

TESE

334

- RAMON ROMANKEVICIUS COSTA -

COMPENSAÇÃO DE SISTEMAS

MULTIVARIÁVEIS: MÉTODO

DA DECOMPOSIÇÃO DIÁDICA

ORIENTADOR: PROF. JAIME FEINSTEIN

CO-ORIENTADOR: PROF. FERNANDO JOSÉ COSTANTI

TRABALHO DE DISSERTAÇÃO APRESENTADO À COMISSÃO DE
PÓS-GRADUAÇÃO DA ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ COMO PARTE
DOS REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE "MESTRE EM ENGENHARIA ELÉ-
TRICA"



ITAJUBÁ, JUNHO DE 1982

CLASS. 681.3.056:517.9 (043.2)

CUTT. C834e

TOMBO 334

COMPENSAÇÃO DE SISTEMAS

MULTIVARIÁVEIS: MÉTODOS

DA DECOMPOSIÇÃO DÍFICA

ORIENTADOR: PROF. GAIOME FERREIRA

CO-ORIENTADOR: PROF. FERNANDO JOSÉ COSTANTINI

TRABALHO DE DISSERTAÇÃO APRESENTADO À COMISSÃO DE
POS-GRADUAÇÃO DA ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ COMO PARTE
DOS REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA DE
ELÉTRICA

ESCOLA FEDERAL DE
ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
10 JUL 1993
BIBLIOTECA





Ministério da Educação e Cultura
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

A N E X O I I

FOLHA DE JULGAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA

Título da Dissertação: "COMPENSAÇÃO DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS: MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DIÁDICA"

Autor: RAMON ROMANKEVICIUS COSTA

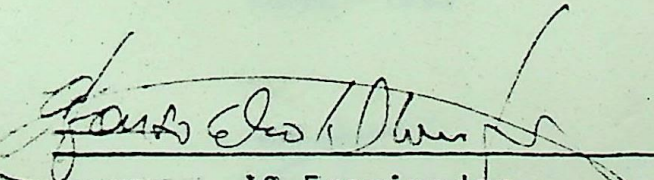
JULGAMENTO

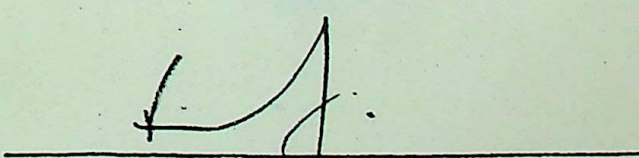
EXAMINADORES	CONCEITO	RUBRICA
1º	A	AC
2º	A	CF
3º	A	EF

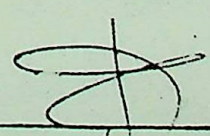
Resultado médio: Conceito A, ou seja Aprovado

Observações: _____

Itajubá, 01 de julho de 1982


1º Examinador
Prof. Afonso Celso Del Nero Gomes
COPPE - UFRJ


2º Examinador
Prof. Fernando José Costanti
EFEI


3º Examinador
Prof. Jaime Feinstein
ORIENTADOR



Ministério da Educação e Cultura
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

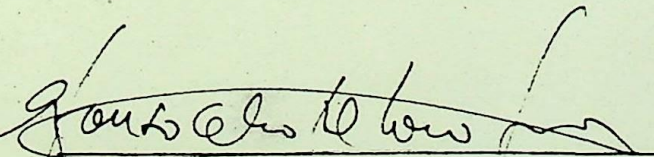
A N E X O I

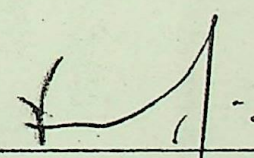
PRONUNCIAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA

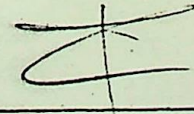
A Comissão Examinadora, abaixo assinada, nomeada por Portaria nº 137 de 29/06/82, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada: "COMPENSAÇÃO DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS: MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DIÁDICA"

apresenta pronunciamento no sentido de que a Comissão de Pós-Graduação da Escola Federal de Engenharia de Itajubá solicite ao DRA (Departamento de Registros Acadêmicos) a expedição do título de Mestre em Engenharia Elétrica na Área de Concentração de Sistemas de Potência satisfeitas as demais exigências regimentais à Ramon Romankevicius Costa.

Itajubá, 01 de julho de 1982


1º Examinador
Prof. Afonso Celso Del Nero Gomes
COPPE - UFRJ


2º Examinador
Prof. Fernando José Costanti
EFEI


3º Examinador
Prof. Jaime Feinstein
ORIENTADOR

4º Examinador

AGRADECIMENTOS

Fica aqui registrada minha profunda gratidão ao Professor Jaime Feinstein pela sugestão do tema e orientação, ao Professor Antonio Eduardo Hermeto, pela oportunidade de frequentar o curso de Pós-Graduação, à minha esposa Raquel pelo trabalho de datilografia e revisão, à todos aqueles que de alguma forma cooperaram na realização do presente trabalho.

Ramon Romankevicius Costa

Junho de 1982.

Índice

Abreviaturas utilizadas	1
Capítulo 1 - Introdução	2
Capítulo 2 - Conceitos de Sistemas Multivariáveis	7
2.1 - Notação e Simbologia	7
2.2 - Sistemas Multivariáveis	12
2.3 - Modelo de Estado de Sistemas Multivariáveis	14
2.3.1 - Obtenção do Modelo de Estado a Partir das Equações Diferenciais	15
2.3.2 - Representações Equivalentes do Modelo de Estado	23
2.4 - Modelo Transferencial de Sistemas Multivariáveis	27
2.4.1 - Matriz de Funções de Transferência	28
2.4.2 - Relação Entre os Modelos de Estado e Transferencial	29
2.4.3 - Pólos e Zeros	32
2.5 - Sistemas Multivariáveis Realimentados	35
2.6 - Critérios de Performance	41
2.6.1 - Estabilidade	41
2.6.2 - Integridade	45
2.6.3 - Interação	53
2.6.4 - Eixo Excepcional	54
Capítulo 3 - Compensação de Sistemas Multivariáveis Pelo Método da Decomposição Distança	57
3.1 - Matriz de Funções de Transferência	59
3.1.1 - Obtenção do Modelo de Funções de Transferência	57

A minha esposa
Raquel
Aos meus pais
Ramon e Petronilha

ÍNDICE

Abreviaturas utilizadas	1
Capítulo 1 - Introdução	2
Capítulo 2 - Conceitos de Sistemas Multivariáveis	7
2.1 - Notação e Simbologia	7
2.2 - Sistemas Multivariáveis	12
2.3 - Modelo de Estado de Sistemas Multivariáveis	14
2.3.1 - Obtenção do Modelo de Estado a Partir das Equações Diferenciais	15
2.3.2 - Representações Equivalentes de Modelos de Estado	23
2.4 - Modelo Transferencial de Sistemas Multivariáveis	27
2.4.1 - Matriz de Funções de Transferência	28
2.4.2 - Relação Entre os Modelos de Estado e Transferencial	29
2.4.3 - Polos e Zeros	32
2.5 - Sistemas Multivariáveis Realimentados ...	35
2.6 - Critérios de Performance	41
2.6.1 - Estabilidade	41
2.6.2 - Integridade	45
2.6.3 - Interação	53
2.6.4 - Erro Estacionário	54
Capítulo 3 - Compensação de Sistemas Multivariáveis Pelo Método da Decomposição Diádica	57
3.1 - Matriz de Funções de Transferência Diádica	65
3.1.1 - Obtenção do Modelo de Estado de uma Matriz de Funções de Transferência Diádica	67

3.1.2	- Obtenção da Expansão Diádica a Partir do Modelo de Estado	69
3.1.3	- Propriedades das Matrizes de Funções de Transferência Diádicas	81
3.1.4	- Determinação de Expansões Diádicas	83
3.2	- Aplicação do Conceito de Matriz de Funções de Transferência Diádica ao Projeto do Controlador	89
3.3	- Expansões Diádicas Aproximadas	108
3.4	- Compensação de Sistemas Multivariáveis Via Expansão Diádica Aproximada	122
Capítulo 4	- Aplicação Prática	130
Capítulo 5	- Conclusões	147
Apêndice	- Expansões Diádicas	149
Bibliografia e Referências	157

ABREVIATURAS UTILIZADAS

- ED - Expansão Diádica
- FT - Função de Transferência
- MAIN - Método do Arranjo Inverso de Nyquist
- MCC - Método do Controlador Comutativo
- MCNI - Método do Controle Não Interativo
- MDD - Método da Decomposição Diádica
- MDRS - Método da Diferença de Retorno Sequencial
- MFT - Matriz de Funções de Transferência
- MFTD - Matriz de Funções de Transferência Diádica
- SM - Sistema Multivariável

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Muitas foram as técnicas desenvolvidas nos últimos anos para a análise, síntese e projeto de sistemas multivariáveis (£). Todas elas, no entanto, foram influenciadas e transformadas pela introdução do conceito de estado. O enfoque por variáveis de estado surgiu como tentativa de solução de um conjunto de problemas, onde as técnicas que configuram o que agora se conhece como enfoque clássico, evidenciaram ser insatisfatórias, ou seja, no tratamento de sistemas que difiram do sistema básico (§) em mais de uma característica adicional, por exemplo, não linearidade, múltiplas entradas e saídas, etc., ou ainda para certas características específicas, tais como variância de parâmetros e outras.

Este enfoque retoma as equações diferenciais como ponto de partida, porém dá-lhes um tratamento diferente do do enfoque clássico, utilizando-se das poderosas ferramentas do cálculo matricial e tomando "emprestados" todos os algoritmos computacionais pertinentes. Foi uma técnica desenvolvida por pesquisadores com mentalidade matemática, ou por matemáticos mesmo, daí a preocupação com formulações matemáticas rigorosas dos problemas envolvidos, bem como do estabelecimento de condições de suficiência e necessidade para as soluções procuradas. A utiliza-

(£) MacFarlane faz uma distinção entre os termos "síntese e "projeto". Para ele, um trabalho de síntese relaciona-se com problemas que são formulados e solucionados dentro de todo rigor matemático disponível, de preferência com a ajuda de algoritmos computacionais. Em contrapartida, um trabalho de projeto utiliza a prática, a experiência e principalmente o raciocínio físico como ferramenta de solução.

(§) Sistema básico é definido como o sistema que cumpre as restrições: de ser linear, invariante, possuir parâmetros concentrados, não conter retardos, ser monovariável, etc. (veja a respeito disso em [F-F-C], Vol.I, Cap.1).

ção deste enfoque possibilitou resolver importantes problemas de controle, principalmente no campo aerespacial, além de despertar um grande interesse nas suas possibilidades de aplicação.

Contudo, a técnica de realimentação de estado necessita de modelos de planta razoavelmente precisos como ponto de partida e portanto não é adequada para certos tipos de aplicações industriais onde somente é possível obter-se modelos experimentais relativamente grosseiros e, mesmo que se pudesse obter estes modelos apurados, outras desvantagens foram evidenciadas no percurso do tempo. No caso de sistemas que difiram do básico apenas pela existência de múltiplas entradas e saídas - denominados no que se segue de sistemas multivariáveis (SM) - algumas dessas desvantagens podem ser listadas:

(a) Não fornece informações sobre como proceder à compensação dinâmica dos elementos;

(b) Não fornece meios de se correlacionar a resposta transitória do sistema a laço fechado (a qual envolve os zeros de todas as funções de transferência) com a posição dos polos das funções de transferência a laço fechado;

(c) Não fornece meios de se controlar os estados do sistema; somente combinações lineares desses estados é que são controladas (a saída do sistema é uma combinação linear de estados). Em certas circunstâncias, isto pode produzir situações em que o sistema assim controlado acabe possuindo péssimas propriedades de rejeição de perturbações, caso característico de controladores cuja matriz possui posto unitário; além disso, podem ocorrer grandes distúrbios dos estados, mesmo quando são utilizados ganhos elevados no controlador. (Ver [M1], pág. 2042).

Cabe aqui esclarecer que os inconvenientes assinalados não são "absolutos"; existem trabalhos onde essas dificuldades encontram-se parcialmente superadas, mas em geral em contextos

de Nyquist-Bode Generalizados e o Método do Lugar das Raízes Multivariável. O Método da Decomposição Diádica também pode ser inserido nesta categoria;

(c) Métodos de resposta em frequência para otimizar projetos de controladores multivariáveis sob restrições, tais como o Método Wiener-Hopf Multivariável;

(d) Métodos que buscam estender ao domínio da frequência os poderosos resultados que vêm surgindo do concentrado esforço realizado, desde 1960, na análise e projeto de controladores. Estes métodos estão mais interessados na determinação de técnicas exatas de síntese, contrastando com as generalizações das técnicas clássicas, cujos métodos de projeto permitem e, ao mesmo tempo, requerem uma grande capacidade de julgamento intuitivo. Nesta categoria visa-se muito a utilização de resultados, tais como o princípio do modelo intrínseco de Wonham.

Este trabalho focalizará um destes métodos como tema central: o Método da Decomposição Diádica, ou abreviadamente MDD. Este método, engenhosamente formulado por Owens e publicado originalmente em [02], no ano de 1973, foi ainda tema para uma sequência de papers publicados pelo autor, cada um deles abrindo uma nova perspectiva de utilização do método e culminando com [06], seu livro texto, onde, além de recapitular seus artigos, Owens acrescenta novos e interessantes detalhes. De um modo geral, a formulação de todos os artigos, inclusive o livro, é feita através de uma linguagem matemática bastante complicada, o que torna o tema obscuro sob o ponto de vista computacional. Isto motivou o objetivo didático deste trabalho.

No capítulo 2 são relembrados conceitos básicos necessários ao desenvolvimento do tema principal, tais como: modelagem de sistemas por variáveis de estado e por funções de trans-

ferência, critérios de performance, etc., bem como tópicos de notação e terminologia. No capítulo 3 desenvolve-se o tema principal propriamente dito. É realizada uma apresentação onde são abordados detalhes matemáticos e computacionais do método. Ainda neste capítulo é apresentada uma extensão do método, ou seja, a utilização de Expansões Diádicas aproximadas. No capítulo 4 é feita uma aplicação prática.

Durante todo o desenvolvimento deste trabalho, e especialmente dos capítulos 2 e 3, são feitos muitos paralelos entre os modelos de estado e os transferenciais por dois motivos: (1) Forte tendência de unificação dos enfoques clássicos e modernos (por variáveis de estado) presente em praticamente toda obra recente sobre o assunto; (2) Possibilidade de utilizar algoritmos numéricos (próprios do controle moderno) e contar com a correspondente interpretação física dos resultados obtidos (característica do modelo transferencial).



CAPÍTULO 2

CONCEITOS DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

2.1 - NOTAÇÃO E SIMBOLOGIA

Nesta seção faz-se o esclarecimento de alguns tópicos sobre a notação adotada e relaciona-se, na forma de uma tabela, todos os símbolos que são utilizados correntemente. A existência desta tabela, e seu prévio conhecimento, permite ao leitor empreender uma consulta a qualquer seção, sem ter que vasculhar seções prévias, à cata de notas sobre a simbologia. Alguns símbolos, os que não são de uso corrente, foram dispensados da tabela.

As principais convenções notacionais utilizadas no texto são:

(1ª) Será usada a classificação decimal para a divisão dos capítulos, ou seja, o primeiro dígito indicará o capítulo em questão, o segundo dígito indicará a seção, o terceiro, a subseção, etc..

(2ª) A numeração das equações será feita sequencialmente, seção por seção, por um único número entre parentesis. O mesmo ocorrerá nos apêndices. Dentro de uma mesma seção, as equações serão referenciadas somente pelo seu número. Quando for o caso de se referenciar uma equação de outra seção, do mesmo capítulo ou não, isto será expressamente indicado.

(3ª) As figuras não são numeradas. Quando for necessário referenciá-las, será fornecido o número da página onde se encontram.

(4ª) As referências bibliográficas serão indicadas por [.] , com a inicial do ou dos autores. Se houver mais de um autor, serão indicadas as iniciais de todos eles, separadas por

traços, na ordem em que aparecem na respectiva referência. Se houver mais de uma referência correspondente à mesma sigla literal, serão agregados números a partir da primeira referência de igual sigla, ou seja, existirão as referências $[M1]$, $[M2]$, etc., mas não existirá $[M]$.

(5ª) As expressões de uso mais freqüente são abreviadas. Tais abreviaturas estão listadas no começo deste trabalho, logo em seguida ao índice.

Segue-se agora uma exposição da simbologia utilizada:

Toda matriz de ordem $m \times n$ definida sobre o campo dos números reais ou complexos é simbolizada através de letras maiúsculas, exemplos: A, M, B, etc.

As matrizes de Funções de Transferência são notadas por letras maiúsculas acompanhadas da variável complexa s entre parêntesis, exemplos: $G(s)$, $H(s)$, $K(s)$, etc..

Os vetores (arranjos de ordem $n \times 1$) são simbolizados por letras minúsculas, exemplos: e , w , z , etc., para o caso numérico; $g(s)$, $u(s)$, $x(t)$, etc., para vetores de funções. Os vetores transpostos (ou vetores filas) recebem a mesma notação acrescida de um super-índice t , exemplos: x^t , w^t , $y^t(s)$, etc..

Na forma expandida, qualquer matriz ou vetor será representado através do seu arranjo característico delimitado por chaves, exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad G(s) = \begin{bmatrix} 1/s & 1/s+1 \\ 1/s+2 & 1/s \end{bmatrix}; \quad u(s) = \begin{bmatrix} 1/s \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w^t = [1 \ 2 \ 0]$$

O determinante e a adjunta de uma matriz ou de uma expressão matricial são indicados pelas abreviaturas \det e adj , respectivamente, exemplos: $\det A$, $\det G(s)$, $\text{adj}(sI-A)$, etc.

Utiliza-se o super-índice -1 para indicar a inversa e t para indicar a transposta de uma matriz. Por exemplo, para as matrizes A, H(s) e C, indica-se as suas inversas como: A^{-1} , $H^{-1}(s)$, C^{-1} ; e suas transpostas como: A^t , $H^t(s)$ e C^t .

O posto e a ordem de uma matriz são notados por $r(\cdot)$ e $\text{ord}(\cdot)$, respectivamente. Exemplos: $r(A)$, $r(G(s))$, $\text{ord}(A_i)$, $\text{ord}(M)$, etc.

Uma matriz diagonal é representada como $\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, onde a_1, a_2, \dots, a_n são os elementos situados na diagonal principal.

Obedecendo ao que foi exposto, tem-se a seguinte lista de símbolos:

α	constante escalar real ou complexa;
λ	autovalor;
e_k	vetor base (todos os seus elementos são nulos exceto o k-ésimo, que vale 1);
n	número de entradas e saídas de um SM; ordem das MFT's;
p	dimensão do modelo de estado;
s	indeterminada ou variável complexa;
t	variável tempo;
e, e(t)	vetor de erro;
r, r(t)	vetor de referência;
u, u(t)	vetor de entrada;
x, x(t)	vetor de estado;
y, y(t)	vetor de saída;
e(s)	vetor de erro complexo;
r(s)	vetor de referência complexo;
u(s)	vetor de entrada complexo;
x(s)	vetor de estado complexo;
y(s)	vetor de saída complexo;

$e_j(s)$	erro complexo na saída j;
$e_j(\infty)$	erro estacionário na saída j;
\hat{x}	vetor de estado transformado;
\dot{x}	primeira derivada do vetor de estado;
A, B, C, D	matrizes de modelo de estado;
$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$	matrizes do modelo de estado equivalente;
I	matriz unitária;
M	matriz modal; matriz de autovetores;
Λ	matriz diagonal; matriz de autovalores;
Q, Z, W	matrizes de transformação;
z_i	coluna i da matriz Z;
w_i^t	fila i da matriz W;
G(s)	MFT da planta;
K(s)	MFT do controlador;
H(s)	MFT do sistema a laço fechado;
F(s)	MFT do sistema a laço aberto;
$G_A(s), G_B(s)$	MFTD's aproximadas da MFT G(s);
$H_B(s)$	MFT do sistema a laço fechado onde a planta é $G_B(s)$;
$\lambda_i(s)$	FT's características;
$h_i(s)$	FT característica i de H(s);
$\tilde{h}_i(s)$	FT característica i de $H_B(s)$;
$g_i(s)$	subsistema i de G(s);
$k_i(s)$	subsistema i de K(s);
$\hat{g}_i(s)$	subsistema i de $G_A(s)$;
$\tilde{g}_i(s)$	subsistema i de $G_B(s)$;
$\rho(s)$	polinômio característico;

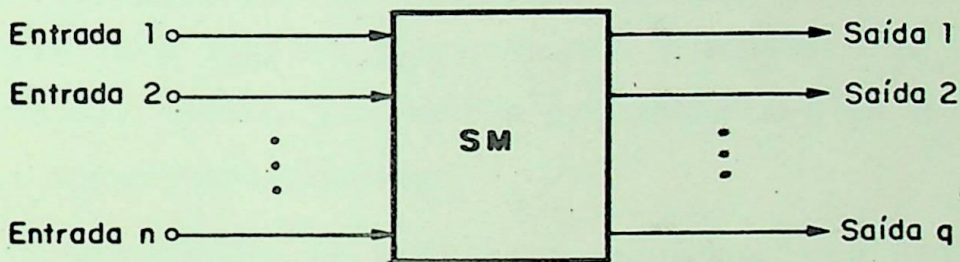
- $e_{LA}(s)$ polinômio característico do sistema a laço aberto;
- $e_{LF}(s)$ polinômio característico do sistema a laço fechado;
- $e_{LFCF}(s)$ polinômio característico do sistema a laço fechado com falha;
- $e_{LACFA}(s)$ polinômio característico do sistema a laço aberto com falha de atuador;
- $e_{LFCFA}(s)$ polinômio característico do sistema a laço fechado com falha de atuador;
- $e_{LFCFS}(s)$ polinômio característico do sistema a laço fechado com falha de sensor.

2.2 - SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

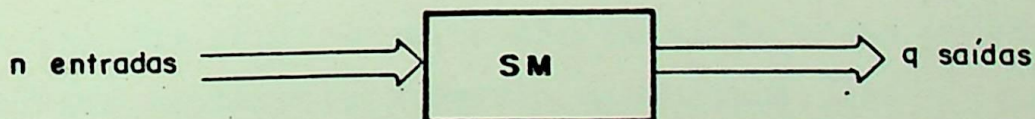
A teoria de controle, como hoje é conhecida, não se concentra no estudo direto de sistemas físicos, mas ao estudo de uma classe de representações matemáticas ou modelos desses sistemas.

Neste trabalho somente são estudados modelos de sistemas dinâmicos multivariáveis que sejam simultaneamente lineares, invariantes e de dimensão finita. Por brevidade, tais sistemas são tratados simplesmente por "sistemas multivariáveis" e abreviadamente por SM.

A representação de um SM é tal como na figura abaixo:



ou ainda (no caso da representação vetorial das entradas e saídas):



Representações gráficas de um SM.

A figura mostra o caso mais geral de SM, ou seja, distintos números de entradas e saídas, o que evidentemente não é o caso a ser estudado neste trabalho, pois desde um ponto de vista de controle de um tal sistema, $q > n$ indica usualmente um

"descontrole", ou existência de $q - n$ saídas linearmente dependentes (cada entrada normal é uma forma de indicar a uma saída o que se deseja que ela execute, ou equivalentemente, que função de tempo deve implementar; se $q > n$ uma única "indicação" deveria governar mais de uma saída). Se em vez $n > q$, haveria entradas redundantes, ou equivalentemente, várias entradas pretenderiam governar um menor número de saídas; isto somente seria possível se as entradas não fossem independentes.

2.3 - MODELO DE ESTADO DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

O conceito de modelo de um sistema dinâmico é, por si só, bastante complicado, pois envolve informações à priori e à posteriori sobre a estrutura, comportamento e leis físicas que governam os componentes individuais do sistema. Algumas das possíveis informações necessárias para se construir um modelo são:

(a) Dados obtidos experimentalmente pela excitação do sistema com sinais de teste perfeitamente conhecidos (exemplos: degrau unitário, senóide, etc.) e posterior mensuração dos sinais obtidos como resposta;

(b) Um conjunto de equações diferenciais ordinárias ou parciais, lineares ou não-lineares, obtidas a partir do conhecimento das leis físicas que governam a dinâmica do sistema. Eventualmente, vários parâmetros presentes nestas equações são estimados experimentalmente;

(c) Resultados da análise estatística dos dados do sistema para quantificar os efeitos do ruído nos componentes;

(d) Um conjunto de considerações necessárias para descrever os componentes do sistema, cujas informações obtidas teoricamente e experimentalmente são inadequadas;

(e) Uma réplica em escala reduzida ou um protótipo do sistema, que implemente o modelo matemático.

Não é objetivo deste trabalho considerar todas estas informações na modelagem de sistemas, nem tampouco é necessário para o desenvolvimento que se segue. Esta classificação é aqui apresentada somente para fornecer uma idéia global do assunto e mostrar quão elementares podem ser os modelos lineares e invariantes, se comparados com modelos mais complexos e elaborados

que incorporam uma quantidade muito maior de informação.

Esta seção será dedicada exclusivamente à apresentação de um modelo bastante importante na teoria de controle, resultado da união das informações contidas nas equações diferenciais do sistema (assinaladas no item (b) da classificação dada acima) com a moderna teoria matricial. Tal é o Modelo de Estado.

2.3.1 - OBTENÇÃO DO MODELO DE ESTADO A PARTIR DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS (§)

Seja o equacionamento de um SM com n entradas e n saídas, através de um conjunto de $p \geq n$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, escritas na forma padrão da equação (1) abaixo:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = a_{i1} x_1 + \dots + a_{ip} x_p + b_{i1} u_1 + \dots + b_{in} u_n, \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad (1 \leq i \leq p) \quad (1)$$

$$y_j = c_{j1} x_1 + \dots + c_{jp} x_p + d_{j1} u_1 + \dots + d_{jn} u_n, \quad (1 \leq j \leq n)$$

onde t é a variável tempo, x_1, \dots, x_p são as denominadas variáveis de estado, u_1, \dots, u_n representam as entradas ou variáveis de controle e y_1, \dots, y_m representam as respostas ou variáveis de saída do sistema. Como não há possibilidade de confusão, o argumento t entre parêntesis foi suprimido da notação das variáveis x , u e y , apesar de serem todas elas funções temporais lineares (E).

(§) Praticamente todo este capítulo está baseado nas referências [L2], [06] e [W], onde o assunto é tratado a nível de capítulo introdutório e [Fl], obra onde o assunto é abordado com algo mais de detalhe.

(E) O conceito de "estado" é suposto conhecido.

Definindo-se as matrizes A, B, C e D como na eq. (2) e os vetores x, y e u como na eq. (3), pode-se reescrever a eq. (1) na forma compacta dada pelas eqs. (4) e (5).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{np} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{p0} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4)$$

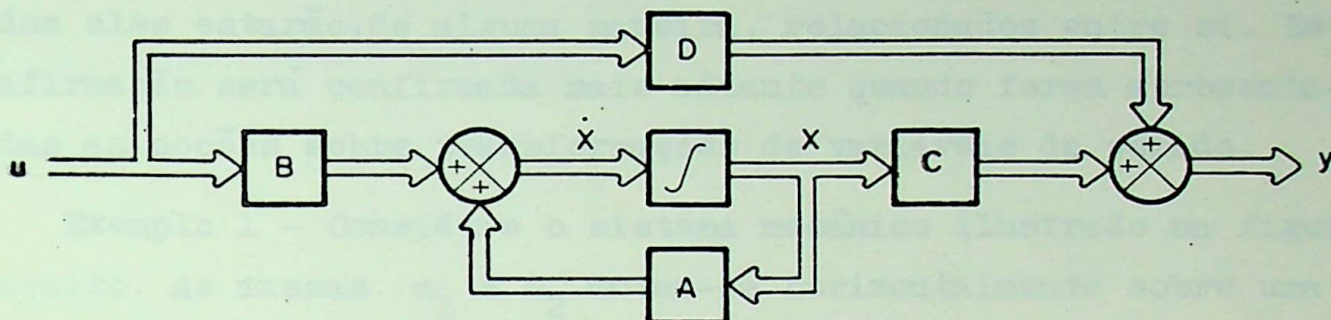
$$y = Cx + Du \quad (5)$$

As equações (4) e (5) são denominadas "equação de estado" e "equação de saída", respectivamente e o par, equações (4) e (5) juntas, compõe a forma padrão matricial do modelo de estado. As matrizes A, B, C e D recebem os nomes especiais de matriz de sistema, matriz de entrada, matriz de saída e matriz de transmissão, nesta ordem. Os vetores x, y e u também possuem suas designações próprias, ou seja, vetor de estado, vetor de saída e vetor de entrada, respectivamente.

Quando for necessário fazer alusão ao conjunto de matrizes A, B, C e D, será usada a nomenclatura "representação (A, B, C, D)". Do mesmo modo, qualquer sub-conjunto pode ser tratado de maneira semelhante, por exemplo: representação (A, B, C), (A, B), (A, C). (Convém esclarecer que esta nomenclatura não é para indicar que o modelo de estado em questão possua somente as ma-

trizes A e B ou A e C, mas que somente estas matrizes são de interesse na aplicação teórica feita na oportunidade).

A figura abaixo fornece uma interpretação gráfica do modelo de estado dado pelas eqs. (4) e (5).



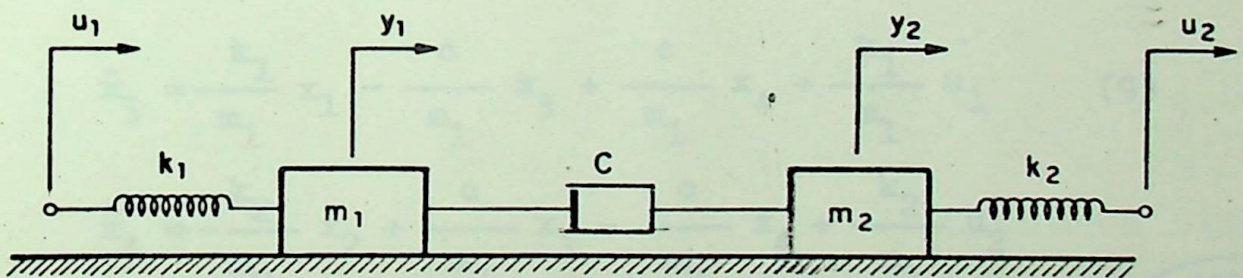
Representação em blocos matriciais do modelo de estado

É muito mais provável que, ao invés das p equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, dadas inicialmente pela equação (1), disponha-se, em certo ponto do equacionamento, de apenas n equações diferenciais de ordem p_1, \dots, p_n , respectivamente, e onde somente fossem relacionadas as entradas e saídas do sistema, bem como suas sucessivas derivadas. Neste caso supõe-se conhecido o artifício matemático de transformação destas n equações diferenciais em um conjunto de $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ equações diferenciais de primeira ordem, semelhantes ao dado em (1), através da escolha de um número adequado de variáveis de estado (§). Esta escolha pode ser efetuada de várias maneiras diferentes (de fato infinitas), e uma muito útil por seu sentido prático consiste em fazer coincidir as variáveis de es-

(§) Consultar por exemplo [Fl], Cap. 1, seções 2 e 3.

tado com grandezas físicas significativas ao problema (por exemplo, num circuito elétrico é regra geral escolher-se as variáveis de estado como conjuntos linearmente independentes de correntes e tensões nos ramos), porém, nada impede que essas variáveis de estado sejam definidas como combinações lineares adequadas dessas grandezas. Obviamente diferentes escolhas de variáveis de estado resultarão em diferentes modelos; porém todos eles estarão, de alguma maneira, relacionados entre si. Esta afirmação será confirmada mais adiante quando forem apresentadas as noções sobre transformações de variáveis de estado.

Exemplo 1 - Considere o sistema mecânico ilustrado na figura abaixo. As massas m_1 e m_2 movem-se horizontalmente sobre uma superfície sem atrito. k_1 e k_2 são as constantes de mola e c é a constante de amortecimento. As entradas u_1 e u_2 do sistema são os deslocamentos dos terminais da mola, com relação à posição inicial de repouso e as saídas y_1 e y_2 são os deslocamentos das massas m_1 e m_2 , respectivamente. Achar o modelo de estado deste sistema.



Sistema mecânico massa-mola.

Aplicando-se as leis de Newton, obtém-se as equações (6).

$$m_1 \ddot{y}_1 = k_1 (u_1 - y_1) + c (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \quad (6)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = k_2 (u_2 - y_2) - c (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$$

Definindo-se as variáveis de estado x_1 a x_4 como:

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1 \\x_2 &= y_2 \\x_3 &= \dot{x}_1 = \dot{y}_1 \\x_4 &= \dot{x}_2 = \dot{y}_2\end{aligned}\tag{7}$$

Pode-se reescrever (6) como:

$$\dot{x}_3 = \frac{k_1}{m_1} (u_1 - x_1) + \frac{c}{m_1} (x_4 - x_3)\tag{8}$$

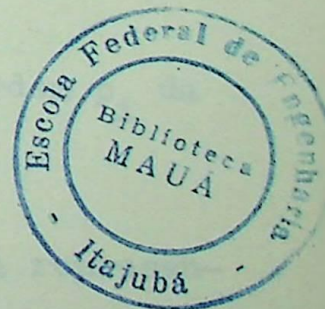
$$\dot{x}_4 = \frac{k_2}{m_2} (u_2 - x_2) - \frac{c}{m_2} (x_4 - x_3)$$

A partir das eqs. (7) e (8) monta-se o sistema de equações na forma padrão sugerida pela eq. (1). Resulta, então:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{c}{m_1} x_3 + \frac{c}{m_1} x_4 + \frac{k_1}{m_1} u_1 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{k_2}{m_2} x_2 + \frac{c}{m_2} x_3 - \frac{c}{m_2} x_4 + \frac{k_2}{m_2} u_2\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2\end{aligned}\tag{10}$$

As equações (11) e (12), que se seguem, fornecem a forma final matricial do modelo de estado desejado.



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 & \frac{-c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ 0 & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{c}{m_2} & \frac{-c}{m_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} u \quad (11)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \quad (12)$$

Note que a matriz D da eq. (12) resultou nula. Praticamente, é este o caso que ocorre com mais frequência, a tal ponto que, mesmo no tratamento teórico do assunto, muitos autores somente utilizam o terno (A, B, C) como representativo do modelo de estado. Naturalmente surge a questão: o que significa $D = 0$?

Para a análise matemática do caso, considere um conjunto de n equações diferenciais de ordens p_1, \dots, p_n que equacionam um SM com n entradas e n saídas,

$$\begin{matrix} (p_i) & & (p_i-1) & & & & (q_i) \\ y_i + a_{p_i-1} y_i^{(p_i-1)} + \dots + a_1 \dot{y}_i + a_0 y_i = b_{q_i} u_i + \dots + b_1 \dot{u}_i + b_0 u_i, \end{matrix} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (13)$$

onde a notação $y_i^{(p_i)}$ simboliza a derivada de ordem p_i da variável y_i .

Note que a eq. (13) é uma particularização da representação geral de um sistema de equações diferenciais, onde cada uma das equações pode ser uma combinação linear de todas as variáveis u e y e sucessivas derivadas. Porém, não há perda de

generalidade na consideração da eq. (13) em lugar do caso geral, ou seja, os resultados obtidos na presente análise serão perfeitamente válidos em qualquer caso, só que, assim sendo, con- torna-se a notação relativa ao caso geral, que é bastante mais envolvida.

Sem tentar demonstrar, apresenta-se as condições de exis- tência de D para um SM:

$$(1^{\circ}) D = 0 \text{ se e somente se } \forall i : p_i > q_i.$$

$$(2^{\circ}) D \neq 0 \text{ se e somente se } \exists i : p_i \leq q_i.$$

O caso (1^o) é o que ocorre normalmente, já que o usual é que em cada equação diferencial componente de um sistema, a ordem da derivada máxima das variáveis de saída supere a ordem da derivada máxima das variáveis de entrada.

O caso (2^o) é pouco freqüente. Se $p_i = q_i$, isto sig- nifica que D é constante e não nula; já o caso $p_i < q_i$, conduz à obtenção de uma matriz D não constante, cuja discussão foge totalmente ao objetivo desse trabalho. A existência do termo Du na equação de saída significa que as variáveis de en- trada contribuem diretamente na saída do sistema. Embora esta contribuição direta seja rara nos sistemas físicos, ela surge nos modelos de estado como um resíduo proveniente da eliminação das derivadas de ordem $q_i \geq p_i$ das variáveis de entrada. Tudo isto que foi dito pode ser verificado no exemplo seguinte.

Exemplo 2 - Achar a representação de estado do sistema de equações (14) e (15).

$$\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 - 3y_1 = u_1 + u_2 \quad (14)$$

$$\dot{y}_2 - 4y_2 = \dot{u}_1 + u_1 - u_2 \quad (15)$$

Definindo-se as variáveis de estado como:

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1 \\x_2 &= \dot{x}_1\end{aligned}\quad (16)$$

$$x_3 = y_2$$

as eqs. (14) e (15) podem ser reescritas como (17) e (18)

$$\dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + u_1 + u_2 \quad (17)$$

$$\dot{x}_3 = 4x_3 + u_1 - u_2 + \dot{u}_1 \quad (18)$$

A eq. (18) não está na forma padrão sugerida pela eq. (1), portanto, não se pode escrever a equação de estado do sistema como definida em (4). Porém, a equação de saída pode ser expressa de acordo com a definição dada em (5), ou seja:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \quad (19)$$

Contudo, se a variável de estado x_3 fosse definida como

pode se definir
b0 = 1

$$x_3 = y_2 + cu_1 \quad (20)$$

x3 = y2 - b0u1

em lugar da definição dada na eq. (16), então a eq. (18) seria substituída pela eq. (21), dada abaixo.

$$\dot{x}_3 = 4x_3 + (1 - c) \dot{u}_1 + (1 + 4c) u_1 - u_2 \quad (21)$$

Para se conseguir colocar a eq. (21) na forma padrão conveniente e posteriormente obter-se o modelo de estado na forma matricial desejada, deve-se fazer $c = -1$. Desse modo, anula-se o coeficiente de \dot{u}_1 na expressão de \dot{x}_3 :

$$\dot{x}_3 = 4x_3 + 5u_1 - u_2 \quad (22)$$

e portanto:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} u \quad (23)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u \quad (24)$$

Observe que d_{21} , único elemento não nulo de D , corresponde seu índice de fila (2) com a saída cuja derivada máxima iguala à de uma entrada, e seu índice de coluna (1) identifica essa entrada. Resulta óbvio que se em (15) figurasse \dot{u}_2 em vez de \dot{u}_1 , o único elemento não nulo teria sido d_{22} , e se \dot{u}_2 aparecesse adicionado a (15), d_{21} e d_{22} seriam não nulos.

2.3.2 - REPRESENTAÇÕES EQUIVALENTES DE MODELOS DE ESTADO

Foi comentado na subseção anterior que as variáveis de estado poderiam ser escolhidas de forma ampla, desde que respeitadas certas restrições. Precisamente nesta seção será feita uma análise matemática desta afirmação. Suponha que se disponha de um modelo de estado tal como o definido pelas eqs. (4) e (5) da subseção 2.3.1 e repetido aqui como (25) e (26).

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (25)$$

$$y = Cx + Du \quad (26)$$

Denominar-se-ão \hat{x}_i ($1 \leq i \leq p$) as novas variáveis de estado definidas a partir das conhecidas x_i ($1 \leq i \leq p$) por uma lei

tipo:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1 &= q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \dots + q_{1p}x_p \\
\hat{x}_2 &= q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \dots + q_{2p}x_p \\
&\vdots \\
\hat{x}_p &= q_{p1}x_1 + q_{p2}x_2 + \dots + q_{pp}x_p
\end{aligned}
\tag{27}$$

ou, em notação matricial:

$$\hat{x} = Qx \tag{28}$$

onde Q é a matriz dos coeficientes (pertencentes ao campo a que pertencem os componentes de x) q_{ij} ($1 \leq i, j \leq p$).

Se o estado for interpretado como um vetor que descreve uma trajetória em um espaço (de estado) vetorial e euclidiano, então a eq. (28) deve ser interpretada como uma transformação de coordenadas. Resulta desta interpretação que a matriz de transformação, no caso Q , deve ser regular. Sendo assim, a reconstituição das coordenadas primitivas pode ser feita através da eq. (29).

$$x = Q^{-1}\hat{x} \tag{29}$$

A substituição de (29) em (25) e (26) conduz à obtenção do modelo de estado em função das variáveis \hat{x} .

$$\dot{\hat{x}} = QAQ^{-1}\hat{x} + QBu \tag{30}$$

$$y = CQ^{-1}\hat{x} + Du \tag{31}$$

Definindo-se:

$$\hat{A} = QAQ^{-1} \tag{32}$$

$$\hat{B} = QB \tag{33}$$

$$\hat{C} = CQ^{-1} \tag{34}$$

$$\hat{D} = D \tag{35}$$

as equações (30) e (31) são escritas como:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \quad (36)$$

$$y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \quad (37)$$

As representações (A, B, C, D) e (\hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D}) são denominadas "equivalentes". De todas as infinitas representações equivalentes que um sistema possui, duas são particularmente importantes:

(1ª) Forma canônica variável de fase - é o nome que normalmente se dá à quádrupla (\hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D}) quando a matriz \hat{A} é obtida na forma companheira (38) e a matriz \hat{B} tem a sua 1ª coluna toda nula, exceto o último elemento, que vale 1.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_p \end{bmatrix} \quad (38)$$

(2ª) Forma canônica diagonal - nesta representação a matriz \hat{A} deve aparecer na forma diagonal. Observe que a transformação $A \rightarrow \hat{A}$ é uma transformação de similaridade, portanto, resultados já conhecidos da teoria matricial indicam:

$$\hat{A} = M^{-1}AM = \text{diag}\{\lambda_i\} = \Lambda, \quad (1 \leq i \leq p) \quad (39)$$

onde λ_i ($1 \leq i \leq p$) são os autovalores e M a matriz modal de A . Λ é a letra grega normalmente utilizada para simbolizar a matriz similar diagonal de A .

É importante salientar que nem sempre é possível efetu-

ar a passagem de um modelo de estado arbitrário para as formas (1ª) e (2ª).

A condição para (1ª) é que o sistema seja controlável, e para (2ª) é a independência linear do conjunto dos autovetores de A.

Quando estas condições não forem cumpridas, o modelo de estado não pode ser colocado nas formas indicadas, senão em outras que constituem generalizações (por exemplo: a forma canônica de Jordan, que substitui a forma diagonal), mas como neste trabalho não vão ser usadas essas formas gerais, nada mais será aqui colocado sobre o assunto, exceto a citação das referências [L3] e [R-R] para (1ª) e [K] para (2ª).

2.4 - MODELO TRANSFERENCIAL DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

A seção 2.3 anterior reviu resumidamente a representação matemática de um SM dada pelo Modelo de Estado. Em continuidade, esta seção apresentará um outro tipo de representação de SM's: o Modelo Transferencial, que é, em essência, a extensão para o caso multivariável do conhecido conceito de função de transferência (abreviada daqui em diante FT) definido para sistemas monovariáveis na teoria clássica de controle como:

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} \quad (1)$$

onde $u(s)$ e $y(s)$ são as transformadas de Laplace dos sinais de entrada e saída, respectivamente, e $g(s)$ é uma das notações usuais da FT (§). Se o sistema representado por (1) é linear, invariante e sem retardos, $g(s)$ resulta simplesmente numa função racional $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, de tal sorte, que pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} g(s) &= k \frac{s^i + a_{i-1}s^{i-1} + \dots + a_1s + a_0}{s^j + b_{j-1}s^{j-1} + \dots + b_1s + b_0} \\ &= k \frac{(s + z_1)(s + z_2)\dots(s + z_i)}{(s + p_1)(s + p_2)\dots(s + p_j)} \quad (2) \end{aligned}$$

onde, na versão fatorada, as raízes $-z_1, \dots, -z_i$ do polinômio numerador e $-p_1, \dots, -p_j$ do polinômio denominador são denominadas zeros e polos do sistema, respectivamente, e k é o ganho do

(§) A notação mais usual no enfoque clássico de representar as transformadas de Laplace com maiúsculas conduziria a $G(s)$ para a função de transferência, mas neste trabalho as maiúsculas são reservadas para matrizes (veja eq. (4), de 2.4.1).

sistema.

2.4.1 - MATRIZ DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Suponha que um SM com n entradas e n saídas venha dado pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}y_1(s) &= g_{11}(s)u_1(s) + g_{12}(s)u_2(s) + \dots + g_{1n}(s)u_n(s) \\y_2(s) &= g_{21}(s)u_1(s) + g_{22}(s)u_2(s) + \dots + g_{2n}(s)u_n(s) \\&\vdots \\y_n(s) &= g_{n1}(s)u_1(s) + g_{n2}(s)u_2(s) + \dots + g_{nn}(s)u_n(s)\end{aligned}\tag{3}$$

onde as funções $u_i(s)$ e $y_i(s)$, ($1 \leq i \leq n$), são as transformadas de Laplace das entradas e saídas do sistema, respectivamente, e as $g_{ij}(s)$, ($1 \leq i, j \leq n$), são as FT's que relacionam cada uma das saídas y_i com todas as entradas u_j .

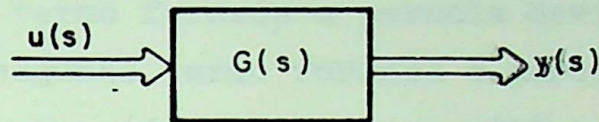
Definindo-se a matriz $G(s)$ como na eq. (4) e os vetores $y(s)$ e $u(s)$ como na eq. (5), pode-se reescrever (3) na forma da equação matricial (6).

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \dots & g_{1n}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \dots & g_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(s) & g_{n2}(s) & \dots & g_{nn}(s) \end{bmatrix}\tag{4}$$

$$y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_n(s) \end{bmatrix}, \quad u(s) = \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_n(s) \end{bmatrix}\tag{5}$$

$$y = G(s)u(s) \quad (6)$$

A matriz $G(s)$ definida pela eq. (4) é denominada Matriz de Funções de Transferência, ou abreviadamente MFT, e normalmente é representada graficamente através de um bloco como o da figura abaixo.



Representação gráfica de $G(s)$.

2.4.2 - RELAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE ESTADO E TRANSFERENCIAL

Considere o modelo de estado de um SM geral dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (7)$$

$$y = Cx + Du \quad (8)$$

Tomando-se as respectivas transformadas de Laplace, tem-se:

$$s x(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s) \quad (9)$$

$$y(s) = Cx(s) + Du(s) \quad (10)$$

Explicitando o vetor de estado complexo $x(s)$, resulta (11).

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) + (sI - A)^{-1}x(0) \quad (11)$$

A substituição do vetor $x(s)$ da eq. (10) pela sua expressão correspondente, encontrada em (11), permite escrever o vetor de saída complexa como:

$$y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] u(s) + C (sI - A)^{-1}x(0) \quad (12)$$

onde o primeiro termo fornece a parcela devida ao vetor de entrada $u(s)$ e o segundo termo fornece a parcela devida ao vetor de estado inicial $x(0)$. Fazendo-se $x(0) = 0$, (12) resulta uma expressão relacionando somente o vetor de saídas com o vetor de entradas que, pela semelhança com a equação $y(s) = G(s)u(s)$ definida na subseção anterior, permite concluir que:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (13)$$

Nos casos mais comuns em que $D = 0$, (13) se reduz a:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (14)$$

A inversão da matriz $(sI - A)$, mesmo para ordens pequenas da matriz A , utilizando técnicas convencionais, resulta bastante trabalhosa. Surgiram, então, várias técnicas contornando a dificuldade algébrica do cálculo e reduzindo-o a um procedimento de cálculo numérico. Dos numerosos algoritmos desenvolvidos para este fim, um dos mais utilizados é o de Leverrier-Faddeev, o qual chega à inversa, qualquer que seja a matriz A (§).

(§) Uma discussão deste e de outros métodos pode ser encontrada em [06], 2.17 e [F1], Cap. 2, 2.4.1.

Se o sistema é linear e invariante, obviamente a relação saída/entrada complexa deve ser sempre constante e portanto $G(s)$ é única. Já o mesmo não acontece com o modelo de estado que, como já foi visto, pode ser escrito de infinitas maneiras, através das transformações de equivalência. É intuitivo, então, pensar-se que a aplicação da eq.(13) a qualquer representação $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$, equivalente à original (A, B, C, D) , deva resultar sempre na mesma $G(s)$. Este sentimento será agora confirmado pela substituição de (A, B, C, D) da eq.(13) pelas eqs. (32) a (35) da subseção 2.3.2, as quais são reescritas em forma inversa:

$$A = Q^{-1}\hat{A}Q \quad (15)$$

$$B = Q^{-1}\hat{B} \quad (16)$$

$$C = \hat{C}Q \quad (17)$$

$$D = \hat{D} \quad (18)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \hat{C}Q(sI - Q^{-1}\hat{A}Q)^{-1}Q^{-1}\hat{B} + \hat{D} \\ &= \hat{C}[\hat{Q}(sI - \hat{A})\hat{Q}^{-1}]^{-1}\hat{B} + \hat{D} \\ &= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D} \end{aligned} \quad (19)$$

Note-se que as eqs.(13) e (19) expressam uma relação entre os modelos transferencial e de estado que permite, dado este último, achar o primeiro. Isto pode ser indicado abreviadamente por:

$$(A, B, C, D) \longrightarrow G(s) \quad (20)$$

De modo semelhante, poder-se-ia estar interessado no problema inverso, ou seja, encontrar uma representação de esta-

do, em alguma forma canônica especial a partir do modelo transferencial. Este problema inverso pode ser resumido como:

$$G(s) \longrightarrow (A, B, C, D) \quad (21)$$

(21), porém, não exprime uma relação unívoca. Sob o ponto de vista informacional, o modelo de estado possui mais informação que o modelo transferencial e portanto a relação (20) implica uma "perda" de informação (§). Obviamente (21) requer a "reconstituição" dessa informação perdida que muitas vezes não é possível ser feita somente a partir do modelo transferencial.

2.4.3 - POLOS E ZEROS

A partir do determinante de $G(s)$, dado em (22) como o quociente de dois polinômios complexos em s , estendem-se os conceitos de polos e zeros ao caso multivariável.

$$\det G(s) = \frac{z(s)}{p(s)} \quad (22)$$

O polinômio $p(s)$ é denominado "polinômio característico da $G(s)$ " ou brevemente "polinômio característico" e suas raízes são os polos do SM $G(s)$. Observa-se que $p(s)$ será um múltiplo (não garantidamente mínimo) dos denominadores das FT's $g_{ij}(s)$, ($1 \leq i, j \leq n$) que compoem $G(s)$, donde se conclui que o espectro

(§) Wolovich, [w], 4.2, afirma que esta informação perdida está associada com o valor inicial do vetor de estado $x(0)$, que efetivamente não toma parte no modelo transferencial como confirma a eq. (12), porém, mais do que isso, o modelo transferencial não considera certos aspectos da estrutura interna do sistema, os quais são descritos no modelo de estado.

des polos do SM coincide com o espectro dos polos de todas as funções $g_{ij}(s)$, ($1 \leq i, j \leq n$) (L).

Supondo que $G(s)$ possua uma representação (A, B, C) , tal que $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, então pode ser facilmente provado que $\rho(s)$ resulta o polinômio característico de A :

$$\rho(s) = \det (sI - A) \quad (23) \quad (\S)$$

Os zeros de $G(s)$ serão dados, por definição, pelas raízes do polinômio $z(s)$ que poderia ser denominado "polinômio dos zeros" do sistema (*). Em geral, os zeros, assim definidos, não têm porque coincidir com os zeros das FT's $g_{ij}(s)$, ($1 \leq i, j \leq n$), a menos, é claro, que $G(s)$ seja estritamente diagonal quando, então, o sistema recebe o nome de desacoplado.

Os exemplos dados abaixo pelas eqs. (24) e (25) ilustram estes conceitos.

(L) O espectro de polos de um sistema é o conjunto de todos os seus polos, sem considerar as possíveis multiplicidades. Assim, por exemplo, o espectro de $\{p_1, p_1, p_2\}$ é $\{p_1, p_2\}$.

(§) A rigor, os polinômios $\rho(s)$ de (23) e do denominador de (22) podem não coincidir, pois, uma possível cancelação de um polo e um zero ocorrida durante a determinação da $G(s)$ a partir da representação (A, B, C) fará com que $\rho(s)$ obtido por (22) seja de menor grau do que o obtido por (23). Porém, para os fins a que se destina a definição do polinômio característico, ou seja, a análise da estabilidade, esta cancelação é indiferente desde que lícita, isto é, os polos cancelados não de ter parte real negativa.

(*) Atenção: Os zeros de SM são definidos de diversas maneiras na teoria de controle e em geral são distintos para cada definição. Essa distinção faz com que os zeros, obtidos pela definição adotada no texto, recebam a denominação de zeros de transmissão (em inglês: transmission zeros), denominação esta que não será adotada aqui. Para outras definições de zeros, consultar, por exemplo, [R2].

$$\det G_1(s) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+2)} - \frac{1}{s(s+1)} = \frac{-1}{s(s+1)(s+2)} \quad (24)$$

$$\det G_2(s) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{3(s+2/3)}{s^2(s+1)(s+2)} \quad (25)$$

Note que em (24) $z(s) \equiv 1$ e portanto o sistema $G_1(s)$ não tem zeros. Porém uma simples permutação dos elementos da segunda coluna de $G_1(s)$ resulta em $G_2(s)$ que, como se observa em (25), possui um zero em $s = -2/3$. Note também que ocorre uma alteração no polinômio característico sem no entanto modificar o espectro dos polos.

Uma característica indesejável do sistema que felizmente raramente ocorre na prática é $z(s) \equiv 0$. Contudo não cabe neste texto uma análise das implicações físicas e matemáticas desta característica, além do que, o cálculo de zeros não é fundamental no desenvolvimento do tema central. O leitor interessado encontrará uma discussão detalhada do assunto nas referências [R-S] e [K-M], sendo que nesta última apresenta-se também uma técnica numérica para a determinação dos zeros de SM's baseada na sua representação de estado.

2.5 - SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS REALIMENTADOS

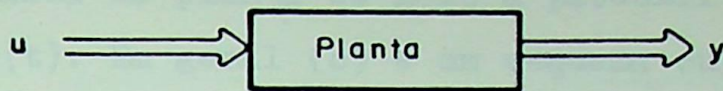
Nas seções prévias considerou-se os fundamentos da modelagem matemática de SM's gerais através de variáveis de estado, isto é, pela quádrupla (A,B,C,D), e através de matrizes de funções de transferência. Viu-se também como um modelo de estado pode ser facilmente convertido em um modelo transferencial e, não tão facilmente, vice-versa.

Nesta seção continua-se desenvolvendo o tema "sistemas multivariáveis", porém não mais visando o problema de análise, mas sim o problema prático de síntese e projeto, isto é, visando métodos ou procedimentos que indiquem quais medidas devem ser tomadas em relação ao sistema, de modo a corrigir possíveis características não satisfatórias detetadas numa primeira análise.

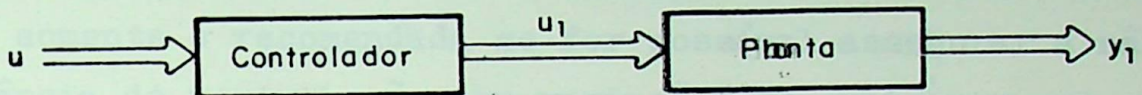
Existe atualmente uma numerosa quantidade de técnicas desenvolvidas para ajustar um sistema às especificações desejadas, cada uma delas com seu campo de aplicações, cada uma explorando um ou vários aspectos matemáticos do modelo do sistema, porém todas se apoiando em dois esquemas básicos de atuação: "a laço aberto" e "a laço fechado".

As vantagens e desvantagens relativas a ambos os esquemas são consideradas exaustivamente no começo de qualquer publicação sobre teoria de controle clássico, pelo que não será discutido nesta seção mais do que o necessário à introdução da parte de notação e nomenclatura.

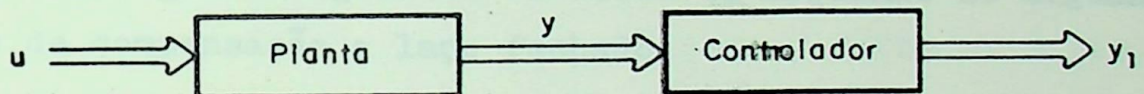
A atuação segundo o esquema laço aberto pode ser feita de duas maneiras. Observe as ilustrações:



(a)



(b)



(c)

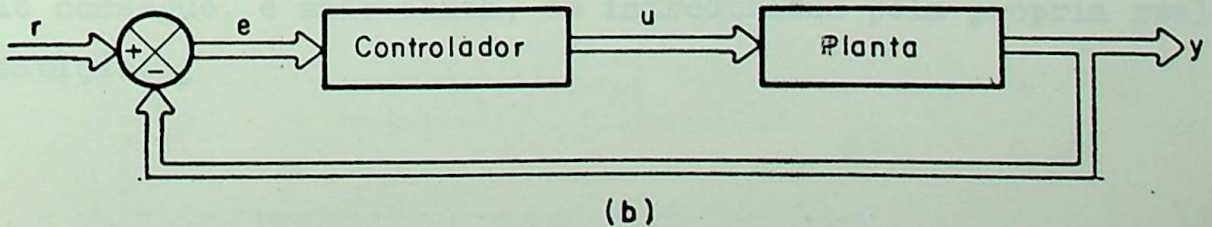
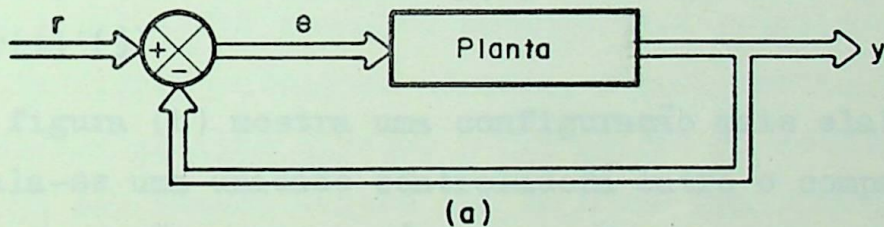
Representação gráfica da planta e dos esquemas de controle a laço aberto.

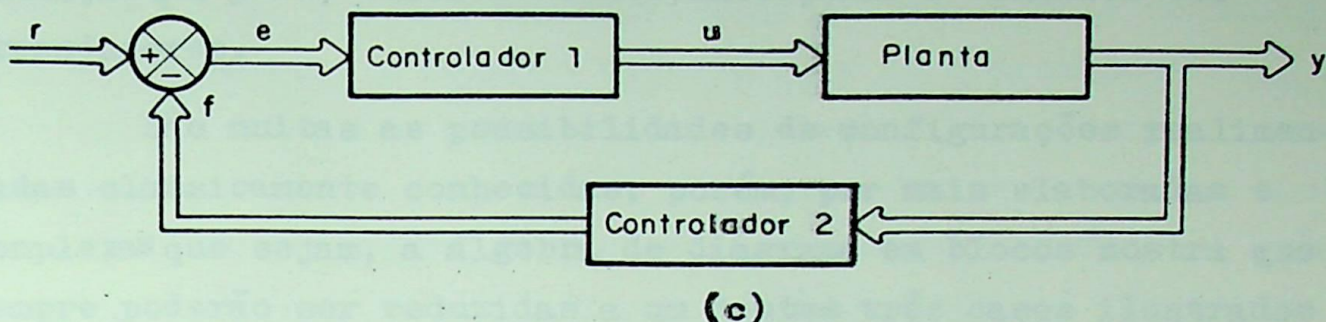
A figura (a) mostra o sistema que se deseja ajustar, o qual é considerado, por definição, imodificável. Adota-se a denominação de "planta" para este sistema.

Suponha que a resposta $y(t)$ dada pela planta seja considerada inadequada para a entrada $u(t)$ fornecida e que a resposta desejada fosse $y_1(t)$. O esquema (b) ajusta esta saída inadequada através da introdução de um bloco capaz de transformar o primitivo vetor de entradas $u(t)$ em um novo, o $u_1(t)$, o qual fará a planta produzir a saída $y_1(t)$ procurada. Este bloco adicional é usualmente denominado "compensador" ou "controlador", sendo a última denominação a adotada aqui.

O esquema (c) é o caso dual em que o bloco controlador é adaptado à saída da planta de modo a produzir $y_1(t)$ pela modificação de $y(t)$. Em geral (c) é um esquema cuja aplicabilidade é muito reduzida devido ao nível energético em que o controlador opera, portanto é normalmente desclassificado como opção viável de controle. Resta o esquema (b) que é, sem dúvida, o modo mais simples possível de se efetuar o controle ou correção do comportamento (indevido) de um sistema. Contudo a sua utilização somente é recomendada se for possível assegurar a não existência de perturbações ou variações em quaisquer que sejam os parâmetros ou sinais, internos e externos, do sistema planta-controlador. Caso contrário, o esquema a ser utilizado deve ser o de laço fechado.

As figuras seguintes fornecem os esquemas de algumas opções de compensação a laço fechado.





- (a) SM realimentado; (b) Idem (a) com controlador no ramo (multivariável) direto; (c) Idem (b) mais um controlador no ramo de realimentação.

A figura (a) fornece a opção laço fechado mais simples possível. Note que neste caso a planta é alimentada com o próprio sinal de erro $e(t)$ obtido da comparação, feita componente a componente, do sinal de saída $y(t)$ com a referência ou sinal desejado $r(t)$ (§).

A figura (b) mostra uma configuração mais elaborada onde intercala-se uma unidade controladora entre o comparador e a planta. Nesta opção a planta é alimentada com um vetor de entrada $u(t)$ onde cada um dos elementos que o compoem é uma função de todos os sinais que formam o vetor de erro $e(t)$. Isto possibilita compensar efeitos indesejáveis que a configuração (a) não consegue, e mais ainda, os introduzidos pela própria realimentação.

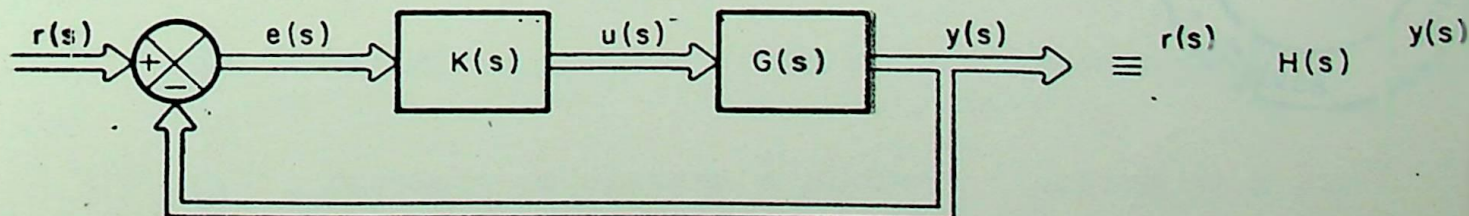
(§) A comparação, teoricamente possível, de todas as entradas (escalares) com todas as saídas (escalares) levaria a um vetor $e(t)$ de n^2 componentes $r_i - y_j$, ($1 \leq i, j \leq n$). No que segue considera-se o caso normal $e_j = r_j - y_j$.

Veja mais o exemplo de (c) o qual inclui, além do controlador citado em (b), uma segunda unidade no ramo de realimentação que pode, ocasionalmente, incorporar a dinâmica dos transdutores.

São muitas as possibilidades de configurações realimentadas classicamente conhecidas, porém, por mais elaboradas e complexas que sejam, a álgebra de diagramas em blocos mostra que sempre poderão ser reduzidas a um destes três casos ilustrados na figura anterior.

O controle moderno, por sua vez, introduz um conceito de realimentação diferente do clássico: a realimentação de estado. Teoricamente mais versátil que a realimentação de saída, típica do controle clássico, a realimentação de estado, contudo, não será revista aqui, pois uma recapitulação desta técnica, ainda que sucinta, seria demasiadamente extensa. Naturalmente isto não trará nenhum prejuízo no entendimento do resto do texto.

Ao nível deste trabalho somente será focalizado o esquema (b) da figura anterior, ou seja, a realimentação unitária com controlador no ramo direto. A utilização da modelagem transferencial no seu estudo sugere que se adote uma nomenclatura análoga à utilizada no controle clássico para a mesma configuração monovariável. Assim, a sua representação gráfica passa a ser a da figura abaixo.



Modelo transferencial do sistema com realimentação unitária e controlador no ramo direto.

onde $G(s)$ é a MFT da planta e $K(s)$ a MFT do controlador. O bloco $H(s)$ representa a MFT que relaciona diretamente $y(s)$ com $r(s)$, ou seja, é a MFT equivalente do sistema planta-controlador realimentado. A relação entre $H(s)$ e as componentes $G(s)$ e $K(s)$ pode ser obtida a partir das relações elementares indicadas nas eqs. (1) a (3) abaixo. Eliminando-se as variáveis $e(s)$ e $u(s)$ destas equações, obtém-se a eq. (4). Passando $y(s)$ para o primeiro membro, e supondo que o seu coeficiente resultante seja uma matriz de determinante não identicamente nulo, obtém-se a expressão final (5).

$$y(s) = G(s) u(s) \quad (1)$$

$$u(s) = K(s) e(s) \quad (2)$$

$$e(s) = r(s) - y(s) \quad (3)$$

$$y(s) = G(s)K(s) [r(s) - y(s)] \quad (4)$$

$$y(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s)r(s) \quad (5)$$

Portanto a MFT do sistema a laço fechado é:

$$H(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s) \quad (6)$$



2.6 - CRITÉRIOS DE PERFORMANCE

Na seção anterior introduziu-se a idéia de compensação, isto é, a utilização de compensadores para corrigir características inadequadas de sistemas realimentados, ou em outras palavras, para garantir o cumprimento de certas especificações desejáveis.

Tais especificações, ou critérios, variam enormemente de aplicação para aplicação, além do que, algumas são mais importantes em determinados sistemas que em outros. De um modo geral, a maioria dos sistemas de controle multivariáveis devem satisfazer critérios fundamentais e comuns a todos eles.

Nesta seção serão definidos alguns destes critérios de maneira matematicamente conveniente ao desenvolvimento do capítulo 3.

2.6.1 - ESTABILIDADE

Existem na literatura de controle muitas definições e formas de se avaliar a estabilidade de um sistema. Esta variedade de definições é devida à dificuldade de se classificar todos os possíveis tipos de comportamento dos sistemas, especialmente dos não-básicos. Contudo, neste texto, que somente trata de sistemas multivariáveis lineares e invariantes, não é necessário considerar-se mais do que a definição clássica de estabilidade.

Em termos físicos, um sistema é classicamente estável se:

- (a) A resposta do sistema é limitada (finita) se a entrada for limitada;
- (b) A resposta do sistema tende a zero se a entrada ten-

der a zero;

(c) A resposta livre do sistema não é uma oscilação mantida.

Matematicamente (a), (b) e (c) estão correlacionados com a locação dos polos no semiplano complexo à esquerda do eixo imaginário, pelo que pode ser enunciado: "O modelo transferencial de um SM realimentado será classicamente estável se e somente se todos os seus polos, ou seja, todas as raízes do seu polinômio característico a laço fechado $e_{LF}(s)$, possuírem parte real estritamente negativa, e os graus dos polinômios denominadores de cada FT componente forem maiores ou iguais que os dos numeradores" (ver por exemplo [F-F-C], Vol. I, 4.1).

No caso do esquema de compensação da figura da pág. 39, cuja MFT a laço fechado $H(s)$ é dada logo em seguida pela eq. (5), o polinômio $e_{LF}(s)$ é obtido de:

$$\frac{z_{LF}(s)}{e_{LF}(s)} = \det H(s) \quad (1)$$

Se para o mesmo esquema for adotada a nomenclatura $F(s)$ para a MFT de laço aberto, ou seja, para a representação transferencial equivalente do sistema planta-controlador, sem considerar o ramo de realimentação, tem-se:

$$F(s) = G(s)K(s) \quad (2)$$

Supondo que $F(s)$ possua uma representação de estado dada por:

$$\dot{x} = Ax + Be \quad (3)$$

$$y = Cx \quad (4)$$

tal que:

$$F(s) = C(sI_p - A)^{-1}B \quad (5)$$

então o sistema a laço fechado $H(s)$ tem um modelo de estado da-
do por:

$$\dot{x} = Ax + B(r - Cx) = (A - BC)x + Br \quad (6)$$

$$y = Cx \quad (7)$$

tal que:

$$H(s) = C(sI_p - A + BC)^{-1}B \quad (8)$$

Evidentemente os polinômios característicos dos siste-
mas a laço aberto, $e_{LA}(s)$, e a laço fechado, $e_{LF}(s)$, podem ser ex-
pressos em termos da representação (A, B, C) como:

$$e_{LA}(s) = \det (sI_p - A) \quad (9)$$

$$e_{LF}(s) = \det (sI_p - A + BC) \quad (10)$$

Estas considerações preliminares serão muito úteis na
demonstração de uma relação bastante importante entre os poli-
nômios (9) e (10). Tal relação, conhecida como determinante da
diferença de retorno (em inglês: return-difference determinant)
está dada abaixo pela eq. (11).

$$\frac{e_{LF}(s)}{e_{LA}(s)} = \det [I_n + G(s)K(s)] \quad (11)$$

A demonstração de (11) pode ser conseguida partindo-se
das eqs. (9) e (10), assim:

$$\begin{aligned}
\frac{e_{LF}(s)}{e_{LA}(s)} &= \frac{\det (sI_p - A + BC)}{\det (sI_p - A)} \\
&= \det [sI_p - A]^{-1} \det [sI_p - A + BC] \\
&= \det [(sI_p - A)^{-1}(sI_p - A + BC)] \\
&= \det [I_p + (sI_p - A)^{-1}BC] \quad (12)
\end{aligned}$$

Para os efeitos deste desenvolvimento é necessário salientar-se as ordens das matrizes unidades intervenientes.

Utilizando-se de um resultado encontrado em [01] que prova:

$$\det [I_j + PQ] = \det [I_k + QP] \quad (13)$$

onde as ordens das matrizes P e Q são $j \times k$ e $k \times j$, respectivamente, a eq. (12) pode ser reescrita como:

$$\frac{e_{LF}(s)}{e_{LA}(s)} = \det [I_n + C(sI_p - A)^{-1}B] \quad (14)$$

Substituindo (2) e (5) em (14), resulta finalmente:

$$\begin{aligned}
\frac{e_{LF}(s)}{e_{LA}(s)} &= \det [I_n + F(s)] \\
&= \det [I_n + G(s)K(s)] \quad (15)
\end{aligned}$$

Se $n=1$, a eq. (15) é bem conhecida e pode ser analisada através do diagrama de Nyquist, método do lugar das raízes, critério de Routh-Hurwitz, etc.. Para o caso $n > 1$, ou seja, pa-

ra o caso multivariável, o critério de Routh pode ser aplicado de maneira análoga ao caso monovariável, embora as relações sejam definidas em termos dos n^2 ganhos que compoem o compensador $K(s)$. As técnicas baseadas no diagrama de Nyquist, que possibilitam um estudo paramétrico da estabilidade do sistema monovariável, são, no caso multivariável, trabalhosas e de difícil aplicação, pois a relação (15) é uma função complexa não linear dos elementos de $K(s)$. Existem, no entanto, técnicas de projeto que sugerem a escolha do compensador $K(s)$ de maneira a simplificar a estrutura da eq. (15), possibilitando assim a aplicação das conhecidas técnicas gráficas de projeto, como é o caso da técnica apresentada no capítulo 3.

2.6.2 - INTEGRIDADE

Suponha um sistema monovariável com realimentação unitária da saída semelhante ao esquema ilustrado na página 39. Se ocorrer uma falha no sensor ou transdutor, tal que o sinal de realimentação se anule, o sistema passará a operar no modo laço aberto; e se a falha for no atuador, isto é, na saída do compensador, o sistema será desativado.

No caso de múltiplas entradas e saídas estes mesmos efeitos somente seriam obtidos se ocorresse a falha simultânea de todos os sensores ou de todos os atuadores, o que é bem pouco provável. Nos casos mais simples de falhas de determinados sensores ou atuadores, é claro que o sistema continuará operando a laço fechado, pois algumas saídas ainda serão acessíveis para a realimentação e o controlador, utilizando estas informações, continuará alimentando a planta. Para cada combinação de falhas o sistema apresentará um comportamento que poderá ou não ser aceitável sob um determinado ponto de vista.

Não é possível, teoricamente, obter-se métodos para ana-

lisar todas as possíveis condições de falhas e corrigir, através de modificações adequadas na matriz $K(s)$, todos os comportamentos não aceitáveis introduzidos por estas falhas no sistema. Isto restringe este tipo de análise a dois casos práticos:

(a) Análise da estabilidade do sistema a laço fechado com falha no sensor k :

Um SM com realimentação unitária será dito "com falha no sensor k " se o sensor localizado na k -ésima posição, ou seja, na inserção do k -ésimo ramo de realimentação com a k -ésima saída, estiver defeituoso, de tal forma que o sinal de realimentação transmitido por este ramo seja nulo.

Neste caso o sinal de erro $e(s)$ pode ser matematicamente expresso por:

$$e(s) = r(s) - [I_n - e_k e_k^t] y(s) \quad (16)$$

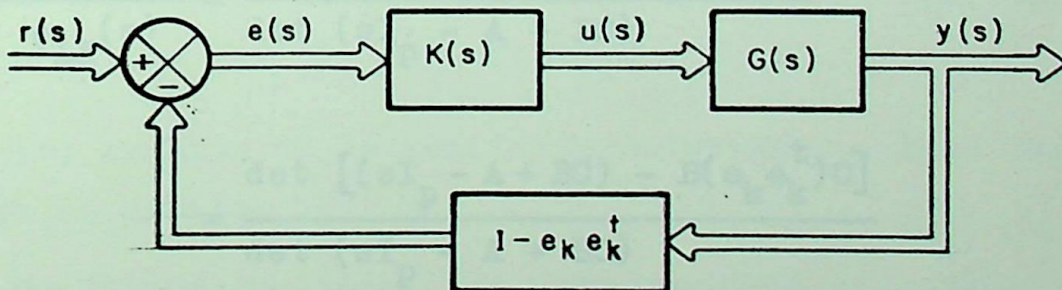
A notação e_k é utilizada para representar um vetor de ordem $n \times 1$ com todos os elementos nulos, exceto o colocado na k -ésima posição, que vale 1. Note que o produto $e_k e_k^t$ resulta uma matriz $n \times n$ com todos os elementos nulos, exceto o localizado na k -ésima posição da diagonal principal.

Expandindo a eq. (16) como em (17), pode-se verificar que a formulação de (16) é realmente adequada para representar o vetor de erro, levando-se em conta a falha no sensor k .

$$\begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \\ \vdots \\ e_k(s) \\ \vdots \\ e_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \\ \vdots \\ r_k(s) \\ \vdots \\ r_n(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_k(s) \\ \vdots \\ y_n(s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \\ \vdots \\ r_k(s) \\ \vdots \\ r_n(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_{k-1}(s) \\ 0 \\ y_{k+1}(s) \\ \vdots \\ y_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1(s) - y_1(s) \\ r_2(s) - y_2(s) \\ \vdots \\ r_k(s) \\ \vdots \\ r_n(s) - y_n(s) \end{bmatrix} \quad (17)$$

A interpretação através de diagramas de bloco desta formulação é dada abaixo:



Representação de sistema multivariável realimentado com falha no sensor k.

De maneira semelhante ao que foi exposto na subseção anterior, pode-se dizer que o sistema a laço fechado com falha no sensor k será estável se e somente se todas as raízes do seu polinômio característico, denominado $e_{LFCFS}(s)$, possuírem parte real estritamente negativa.

Substituindo-se (4) e (16) em (3), obtém-se a equação de estado do sistema com falha no sensor k :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B[r - (I_n - e_k e_k^t)Cx] \\ &= Ax + Br - B(I_n - e_k e_k^t)Cx \\ &= [A - B(I_n - e_k e_k^t)C]x + Br \end{aligned} \quad (18)$$

portanto o polinômio $e_{LFCFS}(s)$, expresso em termos do terno (A, B, C) , é:

$$e_{LFCFS}(s) = \det [sI_p - A + B(I_n - e_k e_k^t)C] \quad (19)$$

Relacionando-se os polinômios característicos do sistema com falha no sensor k , dado pela eq. (19), e do sistema sem falhas, dado pela eq. (10), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{e_{LFCFS}(s)}{e_{LF}(s)} &= \frac{\det [sI_p - A + B(I_n - e_k e_k^t)C]}{\det (sI_p - A + BC)} \\ &= \frac{\det [(sI_p - A + BC) - B(e_k e_k^t)C]}{\det (sI_p - A + BC)} \\ &= \det [I_p - (sI_p - A + BC)^{-1} B(e_k e_k^t)C] \end{aligned} \quad (20)$$

Fazendo-se $P = (sI_p - A + BC)^{-1} B e_k$ e $Q = e_k^t C$ e consi-

derando que as ordens de P e Q são $p \times 1$ e $1 \times p$, respectivamente, sua substituição na fórmula da eq. (13) leva a:

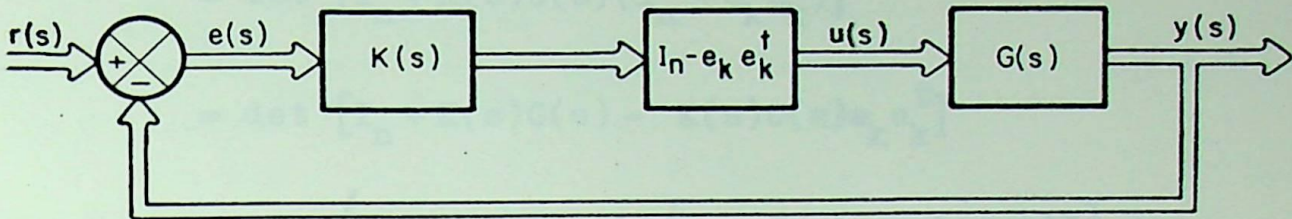
$$\begin{aligned}
 \frac{e_{\text{LFCFS}}(s)}{e_{\text{LF}}(s)} &= \det [1 - QP] \\
 &= 1 - e_k^t C(sI_p - A + BC)^{-1} B e_k \\
 &= e_k^t [I_n - C(sI_p - A + BC)^{-1} B] e_k \\
 &= e_k^t [I_n - H(s)] e_k \\
 &= e_k^t \left\{ I_n - [I_n + G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s) \right\} e_k \\
 &= e_k^t \left\{ [I_n + G(s)K(s)]^{-1} [I_m + G(s)K(s)] - \right. \\
 &\quad \left. - [I_n + G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s) \right\} e_k \\
 &= e_k^t [I_n + G(s)K(s)]^{-1} [I_m + G(s)K(s) - G(s)K(s)] e_k \\
 &= e_k^t [I_n + G(s)K(s)]^{-1} e_k \tag{21}
 \end{aligned}$$

Note que os polos do sistema com falha são os zeros da função de transferência localizada na k -ésima posição da diagonal principal da MFT $[I_n + G(s)K(s)]^{-1}$.

(b) Análise da estabilidade do sistema a laço fechado com falha no atuador k .

Um SM com realimentação unitária será dito "com falha no atuador k " se a k -ésima entrada da planta $G(s)$ não puder ser alimentada, ou equivalentemente, se o sinal de controle $u_k(t) \equiv 0$ devido à falha na saída k do controlador.

O diagrama de blocos que simula esta situação é o da figura abaixo.



SM realimentado com falha no atuador k .

A estabilidade desta configuração estará garantida se todas as raízes do seu polinômio característico $e_{LFCFA}(s)$ possuírem parte real estritamente negativa.

Para se chegar a uma relação entre polinômios característicos semelhante à obtida em (21) considere primeiramente a eq. (15), onde se demonstra que a razão dos polinômios característicos a laço fechado e a laço aberto de um SM com realimentação unitária é igual a $\det [I_n + F(s)]$, onde $F(s)$ representa a MFT a laço aberto do sistema.

No caso da figura acima, a MFT a laço aberto é:

$$F'(s) = G(s)(I_n - e_k e_k^t)K(s) \quad (22)$$

Portanto, uma relação entre os polinômios característicos a laço fechado $e_{LFCFA}(s)$ e a laço aberto $e_{LACFA}(s)$ deste sistema é:

$$\begin{aligned}
\frac{e_{\text{LFCFA}}^{(s)}}{e_{\text{LACFA}}^{(s)}} &= \det [I_n + F'(s)] \\
&= \det [I_n + G(s)(I_n - e_k e_k^t)K(s)] \\
&= \det [I_n + K(s)G(s)(I_n - e_k e_k^t)] \\
&= \det [I_n + K(s)G(s) - K(s)G(s)e_k e_k^t] \\
&= \det \left([I_n + K(s)G(s)] \left\{ I_n - [I_n + K(s)G(s)]^{-1} K(s)G(s)e_k e_k^t \right\} \right) \\
&= \det [I_n + K(s)G(s)] \det \left\{ I_n - [I_n + K(s)G(s)]^{-1} \right. \\
&\quad \left. \cdot K(s)G(s)e_k e_k^t \right\} \\
&= \det [I_n + G(s)K(s)] \det \left\{ 1 - e_k^t [I_n + K(s)G(s)]^{-1} \right. \\
&\quad \left. \cdot K(s)G(s)e_k \right\} \\
&= \det [I_n + G(s)K(s)] \left(1 - e_k^t [I_n + K(s)G(s)]^{-1} K(s)G(s)e_k \right) \\
&= \det [I_n + G(s)K(s)] e_k^t \left\{ I_n - [I_n + K(s)G(s)]^{-1} K(s)G(s) \right\} e_k \\
&= \det [I_n + G(s)K(s)] e_k^t \left\{ [I_n + K(s)G(s)]^{-1} [I_n + K(s)G(s)] - \right. \\
&\quad \left. - [I_n + K(s)G(s)]^{-1} K(s)G(s) \right\} e_k \\
&= \det [I_n + G(s)K(s)] e_k^t [I_n + K(s)G(s)]^{-1} \cdot \\
&\quad \cdot [I_n + K(s)G(s) - K(s)G(s)] e_k \\
&= \det [I_n + G(s)K(s)] e_k^t [I_n + K(s)G(s)]^{-1} e_k \quad (23)
\end{aligned}$$

Lembrando que o termo $\det [I_n + G(s)K(s)]$ corresponde à razão entre os polinômios característicos a laço fechado e a laço aberto do sistema sem falhas, notados como $e_{LF}(s)$ e $e_{LA}(s)$, respectivamente, tem-se:

$$\frac{e_{LFCFA}(s)}{e_{LACFA}(s)} = \frac{e_{LF}(s)}{e_{LA}(s)} e_k^t [I_n + K(s)G(s)]^{-1} e_k \quad (24)$$

ou ainda:

$$\frac{e_{LFCFA}(s)}{e_{LF}(s)} = \frac{e_{LACFA}(s)}{e_{LA}(s)} e_k^t [I_n + K(s)G(s)]^{-1} e_k \quad (25)$$

Note, contudo, que as MFT's a laço aberto do sistema com falhas e do sistema sem falhas diferem entre si apenas pelo termo $(I_n - e_k e_k^t)$ que simula a falha do atuador k . Note também que este termo independe da variável s , portanto não interfere nos polos do sistema a laço aberto, o que leva a concluir que:

$$e_{LACFA}(s) = e_{LA}(s) \quad (26)$$

Substituindo (26) em (25) resulta finalmente:

$$\frac{e_{LFCFA}(s)}{e_{LF}(s)} = e_k^t [I_n + K(s)G(s)]^{-1} e_k \quad (27)$$

A eq. (27) indica que os polos do sistema com falha no atuador k são os zeros da função de transferência localizada na k -ésima posição da diagonal principal da MFT $[I_n + K(s)G(s)]^{-1}$. Observe que as duas expressões mais importantes encontradas nesta subseção, eqs. (21) e (27), diferem entre si apenas pela troca das matrizes $K(s)$ e $G(s)$.

Na aplicação prática das eqs. (21) e (27) eventualmente podem ocorrer situações em que aparecem termos comuns no numerador e no denominador da função de transferência obtida. Como pressupõe-se que o sistema original sem falhas era estável, podem ser consideradas lícitas todas as possíveis cancelações.

2.6.3 - INTERAÇÃO

Em geral as entradas e saídas de uma planta multivariável estão todas inter-relacionadas entre si, de tal forma, que a variação de qualquer uma das entradas produz uma correspondente variação de todas as saídas. Este efeito é denominado "interação" e é caracterizado no modelo transferencial do sistema pela existência de elementos não nulos fora da diagonal principal da MFT (no modelo de estado este efeito não é visível por simples inspeção).

O grau de interação de uma planta não pode ser alterado (uma planta é por definição imodificável) mas no sistema a laço fechado este efeito pode ser significativamente reduzido através de uma escolha adequada da unidade controladora $K(s)$. De fato, algumas técnicas de controle exploram esta possibilidade de desacoplamento, que implica fazer a MFT de laço fechado aproximadamente diagonal, por exemplo o Método do Arranjo Inverso de Nyquist, que chega a definir um tipo muito especial de desacoplamento parcial. Já um controlador capaz de eliminar completamente a interação deverá possuir uma estrutura extremamente complexa, o que limita sua aplicação a casos onde o desacoplamento seja absolutamente necessário.

O grau de interação permissível varia sensivelmente de aplicação para aplicação e a magnitude da interação durante o transitório depende das grandezas físicas adotadas para as variáveis de saída. Tipicamente, porém, admite-se que um sistema

a laço fechado possui condições aceitáveis de interação transitória se $a_i(t) \leq 10\% y_j(t)$, ($1 \leq i \leq n$) e ($i \neq j$), ou seja, se a interação na saída $y_i(t)$, notada como $a_i(t)$, for menor ou igual a 10% da saída $y_j(t)$ devida a um degrau de amplitude c aplicado na entrada j .

Note que a verificação dos níveis de interação transitória é feita no domínio do tempo e não no domínio complexo (§).

2.6.4 - ERRO ESTACIONÁRIO

Num SM com realimentação unitária semelhante ao da figura da página 39, define-se o erro estacionário no laço j , notado $e_j(\infty)$, como a diferença entre a resposta dada pelo sistema na saída j e a resposta desejada na mesma saída após cessarem todas as oscilações transitórias. Logicamente o efeito da interação não deve contar nesta diferença.

O erro estacionário multivariável definido acima, pode ser avaliado através da aplicação do teorema do valor final à expressão:

$$\begin{aligned} e_j(s) &= y_j(s) - r_j(s) \\ &= e_j^t [y(s) - r(s)] \end{aligned} \quad (28)$$

onde e_j^t é um vetor de ordem $n \times 1$ transposto com todos os elementos nulos exceto o localizado na j -ésima posição, que vale 1, e $r(s)$ é uma excitação degrau do tipo:

$$r(s) = cs^{-1} e_j \quad (29)$$

(§) Para maiores detalhes sobre o problema da interação, consultar, por exemplo, [M-W].

onde s^{-1} é a transformada de Laplace do degrau unitário, c é uma constante real e e_j é um vetor de ordem $n \times 1$ como definido acima (§)

Note que $r(s)$ é um vetor com um único elemento não nulo $r_j(s) = cs^{-1}$, ou seja, um degrau de amplitude c . Com esta excitação elimina-se o problema da interação estacionária na saída y_j do sistema, pois somente a entrada r_j é não nula. Evidentemente todas as demais saídas devem ser interpretadas como sendo devidas exclusivamente ao efeito da interação.

Fazendo-se $y(s) = H(s)r(s)$ na eq. (28) e em seguida substituindo-se $r(s)$ pelo valor definido em (29), vem:

$$\begin{aligned} e_j(s) &= e_j^t [H(s)r(s) - r(s)] \\ &= e_j^t [H(s) - I_n] r(s) \\ &= e_j^t [H(s) - I_n] cs^{-1} e_j \end{aligned} \quad (30)$$

A aplicação do teorema do valor final à eq. (30), resulta:

(§) Uma análise do erro estacionário em função de qualquer entrada não é simples. Por isso, no enfoque clássico de teoria de controle costuma-se analisar este erro supondo uma família de entradas tipificadas, caracterizadas porque suas respectivas transformadas de Laplace são da forma s^k , onde k pertence ao conjunto dos inteiros. É então possível encontrar fórmulas que expressem esse erro em função de k e do denominador "tipo do sistema" (monovariável). Em SM's aparece a complicação adicional da interação entre entradas e saídas. Por isso neste trabalho, que não constitui um estudo especializado sobre o tema, continua-se analisando este erro para a $r(s)$ de (29), por ser esta entrada fisicamente significativa numa vasta série de situações aplicadas.

$$\begin{aligned}
e_j(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s e_j(s) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} s e_j^t [H(s) - I_n] c s^{-1} e_j \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} c e_j^t [H(s) - I_n] e_j \\
&= c e_j^t [H(0) - I_n] e_j \quad (31)
\end{aligned}$$

De (31) conclui-se que o erro estacionário observado na saída y_j do sistema, para uma excitação degrau dada por (29), será nulo se, e somente se, o elemento localizado na linha j e coluna j da matriz $H(0)$ for 1. Generalizando: se $H(0)$ possuir toda a sua diagonal principal composta de 1's, então o sistema apresentará erro estacionário nulo em todas as saídas.

Não é difícil ver que os elementos fora da diagonal principal de $H(0)$ fornecem o grau de interação estacionária que existe entre todas as entradas e saídas; assim um elemento $h_{ik}(0)$ avalia a parcela da resposta y_i devido a uma excitação degrau aplicada na entrada k .

Portanto a condição para que sejam observados simultaneamente interações estacionárias e erros estacionários nulos em todas as saídas do sistema é que $H(0) = I_n$.

CAPÍTULO 3

COMPENSAÇÃO DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DIÁDICA

No capítulo anterior fez-se uma recapitulação sucinta dos conceitos básicos que serão empregados neste capítulo, ou seja, reviu-se alguns tópicos sobre modelagem matemática, realimentação e critérios de desempenho de SM's.

Neste capítulo apresenta-se detalhadamente um dos muitos métodos de compensação de SM's baseados em conceitos e técnicas classicamente conhecidas: o Método da Decomposição Diádica (MDD) (§) . Antes, porém, de iniciar a apresentação do método propriamente dito, é conveniente fazer-se um resumo, não de todos os métodos já desenvolvidos, o que seria demasiadamente extenso, mas sim do grupo à que melhor se enquadra o MDD na classificação fornecida no capítulo 1, ou seja, do item (a), o qual também enquadra os métodos:

- (1) Método de Controle Não Interativo (MCNI);
- (2) Método do Arranjo Inverso de Nyquist (MAIN);
- (3) Método da Diferença de Retorno Sequencial (MDRS);
- (4) Método do Controlador Comutativo (MCC).

O objetivo deste resumo obviamente não é destrinchar todas estas metodologias em pormenores, mas fornecer uma idéia da formulação matemática bem como das vantagens e desvantagens mais características de cada uma. Com isto o MDD fica inserido dentro de um contexto, que embora limitado, já permite formar uma idéia comparativa do método.

O MCNI é, em essência, o mais simples de todos os méto-

(§) Veja a classificação apresentada no capítulo 1.

dos propostos para reduzir o problema de compensar um SM realimentado para o caso de um conjunto de compensações monovariáveis. Incidentalmente é também o mais antigo (§).

Este método propõe que a unidade controladora $K(s)$ seja escolhida de tal forma, que a MFT do sistema a laço aberto $G(s)K(s)$ seja diagonal, o que faz com que o sistema a laço fechado $H(s)$ resulte também na forma diagonal, isto é:

$$H(s) = \text{diag} \left\{ h_i(s) \right\}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (1)$$

Observe que um SM com esta estrutura já pode ser tratado como um conjunto de n sistemas monovariáveis, isto é, pode-se compensar as FT's $h_i(s)$, ($1 \leq i \leq n$), uma por vez através das conhecidas técnicas clássicas. Contudo, uma matriz $K(s)$ com as características necessárias para provocar este desacoplamento total deverá ser bastante complexa, e não se justifica, na maioria dos casos, a implementação de tanta complicação somente para reduzir o efeito da interação.

O MAIN, proposto originalmente por Rosenbrock, segue a mesma filosofia do MCNI de tentar aplicar as técnicas classicamente consagradas no projeto de compensadores multivariáveis, porém, sem impor um desacoplamento total do sistema senão que verificar que o sistema satisfaça um cuidadoso e ao mesmo tempo interessante critério de desacoplamento parcial, baseado no conceito de matriz diagonalmente dominante. Uma matriz é dita diagonalmente dominante em alguma frequência específica (ou uma faixa de frequências) quando os módulos dos elementos da diagonal principal são maiores que a soma dos módulos dos correspondentes elementos fora da diagonal, tomados fila por fila ou co-

(§) Ver [M3], parte IV.

luna por coluna.

O método utiliza a representação inversa da MFT do sistema, isto é, a relação entre a MFT a laço fechado $H(s)$ e laço aberto $F(s) = G(s)K(s)$ dada por

$$H(s) = [I_n + F(s)]^{-1}F(s) \quad (2)$$

é escrita na forma inversa simplesmente como:

$$H^{-1}(s) = F^{-1}(s) + I_n \quad (3)$$

Nestas condições Rosenbrock demonstra que se a MFT de laço aberto invertida $F^{-1}(s)$ é diagonalmente dominante sobre o contorno de Nyquist (§), condição esta que pode ser verificada graficamente pela análise das faixas de Gershgorin (£), então a estabilidade do sistema a laço fechado pode ser deduzida a partir da resposta em frequência dos elementos da diagonal de $F^{-1}(s)$.

A utilização do método no projeto da unidade controladora pode ser resumido pela seguinte rotina:

(a) Determina-se a MFT $G^{-1}(s)$ e através dos gráficos dos círculos de Gershgorin, verifica-se se $G^{-1}(s)$ é ou não diagonalmente dominante no contorno de Nyquist; neste último caso:

(b) Escolhe-se um pré-compensador $K_c(s)$ tal que $K_c^{-1}(s)G^{-1}(s)$ seja diagonalmente dominante no contorno de Nyquist;

(c) Faz-se $K(s) = K_c(s) \text{diag} \{k_i(s)\}$, ($1 \leq i \leq n$). Escolhe-se as FT's $k_i(s)$, ($1 \leq i \leq n$), de modo que os elementos da

(§) O contorno de Nyquist, como é normalmente referido nos textos de controle, é uma curva que percorre o eixo imaginário do plano complexo de $-\infty$ a $+\infty$ e se fecha por uma circunferência de raio infinito através do semiplano positivo.

(£) Para um esclarecimento detalhado destas faixas, consultar, por exemplo, [R3].

diagonal principal de $F^{-1}(s) + I_n$ satisfaçam o critério de Nyquist de estabilidade classicamente conhecido;

(d) Determina-se $h_{ii}^{-1}(s) \approx 1 + \hat{f}_{ii}(s)$, ($1 \leq i \leq n$), onde $\hat{f}_{ii}(s)$ é o i -ésimo elemento da diagonal de $F^{-1}(s)$. Avalia-se graficamente a validade desta aproximação através de uma análise baseada nas faixas de Ostrowski (§), e aplica-se as técnicas clássicas nas FT's $h_{ii}(s)$ obtidas para verificação do comportamento transitório e estacionário do sistema a laço fechado.

Nos passos (b) e (c) estão as duas maiores dificuldades na aplicação prática do método: (1º) Achar uma matriz $K_c(s)$ tal que $K_c^{-1}(s)G^{-1}(s)$ seja diagonalmente dominante no contorno de Nyquist é uma tarefa bastante árdua principalmente se $n \geq 3$; (2º) A dominância diagonal da matriz $F^{-1}(s) + I_n$ é, em geral, dependente da escolha das FT's $k_i(s)$, ($1 \leq i \leq n$).

O outro método citado, o MDRS, proposto por D. Q. Mayne, difere totalmente dos MCNI e MAIN, no sentido de que não exige a diagonalização nem mesmo parcial da planta. Este método sugere a utilização de um controlador $K(s)$ da forma

$$K(s) = \text{diag} \left\{ k_i(s) \right\}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (4)$$

onde cada FT $k_i(s)$ é determinada através de uma engenhosa e sistemática aplicação do determinante da diferença do retorno já apresentado na subseção 2.6.1 como

$$\frac{e_{LF}(s)}{e_{LA}(s)} = \det [I_n + G(s)K(s)] = \det [T(s)] \quad (5)$$

(§) Sobre estas faixas, consultar, por exemplo, [R3].

onde $T(s) \triangleq I_n + G(s)K(s)$. Foi comentado na subseção 2.6.1 que este determinante é bastante prático na determinação da estabilidade do sistema a laço fechado, mas que se $T(s)$ não possui uma estrutura adequadamente simples, a aplicação direta de (5) é extremamente complicada, pois resulta uma função complexa de todos os elementos de $K(s)$. O MDRS contorna esta dificuldade considerando o sistema inicialmente com todos os laços interrompidos e aplicando (5) cada vez que um laço é fechado.

Para apresentar a formulação deste enfoque define-se:

$$K_i(s) = \text{diag} \left\{ k_1(s), \dots, k_i(s), 0, \dots, 0 \right\}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (6)$$

$K_i(s)$ é o modelo do controlador com os laços $1, \dots, i$ fechados e $i+1, \dots, n$ abertos. Note que para todos os laços abertos tem-se $K_0(s) \equiv 0$ e para todos os laços fechados

$$K_n(s) = K(s) = \text{diag} \left\{ k_i(s) \right\}, \quad (1 \leq i \leq n).$$

Uma forma muito útil de se escrever (6) é

$$K_i(s) = K_{i-1}(s) + k_i(s)e_i e_i^t, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (7)$$

Associado com cada controlador $K_i(s)$, ($1 \leq i \leq n$), existe um determinante

$$\det T_i(s) = \det [I_n + G(s)K_i(s)], \quad (1 \leq i \leq n) \quad (8)$$

descrevendo a estabilidade do sistema com os laços $i+1, \dots, n$ abertos.

Substituindo (7) em (8), resulta:

$$\det T_i(s) = \det [I_n + G(s)K_{i-1}(s) + k_i(s)G(s)e_i e_i^t]$$

$$\begin{aligned}
&= \det [T_{i-1}(s) + k_i G(s) e_i e_i^t] \\
&= \det T_{i-1}(s) \det [I_n + k_i(s) T_{i-1}^{-1}(s) G(s) e_i e_i^t] \\
&= [\det T_{i-1}(s)] [1 + e_i^t k_i(s) T_{i-1}^{-1}(s) G(s) e_i] \\
&= t_i(s) \det T_{i-1}(s), \quad (1 \leq i \leq n) \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\text{onde } t_i(s) = 1 + e_i^t k_i(s) T_{i-1}^{-1}(s) G(s) e_i \quad (10)$$

Note a seqüência de determinantes obtida de (9):

$$i = 0 \longrightarrow \det T_0(s) = 1$$

$$i = 1 \longrightarrow \det T_1(s) = t_1(s) \det T_0(s) = t_1(s)$$

$$i = 2 \longrightarrow \det T_2(s) = t_2(s) \det T_1(s) = t_1(s) t_2(s)$$

$$\vdots$$

$$i = n \longrightarrow \det T_n(s) = t_n(s) \det T_{n-1}(s) = t_1(s) t_2(s) \dots t_n(s)$$

Da equação obtida para $i = n$ conclui-se que o sistema a laço fechado será estável se todos os zeros de $t_i(s)$, ($1 \leq i \leq n$), possuírem parte real estritamente negativa.

Note que as n funções $t_i(s)$ podem ser compensadas individualmente uma a uma se se começar por $t_1(s)$ e seguir seqüencialmente até $t_n(s)$. A eq. (10) mostra que cada $t_i(s)$ é função somente de um $k_i(s)$, os $k_j(s)$, ($j < i$), estão incluídos implicitamente em $T_{i-1}^{-1}(s)$.

O método mostra que a estrutura diagonal de $K(s)$ é suficiente para satisfazer critérios de estabilidade e desempenho do sistema a laço fechado, mas é deficiente sob o ponto de vista de outras especificações de comportamento, como por exem-

plo, o efeito de interação nas altas frequências, que somente pode ser significativamente suprimido se a MFT do sistema for aproximadamente diagonal em altas frequências. Este desacoplamento parcial pode ser conseguido através da utilização de um pré-compensador $K_c(s)$, determinado de maneira que a MFT $G(s)K_c(s)$ seja aproximadamente diagonal, e em seguida aplicar a técnica descrita acima em $G(s)K_c(s)$.

Neste breve resumo do MDRS observa-se que o método independe da forma em que se encontra a MFT $G(s)$ da planta e, mais ainda, não depende de nenhum tipo de consideração aproximativa. O método, no entanto, oferece poucos recursos para minimizar o efeito interativo e tende a encontrar dificuldades de aplicação à medida que cresce o número de entradas e saídas do sistema.

O MCC é o último dos métodos pertencentes ao grupo do MDD. Sugerido originalmente por MacFarlane, este método utiliza uma estratégia bastante interessante para desacoplar virtualmente os modos do sistema. Propõe, inicialmente, que se fatore a MFT $G(s)$ da planta como:

$$G(s) = M(s) \text{diag} \left\{ g_i(s) \right\} M^{-1}(s), \quad (1 \leq i \leq n) \quad (11)$$

onde $M(s)$ é a matriz modal e $g_i(s)$, $(1 \leq i \leq n)$ são os autovalores de $G(s)$. Se o controlador $K(s)$ possuir a mesma estrutura modal da planta, isto é, se

$$K(s) = M(s) \text{diag} \left\{ k_i(s) \right\} M^{-1}(s), \quad (1 \leq i \leq n) \quad (12)$$

a MFT do sistema a laço fechado $H(s)$, toma a forma:

$$\begin{aligned} H(s) &= [I_n + G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s) \\ &= [I_n + M(s) \text{diag} \left\{ g_i(s)k_i(s) \right\} M^{-1}(s)]^{-1} M(s) \text{diag} \left\{ g_i(s)k_i(s) \right\} M^{-1}(s) \\ &= M(s) \text{diag} \left\{ \frac{g_i(s)k_i(s)}{1 + g_i(s)k_i(s)} \right\} M^{-1}(s), \quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned} \quad (13)$$

indicando que o desempenho do sistema a laço fechado é governado pelas FT's

$$\frac{g_i(s)k_i(s)}{1+g_i(s)k_i(s)}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (14)$$

e pela estrutura da matriz de transformação $M(s)$. Note que se $M(s)$ for independente de s , então o desempenho será governado apenas pelas FT's de (14).

Este método, que deve o nome à propriedade $G(s)K(s) = K(s)G(s)$, possui duas deficiências: (1ª) A matriz modal de $G(s)$ é, em geral, dependente de s e os autovalores são funções irracionais em s ; (2ª) Em geral o controlador $K(s)$ irá possuir uma estrutura complexa devido ao fato de $M(s)$ ser dependente de s . Por exemplo, se $k_i(s)$, $(1 \leq i \leq n)$, forem simples controles proporcionais, o controlador $K(s) = M(s) \text{diag} \{k_i(s)\} M^{-1}(s)$ não será necessariamente constante.

O MCC é, neste contexto, bastante importante sob o ponto de vista de que o MDD constitui uma versão melhorada do método, e portanto é um bom ponto de apoio para comparações.

Segue agora a apresentação do MDD.

3.1 - MATRIZ DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DIÁDICA

Definição 1 - Uma MFT $G(s)$ que representa um SM com n entradas e n saídas é denominada matriz de funções de transferência diádica, ou abreviadamente MFTD, se e somente se puder ser escrita na forma da eq. (1).

$$G(s) = \sum_{i=1}^n g_i(s) z_i w_i^t = Z \text{diag} \{g_i(s)\} W, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (1)$$

onde as $g_i(s)$, ($1 \leq i \leq n$), pertencem ao campo das funções racionais $C \rightarrow C$, Z e W são matrizes regulares de ordem $n \times n$ definidas sobre o campo dos complexos, z_i ($1 \leq i \leq n$) são as colunas de Z e w_i^t ($1 \leq i \leq n$) são as filas de W .

A eq. (1) é uma extensão direta dos conceitos de expansão diádica de matrizes numéricas apresentados no apêndice, onde a equivalência entre os 2º e 3º membros foi demonstrada sob a suposição de que os elementos dos vetores pertencem ao mesmo campo a que pertencem os α da expressão (1) desse apêndice. Aqui, α é uma função racional, mas os elementos dos vetores são numéricos. As expressões deduzidas continuam a ser válidas, porque: 1º) todos os elementos pertencem a campos, e 2º) os números podem ser considerados como aquelas particulares funções racionais onde os polinômios numerador e denominador reduzem-se a constantes, ou um desses polinômios é um múltiplo (real ou complexo) do outro.

O diagrama de blocos seguinte fornece uma interpretação física da ED dada pela eq. (1):



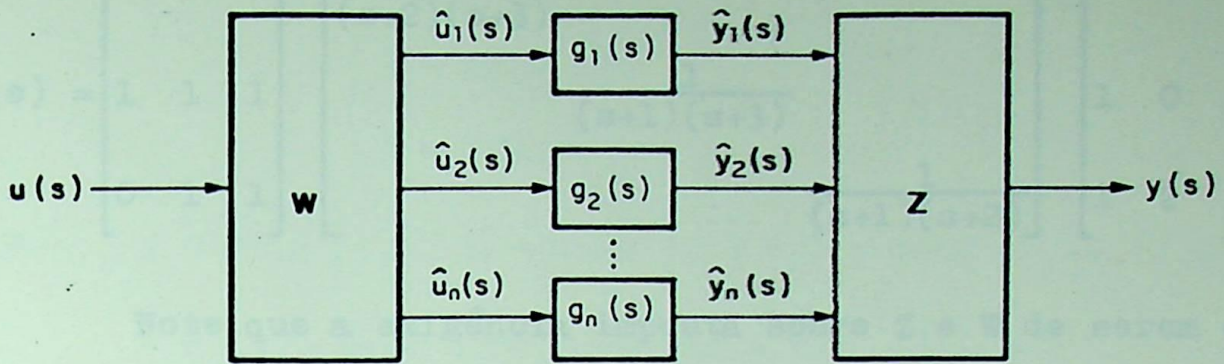


Diagrama de blocos da ED.

Facilmente pode ser verificado que são válidas as seguintes relações:

$$\hat{u}(s) = Wu(s) \quad (2)$$

$$\hat{y}(s) = Z^{-1}y(s) \quad (3)$$

A partir das equações (2) e (3) surgem as denominações de "matriz de transformação da entrada" e "matriz de transformação da saída" para as matrizes W e Z, respectivamente. O elemento $g_i(s)$ passa a ser denominado "função de transferência do subsistema i", ou simplesmente "subsistema i".

Exemplo 1 - Observe a MFT $G(s)$ dada em (4) e sua respectiva ED dada em (5).

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+2 & s+1 & s+2 \\ 2s+5 & 3s+7 & 4s+11 \\ 2s+5 & 2s+6 & 4s+11 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Note que a exigência imposta sobre Z e W de serem estritamente numéricas, embora aceitável matematicamente, é uma restrição bastante pesada e portanto a possibilidade de que uma MFT arbitrária satisfaça (1) é bastante pequena.

3.1.1 - OBTENÇÃO DO MODELO DE ESTADO DE UMA MATRIZ DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DIÁDICA

Suponha que cada um dos subsistemas $g_i(s)$ possua um modelo de estado de dimensão p_i semelhante ao da eq. (6). O modelo de estado do sistema $G(s)$, de dimensão $p = \sum p_i$ é obtido a partir dos modelos dos subsistemas $g_i(s)$, ($1 \leq i \leq n$), como em (7).

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i \hat{u}_i \\ \hat{y}_i = C_i x_i \end{cases}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \text{diag} \{A_i\} x + \text{diag} \{B_i\} \hat{u} \\ \hat{y} = \text{diag} \{C_i\} x \end{cases}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (7)$$

onde: $\hat{u} = [\hat{u}_1 \quad \hat{u}_2 \quad \dots \quad \hat{u}_n]^t$, $\hat{y} = [\hat{y}_1 \quad \hat{y}_2 \quad \dots \quad \hat{y}_n]^t$ e

$$x = [x_1^t \quad x_2^t \quad \dots \quad x_n^t]^t.$$

Substituindo as eqs. (2) e (3) em (7), obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{x} = \text{diag} \{A_i\} x + \text{diag} \{B_i\} W u \\ y = Z \text{diag} \{C_i\} x \end{cases}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (8)$$

A eq. (8) ainda pode ser escrita como:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BWu \\ y = ZCx \end{cases} \quad (9)$$

onde: $A = \text{diag} \{A_i\}$, $B = \text{diag} \{B_i\}$ e $C = \text{diag} \{C_i\}$, ($1 \leq i \leq n$)

$\text{ord}(A) = p \times p$, $\text{ord}(B) = p \times n$ e $\text{ord}(C) = n \times p$

$\text{ord}(A_i) = p_i \times p_i$, $\text{ord}(B_i) = p_i \times 1$ e $\text{ord}(C_i) = 1 \times p_i$

não esquecendo que deve ser cumprida também a relação $\sum_{i=1}^n p_i = p$.

Exemplo 2 - Encontrar um modelo de estado da MFTD $G(s)$ dada pela eq. (5).

O modelo de estado na forma canônica variável de fase de um sistema monovariável tipo $g(s) = \frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$ é:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -(\alpha+\beta) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0] x \end{cases} \quad (10)$$

Então os modelos de estado dos subsistemas $g_i(s)$, ($1 \leq i \leq 3$), da eq. (5), em notação de termo (A_i, B_i, C_i) , são:

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \frac{1}{(s+2)(s+3)} \longrightarrow \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \ 0] \right) \\ g_2(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+3)} \longrightarrow \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \ 0] \right) \\ g_3(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \longrightarrow \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \ 0] \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Portanto as equações de estado e saída do modelo de estado do sistema $G(s)$ são:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} u \quad (12)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

3.1.2 - OBTENÇÃO DA EXPANSÃO DIÁDICA A PARTIR DO MODELO DE ESTADO

Seja agora o problema inverso: obter uma MFT $n \times n$ na forma de uma ED partindo-se do modelo de estado de dimensão $p \geq n$ dado pelo termo (A, B, C) .

Partindo da relação entre modelos de estado e transferencial: $G(s) = C(sI_p - A)^{-1}B$, e supondo que a matriz A possa ser fatorada como em (13),

$$A = M \text{diag} \{A_i\} M^{-1}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (13) \quad (\S)$$

onde: $\text{ord}(A) = p \times p$, $\text{ord}(A_i) = p_i \times p_i$, $p = \sum_{i=1}^n p_i$

pode-se escrever então a eq. (14)

(§) Evidentemente nada impede que a matriz M coincida com a matriz modal de A , caso em que as submatrizes A_i , $(1 \leq i \leq n)$, serão obtidas como $\text{diag} \{ \lambda_j \}_i$, $(1 \leq j \leq p_i)$, $(1 \leq i \leq n)$.

$$\begin{aligned}
G(s) &= C(sI_p - M \text{diag} \{A_i\} M^{-1})^{-1} B \\
&= CM \text{diag} \left\{ (sI_{p_i} - A_i)^{-1} \right\} M^{-1} B, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (14)
\end{aligned}$$

Considere agora que as matrizes B e C possuam ED's submatriciais semelhantes às dadas pelas equações (15) e (16) abaixo.

$$B = M \text{diag} \{B_i\} W, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (15)$$

$$C = Z \text{diag} \{C_i\} M^{-1}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (16)$$

onde: $\text{ord}(M) = \text{ord}(M^{-1}) = p \times p,$

$\text{ord}(Z) = \text{ord}(W) = n \times n,$

$\text{ord}(B) = p \times n, \quad \text{ord}(C) = n \times p,$

$\text{ord}(B_i) = p_i \times 1, \quad \text{ord}(C_i) = 1 \times p_i$

A substituição das equações (15) e (16) em (14), resulta em:

$$\begin{aligned}
G(s) &= (Z \text{diag} \{C_i\} M^{-1}) M \text{diag} \left\{ (sI_{p_i} - A_i)^{-1} \right\} M^{-1} (M \text{diag} \{B_i\} W) \\
&= Z \text{diag} \left\{ C_i (sI_{p_i} - A_i)^{-1} B_i \right\} W, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (17)
\end{aligned}$$

A eq. (17) é a ED desejada.

Observe que nada foi dito sobre a possibilidade de o modelo de estado fornecido não representar um sistema diádico. Esta análise será feita no desenvolvimento do exemplo abaixo.

Exemplo 3 - Encontrar um MFT $G(s)$ na forma de uma ED partindo do modelo de estado dado pela eq. (12).

A matriz A de (12) já se encontra na forma diagonal sub-

matricial desejada, porém vai-se tentar encontrar a $G(s)$ pedida por outro caminho, ou seja, pela diagonalização completa de A , ilustrando assim a situação geral de que a dada A não evidencie nenhuma forma canônica reconhecível em submatrizes componentes.

As matrizes de transformação e a forma canônica diagonal da matriz A são dadas em (18).

$$A = M \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} M^{-1} \quad (18)$$

onde:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Note que a escrita de M é imediata em casos como estes; basta obter os autovalores das submatrizes A_i de (12) e reconhecer o fato de que todas estas A_i vêm dadas na forma companheira. Assim sendo, $M = \text{diag}\{M_i\}$, onde M_i é a Vandermonde dos autovalores de A_i . No caso geral, os autovetores de A (que constituirão as colunas de M) devem ser obtidos por qualquer um dos procedimentos descritos na literatura sobre o tema. Estender-se sobre este problema matemático conhecido iria distrair a atenção do assunto principal em desenvolvimento.

O passo seguinte é a escolha das ordens p_i , ($1 \leq i \leq 3$), de cada subsistema. Ainda que neste caso a MFT a ser obtida é conhecida, ver eq. (5), e portanto são conhecidos os p_i ($1 \leq i \leq 3$) adequados, suponha que nada se sabe acerca desses valores. Naturalmente uma escolha incorreta dos p_i , ($1 \leq i \leq 3$), deve resultar, durante os cálculos, em algum tipo de incompatibilidade numérica tal como resolver sistemas de equações lineares inconsistentes ou inverter matrizes singulares. É interessante seguir propositadamente, pelo menos uma vez, este caminho incorreto, para observar esses efeitos. Obviamente tais incompatibilidades numéricas, quando encontradas, serão indicativas da escolha incorreta dos p_i , ($1 \leq i \leq 3$) (§).

Seja, arbitrariamente: $p_1=3$, $p_2=2$, $p_3=1$. Então a matriz Λ (que é a forma canônica diagonal submatricial de A) terá o seguinte particionamento:

$$\Lambda = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} -2 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -3 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & \\ \hline & & & -3 & 0 & \\ & & & 0 & -1 & \\ \hline & & & & & -2 \end{array} \right] \quad (19)$$

O próximo passo é tentar encontrar as fatorações de B e C tal como propostas pelas equações (15) e (16). Pós multiplicando a eq. (15) por $U=W^{-1}$ obtém-se (20). A substituição de va-

(§) Por outro lado, não é possível saber de antemão a existência ou não de uma ED para uma dada $G(s)$; isto quer dizer que em certos casos nenhuma escolha das p_i , ($1 \leq i \leq n$), permitirá encontrar as matrizes Z e W, pois em todas as tentativas serão encontradas incompatibilidades como citadas acima. Estas serão, então, as MFT's que não possuem ED. Um exemplo destas MFT's está dado em [L2], 7.2.2, pág. 106.

lores em (20) resulta na eq. (21).

$$BU = M \text{diag} \{B_i\}, \quad (1 \leq i \leq 3) \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \\ 0 & b_{42} & 0 \\ 0 & b_{52} & 0 \\ 0 & 0 & b_{63} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Analogamente: pré multiplicando-se (16) por $X=Z^{-1}$ e substituindo valores, tem-se:

$$XC = \text{diag} \{C_i\} M^{-1}, \quad (1 \leq i \leq 3) \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{24} & c_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

As equações (21) e (23) podem ser transformadas em dois sistemas de equações lineares, cada um com 18 equações e 15 incógnitas, bastando para tanto efetuar-se as multiplicações indicadas e igualar termo a termo. Para a equação (21) obtém-se o sistema de 14 equações dado em (24) e para a equação (23) o sistema de (25).

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{31} = 0 \\ b_{42} = 0 \\ b_{52} = 0 \\ b_{63} = 0 \\ u_{22} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} u_{23} = 0 \\ b_{11} + b_{21} = 0 \\ -2b_{11} - 3b_{21} - u_{21} = 0 \\ u_{11} + u_{31} = 0 \\ u_{12} + u_{32} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} u_{13} + u_{33} = 0 \\ u_{11} + 2u_{21} + 3u_{31} = 0 \\ u_{12} + 3u_{32} = 0 \\ u_{13} + 3u_{33} = 0 \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{13} = 0 \\ c_{24} = 0 \\ c_{25} = 0 \\ c_{36} = 0 \\ c_{11} - c_{12} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} - 3c_{11} + 2c_{12} = 0 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0 \\ x_{12} + x_{13} = 0 \\ x_{21} + x_{22} = 0 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_{22} + x_{23} = 0 \\ x_{31} + x_{32} = 0 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 0 \\ x_{32} + x_{33} = 0 \end{array} \right. \quad (25)$$

Durante a montagem dos sistemas foram detetadas 8 equações do tipo "0=0", sendo 4 de cada sistema. Para o sistema da eq. (24) foram encontradas 8 equações a 9 incógnitas e para o sistema da eq. (25) encontrou-se 10 equações a 11 incógnitas. Pelas condições do problema, vê-se que ambos os sistemas possuem infinitas soluções. Uma possível solução seria:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11} = 1 \\ b_{21} = -1 \\ u_{11} = 1/2 \\ u_{21} = 1 \\ u_{31} = -1/2 \end{array} \right. \quad (26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11} = 1 \\ c_{12} = 1 \\ x_{12} = 1 \\ x_{13} = -1 \end{array} \right. \quad (27)$$

onde as demais variáveis são todas nulas.

A eq. (26) resolve o sistema (24) e a eq. (27) resolve o sistema (25), porém, o erro esperado aparece quando se tenta obter Z e W. Para a solução apresentada em (26) e (27) ou qualquer outra possível solução, os elementos x_{ij} e u_{ij} , ($1 \leq i \leq 3$), ($1 \leq j \leq 3$) encontrados, definirão matrizes X e U sempre singulares. Isto sucede porque nenhuma condição foi agregada aos sistemas matriciais (21) e (23) que obriguem à regularidade de Z e W. As condições agregadas deveriam ser $\det W \neq 0$ e $\det Z \neq 0$. Elas não são muito restritivas, já que as combinações de w_{ij} e z_{ij} que levam o determinante a zero são muito menos que as que não o levam. Mas a complicação aqui é de natureza matemática, já que o sistema de equações se transformaria em outro de inequações. O anterior é suficiente para se concluir que uma ED com subsistemas cujas ordens p_i , ($1 \leq i \leq 3$), estão ilustradas pela

eq. (19) não é possível.

Seja agora a escolha correta dos p_i , ou seja, $p_i = 2$, ($1 \leq i \leq 3$). O particionamento de Λ toma a forma da eq. (28) abaixo.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix}} & \\ & & & \end{bmatrix} \quad (28)$$

A substituição de valores nas equações (20) e (22), obedecendo o novo particionamento de Λ , é mostrado a seguir nas equações (29) e (30).

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \\ 0 & b_{42} & 0 \\ 0 & 0 & b_{53} \\ 0 & 0 & b_{63} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{35} & c_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Efetutando-se as operações indicadas, e de modo semelhante ao executado anteriormente, obtém-se os seguintes sistemas de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{22} = 0 \\ u_{23} = 0 \\ b_{11} + b_{21} = 0 \\ 2b_{11} + 3b_{21} + u_{21} = 0 \\ b_{32} + b_{42} = 0 \\ u_{11} + u_{31} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{12} + u_{32} + b_{32} + 3b_{42} = 0 \\ u_{13} + u_{33} = 0 \\ b_{53} + b_{63} = 0 \\ u_{11} + 2u_{21} + 3u_{31} = 0 \\ u_{12} + 3u_{32} = 0 \\ u_{13} + 3u_{33} + b_{53} + 2b_{63} = 0 \end{array} \right. \quad (31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} - 3c_{11} + 2c_{12} = 0 \\ c_{11} + c_{12} = 0 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0 \\ x_{12} + x_{13} = 0 \\ x_{21} + x_{22} = 0 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} - \frac{3}{2}c_{23} + \frac{1}{2}c_{24} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}c_{23} - \frac{1}{2}c_{24} = 0 \\ x_{22} + x_{23} = 0 \\ x_{31} + x_{32} = 0 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 0 \\ x_{32} + x_{33} - 2c_{35} + c_{36} = 0 \\ c_{35} - c_{36} = 0 \end{array} \right. \quad (32)$$

O sistema de equações (31) possui 10 equações e 13 incógnitas e o sistema (32) possui 12 equações e 15 incógnitas. Novamente ambos os sistemas possuem infinitas soluções. Escolhendo-se três variáveis ao acaso de cada sistema e dando valores, por exemplo: $b_{11} = b_{32} = b_{53} = c_{11} = c_{23} = c_{35} = 1$, encontram-se as soluções dadas abaixo.

$$\text{diag} \{B_i\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{diag} \{C_i\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$U = W^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad X = Z^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

As matrizes Z e W procuradas são dadas pela equação (35).

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Chamando de $g_i(s)$, ($1 \leq i \leq n$), as FT's dos subsistemas, obtém-se:

$$g_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \quad (36)$$

$$g_2(s) = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2}{(s+1)(s+3)} \quad (37)$$

$$g_3(s) = C_3(sI - A_3)^{-1}B_3 = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad (38)$$

Portanto a ED de $G(s)$ procurada é:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+3)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{(s+1)(s+3)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Efetutando-se as operações como verificação:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+2 & s+1 & s+2 \\ 2s+5 & 3s+7 & 4s+11 \\ 2s+5 & 2s+6 & 4s+11 \end{bmatrix} \quad (40)$$

onde a eq. (40) confere com a eq. (4) original.

Pode ser observado que as ED's dadas por (5) e (39) são muito semelhantes. A eq. (41) abaixo mostra como a ED de (39) pode ser obtida a partir de (5). A eq. (42) mostra o caso geral, onde é visível a lei de formação das infinitas ED's de uma mesma MFTD.

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+3)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)(s+3)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+3)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)(s+3)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_I$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+3)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{(s+1)(s+3)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
G(s) &= Z \operatorname{diag} \{g_i(s)\} W \\
&= Z \left[\operatorname{diag} \{\beta_i\} \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{\beta_i} \right\} \right] \operatorname{diag} \{g_i(s)\} \left[\operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{\alpha_i} \right\} \operatorname{diag} \{\alpha_i\} \right] W \\
&= \underbrace{\left(Z \operatorname{diag} \{\beta_i\} \right)}_{\hat{Z}} \underbrace{\left(\operatorname{diag} \left\{ \frac{g_i(s)}{\alpha_i \beta_i} \right\} \right)}_{\operatorname{diag} \{\hat{g}_i(s)\}} \underbrace{\left(\operatorname{diag} \{\alpha_i\} W \right)}_{\hat{W}} \\
&= \hat{Z} \operatorname{diag} \{\hat{g}_i(s)\} \hat{W}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (42)
\end{aligned}$$

3.1.3 - PROPRIEDADES DAS MATRIZES DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DIÁDICAS

As MFTD's possuem um conjunto interessante de propriedades, algumas das quais apresentadas aqui na forma dos seguintes teoremas:

Teorema 1 - Se $G(s)$ é uma MFTD e α é uma constante real, tal que $G(\alpha)$ seja finita e regular, então os autovalores de $G(s)G^{-1}(\alpha)$ e $G^{-1}(\alpha)G(s)$ são $g_i(s)/g_i(\alpha)$, ($1 \leq i \leq n$), e as Z e W^{-1} da eq. (1) são as matrizes modais de $G(s)G^{-1}(\alpha)$ e $G^{-1}(\alpha)G(s)$, respectivamente.

Demonstração: Da eq. (1), vem:

$$G(s) = Z \operatorname{diag} \{g_i(s)\} W \quad (43)$$

$$G^{-1}(\alpha) = W^{-1} \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{g_i(\alpha)} \right\} Z^{-1} \quad (44)$$

Obtém-se então:

$$\begin{aligned}
G(s)G^{-1}(\alpha) &= Z \operatorname{diag} \{g_i(s)\} W W^{-1} \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{g_i(\alpha)} \right\} Z^{-1} \\
&= Z \operatorname{diag} \left\{ \frac{g_i(s)}{g_i(\alpha)} \right\} Z^{-1}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{-1}(\alpha)G(s) &= W^{-1} \text{diag} \left\{ \frac{1}{g_i(\alpha)} \right\} Z^{-1}Z \text{diag} \left\{ g_i(s) \right\} W \\
&= W^{-1} \text{diag} \left\{ \frac{g_i(s)}{g_i(\alpha)} \right\} W, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (46)
\end{aligned}$$

As equações (45) e (46) obtidas satisfazem a definição de MFTD dada no começo da seção (§).

Teorema 2 - Se $G(s)$ é uma MFTD, então as matrizes $G^{-1}(s)$ (desde que $\det G(s) \neq 0$), $G^t(s)$ e $\frac{d}{ds} G(s)$ também são MFTD's.

Demonstração: Seja novamente $G(s)$ dada na forma do triplo produto matricial da eq. (1), então:

$$G^{-1}(s) = W^{-1} \text{diag} \left\{ \frac{1}{g_i(s)} \right\} Z^{-1}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (47)$$

$$G^t(s) = W^t \text{diag} \left\{ g_i(s) \right\} Z^t, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (48)$$

$$\frac{d}{ds} G(s) = Z \text{diag} \left\{ \frac{d}{ds} g_i(s) \right\} W, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (49)$$

onde todas as formas encontradas satisfazem a definição de MFTD.

Teorema 3 - Se $G(s)$ é uma MFTD e pode ser escrita como $\frac{P(s)}{p(s)}$, onde $P(s)$ é uma matriz de elementos polinômicos em s , então $P(s)$ também é uma MFTD.

(§) Acerca deste teorema, Layton comenta que se algum autovalor de (45) e (46) for múltiplo, eles devem aparecer relacionados com autovetores linearmente independentes. Ver [12], 7.2.2, pág. 103.

Demonstração: É suposto que $G(s) = \frac{P(s)}{p(s)}$, portanto

$P(s) = p(s)G(s)$, donde:

$$P(s) = p(s) \left[Z \text{ diag } \left\{ g_i(s) \right\} W \right] = Z \text{ diag } \left\{ p(s)g_i(s) \right\} W, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (50)$$

Note que, nas condições do teorema 3, $p(s)$ é um denominador comum de todos os elementos de $G(s)$ (caso contrário a $P(s)$ não seria polinômica). Neste caso os elementos $p(s)g_i(s)$ da matriz diagonal do último membro de (50) são polinômios. Aos efeitos de considerar $P(s)$ uma MFTD, e que como tal deve obedecer à definição 1 desta seção, efetua-se um "embedding" do conjunto dos polinômios em s no conjunto das funções racionais em s , o que sempre é possível (um polinômio pode ser considerado como aquela especial função racional possuindo seu denominador constante).

3.1.4 - DETERMINAÇÃO DE EXPANSÕES DIÁDICAS

Dos três teoremas apresentados na subseção anterior, o teorema 1 é o mais importante, e é baseado nele que se obtém o seguinte algoritmo para a determinação de ED's de MFT's:

1º passo: Escolhe-se um número real α tal que $\det G(\alpha) \neq 0$ e calcula-se $G^{-1}(\alpha)$. A mais simples escolha $\alpha = 0$ geralmente é suficiente, e sua escolha com preferência a um valor qualquer $\alpha \neq 0$ pode resultar numa considerável simplificação no algoritmo, como será ilustrado no próximo exemplo.

2º passo: Calcula-se $G(s)G^{-1}(\alpha)$.

3º passo: Calculam-se os autovalores $\lambda_i(s)$, $(1 \leq i \leq n)$, e a matriz modal M de $G(s)G^{-1}(\alpha)$, isto é, obtém-se a fatoração:

$$G(s)G^{-1}(\alpha) = M \text{diag} \left\{ \lambda_i(s) \right\} M^{-1}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (51)$$

4º passo: Pós-multiplicando-se ambos os membros de (51) por $G(\alpha)$:

$$G(s) = M \text{diag} \left\{ \lambda_i(s) \right\} M^{-1}G(\alpha), \quad (1 \leq i \leq n) \quad (52)$$

e fazendo-se:

$$M = Z$$

$$\text{diag} \left\{ \lambda_i(s) \right\} = \text{diag} \left\{ g_i(s) \right\}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (53)$$

$$M^{-1}G(\alpha) = W$$

Obtém-se a ED desejada:

$$G(s) = Z \text{diag} \left\{ g_i(s) \right\} W, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (54)$$

Exemplo 4 - Achar a ED da MFTD $G(s)$ dada pela eq.(4) e repetida como (55) utilizando o algoritmo proposto acima.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+2 & s+1 & s+2 \\ 2s+5 & 3s+7 & 4s+11 \\ 2s+5 & 2s+6 & 4s+11 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$G^{-1}(0)$ é dada abaixo pela eq. (56).

$$G^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 5.5 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 6 & -6 \\ -2.5 & -3.5 & 4.5 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Em seguida computa-se $G(s)G^{-1}(0)$.

$$\begin{aligned}
G(s)G^{-1}(0) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+2 & s+1 & s+2 \\ 2s+5 & 3s+7 & 4s+11 \\ 2s+5 & 2s+6 & 4s+11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.5 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 6 & -6 \\ -2.5 & -3.5 & 4.5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 3s+6 & 3s & -3s \\ s & 5s+6 & -3s \\ s & -s & 3s+6 \end{bmatrix} \quad (57)
\end{aligned}$$

O 3º passo do algoritmo proposto, ou seja, o cálculo dos autovalores e autovetores de $G(s)G^{-1}(0)$, operando diretamente com FT's, pode ser bastante trabalhoso. No que segue, apresenta-se uma técnica que reduz este cálculo a um algoritmo numérico.

Note-se que a matriz $G(s)G^{-1}(0)$, no caso geral, sempre pode ser escrita na forma:

$$G(s)G^{-1}(0) = \frac{1}{d(s)} [G_0 + sG_1 + s^2G_2 + \dots + s^jG_j] \quad (58)$$

onde $d(s)$ é um polinômio em s e as matrizes G_i , ($0 \leq i \leq j$), são os coeficientes das respectivas potências s^j . j é a máxima potência dos polinômios numeradores.

Lembrando que para $G(s)$ satisfazer a definição de MFTD é necessário que a matriz modal de $G(s)G^{-1}(0)$ seja numérica, ou seja, independa da variável s ; fica claro, então, que a matriz modal Z de $G(s)G^{-1}(0)$ é a mesma que diagonaliza simultaneamente todas as G_i , ($0 \leq i \leq j$). As condições necessárias para que exista esta diagonalização simultânea das G_i , ($0 \leq i \leq j$), por uma mesma matriz modal Z são: 1ª) todas as G_i , ($0 \leq i \leq j$), devem ser diagonalizáveis e 2ª) $G_i G_k = G_k G_i$, para todo ($0 \leq i, k \leq j$) e ($i \neq k$). (§)

(§) Ver [H-K], 6.5, pág. 205.

Continuando o exemplo, a eq. (57) na forma da eq. (58) fica:

$$G(s)G^{-1}(0) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \left[sG_1 + G_0 \right]$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right\} \quad (59)$$

É óbvio que $G_0 G_1 = G_1 G_0$, pois G_0 é uma matriz escalar; portanto a matriz modal de G_1 é a mesma que diagonaliza $G(s)G^{-1}(0)$, já que G_1 é diagonalizável.

A eq. (60) fornece a fatoração de G_1 na forma desejada, onde Z é a matriz modal e $\text{diag} \{ \lambda_i \}$, ($1 \leq i \leq 3$), é a matriz de autovalores.

$$G_1 = Z \text{diag} \left\{ \lambda_i \right\} Z^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Os autovalores de $G(s)G^{-1}(0)$ são obtidos como:

$$Z^{-1} [G(s)G^{-1}(0)] Z = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} s + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 6s+6 & 0 & 0 \\ 0 & 3s+6 & 0 \\ 0 & 0 & 2s+6 \end{bmatrix} \quad (61)$$

O último passo é o cálculo da matriz W. Tem-se:

$$W = Z^{-1}G(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 11 \\ 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \quad (62)$$

Portanto a ED procurada é dada pela eq. (63) abaixo e, para verificação dos cálculos, é encontrada a eq. (64) que, como era esperado, coincide com a eq. (4).

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{(s+2)(s+3)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{(s+1)(s+3)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+2 & s+1 & s+2 \\ 2s+5 & 3s+7 & 4s+11 \\ 2s+5 & 2s+6 & 4s+11 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Esta ED também pode ser obtida a partir de (5) pela aplicação da eq. (42)

Em casos de MFT's não diádicas o 3º passo do algoritmo proposto falha, evidenciando assim a condição de não diádica da matriz analisada. Através da expansão de $G(s)G^{-1}(0)$ sugerida por (58) pode-se prever os seguintes casos de falhas:

- (1º) As matrizes G_i , ($0 \leq i \leq j$), não comutam entre si;
- (2º) As matrizes G_i , ($0 \leq i \leq j$), comutam entre si porém não são diagonalizáveis.

Exemplo 5 - A MFT não diádica referenciada previamente no

rodapé da página 72 , está dada abaixo pela eq. (65).

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ s+3 & s+4 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Para este caso $G(s)G^{-1}(0)$ resulta:

$$\begin{aligned} G(s)G^{-1}(0) &= \frac{d(0)}{d(s)} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{d(0)}{d(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}}_{G_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{G_0} \end{aligned} \quad (66)$$

onde (66) se enquadra no caso (2º), ou seja, G_0 e G_1 comutam entre si, porém G_1 não é diagonalizável.

3.2 - APLICAÇÃO DO CONCEITO DE MATRIZ DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DIÁDICA AO PROJETO DO CONTROLADOR

Na configuração dada pela figura da página 39, suponha que a planta $G(s)$ é uma MFTD e que $K(s)$ é a unidade controladora que se deseja projetar para que o sistema a laço fechado $H(s)$ cumpra os critérios ou especificações de comportamento previamente estabelecidos.

O primeiro passo para a compensação do sistema $G(s)$ é a obtenção da sua expansão diádica, o que pode ser conseguido utilizando-se, por exemplo, o algoritmo descrito pela subseção 3.1.4. Tal ED é dada pelo triplo produto da eq. (1)

$$G(s) = Z \text{ diag } \left\{ g_i(s) \right\} W, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (1)$$

Tendo em vista a propriedade das MFTD's demonstrada pelo Teorema 1 da subseção 3.1.3, define-se um controlador $K(s)$, também diádico, na forma da eq. (2)

$$K(s) = W^{-1} \text{ diag } \left\{ k_i(s) \right\} Z^{-1}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (2)$$

Observe que com este controlador a MFT a laço fechado $H(s)$, reduz-se à forma dada pela eq. (3).

$$\begin{aligned} H(s) &= [I + G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s) \\ &= [I + Z \text{ diag } \left\{ g_i(s) \right\} W W^{-1} \text{ diag } \left\{ k_i(s) \right\} Z^{-1}]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot Z \text{ diag } \left\{ g_i(s) \right\} W W^{-1} \text{ diag } \left\{ k_i(s) \right\} Z^{-1} \\ &= Z \text{ diag } \left\{ \frac{k_i(s)g_i(s)}{1+k_i(s)g_i(s)} \right\} Z^{-1}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3) \quad (\S) \end{aligned}$$

(§) Compare as estruturas das matrizes $K(s)$ e $H(s)$ das eqs. (2) e (3) com as estruturas sugeridas pelo MCC (eqs. (12) e (13) da pág. 63).

Eq. (3) mostra que o sistema a laço fechado $H(s)$ também é diádico, e mais ainda, sua estabilidade e características transitórias são governadas pelas propriedades das n FT's características a laço fechado $\left\{ \frac{k_i(s) g_i(s)}{1+k_i(s)g_i(s)} \right\}$.

ESTABILIDADE - Por inspeção obtém-se o polinômio característico $e_{LF}(s)$ do sistema a laço fechado $H(s)$,

$$e_{LF}(s) = \prod_{i=1}^n [1 + k_i(s)g_i(s)] \quad (4)$$

De (4) conclui-se que o sistema $H(s)$ será estável se, e somente se, todas as FT's características $\left\{ \frac{k_i(s)g_i(s)}{1+k_i(s)g_i(s)} \right\}$, ($1 \leq i \leq n$), forem estáveis.

INTERAÇÃO - A simples observação da eq. (3) é suficiente para que se possa afirmar que a interação durante o transitório será pequena se a matriz de transformação Z for aproximadamente diagonal, ou se as FT's características $\left\{ \frac{k_i(s)g_i(s)}{1+k_i(s)g_i(s)} \right\}$, ($1 \leq i \leq n$), forem muito semelhantes. Quanto à interação estacionária, vale o que foi dito no último parágrafo de 2.6.4.

ERRO ESTACIONÁRIO - A eq. (31) da subseção 2.6.4 fornece o erro estacionário observado na saída j devido a uma excitação degrau de amplitude c aplicada na entrada j do sistema a laço fechado $H(s)$. Tal equação é repetida aqui como (5).

$$e_j(\infty) = ce_j^t [H(0) - I_n] e_j \quad (5)$$

Fazendo-se $s=0$ em (3) e substituindo em (5), tem-se:

$$\begin{aligned}
e_j(\infty) &= ce_j^t \left[I_n - Z \operatorname{diag} \left\{ \frac{k_i(0)g_i(0)}{1+k_i(0)g_i(0)} \right\} Z^{-1} \right] e_j \\
&= ce_j^t Z \operatorname{diag} \left\{ 1 - \frac{k_i(0)g_i(0)}{1+k_i(0)g_i(0)} \right\} Z^{-1} e_j \\
&= ce_j^t Z \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{1+k_i(0)g_i(0)} \right\} Z^{-1} e_j, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (6)
\end{aligned}$$

A partir de (6) pode-se afirmar que o erro estacionário analisado será nulo se o sistema $H(s)$ for estável e se for satisfeita a seguinte equação:

$$\lim_{s \rightarrow 0} [k_i(s)g_i(s)] = \infty, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (7)$$

Obviamente, para se satisfazer a eq. (7), todas as FT's $k_i(s)g_i(s)$, $(1 \leq i \leq n)$, devem possuir um integrador.

Por outro lado, se for feita a substituição da matriz $K(s)$ por $\alpha K(s)$, ou equivalentemente, substituindo-se os $k_i(s)$ por $\alpha k_i(s)$, $(1 \leq i \leq n)$, onde α é um escalar real representando um ganho adicional em todos os laços, resulta:

$$e_j(\infty) = ce_j^t Z \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{1+\alpha k_i(0)g_i(0)} \right\} Z^{-1} e_j, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (8)$$

indicando que se $k_i(0)g_i(0) \neq 0$, $(1 \leq i \leq n)$, então um aumento do valor desse ganho adicional α leva à diminuição do erro estacionário para a entrada degrau especificada, e vice-versa.

INTEGRIDADE - Para o caso de uma falha do sensor j do sistema $H(s)$, pode-se escrever a eq. (9), já demonstrada na subseção 2.6.2.

$$\frac{e_{\text{LFCFS}}(s)}{e_{\text{LF}}(s)} = e_j^t [I_n + G(s)K(s)]^{-1} e_j \quad (9)$$

onde: $e_{\text{LFCFS}}(s)$ = polinômio característico do sistema a laço fechado com falha no sensor j .

$e_{\text{LF}}(s)$ = polinômio característico do sistema sem falhas.

Substituindo-se (1) e (2) em (9), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{e_{\text{LFCFS}}(s)}{e_{\text{LF}}(s)} &= e_j^t [I_n + G(s)K(s)]^{-1} e_j \\ &= e_j^t [I_n + Z \text{diag} \{g_i(s)\} W W^{-1} \text{diag} \{k_i(s)\} Z^{-1}]^{-1} e_j \\ &= e_j^t Z \text{diag} \left\{ \frac{1}{1+k_i(s)g_i(s)} \right\} Z^{-1} e_j \\ &= e_j^t Z \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+k_i(s)g_i(s)} e_i e_i^t \right) Z^{-1} e_j \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+k_i(s)g_i(s)} \begin{pmatrix} e_j^t Z e_i \\ e_i^t Z^{-1} e_j \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

De modo semelhante, para uma falha no atuador j do sistema $H(s)$, pode-se escrever a eq. (11), também já demonstrada na subseção 2.6.2.

$$\frac{e_{\text{LFCFA}}(s)}{e_{\text{LF}}(s)} = e_j^t [I_n + K(s)G(s)]^{-1} e_j \quad (11)$$

onde: $e_{\text{LFCFA}}(s)$ = polinômio característico do sistema a laço fechado com falha no atuador j .

Substituindo-se (1) e (2) em (11), resulta:

$$\begin{aligned}
 \frac{e_{\text{LFCFA}}(s)}{e_{\text{LF}}(s)} &= e_j^t [I + K(s)G(s)]^{-1} e_j \\
 &= e_j^t \left[I + W^{-1} \text{diag} \left\{ k_i(s) \right\} Z^{-1} Z \text{diag} \left\{ g_i(s) \right\} W \right]^{-1} e_j \\
 &= e_j^t W^{-1} \text{diag} \left\{ \frac{1}{1+k_i(s)g_i(s)} \right\} W e_j \\
 &= e_j^t W^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+k_i(s)g_i(s)} e_i e_i^t \right) W e_j \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+k_i(s)g_i(s)} (e_j^t W^{-1} e_i) (e_i^t W e_j) \quad (12)
 \end{aligned}$$

Equações (10) e (12) são simples combinações lineares das FT's características $\left\{ \frac{1}{1+k_i(s)g_i(s)} \right\}$, ($1 \leq i \leq n$), e portanto também são FT's. Para se conhecer a estabilidade do sistema a laço fechado $H(s)$, sob condições de falha de sensores ou atuadores, é necessário conhecer os zeros das FT's dadas pelas eqs. (10) e (12), que são na realidade $2n$ FT's, lembrando que as expressões (10) e (12) são deduzidas somente para uma única falha em um sensor genérico j ou um atuador genérico j , respectivamente. Naturalmente um modo de se conhecer estes zeros é através da obtenção dos polinômios numeradores das equações (10) e (12) e posterior cálculo das raízes utilizando um processo computacional qualquer.

O sistema $H(s)$ será estável sob condições de falha se, e somente se, as raízes encontradas possuírem parte real nega-

tiva não nula e o sistema sem falha for estável.

Alternativamente, a estabilidade do sistema $H(s)$ sob condições de falha pode ser obtida utilizando-se de diagramas de Nyquist das eqs. (10) e (12). Assim sendo, se o sistema a laço fechado $H(s)$ sem falhas é estável, então o sistema com falha do sensor j será estável se, e somente se, o diagrama de Nyquist da eq. (10) não circula ou intercepta a origem do plano complexo. Do mesmo modo, o sistema $H(s)$ com falha no atuador j será estável se, e somente se, o diagrama de Nyquist da eq. (12) não circula ou intercepta a origem do plano complexo.

No caso em que uma instabilidade devido a uma falha de um sensor ou atuador for detetada, deverá ser feita uma análise baseada no polinômio característico do sistema com falha, de modo a se poder tirar conclusões acerca das modificações necessárias nos compensadores $k_i(s)$, ($1 \leq i \leq n$).

Haverá casos em que as restrições impostas aos subsistemas controladores $k_i(s)$, ($1 \leq i \leq n$), (de modo a tornar o sistema a laço fechado $H(s)$ aceitável sob o ponto de vista do cumprimento de especificações de caráter transitório e grau de interação) não deixarão liberdade suficiente para que seja conseguida uma integridade absoluta do sistema, para todas as falhas simuladas pelas eqs. (10) e (12). Dever-se-á, então, assegurar a integridade do sistema tendo em vista as falhas mais frequentes e ou mais danosas.

Exemplo 1 - Considere um sistema onde a MFTD $G(s)$ que representa a planta está dada pela eq. (13). Deseja-se compensar o sistema $G(s)$ através de um controlador $K(s)$ tal que o sistema a laço fechado $H(s)$ seja estável e possua boas características de comportamento.



$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} 1-s & 2-s \\ 1/3-s & 1-s \end{bmatrix} \quad (13)$$

Utilizando o algoritmo apresentado na subseção anterior, chega-se à seguinte ED de $G(s)$:

$$G(s) = Z \text{diag} \left\{ g_i(s) \right\} W = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Portanto o controlador, na forma da eq. (2), é escrito como (15) e a MFT $H(s)$ do sistema a laço fechado, de acordo com a eq. (3), é escrita como: (16).

$$K(s) = W^{-1} \text{diag} \left\{ k_i(s) \right\} Z^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1(s) & 0 \\ 0 & k_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} H(s) &= Z \text{diag} \left\{ \frac{k_i(s)g_i(s)}{1+k_i(s)g_i(s)} \right\} Z^{-1} \\ &= Z \text{diag} \left\{ \frac{k_i(s)}{g_i^{-1}(s)+k_i(s)} \right\} Z^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{k_1(s)}{s+1+k_1(s)} & \\ & \frac{k_2(s)}{s^2+2s+1+k_2(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (16) \end{aligned}$$

Suponha inicialmente que o controlador seja constituído exclusivamente de ganhos, ou seja, $k_1(s)=k_1$ e $k_2(s)=k_2$. Para este caso são obtidas as seguintes conclusões:

(a) O sistema $H(s)$ será estável para $k_1 > -1$ e $k_2 > -1$.

Estas duas restrições garantem a não existência de polos com parte real positiva e podem ser facilmente verificadas pela aplicação direta do critério de Routh nas FT's características de $H(s)$.

(b) No caso deste exemplo a avaliação de $H(0)$ resulta em:

$$H(0) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{k_1}{1+k_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{1+k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Portanto, para que as interações e os erros estacionários sejam pequenos, deve ser feito $k_1 \approx k_2 \gg 1$.

Suponha que $k_1 = k_2 = 9$, então:

$$H(0) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Eq.(18) mostra que os erros estacionários obtidos em ambas as saídas, devido a uma excitação degrau unitário aplicado em cada uma das entradas, serão de 10% enquanto que as interações estacionárias serão sempre nulas se k_1 for exatamente igual a k_2 .

(c) Eq. (19) fornece a saída do sistema para uma excitação degrau unitário aplicado na entrada 1 e eq. (20) fornece a saída do sistema para a mesma excitação degrau unitário aplicado na entrada 2.

$$y(s) = H(s) \begin{bmatrix} 1/s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{k_1}{s+1+k_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{s^2+2s+1+k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/s \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2k_1}{s(s+1+k_1)} \\ \frac{k_2}{s(s^2+2s+1+k_2)} \end{bmatrix} \\
&= \frac{-2k_1}{s(s+1+k_1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{k_2}{s(s^2+2s+1+k_2)} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{k_1}{s(s+1+k_1)} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{k_2}{s(s^2+2s+1+k_2)} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (19)
\end{aligned}$$

$$y'(s) = H(s) \begin{bmatrix} 0 \\ 1/s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{k_1}{s+1+k_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{s^2+2s+1+k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3k_1}{s(s+1+k_1)} \\ \frac{-k_2}{s(s^2+2s+1+k_2)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3k_1}{s(s+1+k_1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-k_2}{s(s^2+2s+1+k_2)} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{k_1}{s(s+1+k_1)} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{k_2}{s(s^2+2s+1+k_2)} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (20)
\end{aligned}$$

Antitransformando as eqs. (19) e (20) obtém-se as respostas temporais dadas em (21) e (22), respectivamente, onde foi considerado que $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$.

$$y(t) = f(t) \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} + g(t) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

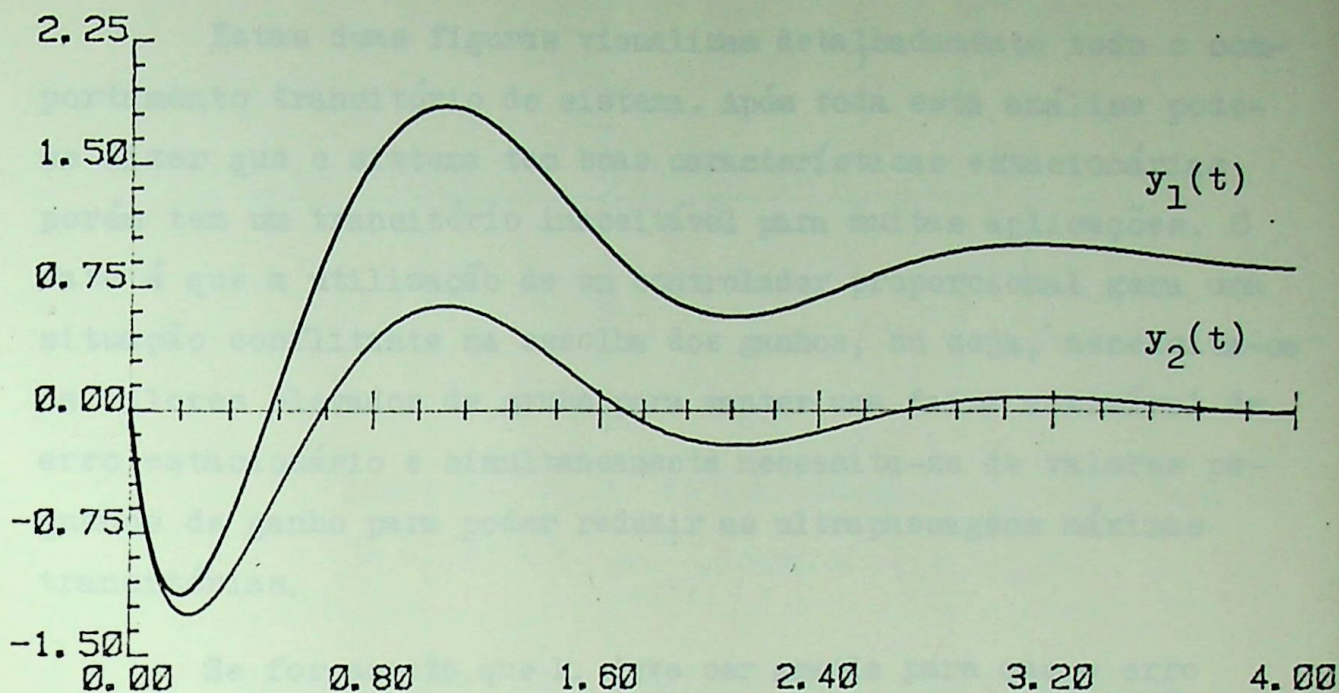
$$y'(t) = f(t) \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + g(t) \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

onde:

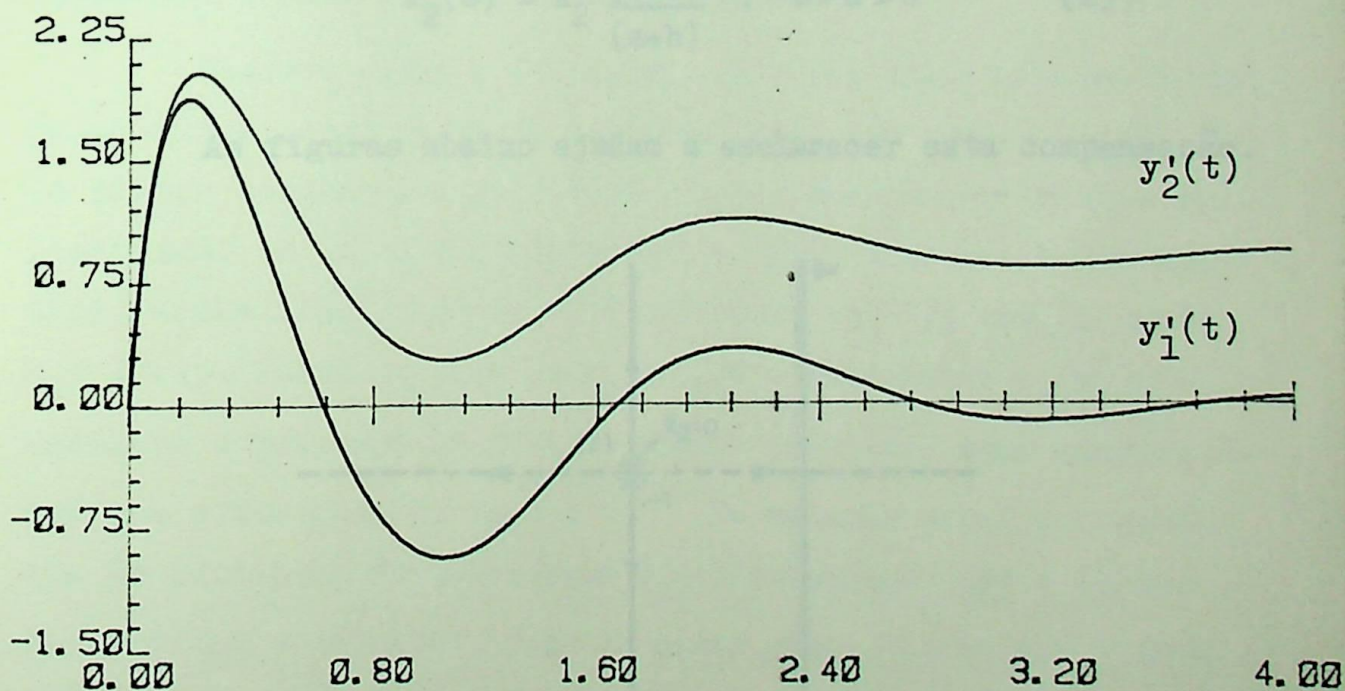
$$f(t) = \frac{k_1}{1+k_1} \left[1 - e^{-(1+k_1)t} \right] \quad (23)$$

$$g(t) = \frac{1}{1+k_2} \left[k_2 + \sqrt{k_2(1+k_2)} e^{-t} \operatorname{sen} (\sqrt{k_2} t + \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{k_2} + \pi) \right] \quad (24)$$

As figuras seguintes são os gráficos das respostas $y(t)$ e $y'(t)$ para $k_1=k_2=9$.



Gráficos das respostas temporais $y_1(t)$ e $y_2(t)$ devido a uma excitação degrau unitário aplicado na entrada 1 e considerando $k_1 = k_2 = 9$.



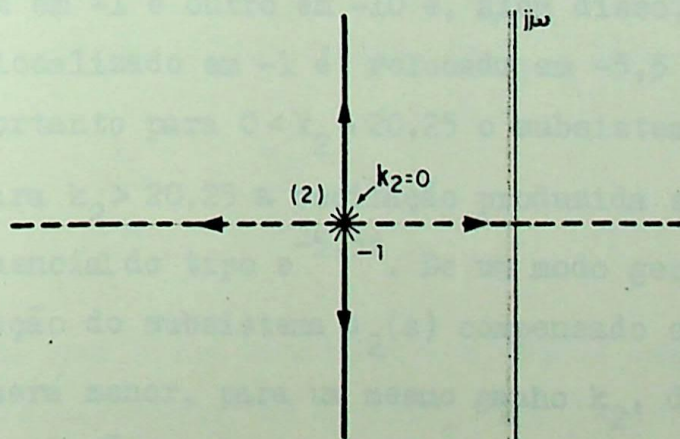
Gráficos das respostas temporais $y'_1(t)$ e $y'_2(t)$ devido a uma excitação degrau unitário aplicado na entrada 2 e considerando $k_1 = k_2 = 9$.

Estas duas figuras visualizam detalhadamente todo o comportamento transitório do sistema. Após toda esta análise pode-se dizer que o sistema tem boas características estacionárias porém tem um transitório inaceitável para muitas aplicações. O fato é que a utilização de um controlador proporcional gera uma situação conflitante na escolha dos ganhos, ou seja, necessita-se de valores elevados de ganho para manter uma faixa aceitável de erro estacionário e simultaneamente necessita-se de valores pequenos de ganho para poder reduzir as ultrapassagens máximas transitórias.

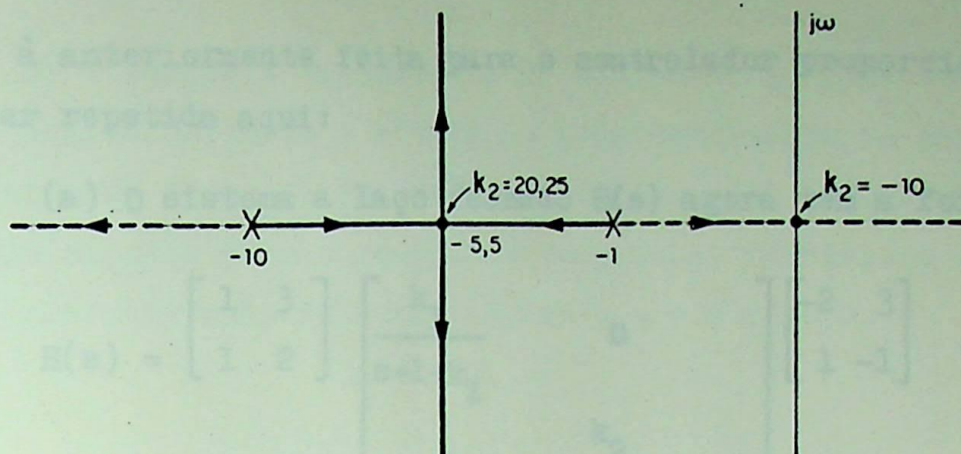
Se for aceito que k_1 deve ser grande para que o erro estacionário seja pequeno, então deve ser feita uma compensação do subsistema $h_2(s)$ no sentido de se diminuir seu tempo de resposta e frequência de oscilação. Isto pode ser conseguido através da utilização de um filtro passa-altas do tipo:

$$k_2(s) = k_2 \frac{(s+a)}{(s+b)} \quad , \quad b > a > 0 \quad (25)$$

As figuras abaixo ajudam a esclarecer esta compensação.



Lugar das raízes do subsistema $h_2(s)$ considerando $k_2(s) = k_2$.



Lugar das raízes do subsistema $h_2(s)$ considerando $k_2(s) = k_2 \frac{(s+a)}{(s+b)}$, onde $a=1$ e $b=10$.

Seja primeiramente o lugar das raízes do subsistema $h_2(s)$ sob a ação do controlador proporcional. Note que a presença do polo duplo em -1 mais a restrição de $k_1 = k_2 \gg 1$, necessária para manter as interações e erros estacionários pequenos, faz com que o subsistema sempre possua um par de polos complexos conjugados situados em $-1 \pm j\sqrt{k_2}$ responsáveis pelo pequeno amortecimento e alta frequência de oscilação.

Observe agora a 2ª figura, onde foi utilizado um filtro passa-altas, como mostrado pela eq. (25), com $a=1$ e $b=10$. Este filtro desmembra o polo duplo, localizado em -1 em dois polos distintos, um em -1 e outro em -10 e, além disso, o ponto múltiplo antes localizado em -1 é relocado em $-5,5$ com um ganho $k_2 = 20,25$. Portanto para $0 < k_2 \leq 20,25$ o subsistema $h_2(s)$ não oscilará e para $k_2 > 20,25$ a oscilação produzida será amortecida por uma exponencial do tipo $e^{-5,5t}$. De um modo geral a frequência de oscilação do subsistema $h_2(s)$ compensado com o filtro passa-altas será menor, para um mesmo ganho k_2 , do que a frequência de oscilação produzida pelo subsistema sem o filtro.

Considere o sistema $H(s)$ onde o subsistema $h_2(s)$ foi compensado com o filtro passa-altas $k_2 \frac{s+1}{s+10}$. Uma análise seme-

lhante à anteriormente feita para o controlador proporcional pode ser repetida aqui:

(a) O sistema a laço fechado $H(s)$ agora tem a forma:

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{k_1}{s+1+k_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{(s+1)(s+10)+k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

portanto será estável para todo $k_1 > -1$ e $k_2 > -10$. A restrição sobre k_1 permanece inalterada da análise prévia enquanto que a restrição sobre k_2 é tirada do lugar das raízes da figura da página anterior.

(b) Para $s=0$, o sistema $H(s)$ da eq. (26) se reduz a:

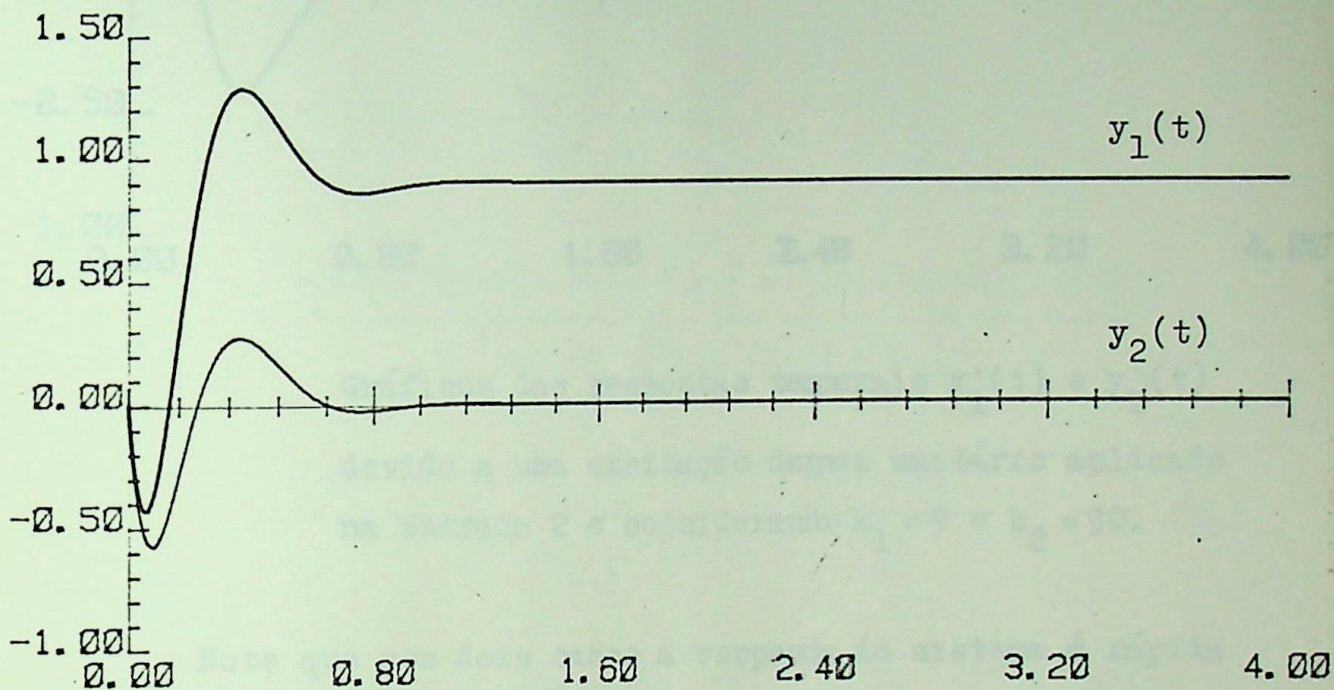
$$H(0) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{k_1}{1+k_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{10+k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

As interações estacionárias serão pequenas se for satisfeita a equação (28), ou seja, se $k_2 \approx 10k_1$.

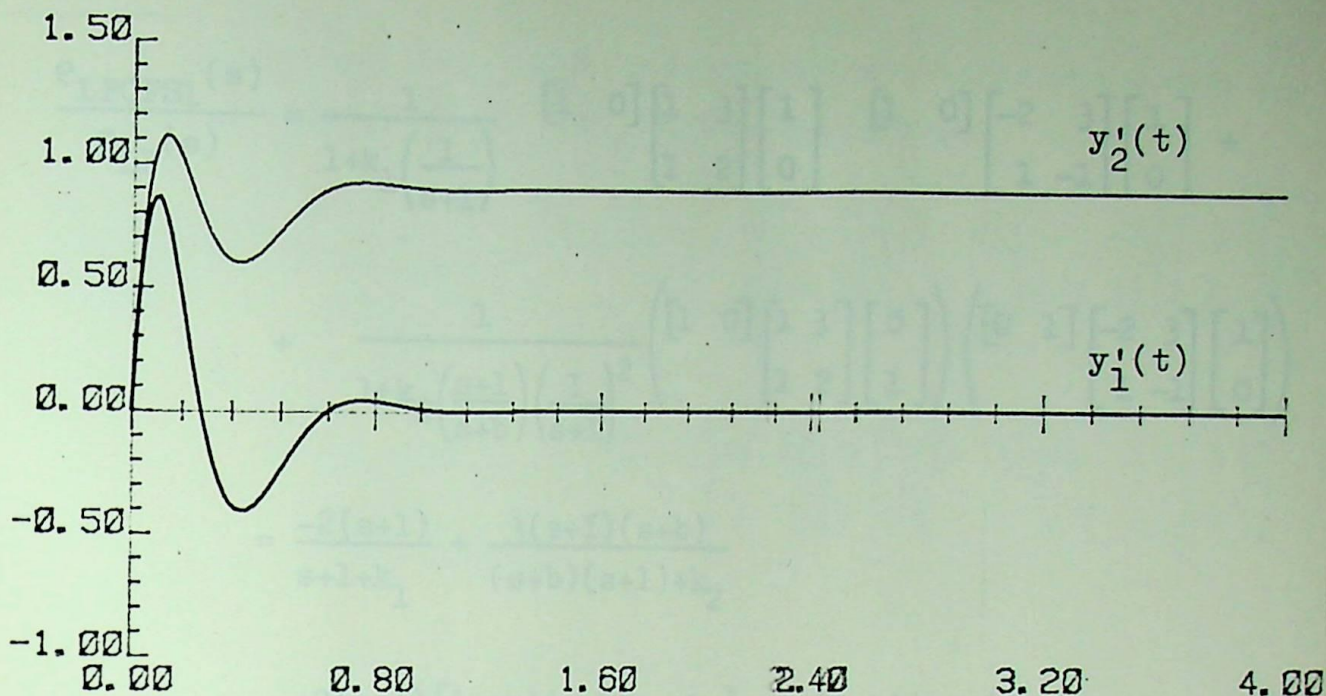
$$\frac{k_1}{1+k_1} \approx \frac{k_2}{10+k_2} \quad (28)$$

Quanto aos erros estacionários, estes serão pequenos se $k_1 \gg 1$. No caso analisado, se $k_2 = 10k_1 > 90$, os erros estacionários obtidos em ambas as saídas, para excitações tipo degrau, serão sempre menores do que 10% e as interações estacionárias serão praticamente nulas.

c) A resposta transitória do sistema $H(s)$ para uma excitação degrau unitário é obtida de modo semelhante ao procedimento feito no item (c) da análise anterior. Sem entrar nos detalhes de cálculo dessas respostas temporais, fornece-se abaixo os seus gráficos onde foi considerado $k_1 = 9$ e $k_2 = 90$.



Gráficos das respostas temporais $y_1(t)$ e $y_2(t)$ devido a uma excitação degrau unitário aplicado na entrada 1 e considerando $k_1 = 9$ e $k_2 = 90$.



Gráficos das respostas temporais $y_1'(t)$ e $y_2'(t)$ devido a uma excitação degrau unitário aplicado na entrada 2 e considerando $k_1 = 9$ e $k_2 = 90$.

Note que nos dois casos a resposta do sistema é rápida com ultrapassagens transitórias aceitáveis, erro estacionário relativamente pequeno e interação estacionária nula. Note, também, que a interação transitória chega até 85% porém é confinada a um intervalo de tempo muito pequeno.

(d) Seja agora a análise da integridade do sistema. Para as falhas dos sensores dos laços 1 e 2, e utilizando a eq. (10), pode-se escrever, respectivamente, as equações (29) e (30).

$$\begin{aligned}
\frac{e_{\text{LFCFS1}}(s)}{e_{\text{LF}}(s)} &= \frac{1}{1+k_1\left(\frac{1}{s+1}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&+ \frac{1}{1+k_2\left(\frac{s+1}{s+b}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)^2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{-2(s+1)}{s+1+k_1} + \frac{3(s+1)(s+b)}{(s+b)(s+1)+k_2} \\
&= \frac{-2(s+1)[(s+b)(s+1)+k_2] + 3(s+1)(s+b)(s+1+k_1)}{(s+1+k_1)[(s+b)(s+1)+k_2]} \\
&= \frac{(s+1)[s^2 + (3k_1+b+1)s + (3k_1b+b-2k_2)]}{(s+1+k_1)[(s+b)(s+1)+k_2]} \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{e_{\text{LFCFS2}}(s)}{e_{\text{LF}}(s)} &= \frac{1}{1+k_1\left(\frac{1}{s+1}\right)} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \\
&= \frac{1}{1+k_2\left(\frac{s+1}{s+b}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{3(s+1)}{s+1+k_1} + \frac{(-2)(s+1)(s+b)}{(s+b)(s+1)+k_2} \\
&= \frac{(s+1)[s^2 + (-2k_1+b+1)s + (-2k_1b+b+3k_2)]}{(s+1+k_1)[(s+b)(s+1)+k_2]} \quad (30)
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, para as falhas nos atuadores dos laços 1 e 2, e utilizando a eq. (12), pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 \frac{e_{\text{LFCFA1}}(s)}{e_{\text{LF}}(s)} &= \frac{1}{1+k_1\left(\frac{1}{s+1}\right)} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \\
 &+ \frac{1}{1+k_2\left(\frac{s+1}{s+b}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)^2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \frac{3(s+1)}{s+k_1+1} + \frac{(-2)(s+b)(s+1)}{(s+b)(s+1)+k_2} \\
 &= \frac{(s+1)[s^2 + (b-2k_1+1)s + (3k_2-2bk_1+b)]}{(s+k_1+1)[(s+b)(s+1)+k_2]} \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{e_{\text{LFCFA2}}(s)}{e_{\text{LF}}(s)} &= \frac{1}{1+k_1\left(\frac{1}{s+1}\right)} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \\
 &+ \frac{1}{1+k_2\left(\frac{s+1}{s+b}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)^2} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \frac{(-2)(s+1)}{s+k_1+1} + \frac{(3)(s+b)(s+1)}{(s+b)(s+1)+k_2} \\
 &= \frac{(s+1)[s^2 + (3k_1+b+1)s + (3k_1b+b-2k_2)]}{(s+k_1+1)[(s+b)(s+1)+k_2]} \quad (32)
 \end{aligned}$$

É fácil verificar que as eqs. (29) e (32) são iguais, bem como as eqs. (30) e (31).

A aplicação do critério de Routh nos numeradores das eqs. (29) a (32) conduz às seguintes conclusões:

- O sistema a laço fechado $H(s)$ com falha no sensor do laço 1 ou com falha no atuador do laço 2 será estável se, e somente se, forem satisfeitas as condições:

$$\begin{cases} 3k_1 + b + 1 > 0 \\ 3k_1 b + b - 2k_2 > 0 \end{cases} \quad (33)$$

- O sistema a laço fechado $H(s)$ com falha no sensor do laço 2 ou com falha no atuador do laço 1 será estável se, e somente se, forem satisfeitas as condições:

$$\begin{cases} -2k_1 + b + 1 > 0 \\ -2k_1 b + b + 3k_2 > 0 \end{cases} \quad (34)$$

Em particular, no exemplo em desenvolvimento, onde $k_1=9$, $k_2=90$ e $b=10$, verifica-se que o sistema é instável para uma falha no sensor do laço 2 ou atuador do laço 1, pois não satisfaz a primeira condição de (34).

Novamente ocorre um conflito na determinação do ganho k_1 : para que se satisfaça a eq. (34) k_1 deve ser menor do que 5,5 ao mesmo tempo em que um erro estacionário inferior a 10% requer $k_1 > 9$. Então, a menos que uma dessas especificações possa ser rejeitada, uma nova compensação deve ser procurada, porém no caso desse exemplo os valores encontrados são considerados satisfatórios, finalizando assim a aplicação.

3.3 - EXPANSÕES DIÁDICAS APROXIMADAS

As MFT's, em geral, não são diádicas e portanto não são tratáveis pela técnica sugerida na seção anterior. Este fato motivou Owens a tentar obter aproximações diádicas dessas MFT's, de modo a poder estender os conceitos da seção 3.2 a um conjunto muito mais amplo de SM's.

Primeiramente considera-se modelos aproximados de MFT's na forma da eq. (1), onde $G_A(s)$ é a nomenclatura adotada para este modelo aproximado de $G(s)$. Equações (1) a (3) foram definidas por Chen em seu artigo sobre modelos reduzidos de SM's, e não vem ao caso conhecer como são obtidas (§).

$$G_A(s) = (G_1 s + G_0)^{-1}; \quad \det(G_1) \neq 0 \quad (1)$$

onde:

$$G_0 = G^{-1}(0) \quad (2)$$

$$G_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G^{-1}(s) - G^{-1}(0)] \quad (3)$$

Os sistemas cujas $G(s)$ coincidem com $G_A(s)$ são conhecidos como SM's de tipo de primeira ordem. Estes sistemas possuem um conjunto de características que tornam sua análise e controle em tarefa simples (£).

Definindo-se $\mu(s)$ como:

(§) Para isso ver [02].

(£) Consultar, por exemplo, [05], 3.5.

$$\mu(s) = G(s) - G_A(s) \quad (4)$$

então:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu(s)}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G(s) - G_A(s)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left\{ G(s) [G_A^{-1}(s) G_A(s)] - [G(s) G^{-1}(s)] G_A(s) \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} G(s) [G_A^{-1}(s) - G^{-1}(s)] G_A(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \left[\frac{G_A^{-1}(s) - G^{-1}(s)}{s} \right] G_A(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \left[\frac{G_1 s + G_0 - G^{-1}(s)}{s} \right] G_A(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \left[\frac{G_0 - G^{-1}(s)}{s} + G_1 \right] G_A(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \left[\frac{G^{-1}(0) - G^{-1}(s)}{s} + G_1 \right] G_A(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} G(s) [(-G_1) + G_1] G_A(s) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ou seja, se s tende a zero, $\mu(s)$ tende a zero mais rapidamente.

Note que o modelo aproximado $G_A(s)$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} G_A(s) &= (G_1 s + G_0)^{-1} \\ &= [G_1 s + G^{-1}(0)]^{-1} \\ &= \left\{ G^{-1}(0) [G(0) G_1 s + I] \right\}^{-1} \\ &= [G(0) G_1 s + I]^{-1} G(0) \end{aligned} \quad (6)$$

Suponha que a matriz $G(0)G_1$ possua um conjunto completo de autovetores e possa, portanto, ser escrita como mostra a eq. (7), onde M é a matriz modal e $\{\lambda_i\}$, $(1 \leq i \leq n)$, é o conjunto de autovalores de $G(0)G_1$.

$$G(0)G_1 = M \text{ diag } \left\{ \lambda_i \right\} M^{-1}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (7)$$

Substituindo (7) em (6), vem:

$$\begin{aligned} G_A(s) &= \left[M \text{ diag } \left\{ \lambda_i \right\} M^{-1} s + I \right]^{-1} G(0) \\ &= \left[M \text{ diag } \left\{ s\lambda_i + 1 \right\} M^{-1} \right]^{-1} G(0) \\ &= M \text{ diag } \left\{ \frac{1}{s\lambda_i + 1} \right\} M^{-1} G(0) \\ &= M \text{ diag } \left\{ \hat{g}_i(s) \right\} M^{-1} G(0), \quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned} \quad (8)$$

onde:

$$\hat{g}_i(s) = \frac{1}{s\lambda_i + 1}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (9)$$

Fazendo-se $M = Z$ e $M^{-1}G(0) = W$, a eq. (8) pode ser escrita na forma

$$G_A(s) = Z \text{ diag } \left\{ \hat{g}_i(s) \right\} W, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (10)$$

indicando que em geral a aproximação $G_A(s)$ satisfaz a definição de MFTD, ainda que a $G(s)$ por ela aproximada não o seja.

Exemplo 1 - Seja novamente a MFT da eq. (13) da subseção anterior repetida abaixo como (11).

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} 1-s & 2-s \\ 1/3-s & 1-s \end{bmatrix} \quad (11)$$

A aplicação da eq. (3) resulta em:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G^{-1}(s) - G^{-1}(0)] \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left\{ \begin{bmatrix} 3 - 3s^2 & 3s^2 - 3s - 6 \\ 3s^2 + 2s - 1 & 3 - 3s^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \begin{bmatrix} -3s^2 & 3s^2 - 3s \\ 3s^2 + 2s & -3s^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}
 \end{aligned}$$

A aproximação diádica é obtida como:

$$\begin{aligned}
 G_A(s) &= [G(0)G_1s + I]^{-1}G(0) \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}
 \end{aligned}$$

Como já era esperado, a aplicação destas equações, (1) a (3), sempre produzem subsistemas aproximantes de 1ª ordem, ou seja, na forma da eq. (9), mesmo que o sistema $G(s)$ original

seja diádico. Em se tratando de MFTD, na maioria dos casos esta redução não se justifica; sugere-se então uma pequena alteração na formulação, de modo que o modelo aproximado, denominado agora $G_B(s)$, seja idêntico à matriz $G(s)$ quando esta for diádica.

Para isto, e tendo em vista o teorema 1 da subseção 3.1.3 e as eqs. (7) e (8), demonstra-se facilmente que a matriz M definida em (7) como a matriz modal de $G(0)G_1$ e que em (8) verifica-se que é também matriz modal de $G_A(s)G^{-1}(0)$, coincide com a matriz Z definida pelo teorema 1 da subseção 3.1.3, ou seja, é a mesma matriz que diagonaliza $G(s)G^{-1}(0)$ por semelhança se $G(s)$ for uma MFTD. Esta demonstração é feita abaixo nas eqs. (14) a (18).

Supondo que $G(s)$ possui uma ED na forma:

$$G(s) = Z \text{diag} \left\{ g_i(s) \right\} W, \quad (1 \leq i \leq m) \quad (14)$$

Pelo teorema 1 da subseção 3.1.3, pode-se escrever:

$$G(s)G^{-1}(0) = Z \text{diag} \left\{ g_i(s)/g_i(0) \right\} Z^{-1}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (15)$$

Portanto:

$$G(s) = Z \text{diag} \left\{ g_i(s)/g_i(0) \right\} Z^{-1}G(0), \quad (1 \leq i \leq n) \quad (16)$$

Substituindo (16) em (3), vem:

$$\begin{aligned} G_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G^{-1}(s) - G^{-1}(0)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G^{-1}(0) Z \text{diag} \left\{ g_i(0)/g_i(s) \right\} Z^{-1} - G^{-1}(0)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} G^{-1}(0) [Z \text{diag} \left\{ g_i(0)/g_i(s) \right\} Z^{-1} - I] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} G^{-1}(0) \left[Z \operatorname{diag} \left\{ \frac{g_i(0) - g_i(s)}{g_i(s)} \right\} Z^{-1} \right] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} G^{-1}(0) \left[Z \operatorname{diag} \left\{ \frac{sf_i(s)}{g_i(s)} \right\} Z^{-1} \right] \\
&= G^{-1}(0) Z \operatorname{diag} \left\{ \frac{f_i(0)}{g_i(0)} \right\} Z^{-1} \quad (17)
\end{aligned}$$

Pré-multiplicando ambos os termos de (17) por $G(0)$, resulta a eq. (18).

$$G(0)G_{\perp} = Z \operatorname{diag} \left\{ \frac{f_i(0)}{g_i(0)} \right\} Z^{-1}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (18)$$

onde efetivamente se verifica que a matriz modal de $G(0)G_{\perp}$ também é matriz modal de $G(s)G^{-1}(0)$ se $G(s)$ é uma MFTD.

Este resultado permite formular o seguinte algoritmo para o cálculo de uma aproximação diádica $G_B(s)$ dada um MFT $G(s)$ qualquer.

- (a) Calcula-se G_{\perp} como mostra a eq. (3);
- (b) Calcula-se a matriz modal Z de $G(0)G_{\perp}$;
- (c) Calcula-se os subsistemas $\tilde{g}_i(s)$, ($1 \leq i \leq n$), como:

$$\tilde{g}_i(s) = e_i^t [Z^{-1} G(s) G^{-1}(0) Z] e_i, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (19)$$

onde, se $G(s)$ for uma MFTD, os elementos $\tilde{g}_i(s)$ coincidirão com os elementos $g_i(s)/g_i(0)$, ($1 \leq i \leq n$) (cf. eq. (15)).

- (d) Obtém-se a aproximação diádica $G_B(s)$ como:

$$G_B(s) = Z \operatorname{diag} \left\{ \tilde{g}_i(s) \right\} W, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (20)$$

onde a matriz W é definida como: $W = Z^{-1}G(0)$. Obviamente a eq. (20) é uma aproximação melhor do que a fornecida pela eq. (8) no sentido de que $G_B(s)$ irá coincidir com $G(s)$ se $G(s)$ for uma MFTD.

Uma análise semelhante à feita para $G_A(s)$ pelas eqs. (4) e (5) pode ser repetida para $G_B(s)$. Segue:

$$\eta(s) = G(s) - G_B(s) \quad (21)$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\eta(s)}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G(s) - G_B(s)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G(s) - Z \text{diag} \left\{ e_i [Z^{-1}G(s)W^{-1}] e_i^t \right\} W], \quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned} \quad (22)$$

onde $G_B(s)$ foi substituída pela sua expressão dada em (20).

Utilizando a eq. (4), ou seja, obtendo-se o valor de $G(s)$ através da eq. (4) e substituindo-a na eq. (22), resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\eta(s)}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G_A(s) + \mu(s) - Z \text{diag} \left\{ e_i Z^{-1} [G_A(s) + \mu(s)] W^{-1} e_i^t \right\} W], \\ &\quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned} \quad (23)$$

Substituindo $G_A(s)$ pela sua expressão dada em (8), resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\eta(s)}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[Z \text{diag} \left\{ \frac{1}{s\lambda_i + 1} \right\} W + \mu(s) - \right. \\ &\quad \left. - Z \text{diag} \left\{ e_i Z^{-1} \left[Z \text{diag} \left\{ \frac{1}{s\lambda_j + 1} \right\} W + \mu(s) \right] W^{-1} e_i^t \right\} W \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[Z \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{s\lambda_i+1} - e_i \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{s\lambda_j+1} \right\} e_i^t - e_i Z^{-1} \mu(s) W^{-1} e_i^t \right\} W + \mu(s) \right] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[Z \operatorname{diag} \left\{ -e_i Z^{-1} \mu(s) W^{-1} e_i^t \right\} W + \mu(s) \right] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left[Z \operatorname{diag} \left\{ -e_i Z^{-1} \frac{\mu(s)}{s} W^{-1} e_i^t \right\} W + \frac{\mu(s)}{s} \right], \quad (1 \leq i, j \leq n) \quad (24)
\end{aligned}$$

Tendo em vista a eq. (5), resulta finalmente:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\eta(s)}{s} = 0 \quad (25)$$

ou seja, em regime permanente, ou para $t \gg t_n$, o modelo aproximado $G_B(s)$ é indistinguível de $G(s)$.

Exemplo 2 - Aplicar o algoritmo de obtenção de uma aproximação $G_B(s)$ na MFTD $G(s)$ de (11).

Seguindo a orientação do algoritmo tem-se:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G^{-1}(s) - G^{-1}(0)] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\begin{bmatrix} -3s^2 - 3 & 3s^2 - 3s - 6 \\ 3s^2 + 2s - 1 & -3s^2 - 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)
\end{aligned}$$

Em seguida determina-se $G(0)G_1$:

$$G(0)G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

A matriz modal Z de $G(0)G_1$ é:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Utilizando (28) determina-se os subsistemas $\tilde{g}_1(s)$ e $\tilde{g}_2(s)$ pela aplicação de (19):

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(s) &= e_1^t [Z^{-1}G(s)G^{-1}(0)Z] e_1 \\ &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)} \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2(s) &= e_2^t [Z^{-1}G(s)G^{-1}(0)Z] e_2 \\ &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2} \quad (30) \end{aligned}$$

Finalmente monta-se a $G_B(s)$ como:

$$\begin{aligned}
G_B(s) &= Z \operatorname{diag} \left\{ \tilde{g}_i(s) \right\} Z^{-1} G(0) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \\ & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)
\end{aligned}$$

Note que neste exemplo a $G(s)$ dada era diádica e portanto $G_B(s) = G(s)$.

Exemplo 3 - Encontrar uma aproximação $G_B(s)$ da $G(s)$ (não diádica) dada pela eq. (65) de 3.1.4 e repetida aqui como (32).

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ s+3 & s+4 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Neste exemplo considera-se $d(s) = (s+2)(s+3)$.

Tem-se:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G^{-1}(s) - G^{-1}(0)] \\
&= \begin{bmatrix} -13 & 8 \\ 10.5 & -5.5 \end{bmatrix} \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(0)G_1 &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -13 & 8 \\ 10.5 & -5.5 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \tag{34}
 \end{aligned}$$

A matriz $G(0)G_1$ não é diagonalizável, isto é, não possui uma matriz semelhante na forma canônica diagonal. É possível somente a sua transformação em um bloco de Jordan:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/6 & 1 \\ 0 & 5/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Supondo, porém, que uma pequena alteração de um valor qualquer da matriz $G(s)$ de (32), por exemplo:

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ s+3 & s+3.9 \end{bmatrix} \tag{36}$$

não altera significativamente a física do problema, tem-se

$$G_1 = \begin{bmatrix} -12.673 & 7.891 \\ 10.408 & -5.374 \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
 G(0)G_1 &= \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.3333 \\ 0.5 & 0.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12.673 & 7.891 \\ 10.408 & -5.374 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1.357 & -0.4762 \\ 0.4287 & 0.4524 \end{bmatrix} \tag{38}
 \end{aligned}$$

Em seguida obtém-se a fatoração $G(0)G_1 = Z \text{ diag} \left\{ \lambda_i \right\} Z^{-1}$:

$$G(0)G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1.0021 \\ 0.9023 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9275 & 0 \\ 0 & 0.8820 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.438 & -10.46 \\ -9.418 & 10.438 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Determinam-se os subsistemas $\tilde{g}_1(s)$ e $\tilde{g}_2(s)$ como:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(s) &= e_1^t [Z^{-1}G(s)G^{-1}(0)Z]e_1 \\ &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} 10.438 & -10.46 \\ -9.418 & 10.438 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+3)} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3.9 \end{bmatrix} \right) \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} -11.143 & 5.714 \\ 8.571 & -2.857 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1.0021 \\ 0.9023 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{6}{(s+2)(s+3)} & \frac{-0.0061s}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{0.0067s}{(s+2)(s+3)} & \frac{0.2859s+6}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{6}{(s+2)(s+3)} \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2(s) &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{6}{(s+2)(s+3)} & \frac{-0.0061s}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{0.0067s}{(s+2)(s+3)} & \frac{0.2859s+6}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{0.2859s+6}{(s+2)(s+3)} \quad (41) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$G_B(s) = Z \operatorname{diag} \left\{ \tilde{g}_i(s) \right\} Z^{-1}G(0)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1.0021 \\ 0.9023 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{(s+2)(s+3)} & 0 \\ 0 & \frac{0.2859s+6}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.4902 & -3.3196 \\ 3.6493 & 3.6453 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Como verificação da aproximação obtida, tem-se:

$$G_B(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 1.046s+1 & 1.044s+2 \\ 1.043s+3 & 1.042s+3.9 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Comparando-se (43) com (32) vê-se que ambas são muito semelhantes.

As figuras seguintes mostram as respostas temporais de $G(s)$ e $G_B(s)$ para um degrau unitário aplicado na entrada 1 e para o mesmo degrau aplicado na entrada 2. $\tilde{y}_i(t)$ denotam as respostas temporais de $G_B(s)$.

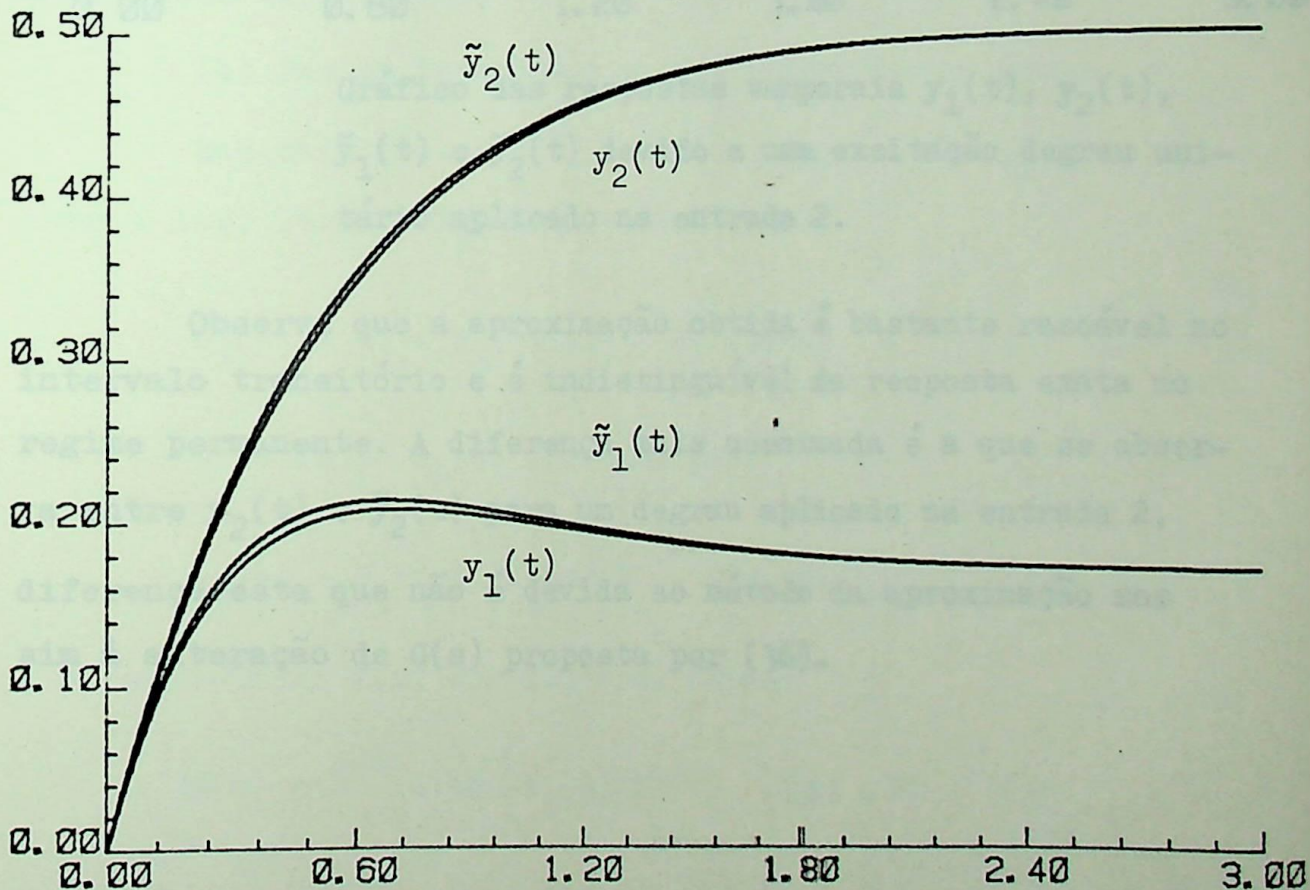


Gráfico das respostas temporais $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\tilde{y}_1(t)$ e $\tilde{y}_2(t)$ devido a uma excitação degrau unitário aplicado na entrada 1.

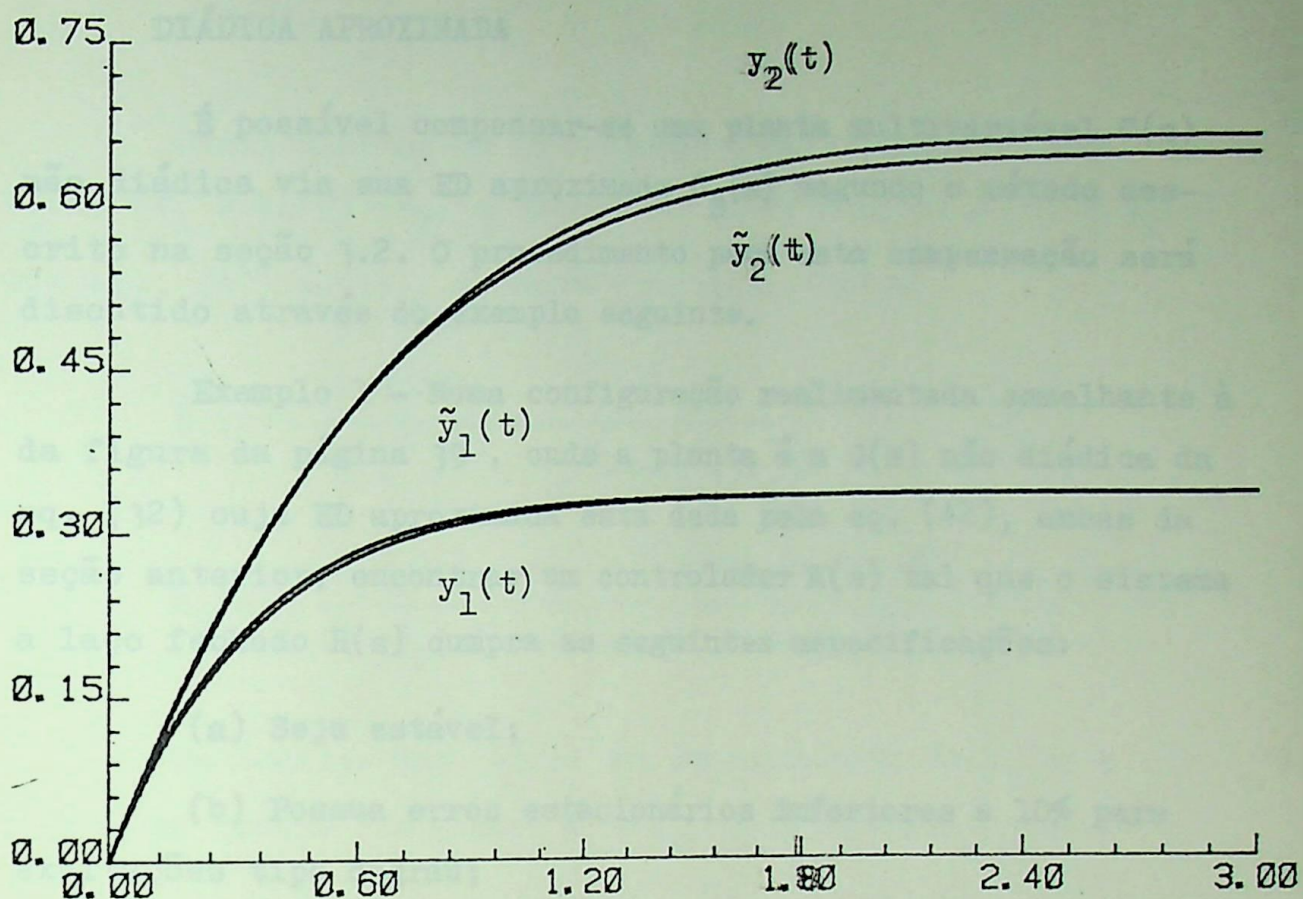


Gráfico das respostas temporais $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\tilde{y}_1(t)$ e $\tilde{y}_2(t)$ devido a uma excitação degrau unitário aplicado na entrada 2.

Observe que a aproximação obtida é bastante razoável no intervalo transitório e é indistinguível da resposta exata no regime permanente. A diferença mais acentuada é a que se observa entre $y_2(t)$ e $\tilde{y}_2(t)$ para um degrau aplicado na entrada 2, diferença esta que não é devida ao método da aproximação mas sim à alteração de $G(s)$ proposta por (36).

3.4 - COMPENSAÇÃO DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS VIA EXPANSÃO DIÁDICA APROXIMADA

É possível compensar-se uma planta multivariável $G(s)$ não diádica via sua ED aproximada $G_B(s)$ segundo o método descrito na seção 3.2. O procedimento para esta compensação será discutido através do exemplo seguinte.

Exemplo 1 - Numa configuração realimentada semelhante à da figura da página 39, onde a planta é a $G(s)$ não diádica da eq. (32) cuja ED aproximada está dada pela eq. (42), ambas da seção anterior, encontrar um controlador $K(s)$ tal que o sistema a laço fechado $H(s)$ cumpra as seguintes especificações:

(a) Seja estável;

(b) Possua erros estacionários inferiores a 10% para excitações tipo degrau;

(c) Possua interações estacionárias desprezíveis.

Substituindo-se $G(s)$ pela sua aproximação $G_B(s)$, o sistema a laço fechado $H_B(s)$ é escrito como:

$$H_B(s) = [I + G_B(s)K(s)]^{-1}G_B(s)K(s) \quad (1)$$

Se a ED de $G_B(s)$ for dada por:

$$G_B(s) = Z \text{diag} \left\{ \tilde{g}_i(s) \right\} W, \quad (1 \leq i \leq 2) \quad (2)$$

e o controlador $K(s)$ for feito na forma:

$$K(s) = W^{-1} \text{diag} \left\{ k_i(s) \right\} Z^{-1}, \quad (1 \leq i \leq 2) \quad (3)$$

então (1) pode ser reescrita como:

$$H_B(s) = Z \text{diag} \left\{ \frac{k_i(s) \tilde{g}_i(s)}{1+k_i(s)\tilde{g}_i(s)} \right\} Z^{-1}$$

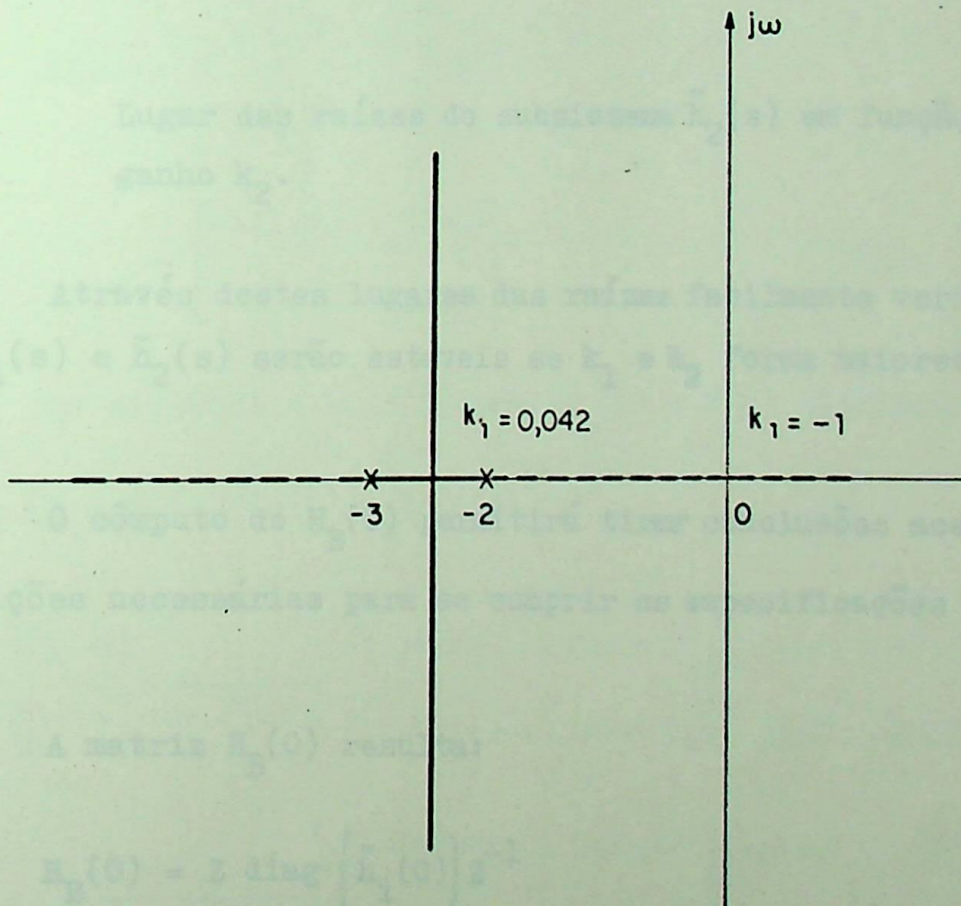
$$= Z \text{ diag} \left\{ \tilde{h}_i(s) \right\} Z^{-1}, \quad (1 \leq i \leq 2) \quad (4)$$

Utilizando-se um controlador proporcional, ou seja, se $k_1(s) = k_1$ e $k_2(s) = k_2$, e tomando-se os valores de $\tilde{g}_1(s)$ e $\tilde{g}_2(s)$ das eqs. (40) e (41), da seção anterior, tem-se:

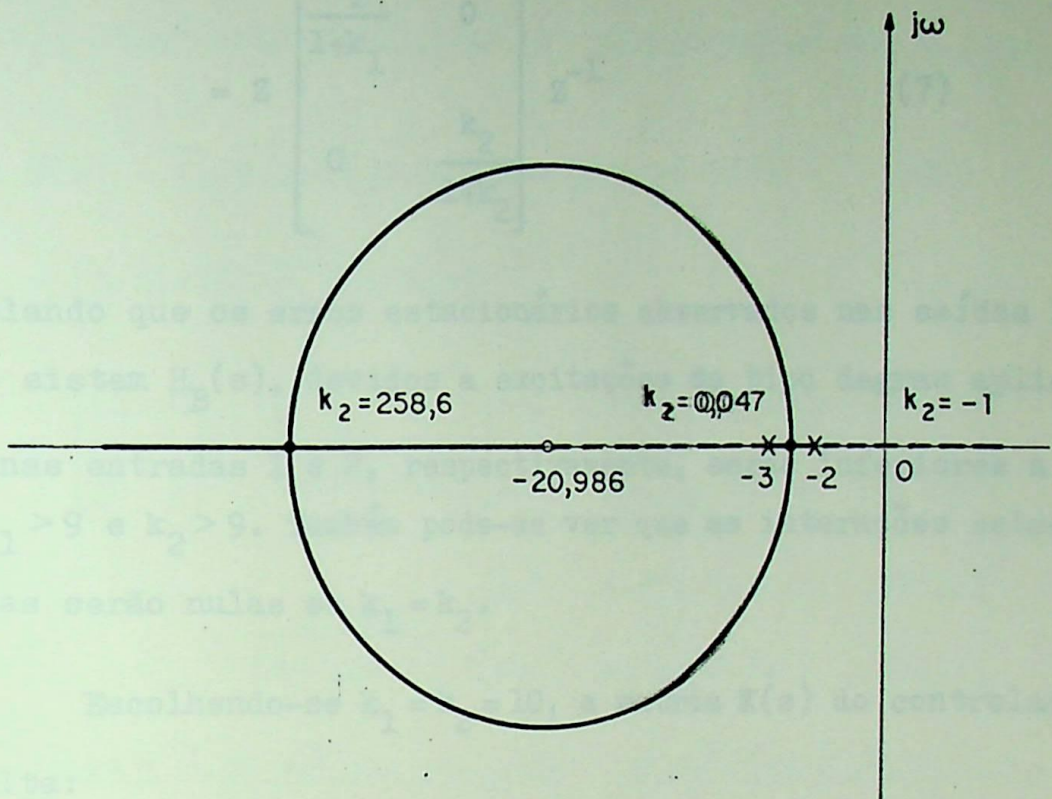
$$\tilde{h}_1(s) = \frac{k_1 \tilde{g}_1(s)}{1 + k_1 \tilde{g}_1(s)} = \frac{6k_1}{(s^2 + 5s + 6) + 6k_1} \quad (5)$$

$$\tilde{h}_2(s) = \frac{k_2 \tilde{g}_2(s)}{1 + k_2 \tilde{g}_2(s)} = \frac{0.2859k_2(s + 20.986)}{(s^2 + 5s + 6) + 0.2859k_2(s + 20.986)} \quad (6)$$

Os lugares das raízes dos denominadores de $\tilde{h}_1(s)$ e $\tilde{h}_2(s)$, em função dos ganhos k_1 e k_2 , respectivamente, são:



Lugar das raízes do subsistema $\tilde{h}_1(s)$ em função do ganho k_1 .



Lugar das raízes do subsistema $\tilde{h}_2(s)$ em função do ganho k_2 .

Através destes lugares das raízes facilmente verifica-se que $\tilde{h}_1(s)$ e $\tilde{h}_2(s)$ serão estáveis se k_1 e k_2 forem maiores que -1.

O cômputo de $H_B(0)$ permitirá tirar conclusões acerca das restrições necessárias para se cumprir as especificações (b) e (c).

A matriz $H_B(0)$ resulta:

$$H_B(0) = Z \text{diag} \left\{ \tilde{h}_i(0) \right\} Z^{-1}$$

$$= Z \begin{bmatrix} \frac{k_1}{1+k_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{1+k_2} \end{bmatrix} Z^{-1} \quad (7)$$

revelando que os erros estacionários observados nas saídas 1 e 2 do sistema $H_B(s)$, devidos a excitações do tipo degrau aplicadas nas entradas 1 e 2, respectivamente, serão inferiores a 10% se $k_1 > 9$ e $k_2 > 9$. Também pode-se ver que as interações estacionárias serão nulas se $k_1 = k_2$.

Escolhendo-se $k_1 = k_2 = 10$, a matriz $K(s)$ do controlador resulta:

$$\begin{aligned} K(s) &= W^{-1} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} Z^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -111.43 & 57.14 \\ 85.72 & -28.57 \end{bmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

Os sistemas a laço fechado $H_B(s)$ e $H(s)$ resultam:

$$H_B(s) = [I + G_B(s)K(s)]^{-1} G_B(s)K(s)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 1.046s+1 & 1.044s+2 \\ 1.043s+3 & 1.042s+3.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -111.43 & 57.14 \\ 85.72 & -28.57 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &\cdot \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 1.046s+1 & 1.044s+2 \\ 1.043s+3 & 1.042s+3.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -111.43 & 57.14 \\ 85.72 & -28.57 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\tilde{f}(s)} \begin{bmatrix} -27.6s^3 - 95.91s^2 + 267.59s + 3960.48 & 29.94s^3 + 149.7s^2 + 179.6s \\ -26.9s^3 - 149.01s^2 - 161.3s + 0.12 & 29.83s^3 + 207.3s^2 + 644.5s + 3960.4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{onde } \tilde{f}(s) = (s + 2.228 \pm j7.809)(s + 4.153 \pm j6.987) \quad (10)$$

$$H(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s)$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ s+3 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -111.43 & 57.14 \\ 85.72 & -28.57 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \cdot$$

$$\frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ s+3 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -111.43 & 57.14 \\ 85.72 & -28.57 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{f(s)} \begin{bmatrix} -25.71s^3 - 68.55s^2 + 145.45s + 3788 & 28.57s^3 + 142.85s^2 + 171.42s \\ -25.71s^3 - 119.96s^2 - 111.31s + 51.54 & 28.57s^3 + 200s^2 + 456.83s + 3771 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\text{onde } f(s) = (s + 1.153 \pm j6.222)(s + 5.277 \pm j8.73) \quad (12)$$

Como verificação do comportamento dos sistemas $H_B(s)$ e $H(s)$, obtém-se os gráficos seguintes, os quais efetivamente comprovam o cumprimento de todas as especificações propostas e fornecem uma comparação das respostas temporais do sistema exato, $y_i(t)$, e aproximado, $\tilde{y}_i(t)$.

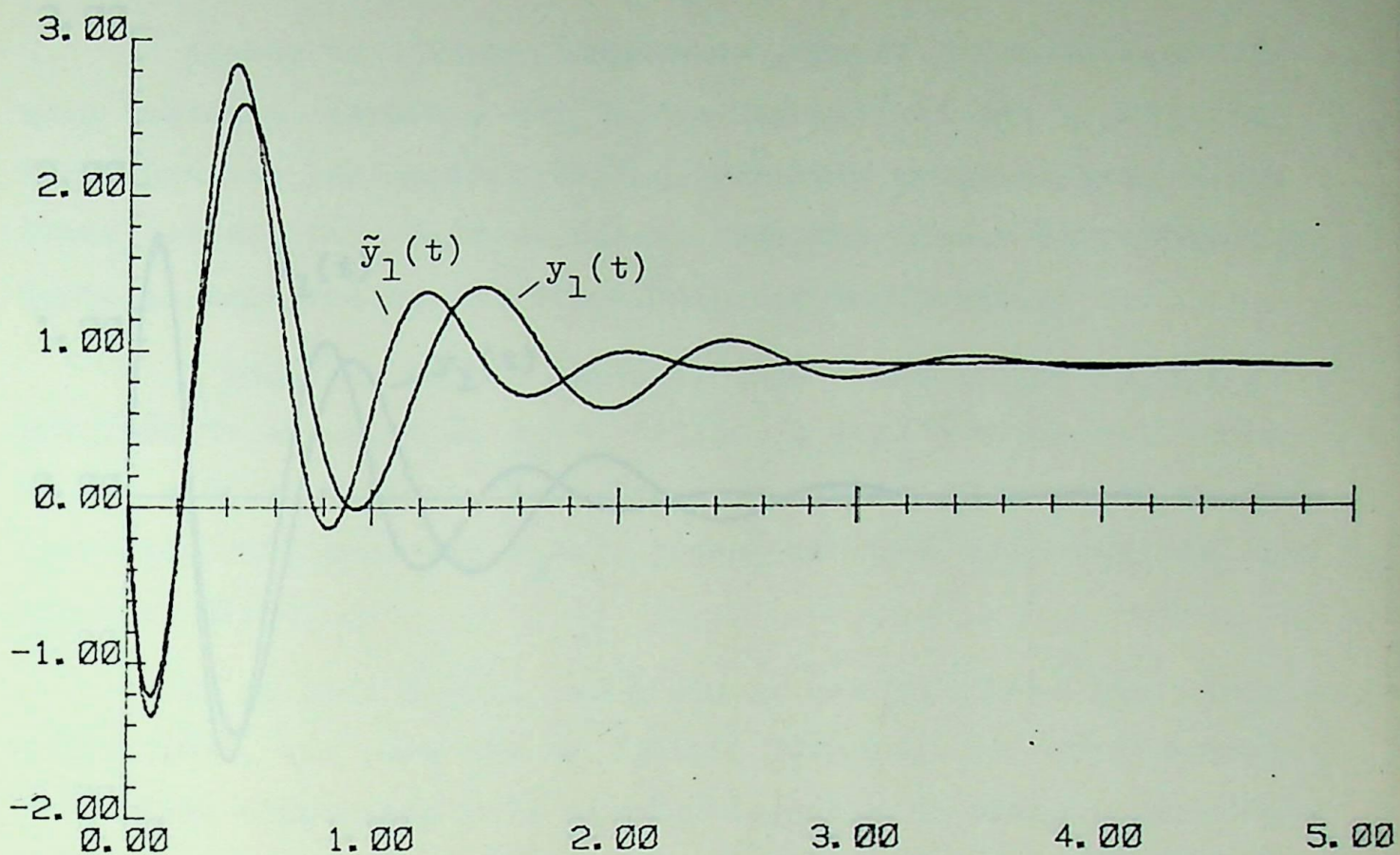


Gráfico das respostas temporais $y_1(t)$ e $\tilde{y}_1(t)$ devido a um degrau unitário aplicado na entrada 1.

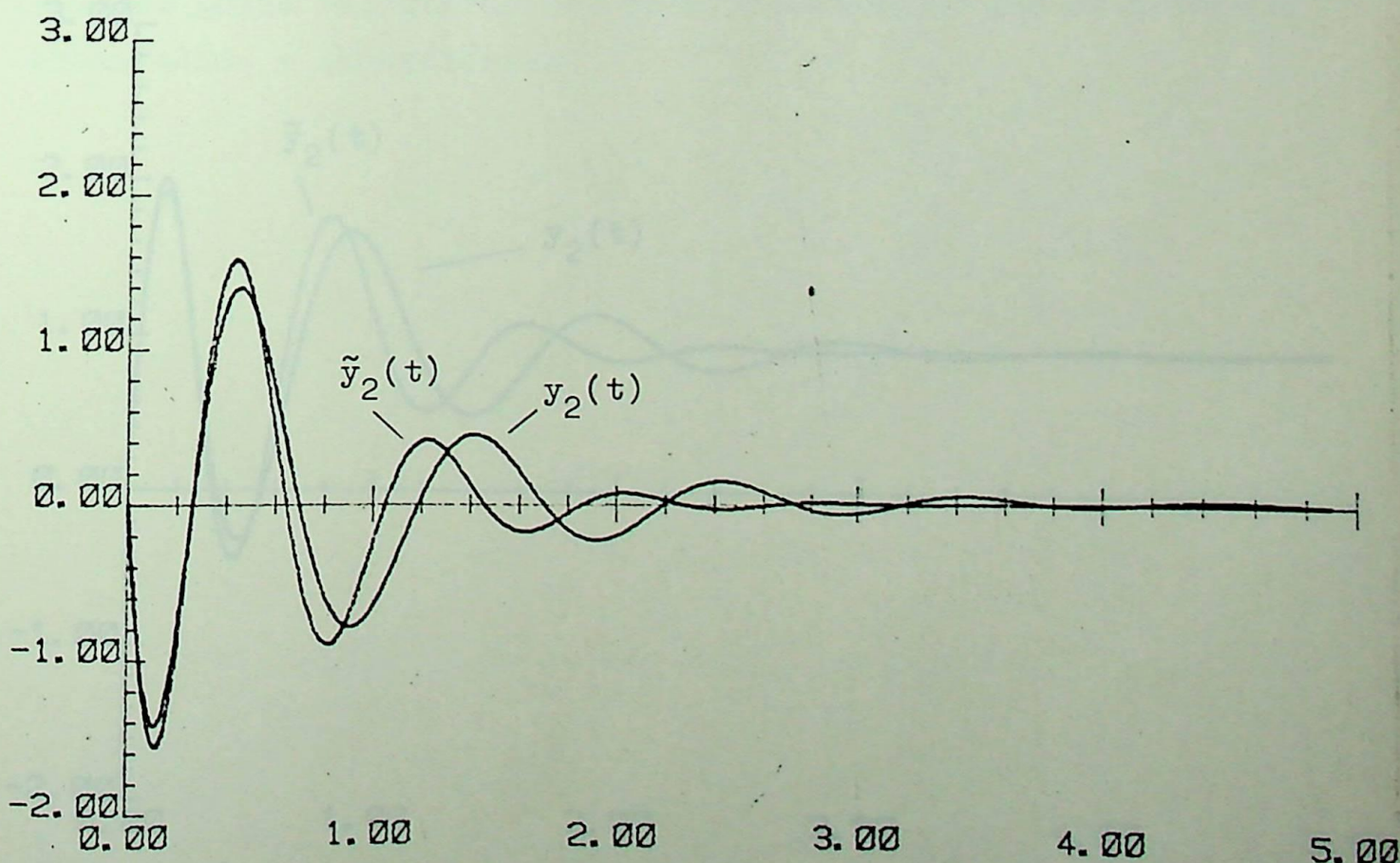


Gráfico das respostas temporais $y_2(t)$ e $\tilde{y}_2(t)$ devido a um degrau unitário aplicado na entrada 1.

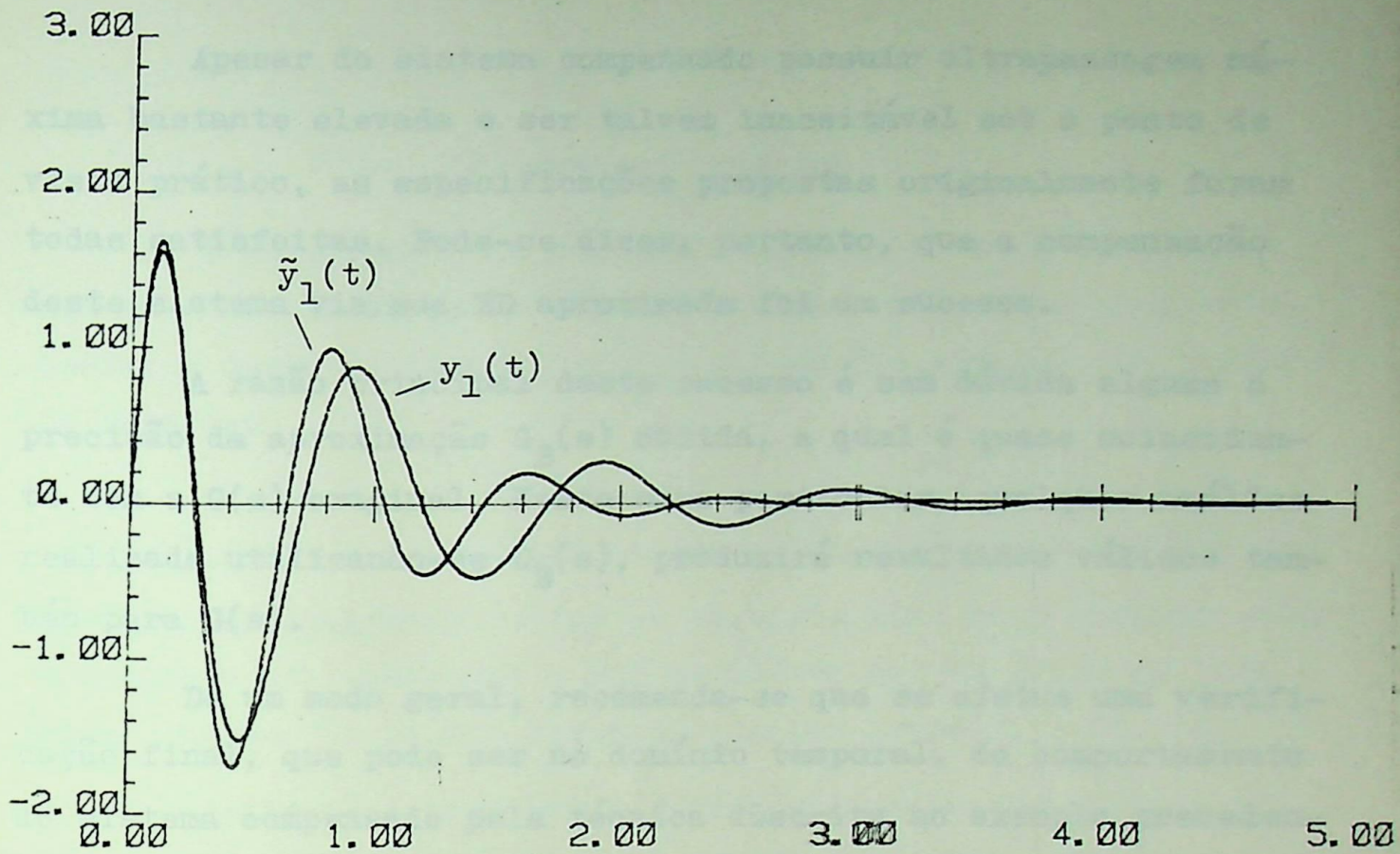


Gráfico das respostas temporais $y_1(t)$ e $\tilde{y}_1(t)$ devido a um degrau unitário aplicado na entrada 2.

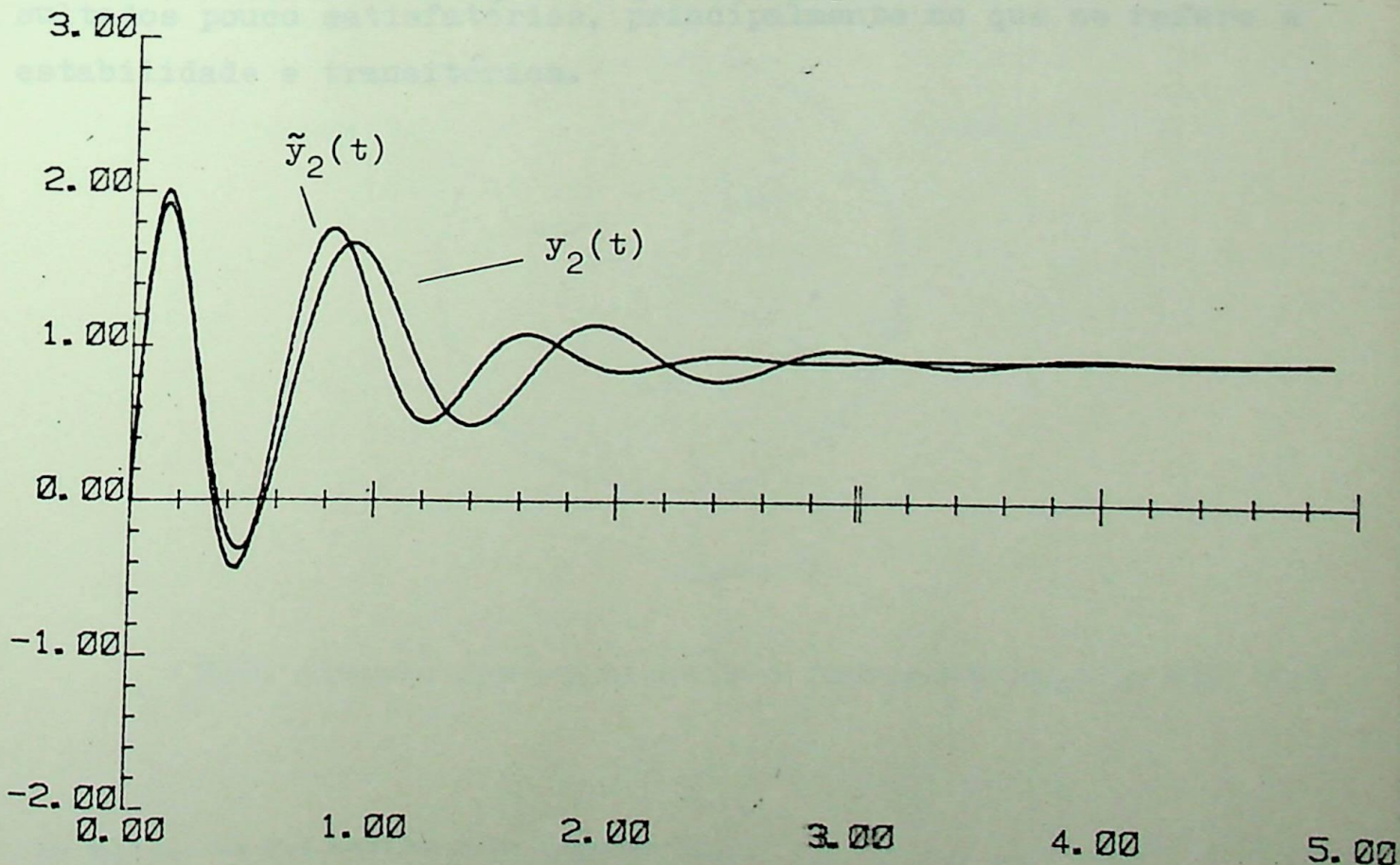


Gráfico das respostas temporais $y_2(t)$ e $\tilde{y}_2(t)$ devido a um degrau unitário aplicado na entrada 2.

Apesar do sistema compensado possuir ultrapassagem máxima bastante elevada e ser talvez inaceitável sob o ponto de vista prático, as especificações propostas originalmente foram todas satisfeitas. Pode-se dizer, portanto, que a compensação deste sistema via sua ED aproximada foi um sucesso.

A razão principal deste sucesso é sem dúvida alguma a precisão da aproximação $G_B(s)$ obtida, a qual é quase coincidente com a $G(s)$ original. Neste caso particular, qualquer análise realizada utilizando-se $G_B(s)$, produzirá resultados válidos também para $G(s)$.

De um modo geral, recomenda-se que se efetue uma verificação final, que pode ser no domínio temporal, do comportamento do sistema compensado pela técnica descrita no exemplo precedente. Pode ocorrer que a ED aproximada obtida seja muito grosseira e uma análise através desta aproximação poderá produzir resultados pouco satisfatórios, principalmente no que se refere a estabilidade e transitórios.

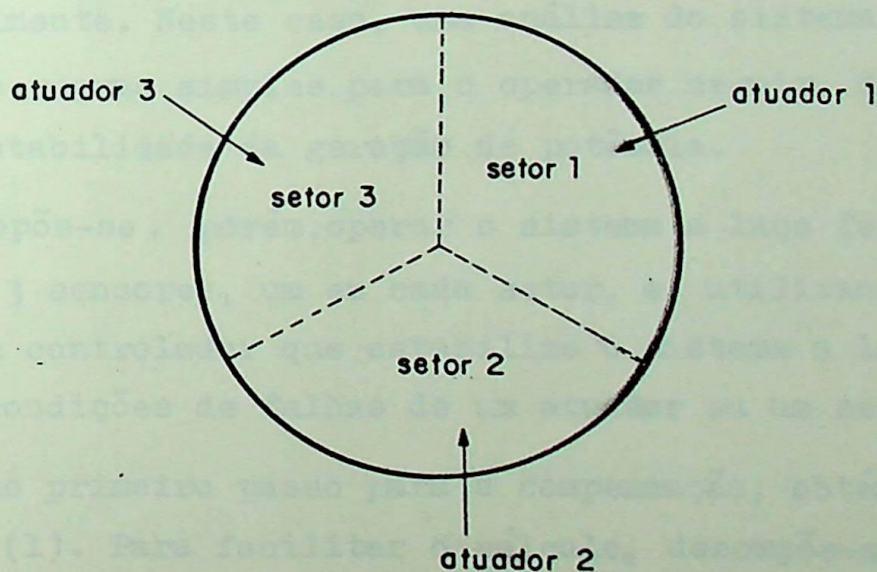
CAPÍTULO 4

APLICAÇÃO PRÁTICA

É objetivo deste capítulo apresentar uma aplicação do MDD na compensação de um sistema prático real, complementando, assim, o desenvolvimento teórico e didático efetuado no capítulo anterior.

O sistema prático a ser analisado é tomado da referência [01], onde o mesmo foi tratado por Owens através do MCC auxiliado por diagramas exatos de Nyquist. Aqui este sistema será compensado utilizando-se o MDD auxiliado por um programa para traçar lugares das raízes desenvolvido por Laurent, A. R. (§).

Aplicação: A potência gerada por um reator nuclear cilíndrico é controlada através de 3 atuadores dispostos simetricamente conforme o esquema abaixo:



Este sistema reator-atuador é representado pela MFT 3×3

(§) Para ver detalhes deste programa, consultar [11].

dada pelas eqs. (1) a (4).

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} a_1(s) & a_2(s) & a_2(s) \\ a_2(s) & a_1(s) & a_2(s) \\ a_2(s) & a_2(s) & a_1(s) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$a_1(s) = 400(s+66.6927)(s+0.44043)(s+0.1044)(s-0.01116 \pm j0.2419) \quad (2)$$

$$a_2(s) = 300(s+55.5277)(s+0.4457)(s+0.1044)(s+0.05656 \pm j0.2275) \quad (3)$$

$$d(s) = (s+100)(s+60)(s+0.026628 \pm j0.2364)(s-0.126 \pm j0.22044) \quad (4)$$

Note que $d(s)$ possui um par de raízes complexas conjugadas com parte real positiva. Segundo indicado por Owens em [01], elas são devidas ao efeito do xenônio 135, que é um subproduto da fissão nuclear.

Em termos da constante de tempo do xenônio (a unidade de tempo usada é a hora), é provável que o reator possa ser regulado manualmente. Neste caso, uma análise do sistema fornece um conjunto de regras simples para o operador seguir, de maneira a manter a estabilidade da geração de potência.

Propõe-se, porém, operar o sistema a laço fechado introduzindo-se 3 sensores, um em cada setor, e, utilizando-se o MDD, projetar um controlador que estabilize o sistema a laço fechado, mesmo sob condições de falhas de um atuador ou um sensor.

Como primeiro passo para a compensação, obtém-se a ED da $G(s)$ de (1). Para facilitar o cálculo, decompõe-se $G(s)$ como:

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} [G_5 s^5 + G_4 s^4 + G_3 s^3 + G_2 s^2 + G_1 s^1 + G_0] \quad (5)$$

Observa-se que $G(0)$ pode ser expressa como:

$$G(0) = \frac{1}{d(0)} G_0 \quad (6)$$

e portanto $G(s)G^{-1}(0)$ resulta:

$$G(s)G^{-1}(0) = \frac{d(0)}{d(s)} [G_5 G_0^{-1} s^5 + \dots + G_1 G_0^{-1} s + I] \quad (7)$$

É facilmente comprovado que todas as matrizes $G_i G_0^{-1}$, ($1 \leq i \leq 5$), comutam entre si, o que faz com que possuam uma matriz modal comum. Esta é encontrada como:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

sendo a sua inversa

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Os autovalores $\lambda_i(s)$, ($1 \leq i \leq 3$), de $G(s)G^{-1}(0)$ são:

$$\begin{aligned} \text{diag} \{ \lambda_i(s) \} &= M^{-1} G(s) G^{-1}(0) M \\ &= \frac{d(0)}{d(s)} M^{-1} [G_5 G_0^{-1} s^5 + \dots + G_1 G_0^{-1} s + I] M, \quad (1 \leq i \leq 3) \quad (10) \end{aligned}$$

Substituindo valores e operando, resulta:

$$\lambda_1(s) = \frac{139.394 (s+0.1044)(s+0.443)}{(s+100)(s-0.126 \pm j0.22044)} \quad (11)$$

$$\lambda_2(s) = \lambda_3(s) = \frac{74.697 (s+0.1044)(s+0.4356)}{(s+60)(s+0.026628 \pm j0.2364)} \quad (12)(\S)$$

Portanto a ED procurada é:

$$\begin{aligned} G(s) &= M \text{diag} \left\{ \lambda_i(s) \right\} M^{-1} G(0) \\ &= Z \text{diag} \left\{ g_i(s) \right\} W, \quad (1 \leq i \leq 3) \end{aligned} \quad (13)$$

onde:

$$Z = M$$

$$W = M^{-1} G(0) = \begin{bmatrix} 2.39129 & 2.39129 & 2.39129 \\ 0.44625 & 0.44625 & -0.89249 \\ 0.89249 & -0.44625 & -0.44625 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$g_i(s) = \lambda_i(s), \quad (1 \leq i \leq 3)$$

Definindo-se um controlador $K(s) = W^{-1} \text{diag} \left\{ k_i(s) \right\} Z^{-1}$ composto somente de ganhos, ou seja, $k_i(s) = k_i, (1 \leq i \leq 3)$, e fazendo-se:

$$g_i(s) = \frac{n_i(s)}{d_i(s)}, \quad (1 \leq i \leq 3) \quad (15)$$

Os subsistemas $h_i(s), (1 \leq i \leq 3)$, são escritos como:

(§) Observe que foram feitos cancelamentos de polos e zeros coincidentes nas eqs. (11) e (12). O leitor atento certamente terá percebido que em (12) os polos e os zeros cancelados eram complexos com parte real positiva. Porém, aqui, esta cancelação é lícita pois estes polos e zeros foram introduzidos matematicamente no denominador e numerador de (12) (veja [Fl], Cap. 3, Ap. II). Pode-se verificar que a matriz original $G(s)$ pode ser reobtida operando-se $M \text{diag} \left\{ \lambda_i(s) \right\} M^{-1} G(0)$ e portanto nenhuma informação foi perdida ao se fazer os cancelamentos em questão.

$$h_i(s) = \frac{k_i g_i(s)}{1+k_i g_i(s)} = \frac{k_i n_i(s)}{d_i(s) + k_i n_i(s)}, \quad (1 \leq i \leq 3) \quad (16)$$

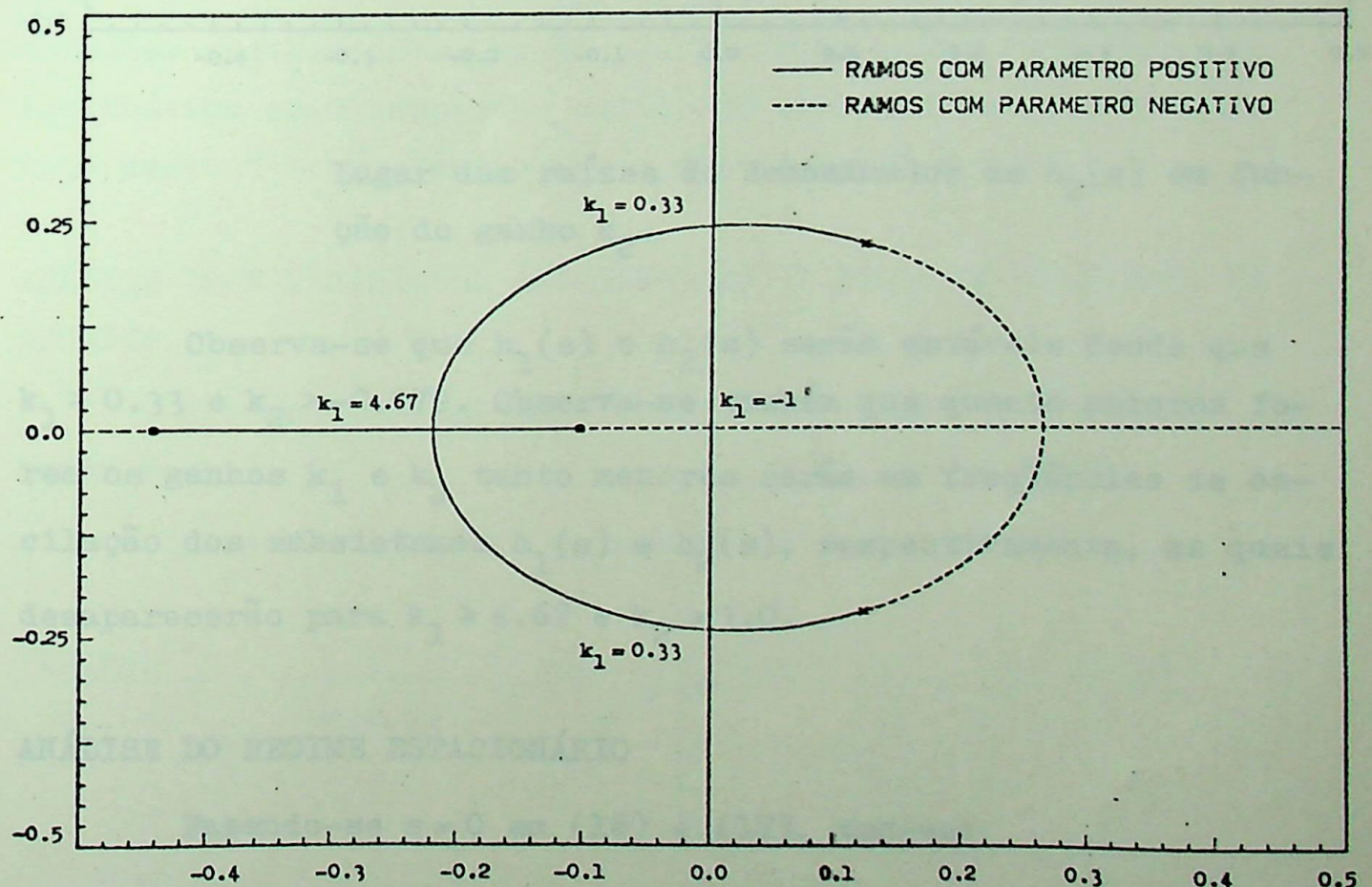
Substituindo valores, tem-se

$$h_1(s) = \frac{139.394 k_1 (s+0.1044)(s+0.443)}{(s+100)(s-0.126 \pm j0.22044) + 139.394 k_1 (s+0.1044)(s+0.443)} \quad (17)$$

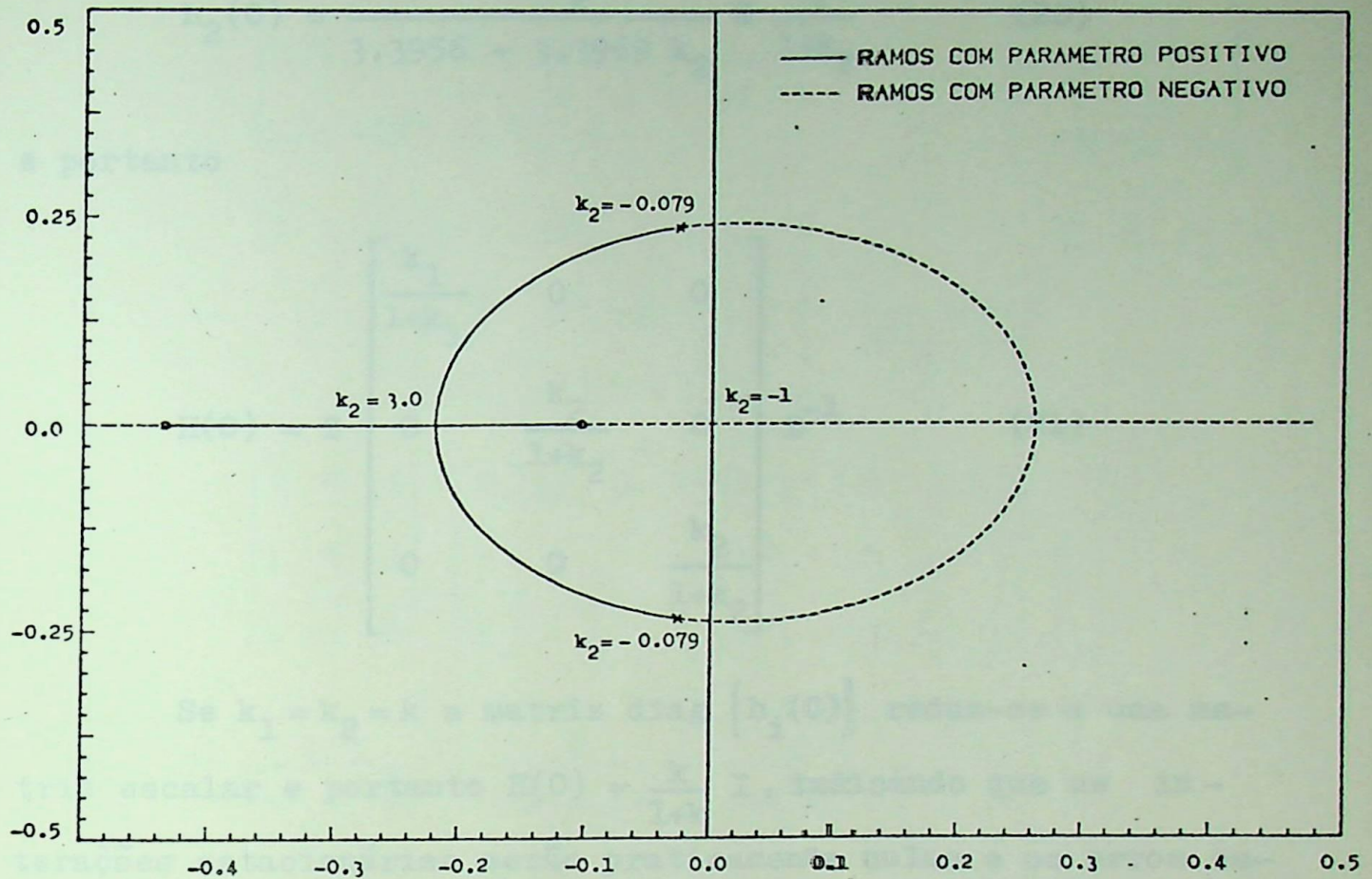
$$h_2(s) = h_3(s) = \frac{74.697 k_2 (s+0.1044)(s+0.4356)}{(s+60)(s+0.026628 \pm j0.2364) + 74.697 k_2 (s+0.1044)(s+0.4356)} \quad (18)$$

ANÁLISE DA ESTABILIDADE

Os gráficos abaixo mostram os lugares das raízes dos denominadores de $h_1(s)$ e $h_2(s)$ em função dos ganhos k_1 e k_2 , respectivamente.



Lugar das raízes do denominador de $h_1(s)$ em função do ganho k_1 .



Lugar das raízes do denominador de $h_2(s)$ em função do ganho k_2 .

Observa-se que $h_1(s)$ e $h_2(s)$ serão estáveis desde que $k_1 > 0.33$ e $k_2 > -0.079$. Observa-se também que quanto maiores forem os ganhos k_1 e k_2 tanto menores serão as frequências de oscilação dos subsistemas $h_1(s)$ e $h_2(s)$, respectivamente, as quais desaparecerão para $k_1 \geq 4.67$ e $k_2 \geq 3.0$.

ANÁLISE DO REGIME ESTACIONÁRIO

Fazendo-se $s = 0$ em (16) e (17), tem-se:

$$h_1(0) = \frac{6.4468 k_1}{6.4469 + 6.4468 k_1} \approx \frac{k_1}{1+k_1} \quad (19)$$

$$h_2(0) = \frac{3.3969 k_2}{3.3956 + 3.3969 k_2} \cong \frac{k_2}{1+k_2} \quad (20)$$

e portanto

$$H(0) = Z \begin{bmatrix} \frac{k_1}{1+k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{1+k_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{1+k_2} \end{bmatrix} Z^{-1} \quad (21)$$

Se $k_1 = k_2 = k$ a matriz $\text{diag} \{h_i(0)\}$ reduz-se a uma matriz escalar e portanto $H(0) = \frac{k}{1+k} I$, indicando que as interações estacionárias serão praticamente nulas e os erros estacionários observados nas saídas do sistema (para excitações tipo degrau) serão tão pequenos quanto maior for k .

ANÁLISE DA ESTABILIDADE SOB CONDIÇÃO DE FALHA DE UM SENSOR OU ATUADOR

Aplicando-se as eqs. (10) e (12) deduzidas na seção 3.2, obtém-se:

Para uma falha no sensor 1:

$$\frac{e_{\text{LFCFS1}}(s)}{e_{\text{LF}}(s)} = \frac{1}{1+k_1 g_1(s)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{1+k_2 g_2(s)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{1+k_2 g_2(s)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1/3}{1+k_1 g_1(s)} + \frac{0}{1+k_2 g_2(s)} + \frac{2/3}{1+k_2 g_2(s)}$$

$$= \frac{1/3 d_1(s)}{d_1(s)+k_1 n_1(s)} + \frac{2/3 d_2(s)}{d_2(s)+k_2 n_2(s)} \quad (22)$$

Para uma falha no sensor 2:

$$\frac{e_{LFCFS2}(s)}{e_{LF}(s)} = \frac{1}{1+k_1 g_1(s)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{1+k_2 g_2(s)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{1+k_2g_2(s)} [1 \ 1 \ -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \\
& = \frac{1/3}{1+k_1g_1(s)} + \frac{1/3}{1+k_2g_2(s)} + \frac{1/3}{1+k_2g_2(s)} \\
& = \frac{1/3d_1(s)}{d_1(s)+k_1n_1(s)} + \frac{2/3d_2(s)}{d_2(s)+k_2n_2(s)} \tag{23}
\end{aligned}$$

Para uma falha no sensor 3:

$$\begin{aligned}
\frac{e_{LFCFS3}(s)}{e_{LF}(s)} & = \frac{1}{1+k_1g_1(s)} [1 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} + \\
& + \frac{1}{1+k_2g_2(s)} [1 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} + \\
& + \frac{1}{1+k_2g_2(s)} [1 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \\
& = \frac{1/3}{1+k_1g_1(s)} + \frac{2/3}{1+k_2g_2(s)} + \frac{0}{1+k_2g_2(s)} \\
& = \frac{1/3d_1(s)}{d_1(s)+k_1n_1(s)} + \frac{2/3d_2(s)}{d_2(s)+k_2n_2(s)} \tag{24}
\end{aligned}$$

Para uma falha no atuador 1:

$$\begin{aligned}
 \frac{e_{\text{LFCFA1}}(s)}{e_{\text{LF}}(s)} &= \frac{1}{1+k_1g_1(s)} [0.1394 \quad 0 \quad 0.747] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 2.3913 \\ 0.4463 \\ 0.8925 \end{bmatrix} + \\
 &= \frac{1}{1+k_2g_2(s)} [0.1394 \quad 0 \quad 0.747] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 2.3913 \\ 0.4463 \\ 0.8925 \end{bmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{1+k_2g_2(s)} [0.1394 \quad 0 \quad 0.747] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 2.3913 \\ 0.4463 \\ 0.8925 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{0.3333}{1+k_1g_1(s)} + \frac{0}{1+k_2g_2(s)} + \frac{0.6666}{1+k_2g_2(s)} \\
 &= \frac{1/3d_1(s)}{d_1(s)+k_1n_1(s)} + \frac{2/3d_2(s)}{d_2(s)+k_2n_2(s)} \quad (25)
 \end{aligned}$$

Para uma falha no atuador 2:

$$\begin{aligned}
 \frac{e_{\text{LFCFA2}}(s)}{e_{\text{LF}}(s)} &= \frac{1}{1+k_1g_1(s)} [0.1394 \quad 0.747 \quad -0.747] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 2.3913 \\ 0.4463 \\ -0.4463 \end{bmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{1+k_2g_2(s)} [0.1394 \quad 0.747 \quad -0.747] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 2.3913 \\ 0.4463 \\ -0.4463 \end{bmatrix} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{1+k_2g_2(s)} \begin{bmatrix} 0.1394 & 0.747 & -0.747 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.3913 \\ 0.4463 \\ -0.4463 \end{bmatrix} \\
& = \frac{0.3333}{1+k_1g_1(s)} + \frac{0.3333}{1+k_2g_2(s)} + \frac{0.3333}{1+k_2g_2(s)} \\
& = \frac{1/3d_1(s)}{d_1(s)+k_1n_1(s)} + \frac{2/3d_2(s)}{d_2(s)+k_2n_2(s)} \quad (26)
\end{aligned}$$

Para uma falha no atuador 3:

$$\begin{aligned}
\frac{e_{LFCFA3}(s)}{e_{LF}(s)} & = \frac{1}{1+k_1g_1(s)} \begin{bmatrix} 0.1394 & -0.747 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.3913 \\ -0.8925 \\ -0.4463 \end{bmatrix} + \\
& + \frac{1}{1+k_2g_2(s)} \begin{bmatrix} 0.1394 & -0.747 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.3913 \\ -0.8925 \\ -0.4463 \end{bmatrix} + \\
& + \frac{1}{1+k_2g_2(s)} \begin{bmatrix} 0.1394 & -0.747 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.3913 \\ -0.8925 \\ -0.4463 \end{bmatrix} \\
& = \frac{0.3333}{1+k_1g_1(s)} + \frac{0.6666}{1+k_2g_2(s)} + \frac{0}{1+k_2g_2(s)} \\
& = \frac{1/3d_1(s)}{d_1(s)+k_1n_1(s)} + \frac{2/3d_2(s)}{d_2(s)+k_2n_2(s)} \quad (27)
\end{aligned}$$

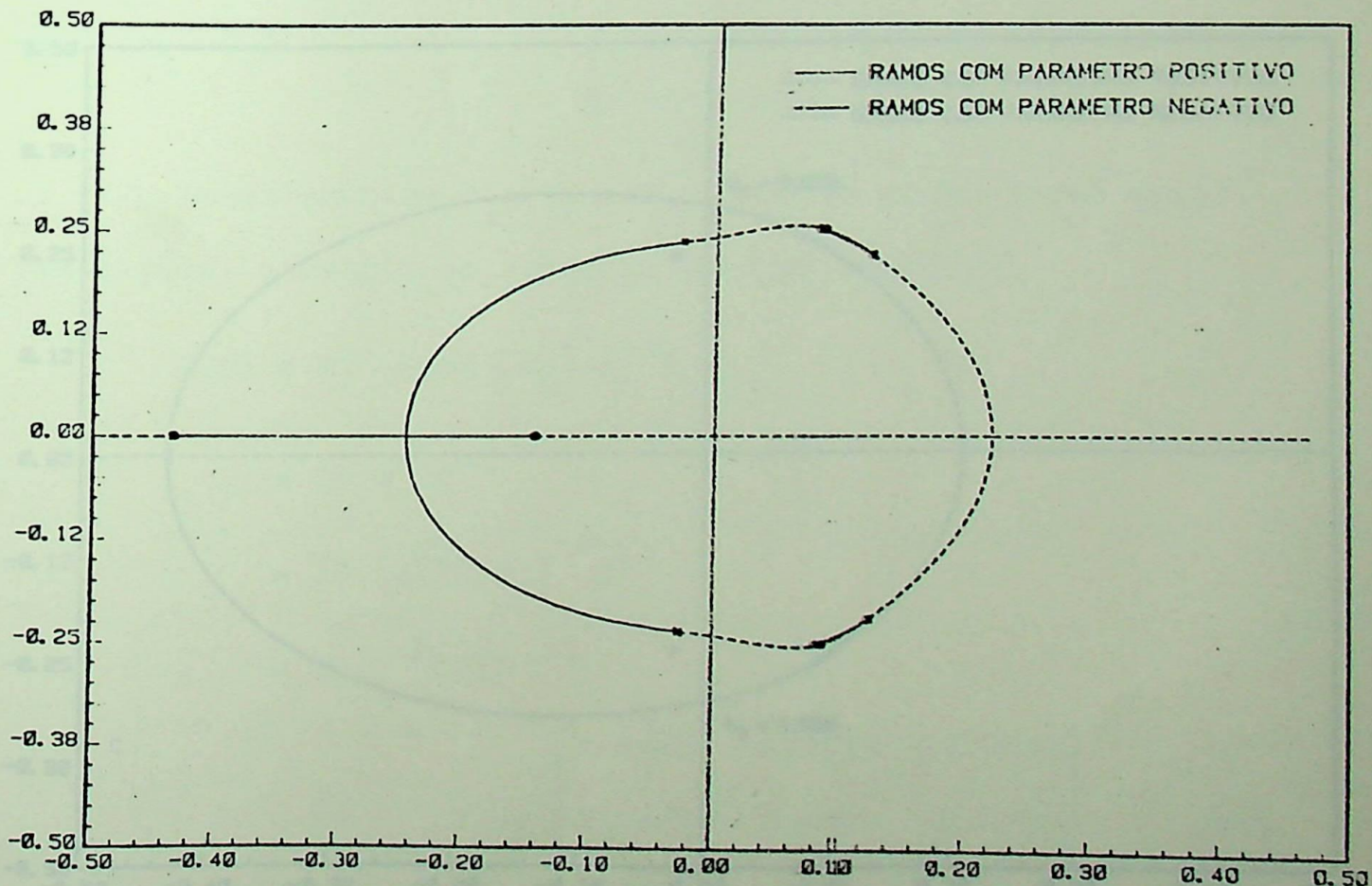
As eqs. (22) a (27) resultaram todas iguais, indicando assim, que se o sistema a laço fechado $H(s)$ for estável para uma falha de um determinado sensor ou atuador, então será estável em caso de falha (não simultânea) de qualquer sensor ou qualquer atuador.

O polinômio característico do sistema com falha, $e_{LFCL}(s)$, pode ser escrito como:

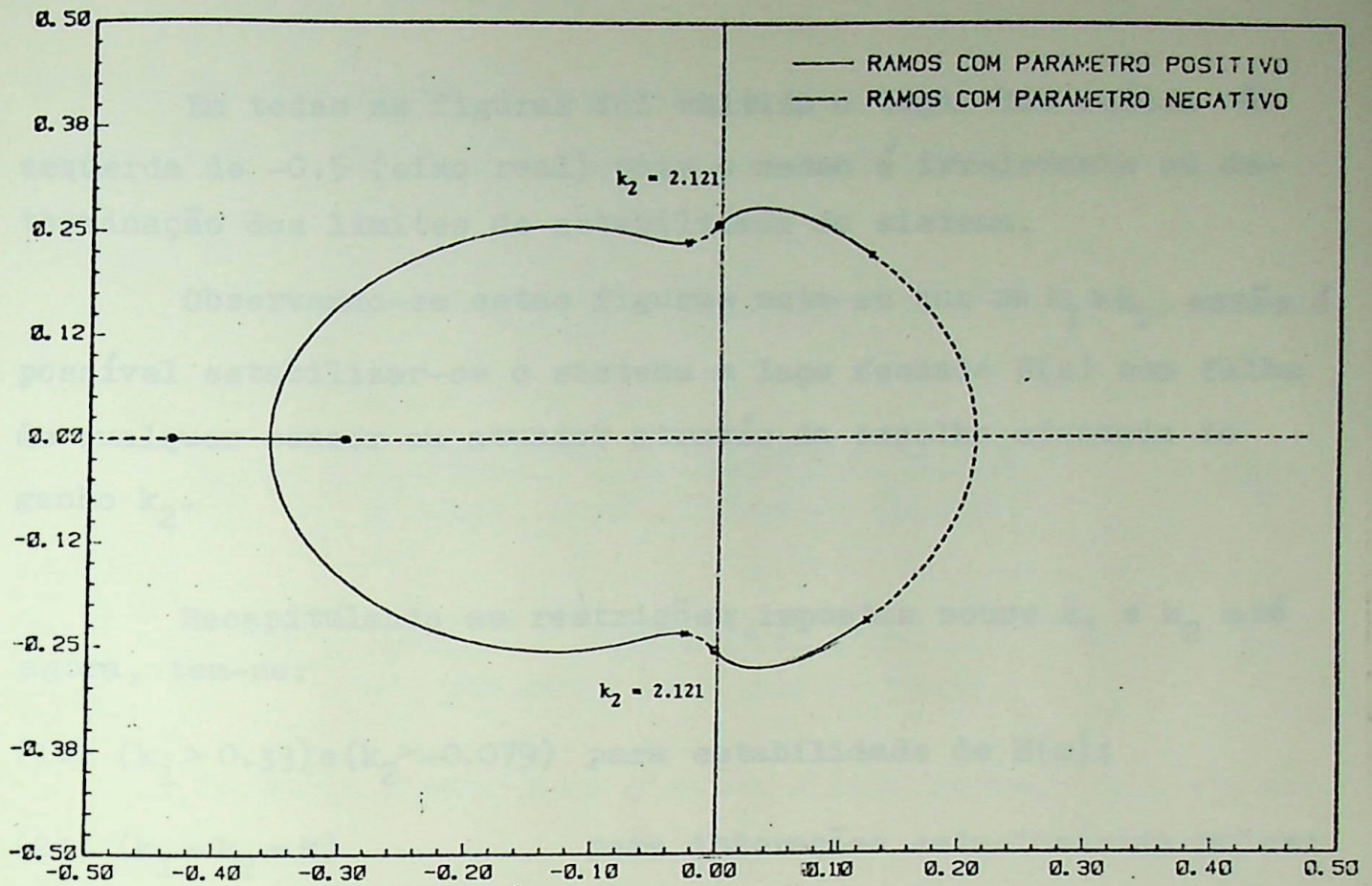
$$e_{LFCL}(s) = \frac{1}{3} d_1(s)d_2(s) + \frac{k_2}{3} d_1(s)n_2(s) + \frac{2}{3} d_1(s)d_2(s) + \frac{k_1}{2} d_2(s)n_1(s)$$

$$= d_1(s)d_2(s) + k_1 \left[\frac{2}{3} n_1(s)d_2(s) \right] + k_2 \left[\frac{1}{3} d_1(s)n_2(s) \right] \quad (28)$$

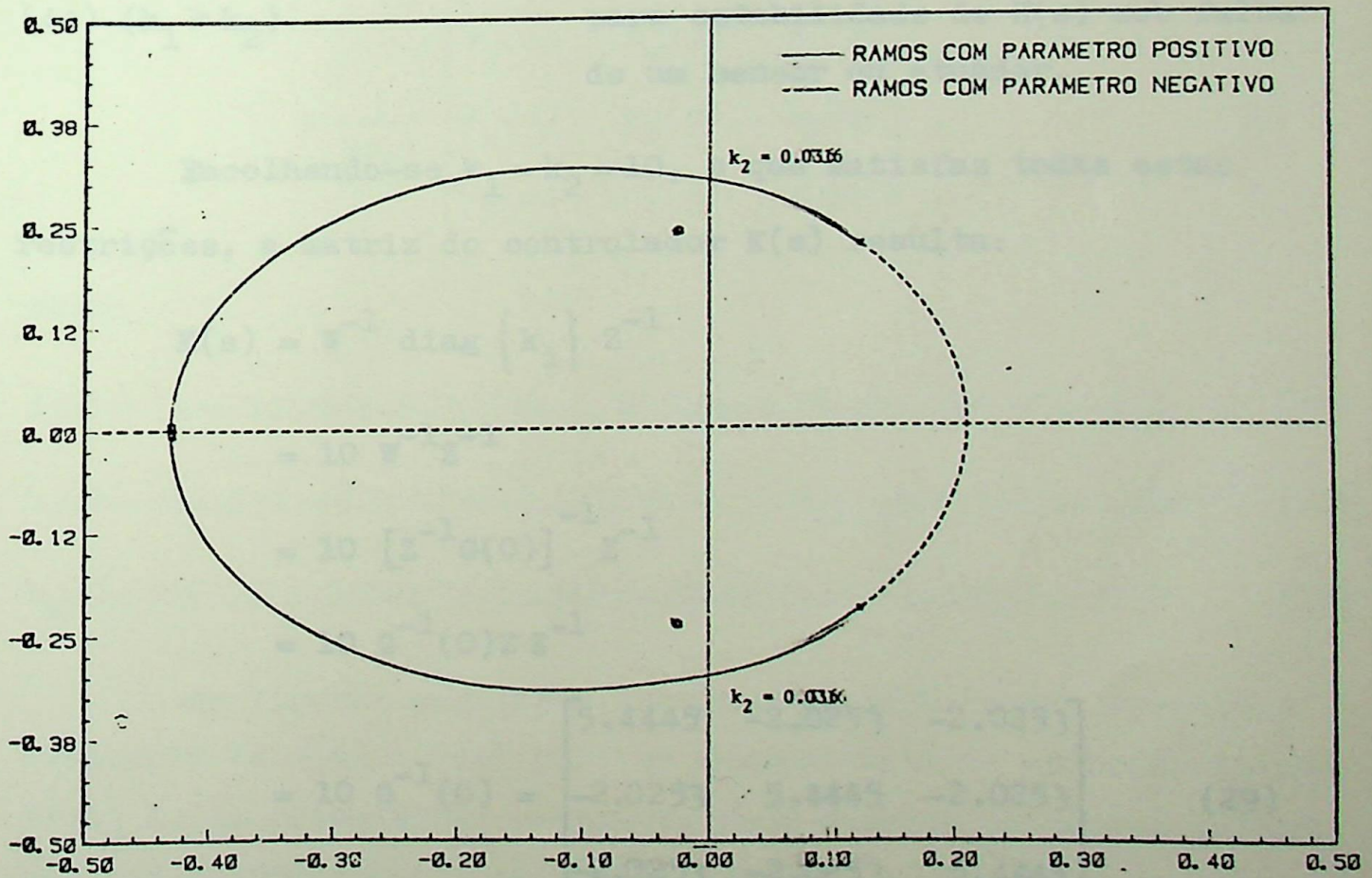
Fazendo-se $k_1 = \alpha k_2$, obtém-se a seguinte família de lugares das raízes de $e_{LFCL}(s)$ em função de α e k_2 .



Lugar das raízes de $e_{LFCL}(s)$ em função de k_2 para $\alpha = 0.1$.



Lugar das raízes de $\rho_{LFCF}(s)$ em função de k_2 para $\alpha = 1$.



Lugar das raízes de $\rho_{LFCF}(s)$ em função de k_2 para $\alpha = 10$.

Em todas as figuras foi omitido o lugar das raízes à esquerda de -0.5 (eixo real) pois o mesmo é irrelevante na determinação dos limites de estabilidade do sistema.

Observando-se estas figuras nota-se que se $k_1 \geq k_2$, então é possível estabilizar-se o sistema a laço fechado $H(s)$ com falha de qualquer sensor ou atuador através da escolha adequada do ganho k_2 .

Recapitulando as restrições impostas sobre k_1 e k_2 até agora, tem-se:

- (1ª) ($k_1 > 0.33$) e ($k_2 > -0.079$) para estabilidade de $H(s)$;
- (2ª) ($k_1 = k_2 = k$) para interações estacionárias nulas;
- (3ª) ($k_1 \gg 1$) e ($k_2 \gg 1$) para erros estacionários pequenos;
- (4ª) ($k_1 \geq k_2$) para estabilidade de $H(s)$ sob falha de um sensor ou atuador.

Escolhendo-se $k_1 = k_2 = 10$, o que satisfaz todas estas restrições, a matriz do controlador $K(s)$ resulta:

$$\begin{aligned}
 K(s) &= W^{-1} \text{diag} \{ k_i \} Z^{-1} \\
 &= 10 W^{-1} Z^{-1} \\
 &= 10 [Z^{-1} G(0)]^{-1} Z^{-1} \\
 &= 10 G^{-1}(0) Z Z^{-1} \\
 &= 10 G^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 5.4445 & -2.0253 & -2.0253 \\ -2.0253 & 5.4445 & -2.0253 \\ -2.0253 & -2.0253 & 5.4445 \end{bmatrix} \quad (29)
 \end{aligned}$$

E está pronta a compensação proposta. Segue agora uma verificação no domínio temporal dos resultados obtidos com este controlador.

Os subsistemas $h_1(s)$ e $h_2(s)$ de (17) e (18) reduzem-se a:

$$h_1(s) = \frac{1393.94s^2 + 763.046s + 64.469}{s^3 + 1493.69s^2 + 737.91s + 70.916} \quad (30)$$

$$h_2(s) = \frac{746.97s^2 + 403.364s + 33.97}{s^3 + 807.023s^2 + 406.616s + 37.365} \quad (31)$$

Portanto a matriz do sistema a laço fechado $H(s)$ é escrita como:

$$H(s) = Z \operatorname{diag} \{ h_i(s) \} Z^{-1}$$

$$= \frac{1}{f(s)} \begin{bmatrix} b_1(s) & b_2(s) & b_2(s) \\ b_2(s) & b_1(s) & b_2(s) \\ b_2(s) & b_2(s) & b_1(s) \end{bmatrix} \quad (32)$$

onde:

$$f(s) = (s+0.1209)(s+0.1307)(s+0.3635)(s+0.3832)(s+806.52)(s+1493.2) \quad (33)$$

$$b_1(s) = 962.63(s+0.1044)(s+0.1271)(s+0.3708)(s+0.4376)(s+1161.75) \quad (34)$$

$$b_2(s) = 215.66(s+0.0001)(s+0.1044)(s+0.42)(s+3.4385)(s+10.817) \quad (35)$$

As figuras seguintes mostram os gráficos das respostas temporais de $G(s)$ e $H(s)$ para um degrau unitário aplicado na entrada 1. As respectivas respostas para degraus unitários aplicados nas entradas 2 e 3 são idênticas pois tanto $G(s)$ como $H(s)$

são sistemas simétricos.

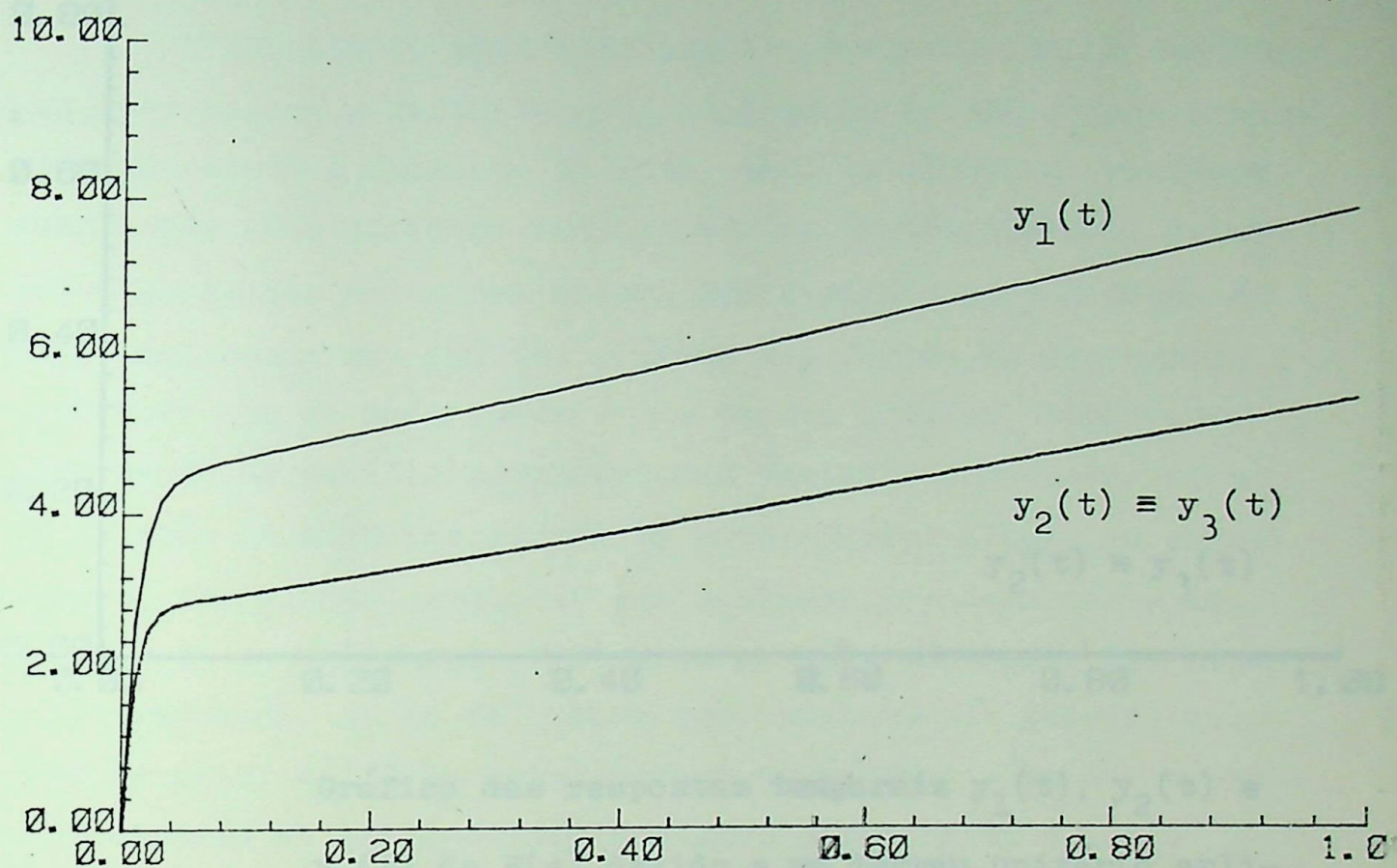


Gráfico das respostas temporais $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y_3(t)$ de $G(s)$ devido a um degrau unitário aplicado na entrada 1.

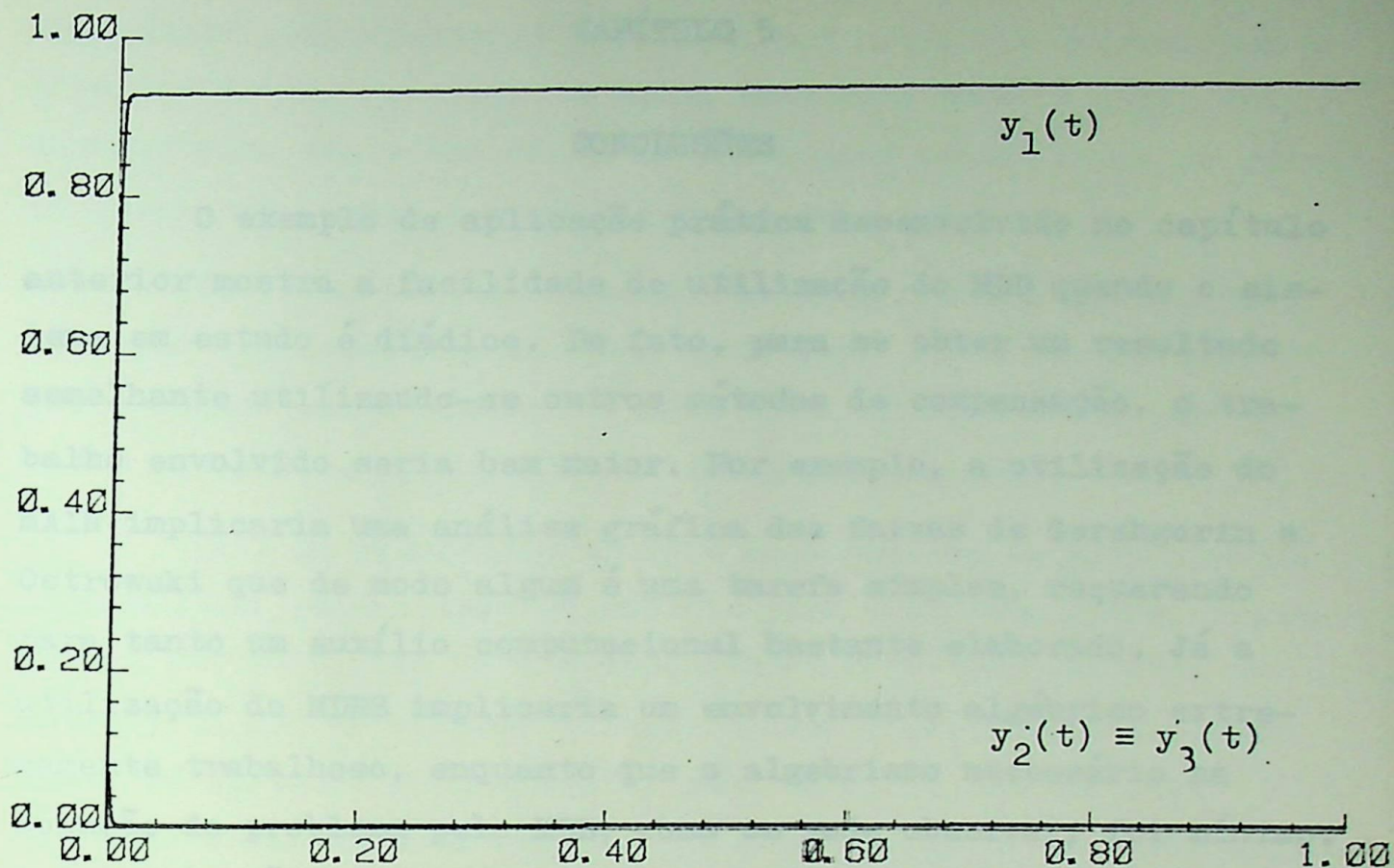


Gráfico das respostas temporais $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y_3(t)$ de $H(s)$ devido a um degrau unitário aplicado na entrada 1.



CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

O exemplo de aplicação prática desenvolvido no capítulo anterior mostra a facilidade de utilização do MDD quando o sistema em estudo é diádico. De fato, para se obter um resultado semelhante utilizando-se outros métodos de compensação, o trabalho envolvido seria bem maior. Por exemplo, a utilização do MAIN implicaria uma análise gráfica das faixas de Gershgorin e Ostrowski que de modo algum é uma tarefa simples, requerendo para tanto um auxílio computacional bastante elaborado. Já a utilização do MDRS implicaria um envolvimento algébrico extremamente trabalhoso, enquanto que o algebrismo necessário na solução do problema pelo MDD, como se pode observar, foi mínimo. A determinação da ED da planta que inicialmente parecia ser o foco de maior dificuldade algébrica no método, pôde ser contornada através do procedimento numérico sugerido em 3.1.4.

Toda esta margem de vantagem do MDD sobre os outros métodos (da sua categoria), contudo, sofre uma grande limitação: SM's diádicos são sistemas muito especiais e particularizados, o que em outras palavras quer dizer: são raros.

Ao se tentar generalizar o MDD para sistemas não diádicos, ou seja, via ED aproximada da planta, já se comentou previamente que também se pode conseguir bons resultados, desde que a aproximação encontrada seja razoavelmente precisa. Embora este enfoque aproximado seja uma opção alternativa de compensação de SM's, além das técnicas já citadas, obviamente não consegue sustentar a margem de vantagem característica do MDD exato.

Não se chegou a testar o método aproximado em uma variedade significativa de SM's, principalmente SM's com mais de duas entradas e saídas, cuja razão foi a indisponibilidade de

algoritmos computacionais para auxiliar o cálculo de produtos e inversas de MFT's. Assim, e tendo como base somente o que foi desenvolvido neste trabalho, as principais desvantagens do método aproximado podem ser sintetizadas como:

(1ª) O método de obtenção da ED aproximada apresentado na seção 3.3 necessita da inversa de $G(s)$. Prevê-se, portanto, que à medida que o número de entradas e saídas aumente por sobre o valor 2, a aplicabilidade do método diminui;

(2ª) Os resultados obtidos pela análise da MFTD aproximada não são garantidamente válidos para o sistema exato, reque-
rendo, portanto, uma verificação destes resultados através da análise da MFT do sistema a laço fechado considerando a planta exata do sistema. Naturalmente, para SM's com mais de duas entradas e saídas esta verificação pode tornar-se bastante difícil, pois novamente necessita do cálculo de uma inversa, no caso $[I + G(s)K(s)]^{-1}$.

APÊNDICE - EXPANSÃO DIÁDICA

Seja D uma matriz de ordem $m \times n$ definida sobre um campo (usualmente os numéricos) e seja $r(D)$ a notação utilizada para designar o seu posto. Se $r(D) = 1$, a matriz D é denominada "diada",

Teorema: Toda diada pode ser decomposta como:

$$D = \alpha z w^t \quad (1)$$

onde α é um escalar, z um vetor de ordem $m \times 1$ e w^t um vetor transposto de ordem $1 \times n$ (tanto α como os elementos de z e w^t pertencem ao campo de definição dos elementos de D),

Demonstração:

Faça-se o seguinte particionamento de D :

$$D = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde os z_i ($1 \leq i \leq n$) são as colunas de D , de ordem $m \times 1$ (repare: neste apêndice o subíndice i não indica um componente, senão que identifica um vetor).

O fato de $r(D)=1$ implica que qualquer que seja o vetor z_i considerado, este pode ser expresso como:

$$z_i = \alpha_{ij} z_j \quad (3)$$

com: $\alpha_{ii}=1$, $\alpha_{ji} = \frac{1}{\alpha_{ij}}$, ($1 \leq i, j \leq n$)

Tomando-se agora um vetor z_k qualquer (pertencente ao conjunto dos vetores que forma a matriz D) como referência, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \alpha_{1k} z_k \\
z_2 &= \alpha_{2k} z_k \\
&\vdots \\
z_k &= \alpha_{kk} z_k \\
&\vdots \\
z_n &= \alpha_{nk} z_k
\end{aligned} \tag{4}$$

Substituindo-se os valores de z_{ii} da eq. (2) pelos correspondentes dados pela eq. (4), obtém-se:

$$D = \left[\alpha_{1k} z_k \quad \alpha_{2k} z_k \quad \dots \quad z_k \quad \dots \quad \alpha_{nk} z_k \right] \tag{5}$$

Tomando-se z_k como fator comum à esquerda, resulta:

$$D = z_k \left[\alpha_{1k} \quad \alpha_{2k} \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad \alpha_{nk} \right] = z_k w^t \tag{6}$$

onde $w^t \triangleq \left[\alpha_{1k} \quad \alpha_{2k} \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad \alpha_{nk} \right]$, com o 1 na posição k.

A eq. (6) é um caso particular de (1) com $\alpha=1$. Mas se o vetor tomado como referência fosse z (~~não~~ pertencente ao conjunto das colunas de D), a equação resultante já assumiria a forma da (1):

$$D = \alpha z w^t \tag{7}$$

onde $z_k = \alpha z$.

Isto finaliza a prova do teorema. Salientou-se a passagem de (6) para (7) por ser ela de importância fundamental no desenvolvimento seguinte.

Qualquer que seja a matriz A de ordem $m \times n$ com elementos definidos sobre um campo, esta pode ser expressa como um somatório de diadas, ou seja:

$$A = \sum_{i=1}^q D_i = \sum_{i=1}^q \alpha_i z_i w_i^t \quad (8)$$

onde D_i ($1 \leq i \leq q$) é uma diada genérica de um conjunto de diadas com $q \geq r(A)$ (§).

A eq. (8) recebe o nome de "expansão diádica" da matriz A , ou abreviadamente ED de A . No caso especial em que $q=r(A)$, a eq. (8) sintetiza a forma mais compacta possível de se expressar a matriz A como um somatório de diadas e recebe o nome de "expansão diádica mínima".

Se forem compostas as matrizes Z e W como:

$$Z = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_q] \quad (9)$$

$$W = \begin{bmatrix} t \\ w_1 \\ t \\ w_2 \\ \vdots \\ t \\ w_q \end{bmatrix} \quad (10)$$

então (8) pode ser reescrita como:

$$A = \sum_{i=1}^q \alpha_i z_i w_i^t = Z \text{diag} \left\{ \alpha_i \right\} W \quad (11)$$

Relembrando: a ordem de A é $m \times n$; a ordem de Z é $m \times q$; a

(§) A restrição $q \geq r(A)$ é justificada na teoria matricial por um teorema que afirma que o posto da matriz resultado de soma de matrizes é menor ou igual à soma dos postos das matrizes somadas.

ordem de diag $\{\alpha_i\}$ é $q \times q$ e a ordem de W é $q \times n$.

O elemento genérico $a(j,k)$ da matriz A é obtido a partir do 2º membro da eq. (11) como:

$$a(j,k) = \sum_{i=1}^q \alpha_i z_i(j) w_i^t(k) \quad (12)$$

onde $a(j,k)$ = elemento pertencente à fila j e coluna k da matriz A ;

$z_i(j)$ = elemento j do vetor z_i ;

$w_i^t(k)$ = elemento k do vetor (transposto) w_i^t .

Utilizando-se esta notação, as matrizes Z e W são escritas como:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1(1) & z_2(1) & \dots & z_q(1) \\ z_1(2) & z_2(2) & \dots & z_q(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1(j) & z_2(j) & \dots & z_q(j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1(m) & z_2(m) & \dots & z_q(m) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1^t(1) & w_1^t(2) & \dots & w_1^t(k) & \dots & w_1^t(n) \\ w_2^t(1) & w_2^t(2) & \dots & w_2^t(k) & \dots & w_2^t(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_q^t(1) & w_q^t(2) & \dots & w_q^t(k) & \dots & w_q^t(n) \end{bmatrix} \quad (14)$$

O elemento genérico $a(j,k)$ da matriz A será obtido ago-

ra através do 3º membro da eq. (11). O produto $Z \text{ diag} \{ \alpha_i \}$ está dado abaixo por (15).

$$Z \text{ diag} \{ \alpha_i \} = \begin{bmatrix} \alpha_{1z_1(1)} & \alpha_{2z_2(1)} \dots \alpha_{qz_q(1)} \\ \alpha_{1z_1(2)} & \alpha_{2z_2(2)} \dots \alpha_{qz_q(2)} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{1z_1(j)} & \alpha_{2z_2(j)} \dots \alpha_{qz_q(j)} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{1z_1(m)} & \alpha_{2z_2(m)} \dots \alpha_{qz_q(m)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

O elemento $a(j,k)$ procurado é o resultado do produto da fila j da matriz $Z \text{ diag} \{ \alpha_i \}$ pela coluna k da matriz W , ou seja:

$$a(j,k) = \begin{bmatrix} \alpha_{1z_1(j)} & \alpha_{2z_2(j)} & \dots & \alpha_{qz_q(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^t(k) \\ w_2^t(k) \\ \vdots \\ w_q^t(k) \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_{1z_1(j)} w_1^t(k) + \alpha_{2z_2(j)} w_2^t(k) + \dots + \alpha_{qz_q(j)} w_q^t(k)$$

$$= \sum_{i=1}^q \alpha_{iz_i(j)} w_i^t(k) \quad (16)$$

$a(j,k)$ calculado através dos 2º e 3º membros da eq. (11) resultou, em ambos os casos, o mesmo valor: eqs. (12) e (16), o que demonstra a equivalência dada pelos 2º e 3º membros de (11).

Se a matriz A for quadrada de ordem n e posto $p \leq n$, sua ED pode ser particularizada de tal maneira, que as matrizes Z e W obtidas sejam quadradas de ordem n e regulares. Sob o pon-

to de vista das transformações lineares, uma tal ED pode ser interpretada como uma transformação de equivalência, onde $\text{diag} \{ \alpha_i \}$ é uma matriz diagonal equivalente de A e Z e W são as matrizes de transformação. A teoria matricial demonstra que a condição necessária e suficiente para que duas matrizes de mesma ordem sejam equivalentes é que elas tenham o mesmo posto. Donde se conclui que $r(A) = r(\text{diag} \{ \alpha_i \}) = p$.

A determinação deste tipo particular de ED no caso de $p < n$ pode ser feita da seguinte maneira:

Escolhe-se ao acaso uma matriz $\text{diag} \{ \alpha_i \}$ onde: $\alpha_i \neq 0$ para $(1 \leq i \leq p)$ e $\alpha_i = 0$ para $(p < i \leq n)$. Ao acaso escolhe-se também uma matriz Z quadrada de ordem n e regular. Obviamente fica faltando a determinação de W para que a matriz A dada possa ser expressa pelo triplo produto matricial $Z \text{diag} \{ \alpha_i \} W$.

Fazendo-se:

$$B = Z \text{diag} \{ \alpha_i \} \quad (17)$$

então:

$$A = BW \quad (18)$$

A matriz B possui as $n - p$ últimas colunas nulas, indicando que as $n - p$ últimas filas de W podem ser quaisquer, desde que W seja regular. Isto sugere o seguinte particionamento de B e W:

$$A = \begin{bmatrix} B' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W' \\ W'' \end{bmatrix} = B'W'' \quad (19)$$

Onde B' é a parte não nula de B e W'' é a parte de W que pode ser qualquer, desde que W seja regular. O problema se reduz à

determinação de W' , que pode ser feita como:

$$W' = B'_e A \quad (20)$$

onde B'_e é a inversa à esquerda de B' .

Se em vez de escolher ao acaso a matriz Z , escolhe-se W ; Z pode ser determinada de modo análogo, ou seja:

$$C = \text{diag} \left\{ \alpha_i \right\} W \quad (21)$$

$$A = ZC \quad (22)$$

Particionando-se Z e C como:

$$A = \begin{bmatrix} Z' & Z'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C' \\ 0 \end{bmatrix} = Z' C' \quad (23)$$

onde C' é a parte não nula de C e Z'' é a parte de Z , que pode ser qualquer, desde que Z seja regular. Z' é a parte a ser determinada e que pode ser feita como:

$$Z' = AC'_d \quad (24)$$

onde C'_d é a inversa à direita de C' .

A condição necessária para a existência de B'_e (inversa à esquerda de B') e C'_d (inversa à direita de C') é $r(B') = r(C') = p$ (§). Condição esta satisfeita na formulação acima.

Escolhendo-se ao acaso duas matrizes: \hat{B} de ordem $(n-p) \times n$ e \hat{C} de ordem $n \times (n-p)$, tal que $\hat{B}B' = X$ e $C'\hat{C} = Y$ resultem quadra-

(§) Para uma discussão detalhada do assunto consultar por exemplo [F2].

das de ordem $n-p$ e regulares, B'_e e C'_d são determinadas como:

$$B'_e = X^{-1}B \quad (25)$$

$$C'_d = CY^{-1} \quad (26)$$

No caso de $p=n$, a matriz W é obtida de (18) como:

$$W = B^{-1}A \quad (27)$$

e Z é obtida de (22) como:

$$Z = AC^{-1} \quad (28)$$

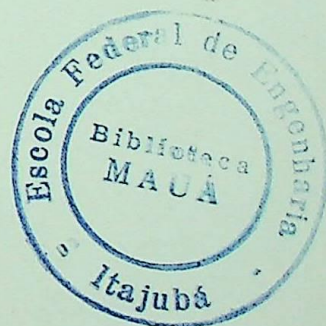
BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

- [A] AYRES, F.: "Teoria e Problemas de Matrizes"; Série de Compêndios Schaum, MacGraw-Hill, 1969.
- [B-M] BIRKHOFF, G. & MACLANE, S.: "Álgebra Moderna Básica"; Guanabara, 1980.
- [F1] FEINSTEIN, J.: "Teoria dos Sistemas de Controle: Enfoque por Variáveis de Estado"; Editora Campus/EFEI, 1979.
- [F2] "Inversas Matriciais Esquerdas"; EFEI Pesquisa, Vol. V, nº 2, 3 e 4, 1980.
- [F-F-C] FREGOSI, A. E. & FEINSTEIN, J. & CALDEIRA, L.: "Enfoque Clássico da Teoria de Controle", Editora Campus, 1979.
- [E-O] EDWARDS, J. B. & OWENS, D. H.: "1st-Order-Type Models for Multivariable Process Control"; Proc. IEE, 124(11): 1083-1088, NOV, 1977.
- [G] GANTMACHER, F. R.: "The Theory of Matrices", Chelsea, 1960.
- [H-K] HOFFMAN, K & KUNZE, R.: "Álgebra Linear"; Prentice Hall Internacional, España, 1973.
- [K] KREISSELMEIER, G.: "On the Determination of the Jordan Form of a Matrix"; IEEE Trans. on Automatic Control, 18(6): 686-687, DEC, 1973.

- [K-M] KOUVARITAKIS, B. & MACFARLANE, A. G. J.: "Geometric Method for Computing Zeros of Square Matrix Transfer Functions"; Control and Management Systems Division, University Engineering Department, Mill Lane, Cambridge.
- [L1] LAURENT, R. A.: "Um Algoritmo Rápido para o Traçado do Lugar das Raízes pelo Método da Continuação"; Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá, FEV, 1982.
- [L2] LAYTON, J. M.: "Multivariable Control Frequency"; Peter Peregrinus, 1976.
- [L3] LUENBERGER, D. G.: "Canonical Forms for Linear Multivariable Systems"; IEEE Trans. on Automatic Control, 12(3): 290-293, JUN, 1967.
- [M1] MACFARLANE, A. G. J.: "Return-Difference and Return-Ratio Matrices and Their Use in Analysis and Design of Multivariable Feedback Control Theory"; Proc. IEE, 117(10): 2037-2049, OCT, 1970.
- [M2] "Relationships Between Recent Developments in Linear Control Theory and Classical Design Techniques"; Part 1, Measurement and Control, 8: 179-187, MAY, 1975.
- [M3] "Frequency-Response Methods in Control Systems"; IEEE PRESS, John Wiley & Sons, 1979.

- [M-W] MORSE, A. S. & WONHAM, W. M.: "Status of Noninteracting Control"; IEEE Tras. on Automatic Control, 16(6): 568-581, DEC, 1971.
-
- [01] OWENS, D. H.: "Multivariable-Control-System Design Concepts in Failure Analysis of a Class of Nuclear-Reactor Spatial-Control System"; Proc. IEE, 120(1): 119-125, JAN, 1973.
-
- [02] "Dyadic Approximation Method for Multivariable Control-Systems Analysis with a Nuclear-Reactor Application"; Proc. IEE, 120(7): 801-809, JUL, 1973.
-
- [03] "Dyadic Expansion for the Analysis of Linear Multivariable Systems"; Proc. IEE, 121(7): 713-716, JUL, 1974.
-
- [04] "Dyadic Expansion, Characteristic Loci and Multivariable-Control-System Design"; Proc. IEE, 122(3): 315-320, MAR, 1975.
-
- [05] "First and Second-Order-Like Structures in Linear Multivariable-Control-Systems Design"; Proc. IEE, 122(9): 935-941, SEP, 1975.
-
- [06] "Feedback and Multivariable Systems"; Peter Peregrinus, 1978.
-
- [R1] ROSENBROCK, H. H.: "State-Space and Multivariable Theory"; Nelson, 1970.

- [R2] "The Zeros of a System"; *Int. J. Control*, 18(2): 297-299, 1973.
- [R3] "Computer-Aided Control System Design"; Academic Press, Londres, 1974.
- [R-R] RAMASWAMI, B. & RAMAR, K.: "Transformation to the Phase-Variable Canonical Form"; *IEEE Trans. on Automatic Control*, 13(6): 746-747, DEC, 1968.
- [R-S] ROSENBROCK, H. H. & STOREY, C.: "Mathematics of Dynamical Systems"; John Wiley, 1970.
- [W] WOLOVICH, W. A.: "Linear Multivariable Systems"; Springer-Verlag, 1974.
- [Z-D] ZADEH, L. A. & DESOER, C. A.: "Linear System Theory: the State Space Approach"; McGraw-Hill, 1963.



EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200334



NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA