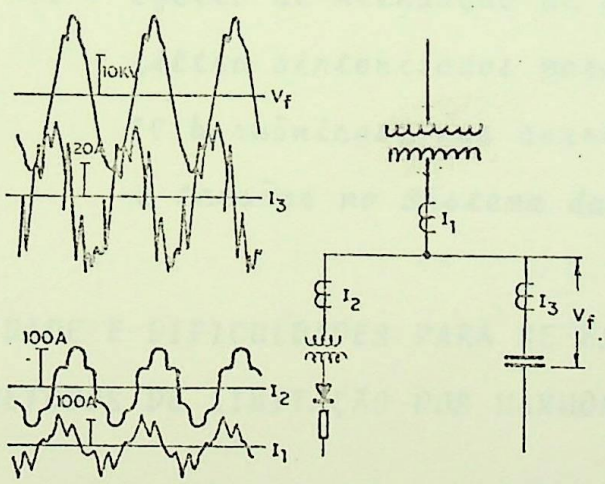


FIGURA 1.1 - Efeito de Distorção (Sistema com retificador de 3 MVA, 6 pulsos e capacitor) mostrando correntes distorcidas no capacitor e no alimentador e ainda distorção de tensão no capacitor

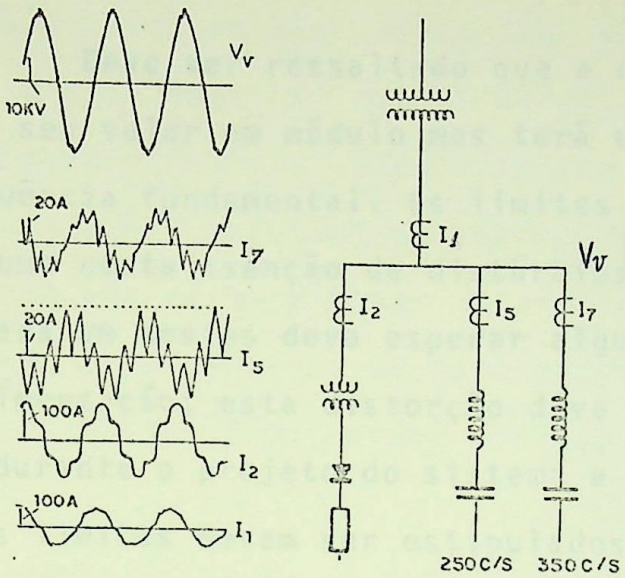


FIGURA 1.2 - Efeito de Atenuação de dois circuitos de filtro sintonizados para 250 e 350 Hz (5º e 7º harmônicos) nas correntes do alimentador e tensões no Sistema da Figura 1.1

Ic) NECESSIDADE E DIFICULDADES PARA SE ESTABELECER METODOS DE LIMITAÇÃO DOS HARMÔNICOS

Se comparadas a outros tipos de distúrbios no sistema elétrico, nota-se que é muito difícil fixar limites para as distorções harmônicas. Como ilustração de um dado tipo de distúrbio, pode-se citar a flutuação de tensão. Para este caso pode-se afirmar que os maiores distúrbios ocorrem no ponto de conexão da carga flutuante e esta flutuação decresse a medida que se move no sentido da fonte de geração. Este não é, positivamente, o caso da distorção harmônica, pois a ressonância pode ocorrer em um

ponto qualquer do sistema, originando aí maior distorção em relação ao ponto de origem do distúrbio.

Deve ser ressaltado que a distorção harmônica não tem apenas seu valor em módulo mas terá um ângulo de fase em relação a frequência fundamental. Os limites que são fixados devem assegurar uma certa isenção de distúrbios aos outros consumidores embora cada um destes deva esperar alguma distorção harmônica na sua alimentação; esta distorção deve ser analisada e levada em conta durante o projeto do sistema e dos equipamentos. Ao mesmo tempo, os limites devem ser estipulados de tal modo que sejam fáceis de serem aplicados na fase de projeto e seu cumprimento possa ser comprovada após a energização do sistema.

As medições de distorções harmônicas são normalmente de difícil interpretação. Considerando-se que uma certa quantidade de distorção de tensão existe nos terminais de um consumidor qualquer, e se existe também um fluxo de correntes harmônicas entre a carga e a fonte de alimentação, isto não significa necessariamente que esta carga é a fonte de toda a distorção.

Como comentado anteriormente, as componentes harmônicas podem ter um ângulo de fase qualquer em relação a frequência fundamental, e a adição de outra fonte de corrente harmônica não implica necessariamente em aumentar a distorção de tensão por uma quantia proporcional e é, geralmente, bem provável que haja redução em alguns casos. Onde existe um grau de ressonância no sistema a amplitude da distorção de tensão que é medida irá variar, não sómente devido as alterações na carga que causa a distorção, mas também a uma variação diária, por causa

dos efeitos de amortecimento de cargas resistivas no sistema. Em consequência, a mesma carga que dá origem a distorção pode conduzir a níveis exagerados de distorções numa parte do dia, enquanto que não causa problemas nas outras horas. É por esta razão que os limites para distorção harmônica são baseados *em cálculos digitais e medições no campo* das correntes harmônicas. Embora este procedimento não resolva todos os problemas pelo menos simplifica a questão de decidir se um novo projeto irá ou não estar de acordo com os limites previamente estipulados.

Id) RECOMENDAÇÕES SOBRE LIMITES DOS HARMÔNICOS

Até o momento, não foi estabelecida uma norma rígida e uniforme sobre os limites permissíveis de correntes harmônicas, distorção de tensão e fator de influência telefônica (TIF).

Existem alguns critérios e especificações que têm sido estipulados e variam de acordo com cada país.

1 - O relatório SCEL-CENC-01/78, pag.42, do GCOI (Grupo Coordenador para Operação Interligada) da Eletrobrás recomenda o seguinte :

- *Limitação de Tensões Harmônicas por Consumidor*

$$\text{Ordem par} : \frac{V_h}{V_1} \leq 0{,}5\%$$

$$\text{Ordem ímpar} : \frac{V_h}{V_1} \leq 1{,}0\%$$

V_h - valor eficaz da tensão harmônica de ordem h medida por analisador de harmônicos.

V_1 = valor eficaz da tensão de frequência fundamental.

- *Limitação da Distorção de Tensão*

A limitação total é dada por :

$$DF = \left[\frac{\text{Soma dos Quadrados das Amplitudes de todos os Harmônicos}}{\text{Quadrado da Amplitude da Fundamental}} \right]^{1/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{\infty} V_h^2}}{V_1} \times 100$$

DF → fator de distorção da tensão.

Por consumidor : $DF \leq 1,5\%$

Por conjunto de consumidores : $DF \leq 4,0\%$

2 - Outra recomendação é a G.5/3 emitida pelo British Electricity Council que serve de orientação para os limites de correntes harmônicas injetadas nos sistemas de alimentação por consumidores de alta e baixa tensão, e também, para os limites de distorção de tensão harmônica causadas por estes. De acordo com esta norma são considerados a potência (KVA) e o tipo do equipamento, sendo assim classificados em três estágios :

1º Estágio : engloba os equipamentos de menores potências de uso geral e estabelece potências máximas de conversores e reguladores que podem ser conectados aos sistemas da classe de 0.415, 6.6 e 11 KV. Os limites para os equipamentos de estágio 1 encontram-se na tabela I.

TABELA I

POTÊNCIAS MÁXIMAS DE REGULADORES C.A. E CONVERSORES (POR UNIDADE) DE ACORDO COM LIMITES DE ESTÁGIO 1

Tensão do Sistema de Alimentação (KV) no ponto de Acoplamento	Conversores Trifásicos			Reguladores C.A.Trifásicos	
	3-Pulsos (KVA)	6-Pulsos (KVA)	12-Pulsos (KVA)	6-Tiristores (KVA)	3-Tiristores/ 3 Diodos (KVA)
0.415	8	12	-	14	10
6.6 e 11	85	130	250*	150	100

* *Este limite se aplica a conversores de 12 pulsos, e para arranjos de conversores de 6 pulsos que sempre operam como se fossem de 12 pulsos, utilizando, controle rígido dos ângulos de disparo e do ripple C.C. para reduzir os harmônicos não - característicos (3º, 5º e 7º harmônicos)*

2º Estágio : Se a potência (KVA) de equipamento excede os limites do estágio 1 este pode ainda classificar-se no estágio 2. Os limites deste estágio compreendem uma tabela de correntes harmônicas máximas que um consumidor pode injetar no sistema elétrico no ponto de acoplamento. Nestas condições entende-se que os valores de harmônicos individuais e de distorção de tensão harmônica no sistema estão dentro dos limites estabelecidos. Os limites para o estágio 2 estão na tabela II.

A distorção de tensão existente no ponto de acoplamento antes de se ligar uma nova carga não deve exceder 75% dos valores da tabela III. Esta exigência faz parte das limitações para os equipamentos classificados no estágio 2.

TABELA II

CORRENTES HARMÔNICAS ADMISSÍVEIS PARA QUALQUER CONSUMIDOR NO PONTO DE ACOPLAMENTO DE ACORDO COM OS LIMITES DO ESTÁGIO 2

Tensão do Sistema de Alimentação(KV) no ponto de acoplamento.	ORDEM DO HARMÔNICO E CORRENTE (A rms)																	
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.415	48	34	22	56	11	40	9	8	7	19	6	16	5	5	5	6	4	6
6.6 e 11	13	8	6	10	4	8	3	3	3	7	2	6	2	2	2	2	1	1
33	11	7	5	9	4	6	3	2	2	6	2	5	2	1	1	2	1	1
132	5	4	3	4	2	3	1	1	1	3	1	3	1	1	1	1	1	1

Uma tolerância de + 10% ou 0.5 A (a que for maior) é admissível.

TABELA III

LIMITES DE DISTORÇÃO DE TENSÃO HARMÔNICA EM QUALQUER PONTO DO SISTEMA (INCLUINDO NÍVEIS EXISTENTES)

Tensão do Sistema de Alimentação (KV) no ponto de Acoplamento	Distorção Total de Tensão Harmônica DF(%?)	Distorção de Tensão Harmônica (Por Consumidor) (%)	
		Ímpar	Par
0.415	5	4	2
6.6 e 11	4	3	1.75
33 e 66	3	2	1
132	1.5	1	0.5

LIMITAÇÕES PARA O ESTÁGIO 3 :

Quando uma carga não-linear não atende os limites da tabela II e/ou quando a distorção de tensão no ponto de acoplamento excede 75% dos limites da tabela III, pode ainda ser possível conectar esta carga após uma análise detalhada dos valores de tensão e corrente harmônicas existentes e as condições resultantes para a nova carga.

A distorção de tensão resultante da soma da distorção existente e daquela produzida pela nova carga deve ser estimada e não deve exceder, em qualquer ponto, os valores da tabela III.

3 - O IEEE através do Standard 519 "*Guide for Harmonic Control and Reactive Compensation of Static Power Converters*" recomenda valores semelhantes àqueles apontados nas tabelas II e III acima, embora de maneira bastante resumida.

CAPÍTULO II

FONTES DE HARMÔNICOS

Os geradores trifásicos, motores e o sistema de transmissão de potência são projetados para operação com correntes alternadas praticamente senoidais, e, deste modo, são também dimensionados outros componentes do sistema. É na verdade com base apenas nas grandezas (tensão e corrente fundamentais) que se conduz grande parte dos estudos elétricos tais como sejam: fluxo de carga, curto-circuito, etc.

Por várias razões, que serão relacionadas a seguir, os harmônicos ocorrem juntamente com a frequência fundamental. Estes harmônicos conforme discutido, afetam o desempenho, eficiência e confiabilidade dos sistemas.

Como será comentado neste capítulo, as cargas que ocasionam as distorções harmônicas variam desde os equipamentos industriais compostos de grandes conversores até um conjunto de pequenas cargas inclusive as de uso doméstico.

Para uma melhor orientação durante os estudos envolvendo os harmônicos, costumam-se dividir, as cargas industriais geradoras de harmônicos em três grupos básicos :

1 - Cargas de conexão direta ao sistema
2 - Conversores
3 - Reguladores

Nas cargas do grupo 1 estão incluidos os motores de corrente alternada, transformadores alimentadores e circuitos de iluminação com tipos de lampadas de descarga.

Como exemplo de cargas pertencentes ao grupo 2 estão os motores de corrente contínua controláveis, por exemplo, os que acionam laminadores reversíveis, sistemas de controle de fornos a indução que empregam variação de frequência, sistemas retificadores não-controlados de grande potência, como aqueles usados na industria química.

Finalmente dentro do grupo 3 estão classificados todos os sistemas de controle que não envolvem variação de frequência, especialmente os fornos de indução controlados por reatores saturados, ou cargas de aquecimento controlados por tiristores.

As cargas denominadas de uso residencial por exemplo, aparelhos de TV, podem tornar-se bastante significantes em virtude do grande número que são usadas simultaneamente e por períodos relativamente longos. Neste grupo também podem ser incluidos os pequenos motores de corrente alternada controlados ou não, por exemplo: compressores de refrigeradores, motores de ventiladores, bombas elétricas e ferramentas elétricas.

Uma vez estabelecida esta classificação inicial aborda-se a seguir as principais fontes de geração de harmônicos entre as mencionadas.

II.1 - GERADORES EM C.A.

Embora as formas de onda das tensões produzidas pelos geradores sejam usualmente bastante próximas do aspecto senoidal, um gerador de corrente alternada pode ser considerado como uma fonte de tensões harmônicas equilibradas e de sequên

cia zero.

Considerações similares aplicam-se também aos motores trifásicos.

A origem destes harmônicos pode ser explicada em termos da distribuição de fluxo na máquina. Em substituição ao convencional fluxo perfeitamente senoidal, sabe-se que a distribuição do fluxo para um alternador de polos salientes é do tipo ilustrado na figura 2.1.

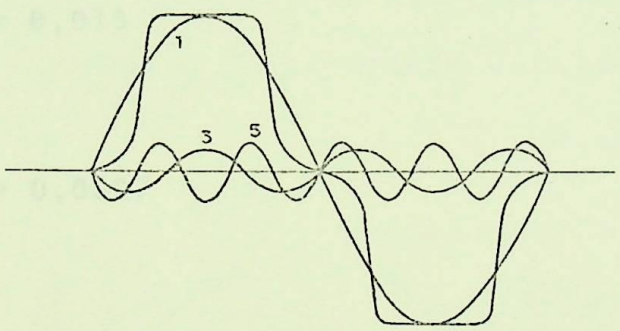


FIGURA 2.1 - Distribuição de fluxo

Analisando a forma de onda do fluxo pela série de Fourier verifica-se que a mesma pode ser considerada como a composição de uma onda fundamental à qual são superpostas diversas componentes harmônicas de ordem ímpar. Então cada componente de fluxo resultará em uma correspondente tensão.

Sabendo-se que a tensão gerada está relacionada a :

fem α fluxo

Deve-se ainda observar que os harmônicos de ordem diferente de três ou seus múltiplos constituirão um sistema equilibrado de tensões harmônicas. Entretanto, o 3º harmônico e multiplos deste, formarão um sistema de tensões de sequência nula.

Como valores típicos[12] destes harmônicos tem-se :

$$\frac{E_3}{E_1} = 0,075$$

$$\frac{E_5}{E_1} = 0,015$$

$$\frac{E_7}{E_1} = 0,0007$$

II.2 - TRANSFORMADORES

Os tranformadores podem ser considerados como geradores de tensões e/ou correntes harmônicas que aparecem devido a distorção magnética e componentes harmônicas dos fluxos induzindo f.e.m^s. em ambos enrolamentos.

Deve ser ressaltado que o projeto econômico dos transformadores exige que suas chapas (normalmente com grãos orientados de silício) trabalhem na parte não-linear da curva de saturação, resultando em apreciável saturação. Nestas condições a corrente de magnetização não é uma onda senoidal e sua forma depende das características (curva B-H), fig. 2.2(a), do circuito magnético do transformador. Já a forma de onda da cor

rente é aquela mostrada na fig. 2.2(b). Esta corrente consiste da corrente de magnetização mais uma pequena parcela componente das perdas devido a histerese no núcleo.

Observa-se que apesar do fluxo ser senoidal, a corrente é uma onda distorcida. A análise desta onda de corrente mostra que ela contem componentes harmônicas ímpares de valores consideráveis; a componente de 3º harmônico está na fig. 2.2(b). Valores típicos dos harmônicos são : 45% para o 3º harmônico, 15% para o 5º harmônico, 3% para o 7º harmônico e valores menores para os 11º, 13º harmônicos, etc; estes valores são expressos em percentagem do valor da onda senoidal da corrente total de excitação, a qual é praticamente constante, independente da carga.

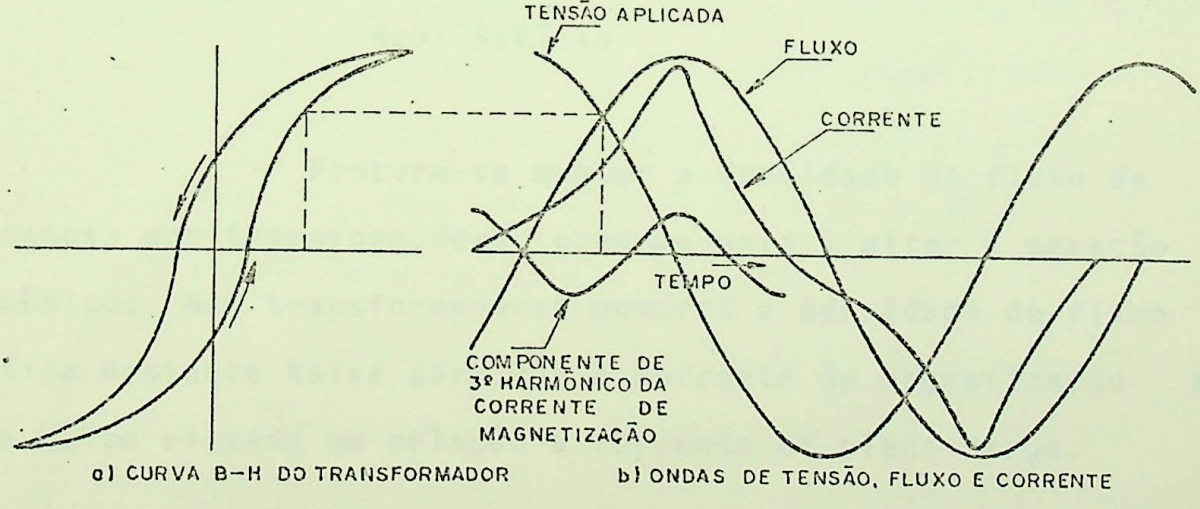


FIGURA 2.2 - Formas de onda da corrente de Magnetização, da tensão aplicada, do fluxo atrasado 90° em relação a tensão e do 3º Harmônico componente da corrente.

Na figura 2.3 abaixo são mostradas variações dos harmônicos componentes da corrente de magnetização para uma determinada chapa de aço-silício.

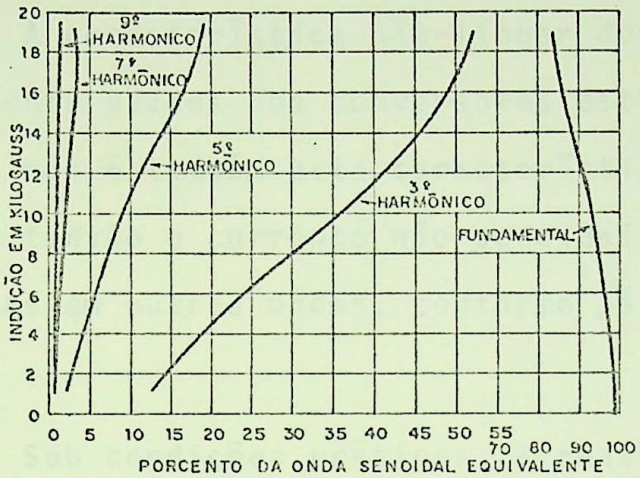


FIGURA 2.3 - Porcentagem de Harmônicos na corrente de magnetização para uma chapa específica de Aço- Silício

Procura-se manter a densidade de fluxo de 12 Kilogauss nos transformadores grandes para limitar a geração de harmônicos. Nos transformadores menores a densidade de fluxo é mantida bastante baixa para que a corrente de magnetização não seja muito elevada em relação a corrente de plena carga.

II.3 - CONVERSORES ESTÁTICOS :

Atualmente uma das fontes geradoras de harmônicos mais significativas nos sistemas elétricos são os conversores estáticos.

Estes conversores estáticos(retificadores ou

inversores) vem sendo largamente empregados na indústria para controle de motores C.C. que acionam laminadores de chapas de aço, em processos de eletrólise (estanhagem de metais), em sistemas de retificação controlada para locomotivas.

A característica não-linear dos diodos e/ou tiristores, normalmente usados nos conversores estáticos, é que os torna muito útil, mas é também esta característica que origina formas de onda de tensão e corrente não-senoidais, as quais podem ser decompostas em outras ondas, conforme já foi mencionado no Capítulo I.

Sob condições práticas, a reatância do sistema CA, principalmente a do transformador do ramo conversor, não pode ser desprezada. Em consequência, as correntes não apresentam uma variação degrau (ou por blocos, isto é, variando de zero a Id instantaneamente), e podem apenas variar segundo uma taxa finita. Isso significa que a comutação da corrente, de um tiristor para o outro, é processada dentro de um tempo diferente de zero chamado "*tempo de comutação*".

O trabalho de dissertação de mestrado "*Análise, Modelagem e Simulação de Fontes Geradoras de Harmônicos*" [31] detalha os conversores estáticos e outras fontes sob o ponto de vista da geração de harmônicos em sistemas elétricos.

Resumindo os resultados constantes nesta referência, tem-se que, a forma de onda da figura 2.4 produzirá harmônicos de ordem $6q \pm 1$, sendo q um número inteiro positivo qualquer. As intensidades destes harmônicos variam com o ângulo de disparo e reatância C.A. A figura 2.4 mostra a forma de onda da corrente para um conversor de 6 pulsos.

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca MAUÁ
Itajubá

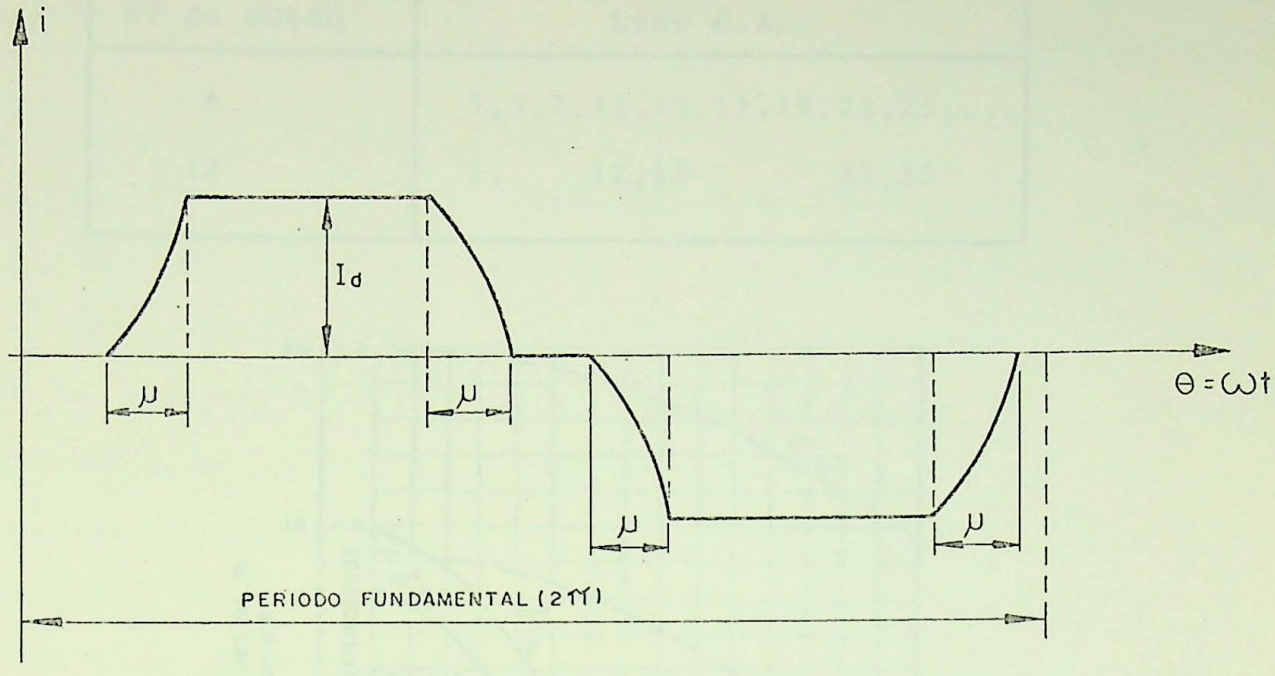


FIGURA 2.4 - Forma de onda da corrente de alimentação de um ramo conversor de 6 pulsos, quando se considera a reatância CA.

A Figura 2.5 apresenta de forma simplificada a dependência da intensidade dos harmônicos com a reatância C.A, que no caso foi expressa em termos do ângulo de comutação.

De um modo mais geral, a ordem dos harmônicos característicos produzidos no lado C.A. por um conversor de "p" números de pulsos, é representada por :

$$n = pq \pm 1 \qquad (2.1)$$

Em geral os sistemas conversores utilizados possuem um número de pulsos igual a 6 ou 12, produzindo desta forma os harmônicos indicados na tabela da pagina seguinte:

Nº de PULSO	Lado C.A.
6	1,5,7,11,13,17,19,23,25,...
12	1, 11,13 23,25

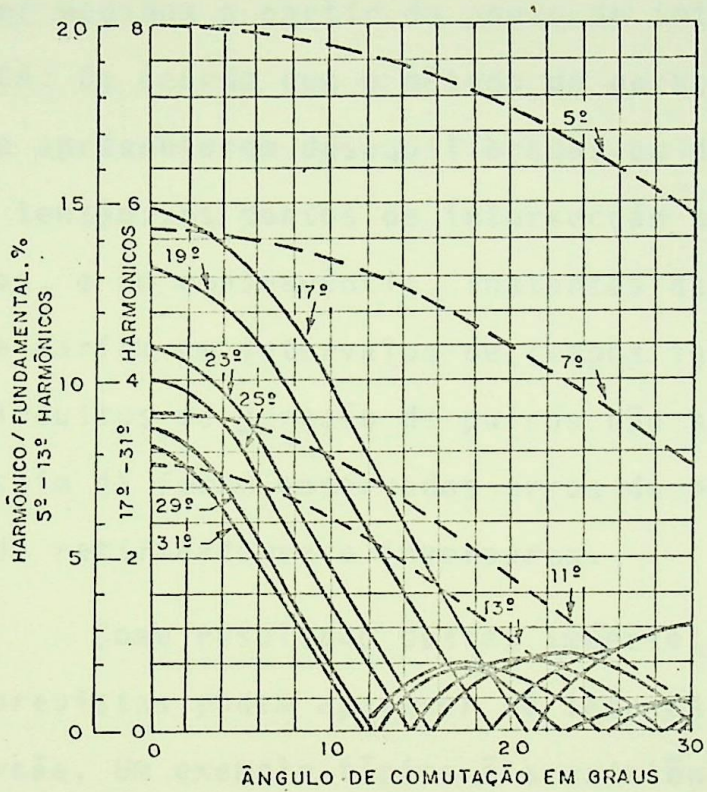


FIGURA 2.5 - Valores percentuais dos harmônicos no lado C.A.

Nos sistemas industriais são também empregados conversores de até 24 ou 36 pulsos com o objetivo de se reduzir os harmônicos gerados que são obtidos da expressão 2.1.

As condições que propiciam a geração de harmônicos característicos, são difíceis de ocorrer na prática. Em consequência, no caso de implantação de um sistema conversor, de

ve-se ter em mente a possibilidade da existência de harmônicos cujas frequências diferem daquelas previstas pela expressão (2.1) anterior.

As principais causas do aparecimento de harmônicos não-característicos são devidos aos ângulos de ignição os quais podem ser medidos a partir do ponto de intersecção entre dúas tensões CA. De acordo com o método de geração de pulsos estas tensões se apresentarem desequilibradas ou distorcidas por harmônicos de tensão, os pontos de intersecção não estarão igualmente espaçados, e em consequência, instantes de ignição dos tiristores não se dariam em intervalos de tempos iguais. Além disto, os próprios circuitos de geração de pulsos não são totalmente perfeitos e assim já foram observados erros de pequena ordem para o disparo de retificadores e inversores.

Como resultado destas imperfeições, harmônicas de ordem não previstas podem aparecer do lado CA e CC em um sistema de conversão. Um exemplo típico é a existência de correntes no lado C.A. de 3º harmônico e seus múltiplos ímpares em muitos sistemas em operação.

Uma outra causa da geração de harmônicos não característicos poderia ser atribuída a desèquilíbrios entre as impedâncias do sistema C.A. de alimentação do conversor, ou mais especificamente a desequilíbrios entre as reatâncias C.A. Isto leva também a produção de correntes de 3º harmônico e seus multiplos ímpares.

II.4 - COMPENSADORES ESTÁTICOS DE ENERGIA REATIVA

É fato conhecido que durante os estudos de fluxo de potência dos sistemas elétricos deve ser feito um balanço de potência ativa e reativa ao longo do sistema. Desse modo a componente indutiva da corrente circulando através das impedâncias do sistema é em grande parte responsável pela queda de tensão nos terminais da carga. Quando o valor desta componente se torna razoavelmente alto a queda de tensão causada pode mostrar-se inconveniente, ou mesmo proibitiva, para a operação satisfatória da instalação.

O consumidor industrial conclui que é vantajoso gerar energia reativa local para o seu sistema, e em consequência, a componente de corrente reativa não irá circular pela impedância do sistema.

Dentre os vários sistemas de compensação utilizados para suprir esta energia reativa pode-se citar os seguintes :

- Reator saturado em C.A.
- Reator controlado a tiristores
- Capacitores chaveados a tiristores

Sob o ponto de vista de geração de harmônicos pode-se dizer que todos os tres tipos introduzem um maior ou menor percentual de harmônicos no sistema elétrico de alimentação.

O primeiro tipo consiste basicamente de um reator especial mais um banco de capacitores e desde que existam arranjos convenientes nos enrolamentos do reator os níveis dos harmônicos são limitados e tornam-se baixos a 37ª ordem.

O segundo tipo é composto de um reator do tipo convencional, chaveado por meio de tiristores e inclui um banco de capacitores. Em resumo, pode-se afirmar que para este tipo aparecem principalmente os harmônicos de 3ª, 5ª e 7ª ordens não excedendo os percentuais típicos de (13,5), (5,8) e (2,5) respectivamente.

O último tipo é formado de capacitores convencionais que são chaveados por tiristores. Os capacitores chaveados por tiristores não geram harmônicos desde que a tensão a ser corrigida seja perfeitamente senoidal. Neste caso mesmo quando se consideram as imperfeições da carga controlada os níveis dos harmônicos se mantem praticamente nulos.

II.5 - FORNOS À ARCO |31| e |34|

Nos últimos anos, tem havido uma tendência, principalmente nas indústrias de maior porte, para se empregar fornos a arco devido, entre outros fatores, ao processo metalúrgico empregado ser mais simples e também a utilização da energia elétrica como alternativa energética mais atrativa e de menor custo.

Assim sendo, tem também ocorrido um aumento razoável no tamanho e potência nominal dos fornos à arco. O crescimento da potência e a maneira em que ela é absorvida pelo forno, conduz ao aparecimento de diferentes tipos de distúrbios no sistema elétrico, ente eles, pode-se citar :

- flutuação de tensão
- geração de correntes harmônicas

Em resumo, pode-se afirmar que as correntes harmônicas geradas pelos fornos, tem origem devido a não-linearidade apresentada pela característica V x I do arco, da constante variação aleatória a que se submete a tensão do arco durante o processo de fusão devido ao seu permanente movimento.

Os fornos a arco, apresentam então correntes altamente distorcidas. Uma análise delas indica um número considerável de frequências diferentes da fundamental sendo harmônicos e não-harmônicos. Por estes motivos torna-se difícil determinar os harmônicos com suficiente precisão.

Equipamentos estáticos tem sido empregados nos últimos anos, utilizando-se capacitores fixos providos de reatores série para filtrar principalmente o 2º e 3º harmônicos.

Como este assunto não constitui o objetivo primordial deste trabalho, pretende-se indicar aqui somente as referências |31| e |34| que analisam melhor o problema dos harmônicos produzidos por fornos a arco.

gopd

CAPÍTULO III

VALORES DE PARAMETROS UTILIZADOS PARA MODELAGEM DOS COMPONENTES

Este capítulo tem por objetivo apresentar os modelos e critérios de representação dos principais componentes dos sistemas de potência.

A modelagem empregada para os estudos de curto-circuito, fluxo de potência, estabilidade e outros de baixa frequência mostrou ser conveniente pela experiência obtida ao longo dos anos. Os modelos empregados são, entretanto, falhos quando de estudos de fenômenos que envolvem frequências mais elevadas, fato que ocorre nos fenômenos transitórios resultando em sobretensões e sobrecorrentes. Embora para os estudos de harmônicos não existam preocupações com frequências tão elevadas como aquelas que ocorrem nos estudos de transitórios, a faixa de interesse também pode requerer uma representação mais apropriada dos componentes do sistema. Dentro destas considerações a representação, por exemplo, de um transformador já não é suficiente empregar apenas a sua indutância de dispersão. Neste e em outros casos, o efeito dos capacitores de fuga, resistências ohmicas, etc. podem ser significativos. É pois objetivo deste capítulo apresentar metodos de modelagem dos componentes de sistema, fornecendo inclusive tabelas, gráficos e outros recursos que permitam obter os paramentros necessários.

Os parametros aqui apresentados correspondem ao resultado de pesquisa bibliográfica em publicações relativas

a estudos de harmônicos e sobretensões. (1) (2) (4) (15) (16)(32)

III.1 - REPRESENTAÇÃO DA IMPEDANCIA DO SISTEMA C.A (Concessionária)

Neste ítem pretende-se apresentar considerações sobre a melhor representação da impedância do sistema C.A. de suprimento de energia.

Para que se tenha uma idéia da dependência da impedância do sistema C.A. com a frequência sejam as figuras 3.1 e 3.2.

A figura 3.1 mostra uma forma típica de característica polar da *IMPEDÂNCIA X FREQUÊNCIA* e a figura 3.2 mostra o diagrama correspondente da amplitude da impedância x frequência.

Percebe-se que embora o sistema possa ser considerado indutivo à frequência industrial, em frequências mais elevadas a *reatância muda de indutiva para capacitiva* e vice-versa, dando um número de pontos de ressonância nos quais o sistema é puramente resistivo.

Diversas pesquisas vem sendo realizadas para representar melhor os sistemas de transmissão em A.T. através de simulações digitais, analógicas ou por modelos, isto em consequência do crescimento em número e dimensão dos citados sistemas que estão sendo comissionados nos últimos anos. Para o projeto destes sistemas é importante que a impedância do sistema C.A. de alimentação seja simulada corretamente em várias frequências. Alguns dos problemas dependentes da representação do sistema de A.T. são :

- Projeto de filtros C.A.
- Sobretensões em subestações conversoras resultantes de várias operações de chaveamento, bloqueio ou não dos tiristores, e sob certas condições de falta.
- Distorção das tensões C.A. no conversor e suas implicações no controle e consequente geração de harmônicos não-característicos.

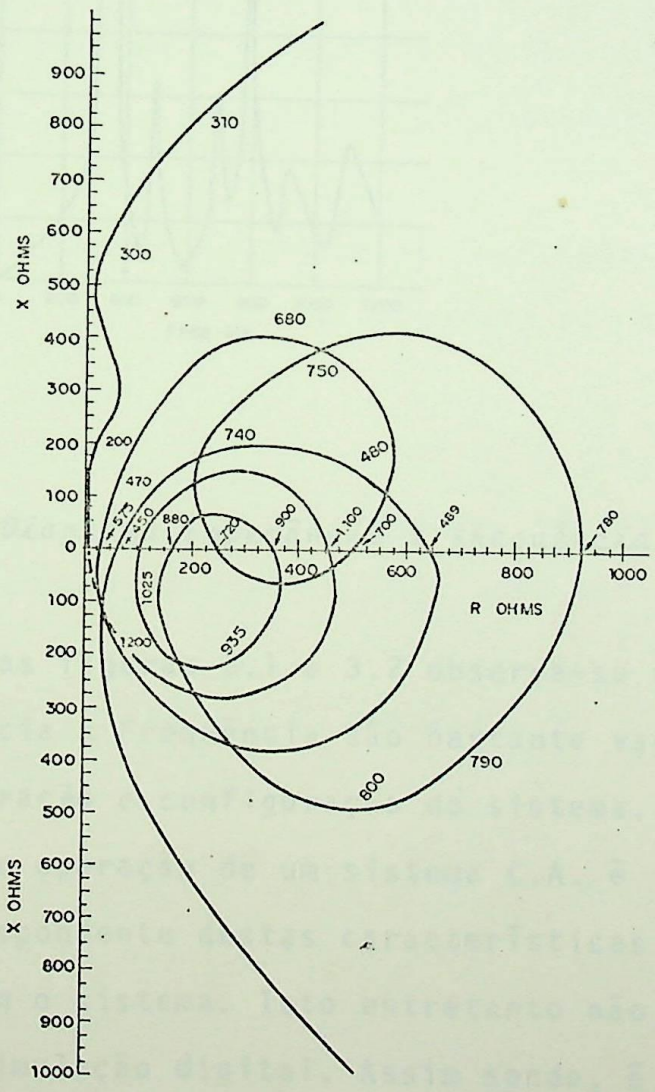


FIGURA 3.1 - Diagrama polar impedância x frequência

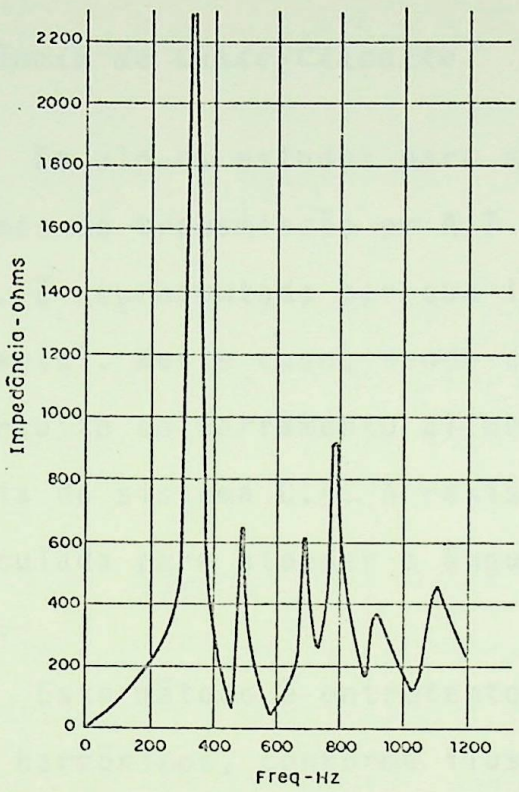


FIGURA 3.2 - Diagrama impedância x frequência

Pelas figuras 3.1 e 3.2 observa-se que as características Impedância x Frequência são bastante variáveis dependendo da carga, geração e configuração do sistema. Considerando várias condições de operação de um sistema C.A. é possível obter um número correspondente destas características Z x f que amplamente representam o sistema. Isto entretanto não seria econômico nem de fácil simulação digital. Assim sendo, é recomendável representar o sistema C.A por um número de circuitos RLC em paralelo ou outra forma que leve a mesma característica Impedância x Frequência.

Discute-se a seguir as formas de representação do sistema C.A.

a) *Impedância de Curto-Circuito*

Em alguns estudos para se estabelecer modelos de sistemas de transmissão em A.T., a impedância do sistema C.A. é representada por sua indutância na frequência fundamental. Neste caso, sendo conhecido o nível de curto-circuito no barramento alimentador, determina-se a indutância do sistema C.A.. A resistência série equivalente é calculada para atender o ângulo ϕ estimado para a impedância.

Este método é entretanto inadequado para os estudos de harmônicos, conforme ilustrado pelas figuras 3.1 e 3.2.

É portanto necessário uma melhor simulação da característica *Impedância x Frequência* do sistema C.A, ou seja, da frequência fundamental até poucos quilohertz.

b) *Simulação da impedância do sistema C.A. por circuitos paralelos* [16]

N.G. Hingorani sugere um modelo , consistindo de ramos RCL em paralelo, para simular o sistema C.A. . O arranjo é ilustrado na figura 3.3.

Para que se obtenham os valores de RCL dos ramos, devem ser conhecidos os pontos de mínimo e máximo módulo da impedância. Cada ponto de mínimo é interpretado como uma resso

nância série, que pode ser obtida através de um ramo RLC. Cada ponto de máximo corresponde a uma ressonância paralela. Sendo assim, ter-se-á tantos ramos quantos forem os pontos de mínimo.

Devido a metodologia utilizada para a obtenção de tal circuito, este só representará a impedância do sistema no que diz respeito a módulo, e mesmo dentro de uma faixa estreita de frequência.

Através de um programa digital existente simulou-se a impedância de sistema çujas curvas de impedância estão representadas nas figuras 3.1 e 3.2. Os resultados obtidos são apresentados nas figuras 3.4 e 3.5.

Como pode ser observado, existe uma equivalência entre módulos para as frequências vizinhas a 200 Hz. Para frequências mais distantes a discrepância entre os diagramas é marcante. Pode-se dizer que quando se deseja simular a impedância de um sistema CA através deste processo, só se obtem bons resultados em uma faixa estreita de frequências.

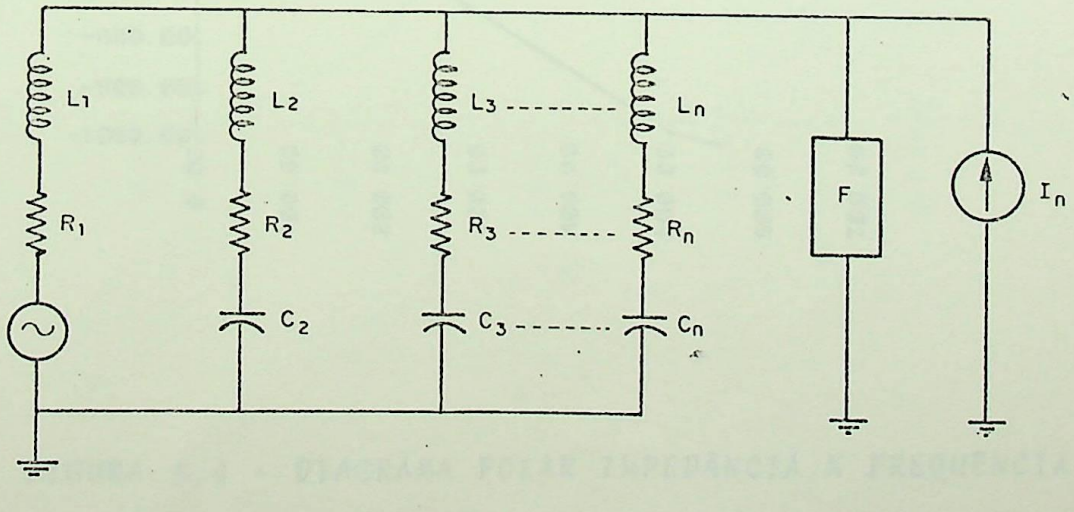


FIGURA-3.3 - Simulação do sistema CA através de vários ramos R.L.C.

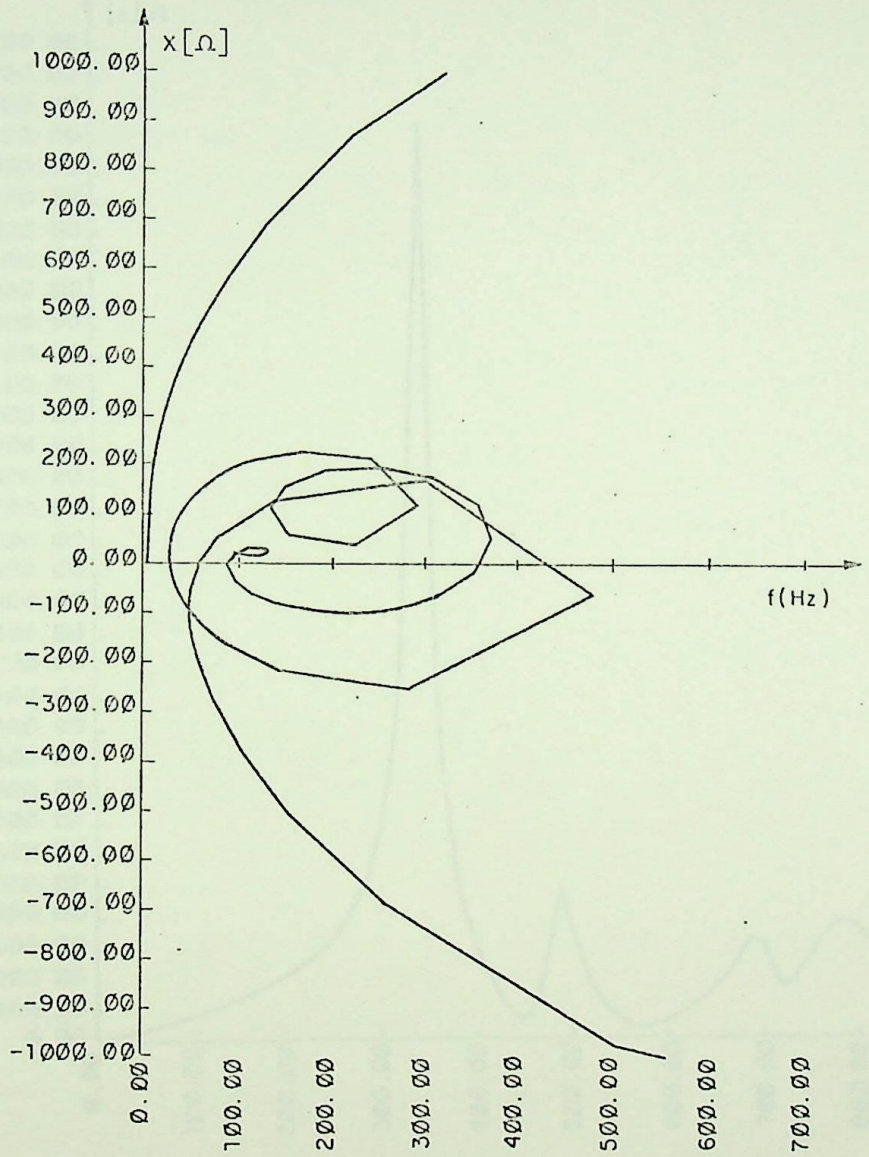


FIGURA-3.4 - DIAGRAMA POLAR IMPEDÂNCIA X FREQUÊNCIA

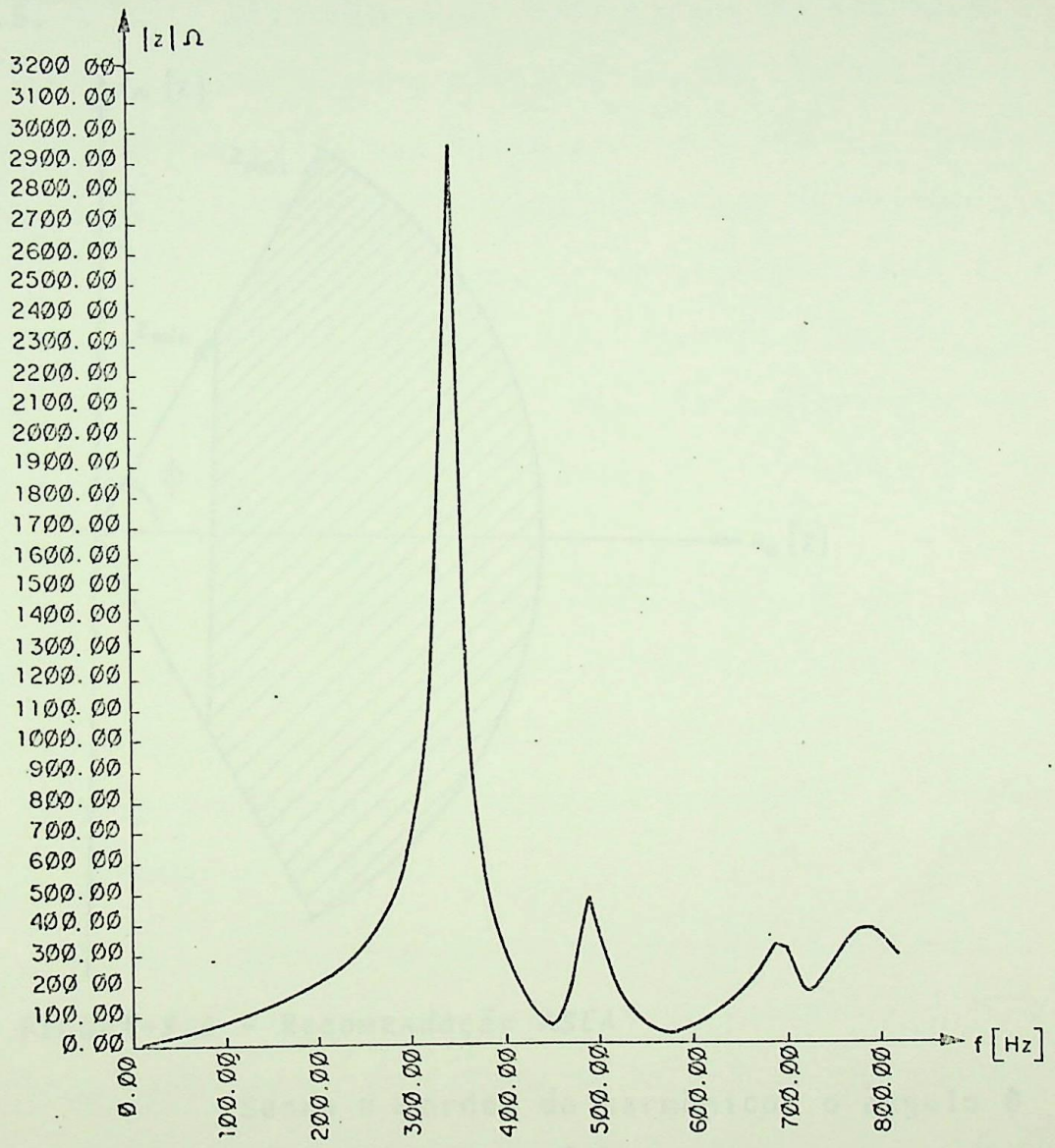


FIGURA-3.5 - DIAGRAMA IMPEDÂNCIA X FREQUÊNCIA

C) *Recomendação ASEA* [33]

A recomendação proposta pela ASEA para a representação da impedância harmônica do sistema CA, está indicada na fig. 3.6.

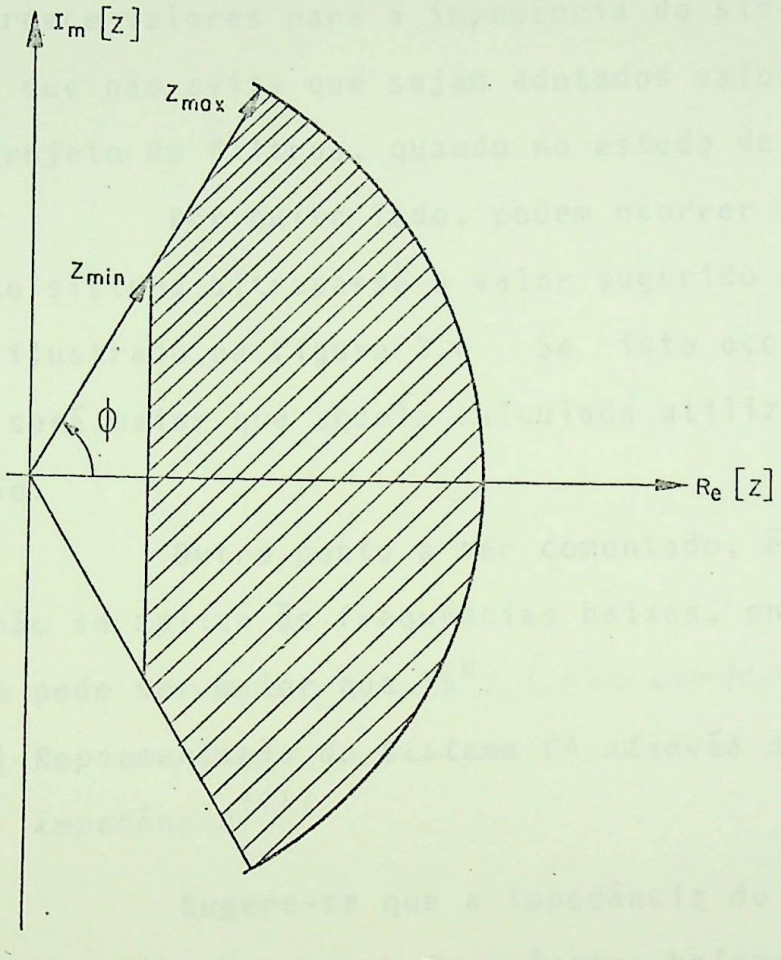


FIGURA-3.6 - Recomendação ASEA

Sendo n a ordem do harmônico, o ângulo ϕ deve ser igual a $\pm 75^{o}$ para $n \leq 13$ e $\pm 70^{o}$ para $n \geq 23$.

Para o módulo da impedância tem-se que:

$$Z_{min} = \frac{V_L^2}{Pcc_{max}} \cdot \sqrt{n} \qquad n \geq 10 \qquad (3.1)$$

Z_{max} = 1000|Ω| para todos os harmônicos

V_L = tensão de linha

Pcc_{max} = nivel de curto- circuito em MVA

Esta representação, apesar de ser geral para $n \geq 10$, fornece valores para a impedância do sistema numa faixa extensa, o que não evita que sejam adotados valores pessimistas, tanto no projeto de filtros, quando no estudo de harmônicos.

Por outro lado, podem ocorrer casos, onde a impedância do sistema ultrapasse o valor sugerido para Z_{max} (1000Ω), vide caso ilustrado na figura 3.6. Se isto ocorrer a distorção harmônica será maior que aquela calculada utilizando-se esta representação.

Outro ponto a ser comentado, é que esta representação não se aplica às frequências baixas, onde o ângulo de impedância pode ser maior que 75^o. (Não confere c/ a pg anterior)

d) Representação do Sistema CA através de um ângulo de impedância[15]

Sugere-se que a impedância do sistema CA seja representada, para as frequências baixas (até 5º harmônico), como tendo um ângulo de 85^o. Esta representação é aceitável no que diz respeito a ângulo, no entanto ela nada esclarece a respeito do módulo da impedância. Nesta representação o módulo é, então tomado como sendo o da fundamental, corrigindo-se a reatância indutiva a 60Hz de modo proporcional a frequência.

O valor sugerido para ângulo da impedância é pessimista, porém para as frequências até o 5º harmônico,

ela é abrangente. Acima destas frequências ela pode perder a sua validade, visto que o lugar geométrico da impedância do sistema é complexo, conforme ilustra a figura 3.7.

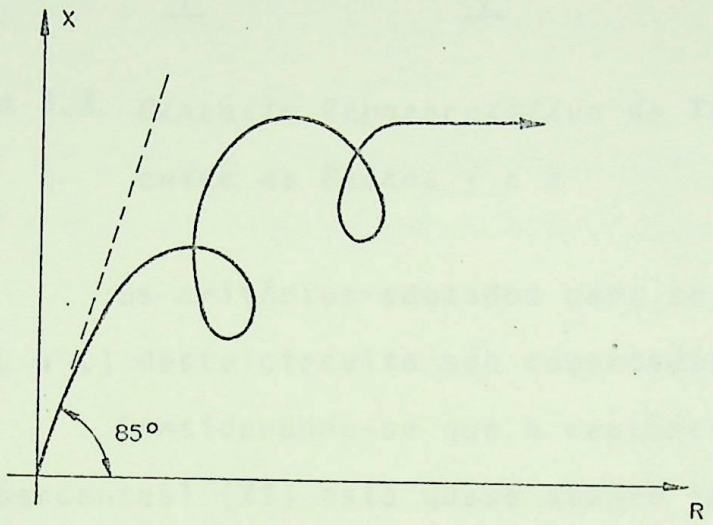


FIGURA-3.7 - Representação do ângulo da impedância do sistema CA

III.2 - MODELO E PARAMETROS PARA OS TRANSFORMADORES[2]:

Os circuitos e seus parâmetros representativos para o caso dos transformadores são bastante específicos dependendo do tipo de estudo e grau de precisão adotados, isto é, nos cálculos de curto-circuito, por exemplo, representa-se normalmente o transformador só por sua reatância p.u. na base adotada. Este procedimento não seria conveniente no estudo envolvendo os harmônicos, devido a grande simplificação. Desse modo, a representação adotada para o transformador é o circuito Π mostrado na figura 3.8.

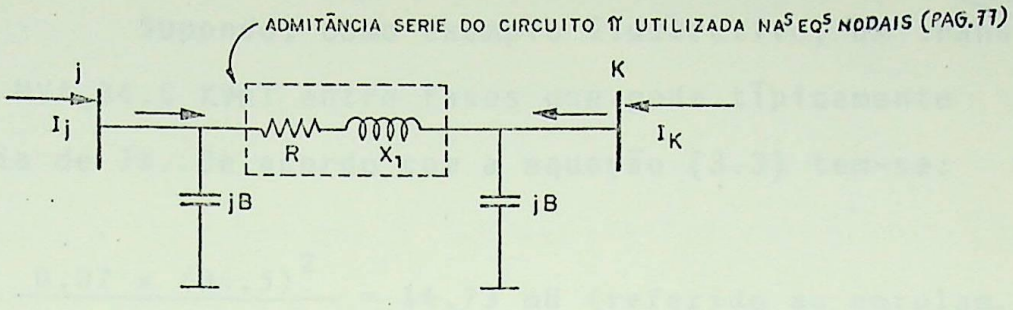


Figura 3.8- Circuito Representativo do Transformador entre as Barras j e k

Os critérios adotados para se determinar os parâmetros (R,L e C) deste circuito são comentados a seguir.

Considerando-se que a reatância p.u. (Xpu) ou a reatância percentual (X%) está quase sempre impressa na placa do transformador e sendo X a reatância de dispersão, V e I tensão e corrente nominais, deduz-se que:

$$L = \frac{Xpu \cdot V}{WI} = \frac{X\% \cdot V}{100WI} \qquad (3.2)$$

Esta equação pode ser colocada em função dos valores base, resultando assim:

$$L = \frac{Xpu(KV)^2}{W(MVA)} \qquad (3.3)$$

onde: W = 2πf = frequência angular à frequência fundamental.

Se a tensão entre fases é usada, então o MVA é o MVA total do transformador trifásico. Se a tensão entre fase e

Escola Federal de Engenharia Biblioteca MAUÁ Itajubá

neutro é especificada, então o MVA é o MVA por fase.

Supondo, como exemplo ilustrativo, um transformador de 15 MVA,34.5 KV-AT entre fases que pode tipicamente ter uma reatância de 7%. De acordo com a equação (3.3) tem-se:

$$L = \frac{0,07 \times (34,5)^2}{377 \times 15} = 14,73 \text{ mH (referido ao enrolam. 34.5 KV)}$$

Este é o valor da *INDUTÂNCIA DE DISPERSÃO* referido ao enrolamento de 34.5 KV. Se o outro enrolamento é de 13.8 KV BT a indutância do transformador referida àquele enrolamento seria reduzida na proporção da relação de espiras:

$$L = 14,7 \times \left(\frac{13,8}{34,5}\right)^2 = 2,36 \text{ mH (referido ao enrolam. 13.8KV)}$$

A indutância de dispersão de um transformador depende de seu projeto ou, mais especificamente da disposição de seus enrolamentos, pois isto determina o fluxo de dispersão. A faixa dos valores da impedância percentual para alguns transformadores típicos é dada na tabela III.1. Como será visto, a resistência do enrolamento é pequena, assim estes valores tabelados podem ser tomados como valores de reatância percentual para este estudo, e podem ser usados para calcular a indutância de dispersão de acordo com a equação (3.3).

Deve ser observado que a impedância percentual cresce com o aumento da tensão, que é uma consequência natural do aumento da separação entre os próprios enrolamentos e dos enrolamentos e o núcleo; esta separação exige um aumento na isolação. Este mesmo fator é responsável pela diferença entre os trans

formadores Δ/Y em comparação com aqueles com enrolamentos Y/Y . Como mostrado ao longo da tabela III.1 para 1175KV BIL a impedância aumenta quando a tensão do enrolamento de BT aumenta. Isto , é também verdade em outros níveis de tensão. É também importante esclarecer qual o KVA BASE que a impedância foi calculada. É possível aumentar a potência nominal de um transformador em 50% ou mais pela refrigeração forçada. Na nova base a impedância percentual seria proporcionalmente aumentada, mas claramente não se alterou a indutância de dispersão do transformador.

BIL do enrolamento de alta Tensão	BIL do enrolamento de baixa Tensão.	Reatância Percentual	
		Δ ou Y não aterrado	Y aterrado
150	110	5 - 7,5	-
200	150	5,5 - 8,25	-
250	150	5,75 - 8,5	-
350	200	6,25 - 9,25	-
450	250	7,0 - 10,5	-
550	350	7,75 - 11,5	-
650	350	8,25 - 12,5	-
750	450	9,25 - 14,0	-
825	450	9,5 - 14,25	-
900	550	10,25 - 15,5	-
1050	650	11,0 - 16,5	-
-	150	-	8,75 - 13,25
1175	350	-	9,0 - 13,5
-	650	-	10,0 - 15,0
-	900	-	11,5 - 16,5
1300	650	-	10,5 - 15,75
1425	650	-	11,5 - 16,5
1550	750	-	11,75 - 17,5
1675	750	-	12,00 - 18
1800	750	-	12,0 - 18
2050	750	-	12,75 - 19,25
2300	750	-	13,25 - 19,75

TABELA III.1 - Valores Típicos de Impedância por unidade, 60 Hz, sequência Positiva. Valores para transformadores de potência nominal 15000 KVA e acima.

Os auto-transformadores são comumente usados para interligar circuitos de transmissão de potência em diferentes níveis de tensão. Uma vez que primário e secundário dividem um enrolamento comum em tais transformadores, estes tendem a possuir *mais baixa indutância de dispersão* que os transformadores de 2 enrolamentos de potência nominal comparável. A impedância percentual do enrolamento de alta para o de baixa de um auto-transformador pode ser calculada com auxílio da tabela III.1 e introduzindo o fator de correção (α) conforme abaixo:

$$Z_{A-B} = \alpha^2 . Z \qquad (3.4)$$

onde :

$$\alpha = \frac{\text{Tensão de AT - Tensão de BT}}{\text{Tensão de AT}}$$

e Z = impedância de um transformador similar de 2 enrolamentos.

Considerando que para o exemplo anterior o transformador seja substituído por um auto-transformador, então sua reatância será calculada conforme expressões abaixo :

$$\alpha = \frac{34,5 - 13,8}{34,5} = 0,60 \text{ , portanto}$$

$$Z_{A-B} = (0,60)^2 \times 0,07 = 0,025\%$$

CAPACITÂNCIA DOS TRANSFORMADORES

Com relação aos conceitos sobre a capacitância do transformador pode iniciar-se pela consideração de um simples dispositivo compreendendo 2 enrolamentos cilíndricos, um núcleo e um tanque. Isto está representado na fig. 3.8.a. O enrolamento interior, mais próximo do núcleo é o enrolamento de baixa tensão; este é circundado pelo de alta tensão. Não é difícil de se supor que estes enrolamentos sendo de cilindros coaxiais de metal, formam placas de um capacitor.

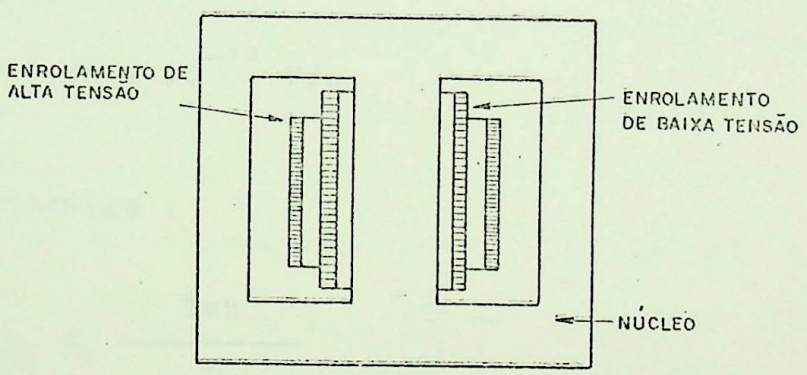


FIGURA 3.8a - Vista da seção transversal de um transformador típico

De modo similar existirá um capacitor formado entre o enrolamento interior e o núcleo. Isto é uma maneira simplificada de se iniciar a análise da capacitância.

Assim como outros capacitores, seus valores de capacitância vão depender da área das placas, da separação delas e da permissividade do material que as separa (ver eq.3.5). Pode-se supor, portanto, que os transformadores de elevado KVA devem ter maiores valores de capacitância que aqueles de baixo KVA,

simplesmente porque são físicamente maiores.

Capacitor com placas paralelas planas :

$$C = \varepsilon_o \, \varepsilon_r \, \frac{A}{d} \qquad (3.5)$$

onde :

A = área da placa em cm^2

d = dist. entre as placas em cm

ε_r e ε_o = permissividade relativa F/m e permissividade no ar,

sendo :

$\varepsilon_o = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m

Capacitor cilíndrico :

$$C = \varepsilon_o \, \varepsilon_r \, \frac{2\pi h}{\ln (r_a / r_i)} \qquad (3.6)$$

onde :

h = altura do cilindro em cm

r_a = raio do cilindro externo em cm

r_i = raio do cilindro interno em cm.

Pode-se tambem supor que a capacitância de um transformador de elevado KV tende a ser menor que à de um transformador de baixo KV de classe comparável em KVA, pelo fato que AT requer maior separação entre os enrolamentos, e entre os enrolamentos e o núcleo.

É tambem razoável supor que um transformador *TIPO SECO* terá *menor capacitância* que um transformador correspondente onde os interstícios ou frestas dos enrolamentos estão cheios de óleo ou algum fluido isolante (askarel, silicone ou R-temp) semelhante de alta permissividade. Na prática conclui-se que estas observações correspondem aos fatos.

Considera-se neste estudo modelos bastante simples. Detalhes de projeto, notadamente o tipo de enrolamento usado, podem afetar bastante os *valores de capacitância*, assim como blindagens por grades eletrostáticas. Existem 2 estilos de enrolamentos mais comuns, o *tipo em camadas* e o *tipo disco*.

Do ponto de vista de capacitância o *TIPO DISCO* é mais como se fosse uma pilha de discos, que como cilindros coaxiais do tipo de enrolamento em camada. Existe uma capacitância entre os discos e destes para a estrutura aterrada que os circunda e também aos outros enrolamentos.(ver eq.3.6).

Verificou-se que a capacitância efetiva para terra para os enrolamentos *TIPO DISCO* é frequentemente não mais que *30 a 40%* do valor para o enrolamento *TIPO CAMADA* da mesma classe em KVA.

A simplificação desse modelo pode torná-lo difícil para se entender como pode existir um *CAPACITOR* quando as placas estão juntas. Deve ser lembrado que a capacitância é realmente *DISTRIBUÍDA* e que quando a tensão é aplicada ao longo do enrolamento um campo elétrico é estabelecido entre o enrolamento e os condutores adjacentes.

Partes diferentes da capacitância são carrega

gadas com tensões diferentes; somente no neutro a tensão é zero. Quando se observa o enrolamento como um todo o que se deseja saber é se é possível colocar no terminal alguma *capacitância* que agiria efetivamente do mesmo modo que esta complexa capacitância distribuída.

Partindo deste conceito de capacitância para terra distribuida de maneira uniforme, pode-se demonstrar através de um interpretação física envolvendo integração de comprimentos elementares que a capacitância efetiva no terminal é igual a : 1/3 Cg.ℓ, onde Cg é a capacitância total para terra do enrolamento e ℓ é o comprimento do enrolamento.(2)

Um método proposto por H.W.Lord, já foi aceito pelo IEEE, e é usado para se medir a capacitância efetiva (Cef). Consiste em determinar a frequência natural, pela equação 3.7 , para diferentes valores de C, utilizando um circuito com oscilador de frequências.

$$f_o = \frac{1}{2\Pi\left[Ls(C+C_{ef})\right]^{1/2}} \quad \text{ou} \quad (C+C_{ef}) \alpha \frac{1}{f_o^2} \qquad \text{eq.(3.7)}$$

C_{ef} é determinada pelo traçado no gráfico de $1/f_o^2$ por C como mostrado na Fig. 3.9. Uma extrapolação deste gráfico no eixo das capacitâncias fornece C_{ef}. Os números mostrados na Fig. 3.9 foram tomados de medidas reais em muitos transformadores 13800/480V diferentes, que normalmente são usados em subestações industriais.

Os gráficos 3.10.a até 3.10.h foram obtidos do grupo de trabalho do IEEE de *TRANSIENT RECOVERY VOLTAGES*; estes gráficos fornecem valores da *CAPACITÂNCIA TOTAL PARA TERRA* do

mais elevado enrolamento de tensão na base por fase. *É sujerido que metade da capacitância do enrolamento de cada fase, como dado nos gráficos, seja considerada como acumulada em cada terminal do enrolamento.* Para um banco conectado em Y, *0,33 a 0,46* dos valores de capacitância tomados da figura apropriada é o valor efetivo componente para o enrolamento. Para um banco conectado em Δ, os valores de fase totais dos gráficos são usados, porque existem 2 enrolamentos, formando a capacitância terminal reunida. Em adição a capacitância do enrolamento, existe a capacitância da bucha a qual está conectada. Isto está incluido na figura 3.9 mas não consta dos gráficos 3.10.

A tabela III.2 fornece valores típicos de capacitância para buchas ao tempo. No caso de um banco de transformadores monofásicos conectados em Δ, a capacitância de 2 buchas deve ser adicionada.

Se o transformador está conectado em Δ, sua capacitância efetiva de enrolamento da figura 3.10 d (para 250 KV BIL e 15 MVA) deve ser 5000 (pF). A este valor pode-se adicionar 100 pF para a bucha (tabela III.2 tomando 69 KV)

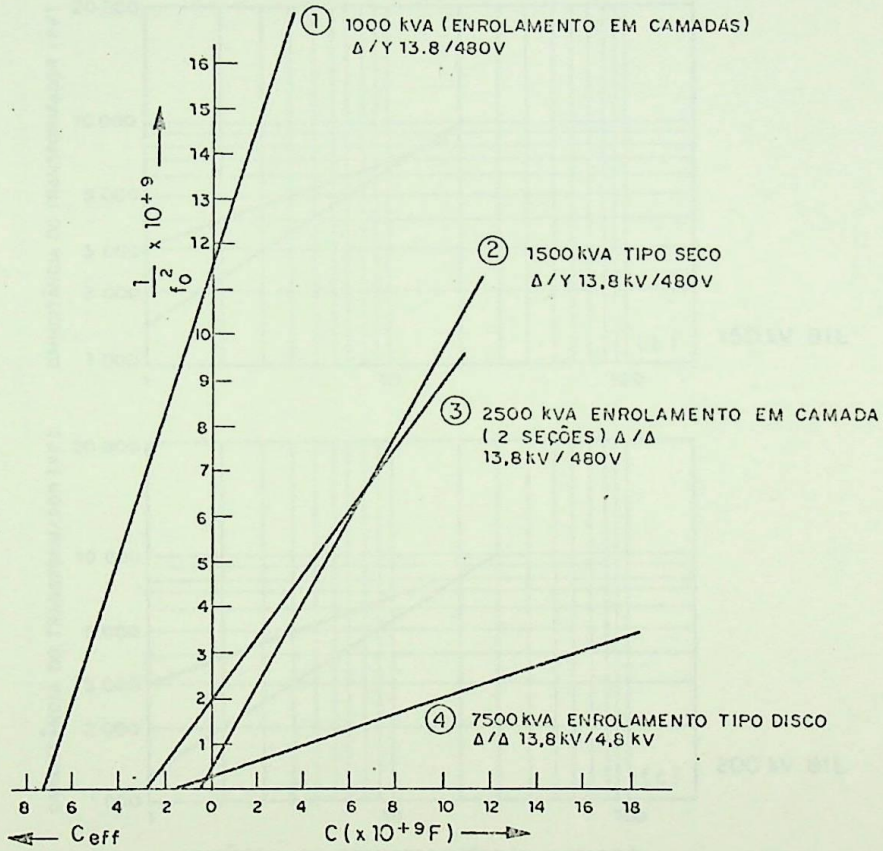


FIGURA 3.9 - Dados Auxiliares para se avaliar a Capacitância Efetiva de Transformadores da Classe de 15 KV.

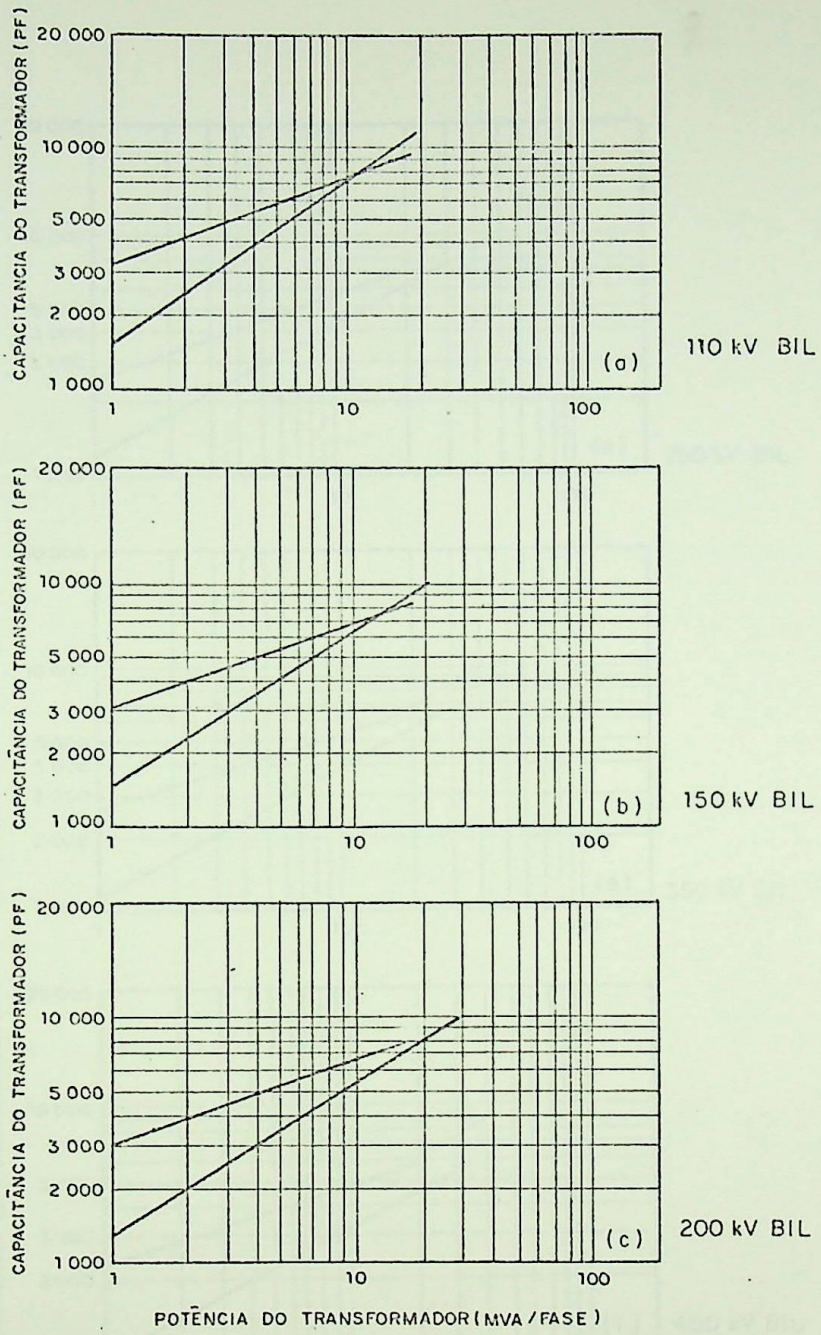


FIGURA 3.10 - Capacitância de Enrolamento para Terra de Transformadores Faixa de Valores para vários BIL do Enrolamento de Alta Tensão

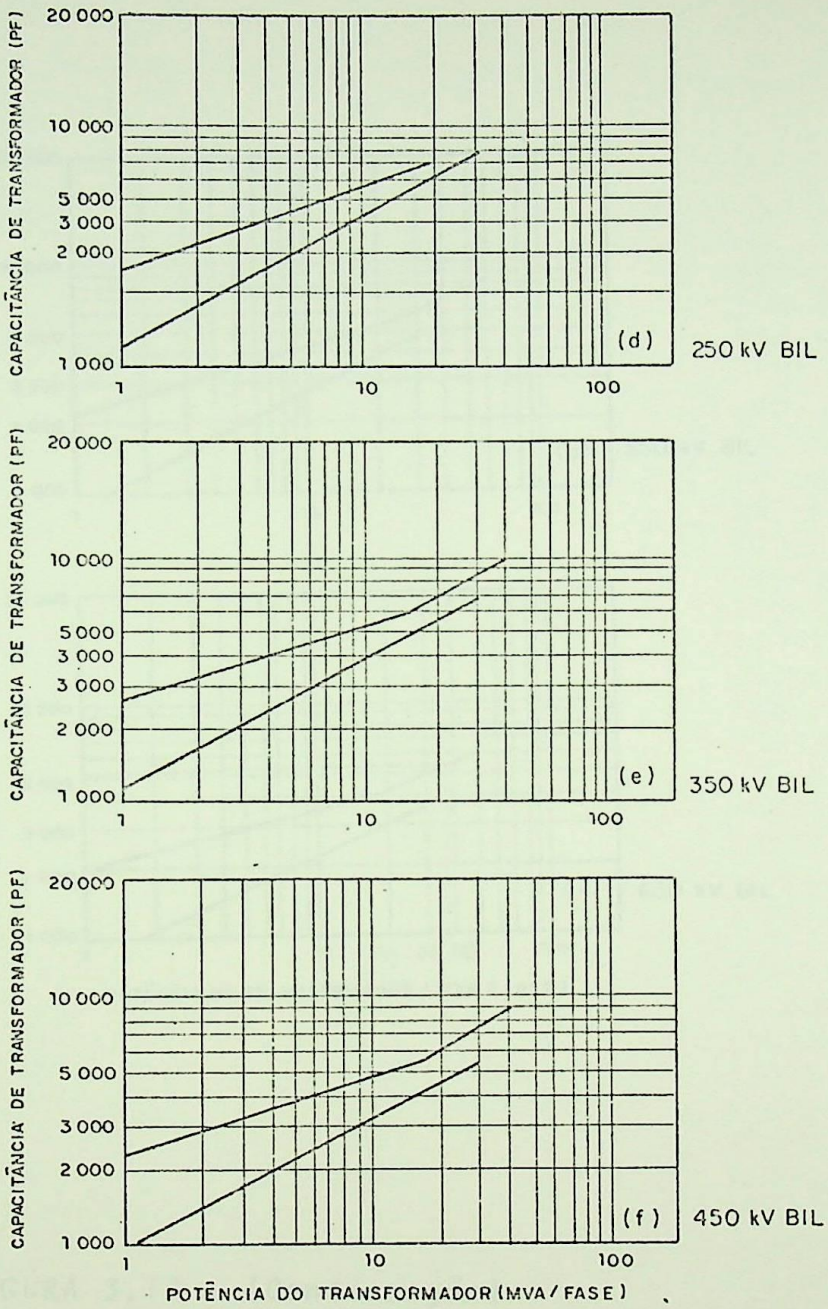


FIGURA 3.10 - (continuação)

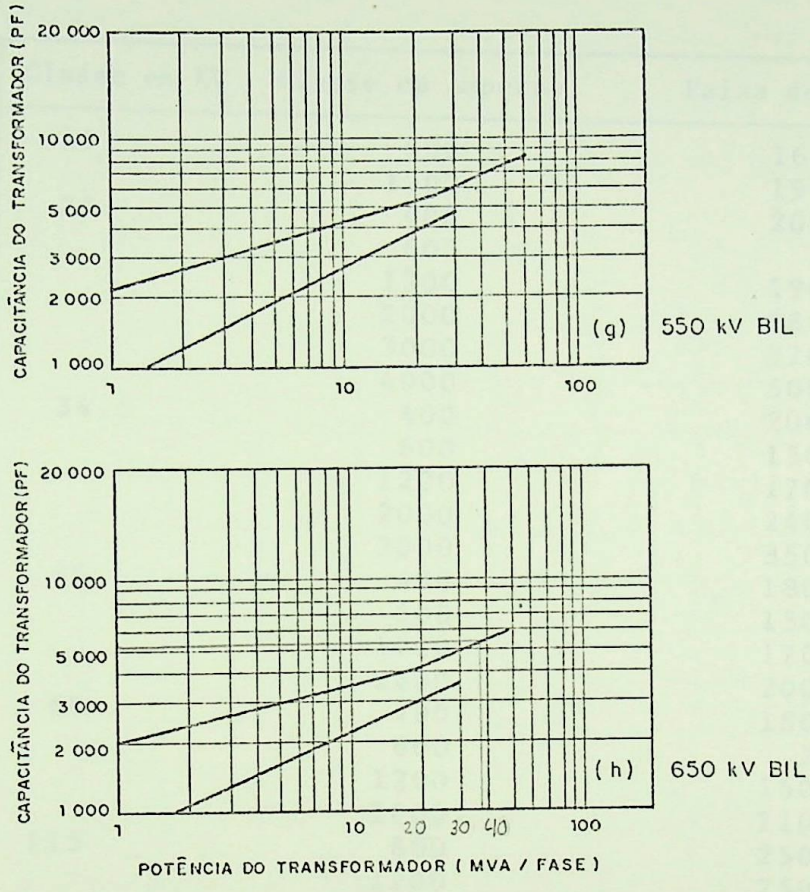


FIGURA 3.10 - (Continuação)

TABELA III.2

Capacitância para terra de buchas de Transformadores (Expostos ao Tempo)

Classe em KV	Classe em Amperes	Faixa de Capacitância |pF|
15	600	160-180
	1200	190-220
23	400	200-450
	600	280
	1200	190-450
	2000	280-650
	3000	370-360
	4000	500-620
34.5	400	200-390
	600	150-220
	1200	170-390
	2000	240-360
	3000	350-620
46	400	180-330
	600	150-280
	1200	170-330
	2000	200-330
69	400	180-270
	600	250
	1200	160-290
	2000	210-320
115	800	250-450
	1200	250-420
	1600	250-430
138	800	250-450
	1200	250-420
	1600	250-460
161	800	260-440
	1200	260-440
	1600	260-440
196	800	350-550
	1200	350-550
	1600	350-550
330	1600	530
345	800-2000	
	BIL:1050	550
	1175	500
	1300	450
500	800-2000	
	BIL:1425	500
	1550	500
	1675	520

RESISTÊNCIA DOS TRANSFORMADORES

A resistência do transformador, ou seja, quando se considera valores reais da resistência ohmica dos enrolamentos, obtem-se números muito baixos. Valores típicos estão na faixa de 0,2 a 1,5% e são apresentados na figura 3.11 adaptados da referência (1).

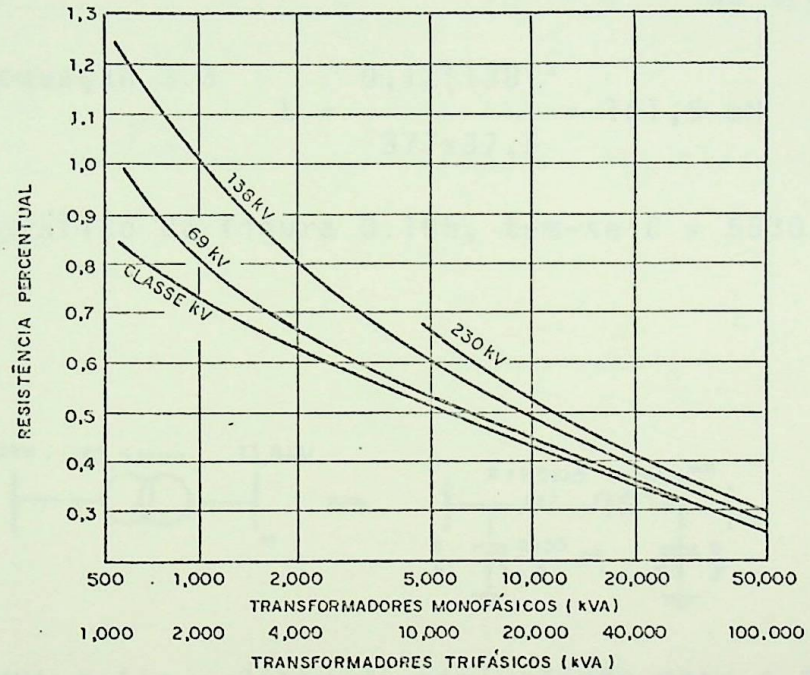


FIGURA 3.11 - Resistência percentual de transformadores com refrigeração própria, imersos em óleo

As perdas no ferro no núcleo do transformador podem tambem ser representadas como resistência e consideradas neste estudo.

De acordo com todas as considerações feitas até agora, pode-se facilmente determinar os parametros do circuito π da figura 3.8 que representa o transformador. Isto é feito no exemplo da página seguinte.

Conforme poder-se-á observar nos itens seguintes, o mesmo circuito π será adotado para os outros componentes de sistemas, desde que sejam observadas considerações e simplificações específicas de cada item deste capítulo.

Por exemplo para um transformador de 37,5 MVA, 138-13,8 KV, BIL AT = 650 KV, X% = 12%, da figura 3.11a, obtém-se:

Da figura 3.11, R = 0,4% ou R = 2,031Ω (valores na base do transformador)

Da equação 3.3 $$L = \frac{0,12(138)^2}{377 \times 37,5} = 161,6 \text{ mH}$$

Do gráfico da figura 3.10h, tem-se C = 5530 pF

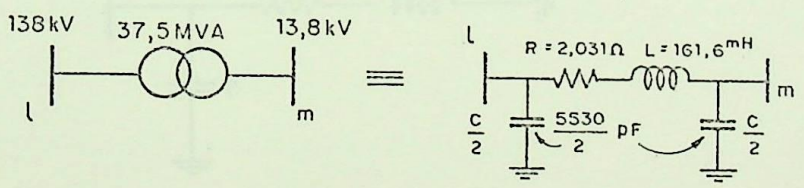


FIGURA 3.11a - Circuito equivalente para o transformador

III. 3 - REATORES LIMITADORES

Os reatores de potência são de 2 tipos : aqueles com *um Núcleo Magnético*, que são semelhantes a transformadores com circuitos abertos e podem ser tratados como tais e uma variedade do tipo *Núcleo de Ar*, os quais se assemelham mais como transformadores em curto-circuito exceto que estes tem consideravelmente menor capacitância.

Os tipos *"IRON-CLAD"* são usualmente ligados como um componente em paralelo, enquanto que os tipos *CAST-CONCRETE AIR CORED* são conectados série para limitação de corrente de falta.

A *indutância* do último tipo pode ser obtida de seus dados de placa conforme classe. A *capacitância* efetiva, como acima mencionado, é pequena, o que já se presumia com a remoção da superfície fechada aterrada que o núcleo representa.Se o *Reator é visto como um circuito* π, *75 a 150 pF* em cada terminal é um valor razoável para a capacitância.

O reator pode então ser representado por um ramo R-L ligando-se uma barra à terra, ou seja :

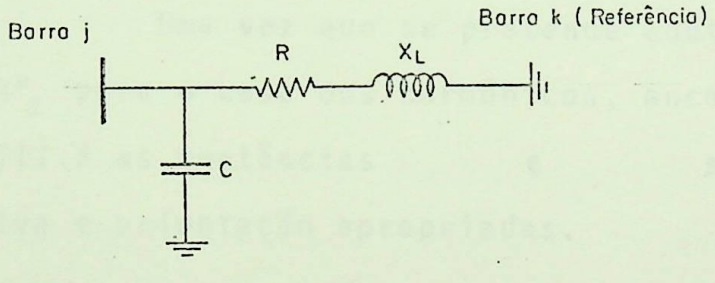


FIGURA 3.11.b- Circuito π *para um reator*

Caso seja representativo o valor da capacitância deste dispositivo limitador será suficiente apenas ligar um capacitor entre a barra j e a referência, conforme indicado no circuito da figura 3.11b

III . 4 - REPRESENTAÇÃO DOS GERADORES E MOTORES

O comportamento dos geradores para fenômenos envolvendo frequências médias é bastante complexo, devido ao modo que as linhas de fluxo magnético variam com o tempo.

Assim não se pode atribuir um valor qualquer para a indutância destas máquinas. Em resumo, pode-se dizer que a reatância efetiva de um gerador síncrono inicia-se em um valor relativamente baixo, assim chamada de reatância subtransitória , x''_d . Na ocorrência de uma falta este valor aumenta para a conhecida reatância transitória, x'_d ; e então, aumenta lentamente para o valor da reatância síncrona que normalmente leva muitos ciclos para se atingir.

Uma vez que se pretende adotar uma faixa de 0,8 a 0,9 x''_d para o caso dos harmônicos, encontram-se listados na tabela III.3 as reatâncias e subtransitórias para estimativa e orientação apropriadas.

	Reatância Subtransitória (pu)
Turbo-geradores de 2 polos	0,07 - 0,14
Turbo-geradores de 4 polos	0,12 - 0,17
GERADOR DE POLOS SALIENTES:	
Com amortecedores	0,13 - 0,32
Sem amortecedores	0,20 - 0,50
Compensadores Síncronos	0,19 - 0,30

TABELA III.3 - Valores de reatâncias 60 Hz para geradores síncronos.

De acordo com a faixa de valores acima citada, pode-se facilmente avaliar as indutâncias correspondentes pela equação 3.3.

A CAPACITÂNCIA DOS GERADORES é mais alta que aquela dos transformadores de classe comparável de KVA porque os enrolamentos do gerador são embutidos na carcaça de ferro do estator e portanto estão fisicamente muito próximos ao plano terra que o ferro representa. De um modo geral a *Capacitância dos Geradores* aumenta com o seu tamanho, mas poderá haver uma considerável expansão para uma dada classe, por causa do projeto. Isto é evidente na Figura 3.12 que mostra os valores para máquinas de 2 polos, 3600 rpm. *Esta capacitância é a capacitância total para terra do enrolamento trifásico no estator. Usando o modelo π para CADA FASE, cada um dos capacitores do modelo π seria 1/6 do valor na figura.*

As máquinas com refrigeração forçada tendem a ter uma capacitância um pouco menor pois os condutores podem ser um pouco menores; um gerador de 500MW pode ter apenas *0,5*μF de capacitância total. Os geradores de baixa rotação (rpm), em particular geradores de hidroelétricas, possuem capacitâncias mais elevadas.

VALORES DE CAPACITÂNCIA PARA OS MOTORES variam consideravelmente com o projeto. *Alguns valores típicos foram obtidos* da referência (1) e são relacionados na figura 3.13.

Uma vez determinados os parametros R,L e C pelas observações acima pode-se representar os geradores e motores por um ramo R-L, incluindo ou não o valor de C desde que seja

significativo este parâmetro. Isto é feito pelo circuito da figura 3.14, sendo a capacitância própria dos geradores (ou motores) para a ligação $Y_{\pm}$, representada por um capacitor entre a barra j e a referência.

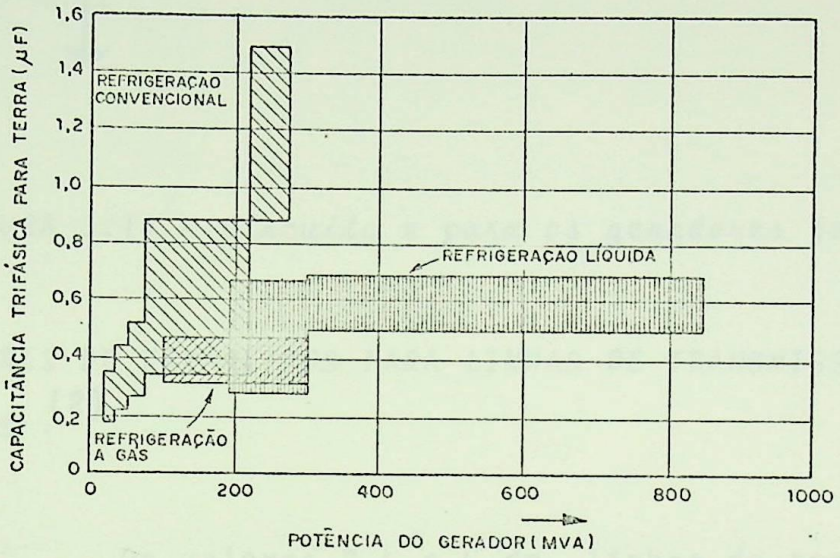


FIGURA 3.12 - Capacitância de geradores de 2 polos, 3600 rpm

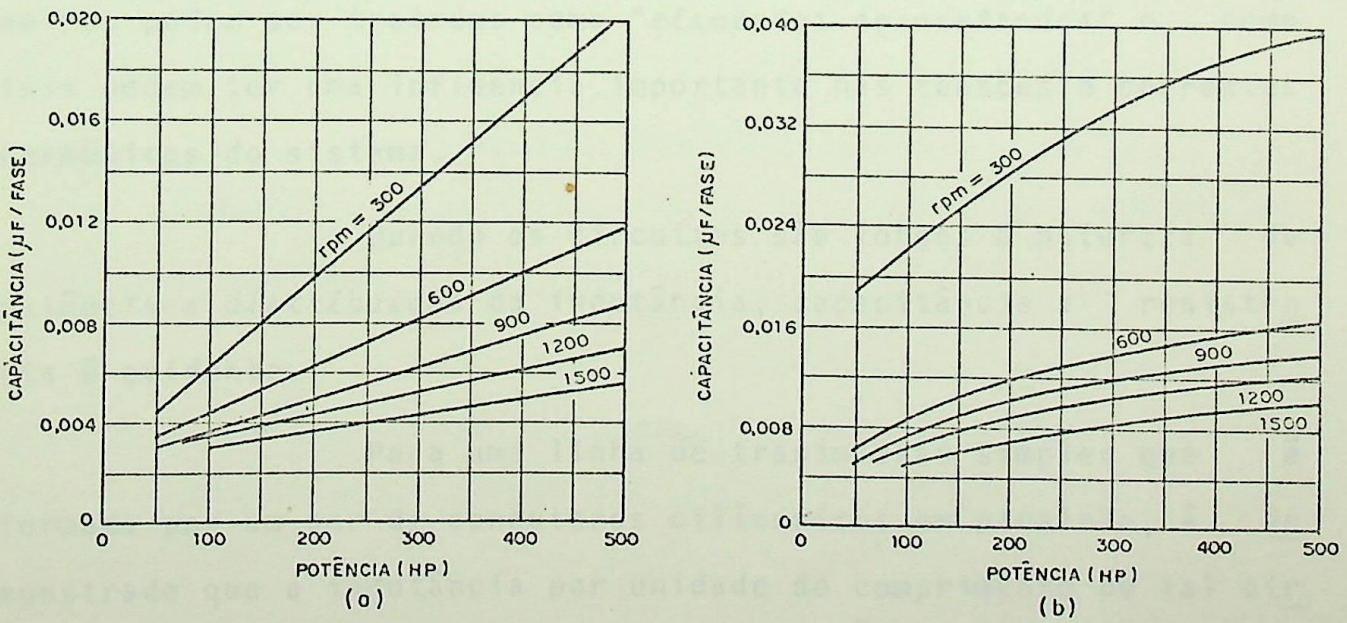
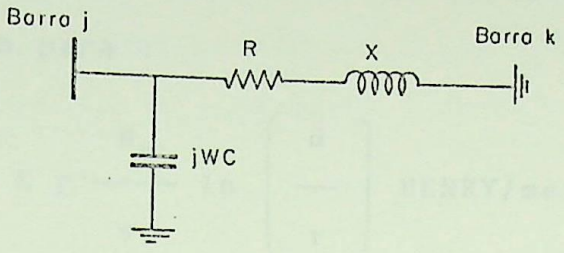


FIGURA 3.13 - Capacitância de motores 2300 V. Valores comparáveis para motores até 6600 V.

(a) Motores Síncronos (b) Motores de Indução



onde :

$X \cong 0{,}8$ a $0{,}9\ x''_d$

FIGURA 3.14 - Circuito π para os geradores (ou motores)

III.5 - VALORES DE PARÂMETROS PARA LINHAS DE TRANSMISSÃO E CABOS (2)

Os valores R,L e C de linhas de transmissão e cabos são de interesse em problemas de harmônicos por várias razões. Se as linhas ou cabos são relativamente *Curtos*, estes parâmetros podem ser tratados como "*elementos concentrados*" e como tais podem ter uma influência importante nas tensões e correntes harmônicas do sistema.

Quando os circuitos são longos a natureza de *parâmetros distribuidos* da indutância, capacitância e resistência é evidente.

Para uma linha de transmissão simples que é formada por um par de condutores cilíndricos em paralelo, é demonstrado que a indutância por unidade de comprimento de tal circuito é :

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left[\ln \frac{d-r}{r} + \frac{1}{4} \right] \quad \text{HENRY/metro} \qquad (3.8)$$

Quando o espaçamento dos condutores d é grande se comparado com o raio do condutor r, isto simplifica a equação acima para :

$$L \cong \frac{\mu_o}{\pi} \ln\left(\frac{d}{r}\right) \text{ HENRY/metro} \qquad (3.9)$$

Com aproximações semelhantes, a *capacitância entre os condutores* de tal linha é dada por:

$$C = \frac{\pi \varepsilon_o}{\ln(d/r)} \text{ FARAD/metro} \qquad (3.10)$$

As aproximações podem ser feitas no sentido de se desprezar o fluxo magnético dentro do condutor e ignorar r se comparado com d. Estes pontos são justificáveis neste tipo de cálculo, exceto onde os condutores da linha não são muito próximos; por exemplo os *cabos* podem ser considerados deste modo.

Aproximações nos cálculos para diferentes tipos de condutor, usando o conceito de *RAIO MÉDIO GEOMÉTRICO (RMG)* podem ser adotados.

Os valores de L e C são para o circuito e não para os condutores individualmente. A presença de outros condutores, principalmente a terra, irá modificar ligeiramente os valores.

Em alguns casos mais específicos, podem ser considerados arranjos mais complicados de condutores, tais como linhas trifásicas com ou sem fios terra e linhas a circuito du

plo.

Se os condutores de uma linha de transmissão são espaçados assimetricamente, a indutância e a capacitância das 3 fases são diferentes.

De acordo com considerações práticas, os valores *diferentes* de reatância indutiva e susceptância capacitiva causam uma indesejável assimetria na queda de tensão e correntes de carregamento dos 3 condutores da linha em condições normais . Por esta razão, os condutores das 3 fases são normalmente *transpostos*, em intervalos ao longo da linha, isto é, trocam de posição, de modo que na média, ocupam cada posição em um terço do comprimento da linha. Estes fatores devem ser levados em conta em alguns casos, para determinação mais precisa de L e C.

Do ponto de vista de condições normais de operação, a linha pode ser considerada como simétrica com condutores no vértice de um triangulo equilátero. O espaçamento equivalente é dado pela distância média geométrica (DMG) dos espaçamentos assimétricos. Se os espaçamentos dos condutores são a, b e c, logo :

$$DMG = \sqrt[3]{a.b.c} \qquad (3.11)$$

Isto simplifica o cálculo de L e C, pois é facilmente mostrado que a indutância e capacitância por condutor de tal linha são os mesmos valores que aqueles, por condutor, de uma linha monofásica com mesmo tamanho de condutor e espaçamento.

Seguindo as considerações acima descritas pode-se determinar os valores de L e C através da sequência de cál

culo exposta no exemplo abaixo .

O conceito da Distância Média Geométrica (DMG) deve então ser aplicado, dependendo obviamente do arranjo dos condutores da linha a ser estudada. Para isto considera-se a disposição dos condutores de uma linha de transmissão de 138KV a circuito duplo, cujo diagrama é aquele da figura 3.15.

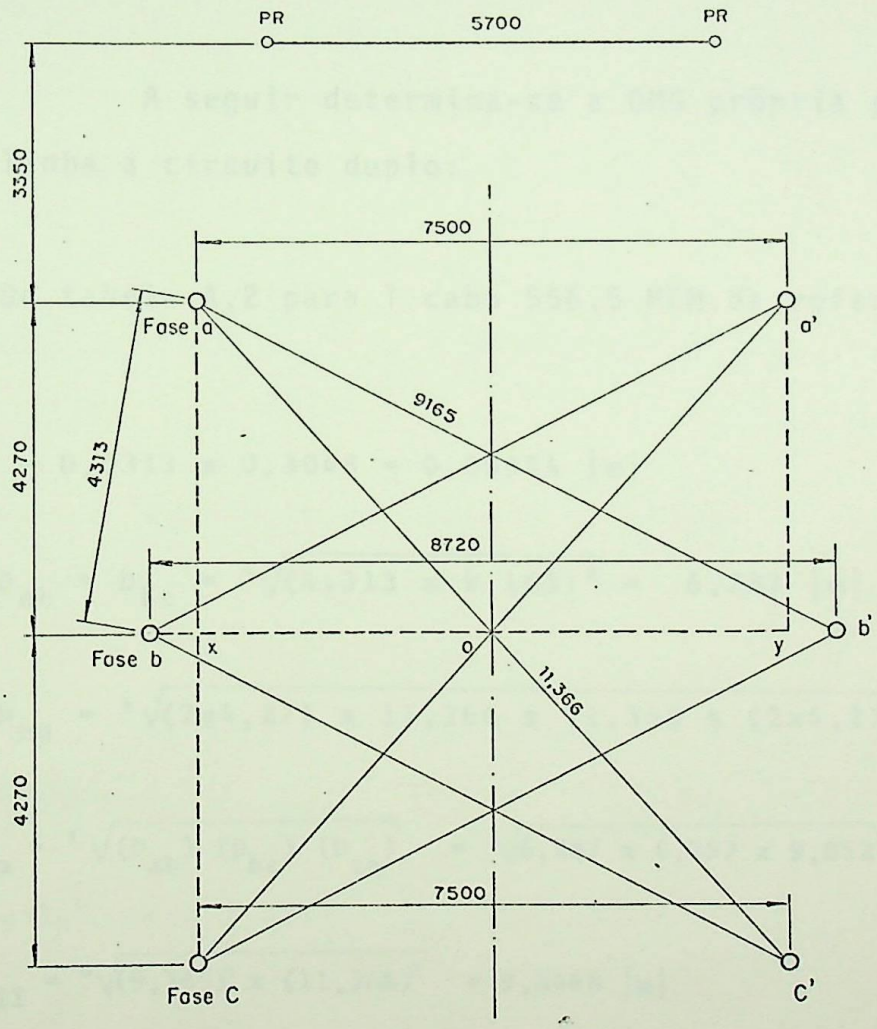


FIGURA 3.15 - Disposição dos condutores de uma linha de transmissão típica de 138KV que alimenta um sistema industrial

Primeiramente calcula-se as seguintes distâncias :

$$d_{ab} = \sqrt{(4,27)^2 + (0,61)^2} = 4,313 \ |m|$$

$$d_{ab'} = \sqrt{(4,27)^2 + (8,11)^2} = 9,165 \ |m|$$

$$d_{ac'} = \sqrt{(8,54)^2 + (7,5)^2} = 11,366 \ |m|$$

A seguir determina-se a DMG própria por fase devido ser a linha a circuito duplo:

- Da tabela A.2 para 1 cabo 556,5 MCM, da referência (7), obtém-se

$$D_s = 0,0313 \times 0,3048 = 0,00954 \ |m|$$

$$- D_{ab} = D_{bc} = \sqrt[4]{(4.313 \times 9,165)^2} = 6,287 \ |m|$$

$$D_{ca} = \sqrt[4]{(2x4,27) \times 11,366 \times 11,366 \times (2x4,27)} = 9,852 \ |m|$$

$$- D_m = \sqrt[3]{(D_{ab})\ (D_{bc})\ (D_{ca})} = \sqrt[3]{6,287 \times 6,287 \times 9,852} = 7,302 \ |m|$$

$$- D_{II} = \sqrt[6]{(9,165)^4 \times (11,366)^2} = 9,8468 \ |m|$$

$$- D_I = \sqrt[3]{(7,5)^2 \times 8,72} = 7,886 \ |m|$$

Finalmente a reatância indutiva será :

$$X_L = 28,9353 \times 10^{-4} \times 60 \times \log \left(\frac{D_m}{D_s} \times \frac{D_{II}}{D_I} \right)$$

onde a relação $\frac{D_{II}}{D_I}$ representa a indutância mútua devido aos 2 circuitos.

$$X_L = 28,9353 \times 10^{-4} \times 60 \times \log \left(\frac{7,302}{0,00954} \right) \times \left(\frac{9,8468}{7,886} \right) =$$

$$= 0,1736 \times 2,98033$$

$$X_L = 0,5174 \ |\Omega/km|$$

assim :

$$L = \frac{0,5174}{W} = \frac{0,5174}{377} = 1,3725 \times 10^{-3} \ |H| \text{ por unidade de comprimento}$$

Analogamente pode-se calcular a capacitância desta linha, utilizando-se o valor de $D_m = 7,302$ m determinado acima .

Da tabela A.2 da referencia (7) para um cabo 556,5 MCM obtem-se :

$$r = 0,0386 \times 0,3048 = 0,0118 \ |m|$$

então :

$$D_s = 0,0118 \times (11,366 \times 8,72 \times 11,366)^{1/6} = 0,3504 \ |m|$$

$$C = \frac{0,0388}{\log(D_m/D_s)} = \frac{0,0388}{\log(7,302/0,3504)} = 0,0294 \ \mu F/Km$$

No caso de linhas de transmissão em que os circuitos são mais simples os valores de L e C podem ser obtidos diretamente de tabelas com base na bitola dos cabos. Neste caso a referência (7) é a mais apropriada para obtenção destes parametros.

Em alguns casos a resistência da linha é importante e deve ser levada em conta. Valores aproximados para resistência C.A. de condutores de cobre podem ser obtidos da figura 3.15a. Estes valores variam um pouco com o tipo do condutor, número de fios etc, mas estas variações não são suficientes para afetar substancialmente as considerações vistas.

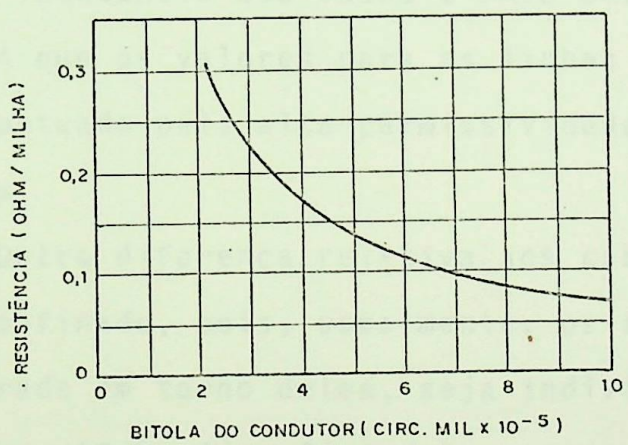


FIGURA 3.15a- Resistência C.A (60Hz) de condutores de cobre considerando torsões e encordoamento.

De modo análogo ao circuito da figura 3.8 para os transformadores, as linhas de transmissão A.T. e os cabos são representados pelo circuito π da figura 3.15b.

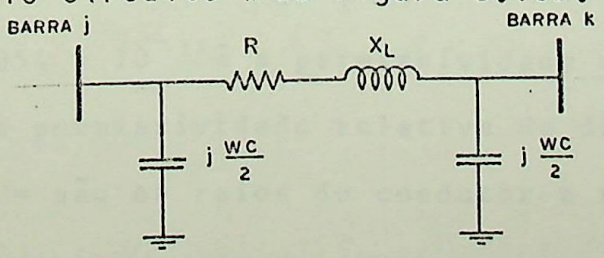


FIGURA 3.15b - Circuito π para linhas de transmissão (ou cabos)

As capacitâncias de fuga para terra ($jB = jW\frac{C}{2}$) podem ser desprezadas ou não, dependendo das considerações apontadas neste item(III.5) que variam de acordo com as características e da própria configuração de cada sistema a ser estudado. Este ponto será analisado no Cap.V, quando estas alternativas são mostradas através das simulações em dois sistemas reais.

III.5.1 - Cabos de Força

Considerando que os condutores de um cabo são normalmente muito próximos um dos outros em relação aqueles de uma linha aérea, a indutância dos cabos é *MAIS BAIXA* e a *CAPACITÂNCIA MAIS ELEVADA* que os valores para as linhas de A.T. O efeito capacitivo é acentuado pela alta permissividade dos materiais isolantes dos cabos.

Outra diferença relativa aos cabos é que o campo elétrico está confinado, pois, usualmente, os condutores tem uma blindagem aterrada em torno deles, seja individualmente, ou em volta das 3 fases, (*Cabo tipo Cintado*).

Para um cabo concêntrico de 1 só condutor, é facilmente demonstrado que a *CAPACITÂNCIA* é dada por :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_o K}{\ln(r_2/r_1)} \qquad (3.12)$$

onde :

ε_o = 8,854 x 10^{-12} é a permissividade do ar,

K = é a permissividade relativa do dielétrico do cabo,

r_1 e r_2 = são os raios do condutor e raio interno do re

Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Biblioteca MAUÁ

vestimento, respectivamente.

Esta é a *CAPACITÂNCIA PARA TERRA*. Um par dess ses cabos formando um circuito monofásico teria metade desta capacitância pois seriam 2 capacitores virtualmente em série. Alguns valores típicos de capacitância de cabo estão relacionados na Tabela III.4; estes valores são para cabos de 3 condutores com os condutores individualmente blindados.

BITOLA DO CONDUTOR	CAPACITÂNCIA PARA TERRA(μF/km)					
	BLINDADO, PAPEL IMPREGNADO			CABO A OLEO, PAPEL IMPREGNADO		
	15KV	23KV	35KV	35KV	46KV	69KV
4	0,33	-	-	-	-	-
2	0,40	0,32	-	-	-	-
1	0,44	0,35	-	-	-	-
0	0,49	0,39	0,27	-	-	-
00	0,51	0,40	0,29	0,44	0,40	0,32
000	0,55	0,44	0,31	0,48	0,435	0,35
0000	0,60	0,47	0,37	0,55	0,48	0,39
250.000	0,66	0,51	0,39	0,58	0,51	0,41
300.000	0,68	0,54	0,41	0,63	0,55	0,44
350.000	0,74	0,58	0,44	0,68	0,59	0,465
400.000	0,78	0,60	0,465	0,72	0,63	0,49
500.000	0,86	0,68	0,51	0,78	0,685	0,525
600.000	0,92	0,72	0,54	0,83	0,73	0,56
750.000	1.02	0,78	0,59	0,86	0,79	0,61

TABELA III.4 - Valores típicos de capacitância para cabos de força

Se comparados com as linhas A.T., os cabos de força são relativamente curtos, *mas em alguns casos podem existir vários cabos paralelos conectados a um barramento.*

Os cabos se comportam mais como uma CAPACITÂNCIA CONCENTRADA que pode ser calculada dos dados da Tabela III.4 se o comprimento total do cabo é conhecido.

O campo magnético é também confinado se as correntes circulam no centro do condutor e retornam através da blindagem concêntrica. Este não é o caso normal de emprego de cabo ; em circuitos trifásicos a via de retorno será através de outros condutores de fase. Entretanto, muitos defeitos em cabos são simples faltas *FASE-TERRA*, e nestes casos o revestimento (e blindagem) estão envolvidos. Desprezando o fluxo nos próprios condutores, a indutância de um cabo concêntrico é então:

$$L = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad |H/m| \qquad (3.13)$$

Se se deseja incluir a contribuição do condutor do centro do cabo e blindagem, o condutor do centro adiciona $\mu_o/4\pi$ conforme a equação :

$$L = \frac{\mu_o}{\pi} \ln \left(\frac{d-r}{r} \right) + \frac{\mu_o}{4\pi}$$

e a blindagem contribue aproximadamente com a mesma quantia.

No caso de cabos trifásicos, as blindagens interceptam o fluxo pulsante e são induzidas correntes nos revestimentos. porem estes fatores são insuficientes para afetar radical

mente os valores de indutância; os mesmos procedimentos esboçados acima para linhas aéreas são suficientes para cálculo da indutância por fase.

Quando a blindagem está envolvida como uma via de corrente, a diferença é mais pronunciada devido a relativamente pequena condutividade dos revestimentos terminais. As resistências do revestimento se mantem na faixa entre 0,25 e 0,62 |Ω/Km| , tendendo a valores menores para os cabos de A.T. pois tem diâmetros de blindagem maiores.

III. 6 - CARACTERÍSTICAS DOS BARRAMENTOS

Existem alguns casos onde os condutores não podem ser descritos como linhas, e onde estes não, certamente, cabos, mas ainda, onde sua impedância representa um fator considerável no cálculo de uma tensão ou corrente. Alguns exemplos, neste caso, são os condutores que conectam equipamentos - transformadores, reatores, painéis de distribuição e banco de capacitores, geralmente nas subestações.

Os condutores de fase e o retorno por terra são importantes. Barramentos do mesmo tipo podem ser encontrados em subestações industriais, ou mesmo ao logo destas e entre partes dos equipamentos.

Para se fixar a indutância dos percursos dos condutores, costuma-se estimar o comprimento do percurso do circuito e calcular a indutância na base de 1,31 μH/m. Isto corresponde aproximadamente a indutância de cada condutor de uma linha de transmissão formada por condutores de 5 cm de diâmetro e espaçador 7,62 m. Em geral, a capacitância destes condutores é des

prezível se comparada com a capacitância do equipamento que estes une.

Trechos de barras compreendendo barras paralelas, usualmente de seção transversal retangular, são muito comuns em circuitos de A.T. industriais (por exemplo,painéis de distribuição em 13.8 KV). O espaçamento é normalmente de 5 a 30,5 cm. Tais barras condutoras se mantem na faixa de 0,33 a 0,66μH/m. A capacitância destas barras está tipicamente na faixa de 3,3 a 9,8 pF/m, dependendo do espaçamento.

Estruturas de barras concêntricas ou "Bus ducts" usadas ao longo das subestações constituem uma parcela significante para a capacitância total da subestação . Os valores típicos podem ser encontrados na Tabela III.5

TABELA III.5

CAPACITÂNCIAS DE BARRAMENTO

Capacitância de Dutos Blindados com Fase Isolada			Capacitância de Dutos Blindados com Fase Segregada.
Classe em Amperes	Classe de 15KV BIL de 110 KV pF/m	Classe de 23KV BIL de 150 KV pF/m	Classe de 15KV BIL de 110 KV pF/m
1200	29,20 - 46,92	26,25 - 40,68	32,80
2000	33,47 - 46,92	29,53 - 40,68	32,80 - 33,46
2500	33,47 - 46,92	29,53 - 40,68	
3000	33,47 - 46,92	29,53 - 40,68	32,80 - 33,46
3500	33,47 - 46,92	29,53 - 40,68	
4000	45,93 - 46,92	40,68 - 44,29	32,80 - 41,34
4500	45,93 - 46,92	41,67 - 44,29	
5000	45,93 - 62,34	41,67 - 51,84	41,00 - 48,88
5500	45,93 - 62,34	41,67 - 51,84	
6000	45,93 - 62,34	44,29 - 51,84	49,21 - 56,10
6500	45,93 - 62,34	44,29 - 51,84	
7000	56,76 - 74,15	47,24 - 57,74	56,10
7500	56,76 - 74,15	47,24 - 57,74	
8000	71,20	57,74	-
9000	71,20	59,38	
10000	71,20	59,38	-
11000	77,76	67,26	
12000	77,76	67,26	-

III.7 - CONSIDERAÇÕES SOBRE TRANSFORMADORES PARA INSTRUMENTOS

Os transformadores de corrente e de potencial normalmente usados para proteção e medição introduzem um certo valor de capacitância no barramento de M.T., Estes transformadores se considerados individualmente não incluem valores significativos, mas se existe um número considerável de tais transformadores e estão situados relativamente próximos uns dos outros o efeito acumulado pode ser expressivo.

Os valores de capacitância estão relacionados nas Tabelas abaixo III.6, III.7 :

TABELA III.6

Capacitância de Transformadores de Potencial , do Enrolamento Primário para terra. e para o Secundário, este de terminais curtos e aterrados

Classe de Isolação em KV	Capacitância em |pF| Tipo Fase-Fase	Tipo Fase - Neutro
15.	260	
25	250-440	270-800
34.5	310-440	270-900
46	350-430	300-970
69	360-440	340-1300
115	470-520	480-610
138	490-550	530-660
161	510-580	510-700
196	-	580-820
230	600-680	600-810
345	-	920

TABELA III.7

Capacitância de Transformadores de Corrente do Enrolamento Primário para terra e Secundário com Terminais Curtos e Aterrados

Classe de Isolação - KV	Capacitância em pF
25	180-260
34.5	160-250
46	170-220
69	170-260
115	210-320
161	310-380
196	330-390
230	350-420

III.8 - IMPEDÂNCIA DO FILTRO DE HARMÔNICOS

Uma das soluções para se reduzir o nível das distorções harmônicas nas barras de um sistema elétrico é a instalação de filtros sintonizados para os harmônicos cujas frequências originaram as citadas distorções.

Em geral para barramentos de média tensão com potência menor que 30 MW de conversores, recomenda-se um arranjo com filtros de 5º e 7º harmônicos, incluindo um ramo passa-alto. Para potências de conversores maiores que 30MW, alem destes pode-se acrescentar os filtros de 11º e 13º harmônicos.

Uma análise do sistema com os filtros para cer

tificar sua eficiência na absorção dos harmônicos deve ser efetuada, considerando-se ainda que estes devem suprir alguma potência reativa ao sistema.

Tendo em vista estas alternativas pretende-se apresentar neste item um dos arranjos típicos de filtro, sendo que o desenvolvimento mais detalhado das equações encontra-se no Apêndice I.

Assim sendo, apresenta-se abaixo uma formulação para o caso de um filtro de harmônicos composto de 3 ramos "RCL" em paralelo e um ramo "passa-alto". Seja a figura 3.16 abaixo :

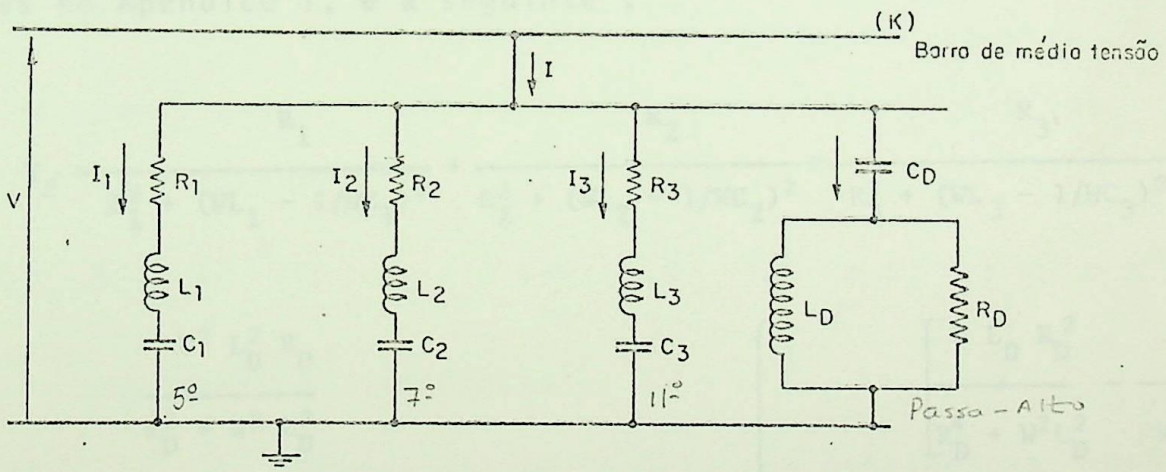


FIGURA 3.16 - Arranjo típico com 4 filtros "shunt"

De acordo com o circuito proposto para o filtro, pode-se escrever pela Lei de Kirchoff que :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = V\left\{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}\right\}$$

$$I = V(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) = V \times Yf$$

onde ;

Y_1 = Admitância do 1º ramo RLC

Y_2 = Admitância do 2º ramo RLC

Y_3 = Admitância do 3º ramo RLC

Y_4 = Admitância do ramo passa-alto

$$Y_f = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \quad \therefore$$

$$Z_f = \frac{1}{Y_f}$$

A expressão final, após simplificações apresentadas no Apêndice I, é a seguinte :

$$Y_f = \frac{R_1}{R_1^2 + (WL_1 - 1/WC_1)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + (WL_2 - 1/WC_2)^2} + \frac{R_3}{R_3^2 + (WL_3 - 1/WC_3)^2} +$$

$$+ \frac{\dfrac{W^2 L_D^2 R_D}{R_D^2 + W^2 L_D^2}}{\left[\dfrac{W^2 L_D^2 R_D}{R_D^2 + W^2 L_D^2}\right]^2 + \left[\dfrac{WL_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - \dfrac{1}{WC_D}\right]^2} - j\left\{\frac{\left[\dfrac{W L_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - \dfrac{1}{WC_D}\right]}{\left[\dfrac{W^2 L_D^2 R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2}\right]^2 + \left[\dfrac{W L_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - \dfrac{1}{WC_D}\right]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(WL_1 - 1/WC_1)}{R_1^2 + (WL_1 - 1/WC_1)^2} + \frac{(WL_2 - 1/WC_2)}{R_2^2 + (WL_2 - 1/WC_2)^2} + \frac{(WL_3 - 1/WC_3)}{R_3^2 + (WL_3 - 1/WC_3)^2} \right\}$$

Valores típicos[13] para os parâmetros R,L e C do arranjo de filtros da figura 3.16 são os seguintes :

$R_1 = 0,25 \times 10^{-2} |\Omega|$, $L_1 = 0,25 \times 10^{-3} |H|$ e $C_1 = 1,616 \times 10^{-3} |F| \rightarrow$ Filtro de 5º Harmônico

$R_2 = 0,1625 \times 10^{-2} |\Omega|$, $L_2 = 0,1625 \times 10^{-3} |H|$ e $C_2 = 1,256 \times 10^{-3} |F| \rightarrow$ Filtro de 7º Harmônico

$R_3 = 0,649 \times 10^{-3} |\Omega|$, $L_3 = 0,649 \times 10^{-4} |H|$ e $C_3 = 1,288 \times 10^{-3} |F| \rightarrow$ Filtro de 11º Harmônico

$R_D = 1,75 |\Omega|$, $L_D = 0,65 \times 10^{-3} |H|$ e $C_D = 0,317 \times 10^{-3} |F| \rightarrow$ Filtro Passo-Alto

Em alguns casos pode-se acrescentar um ramo RCL em paralelo para o 13º Harmônico cujos valores típicos são os abaixos indicados:

$R_4 = 0,463 \times 10^{-3} |\Omega|$, $L_4 = 0,463 \times 10^{-4} |H|$ e $C_4 = 1,296 \times 10^{-3} |F|$

III.9 - REPRESENTAÇÃO DAS CARGAS

Quando não se conhece com detalhes as características das cargas, recomenda-se uma representação Shunt conforme a referência |22|, sendo os parâmetros calculados pelas expressões abaixo :

$$R_L = \frac{V_{LL}^2}{SL(FP)} \qquad (3.14)$$

$$L_L = \frac{V_{LL}^2}{\omega_0 \, S_L \, |1-(FP)^2|} \qquad (3.15)$$

onde ;

ω_0 = $2\pi f_0$ (f_0 = frequência fundamental, em Hz)

V_{LL} = tensão fase-fase do barramento, em KV

R_L = resistência da carga, em ohms

L_L = indutância da carga, em henries

S_L = potência da carga, em MVA

FP = fator de potência da carga

* O circuito equivalente para as cargas é aquele mostrado na figura 3.16a.

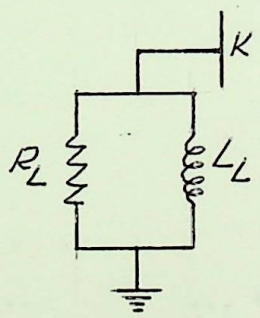


FIGURA 3.16a - Circuito equivalente para as cargas

III.10 FORMULAÇÃO GERAL

Do sistema industrial típico esboçado genericamente na Figura 3.17pode-se escrever, de acordo com a lei das correntes de Kirchhoff , as seguintes equações :

Para a barra 1 :

$$\frac{V_1}{Z_{F1}} + \frac{V_1}{Z_{R1}} + \frac{V_1}{Z_S} + \frac{V_1 - V_2}{Z_{12}} + \frac{V_1 - V_3}{Z_{13}} + \ldots \quad \ldots + \frac{V_1 - V_{n-1}}{Z_{1(n-1)}} + \frac{V_1 - V_n}{Z_{1n}} = I_1$$

barra 2 :

$$\frac{V_2}{Z_{F2}} + \frac{V_2}{Z_{R2}} + \frac{V_2 - V_1}{Z_{21}} + \frac{V_2 - V_3}{Z_{23}} + \ldots \quad \ldots + \frac{V_2 - V_{n-1}}{Z_{2(n-1)}} + \frac{V_2 - V_n}{Z_{2n}} = I_2$$

idem 3 :

$$\frac{V_3}{Z_{F3}} + \frac{V_3}{Z_{R3}} + \frac{V_3 - V_1}{Z_{31}} + \frac{V_3 - V_2}{Z_{32}} + \ldots \quad \ldots + \frac{V_3 - V_{n-1}}{Z_{3(n-1)}} + \frac{V_3 - V_n}{Z_{3n}} = I_3$$

etc...

$$\frac{V_n}{Z_{Fn}} + \frac{V_n}{Z_{Rn}} + \frac{V_n - V_1}{Z_{n1}} + \frac{V_n - V_2}{V_{n2}} + \ldots \quad \ldots + \frac{V_n - V_{n-2}}{Z_{n(n-2)}} + \frac{V_n - V_{n-2}}{Z_{n(n-1)}} = I_n$$

Agrupando os termos de V_1, V_2, ... V_n obtem-se:

$$V_1\left(\frac{1}{Z_{F1}}+\frac{1}{Z_{R1}}+\frac{1}{Z_S}+\frac{1}{Z_{12}}+\frac{1}{Z_{13}}+\ldots+\frac{1}{Z_{1n-1}}+\frac{1}{Z_{1n}}\right)+V_2\left(\frac{-1}{Z_{12}}\right)+V_3\left(\frac{-1}{Z_{13}}\right)+\ldots+$$

$$V_{n-1}\left(\frac{-1}{Z_{1(n-1)}}\right)+V_n\left(\frac{-1}{Z_{1n}}\right)=I_1$$

$$V_2\left(\frac{1}{Z_{F2}}+\frac{1}{Z_{R2}}+\frac{1}{Z_{21}}+\frac{1}{Z_{23}}+\ldots+\frac{1}{Z_{2n-1}}+\frac{1}{Z_{2n}}\right)+V_1\left(\frac{-1}{Z_{21}}\right)+V_3\left(\frac{-1}{Z_{23}}\right)+\ldots+$$

$$V_{n-1}\left(\frac{-1}{Z_{2(n-1)}}\right)+V_n\left(\frac{-1}{Z_{2n}}\right)=I_2$$

$$V_3\left(\frac{1}{Z_{F3}}+\frac{1}{Z_{R3}}+\frac{1}{Z_{31}}+\frac{1}{Z_{32}}+\ldots+\frac{1}{Z_{3n-1}}+\frac{1}{Z_{3n}}\right)+V_1\left(\frac{-1}{Z_{31}}\right)+V_2\left(\frac{-1}{Z_{32}}\right)+\ldots+$$

$$+V_{n-1}\left(\frac{-1}{Z_{3(n-1)}}\right)+V_n\left(\frac{-1}{Z_{3n}}\right)=I_3$$

$$\vdots$$

$$V_n\left(\frac{1}{Z_{Fn}}+\frac{1}{Z_{Rn}}+\frac{1}{Z_{n1}}+\frac{1}{Z_{n2}}+\ldots+\frac{1}{Z_{n(n-1)}}\right)+V_1\left(\frac{-1}{Z_{n1}}\right)+\left(\frac{-}{Z_{n2}}\right)V_2+\ldots\ \ldots+V_{n-2}\left(\frac{1}{Z_{n(n-2)}}\right)+$$

$$+V_{n-1}\left(\frac{1}{Z_{n(n-1)}}\right)=I_n$$

$$V_1\left(\frac{1}{Z_{F1}}+\frac{1}{Z_{R1}}+\frac{1}{Z_S}+\frac{1}{Z_{12}}+\frac{1}{Z_{13}}+\ldots+\frac{1}{Z_{1(n-1)}}+\frac{1}{Z_{1n}}\right)+V_2\left(\frac{-1}{Z_{12}}\right)+V_3\left(\frac{-1}{Z_{13}}\right)+\ldots+$$

$$\ldots + V_{n-1}\left[\frac{-1}{Z_{1(n-1)}}\right] + V_n\left[\frac{-1}{Z_{1n}}\right] = I_1$$

$$V_1\left[\frac{-1}{Z_{21}}\right] + V_2\left[\frac{1}{Z_{F2}} + \frac{1}{Z_{R2}} + \frac{1}{Z_{21}} + \frac{1}{Z_{23}} + \ldots + \frac{1}{Z_{2(n-1)}} + \frac{1}{Z_{2n}}\right] + V_3\left[\frac{-1}{Z_{23}}\right] + \ldots$$

$$\ldots + V_{n-1}\left[\frac{-1}{Z_{2(n-1)}}\right] + V_n\left[\frac{-1}{Z_{2n}}\right] = I_2$$

$$V_1\left[\frac{-1}{Z_{31}}\right] + V_2\left[\frac{-1}{Z_{32}}\right] + V_3\left[\frac{1}{Z_{F3}} + \frac{1}{Z_{R3}} + \frac{1}{Z_{31}} + \frac{1}{Z_{32}} + \ldots + \frac{1}{Z_{3(n-1)}} + \frac{1}{Z_{3n}}\right] + \ldots$$

$$\ldots + V_{n-1}\left[\frac{-1}{Z_{3(n-1)}}\right] + V_n\left[\frac{-1}{Z_{3n}}\right] = I_3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$V_1\left[\frac{-1}{Z_{n1}}\right] + V_2\left[\frac{-1}{Z_{n2}}\right] + V_3\left[\frac{-1}{Z_{n3}}\right] + \ldots + V_n\left[\frac{1}{Z_{Fn}} + \frac{1}{Z_{Rn}} + \frac{1}{Z_{n1}} + \frac{1}{Z_{n2}} + \ldots + \frac{1}{Z_{n(n-2)}} + \frac{1}{Z_{n(n-1)}}\right] = I$$

As equações de I_1, I_2,..., I_n acima são chamadas de Conjunto 1.

A forma normalizada para as equações nodais é a que se segue :

$$Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 + Y_{13} V_3 + \ldots \qquad \ldots + Y_{1n} V_n = I_1$$

$$Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 + Y_{23} V_3 + \ldots \qquad \ldots + Y_{2n} V_n = I_2$$

$$Y_{31}\,V_1 + Y_{32}\,V_2 + Y_{33}\,V_3 + \ldots \quad \ldots + Y_{3n}\,V_n = I_3$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$Y_{n1}\,V_1 + Y_{n2}\,V_2 + Y_{n3}\,V_3 + \ldots \quad \ldots + Y_{nn}\,V_n = I_n$$

(conjunto de equações 2)

Por comparação dos conjuntos 1 e 2 de equações nodais conclui-se :

$$Z_{11} = \left(\frac{1}{Z_{F1}} + \frac{1}{Z_{R1}} + \frac{1}{Z_S} + \frac{1}{Z_{12}} + \frac{1}{Z_{13}} + \ldots + \frac{1}{Z_{1n}} \right) = \Sigma \text{ do inverso de todas as impedâncias conectadas a BARRA 1}$$

$$Y_{22} = \left(\frac{1}{Z_{F2}} + \frac{1}{Z_{R2}} + \frac{1}{Z_{21}} + \frac{1}{Z_{23}} + \ldots + \frac{1}{Z_{2n}} \right) = \Sigma \text{ do inverso de todas as impedâncias conectadas a BARRA 2}$$

$$Y_{33} = \left(\frac{1}{Z_{F3}} + \frac{1}{Z_{R3}} + \frac{1}{Z_{31}} + \frac{1}{Z_{32}} + \ldots + \frac{1}{Z_{3n}} \right) = \Sigma \text{ do inverso de todas as impedâncias conectadas a BARRA 3}$$

$$\vdots$$

$$Y_{nn} = \left(\frac{1}{Z_{Fn}} + \frac{1}{Z_{Rn}} + \frac{1}{Z_{n1}} + \frac{1}{Z_{n2}} + \ldots + \frac{1}{Z_{n(n-1)}} \right) = \Sigma \text{ do inverso de todas as impedâncias conectadas a BARRA n}$$

Estes valores de Y_{11}, Y_{22}, ..., Y_{nn} são chamados de auto-admitância dos nós(barras) e cada uma delas é igual à soma de todas as admitâncias que terminam na barra identificada pelos índices repetidos.

Análogamente obtem-se:

$$Y_{12} = \left(\frac{-1}{Z_{12}}\right) = Y_{21}$$ Σ do inverso de todas as impedâncias conectadas entre as outras BARRAS e a BARRA 2, com sinal menos.

$$Y_{13} = \left(\frac{-1}{Z_{31}}\right) = Y_{31}$$ Σ do inverso de todas as impedâncias conectadas entre as outras BARRAS e a BARRA 3, com sinal menos.

$$Y_{1n} = \left(\frac{-1}{Z_{n1}}\right) = Y_{n1}$$ Σ do inverso de todas as impedâncias conectadas entre as outras BARRAS e a BARRA n, com sinal menos.

Estas são as chamadas admitâncias mútuas dos nós (barras) sendo cada uma igual à soma, com sinal negativo, de todas as admitâncias ligadas diretamente entre as barras identificadas pelos dois indices.

A colocação de capacitores entre as barras de AT e o neutro do circuito em estudo afeta os valores das admitâncias próprias (Y_{11}, Y_{22}, ... Y_{nn}).

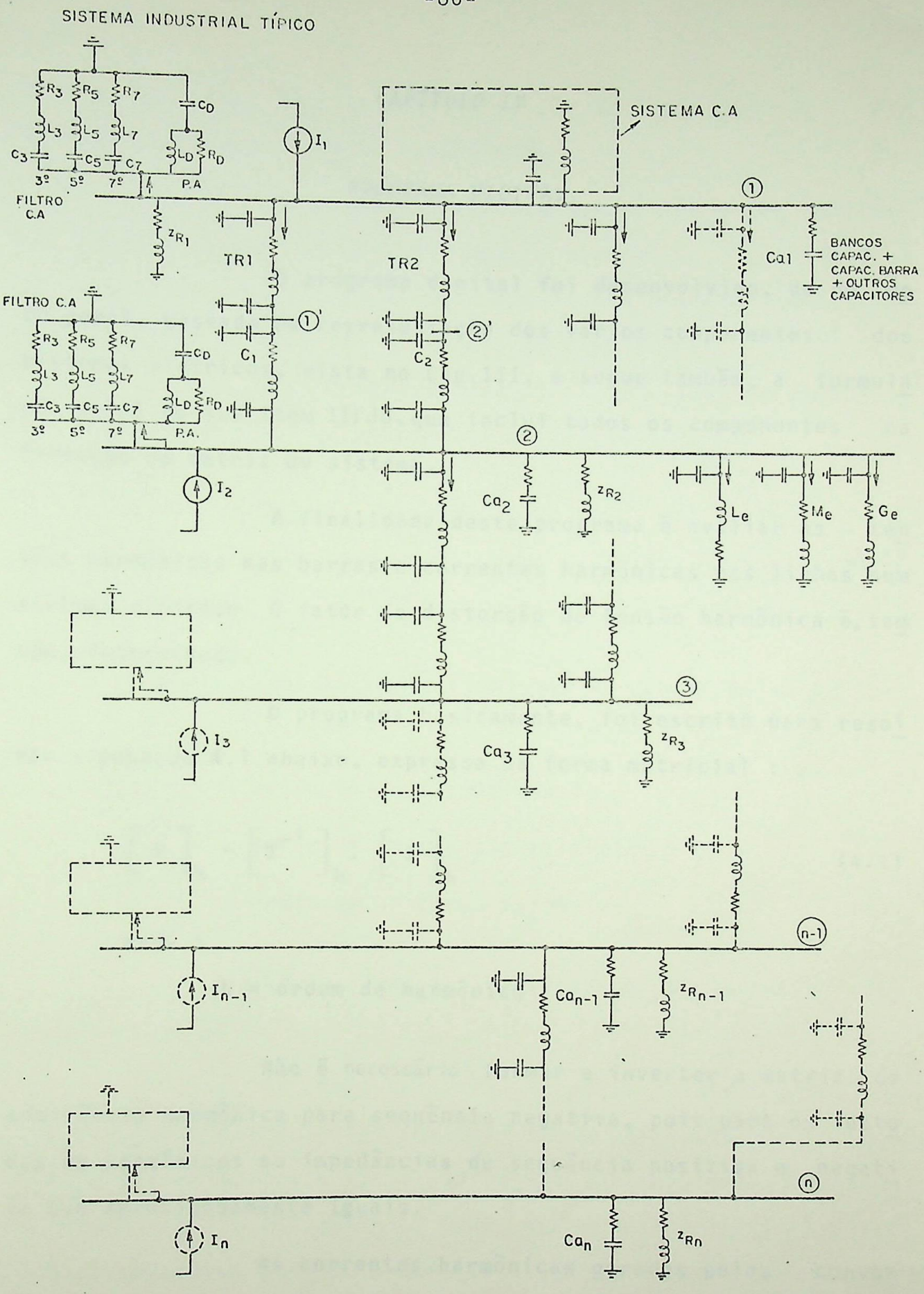


FIGURA 3.17 -

Legenda para a Figura :

L_e → Impedância das cargas equivalentes

M_e → Impedância dos motores equivalentes

G_e → Impedância dos geradores equivalentes

Ca → Impedância dos Capacitores

CAPÍTULO IV

PROGRAMA DIGITAL

O programa digital foi desenvolvido, de um modo geral, baseado na representação dos vários componentes dos sistemas elétricos, vista no Cap.III, e segue também, a formulação geral do sub item III.10, que inclui todos os componentes na formação da matriz do sistema.

A finalidade deste programa é avaliar as tensões harmônicas nas barras e correntes harmônicas nas linhas num sistema elétrico. O fator de distorção de tensão harmônica é, também, determinado.

O programa, basicamente, foi escrito para resolver a equação 4.1 abaixo, expressa na forma matricial :

$$\left[V \right]_h = \left[Y^{-1} \right]_h . \left[I \right]_h \qquad (4.1)$$

onde :

h = ordem de harmônico

Não é necessário formar e inverter a matriz de admitância harmônica para sequência negativa, pois para os estudos de harmônicos as impedâncias de sequência positiva e negativa são aproximadamente iguais.

As correntes harmônicas geradas pelos conversores estáticos e por outras fontes foram abordadas na tese de Mestrado citada na referência (31) que juntamente com o presente trabalho constituem uma linha de pesquisas que vem sendo desen

volvidas pela EFEI para se avaliar melhor os conceitos e os problemas relacionados com os harmônicos.

De posse dos valores destas correntes harmônicas geradas e, uma vez obtida a matriz inversa de admitâncias do sistema para cada harmônico, é efetuado o produto matricial para se obter as tensões harmônicas em cada barra.

As correntes harmônicas que fluem em cada linha foram calculadas de acordo com a equação 4.2.

$$I_m^{(\ell-m)} = \frac{V_h^{(\ell)} - V_h^{(m)}}{Z_h^{(\ell-m)}} \qquad (4.2)$$

ℓ e m - indicam respectivamente as barras emissora e receptora

V_h - ordem da tensão harmônica

Z_h - ordem da impedância harmônica

I_h - ordem da corrente harmônica

As equações 4.1 e 4.2 formam a estrutura básica deste capítulo.

Os parâmetros dos circuitos e outros dados necessários para compor estas equações foram utilizados ao longo do programa principal e nas 6 subrotinas intermediárias de cálculo (denominadas SHUNT, MAPROG, CSHP, MULM, TMAG e IMPR). Estes dados necessários para se processar o programa podem ser agrupados na sequência abaixo, que é tambem, àquela utilizada na elaboração do fluxograma :

DADOS DO SISTEMA

NB = Número de barras

NL = Número de linhas

N = ordem da matriz em estudo

INV = indicador para inversão das matrizes nas subrotinas MAPROG e CSHP (INV = 1 no caso)

BKV = Tensão base em [KV]

BMVA = MVA base [MVA]

KFR = frequência do sistema (normalmente 60 [HZ])

KFN = ordem do harmônico que se deseja estudar

ANGC = ângulo de fase da admitância que representa a concessionária de energia elétrica

DADOS RELACIONADOS COM OS PARÂMETROS DOS COMPONENTES

LINE = Número de ordem da linha

SB = barra emissora

EB = barra receptora

LENG = comprimento em metros [m]

RL = resistência em ohms/m [Ω/m]

DLL = indutância em henries/m [H/m]

GL = condutância em mho/m [℧/m]

CL = capacitância em farad/m [f/m]

PROGRAMA PRÍNCIPAL

SERFYT = variável que representa a admitância total calculada na subrotina SHUNT, ou seja, no caso de filtros e/ou cargas ligadas a uma barra, significa a admitância resultante da soma das admitâncias de cada componente.

CORR = correntes harmônicas injetadas na forma polar complexa, variável CORR(M, NMBAR, IPU, BETA) onde

M = ordem do harmônico,

NMBAR = nº da barra onde a corrente é injetada

IPU = módulo da corrente

BETA = ângulo da corrente

ZSER = impedância série dos componentes

YSHT = admitância shunt dos componentes

SERY = admitância série dos componentes, (SERY = 1/ZSER)

YSIS = matriz de admitância do sistema para cada harmônico.

YSFA = matriz de admitância do sistema para cada harmônico, mas tendo seus elementos da diagonal alterados pela adição dos resultados da subrotina "SHUNT".

MXIN = matriz de admitância do sistema na forma de vetor coluna para entrada nas SUBROTINAS "MAPROG" e "CSHP"

MXOUT = matriz de admitância inversa resultante dos cálculos efetuados nas subrotinas "MAPROG" e "CSHP"

Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Biblioteca MAUÁ

Esta matriz inversa é transformada de vetor coluna para a forma normal anterior para se efetuar o produto pelas correntes.

O produto de $[Y^{-1}]$ por $[I]$ é efetuado na subrotina "MULM", donde se obtem as tensões harmônicas desejadas, isto é feito conforme a expressão abaixo :

$$\begin{bmatrix} V_{h1} \\ V_{h2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{h,nb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}\ y_{12}\ \cdots & y_{1n} \\ y_{21}\ y_{22}\ \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ y_{n1}\ y_{n2}\ \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} I_{h1} \\ I_{h2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{h',nb} \end{bmatrix}$$

h = ordem do harmônico

nb = nº de barras do sistema

Assim, $V_{h1} = y_{11}I_{h1} + y_{12}I_{h2} + \ldots + Y_{1n}I_{h',nb}$ analogamente determina-se para as outras barras V_{h2}, V_{h3}, $V_{h,nb}$

Após o cálculo das tensões harmônicas em todas as barras do sistema determinam-se as correntes que fluem em todas as linhas.

Para se entender melhor como isto foi feito, apresenta-se abaixo a expressão para o caso do 5º Harmônico.

$$I_{5ºH}^{(1-2)} = \frac{V_{5ºH}^{(1)} - V_{5ºH}^{(2)}}{Z_{5ºH}^{(1-2)}}$$

$I_{5ºH}^{(1-2)}$ = corrente de 5º harmônico que flue na linha 1-2

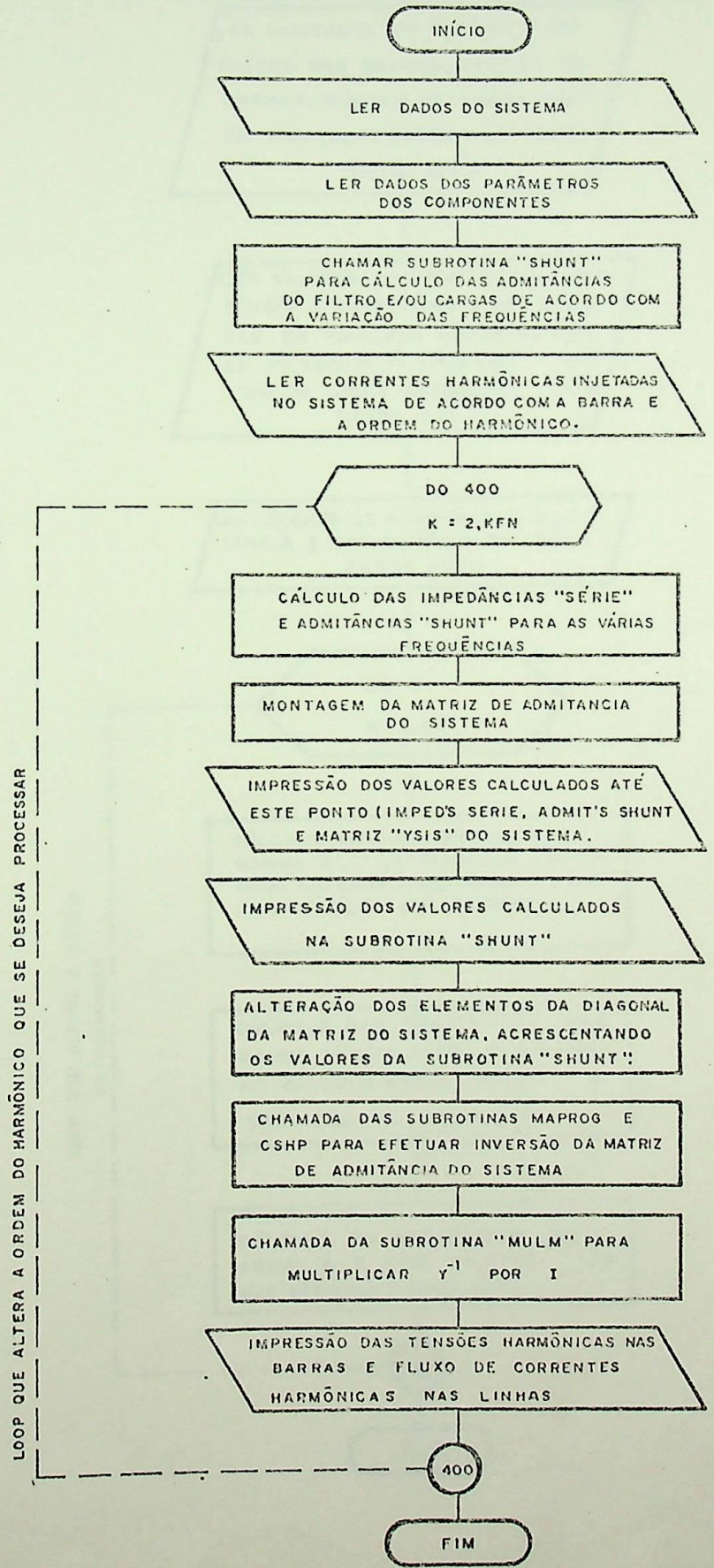
$Z_{5ºH}^{(1-2)}$ = impedância de 5º harmônico da linha 1-2

$V_{5ºH}^{(1)}$ = tensão de 5º harmônico na barra (1)

$V_{5ºH}^{(2)}$ = tensão de 5º harmônico na barra (2)

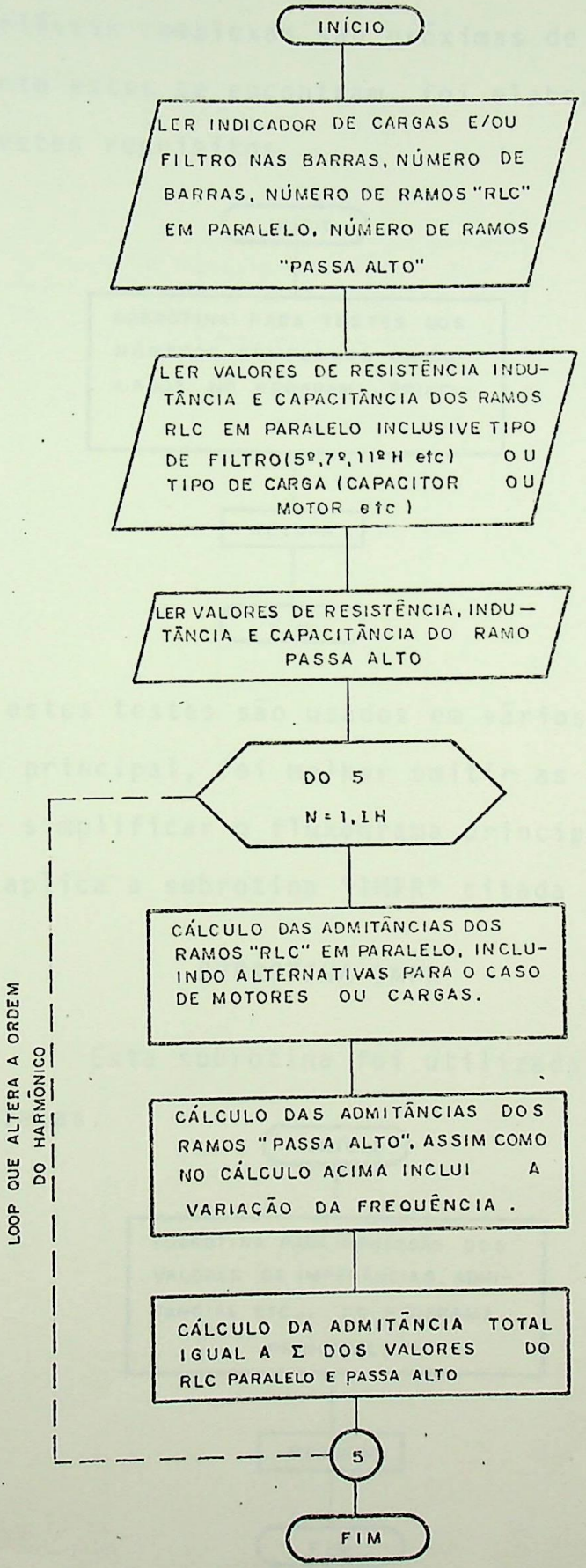
FLUXOGRAMA DO PROGRAMA PRINCIPAL

Abaixo apresenta-se o fluxograma resumido com a estrutura básica do programa principal inclusive com as chamadas das 6 subrotinas em pontos específicos deste fluxograma.



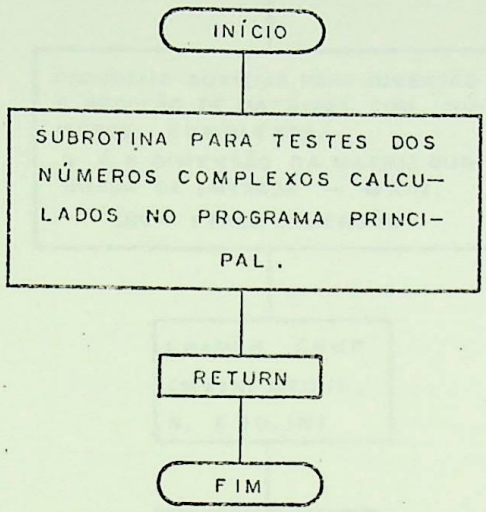
SUBROTINA SHUNT

O fluxograma simplificado da subrotina SHUNT é o apresentado abaixo :



SUBROTINA TMAG

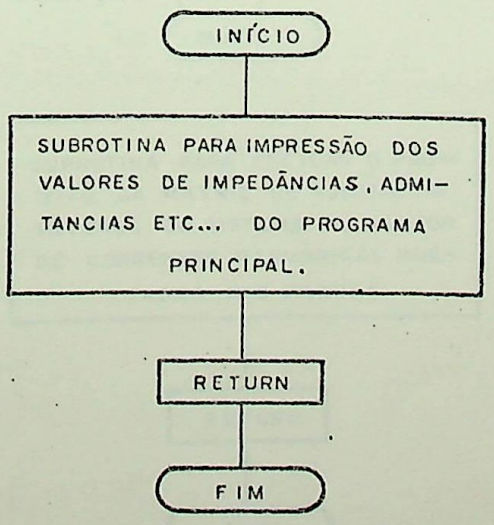
Como é sempre necessário saber se algumas das partes das variáveis complexas são próximas de zero, e também, qual o quadrante estas se encontram, foi elaborada esta subrotina para atender estes requisitos.



NOTA 1 : Como estes testes são usados em vários pontos do fluxograma principal, foi melhor omitir as chamadas desta subrotina a fim de simplificar o fluxograma principal. Esta observação também se aplica a subrotina "IMPR" citada logo abaixo.

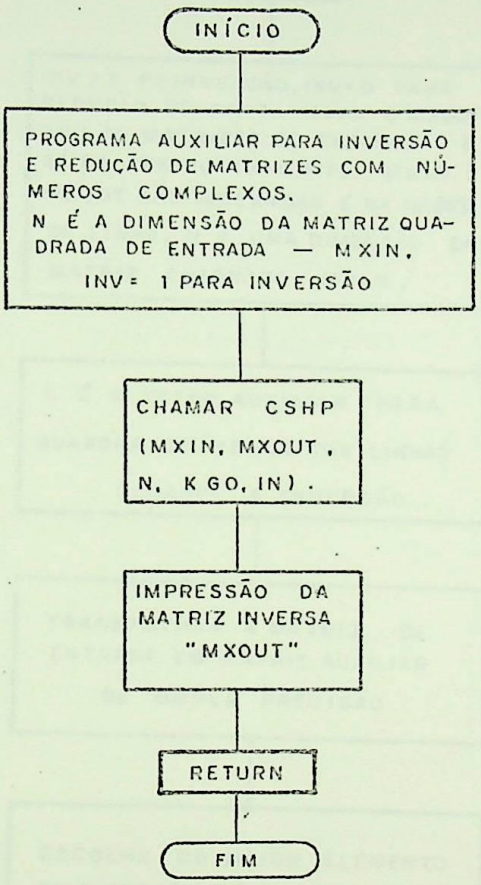
SUBROTINA IMPR

Esta subrotina foi utilizada para imprimir grandezas complexas.



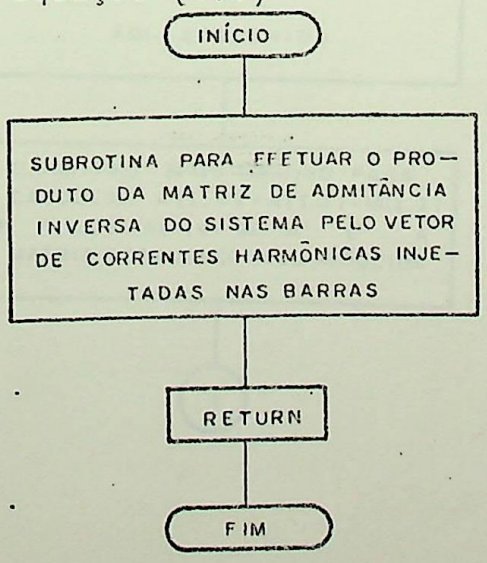
SUBROTINA MAPROG

Subrotina auxiliar que serve para chamada da subrotina CSHP e para impressão do resultado (MXOUT) obtido na "CSHP".



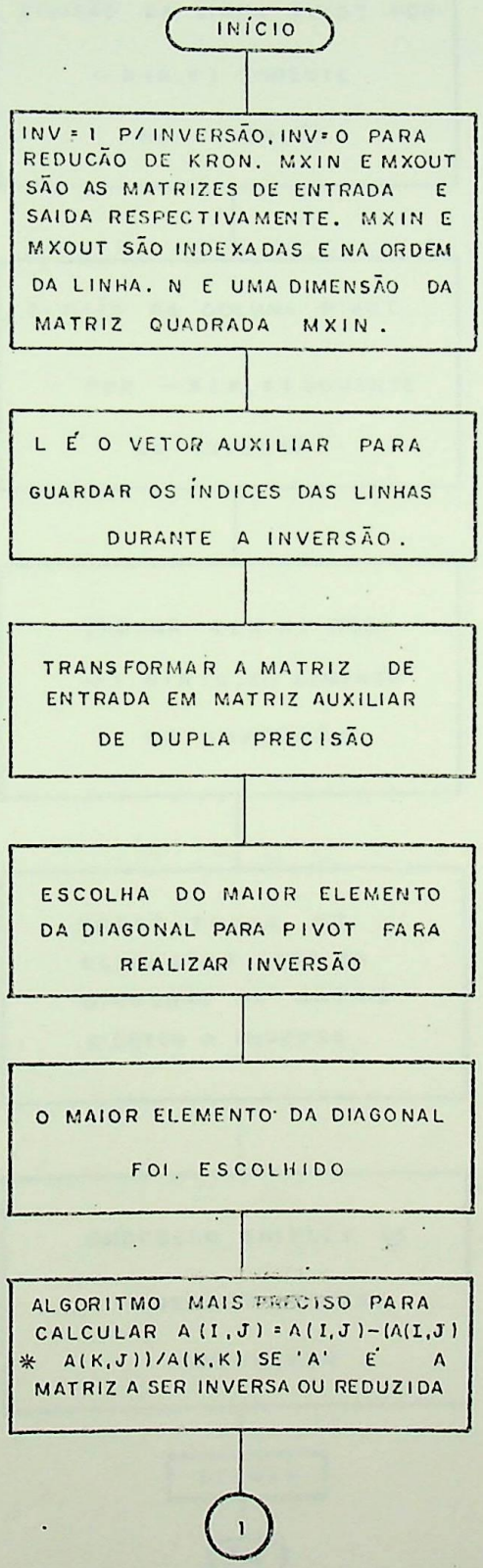
SUBROTINA MULM

Esta subrotina realiza o produto de $[Y^{-1}]$ por $|I|_h$ de acordo com a equação (4.1)

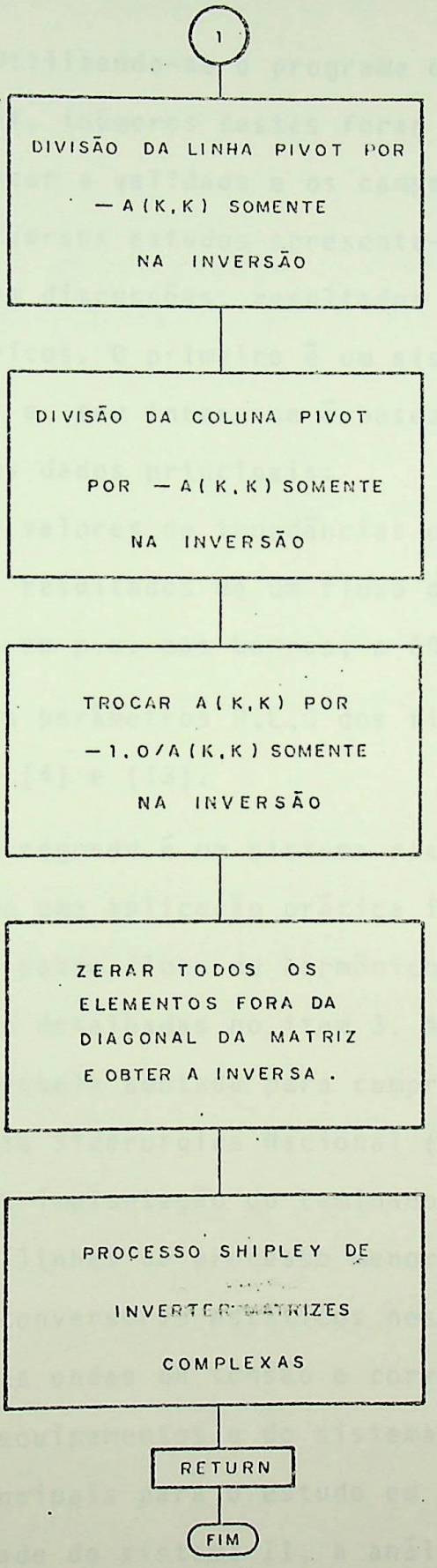


SUBROTINA CSHP

Subrotina que efetivamente realiza todos os cálculos intermediários para se obter, a matriz inversa.



SUBROTINA CSHP (Continuação)



V - RESULTADOS E CONCLUSÕES

1 - Introdução

Utilizando-se o programa desenvolvido conforme analisado no Cap. IV, inúmeros testes foram executados com o propósito de se verificar a validade e os campos de aplicação do programa. Destes diversos estudos apresenta-se aqui um breve resumo, consistindo em discussões, resultados e observações para dois sistemas elétricos. O primeiro é um sistema teórico de 8 barras - 14 linhas, e seu interesse é baseado no fato que já eram conhecidos seus dados principais:

- valores de impedâncias e admitâncias em p.u.
- resultados de um fluxo de potência (tensões em p.u. nas barras, a 60 Hz)

Os parâmetros R,L,C dos filtros foram retirados das referências (4) e (13).

O segundo é um sistema real (16 barras - 22 linhas) escolhido como uma aplicação prática imediata para o estudo ora desenvolvido sobre fluxo de harmônicos. Suas características principais estão detalhadas no item 3. A configuração deste sistema elétrico é aquela adotada para cumprir o Estágio III de Expansão da Companhia Siderúrgica Nacional (CSN), visando atender principalmente a implantação do Laminador de Tiras a Quente nº 2 além de outras linhas de processo menores. A utilização, em grande escala, dos conversores estáticos neste sistema e consequente deformação das ondas de tensão e corrente e seus reflexos na performance dos equipamentos e do sistema elétrico constituem os motivos principais para o estudo em questão. Evidentemente face a complexidade do sistema II, a análise harmônica efe-

tuada engloba a parte onde se concentram as fontes geradoras de harmônicos, limitando-se a uma área de maior interesse e reduzindo-se o nº de barras e linhas e o levantamento de seus dados.

2 - *RESULTADOS PARA O SISTEMA I*

O diagrama unifilar é aquele mostrado na figura 5.1 onde L1, ... L14 representam as linhas e as fontes de correntes harmônicas (I_n) aparecem nas barras 7 e 8.

A tabela V.1 apresenta os valores de impedância e admitância em p.u., na base mencionada.

Conforme citado nos capítulos precedentes, o programa desenvolvido necessita como dados de entrada as correntes harmônicas, as quais serão consideradas como fontes de correntes ideais.

Os valores das correntes harmônicas geradas por conversores estão mostrados na tabela V.2 e foram obtidos através de simulações do programa digital da referência |31|.

Sejam a seguir os diversos estudos processados com o sistema I.

2.1 - *CASO TESTE (A) - SISTEMA I COMPLETO SEM FILTRO*

As tabelas V.3 a V.7 mostram os resultados obtidos para os harmônicos de 5ª e 11ª ordens (valores de tensão e corrente respectivamente) e ainda o fator de distorção nas barras do sistema.

V.7

Considerando-se uma certa simetria em relação aos anéis interno e externo do sistema em estudo, pode-se dizer que os resultados das tensões harmônicas nas barras foram bas-

tante razoáveis e semelhantes (1,45 a 1,60%) conforme esperado.

De acordo com o critério para as componentes harmônicas de tensão, considerando um determinado consumidor em uma barra do sistema, observa-se que o valor limite de 0,010 p.u. é ligeiramente ultrapassado em qualquer barra para o 5º e 11º harmônicos (tabelas V.3 e V.5 respectivamente).

Em consequência o fator de distorção de tensão é também superior ao limite estabelecido de 1,5%.

Embora os demais harmônicos não tenham sido apresentados aqui, todos os valores são próximos aqueles indicados pelas tabelas V.3 à V.7.

2.2 - CASO TESTE (B) - SISTEMA I COM FILTRO

As tabelas V.8 a V.14 apresentam os valores de tensão e corrente harmônicas de 5ª, 11ª e 23ª ordens e, tambem, o fator de distorção de tensão para cada barra.

Através da comparação das tabelas V.8 a V.11 com às do item anterior V.3 a V.6 fica evidente a influência dos filtros utilizados nas barras 7 e 8, isto é, pode-se constatar uma considerável redução das tensões harmônicas em todas as barras. Os parâmetros R,L e C dos filtros são àqueles listados a seguir:

BARRA 7

$R_1 = 0{,}25 \times 10^{-2}\ |\Omega|$, $L_1 = 0{,}25 \times 10^{-3}|H|$ e $C_1 = 1{,}616 \times 10^{-3}|F| \rightarrow$ Filtro de 5º Harmônico

$R_2 = 0{,}649 \times 10^{-3}\ |\Omega|$, $L_2 = 0{,}649 \times 10^{-4}|H|$ e $C_2 = 1{,}288 \times 10^{-3}|F| \rightarrow$ Filtro de 11º Harmônico

$R_3 = 0,463 \times 10^{-3}$ |Ω|, $L_3 = 0,463 \times 10^{-4}$ |H| e $C_3 = 1,296 \times 10^{-3}$|F| → Filtro de 13º Harmônico

$R_D = 1,75$ |Ω|, $L_D = 0,65 \times 10^{-3}$ |H| e $C_D = 0,317 \times 10^{-3}$ |F| → Filtro Passa-Alto

BARRA 8:

$R_1 = 0,1625 \times 10^{-2}$ |Ω|, $L_1 = 0,1625 \times 10^{-3}$ |H| e $C_1 = 1,256 \times 10^{-3}$ |F| → Filtro de 7º Harmônico

R_2, L_2 e C_2 idênticos aos valores acima → Filtro de 11º Harmônico

R_D, L_D e C_D idem acima → Filtro Passa-Alto

A figura 5.2 mostra os filtros sintonizados e respectivos ramos.

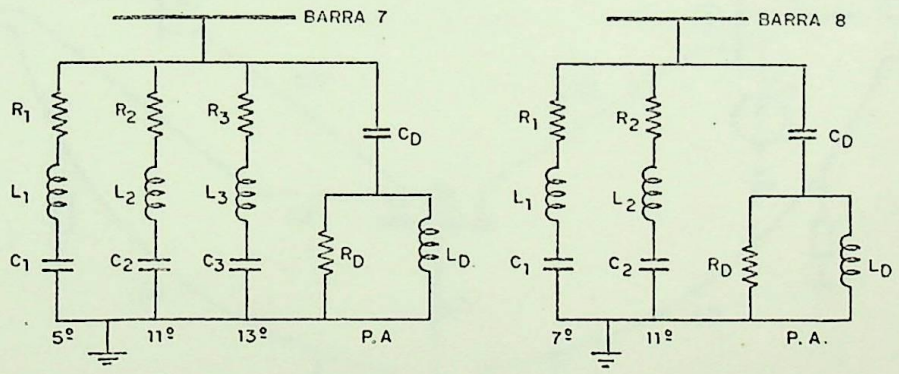


FIGURA 5.2.- Arranjo de filtros usados nas barras 7 e 8 (SISTEMA I)

Apesar dos arranjos de filtros não serem totalmente iguais nas barras 7 e 8, estes provaram ser eficientes, por exemplo, para as tensões harmônicas de ordem 23ª (mais alta); isto é mostrado pelas tabelas V.12 e V.13 para tensões e correntes.

O fator de distorção de tensão, neste caso, foi bastante reduzido, mantendo-se bem abaixo de 1,5% em todas as barras.

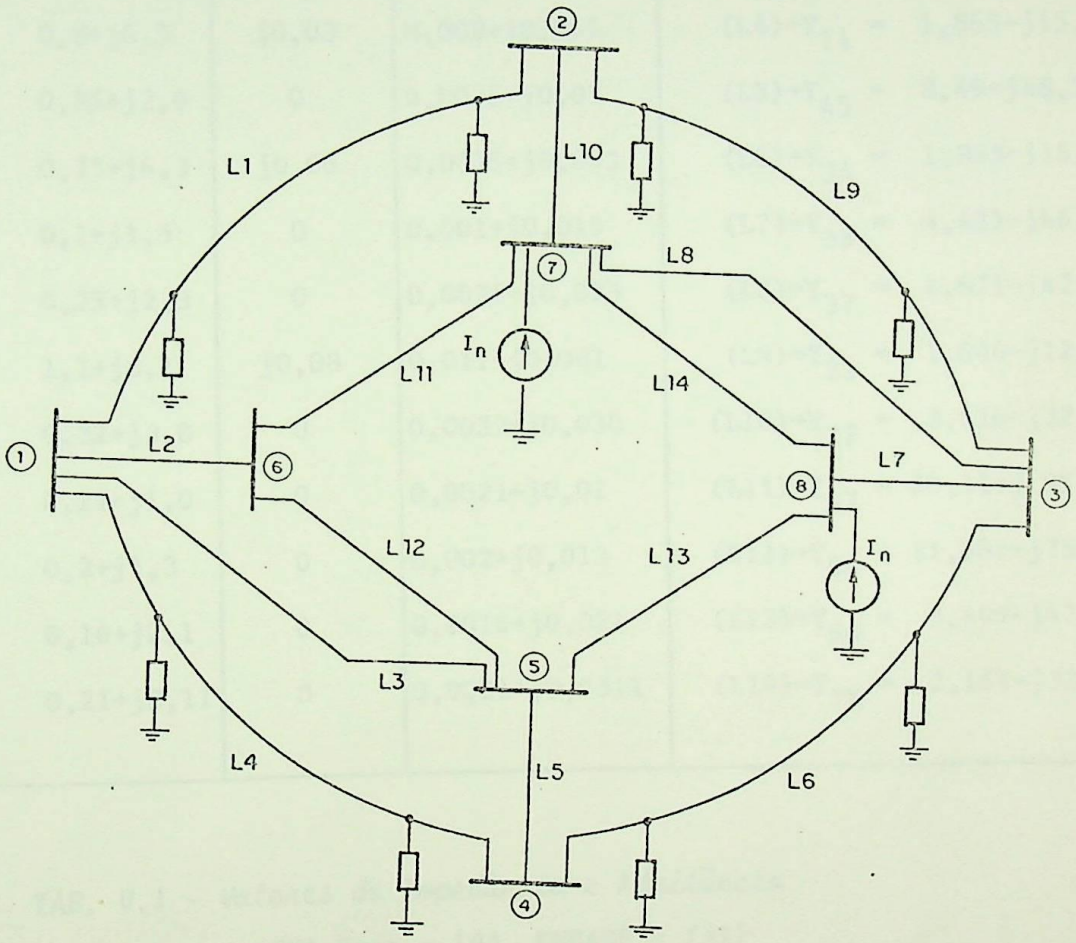


FIGURA 5.1 - Configuração do sistema I estudado

	IMPEDANCIA SERIE VALOR PERCENTUAL Zser |%|	ADMITÂNCIA SHUNT VALOR EM p.u.	IMPEDANCIA SERIE VALOR EM p.u	ADMITANCIA SERIE VALOR EM p.u
1	1,0+j7,0	j0,05	0,01+j0,07	(L1)→Y_{12} = 2,0-j14,0
2	0,2+j1,0	0	0,002+j0,01	(L2)→Y_{16} = 19,23-j96,153
3	0,3+j3,0	0	0,003+j0,03	(L3)→Y_{15} = 3,3-j 33,003
4	0,8+j6,5	j0,03	0,008+j0,065	(L4)→Y_{14} = 1,865-j15,155
5	0,35+j2,0	0	0,0035+j0,02	(L5)→Y_{45} = 8,49-j48,514
6	0,75+j6,3	j0,06	0,0075+j0,063	(L6)→Y_{34} = 1,863-j15,651
7	0,1+j1,5	0	0,001+j0,015	(L7)→Y_{38} = 4,425-j66,372
8	0,25+j2,3	0	0,0025+j0,023	(L8)→Y_{37} = 4,671-j42,971
9	1,1+j8,1	j0,08	0,011+j0,081	(L9)→Y_{23} = 1,646-j12,122
10	0,32+j3,0	0	0,0032+j0,030	(L10)→Y_{27} = 3,516-j32,958
11	0,21+j1,0	0	0,0021+j0,01	(L11)→Y_{67} = 20,11-j 95,78
12	0,2+j1,3	0	0,002+j0,013	(L12)→Y_{56} = 11,561-j75,145
13	0,16+j2,1	0	0,0016+j0,021	(L13)→Y_{58} = 3,607-j47,344
14	0,21+j3,11	0	0,0021+j0,0311	(L14)→Y_{78} = 2,161-j32,009
...	...	...	...	...

TAB. V.1 - Valores de Impedância e Admitância
(MVA Base = 100, KVBASE = 138)

ORDEM DO HARMÔNICO	BARRA DO SISTEMA	MODULO DA CORRENTE VALOR P.U	ÂNGULO DE FASE em |GRAUS|
5	7	0,0054	150,05
5	8	0,0152	144,38
7	7	0,0038	66,01
7	8	0,0108	58,14
11	7	0,0389	245,18
11	8	0,0582	246,53
13	7	0,0323	158,85
13	8	0,0484	160,46
17	7	0,0016	4,79
17	8	0,0041	346,92
19	7	0,0014	280,29
19	8	0,0036	260,69
23	7	0,0016	207,49
23	8	0,0061	236,68
25	7	0,0141	1,01
25	8	0,0252	3,90
29	7	0,0003	199,68
29	8	0,0018	15,20
31	7	0,0009	131,02
31	8	0,0018	103,35
35	7	0,0182	107,55
35	8	0,0218	108,26
37	7	0,0161	201,14
37	8	0,0197	204,50

TAB. V.2 - Correntes Harmônicas geradas por Conversores Estáticos

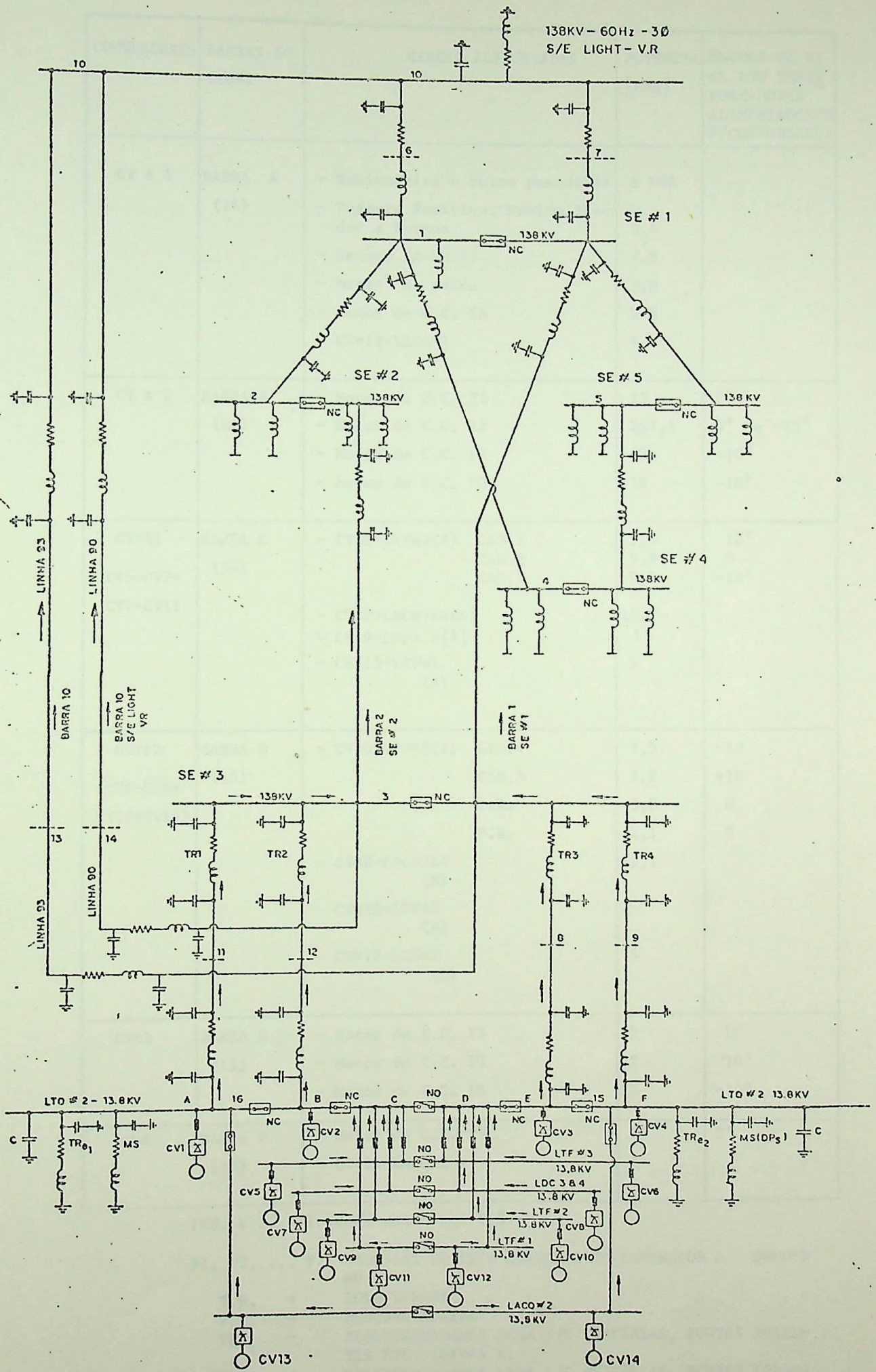

138KV - 60Hz - 3Ø
S/E LIGHT - V.R
SE # 1
SE # 2
SE # 3
SE # 4
SE # 5
138 KV
NC
LINHA 93
LINHA 90
BARRA 10
BARRA 10 S/E LIGHT VR
BARRA 2 SE # 2
BARRA 1 SE #1
TR1
TR2
TR3
TR4
LTO # 2 - 13.8KV
LTO # 2 13.8KV
CV1
CV2
CV3
CV4
CV5
CV6
CV7
CV8
CV9
CV10
CV11
CV12
CV13
CV14
LTF # 3 13.8KV
LDC 3 & 4 13.8 KV
LTF # 2 13.8KV
LTF # 1 13.8 KV
LACO # 2 13.8KV
MS
MS(DPS)
C

FIGURA 5.3

CONVERSORES	BARRAS DO LTQ#2	CARGAS ALIMENTADAS	POTÊNCIA [MVA]	ÂNGULO DE FASE DOS TRANSFORMADORES ALIMENTADORES P/CONVERSORES
CV # 1	BARRA A (16)	- Bobinadeira e rolos puxadores	6 MVA	
		- Tesoura Rotativa, Desimpilhador e Fornos	3,4	
		- Seções RA-RB-RC	7,9	
		- Mesas de saida	3,8	
		- Motor de C.C. R3	2x6	
		- CV=13-LACQ=2	8	
CV # 2	BARRA B (16)	- Motor de C.C. F1	12	0^0
		- Motor de C.C. R2	2x7,5	0^0 e -15^0
		- Motor de C.C. F2	12	$+10^0$
		- Motor de C.C. F3	12	-10^0
CVT#1 (CV5+CV7+ CV9+CV11)	BARRA C (16)	- CV#5→LTF#3(A) CAD.1	9,9	10^0
		CAD.2	9,9	0
		CAD.3	9,9	-10^0
		- CV#7→LDC#3&4(A)	15,7	
		- CV#9→LTF#2(A)	15	
		- CV#11→LTF#1 (A)	5	
CVT#2 (CV6+CV8+ CV10+CV12)	BARRA D (15)	- CV#6→LTF#3(B) CAD.4	9,9	-10
		CAD.5	9,9	+10
		T.R.	3,8	0
		P.R.	1,1	0
		- CV#8→LDC#3&4 (B)	15,7	
		- CV#10→LTF#2 (B)	15	
		- CV#12→LTF#1 (B)	5	
CV#3	BARRA E (15)	- Motor de C.C. F4	12	0^0
		- Motor de C.C. F5	12	10^0
		- Motor de C.C. F6	12	-10^0
CV#4	BARRA F (15)	- Motor de C.C. F7	10	0^0
		- CV#14-LACQ#2	2	

TAB. V.15 - Legenda para Fig. 5.3

F1, F2, ... F7 CADEIRAS DO TREM ACABADOR DO LAMINADOR A QUENTE Nº 2

T.R. → ROLO TENSOR

P.R. → DESENROLADEIRA

TRe_1 → TRANSFORMADORES PARA S/E UNITÁRIAS, FONTES ROLANTES ETC. (BARRA A)

TRe_2 → TRANSFORMADORES PARA S/E UNITÁRIAS, PONTES FOLANTES ETC. (BARRA F)

MS → MOTORES SINCRONOS (R1-3750KW, R4-7500KW)→ BARRA A)

MS(DPS) → MOTORES SINCRONOS (Bombas de Descamação-3000KW) →

3 - RESULTADOS PARA O SISTEMA II

O diagrama unifilar para este sistema está mostrado na figura 5.3 , sendo que uma legenda explicativa, com maiores detalhes do mesmo, está mostrada na tabela V.15.

Considerando-se as condições normais de operação do sistema, deve-se observar que na barra C da figura 5.3 as correntes harmônicas nela injetadas constituem a soma das contribuições dos conversores CV5, CV7, CV9 e CV11. De modo análogo, as correntes harmônicas injetadas na barra D (figura 5.3) são a somatória das correntes geradas pelos conversoresCV6, CV8, CV10 e CV12.

Tendo em vista que os disjuntores de interligação entre as barras A e B, B e C, D e E, E e F devem operar normalmente fechados, a composição total das correntes harmônicas geradas foi feita, adicionando-se o conteúdo harmônico dos conversores CV1 e CV2 (barra A e B respectivamente) aos valores totais de corrente citados anteriormente para a barra C. O mesmo critério foi adotado para os conversores CV3 e CV4. Desse modo, as barras A,B e C foram substituídas por uma só barra (16) e as barras D, E e F pela barra (15) para a somatória final das correntes harmônicas injetadas no sistema.

A tabela V.2a apresenta os valores de impedância e admitância em p.u., na base indicada, para o sistema II.

A tabela V.2b apresenta os resultados de Fluxo de Potência para o sistema II, sendo estes valores utilizados no cálculo do fator de distorção de tensão.

BARRA EMISSORA	BARRA RECEPTORA	IMPEDÂNCIA SÉRIE VALOR em p.u.	ADMITÂNCIA SHUNT VALOR em p.u.	ADMITÂNCIA SÉRIE VALOR em p.u.
1	2	$0,1784x10^{-2}+j0,3994x10^{-1}$	$j0,1055x10^{-1}$	$1,116-j0,2499x10^{2}$
1	3	$0,2204x10^{-2}+j0,5317x10^{-1}$	$j0,2143x10^{-1}$	$0,7783-j0,1878x10^{2}$
1	5	$0,7584x10^{-3}+j0,1698x10^{-1}$	$j0,1055x10^{-1}$	$2,625-j0,5878x10^{2}$
2	3	$0,4203x10^{-3}+j0,1323x10^{-1}$	$j0,1087x10^{-1}$	$2,398-j0,7549x10^{2}$
3	8	$0,6049x10^{-2}+j0,1599x10$	$j0,1985x10^{-5}$	$0,2363x10^{-2}-j0,6250$
3	9	$0,6049x10^{-2}+j0,1599x10$	$j0,1985x10^{-5}$	$0,2363x10^{-2}-j0,6250$
3	11	$0,6049x10^{-2}+j0,159x10$	$j0,1985x10^{-5}$	$0,2363x10^{-2}-j0,6250$
3	12	$0,6049x10^{-2}+j0,1599x10$	$j0,1985x10^{-5}$	$0,2363x10^{-2}-j0,6250$
3	13	$0,5405x10^{-3}+j0,2569x10^{-1}$	$0,3584x10^{-6}+j0,2516x10^{-2}$	$0,8187-j0,3890x10^{2}$
3	14	$0,5405x10^{-3}+j0,2569x10^{-1}$	$0,3584x10^{-6}+j0,2516x10^{-2}$	$0,8187-j0,3890x10^{2}$
4	1	$0,5157x10^{-3}+j0,1155x10^{-1}$	$j0,1055x10^{-1}$	$3,860-j0,8643x10^{2}$
5	4	$0,1244x10^{-2}+j0,2785x10^{-1}$	$j0,1055x10^{-1}$	$1,600-j0,3584x10^{2}$
6	1	$0,2091x10^{-3}+j0,8724x10^{-2}$	$0,2774x10^{-6}+j0,2049x10^{-2}$	$2,746-j0,11456x10^{3}$
7	1	$0,2091x10^{-3}+j0,8724x10^{-2}$	$0,2774x10^{-6}+j0,2049x10^{-2}$	$2,746-j0,11456x10^{3}$
8	15	$0,1353x10^{-8}+j0,2316x10^{-5}$	$j0,2276x10^{-5}$	$0,25211x10^{3}-j0,4317x10^{6}$
9	15	$0,1353x10^{-8}+j0,2316x10^{-5}$	$j0,2276x10^{-5}$	$0,25211x10^{3}-j0,4317x10^{6}$
10	6	$0,2091x10^{-3}+j0,8724x10^{-2}$	$0,2774x10^{-6}+j0,4625x10^{-2}$	$0,2746x10-j0,11456x10^{3}$
10	7	$0,2091x10^{-3}+j0,8724x10^{-2}$	$0,2774x10^{-6}+j0,4625x10^{-2}$	$0,2746x10-j0,11456x10^{3}$
10	13	$0,5405x10^{-3}+j0,2569x10^{-1}$	$0,3584x10^{-6}+j0,1562x10^{-1}$	$0,8187-j0,38909x10^{2}$
10	14	$0,5405x10^{-3}+j0,2569x10^{-1}$	$0,3584x10^{-6}+j0,1562x10^{-1}$	$0,8187-j0,38909x10^{2}$
11	16	$0,1353x10^{-8}+j0,2316x10^{-5}$	$j0,2276x10^{-5}$	$0,25211x10^{3}-j0,4317x10^{6}$
12	16	$0,1353x10^{-8}+j0,2316x10^{-5}$	$j0,2276x10^{-5}$	$0,25211x10^{3}-j0,4317x10^{6}$

TABELA V.2a - Valores de Impedância e Admitância para o Sistema II

VALORES BASE:

MVA = 100

KV BASE = 138

TENSÃO VALOR em p.u

BARRA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	1,001	1,002	1,002	1,001	1,001	1,00	1,00	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999	0,998	0,998	0,992	0,985

TABELA V.2b - Resultados de um Fluxo de Potência para o Sistema II

MVA BASE = 100

KV BASE = 138

Assim sendo, foram determinados os valores das correntes harmônicas injetadas nas barras 15 e 16 e estes valores são aqueles apresentados na tabela V.2.

3.1 - SISTEMA II em condições normais de operação:

- capacitâncias de fuga incluídas
- resistências incluídas
- filtros de harmônicos não incluídos
- cargas representadas por circuitos R-L equivalentes |22|, isto é, nas barras 15 e 16 foram agrupados todos os transformadores que alimentam cargas não geradoras de harmônicos de modo a obter suas impedâncias equivalentes.
- a representação da impedância da fonte c.a. (concessionária) foi feita de acordo com a sugestão ASEA vista no capítulo III.|33|
- resultados apresentados: tensões, correntes e distorções harmônicas de 5ª e 13ª ordens.

Os resultados indicados nas tabelas V.16 a V.19 mostram que os harmônicos (5º e 13º) de tensão e corrente são bastante reduzidos. Isto ocorreu em conseqüência do fato que o sistema conversor utilizado para o cálculo das correntes harmônicas geradas é de 36 pulsos (parcial). O aparecimento de harmônicos de ordens diferentes de $36K \pm 1$ é devido a assimetria de operação entre os grupos conversores de 12 pulsos (formando o conjunto de 36 pulsos). Conforme é de se esperar as barras 15 e 16 apresentam as maiores distorções, pois nas mesmas são injetados os harmônicos diretamente. Os valores de tensão e distorção harmônica estão bastante abaixo dos valores máximos reco

mendados na referência |32|. De acordo com a condição simulada neste item pode ser verificado o efeito de absorção das correntes harmônicas pelas cargas agrupadas segundo critério apontado acima. Este fato se deve ao efeito capacitivo natural das cargas e também pelo valor relativamente baixo das impedâncias equivalentes nas barras 15 e 16.

3.2 - *Sistema II em condições normais de operação, ou seja:*

- resistências e capacitâncias de fuga incluídas
- arranjo de quatro filtros de harmônicos nas barras 15 e 16, conforme figura 5.4
- cargas representadas como descrito no item 3.1
- representação da concessionária conforme sugestão ASEA |ref. 33|
- resultados apresentados: tensões, correntes e distorções harmônicas de 5ª, 13ª e 25ª ordens.

Os resultados mostrados nas tabelas V.21 a V.26 provam a eficiência do arranjo de filtros empregado, reduzindo-se as tensões em todas as 16 barras para valores mínimos. Em conseqüência, as correntes das linhas também se apresentam bem reduzidas.

As distorções harmônicas de tensão (FDT) em todas as barras, conforme mostrado na tabela V.27, também apresentam níveis muito baixos.

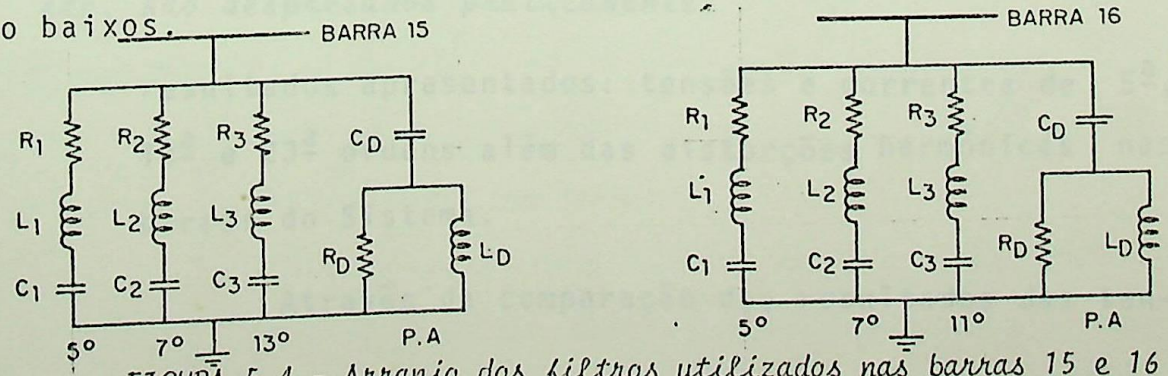


FIGURA 5.4.- Arranjo dos filtros utilizados nas barras 15 e 16

Os parâmetros R,L e C tomados para os filtros são dados na tabela:

Para barra 15:

$R_1 = 0{,}25 \times 10^{-2}|\Omega|$ $L_1=0{,}25\times10^{-3}|H|$ $C_1=1{,}616\times10^{-3}|F|$→ Filtro de 5º Harmônico

$R_2 = 0{,}1625\times10^{-2}$ $L_2=0{,}1625\times10^{-3}|H|$ $C_2=1{,}256\times10^{-3}|F|$→ Filtro de 7º Harmônico

$R_3 = 0{,}463\times10^{-3}\ |\Omega|$ $L_3=0{,}463\times10^{-4}$ $C_3=1{,}296\times10^{-3}|F|$→ Filtro de 13º Harmônico

$R_D = 1{,}75|\Omega|$ $L_D=0{,}650\times10^{-3}|H|$ $C_D=0{,}317\times10^{-3}|F|$→ Filtro Passa-Alto

Para a barra 16:

$R_1 = 0{,}25\times10^{-2}|\Omega|$ $L_1=0{,}25\times10^{-3}|H|$ $C_1=1{,}616\times10^{-3}|F|$→ Filtro de 5º Harmônico

$R_2 = 0{,}1625\times10^{-2}|\Omega|$ $L_2=0{,}1625\times10^{-2}|H|$ $C_2=1{,}256\times10^{-3}|F|$→ Filtro de 7º Harmônico

$R_3 = 0{,}649\times10^{-3}\ |\Omega|$ $L_3=0{,}649\times10^{-4}|H|$ $C_3=1{,}288\times10^{-3}|F|$→ Filtro de 11º Harmônico

$R_D = 1{,}75|\Omega|$ $L_D=0{,}650\times10^{-3}|H|$ $C_D=0{,}317\times10^{-3}|F|$→ Filtro Passa-Alto

3.3 - *Sistema II em condições normais idênticas às mencionadas no item 3.1, exceto que as resistências das linhas, cabos etc. são despresados praticamente.*

- resultados apresentados: tensões e correntes de 5ª, 13ª e 23ª ordens além das distorções harmônicas nas barras do Sistema.

Através da comparação dos resultados das ten-

sões e correntes harmônicas dados nas tabelas V.28 a V.31 com aqueles apontados nas tabelas V.16 a V.19, pode-se constatar, que praticamente, não houve alterações sensíveis nas tensões e correntes harmônicas de 5ª e 13ª ordens.

O mesmo ocorre quando se comparam as tabelas V.20 e V.34, indicando que as distorções harmônicas nas barras também não se alteram consideravelmente.

Os resultados para os harmônicos de 23ª ordem encontram-se nas tabelas V.32 e V.33, mantendo-se, em valores abaixo dos limites normalizados.

Os outros harmônicos 7º, 11º, 25º etc. embora não apresentados aqui também registraram níveis admissíveis e próximos aos do item 3.1.

3.4 - *Sistema II em condições normais conforme apontado no item 3.1, exceto que as capacitâncias de fuga dos cabos, linhas etc. foram consideradas bem próximas de zero.*

- resultados apresentados: tensões e correntes de 5ª, 13ª e 23ª ordens e distorções harmônicas nas barras.

Os resultados mostrados nas tabelas V.35 a V.40 para as tensões harmônicas de 5ª, 13ª e 23ª ordens indicam um ligeiro acréscimo das tensões, quando estas tabelas são comparadas com às do item 3.3 (tabelas V.28 a V.33).

Uma observação importante neste caso é que as tensões harmônicas de 5ª, 13ª e 23ª ordens na barra (10), (concessionária), cresceram razoavelmente, embora os níveis se mantenham abaixo daqueles dados em normas.

A comparação das tabelas V.34 e V.41, relativas aos fatores de distorção de tensão, indica que para as bar-

ras p.ex(1 a 5), mais distantes das fontes de harmônicos, as distorções harmônicas (para C=0) são maiores em relação às do item 3.3 (tabela V.34); o inverso ocorre para as barras mais próximas das fontes, isto é, os valores de distorção, p.ex. para as barras 8 e 16 são maiores na tabela V.34.

Uma análise comparativa das tabelas V.35 a V.40 com às de nº V.16 a V.19 mostrou um aumento dos níveis de harmônicos. A afirmação e tanto mais verdadeira quanto mais elevadas forem as ordens dos harmônicos. A justificativa disto baseia-se no fato que os capacitores formam ramos "shunt" que drenam uma parte das correntes harmônicas para terra. A eliminação das capacitâncias provoca, pois, um maior fluxo de correntes harmônicas, acarretando, consequentemente maiores distorções harmônicas.

3.5 - *SISTEMA II - conforme condições descritas a seguir: O objetivo deste caso é o de apresentar outra alternativa para a representação da fonte de alimentação c.a. do sistema.*

- resistência e capacitâncias de fuga incluídas
- sistema sem filtros em qualquer barra
- cargas incluídas nas barras 15 e 16 conforme critério descrito no item 3.1
- representação da impedância da fonte de acordo com o critério sugerido pela referências |15| (J.P. Bowles)
- resultados apresentados: tensões e correntes harmônicas de 5ª, 13ª e 25ª ordens, inclusive as distorções harmônicas,

Os resultados encontrados estão nas tabelas V.42 a V.48 e são superiores àqueles mostrados nas tabelas

Escola Federal de
Biblioteca
MAUÁ

V.28 a V.33 indicando que a representação adotada neste item conduz a resultados mais conservativos.

A mesma conclusão se aplica quando da comparação das tabelas V.48 e V.34.

3.6 - *SISTEMA II - em condições idênticas as descritas no item 3.5, exceto que a representação da impedância da fonte c.a. é agora feita conforme critério da referência |32|. (Impedância de curto-circuito).*

- resultados apresentados: tensões e correntes harmônicas de 5ª, 13ª e 25ª ordens.

As tabelas V.49 a V.55 mostram os resultados que podem ser diretamente comparados com aqueles dos itens 3.1 e 3.5. Os resultados mostram que os valores encontrados pela representação do sistema da concessionária através da impedância de curto circuito |32| e pela impedância, com ângulo ϕ_m constante (15) são bastante próximos. Os valores encontrados pela recomendação da ASEA:|33| são inferiores aos outros dois acima.

As conclusões acima, estabelecem pois que, o método de representação pela simples impedância de curto, embora aproximado, conduz a resultados mais desfavoráveis de tensões harmônicas. Este fato leva a recomendar tal método para estudos harmônicos, quando informações mais detalhadas sobre o sistema da concessionária são desconhecidas.

4. CONCLUSÕES GERAIS

Os diversos casos estudados, analisados e discutidos anteriormente mostraram os vários campos e a validade da aplicação do programa para os estudos de harmônicos em sistemas elétricos de potência.

No capítulo I analisou-se o problema básico da conceituação, definições, problemas e limitações de harmônicos. Constatou-se naquele ponto a grande dificuldade em se definir exatamente os máximos níveis harmônicos admissíveis e enfatizou-se que as normas atualmente em vigor constituem apenas recomendações a serem observadas quando da existência de cargas geradoras de componentes harmônicos. Os problemas causados pelas componentes de alta frequência são vários,e, apenas neste campo inúmeros trabalhos tem sido publicados e ainda constituem áreas de pesquisas a serem desenvolvidas.

No capítulo II apresentou-se um resumo bastante sucinto, e, alguns métodos bastante simples para uma estimativa grosseira dos harmônicos gerados pelas diferentes fontes harmônicas sugeridas. Conforme foi devidamente observado, a referência (31) constitui um trabalho, em alguns pontos, mais completo sobre o assunto.

O capítulo III constitui uma parcela que acredita-se ter este trabalho contribuido de forma bastante eficaz. É fato conhecido que em estudos de alta frequência as representações exigidas para melhor simular os componentes de sistemas elétricos conduzem a inclusão das resistências e capacitâncias de fuga para todos os componentes. Em geral estas duas variáveis são desprezadas em outros estudos, por exemplo, fluxo de potência, curto circuito etc.

No sentido de se buscar a melhor representação foram estudados cada um dos componentes, utilizando-se todas as referências bibliográficas possíveis as quais incluem gráficos, tabelas, dados experimentais, com equipamentos típicos de instalações industriais, e demais recursos para se fixar os parâmetros R, L e C destes componentes.

Dentre os componentes modelados destacam-se os transformadores, reatores, cabos, linhas, motores, geradores, cargas, transformadores para instrumentos, barramentos blindados, filtro de harmônicos, capacitores em geral e a concessionária de suprimento de energia.

De um modo geral foi utilizado o circuito π para quase todos os componentes, tendo em mente que as capacitâncias podem, assim, ser agrupadas nos nós (barras) do sistema. Ao longo do capítulo são indicadas equações para cálculo de R, L e C a partir de outras grandezas, onde são, também, incluídos exemplos ilustrativos com dados de sistemas existentes em operação.

No caso específico da fonte de alimentação (concessionária) pode-se constatar que várias opções de representação foram abordadas com detalhes, sendo que todas conduzem a valores razoáveis com uma ligeira vantagem para a sugestão ASEA devido a sua aproximação das curvas características de Impedância x Frequência.

Com relação aos filtros de harmônicos estudou-se um caso típico de 3 ramos RLC em paralelo mais um ramo Passa-Alto, embora a formulação do programa possa estudar qualquer outro arranjo de filtros sintonizados.

Evidentemente esta coletânea de dados e valores típicos dos componentes de sistemas elétricos que faz parte deste capítulo contribui não só para aplicações em estudos de harmônicos, mas pode ser também utilizada em outros estudos, tais como fluxo de potência, estabilidade etc.

Na formulação geral para um sistema *n* barras

e m linhas, no final do capítulo procurou-se reunir todos os componentes com seus modelos apropriados no sentido de dar ao capítulo um caráter mais abrangente possível que, normalmente, exigem estes estudos.

No capítulo IV são descritos em detalhes todas as características importantes, variáveis simples e complexas, dados necessários de entrada e os cálculos executados em cada subrotina auxiliar do programa. Um fluxograma do programa principal e das subrotinas é, também, apresentado.

Dentre as várias opções existentes ao longo do programa destacam-se os seguintes pontos principais:

- A partir dos parâmetros R, L, G e C determinados pelos critérios definidos no capítulo III, efetua-se a montagem da matriz de admitância do sistema para cada harmônico.
- Os valores das tensões fundamentais obtidos de um estudo de fluxo de potência são necessários para o cálculo da fator de distorção e entram no programa como dados do sistema.
- Do mesmo modo devem ser introduzidos os valores, em módulo e ângulo, das correntes harmônicas geradas pelos conversores estáticos e/ou outros. Estes valores foram determinados ref. |31| com base nas características específicas de cada linha de processo, isto é, potências dos transformadores para os conversores, grupos de conexão destes transformadores, arranjo de cada grupo de 3 transformadores, como por exemplo +10º, 0º e -10º para se reduzir os

harmônicos gerados, número de pulsos dos conversores etc.

- Uma subrotina denominada "SHUNT" foi elaborada com o propósito de calcular as admitâncias para as várias frequências, de todos os componentes conectados entre uma barra qualquer e a referência. Entre estes componentes "SHUNT" pode-se citar cargas de características definidas, motores, capacitores, geradores, arranjos de filtros (ramos RLC em paralelo e passa-alto) e outros.

Conforme mostrado na formulação geral no final do Capítulo III os valores equivalentes de todas as admitâncias das cargas "SHUNT" são incluidos, alterando apenas os elementos da diagonal das matrizes de admitância.

Uma sistemática constante em todo o programa é a impressão dos valores lidos e calculados em cada trecho para certificar todos os resultados intermediários.

Deve ser salientado também, que o programa executa toda sua sequência de cálculo inclusive as subrotinas para cada ordem de harmônico, tanto os pares quanto os ímpares. Evidentemente aqueles harmônicos que não se deseja processar podem ser desprezados. Para isto existe um teste no início do programa que conduz a impressão de tensões nulas neste caso. Esta característica é importante pois no caso específico de laminadores em que se utilizam, principalmente, conversores estáticos de 12, 24 e 36 pulsos, pretende-se calcular apenas o fluxo dos harmônicos de ordens 11ª, 13ª, 23ª, 25ª, 35ª e 37ª os quais possuem níveis mais elevados. Por outro lado, se o estudo

inclui cargas geradoras de harmônicos de todas as ordens, como é caso dos fornos a arco, logicamente todos eles devem ser processados pelo programa.

Com relação a representação da fonte de alimentação do sistema, procurou-se incluir três opções de cálculo para seus parâmetros, ou seja:

- Fórmula sugerida pela ASEA
- Critério da Impedância de curto-circuito
- Representação por ângulo ϕ_m constante (J.P.Bowles)

Estas alternativas foram incluídas no programa tendo em vista suas aplicações, principalmente, em sistemas industriais e considerando-se que o sistema de suprimento de energia necessita de uma representação simplificada, mas que ao mesmo tempo, simule o comportamento mais aproximado possível da sua impedância nas diversas frequências harmônicas. O sistema da concessionária é por si só, extremamente complexo, envolvendo a geração, linhas de transmissão de grande comprimento, subestações de interligação etc. e por isso torna-se muito difícil a sua representação por parâmetros concentrados que realmente retrate o comportamento em diferentes frequências.

O programa utiliza o processo de Shipley-Coleman de inverter matrizes complexas, sendo que as variáveis complexas são definidas com precisão dupla tanto no programa principal quanto nas subrotinas. O sistema de computação usado foi o IBM-360 da CSN e a linguagem FORTRAN, nível G, cujos resultados em termos de precisão foram devidamente comprovados em todas as fases de testes do programa. Isto foi possível pois tanto o presente trabalho quanto aquele da referência |31| foram desenvol-

vidos paralelamente durante certo período embora o segundo empregasse o sistema computacional HP-3000 da EFEI. Assim, principalmente, as matrizes de admitâncias inversas para todos os harmônicos foram intensivamente comparadas e certificadas nos dois sistemas computacionais usados. Deve ainda ser ressaltado aqui que o programa objeto deste trabalho foi também implantado no computador HP-3000 da EFEI durante as pesquisas e testes citados acima.

Em resumo pode-se dizer que os resultados obtidos nas diversas simulações efetuadas atestam a validade do programa em toda sua sistemática de cálculo, facilidade de se obter e dar entrada dos dados, inúmeras alternativas de representação apresentadas. Desse modo acredita-se que o objetivo primordial, ou seja, aquele de se desenvolver um trabalho de aplicação prática nesta área foi plenamente atingido.

Finalmente no Capítulo V são estudados em detalhes dois sistemas elétricos, um de caráter mais acadêmico e o outro essencialmente prático, escolhidos de modo a consolidar os conceitos desenvolvidos nos capítulos precedentes.

No primeiro sistema elétrico analisado ficou comprovada a influência dos filtros usados, isto é, os níveis das tensões harmônicas decresceram em relação ao sistema na condição inicial (tensões elevadas nas barras e sem os filtros).

Para o segundo sistema diversos testes foram executados os quais provaram a eficiência do programa visto que inúmeras opções de configuração e de representação do sistema eram necessárias ao seu estudo.

Dentre estas alternativas foram analisados os efeitos de se desprezar ou não as resistências e capacitâncias

de fuga do sistema, e também, a influência nas tensões harmônicas de barras próximas, quando se utilizam nelas arranjos de filtros diferentes.

Outro ponto importante ressaltado durante o estudo do sistema II é que uma parcela considerável dos harmônicos flue para as outras cargas do barramento de M.T. e, portanto, não pode ser desprezada.

As opções de representação do sistema alimentador da concessionária foram estudadas e várias conclusões puderam ali ser definidas, principalmente porque nem sempre são conhecidas as características deste sistema.

SISTEMA I

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 5

		REAL	IMAG				
BARRA	1	:TENSAO = 0.8723379-02	0.1286359-01	PU MODULO =0.1554249-01	(PU)	ANGULO =	55.86 GRAUS
BARRA	2	:TENSAO = 0.8933899-02	0.1315899-01	PU MODULO =0.1590519-01	(PU)	ANGULO =	55.93 GRAUS
BARRA	3	:TENSAO = 0.8585539-02	0.1263559-01	PU MODULO =0.1531779-01	(PU)	ANGULO =	55.91 GRAUS
BARRA	4	:TENSAO = 0.8784719-02	0.1295679-01	PU MODULO =0.1565399-01	(PU)	ANGULO =	55.86 GRAUS
BARRA	5	:TENSAO = 0.8571299-02	0.1265969-01	PU MODULO =0.1528839-01	(PU)	ANGULO =	55.90 GRAUS
BARRA	6	:TENSAO = 0.8636439-02	0.1269769-01	PU MODULO =0.1533459-01	(PU)	ANGULO =	55.87 GRAUS
BARRA	7	:TENSAO = 0.8508209-02	0.1254999-01	PU MODULO =0.1516219-01	(PU)	ANGULO =	55.86 GRAUS
BARRA	8	:TENSAO = 0.8193819-02	0.1214539-01	PU MODULO =0.1465169-01	(PU)	ANGULO =	55.99 GRAUS

TABELA V.3

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 5

				REAL	IMAG		MODULO		ANGULO	
LINHA	1	-	2 :	-.7150370-03	0.4342260-03	(PU)	MODULO =0.8635700-03	(PU)	ANGULO =	145.89 GRAUS
LINHA	1	-	6 :	0.2994880-02	-.1908440-02	(PU)	MODULO =0.3464040-02	(PU)	ANGULO =	-33.31 GRAUS
LINHA	1	-	5 :	0.1146690-02	-.8030560-03	(PU)	MODULO =0.1413130-02	(PU)	ANGULO =	-35.76 GRAUS
LINHA	1	-	4 :	-.2420450-03	0.1527190-03	(PU)	MODULO =0.2859830-03	(PU)	ANGULO =	147.62 GRAUS
LINHA	4	-	5 :	0.2527610-02	-.1704960-02	(PU)	MODULO =0.3047230-02	(PU)	ANGULO =	-34.02 GRAUS
LINHA	3	-	4 :	-.7079320-03	0.5124890-03	(PU)	MODULO =0.8999150-03	(PU)	ANGULO =	144.84 GRAUS
LINHA	3	-	6 :	0.6050160-02	-.4085720-02	(PU)	MODULO =0.7404480-02	(PU)	ANGULO =	-35.21 GRAUS
LINHA	3	-	7 :	0.9827370-03	-.8424270-03	(PU)	MODULO =0.1131260-02	(PU)	ANGULO =	-28.65 GRAUS
LINHA	2	-	3 :	0.9899090-03	-.6947900-03	(PU)	MODULO =0.1209170-02	(PU)	ANGULO =	-35.05 GRAUS
LINHA	2	-	7 :	0.3404150-02	-.2304110-02	(PU)	MODULO =0.4127770-02	(PU)	ANGULO =	-33.93 GRAUS
LINHA	6	-	7 :	0.2445200-02	-.1501610-02	(PU)	MODULO =0.2870020-02	(PU)	ANGULO =	-31.52 GRAUS
LINHA	5	-	6 :	-.4416040-03	0.4009700-03	(PU)	MODULO =0.5021590-03	(PU)	ANGULO =	138.10 GRAUS
LINHA	5	-	8 :	0.4113990-02	-.2931640-02	(PU)	MODULO =0.5056750-02	(PU)	ANGULO =	-35.44 GRAUS
LINHA	7	-	8 :	0.2186190-02	-.1651230-02	(PU)	MODULO =0.2740760-02	(PU)	ANGULO =	-37.07 GRAUS

TABELA V.4

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 11

		REAL	IMAG			
BARRA	1	:TENSAO = -.2981540-01	0.1327600-01	PU MODULO =0.3263760-01	(PU) ANGULO =	156.00 GRAUS
BARRA	2	:TENSAO = -.3341600-01	0.1489430-01	PU MODULO =0.3658510-01	(PU) ANGULO =	155.98 GRAUS
BARRA	3	:TENSAO = -.2795090-01	0.1243170-01	PU MODULO =0.3059800-01	(PU) ANGULO =	156.03 GRAUS
BARRA	4	:TENSAO = -.3114330-01	0.1390020-01	PU MODULO =0.3410460-01	(PU) ANGULO =	155.95 GRAUS
BARRA	5	:TENSAO = -.2770980-01	0.1232190-01	PU MODULO =0.3032600-01	(PU) ANGULO =	156.03 GRAUS
BARRA	6	:TENSAO = -.2773560-01	0.1231330-01	PU MODULO =0.3034630-01	(PU) ANGULO =	156.06 GRAUS
BARRA	7	:TENSAO = -.2567650-01	0.1134110-01	PU MODULO =0.2806960-01	(PU) ANGULO =	156.17 GRAUS
BARRA	8	:TENSAO = -.2257580-01	0.1004170-01	PU MODULO =0.2470830-01	(PU) ANGULO =	156.02 GRAUS

TABELA V.5

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 11

				REAL	IMAG					
LINHA	1	-	2 :	-.1709030-02	-.3915360-02	(PU)	MODULO =0.4273090-02	(PU)	ANGULO =	246.42 GRAUS
LINHA	1	-	6 :	0.7056670-02	0.1996710-01	(PU)	MODULO =0.1736190-01	(PU)	ANGULO =	66.02 GRAUS
LINHA	1	-	5 :	0.2368910-02	0.9330220-02	(PU)	MODULO =0.9637490-02	(PU)	ANGULO =	66.06 GRAUS
LINHA	1	-	4 :	-.7130490-03	-.1554420-02	(PU)	MODULO =0.1710170-02	(PU)	ANGULO =	245.36 GRAUS
LINHA	4	-	5 :	0.5905050-02	0.1330310-01	(PU)	MODULO =0.1431320-01	(PU)	ANGULO =	66.07 GRAUS
LINHA	3	-	4 :	-.1731300-02	-.3845150-02	(PU)	MODULO =0.4216940-02	(PU)	ANGULO =	245.76 GRAUS
LINHA	3	-	8 :	0.1197340-01	0.2724770-01	(PU)	MODULO =0.2974630-01	(PU)	ANGULO =	66.35 GRAUS
LINHA	3	-	7 :	0.3529990-02	0.7546790-02	(PU)	MODULO =0.8331540-02	(PU)	ANGULO =	64.93 GRAUS
LINHA	2	-	3 :	0.2350310-02	0.5127300-02	(PU)	MODULO =0.5599460-02	(PU)	ANGULO =	66.30 GRAUS
LINHA	2	-	7 :	0.9914260-02	0.1961600-01	(PU)	MODULO =0.2150530-01	(PU)	ANGULO =	65.30 GRAUS
LINHA	6	-	7 :	0.7111530-02	0.1571300-01	(PU)	MODULO =0.1724760-01	(PU)	ANGULO =	65.65 GRAUS
LINHA	5	-	6 :	0.5495610-04	-.1499530-03	(PU)	MODULO =0.1595730-03	(PU)	ANGULO =	-69.89 GRAUS
LINHA	5	-	8 :	0.8119100-03	0.1836620-01	(PU)	MODULO =0.3026570-01	(PU)	ANGULO =	66.39 GRAUS
LINHA	7	-	8 :	0.3126760-02	0.7569170-02	(PU)	MODULO =0.8189560-02	(PU)	ANGULO =	67.55 GRAUS

TABELA V.6

FATOR DE DISTORCAO DE TENSAO

BARRA	1	=	0.4339150D-01	MVO	1	=	0.1812320D-02
BARRA	2	=	0.4877360D-01	MVO	2	=	0.2279360D-02
BARRA	3	=	0.4063580D-01	MVO	3	=	0.1651350D-02
BARRA	4	=	0.4530350D-01	MVO	4	=	0.2052410D-02
BARRA	5	=	0.3815160D-01	MVO	5	=	0.1626320D-02
BARRA	6	=	0.4354710D-01	MVO	6	=	0.1631780D-02
BARRA	7	=	0.3922990D-01	MVO	7	=	0.1404940D-02
BARRA	8	=	0.3536600D-01	MVO	8	=	0.1093440D-02

TABELA V.7

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSÃO HARMONICA DE ORDEM 5

			REAL	IMAG				
BARRA	1	TENSAO =	-.1459940-04	0.2201430-04	PU MODULO =	0.2668820-04	(PU) ANGULO =	123.17 GRAUS
BARRA	2	TENSAO =	-.1766570-04	0.2542930-04	PU MODULO =	0.3096330-04	(PU) ANGULO =	124.79 GRAUS
BARRA	3	TENSAO =	-.1219370-04	0.1626110-04	PU MODULO =	0.1931990-04	(PU) ANGULO =	116.91 GRAUS
BARRA	4	TENSAO =	-.1659120-04	0.1846870-04	PU MODULO =	0.2480220-04	(PU) ANGULO =	119.21 GRAUS
BARRA	5	TENSAO =	-.1611910-04	0.1910530-04	PU MODULO =	0.2496440-04	(PU) ANGULO =	119.34 GRAUS
BARRA	6	TENSAO =	-.1622190-04	0.2599400-04	PU MODULO =	0.3060520-04	(PU) ANGULO =	124.14 GRAUS
BARRA	7	TENSAO =	-.2290870-04	0.3013440-04	PU MODULO =	0.3761290-04	(PU) ANGULO =	126.76 GRAUS
BARRA	8	TENSAO =	0.3001690-05	0.5078480-05	PU MODULO =	0.6163700-05	(PU) ANGULO =	59.41 GRAUS

TABELA V.8

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 5

				REAL	IMAG						
LINHA	1	-	2	-.723914D-05	-.750649D-05	(PU)	MODULO =0.104278D-04	(PU)	ANGULO =	226.04	GRAUS
LINHA	1	-	3	-.218917D-04	-.228150D-04	(PU)	MODULO =0.316379D-04	(PU)	ANGULO =	227.39	GRAUS
LINHA	1	-	5	0.238197D-04	0.252066D-04	(PU)	MODULO =0.344743D-04	(PU)	ANGULO =	46.96	GRAUS
LINHA	1	-	4	0.961073D-05	0.101438D-04	(PU)	MODULO =0.141996D-04	(PU)	ANGULO =	47.37	GRAUS
LINHA	4	-	5	0.386313D-05	0.404730D-05	(PU)	MODULO =0.559296D-05	(PU)	ANGULO =	46.36	GRAUS
LINHA	3	-	4	-.575045D-05	-.689171D-05	(PU)	MODULO =0.899779D-05	(PU)	ANGULO =	226.92	GRAUS
LINHA	3	-	6	0.122792D-03	0.131995D-03	(PU)	MODULO =0.179953D-03	(PU)	ANGULO =	46.98	GRAUS
LINHA	3	-	7	-.986259D-04	-.106356D-03	(PU)	MODULO =0.144306D-03	(PU)	ANGULO =	226.89	GRAUS
LINHA	2	-	3	0.164157D-04	0.172962D-04	(PU)	MODULO =0.238514D-04	(PU)	ANGULO =	47.16	GRAUS
LINHA	2	-	7	-.256939D-04	-.273626D-04	(PU)	MODULO =0.375079D-04	(PU)	ANGULO =	226.85	GRAUS
LINHA	6	-	7	-.997197D-04	-.108774D-03	(PU)	MODULO =0.147199D-03	(PU)	ANGULO =	227.36	GRAUS
LINHA	5	-	6	-.739279D-04	-.801366D-04	(PU)	MODULO =0.108960D-03	(PU)	ANGULO =	227.35	GRAUS
LINHA	5	-	8	0.101107D-03	0.109391D-03	(PU)	MODULO =0.149126D-03	(PU)	ANGULO =	47.22	GRAUS
LINHA	7	-	8	0.132694D-03	0.142881D-03	(PU)	MODULO =0.194938D-03	(PU)	ANGULO =	46.72	GRAUS

TABELA V.9

TENSOES HARMONICAS NAS BARRAS

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 11

			REAL	IMAG			
BARRA	1	TENSAO =	0.6497680-05	-.3999930-05	PU MODULO =	0.7633160-05 (PU)	ANGULO = -27.62 GRAUS
BARRA	2	TENSAO =	0.4335130-05	-.2267020-05	PU MODULO =	0.4892100-05 (PU)	ANGULO = -27.61 GRAUS
BARRA	3	TENSAO =	0.1036920-04	-.5610570-05	PU MODULO =	0.1228160-04 (PU)	ANGULO = -27.30 GRAUS
BARRA	4	TENSAO =	0.9248710-05	-.4797950-05	PU MODULO =	0.1041920-04 (PU)	ANGULO = -27.42 GRAUS
BARRA	5	TENSAO =	0.9930160-05	-.4977490-05	PU MODULO =	0.1079330-04 (PU)	ANGULO = -27.42 GRAUS
BARRA	6	TENSAO =	0.1360340-05	-.2212910-05	PU MODULO =	0.6053570-05 (PU)	ANGULO = -27.69 GRAUS
BARRA	7	TENSAO =	0.9843250-06	-.5513130-06	PU MODULO =	0.1123200-05 (PU)	ANGULO = -29.25 GRAUS
BARRA	8	TENSAO =	0.1892590-04	-.9694230-05	PU MODULO =	0.2126420-04 (PU)	ANGULO = -27.12 GRAUS

TABELA V.10

FLUXO DE CORRENTE NAS LINHAS

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 11

				REAL	IMAG					
LINHA	1	-	2	-.1206111-05	-.2353471-05 (PU)	MODULO =0.2641740-05 (PU)	ANGULO =	242.98	GRAUS
LINHA	1	-	6	-.4311010-05	-.8481320-05 (PU)	MODULO =0.9513180-05 (PU)	ANGULO =	243.59	GRAUS
LINHA	1	-	5	0.3916980-05	0.7813960-05 (PU)	MODULO =0.8737990-05 (PU)	ANGULO =	63.41	GRAUS
LINHA	1	-	4	0.1606100-05	0.3221330-05 (PU)	MODULO =0.3596440-05 (PU)	ANGULO =	63.39	GRAUS
LINHA	4	-	5	0.6405510-06	0.1284020-05 (PU)	MODULO =0.1417060-05 (PU)	ANGULO =	63.13	GRAUS
LINHA	3	-	4	-.9895410-06	-.1957300-05 (PU)	MODULO =0.2173850-05 (PU)	ANGULO =	243.93	GRAUS
LINHA	2	-	9	0.2741900-04	0.5479770-04 (PU)	MODULO =0.6136950-04 (PU)	ANGULO =	63.41	GRAUS
LINHA	3	-	7	-.1639540-04	-.3260460-04 (PU)	MODULO =0.3657520-04 (PU)	ANGULO =	243.37	GRAUS
LINHA	2	-	3	0.3164030-05	0.6142110-05 (PU)	MODULO =0.6864590-05 (PU)	ANGULO =	63.49	GRAUS
LINHA	2	-	7	-.4264030-04	-.8496220-04 (PU)	MODULO =0.9506280-04 (PU)	ANGULO =	243.33	GRAUS
LINHA	6	-	7	-.1660210-04	-.3341660-04 (PU)	MODULO =0.3731360-04 (PU)	ANGULO =	243.68	GRAUS
LINHA	5	-	6	-.1229150-04	-.2473490-04 (PU)	MODULO =0.2762040-04 (PU)	ANGULO =	243.93	GRAUS
LINHA	5	-	8	0.1684200-04	0.3381280-04 (PU)	MODULO =0.3777530-04 (PU)	ANGULO =	63.92	GRAUS
LINHA	7	-	8	0.2204790-04	0.4381520-04 (PU)	MODULO =0.4903260-04 (PU)	ANGULO =	63.29	GRAUS

TABELA V.11

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 23

			REAL	IMAG				
BARRA	1	TENSAO =	0.2674980-05	-.3278280-05	PU MODULO =	0.4231150-05	(PU) ANGULO =	-50.79 GRAUS
BARRA	2	TENSAO =	0.1936810-05	-.2519100-05	PU MODULO =	0.3116540-05	(PU) ANGULO =	-53.90 GRAUS
BARRA	3	TENSAO =	0.4368980-05	-.4792770-05	PU MODULO =	0.6484900-05	(PU) ANGULO =	-47.65 GRAUS
BARRA	4	TENSAO =	0.3744970-05	-.4233380-05	PU MODULO =	0.5649430-05	(PU) ANGULO =	-48.53 GRAUS
BARRA	5	TENSAO =	0.3869470-05	-.4349180-05	PU MODULO =	0.5821500-05	(PU) ANGULO =	-48.35 GRAUS
BARRA	6	TENSAO =	0.2234110-05	-.2801080-05	PU MODULO =	0.3645800-05	(PU) ANGULO =	-52.21 GRAUS
BARRA	7	TENSAO =	0.5376940-06	-.1351300-05	PU MODULO =	0.1454350-05	(PU) ANGULO =	-68.30 GRAUS
BARRA	8	TENSAO =	0.7496020-05	-.7587340-05	PU MODULO =	0.1066080-04	(PU) ANGULO =	-45.37 GRAUS

TABELA V.12

Escola Federal de Engenharia - Itajubá
Biblioteca MAUÁ

FLUXO DE CORRENTE NAS LINHAS

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 23

			REAL	IMAG					
LINHA	1	- 2	-.3917200-06	-.4361200-06	(PU)	MODULO =0.5858640-06	(PU)	ANGULO =	228.11 GRAUS
LINHA	1	- 6	-.1427510-05	-.1607740-05	(PU)	MODULO =0.2150030-05	(PU)	ANGULO =	228.40 GRAUS
LINHA	1	- 5	0.1284910-05	0.1447320-05	(PU)	MODULO =0.1939100-05	(PU)	ANGULO =	48.31 GRAUS
LINHA	4	- 5	0.5297370-06	0.5945400-06	(PU)	MODULO =0.7976650-06	(PU)	ANGULO =	48.39 GRAUS
LINHA	3	- 4	0.2095790-06	0.2341480-06	(PU)	MODULO =0.3142900-06	(PU)	ANGULO =	48.18 GRAUS
LINHA	3	- 8	-.3201540-06	-.3623481-06	(PU)	MODULO =0.4835240-06	(PU)	ANGULO =	228.54 GRAUS
LINHA	3	- 7	0.6725060-05	0.7596770-05	(PU)	MODULO =0.1031950-04	(PU)	ANGULO =	48.51 GRAUS
LINHA	2	- 3	-.5097610-05	-.6016160-05	(PU)	MODULO =0.8112420-05	(PU)	ANGULO =	228.29 GRAUS
LINHA	2	- 7	0.1011960-05	0.1137730-05	(PU)	MODULO =0.1522600-05	(PU)	ANGULO =	48.35 GRAUS
LINHA	6	- 7	-.1403120-05	-.1573830-05	(PU)	MODULO =0.2109480-05	(PU)	ANGULO =	228.28 GRAUS
LINHA	5	- 6	-.5495720-05	-.6188290-05	(PU)	MODULO =0.8276420-05	(PU)	ANGULO =	228.39 GRAUS
LINHA	5	- 8	-.4063210-05	-.4580640-05	(PU)	MODULO =0.6126390-05	(PU)	ANGULO =	228.39 GRAUS
LINHA	7	- 8	0.9586790-05	0.1062160-04	(PU)	MODULO =0.1430770-04	(PU)	ANGULO =	48.36 GRAUS
LINHA	7	- 8	0.7244200-05	0.8117470-05	(PU)	MODULO =0.1087990-04	(PU)	ANGULO =	48.25 GRAUS

TABELA V.13

FATOR DE DISTURCAO DE TENSAO

BARRA	1	=	0.676674D-04	MVO	1	=	0.457688D-09
BARRA	2	=	0.619679D-04	MVO	2	=	0.384033D-09
BARRA	3	=	0.921147D-04	MVO	3	=	0.874283D-09
BARRA	4	=	0.763993D-04	MVO	4	=	0.583693D-09
BARRA	5	=	0.733477D-04	MVO	5	=	0.601291D-09
BARRA	6	=	0.655981D-04	MVO	6	=	0.416306D-09
BARRA	7	=	0.587232D-04	MVO	7	=	0.313841D-09
BARRA	8	=	0.122420D-03	MVO	8	=	0.131017D-07

TABELA V.14

SISTEMA II

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 5

			REAL	IMAG			
BARRA	1	TENSAO =	-.314020D-04	-.342079D-04	PU MODULO =0.464320D-04	(PU) ANGULO =	227.44 GRAUS
BARRA	2	TENSAO =	-.994910D-04	-.730027D-04	PU MODULO =0.941731D-04	(PU) ANGULO =	230.82 GRAUS
BARRA	3	TENSAO =	-.686181D-04	-.899604D-04	PU MODULO =0.109989D-03	(PU) ANGULO =	231.40 GRAUS
BARRA	4	TENSAO =	-.314064D-04	-.342073D-04	PU MODULO =0.464382D-04	(PU) ANGULO =	227.44 GRAUS
BARRA	5	TENSAO =	-.314073D-04	-.342082D-04	PU MODULO =0.464395D-04	(PU) ANGULO =	227.44 GRAUS
BARRA	6	TENSAO =	-.254409D-04	-.236250D-04	PU MODULO =0.360933D-04	(PU) ANGULO =	225.18 GRAUS
BARRA	7	TENSAO =	-.254409D-04	-.256025D-04	PU MODULO =0.360933D-04	(PU) ANGULO =	225.18 GRAUS
BARRA	8	TENSAO =	-.620038D-03	-.106416D-02	PU MODULO =0.123162D-02	(PU) ANGULO =	239.77 GRAUS
BARRA	9	TENSAO =	-.620038D-03	-.106416D-02	PU MODULO =0.123162D-02	(PU) ANGULO =	239.77 GRAUS
BARRA	10	TENSAO =	-.194790D-04	-.170014D-04	PU MODULO =0.258549D-04	(PU) ANGULO =	221.11 GRAUS
BARRA	11	TENSAO =	-.206765D-02	-.287583D-02	PU MODULO =0.354197D-02	(PU) ANGULO =	234.28 GRAUS
BARRA	12	TENSAO =	-.206765D-02	-.287583D-02	PU MODULO =0.354197D-02	(PU) ANGULO =	234.28 GRAUS
BARRA	13	TENSAO =	-.440538D-04	-.514868D-04	PU MODULO =0.677616D-04	(PU) ANGULO =	229.45 GRAUS
BARRA	14	TENSAO =	-.440538D-04	-.514868D-04	PU MODULO =0.677616D-04	(PU) ANGULO =	229.45 GRAUS
BARRA	15	TENSAO =	-.620038D-03	-.106416D-02	PU MODULO =0.123162D-02	(PU) ANGULO =	239.77 GRAUS
BARRA	16	TENSAO =	-.206765D-02	-.287583D-02	PU MODULO =0.354196D-02	(PU) ANGULO =	234.28 GRAUS

TABELA V.16

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

C O R R E N T E H A R M O N I C A D E O R D E M 5

				REAL	IMAG					
LINHA	1	-	2	0.1(0094D-(2	-.6586291-(3	(PU)	MODULO =0.11982(D-(2	(PU)	ANGULO =	-33.35 GRAUS
LINHA	1	-	3	0.1(007(D-(2	-.6584721-(3	(PU)	MODULO =(.1197(6D-(2	(PU)	ANGULO =	-33.34 GRAUS
LINHA	1	-	5	(.3262180-(6	-.2995(7D-(6	(PU)	MODULO =0.442857D-(6	(PU)	ANGULO =	-42.56 GRAUS
LINHA	2	-	3	0.1(0016(D-02	-.6579913-(3	(PU)	MODULO =0.1197191-(2	(PU)	ANGULO =	-33.34 GRAUS
LINHA	3	-	9	(.6126(7D-(3	-.3423361-(3	(PU)	MODULO =0.7018(7D-03	(PU)	ANGULO =	-29.19 GRAUS
LINHA	3	-	9	0.6126(7D-03	-.3423361-(3	(PU)	MODULO =0.7(1(37D-03	(PU)	ANGULO =	-29.19 GRAUS
LINHA	3	-	11	(.1746411-(2	-.1242621-(2	(PU)	MODULO =0.2145121-02	(PU)	ANGULO =	-35.41 GRAUS
LINHA	3	-	12	0.1746411D-02	-.1242621-02	(PU)	MODULO =0.2145121-(2	(PU)	ANGULO =	-35.41 GRAUS
LINHA	3	-	13	-.1361471-(2	0.9275151-(3	(PU)	MODULO =(.1647291-(2	(PU)	ANGULO =	145.73 GRAUS
LINHA	3	-	14	-.1361451-(2	0.9275551-(3	(PU)	MODULO =(.1647291-02	(PU)	ANGULO =	145.73 GRAUS
LINHA	4	-	1	-.3451(4D-(6	0.3(3357D-((	(PU)	MODULO =0.5373261-((	(PU)	ANGULO =	137.44 GRAUS
LINHA	5	-	4	-.3479991-(7	0.3194(7D-(7	(PU)	MODULO =0.4724131-07	(PU)	ANGULO =	137.44 GRAUS
LINHA	6	-	1	0.1(0169D-(2	-.(593511-(3	(PU)	MODULO =0.1199211-02	(PU)	ANGULO =	-33.35 GRAUS
LINHA	7	-	1	0.1(0169D-02	-.6593511-(3	(PU)	MODULO =0.1199211-02	(PU)	ANGULO =	-33.35 GRAUS
LINHA	8	-	15	0.6126851-(3	-.3423291-(3	(PU)	MODULO =0.7018341-03	(PU)	ANGULO =	-29.19 GRAUS
LINHA	9	-	15	0.6126811-(3	-.3423291-(3	(PU)	MODULO =0.7(1(341-03	(PU)	ANGULO =	-29.19 GRAUS
LINHA	10	-	6	(.1(017(D-(2	-.(59416(D-(3	(PU)	MODULO =0.1199331-02	(PU)	ANGULO =	-33.35 GRAUS
LINHA	10	-	7	(.1(017(D-(2	-.(594161-(3	(PU)	MODULO =(.1199331-02	(PU)	ANGULO =	-33.35 GRAUS
LINHA	10	-	13	0.1361921-02	-.9275551-(3	(PU)	MODULO =0.1648011-(2	(PU)	ANGULO =	-34.27 GRAUS
LINHA	10	-	14	0.1361911-(2	-.9275551-(3	(PU)	MODULO =0.1648011-(2	(PU)	ANGULO =	-34.27 GRAUS
LINHA	11	-	16	(.174(41(-(2	-.1242(11-(2	(PU)	MODULO =(.2145111-(2	(PU)	ANGULO =	-35.41 GRAUS
LINHA	12	-	16	0.1746411-(2	-.1242(11-(2	(PU)	MODULO =(.2145111-02	(PU)	ANGULO =	-35.41 GRAUS

TABELA V.17

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 13

			REAL	IMAG			
BARRA	1	TENSAO =	-.973179D-05	-.198842D-04	PU MODULO =	0.221379D-04 (PU)	ANGULO = 243.92 GRAUS
BARRA	2	TENSAO =	-.290079D-04	-.611241D-04	PU MODULO =	0.676671D-04 (PU)	ANGULO = 244.62 GRAUS
BARRA	3	TENSAO =	-.252977D-04	-.747100D-04	PU MODULO =	0.826563D-04 (PU)	ANGULO = 244.73 GRAUS
BARRA	4	TENSAO =	-.974190D-05	-.199020D-04	PU MODULO =	0.221579D-04 (PU)	ANGULO = 243.92 GRAUS
BARRA	5	TENSAO =	-.974263D-05	-.199188D-04	PU MODULO =	0.221622D-04 (PU)	ANGULO = 243.92 GRAUS
BARRA	6	TENSAO =	-.558131D-05	-.108174D-04	PU MODULO =	0.121724D-04 (PU)	ANGULO = 242.71 GRAUS
BARRA	7	TENSAO =	-.558131D-05	-.108174D-04	PU MODULO =	0.121724D-04 (PU)	ANGULO = 242.71 GRAUS
BARRA	8	TENSAO =	-.477015D-02	-.123141D-01	PU MODULO =	0.132057D-01 (PU)	ANGULO = 248.82 GRAUS
BARRA	9	TENSAO =	-.477015D-02	-.123141D-01	PU MODULO =	0.132057D-01 (PU)	ANGULO = 248.82 GRAUS
BARRA	10	TENSAO =	-.142972D-05	-.174010D-05	PU MODULO =	0.225062D-05 (PU)	ANGULO = 230.73 GRAUS
BARRA	11	TENSAO =	0.292057D-02	0.823323D-02	PU MODULO =	0.873589D-02 (PU)	ANGULO = 70.47 GRAUS
BARRA	12	TENSAO =	0.292057D-02	0.823323D-02	PU MODULO =	0.873589D-02 (PU)	ANGULO = 70.47 GRAUS
BARRA	13	TENSAO =	-.153784D-04	-.322111D-04	PU MODULO =	0.424732D-04 (PU)	ANGULO = 244.36 GRAUS
BARRA	14	TENSAO =	-.153784D-04	-.322111D-04	PU MODULO =	0.424732D-04 (PU)	ANGULO = 244.36 GRAUS
BARRA	15	TENSAO =	-.477015D-02	-.123141D-01	PU MODULO =	0.132057D-01 (PU)	ANGULO = 248.82 GRAUS
BARRA	16	TENSAO =	0.292057D-02	0.823324D-02	PU MODULO =	0.873590D-02 (PU)	ANGULO = 70.47 GRAUS

TABELA V.18

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 13

				REAL	IMAG					
LINHA	1	-	2	(.4003310-03	-.1787630-02	(PU)	MODULO =0.4384300-03	(PU)	ANGULO =	-24.06 GRAUS
LINHA	1	-	3	0.3995000-03	-.1785630-03	(PU)	MODULO =0.4379610-03	(PU)	ANGULO =	-24.06 GRAUS
LINHA	1	-	5	0.4938290-06	-.2415560-06	(PU)	MODULO =0.5494730-06	(PU)	ANGULO =	-26.06 GRAUS
LINHA	2	-	3	0.3986270-03	-.1779550-03	(PU)	MODULO =0.4365460-03	(PU)	ANGULO =	-24.06 GRAUS
LINHA	3	-	8	0.2943870-02	-.1133120-02	(PU)	MODULO =0.3154710-02	(PU)	ANGULO =	-21.07 GRAUS
LINHA	3	-	9	0.2943870-02	-.1133930-02	(PU)	MODULO =0.3154710-02	(PU)	ANGULO =	-21.07 GRAUS
LINHA	3	-	11	-.1998260-02	0.7076930-03	(PU)	MODULO =0.2119810-02	(PU)	ANGULO =	160.50 GRAUS
LINHA	3	-	12	-.1998260-02	0.7076930-03	(PU)	MODULO =0.2119810-02	(PU)	ANGULO =	-160.50 GRAUS
LINHA	3	-	13	-.5492190-03	0.2489740-03	(PU)	MODULO =0.6020660-03	(PU)	ANGULO =	155.58 GRAUS
LINHA	3	-	14	-.5492190-03	0.2489740-03	(PU)	MODULO =0.6020660-03	(PU)	ANGULO =	155.58 GRAUS
LINHA	4	-	1	-.5987590-06	0.2930590-06	(PU)	MODULO =0.6666310-06	(PU)	ANGULO =	153.92 GRAUS
LINHA	5	-	4	-.5.666780-07	0.2577100-07	(PU)	MODULO =0.5863690-07	(PU)	ANGULO =	153.92 GRAUS
LINHA	6	-	1	0.4014040-03	-.1792120-03	(PU)	MODULO =0.4396250-03	(PU)	ANGULO =	-24.07 GRAUS
LINHA	7	-	1	0.4014040-03	-.1792120-03	(PU)	MODULO =0.4396250-03	(PU)	ANGULO =	-24.07 GRAUS
LINHA	9	-	15	0.2943800-02	-.1133910-02	(PU)	MODULO =0.3154630-02	(PU)	ANGULO =	-21.07 GRAUS
LINHA	9	-	15	0.2943800-02	-.1133910-02	(PU)	MODULO =0.3154630-02	(PU)	ANGULO =	-21.07 GRAUS
LINHA	10	-	6	(.4014990-03	-.1793460-03	(PU)	MODULO =0.4397310-03	(PU)	ANGULO =	-24.07 GRAUS
LINHA	10	-	7	(.4014990-03	-.1793460-03	(PU)	MODULO =0.4397310-03	(PU)	ANGULO =	-24.07 GRAUS
LINHA	10	-	13	0.5491220-03	-.2493080-03	(PU)	MODULO =0.6030670-03	(PU)	ANGULO =	-24.42 GRAUS
LINHA	10	-	14	0.5491220-03	-.2493080-03	(PU)	MODULO =0.6030670-03	(PU)	ANGULO =	-24.42 GRAUS
LINHA	11	-	16	-.1998150-02	0.7076420-03	(PU)	MODULO =0.2119760-02	(PU)	ANGULO =	160.50 GRAUS
LINHA	12	-	16	-.1998150-02	0.7076420-03	(PU)	MODULO =0.2119760-02	(PU)	ANGULO =	160.50 GRAUS

TABELA V.19

FATOR DE DISTORCAO DE TENSAO

BARRA	1 =	0.682328D-03	MVQ	1 =	0.466593D-06
BARRA	2 =	0.232807D-02	MVQ	2 =	0.454681D-05
BARRA	3 =	0.259721D-02	MVQ	3 =	0.677249D-05
BARRA	4 =	0.685317D-03	MVQ	4 =	0.476600D-06
BARRA	5 =	0.685955D-03	MVQ	5 =	0.471475D-06
BARRA	6 =	0.364089D-03	MVQ	6 =	0.132560D-06
BARRA	7 =	0.364089D-03	MVQ	7 =	0.132560D-06
BARRA	8 =	0.676510D-01	MVQ	8 =	0.456751D-02
BARRA	9 =	0.676510D-01	MVQ	9 =	0.456751D-02
BARRA	10 =	0.687092D-04	MVQ	10 =	0.472095D-08
BARRA	11 =	0.101142D 00	MVQ	11 =	0.102093D-01
BARRA	12 =	0.101142D 00	MVQ	12 =	0.102093D-01
BARRA	13 =	0.132933D-02	MVQ	13 =	0.176006D-05
BARRA	14 =	0.132933D-02	MVQ	14 =	0.176006D-05
BARRA	15 =	0.691285D-01	MVQ	15 =	0.456752D-02
BARRA	16 =	0.102580D 00	MVQ	16 =	0.102093D-01

TABELA V.20

TENSOES HARMONICAS NAS BARRAS

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 5

		REAL	IMAG			
BARRA	1	:TENSAO = 0.180752D-06	0.241099D-06	PU MODULO =	0.301330D-06	(PU) ANGULO = 53.14 GRAUS
BARRA	2	:TENSAO = 0.266186D-06	0.404397D-06	PU MODULO =	0.484140D-06	(PU) ANGULO = 56.65 GRAUS
BARRA	3	:TENSAO = 0.293741D-06	0.458779D-06	PU MODULO =	0.544758D-06	(PU) ANGULO = 57.37 GRAUS
BARRA	4	:TENSAO = 0.180777D-06	0.241130D-06	PU MODULO =	0.301371D-06	(PU) ANGULO = 53.14 GRAUS
BARRA	5	:TENSAO = 0.180783D-06	0.241137D-06	PU MODULO =	0.301379D-06	(PU) ANGULO = 53.14 GRAUS
BARRA	6	:TENSAO = 0.162806D-06	0.205031D-06	PU MODULO =	0.261808D-06	(PU) ANGULO = 51.55 GRAUS
BARRA	7	:TENSAO = 0.162806D-06	0.205031D-06	PU MODULO =	0.261808D-06	(PU) ANGULO = 51.55 GRAUS
BARRA	8	:TENSAO = 0.188981D-05	0.473474D-05	PU MODULO =	0.509795D-05	(PU) ANGULO = 68.24 GRAUS
BARRA	9	:TENSAO = 0.188981D-05	0.473474D-05	PU MODULO =	0.509795D-05	(PU) ANGULO = 68.24 GRAUS
BARRA	10	:TENSAO = 0.144856D-06	0.168956D-06	PU MODULO =	0.222553D-06	(PU) ANGULO = 49.39 GRAUS
BARRA	11	:TENSAO = 0.631727D-05	0.119410D-04	PU MODULO =	0.135091D-04	(PU) ANGULO = 62.12 GRAUS
BARRA	12	:TENSAO = 0.631727D-05	0.119410D-04	PU MODULO =	0.135091D-04	(PU) ANGULO = 62.12 GRAUS
BARRA	13	:TENSAO = 0.219325D-06	0.313904D-06	PU MODULO =	0.382935D-06	(PU) ANGULO = 55.06 GRAUS
BARRA	14	:TENSAO = 0.219325D-06	0.313904D-06	PU MODULO =	0.382935D-06	(PU) ANGULO = 55.06 GRAUS
BARRA	15	:TENSAO = 0.188981D-05	0.473475D-05	PU MODULO =	0.509796D-05	(PU) ANGULO = 68.24 GRAUS
BARRA	16	:TENSAO = 0.631728D-05	0.119410D-04	PU MODULO =	0.135091D-04	(PU) ANGULO = 62.12 GRAUS

TABELA V.21

FLUXO DE CORRENTE NAS LINHAS

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 5

				REAL	IMAG					
LINHA	1	-	2 :	-.4176090-05	0.1952730-05	(PU)	MODULO =0.4610080-05	(PU)	ANGULO =	154.94 GRAUS
LINHA	1	-	3 :	-.4175010-05	0.1952030-05	(PU)	MODULO =0.4608810-05	(PU)	ANGULO =	154.94 GRAUS
LINHA	1	-	5 :	-.2299540-08	0.1723980-08	(PU)	MODULO =0.2874020-08	(PU)	ANGULO =	143.14 GRAUS
LINHA	2	-	3 :	-.4171760-05	0.1949870-05	(PU)	MODULO =0.4604950-05	(PU)	ANGULO =	154.95 GRAUS
LINHA	2	-	8 :	-.2676280-05	0.9874500-06	(PU)	MODULO =0.2852640-05	(PU)	ANGULO =	159.75 GRAUS
LINHA	3	-	9 :	-.2676230-05	0.9874500-06	(PU)	MODULO =0.2852640-05	(PU)	ANGULO =	159.75 GRAUS
LINHA	3	-	11 :	-.7190710-05	0.3737620-05	(PU)	MODULO =0.8104080-05	(PU)	ANGULO =	152.54 GRAUS
LINHA	3	-	12 :	-.7190710-05	0.3737620-05	(PU)	MODULO =0.8104060-05	(PU)	ANGULO =	152.54 GRAUS
LINHA	3	-	13 :	0.5697900-05	-.2776860-05	(PU)	MODULO =0.6338530-05	(PU)	ANGULO =	-25.98 GRAUS
LINHA	3	-	14 :	0.5697900-05	-.2776860-05	(PU)	MODULO =0.6338530-05	(PU)	ANGULO =	-25.98 GRAUS
LINHA	4	-	1 :	0.2790070-08	-.2091740-08	(PU)	MODULO =0.3487090-08	(PU)	ANGULO =	-36.86 GRAUS
LINHA	5	-	4 :	0.2453000-09	-.1839050-09	(PU)	MODULO =0.3065830-09	(PU)	ANGULO =	-36.86 GRAUS
LINHA	6	-	1 :	-.4181540-05	0.1956870-05	(PU)	MODULO =0.4616780-05	(PU)	ANGULO =	154.92 GRAUS
LINHA	7	-	1 :	-.4181540-05	0.1956870-05	(PU)	MODULO =0.4616780-05	(PU)	ANGULO =	154.92 GRAUS
LINHA	8	-	15 :	-.2676270-05	0.9874460-06	(PU)	MODULO =0.2852630-05	(PU)	ANGULO =	159.75 GRAUS
LINHA	9	-	15 :	-.2676270-05	0.9874460-06	(PU)	MODULO =0.2852630-05	(PU)	ANGULO =	159.75 GRAUS
LINHA	10	-	6 :	-.4182220-05	0.1957410-05	(PU)	MODULO =0.4617630-05	(PU)	ANGULO =	154.92 GRAUS
LINHA	10	-	7 :	-.4182220-05	0.1957410-05	(PU)	MODULO =0.4617630-05	(PU)	ANGULO =	154.92 GRAUS
LINHA	10	-	13 :	-.5700740-05	0.2770850-05	(PU)	MODULO =0.6341960-05	(PU)	ANGULO =	154.01 GRAUS
LINHA	10	-	14 :	-.5700740-05	0.2770850-05	(PU)	MODULO =0.6341960-05	(PU)	ANGULO =	154.01 GRAUS
LINHA	11	-	16 :	-.7190630-05	0.3737610-05	(PU)	MODULO =0.8104060-05	(PU)	ANGULO =	152.54 GRAUS
LINHA	12	-	16 :	-.7190690-05	0.3737610-05	(PU)	MODULO =0.8104060-05	(PU)	ANGULO =	152.54 GRAUS

TABELA V.22

TENSOES HARMONICAS NAS BARRAS

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 13

	REAL	IMAG		
BARRA 1	:TENSAO = -.116550D-06	-.211549D-06	PU MODULO =0.241530D-06	(PU) ANGULO = 241.15 GRAUS
BARRA 2	:TENSAO = -.283305D-06	-.568358D-06	PU MODULO =0.635053D-06	(PU) ANGULO = 243.51 GRAUS
BARRA 3	:TENSAO = -.337686D-06	-.686300D-06	PU MODULO =0.764879D-06	(PU) ANGULO = 243.80 GRAUS
BARRA 4	:TENSAO = -.116659D-06	-.211738D-06	PU MODULO =0.241748D-06	(PU) ANGULO = 241.15 GRAUS
BARRA 5	:TENSAO = - 116682D-06	-.211778D-06	PU MODULO =0.241795D-06	(PU) ANGULO = 241.15 GRAUS
BARRA 6	:TENSAO = -.855993D-07	-.133067D-06	PU MODULO =0.155574D-06	(PU) ANGULO = 238.80 GRAUS
BARRA 7	:TENSAO = - 855993D-07	- 133067D-06	PU MODULO =0.155574D-06	(PU) ANGULO = 238.80 GRAUS
BARRA 8	:TENSAO = - 406449D-05	-.913108D-05	PU MODULO =0.999483D-05	(PU) ANGULO = 246.00 GRAUS
BARRA 9	:TENSAO = - 406448D-05	- 913108D-05	PU MODULO =0.999482D-05	(PU) ANGULO = 246.00 GRAUS
BARRA 10	:TENSAO = - 446325D-07	- 545597D-07	PU MODULO =0.704899D-07	(PU) ANGULO = 230.72 GRAUS
BARRA 11	:TENSAO = - 119955D-04	- 262407D-04	PU MODULO =0.288525D-04	(PU) ANGULO = 245.43 GRAUS
BARRA 12	:TENSAO = - 119955D-04	- 262407D-04	PU MODULO =0.288525D-04	(PU) ANGULO = 245.43 GRAUS
BARRA 13	:TENSAO = -.191312D-06	- 370721D-06	PU MODULO =0.417174D-06	(PU) ANGULO = 242.70 GRAUS
BARRA 14	:TENSAO = -.191312D-06	-.370721D-06	PU MODULO =0.417174D-06	(PU) ANGULO = 242.70 GRAUS
BARRA 15	:TENSAO = - 406449D-05	- 913110D-05	PU MODULO =0.999485D-05	(PU) ANGULO = 246.00 GRAUS
BARRA 16	:TENSAO = - 119955D-04	- 262408D-04	PU MODULO =0.288526D-04	(PU) ANGULO = 245.43 GRAUS

TABELA V.23

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 13

				REAL	IMAG					
LINHA	1	-	2 :	0.346283D-05	- 154646D-05 (PU)	MODULO	=0.379246D-05 (PU)	ANGULO	=	-24.06 GRAUS
LINHA	1	-	3 :	0.345989D-05	- 1544510-05 (PU)	MODULO	=0.3788060-05 (PU)	ANGULO	=	-24.06 GRAUS
LINHA	1	-	5 :	0.525066D-08	-.2892920-08 (PU)	MODULO	=0.999488D-08 (PU)	ANGULO	=	-28.65 GRAUS
LINHA	2	-	3 :	0.344700D-05	-.153856D-05 (PU)	MODULO	=0.3774700-05 (PU)	ANGULO	=	-24.05 GRAUS
LINHA	3	-	8 :	0.203139D-05	-.892935D-06 (PU)	MODULO	=0.2218940-05 (PU)	ANGULO	=	-23.73 GRAUS
LINHA	3	-	9 :	0.203139D-05	-.892935D-06 (PU)	MODULO	=0.2218940-05 (PU)	ANGULO	=	-23.73 GRAUS
LINHA	3	-	11 :	0.614712D-05	-.279349D-05 (PU)	MODULO	=0.6752090-05 (PU)	ANGULO	=	-24.44 GRAUS
LINHA	3	-	12 :	0.614712D-05	-.279349D-05 (PU)	MODULO	=0.6752090-05 (PU)	ANGULO	=	-24.44 GRAUS
LINHA	3	-	13 :	-.474219D-05	0.215309D-05 (PU)	MODULO	=0.5208090-05 (PU)	ANGULO	=	155.58 GRAUS
LINHA	3	-	14 :	-.474219D-05	0.215309D-05 (PU)	MODULO	=0.5208090-05 (PU)	ANGULO	=	155.58 GRAUS
LINHA	4	-	1 :	-.637022D-08	0.350973D-08 (PU)	MODULO	=0.727309D-08 (PU)	ANGULO	=	151.15 GRAUS
LINHA	5	-	4 :	-.560323D-09	0.308721D-09 (PU)	MODULO	=0.639742D-09 (PU)	ANGULO	=	151.15 GRAUS
LINHA	6	-	1 :	0.347453D-05	-.155302D-05 (PU)	MODULO	=0.3805820-05 (PU)	ANGULO	=	-24.06 GRAUS
LINHA	7	-	1 :	0.347453D-05	-.155302D-05 (PU)	MODULO	=0.3805820-05 (PU)	ANGULO	=	-24.06 GRAUS
LINHA	8	-	15 :	0.203139D-05	-.892913D-06 (PU)	MODULO	=0.2218869-05 (PU)	ANGULO	=	-23.73 GRAUS
LINHA	9	-	15 :	0.203139D-05	-.892913D-06 (PU)	MODULO	=0.2218869-05 (PU)	ANGULO	=	-23.73 GRAUS
LINHA	10	-	6 :	0.347569D-05	-.155372D-05 (PU)	MODULO	=0.3807160-05 (PU)	ANGULO	=	-24.09 GRAUS
LINHA	10	-	7 :	0.347569D-05	-.155372D-05 (PU)	MODULO	=0.3807160-05 (PU)	ANGULO	=	-24.09 GRAUS
LINHA	10	-	13 :	0.475089D-05	-.215786D-05 (PU)	MODULO	=0.5217910-05 (PU)	ANGULO	=	-24.42 GRAUS
LINHA	10	-	14 :	0.475089D-05	-.215786D-05 (PU)	MODULO	=0.5217910-05 (PU)	ANGULO	=	-24.42 GRAUS
LINHA	11	-	16 :	0.614689D-05	-.279343D-05 (PU)	MODULO	=0.6751930-05 (PU)	ANGULO	=	-24.44 GRAUS
LINHA	12	-	16 :	0.614689D-05	-.279343D-05 (PU)	MODULO	=0.6751920-05 (PU)	ANGULO	=	-24.44 GRAUS

TABELA V.24

TENSOES HARMONICAS NAS BARRAS

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 25

	REAL	IMAG		
BARRA 1	:TENSAO = 0.482544D-07	0.299451D-06	PU MODULO = 0.303314D-06	(PU) ANGULO = 80.85 GRAUS
BARRA 2	:TENSAO = 0.133705D-06	0.914804D-06	PU MODULO = 0.924029D-06	(PU) ANGULO = 81.68 GRAUS
BARRA 3	:TENSAO = 0.160997D-06	0.111485D-05	PU MODULO = 0.112642D-05	(PU) ANGULO = 81.78 GRAUS
BARRA 4	:TENSAO = 0.484259D-07	0.300454D-06	PU MODULO = 0.304331D-06	(PU) ANGULO = 80.84 GRAUS
BARRA 5	:TENSAO = 0.484614D-07	0.300666D-06	PU MODULO = 0.304547D-06	(PU) ANGULO = 80.84 GRAUS
BARRA 6	:TENSAO = 0.299156D-07	0.163717D-06	PU MODULO = 0.166428D-06	(PU) ANGULO = 79.64 GRAUS
BARRA 7	:TENSAO = 0.299156D-07	0.163717D-06	PU MODULO = 0.166428D-06	(PU) ANGULO = 79.64 GRAUS
BARRA 8	:TENSAO = 0.247772D-05	0.181184D-04	PU MODULO = 0.182870D-04	(PU) ANGULO = 82.21 GRAUS
BARRA 9	:TENSAO = 0.247772D-05	0.181184D-04	PU MODULO = 0.182870D-04	(PU) ANGULO = 82.21 GRAUS
BARRA 10	:TENSAO = 0.115544D-07	0.278641D-07	PU MODULO = 0.301648D-07	(PU) ANGULO = 67.48 GRAUS
BARRA 11	:TENSAO = 0.549066D-05	0.418696D-04	PU MODULO = 0.422281D-04	(PU) ANGULO = 82.53 GRAUS
BARRA 12	:TENSAO = 0.549066D-05	0.418696D-04	PU MODULO = 0.422281D-04	(PU) ANGULO = 82.53 GRAUS
BARRA 13	:TENSAO = 0.865347D-07	0.573026D-06	PU MODULO = 0.579523D-06	(PU) ANGULO = 81.41 GRAUS
BARRA 14	:TENSAO = 0.865347D-07	0.573026D-06	PU MODULO = 0.579523D-06	(PU) ANGULO = 81.41 GRAUS
BARRA 15	:TENSAO = 0.247772D-05	0.181184D-04	PU MODULO = 0.182870D-04	(PU) ANGULO = 82.21 GRAUS
BARRA 16	:TENSAO = 0.549066D-05	0.418696D-04	PU MODULO = 0.422281D-04	(PU) ANGULO = 82.53 GRAUS

TABELA V.25

FLUXO DE CORRENTE NAS LINHAS

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 25

				REAL	IMAG					
LINHA	1	-	2 :	-.3082690-05	C.4003920-06 (PU)	MODULO =0.3108590-05	(PU)	ANGULO =	172.60	GRAUS
LINHA	1	-	3 :	-.3070500-05	C.3986330-06 (PU)	MODULO =0.3096270-05	(PU)	ANGULO =	172.60	GRAUS
LINHA	1	-	5 :	-.1433390-07	C.2310320-08 (PU)	MODULO =0.1451990-07	(PU)	ANGULO =	170.84	GRAUS
LINHA	2	-	3 :	-.3023710-05	C.3932290-06 (PU)	MODULO =0.3059090-05	(PU)	ANGULO =	172.61	GRAUS
LINHA	3	-	8 :	-.2125720-05	C.2879910-06 (PU)	MODULO =0.2145140-05	(PU)	ANGULO =	172.26	GRAUS
LINHA	3	-	9 :	-.2125720-05	C.2879910-06 (PU)	MODULO =0.2145140-05	(PU)	ANGULO =	172.26	GRAUS
LINHA	3	-	11 :	-.5094930-05	C.6623730-06 (PU)	MODULO =0.5137860-05	(PU)	ANGULO =	172.59	GRAUS
LINHA	3	-	12 :	-.5094930-05	C.6623730-06 (PU)	MODULO =0.5137860-05	(PU)	ANGULO =	172.59	GRAUS
LINHA	3	-	13 :	0.4220640-05	-.5619490-06 (PU)	MODULO =0.4257880-05	(PU)	ANGULO =	-7.58	GRAUS
LINHA	3	-	14 :	0.4220640-05	-.5619490-06 (PU)	MODULO =0.4257880-05	(PU)	ANGULO =	-7.58	GRAUS
LINHA	4	-	1 :	0.1736570-07	-.2802140-08 (PU)	MODULO =0.1761000-07	(PU)	ANGULO =	-9.16	GRAUS
LINHA	5	-	4 :	0.1531500-08	-.2468680-09 (PU)	MODULO =0.1551270-08	(PU)	ANGULO =	-9.16	GRAUS
LINHA	6	-	1 :	-.3113860-05	C.4055190-06 (PU)	MODULO =0.3140160-05	(PU)	ANGULO =	172.58	GRAUS
LINHA	7	-	1 :	-.3113860-05	C.4055190-06 (PU)	MODULO =0.3140160-05	(PU)	ANGULO =	172.58	GRAUS
LINHA	8	-	15 :	-.2125520-05	C.2879640-06 (PU)	MODULO =0.2144940-05	(PU)	ANGULO =	172.26	GRAUS
LINHA	9	-	15 :	-.2125520-05	C.2879640-06 (PU)	MODULO =0.2144940-05	(PU)	ANGULO =	172.26	GRAUS
LINHA	10	-	6 :	-.3116590-05	C.4060180-06 (PU)	MODULO =0.3142930-05	(PU)	ANGULO =	172.58	GRAUS
LINHA	10	-	7 :	-.3116590-05	C.4060180-06 (PU)	MODULO =0.3142930-05	(PU)	ANGULO =	172.58	GRAUS
LINHA	10	-	13 :	-.4246630-05	C.5658730-06 (PU)	MODULO =0.4284160-05	(PU)	ANGULO =	172.41	GRAUS
LINHA	10	-	14 :	-.4246630-05	C.5658730-06 (PU)	MODULO =0.4284160-05	(PU)	ANGULO =	172.41	GRAUS
LINHA	11	-	16 :	-.5094530-05	C.6623140-06 (PU)	MODULO =0.5137410-05	(PU)	ANGULO =	172.59	GRAUS
LINHA	12	-	16 :	-.5094530-05	C.6623140-06 (PU)	MODULO =0.5137410-05	(PU)	ANGULO =	172.59	GRAUS

TABELA V.26

FATOR DE DISTORCAO DE TENSAO

BARRA	1 =	0.8538950-06	MVO	1 =	0.7305950-12
BARRA	2 =	0.2350600-05	MVO	2 =	0.5547800-11
BARRA	3 =	0.2841560-05	MVO	3 =	0.8106810-11
BARRA	4 =	0.8572720-06	MVO	4 =	0.7363350-12
BARRA	5 =	0.8579510-06	MVO	5 =	0.7376220-12
BARRA	6 =	0.5464720-06	MVO	6 =	0.2936320-12
BARRA	7 =	0.5464720-06	MVO	7 =	0.2936320-12
BARRA	8 =	0.5342940-04	MVO	8 =	0.2846000-08
BARRA	9 =	0.5342940-04	MVO	9 =	0.2846000-08
BARRA	10 =	0.3123690-06	MVO	10 =	0.9757450-13
BARRA	11 =	0.9722310-04	MVO	11 =	0.5433440-08
BARRA	12 =	0.9722310-04	MVO	12 =	0.5433440-08
BARRA	13 =	0.1516350-05	MVO	13 =	0.2260120-11
BARRA	14 =	0.1516350-05	MVO	14 =	0.2260120-11
BARRA	15 =	0.5380650-04	MVO	15 =	0.2846000-08
BARRA	16 =	0.9860510-04	MVO	16 =	0.5433470-08

TABELA V.27

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 5

	REAL	IMAG			
BARRA 1	:TENSAO = -.312e19D-04	-.3427249-04 PU	MODULO =0.4639869-04 (PU)	ANGULO =	227.63 GRAUS
BARRA 2	:TENSAO = -.5807479-04	-.7392199-04 PU	MODULO =0.9400809-04 (PU)	ANGULO =	231.85 GRAUS
BARRA 3	:TENSAO = -.8695039-04	-.8704949-04 PU	MODULO =0.1099179-03 (PU)	ANGULO =	232.44 GRAUS
BARRA 4	:TENSAO = -.3126609-04	-.3427709-04 PU	MODULO =0.4639489-04 (PU)	ANGULO =	227.63 GRAUS
BARRA 5	:TENSAO = -.3126699-04	-.3427809-04 PU	MODULO =0.4639619-04 (PU)	ANGULO =	227.63 GRAUS
BARRA 6	:TENSAO = -.2539909-04	-.2560529-04 PU	MODULO =0.3606579-04 (PU)	ANGULO =	225.23 GRAUS
BARRA 7	:TENSAO = -.2539909-04	-.2560329-04 PU	MODULO =0.3606579-04 (PU)	ANGULO =	225.23 GRAUS
BARRA 8	:TENSAO = -.6185439-03	-.1065049-02 PU	MODULO =0.1231639-02 (PU)	ANGULO =	239.85 GRAUS
BARRA 9	:TENSAO = -.6185439-03	-.1065049-02 PU	MODULO =0.1231639-02 (PU)	ANGULO =	239.85 GRAUS
BARRA 10	:TENSAO = -.1953549-04	-.1693719-04 PU	MODULO =0.2585539-04 (PU)	ANGULO =	220.93 GRAUS
BARRA 11	:TENSAO = -.2064119-02	-.2378319-02 PU	MODULO =0.3541939-02 (PU)	ANGULO =	234.35 GRAUS
BARRA 12	:TENSAO = -.2064119-02	-.2478319-02 PU	MODULO =0.3541939-02 (PU)	ANGULO =	234.35 GRAUS
BARRA 13	:TENSAO = -.4324799-04	-.5199939-04 PU	MODULO =0.6763339-04 (PU)	ANGULO =	230.25 GRAUS
BARRA 14	:TENSAO = -.4324799-04	-.5199849-04 PU	MODULO =0.6763339-04 (PU)	ANGULO =	230.25 GRAUS
BARRA 15	:TENSAO = -.6185449-03	-.1065049-02 PU	MODULO =0.1231639-02 (PU)	ANGULO =	239.85 GRAUS
BARRA 16	:TENSAO = -.2064129-02	-.2378329-02 PU	MODULO =0.3541939-02 (PU)	ANGULO =	234.35 GRAUS

TABELA V.28

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 5

				REAL	IMAG						
LINHA	1	-	2 :	0.9928010-03	-.6713790-03	(PU)	MODULO =0.1198500-02	(PU)	ANGULO =	-34.07	GRAUS
LINHA	1	-	3 :	0.9936040-03	-.6713240-03	(PU)	MODULO =0.1198250-02	(PU)	ANGULO =	-34.07	GRAUS
LINHA	1	-	5 :	0.3283630-06	-.2991690-06	(PU)	MODULO =0.4434440-06	(PU)	ANGULO =	-42.37	GRAUS
LINHA	2	-	3 :	0.9920090-07	-.6707540-03	(PU)	MODULO =0.1197500-02	(PU)	ANGULO =	-34.06	GRAUS
LINHA	3	-	8 :	0.5112520-03	-.3447560-03	(PU)	MODULO =0.7017810-03	(PU)	ANGULO =	-29.42	GRAUS
LINHA	3	-	9 :	0.5112520-03	-.3447560-03	(PU)	MODULO =0.7017810-03	(PU)	ANGULO =	-29.42	GRAUS
LINHA	3	-	11 :	0.1744590-02	-.1244260-02	(PU)	MODULO =0.2143170-02	(PU)	ANGULO =	-35.58	GRAUS
LINHA	3	-	12 :	0.1744590-02	-.1244260-02	(PU)	MODULO =0.2145170-02	(PU)	ANGULO =	-35.58	GRAUS
LINHA	3	-	13 :	-.1364350-02	0.9226500-03	(PU)	MODULO =0.1647040-02	(PU)	ANGULO =	145.93	GRAUS
LINHA	3	-	14 :	-.1364350-02	0.9226500-03	(PU)	MODULO =0.1647040-02	(PU)	ANGULO =	145.93	GRAUS
LINHA	4	-	1 :	-.3969120-06	0.3417730-06	(PU)	MODULO =0.5362250-06	(PU)	ANGULO =	137.63	GRAUS
LINHA	5	-	4 :	-.3469900-07	0.3139190-07	(PU)	MODULO =0.4719720-07	(PU)	ANGULO =	137.63	GRAUS
LINHA	6	-	1 :	0.9935550-03	-.6720780-03	(PU)	MODULO =0.1199520-02	(PU)	ANGULO =	-34.08	GRAUS
LINHA	7	-	1 :	0.9935550-03	-.6720780-03	(PU)	MODULO =0.1199520-02	(PU)	ANGULO =	-34.08	GRAUS
LINHA	8	-	15 :	0.5112500-03	-.3447570-03	(PU)	MODULO =0.7017790-03	(PU)	ANGULO =	-29.42	GRAUS
LINHA	9	-	15 :	0.5112500-03	-.3447570-03	(PU)	MODULO =0.7017790-03	(PU)	ANGULO =	-29.42	GRAUS
LINHA	10	-	6 :	0.9935400-03	-.6721630-03	(PU)	MODULO =0.1199630-02	(PU)	ANGULO =	-34.08	GRAUS
LINHA	10	-	7 :	0.9935400-03	-.6721630-03	(PU)	MODULO =0.1199630-02	(PU)	ANGULO =	-34.08	GRAUS
LINHA	10	-	13 :	0.1364650-02	-.9230430-03	(PU)	MODULO =0.1647650-02	(PU)	ANGULO =	-34.07	GRAUS
LINHA	10	-	14 :	0.1364650-02	-.9230430-03	(PU)	MODULO =0.1647650-02	(PU)	ANGULO =	-34.07	GRAUS
LINHA	11	-	16 :	0.1744580-02	-.1243260-02	(PU)	MODULO =0.2145160-02	(PU)	ANGULO =	-35.58	GRAUS
LINHA	12	-	16 :	0.1744580-02	-.1243260-02	(PU)	MODULO =0.2145160-02	(PU)	ANGULO =	-35.58	GRAUS

TABELA V.29

TENSOES HARMONICAS NAS BARRAS

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 13

	REAL	IMAG				
BARRA 1	:TENSAO = -.9641110-05	-.1992320-04	PU MODULO =0.2213340-04	(PU)	ANGULO =	244.18 GRAUS
BARRA 2	:TENSAO = -.8037600-04	-.6141190-04	PU MODULO =0.6766160-04	(PU)	ANGULO =	245.20 GRAUS
BARRA 3	:TENSAO = -.3455690-04	-.7509940-04	PU MODULO =0.8266940-04	(PU)	ANGULO =	245.29 GRAUS
BARRA 4	:TENSAO = -.9649130-05	-.1994130-04	PU MODULO =0.2215340-04	(PU)	ANGULO =	244.18 GRAUS
BARRA 5	:TENSAO = -.9651670-05	-.1994510-04	PU MODULO =0.2215760-04	(PU)	ANGULO =	244.18 GRAUS
BARRA 6	:TENSAO = -.5536470-05	-.1053640-04	PU MODULO =0.1216900-04	(PU)	ANGULO =	242.94 GRAUS
BARRA 7	:TENSAO = -.5536470-05	-.1053640-04	PU MODULO =0.1216950-04	(PU)	ANGULO =	242.94 GRAUS
BARRA 8	:TENSAO = -.4766500-02	-.1231550-01	PU MODULO =0.1320570-01	(PU)	ANGULO =	248.84 GRAUS
BARRA 9	:TENSAO = -.4766500-02	-.1231550-01	PU MODULO =0.1320570-01	(PU)	ANGULO =	248.84 GRAUS
BARRA 10	:TENSAO = -.1430730-05	-.1747490-05	PU MODULO =0.2259470-05	(PU)	ANGULO =	230.69 GRAUS
BARRA 11	:TENSAO = 0.2921550-02	0.6232890-02	PU MODULO =0.8735900-02	(PU)	ANGULO =	70.46 GRAUS
BARRA 12	:TENSAO = 0.2921550-02	0.6232890-02	PU MODULO =0.8735900-02	(PU)	ANGULO =	70.46 GRAUS
BARRA 13	:TENSAO = -.1800900-04	-.3945870-04	PU MODULO =0.4336190-04	(PU)	ANGULO =	244.90 GRAUS
BARRA 14	:TENSAO = -.1800900-04	-.3945870-04	PU MODULO =0.4336190-04	(PU)	ANGULO =	244.90 GRAUS
BARRA 15	:TENSAO = -.4766510-02	-.1231551-01	PU MODULO =0.1320570-01	(PU)	ANGULO =	248.84 GRAUS
BARRA 16	:TENSAO = 0.2921560-02	0.6232900-02	PU MODULO =0.8735910-02	(PU)	ANGULO =	70.46 GRAUS

TABELA V.30

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 13

				REAL	IMAG					
LINHA	1	-	2 :	0.[illegible]-03	-.1[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.4384160-03 (PU)	ANGULO =	-24.30	GRAUS	
LINHA	1	-	3 :	0.[illegible]-03	-.1[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.4379470-03 (PU)	ANGULO =	-24.30	GRAUS	
LINHA	1	-	5 :	0.[illegible]-04	-.[illegible]-04 (PU)	MODULO =0.5493600-04 (PU)	ANGULO =	-25.32	GRAUS	
LINHA	2	-	3 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.4765310-03 (PU)	ANGULO =	-24.30	GRAUS	
LINHA	3	-	6 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.3154700-03 (PU)	ANGULO =	-21.14	GRAUS	
LINHA	3	-	9 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.3154700-03 (PU)	ANGULO =	-21.14	GRAUS	
LINHA	3	-	11 :	-.[illegible]-03	0.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.2117120-03 (PU)	ANGULO =	160.41	GRAUS	
LINHA	3	-	12 :	-.[illegible]-03	0.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.2117120-03 (PU)	ANGULO =	160.41	GRAUS	
LINHA	3	-	13 :	-.[illegible]-03	0.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.5022150-03 (PU)	ANGULO =	155.70	GRAUS	
LINHA	3	-	14 :	-.[illegible]-03	0.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.5022050-03 (PU)	ANGULO =	155.70	GRAUS	
LINHA	4	-	1 :	-.[illegible]-04	0.[illegible]-04 (PU)	MODULO =0.6664300-05 (PU)	ANGULO =	154.19	GRAUS	
LINHA	5	-	4 :	-.[illegible]-07	0.[illegible]-07 (PU)	MODULO =0.5161400-07 (PU)	ANGULO =	154.19	GRAUS	
LINHA	6	-	1 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.4394120-03 (PU)	ANGULO =	-24.31	GRAUS	
LINHA	7	-	1 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.4394120-03 (PU)	ANGULO =	-24.31	GRAUS	
LINHA	8	-	15 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.3154700-03 (PU)	ANGULO =	-21.14	GRAUS	
LINHA	9	-	15 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.3154700-03 (PU)	ANGULO =	-21.14	GRAUS	
LINHA	10	-	[illegible] :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.4394120-03 (PU)	ANGULO =	-24.31	GRAUS	
LINHA	10	-	[illegible] :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.4394120-03 (PU)	ANGULO =	-24.31	GRAUS	
LINHA	10	-	13 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.5022060-03 (PU)	ANGULO =	-24.31	GRAUS	
LINHA	10	-	14 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.5022060-03 (PU)	ANGULO =	-24.31	GRAUS	
LINHA	11	-	15 :	-.[illegible]-03	0.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.2117720-03 (PU)	ANGULO =	160.41	GRAUS	
LINHA	12	-	15 :	-.[illegible]-03	0.[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.2117720-03 (PU)	ANGULO =	160.41	GRAUS	

TABELA V.31

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 23

	REAL	IMAG			
BARRA 1	:TENSAO = 0.1978270-04	-.1305510-04	PU MODULO =0.2673290-04	(PU) ANGULO =	-42.47 GRAUS
BARRA 2	:TENSAO = 0.6756190-04	-.5769750-04	PU MODULO =0.8889540-04	(PU) ANGULO =	-42.20 GRAUS
BARRA 3	:TENSAO = 0.7790130-04	-.7066900-04	PU MODULO =0.1052330-03	(PU) ANGULO =	-42.18 GRAUS
BARRA 4	:TENSAO = 0.1977660-04	-.1310630-04	PU MODULO =0.2651470-04	(PU) ANGULO =	-42.47 GRAUS
BARRA 5	:TENSAO = 0.1977050-04	-.1311710-04	PU MODULO =0.2653060-04	(PU) ANGULO =	-42.47 GRAUS
BARRA 6	:TENSAO = 0.1005660-04	-.9327180-05	PU MODULO =0.1371610-04	(PU) ANGULO =	-42.85 GRAUS
BARRA 7	:TENSAO = 0.1005660-04	-.9327180-05	PU MODULO =0.1371610-04	(PU) ANGULO =	-42.85 GRAUS
BARRA 8	:TENSAO = 0.3465120-03	-.1606710-02	PU MODULO =0.1617000-02	(PU) ANGULO =	-68.16 GRAUS
BARRA 9	:TENSAO = 0.3465120-03	-.1606710-02	PU MODULO =0.1617000-02	(PU) ANGULO =	-68.16 GRAUS
BARRA 10	:TENSAO = 0.5042750-06	-.5935350-06	PU MODULO =0.7070730-06	(PU) ANGULO =	-57.08 GRAUS
BARRA 11	:TENSAO = 0.3488110-02	-.2363740-02	PU MODULO =0.4116440-02	(PU) ANGULO =	-33.36 GRAUS
BARRA 12	:TENSAO = 0.3488110-02	-.2363740-02	PU MODULO =0.4116440-02	(PU) ANGULO =	-33.36 GRAUS
BARRA 13	:TENSAO = 0.3900360-04	-.3871430-04	PU MODULO =0.5509160-04	(PU) ANGULO =	-42.23 GRAUS
BARRA 14	:TENSAO = 0.3926760-04	-.3871430-04	PU MODULO =0.5509160-04	(PU) ANGULO =	-42.23 GRAUS
BARRA 15	:TENSAO = 0.3465130-03	-.1606710-02	PU MODULO =0.1617000-02	(PU) ANGULO =	-68.16 GRAUS
BARRA 16	:TENSAO = 0.3488110-02	-.2363740-02	PU MODULO =0.4116440-02	(PU) ANGULO =	-33.36 GRAUS

TABELA V.32

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 23

				REAL	IMAG					
LINHA	1	-	2 :	0.2167180-03	0.2330140-03	(PU)	MODULO =0.3220120-03	(PU)	ANGULO =	47.92 GRAUS
LINHA	1	-	3 :	0.2150·00-03	0.2308300-03	(PU)	MODULO =0.3209590-03	(PU)	ANGULO =	47.92 GRAUS
LINHA	1	-	5 :	0.7945250-06	0.1180220-05	(PU)	MODULO =0.1179330-05	(PU)	ANGULO =	47.53 GRAUS
LINHA	2	-	3 :	0.2109440-03	0.2351770-03	(PU)	MODULO =0.3177790-03	(PU)	ANGULO =	47.93 GRAUS
LINHA	3	-	8 :	0.2007000-03	0.1044420-03	(PU)	MODULO =0.2334950-03	(PU)	ANGULO =	26.54 GRAUS
LINHA	3	-	9 :	0.2007000-03	0.1044930-03	(PU)	MODULO =0.2334950-03	(PU)	ANGULO =	26.54 GRAUS
LINHA	3	-	11 :	0.2979610-03	0.4656500-03	(PU)	MODULO =0.5451190-03	(PU)	ANGULO =	56.87 GRAUS
LINHA	3	-	12 :	0.2979610-03	0.4656690-03	(PU)	MODULO =0.5451190-03	(PU)	ANGULO =	56.87 GRAUS
LINHA	3	-	13 :	-.2957110-03	-.3273350-03	(PU)	MODULO =0.4410780-03	(PU)	ANGULO =	227.92 GRAUS
LINHA	3	-	14 :	-.2957110-03	-.3273350-03	(PU)	MODULO =0.4410780-03	(PU)	ANGULO =	227.92 GRAUS
LINHA	4	-	1 :	-.9[illegible]90-06	-.1159190-05	(PU)	MODULO =0.1407450-05	(PU)	ANGULO =	227.53 GRAUS
LINHA	5	-	4 :	-.8488[illegible]0-07	-.9371050-07	(PU)	MODULO =0.1257050-06	(PU)	ANGULO =	227.53 GRAUS
LINHA	6	-	1 :	0.2175010-03	0.2401810-03	(PU)	MODULO =0.3245460-03	(PU)	ANGULO =	47.92 GRAUS
LINHA	7	-	1 :	0.2175010-03	0.2401810-03	(PU)	MODULO =0.3245460-03	(PU)	ANGULO =	47.92 GRAUS
LINHA	8	-	15 :	0.2007000-03	0.1044300-03	(PU)	MODULO =0.2334770-03	(PU)	ANGULO =	26.54 GRAUS
LINHA	9	-	15 :	0.2007000-03	0.1044300-03	(PU)	MODULO =0.2334770-03	(PU)	ANGULO =	26.54 GRAUS
LINHA	10	-	6 :	0.2175440-03	0.2401750-03	(PU)	MODULO =0.3245750-03	(PU)	ANGULO =	47.92 GRAUS
LINHA	10	-	7 :	0.2175440-03	0.2401750-03	(PU)	MODULO =0.3245750-03	(PU)	ANGULO =	47.92 GRAUS
LINHA	10	-	13 :	0.2979320-03	0.4591770-03	(PU)	MODULO =0.5474930-03	(PU)	ANGULO =	57.02 GRAUS
LINHA	10	-	14 :	0.2979320-03	0.4591770-03	(PU)	MODULO =0.5474930-03	(PU)	ANGULO =	57.02 GRAUS
LINHA	11	-	16 :	0.2979590-03	0.4591140-03	(PU)	MODULO =0.5451490-03	(PU)	ANGULO =	56.87 GRAUS
LINHA	12	-	16 :	0.2979590-03	0.4591130-03	(PU)	MODULO =0.5451480-03	(PU)	ANGULO =	56.87 GRAUS

TABELA V.33

FATOR DE DISTORCAO DE TENSAO

BARRA 1 =	0.5822660-03	MVA 1 =	0.4664180-06
BARRA 2 =	0.2127560-02	MVA 2 =	0.4545930-05
BARRA 3 =	0.2597000-02	MVA 3 =	0.6771390-05
BARRA 4 =	0.5852560-03	MVA 4 =	0.4705150-06
BARRA 5 =	0.5958930-03	MVA 5 =	0.4713900-06
BARRA 6 =	0.3640310-03	MVA 6 =	0.1325130-06
BARRA 7 =	0.3640310-03	MVA 7 =	0.1325130-06
BARRA 8 =	0.6766100-01	MVA 8 =	0.4567500-02
BARRA 9 =	0.6766100-01	MVA 9 =	0.4567500-02
BARRA 10 =	0.6870950-04	MVA 10 =	0.4721000-09
BARRA 11 =	0.1011420 00	MVA 11 =	0.1020940-01
BARRA 12 =	0.1011420 00	MVA 12 =	0.1020940-01
BARRA 13 =	0.1329170-02	MVA 13 =	0.1759630-05
BARRA 14 =	0.1329170-02	MVA 14 =	0.1759630-05
BARRA 15 =	0.6812340-01	MVA 15 =	0.4567520-02
BARRA 16 =	0.1025600 00	MVA 16 =	0.1020940-01

TABELA V.34

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 5

		REAL	IMAG				
BARRA	1	:TENSAO = -.547475D-04	-.547733D-04	PU MODULO =0.774429D-04	(PU)	ANGULO =	225.01 GRAUS
BARRA	2	:TENSAO = -.824619D-04	-.932566D-04	PU MODULO =0.124486D-03	(PU)	ANGULO =	228.52 GRAUS
BARRA	3	:TENSAO = -.914750D-04	-.106118D-03	PU MODULO =0.140103D-03	(PU)	ANGULO =	229.24 GRAUS
BARRA	4	:TENSAO = -.547475D-04	-.547733D-04	PU MODULO =0.774429D-04	(PU)	ANGULO =	225.01 GRAUS
BARRA	5	:TENSAO = -.547475D-04	-.547733D-04	PU MODULO =0.774429D-04	(PU)	ANGULO =	225.01 GRAUS
BARRA	6	:TENSAO = -.488730D-04	-.462501D-04	PU MODULO =0.672877D-04	(PU)	ANGULO =	223.42 GRAUS
BARRA	7	:TENSAO = -.488730D-04	-.462501D-04	PU MODULO =0.672877D-04	(PU)	ANGULO =	223.42 GRAUS
BARRA	8	:TENSAO = -.626379D-03	-.106978D-02	PU MODULO =0.123967D-02	(PU)	ANGULO =	239.65 GRAUS
BARRA	9	:TENSAO = -.626379D-03	-.106978D-02	PU MODULO =0.123967D-02	(PU)	ANGULO =	239.65 GRAUS
BARRA	10	:TENSAO = -.429984D-04	-.377268D-04	PU MODULO =0.572030D-04	(PU)	ANGULO =	221.26 GRAUS
BARRA	11	:TENSAO = -.207423D-02	-.288166D-02	PU MODULO =0.355055D-02	(PU)	ANGULO =	234.25 GRAUS
BARRA	12	:TENSAO = -.207423D-02	-.288166D-02	PU MODULO =0.355055D-02	(PU)	ANGULO =	234.25 GRAUS
BARRA	13	:TENSAO = -.672367D-04	-.719224D-04	PU MODULO =0.984562D-04	(PU)	ANGULO =	226.93 GRAUS
BARRA	14	:TENSAO = -.672367D-04	-.719224D-04	PU MODULO =0.984562D-04	(PU)	ANGULO =	226.93 GRAUS
BARRA	15	:TENSAO = -.626379D-03	-.106978D-02	PU MODULO =0.123967D-02	(PU)	ANGULO =	239.65 GRAUS
BARRA	16	:TENSAO = -.207423D-02	-.288166D-02	PU MODULO =0.355055D-02	(PU)	ANGULO =	234.25 GRAUS

TABELA V.35

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 5

				REAL	IMAG						
LINHA	1	-	2 :	0.992615D-03	-.649620D-03	(PU)	MODULO =0.118629D-02	(PU)	ANGULO =	-33.20	GRAUS
LINHA	1	-	3 :	0.992615D-03	-.649621D-03	(PU)	MODULO =0.118629D-02	(PU)	ANGULO =	-33.20	GRAUS
LINHA	1	-	5 :	0.522485D-14	-.522257D-14	(PU)	MODULO =0.738745D-14	(PU)	ANGULO =	-44.99	GRAUS
LINHA	2	-	3 :	0.992615D-03	-.649620D-03	(PU)	MODULO =0.118629D-02	(PU)	ANGULO =	-33.20	GRAUS
LINHA	3	-	8 :	0.603562D-03	-.332042D-03	(PU)	MODULO =0.688868D-03	(PU)	ANGULO =	-28.82	GRAUS
LINHA	3	-	9 :	0.603562D-03	-.332042D-03	(PU)	MODULO =0.688868D-03	(PU)	ANGULO =	-28.82	GRAUS
LINHA	3	-	11 :	0.173942D-02	-.123268D-02	(PU)	MODULO =0.213192D-02	(PU)	ANGULO =	-35.32	GRAUS
LINHA	3	-	12 :	0.173942D-02	-.123268D-02	(PU)	MODULO =0.213192D-02	(PU)	ANGULO =	-35.32	GRAUS
LINHA	3	-	13 :	-.135037D-02	0.915099D-03	(PU)	MODULO =0.163123D-02	(PU)	ANGULO =	145.88	GRAUS
LINHA	3	-	14 :	-.135037D-02	0.915099D-03	(PU)	MODULO =0.163123D-02	(PU)	ANGULO =	145.88	GRAUS
LINHA	4	-	1 :	-.633494D-14	0.633258D-14	(PU)	MODULO =0.895730D-14	(PU)	ANGULO =	135.01	GRAUS
LINHA	5	-	4 :	-.559203D-15	0.558791D-15	(PU)	MODULO =0.790541D-15	(PU)	ANGULO =	135.02	GRAUS
LINHA	6	-	1 :	0.992615D-03	-.649621D-03	(PU)	MODULO =0.118629D-02	(PU)	ANGULO =	-33.20	GRAUS
LINHA	7	-	1 :	0.992615D-03	-.649621D-03	(PU)	MODULO =0.118629D-02	(PU)	ANGULO =	-33.20	GRAUS
LINHA	8	-	15 :	0.603562D-03	-.332042D-03	(PU)	MODULO =0.688868D-03	(PU)	ANGULO =	-28.82	GRAUS
LINHA	9	-	15 :	0.603562D-03	-.332042D-03	(PU)	MODULO =0.688868D-03	(PU)	ANGULO =	-28.82	GRAUS
LINHA	10	-	6 :	0.992615D-03	-.649621D-03	(PU)	MODULO =0.118629D-02	(PU)	ANGULO =	-33.20	GRAUS
LINHA	10	-	7 :	0.992615D-03	-.649621D-03	(PU)	MODULO =0.118629D-02	(PU)	ANGULO =	-33.20	GRAUS
LINHA	10	-	13 :	0.135037D-02	-.915099D-03	(PU)	MODULO =0.163123D-02	(PU)	ANGULO =	-34.12	GRAUS
LINHA	10	-	14 :	0.135037D-02	-.915099D-03	(PU)	MODULO =0.163123D-02	(PU)	ANGULO =	-34.12	GRAUS
LINHA	11	-	16 :	0.173942D-02	-.123268D-02	(PU)	MODULO =0.213192D-02	(PU)	ANGULO =	-35.32	GRAUS
LINHA	12	-	16 :	0.173942D-02	-.123268D-02	(PU)	MODULO =0.213192D-02	(PU)	ANGULO =	-35.32	GRAUS

TABELA V.36

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 13

		REAL	IMAG				
BARRA	1	:TENSAO = -.133264D-04	-.242448D-04	PU MODULO =	0.276659D-04	(PU) ANGULO =	241.20 GRAUS
BARRA	2	:TENSAO = -.324608D-04	-.652654D-04	PU MODULO =	0.728923D-04	(PU) ANGULO =	243.56 GRAUS
BARRA	3	:TENSAO = -.387326D-04	-.788870D-04	PU MODULO =	0.878827D-04	(PU) ANGULO =	243.85 GRAUS
BARRA	4	:TENSAO = -.133264D-04	-.242448D-04	PU MODULO =	0.276659D-04	(PU) ANGULO =	241.20 GRAUS
BARRA	5	:TENSAO = -.133264D-04	-.242448D-04	PU MODULO =	0.276659D-04	(PU) ANGULO =	241.20 GRAUS
BARRA	6	:TENSAO = -.921869D-05	-.152526D-04	PU MODULO =	0.178221D-04	(PU) ANGULO =	238.85 GRAUS
BARRA	7	:TENSAO = -.921869D-05	-.152526D-04	PU MODULO =	0.178221D-04	(PU) ANGULO =	238.85 GRAUS
BARRA	8	:TENSAO = -.477079D-02	-.123148D-01	PU MODULO =	0.132066D-01	(PU) ANGULO =	248.82 GRAUS
BARRA	9	:TENSAO = -.477079D-02	-.123148D-01	PU MODULO =	0.132066D-01	(PU) ANGULO =	248.82 GRAUS
BARRA	10	:TENSAO = -.511098D-05	-.626037D-05	PU MODULO =	0.808172D-05	(PU) ANGULO =	230.77 GRAUS
BARRA	11	:TENSAO = 0.292087D-02	0.823361D-02	PU MODULO =	0.873635D-02	(PU) ANGULO =	70.47 GRAUS
BARRA	12	:TENSAO = 0.292087D-02	0.823361D-02	PU MODULO =	0.873635D-02	(PU) ANGULO =	70.47 GRAUS
BARRA	13	:TENSAO = -.219218D-04	-.425737D-04	PU MODULO =	0.478861D-04	(PU) ANGULO =	242.76 GRAUS
BARRA	14	:TENSAO = -.219218D-04	-.425737D-04	PU MODULO =	0.478861D-04	(PU) ANGULO =	242.76 GRAUS
BARRA	15	:TENSAO = -.477079D-02	-.123148D-01	PU MODULO =	0.132066D-01	(PU) ANGULO =	248.82 GRAUS
BARRA	16	:TENSAO = 0.292088D-02	0.823362D-02	PU MODULO =	0.873637D-02	(PU) ANGULO =	70.47 GRAUS

TABELA V.37

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 13

				REAL	IMAG						
LINHA	1	-	2 :	0.398100D-03	-.177437D-03	(PU)	MODULO =	0.435852D-03	(PU)	ANGULO =	-24.02 GRAUS
LINHA	1	-	3 :	0.398100D-03	-.177437D-03	(PU)	MODULO =	0.435852D-03	(PU)	ANGULO =	-24.02 GRAUS
LINHA	1	-	5 :	0.601135D-14	-.330435D-14	(PU)	MODULO =	0.686011D-14	(PU)	ANGULO =	-28.79 GRAUS
LINHA	2	-	3 :	0.398100D-03	-.177437D-03	(PU)	MODULO =	0.435852D-03	(PU)	ANGULO =	-24.02 GRAUS
LINHA	3	-	8 :	0.294305D-02	-.113326D-02	(PU)	MODULO =	0.315371D-02	(PU)	ANGULO =	-21.06 GRAUS
LINHA	3	-	9 :	0.294305D-02	-.113326D-02	(PU)	MODULO =	0.315371D-02	(PU)	ANGULO =	-21.06 GRAUS
LINHA	3	-	11 :	-.199928D-02	0.708556D-03	(PU)	MODULO =	0.212113D-02	(PU)	ANGULO =	160.49 GRAUS
LINHA	3	-	12 :	-.199928D-02	0.708556D-03	(PU)	MODULO =	0.212113D-02	(PU)	ANGULO =	160.49 GRAUS
LINHA	3	-	13 :	-.545673D-03	0.247271D-03	(PU)	MODULO =	0.599085D-03	(PU)	ANGULO =	155.62 GRAUS
LINHA	3	-	14 :	-.545673D-03	0.247271D-03	(PU)	MODULO =	0.599085D-03	(PU)	ANGULO =	155.62 GRAUS
LINHA	4	-	1 :	-.729428D-14	0.400922D-14	(PU)	MODULO =	0.832349D-14	(PU)	ANGULO =	151.21 GRAUS
LINHA	5	-	4 :	-.641306D-15	0.352492D-15	(PU)	MODULO =	0.731795D-15	(PU)	ANGULO =	151.20 GRAUS
LINHA	6	-	1 :	0.398100D-03	-.177437D-03	(PU)	MODULO =	0.435852D-03	(PU)	ANGULO =	-24.02 GRAUS
LINHA	7	-	1 :	0.398100D-03	-.177437D-03	(PU)	MODULO =	0.435852D-03	(PU)	ANGULO =	-24.02 GRAUS
LINHA	8	-	15 :	0.294305D-02	-.113326D-02	(PU)	MODULO =	0.315371D-02	(PU)	ANGULO =	-21.06 GRAUS
LINHA	9	-	15 :	0.294305D-02	-.113326D-02	(PU)	MODULO =	0.315371D-02	(PU)	ANGULO =	-21.06 GRAUS
LINHA	10	-	6 :	0.398100D-03	-.177437D-03	(PU)	MODULO =	0.435852D-03	(PU)	ANGULO =	-24.02 GRAUS
LINHA	10	-	7 :	0.398100D-03	-.177437D-03	(PU)	MODULO =	0.435852D-03	(PU)	ANGULO =	-24.02 GRAUS
LINHA	10	-	13 :	0.545673D-03	-.247271D-03	(PU)	MODULO =	0.599085D-03	(PU)	ANGULO =	-24.38 GRAUS
LINHA	10	-	14 :	0.545673D-03	-.247271D-03	(PU)	MODULO =	0.599085D-03	(PU)	ANGULO =	-24.38 GRAUS
LINHA	11	-	16 :	-.199928D-02	0.708556D-03	(PU)	MODULO =	0.212113D-02	(PU)	ANGULO =	160.49 GRAUS
LINHA	12	-	16 :	-.199928D-02	0.708556D-03	(PU)	MODULO =	0.212113D-02	(PU)	ANGULO =	160.49 GRAUS

TABELA V.38

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 23

	REAL	IMAG			
BARRA 1	:TENSAO = 0.207404D-04	-.199596D-04	PU MODULO =0.287845D-04	(PU) ANGULO =	-43.90 GRAUS
BARRA 2	:TENSAO = 0.638837D-04	-.594381D-04	PU MODULO =0.872583D-04	(PU) ANGULO =	-42.94 GRAUS
BARRA 3	:TENSAO = 0.782145D-04	-.724780D-04	PU MODULO =0.106633D-03	(PU) ANGULO =	-42.82 GRAUS
BARRA 4	:TENSAO = 0.207404D-04	-.199596D-04	PU MODULO =0.287845D-04	(PU) ANGULO =	-43.90 GRAUS
BARRA 5	:TENSAO = 0.207404D-04	-.199596D-04	PU MODULO =0.287845D-04	(PU) ANGULO =	-43.90 GRAUS
BARRA 6	:TENSAO = 0.112782D-04	-.113790D-04	PU MODULO =0.160212D-04	(PU) ANGULO =	-45.26 GRAUS
BARRA 7	:TENSAO = 0.112782D-04	-.113790D-04	PU MODULO =0.160212D-04	(PU) ANGULO =	-45.26 GRAUS
BARRA 8	:TENSAO = 0.848169D-03	-.160740D-02	PU MODULO =0.181745D-02	(PU) ANGULO =	-62.18 GRAUS
BARRA 9	:TENSAO = 0.848169D-03	-.160740D-02	PU MODULO =0.181745D-02	(PU) ANGULO =	-62.18 GRAUS
BARRA 10	:TENSAO = 0.181592D-05	-.279342D-05	PU MODULO =0.333597D-05	(PU) ANGULO =	-57.02 GRAUS
BARRA 11	:TENSAO = 0.343775D-02	-.226453D-02	PU MODULO =0.411658D-02	(PU) ANGULO =	-33.37 GRAUS
BARRA 12	:TENSAO = 0.343775D-02	-.226453D-02	PU MODULO =0.411658D-02	(PU) ANGULO =	-33.37 GRAUS
BARRA 13	:TENSAO = 0.400152D-04	-.376382D-04	PU MODULO =0.549350D-04	(PU) ANGULO =	-43.25 GRAUS
BARRA 14	:TENSAO = 0.400152D-04	-.376382D-04	PU MODULO =0.549350D-04	(PU) ANGULO =	-43.25 GRAUS
BARRA 15	:TENSAO = 0.848170D-03	-.160740D-02	PU MODULO =0.181745D-02	(PU) ANGULO =	-62.18 GRAUS
BARRA 16	:TENSAO = 0.343776D-02	-.226453D-02	PU MODULO =0.411658D-02	(PU) ANGULO =	-33.37 GRAUS

TABELA V.39

Escola Politécnica da Universidade Federal de Itajubá

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 23

			REAL	IMAG						
LINHA	1	- 2 :	0.2125950-03	-.2369090-03	(PU)	MODULO	=0.3183120-03	(PU)	ANGULO =	48.10 GRAUS
LINHA	1	- 3 :	0.2125950-03	0.2369090-03	(PU)	MODULO	=0.3183120-03	(PU)	ANGULO =	48.10 GRAUS
LINHA	1	- 5 :	0.9756370-14	0.9098900-14	(PU)	MODULO	=0.1262790-13	(PU)	ANGULO =	48.10 GRAUS
LINHA	2	- 3 :	0.2125950-03	0.2369090-03	(PU)	MODULO	=0.3183120-03	(PU)	ANGULO =	48.10 GRAUS
LINHA	3	- 8 :	0.2094690-03	0.1047880-03	(PU)	MODULO	=0.2333230-03	(PU)	ANGULO =	26.69 GRAUS
LINHA	3	- 9 :	0.2094690-03	0.1047880-03	(PU)	MODULO	=0.2333230-03	(PU)	ANGULO =	26.69 GRAUS
LINHA	3	- 11 :	0.2974660-03	0.4567150-03	(PU)	MODULO	=0.5450460-03	(PU)	ANGULO =	56.92 GRAUS
LINHA	3	- 12 :	0.2974660-03	0.4567150-03	(PU)	MODULO	=0.5450460-03	(PU)	ANGULO =	56.92 GRAUS
LINHA	3	- 13 :	-.2933390-03	-.3245940-03	(PU)	MODULO	=0.4375030-03	(PU)	ANGULO =	227.90 GRAUS
LINHA	3	- 14 :	-.2933390-03	-.3245940-03	(PU)	MODULO	=0.4375030-03	(PU)	ANGULO =	227.90 GRAUS
LINHA	4	- 1 :	-.1062420-13	-.1103980-13	(PU)	MODULO	=0.1532160-13	(PU)	ANGULO =	226.10 GRAUS
LINHA	5	- 4 :	-.9340390-15	-.9706210-15	(PU)	MODULO	=0.1347080-14	(PU)	ANGULO =	226.10 GRAUS
LINHA	6	- 1 :	0.2125950-03	0.2369090-03	(PU)	MODULO	=0.3183120-03	(PU)	ANGULO =	48.10 GRAUS
LINHA	7	- 1 :	0.2125950-03	0.2369090-03	(PU)	MODULO	=0.3183120-03	(PU)	ANGULO =	48.10 GRAUS
LINHA	8	- 10 :	0.2094690-03	0.1047880-03	(PU)	MODULO	=0.2333230-03	(PU)	ANGULO =	26.69 GRAUS
LINHA	9	- 10 :	0.2094690-03	0.1047880-03	(PU)	MODULO	=0.2333230-03	(PU)	ANGULO =	26.69 GRAUS
LINHA	10	- 6 :	0.2125950-03	0.2369090-03	(PU)	MODULO	=0.3183120-03	(PU)	ANGULO =	48.10 GRAUS
LINHA	10	- 7 :	0.2125950-03	0.2369090-03	(PU)	MODULO	=0.3183120-03	(PU)	ANGULO =	48.10 GRAUS
LINHA	10	- 13 :	0.2933390-03	0.3245940-03	(PU)	MODULO	=0.4375030-03	(PU)	ANGULO =	47.90 GRAUS
LINHA	10	- 14 :	0.2933390-03	0.3245940-03	(PU)	MODULO	=0.4375030-03	(PU)	ANGULO =	47.90 GRAUS
LINHA	11	- 16 :	0.2974660-03	0.4567150-03	(PU)	MODULO	=0.5450460-03	(PU)	ANGULO =	56.92 GRAUS
LINHA	12	- 16 :	0.2974660-03	0.4567150-03	(PU)	MODULO	=0.5450460-03	(PU)	ANGULO =	56.92 GRAUS

FATOR DE DISTORCAO DE TENSAO

BARRA 1 =	0.7752460-03	MVG 1 =	0.6022400-06
BARRA 2 =	0.2132420-02	MVG 2 =	0.4782050-05
BARRA 3 =	0.2661550-02	MVG 3 =	0.7058830-05
BARRA 4 =	0.7752660-03	MVG 4 =	0.6022400-06
BARRA 5 =	0.7752660-03	MVG 5 =	0.6022400-06
BARRA 6 =	0.4772550-03	MVG 6 =	0.2277730-06
BARRA 7 =	0.4772550-03	MVG 7 =	0.2277730-06
BARRA 8 =	0.6734030-01	MVG 8 =	0.4564720-02
BARRA 9 =	0.6734050-01	MVG 9 =	0.4564720-02
BARRA 10 =	0.2151730-03	MVG 10 =	0.4629960-07
BARRA 11 =	0.1010480 00	MVG 11 =	0.1019030-01
BARRA 12 =	0.1010480 00	MVG 12 =	0.1019030-01
BARRA 13 =	0.1406270-02	MVG 13 =	0.1971670-05
BARRA 14 =	0.1406270-02	MVG 14 =	0.1971670-05
BARRA 15 =	0.6610760-01	MVG 15 =	0.4564730-02
BARRA 16 =	0.1024940 00	MVG 16 =	0.1019030-01

TABELA V.41

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 5

	REAL	IMAG			
BARRA 1	:TENSAO = -.5437570-04	-.5486540-04 PU	MODULO =0.7759870-04 (PU)	ANGULO =	224.99 GRAUS
BARRA 2	:TENSAO = -.9061390-04	-.9837580-04 PU	MODULO =0.1246760-03 (PU)	ANGULO =	228.50 GRAUS
BARRA 3	:TENSAO = -.9162270-04	-.1062330-03 PU	MODULO =0.1402860-03 (PU)	ANGULO =	229.22 GRAUS
BARRA 4	:TENSAO = -.5486330-04	-.5487240-04 PU	MODULO =0.7760900-04 (PU)	ANGULO =	224.99 GRAUS
BARRA 5	:TENSAO = -.5488500-04	-.5487390-04 PU	MODULO =0.7761120-04 (PU)	ANGULO =	224.99 GRAUS
BARRA 6	:TENSAO = -.4898490-04	-.4832560-04 PU	MODULO =0.6742090-04 (PU)	ANGULO =	223.40 GRAUS
BARRA 7	:TENSAO = -.4898490-04	-.4832560-04 PU	MODULO =0.6742090-04 (PU)	ANGULO =	223.40 GRAUS
BARRA 8	:TENSAO = -.6264200-03	-.1069820-02 PU	MODULO =0.1239720-02 (PU)	ANGULO =	239.65 GRAUS
BARRA 9	:TENSAO = -.6264200-03	-.1069820-02 PU	MODULO =0.1239720-02 (PU)	ANGULO =	239.65 GRAUS
BARRA 10	:TENSAO = -.4309260-04	-.3776460-04 PU	MODULO =0.5731160-04 (PU)	ANGULO =	221.25 GRAUS
BARRA 11	:TENSAO = -.2074270-02	-.3601700-03 PU	MODULO =0.3550600-02 (PU)	ANGULO =	234.25 GRAUS
BARRA 12	:TENSAO = -.2074270-02	-.3601700-03 PU	MODULO =0.3550600-02 (PU)	ANGULO =	234.25 GRAUS
BARRA 13	:TENSAO = -.6736570-04	-.7201720-04 PU	MODULO =0.9861340-04 (PU)	ANGULO =	226.91 GRAUS
BARRA 14	:TENSAO = -.6736570-04	-.7201720-04 PU	MODULO =0.9861340-04 (PU)	ANGULO =	226.91 GRAUS
BARRA 15	:TENSAO = -.6264210-03	-.1069820-02 PU	MODULO =0.1239720-02 (PU)	ANGULO =	239.65 GRAUS
BARRA 16	:TENSAO = -.2074270-02	-.3601700-03 PU	MODULO =0.3550610-02 (PU)	ANGULO =	234.25 GRAUS

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 5

				REAL	IMAG						
LINHA	1	-	2 :	0.9937170-03	-.6501860-03	(PU)	MODULO =0.1187190-02	(PU)	ANGULO =	-33.21	GRAUS
LINHA	1	-	3 :	0.9930860-03	-.6499610-03	(PU)	MODULO =0.1186360-02	(PU)	ANGULO =	-33.21	GRAUS
LINHA	1	-	5 :	0.5033490-06	-.5037950-06	(PU)	MODULO =0.7401180-06	(PU)	ANGULO =	-45.01	GRAUS
LINHA	2	-	3 :	0.9961160-03	-.6493010-03	(PU)	MODULO =0.1188870-02	(PU)	ANGULO =	-33.20	GRAUS
LINHA	3	-	6 :	0.4033110-03	-.3314780-03	(PU)	MODULO =0.5227910-03	(PU)	ANGULO =	-28.31	GRAUS
LINHA	3	-	9 :	0.4033110-03	-.3314780-03	(PU)	MODULO =0.5227910-03	(PU)	ANGULO =	-28.31	GRAUS
LINHA	3	-	11 :	0.1783870-02	-.1238410-02	(PU)	MODULO =0.2131840-02	(PU)	ANGULO =	-35.32	GRAUS
LINHA	3	-	12 :	0.1783870-02	-.1238410-02	(PU)	MODULO =0.2131840-02	(PU)	ANGULO =	-35.32	GRAUS
LINHA	3	-	13 :	-.1351110-02	0.1351110-02	(PU)	MODULO =0.1633300-02	(PU)	ANGULO =	145.37	GRAUS
LINHA	3	-	14 :	-.1351110-02	0.1351110-02	(PU)	MODULO =0.1633300-02	(PU)	ANGULO =	145.37	GRAUS
LINHA	4	-	1 :	-.4374170-06	0.4374170-06	(PU)	MODULO =0.5277770-06	(PU)	ANGULO =	134.99	GRAUS
LINHA	5	-	4 :	-.6562120-07	0.6562120-07	(PU)	MODULO =0.7885130-07	(PU)	ANGULO =	134.99	GRAUS
LINHA	6	-	1 :	0.9961660-03	-.6514410-03	(PU)	MODULO =0.1188910-02	(PU)	ANGULO =	-33.23	GRAUS
LINHA	7	-	1 :	0.9961660-03	-.6514410-03	(PU)	MODULO =0.1188910-02	(PU)	ANGULO =	-33.23	GRAUS
LINHA	8	-	15 :	0.4033110-03	-.3314780-03	(PU)	MODULO =0.5227910-03	(PU)	ANGULO =	-28.31	GRAUS
LINHA	9	-	15 :	0.4033110-03	-.3314780-03	(PU)	MODULO =0.5227910-03	(PU)	ANGULO =	-28.31	GRAUS
LINHA	10	-	6 :	0.9947130-03	-.6514140-03	(PU)	MODULO =0.1189130-02	(PU)	ANGULO =	-33.23	GRAUS
LINHA	10	-	7 :	0.9947130-03	-.6514140-03	(PU)	MODULO =0.1189130-02	(PU)	ANGULO =	-33.23	GRAUS
LINHA	10	-	10 :	0.1391540-02	-.9164810-03	(PU)	MODULO =0.1663160-02	(PU)	ANGULO =	-34.13	GRAUS
LINHA	10	-	14 :	0.1391540-02	-.9164810-03	(PU)	MODULO =0.1663160-02	(PU)	ANGULO =	-34.13	GRAUS
LINHA	11	-	15 :	0.1783870-02	-.1238410-02	(PU)	MODULO =0.2131830-02	(PU)	ANGULO =	-35.32	GRAUS
LINHA	12	-	15 :	0.1783870-02	-.1238410-02	(PU)	MODULO =0.2131830-02	(PU)	ANGULO =	-35.32	GRAUS

T E N C O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENCAO HARMONICA DE ORDEM 13

	REAL	IMAG			
BARRA 1	:TENSAO = -.1343[illegible]D-04	-.2441[illegible]D-04 PU	MODULO =0.2786070-04 (PU)	ANGULO =	241.19 GRAUS
BARRA 2	:TENSAO = -.3[illegible]D-04	-.6[illegible]D-04 PU	MODULO =0.7325400-04 (PU)	ANGULO =	243.54 GRAUS
BARRA 3	:TENSAO = -.3[illegible]D-04	-.7[illegible]D-04 PU	MODULO =0.8522960-04 (PU)	ANGULO =	243.84 GRAUS
BARRA 4	:TENSAO = -.1344140-04	-.2443[illegible]D-04 PU	MODULO =0.2788590-04 (PU)	ANGULO =	241.19 GRAUS
BARRA 5	:TENSAO = -.1344[illegible]D-04	-.2443750-04 PU	MODULO =0.2789130-04 (PU)	ANGULO =	241.19 GRAUS
BARRA 6	:TENSAO = -.[illegible]D-05	-.1[illegible]D-04 PU	MODULO =0.1794560-04 (PU)	ANGULO =	233.83 GRAUS
BARRA 7	:TENSAO = -.[illegible]D-05	-.1[illegible]D-04 PU	MODULO =0.1794560-04 (PU)	ANGULO =	233.83 GRAUS
BARRA 8	:TENSAO = -.4770[illegible]D-02	-.1[illegible]D-01 PU	MODULO =0.1320680-01 (PU)	ANGULO =	248.92 GRAUS
BARRA 9	:TENSAO = -.4770[illegible]D-02	-.1[illegible]D-01 PU	MODULO =0.1320680-01 (PU)	ANGULO =	248.92 GRAUS
BARRA 10	:TENSAO = -.[illegible]D-05	-.[illegible]D-05 PU	MODULO =0.8151080-05 (PU)	ANGULO =	230.75 GRAUS
BARRA 11	:TENSAO = [illegible]	[illegible] PU	MODULO =[illegible] (PU)	ANGULO =	70.47 GRAUS
BARRA 12	:TENSAO = [illegible]	[illegible] PU	MODULO =[illegible] (PU)	ANGULO =	70.47 GRAUS
BARRA 13	:TENSAO = -.[illegible]D-04	-.[illegible]D-04 PU	MODULO =0.4[illegible]215D-04 (PU)	ANGULO =	242.74 GRAUS
BARRA 14	:TENSAO = -.[illegible]D-04	-.[illegible]D-04 PU	MODULO =0.4[illegible]215D-04 (PU)	ANGULO =	242.74 GRAUS
BARRA 15	:TENSAO = -.4770[illegible]D-02	-.1[illegible]D-01 PU	MODULO =0.1320680-01 (PU)	ANGULO =	248.92 GRAUS
BARRA 16	:TENSAO = [illegible]	[illegible] PU	MODULO =[illegible] (PU)	ANGULO =	70.47 GRAUS

TABELA V.44

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 13

				REAL	IMAG						
LINHA	1	-	2 :	0.3995530-03	-.1781350-03	(PU)	MODULO =0.4374640-03	(PU)	ANGULO =	-24.03	GRAUS
LINHA	1	-	3 :	0.3990990-03	-.1779100-03	(PU)	MODULO =0.4369570-03	(PU)	ANGULO =	-24.03	GRAUS
LINHA	1	-	5 :	0.6038100-06	-.3331210-06	(PU)	MODULO =0.6915150-06	(PU)	ANGULO =	-29.82	GRAUS
LINHA	2	-	3 :	0.3977260-03	-.1772290-03	(PU)	MODULO =0.4354250-03	(PU)	ANGULO =	-24.02	GRAUS
LINHA	3	-	6 :	0.2943000-02	-.1133240-02	(PU)	MODULO =0.3153660-02	(PU)	ANGULO =	-21.06	GRAUS
LINHA	3	-	9 :	0.2943020-02	-.1133240-02	(PU)	MODULO =0.3153660-02	(PU)	ANGULO =	-21.06	GRAUS
LINHA	3	-	11 :	-.1999350-02	0.7699940-03	(PU)	MODULO =0.2121210-02	(PU)	ANGULO =	160.48	GRAUS
LINHA	3	-	12 :	-.1999350-02	0.7699940-03	(PU)	MODULO =0.2121210-02	(PU)	ANGULO =	160.48	GRAUS
LINHA	3	-	13 :	-.5471720-03	0.2100190-03	(PU)	MODULO =0.6007580-03	(PU)	ANGULO =	155.62	GRAUS
LINHA	3	-	14 :	-.5471720-03	0.2100190-03	(PU)	MODULO =0.6007580-03	(PU)	ANGULO =	155.62	GRAUS
LINHA	4	-	1 :	-.7350630D-06	0.4043990-06	(PU)	MODULO =0.8389590-06	(PU)	ANGULO =	151.18	GRAUS
LINHA	5	-	4 :	-.6718610-07	0.3697190-07	(PU)	MODULO =0.7679490-07	(PU)	ANGULO =	151.18	GRAUS
LINHA	6	-	1 :	0.4000030-03	-.1781900-03	(PU)	MODULO =0.4390050-03	(PU)	ANGULO =	-24.05	GRAUS
LINHA	7	-	1 :	0.4000030-03	-.1781900-03	(PU)	MODULO =0.4390050-03	(PU)	ANGULO =	-24.05	GRAUS
LINHA	8	-	10 :	0.2943010-02	-.1133210-02	(PU)	MODULO =0.3153590-02	(PU)	ANGULO =	-21.06	GRAUS
LINHA	9	-	10 :	0.2943010-02	-.1133210-02	(PU)	MODULO =0.3153590-02	(PU)	ANGULO =	-21.06	GRAUS
LINHA	10	-	6 :	0.4001070-03	-.1781710-03	(PU)	MODULO =0.4391590-03	(PU)	ANGULO =	-24.05	GRAUS
LINHA	10	-	7 :	0.4001070-03	-.1781710-03	(PU)	MODULO =0.4391590-03	(PU)	ANGULO =	-24.05	GRAUS
LINHA	10	-	13 :	0.5411110-03	-.2158870-03	(PU)	MODULO =0.6011910-03	(PU)	ANGULO =	-24.39	GRAUS
LINHA	10	-	14 :	0.5411110-03	-.2158870-03	(PU)	MODULO =0.6011910-03	(PU)	ANGULO =	-24.39	GRAUS
LINHA	11	-	10 :	-.1999310-02	0.7699720D-03	(PU)	MODULO =0.2121160-02	(PU)	ANGULO =	160.48	GRAUS
LINHA	12	-	10 :	-.1999310-02	0.7699720-03	(PU)	MODULO =0.2121160-02	(PU)	ANGULO =	160.48	GRAUS

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 25

		REAL	IMAG			
BARRA	1	:TENSAO = -.3080360-05	0.1916220-03	PU MODULO = 0.1916070-03	(PU) ANGULO =	90.92 GRAUS
BARRA	2	:TENSAO = -.1780160-04	0.5834450-03	PU MODULO = 0.5837190-03	(PU) ANGULO =	91.76 GRAUS
BARRA	3	:TENSAO = -.2307010-04	0.7111980-03	PU MODULO = 0.7115700-03	(PU) ANGULO =	91.86 GRAUS
BARRA	4	:TENSAO = -.3304930-05	0.1932240-03	PU MODULO = 0.1932490-03	(PU) ANGULO =	90.92 GRAUS
BARRA	5	:TENSAO = -.3019900-05	0.1933610-03	PU MODULO = 0.1933860-03	(PU) ANGULO =	90.92 GRAUS
BARRA	6	:TENSAO = 0.5187500-06	0.1051330-03	PU MODULO = 0.1051340-03	(PU) ANGULO =	89.72 GRAUS
BARRA	7	:TENSAO = 0.5187500-06	0.1051330-03	PU MODULO = 0.1051340-03	(PU) ANGULO =	89.72 GRAUS
BARRA	8	:TENSAO = -.5000000-33	0.1322040-01	PU MODULO = 0.1322320-01	(PU) ANGULO =	91.01 GRAUS
BARRA	9	:TENSAO = -.5000000-33	0.1322040-01	PU MODULO = 0.1322320-01	(PU) ANGULO =	91.01 GRAUS
BARRA	10	:TENSAO = 0.4107120-05	0.1905750-04	PU MODULO = 0.1905940-04	(PU) ANGULO =	77.55 GRAUS
BARRA	11	:TENSAO = -.1300340-02	0.1997090-01	PU MODULO = 0.2001670-01	(PU) ANGULO =	93.38 GRAUS
BARRA	12	:TENSAO = -.1300340-02	0.1997090-01	PU MODULO = 0.2001670-01	(PU) ANGULO =	93.38 GRAUS
BARRA	13	:TENSAO = -.9504700-05	0.3659410-03	PU MODULO = 0.3660910-03	(PU) ANGULO =	91.49 GRAUS
BARRA	14	:TENSAO = -.9504700-05	0.3659410-03	PU MODULO = 0.3660910-03	(PU) ANGULO =	91.49 GRAUS
BARRA	15	:TENSAO = -.5000000-33	0.1322040-01	PU MODULO = 0.1322320-01	(PU) ANGULO =	91.01 GRAUS
BARRA	16	:TENSAO = -.1300340-02	0.1997090-01	PU MODULO = 0.2001670-01	(PU) ANGULO =	93.38 GRAUS

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 25

				REAL	IMAG			
LINHA	1	- 2 :	-.1956[illegible]-02	-.9164[illegible]-04 (PU)	MODULO =0.1958730-02 (PU)	ANGULO =	182.67	GRAUS
LINHA	1	- 3 :	-.1952[illegible]-02	-.9130[illegible]-04 (PU)	MODULO =0.1953950-02 (PU)	ANGULO =	182.68	GRAUS
LINHA	1	- 5 :	-.9170[illegible]-05	-.1471[illegible]-04 (PU)	MODULO =0.9171750-05 (PU)	ANGULO =	180.92	GRAUS
LINHA	2	- 3 :	-.1932[illegible]-02	-.9[illegible]-04 (PU)	MODULO =0.1933460-02 (PU)	ANGULO =	182.64	GRAUS
LINHA	3	- 6 :	-.2116[illegible]-02	-.9[illegible]-04 (PU)	MODULO =0.2119030-02 (PU)	ANGULO =	181.01	GRAUS
LINHA	3	- 9 :	-.2116[illegible]-02	-.9[illegible]-04 (PU)	MODULO =0.2119030-02 (PU)	ANGULO =	181.01	GRAUS
LINHA	3	- 11 :	-.2[illegible]-02	-.1[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.2413260-02 (PU)	ANGULO =	185.99	GRAUS
LINHA	3	- 12 :	-.2[illegible]-02	-.1[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.2413260-02 (PU)	ANGULO =	185.99	GRAUS
LINHA	5	- 13 :	0.2[illegible]-02	0.11[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.2419750-02 (PU)	ANGULO =	2.49	GRAUS
LINHA	5	- 14 :	0.2[illegible]-02	0.11[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.2419750-02 (PU)	ANGULO =	2.49	GRAUS
LINHA	6	- 1 :	0.111[illegible]-04	0.1[illegible]-06 (PU)	MODULO =0.1113450-04 (PU)	ANGULO =	0.92	GRAUS
LINHA	6	- 4 :	0.9[illegible]-06	0.1[illegible]-07 (PU)	MODULO =0.9794500-06 (PU)	ANGULO =	0.92	GRAUS
LINHA	8	- 1 :	-.1[illegible]-02	-.9[illegible]-04 (PU)	MODULO =0.1[illegible]-02 (PU)	ANGULO =	182.66	GRAUS
LINHA	7	- 1 :	-.1[illegible]-02	-.9[illegible]-04 (PU)	MODULO =0.1933670-02 (PU)	ANGULO =	182.65	GRAUS
LINHA	8	- 10 :	-.2[illegible]-02	-.9[illegible]-04 (PU)	MODULO =0.2134430-02 (PU)	ANGULO =	181.01	GRAUS
LINHA	9	- 15 :	-.2[illegible]-02	-.9[illegible]-04 (PU)	MODULO =0.2134430-02 (PU)	ANGULO =	181.01	GRAUS
LINHA	10	- 6 :	-.1[illegible]-02	-.9[illegible]-04 (PU)	MODULO =0.1933420-02 (PU)	ANGULO =	182.65	GRAUS
LINHA	10	- 7 :	-.1[illegible]-02	-.9[illegible]-04 (PU)	MODULO =0.1933420-02 (PU)	ANGULO =	182.65	GRAUS
LINHA	10	- 10 :	-.2[illegible]-02	-.1[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.2706350-02 (PU)	ANGULO =	182.49	GRAUS
LINHA	10	- 14 :	-.2[illegible]-02	-.1[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.2706350-02 (PU)	ANGULO =	182.49	GRAUS
LINHA	11	- 15 :	-.2[illegible]-02	-.1[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.2413050-02 (PU)	ANGULO =	185.99	GRAUS
LINHA	12	- 15 :	-.2[illegible]-02	-.1[illegible]-03 (PU)	MODULO =0.2413050-02 (PU)	ANGULO =	185.99	GRAUS

FATOR DE DISTORCAO DE TENSAO

BARRA	1 =	0.7947530-03	MVQ	1 =	0.6328950-06
BARRA	2 =	0.2228940-02	MVQ	2 =	0.4988040-05
BARRA	3 =	0.3696490-02	MVQ	3 =	0.7300190-05
BARRA	4 =	0.7976540-03	MVQ	4 =	0.6375250-06
BARRA	5 =	0.7952720-03	MVQ	5 =	0.6335140-06
BARRA	6 =	0.4867210-03	MVQ	6 =	0.2368980-06
BARRA	7 =	0.4867210-03	MVQ	7 =	0.2368980-06
BARRA	8 =	0.6756070-01	MVQ	8 =	0.4568810-02
BARRA	9 =	0.6756070-01	MVQ	9 =	0.4568810-02
BARRA	10 =	0.2162360-03	MVQ	10 =	0.4675900-07
BARRA	11 =	0.1010520 00	MVQ	11 =	0.1019100-01
BARRA	12 =	0.1010520 00	MVQ	12 =	0.1019100-01
BARRA	13 =	0.1434610-02	MVQ	13 =	0.2049890-05
BARRA	14 =	0.1434610-02	MVQ	14 =	0.2049890-05
BARRA	15 =	0.6813920-01	MVQ	15 =	0.4566830-02
BARRA	16 =	0.1024890 00	MVQ	16 =	0.1019100-01

TABELA V.48

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 5

	REAL	IMAG			
BARRA 1 :TENSAO =	-.4387530-04	-.6451410-04 PU	MODULO =0.7802000-04	(PU) ANGULO =	235.78 GRAUS
BARRA 2 :TENSAO =	-.7176090-04	-.1028790-03 PU	MODULO =0.1254390-03	(PU) ANGULO =	235.10 GRAUS
BARRA 3 :TENSAO =	-.8083130-04	-.1156480-03 PU	MODULO =0.1411290-03	(PU) ANGULO =	235.06 GRAUS
BARRA 4 :TENSAO =	-.4370150-04	-.6452250-04 PU	MODULO =0.7803040-04	(PU) ANGULO =	235.78 GRAUS
BARRA 5 :TENSAO =	-.4380290-04	-.6442430-04 PU	MODULO =0.7803260-04	(PU) ANGULO =	235.79 GRAUS
BARRA 6 :TENSAO =	-.3795210-04	-.5600330-04 PU	MODULO =0.6765160-04	(PU) ANGULO =	235.83 GRAUS
BARRA 7 :TENSAO =	-.3795210-04	-.5600330-04 PU	MODULO =0.6765160-04	(PU) ANGULO =	235.83 GRAUS
BARRA 8 :TENSAO =	-.6834130-03	-.1072440-02 PU	MODULO =0.1240470-02	(PU) ANGULO =	239.83 GRAUS
BARRA 9 :TENSAO =	-.6834130-03	-.1072440-02 PU	MODULO =0.1240470-02	(PU) ANGULO =	239.83 GRAUS
BARRA 10 :TENSAO =	-.3302710-04	-.4749090-04 PU	MODULO =0.5729150-04	(PU) ANGULO =	236.00 GRAUS
BARRA 11 :TENSAO =	-.2071150-02	-.2884420-02 PU	MODULO =0.3550990-02	(PU) ANGULO =	234.32 GRAUS
BARRA 12 :TENSAO =	-.2071150-02	-.2884420-02 PU	MODULO =0.3550990-02	(PU) ANGULO =	234.32 GRAUS
BARRA 13 :TENSAO =	-.6443530-04	-.9199180-04 PU	MODULO =0.9921400-04	(PU) ANGULO =	235.33 GRAUS
BARRA 14 :TENSAO =	-.6443530-04	-.9199180-04 PU	MODULO =0.9921400-04	(PU) ANGULO =	235.33 GRAUS
BARRA 15 :TENSAO =	-.6834130-03	-.1072440-02 PU	MODULO =0.1240470-02	(PU) ANGULO =	239.83 GRAUS
BARRA 16 :TENSAO =	-.2071150-02	-.2884420-02 PU	MODULO =0.3551000-02	(PU) ANGULO =	234.32 GRAUS

TABELA V.49

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 5

				REAL	IMAG				
LINHA	1	-	2 :	0.9[illegible]-03	-.654[illegible]-03	(PU)	MODULO =0.1186520-02 (PU)	ANGULO =	-33.46 GRAUS
LINHA	1	-	5 :	0.9[illegible]-03	-.654[illegible]-03	(PU)	MODULO =0.1186190-02 (PU)	ANGULO =	-33.46 GRAUS
LINHA	1	-	9 :	0.[illegible]-06	-.411[illegible]-06	(PU)	MODULO =0.7441370-06 (PU)	ANGULO =	-34.22 GRAUS
LINHA	2	-	3 :	0.[illegible]-03	-.654[illegible]-03	(PU)	MODULO =0.1185180-02 (PU)	ANGULO =	-33.46 GRAUS
LINHA	3	-	6 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03	(PU)	MODULO =0.6874470-03 (PU)	ANGULO =	-29.34 GRAUS
LINHA	3	-	9 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03	(PU)	MODULO =0.6874470-03 (PU)	ANGULO =	-29.34 GRAUS
LINHA	3	-	11 :	0.[illegible]-02	-.[illegible]-02	(PU)	MODULO =0.2131210-02 (PU)	ANGULO =	-35.49 GRAUS
LINHA	3	-	12 :	0.[illegible]-02	-.[illegible]-02	(PU)	MODULO =0.2131210-02 (PU)	ANGULO =	-35.49 GRAUS
LINHA	3	-	13 :	-.[illegible]-03	0.[illegible]-03	(PU)	MODULO =0.1611990-02 (PU)	ANGULO =	145.62 GRAUS
LINHA	3	-	14 :	-.[illegible]-03	0.[illegible]-03	(PU)	MODULO =0.1611990-02 (PU)	ANGULO =	145.62 GRAUS
LINHA	4	-	1 :	-.[illegible]-06	0.[illegible]-06	(PU)	MODULO =0.4022[illegible]-06 (PU)	ANGULO =	146.78 GRAUS
LINHA	5	-	4 :	-.[illegible]-07	0.[illegible]-07	(PU)	MODULO =0.7033990-07 (PU)	ANGULO =	146.78 GRAUS
LINHA	5	-	7 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03	(PU)	MODULO =0.1185990-02 (PU)	ANGULO =	-33.46 GRAUS
LINHA	6	-	7 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03	(PU)	MODULO =0.1185990-02 (PU)	ANGULO =	-33.46 GRAUS
LINHA	7	-	15 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03	(PU)	MODULO =0.6874440-03 (PU)	ANGULO =	-29.34 GRAUS
LINHA	8	-	15 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03	(PU)	MODULO =0.6874440-03 (PU)	ANGULO =	-29.34 GRAUS
LINHA	10	-	8 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03	(PU)	MODULO =0.1185920-02 (PU)	ANGULO =	-33.46 GRAUS
LINHA	10	-	9 :	0.[illegible]-03	-.[illegible]-03	(PU)	MODULO =0.1185920-02 (PU)	ANGULO =	-33.46 GRAUS
LINHA	10	-	13 :	0.[illegible]-02	-.[illegible]-02	(PU)	MODULO =0.1632990-02 (PU)	ANGULO =	-34.39 GRAUS
LINHA	10	-	14 :	0.[illegible]-02	-.[illegible]-02	(PU)	MODULO =0.1632990-02 (PU)	ANGULO =	-34.39 GRAUS
LINHA	11	-	15 :	0.[illegible]-02	-.[illegible]-02	(PU)	MODULO =0.2131210-02 (PU)	ANGULO =	-35.49 GRAUS
LINHA	12	-	15 :	0.[illegible]-02	-.[illegible]-02	(PU)	MODULO =0.2131210-02 (PU)	ANGULO =	-35.49 GRAUS

TABELA V.50

T E N S O E S - A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 17

		REAL	IMAG		
BARRA	1	:TENSAO = -.1161E+00-04	-.2550000-04	PU MODULO =0.2804770-04	(PU) ANGULO = 245.49 GRAUS
BARRA	2	:TENSAO = -.3174760-04	-.6646700-04	PU MODULO =0.7347340-04	(PU) ANGULO = 245.15 GRAUS
BARRA	3	:TENSAO = -.3715400-04	-.1027130-04	PU MODULO =0.3845200-04	(PU) ANGULO = 245.16 GRAUS
BARRA	4	:TENSAO = -.1164730-04	-.2554990-04	PU MODULO =0.2807310-04	(PU) ANGULO = 245.49 GRAUS
BARRA	5	:TENSAO = -.1164410-04	-.2554770-04	PU MODULO =0.2807540-04	(PU) ANGULO = 245.49 GRAUS
BARRA	6	:TENSAO = -.7490940-05	-.1646720-04	PU MODULO =0.1809090-04	(PU) ANGULO = 245.54 GRAUS
BARRA	7	:TENSAO = -.7491540-05	-.1646720-04	PU MODULO =0.1809090-04	(PU) ANGULO = 245.54 GRAUS
BARRA	8	:TENSAO = -.4770410-01	-.1271000-01	PU MODULO =0.1330690-01	(PU) ANGULO = 249.93 GRAUS
BARRA	9	:TENSAO = -.4770211-02	-.1271000-01	PU MODULO =0.1330690-01	(PU) ANGULO = 249.93 GRAUS
BARRA	10	:TENSAO = -.6634410-05	-.7411140-05	PU MODULO =0.1130490-05	(PU) ANGULO = 245.72 GRAUS
BARRA	11	:TENSAO = 0.2410210-02	0.4277710-02	PU MODULO =0.4736390-02	(PU) ANGULO = 70.47 GRAUS
BARRA	12	:TENSAO = 0.2410210-02	0.4277710-02	PU MODULO =0.4736390-02	(PU) ANGULO = 70.47 GRAUS
BARRA	13	:TENSAO = -.2662410-04	-.4534670-04	PU MODULO =0.4710960-04	(PU) ANGULO = 245.21 GRAUS
BARRA	14	:TENSAO = -.2662410-04	-.4534670-04	PU MODULO =0.4710960-04	(PU) ANGULO = 245.21 GRAUS
BARRA	15	:TENSAO = -.1171600-01	-.1271000-01	PU MODULO =0.1730420-01	(PU) ANGULO = 249.43 GRAUS
BARRA	16	:TENSAO = 0.2410210-02	0.4277710-02	PU MODULO =0.4736410-02	(PU) ANGULO = 70.47 GRAUS

TABELA V.51

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 13

				PEAL	IMAG				
LINHA	1	-	2 :	0.7998150D-07	-.1744420D-07 (PU)	MODULO =	0.4374190D-08 (PU)	ANGULO =	-24.08 GRAUS
LINHA	1	-	3 :	0.8998150D-07	-.1744420D-07 (PU)	MODULO =	0.4374190D-08 (PU)	ANGULO =	-24.08 GRAUS
LINHA	1	-	5 :	0.4551411D-08	-.9844210D-09 (PU)	MODULO =	0.2241550D-09 (PU)	ANGULO =	-24.51 GRAUS
LINHA	2	-	3 :	0.1998150D-07	-.4361050D-07 (PU)	MODULO =	0.4800710D-08 (PU)	ANGULO =	-24.08 GRAUS
LINHA	2	-	4 :	0.1998150D-07	-.4361050D-07 (PU)	MODULO =	0.4800710D-08 (PU)	ANGULO =	-24.08 GRAUS
LINHA	3	-	4 :	0.1998150D-07	-.4361050D-07 (PU)	MODULO =	0.4800710D-08 (PU)	ANGULO =	-24.08 GRAUS
LINHA	3	-	11 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	3	-	12 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	3	-	13 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	3	-	14 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	4	-	1 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	4	-	2 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	4	-	3 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	4	-	11 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	4	-	12 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	4	-	13 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	4	-	14 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	5	-	1 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	5	-	2 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	5	-	3 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	5	-	11 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	5	-	12 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	5	-	13 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	5	-	14 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	11	-	1 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	11	-	2 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	11	-	3 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	11	-	4 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	11	-	5 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	11	-	12 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	11	-	13 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	11	-	14 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	12	-	11 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	12	-	13 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	12	-	14 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS
LINHA	13	-	14 :	-.1398150D-07	0.3052141D-07 (PU)	MODULO =	0.3358990D-08 (PU)	ANGULO =	114.92 GRAUS

TABELA V.52

T E N S O E S H A R M O N I C A S N A S B A R R A S

TENSAO HARMONICA DE ORDEM 25

	REAL	IMAG				
BARRA 1	:TENSAO = -.3075590-05	0.1920150-03	PU MODULO =0.1921840-03	(PU)	ANGULO =	92.41 GRAUS
BARRA 2	:TENSAO = -.2334840-04	0.5440730-03	PU MODULO =0.5843200-03	(PU)	ANGULO =	92.24 GRAUS
BARRA 3	:TENSAO = -.2793430-04	0.7116810-03	PU MODULO =0.7121710-03	(PU)	ANGULO =	92.25 GRAUS
BARRA 4	:TENSAO = -.3094880-05	0.1926580-03	PU MODULO =0.1928230-03	(PU)	ANGULO =	92.41 GRAUS
BARRA 5	:TENSAO = -.2899400-05	0.1927950-03	PU MODULO =0.1929650-03	(PU)	ANGULO =	92.41 GRAUS
BARRA 6	:TENSAO = -.4446920-05	0.1056640-03	PU MODULO =0.1056930-03	(PU)	ANGULO =	92.42 GRAUS
BARRA 7	:TENSAO = -.4446920-05	0.1056640-03	PU MODULO =0.1056930-03	(PU)	ANGULO =	92.42 GRAUS
BARRA 8	:TENSAO = -.7216680-05	0.1922050-01	PU MODULO =0.1922340-01	(PU)	ANGULO =	91.01 GRAUS
BARRA 9	:TENSAO = -.7216680-05	0.1922050-01	PU MODULO =0.1922340-01	(PU)	ANGULO =	91.01 GRAUS
BARRA 10	:TENSAO = -.5013740-06	0.1905670-04	PU MODULO =0.1905590-04	(PU)	ANGULO =	92.56 GRAUS
BARRA 11	:TENSAO = -.1334010-02	0.1997090-01	PU MODULO =0.2001690-01	(PU)	ANGULO =	93.88 GRAUS
BARRA 12	:TENSAO = -.1334010-02	0.1997090-01	PU MODULO =0.2001690-01	(PU)	ANGULO =	93.88 GRAUS
BARRA 13	:TENSAO = -.1445540-04	0.3663960-03	PU MODULO =0.3666610-03	(PU)	ANGULO =	92.26 GRAUS
BARRA 14	:TENSAO = -.1445540-04	0.3663960-03	PU MODULO =0.3666610-03	(PU)	ANGULO =	92.26 GRAUS
BARRA 15	:TENSAO = -.3019490-05	0.1922060-01	PU MODULO =0.1922340-01	(PU)	ANGULO =	91.01 GRAUS
BARRA 16	:TENSAO = -.1334710-02	0.1997130-01	PU MODULO =0.2001690-01	(PU)	ANGULO =	93.88 GRAUS

F L U X O D E C O R R E N T E N A S L I N H A S

CORRENTE HARMONICA DE ORDEM 25

				REAL	IMAG					
LINHA	1	-	2 :	-.1961570-02	-.9141300-04	(PU)	MODULO =0.1963700-02	(PU)	ANGULO =	182.67 GRAUS
LINHA	1	-	3 :	-.1953790-02	-.9109360-04	(PU)	MODULO =0.1955910-02	(PU)	ANGULO =	182.67 GRAUS
LINHA	1	-	5 :	-.9191290-05	-.3661420-06	(PU)	MODULO =0.9199360-05	(PU)	ANGULO =	182.41 GRAUS
LINHA	2	-	3 :	-.1930290-02	-.9011000-04	(PU)	MODULO =0.1932390-02	(PU)	ANGULO =	182.69 GRAUS
LINHA	3	-	8 :	-.2110850-02	-.9838400-04	(PU)	MODULO =0.2119980-02	(PU)	ANGULO =	181.00 GRAUS
LINHA	3	-	9 :	-.2110850-02	-.9838400-04	(PU)	MODULO =0.2119980-02	(PU)	ANGULO =	181.00 GRAUS
LINHA	3	-	11 :	-.2407350-02	-.1678150-03	(PU)	MODULO =0.2413180-02	(PU)	ANGULO =	183.98 GRAUS
LINHA	3	-	12 :	-.2407350-02	-.1678150-03	(PU)	MODULO =0.2413180-02	(PU)	ANGULO =	183.98 GRAUS
LINHA	3	-	13 :	0.2687110-02	0.1166340-03	(PU)	MODULO =0.2689710-02	(PU)	ANGULO =	2.49 GRAUS
LINHA	3	-	14 :	0.2687110-02	0.1166340-03	(PU)	MODULO =0.2689710-02	(PU)	ANGULO =	2.49 GRAUS
LINHA	4	-	1 :	0.1114110-04	0.4633990-06	(PU)	MODULO =0.1115800-04	(PU)	ANGULO =	2.41 GRAUS
LINHA	5	-	4 :	0.9320400-06	0.4124260-07	(PU)	MODULO =0.9329350-06	(PU)	ANGULO =	2.40 GRAUS
LINHA	6	-	1 :	-.1961570-02	-.9205770-04	(PU)	MODULO =0.1963720-02	(PU)	ANGULO =	182.67 GRAUS
LINHA	7	-	1 :	-.1961570-02	-.9205770-04	(PU)	MODULO =0.1963720-02	(PU)	ANGULO =	182.67 GRAUS
LINHA	8	-	15 :	-.2110450-02	-.9838050-04	(PU)	MODULO =0.2119790-02	(PU)	ANGULO =	181.00 GRAUS
LINHA	9	-	15 :	-.2110450-02	-.9838050-04	(PU)	MODULO =0.2119790-02	(PU)	ANGULO =	181.00 GRAUS
LINHA	10	-	6 :	-.1953330-02	-.9103320-04	(PU)	MODULO =0.1955430-02	(PU)	ANGULO =	182.67 GRAUS
LINHA	10	-	7 :	-.1953330-02	-.9103320-04	(PU)	MODULO =0.1955430-02	(PU)	ANGULO =	182.67 GRAUS
LINHA	10	-	13 :	-.2705300-02	-.1172990-03	(PU)	MODULO =0.2706340-02	(PU)	ANGULO =	182.46 GRAUS
LINHA	10	-	14 :	-.2705300-02	-.1172990-03	(PU)	MODULO =0.2706340-02	(PU)	ANGULO =	182.46 GRAUS
LINHA	11	-	16 :	-.2407140-02	-.1678010-03	(PU)	MODULO =0.2413970-02	(PU)	ANGULO =	183.98 GRAUS
LINHA	12	-	16 :	-.2407140-02	-.1678010-03	(PU)	MODULO =0.2413970-02	(PU)	ANGULO =	183.98 GRAUS

TABELA V.54

FATOR DE DISTORCAO DE TENSAO

BARRA	1 =	0.7933540-03	MVQ	1 =	0.6396440-06
BARRA	2 =	0.2232860-02	MVQ	2 =	0.5005620-05
BARRA	3 =	0.2700460-02	MVQ	3 =	0.7321670-05
BARRA	4 =	0.1012550-03	MVQ	4 =	0.6432940-06
BARRA	5 =	0.1016770-03	MVQ	5 =	0.6442870-06
BARRA	6 =	0.4996520-03	MVQ	6 =	0.2397690-06
BARRA	7 =	0.4996520-03	MVQ	7 =	0.2397690-06
BARRA	8 =	0.5766110-01	MVQ	8 =	0.4568570-02
BARRA	9 =	0.5766110-01	MVQ	9 =	0.4568570-02
BARRA	10 =	0.2161950-03	MVQ	10 =	0.4674010-07
BARRA	11 =	0.1019470 00	MVQ	11 =	0.1019020-01
BARRA	12 =	0.1019470 00	MVQ	12 =	0.1019020-01
BARRA	13 =	0.1439450-02	MVQ	13 =	0.2068360-05
BARRA	14 =	0.1439450-02	MVQ	14 =	0.2068360-05
BARRA	15 =	0.1113240-01	MVQ	15 =	0.4510880-02
BARRA	16 =	0.1024340 00	MVQ	16 =	0.1019020-01

APÊNDICE I

Y_f = Admitância total do filtro

Para se obter os valores de admitância, costuma-se expressar primeiramente as impedâncias :

$$Z_1 = R_1 + j\left(WL_1 - \frac{1}{WC_1}\right) = R_1 + j\left(2\pi fL_1 - \frac{1}{2\pi fC_1}\right)$$

$$Z_2 = R_2 + j\left(WL_2 - \frac{1}{WC_2}\right) = R_2 + j\left(2\pi fL_2 - \frac{1}{2\pi fC_2}\right)$$

$$Z_3 = R_3 + j\left(WL_3 - \frac{1}{WC_3}\right) = R_3 + j\left(2\pi fL_3 - \frac{1}{2\pi fC_3}\right)$$

Tomando os inversos obtem-se :

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} \; ; \quad Y_2 = \frac{1}{Z_2} \; ; \quad Y_3 = \frac{1}{Z_3}$$

$$Y_1 = \frac{1}{R_1 + j\left(WL_1 - \frac{1}{WC_1}\right)} = \frac{R_1 - j(WL_1 - 1/WC_1)}{\left[R_1 + j\left(WL_1 - \frac{1}{WC_1}\right)\right]\left[R_1 - j\left(WL_1 - \frac{1}{WC_1}\right)\right]}$$

$$Y_1 = \frac{R_1 - j(WL_1 - 1/WC_1)}{R_1^2 + (WL_1 - 1/WC_1)^2}$$

$$Y_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (WL_1 - 1/WC_1)^2} - j\frac{(WL_1 - 1/WC_1)}{R_1^2 + (WL_1 - 1/WC_1)^2} \qquad (1)$$

$$Y_1 = G_1 + jB_1 \; ; \; G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (WL_1 - 1/WC_1)^2} \; ; \quad B_1 = \frac{-(WL_1 - 1/WC_1)}{R_1^2 + (WL_1 - 1/WC_1)^2}$$

Análogamente

$$Y_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + (WL_2 - 1/WC_2)^2} - j \frac{(WL_2 - 1/WC_2)}{R_2^2 + (WL_2 - 1/WC_2)^2} \qquad (2)$$

$$Y_2 = G_2 + jB_2 \; \therefore \; G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + (WL_2 - 1/WC_2)^2} \; ; \; B_2 = \frac{-(WL_2 - 1/WC_2)}{R_2^2 + (WL_2 - 1/WC_2)^2}$$

$$Y_3 = \frac{R_3}{R_3^2 + (WL_3 - 1/WC_3)^2} - j \frac{(WL_3 - 1/WC_3)}{R_3^2 + (WL_3 - 1/WC_3)^2} \qquad (3)$$

$$Y_3 = G_3 + jB_3 \; \therefore \; G_3 = \frac{R_3}{R_3^2 + (WL_3 - 1/WC_3)^2} \; ; \; B_3 = \frac{-(WL_3 - 1/WC_3)}{R_3^2 + (WL_3 - 1/WC_3)^2}$$

Para o ramo passa-alto tem-se :

$$Z_4 = -j \frac{1}{WC_D} + \left(\frac{1}{R_D} + \frac{1}{jWL_D} \right)^{-1}$$

$$Z_4 = -j \frac{1}{WC_D} + \left(\frac{R_D + jWL_D}{jWL_D R_D} \right)^{-1} = -j \frac{1}{WC_D} + \left(\frac{jWL_D R_D}{R_D + jWL_D} \right)$$

$$Z_4 = j \left(\frac{WL_D R_D}{R_D + jWL_D} - \frac{1}{WC_D} \right) = j \left(\frac{WL_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - j \frac{W^2 L_D^2 R_D}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - \frac{1}{WC_D} \right)$$

$$Z_4 = \frac{W^2 L_D^2 R_D}{R_D^2 + W^2 L_D^2} + j\left[\frac{W L_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - \frac{1}{WC_D}\right]$$

Portanto obtem-se :

$$Y_4 = \frac{1}{Z_4} = \frac{1}{\dfrac{W^2 L_D^2 R_D}{R_D^2 + W^2 L_D^2} + j\left[\dfrac{W L_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - \dfrac{1}{WC_D}\right]}$$

$$Y_4 = \frac{\dfrac{W^2 L_D^2 R_D}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - j\left[\dfrac{W L_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - \dfrac{1}{WC_D}\right]}{\left[\dfrac{W^2 L_D^2 R_D}{R_D^2 + W^2 L_D^2}\right]^2 + \left[\dfrac{W L_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - \dfrac{1}{WC_D}\right]^2}$$

$$Y_4 = \frac{\dfrac{W^2 L_D^2 R_D}{R_D^2 + W^2 L_D^2}}{\left[\dfrac{W^2 L_D^2 R_D}{R_D^2 + W^2 L_D^2}\right]^2 + \left[\dfrac{W L_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - \dfrac{1}{WC_D}\right]^2} - j\,\frac{\left[\dfrac{W L_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - \dfrac{1}{WC_D}\right]}{\left[\dfrac{W^2 L_D^2 R_D}{R_D^2 + W^2 L_D^2}\right]^2 + \left[\dfrac{W L_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - \dfrac{1}{WC_D}\right]^2}$$

Pode-se simplificar esta expressão através das seguintes equações :

$$\frac{W^2 L_D^2 R_D}{R_D^2 + W^2 L_D^2} = AR \; ; \quad \frac{W L_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} = BR \; ; \quad \frac{1}{WC_D} = CR$$

$$\left[\frac{WL_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - \frac{1}{WC_D}\right] = BR - CR = DR$$

Logo :

$$Y_4 = \frac{AR}{(AR)^2 + (DR)^2} - j\frac{DR}{(AR)^2 + (DR)^2} \rightarrow \text{Admitância do ramo passa-alto do filtro}$$

A admitância total do filtro será, então :

$$Y_f = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = (1) + (2) + (3) + (4)$$

$$Y_f = \frac{R_1}{R_1^2 + (WL_1 - 1/WC_1)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + (WL_2 - 1/WC_2)^2} + \frac{R_3}{R_3^2 + (WL_3 - 1/WC_3)^2} +$$

$$+ \frac{\dfrac{W^2 L_D^2 R_D}{R_D^2 + W^2 L_D^2}}{\left[\dfrac{W^2 L_D^2 R_D}{R_D^2 + W^2 L_D^2}\right]^2 + \left[\dfrac{WL_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} + \dfrac{1}{WC_D}\right]^2} - j \left\{ \frac{\left[\dfrac{WL_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - \dfrac{1}{WC_D}\right]}{\left[\dfrac{W^2 L_D^2 R_D}{R_D^2 + W^2 L_D^2}\right]^2 + \left[\dfrac{WL_D R_D^2}{R_D^2 + W^2 L_D^2} - \dfrac{1}{WC_D}\right]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(WL_1 - 1/WC_1)}{R_1^2 + (WL_1 - 1/WC_1)^2} + \frac{(WL_2 - 1/WC_2)}{R_2^2 + (WL_2 - 1/WC_2)^2} + \frac{(WL_3 - 1/WC_3)}{R_3^2 + (WL_3 - 1/WC_3)^2} \right\}$$

ou simplificando :

$$Y_F = \frac{R_1 BC\left[(AR)^2 + (DR)^2\right] + R_2 AC\left[(AR) + (DR)\right] + R_3 AB\left[(AR) + (DR)\right] + AR(ABC)}{ABC\left[(AR)^2 + (DR)^2\right]}$$

$$-j\left[\frac{DR(ABC) + (WL_1 - 1/WC_1)\,BC\left[(AR)^2 + (DR)^2\right] + (WL_2 - 1/WC_2)\,AC\left[(AR) + (DR)^2\right]}{ABC\left[(AR)^2 + (DR)^2\right]}\right.$$

$$\left. + \frac{(WL_3 - 1/WC_3)\,AB\left[(AR)^2 + (DR)^2\right]}{ABC\left[(AR)^2 + (DR)^2\right]}\right]$$

onde :

$$A = R_1^2 + (WL_1 - 1/WC_1)^2$$

$$B = R_2^2 + (WL_2 - 1/WC_2)^2$$

$$C = R_3^2 + (WL_3 - 1/WC_3)^2$$

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

|A| Livros:

|1| Electrical Transmission and Distribution Reference Book WECO 1950.

|2| Electrical Transients in Power Systems - Allan Greenwood.

|3| Thyristor Phase-Controlled Converter and Cycloconverters B. R. Pelly - 1971.

|4| Direct Current Transmission - E. W. Kimbark - 1971

|5| Analysis of Faulted Power Systems - Paul M. Anderson - 1973.

|6| Electrical Engineering Handbook-Siemens A. G. Apr. 1969.

|7| Elements of Power System Analysis - W. D. Stevenson - 1962.

|8| Computer Methods in Power System Analysis-G.W. Stagg and A. H. El Abiad - 1968.

|9| Electric Energy Systems Theory (An Introduction) Olle E. Elgerd - 1971.

|10| Numerical Methods that Work - Forman S. Acton

|11| Modern Power Systems - John R. Neuenswander - 1971.

|12| Alternating Current Machines - Michael Liwschitz -Garik and Clyde C. Whipple - D. Van Nostrand Co. Inc. New Jersey.

|B | Publicações: -

|13| Reactive Compensation and Harmonic Suppression for Industrial Power Systems using Thyristor Converters - D.E. Steeper and R. P. Stratford - IEEE Trans Ind. Applic. Vol. IA-12 NO 3 May/Jun. 1976.

|14| SCR Designers Handbook - WECO 1970

|15| AC System and Transformer Representation for HV-DC Transmission Studies - J.P. Bowles IEEE Trans. PAS-89 nº, 7 Sep/Oct 1970.

|16| Simulation of AC System Impedance in HV-DC System Studies N.G. Hingorani and M.F. Burbery IEEE Trans. PAS-89 NO. 5/6 May/Jun 1970.

|17| Résonances en presence des harmoniques crées par les convertisseurs de puissance et les fours à arcs associés a des dispositifs de compensation-M.Lemoine-Electricité de France

|18| Analysis and Control of Harmonic Current in Systems with Static Power Converters-R.P. Stratford IEEE Trans. Ind. Applic. Jan/Feb. 1981.

|19| Guide for Harmonic Control and Reactive Compensation of Static Power Converters IEE Standard 519.

|20| Generation and Flow of Harmonics in Transmission Systems-S. Whitehead and Radley, Journal of IEE, 96(2) 1949.

|21| The Calculation of Rectifier and Inverter Performance Cha

racteristics-J.C. Read 1945 Publicação IEE.

|22| Prediction of Harmonic Voltages in Distribution Systems N. Harish Chandra - A.E. Emanuel - IEEE PAS-100 No. 3 Mar, 81.

|23| Harmonics in Electrical Systems and their Reduction through Filters Circuits-E. Bornitz (A.E.G. Frankfurt)and M.Hoffman G. Leiner (Siemens A.G.) Cap. 304.

|24| Pacific HV-DC Intertie System AC Side Harmonic Studies D.J. Melvold Paper T72523-9 IEEE PES Jul. 1972.

|25| Relatório SCEL-CENC-01/78 do Grupo Coordenador para Operação Interligada CENC da Eletrobrás.

|26| Overvoltages in HVDC Transmission Systems caused by Transformer Magnetizing Inrush Currents - John P. Bowles. Paper T73 433-0-IEEE

|27| Liaison en Courant Continu par Cable sou-marin France Angla-terre par P.Laurent, C. Gary & J. Cladé - Electricité de France.

|28| Digital Calculation of the Harmonic Load in Power Systems and Equipment by Sönke Frosch & Walter Schultz, Siemens Review No. 6 1978.

|29| Limits for Harmonic Distortion in the U.K. Electricity Supply System-P.G. Kendall & P.A. Johnson.

|30| Apostila sobre Transmissão em Corrente Contínua do Prof. J. C. Oliveira (Ph.D.,M.Sc. Manchester University) Professor Titular da Escola Federal de Engenharia de Itajubá-MG.

|31| Análise, Modelagem e Simulação de Fontes Geradoras de Harmônicos Prof. Nilson Goes (Tese de Mestrado EFEI-81)

|32| Limits For Harmonics in the uk Electricity Supply System - The Electricity Council - September 1976

|33| Asea Information Catalog LFS-SK-1310

|34| Equipamentos Estáticos para compensação de Reativos e Desequilíbrios em Sistemas Elétricos Ricardo Ferreira Pinheiro (Tese de Mestrado EFEI-80)

BC/GSP/11

VI SEMINÁRIO NACIONAL DE
PRODUÇÃO E TRANSMISSÃO DE
ENERGIA ELÉTRICA

GRUPO IV

SISTEMAS DE POTÊNCIA

(G S P)

GERAÇÃO DE HARMÔNICOS POR COMPENSADORES ESTÁTICOS DO TIPO REATOR CONTROLADO POR TIRISTORES

Autores : Ricardo Ferreira Pinheiro
José Carlos de Oliveira
João Roberto Cogo

Entidade: EFEI

Balneário Camboriú - SC - Brasil
1 9 8 1

1. EQUACIONAMENTO E FORMA DE ONDA

A figura 1.1 mostra esquematicamente um dos ramos do delta de conexão de um reator controlado por tiristores. Escolhendo-se a referência dos tempos no instante em que a tensão aplicada ao ramo é nula, vem que, devido ao atraso natural da corrente em relação à tensão num reator, a partir de $\omega t = \pi/2$ é possível provocar o disparo do tiristor 1. Analogamente, a partir de $\omega t = 3\pi/2$ é possível disparar o tiristor 2 e assim sucessivamente. Este atraso entre o instante em que a tensão passa por um zero natural e o instante do disparo do tiristor correspondente, denomina-se "ângulo de disparo". Desta forma, o ângulo de disparo (α) irá variar entre 90° (quando o reator conduzirá normalmente como se os tiristores estivessem curto-circuitados) e 180° (quando a chave constituída pelos tiristores será equivalente a um circuito aberto e não fluirá corrente pelo reator). A figura 1.2 mostra as formas de onda de corrente e tensão em um ramo do compensador para um ângulo de disparo qualquer (α). Note-se claramente um leve amortecimento nos pulsos de corrente devido à presença de elementos resistivos no circuito.

Sendo v(t) a tensão da fonte e i(t) a corrente fluindo no circuito, para:

$$v(t) = V_{max} \operatorname{sen} \omega t \tag{1}$$

vem:

a - Nos períodos de bloqueio dos tiristores:

$$i_1(t) = i_2(t) = 0 \tag{2}$$

b - Nos períodos de condução dos tiristores:

$$v(t) = V_{max} \operatorname{sen} \omega t = R\, i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \tag{3}$$

onde

$$R = R_e + R_c$$

e

$$L = L_e + L_c$$

Resolvendo (3), pela aplicação da Transformada de Laplace, resulta:

a - Para o pulso positivo de corrente, isto é, período de condução do tiristor 1:

$$i_1(t) = I_{max} \{\operatorname{sen}(\omega t - \Theta + \alpha) + e^{-\beta t} \operatorname{sen}(\Theta - \alpha)\} \tag{4}$$

b - Para o pulso negativo de corrente, ou seja, no período de condução do tiristor 2:

$$i_2(t) = I_{max} \{ \operatorname{sen}(\omega t - \theta + \delta) + e^{-\beta t} \operatorname{sen}(\theta - \delta) \} \qquad (5)$$

onde

$$\delta = \alpha + \pi, \quad I_{max} = \frac{V_{max} M}{L} \quad e \quad M = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}$$

De modo a generalizar as equações (4) e (5), é necessário levar em conta o efeito do "desequilibrio no ângulo de disparo". Este é um problema que surge devido a oscilações amortecidas ou imprecisões de medição por parte do sistema de controle. Ele resulta em um atraso no disparo de um dos tiristores em relação ao outro, quando do funcionamento normal, originando uma produção adicional de harmônicos. A figura 1.3 leva em consideração este atraso. Pode-se notar a menor amplitude que atinge o pulso negativo de corrente devido ao atraso no disparo, de $d\alpha$, em relação ao pulso positivo.

O efeito deste "desequilibrio no ângulo de disparo" pode ser introduzido em (4) e (5), como indicado na figura 1.3, apenas fazendo-se, agora:

$$\delta = \alpha + \pi + d\alpha \qquad (6)$$

2. OBTENÇÃO DOS COMPONENTES HARMÔNICOS

Os componentes harmônicos da corrente no reator são calculados pelo desenvolvimento em série de Fourier das expressões (4) e (5). Para isto, deve-se levar em conta:

1 - As referências utilizadas na dedução de (4) e (5), as quais, como podem ser observadas nas figuras 1.2 e 1.3, são diferentes. Isto exige um "deslocamento" destas referências, e das respectivas equações, para uma referência comum que, como já se estabeleceu no início, será um dos zeros de tensão e que por simplicidade, será adotado como um zero crescente, isto é, onde a tensão passa de negativa para positiva. A figura 2.1 ilustra esta condição. As expressões (4) e (5) passam a ser:

$$i_1(t) = I_{max} \{ \operatorname{sen}(\omega t - \theta) - e^{-\beta(t - \frac{\alpha}{\omega})} \operatorname{sen}(\alpha - \theta) \}. \qquad (7)$$

$$i_2(t) = I_{max} \{ \operatorname{sen}(\omega t - \theta) - e^{-\beta(t - \frac{\alpha + d\alpha + \pi}{\omega})} \operatorname{sen}(\alpha + d\alpha + \pi - \theta) \} \qquad (8)$$

2 - O período de integração total será igual a 2π, sendo que o pulso positivo existirá, conforme a figura 2.1, de T_1 a T_2, enquanto o pulso negativo existirá de T_3 a T_4. Estes serão os li-

mites de integração, os quais são dados por:

$$T_1 = \alpha/\omega \tag{9}$$

$$T_3 = (\pi + \alpha + d\alpha)/\omega \tag{10}$$

Não havendo resistências no circuito, da figura 2.1 tira-se que:

$$T_2 = (2\pi - \alpha)/\omega \tag{11}$$

e

$$T_4 = T_2 + \frac{\pi - d\alpha}{\omega} = (3\pi - \alpha - d\alpha)/\omega \tag{12}$$

Havendo resistências no circuito, devido ao amortecimento, (11) e (12) tornam-se inválidas. Para determinar T_2 e T_4, neste caso, deve-se observar que para $t = T_2$ a corrente é nula. Substituindo esta condição em (7), vem:

$$\operatorname{sen}(\omega T_2 - \theta) - e^{-\beta(T_2 - \frac{\alpha}{\omega})} \operatorname{sen}(\alpha - \theta) = 0 \tag{13}$$

que dá o valor de T_2 e, por ser uma equação transcendental, exige um processo itérativo para sua solução.

Determinado T_2 através de (13), T_4 pode ser obtido facilmente por:

$$T_4 = T_2 + \frac{\pi - d\alpha}{\omega} \tag{14}$$

3 - Os valores eficazes das correntes harmônicas em termos dos coeficientes da série de Fourier, e em seu valor porcentual com relação à corrente nominal do reator, são dados por:

$$I_n(\%) = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{2}\, I_1} \times 100 \tag{15}$$

onde $n = 1,2,\ldots$ é a ordem do harmônico, e I_1 é o valor eficaz da componente fundamental, ou da corrente nominal do reator.

Para a componente contínua, vem que:

$$I_o = \frac{a_o}{2}$$

ou

$$I_o(\%) = \frac{a_o}{2I_1} \times 100 \tag{16}$$

Os desenvolvimentos para os cálculos dos coeficientes da série trigonométrica de Fourier a partir de (7) e (8) serão aqui omitidos. Os resultados são dados pelas seguintes expressões:

$$a_0 = \frac{\omega I_{max}}{\pi}\left\{-\frac{\cos(\omega t-\theta)}{\omega}\Bigg|_{T_1}^{T_2} + \frac{e^{\beta\frac{\alpha}{\omega}}\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}{\beta}e^{-\beta t}\Bigg|_{T_1}^{T_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(\omega t-\theta)}{\omega}\Bigg|_{T_3}^{T_4} - \frac{e^{\beta\frac{(\alpha+d\alpha+\pi)}{\omega}}\operatorname{sen}(\alpha+d\alpha-\theta)}{\beta}e^{-\beta t}\Bigg|_{T_3}^{T_4}\right\} \qquad (17)$$

$$a_1 = \frac{\omega I_{max}}{\pi}\left\{\left(\frac{-\cos(2\omega t-\theta)}{4\omega} - \frac{t\operatorname{sen}\theta}{2}\right)\Bigg|_{T_1}^{T_2} + \left(\frac{-\cos(2\omega t-\theta)}{4\omega} - \frac{t\operatorname{sen}\theta}{2}\right)\Bigg|_{T_3}^{T_4} + \right.$$

$$+ \frac{1}{\beta^2+\omega^2}\operatorname{sen}(\alpha-\theta)e^{-\beta(t-\frac{\alpha}{\omega})}(\beta\cos\omega t-\omega\operatorname{sen}\omega t)\Bigg|_{T_1}^{T_2} -$$

$$\left. - \operatorname{sen}(\alpha+d\alpha-\theta)e^{-\beta(t-\frac{\delta}{\omega})}(\beta\cos\omega t-\omega\operatorname{sen}\omega t)\Bigg|_{T_3}^{T_4}\right\} \qquad (18)$$

$$a_n = \frac{\omega I_{max}}{\pi}\left\{\left[-\frac{\cos((n+1)\omega t-\theta)}{2(n+1)\omega} + \frac{\cos((n-1)\omega t+\theta)}{2(n-1)\omega}\right]\Bigg|_{T_1}^{T_2} + \right.$$

$$+ \left[-\frac{\cos((n+1)\omega t-\theta)}{2(n+1)\omega} + \frac{\cos((n-1)\omega t+\theta)}{2(n-1)\omega}\right]\Bigg|_{T_3}^{T_4} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)e^{-\beta(t-\frac{\alpha}{\omega})}}{\beta^2+n^2\omega^2}(\beta\cos n\omega t - n\omega\operatorname{sen} n\omega t)\Bigg|_{T_1}^{T_2} +$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sen}(\alpha+d\alpha-\theta)e^{-\beta(t-\frac{\delta}{\omega})}}{\beta^2+n^2\omega^2}(-\beta\cos n\omega t+n\omega\operatorname{sen} n\omega t)\Bigg|_{T_3}^{T_4}\right\} \qquad (19)$$

$$b_1 = \frac{\omega I_{max}}{\pi} \left\{ \frac{t\cos\Theta}{2} \Big|_{T_1}^{T_2} - \frac{\operatorname{sen}(2\omega t-\Theta)}{4\omega} \Big|_{T_1}^{T_2} + \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\Theta)e^{-\beta(t-\frac{\alpha}{\omega})}}{\beta^2+\omega^2} \right.$$

$$(\beta\operatorname{sen}\omega t+\omega\cos\omega t) \Big|_{T_1}^{T_2} + \frac{t\cos\Theta}{2} \Big|_{T_3}^{T_4} - \frac{\operatorname{sen}(2\omega t-\Theta)}{4\omega} \Big|_{T_3}^{T_4} -$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sen}(\alpha+d\alpha-\Theta)e^{-\beta(t-\frac{\delta}{\omega})}}{\beta^2+\omega^2} (\beta\operatorname{sen}\omega t+\omega\cos\omega t) \Big|_{T_3}^{T_4} \right\} \qquad (20)$$

$$b_n = \frac{\omega I_{max}}{\pi} \left\{ \left[\frac{\operatorname{sen}((n-1)\omega t+\Theta)}{2(n-1)\omega} - \frac{\operatorname{sen}((n+1)\omega t-\Theta)}{2(n+1)\omega} \right] \Big|_{T_1}^{T_2} + \right.$$

$$+ \left[\frac{\operatorname{sen}((n-1)\omega t+\Theta)}{2(n-1)\omega} - \frac{\operatorname{sen}((n+1)\omega t-\Theta)}{2(n+1)\omega} \right] \Big|_{T_3}^{T_4} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\Theta)e^{-\beta(t-\frac{\alpha}{\omega})}}{\beta^2+n^2\omega^2} (\beta\operatorname{sen}n\omega t+n\omega\cos n\omega t) \Big|_{T_1}^{T_2} -$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sen}(\alpha+d\alpha-\Theta)e^{-\beta(t-\frac{\delta}{\omega})}}{\beta^2+n^2\omega^2} (\beta\operatorname{sen}n\omega t+n\omega\cos n\omega t) \Big|_{T_3}^{T_4} \right\} \qquad (21)$$

Para R = 0, obteve-se:

$$a_0 = \frac{\omega I_{max}}{\pi} \left\{ - \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega} \Big|_{T_1}^{T_2} + t\cos\alpha \Big|_{T_1}^{T_2} - \frac{\operatorname{sen}(\omega t-d\alpha)}{\omega} \Big|_{T_3}^{T_4} - \right.$$

$$\left. - t\cos(\alpha+d\alpha) \Big|_{T_3}^{T_4} \right\} \qquad (22)$$

$$b_1 = 0 \qquad (23)$$

$$b_n = 0 \qquad (24)$$

Para $d\alpha = 0$, obteve-se:

$$a_0 = 0 \qquad (25)$$

3. CONSIDERAÇÃO DA "FUNÇÃO CONTROLE"

Nos compensadores estáticos a tiristores, o sistema de controle é o responsável pela determinação do ângulo necessário para o disparo e pelo comando para que isto ocorra no instante preciso. O funcionamento deste sistema de controle baseia-se na medição de alguma variável que defina o "estado" atual do sistema, e sua comparação com valores de referência com a finalidade de determinar o ângulo de disparo necessário. De acordo com o fabricante, a grandeza medida para a verificação do estado do sistema varia. Ela pode ser uma corrente de linha, a potência reativa fluindo na linha, tensões fase-fase ou fase-neutro, uma combinação de duas destas grandezas, etc. Aqui será adotada a tensão como grandeza controlada, já que ela permite uma maior percepção a uma análise teórica como esta.

A determinação do ângulo de disparo é feita com base numa equação aqui designada "função do controle" que relaciona a corrente fundamental no reator com as grandezas medidas e de referência. De acordo com o circuito utilizado pelo sistema de controle, estas "funções do controle" podem ser diferentes. Uma forma utilizada e que aqui será adotada é a seguinte:

$$2\pi - 2\alpha + \operatorname{sen}2\alpha = \pi\left(\frac{V_{ap} - V_s}{V_{max} - V_s}\right) \qquad (26)$$

que pode ser encontrada nas referências (1) e (2). Nesta equação, define-se:

- V_{ap} → tensão eficaz medida no barramento
- V_s → tensão eficaz desejada no barramento. É a tensão de referência.
- V_{max} → tensão máxima que pode se verificar no barramento. A condição crítica significa o reator e a carga fora de serviço e apenas o banco de capacitores fixo conectado.

Com (26), é possível determinar, por um processo iterativo, α e, consequentemente, os limites de integração das equações (17) a (22).

4. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Os gráficos das figuras 4.1 a 4.4 mostram a variação das correntes fundamental, de 2º, 3º e 5º harmônicos com a tensão aplicada ao reator em um sistema real típico onde as resistên

cias não foram desprezadas. Os resultados foram obtidos através de um programa em computador digital no qual foram implementadas as expressões do desenvolvimento em série de Fourier aqui apresentadas.

Comparações entre muitos casos testados, revelaram que o efeito das resistências para sistemas reais é praticamente desprezível. Entretanto, em sistemas onde a relação R/X seja excessiva, o efeito do amortecimento se torna acentuado. O amortecimento dos pulsos de corrente dá origem aos harmônicos pares que, portanto, crescerão com o aumento da relação R/X. Caso não haja resistências presentes no circuito, apenas harmônicos ímpares são gerados.

Na figura 4.1 pode-se ver a relação linear que pode ser obtida entre a magnitude da corrente fundamental e a tensão aplicada com a "função do controle" adotada. Isto é muito importante para o bom funcionamento do sistema de controle.

Outros testes foram feitos com o objetivo de analisar o efeito do desequilíbrio no ângulo de disparo dos tiristores. Por estes testes, constatou-se um crescimento de todos os componentes harmônicos com o aumento do desequilíbrio no ângulo de disparo. Viu-se ainda que este desequilíbrio não dá origem, por si só, a harmônicos pares, pois seu efeito não altera a característica da função par da corrente do reator, na ausência de resistências. O problema mais grave constatado neste caso, foi o surgimento da componente de ordem zero, crescendo linearmente com o desequilíbrio no ângulo de disparo, numa relação de até 1% de corrente contínua para cada grau de desequilíbrio. Este problema é de grande importância pois, como se sabe, componentes de corrente contínua podem causar efeitos prejudiciais nos isolamentos ou mesmo levar à saturação de transformadores e máquinas rotativas. Por isso, os sistemas de controle devem ser dotados de dispositivos capazes de detetar e eliminar os desequilíbrios nos ângulos de disparo.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

1. PINHEIRO, Ricardo F. Equipamentos Estáticos para a compensação de reativos e desequilíbrios em Sistemas Elétricos. EFEI, Jun. 1980. Tese de Mestrado

2. CHARLES, P.; BOIDIN, M.; DROUIN, G. Perturbations des Réseaux Industriels et de Distribuition. Revue Generale de Electricite, Tome 88, n. 01, Jan. 1979, p. 49-73

3. WALSHE, K.A. Thyristor controlled Shunt Reactor Compensation of Asymmetrically Loaded Power Systems. UMIST, Out. 1976. Tese de Doutoramento

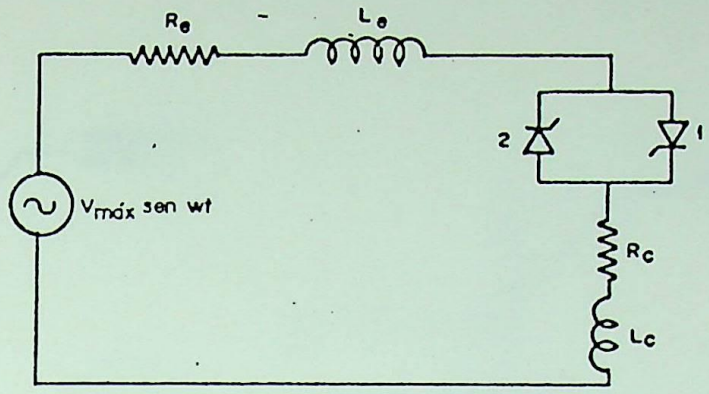


FIG. 1.1 – DIAGRAMA ESQUEMÁTICO CONSIDERANDO A IMPEDÂNCIA DO SISTEMA E A RESISTÊNCIA DO REATOR.

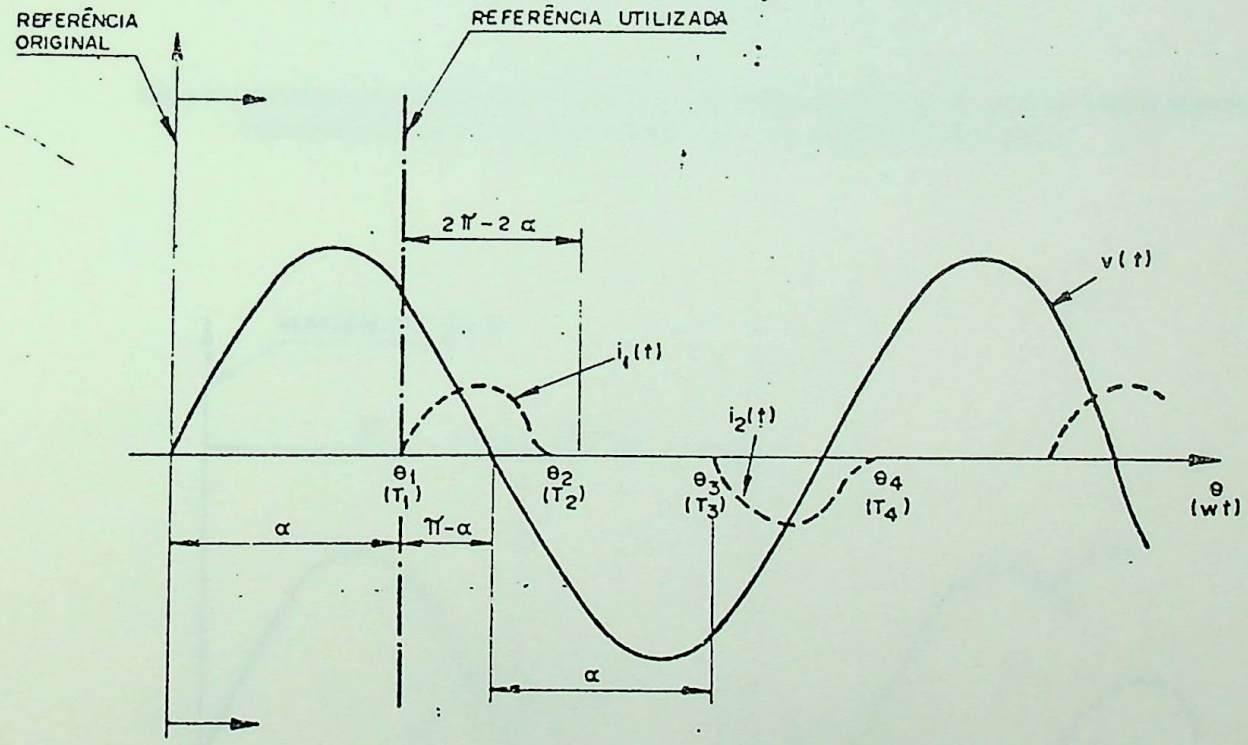


FIG. 1.2 – REPRESENTAÇÃO DO DESLOCAMENTO DA REFERÊNCIA, PARA O CÁLCULO DO PULSO POSITIVO DA CORRENTE.

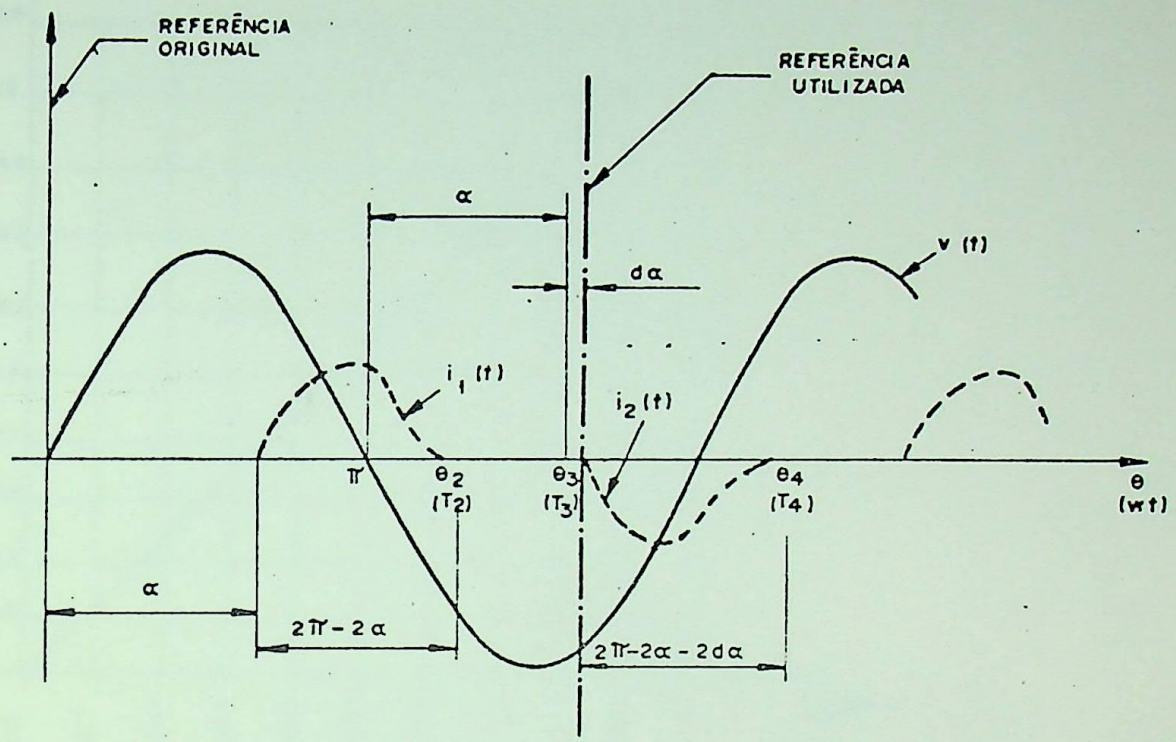


FIG. 1.3 – REPRESENTAÇÃO DO DESLOCAMENTO DA REFERÊNCIA, PARA O CÁLCULO DO PULSO NEGATIVO DE CORRENTE CONSIDERANDO-SE UM DESEQUILÍBRIO dα NO ANGULO DE DISPARO.

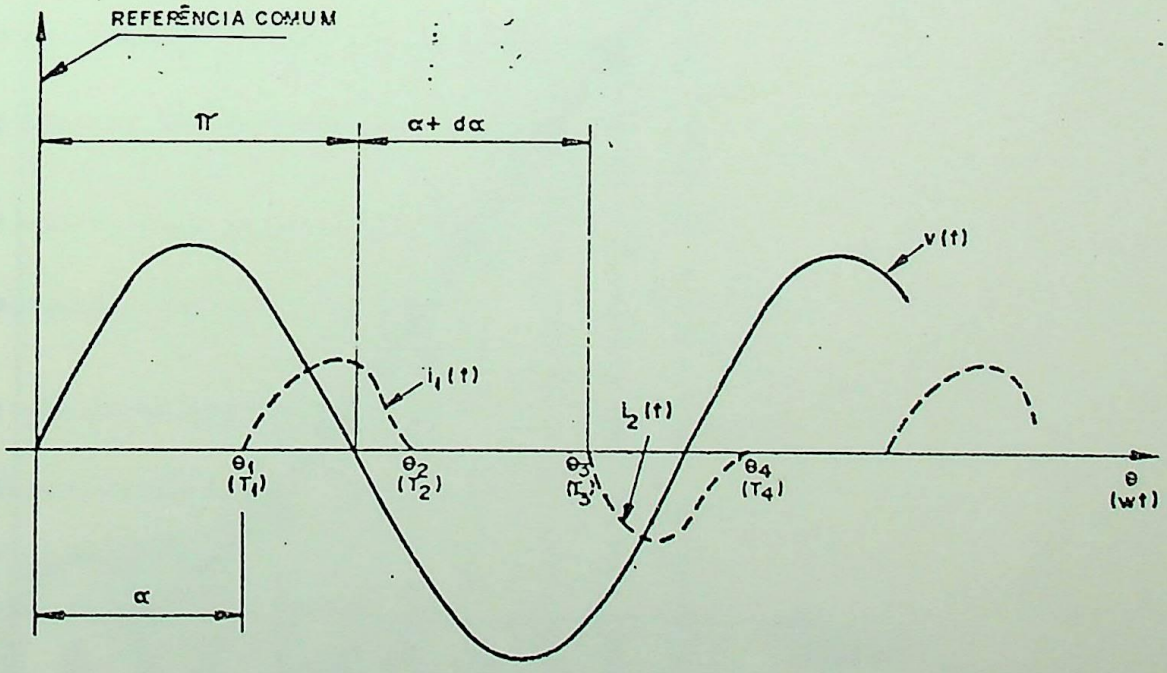


FIG. 2.1 – REPRESENTAÇÃO DOS PULSOS DE CORRENTE NOVAMENTE SOB UMA REFERÊNCIA COMUM.

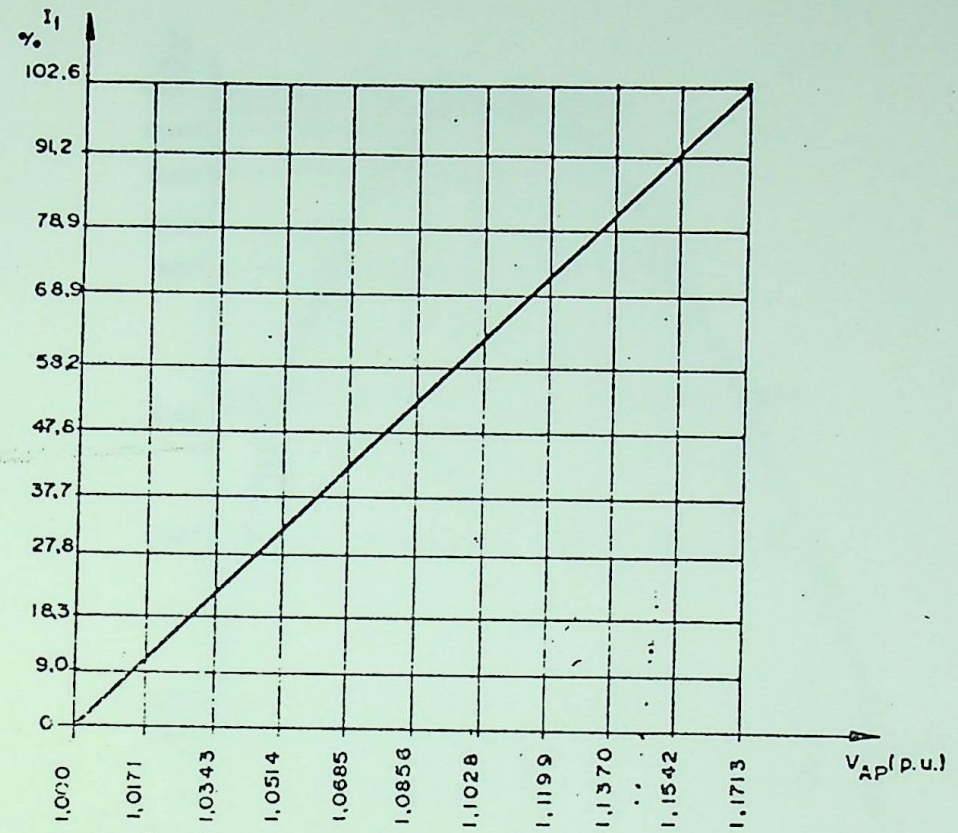


FIG. 4.1 — VARIAÇÃO DA CORRENTE FUNDAMENTAL EM % DA NOMINAL, COM A TENSÃO APLICADA (R ≠ 0)

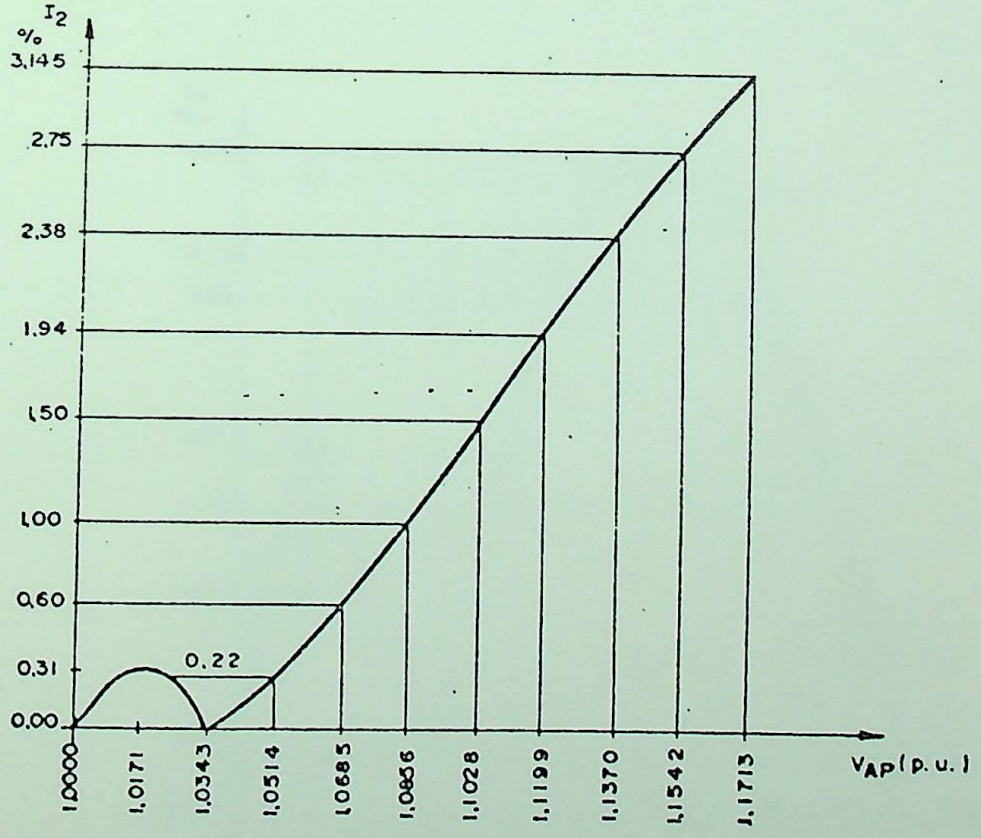


FIG. 4.2 — CORRENTE DE 2º HARMÔNICO x TENSÃO APLICADA (R ≠ 0)

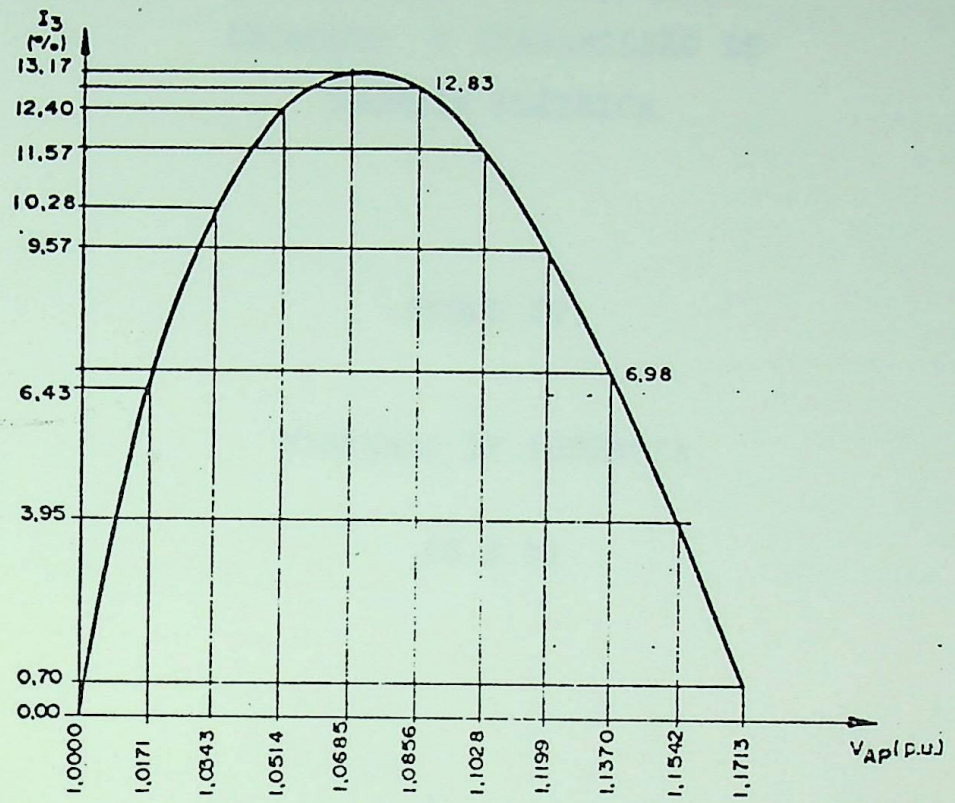


FIG. 4.3 – CORRENTE DE 3º HARMÔNICO x TENSÃO APLICADA (R ≠ 0)

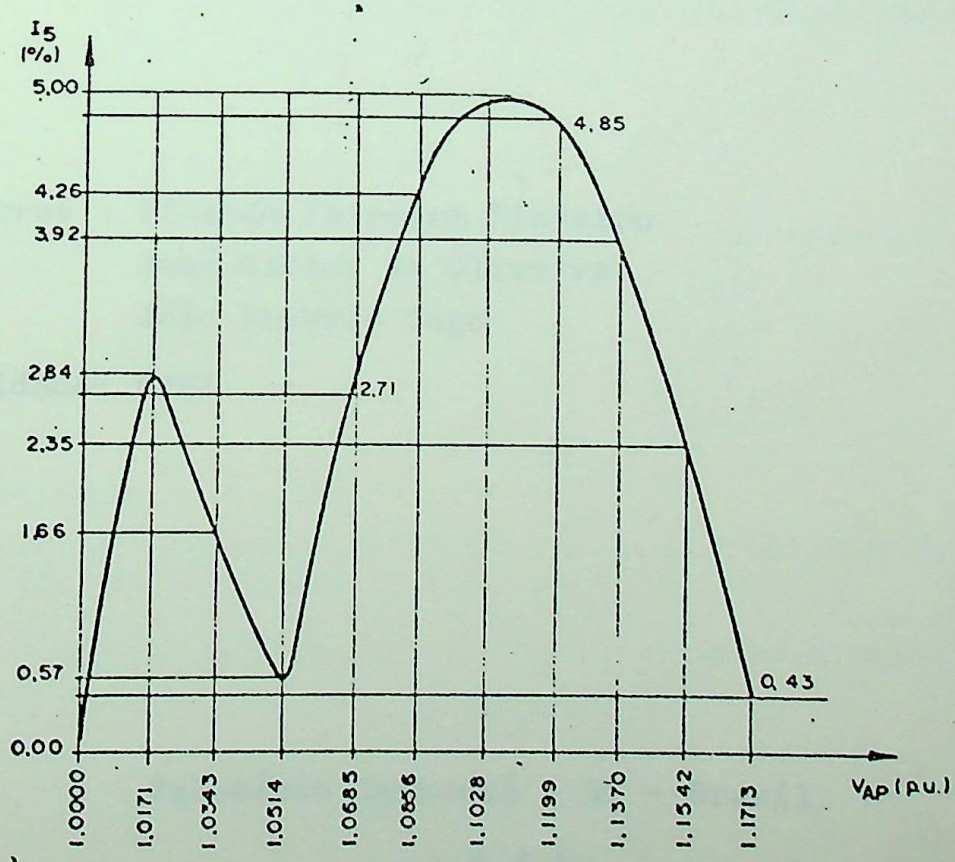


FIG. 4.4 – CORRENTE DE 5º HARMÔNICO x TENSÃO APLICADA (R ≠ 0)

BC/GSP/12

VI SEMINÁRIO NACIONAL DE
PRODUÇÃO E TRANSMISSÃO DE
ENERGIA ELÉTRICA

GRUPO IV

SISTEMAS DE POTÊNCIA

(G S P)

COMPORTAMENTO DOS COMPENSADORES ESTÁTICOS A TIRISTORES EM SISTEMAS ELÉTRICOS TRIFÁSICOS DESEQUILIBRADOS

Autores : Ricardo Ferreira Pinheiro
José Carlos de Oliveira
João Roberto Cogo

Entidade: EFEI

Balneário Camboriú - SC - Brasil

1 9 8 1

1. COMO DEVEM SE COMPORTAR OS COMPENSADORES PARA DISTRIBUIR EQUITATIVAMENTE AS CARGAS ENTRE AS TRÊS FASES DE UM SISTEMA ELÉTRICO DE POTÊNCIA

Para fins práticos pode-se considerar como equilibradas as tensões no barramento de acoplamento comum entre a concessionária e o sistema industrial (o P.A.C.). A função do compensador, cuja matriz de admitância nodal trifásica será denotada por $\underline{\underline{Y}}_C$, será fazer parecer, sob o ponto de vista do sistema de potência, com que sua carga, constituída pelo conjunto $\underline{\underline{Y}}_C + \underline{\underline{Y}}_L$, seja equilibrada. Em outras palavras, o compensador deverá se comportar de modo que a superposição da sua matriz de admitância nodal trifásica, com a matriz de admitância nodal trifásica de carga desequilibrada, resulte em uma matriz de admitância equilibrada. A figura 1.1 mostra um sistema elétrico industrial onde o compensador está conectado em Δ e a carga está representada pela sua conexão Δ equivalente. As tensões na barra de carga serão equilibradas e expressas na forma:

$$\underline{V} = |V| \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

onde em (1) tem-se:

$\underline{V}$ - vetor tensões das fases 1, 2 e 3

$|V|$ - módulo das tensões de fases (sistema equilibrado para tensões)

$\alpha = 1\angle 120^{\circ}$

V_1, V_2, V_3 - tensões das fases 1, 2 e 3.

Em termos de componentes simétricas, a corrente na carga será dada por;

$$\underline{I}^{(012)} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{I} = \underline{\underline{A}}^{-1} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^{(0)} \\ I_1^{(1)} \\ I_1^{(2)} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

onde na equação (2) tem-se:

$\underline{I}^{(012)}$ - vetor de componentes das correntes de sequências nula, positiva e negativa

$\underline{\underline{A}}^{-1}$ é a matriz de transformação e é dada pela equação (3).

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \qquad (3)$$

2

$\underline{I}$ - vetor das correntes de linha que alimentam a carga.

I_1, I_2 e I_3 - correntes de linha que alimentam as cargas das fases 1, 2 e 3.

$I_1^{(0)}$, $I_1^{(1)}$, e $I_1^{(2)}$ - componentes de sequência nula, positiva e negativa das correntes de linha que alimentam a carga da fase 1.

As correntes de linha que alimentam a carga, podem ser calculadas por;

$$\underline{I} = \underline{\underline{Y}}_L \, \underline{V} \tag{4}$$

onde

$$\underline{\underline{Y}}_L = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \dot{y}_{11} & \dot{y}_{12} & \dot{y}_{13} \\ \hline \dot{y}_{21} & \dot{y}_{22} & \dot{y}_{23} \\ \hline \dot{y}_{31} & \dot{y}_{32} & \dot{y}_{33} \\ \hline \end{array}$$

sendo $\dot{y}_{ij}$ $(i \neq j)$ a admitância existente entre as fases i e j da carga, com sinal trocado, e $\dot{y}_{ii}$ a soma das admitâncias conectadas a fase i da carga.

Assim, substituindo (4) em (2), vem:

$$\underline{I}^{(012)} = \underline{\underline{A}}^{-1} \, \underline{\underline{Y}}_L \, \underline{V} \tag{5}$$

Como nos sistemas da média e alta tensão as cargas e equipamentos são normalmente conectados através de transformadores ΔY, é possível desprezar a componente de corrente de sequência zero, já que esta não existirá na maioria dos casos. Sendo assim, a componente desequilibrante será apenas a corrente de sequência negativa. Portanto, a condição necessária para o funcionamento desejado do compensador, isto é, para que o compensador "anule" o desequilíbrio da carga, será tal que, a corrente de linha fornecida pelo sistema de potência seja constituída apenas da componente de sequência positiva, ou:

$$\dot{I}^{(2)} = 0 \tag{6}$$

Expandindo (5), levando em consideração que na matriz de admitância nodal $\dot{y}_{ik} = \dot{y}_{ki}$, a condição expressa em (6) conduz a:

$$(\dot{y}_{11} + 2\dot{y}_{32}) + \alpha(\dot{y}_{22} + 2\dot{y}_{13}) + \alpha^2(\dot{y}_{33} + 2\dot{y}_{12}) = 0 \tag{7}$$

com:

$$\dot{y}_{ii} = -\sum_{a=1}^{3} \dot{y}_{ia} \quad \text{e} \quad \dot{y}_{ik} = -\dot{Y}_{ik}$$

Note-se que $\dot{Y}_{ik}$ é a admitância entre as fases i e k da carga mais o compensador e $\dot{y}_{ik}$ é o elemento "ik" da matriz de admitância nodal. Desta forma a condição de equilíbrio será:

$$\frac{3}{2}(\dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{13} - 2\,\dot{Y}_{32}) + j\,\frac{3\sqrt{3}}{2}(\dot{Y}_{12} - \dot{Y}_{13}) = 0 \qquad (8)$$

Substituindo as admitâncias em função de condutâncias e susceptâncias e equacionando as partes real e imaginária separadamente, vem:

$$\left.\begin{aligned} G_{12} + G_{13} - 2\,G_{23} - \sqrt{3}(B_{12} - B_{13}) = 0 \\ \sqrt{3}\,(G_{12} - G_{13}) + B_{12} + B_{13} - 2\,B_{23} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

e

O compensador deverá satisfazer as duas condições, expressas em (9), que levarão o sistema elétrico a parecer simetricamente carregado para o sistema alimentador.

2. COMPENSAÇÃO DE CARGAS MONOFÁSICAS FASE-FASE EM UM SISTEMA TRIFÁSICO

Considere uma carga monofásica aplicada entre as fases 2 e 3 (a escolha é arbitrária) de um sistema trifásico. Como o compensador é puramente reativo, vem que:

$$G_{12} = G_{13} = 0$$

e, portanto, de (9):

$$\left.\begin{aligned} -2\,G_{23} + \sqrt{3}\,(B^c_{13} - B^c_{12}) = 0 \\ B^c_{12} + B^c_{13} - 2\,B_{23} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

onde o superíndice "c" indica susceptâncias do compensador.

A solução do sistema (10), dá:

$$\left.\begin{aligned} B^c_{13} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,G_{23} + B_{23} \\ B^c_{12} = B_{23} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,G_{23} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Com $B^c_{23} = 0$ e as outras susceptâncias do compensador dadas por (11), apenas a componente de corrente de sequência positiva fluirá para a carga. De (5), esta componente resultará:

$$I^{(1)} = \frac{|\dot{V}_1|}{3}\,|(\dot{y}_{11} + \dot{y}_{22} + \dot{y}_{33}) - (\dot{y}_{12} + \dot{y}_{13} + \dot{y}_{32})| \quad \text{ou}$$

$$I^{(1)} = \frac{|\dot{V}_1|}{3}\,|\dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{31}|$$

Substituindo (11), vem:

$$I^{(1)} = |\dot{V}_1| \; |G_{23} + j3B_{23}| \qquad (12)$$

onde:

$I^{(1)}$ - é a corrente de linha

$|\dot{V}_1|$ - módulo da tensão fase-neutro na fase 1 da barra da carga

$G_{23} + j\,B_{23}$ - admitância da carga entre as fases 2 e 3

$G_{23} + j3B_{23}$ - carga estrela equilibrada equivalente

Aplicada esta correção, para eliminar o desequilíbrio, torna-se agora fácil efetuar a compensação para fazer com que o fator de potência torne-se unitário, e, de (12) pode-se notar que este objetivo será atingido adicionando-se ao compensador uma reatância equilibrada em delta de:

$$B^c_{f.p.u} = - B_{23}$$

Desta forma, o compensador resultará em:

$$\left.\begin{aligned} B^c_{12} &= - \frac{1}{\sqrt{3}} \; G_{23} \\ B^c_{23} &= - B_{23} \\ B^c_{31} &= + \frac{1}{\sqrt{3}} \; G_{23} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

A última função, a ser tratada, que também deverá ser desempenhada pelo compensador, é corrigir a regulação de tensão (o efeito do "flicker"). Isto será feito pela inclusão em (13) de um termo adicional cuja demonstração será aqui omitida e que pode ser encontrada na referência (1), e que é aproximadamente dada por:

$$B_d = \frac{1}{3X_1} \left| 1 - \sqrt{a^2 - G_T^2 \, X_1^2} \right| \qquad (14)$$

onde

$$a = \left| \frac{\dot{E}}{\dot{V}} \right|$$

G_T - condutância equilibrada equivalente total

X_1 - reatância por fase do sistema externo de alimentação

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - Biblioteca MAUÁ

$\dot{E}$ - tensão da fonte

$\dot{V}$ - tensão desejada na barra da carga

3. COMPENSAÇÃO DE CARREGAMENTO TRIFÁSICO DESEQUILIBRADO

De forma análoga ao que foi feito para uma carga monofásica entre as fases 2 e 3, é possível determinar as susceptâncias de compensação para correção de desequilíbrio e fator de potência entre as outras duas fases, que serão dadas a seguir. A demonstração será omitida por ser totalmente análoga à desenvolvida para o caso da seção anterior. As expressões obtidas são:

a - Carregamento entre as fases 1 e 2:

$$\left.\begin{aligned} B^c_{12} &= -B_{12} + B_d \\ B^c_{23} &= \frac{G_{12}}{\sqrt{3}} + B_d \\ B^c_{31} &= -\frac{G_{12}}{\sqrt{3}} + B_d \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

b - Carregamento entre as fases 3 e 1:

$$\left.\begin{aligned} B^c_{12} &= \frac{G_{31}}{\sqrt{3}} + B_d \\ B^c_{23} &= -\frac{G_{31}}{\sqrt{3}} + B_d \\ B^c_{31} &= -B_{31} + B_d \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Desta forma, a compensação completa será dada pelas expressões:

$$\left.\begin{aligned} B^c_{12} &= -B_{12} + (G_{31} - G_{23})/\sqrt{3} + B_d \\ B^c_{23} &= -B_{23} + (G_{12} - G_{31})/\sqrt{3} + B_d \\ B^c_{31} &= -B_{31} + (G_{23} - G_{12})/\sqrt{3} + B_d \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Estas são, portanto, as susceptâncias necessárias para compensar totalmente sob os pontos de vista de equilíbrio, regulação de tensão e correção do fator de potência, uma carga trifásica desequilibrada.

4. REQUISITOS DO COMPENSADOR EM TERMOS DAS COMPONENTES SIMÉTRICAS DAS CORRENTES DE CARGA

Considere-se novamente o sistema industrial ilustrado pela

figura 1.1. O vetor das tensões equilibradas no P.A.C. pode ser representado por (1).

Da figura 1.1, pode-se ver que as correntes solicitadas pela carga são dadas por:

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_{1\ell} &= \dot{I}_{12} - \dot{I}_{31} \\ \dot{I}_{2\ell} &= \dot{I}_{23} - \dot{I}_{12} \\ \dot{I}_{3\ell} &= \dot{I}_{31} - \dot{I}_{23} \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Em termos das admitâncias que constituem as cargas, pode-se reescrever (18) como segue:

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_{1\ell} &= V\,|\dot{Y}_{12}\,(1-\alpha^2) - \dot{Y}_{31}\,(\alpha-1)| \\ \dot{I}_{2\ell} &= V\,|\dot{Y}_{23}\,(\alpha^2-\alpha) - \dot{Y}_{12}\,(1-\alpha^2)| \\ \dot{I}_{3\ell} &= V\,|\dot{Y}_{31}\,(\alpha-1) - \dot{Y}_{23}\,(\alpha^2-\alpha)| \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

As componentes simétricas destas correntes, serão dadas por (2) que, desenvolvida para $\underline{I}$ dada por (19) resulta em:

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_{\ell}^{(0)} &= 0 \\ \dot{I}_{\ell}^{(1)} &= V\,|\dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{31}| \\ \dot{I}_{\ell}^{(2)} &= -V\,|\alpha^2\,\dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{23} + \alpha\,\dot{Y}_{31}| \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Desprezando a compensação da regulação de tensão, os critérios de ajuste do compensador em termos de componentes simétricas podem ser assim resumidos:

1 - Eliminação das componentes de sequência negativa;

2 - Eliminação da parte reativa das componentes de sequência positiva, isto é, correção do fator de potência.

Por analogia com (20), pode-se obter para as componentes simétricas das correntes do compensador as seguintes expressões:

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_{c}^{(0)} &= 0 \\ \dot{I}_{c}^{(1)} &= j\,V(B^{c}_{12} + B^{c}_{23} + B^{c}_{31}) \\ \dot{I}_{c}^{(2)} &= -j\,V(\alpha^2 B^{c}_{12} + B^{c}_{23} + \alpha B^{c}_{31}) \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Dos critérios de ajuste do compensador podem ser tiradas as seguintes equações:

$$\dot{I}_e^{(2)} + \dot{I}_c^{(2)} = 0 \qquad (22)$$

$$\mathrm{Im}\,|\dot{I}_\ell^{(1)}| + \dot{I}_c^{(1)} = 0 \qquad (23)$$

Como $\dot{I}_\ell^{(2)}$ e $\dot{I}_c^{(2)}$ têm partes real e imaginária (22) pode ser assim dividida:

$$\mathrm{Re}\,|\dot{I}_\ell^{(2)}| + \mathrm{Re}\,|\dot{I}_c^{(2)}| = 0 \qquad (24)$$

$$\mathrm{Im}\,|\dot{I}_\ell^{(2)}| + \mathrm{Im}\,|\dot{I}_c^{(2)}| = 0 \qquad (25)$$

onde Re e Im indicam, respectivamente, partes real e imaginária dos respectivos fasores:

Substituindo $\dot{I}_c^{(1)}$, $\mathrm{Re}\,|\dot{I}_c^{(2)}|$ e $\mathrm{Im}\,|\dot{I}_c^{(2)}|$, dadas por (21), em (23), (24) e (25), e resolvendo o sistema resultante para as susceptâncias do compensador, vem:

$$B_{12}^c = \frac{1}{\sqrt{3}\,V}\left\{\mathrm{Re}\,|\dot{I}_\ell^{(2)}| - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Im}\,|\dot{I}_\ell^{(1)}| - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Im}\,|\dot{I}_\ell^{(2)}|\right\}$$

$$B_{23}^c = \frac{1}{\sqrt{3}\,V}\left\{\mathrm{Im}\,|\dot{I}_\ell^{(2)}| - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Im}\,|\dot{I}_\ell^{(1)}|\right\} \qquad (26)$$

$$B_{31}^c = \frac{1}{\sqrt{3}\,V}\left\{-\mathrm{Re}\,|\dot{I}_\ell^{(2)}| - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Im}\,|\dot{I}_\ell^{(1)}| - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Im}\,|\dot{I}_\ell^{(2)}|\right\}$$

As equações (26) representam, portanto, as susceptâncias de compensação em termos das componentes simétricas de sequência positiva e negativa da corrente de carga. Nelas pode-se identificar claramente as propriedades da compensação sob o aspecto das componentes sequenciais. As três susceptâncias de compensação são igualmente proporcionais à fonte imaginária da corrente de sequência positiva da carga, e são funções diferentes entre si da corrente de carga de sequência negativa. As contribuições das correntes de sequência positiva e negativa são independentes. Assim, o circuito que constitui e compensador (ver figura 1.1) pode ser dividido em dois deltas independentes. Um equilibrado que provê a corrente reativa de sequência positiva, e o outro, desequilibrado, destinado a suprir as necessidades da carga em termos de sequência negativa. Assim, da fonte só será solicitada corrente ativa de sequência positiva. A figura 4.1

ilustra este conceito de compensação independente para as sequências positiva e negativa.

Pelo uso das equações (20) e (26), é possível determinar expressões para as susceptâncias de cada um dos compensadores, que serão:

$$B_{12}^{c(1)} = B_{23}^{c(1)} = B_{31}^{c(1)} = -\frac{1}{3}(B_{12} + B_{23} + B_{31}) \qquad (27)$$

$$\left.\begin{aligned} B_{12}^{c(2)} &= -\frac{2}{3}B_{12} + \frac{1}{3}B_{23} + \frac{1}{3}B_{31} + \frac{1}{\sqrt{3}}(G_{31} - G_{23}) \\ B_{23}^{c(2)} &= \frac{1}{3}B_{12} - \frac{2}{3}B_{23} + \frac{1}{3}B_{31} + \frac{1}{\sqrt{3}}(G_{12} - G_{31}) \\ B_{31}^{c(2)} &= \frac{1}{3}B_{12} + \frac{1}{3}B_{23} - \frac{2}{3}B_{31} + \frac{1}{\sqrt{3}}(G_{23} - G_{12}) \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Pode-se ver que somando (27) com (28) e acrescentando o termo da regulação de tensão B_d, chega-se a (17).

A introdução do termo correspondente à regulação em (27) e (28), é agora bastante simples. Para isto, em vez de se utilizar (23) como critério de compensação, esta equação deve ser substituída por uma outra que estabeleça queda de tensão nula entre a fonte e o P.A.C. Esta equação, será:

$$R_e \left| (\dot{I}_\ell^{(1)} + \dot{I}_c^{(1)})(R_1 + j X_1) \right| = 0 \qquad (29)$$

onde R e X constituem a impedância equivalente por fase do sistema externo "vista" pelo sistema industrial em consideração. Desenvolvendo (29), sabendo-se que $\dot{I}_c^{(1)}$ é puramente imaginária, vem:

$$\frac{R_1}{X_1} R_e|\dot{I}_\ell^{(1)}| - Im|\dot{I}_\ell^{(1)}| - I_c^{(1)} = 0 \qquad (30)$$

As condições expressas em (24) e (25) continuam as mesmas. Destas duas equações e com auxílio de (30) e com o uso de (21), as susceptâncias de compensação podem novamente ser determinadas de forma semelhante àquela dada em (26). O mesmo resultado pode ser obtida diretamente de (26) pela substituição do termo $-I_m|\dot{I}_\ell^{(1)}|$ por

$$|(R_1/X_1)R_e|\dot{I}_\ell^{(1)}| - Im\,|\dot{I}_\ell^{(1)}|$$

Isto resultará em equações equivalentes às equações (27) e (28), nas quais, as susceptâncias do compensador de sequência negativa ficarão inalteradas e as do compensador de sequência positiva serão acrescidas do termo:

$$\frac{R_1}{3X_1} \quad \frac{R_e|\dot{I}_\ell^{(1)}|}{V}$$

que corresponde a uma outra aproximação do termo B_d já definido na seção anterior. Assim, (27) passará a ser assim escrita:

$$B_{12}^{c(1)} = B_{23}^{c(1)} = B_{31}^{c(1)} = -\frac{1}{3}\left(B_{12}+B_{23}+B_{31} - \frac{R_1}{X_1}\frac{R_e|\dot{I}_\ell^{(1)}|}{V}\right) \quad (31)$$

5. CONCLUSÕES

Exprimir as susceptâncias dos compensadores controlados por tiristores em termos das componentes simétricas das correntes de carga, das susceptâncias da carga ou de qualquer outra variável do sistema, é muito importante para o desenvolvimento da estratégia de controle do compensador.

As expressões aqui deduzidas, as quais não constituem necessariamente a estratégia de controle de todos os compensadores mas dão uma idéia generalizada deste processo, trazem como principal informação a possibilidade de "compensar" desequilíbrios em sistemas elétricos industriais, tornando-os equilibrados sob o ponto de vista da concessionária. Isto, associado à rapidez na resposta destes compensadores, torna-os adequados à compensação de cargas intermitentes como fornos e arco e laminadores. Também é interessante notar que a atuação do compensador não altera a potência ativa fornecida à carga, em condição de desequilíbrio, já que este apenas distribui igualmente entre as três fases do sistema a potência ativa solicitada pela carga.

Muitas vezes, por fatores econômicos, as compensações de potência reativa e de regulação de tensão não são feitas completamente. Equações semelhantes às aqui deduzidas, levando em consideração estes fatores, são simples de serem obtidas e podem ser encontradas na referência (1).

A divisão do compensador em suas unidades destinadas à sequência positiva e negativa, foi bastante elucidativa. É claro que na prática tal divisão não ocorre, pois o sistema de controle do compensador atua de uma forma completa, e não separadamente para as componentes de sequência positiva e negativa . Entretanto, além do benefício didático trazido por esta metodologia, as expressões por ela obtidas podem dar uma idéia do grau de importância das componentes sequenciais de corrente do compensador uma em relação à outra.

As expressões encontradas para as susceptâncias do compensador em termos das susceptâncias da carga, são as mesmas pelos dois métodos.

Finalmente, uma outra importante conclusão que pode ser tirada das expressões vistas é o fato de, em alguns casos, a carga solicitar uma compensação capacitiva em uma ou duas fases e indutiva na(s) outra(s). Isto é uma vantagem do compensador do tipo reator controlado por tiristores que, ao contrário de outros compensadores estáticos a tiristores, pode cumprir de forma igualmente satisfatória esta característica.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

1. PINHEIRO, Ricardo F. Equipamentos Estáticos para a compensação de reativos e desequilíbrios em Sistemas Eletricos. EFEI, Jun. 1980. Tese de Mestrado

2. WALSHE, K.A. Thyristor Controlled Shunt Reactor Compensation of Asymmetrically Loaded Power Systems. UMIST, Out. 1976. Tese de Doutoramento

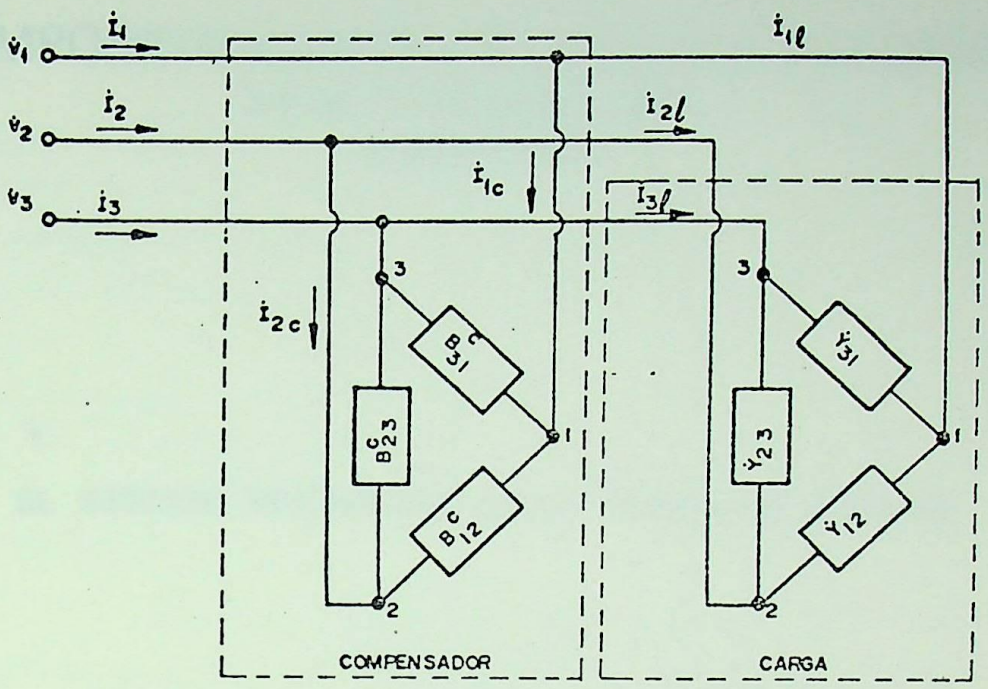


FIG. 4.1 – DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DE UM SISTEMA ONDE SÃO VISTOS UMA CARGA (COM SUAS ADMITÂNCIAS) E O COMPENSADOR (COM AS NECESSÁRIAS SUSCEPTÂNCIAS)

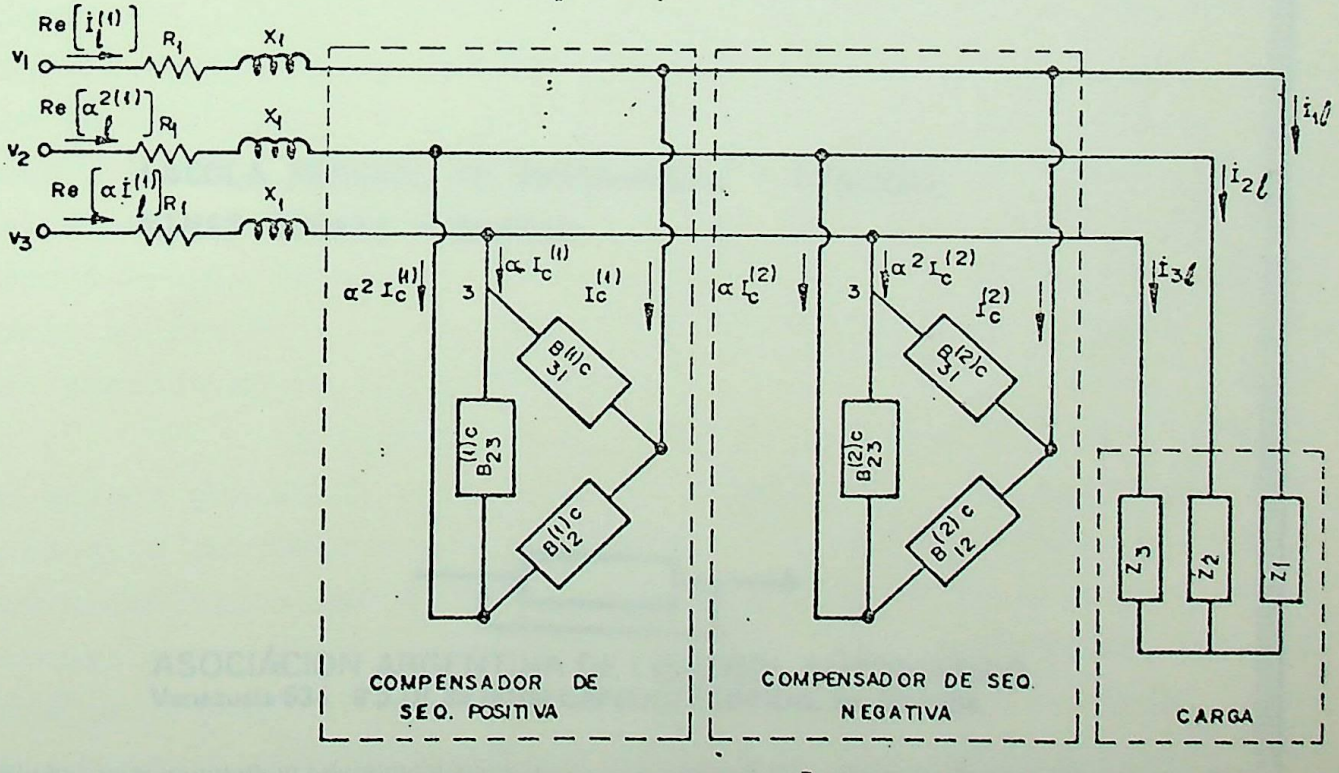


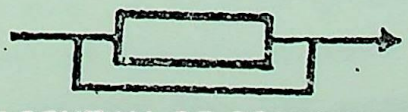
FIG. 4.1 – REPRESENTAÇÃO DO COMPENSADOR POR SEUS COMPONENTES DE COMPENSAÇÃO DE SEQUÊNCIA POSITIVA E NEGATIVA.

VII° SIMPOSIO NACIONAL DE CONTROL AUTOMATICO
3/7 DE NOVIEMBRE 1980
BUENOS AIRES

EL SOPORTE MATEMATICO DE LA TEORIA DE CONTROL

ING. JAIME FEINSTEIN

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA - ITAJUBA
MINAS GERAIS - BRASIL



ASOCIÁCION ARGENTINA DE CONTROL AUTOMATICO
Venezuela 634 9°p. Of. 39 (1095) CAPITAL FEDERAL tel: 30-0284

EL SOPORTE MATEMÁTICO DE LA TEORIA DE CONTROL

RESUMEN

El control como es actualmente conocido se apoya fuertemente en varios capítulos de la Matematica. En este trabajo se indican los grandes temas que constituyen el soporte matemático de cada uno de los enfoques en que puede considerarse subdividida la Teoria de Control. El trabajo finaliza con algunas reflexiones del autor acerca de lo que es dable esperar al respecto en un futuro próximo.

1. Introduccion

No existe ninguna disciplina tecnológica o en general científicamente orientada que no requiera un soporte matemático, pero seguramente será difícil encontrar alguna que, en un lapso de pocas décadas, há precisado apoyarse en tantos y tan diversos capítulos de la matemática como la Teoría de Control.

Es objeto principal de este trabajo el comentar sobre la estrecha relación entre las matemáticas y la Teoría de Control, con cita de los principales tópicos matemáticos que son fundamentales al desarrollo de las ciencias del control. Se pondrá énfasis en las mudanzas, bastante impresionantes, que al respecto ocurrieron durante la recién finalizada década del 70, circunstancia esta que será aprovechada por el autor para transmitir su punto de vista acerca de lo que es dable esperar en ese sentido en un futuro próximo.

A fin de circunscribir el campo de este trabajo, se aclara que de la disciplina que estudia los sistemas de control solo se considerará la teoría general, que opera con modelos matemáticos que en principio pueden ser aplicados a todo sistema concreto que cumpla con las premisas subyacentes en el establecimiento del modelo. Esto automáticamente excluye teorías matemáticas aplicables a particulares elementos usados en control. Por ejemplo la aritmética binaria y el álgebra boolea

na son soportes matemáticos de la teoría de microprocesadores; que pueden ser usados en el lazo de control de un proceso, pero los microprocesadores son solo elementos de un sistema de control y así esas ramas matemáticas no volverán a ser mencionadas en lo que sigue.

Para poner orden en la exposición, es didácticamente conveniente usar como orientación a las grandes divisiones con que la Teoría de Control suele ser estudiada. Preferimos denominar "enfoques", a esas grandes líneas, que, incidentalmente, no aparecieron de entrada sino con el correr del tiempo.

2. La matemática de los diversos enfoques del control

Actualmente es habitual considerar cuatro grandes enfoques. Ellos suelen ser reconocidos por mas de una denominación, sus límites son imprecisos, y hasta su misma existencia y alcance es asunto polémico. Pero ellos no son tema esencial, sino auxiliar, de este trabajo, y además, el haber desarrollado ese asunto en otra ocasión (ver ref. [F-F]) nos exime ahora de mayores comentarios al respecto. Simplemente aceptaremos la existencia de cuatro enfoques, que serán aquí aludidos con las denominaciones de: 1º) "clásico" o "por variables externas", 2º) "analítico" o "estocástico", 3º) "moderno" o "por variables internas", o "por variables de estado", y 4º) "contemporáneo" o "por álgebra abstracta".

Aunque no es posible señalar con precisión una "fecha de aparición", puede, aproximando a un quinquenio, indicarse 1940, 1945, 1960 y 1970 respectivamente, como los años a partir de los cuales las facetas que se consideran características de cada enfoque comienzan a influenciar la literatura del control. Es al respecto importante destacar: 1º) Una vez iniciados, todos esos enfoques persistieron, ninguno fué desplazado por los que posteriormente le siguieron (*), y muchos proble

(*) Es importante destacar esto, porque hay autores que denominan "períodos" a lo que aquí se denomina enfoque (ver |D|), pero un "período" da idea de algo inmutable luego de su finalización, lo que no ocurre con enfoque.

mas son hoy considerados por mas de un enfoque, o con métodos derivados de la interacción de varios de ellos. La división en enfoques es didáctica, destinada a que ideas diferentes no sean confundidas en su presentación, pero no una separación absoluta y estanca de conceptos. Trabajos recientes continúan siendo escritos en lengúaje de todos los enfoques, aunque en trabajos actuales se nota una gran influencia del contemporáneo. 2º) Previo a 1940, fueron planteados y resueltos numerosos problemas de control, por métodos que por definición "caen fuera" de los enfoques aludidos. El soporte matemático casi exclusivo consistía en el cálculo (diferencial e integral), y algo del álgebra tradicional. El ejemplo quizás mas significativo al respecto lo constituye el método directo de Lyapunov para el estudio de estabilidad de sistemas ([L]), presentado modernamente con el lenguaje del enfoque por variables de estado. Otro ejemplo interesante, esta vez mas práctico, lo constituye un estudio, debido a Hazen [H], de servomecanismos a relevadores, sin y con zona muerta y fricción de Coulomb, que actualmente sería efectuado usando técnicas de plano de fase y función descriptora. Ambos ejemplos fueron resueltos con recursos de cálculo diferencial. Una antigua aplicación de métodos algebraicos lo constituye el ya tradicional "criterio de estabilidad de Routh" ([R]).

2.1 - La matemática del enfoque clásico

Em forma simplista, este enfoque puede considerarse originado en la extensión a sistemas generales, de ideas dominantes en el campo de sistemas eléctricos previo a 1940, en especial, de aquellas técnicas referentes al tratamiento de circuitos de corriente alternada de frecuencia arbitraria pero constante. La respuesta estacionaria de un circuito a una excitación senoidal de frecuencia f o pulsación $\omega=2\pi f$ para una ω genérica ($0\leq\omega<\infty$) lleva al concepto, fundamental en el enfoque clásico, de "Respuesta de Frecuencia". Los conceptos eléctricos relacionados de Impedancia y Admitancia, cuando extendidos a cocientes de dos señales de naturaleza cualquiera y no solo voltage y corriente, conducen al modelo matemático básico del enfoque clásico, la Función de Transferencia (o Función Transferen

cia, como se prefiera. Ella será abreviada FT de aquí en adelante). Como directa generalización de una impedancia, la FT es expresada en función de $j\omega$, siendo entonces una función de dominio real y codominio complejo. Esta FT es usualmente indicada como $G(j\omega)$, y así, $G(j\omega) : R \to C$. Extensiones del modelo básico a problemas que requieren la consideración de transitorios hace conveniente la consideración del eje real σ agregado al ahora imaginario $j\omega$, dando lugar a la aparición de la variable compleja $s=\sigma+j\omega$. La FT es ahora una $G(s):C \to C$, función compleja de variable compleja, constituyendo la previa $G(j\omega)$ una restricción de la $G(s)$ cuando su dominio se circunscribe al eje imaginario (*).

Así entonces, el importante capítulo de las Funciones de Variable Compleja constituye uno de los soportes matemáticos esenciales del enfoque clásico. Otros capítulos deben ser agregados al considerar extensiones de señales intervinientes en el enfoque en consideración, o (extensiones) del propio enfoque. Por ejemplo la necesidad de considerar señales periódicas no senoidales implica la inserción natural de la Teoría de Series de Fourier, y la consideración de señales aperiódicas requiere a las Integrales de Fourier. Pero las señales deben actuar sobre los bloques, y siendo estas funciones temporales ($R \to R$) y estos en vez representados por funciones $C \to C$, el camino usual en el enfoque clásico es "compatibilizar" esa función $R \to R$ con la $C \to C$ de la $G(s)$ a traves de la Teoría de Transformadas de Laplace, que establece una correspondencia biunívoca (**) entre un conjunto de señales temporales $\{f(t)\}$ cumpliendo ciertas condiciones establecidas en la respectiva teoría, con un conjunto imagen $\{F(s)\}$ de funciones $C \to C$. Estas $F(s)$ pueden ahora ser operadas con FTs. Esto es así porque ocurre que las $G(s)$ usuales también pertenecen al conjunto imagen.

La restricción, en las Transformadas de Laplace, de $s \to j\omega$ conduce en forma natural a las Transformadas de Fourier, aunque en relación con este problema ellas pueden ser usadas en la consideración de señales no necesariamente nulas para $t<0$ (ver p. ej. [C-F]). En resumen, las teorías matemáticas bá

(*) Numerosos autores denominan "Respuesta de Frecuencia" a $G(j\omega)$, y FT a $G(s)$.

(**) Excepto por tecnisismos tales como la consideración de funciones de medida nula, que no son de interés en el enfoque clásico.

sicas al enfoque clásico estan constituidas por las teorías de funciones de variable compleja, series, integrales y transformadas de Fourier, y transformadas de Laplace.

Antes de finalizar esta subsección 2.1, es conveniente aún indicar que el aparato matemático mencionado en el párrafo anterior es soporte de aquella parte del enfoque clásico destinado al tratamiento de los (que en la ref. [F-F] fueron) denominados "Sistemas Básicos" (abreviados de aquí en mas SB). Estos son aquellos sistemas que obedecen a casi cuanta restricción existe que facilita su tratamiento matemático (p. ej. las restricciones de ser lineal, invariante, de constantes concentradas, de solo una entrada y una salida, sin retardos de tiempo, analógicos, deterministas, etc.). La liberación de cada una de estas exigencias conduce a la consideración de sistemas mas generales que el SB, pero de tratamiento matemático mas dificultoso, y solo en algunas situaciones, esos sistemas pueden ser tratados adaptando metodos del enfoque clásico (en [F-F] estos métodos fueron denominados "extensiones del clásico"). Como ejemplo se citará a los denominados "sistemas muestrados" (sampled data), cuyo tratamiento por un modelo transferencial lleva a la substitución de las Transformadas de Laplace por "Transformadas Zeta". El carácter de este trabajo nos hace no intentar ser exhaustivos, y lo recién indicado es solo un ejemplo de lo que tambien acontecerá con los otros enfoques, de los que solo se mencionará las teorias matemáticas mas esenciales a ellos vinculadas.

2.2 - La matemática del enfoque analítico

Existen en el SB restricciones cuya liberación conduce a tratamientos que caen fuera del enfoque clásico. Tal por ejemplo la del carácter determinista de las señales intervinientes. Cuando esta exigencia es levantada, deben considerarse señales aleatorias. Si es posible reconocer un proceso estocástico subyacente, del que esas señales formen parte, es posible considerar sistemas con tales señales, adicionadas o nó de las deterministas consideradas en el SB.

Es casi innecesario indicar que el soporte matemático fundamental a este enfoque lo constituye la teoría (o

teorías, como se prefiera) de probabilidad y estadística.

La dualidad ya mencionada en 2.1 entre funciones temporales y complejas, hace que la aleatoriedad tambien pueda ser considerada en elementos de la G(s), siendo entonces posible considerar problemas de incerteza paramétrica. Esto nos lleva a indicar que aunque los enfoques deben ser explicados separadamente, ellos interaccionan, y en esa interacción entran en forma natural temas matemáticos que son soporte de los otros enfoques. En relación con el clásico, Bode y Shannon adaptaron al uso del analítico conceptos transferenciales [B-S], y mas modernamente Horowitz (et al.) modificó metodologias del enfoque clásico usando conceptos del analítico, ver p. ej. [H-S]. Conceptos de este último enfoque también interaccionan con los dos que a continuación se mencionarán (*), con el correspondiente "arrastre" de sus soportes matemáticos, pero no se desea, en esta presentación sintética, dejar que los temas fundamentales sean oscurecidos por otros menos importantes, y así, no se listará ningún otro tópico matemático básico fuera de la probabilidad y estadística, en relación con este enfoque analítico.

2.3 - La matemática del enfoque moderno

Consideramos comprendido dentro de este enfoque el tratamiento de sistemas con técnicas de variables de estado, o internas, en contraposición al empleo de variables externas (al bloque o sistema) usadas en el enfoque clásico.

El modelo fundamental de este enfoque es la ecuación de estado, que es (una ecuación) diferencial vectorial de primer orden. Si el sistema es lineal, también lo es la ecuación de estado, y los parámetros que definen al modelo aparecen en las matrices de "sistema" A y "control" B, que relacionan la entrada (vectorial) externa u y el estado x con la derivada temporal $dx/dt=\dot{x}$ en la forma :

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (1)$$

Estas matrices A y B son además constantes si el sistema lineal

(*) Uno de los ejemplos talvez mas conocidos, es el uso de filtros de Kalman (enfoque moderno), en substitución de los de Wiener (enfoque analítico).

es invariante, o con elementos funciones del tiempo (A(t), B(t)) si el sistema es variante. La ecuación (1) es usualmente completada con una "ecuación de salida" :

$$y = Cx + Du \qquad (2)$$

donde y es el vector de salidas, y C y D son las matrices de "salida" y "transmisión" respectivamente (*).

La matemática soporte a este enfoque es, en primer lugar, el álgebra matricial. Cuando el orden del sistema (dimensión del vector de estado) es elevado, como es bastante usual en aplicaciones, ello involucra por arrastre la utilización de recursos computacionales, por lo que el cálculo numérico también interviene en forma significativa. Pero ademas, el trabajar con señales (de entrada, salida, estado) de varias componentes (vectoriales) que se influencian recíprocamente, hace conveniente considerar un "espacio soporte", o "marco", de esos vectores. Este espacio es vectorial lineal. Las matrices A,B, C,D intervinientes en el modelo asumen así el papel de operadores, pero la idea importante a resaltar aquí es que el Espacio Vectorial (abr. EV de aquí en adelante) constituye una especial estructura algebraica, apareciendo así por vez primera explícitamente (**) estas estructuras en la teoria de control. Este hecho tendrá una importancia capital en el enfoque siguiente.

Una vez definidos vectores (y sus espacios subyacentes), ciertos conceptos de control pueden asumir aspectos geométricos, y así, puede haber necesidad de referirse a la longitud de un vector, o a distancia entre pares de vectores, o aún ángulo (aunque en este caso y casi con exclusividad el hecho importante es si los vectores del par son o no ortogonales).

(*) La ecuación (2) es imprescindible para, agregada a la (1), relacionar los enfoques clásico y moderno, pero note el lector que no precisa ser resuelta. En efecto, u es dato, y resolviendo (1) se obtiene el x necesario para hallar y mediante (2).

(**) Implícitamente ellas están subyacentes al considerar cualesquiera conjuntos y operaciones que satisfacen los axiomas de las diversas estructuras pasibles de ser consideradas. Aquí nos estamos refiriendo al empleo conciente de una estructura algebraica como tal.

Se agregan así al espacio vectorial general respectivamente axiomas de norma, métricos o de producto interno, obteniendose espacios normados, métricos y con producto interno, que pueden considerarse aislada o conjuntamente. Otra propiedad deseable a requerir en esos espacios es la de "completidad" (toda secuencia de Cauchy converge a un punto de ese espacio). Cuando el EV completo es normado se tiene el espacio (o los espacios, como se prefiera) de Banach, y cuando es con producto interno el (o los) de Hilbert. Los espacios de Banach y de Hilbert constituyen el marco natural en el que se desenvuelven numerosos problemas de este enfoque, aunque ello no se refleja en el tratamiento elemental de sistemas con el enfoque de estado (ver p. ej. [F2]).

Al igual que con los enfoques precedentes, numerosas extensiones de la teoría son pasibles de ser consideradas. Por ejemplo, si los vectores x,u,y vienen definidos en instantes discretos, la ecuación diferencial (1) aparece substituída por una ecuación en diferencias finitas de la forma $x_{k+1} = A\ x_k + B\ u_k$, lo que provoca, claro está, cambios en las técnicas matemáticas que deben resolverla. Pero posiblemente el cuerpo de teorías mas importante vinculado con extensiones de este enfoque es el relacionado con el denominado "Control Optimo". Aunque problemas de optimización pueden ser encarados con numerosas técnicas diferentes, aquí solo se desea enfatizar el aporte que puede resultar del uso de conceptos derivados de la estructura de EV. Para ello puede considerarse, en un caso no demasiado general pero muy ilustrativo, que la "optimización" asuma el aspecto de hacer mínima la distancia entre un vector variable a una hipersuperficie objetivo, y las restricciones del problema aparecer en forma de hiperplanos que limitan los desplazamientos del vector en consideración dentro del espacio supuesto marco del problema. Si las restricciones son compatibles con el problema, existirá solución (*). Es común que el vector cuya

(*) Puede existir mas de una solución (a veces existen infinitas). En ese caso, pueden imponerse condiciones adicionales, por ejemplo, y entre todos los vectores cuya distancia es mínima, seleccionar al de mínima norma. Note el lector que no se está explicando en que consiste el problema del control óptimo, sino resaltando el papel que los espacios métricos y normados desempeñan en su planteo.

distancia al objetivo se busca minimizar sea el de estado x. En ese caso, el control u que produce ese particular x es el "control óptimo" u_{opt}, pero, se insiste nuevamente, existen numerosas otras formas de presentar y resolver este tipo de problemas, cada una con su peculiar soporte matemático. El lector interesado podrá consultar cualquiera de la ya numerosísima bibliografía que trata del tema, lo que nos exime de cualquier comentario adicional al respecto.

2.4 - La matemática del enfoque contemporáneo

Fué indicado en 2.3 que al comienzo del enfoque moderno el manipuleo de los entes matemáticos consignados en las ecs. de estado (1) y salida (2), esto es, los vectores $x,\dot{x},u,y$ y las matrices A,B,C,D fué encuadrado dentro de un contexto puramente matricial. Pero poco tiempo transcurrió para que los autores que desarrollaban la teoría realizasen la conveniencia de considerar a los $x,\dot{x},u,y$ como elementos de apropiados EV (vectores), y a las matrices A,B,C,D como representaciones de operadores vinculando y transformando esos vectores. P. ej. la ec. de estado indica como varia el estado en función de si mismo y de la entrada. Esta variación está expresada aditivamente mediante A operando sobre x y B operando sobre u. Esto dá $\dot{x}$ en el modelo continuo, o el valor del estado en el instante discretizado siguiente en el modelo discreto.

Ahora, una vez realizada la conveniencia de adoptar un punto de vista de "EV soporte", nada impide considerar a ese (o esos) espacio(s) como casos particulares de "estructuras (algebraicas) soporte". Esas estructuras son mas generales en el sentido de que pueden ser o no EV. Si lo son, es posible considerar particularizaciones. P. ej. un EV normado puede ser considerado un caso particular de EV, ya que se obtiene adicionando a un EV axiomas de norma, y un espacio de Banach, por constituir un caso especial de EV normado es una particularización aún mayor. Estas particularizaciones no mudan ni el carácter ni la denominación de la estructura principal, que sigue siendo EV. Otra particularización, que muda la denominación pero no la esencia, consiste en por ejemplo introducir una segun

da operación interna entre los vectores. Es usual indicar a la primera operación con el símbolo de suma (+), y a la segunda con el de producto (.). Teniendo presente que esas operaciones son convencionales, queda definida una estructura de "álgebra" (*) (siempre, claro está, que el conjunto de los vectores preexistentes constituyan un semigrupo respecto de la 2da. operación). Es posible comprender ahora que numerosos entes que ya intervenían en la teoría de control, pueden ser ahora encuadrados dentro de esta estructura. P. ej. conjuntos de matrices cuadradas que previamente habían sido consideradas como (representación de) operadores pueden alternativamente ser considerados como los "vectores" (abstractos) de una estructura de álgebra, ya que su suma y producto verifica los axiomas de la estructura.

Pero un verdadero progreso recién comienza al considerar estructuras mas generales. La que parece presentar posibilidades mas interesantes a la fecha es la de "módulo", que en forma simplista podría considerarse como la modificación que se obtiene en un EV al substituir el campo sobre el que se lo define por un anillo. Este es una estructura mas general que campo, pues lo comprende, y una de las causas de su utilidad proviene del hecho de que entes matemáticos muy comunes en todos los enfoques de control, constituyen anillo pero no campo. Un ejemplo ilustrativo es el de los polinomios. Si se recuerda que la FT de un SB en el enfoque clásico viene expresado como cociente de polinomios, y en el moderno la matriz característica de $A(A-\lambda I)$ es una matriz de elementos polinómicos, se vislumbrará el uso que se puede dar a una estructura que permite que la operación externa de sus vectores lo sea por miembros de un anillo antes de que por los de un campo. No es posible, en el contexto limitado de este trabajo ahondar mas en este subtema, pero el lector interesado en el uso de módulos en teoría de sistemas podrá consultar el artículo introductorio [S], o el profundo libro [K-F-A], que posiblemente constituya la

(*) La palabra "álgebra" tiene numerosas acepciones diferentes en matemática, mas o menos relacionadas. Aquí nos referimos a la estructura así denominada.

obra prima que contribuyó significativamente a abrir el camino de este enfoque, comparable en cierta forma a lo que el ya famoso [Z-D] fué en el enfoque moderno.

Sin pretender presentar hechos en su orden cronológico, también otras estructuras menos elaboradas que los EV, álgebras y módulos fueron, a partir de 1970, usadas explícitamente y con el carácter de tales, por los autores de control. Ya se mencionó a los polinomios enfatizando su pertenencia a un anillo. Pero para propiedades mas finas, es conveniente reconocer que ellos configuran una estructura de dominio (*), y obtener provecho de las propiedades ya establecidas para esa estructura por los matemáticos.

Asimismo, los tan importantes (en control) cocientes de polinomios (FT de SB), configuran una estructura de campo (no numérico), hecho interesante de reconocer al operar con matrices de transferencia de sistemas que difieren del SB por ser multivariables (matrices cuyos elementos son FT racionales).

Muchas reflexiones interesantes podrían ser efectuadas en relación a aspectos incidentales de lo tratado en esta subsección 2.4, por ejemplo, la dificultad, para quien debe transmitir conocimientos modernos de Teoria de Control, originada en la falta de base matemática adecuada de los alumnos de carreras técnicas de la mayoría de las universidades de Latinoamérica. Es opinión del autor que no existe solución simple a este problema, ya que por un principio de economía de esfuerzos, no es dable esperar que se imparta una matemática diferente a los alumnos de ingeniería que pretenden dedicarse al control. Otro asunto interesante de ser considerado es la influencia que la Teoría de Control tuvo en la Ingeniería Eléctrica (tal vez también en otras, pero esa ingeniería es la que el autor mejor conoce). Así, no están muy lejanos los tiempos en que mientras que en disciplinas como Teoría de Circuitos los tó

(*) Esta es una de las estructuras algebraicas de un conjunto y dos operaciones que pueden considerarse intermedias entre un anillo general y un campo. El lector interesado encontrará un resumen de estas estructuras intermedias en [F-A].

picos eran abordados segun líneas tradicionales (para orientación del lector, p. ej. de la forma tratada en [G]), en Teoría de Control, y bien dentro de los lineamentos del enfoque clásico, el modelaje de los SB ya era por polos y ceros (y desde luego también era frecuencial la descripción de las señales), tratamiento este que también pasó luego para la teoría convencional de circuitos. Un nuevo cambio, acontecido primero en la Teoría de Control (enfoque moderno) al descansar fuertemente en Teoria de Matrices, también y con un retraso pasó para la ing. eléctrica de potencia de nuestros dias. Es opinión del que esto escribe que en un futuro próximo lo mismo acontecerá con el soporte matemático del álgebra abstracta, por lo que ya sería imprescindible, con una visión de prospectiva comenzar su enseñanza en cursos de graduación.

3. Conclusiones

Este trabajo pretendió suministrar un panorama sobre la matemática soporte de la Teoría de Control. Para hacer eso se consideró la división de esa teoría en enfoques. El lector deberá estar conciente que no fué asunto de esta charla el referirse a los enfoques en sí, ni tampoco tratar sobre los temas matemáticos que fueron indicados, sino solo correlacionar esos temas con los enfoques.

Una de las conclusiones que se desea extraer es que hoy es casi imposible leer trabajos de avanzada sobre Teoría de Control sin un razonable conocimiento de álgebra abstracta, ademas de los temas tradicionales (funciones de variable compleja, Fourier y Laplace, cálculo matricial). Dentro de las estructuras abarcadas por el álgebra, es esencial conocer las mas importantes concretizaciones de los EV.

En unos pocos casos, el uso de un lenguaje matemático sofisticado puede ser innecesario, y constituir una especie de snobismo intelectual por parte del autor que lo usa, pero en numerosos otros casos, quizás en la mayoría, al adoptar una determinada estructura ya se está indicando cuales conceptos y herramientas van a ser usadas y manejadas por el autor. P. ej. un trabajo insertado dentro del contexto de un espacio

de Hilbert seguramente usará al menos conceptos de ortogonalidad, etc.

Otra conclusión es que es probable que el soporte matemático del enfoque contemporáneo sea extendido al menos al campo de la ingenieria eléctrica. Esto obligará a buscar una solución, que a corto plazo puede consistir en la implementación de estudios de posgrado (no de especialización, sino destinados a otorgar grado académico), lo que ha sido adoptado por prácticamente todos los paises desarrollados (*). Pero en un lapso mediato, se estima que esfuerzos deben ser también realizados para modificar adecuadamente los curriculos de las carreras universitarias aún en el ciclo de graduación, ya que la tendencia a un cada vez mayor soporte matemático de las teorías que originan los desarrollos tecnológicos parece ser un hecho absolutamente irreversible. El autor opina que una de las mayores dificultades que se encontrará si se desea implementar esta modificación va consistir, no en saber que temas sería imprescindible agregar, sino en determinar que es lo que debe ser suprimido para dar cabimento a esos temas nuevos. Pero esa es otra historia; lo que se pretendió transmitir termina aquí.

Agradecimiento - El autor agradece a la Sra. Ilda de Carvalho Andrade, secretaria del Dto. Electrotecnia de la Escola Federal de Engenharia de Itajubá, por el dactilografiado de este trabajo.

(*) Antes de llegar a serlo, es bueno recordar. Es asunto interesante discutir la interrelación entre estudios de posgrado de nivel máximo y el desarrollo científico y tecnológico. Ademas, soluciones foráneas, aún buenas en sus países de origen, pueden no serlo en países del cono Sur. Se efectúa esta cita a nivel de pié de página, porque este tema, ademas de ser incidental al asunto principal de este trabajo, ha sido discutido en otra oportunidad, ver [F-F 1].

INVERSAS MATRICIAIS ESQUERDAS

PARTE I

JAIME FEINSTEIN

RESUMO

O objetivo deste artigo fundamentalmente didático é fazer um estudo breve das inversas matriciais M_e que cumprem com a condição $M_eM = I$ a respeito de uma dada matriz M, sem que sejam obrigadas a cumprir com a condição dual $MM_e = I$. Como aplicação concreta, indica-se como as M_e podem ser usadas para considerar sistemas de equações lineares com mais equações que indeterminadas. A única originalidade que talvez possa existir neste trabalho está na maneira com que os resultados do estudo são aproveitados para introduzir o leitor sem experiência no assunto, na problemática das inversas generalizadas de matrizes.

THE GIST

The purpose of this article - essentially didactic in nature - is to study those matric inverses M_e which verify the condition $M_eM = I$ relative to a given M, without being forced do satisfy the dual condition $MM_e = I$. As a concret application, it is then shown how these M_e can be used to consider sistems of linear equations having more equations than indeterminates. Perhaps one original feature of this work lies in the way the results are used to introduce the reader into the important subject of generalized inverses of matrices.

1. GENERALIDADES.

Este artigo tem os seguintes objetivos :

a) Introduzir o leitor sem experiência no assunto, na problemática das "inversas generalizadas de matrizes" (daqui em diante designadas por IG) através da apresentação de um caso concreto, o da "inversa (matricial) esquerda".

b) Definir e estudar sumariamente essa inversa esquerda (denotada genericamente M_e^* quando M é a dada matriz).

c) Apresentar algumas aplicações das M_e.

Nota 1 - Na atualidade encontram-se definidas na literatura matemática numerosas classes de IG (por exemplo em |R-M|, 1, tabela 3.6 apresentam-se 27 IG diferentes). A escolha da M_e deve-se ao fato de que - juntamente com a inversa direita à que vai-se aludir na seção 5 - ela constitui talvez uma das IG cujas propriedades mais se aproximam às da inversa ordinária M^{-1}. Isso faz com que sua apresentação possa ser feita com apenas o uso de recursos elementares do cálculo matricial - Fim da nota 1-(FN1).

Nota 2 - Daqui em diante ao referirmos a matrizes, deve-se entender: matrizes cujos elementos pertencem a um campo numérico (*). FN2.

Uma inversa ordinária M^{-1} verifica as duas condições :

(*) Mais rigorosamente ainda: campo de característica zero. Os usuais conjuntos de números racionais, reais ou complexos, adicionados das operações de soma e produto, são exemplos.

$M^{-1}M=I$ (1) ; $MM^{-1}=I$ (2)

onde I é a matriz identidade da ordem de M. É claro que a exigência do cumprimento simultaneo de (1) e (2), faz com que M tenha que ser quadrada, assim como M^{-1}.

Uma inversa matricial esquerda M_e só deve satisfazer (1). Isso faz com que M possa agora ser retangular (vamos dizer de ordem m x n). Nessas condições, a matriz identidade de I há de ser de ordem n, e a M_e de ordem n x m. Reescrevendo (1) de forma a evidenciar as ordens como superíndices, tem-se :

$$M_e^{n\times m} \cdot M^{m\times n} = I^n \qquad (3)$$

Vai-se adotar (3) como definição de M_e de uma dada M, se M_e existir.

Nota 3 - Nada se afirma ainda a respeito da existência e unicidade de M_e. FN3.

É conveniente agora motivar a apresentação desta inversa mediante a consideração de uma situação concreta onde ela seja de aplicação. Esta situação será a indicada no título da secão 2, e constitui uma das aplicações indicadas no objetivo c) acima.

2. *APLICAÇÃO À SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES, COM MAIS EQUAÇÕES QUE INDETERMINADAS.*

Seguindo uma prática comum, o sistema de equações será apresentado em escrita matricial, com os termos independentes e as indeterminadas aparecendo como vetores coluna. Se o sistema possui m equações em n incógnitas, sua expressão será :

$$M\,x = b \qquad (4)$$

onde x é um n-vetor de indeterminadas, e b um m-vetor de constantes cujas componentes pertencem ao mesmo campo numérico que os coeficientes das indeterminadas. Esses coeficientes, arranjados na forma usual, constituem M, de ordem m x n. Salvo aviso em contrário, vai-se supor no que segue que m>n. Existem agora duas possibilidades lógicas a respeito das soluções de (4):

a) O sistema é consistente; b) O sistema é inconsistente. Vamo-nos propor, no caso a), achar as soluções, ou melhor ainda, mostrar como elas podem ser expressas mediante M_e. No caso b), definir, ou conjuntos de "sub-soluções" que para certos problemas poderiam substituir à (inexistente) solução ordinária, ou, caso a "física do problema" não permita isso, achar "soluções generalizadas", com intervenção de todas as equações.

A respeito de a), note-se que se M_e existir, e se (4) possuir solução, então esta vai ser fornecida por $x= M_e b$, já que, pré-multiplicando ambos os membros de (4) por M_e ter-se-á :

$$M_e M\,x = I\,x = x = M_e b \qquad (5)$$

ficando explicitado o vetor x. Mas é muito importante reconhecer o fato de que pode existir solução para (4) sem que exista M_e, ou que pode existir M_e sem que exista solução. Vejamos primeiro esta última situação, deixando o esclarecimento da primeira para a seção 4. O leitor desprevenido podería talvez pensar que se existir M_e tem que existir x, já que $x = M_e b$. Mas isso não é necessariamente assim, como se mostra a seguir :

Exemplo 1 - Seja o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \qquad (6)$$

obviamente inconsistente porque a 3ª equação é incompatível com a primeira.

Nota 4 - Seria muito simples "construir" um exemplo onde essa incompatibilidade não seja reconhecível à simples vista, e, de fato, é nesses casos onde as teorias pertinentes apresentam a maior utilidade prática. Mas esta nota é fundamentalmente didática, e não se deseja que as características a salientar sejam escurecidas por fatos irrelevantes ao que se deseja exemplificar. FN4.

A matriz (7) do sistema incompatível (6) possui, não uma, mas duas inversas esquerdas, (8) e (9) :

$$M=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad (7);\quad M_{e1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix} \quad (8)$$

$$M_{e2}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \quad (9)$$

Nota 5 - A verificação numérica do que se afirma, neste e em outros exemplos, fica por conta do leitor. FNS.

M_{e1} providencia a "solução" (10), e M_{e2} a (11) :

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix} \quad (10);\quad \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 3\end{bmatrix} \quad (11)$$

nenhuma das quais satisfaz (6).

O exemplo anterior ilustrou vários fatos interessantes: o caráter não suficiente da existência de M_e para a existência de soluções, a não unicidade das M_e, e o perigo de usar expressões tipo (5) para achar soluções de equações de matriz M singular. Seria muito conveniente que $x=M_e b$ fornecesse a solução, existindo M_e, e não a forneces se se M_e não existe. Mas desafortunadamente, a existência de M_e não é condição suficiente para a existência de soluções para (4), e ainda que exista uma M_e, pode não ser única segundo exemplificado. Por tudo isso, não é possível continuar considerando a solução de (4) sem primeiramente esclarecer o indicado no título da seção 3.

3. OS PROBLEMAS DA EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE M_e.

No que respeita a existência, a resposta vem fornecida pelo :

Teorema - É condição necessária e suficiente para a existência de M_e que se cumpra : 1º) O posto de M é pleno (*). 2º) $m \geq n$

Corolario - O posto das M_e de uma dada M de ordem m x n é :

$$p(M_e) = n \quad (12)$$

Demonstraçao - Prova de suficiência - Se 1º) e 2º) se cumprirem, existe uma submatriz de M (seja M') com p(M') = n. Suponha primeiramente que M' seja a submatriz formada pelas n primeiras filas (e todas as colunas) de M. Em escrita submatricial :

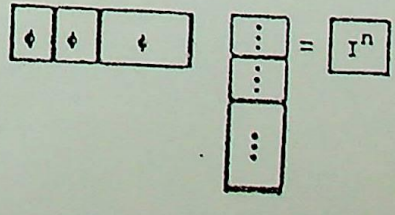
$$M = \begin{array}{|c|}\hline M' \\ \hline M'' \\ \hline \end{array} \quad (13)$$

onde ord M' = n x n, ord M'' = (m - n) x n. Então, escolhendo uma matriz $\boxed{(M')^{-1} \mid X}$, onde ord X = n x (m - n), o seu pre-produto com M leva a :

$$\boxed{(M')^{-1} \mid X} \begin{array}{|c|}\hline M' \\ \hline M'' \\ \hline \end{array} = I^n + XM'' \quad (14)$$

A escolha $X = \phi^{n \times (m-n)}$ (matriz nula de ordem n x (m - n)), leva a que a matriz escolhida seja uma M_e da dada M, demonstrando-se assim a suficiência de 1º) e 2º) para a condição suposta de existência de M'.

Se a submatriz formada pelas n primeiras filas for singular, como o posto de M é pleno, deve existir um subconjunto de n filas que agrupadas matricialmente possuam posto n. Pictoricamente isto será indicado pelas filas pretas do 2º fator do 1º membro de (15) (supõe-se no desenho n=3). A escolha de uma matriz (1º fator de (15)), na qual: 1º) a junção do conjunto de colunas assinalado em preto deve constituir a inversa ordinária da submatriz do agrupamento das filas de M; 2º) as restantes colunas são escolhidas nulas; 3º) os índices de coluna das colunas de 1º) devem coincidir com os de fila da submatriz selecionada de M, conduz imediatamente a que o 2º membro seja I^n, e que a matriz desenhada como 1º fator seja uma M_e da do segundo.



(15)

(*) Dizemos que o posto de uma matriz é "pleno" quando é o máximo compatível com a ordem da matriz, ou seja, se é = min (m, n).

Nota 6 - Observe-se que desta parte da demonstração se conclui que uma M_e pode ser construída mediante o uso de qualquer algoritmo para inverter matrizes, precedido da adequada formação da M'. A parte da demonstração a seguir vai sugerir a forma de completar o algoritmo, mas este tópico é alheio aos propósitos deste artigo. FN6.

Prova de necessidade - Considere primeiramente 2º). O cumprimento de (3) exige que o posto de ambas as M_e e M seja pelo menos n, o que só é possível para m≥n, e impossível para m<n. A necessidade de 1º) vem como um corolario de um conhecido teorema de Binet-Cauchy referente ao produto de determinantes (*). Fim da demonstração.

Passa-se agora para a questão da unicidade. A demonstração do teorema precedente indica que, dada uma M possuindo M_e, esta não será única em duas situações :

Primeira situação - Existência de divisores de zero de XM".

Considere de novo o caso de M=(13), onde M' é regular. Então (14) indica que

$$XM'' = \phi^n \qquad (16)$$

o que seguramente acontece para $X = \phi^{n \times (m-n)}$. Mas é conhecido o fato de que estruturas algébricas com conjuntos base de matrizes possuem divisores de zero, e assim sendo, (16) pode ser verificado sem que nem X nem M" tenham que ser nulas. Se isto acontecer, existirão tantas M_e como X que satisfaçam (16) (incluindo $X = \phi^{n \times (m-n)}$). Esta circunstância depende diretamente de M", ou seja de M. A álgebra linear fornece as condições de existência desta situação.

A extensão da análise anterior para a situação (15) é imediata.

(*) Se C = AB, $p(C) \leq \min (p(A), p(B))$. Veja p. ex. |C|, I.§2.5.

Exemplo 2 - Seja

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Escolha M' consistindo nas duas primeiras filas. Então, um conjunto de M_e (vamos indicá-lo coletivamente como M_{e12}) vem da aplicação de (14) e (16) :

$$M_{e12} = \left[(M')^{-1} \vdots X \right] = \left[\begin{array}{cc:cc} 3 & -2 & x_{11} & x_{12} \\ -1 & 1 & x_{21} & x_{22} \end{array}\right]$$

A solução geral para

$$XM'' = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ é } X = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

com a,b quaisquer. As infinitas M_{e12} têm a seguinte expressão :

$$M_{e12} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & b \end{bmatrix}$$

Segunda situação - Existência de mais de uma submatriz regular de M de ordem n. Neste caso, para cada uma dessas submatrizes poderá ser escolhida uma M_e segundo (15), e ainda, pode acontecer para cada escolha a primeira situação. Por exemplo, suponha que ((14), (16)) e (15) possam ser cumpridas simultaneamente. Então, ambos os primeiros fatores de (14) e (15) são M_e. Considere de novo o exemplo 2. Outro conjunto infinito de inversas esquerdas provém de escolher como M' as filas 2a. e 3a. de (17). As outras possíveis quatro combinações de duas filas não podem ser consideradas porque levam a M' singulares. Um caso onde só existe um número finito de M_e é o do

Exemplo 3 - Seja $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. Aqui, as três combinações de duas filas levam a M' regulares. Se considerarmos M_{e12}, é imediato escrever :

$M_{e12}=\left[\begin{array}{cc:c} 1/2 & 1/2 & x_{11} \\ 1/2 & -1/2 & x_{21} \end{array}\right]$, onde a única solução para (16) é a trivial. O conjunto das M_{e12} reduz-se à única

$M_{e12}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ O mesmo acontece com M_{e13} e M_{e23}. O leitor poderá verificar que

$$M_{e13}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ M_{e23}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. A SEÇÃO 2 RE-VISITADA.

Agora estamos em condições de voltar para o tema fundamental da seção 2: a resolução do sistema (4).

Observe que a informação contida em M é em geral insuficiente para determinar se o sistema é ou não é consistente. Assim por exemplo, em (6) basta trocar 10 por 8 na primeira equação (ou 8 por 10 na terceira) para que o sistema possua solução ordinária, mas essa informação não está contida em M. Este tema está totalmente esclarecido dentro do contexto da álgebra linear: basta verificar se o posto de M é ou não é coincidente com o posto da matriz aumentada [M|b]. Se é, o sistema é consistente, no caso contrário inconsistente (veja p. ex. |A|,III.30).

Nota 7 - A ressalva "em geral" feita no começo do parágrafo anterior, é porque se M for regular (caso limite que só pode acontecer para m=n) o sistema é sempre consistente. FN7.

Então, no primeiro caso (existe solução ordinária) esta tem que ser fornecida por (5). Isto não significa que a M_e tenha que ser única, e nem sequer tenha que existir. A não necessidade da unicidade ainda que exista solução ordinária será ilustrada no exemplo 7, e a não necessidade da existência pelo exemplo a seguir :

Exemplo 4 - Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1+2x_2 = 2 \\ 3x_1+3x_2 = 3 \end{cases} \qquad (18)$$

O posto de M é 1, e portanto não existe M_e, não obstante o sistema possui infinitas soluções ordinarias.

Isto nos permite circunscrever os sistemas resolúveis mediante M_e àqueles de posto pleno de M. Neles, se o teste da M aumentada indicar a existência de soluções ordinárias, estas virão fornecidas por (5). Se, no caso do posto de M ser pleno, $p(M)<p([M|b])$, (5) é inaplicável. Mas a existência de M_e fornece "sub-soluções", como foi mostrado no exemplo 1 por (10) e (11). Estas "sub-soluções" têm o significado de constituir as soluções ordinárias dos subsistemas consistentes do dado sistema inconsistente. Isto é assim porque a M' é regular, indicativa de um subsistema consistente (veja nota 7). Mas para que esse raciocínio seja válido, não se pode agregar informação adicional ao subsistema considerado, e isso implica em que só devem intervir no produto $M_e b$ os elementos i,j,... das filas consideradas na escolha de M', ou (de modo equivalente), que a X de (14) seja nula. Esta é uma condição mais estrita que (16). Como regra prática, se o conjunto $M_{eijk...}$ tiver cardinalidade > 1, as "sub-soluções" para o subsistema formado pelas filas i,j,k,... serão fornecidas pelo uso da $[(M')^{-1}|\phi]$ em (5). Isto completa a análise da primeira situação de "possibilidade lógica b" (a respeito das soluções de (4)), indicada no começo da seção 2. A segunda situação dentro dessa mesma possibilidade (soluções generalizadas envolvendo todas as equações), será considerada na seção 6.

Umas palavras de cautela são necessárias antes de finalizar esta seção: as M_e não podem ser usadas para estudar sistemas (4) com m<n. Isto é assim porque é impossível que nesse caso $M_e M = I$ (os postos de M e M_e são m, mas a matriz identidade deveria ser de ordem n>m). Poder-se-ía pensar que o caso de mais indeterminadas que equações poderia talvez ser tratado em forma dual com uma inversa também dual. As duais naturais das inversas esquerdas são as inversas direitas, mas essa dualidade não se estende ao tratamento de sistemas com mais incógnitas que equações. Isto é brevemente considerado na próxima seção.

BIBLIOGRAFIA - PARTE I

|A| - Aitken,A.C. - Determinantes y Matrices - Ed. Dossat.

|G| - Gantmacher F.R.- The theory of Matrices - Chelsea Pub. Co., 1959.

|R-M| - Rao C.R & Mitra S.K. - Generalized Inverse of Matrices and its Applications - John Wiley & Sons, 1971.

CURRICULUM VITAE

Jaime Feinstein - Formado em Eng. de Telecomunicações pela Universidad Nacional de Buenos Aires, Argentina, em 1949.

Apos varios anos de experiência profissional no campo das comunicações e eletrônica, passou para a teoria de controle, aumentando sua vinculação com a vida acadêmica, chegando a Professor Titular por concurso, (na área de controle) e Diretor do Dep. Electrotecnica, da Universidad Nacional del Sur, Argentina.

E autor de numerosas publicações, e desde 1976 vinculou-se a EFEI como Professor Visitante.

INVERSAS MATRICIAIS ESQUERDAS
PARTE II

JAIME FEINSTEIN

RESUMO

Foram apresentadas na primeira parte deste artigo, as inversas matriciais esquerdas. Nesta segunda parte, elas são brevemente comparadas com as inversas direitas (seção 5), e consideradas como tipos particulares de adequadas inversas generalizadas (seção 6).

ABSTRACT

Left matric inverses were presented in the first part of this article. In this second one, they are briefly compared with right inverses (sec. 5), and considered as special types of appropriate generalized inverses (sec. 6).

5. INVERSAS ESQUERDAS E INVERSAS DIREITAS

As "inversas (matriciais) direitas", M_d, são as duais das esquerdas no sentido de que, em vez de (1), elas devem satisfazer a condição (2). É claro que uma inversa que satisfaz ambas as condições só pode ser ordinária, ou seja, que nesse caso $M_d = M_e = M^{-1}$. Na fig.1 esse conceito é apresentado mediante o uso de um diagrama de Venn.

Essa dualidade faz com que nesta seção só se vai indicar, sem demonstração, que para sua existência a condição 1ª da seção 3 se mantém, e a 2ª passa para $m \leq n$ (a igualdade vigora só no caso $M_d = M^{-1}$). O posto de qualquer M_d de uma dada M de ordem m x n é agora m. No que diz respeito à aplicação para o tratamento de sistemas de equações lineares, a modificação da condição de existência 2ª para $m \leq n$ faz com que agora a inversa direita pode ser usada para o caso dual ao (4) no sentido de que os vetores vêm expressos como filas. Suponha que y, a são vetores fila de indeterminadas e constantes respectivamente, de dimensões adequadas para a compatibilidade de

$$yM = a \qquad (19)$$

Então, a existência de M_d permite explicitar y como :

$$y = aM_d \qquad (20)$$

Para que $MM_d = I$, é necessário que $m \leq n$. Mas agora m continua sendo o número de indeterminadas, e n o número de equações, pelo que (19) difere de (4) só na apresentação da informação. A dualidade de M_d a respeito de M_e não vigora para o tratamento de mais incógnitas que equações.

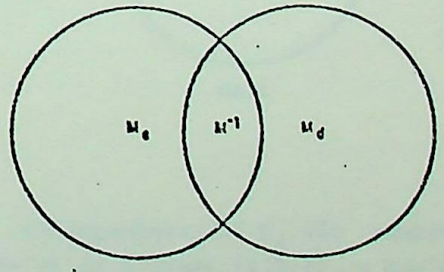


FIG. 1

6. INVERSAS ESQUERDAS E INVERSAS GENERALIZADAS (IG)

Dada uma matriz M qualquer, toda outra matriz cumprindo algumas das condições que M^{-1} cumpriria se existir, é uma IG. Nesse sentido (1) e (2) são condições complementares, e as matrizes M_e, M_d que separadamente as cumprem, são classes especiais de IG.

Porém, essa complementaridade faz com que (1) e (2) sejam condições muito "fortes". Muitas IG interessantes provêm da exigência do cumprimento, individual ou conjuntamente, das quatro condições, individualmente mais "fracas"(*)

$$MXM = M \quad (21) \qquad XMX = X \quad (22)$$

$$(\overline{MX})^t = MX \quad (23) \qquad (\overline{XM})^t = XM \quad (24)$$

onde nesta seção será usada X representando uma apropriada IG de M. Em (23) e (24) o superíndice "t" indica "transposição" e a barra "conjugação". Isto já está indicando que as matrizes M,X, estão em geral definidas sobre o campo complexo.

Se como regra mnemônica desconsidera-se o primeiro dígito,2, nas quatro equações últimas, as X cumprindo cada uma dessas condições são conhecidas modernamente como IG(1), IG(2), IG(3) e IG(4) respectivamente. O cumprimento de duas delas leva às IG(i,j), de três às IG (i,j,k), e das quatro à IG (1,2,3,4), onde os índices i,j,k tomam valores no conjunto {1,2,3,4} mas cumprindo a condição i<j<k.

Nota 8 - Existem denominações específicas para várias dessas IG, mas a falta de uniformidade entre os autores que as usam, e pior ainda, o uso da mesma denominação para IG diferentes, e de diferentes denominações para uma mesma IG, faz com que notações tipo IG(i,j,....) com possíveis outras condições agregadas, vão adquirindo predominância. Excetua-se a IG(1,2,3,4), denominada "pseudo-inversa" por grande número de autores, motivo pelo qual também aquí será assim denominada. O leitor interessado no problema da nomenclatura pode consultar |I-G|, 1.1, ou |F|. FN8.

O leitor deve estar ciente de que a apresentação do tema das IG neste artigo só será efetuada no que tenha relação com seu título, isto é, as M_e. Além disso, não serão efetuadas demonstrações, substituindo-as por adequadas referências bibliográficas. Mas ainda assim, isso bastará para cumprir com o objetivo a) enunciado na seção 1.

Então, é imediato comprovar que se uma X cumpre com a condição (3) (da seção 1), $X = M_e$, ela automaticamente satisfaz (21), (22) e (24). As M_e são então IG(1), IG(2), IG(4), IG(i,j) onde $i,j \in \{1,2,4\}$, $i<j$, e IG(1,2,4). Mas cuidado: a condição inversa é falsa:podem-se ter IG(1), IG(2), IG(4) ou suas combinações, sem que essas tenham de ser M_e. Isto está representado, em um diagrama tipo Venn, na fig. 2. O indicado em último termo representa-se incluindo estritamente ao conjunto M_e na interseção dos conjuntos das IG lá representados: $M_e \subset (IG(1) \cap IG(2) \cap IG(4))$.

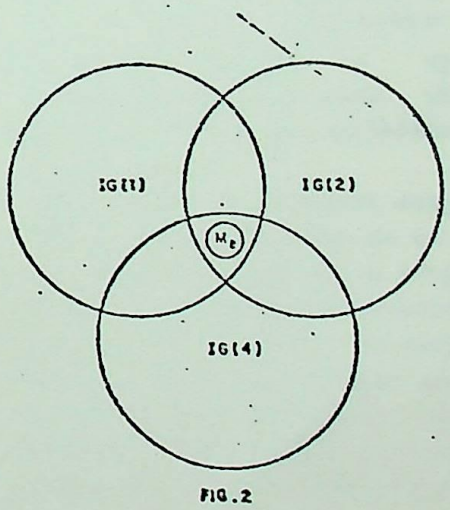


FIG.2

Analogamente, as M_d são combinações das IG de índices {1,2,3}, o que é imediatamente comprovado substituindo (2)

(*) Conhecidas como "equações de Penrose", ver |F|.

em (21), (22) e (23) (*).

Quando se consideram as M_e para ter idéia do que pode acontecer com as outras IG, convém levar em conta, a respeito da existência, que cada M sempre possui X cumprindo, separada ou conjuntamente, (21) a (24), mas, como foi visto, uma M_e dessa M poderá não existir. No que diz respeito à unicidade, as IG das equações (21) a (24) não são em geral únicas, exceto a IG(1,2,3,4) (pseudo-inversa) que o é (veja |I-G|, 1.1). Viu-se por sua vez, que se M_e existir, ela pode ser única, ou várias. Neste último caso, seu número pode ser finito ou infinito.

A possibilidade da existência de várias $M_e(M_d)$, é o que permite introduzir condições adicionais além de (3) ((2)), obtendo $M_e(M_d)$ mais particularizadas, porém possuindo propriedades que podem ser desejáveis em aplicações especiais. Como exemplo importante, suponha que o sistema (4) é inconsistente. Então, não vai existir nenhuma x tal que Mx=b. Mas aproveitando a propriedade de que o produto Mx é um vetor (operacionalmente é a imagem de x pelo operador M), pode-se formar a diferença b - Mx (outro vetor) e achar o x tal que minimize alguma funcional de b - Mx. Entramos assim em contato com um ramo muito desenvolvido da matemática moderna, a da teoria da aproximação, muito vinculada a teorias de grande aplicação como a de controle ótimo. A funcional a minimizar é a distância entre b e Mx, d(b,Mx), expressa usualmente como a norma do vetor diferença, $\|b-Mx\|$. Ainda assim, numerosas normas são possíveis de serem consideradas, e é conhecido o fato de que se a norma for a euclideana, o x que minimiza $\|b-Mx\|$ também fornece a melhor "solução generalizada" (*) que substitui à solução ordinária em muitos problemas de interesse prático. É possível demonstrar (veja |I-G|, 3.1), que essas soluções generalizadas virão providenciadas por $x = X^{(1,3)}b$, onde $X^{(1,3)} \in \{IG(1,3)\}$. Claro que pode haver várias (talvez infinitas) dessas "soluções generalizadas no sentido dos quadrados mínimos". Nesse caso, pode ser escolhida a solução possuindo min $\|x\|$. Um resultado fundamental da teoria das IG, devido a seu introdutor Moore, e re-enunciado independentemente vários anos mais tarde por Penrose (veja |R - M|, 3.3.1), estabelece que esse único x vem fornecido por

$$x = X^{(1,2,3,4)}b \qquad (25)$$

onde a pseudo-inversa $X^{(1,2,3,4)}$ é a (única) IG(1,2,3,4) da dada M (veja |R-M|, 3.3.2).

Claro que se o sistema (4) for consistente, essa única pseudo-inversa vai providenciar dentre todas as soluções ordinárias, a de mínima norma. Isto é assim porque $X^{(1,2,3,4)}$ também pertence ao {IG(1,4)}, e é possível demonstrar (veja |I-G|, 3.2) que $x = X^{(1,4)}b$ expressa a solução de min $\|x\|$ para um sistema consistente possuindo infinitas soluções ordinárias.

Exemplificar sobre os conceitos anteriores, além de superar o espaço de que razoavelmente pode-se dispor em um artigo, corresponde a textos especializados (já citou-se os |I-G| e |R-M|), ou artigos específicos. Porém, um exemplo concreto é muito útil para esclarecer conceitos abstratos. Como solução de compromisso, opta-se aqui por exemplificar

(*) O leitor interessado em exemplos numéricos a respeito destas propriedades de inclusão pode consultar os exemplos 2,6,7 e 8 de |F1|. Não é necessário para isso conhecer o assunto principal desse artigo, só basta saber que a nomenclatura é diferente, e que a IG lá indicada como M_d no exemplo 2 é uma M_e na nomenclatura deste artigo.

(*) Os vocábulos "solução generalizada" são afins ao contexto das IG. Quando o mesmo grupo de problemas é considerado sob o ponto de vista da teoria da aproximação, fala-se de "solução aproximada". Em sentido técnico, uma solução generalizada de (4) poderia definir-se como x = Xb, onde X é qualquer IG da dada M.

sobre o caso da solução generalizada para sistemas de equações inconsistentes, com intervenção das M_e. Disso trata o exemplo 5. Nele, deseja-se visualizar graficamente os entes matemáticos que intervem, e para isso, o sistema deverá ser de só uma indeterminada, $x \in R^1$, e duas equações, porque então, as matrizes podem ser desenhadas como bi-vetores (o indicado na Nota 4 aplica-se especialmente a este exemplo).

Exemplo 5 - Considere o sistema inconsistente (26) :

$$\begin{cases} 0{,}5\ x = 7 \\ x = 3 \end{cases} \qquad (26)$$

e a figura 3 que o acompanha.

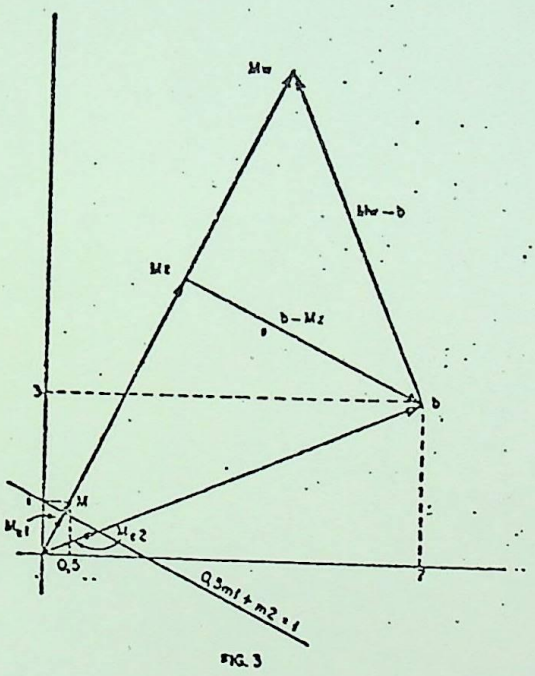


FIG. 3

Nela desenham-se primeiramente os vetores $b = [7 \quad 3]^t$ e $M = [0{,}5 \quad 1]^t$. Então, os (infinitos) vetores (*) Mx geram a reta que contém M. A solução generalizada no sentido dos quadrados mínimos reduz-se aquí à solução que minimiza b - Mx . Se bem que neste simples exemplo essa solução x=z pode ser achada graficamente projetando b perpendicularmente sobre Mx (ter-se-á então o ponto Mz) e dividindo pelo módulo de M, vai-se achar mediante o uso da inversa esquerda. Para isso, determina-se primeiro que ela existe (o posto de M é pleno, e (m=2) > (n=1)). Logo, acha-se sua expressão geral considerando que como ord M=(2 x 1), ord M_e=(1 x 2), e expressando-a como $M_e = [m_1 \quad m_2]$, da condição (3) vem :

$$0{,}5\ m_1 + m_2 = 1 \qquad , \qquad (27)$$

de onde conclui-se que existem infinitas M_e cujas componentes estão relacionadas por (27). O caráter de bi-vetor que também possui M_e faz com que possa ser desenhada no plano como sendo qualquer um dos infinitos vetores que começam na origem e finalizam na reta (27). Dentre esses, haverá um paralelo a Mx (indicado M_{e1} na fig. 3) e é esse que fornecerá a solução como $z = M_{e1} b$. Impondo aos m_i de (27) a condição de ter a direção de M obtem-se imediatamente $M_{e1} = [2/5 \quad 4/5]$, resultando então z= 26/5.

Ainda que geometricamente ve-se que (sendo x,z escalares) o único "vetor" M_e que pode expressar Mz tem que ter a direção de M, deseja-se relacionar a solução achada com as IG. Para isso, note que qualquer uma das M_e é uma IG(1, 2,4), mas não é em geral uma $X^{(1,3)}$, como se requer para minimizar $\|b - Mx\|$. Mas como a M_{e1} a minimiza, tem que se verificar $M_{e1} \in \{IG(3)\}$, o que efetivamente acontece. Com efeito, a condição (23), que particularizada ao exemplo 5 lê-se como :

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix} [m_1 \quad m_2] = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} [0{,}5 \quad 1] \qquad (28)$$

admite como solução $m_1 = 0{,}5\ m_2$, que, juntada à (27), providencia a única solução $[2/5 \quad 4/5] \equiv M_{e1}$. Incidentalmente, esta M_{e1} é a (única) $X^{(1,2,3,4)}$ da dada M.

(*) Em geral, b e Mx continuariam a ser vetores, mas M seria uma matriz própria (que não é vetor) não sendo passível de ser desenhada.

Aqui finaliza a parte principal do exemplo, mas o leitor terá observado que a figura 3 assinala uma outra M_c "especial" (ou distinguida). Trata-se da M_{e2}, situada na interseção das retas de "b" e (27). Um cálculo simples permite obter $M_{e2} = [14/13 \quad 6/13]$. Essa M_{e2}, quando aplicada à b como $M_{e2}b$, fornece a solução generalizada $w = M_{e2}b = 116/13$ que seleciona, dentre todos os x, o x=w tal que $(Mx-b) \perp b$.

É claro que ambos os problemas exemplificados podem encarar-se de várias formas alternativas, uma das quais (talvez a de mais natural aplicação) é mediante o uso de "projetores" (ou operadores de projeção). Estes assumem em casos como os do exemplo anterior, a forma de matrizes quadradas idempotentes (e para projetores ortogonais, simétricas) (*).

O projetor P que aplicado à b produz M_z ($Pb = M_z$) pode ser expresso mediante M_{e1}. Com efeito, $Mx = MM_{e1}b = Pb \rightarrow P = MM_{e1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Note que a M_{e1} é aqui pre-multiplicada por M, mas não deve ser confundida com uma M_d, já que $MM_{e1} \neq I$ (**).

Deseja-se finalizar esta seção voltando ao que foi indicado no seu terceiro rodapé, acerca de que certo grupo de problemas resolúveis mediante IG podem ser também considerados dentro do contexto da teoria de aproximação, e assim, na próxima seção, indicar-se-á o papel que desempenham as M_c quando aplicadas a essa teoria.

(*) O leitor interessado neste tema a nível de capítulo, pode consultar p. ex. |R-M|, 5.

(**) A forma convencional de obter P é como $\Sigma_i \beta_i \overline{\beta_i}^t$, onde os β_i são os versores da base ortonormal no subespaço onde se projeta, referidos à base canonica do espaço. Para o caso do ex. 5, só existe um $\beta_i = \beta_1 = \frac{1}{5}[1 \quad 2]^t$. Com esta metodologia, o leitor poderá conferir a P encontrada mediante a M_{e1}, e além disso comprovar que o projetor para projetar ortogonalmente Mx em b é $\frac{1}{58}\begin{bmatrix} 49 & 21 \\ 21 & 9 \end{bmatrix}$ (a base no subespaço gerado por b é $\frac{1}{\sqrt{58}}[7 \quad 3]^t$).

BIBLIOGRAFIA - PARTE II

|F| - Feinstein J. - Extensión del concepto de inversa de una matriz: inversas generalizadas y pseudoinversas - Rev. Electrotécnica, Vol. LX Nº 6, 1974, pp 212/225.

|F1| - Feinstein J. - Estruturas algébricas adequadas para considerar inversas generalizadas de matrizes - EFEI Pesquisa, Vol. V Nº 1, 1979, pp 25/29.

|I-G| - Ben- Israel A. & Greville T. N.E. - Generalized Inverses- Theory and Applications - John Wiley & Sons, 1974.

|P| - Penrose R. - A generalized inverse for matrices - Proc. Cambridge Philos. Soc., 51, 1955, pp 406/413.

|R-M| - Rao C.R. & Mitra S.K.- Generalized Inverse of Matrices and its Applications - John Wiley & Sons, 1971.

CURRICULUM VITAE

Ver Parte I

INVERSAS MATRICIAIS ESQUERDAS
PARTE III

JAIME FEINSTEIN

RESUMO

Nesta terceira parte conclui-se a apresentação das inversas matriciais esquerdas relacionando-as com o problema da aproximação polinômica.

ABSTRACT

This 3rd. part ends the presentation of left matric inverses relating them to the problem of polynomic approximation.

7. INVERSAS ESQUERDAS E APROXIMAÇÃO POLINÔMICA

A "aproximação polinômica" no sentido que vai ser usado nesta seção, consiste em aproximar uma função R→R por um polinômio de grau prefixado (vamos dizer n). Se a função dada é determinada experimentalmente, virá expressa por um conjunto finito de pontos (observações), consistindo cada ponto em uma "saída" ou "resultado" a uma "entrada" ou "prova". Se as observações são m+1, a função pode sempre ser representada por um polinômio de grau m, e a aproximação polinômica assume o aspecto mais restringido de: dado um polinômio de grau m, aproximá-lo por outro de grau n<m.

Quando os "pontos" representam observações, o problema pode ser considerado como de "identificação" (dos parâmetros do sistema que com essas entradas produzem as saídas observadas), mas como a aproximação deve ser feita respondendo a um critério, e no caso usual este vem apresentado na forma de uma "minimização" de uma "função distância", o problema pode ser considerado também como pertencente à classe dos abordados pela teoria de "otimização". O recém indicado sugere que essas duas importantes classes de problemas apresentam aspectos comuns, que podem ser descobertos inserindo-os em uma estrutura algébrica o suficientemente geral como para considerar sua descrição por entes matemáticos semelhantes. Aos propósitos desta seção, bastará considerar à teoria de aproximação como abrangendo esses aspectos comuns, e ao espaço vetorial como sendo a "estrutura suporte" adequada. Novamente, temos que enfatizar que foge aos propósitos deste artigo apresentar os princípios da teoria de aproximação, que aliás pode ser desenvolvida (pelo menos em seus linhamentos clássicos) sem considerar as lG, e em particular as M_e (*).

Exemplo 6 (enunciado matemático) - "Aproximar o polinômio quadrático que passa pelos pontos (-1, 0), (0, -1), (1, 2), por uma reta".

O problema, tal como é enunciado, pode corresponder a várias situações físicas. Por exemplo, considerando-o como

(*) Para orientação do leitor, o autor deste artigo cita a apresentação do tema na forma em que, ao nível de capítulo, é efetuada em |R|, 8.

um problema de identificação de parâmetros, poderia ser re-enunciado como: "Identifique os parâmetros, para uma modelização estacionária, de uma caixa preta, conhecido que sob entradas -1, 0, 1, a saída estacionária assume os valores 0, -1, 2". Note-se que este segundo enunciado não corresponde ainda com o enunciado matemático, porque falta indicar a função aproximante. Para concordância, essa função deve ser uma reta, e a fig. 4 expressa a idéia subjacente.

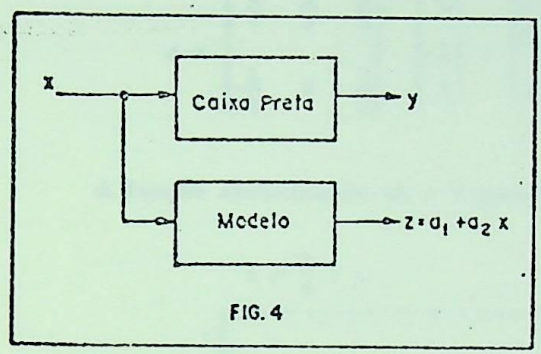


FIG. 4

Agora, ambos enunciados conferem, mas o problema não está ainda totalmente definido, porque falta indicar o "critério de aproximação". Esse critério é (nestes problemas) uma "distância" em um espaço de funções, no qual os "y" e "z" da fig. 4 são vetores. Usualmente, essa distância vem expressa como a norma do vetor diferença, e assim será aqui considerada (*). Parece que o problema já está totalmente determinado, mas não é assim, pois existem numerosas normas diferentes, que levam a obter respostas em geral diferentes para o mesmo problema. Aqui vai adotar-se a "norma euclideana", que leva a obter uma solução no sentido dos quadrados mínimos (veja por exemplo |R|, 8.4, 8.5). O problema passa a ser do tipo de regressão linear, e existem numerosas técnicas para obter os parâmetros a_1 e a_2 da reta solução. Aqui vai-se usar a IG(1,2,3,4), ou pseudo-inversa, para os obter. Para isso, passa-se o problema para um marco matricial considerando o espaço vetorial R^3 munido da norma euclideana. O vetor que deve ser aproximado é o y, que vai ser aqui expresso pelo conjunto de saídas $[0\ -1\ 2]^t$, e deveria idealmente ser igual a $z=a_1+a_2x$, onde x é o vetor de entradas $[-1\ \ 0\ \ 1]^t$ (*), e a_1, a_2 são escalares pertencentes ao campo do espaço. Então, deseja-se o cumprimento de :

$$y = a_1 + a_2 x \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (29)$$

onde o vetor $[1\ \ 1\ \ 1]^t$ introduz-se para que cada termo da direita seja um vetor compatível com a escrita escalar segundo figura à esquerda de (29).
(29) pode ser reescrita em forma adequada à introdução de IG como :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (30)$$

É imediato comprovar que (30) é um sistema inconsistente, e isso é o que normalmente acontece, já que se tem mais equações que indeterminadas (**). (30) apresenta a forma (4), (na notação deste exemplo Ma = y), e a solução generalizada mediante a pseudo inversa é da forma (25); na notação deste exemplo :

$$a = X^{(1,2,3,4)}\, y \qquad (31)$$

(*) O marco algébrico para considerar minimização de distâncias é um espaço métrico e para normas um espaço normado. Em um problema prático, é indistinto adotar um ou outro espaço, já que as funções distância e norma podem ser relacionadas por $d(u,v) = \|u-v\|$ ou $\|v\| = d(v,0)$.

(*) O fato de que neste problema y, x, e também o z a seguir podem ser expressos por 3 coordenadas justifica a escolha do R^3 como o espaço vetorial adequado a este problema.

(**) O problema seria consistente no caso especial em que os três pontos dados estivessem alinhados.

A (única) pseudo-inversa de M é (*) :

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (32)$$

de onde :

$$a = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (33)$$

A função aproximante da y é portanto

$$z = \frac{1}{3} + x \qquad (34)$$

que representa-se na fig. 5, junto com a parábola y.

A solução generalizada (34) é coincidente com a solução no sentido dos quadrados mínimos, porque a pseudo-inversa pertence ao {IG(1,3)}, que, segundo indicado na seção 6 fornece essa solução em sistemas inconsistentes. Sendo a solução única, nada mais há que agregar; nos casos onde existem várias soluções que levam ao mesmo mínimo na norma $\|y-z\|$, a pseudo-inversa fornece além disso a solução de min $\|z\|$.

É interessante que o leitor esteja ciente de que a adoção de outras normas conduz a soluções diferentes. Por exemplo, se a norma fosse a não euclideana $\|v\| = \max |v_i|$, $i \in \{1,2,3\}$ (*)

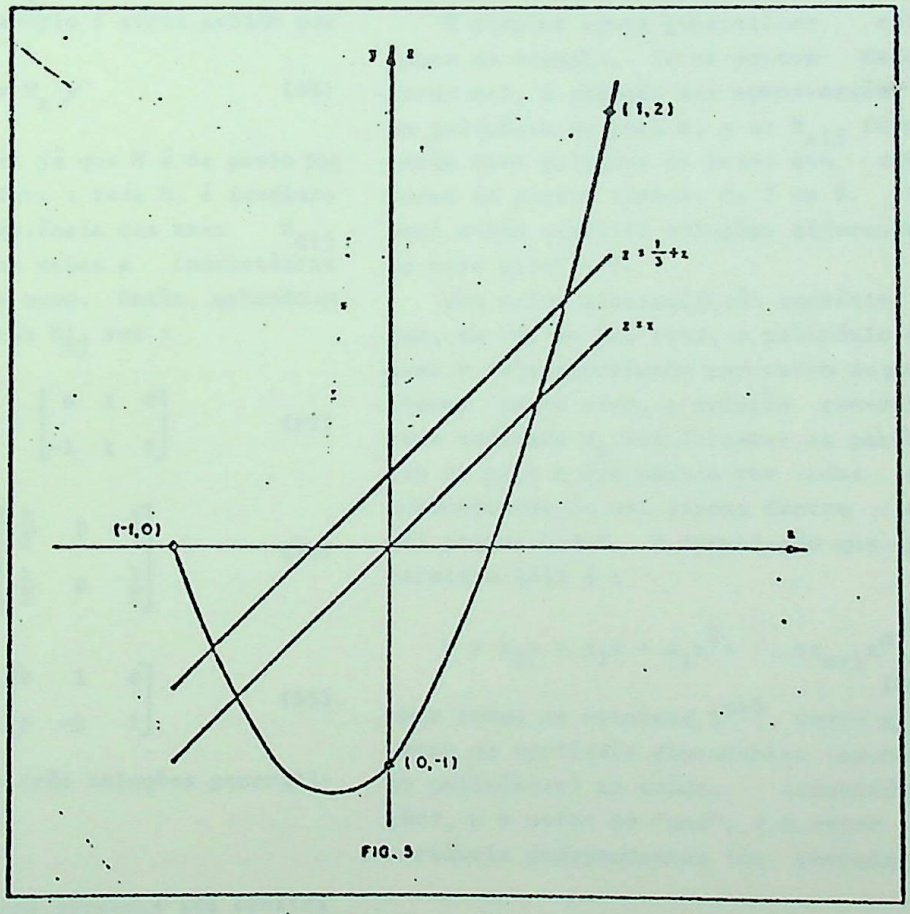


FIG. 5

(*) Não é objetivo deste artigo fornecer procedimentos para a obtenção de outras IG que não sejam as M_e, (para isso, o dentro das referências já citadas, veja |F|, |I-G|, |P| ou |R-H|), mas o leitor poderá verificar sem dificuldade que (32) satisfaz (21) a (24) e aceitar que, assim sendo, deve ser única.

(*) Esta norma não se deriva de um produto interno. Em casos como estes (espaços vetoriais normados sem produto interno), pode ser demonstrado que o problema admite ou uma ou infinitas soluções. Aqui vai ocorrer a primeira situação. Para um exemplo similar ao apresentado mas possuindo infinitas soluções, veja |R|, 3, ex. 8.2.

$$y - z = \begin{bmatrix} -a_1 + a_2 \\ -1 - a_1 \\ 2 - a_1 - a_2 \end{bmatrix} \qquad (35)$$

e o problema (*) se reduz a achar $\min(\max|y-z|_i)$ que aqui resulta nos valores $a_1=0$, $a_2=1$, que levam à norma $\|y-z\|$ a seu valor mínimo de "um". A identificação feita com o critério acima, conduz à solução $z = x$, diferente de (34). $z = x$ é uma solução ótima segundo um critério diferente ao dos quadrados mínimos, e também representa-se na fig. 5 (**).

Voltando ao tema principal desta seção, o uso da pseudo-inversa para resolver um problema de aproximação polinômica leva em forma natural a perguntar o que acontecerá se em (31) substitui-se $X^{(1,2,3,4)}$ por M_e. Agora o vetor $a = [a_1 \quad a_2]^t$ do exemplo 6 seria achado por

$$a = M_e\, y \qquad (36)$$

o que é factível já que M é de posto pleno, com $m > n$. Para a dada M, é imediato comprovar a existência das três M_{eij} e, para cada uma delas a inexistência de divisores de zero. Então, achando as inversas das três M^{-1}_{ij} vem :

$$M_{e12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (37)$$

$$M_{e13} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (38)$$

$$M_{e23} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (39)$$

que fornecem as três soluções generalizadas $a = M_e y$:

$$a_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (40) \; ; \quad a_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (41) \; ;$$

$$a_{23} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (42)$$

que expressas na forma funcional são as três retas :

$$z_{12} = -1-x; \; z_{13} = 1+x; \; z_{23} = -1+3x \qquad (43)$$

Elas são representadas na fig. 6. Não é por acaso que cada z_{ij} resulta na reta que passa pelos pontos i,j. Isto tem que ser assim, porque já foi visto na seção 4 que uma interpretação das soluções generalizadas no caso inconsistente é como sendo as soluções ordinárias dos subsistemas consistentes, e no caso do exemplo 5, essas são as retas que unem dois a dois os pontos dados.

É simples agora generalizar esta parte do exemplo. Se os pontos dados forem m+1, a solução sem aproximação é um polinômio de grau m, e as M_{eij} fornecerão como soluções as retas que unem todos os pontos tomados de 2 em 2. Haverá então $m(m-1)/2$ soluções diferentes no caso geral (*).

Uma maior generalização consiste em que, em vez de uma reta, o polinômio de grau m seja aproximado por outro de grau $1<n<m$. Nesse caso, a solução generalizada mediante M_e vai fornecer as parábolas de grau n que passem por todos os subconjuntos de n+1 pontos dentre os m+1 pontos dados. A formulação que generaliza (29) é :

$$y = a_1 u + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_{n+1} x^n \qquad (44)$$

onde todos os vetores $\in R^{m+1}$, sendo y o vetor de variáveis dependentes (enunciado polinômico) ou saídas (identificação), u o vetor de "uns", x o vetor de variáveis independentes (ou entradas).

(*) Este problema pertence aos considerados pela programação não linear.

(**) Obviamente, a solução prévia já não é ótima segundo este novo critério ($\|y-z\| = 4/3 > 1$).

(*) Se houver subconjuntos de mais de 2 pontos constituindo variedades lineares, claro que várias dessas soluções vão coincidir, reduzindo consequentemente seu número.

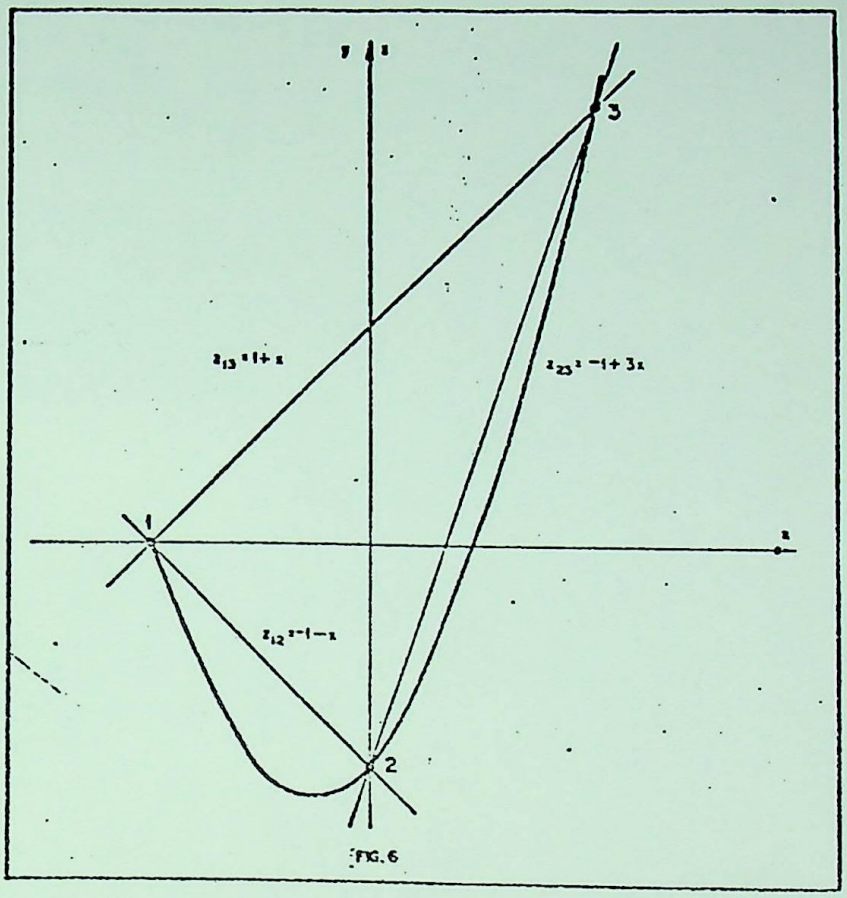


FIG.6

Os x^j são os vetores definidos como $\dot{x}^j = |x^j|$. Pode-se então construir uma matriz M de ordem (n+1) x (n+1) como a junção das colunas $u, x, x^2, \ldots, x^n$ e assim sendo, a coluna de coeficientes a_i constitui o vetor "a" da expressão resultante (Ma = y), cuja solução é fornecida por (36). Agora, cada conjunto de n+1 filas de M serão não singular, dando origem a uma M_e que fornecerá a solução que passa pelos n+1 pontos correspondentes às filas escolhidas.

Incidentalmente, a particularização deste caso na situação limite de "aproximar" os n+1 pontos dados por um polinômio de grau n fornece um método alternativo ao dos polinômios de Lagrange para formular a equação do polinômio de grau mínimo que passa pelos n+1 pontos dados. Basta para isso achar seus coeficientes por (36), onde agora $M_e = M^{-1}$, já que M é regular. A faceta aparentemente atrativa deste procedimento resulta de que, dada a forma de construir M, sua estrutura corresponde à de uma matriz de Vandermonde, e o problema computacional reduz-se à inversão de uma tal matriz, para o que existem técnicas especiais (veja por exemplo |H|, 10.3)(*).

Isto finaliza a apresentação do tema principal desta seção, mas deseja-se aproveitá-lo para ilustrar acerca da observação feita no começo da seção 4 (parágrafo prévio ao exemplo 4), já que estamos agora em condições de esclarecer totalmente a questão aí levantada, que ainda no caso que um sistema de equações (4) com a sua M de posto pleno seja consistente, podem existir várias M_e que forneçam a solução por (5). Vamos considerar esta situação como sendo a de um problema de identificação onde $y = x^j$. Então, é óbvio que essa substituição em (44) só pode levar à solução

(*) Mas o leitor que consulte essa, ou outras referências a respeito da inversão da matriz de Vandermonde, não deve ficar muito surpreso ao descobre que os procedimentos de inversão estão estreitamente relacionados com o computo de polinômios de Lagrange.

$a_i=0$, $i\neq j$, $a_j=1$. Agora, o sistema é sempre consistente, existem em geral as várias M_e diferentes obtidas pela seleção de pares de filas, mas todas essas M_e não podem senão levar a mesma (única) solução. Exemplifica-se isto usando os mesmos dados do exemplo 6 no :

Exemplo 7 - Considere o sistema (29), (30) mas com y=x. As três M_e da M dada são diferentes, e dadas por (37), (38) e (39). O leitor comprovará de imediato que os três produtos $M_{eij}[-1 \quad 0 \quad 1]^t$ fornecem o resultado único $[0 \quad 1]^t$.

8. CONCLUSÕES

Neste artigo foi feito um estudo das inversas matriciais esquerdas M_e a respeito de uma dada matriz M, que junto com as direitas M_d constituem a forma imediata e talvez mais natural, das muitas possibilidades de generalizar as inversas ordinárias.

Por sua vez, as M_e constituem casos particulares da família das inversas generalizadas IG, e isso faz com que algumas das características mais essenciais das IG possam ser apresentadas a partir do que acontece com as M_e. Isto foi mostrado principalmente na seção 6, e na figura 2 relaciona-se as M_e com IG muito comuns.

Todo problema importante envolvendo sistemas de equações tipo Mx= b, (e algumas extensões), encontram solução, ordinária ou generalizada, em termos de M_e se M possui pelo menos tantas filas como colunas, sendo seu posto pleno. Quando alguma destas duas condições não se cumprir, deve-se passar para as IG (i) ou combinações, que sempre vão fornecer uma solução. Aqui, como em tantos outros problemas, deve-se pagar um preço por uma ferramenta mais geral, que é a perda da simplicidade, já que as M_e são apenas um pouco mais complicadas de estudar e operar que as M^{-1}, o que não acontece em geral com outras IG.

Já no final do artigo, deseja-se de novo insistir no fato do caráter essencialmente didático que este possui. O único dos temas abordados que o autor não viu desenvolvido expressamente (o que talvez e provavelmente seja devido à falta de conhecimento completo da literatura pertinente), refere-se ao problema da unicidade das M_e. É por isso que esse tema foi desenvolvido, na seção 3, com um grau de detalhe algo superior ao resto dos outros temas considerados. Algumas consequências dessa falta de unicidade refletiram-se nas várias soluções obtidas quando a M_e aplica-se, em substituição da pseudo-inversa, a problemas específicos, como foi ilustrado no final da seção 7.

BIBLIOGRAFIA - PARTE III

|F| - Feinstein J.-Extensión del concepto de inversa de una matriz: inversas generalizadas y pseudoinversas - Rev. Electrotécnica, Vol LX Nº 6, 1974, pp. 212/225.

|H| - Hamming R.W.-Numerical Methods for Scientists and Engineers-McGraw-Hill, 1962.

|I-G| - Ben-Israel A. & Greville T.N. E.-Generalized Inverses- Theory and Applications-John Wiley & Sons, 1974.

|P| - Penrose R.-A Generalized inverse for matrices-Proc. Cambridge Philos. Soc., 51, 1955, pp 406-413.

|R| - Reza F.-Linear Spaces in Engineering - Ginn and Co., 1971.

|R-M| - Rao C.R. & Mitra S.K.- Generalized Inverse of Matrices and its Applications-John Wiley & Sons, 1971.

CURRICULUM VITAE

Ver parte I

ALGUNS TÓPICOS SOBRE NORMAS VETORIAIS
PARTE I

JAIME FEINSTEIN

RESUMO

Neste artigo são revisados alguns tópicos importantes sobre normas vetoriais: quais os entes matemáticos onde o conceito é aplicável, qual é a relação entre normas diferentes aplicáveis a um mesmo ente, qual a relação entre normas de entes diferentes (p. ex. vetores, matrizes, funções) e algumas das particularizações resultantes em um espaço vetorial geral quando normas (amplas ou concretas) são nele definidas. O artigo pretende também ser útil ao leitor que precise usar resultados envolvendo normas, tomadas de várias fontes bibliográficas, por salientar a existência na literatura sobre o tema, de duas classes diferentes de normas incompatíveis entre si.

ABSTRACT

In this article, some important topics about vector norms are reviewed, such as: which are the mathematical entities suited for the application of a norm; which is the relationship between the different norms that can be defined for a single (mathematical) object; which is the relation between norms of different such objects (i.e. vectors, matrices, functions); what kind of particular vector spaces result from the addition of norms (ample or specific) to a general vector space. This article intends also to be useful to the reader who needs the use of results involving norms, taken from various bibliographical sources, because it emphasizes the existence of two different classes of incompatible norms.

1. INTRODUÇÃO - PROPÓSITOS DO ARTIGO

Este artigo versa sobre normas de vetores. Por sua vez "vetor" no contexto a seguir, é todo elemento de um espaço vetorial. Um "espaço vetorial"(EV),como é modernamente considerado, é uma estrutura algébrica que apareceu ao generalizar o marco de referência dos " vetores ordinários" usados para descrever forças e outras grandezas relacionadas da estática e dinâmica. Para muitos problemas nesses ramos da física, além de determinar um vetor v por suas componentes v_i, é necessário se referir a seu comprimento, isto é à $+\sqrt{\Sigma v_i^2}$, onde (i)=(1,2) para problemas planos, (1,2,3) para problemas espaciais (tridimensionais).

O conceito que generaliza o comprimento em espaços gerais, é a norma. É portanto compreensível que as normas vetoriais intervêm em numerosas aplicações dos espaços vetoriais. Assim sendo existe uma vasta literatura técnica, onde o assunto é tratado em níveis variados de profundidade. Num nível muito el

mentar, dá-se apenas alguma definição concreta e faz-se uso exclusivo dessa definição nos problemas pertinentes; isto normalmente acontece em textos aplicados (vide p.ex. [S], appendix A, 1.18b) Textos requerendo um uso maior desse conceito dedicam a seu estudo uma seção (de um capítulo), vide [S-R-S] ch.1 section 2, ou ainda um capítulo ([D-V], ch. II). Finalmente, em certos livros especializados o tema é praticamente distribuído no texto inteiro (vide [D]) .

A existência de tanta e tão variada bibliografia sobre normas torna conveniente uma explicação acerca dos propósitos de um artigo adicional sobre o tema, a fim de evitar que um leitor, não necessitando perca seu tempo na sua leitura Isto será feito a seguir.

1º) O leitor que se limitar à aplicação de normas seguindo um único texto específico, não precisa deste artigo, já que ele vai receber, no livro escolhido, todos os conhecimentos que precisar, e no nível adequado Mas se necessitar consultar textos ou artigos vários que usam normas, ele deve conhecer que, não só a tendência moderna visa a definições mais bem amplas, sucetíveis de serem particularizadas segundo as necessidades do problema (isto será considerado nas seções 4 e 6) senão que existem duas definições amplas diferentes, conduzindo, para as mesmas particularizações (p.ex. norma euclideana), a números diferentes. Isto será esclarecido na seção 3.

2º) Independentemente de 1º), existem na literatura definições (amplas ou restritas) de normas de entes matemáticos diferentes, p.ex. de vetores, de matrizes, de funções, etc. A relação entre estas normas será considerada na seção 5.

3º) Ainda aceitando a mesma definição, particular ou ampla, de uma norma existe mais de uma maneira de chegar a ela. Isto será comentado na seção 4.

4º) Finalmente, e sendo este um artigo escrito especialmente para uma publicação associada a uma instituição de ensino superior, deseja-se aproveitar os esclarecimentos mencionados previamente para introduzir uma componente didática no trabalho, o que vai permitir apresentar alguns tipos de normas concretas de frequente aplicação. Disto trata a seção 6, e para que o artigo seja autocontido, a breve seção 2 a seguir define a classe de entes matemáticos aos que pode ser aplicado o conceito de norma.

2. ESPAÇOS VETORIAIS

Sinteticamente, uma "norma" é uma função de domínio vetorial e contra-domínio real, isto é : $||.||: V \to R$, onde $||.||$ indica "norma de ...", R é o conjunto dos reais, e $V = \{v\}$, um conjunto de entes matemáticos que serão denominados "vetores" Esses vetores devem cumprir axiomas especialmente dados, que por brevidade serão lembrados de forma de os referir a estruturas algébricas menos elaboradas que a estrutura de EV (*). Assim, dar um EV significa:

1º) Dar um conjunto $V=\{v\}$,
2º) Dar uma operação interna * entre os elementos de V, tal que a dupla $(V,*)$ seja grupo abeliano;
3º) Dar um campo F e uma operação externa $\odot$ definida no sentido $f \odot v$, onde $f \in F$, $v \in V$, e tal que $f \odot v \in V$;
4º) As operações interna e externa encontram-se relacionadas pelos axiomas
a) $\odot$ é fechada em V, b) $1 \odot v = v$,
c) $f \odot (v * u) = (f \odot v) * (f \odot u)$,
d) $(f_1 + f_2) \odot v = (f_1 \odot v) + (f_2 \odot v)$,
e) $(f_1 . f_2) \odot v = f_1 \odot (f_2 \odot v)$. Nestes axiomas $1, f, f_1, f_2 \in F$, $v, u \in V$, e os axiomas vigoram $\forall f, f_i$ e $\forall v, u$.

Por simplicidade notacional, usar-se-á no que vem a seguir a notação "aditivo-multiplicativa", consistente em indicar

---

(*) O leitor que prefira-os lembrar em forma detalhada poderá consultar quase qualquer livro que trate de EV, p.ex.: [H], 1 § 2.

+ à operação interna e a chamar "soma (de vetores)", e indicar . à operação interna e a denominar "produto (de um escalar do campo por um vetor)". Essas operações deverão ser cuidadosamente diferenciadas das soma e produto internos à estrutura do campo (como as que apareceram em 4º)d) e e)).

Os axiomas citados são os mínimos a cumprir para se ter um EV, mas outros podem ser acrescentados, obtendo-se EV mais particularizados. Neste artigo a particularização que naturalmente vai aparecer é o "EV normado", isto é, uma estrutura na qual aos axiomas gerais do EV são acrescentados os axiomas de norma. Estes axiomas serão introduzidos na seção 4. Outras particularizações de EV irão aparecer no percurso do artigo.

Finalmente, é bom advertir que ainda que qualquer cámpo é idoneo para definir um EV sobre ele, na maioria das aplicações os EV definem-se sobre os campos real R ou complexo C. As denominações naturais para estes espaços são as de "EV real" e "EV complexo" respectivamente, ainda que existem autores que os denominam " EV linear" (vide p. ex. [H 1], 6.1).

3. AS DUAS CLASSES DE DEFINIÇÕES DE NORMA

No começo de 2 consignou-se que a norma de v, $||v||$, é uma função $V \to R$, mas falta indicar que tipo de função é. No princípio de 1 indicou-se que a norma generaliza o comprimento de um vetor ordinário, quando v é agora qualquer ente pertencente a um EV. Mas essa generalização pode ser efetuada de muitas maneiras, e modernamente adota-se o critério de dar uma definição "ampla", isto é, estabelecendo axiomas aos que toda norma deve-se ajustar, mas sem a fixar rigidamente. Dessa maneira, tem-se a liberdade de usar normas apropriadas para o problema particular, podendo ser mudada a norma para outra diferente em outro problema, com a condição de que qualquer que seja a forma de definí-la, todos os axiomas gerais devem ser respeitados. Isto será totalmente esclarecido nas seções 4 e 6, bastando por enquanto indicar que esses axiomas podem ser dados diretamente para o nosso objeto lógico de definição (a norma), ou definir primeiro um outro ente matemático, e derivar a norma a partir dele. Denominaremos " direta" e "indireta" a estes dois tipos de definição, mas com qualquer desses tipos deve-se arribar à mesma norma (ampla). Mas esses tipos não constituem as duas classes de definição a que se refere o título desta seção, senão que são mencionados porque arbitrariamente, o tipo "indireto" vai ser escolhido para exemplificar sobre essas duas classes que conduzem a normas <u>diferentes</u> em um sentido essencial.

A definição indireta mais comum faz uso do produto interno (também chamado escalar) de dois vetores. Um "produto interno" é uma função $p(v,u): V \times V \to C$ (as vezes R, isto é secundário aos fins desta seção) que obedece a axiomas que se supõem estabelecidos (o leitor interessado pode consultar p.exemplo [H],3). Então, a norma é uma particular função do produto interno do vetor por ele mesmo, $p(v,v)$. As duas classes de norma provem da escolha de diferentes funções de $p(v,v)$. Na primeira classe essa função é a identidade, e assim a norma resulta coincidente com o produto interno:

$$\text{Def. 1: } "_1 \; ||v|| = p(v,v)" \qquad (1)$$

Na segunda classe de definição, essa função é a raiz quadrada (+) de $p(v,v)$:

$$\text{Def. 2: } "_2 \; ||v|| = + \sqrt{p(v,v)} \; " \qquad (2)$$

Não se encontram na literatura outras funções além dessas.

Agora, como o comprimento de um vetor independe obviamente da definição escolhida, se esta é a Def. 1, o comprimento é dado por:

$$\text{comp } v = + \sqrt{_1 ||v||} = + \sqrt{p(v,v)} \qquad (3)$$

e se a definição for a 2, o comprimento simplesmente coincide com a norma:

$$\text{comp } v = {}_2||v|| \qquad (4)$$

constituindo a norma nesse caso a direta generalização do comprimento quando os vetores são gerais (não ordinários). Se por exemplo o produto interno for o euclideano $\sum_i u_i v_i$, a norma por ele induzida (norma euclideana), será a (5)se a definição é 1, e (6) se é 2:

$${}_1||v|| = \sum_i v_i^2 \qquad (5)$$

$${}_2||v|| = \sqrt{\sum_i v_i^2} \qquad (6)$$

Exemplo- Seja dado no espaço euclideo tridimensional, o vetor de componentes $v_1=v_2=v_3=2$. Então, ${}_1||v||=12$, ${}_2||v||=3,4641$, e ambas as normas são euclideanas. Mas qualquer que seja a definição adotada, comp v = 3,4641.

A definição adotada pela maioria dos autores é a 2; porém, há matemáticos conhecidos que preferem uma definição da classe 1; citam-se F.R.Gantmacher e O. Villamayor como representativos desta tendência (vide [G],IX,§2, e [V],5.2). O leitor que precise comparar normas concretas tomadas de mais de uma fonte bibliográfica fará bem em se assegurar que as normas pertencem à mesma classe de definição.

4. DEFINIÇÕES DE TIPO DIRETO E INDIRETO

Antes de entrar no tema próprio desta seção, é bom advertir que ambos tipos de definições, direto e indireto, podem ser dados para qualquer uma das duas classes (como a Def.1 e Def.2 da seção 3) de normas. Para comodidade do leitor, no resto do artigo vai-se adotar normas da classe da Def.2, porque são as mais comuns. Por tanto, o presubíndice (1 ou 2) usado para distinguir ambas classes, será abandonado já que não haverá possibilidade de confusão.

Entrando em tema, e nos enquadrando dentro da lógica aristotélica vamos definir um ente hierarquicamente dando seu "gênero próximo" e sua "diferença específica" (com outros entes possuindo o mesmo gênero próximo). Então, a seguinte Def.3 é direta porque define a norma como uma função, cuja (possível) diferença com outras funções particulares é especificada nos axiomas N1, N2 e N3 dados na mesma definição.

Def. 3(*): "Uma norma (de um vetor) é uma função $||.||: V \to R$ que cumpre os axiomas:

N1: $||v||>0$ e $||v||=0$ se e só se $v=0$ (**)

N2: $||v+w|| \leq ||v||+||w||$ (desigualdade triangular)

N3: $||f.v||=|f|.||v||$" (homogeneidade)

Nos axiomas precedentes, $v,u,w \in V$, $f \in F$ campo do EV.

É oportuno agora comparar esta Def.3 com as 1 e 2. A (1) não é uma norma segundo a Def.3, já que o axioma de homogeneidade N3 não é cumprido. Por sua vez, todas as normas concretas obtíveis da Def. 2 podem-se obter também da Def. 3. Mas uma diferença é que a Def. 2 não é direta, porque o produto interno também é uma função, e assim sendo, possuem o mesmo genero próximo, como é idealizado na Fig. 1.

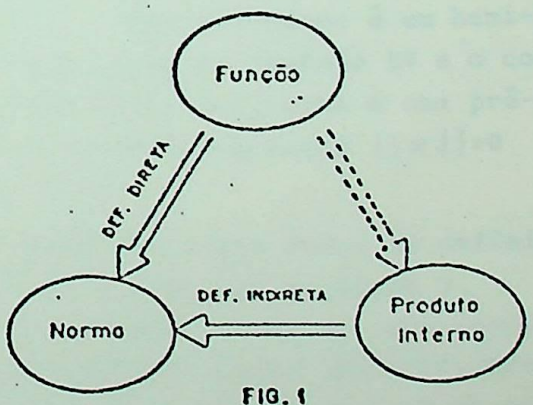


FIG. 1

(*) Esta é a definição de mais frequente aparecimento na literatura sobre normas.

(**) Neste artigo não vai-se diferenciar tipograficamente o escalar zero do vetor nulo, ainda que trata-se de entes matemáticos diferentes.

As vezes, a definição direta é apresentada de modo de precisar melhor o caráter da função envolvida. Como a função da Def.3 tem contra-domínio real, se o EV é definido sobre o campo real a função é uma funcional (*). Mencionando essa circustância na definição pode-se prescindir do esclarecimento do contra-domínio (vide p.ex [K-F],III,§ 3,1º)

Um caso extremo de definição direta, onde o caráter da funcional é fixado muito precisamente, pode encontrar - se na seguinte Def.4, que se adata de [D], § 3. Nesse texto faz-se uso intensivo não só de normas, senão também de entes mais gerais. Então, para máxima economia de esforços seu autor achou conveniente dar uma definição tipo "cadeia" (de conceitos).

Def.4 - "Uma funcional p definida sobre um EV é sub-aditiva se $p(u+v) \leq p(u) + p(v)$, $\forall\ u,v \in V$; p é homogenea-positiva se $p(r.v) = r.p(v)$, $\forall\ r>0$, $r \in R$; é sub-linear se é sub-aditiva e homogenea-positiva. Uma funcional sub-linear é uma pré-norma se $p(f.v) \geq |f|\ p(v)$, $\forall\ f \in F$. Finalmente, uma pré-norma é uma norma se $p(v)=0$ se e só se $v=0$"

A Fig.2 visualiza hierarquicamente a Def.4.

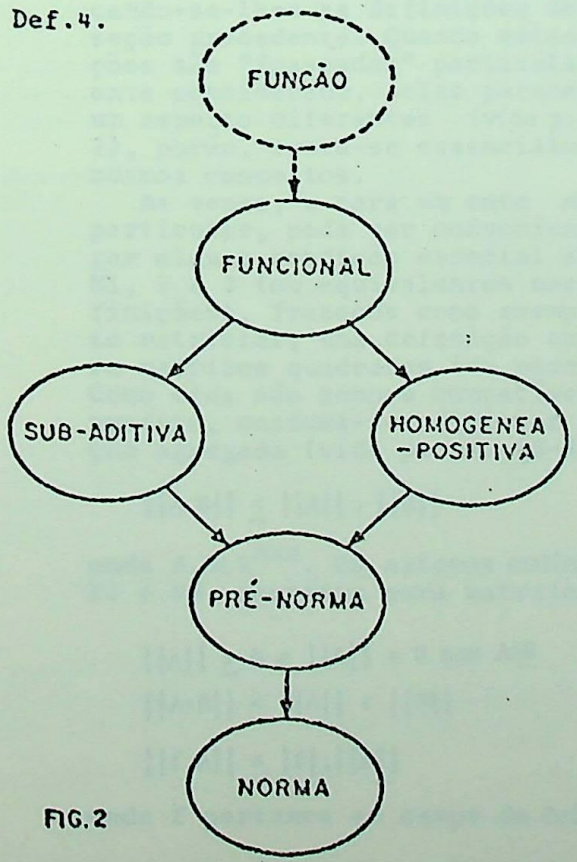


FIG.2

NOTA- A pré-norma é também conhecida como "semi-norma" ([D-V],II,7) e "pseudo-norma" ([K]). Aqui prefere-se pré-norma porque no contexto hierarquico esquematizado na figura 2 encontra-se localizado antes que a norma.

Outra definição possível refere o conceito de norma ao de "hemi-homomorfismo". Lembra-se primeiro que um "homomorfismo" (algébrico) é uma função definida entre estruturas algébricas que preserva as operações internas da estrutura associada com o conjunto domínio da função. P.ex. em grupos aditivos, se h(.) é homomórfica, verifica-se:

$$h(x+y) = h(x) + h(y) \qquad (7)$$

Em grupos multiplicativos:

$$h(x.y) = h(x).h(y) \qquad (8)$$

e em anéis, ambos (7) e (8) devem cumprir-se simultaneamente.

Se a estrutura precisa de uma estrutura auxiliar (isto ocorre em EV, módulos e álgebras) então, além da preservação da operação (para EV e módulos) ou operações (para álgebras) internas, exige-se que a operação externa verifique:

$$h(f.v)=|f|.h(v) \qquad (9)$$

Agora, um "hemi-homomorfismo" muda o = das condições de preservação interna para $\leq$ (**)

Baseado nos conceitos anteriores apresenta-se a seguinte (***).

Def.5 - "Uma pre-norma é um hemi-homomorfismo entre um domínio EV e o contradomínio real. Uma norma é uma pré-norma com a condição agregada $||v||=0$ se e só se $v=0$".

A utilidade desta forma de definir a norma será evidenciada na seção 5.

(*) - Uma funcional, como é usualmente definida é uma função V→F, onde V é o conjunto de vetores de um EV e F é seu campo. Existem outras acepções do vocábulo (p.ex. a de ser uma função de contra-domínio real).

(**) - Isto obviamente implica na existência de uma relação de ordem parcial na estrutura do contra-domínio, o que será o caso da seguinte Def.5.

(***). - Esta definição é própria do autor.

ALGUNS TÓPICOS SOBRE NORMAS VETORIAIS

PARTE II

JAIME FEINSTEIN

5. NORMAS DE VETORES, MATRIZES, FUNÇÕES, ETC

Nesta seção, os entes matemáticos indicados no seu título são tomados com significado restringido. Em particular, por "vetor" entender-se-á "vetor n-dimensional" (*), as matrizes serão de elementos pertencentes a um campo numérico (usualmente R ou C), as funções serão R→R, C→C ou combinações, etc. Em muita da literatura aplicada dão-se definições especiais para as normas desses vetores, matrizes, funções, etc. Porém, a estrutura álgebrica de EV (abstrato)(**) permite reconhecer como componentes dessa estrutura, isto é, como vetores (gerais), a todo ente matemático que cumpra com os axiomas da estrutura, segundo dados na seção 2. Além dos vetores ordinários, as matrizes, ainda as retangulares (da mesma ordem) com a operação interna "soma matricial" e externa "produto de um escalar do campo de pertencia dos elementos da matriz por esta", cumprem com os requisitos de um EV, aplicando-se-lhes as definições de norma da seção precedente. Quando estas definições são "fraseadas" particularizadas ao ente considerado, elas parecem assumir um aspecto diferentes (vide p. ex. [F-M], 2), porém, trata-se essencialmente dos mesmos conceitos.

As vezes, e para um ente matemático particular, pode ser conveniente agregar alguma condição especial além das N1, 2 e 3 (ou equivalentes nas outras definições). Trazemos como exemplo, no caso matricial, uma definição especial para matrizes quadradas (da mesma ordem). Como elas são sempre compatíveis para o produto, costuma-se adicionar a condição agregada (vide p. ex. [S-R-S],1-2):

$$||A.B|| \leq ||A|| \,.\, ||B|| \qquad (10)$$

onde $A, B \in R^{nxn}$. Os axiomas ordinários N1, N2 e N3, escritos para matrizes, lêm-se:

$$||A|| \geq 0 \text{ e } ||A|| = 0 \text{ sse } A=0 \qquad (11)$$

$$||A+B|| \leq ||A|| + ||B|| \qquad (12)$$

$$||f.A|| = |f|.||A|| \qquad (13)$$

onde f pertence ao campo de definição dos elementos da matriz. Note que (11) até (13) aplicam-se também a matrizes retangulares.

Uma definição tipo Def. 5 (seção 4) esclarece esta aparente deshomogeneidade entre a norma de uma matriz quadrada e a de um vetor abstrato. Com efeito, aceitar a multiplicação de matrizes, além da soma, significa particularizar o EV para uma (estrutura de) álgebra(***). Agora, aceitando que o hemi-homomorfismo a que se refere a Def. 5 pode ser estendido para álgebras, (10) aparece naturalmente, já que a condição de hemi-preservação (≤) deve vigorar para ambas as operações internas da estrutura, isto é, soma (12) e produto (10).

Porém, essa extensão "foge" do alcance da Def. 5 e assim, (10) não vigora automáticamente (****). Por isso, normas matriciais cumprindo (10) recebem uma denominação especial: chamam-se "multiplicativas". Ainda que a maioria das normas matriciais usuais são multiplicativas, uma não multiplicativa será apresentada na subseção 6.2.1.

A condição (10) leva, por analogia, à questão do relacionamento de normas de n-vetores (vetores n-dimensionais) e matrizes, quando estes entes são multiplicados. Supondo que o vetor é (expresso como) coluna, o problema concreto é relacionar $||Mv||$ com $||M||$ e $||v||$ em separado. A (10) sugere que:

$$||Mv|| \leq ||M|| \,.\, ||v|| \qquad (14)$$

Assim como (10) não vigora para algumas normas matriciais, também (14) não

---

(*) Isto implica em que o espaço vetorial em que está imerso há de ser finito (veja subseção 6.2). P.ex. os vetores ordinários da estática são bi ou tri-dimensionais.

(**) Continuar-se-á abreviando EV ao espaço vetorial.

(***) Isto é assim porque foi introduzido uma segunda operação interna a respeito da qual as matrizes quadradas constituem semigrupo, e tal que o produto é distributivo a respeito da soma matricial e associativo a respeito do produto por escalares do campo ao que pertencem os elementos das matrizes.

(****) Ainda que há autores que *axiomàticamente* impõem (10) para normas matriciais, vide p. ex. [R-S], 3.10.

é de aplicação automática para normas matriciais e vetoriais arbitrárias. Para isso, essas normas devem ser "consistentes", ou "compatíveis" segundo (14) Uma forma de assegurar essa consistência é definir primeiro uma norma vetorial específica, e logo após derivar dela uma norma matricial, que então já não vai resultar arbitrária. Essa norma matricial denomina-se "induzida pela" (ou "subordinada à") norma vetorial. Duas expressões equivalentes adequadas a estes fins são (*):

$$||M|| = \max_{||v||=1} ||Mv|| \qquad (15)$$

$$||M|| = \max_{||v||\neq 0} \frac{||Mv||}{||v||} \qquad (16)$$

Com a hipótese da consistência, o uso de (14) pode ir além de obter valores numéricos para $||Mv||$. Como exemplo disso, vai-se, usando (14), provar o importante:

Teorema: "Qualquer norma matricial $||M||$ é um limite superior para o módulo dos autovalores de M".

Demonstração: Seja λ um autovalor arbitrário de M e x seu correspondente autovetor. Então:

$$\lambda x = Mx \rightarrow ||\lambda x|| = ||Mx|| \qquad (17)$$

e o uso conjunto de (13) e (14) leva à:

$$|\lambda| . ||x|| \leq ||M|| . ||x|| \qquad (18)$$

Mas um autovetor não pode ser nulo por definição ([H], §54) ... $||x|| \varepsilon R^+$, conjunto dos reais positivos, e pode ser simplificado em (18), ficando $|\lambda| \leq ||M||$, c.s.d.d.

A importância deste teorema em relação ao assunto principal desta seção vem do fato de que é possível selecionar dentre as várias normas passíveis de serem definidas para uma dada M aquela de valor *igual* ao autovalor de maior valor absoluto, $\max_i |\lambda_i(M)|$. Este valor, denominado "raio espectral" da matriz M, r(M), é então uma norma distinguida no sentido de que não existe $||M|| < r(M)$. Em outras palavras, escolhendo diferentes $||v||$ que induzem $||M||$ via (16):

$$\inf_v [(16)] = r(M) \qquad (19)$$

As vezes, normas de uma matriz M vem expressas em função de autovalores não de M, mas de matrizes relacionadas; um exemplo usual é a denominada "norma de Hilbert":

$$||M|| = \max_i (\lambda_i [M' . M])^{1/2} \qquad (20)$$

onde M' = transposta de M, e λ_i é o igéssimo autovalor de M'M. Igualmente, em (20) pode-se usar MM' ([N],1095):

$$||M|| = \max_i (\lambda_i [MM'])^{1/2} \qquad (20)'$$

Expressões tipo (20) são particularmente úteis no caso de matrizes reais, já que ainda que M possua autovalores complexos, M'M ou MM' possuirão só autovalores reais (**).

O anterior é tudo o que pode ser indicado sobre normas matriciais com os conhecimentos até agora apresentados. Na subseção 6.2.1 o tema será ampliado.

As considerações feitas nesta seção para vetores e matrizes ordinários são aplicáveis a qualquer outro ente passível de constituir EV. Do título desta seção resta ainda se referir às normas de funções ordinárias, C→C, ou suas restrições, particularmente R→R. A definição específica consistente em particularizar N1 e N3 para o tipo de funções em consideração não oferece dificuldade nenhuma. Claro que em textos especializados, já são dadas definições específicas (vide p. ex. [L],1.2). O tema não é aqui prosseguido, já que exemplos de normas de funções serão apresentados na subseção 6.4. Normas de funções especiais podem ser definidas diretamente, ou referidas a normas de entes previamente definidos. P. ex. normas de funcionais, vide p. ex. [L1],5.2, ou de operadores lineares, isto é, homomorfismos T:V → W (***) vide [D-V], II.5. Neste último caso, o ente matemático que vai-se normar pode ser considerado como um caso especial de função, ou referir sua norma às normas matriciais, já que uma matriz pode ser considerada como a representação de um operador linear quando bases são adotadas nos espaços domínio V e contra-domínio W do T. Ainda, pode-se definir um EV cujo conjunto de vetores $\{v\} = \{T\}$, (a operação interna é a soma de transformações, e a externa é o produto de um escalar do campo por T), e então aplicar a definição direta. Vigora aqui a mesma observação feita acima para funções: textos especializados apresentam definições (de operadores) adequadas aos propósitos do texto (vide [D1]).

É também possível atribuir normas a entes matemáticos que pertencem a estruturas que não são usualmente tratadas como EV, mas por requerir expressões que ainda não foram dadas, este assunto será adiado até a seção 8.

6. ALGUMAS NORMAS CONCRETAS E SUAS EXTENSÕES

6.1 - *Introdução - Normas de Hölder*

Inúmeras normas concretas podem ser dadas de modo que obedeçam as condições gerais das seções 3 e 4. É objetivo desta seção 6 apresentar as normas concretas de mais frequente aparecimento. Incidentalmente,

---

(*) Estendería demais este artigo verificar que as (15) e (16) são efetivamente normas, e dar exemplos de normas vetorias concretas e suas matriciais induzidas. O leitor interessado poderá recorrer à [R],5.9 ou [T],3.

(**) Isto é assim porque o produto de uma matriz por sua transposta resulta em uma matriz simétrica, e os autovalores de uma matriz simétrica real são sempre reais. Mas cuidado: para matrizes complexas a simetria não implica em um espectro real (vide p.ex. [W],1,22 a 24).

(***) Também conhecidos por transformações, ou mapeamentos, lineares.

consignar-se-ão algumas funções que, não sendo normas em sentido estrito, estendem seu uso em forma mais adequada às condições de alguns problemas que uma norma estrita.

A escolha de uma norma particular é fortemente dependente do marco álgebrico no qual o problema concreto pode ser inserido. Em tratando-se de normas de vetores, o marco geral é o EV normado (abr. EVN daqui em diante), mas cada problema concreto permite usualmente determinar alguma particularização maior no EV. Já foi mencionada na seção anterior a estrutura de álgebra para problemas envolvendo duas operações internas. Outro tipo diferente de particularização aparece segundo a cardinalidade da dimensão do EV. Isto será especialmente considerado nas subseções 2,3 e 4 desta. Ainda outra classe de particularização será mencionada na seção 7.

Para ordenar a apresentação de normas concretas vão-se adotar as denominadas "normas de Hölder". Estas constituem uma família dependente de um parámetro p, cuja fixação termina de determinar totalmente a norma.

É bom advertir que muitos autores as empregam sem lhes assinar denominação especial. Mas na vinculação de pares destas normas de parámetros (possivelmente diferentes) p,q, relacionados por $p^{-1} + q^{-1} = 1$ intervêm a desigualdade de Hölder" (*) ([B-B],4):

$$\left|\sum_{j=1}^{n} v_j u_j\right| \leq \sum_j |v_j u_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |v_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |u_j|^q\right)^{1/q} \quad (21)$$

onde os parenteses do último membro vão ser definidos como normas na subseção seguinte.

6.2 - *Espaços finitos - EVN ℓ_n^p*

Num EV finito (isto é, de dimensão finita, vamos dizer n) os vetores podem ser representados por n componentes (para a maioria das aplicações, $v \in R^n$ ou $v \in C^n$). Nesses espaços, as normas de Hölder definem-se:

$$||v||_p \overset{\Delta}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p} \quad (22)$$

onde p pertence ao conjunto dos naturais estendidos, isto é, $p \in [1,2,\ldots,\infty]$. Em (22) p é o parámetro cujo valor escolhe-se segundo a aplicação, e cuja fixação termina de concretar totalmente a norma.

EVN com normas (22) são indicados ℓ_n^p.

Os valores mais comuns para p são 1,2, ∞. Se p=1:

$$||v||_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \quad (**) \quad (23)$$

Note o leitor que se $v \in C^n$ (e cada componente $v_i \in C$), $|v_i| \in R$ e como a soma de reais é real, $||v||_1 \in R$, como deve ser. No caso p>1, $|v_i|^p \in R$, é também a raíz p-ésima, já que $|v_i|^p \geq 0$. Convenciona-se em adotar o valor (real) positivo da raíz de (22) se p é par (se for ímpar, só uma das p raízes é real, e não há abigueda-de). Com isso $||v||_p \in R$, $\forall p$. Se p = 2:

$$||v||_2 = + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \quad , v \in R^n \quad (24)$$

e esta norma é habitualmente denominada "euclideana" (também "esférica", vide [R-S],3,2.3). Ainda que (24) também vigora para $v \in C^n$, o agregado $v \in R^n$ é porque para vetores com componentes complexas é preferível salientar essa circunstância na expressão da própria norma, considerando que nesse caso $|v_i|^2 = v_i . \bar{v}_i$, onde o traço superior indica conjugação. Então:

$$||v||_2 = + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i . \bar{v}_i} \quad , v \in C^n \quad (24)'$$

Vê se que (24) coincide com (6). É por tanto a norma (euclideana) derivada do produto interno euclideano da definição indireta 2.

Em relação com estas normas, é oportuno formular as três observações seguintes:

1ª) Nesta seção 6 esta-se implicitamente supondo um EV real ou complexo, (R-EV ou C-EV). Mas em EV definidos sobre outros campos, a existência da respectiva norma concreta tem que ser verificada em cada caso. P. ex. no Q-EV (EV definido sobre o campo dos racionais), suponha n=2, $v_1 = v_2 = 1$. Então (24) leva a $||v||_2 = \sqrt{2} \notin Q$. Esta norma não está definida mas que para valores especiais das componentes. Em troca, nenhuma dificuldade deste tipo aparece com a $||v||_1$ (23).

2ª) Se $p \neq 2$, as normas de Hölder não mais podem-se considerar derivadas de (ou induzidas por) um produto interno. Este fato é importante no relacionamento dos espaços de Banach e Hilbert (isso será comentado na seção 7), e além disso, agora pode ser indicado que as normas de classe 1 (seção 3) só foram definidas para espaços normados no caso p = 2 (desta e as seguintes subseções).

3ª) Não existe razão essencial nenhuma para restringir p ao conjunto dos naturais, e, de fato, p pode assumir valores reais ≥ 1. Porém, se for $0<p<1$, (22) deixa de cumprir o axioma N2, e portanto deixa de ser norma. Sendo cientes desse fato, alguns autores continuam a considerar incluida dentro das normas de Hölder expressões tipo (22) com $0<p<1$ (vide p. ex. [R1], 1-4). Esta observação é extensível às ℓ^p e L^p a ser consideradas em 6.3 e 6.4.

A última das normas de Hölder comuns é para $p \to \infty$. A rigor, $\infty \notin N$ (naturais) mas o limite de (22) pode heuristicamente obter-se observando que no radicando, o somando "$\max_i |v_i|$" vai predominar sobre todos os outros ao $p \to \infty$. Então (***):

$$\lim_{p \to \infty} ||v||_p = \left(\left[\max_i |v_i|^p\right]\right)^{1/p} = \max_i |v_i| = ||v||_\infty \quad (25)$$

onde o último membro indica a notação usual para esta norma (****).

(*) (21) é a "versão discreta" da desigualdade, válida para n-vetores de componentes v_j, u_j. Uma versão "contínua" será consignada em (35).

(**) Esta norma é as vezes denominada "octaédrica", [R-S]3,2.3 ou "de Manhattan" [T],2.

(***) O leitor que não goste desta justificação heurística pode simplesmente aceitar o penúltimo membro de (25) como a definição de $||v||_\infty$.

(****) $||v||_\infty$ aparece na literatura sob numerosas denominações. No ℓ_n^p à mais comum é norma "do máximo", sendo usuais também (normas) ///

xemplo - Seja $v = [2\ -3\ -1]'$. Obter $||v||_p$ ara $p = 1, 2, 10, \infty$.
Resposta: $||v||_1 = 6$; $||v||_2 = 3{,}742$, $||v||_{10} = 3{,}005$; $||v||_\infty = 3$.

6.2.1 - *Considerações especiais para normas matriciais*

Um dos objetivos deste artigo é de ser útil ao leitor que use informação de normas tomadas de várias fontes diferentes. Então é bom advertir sobre a existência de duas convenções implícitas no uso de normas $||.||_p$ quando o ente a ser normado é uma matriz.

A primeira é direta: nela considera-se à matriz M (suponha que sua ordem é nxm) como "vetor" de um EV de dimensão nxm, o que é sempre possível (veja [A], 14). Então, e denominando m_{ij} o elemento genérico de M locado na interseção da fila i e coluna j, (23) passa para $\sum_{i,j}|m_{ij}|$, (24) para $\sqrt{\sum_{i,j}(m_{ij})^2}$ e (25) para $\max_{i,j}|m_{ij}|$.

A outra convenção é indireta: nela M não é mais considerada como vetor de um nxm-EV, senão que $||M||_p$ é definida como sendo a norma matricial subordinada à norma vetorial $||v||_p$.

Para matrizes concretas essas convenções conduzem a resultados diferentes para o mesmo p, ainda que em casos especiais as normas podem coincidir. Um caso trivial de coincidência, que citamos porque vai ilustrar a respeito dum outro fato interessante, é o da matriz Identidade (de ordem n), I_n.

Acrescentando o subíndice p do subíndice adicional "d" (por convenção "direta") ou "i" (por "indireta" ou "induzida"), tem-se: $||I||_{pd} = n^{1/p}$, em particular $||I||_{1d} = ||I||_{2d} = n^{1/2}$, $||I||_{\infty d} = 1$. No que diz respeito às $||I||_{pi}$, a aplicação de (16) leva à:

$$\forall p: ||I||_{pi} = \max \frac{||Iv||_p}{||v||_p} = \max \frac{||v||_p}{||v||_p} = 1 \quad (26)$$

Resulta em particular $||I||_{\infty i} = ||I||_{\infty d}$, que era o que desejava-se ilustrar, mas o fato de ser $||I||_{2d} = \sqrt{n}$, claramente indica que $||M||_{2d}$ não é subordinada a nenhuma $||.||_p$ (se o for, para a particularização M=I dever-se-ía obter alguma norma pi que levasse ao resultado $\sqrt{n}$).

Existem na literatura sobre normas matriciais expressões explícitas vinculando especiais normas de Hölder de índice p com os elementos m_{ij} de M. A título informativo citam-se(*):

$$||M||_{1i} = \max_j \sum_i |m_{ij}| \quad (27)$$

$$||M||_{\infty i} = \max_i \sum_j |m_{ij}| \quad (28)$$

e a $||M||_{2i}$ é dada pela (20).

Outra observação interessante é que, ainda que a maioria das normas matriciais em uso são multiplicativas, há exceções. Considere o :

Exemplo - Seja a norma $||M||_{\infty d} = \max_{i,j}|m_{ij}|$. Considere as $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$. Então: $||M_1|| = 1$, $||M_2|| = 3$, $||M_1+M_2|| = 3$, $||M_1.M_2|| = 4$. Ve-se que ainda que (12) é cumprida ($3<1+3$), (10) não é ($4 \not\leq 3$). $||M||_{\infty d}$ não é multiplicativa.

O que neste artigo foi até aqui indicado a respeito de normas matriciais basta para mostrar que a quantidade de essas normas que podem ser definidas é muito grande; é bom então finalizar esta subseção previnindo o leitor que as vezes, "normas" são definidas sem a devida verificação dos axiomas primarios N1, N2 e N3 (ou os equivalentes para as normas denominadas "de classe 1" na seção 3 (**)), podendo-se derivar resultados errados da aplicação dessas falsas normas. Para maiores esclarecimentos a respeito disso veja [K].

6.3 - *Espaços enumeráveis - EVN ℓ^p*

Um EV contável (isto é, aquele cuja dimensão pode ser contada, pode possuir: dim EV = n (espaço finito), ou dim EV=∞ (espaço infinito). Mas neste último caso o infinito tem que ser enumerável, isto é, deve ser possível o pôr em correspondência 1:1 com o conjunto N dos naturais. Os EVN finitos foram considerados na 6.2. Os enumeráveis serão aqui estudados fazendo $\lim_{n\to\infty} n$, dos prévios ℓ^p_n, quando esse limite existe.

A expressão (22) é agora estendida para:

$$||v||^\infty_p \triangleq \lim_{n\to\infty} ||v||_p = (\Sigma^\infty_1 |v_i|^p)^{1/p} \quad (29)$$

Em particular, a extensão das expressões (23) a (25) conduz às:

$$||v||^\infty_1 = \Sigma^\infty_1 |v_i| \quad (30)$$

$$||v||^\infty_2 = \sqrt{\Sigma^\infty_1 v_i^2} \quad (v_i \in R) \quad (31)$$

$$||v||^\infty_2 = \sqrt{\Sigma^\infty_1 v_i \bar{v}_i} \quad (v_i \in C) \quad (31)'$$

e a expressão para $||v||^\infty_\infty$ não muda:

$$||v||^\infty_\infty = \max_i |v_i| \quad (32)$$

A questão da existência do limite (29) tem que ser cuidadosamente considerada, já que além das causas de inexistência de raízes para certos corpos salientada na observação 1ª de 6.2, agora

---

///"uniforme", "de Tchebycheff", ou ainda "cúbica" ([R-S]3.2.3). Veja também a nota 2 da subseção 6.4.

(*) O leitor interessado pode consultar p. ex. [W], 1, 53.

(**) Estes axiomas não foram enunciados explícitamente porque neste artigo, em comum com a tendência majoritária, adotaram-se as normas de classe 2, mas o leitor interessado os achará em p. ex. [V], 5.2.

o somatório, como é infinito, pode divergir.
Exemplo - Seja $v = [1\ 1/2\ 1/3 \ldots 1/j \ldots]'$. Então, ainda que $||v||_\infty = 1$, e

$$||v||_2 \sqrt{1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots} = (\pi^2/6)^{1/2} = 1.28$$

e $||v||_1 = 1 + 1/2 + 1/3 \ldots + \infty$

EVN dotados destas normas são conhecidos como "espaços ℓ^p" (também ℓ_p). Em sentido restrito, os ℓ^p constituem a particularização dos ℓ^p_n para $n=\infty$, mas em sentido amplo, os ℓ^p podem ser considerados como os ℓ^p_n para $n \in N^\infty$, conjunto dos naturais estendidos. Segundo a índole do problema incluem-se ou excluem-se os cardinais n finitos. Outra observação a fazer a respeito destes espaços, é que foram aqui apresentados como sendo normados. Mas é bom advertir que na literatura matemática também se os inclui dentro dos espaços métricos (veja p. ex. [K-F], II, §1 1º). Trata-se dos mesmos espaços, pois dada uma norma, ela induz uma métrica:

$$d(v,u) = ||v-u|| \qquad (33)$$

e se a norma for a de Hölder ter-se-á um EVℓ^p métrico.

REFERÊNCIAS (os números entre parenteses indicam as seções ou subseções onde [.] é referenciada).

[A] - F.Ayres - Álgebra Moderna - McGraw-Hill do Brasil (Schaum), 1963 (6.2.1).

[B-B] - E. Beckenbach & R. Bellman - An Introduction to Inequalities - Random House/The L.W. Singer Co., 1961 (6.1).

[D] - M.M. Day - Normed Linear Spaces - Springer-Verlag, 3rd. ed., 1973 (1 , 4).

[D1] - R.G. Douglas - Banach Algebra Techniques in Operator Theory - Academic Press, 1972 (5).

[D-V] - C.A. Deroer & M. Vidyasagar - Feedback Systems: Input-Output Properties - Academic Press, 1975 (1 , 4 , 5).

[F-M] - G.Forsythe & C.B. Moler - Computer Solution of Linear Algebraic Systems - Prentice-Hall, 1967 (5).

[G] - F.R. Gantmacher - The Theory of Matrices - Chelsea Pub. Co, 1959 (3).

[H] - P.R. Halmos - Espaços vetoriais de Dimensão Finita - Campus, 1978 (2 , 3 , 5).

[H1] - K. Hoffman - Analysis in Euclidean Space - Prentice-Hall, 1975 (2).

[K] - T.H. Kerr - An Invalid Norm Appearing in Control and Estimation - IEEE Trans. on Automatic Control, -Vol AC-23 Nº 1, 1978, pp73-74 (4 , 6.2.1)

[K-F] - A.N. Kolmogórov & S.V.Fomin - Elementos de la Teoria de Funciones y del Análisis Funcional - MIR, 1972 (4 , 6.3).

[L] - J.R. Lee - Advanced Calculus with Linear Analysis - Academic Press, 1972 (5).

[L1] - D.G. Luenberger - Optimization by Vector Space Methods - John Wiley, 1969 (5).

[N] - J.I. Nieto - Introducción a los Espacios de Hilbert - OEA, Dep.de Asuntos Científicos, 1978 (5).

[R] - F. Reza - Linear Spaces in Engineering - Ginn & Co, 1971 (5).

[R1] - J.R. Rice - The Approximation of Functions, Vol 1 - Addison-Wesley , 1964 (6.2).

[R-S] - H.H. Rosenbrock & C. Storey - Mathematics of Dynamical Systems - John Wiley, 1970 (5 , 6.2).

[S] - A.P. Sage - Optimum Systems Control - Prentice-Hall, 1978 (1).

[S-R-S] - H.R. Schwarz, H. Rutishauer & E. Stiefel - Numerical Analysis of Symmetric Matrices - Prentice - Hall, 1973. (1 , 5).

[T] - J. Todd - Basic Numerical Mathematics, Vol 2: Numerical Algebra - Academic Press, 1977 (5 , 6.2).

[V] - O.E. Villamayor - Algebra Lineal - OEA, Dep. de Asuntos Científicos, 3ª ed., 1976 (3 , 6.2.1).

[W] - J.H. Wilkinson - The Algebraic Eigenvalue Problem - Claredon Press, (5 , 6.2.1).

ERRATAS

Na 1ª parte deste artigo (seção 3) , na Def. 3, o ">" do axioma N1 deve ser "$\geq$", e o "<" do axioma N2 deve ser "$\leq$".

Na seção 4, a eq. (9) e o parágrafo acompanhante devem-se substituir por:

$$h(f.v) = f.h(v) \qquad (9)$$

Agora, um "hemi-homomorfismo" muda o = das condições de preservação interna (7), (8) para $\leq$ (**), e a eq. (9) para:

$$h(f) = |f|.h(v) \qquad (9)'$$

ALGUNS TÓPICOS SOBRE NORMAS VETORIAIS

Parte III

JAIME FEINSTEIN

6.4 - *Espaços não-enumeráveis - EVN L^p*

Os EV "não-enumeráveis" são EV de dimensão (infinita) da cardinalidade do contínuo ou superior.

Um exemplo representativo de tais espaços é o espaço das funções R→R contínuas num intervalo [a,b] com a soma como operação interna, e o produto por um escalar real como operação externa.

Sendo os "vetores" do EV assim definido funções, uma função genérica pode ser indicada v(t) (*). Então, as normas de Hölder podem ser definidas como:

$$||v||_p = (\int_a^b |v(t)|^p dt)^{1/p} \qquad (34)$$

Nota 1 - A desigualdade de Hölder (21) le-se para os espaços desta 6.4 como:

$$|\int_a^b v(t)u(t)dt| \leq \int_a^b |v(t)u(t)|dt \leq (\int_a^b |v(t)|^p dt)^{1/p} \cdot (\int_a^b |v(t)|^q dt)^{1/q} = ||v||_p \cdot ||v||_q, \quad p^{-1}+q^{-1}=1 \qquad (35)$$

As normas particulares para p=1,2 e ∞ são agora:

$$||v||_1 = \int_a^b |v(t)|dt \qquad (36)$$

$$||v||_2 = + \sqrt{\int_a^b v^2(t)dt} \qquad (v\in R) \qquad (37)$$

$$||v||_2 = + \sqrt{\int_a^b v(t)\overline{v(t)}dt} \qquad (v\in C) \qquad (37)'$$

$$||v||_\infty = \max_{a\leq t\leq b} |v(t)| \qquad (38)$$

Nota 2 - Para denominações da norma (38), veja o rodapé (****) da 6.2. Em relação com os espaços de que trata esta 6.4, a denominação mais comum parece ser a de "norma de Tchebycheff". Para um estudo especial desta norma veja [R1], 1-5.

É condição óbvia para a existência das normas (34) a integrabilidade de $|v(t)|^p$. Para (38), a limitação de v(t), isto é: $\forall t\in[a,b]: |v(t)|<\infty$, e a existência do maximo em [a,b].

Exemplo 1 - Seja a função v_1:R→R definida por: $v_1(t)=t^3-27t+20$, $t\in[0,5]$ veja Fig.3. Então, $||v_1(t)||_1$ é a superfície da curva retificada, e $||v_1(t)||_\infty = -v(3) = 34$.

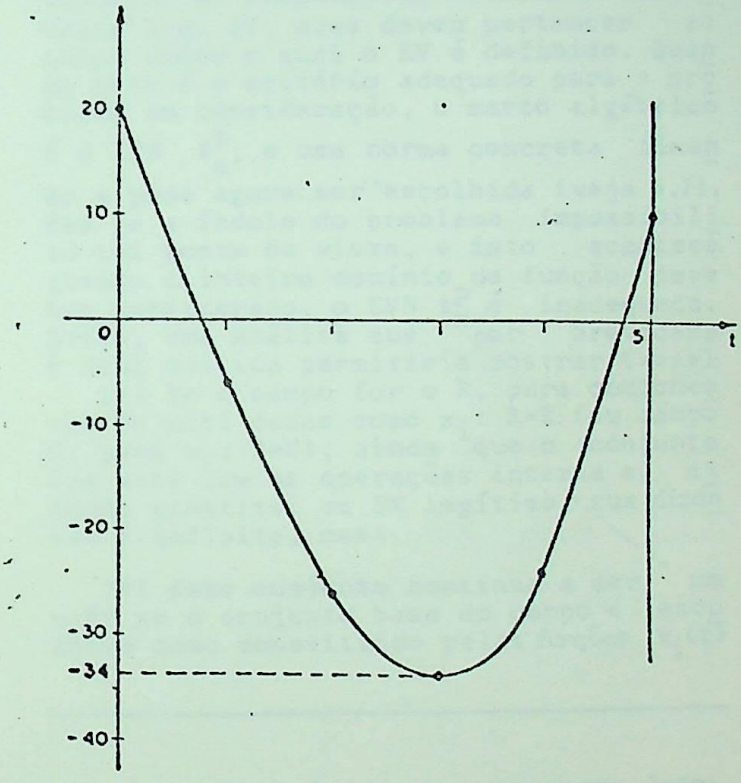


FIG. 3

Observa-se que $v_1(t)$ é integrável, limitada e possui um máximo no intervalo de definição de seu dominio. Mas as vezes pode acontecer que esse máximo não fique definido no contexto do problema. Considere as $v_2(t)$ e $v_3(t)$ do

Exemplo 2 - v_2:R→R; $v_2(t)=t$, $t\in(-1,1)$

v_3:R→Q; $v_3(t) = +\sqrt{t}$, $t\in[0,2]$.

Para evitar dificuldades em casos como estes, $||v||_\infty$ costuma ser re-definida se

---

(*) Visando aplicações muito comuns em engenharia, identifica-se a variável real do dominio de v com o tempo t, mas obviamente as expressões (34) e seguintes são validas qualquer que for a grandeza física da variável independente.

$$||v||_\infty = \sup_{a\le t\le b} |v(t)| \qquad (39)$$

pelo que a norma de Tchebycheff é também conhecida como (norma) "do supremo". Agora, e para as funções do ex.2, $||v_2(t)||=1$, $||v_3(t)|| = \sqrt{2}$, já que o supremo, diferentemente do máximo, não precisa pertencer ao conjunto do contradomínio de v(t).

Em casos especiais, é possível aprimorar (39). P.ex. em espaços de funções contínuas em [a,b] com primeira derivada v'(t) contínua e limitada, uma norma "melhor" que a (39) é:

$$||v|| = \sup_{a\le t\le b} |v(t)| + \sup_{a\le t\le b} |v'(t)| \qquad (40)$$

A causa de porque (40) constitui uma norma melhor, e em que sentido o é não pode ainda ser indicada por falta de certos fatos que serão apresentados na seção 7. Aí este assunto ficará totalmente esclarecido.

Espaços de funções com as normas (34) e seu limite (39) são conhecidos como (espaços) L^p (também L_p) (*). Quando na sigla do espaço resulte conveniente indicar os limites da integral usa-se os acrescentar entre parenteses. Por exemplo a (34) escreve-se $L^p(a,b)$.

6.4.1 - *Normas de matrizes funcionais*

Na engenharia moderna faz-se uso frequente de matrizes cujos elementos são funções. As mais comuns são as funções R→R (reais de variável real), e C→C (complexas de variável complexa). Normas dessas matrizes devem ser usadas em situações que requerem o uso de matrizes funcionais. P.ex. na moderna teoria de controle um modelo usual de um sistema multivariável (isto é, de várias entradas e saídas), vem apresentado na forma de uma matriz cujos elementos são funções racionais C→C (quocientes de polinômios de coeficientes reais e indeterminada complexa, usualmente com o grau do numerador ≤ que o grau do denominador). Em casos como estes, normas podem ser atribuidas por um processo de adequada combinação de normas matriciais e funcionais, como as consideradas em 6.2.1 e 6.4. O resultado final tem que cumprir com os axiomas de norma. Esta"adequada combinação" pode ser bastante envolvida, e aqui prefere-se deixar os detalhes para um caso algo mais simples (normas de vetores funcionais que será apresentado em 6.5) e consignar diretamente e como resultado final a norma talvez mais aplicada em matrizes de transferência $G(s)=[g_{ij}(s)]$ (**):

$$||G(s)|| = \max_{s\in N} \max_i \sum_j |g_{ij}(s)| \qquad (41)$$

onde $|g_{ij}(s)|$ é o módulo da $g_{ij}(s)$ e N é o "contorno de Nyquist", isto é, o contorno no plano do domínio da função consistente no eixo imaginário jw e um semicírculo de raio tendendo a infinito abrangindo o semiplano de parte real positiva (***).

Exemplos de aplicação da norma (41) requerem conhecimentos especializados de teoria de controle e não serão aqui dados (o leitor interessado os encontrará em p. ex [0],3.7).

6.5 - "Normas" funcionais e R^n - Espaços L^p

As normas ordinárias são funções V→R, em particular R^n→R ou C^n→R para as consideradas em 6.2. Em espaços enumeráveis, elas são R^∞→R ou C^∞→R, veja 6.3. Finalmente, as dos espaços de funções são RxR→R ou RxC→R, 6.4. O fato importante aqui é que em qualquer um desses casos o contra-domínio é R.

Numerosas aplicações de teorias matemáticas exigem considerar vetores cujas componentes são funções de t; tal p. ex. o vetor de estado do enfoque moderno da teoria de controle (veja p. ex. [F],1.3):

$$x(t) = [x_1(t)\ x_2(t)\ \dots\ x_n(t)]' \qquad (42)$$

Existem duas maneiras de considerar o x(t) como um n-vetor. Na primeira se fixa t. Então (42) se particulariza para um vetor de componentes numéricos (usualmente R ou C); eles devem pertencer ao campo sobre o qual o EV é definido. Quando este é o critério adequado para o problema em consideração, o marco algébrico é o EVN ℓ_n^p, e uma norma concreta fixando p pode agora ser escolhida (veja 6.2). Mas se a índole do problema impossibilita tal ponto de vista, e isto acontece quando o inteiro domínio da função deve ser considerado, o EVN ℓ_n^p é inadequado. Então, uma análise que por brevidade é aqui omitida permitiría mostrar (****):

1º) Se o campo for o R, para componentes de x(t) dadas como x_i: R→R (ou campo C, para x_i: R→C), ainda que o conjunto dos x(t) com as operações interna e externa constitui um EV legítimo, sua dimensão é infinita, mas:

2º) Esse conjunto continua a ser um n-EV se o conjunto base do campo é escolhido como constituido pelas funções $x_i(t)$

(*) Alguns (poucos) autores usam a mesma letra (em geral L) para os espaços, (e as normas) ℓ_n^p, i^p e L^p (veja p.ex. [R-W]).

(**) Nesta subseção 6.4.1 passa-se para a notação standard em eng. elétrica e teoria de controle, isto é, s é a variável independente complexa ($s = \sigma + j\omega$), e $g_{ij}(s)$ uma função racional da variável s.

(***) Mais estritamente, o raio pode ser finito mas o contorno tem que abranger os zeros com parte real positiva dos polinômios envolvidos na $g_{ij}(s)$. Além de mais, se existirem zeros do denominador com parte real nula, o contorno não os pode atravessar, devendo ser adequadamente modificado (para mais detalhes ver [F-F-C], Vol 1, Ap. 3, 3 e 5).

(****) É a extensão para o caso vetorial de raciocinios efetuados para espaços (ordinários) de funções em [F1],3.

das componentes de x(t) (*).

Com estas considerações prévias, já estamos em condições de abordar o problema de normar o x(t) de (42).

A esta altura, o leitor deve ter claro que a idéia de "norma" é obter um "resumo" ou "extrato" do conteúdo informacional do vetor. A informação completa vem dada pelo inteiro vetor, mas nem sempre toda essa informação é usada (p. ex. certos problemas de estática e dinamica requerem considerar só os comprimentos dos vetores intervinentes). Em EV gerais, a extensão do comprimento pode ser feita de muitas maneiras diferentes, daí a forma moderna (axiomática) de o generalizar em normas que admitem numerosas particularizações.

Considerando então o EV de estado definido sobre o campo de seus componentes, x(t) é um n-vetor e pode-lhe ser aplicada uma norma ℓ_n^p.

Mas em geral agora o resultado vai depender de t:

$$||x(t)||_p^* = (\sum_{i1}^{n} |x_i(t)|^p)^{1/p} \qquad (43)$$

Em (43), o asterisco pretende indicar que o segundo membro não é agora uma norma legítima, já que seu contradomínio é RxR (ou RxC), e não R como deveria ser.

Tentando ultrapassar esta dificuldade, voltamos à (42) e observando que cada componente é uma função ordinária, aplicamos a cada uma delas uma norma L^p (por simplicidade a mesma norma para todos os componentes). Vai ser obtido:

$$||x||_p^* = \left[||x_1||_p, ||x_2||_p, \ldots, ||x_n||_p\right]' \qquad (44)$$

Agora, ainda que cada componente de (44) é uma norma legítima, $||x||_p^*$ é um vetor (seu contradomínio é R^n), e portanto (44) também não é uma norma. Porém, expressões tipo (43) ou (44) efetivamente extraem ou sintetizam informação, se bem que de maneiras diferentes. No caso de (43), o "resumo" de um vetor de funções é uma (única) função, e em (44) é um vetor numérico.

Vamos denominar "normas funcionais" (isto é, normas que são funções), e "normas R^n" às tipo (43) e (44) respectivamente (**). Elas não são normas legítimas, porque não cumprem todos os axiomas de normas, mas podem ser consideradas extensões (em uma direção diferente à de uma pre-norma, por exemplo), no sentido de que os seus contra-domínios são estendidos de R para RxR (ou RxC), e R^n respectivamente.

Se o problema concreto admite que a informação contida nesta extensões de norma possa ser "concentrada" ainda mais, pode-se chegar a uma norma legítima.

Com efeito, (43) é uma função ordinária, e pode-se-lhe aplicar uma norma L_p.

O uso de (34) leva à:

$$||x||_p = \int_a^b |(\sum_{i1}^{n} |x_i(t)|^p)^{1/p}|^p dt)^{1/p} =$$

$$= (\int_a^b \sum_{i1}^{n} |x_i(t)|^p dt)^{1/p} \qquad (45)$$

onde no último membro já foi levado em conta que o valor absoluto de um somatório de valores absolutos é o próprio somatório, e foram canceladas a raiz e potências p-ésimas intermediárias. Note que $||x||_p$ é uma norma legítima.

Alternativamente, se se partir de (44) (que como é um vetor numérico pode ser normado por alguma ℓ_n^p) e se lhe aplicar (22), chegar-se-ía, usando (34) no passo intermediário, à:

$$||x||_p = (\sum_{i1}^{n}(||x_i||_p)^p)^{1/p} =$$

$$= (\sum_{i1}^{n}((\int_a^b |x(t)|^p dt)^{1/p})^p)^{1/p} =$$

$$= (\sum_{i1}^{n} \int_a^b |x_i(t)|^p dt)^{1/p} \qquad (46)$$

que também é uma norma legítima, e coincidente com a (45), já que a integral de uma soma de funções é igual à soma das respectivas integrais (***).

EVN adicionados da norma (45)=(46) são conhecidos como "espaços L^p" (pode-se usar qualquer outro tipo de L maiuscula que se diferencie da usada em 6.4.

6.5.1 - *A subseção 6.4.1 re-visitada*

Agora é possível retornar ao assunto da subseção 6.4.1 e indicar que para normar matrizes de funções existem em principio os mesmos dois procedimentos que para normar vetores de funções: aplicar formalmente algum ℓ_n^p para obter uma "norma funcional" e logo após alguma das L^p, ou aplicar primeiro alguma L^p a cada elemento da matriz e seguidamente algum ℓ_n^p. A complicação a respeito das normas consideradas em 6.5 vem do fato de que, como visto em 6.2.1, existem duas formas de considerar ℓ_n^p em matrizes, a direta e a induzida por uma (outra) norma vetorial ℓ_n^p. No primeiro caso chega-se ao resultado final em 2 passos, e no segundo em 3. A quantidade de variantes é muito grande, e o tema certamente foge do alcance de uma subseção de artigo. É por isso que na 6.4.1 optou-se por dar só uma norma concreta, a (41), dando agora os fundamentos da determinação de qualquer outra norma de matrizes de funções.

(*) É claro que é preciso caracterizar adequadamente as $x_i(t)$, p.ex. impôr a condição de que sejam continuas, ou continuas por segmentos, ou limitadas, etc. O importante é que a, ou as propriedades que caracterizam uma $x_i(t)$ para que se qualifique para ser uma componente do vetor de estado sejam clausurativas a respeito das operações: interna $x_i(t) + x_j(t)$, e externa: $f.x_i(t)$ (caso contrário os x(t) não vão ser vetores). Se além disso o campo é constituído pelas mesmas funções $x_i(t)$, deve se verificar que a caracterização escolhida não "fure" os axiomas de campo.

(**) Estas denominações são próprias do autor.

(***) Muitos problemas físicos requerem considerar modelos de estado cujos vetores x(t) possuem infinitas componentes $x_i(t)$, veja p. ex. [H2]. Em casos como estes, os somatórios de (45) e (46) se fazem infinitos, e essas expressões não mais coincidem, a menos que as series convirjam uniformemente, veja [B-I], IV, 20.

Em espaços de funções resulta as vezes de interêsse introduzir na expressão da norma uma "função de peso" $w(t)$. Resultam assim as "normas pesadas"(ou "ponderadas") pela $w(t)$. P. ex. para as normas $||x||_p$ da seção 6.4:

$$||x||_{wp} = \left(\int_a^b w(t)|x(t)|^p dt\right)^{1/p} \qquad (47)$$

(47) pode ou não ser uma norma legítima dependendo da $w(t)$.

A extensão para espaços ℓ^2 é direta, e segue as diretrizes de 6.5. Cada $x_i^2(t)$ de (45) ou (46) é afetada por uma função de peso $w_i(t)$, as quais, visando a uma generalização que será indicada logo logo, são escritas inseridas no $x_i^2(t)$ como $x_i(t)w_i(t)x_i(t)$. Desta forma o somatorio do último membro de (45) pode ser escrito como $x'(t)\,W(t)\,x(t)$, onde $W(t)$ é a matriz diagonal de elementos $w_{ii} = w_i(t)$. Agora, generalizando $W(t)$ para matrizes não diagonais (porém simétricas) é possível "pesar" produtos mistos $x_i(t).x_j(t)$. Normas vetoriais pesadas por uma matriz simétrica $W(t)$ (que como caso particular pode ser diagonal, ou constante, ou ambas) costumam ser indicadas $||x(t)||^2_{W(t)}$. Estas normas encontram importantes aplicações, especialmente no capítulo de Controle Otimo da moderna teoria de controle, onde são usadas para especificar índices de performance, veja p.ex. [K1],2.1. (*).

Para certos índices de performance interessa fixar o tempo, usualmente para o instante final t_f do problema. O espaço subjacente é agora o ℓ^2_n, e a norma indicada $||x||^2_W$. Note que, diferentemente da notação de 6.2, agora o superíndice indica o $p = 2$, já que o lugar do subíndice é ocupado pela matriz de peso, agora sempre constante (pode ser ou não diagonal).

7 - *ESPAÇOS DE BANACH*

Um EV normado (EVN) é um EV acrescentado dos axiomas de norma. Ainda que esses EVN possuem propriedades que o fazem de interesse para numerosas aplicações (**), o EVN mais usado na prática é o resultante de acrescentar a um EVN geral a condição de ser "completo" a respeito da métrica induzida pela norma (veja eq. (33)), isto é, que toda sequência de Cauchy (veja [LL],7§1) de elementos desse espaço converja a um elemento desse espaço. Tais espaços denominam-se "de Banach" (EB).

O leitor deve ser ciente de que esta menção aos EB só é feita pela relação que esses espaços possuem a respeito do assunto principal deste artigo, e de modo nenhum vai-se efetuar aqui um estudo nem sequer superficial dos mesmos (***). Mas a característica deles de ser completo, explica o fato da escolha de certas funções concretas para normas com preferência a outras que também poderiam sê-lo. Com efeito, algumas das normas consideradas previamente apresentadas tem a característica desfavorável, para certas aplicações, de não fazer convergir uma sequência de Cauchy(de vetores do espaço) a um outro vetor desse espaço. Por exemplo, os espaços ℓ^p_n e ℓ^p considerados nas seções 6.2 e 6.3 são completos; nos espaços de funções continuas considerados em 6.4 a norma (39) os faz completos; porém, se os vetores são definidos como aquelas funções possuindo também continua (e limitada em $[a,b]$) sua primeira derivada, ainda que (39) é uma norma lícita, o espaço não resulta de Banach; adotando (40) o espaço se faz completo (a demonstração das tres afirmações acima foge do scopo do artigo; o leitor interessado as encontrará em p. ex. [L], 3.3, 4.1 e 5.2 respectivamente).

Uma vantagem dos EB é que, via norma, é possível estender o conceito de derivada ordinária para funções possuindo a sua variável independente vetorial; isto será comentado na seção 9.

Quando em um EB uma segunda operação interna (denominada usualmente de "produto") precisa ser considerada, passa-se para uma álgebra de Banach (****). Essa álgebra é naturalmente normada porque o espaço da que deriva o é, mas costuma-se adicionar a exigência de que a norma seja multiplicativa, isto é, que cumpra com a condição (10) (*****), (vide [J],1.).

Não se deseja finalizar esta seção sem comparar os EB com outros muito usados em aplicações técnicas, os (espaços) de Hilbert, já que na sua definição só deve-se substituir "normados" por "produto interno". Mas essa mudança faz com que os espaços de Hilbert possam-se considerar incluídos dentro dos de Banach. Isto é assim porque todo produto interno induz uma norma, como foi visto nas definições indiretas 1 e 2 (seção 3). Porém, a proposição inversa não é verdadeira: dada uma norma de Hölder, só no caso $p = 2$ existe um produto interno que a induz. É desse ponto de vista que os espaços de Hilbert constituem uma particularização dos EB, nas quais faz sentido a idéia de angulo entre dois vetores abstratos (******), em especial o conceito de ortogonalidade (*******).

(*) O leitor que consultar essa referência irá notar que as normas usadas nela são da classe 1 (da seção 3 desta).

(**) Um estudo muito completo de tais espaços encontra-se em [D].

(***) O leitor interessado pode consultar p. ex. [N1].

(****) Sempre que os vetores constituam semigrupo a respeito do produto interno, que além disso tem que ser distributivo a respeito da soma e associativo a respeito do produto externo.

(*****) Com as letras representando elementos genéricos da álgebra, e não (só) matrizes.

(******) Um ângulo θ entre dois veteres abstratos v, u é definido por $\theta = \arccos \dfrac{\mathrm{Rep}(v,u)}{||v||.||u||}$, onde as normas do denominador tem que ser induzidas pelo produto interno do numerador (para uma justificativa dessa expressão veja p. ex. [N1], 4.1 ou [H] § 59).

(*******) Do rodapé precedente, a ortogonalidade entre v e u é exprimida pela condição $P(v,u) = 0$.

É claro que nos espaços de Hilbert, existência axiomatica de um produto interno faz com que a forma natural de introduzir neles uma norma é mediante uma definição indireta tipo fig.1, e assim é feito em textos exclusivos de espaços de Hilbert (vide p. ex. [B],II53).

5. NORMAS EM ESTRUTURAS NÃO USUALMENTE TRATADAS COMO EV.

Foi indicado na seção 2 que a norma é uma função aplicável a vetores. Porém, em alguma literatura matemática encontram-se referências a normas de entes que são tradicionalmente considerados como inseridos em estruturas algébricas diferentes de EV. Nestes casos, a estrutura de pertinência há de poder ser considerada como um EV de algum ponto de vista; caso contrário, não pode ser definida uma norma. O seguinte exemplo ilustra a respeito de um caso típico.

Exemplo 1 - Números complexos

A sua estrutura tradicional de pertinência é um campo, mas é possível definir a norma de um número complexo $c\in C$, e se o considera como vetor do EV bi-dimensional definido sobre o campo real, possuindo como base os vetores distinguidos $\underline{1}$ e $\underline{i}$ (estes vetores não devem ser confundidos com os escalares $1\in R$, $i=\sqrt{-1}\in C$). Então, cada número complexo $c=a+bi$ pode ser isomórficamente associado com o vetor $\underline{v}=a.\underline{1}+b.\underline{i}$ $(a,b\in R)$, onde o produto representa a operação externa ⊙ aludida em 3º) da seção 2, e a soma a interna (2, 2º)). Ainda que é agora possível definir a norma de c, $||c||$, por qualquer das normas consideradas previamente, a mais apropriada é a $||v||_2$ porque então:

$$||v||_2 = +\sqrt{a^2+b^2} = |c| \qquad (48)$$

e onde se desprende que o módulo de c é a sua norma no espaço ℓ_2^2, e portanto possui todas as propriedades gerais de uma norma, acrescentadas das (propriedades) particulares das ℓ_2^2. Assim, e considerando a componente (C,+) do campo (C,+,.), a condição N2 da Def.3 resulta em $|c_1+c_2| \leq |c_1|+|c_2|$. No que diz respeito às N1 e N3, elas são trivialmente satisfeitas pelo módulo. $|c|$ é também uma norma multiplicativa, só que o $\leq$ é agora (sempre) =, já que $|c_1.c_2|=|c_1|\cdot|c_2|$.

Exemplo 2 - Uma variante

É possível chegar à (48) por outros caminhos alternativos. Dentro do contexto da subseção 6.2, pode-se considerar o conjunto C como um EV complexo, isto é, definido sobre o (próprio) campo complexo. Agora, o EV é unidimensional, já que para $\forall c$ pensado como vetor (vamos indicá-lo c_v), é possível escrever: $c_v = c\underline{1}$. Então, o uso da (24)' permite escrever:

$$||c||_2 = \sqrt{c.\bar{c}} \qquad (49)$$

usando (23):

$$||c||_1 = |c| \qquad (50)$$

É claro que (48) = (49). Neste caso particular ℓ_2^2 real = ℓ_1^2 complexo = ℓ_1^1 complexo. É bom advertir que muitos autores definem a norma de um complexo como sendo o quadrado de (49), isto é, $c.\bar{c}$ (veja p. ex. [B-ML], 14.7). Para esses autores a norma é o quadrado do módulo. No contexto deste artigo, $c.\bar{c}$ é uma norma legítima, mas de 1ª classe (veja seção 3).

Exemplo 3 - Uma particularização: Números reais.

Agora, o EV é o ℓ_1^2 real, e (24) leva à: $||v|| = |r|$, valor absoluto do real. Note que para este caso $\ell_1^2 = \ell_1^1$, já que (23) conduz ao mesmo resultado.

Exemplo 4 - Uma generalização: Números quaternios.

Estes números, de formato geral $q=a+bi+cj+dk$, onde $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=k=-ji$, $jk=i=-kj$, $ki=j=-ik$, constituem, quando adicionados das operações + e ., uma extensão do corpo C (*). O isomorfismo é agora para o EV ℓ_4^2 com base $\underline{1}$, $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$, resultando a norma $+\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ (**).

Os 4 exemplos acima sugerem formas alternativas de normar entes matemáticos por mudança do EVN no qual naturalmente pareceria que deveriam ser inseridos. Considere p.ex. o caso dos polinômios. Pensados como um subconjunto do conjunto de funções contínuas, podem ser inseridos no EVN L^p, e adotar alguma das normas (34), como foi mostrado para a $v_1(t)$ do exemplo de 6.4. Mas também um polinômio pode ser inserido num EVN ℓ_{n+1}^p. Para isso, pode adotar-se como base o conjunto (ordenado) das indeterminadas elevadas às potências sucessivas 0 até n e caracterizar o polinômio pelo vetor coluna dos coeficientes a_o até a_n, para polinômios de grau n de formato:

$$p(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n \qquad (51)$$

Seu vetor representativo no ℓ_{n+1}^p é $[a_o,a_1,\ldots a_{n-1},a_n]'$, na base $1,x,\ldots x^{n-1},x^n$.

Considerando de novo o ex.1 de 6.4, e adotando a norma do máximo (25), $||v_1||_\infty = 27$. Note: esta norma (assim como qualquer uma das ℓ_n^p (22)), independe do intervalo do domínio do polinômio $t\in[t_o,t_f]$ mas as (34) em geral sim dependem. Assim, ainda que se o intervalo do exemplo for reduzido de $[0,5]$ para $[1,4]$ a $||v_1||_\infty$ do L^∞ continua mantendo seu valor de 34, se em troca for aumentado para $[-1,5]$, essa norma vai para 46, e se for $t=[-1,6]$, para 74.

A justificativa desta forma alternativa de normar polinômios é que o conjunto $P[x] = (p(x))$ de todos os polinômios do grau n constitui um EV de dimensão n+1 so

---

(*) O fato algébricamente muito interessante de que este corpo é o único conhecido que é não comutativo é irrelevante aos fins deste exemplo.

(**) Vide p. ex. [B-J], 1, 4.1. Dentro do contexto dos quaternios, e provavelmente por razões históricas, é costumeiro denominar norma à expressão $a^2+b^2+c^2+d^2$. De novo, trata-se de $||v||_2$ de classe 1.

bre o corpo dos coeficientes, com a soma de polinômios como a operação interna (isto implica na soma aritmética dos coeficientes aj do mesmo subíndice). Note que para numerosos problemas envolvendo polinômios, não é necessário os considerar inseridos numa estrutura de EV; basta a de domínio de integridade, ou ainda anel , mas nesse caso uma norma não podería ser definida.

A generalização do caso dos polinômios para qualquer função continua possuindo um número ilimitado de derivadas sugere que o espaço que vai independizar a norma do domínio da variável independente é o L^p, mas agora, e diferentemente do caso dos polinômios, os coeficientes do desenvolvimento em série de Taylor que vão consituir as componentes do vetor tem que verificar a existência do limite (29), caso contrário deve-se operar no L^p.

Nos exemplos apresentados no inicio desta seção, as estruturas usuais de pertinência dos entes envolvidos eram menos elaboradas que a de EV. A única estrutura usual mais elaborada é a de álgebra, e nos sitios oportunos deste artigo fizeram-se referências a normas em álgebras, indicando que uma condição que se impõe usualmente é a de que a norma seja multiplicativa. Esclareceu-se também que essa exigência não é obrigatória para se ter uma norma em álgebras (veja o exemplo de 6.2.1).

Vamos encerrar esta seção indicando que as vezes pode-se ter a necessidade de normar vetores de um EV onde o conjunto V do espaço não é "simples", senão formado como produto cartesiano de vários outros conjuntos primários. Considere por simplicidade só o caso de produtos cartesianos binários, vamos dizer, o conjunto V da seção 2 é agora $V = Y \times Z$. (em particular, pode ser $V = Y \times Y$). Então, $||v||$ irá depender das $||y||$ e $||z||$, (onde $v \in V$, $y \in Y$, $z \in Z$) podendo essa dependência vir expressa de várias formas diferentes, p. ex, $\max\{||y||,||z||\}$ (*) ; $||y||+||z||$ (esta é a norma que parece ser a mais empregada), etc.

(*) Mas note: $\min\{||y||,||z||\}$ não é norma, nem sequer quando o "min" se refere ao mínimo de dois maximos do mesmo ente matemático. Isto pode acontecer em espacios produto do tipo $Y \times Y$ se ambas normas de $||y||$ são diferentes. Se Y é um espaço de matrizes, como existe mais de uma norma de máximo, veja 6.2.1, é as vezes usada uma "norma" $\min\{||M||_{1i}, ||M||_{\infty i}\}$, onde $||M||_{1i}$ e $||M||_{\infty i}$ estão dadas por (27), (28). Em [K] é mostrado que essa não é uma norma legítima.

REFERÊNCIAS: (os números entre parenteses indicam as seções ou subseções onde [.] é referenciada).

[B] - S.K. Berberian - Introduction to Hilbert Space-Chelsea Pub.Co.,2 nd. ed., 1976 (8).

[B-J] - P.B. Bhattacharya & S.K. Jain - First Course in Rings, Fields and Vector Spaces - John Wiley & Sons, 1977. (8).

[B-ML] - G. Birkhoff & S. Maclane - Álgebra Moderna Básica - Ed. Guanabara Dois, 4ª Ed. 1980(8).

[B-T] - R.S. Burington & C.C Torrance - Higher Mathematics - McGraw-Hill, 1939 (6.5).

[D] - M.M. Day - Normed Linear Spaces-Springer-Verlag, 3rd.ed., 1973 (1,4,7).

[F] - J. Feinstein - Teoria dos Sistemas de Controle; Enfoque por Variáveis de Estado - Ed.Campus/EFEI 1979 (6.5).

[F1] - J. Feinstein - Dois Problemas Dimensionais - EFEI Pesquisa Vol.IV Nº 2, 1978, pp 13-18 (6.5).

[F-F-C] - A. E, Fregosi, J. Feinstein, L. Caldeira - Enfoque Clássico da Teoria de Controle - Ed. Campus/ Eletrobrás/EFEI, 1980 (6.4.1).

[H] - P.R. Halmos - Espaços Vetoriais de Dimensão Finita - Ed. Campus,1978/ (2,3,5,7).

[H2] - J.W. Helton - Systems with Infinite-Dimensional State Space: The Hilbert Space Approach - Proc. IEEE, Vol 64 Nº 1, January 1976, pp 145 - 160 (6.5).

[J] - B.E. Johnson - Banach Algebras: Introductory Course, em "Algebras in Analysis", Part I.2, ed. by I.H. Williamson, Academic Press, 1975 -(7).

[K] - T.H. Kerr - An Invalid Norm Appearing in Control and Estimation - IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-23 Nº 1, 1978, pp 73-74 (4, 6.2.1,8).

[K1] - D.E. Kirk - Optimal Control Theory - Prentice-Hall, 1970 (5.6).

[L] - J.R. Lee - Advanced Calculus with Linear Analysis - Academic Press, 1972 (5,7).

[LL] - E. Lages Lima - Espaços Métricos - IMPA, CNPq/Edgar Blücher Ltda, 1977 (7).

[N1] - L. Nachbin - Introdução à Análise Funcional. Espaços de Banach e Cálculo Diferencial - Dep. de Assuntos Científicos, OEA, 1976 (7).

[O] - D.H. Owens - Feedback and Multivariable Systems - Ed. Peter Peregrinus/IEE, 1978 (6.4.1).

[R1] - J.R.Rice - The Approximation of Fuctions, Vol. 1 - Addison-Wesley , 1964 (6.2, 6.4).

[R-W] - J.R.Rice & J. S. White - Norms for Smoothing and Estimation-SIAM Review, Vol. 6 Nº 3, July 1964, pp 243-256 (6.4).

ALGUNS TÓPICOS SOBRE NORMAS VETORIAIS

Parte IV

Prof. Jaime Feinstein

9. *COMENTÁRIOS SOBRE APLICAÇÕES - CONCLUSÃO*

Nosso estudo de alguns tópicos sobre normas está chegando ao fim. Nesta altura o leitor deveria ter uma idéia bastante aproximada de o que é uma norma, quais os entes matemáticos que podem ser normados, e como faze-lo. Em posse destes conhecimentos a pergunta natural agora é para que servem, ou como se usam.

Mas o leitor que teve a paciência de nos acompanhar até aquí, provavelmente tinha em mente uma aplicação concreta das normas, precisava de seu uso e talvez queria saber algo mais no que diz respeito. É por isso que nesta seção final vão-se efetuar comentários sobre algumas das aplicações de normas.

Viu-se que numerosos entes matemáticos são passíveis de serem considerados como vetores de um adequado EV. A introdução de uma norma permite comparar um subconjunto desses entes a respeito de características precisamente determinadas pela escolha da norma particular que foi adotada. Considerando para orientação os vetores ordinários tridimensionais da estática, se o problema for escolher o vetor de máximo comprimento, a norma (24) no ℓ_3^2 fornece a resposta; se o que se deseja em vez disso é selecionar o vetor (ou os vetores) possuindo a máxima coordenada, é a (25) (no ℓ_3^∞) a que deve ser escolhida, etc.

Como um outro exemplo, suponha ter uma sequência de vetores n-dimensionais $\overset{1}{v}, \overset{2}{v}, \ldots, \overset{i}{v}, \ldots$. O limite, isto é, um vetor v:

$\lim_{i\to\infty}(v-\overset{i}{v}) = 0$ requer para sua existência que cada componente $\overset{i}{v}_j$ convirja à v_j do vetor limite ao tender $i\to\infty$(*). Isto multiplica por n a dificuldade de que problemas práticos envolvendo tais sequências possuam limite. Mas uma convergência "na norma" da sequência geralmente pode ser encontrada ainda que a convergência vetorial ordinária não esteja definida. O marco natural deste problema é o espaço ℓ_n^p. Por convergência na norma deve-se entender:

$$\exists v\in V: \lim_{i\to\infty} ||v-\overset{i}{v}|| = 0 \qquad (52)$$

Esta expressão é imediatamente extensivel para os espaços ℓ^p.

Passando do campo da estática ao da teoria de circuitos, e se a função v(t) é um sinal elétrico, a norma $L^2(t_o,t_f)$ pode ser considerada como uma medida da energia do sinal, já que (37) indica:

$$||v||_2 = \sqrt{\int_{t_o}^{t_f}(v(t))^2 dt} \qquad (53)$$

mas se estivermos interessados nos máximos valores absolutos de v(t) é a norma do máximo (38) a que deve intervir no problema (para afastamentos a respeito de um "valor médio" v_o ou outro valor especial, basta considerar $||v(t)-v_o||_\infty$).

Em outras situações físicas (ou matemáticas, ou econômicas, etc) con

---

(*) Não indicamos por qual dos numerosos tipos de convergência que se encontram definidas na literatura especializada deve ser essa convergência das componentes porque é possível demonstrar que em EV finitos qualquer tipo de convergência é equivale à convergência "componente a componente", veja p.ex. [K2], 2, 1.4.

cretas, deve-se procurar a norma que mais se adeque à natureza do problema. Considere como uma outra ilustração os espaços de funções contínuas. As normas fornecem respostas quantitativas a perguntas tais como: encontrar uma função (que deve pertencer a um conjunto definido sem ambiguedade) que aproxime uma outra dada. P.ex. a função aproximante pode ser um polinômio de grau ≤ 3, e a função que deve ser aproximada um polinômio de grau ≥ 5, ou uma função continua mais geral. O vocábulo "aproxime" tem que ser precisamente definido, e a norma escolhida irá depender do tipo de aproximação. Este problema encontra-se estreitamente relacionado com o de "identificação" (dos parâmetros de um sistema matemático que "gera", ou produz como saída, a função aproximante, visando a considerar a este sistema matemático como um modelo de uma planta ou sistema físico que produz como saída a função que se deseja aproximar (*)).

Importantes aplicações desta noção de aproximação reflitem-se nas modernas teorias de controle ótimo, nas quais as normas desempenham um papel essencial (vide p. ex. [L1]). Também dentro do contexto da teoria de controle, certas classes de estabilidade vem de "mergulhar" o modelo em análise em diferentes espaços L^p, obtendo-se conclusões que dependem do p escolhido (veja p.ex. [D-V],V).

No cálculo diferencial, quando deve-se derivar uma função (vetorial ou não) de variável vetorial, a respeito dessa variável não é possível formar o quociente formal de incrementos $\Delta F/\Delta v$, onde $\Delta F = F(v+h)-F(v)$ e $\Delta v = h$ para depois fazer $h \to 0$, já que a estrutura de EV não permite dividir um vetor por outro (**). Mas tomando normas nos vetores desse quociente, previamente arranjado de maneira de generalizar a expressão (55), equivalente à expressão da derivada ordinária (54) de uma $f:R \to R$ (p. ex. $f(t)$), essa dificuldade é fácilmente contornada.

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \qquad (54)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(t+h)-f(t)-f'(t)h|}{|h|} \qquad (55)$$

A derivada procurada (ou a diferencial, não existe uniformidade na nomemclatura), aparece agora na forma do operador linear D(h) da expressão (56):

$$\lim_{h \to 0} \frac{||F(v+h)-F(v)-D(h)||}{||h||} \qquad (56)$$

O leitor interessado nos detalhes pode consultar [N1], 14. O marco algébrico conveniente para essa extensão da derivada ordinária é o EB.

Vai-se finalizar este panorama de aplicações indicando que também no campo da estatística as normas encontram interessantes aplicações. Considere o problema de encontrar o valor "mais provável" de um sinal s corrompida por um ruido r de maneira que o que se mide é:

$$m_i = s + r_i \qquad (57)$$

onde cada valor do subíndice $i=1,2,\ldots n$ exprime uma "experiência". Então o problema pode ser planteado de maneira de achar o valor s^* tal que a norma $||m_i - s||_n^p$ seja minimizada por s^*. O delicado problema é escolher um valor adequado para o parâmetro p. Se $p=2$, $s=s^*$ fornece a resposta segundo o critério dos mínimos quadrados. É possível mostrar que ainda que essa é a solução mais comumente usada, não é a solução correta em todos os casos. Com efeito, a escolha de p depende da distribuição (de probabilidade) do ruido; se a distribuição é normal certamente a ℓ_n^2 é a melhor norma, mas para outras distribuições podem existir melhores nor-

---

(*) O leitor interessado neste assunto pode consultar, a nível de texto, [R1]. Uma idéia sintética é dada em [F2],7.

(**) Note que ainda que o EV admitir um produto para se transformar numa álgebra, também não é possível em geral fazer o quociente, já que numa álgebra não é exigido que os vetores constituam grupo a respeito dessa segunda operação interna. Note incidentalmente que o problema dual de derivar uma função vetorial de domínio escalar, p.ex. $R \to V$ a respeito da variável escalar não oferece dificuldade nenhuma, já que a estrutura do EV contempla multiplicar por 1/h via operação externa.

mas (usualmente nos valores limites p=1 e p=∞). O leitor interessado neste tema pode consultar [R-W].

APÊNDICE

"NORMAS" NEGATIVAS

Existem na literatura matemática referências isoladas a funcionais designadas como "normas negativas". É claro que tais funcionais não podem ser normas verdadeiras. Mas o objetivo deste apêndice é ilustrar a cerca de como, por um caminho aparentemente legítimo pode aparecer uma tal "norma".

Para isso, considere-se de novo o ex. 1 da seção 8, e vai-se tentar generalizá-lo num sentido diferente do ex. 4 (quatérnios). Agora, escrevemos c como:

$$c = a+bi = a+b\sqrt{-1} \qquad (I)$$

para em seguida substituir o "-1" por qualquer outro número d(isto é obviamente uma generalização). Fica definido um "número quadrático":

$$\gamma = a+b\sqrt{d} \qquad a,b,d\in R \qquad (II)$$

Agora, e definindo como "conjugado" de γ o $\overline{\gamma} = a-b\sqrt{d}$, se pode, por analogia com a norma de classe 1 de um complexo (veja a observação do fim do ex.2 de 8 (*))definir uma norma:

$$N(\gamma) = \gamma.\overline{\gamma} = (a+b\sqrt{d})(a-b\sqrt{d}) \qquad (III)$$

Afirmamos que esta $N(\gamma)$ pode ser negativa para d>0, e também zero para $\gamma\neq 0$. Porém, se d<0,

$$N(\gamma) = ||\gamma|| \qquad (IV)$$

cumpre as exigências de uma norma legítima.

Isto resulta de que o produto de (III) leva à

$$N(\gamma) = a^2 - b^2 d \qquad (V)$$

e a posterior comprovação de que (V) não pode ser negativo para d<0, mas para d>0 sim pode (é suficiente que $a^2<b^2d$), e também ser zero se $a^2=b^2d$ (d>0).

O ponto essencial aqui é porque, desconsiderando o resultado (V), falha a imersão dos números quadráticos (II) num EV. Existem diferentes maneiras de explicar isso mas talvez a mais simples seja observar que se d>0 ($\{\gamma\},+$) não é grupo (p. ex. existem em geral infinitos "opostos" para cada $\gamma=a+b\sqrt{d}$).

Mas para que um conjunto de entes matemáticos se qualificar para EV, eles devem constituir grupo abeliano, e os números quadráticos não o são para d>0. Isto faz com que a aplicação de expressões que em um EV levam à normas aqui conduzem a funções que violam alguns dos axiomas de norma.

(*) Prefere-se neste apêndice comutar para normas de classe 1 para maior facilidade do leitor que deseje aprofundar neste tema, e para o qual indica-se a ref. [B-ML], 14.10.

REFERÊNCIAS PARTE IV

[B-ML] - G. Birkhoff & S. MacLane- Álgebra Moderna Básica - Ed. Guanabara Dois, 4ª Ed, 1980.

[D-V] - C.A. Desoer & M.Vidyasagar- Feedback Systems: Input-Output Properties - Academic Press, 1975.

[F2] - J. Feinstein - Inversas Matriciais Esquerdas, parte III - EFEI Pesquisa, Vol. V Nº 4, 1979, pp 11-16.

[K2] - J. Korevaar - Mathematical Methods, Vol. I - Academic Press, 1968.

[L1] - D.G. Luenberger - Optimizacion by Vector Space Methods - John Wiley, 1969.

[N1] - L. Nachbin - Introdução à Análise Funcional: Espaços de Banach e Cálculo Diferencial - Dep. de Assuntos Científicos - OEA, 1976.

[R1] - J.R. Rice - The Approximation of Functions, Vol. I - Addison-Wesley, 1964.

[R-W] - J.R.Rice & J.S. White-Norms for Smoothing and Estimation - SIAM Review, Vol. 6 Nº 3, July 1964, pp 243 - 256.

THE INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONICS ENGINEERS, INC.

IEEE TRANSACTIONS ON EDUCATION

s K. Gaylord, Editor
of Electrical Engineering
Institute of Technology
, Georgia 30332

April 9, 1981

ofessor Jaime Feinstein
cola Federal de Engenharia de Itajubá
50
500 - ITAJUBÁ - MG
AZIL

f: Manuscript 80-9 "Non-Conventional State Models of Electric Transmission Lines"

ar Professor Feinstein:

Thank you for sending the revised manuscript of the subject paper. I have e pleasure of informing you that your paper has been accepted for publication the IEEE Transactions on Education. Publication of the paper is tentatively heduled for the November 1981, or February 1982 issue.

Enclosed you will find a return card, a copy of a memorandum on Author terations and a copyright transfer form. Please return the card and the copy-ght form as soon as possible so that your paper may be forwarded to IEEE for blication. Also please include a passport photograph and a paragraph biogra-ical sketch (see any IEEE Transactions for style).

Sincerely yours,

Tom Gaylord

Thomas K. Gaylord
Editor

losures: Return Card
Author Alterations
Copyright Form

NON-CONVENTIONAL STATE MODELS OF ELECTRIC TRANSMISSION LINES

Jaime Feinstein (SM)

ABSTRACT

In this note the use of a "spatial state" (a state having a spatial variable as its domain) is advocated to derive and solve state models of appropriate physical systems, using resources from elementary state variable theory. The power transmission line is chosen as a case study, and three different models are derived and solved.

The author is with Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Itajubá - MG - Brazil.

1. INTRODUCTION

When an electrical engineering student is first introduced to the state-space theory, the idea of "state variables" frequently comes to him in a form similar to the

DEFINITION ([1], 4.1): "The state variables of a system are defined as a minimal set of variables $x_1(t)$, $x_2(t)$,..., $x_n(t)$ such that knowledge of these variables at any time t_o, plus information on the input excitation subsequently applied are sufficient to determine the state of the system at any time $t>t_o$".

Notice that a state variable is thus defined as a function $x:R\to R$ (or perhaps $R\to C$), where R (C) denotes the field of real (complex) numbers. The real variable of the domain of x is always identified with time t.

From this definition and by adding adequate algebraic structure, it is possible to arrive at the notions of a state vector and its frame of reference, a state space. Considering then operators which act on state vectors, with intervention of elements from other related vector spaces (control and output spaces) and choosing bases in them, matrix theory comes into scene and the student is now able to use a model based on internal variables to study many interesting problems which are originally described by sets of linear differential equations. A typical example is the analysis of electric circuits with lumped parameters.

Now, to consider state models of systems with distributed parameters is a step further in both complexity and corresponding computational difficulties, and a rigorous treatment of such systems must begin by extending the above definition and related concepts appropriately. Such extensions have of course been made. For instance, Wang ([2],II,B.1) defines a state variable of a distributed parameter system as a function $RXR\to R$, of two independent variables, length and time. As in the usual situation, the set of all these state variables constitutes the state of

the system, and also, the state equations in standard form have as their first member the (now partial) derivatives of the state variables with respect to time ([2], II.B.3).

Although the treatment of state models of distributed parameter systems derived from this definition is general, the mathematics associated with it exceeds the level usually required in a first course in state theory.

A simpler approach, which can be used in some special distributed systems, comes from considering the system spatially decomposed in a number of adequate subsystems, and replacing each subsystem by an equivalent lumped model. One of the physical systems where this approach works is the electric transmission line. There, even a single T or π-section of lumped impedances may be a good model on a narrow band of frequencies, usually at low frequencies ([3], 6.4; [4], 6.17). When large bandwidths must be taken into account, a model consisting of more than one (T or π) section may be required, and for certain distributed parameter systems, models with an infinite number of sections have ever been considered ([4], 10.2, 3). But when the final description of the system or process is to be given in the form of a state model, an increase of the number of lumped subsystems produces a corresponding increase in the number of state variables needed to characterize it. In the limit, one arrives at a (mathematical) system of infinite order, and this is what must be expected because a finite set of state variables is unable to represent the infinite amount of information contained in the distributed variable (or variables). Now the central idea of this note can be stated: there are situations in which the greater complexity arising from the necessity of considering spatial as well as temporal dependence is attenuated where temporal dependence does not need to be taken into account explicitly. Again, the transmission line is a good example of this.

When frequency is constant (or almost constant) as in power

systems, partial derivatives with respect to t appear as functions of ω, and analytical study of the line problem is greatly simplified because the basic phenomena can be expressed in terms of equations involving only spatial derivatives. Then, if a formal substitution of the real variable "length" is made for the real variable "time" in the ordinary definition of state, a mathematical model similar to a state model can be derived. However what is important is that then it is possible to use each one of the many algorithms developed for ordinary state-space problems, and also, appropriate parts of the theory itself. The circumstance of taking now the derivatives with respect to a spatial variable is only a formal fact which does not alter in any way the mechanics of the algorithms involved.

To illustrate how the techniques derived from "spatial state" concepts work, a problem studied normally by classical methods (the power transmission line) will be considered using spatial state methodology in section 2.

2. SPATIAL STATE MODELS OF A LONG TRANSMISSION LINE OPERATING AT CONSTANT FREQUENCY

In this section a long transmission line operated at constant frequency will be studied through various "spatial state" models. The point of departure for the formulation of these models is the basic differential equations of the line when operated at constant frequency f (or constant $\omega=2\pi f$).

These equations may be expressed in terms of the line distributed resistance R, inductance L, (shunt) conductance G, and (shunt) capacitance C, although the introduction of the derived parameter γ (propagation constant) defined by (1) allows the equations to acquire the very compact form given by (2), (3).

$$\gamma \triangleq \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)} \qquad (1)$$

$$\frac{d^2V(y)}{dy^2} = \gamma^2 V(y) \qquad (2)$$

$$\frac{d^2I(y)}{dy^2} = \gamma^2 I(y) \qquad (3)$$

In (2) and (3), V(y) and I(Y) represent the voltage and current functions of (real) domain y (length) and whose co-domain may express either the voltage and current phasors (from phase to ground) of a three-phase line or the corresponding magnitudes in a generic point of a single-phase line; however, this is not essential for what follows. As for the derivation of (2) and (3), the reader may refer to any standard textbook in electrical engineering (e.g.[3], 6.4.1).

Now comes the formal apparatus borrowed from state-variables theory. If we adapt the definition given in section 1 to consider a "state with respect to length", and designate it by $x(y)$, from either (2) or (3) we can establish a state variables model by any of many existing standard procedures. Solving the model will let us obtain the same results as those given by ordinary line theory. Of course, it is possible to consider more than one model for each problem and here we will select three of them because of their illustrative value. In order to better emphasize the state variables approach, we will make use of standard notation and terminology of elementary state theory, and from now on a dot (two dots) over a dependent variable - here V or I - will represent the first (second) derivative of the dotted variable with respect to the independent one - here y. Also the transition matrix will be denoted by the customary ϕ, etc.

1st. or Voltage Model - Rewriting (2) as $\ddot{V}=\gamma^2 V$ and choosing the (spatial) state variables "phasically", that is, $x_1=V$, $x_2=\dot{x}_1$, the A-matrix of the state model will appear in the companion

form (of (2)) and the state equation is:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma^2 & 0 \end{bmatrix} x \tag{4}$$

Note incidentally that the model appears in an "autonomous" continuous form. Solution of the model implies computing its transition matrix. Although it is beyond the purposes of this note to give the details of such type of computation, once and only once and because it exemplifies the use of elementary state variables theory, we do it via a diagonalizing transformation. As A is companion and its eigenvalues are $\pm\gamma$, the modal matrix is the Vandermonde (5), and its inverse is (6).

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma & -\gamma \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \gamma^{-1} \\ 1 & -\gamma^{-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Then:

$$\Lambda = T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\gamma, -\gamma) \tag{7}$$

$$\phi(y) = T\phi_{\Lambda}(y)T^{-1} = T\begin{bmatrix} \exp(\gamma y) & 0 \\ 0 & \exp(-\gamma y) \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} \cosh\gamma y & \gamma^{-1}\sinh\gamma y \\ \gamma\sinh\gamma y & \cosh\gamma y \end{bmatrix} \tag{8}$$

where of course $\phi_{\Lambda}(y)$ is the transition matrix corresponding to the eigenvectors base. The solution sought can now be directly written:

$$x(y) = \begin{bmatrix} V(y) \\ \dot{V}(y) \end{bmatrix} = \phi(y) \begin{bmatrix} V(0) \\ \dot{V}(0) \end{bmatrix} \tag{9}$$

Note that (9) expresses the solution V(y) in terms of the initial

conditions $V(0)$, $\dot{V}(0)$.

2nd or Current Model - Here we start from (3). The structural similarity existing between (3) and (2) allows us to directly consider (4) as the 2nd. state model (x is now $[I(y), \dot{I}(y)]'$), (8) as its transition matrix and to write its solution directly as:

$$\begin{bmatrix} I(y) \\ \dot{I}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\gamma y & \gamma^{-1}\sinh\gamma y \\ \gamma\sinh\gamma y & \cosh\gamma y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(0) \\ \dot{I}(0) \end{bmatrix} \tag{10}$$

3rd or Mixed Model - Usually initial conditions come as $V(0)$ and $I(0)$ rather than as $V(0)$, $\dot{V}(0)$ or $I(0)$, $\dot{I}(0)$. A convenient state to take this circumstance into account is

$$w(y) = \begin{bmatrix} V(y) \\ I(y) \end{bmatrix} \tag{11}$$

In order to establish a model with state (11) we recur to equations (12) and (13), which constitute an intermediate step towards the standard derivation of line equations (3) (see [3], 6.4.1):

$$\dot{V}(y) = -(R+j\omega L)\, I(y) \tag{12}$$

$$\dot{I}(y) = -(G+j\omega C)\, V(y) \tag{13}$$

Writing them in matrix form while considering (11), it comes:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}(y) \\ \dot{I}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(R+j\omega L) \\ -(G+j\omega C) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(y) \\ I(y) \end{bmatrix} \tag{14}$$

which is the mixed model.

Any procedure to compute $\phi(y)$ (we need not go into details now) leads to its solution in the form:

$$\begin{bmatrix} V(y) \\ I(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\gamma y & -z_w\sinh\gamma y \\ -z_w^{-1}\sinh\gamma y & \cosh\gamma y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \tag{15}$$

where for the sake of compactness we have used the standard abbreviation for the line characteristic impedance:

$$z_w \triangleq \sqrt{(R+j\omega L)/(G+j\omega C)} \tag{16}$$

Each one of the models can be adapted to consider particular situations, such as the short line case or the lossless line. Also, similar derivations could be made so as to cope with initial conditions given in different forms such as specifying V (or I) at both ends of the line.

As an illustration we will only consider the lossless case studied by model 3 (this implies giving the initial conditions as V(0), I(0)). The particularization now consists of supposing R=G=0. Then

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} = j\beta \tag{17}$$

$$\gamma^2 = -\beta^2 \tag{18}$$

$$\cosh\gamma y = \cos\beta y \tag{19}$$

$$\sinh\gamma y = j\sin\beta y \tag{20}$$

The model (14) and its solution (15) become:

$$\begin{bmatrix}\dot{V}(y)\\ \dot{I}(y)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -j\omega L\\ -j\omega C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V(y)\\ I(y)\end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix}V(y)\\ I(y)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\beta y & -jR_w\sin\beta y\\ -jR_w^{-1}\sin\beta y & \cos\beta y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V(0)\\ I(0)\end{bmatrix} \tag{22}$$

where the characteristic resistance $R_w = \lim_{R,G=0} z_w = \sqrt{L/C}$.

3. CONCLUSIONS

This note intended to show how using only resources from elementary state variables theory it is possible to establish (and find the solutions to) state models of systems which at first

sight appear to be beyond the scope of that elementary level. This is done by defining a spatial state (a state with respect to a spatial variable). The method works whenever a real variable other than time can be found, with respect to which derivatives of magnitudes intervening in a physical system have meaning and define a differential model of that system.

Now, to say that the methodology presented here is "better" than the classical methods or any other is a somewhat subjective matter. The author of this note only claims that, in the case here studied, and taking for granted the knowledge of state variables theory at an elementary level, the effort that such a study requires will not be greater (but possibly less instead) than that demanded by conventional line theory.

Although this has been exemplified using a long transmission line at constant frequency, this situation will arise whenever it is possible to establish a formal (or structural) similarity between a mathematical model of the system under study and a set of ordinary differential equations whose domain is time. In such cases, a non-conventional state can be defined, a state model built and its solution found, as was shown in section 2 for the case study adopted here.

REFERENCES

[1] - B.C. Kuo, Automatic Control Systems, 3rd Ed. - Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[2] - P.K. Wang, "Control of Distributed Parameter Systems", Advances in Control Systems, Vol 1, Ed. by C.T. Leondes, Academic Press, New York, 1964, pp 75-172.

[3] - O.I. Elgerd, Electric Energy Systems Theory: An Introduction McGraw-Hill, Inc., New York, 1971.

[4] - J.D. Ryder, Networks, Lines and Fields, 2nd Ed. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1955.

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS ADEQUADAS PARA CONSIDERAR INVERSAS GENERALIZADAS DE MATRIZES

Jaime Feinstein

RESUMO

Descrevem-se nesta nota como as inversas generalizadas de matrizes podem ser consideradas elementos de adequadas estruturas algébricas. Estas estruturas não são em geral coincidentes com as estruturas classicamente definidas.

ABSTRACT

The main purpose of this note is to show that generalized inverses of matrices can be considered as elements of proper algebraic structures. These structures are in general not coincident with classical ones.

ABREVIATURAS A SEREM EMPREGADAS

No texto: EA - Estrutura(s) Algébrica(s)
FN - Fim de Nota
IG - Inversa(s) Generalizada(s)

Símbolos: C - Campo Complexo
R - Campo Real
M - Indicativa geral de matrizes, com elementos reais ou complexos
I - Matriz identidade

1 - INTRODUÇÃO

As inversas generalizadas de matrizes (IG) apareceram na literatura matemática como um intento de expressar em forma compacta resultados sobre resolução de problemas muito concretos. Talvez o exemplo mais conhecido é o de se chegar à expressão geral da solução de um sistema de equações lineares $Mx=b$ onde $x\in C^k, b\in C^h, M\in C^{hxk}$. Se M for quadrada e não singular, a solução ordinária $x=M^{-1}b$ é única, mas no caso singular, é conhecido o fato de que podem existir infinitas, uma ou nenhuma solução. Ainda neste caso podem-se definir "soluções num sentido generalizado"(*). Outra via comum para se chegar às IG é mediante o intento de definir inversas de operadores singulares.

Neste artigo pretende-se mostrar como a definição de certas estruturas algébricas (EA) especiais, contemplam

(*) Por exemplo a substituição da (inexistente) solução ordinária por uma y tal que $||My-b||$ seja mínima, e de existir várias dessas y, agregar a exigência adicional de que também $||y||$ seja mínima. Este y vem expresso mediante IG.

em forma natural a aparição de IG. Porém, nem é possível, nem é o propósito desta nota ser exaustivo a respeito, pelo que vamo-nos conformar com a apresentação de uma EA principal, da qual resultarão algumas IG, e que indicará o caminho a seguir noutros casos.

2 - A ESTRUTURA E SUA PARTICULARIZAÇÃO

Na apresentação da EA adequada, vão-se usar as convenções notacionais da ref. |1|. A EA a introduzir será "simples", ou seja, constará de um conjunto A e uma operação *, e será provisoriamente indicada :

$$EA = (A, *, Ax2, Axs4, Axs5) \quad (5) \quad (*)$$

Notar que não é exigido o cumprimento do Ax1 (clausurativideade ou fechamento), e que o plural nos axiomas 4 (existência do neutro) e 5 (idem do inverso), já indica que se vai permitir a existência separada de neutros e inversos esquerdos e direitos. Esses elementos são formalmente definidos por (6), (7), (8) e (9) respectivamente,

$$Ax\ 4i : (\exists n_i \in A), (\forall a \in A) : n_i * a = a \quad (6)$$

$$Ax\ 4d : (\exists n_d \in A), (\forall a \in A) : a * n_d = a \quad (7)$$

Nota 1: (6) e (7) não proibem $n_i = n_d = n$. Fim da nota (FN).

A apresentação dos axiomas que garantem a existência de inversos para cada elemento da estrutura deveria ser feita separadamente para n_i e n_d. Por sua vez, podem existir inversos esquerdos e direitos a respeito de ambos os neutros, o que dá 4 situações. Vamos sintetizá-las em 2 equações ((8), (9)), considerando um neutro genérico n_g, onde g = i,d segundo corresponda.

$$Ax\ 5ig : (\forall a \in A), (\exists a_{invig} \in A) : a_{invig} * a = n_g \quad (8)$$

$$Ax\ 5dg : (\forall a \in A), (\exists a_{invdg} \in A) : a * a_{invdg} = n_g \quad (9)$$

Nota 2: (8) e (9) não proibem $a_{invig} = a_{invdg} = a_{invg}$, ou ainda $a_{invi} = a_{invd} = a_{inv}$. Se esta última situação acontecer $\forall a \in A$, ela corresponderia à existência dos inversos ordinários (FN).

A EA(5) pode agora escrever-se como:

$$EA = (A, *, Axs(2, 4i, 4d, 5ii, 5id, 5di, 5dd)) \quad (10)$$

e denominar-se "associoide com neutros esquerdos e direitos, e inversos esquerdos e direitos para cada neutro".

Substituindo (8) em (6), considerando que então só pode ser g=i, tem-se :

$$(a_{invii} * a) * a = a_{invii} * a * a = a \quad (11)$$

Nota 3: O axioma associativo Ax 2 torna possível a supressão dos parênteses em expressões involucrando mais de dois operandos (FN).

Substituindo (9) em (6) :

$$a * a_{invdi} * a = a \quad (12)$$

Substituindo (8) e (9) em (7) (agora g = d) :

$$a * a_{invid} * a = a \quad (13)$$

$$a * a * a_{invdd} = a \quad (14)$$

A EA (10) vai-se particularizar (*) da seguinte forma: A = {M}, conjunto das matrizes, com elementos definidos sob o campo dos complexos, de índices h,k, isto é :

$$\{M\} = \{M_{hh}\} \cup \{M_{hk}\} \cup \{M_{kh}\} \cup \{M_{kk}\} \quad (15)$$

* = . , produto matricial

Nota 4: A particularização feita não proíbe que seja h = k. Nesse caso, {M} =

(*) Razões que resultarão claras ao avançar neste trabalho, tornam aconselhável começar a numeração das equações por (5).

(*) O vocábulo "particularizar" deve-se interpretar no sentido estabelecido em |2|, 4.

(M_{hh}), conjunto das matrizes quadradas de ordem h (FN).

Nota 5: É claro que no caso h≠k, o produto de matrizes só é definido quando os fatores forem compatíveis. Mas já notou-se que (10) não estabelece que a operação seja fechada. Assim sendo, as operações a seguir terão sentido no caso de produtos compatíveis (FN).

Dada a dualidade entre (11), (12) e (13), (14), considerar-se-á no que segue só as particularizações do primeiro par de equações. O segundo subíndice g é então desnecessário, e denominando $M_i(M_d)$, as inversas esquerdas (direitas) de M, resulta

(11) → $M_i.M^2 = M$ (16)

(12) → $M.M_d.M = M$ (1)

(16) requer a existência do quadrado de M, o que implica em "M quadrada". Por sua vez, (1) permite a consideração de matrizes retangulares, mas pelo indicado na nota 5 se M for de ordem h x k, M_d terá de ser de ordem k x h, e vice-versa.

M_i e M_d são IG, no sentido em que se M for não singular, então $M_i=M_d=M^{-1}$, e (16), (1) ficam automaticamente satisfeitas. Sendo M singular, é conhecido o fato de que existem em geral infinitas IG de cada tipo (com a exceção da denominada "pseudo-inversa" ou IG(1,2,3,4), que se existir, é única, veja |3|, 1.1)

Uma matriz que obedeça a (16) é uma IG não muito comum. Porém, na literatura especializada podem-se achar IG cumprimentando esta condição (veja p.ex. a "χ-inverse", A_χ^-, de |4|, 4.2).

Em contraste, a (1) define uma IG de aparição muito frequente, conhecida por certos autores como IG(1), (em inglês: (1)-inverse), e notada $M^{(1)}$ (*), e por outros como "inversa generalizada" (sem outro aditamento) (em inglês: g-inverse), e nessa acepção é denotada M^- (veja |4|, 2.2). Esta é uma IG muito geral, e impondo condições adicionais resultam várias IG mais particulares, porém muito usadas em aplicações.

(*) Para uma justificativa dessas denominações, veja |3|, 1.1 ou |5|, 4. Para um estudo de suas propriedades, veja |3|, 1.3, ou |4|, 2.2.

3 - Exemplos

Esta seção está destinada a apresentar alguns exemplos concretos de IG, e pode ser omitida pelo leitor com experiência no assunto. Em todos os exemplos as verificações deixam-se por conta do leitor.

Exemplo 1: M_i cumprimentando (16).

Seja $M=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, onde a,b∈C, a≠0. Uma M_i é $\begin{bmatrix} a^{-1} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

O leitor que faça a verificação comprovará que ambos os "1" de M_i vão-se anular porque sempre são multiplicados por zeros. Isto indica que existem infinitas M_i, sendo sua expressão geral $\begin{bmatrix} a^{-1} & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, com α, β quaisquer ∈C(*). Isto é típico do que acontece com as IG, e ocorre também nos exemplos a seguir, ainda que essa circunstância não será ressaltada.

Já foi indicado que uma IG cumprimentando (16) é muito pouco usada. Por isso os restantes exemplos da seção vão-se referir às IG(1).

Exemplo 2: M_d retangular definida sobre o campo real (este exemplo toma-se de |5|, 3.2.1.)

$$M=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix};\quad M_d=\begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Notar que aqui $M_dM=I$, o que assegura $MM_dM = MI = M$, não importando que $MM_d \neq I$.

(*) Em relação à citada A_χ^-, o leitor pode comprovar que a dada M_i também cumprimenta (1), e escolhendo valores adequados para α, β, as outras condições para ser uma "inversa-χ" (vide |4|, 4.2).

Exemplo 3: M_d retangular sobre o campo complexo:

$$M = \begin{bmatrix} 2i & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -10-10i \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$M_d = \begin{bmatrix} -(1/2)i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

É claro que podem existir M_d quadradas. Agregando uma coluna à M do ex. 2 (e uma fila à M_d) ter-se-á o :

Exemplo 4: M_d quadrada real:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad M_d = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5: M_d quadrada complexa (*):

$$M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}; \quad M_d = \begin{bmatrix} 1-2i & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Incidentalmente, os exemplos involucrando matrizes retangulares implicam em que sua EA automaticamente possua $n_i \neq n_d$, sendo, para uma M_{hk}, $n_i = I_{hh}$, $n_d = I_{kk}$. Se M é quadrada (M_{hh}), $n_i = n_d = n = I_{hh}$. Isto justifica a necessidade da introdução desdobrada do Ax 4 na EA(10).

4 - OUTRAS IG IMPORTANTES, E SUAS EA

Na apresentação axiomática das IG dão-se condições matriciais em M,X (X=IG) a serem cumprimentadas isolada ou conjuntamente. Porém, todas as possíveis matrizes solução X (se existir), reduzem-se a M^{-1} se a M for não singular. Assim sendo, se M for singular, as X generalizam o conceito de inversa matricial. (16) e (1) constituem exemplos dessas condições, mas existem muitas outras comuns (*).

Deseja-se agora apresentar, e considerando só a EA(10), as IG talvez mais frequentemente consideradas na literatura logo após da (1). Para isso, considere-se de novo à (8), mas agora supõe-se o inverso esquerdo de um elemento $b \in A$, $b \neq a$. Substituindo na (6) :

$$b_{invii} * b * a = a \qquad (17)$$

(17) é válida qualquer for "a". Então, vai-se escolher $a = b_{invii}$:

$$(17) = b_{invii} * b * b_{invii} = b_{invii} \qquad (18)$$

A passagem a notacão particularizada matricial leva a :

$$(18) \rightarrow M_i . M . M_i = M_i \qquad (2)$$

As IG cumprimentando (2) denominam-se comumente IG(2), e o tipo "puro" (ou seja cumprimentando só (2)), aparece em poucos problemas (**). Muito mais comum é a IG (1,2), que deve cumprimentar simultaneamente (1) e (2) (esta IG é também conhecida como "g-inversa reflexiva", veja |4|, 2.5).

Exemplo 6: Considere de novo o ex. 2. O fato assinalado de que lá $M_d M = I$, automaticamente a faz satisfazer (2), já que $M_d M M_d = I M_d = M_d$. Daí não deve-se concluir que para se ter IG(1,2) tem que se verificar XM=I ou MX=I. Considere o:

Exemplo 7: Uma IG(1,2) da M do ex. 5 é:

$X = \begin{bmatrix} 1/2 & i/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Observe que $MX \neq I$, $XM \neq I$. Incidentalmente, é interessante que o leitor verifique que a M_d do exemplo 5 não cumprimenta (2).

(*) O interesse deste exemplo, que se toma de |6|, consiste em que a dada M_d não cumprimenta nenhuma outra condição usual além de (1).

(*) Em |4|, 1, tabela 3.6, apresentam-se 27 tipos diferentes de IG.

(**) Para construção e aplicações dessas IG veja |3|, 1.9, 1.10.

Escola Federal Biblio

5 - CONCLUSÕES

Pretendeu-se mostrar nesta nota como as IG podem-se inserir em adequadas EA cujos conjuntos base são matrizes. Uma questão de "elegancia matemática" impõe que a EA escolhida seja a mais particularizada possível para o problema em consideração. Para as IG(1), (2) e (1,2) foi possível derivá-las mediante (11) e (12), pelo que as a_{invgd} não foram usadas. Os axiomas de (10) podem-se então particularizar para (2, 4i, 5ii, 5di). Igualmente poder-se-ia considerar (2, 4d, 5id, 5dd). No que a A_x^- se refere é evidente que, sendo as matrizes quadradas, os produtos entre elementos do conjunto base são sempre compatíveis, e além disso, $n_i = n_d = n$. Assim, uma EA mais particularizada que a (10) seria (A, *, Ax 1, Ax 2, Ax 4, Ax 5i). Trata-se de um quase grupo (não abeliano), o vocábulo "quase" é porque num grupo o axioma que vigora é o 5, que está aqui limitado para 5i.

Uma conclusão interessante do estudo que acaba de ser efetuado, é a utilidade da apresentação do tema EA na forma feita em |1|.

6 - FINAL

O leitor atento irá notar que ainda faltam no texto as equações (3), (4). Esses números são quase unanimamente reservados na literatura sobre IG, para expressar as condições :

$$\overline{(MX)}' = MX \quad (3) \quad ; \quad \overline{(XM)}' = XM \quad (4)$$

onde a barra indica "conjugada complexa", e o' "transposta".

As X que as cumprimentam são denominadas IG(3) e IG(4). Também existem denominações para cumprimentos simultaneos, e talvez as mais comuns são "IG normalizada" para a IG(1,2,3) e "pseudo inversa" para a IG (1,2,3,4). Esta última tem a particularidade que, se existir, é única.

Exemplo 8: Considere de novo os exs. 2 e 6. A M_d, que era IG(1,2), certamente deverá ser IG(4), já que a condição $M_dM = I$ é suficiente para assegurar (4). Dualmente, $MM_d = I$ assegura (3). Essas condições não são necessárias, e assim, a M_d em consideração é também IG(3), e portanto, pseudoinversa.

Uma pseudoinversa que não possue nem XM = I nem MX = I poderá ser observada no :

Exemplo 9: Considere de novo o ex. 7. A IG(1,2) lá apresentada é também IG(3), pelo que é uma inversa normalizada. Porém, ela não é IG(4). Por sua vez, uma IG(4) da dada M é a própria M, que também é IG(3) e portanto IG(3,4). Infinitas outras IG(3,4) resultam de X = rM, $\forall r \in R$. Mas se se desejar que X seja pseudoinversa, só um desses r vai satisfazer também (1), (2). É simples obter para isso r = 1/4.

BIBLIOGRAFIA

|1| - J. Feinstein & H. Arango - Relaciones de inclusión en estructuras algebraicas simples - EFEI PESQUISA Vol III Nº 3, 1977, pp 30/39.

|2| - J. Feinstein & H. Arango - Inclusión en estructuras de un conjunto y dos operaciones (2ª parte) EFEI PESQUISA Vol IV Nº 1, 1978, pp 29/34.

|3| - A.Ben-Israel & T.N.E. Greville - Generalized inverses: theory and applications - John Wiley & Sons, 1974.

|4| - C.R. Rao & S.K. Mitra - Generalized Inverse of Matrices and its Applications - John Wiley & Sons, 1971.

|5| - J.Feinstein - Extensión del concepto de inversa de una matriz: inversas generalizadas y pseudo inversas - Rev. Electrotécnica, Vol LX Nº 6, 1974, pp 212/225.

|6| - C.A. Rhode - Some results on generalized inverses - SIAM Review, Vol 8 Nº 2, 1966, pp 201/205.

Data 11/02/1972
Proc.
Ped.
Liv. C Pq - Inst. Juliano Barbosa
NCr$

I.V.
BIM - [illegible]
DATA | Su i o

C1

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200325
NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA