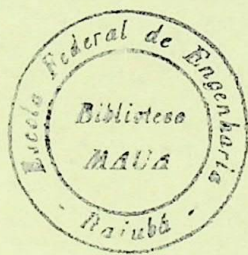


TESE

373



CLASS. 532.5:517.9(043.2)

CUIT. Cy 521a

TOMBO 373



Ministério da Educação e Cultura
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

A N E X O I I

FOLHA DE JULGAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA

Título da Dissertação: "APLICAÇÃO DOS MÉTODOS VARIACIONAIS À TEORIA
DO ESCOAMENTO DE FLUÍDOS"

Autor: ROBERTO DA MOTA GIRARDI

JULGAMENTO

EXAMINADORES	CONCEITO	RUBRICA
1º	A	Sau
2º	A+	
3º	A+	Rsen
4º	A+	JT Sielawa

Resultado médio: Conceito A, ou seja aprovado

Observações: _____

Itajubá, 15 de julho de 1983.

Santiago Alves Tavares

1º Examinador
Dr. Santiago Alves Tavares

Genésio José Menon

2º Examinador
Prof. Genésio José Menon
EFEI

Tapan Kumar Sen

3º Examinador
Prof. Tapan Kumar Sen
EFEI

Jerzy Tadeus Sielawa

4º Examinador
Prof. Jerzy Tadeus Sielawa
ORIENTADOR

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

APLICAÇÃO DOS MÉTODOS VARIACIONAIS À TEORIA DO
ESCOAMENTO DE FLUIDOS

Roberto da Mota Girardi

ORIENTADOR: Jerzy Tadeusz Sielawa

CO-ORIENTADOR: Genésio José Menon

ITAJUBÁ - 1983

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Jerry Tedesco Szelc por mostrar-me como raciocinar de forma lógica e científica e pela valiosa orientação deste trabalho.

Ao Professor Genário José Menon por seu apoio e constante paciência.

Aos Professores Tapas Kumar Sen e Nelson Maurício por o auxílio dado no início deste trabalho.

Sinceramente

Roberto de Matta Girardi

Dedico este trabalho aos meus
pais Carlos e Maria Helena e
a minha esposa Cláudia.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Jerzy Tadeusz Sielawa por mostrar-me como raciocinar de forma lógica e científica e pela valiosa orientação deste trabalho.

Ao Professor Genésio José Menon por seu apoio e constante estímulo.

Aos Professores Tapan Kumar Sen e Nelson Manzanares Filho pelo auxílio dado no início deste trabalho.

Sinceramente

Roberto da Mota Girardi

R E S U M O

Neste trabalho, são apresentados vários princípios variacionais aplicados no estudo da mecânica dos fluidos. A exposição está dividida em duas partes, sendo a primeira dedicada a análise de escoamentos de fluido ideal e a segunda a de fluido viscoso.

Verifica-se que qualquer escoamento de fluido ideal pode ser analisado com a utilização do formalismo variacional, porém, quando os fluidos viscosos (newtonianos ou não-newtonianos) são considerados, constata-se que somente alguns tipos de escoamentos de fluido incompressível são representados por princípios variacionais.

Para o escoamento em regime permanente de um fluido newtoniano e compressível, foi proposto neste trabalho um princípio variacional útil na obtenção de soluções aproximadas para os campos de velocidade, densidade e pressão.

LISTA DE SÍMBOLOS

CARACTERES LÁTINOS

A B S T R A C T

Some variational principles applied to fluid mechanics are presented in this work. The exposition is divided in two parts, the first dedicated to ideal fluid flow and the second to viscous fluid.

It was verified that any ideal fluid flow can be analysed with variational formalism, but, when viscous fluids (newtonian or non-newtonian) are considered, it was determined that only some types of incompressible fluid flow may be represented by variational principles in the sense adapted in the text.

For compressible and newtonian steady fluid flow, a variational principle was proposed in this work, useful in finding an approximated solutions to the velocity, density and pressure fields.

LISTA DE SÍMBOLOS

CARACTERES LATINOS

\vec{a}	coordenadas iniciais no sistema euleriano [eq.(2.112)]
a	componente do vetor \vec{a} [eq.(2.113)]
B	funcional de Bird [eq.(3.63)]
C	velocidade do som [eq.(2.57a) e (2.66)]
\vec{D}	diádica de razões de deformações
d'_{ij}	componentes da diádica \vec{D}
E	energia interna [eq.(2.80)]
E_c	energia cinética de um sistema
E_p	energia potencial de um sistema
e	energia interna específica
F	referente ao integrando de um funcional [eq.(2.111)]
\vec{f}_c	força de volume por unidade de massa
H	densidade do fluxo de massa [eq.(2.1)]
h	entalpia específica
\vec{I}	diádica unitária
I	representa o funcional (2.62)
J	nome dado à um funcional
K	constante
m	parâmetro característico de um fluido [eq.(3.59)]
\vec{n}	versor normal ao elemento de superfície ds
n	parâmetro característico de um fluido [eq.(3.59)]
p	pressão do fluido
P_d	potência dissipada
\vec{q}_s	vetor fluxo de calor

q_v	calor por unidade de massa devido à fontes internas
S	superfície que contorna o volume V
s	entropia específica
T	temperatura absoluta
t	tempo
\vec{v}	vetor campo de velocidades
v_1	componente cartesiana de \vec{v} na direção x_1
v_2	componente cartesiana de \vec{v} na direção x_2
v_3	componente cartesiana de \vec{v} na direção x_3
V	volume onde se considera o escoamento

CARACTERES GREGOS

$\vec{\alpha}$	multiplicador de Lagrange
α	parâmetro das famílias monoparamétricas [eq.(2.19)] , [eq.(2.47a,b)]
α_1	componente cartesiana de $\vec{\alpha}$ na direção x_1
α_2	componente cartesiana de $\vec{\alpha}$ na direção x_2
β	multiplicador de Lagrange
γ	multiplicador de Lagrange
Ω	multiplicador de Lagrange
$\vec{\omega}$	vorticidade [eq.(2.100)]
μ	coeficiente de viscosidade dinâmica
λ	segundo coeficiente de viscosidade
ρ	densidade do fluido
\vec{T}	diádica de tensões
$\vec{\tau}$	diádica de tensões viscosas
τ_{ij}	elementos da diádica $\vec{\tau}$

- ϕ função dissipação
- ψ potencial das forças de volume

OPERADORES

∇ operador nabla

∇^2 Laplaciano ($\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$)

$\frac{D}{Dt}$ derivada substancial [eq.(1.2)]

δ indica a primeira variação de um funcional

CAPÍTULO 2 - PRINCÍPIOS VARIACIONAIS PARA FLUIDO IDEAL ... 7

2.1 - Princípio Variacional de Bernoulli ... 7

2.2 - Princípio Variacional de Helmholtz ... 14

2.3 - Princípio Variacional de Helmholtz-Kelvin ... 21

2.4 - Princípio Variacional de Kelvin ... 28

2.5 - Princípio Variacional de Kelvin-Helmholtz ... 33

2.6 - Princípio Variacional de Kelvin-Helmholtz ... 33

CAPÍTULO 3 - PRINCÍPIOS VARIACIONAIS PARA FLUIDO VISCOSO ... 37

3.1 - Teorema de Helmholtz ... 37

3.2 - Princípio Variacional de Helmholtz ... 43

3.3 - Princípio Variacional de Brill ... 49

3.4 - Questão de existência de um funcional para a equação de Navier-Stokes ... 59

3.5 - Princípio Variacional de Bird ... 63

3.6 - Princípio Variacional para escoamento de fluido compressível com as forças de volume e os termos de inércia desprezados ... 67

3.7 - Princípio Variacional para escoamento de fluido compressível com os termos de inércia desprezados ... 84

Í N D I C E

	pag.
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Equações Básicas	4
CAPÍTULO 2 - PRINCÍPIOS VARIACIONAIS PARA FLUIDO IDEAL ..	9
2.1 - Princípio Variacional de Kelvin	9
2.2 - Princípio Variacional de Dirichlet	13
2.3 - Princípio Variacional de Bateman	16
2.4 - Princípio Variacional de Bateman-Kelvin ..	21
2.5 - Princípio Variacional de Herivel	25
2.6 - Princípio Variacional de Herivel-Lin	33
CAPÍTULO 3 - PRINCÍPIOS VARIACIONAIS PARA FLUIDO VISCOSO.	37
3.1 - Teorema de Helmholtz	37
3.2 - Princípio Variacional de Helmholtz	41
3.3 - Princípio Variacional de Brill	45
3.4 - Quanto a existência de um funcional pa ra a equação de Navier-Stokes	50
3.5 - Princípio Variacional de Bird	53
3.6 - Princípio Variacional para escoamento de fluido compressível com as forças de volume e os termos de inércia despreza dos	57
3.7 - Princípio Variacional para escoamento de fluido compressível com os termos de inércia desprezados	64

3.8 - Princípio Variacional para escoamento de fluido compressível em regime permanente	67
CAPÍTULO 4 - COMENTÁRIOS E SUGESTÕES	72
APÊNDICE A - GENERALIDADES SOBRE CÁLCULO VARIACIONAL	76
A.1 - Introdução	76
A.2 - Problema mais Simples do Cálculo Variacional	77
A.3 - Funcionais que dependem de várias funções	81
A.4 - Funcionais que dependem das derivadas de ordem superior da função $y(x)$	81
A.5 - Funcionais que dependem de várias funções e de suas derivadas de ordem superior	82
A.6 - Funcionais que dependem de uma função de várias variáveis independentes	82
A.7 - Funcionais que dependem de várias funções, as quais dependem de várias variáveis independentes	83
A.8 - Funcionais que dependem de funções de duas variáveis independentes e de suas derivadas de primeira e segunda ordem	84
A.9 - Funcionais que dependem de funções, as quais estão relacionadas entre si por meio de vínculos	85
APÊNDICE B - APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DA DISSIPACÃO MÍNIMA PARA O ESCOAMENTO NO INTERIOR DE TUBO ...	89

APÊNDICE C - APLICAÇÃO DO CONCEITO DA DISSIPACÃO MÍNIMA NA ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS 94

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 97

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

Um sistema físico possui uma descrição variacional se as equações e as condições iniciais e de contorno, que descrevem o sistema, são obtidas quando a variação de um funcional especificado for igual a zero. Para que a descrição variacional seja completa, devemos especificar (i) as funções, com respeito as quais a variação do funcional é feita e (ii) as condições auxiliares, que devem ser satisfeitas como vínculos, quando a variação é feita. O funcional, cuja variação torna-se igual a zero, é dito ser estacionário relativo as funções com respeito as quais a variação foi feita e aos vínculos que foram impostos. Formulações variacionais, como a descrita acima, são comumente chamadas de princípios variacionais, embora raramente sejam as bases últimas, mas apenas uma outra maneira de descrever um sistema físico.

Princípios variacionais tem um lugar importante no desenvolvimento de muitos campos da física, tendo como exemplos mais notáveis a mecânica (clássica e quântica) e a termodinâmica. É bem conhecido que problemas em mecânica das partículas podem ser expressos em forma variacional pelo princípio de Hamilton, assim como pelas equações do movimento de Newton. Análises de sistemas físicos complicados são frequentemente simplificadas, quando utilizamos os conceitos de energia (princípio de Hamilton) ao invés das equações do movimento de Newton.

A formulação variacional conduz ao chamado método variacional, útil para a obtenção de soluções aproximadas das funções que caracterizam o sistema físico que se está analisando. O método consiste na suposição que tais funções são representadas por séries de funções conhecidas, as quais tem como coeficientes parâmetros ajustáveis. As funções, representadas pelas séries acima, são substituídas no funcional do princípio variacional, que por sua vez é variado com relação aos parâmetros ajustáveis. Desta variação obtêm-se um sistema de equações algébricas, que solucionado fornece os coeficientes da série proposta.

A obtenção de soluções aproximadas também pode ser feita através de outros métodos numéricos, como por exemplo

o método dos resíduos ponderados, o método de Galerkin e outros [11]. Estes métodos não dependem explicitamente da existência de princípios variacionais, que descrevem o sistema que desejamos estudar, podendo ser aplicados para qualquer problema.

Para o caso de problemas, que sejam descritos por princípios variacionais, o método variacional possui algumas vantagens sobre os demais métodos numéricos, que são:

- (i) O funcional do princípio variacional pode representar uma quantidade física de grande interesse, que em alguns casos pode ser usada em vários campos da física. Além disto, se uma aproximação para tal grandeza é de interesse, então o método variacional pode fornecer uma aproximação com boa precisão.
- (ii) Quando o princípio variacional for um mínimo (ou máximo), o método variacional pode fornecer um limitante superior (ou inferior) para a quantidade física representada pelo funcional.
- (iii) Se um sistema físico é descrito pela maximização de um funcional e também pela minimização de outro funcional, então os princípios variacionais acima são chamados de recíprocos. Quando princípios variacionais recíprocos podem ser formulados, então as quantidades físicas representadas pelos funcionais possuem limitantes superior e inferior. A diferença entre estes limitantes pode dar uma idéia da precisão das soluções aproximadas, obtidas pelo método variacional.

Neste trabalho, vamos nos preocupar apenas com os princípios variacionais aplicados na mecânica dos fluidos. Apresentaremos vários princípios variacionais estabelecidos na literatura científica e ainda vamos propor um princípio variacional para o escoamento de fluidos compressíveis. Dividimos o trabalho em duas partes, sendo a primeira dedicada ao estudo dos fluidos ideais e a segunda ao estudo dos fluidos viscosos.

No caso de escoamento de fluido ideal, o primeiro princípio variacional aplicado à mecânica dos fluidos foi o princípio de Kelvin [11], que minimiza a energia cinética do

escoamento e descreve o escoamento irrotacional em regime permanente de um fluido incompressível. Tal escoamento também é descrito por outro princípio variacional, chamado de princípio de Dirichlet [30], que é recíproco ao princípio de Kelvin. Com a utilização do método variacional, podemos obter soluções aproximadas e com estas limitantes superior e inferior para a energia cinética exata do escoamento em estudo.

Bateman [1] formulou um princípio variacional que descreve o escoamento irrotacional em regime permanente de um fluido compressível, através da extremização da integral da pressão no volume onde o escoamento é considerado. Este princípio apresentou problemas nas condições de contorno, que foram resolvidos por Lush e Cherry [20] que acrescentaram uma integral de superfície ao funcional do princípio de Bateman. O princípio variacional recíproco ao anterior é conhecido como princípio de Bateman-Kelvin [30], [11]. Este minimiza a soma da pressão com o dobro da energia cinética do escoamento.

Herivel [16] em 1955 formulou um princípio variacional que obtém as equações de movimento que descrevem o escoamento rotacional em regime não permanente de um fluido compressível, através da extremização da energia cinética menos a soma das energias potencial e interna. No sistema lagrangeano, tal princípio obtém exatamente as equações do movimento, porém no sistema euleriano surgem problemas quando o escoamento possui entropia uniforme. Foi Lin [29] em 1963 que resolveu este problema.

No caso de fluido viscoso, Helmholtz [21] em 1882 provou que a dissipação viscosa é mínima quando temos escoamento em regime permanente de um fluido newtoniano e incompressível, onde os termos de inércia são desprezados. Brill [22] em 1895 obteve um princípio variacional que generaliza o princípio de Helmholtz, para escoamentos que incluem uma parte dos termos de inércia, de maneira que na equação do movimento apareça o termo $\frac{1}{2}\rho \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v})$ no lugar de $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$.

Millikan [22] em 1929 mostrou que não é possível obter-se as equações gerais que descrevem o escoamento em regime permanente de um fluido incompressível, através da extremi

zação de um funcional, que tenha como integrando uma função das componentes de velocidade e de suas derivadas primeiras. Finlayson [10] em 1972, utilizando o conceito de derivada de Fréchet, comprovou os resultados de Millikan.

Bird [3] em 1960 generalizou o princípio de Helmholtz para o caso de fluido não-newtoniano. Esta generalização pode ser estendida de maneira que parte dos termos de inércia sejam incluídos nas equações do movimento, de forma análoga ao princípio de Brill.

Johnson [18] em 1960 propôs um princípio variacional válido para uma classe mais ampla de fluidos não-newtonianos, tendo como casos particulares os princípios de Helmholtz e Bird.

Os princípios variacionais acima consideram somente fluido incompressível. Para o caso de fluido compressível, vamos mostrar que a extremização de um certo funcional [sec. 3.6] com relação as componentes do vetor velocidade é igual a zero. Utilizando este princípio variacional podemos achar soluções aproximadas das funções que caracterizam o escoamento em regime permanente de um fluido newtoniano e compressível.

A seguir apresentaremos conceitos e equações básicas que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

1.1 - Equações Básicas

Princípio de conservação da massa

Este princípio afirma que a massa de um volume, composto sempre das mesmas partículas, deve permanecer constante. Em termos matemáticos este princípio é representado pela equação da continuidade [24]

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.1)$$

onde

ρ = densidade do fluido

\vec{v} = vetor velocidade do fluido

$\frac{D}{Dt}$ = derivada substancial

esta última definida por:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \quad (1.2)$$

Utilizando (1.2) podemos modificar (1.1), obtendo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.3)$$

Considerando escoamento em regime permanente, temos

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.4)$$

Se o fluido for incompressível (1.1) torna-se igual a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.5)$$

Princípio de conservação da quantidade de movimento

Este princípio expressa o fato que a taxa de variação da quantidade de movimento de um volume, que encerra as mesmas partículas, é igual a resultante das forças externas que age no volume considerado. Este princípio é representado por [24]

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f}_c + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \quad (1.6)$$

onde

\vec{T} = diádica de tensões

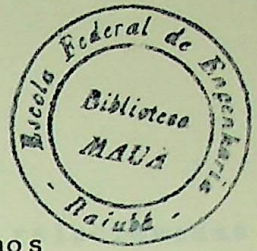
\vec{f}_c = forças de volume

A diádica de tensões pode ser expressa por [24]

$$\vec{T} = -p \vec{I} + \vec{\tau} \quad (1.7)$$

onde

- $\vec{\tau}$ = diádica de tensões viscosas
 \vec{I} = diádica unitária
 p = pressão do fluido



Substituindo (1.7) em (1.6), obtemos

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f}_c - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \quad (1.8)$$

Do cálculo vetorial pode-se mostrar a identidade

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad (1.9)$$

Substituindo (1.9) em (1.8), temos

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - \rho \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \rho \vec{f}_c - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \quad (1.10)$$

Se o fluido for ideal ($\vec{\tau} = 0$) e (1.8) fica

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f}_c - \vec{\nabla} p, \quad (1.11)$$

que é a conhecida equação de Euler.

Para escoamentos de um fluido ideal, incompressível em regime permanente, onde

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0 \quad (1.12a)$$

e

$$\vec{f}_c = \vec{\nabla} \psi \quad (1.12b)$$

verificamos que (1.10) fica igual a

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \rho \psi + p \right) = 0 \quad (1.13)$$

Logo

$$\frac{\rho}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \rho \psi + p = C \quad (1.14)$$

que é a equação de Bernoulli, onde ψ é o potencial das forças de volume e C é uma constante de integração

Princípio de conservação da Energia

As diversas formas de energia são relacionadas pela equação da energia [24]

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho q_v - \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s - p (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \phi \quad (1.15)$$

onde

e = energia interna específica

q_v = geração de calor devido a fontes internas $\left[\frac{\text{calor}}{\text{massa}} \right]$

\vec{q}_s = vetor fluxo de calor que atravessa uma superfície $\left[\frac{\text{calor}}{\text{area}} \right]$

$p (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ = trabalho de compressão por unidade de volume e tempo

ϕ = função dissipação, definida por

$$\phi = \vec{\tau}^T : \vec{\nabla} \vec{v} \quad (1.16)$$

sendo $\vec{\tau}^T$ o tensor transposto ao tensor de tensões viscosas ($\vec{\tau}$)

Definindo entalpia específica por

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (1.17)$$

pode-se verificar [24], que

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (1.18)$$

Substituindo (1.18) em (1.15), temos

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho q_v - \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s + \frac{Dp}{Dt} + \phi \quad (1.19)$$

Admitindo que a geração de calor devido a fontes internas (q_v) e que o vetor fluxo de calor (\vec{q}_s) são nulos, (1.15) fica

$$\rho \frac{De}{Dt} = - p (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \phi \quad (1.20)$$

Se considerarmos fluido ideal ($\phi = 0$), então

$$\rho \frac{De}{Dt} = - p (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (1.21)$$

Relação entre tensões e deformações

Para fluido newtoniano, isotrópico e meio não polar [5], tem-se

$$\vec{\tau} = 2 \mu \vec{D} + \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{I} \quad (1.22)$$

onde

μ = coeficiente de viscosidade dinâmica

λ = segundo coeficiente de viscosidade

\vec{I} = diádica unitária

\vec{D} = diádica de razões de deformação, com componentes (d_{ij})

definidos no sistema cartesiano por $d_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right]$

Substituindo (1.22) em (1.8), obtemos as conhecidas equações de Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f}_c - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (1.23)$$

Se o fluido for incompressível (1.23) fica

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f}_c - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (1.24)$$

CAPÍTULO 2 - PRINCÍPIOS VARIACIONAIS PARA FLUIDO IDEAL

Neste capítulo apresentaremos princípios variacionais para fluidos não viscosos. Vamos estudar escoamentos irrotacionais, em regime permanente, para fluidos incompressíveis e compressíveis. Em seguida, analisaremos um princípio variacional para o escoamento de um fluido compressível em regime não permanente.

2.1 - Princípio Variacional de Kelvin

O primeiro princípio variacional aplicado à teoria da mecânica dos fluidos foi o princípio de Kelvin (Thompson, 1849) [11]. Este princípio pode ser enunciado da seguinte maneira:

Para escoamentos em regime permanente, de um fluido incompressível, onde a densidade do fluxo de massa (H)

$$H = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \quad (2.1)$$

é especificado na fronteira (S) do volume (V) onde consideramos o escoamento, a energia cinética é minimizada quando o escoamento é irrotacional.

Para mostrar o princípio variacional acima, vamos minimizar a energia cinética [11]

$$E_C [\vec{v}] = \int_V \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \, dv, \quad (2.2)$$

sabendo que qualquer campo de velocidade deve obedecer necessariamente a equação da continuidade para fluido incompressível [eq. (1.5)]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.3)$$

O problema variacional da minimização do funcional (2.2) sujeito ao vínculo (2.3) será resolvido com a utilização da técnica dos multiplicadores de Lagrange. Seguindo o procedimento mostrado no apêndice A, montamos um novo funcional

$$E_C^* = \int_V \left[\frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} + \Omega \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right] dv \quad (2.4)$$

onde Ω é o multiplicador de Lagrange.

Considerando um sistema de coordenadas cartesianas, (2.4) fica:

$$E_C^* = \int_V \left[\frac{1}{2} \rho (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \Omega \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \right] dv \quad (2.5)$$

Como a densidade do fluxo de massa (H) é especificado e fixo na fronteira de V , verificamos que $\delta H = 0$ e portanto, devido à equação (2.1), $\delta v = 0$ na superfície de contorno S . Desta forma, as funções v_1 , v_2 , v_3 e Ω que extremizam o funcional (2.5) são as soluções do sistema de equações de Euler-Lagrange [ver apêndice A]

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{1,1}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{1,2}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{1,3}} \right] = 0 \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{2,1}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{2,2}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{2,3}} \right] = 0 \quad (2.6b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_3} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{3,1}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{3,2}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{3,3}} \right] = 0 \quad (2.6c)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial \Omega, 1} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \Omega, 2} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial F}{\partial \Omega, 3} \right] = 0 \quad (2.6d)$$

onde F é o integrando do funcional (2.5) e

$$v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \Omega_{,j} = \frac{\partial \Omega}{\partial x_j}$$

Desenvolvendo o sistema (2.6 a, b, c, d), temos respectivamente

$$\rho v_1 - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 0 \quad (2.7a)$$

$$\rho v_2 - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = 0 \quad (2.7b)$$

$$\rho v_3 - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} = 0 \quad (2.7c)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (2.7d)$$

Colocando o sistema (2.7) na forma invariante, obtemos

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \Omega \quad (2.8a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.8b)$$

Sabemos que a equação (2.8a) é válida somente para escoamento irrotacional. Com isto, verificamos que este tipo de escoamento torna a energia cinética um extremo.

Para verificar se este extremo é um máximo ou mínimo [11], vamos admitir um outro campo de velocidade

$$\vec{v}^* = \vec{v} + \vec{v}_0, \quad (2.9)$$

constituído do campo \vec{v} definido por (2.8a) e por um outro cam

po \vec{v}_0 , que satisfaz $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 = 0$ e $\vec{n} \cdot \vec{v}_0 = 0$ na fronteira S do volume V.

Substituindo (2.8a) em (2.9), obtemos

$$\vec{v}^* = \vec{\nabla} \Omega + \vec{v}_0 \quad (2.10)$$

Com a substituição de (2.10) em (2.2), verificamos que

$$E_c(\vec{v}^*) = \int_V \frac{1}{2} \rho (\vec{\nabla} \Omega + \vec{v}_0) \cdot (\vec{\nabla} \Omega + \vec{v}_0) dv \quad (2.11)$$

Desenvolvendo (2.11), obtemos

$$E_c(\vec{v}^*) = \int_V \frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla} \Omega dv + \int_V \rho \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{v}_0 dv + \int_V \frac{1}{2} \rho \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 dv \quad (2.12)$$

Sabemos que

$$\int_V \rho \vec{\nabla} \cdot (\Omega \vec{v}_0) dv = \int_V \rho \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{v}_0 dv + \int_V \rho \Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 dv \quad (2.13)$$

Aplicando o teorema do divergente [21] na integral do lado esquerdo da igualdade (2.13), temos

$$\int_V \rho \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{v}_0 dv = \oint_S \rho \Omega \vec{v}_0 \cdot \vec{n} ds - \int_V \rho \Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 dv \quad (2.14)$$

Das condições impostas ao vetor \vec{v}_0 , verificamos de (2.14) que

$$\int_V \rho \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{v}_0 dv = 0 \quad (2.15)$$

Substituindo (2.15) em (2.12), temos

$$E_c(\vec{v}^*) = E_c(\vec{\nabla} \Omega) + E_c(\vec{v}_0) \quad (2.16)$$

Como $E_c(\vec{v}_0)$ é uma grandeza sempre positiva, a não ser que $\vec{v}_0 = 0$, concluímos que o escoamento irrotacional torna a energia cinética um mínimo.

2.2 - Princípio Variacional de Dirichlet

O princípio da energia cinética mínima de Kelvin possui um princípio variacional recíproco que, segundo Serrin [30], não é nada mais que uma reformulação do princípio de Dirichlet da teoria potencial. Nesta seção vamos mostrar este princípio variacional recíproco, sendo que o mesmo pode ser enunciado da seguinte maneira [30], [11]:

Entre todos os movimentos irrotacionais no volume V [eq. (2.8a)], aquele que maximiza o funcional

$$J[\vec{v}] = - \int_V \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \, dv + \oint_S \Omega H \, ds \quad (2.17)$$

satisfaz a continuidade para fluido incompressível [eq. (2.3)] e tem a densidade do fluxo de massa (H) especificado e fixo na fronteira S [eq. (2.1)].

Para mostrar o princípio variacional acima, vamos substituir (2.8a) em (2.17), obtendo

$$J[\Omega] = - \int_V \frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla} \Omega \, dv + \oint_S \Omega H \, ds \quad (2.18)$$

A obtenção da função Ω , que extremiza o funcional (2.18), é feita seguindo-se o procedimento mostrado na seção A-2 do apêndice A. Inicialmente vamos construir uma família mono-paramétrica de curvas.

$$\Omega^* = \Omega + \alpha \delta \Omega \quad (2.19)$$

onde α é um parâmetro que fixa uma das curvas que pertencem a família (2.19). É fácil ver que para $\alpha = 0$ temos que $\Omega^* = \Omega$, que é a curva que extremiza o funcional (2.18).

Substituindo Ω^* , definido por (2.19), no funcional (2.18) no lugar de Ω , obtemos

$$J [\Omega + \alpha \delta \Omega] = - \int_{\mathbf{v}} \frac{1}{2} \rho \vec{\nabla}(\Omega + \alpha \delta \Omega) \cdot \vec{\nabla}(\Omega + \alpha \delta \Omega) dv + \oint_{\mathbf{s}} (\Omega + \alpha \delta \Omega) H ds \quad (2.20)$$

Desenvolvendo (2.20), temos

$$J = - \int_{\mathbf{v}} \frac{1}{2} \rho \left[\vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla} \Omega + 2\alpha \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla}(\delta \Omega) + \alpha^2 \vec{\nabla}(\delta \Omega) \cdot \vec{\nabla}(\delta \Omega) \right] dv + \oint_{\mathbf{s}} (\Omega + \alpha \delta \Omega) H ds \quad (2.21)$$

Considerando a Nota 3 do apêndice A, verificamos que (2.21) é uma função do parâmetro α , a qual alcança um extremo para $\alpha = 0$, pois admitimos que Ω é a função que extremiza o funcional (2.18). Desta forma, a função (2.21) alcança um extremo quando

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad (2.22)$$

onde J é a função (2.21). Desenvolvendo (2.22), obtemos

$$- \int_{\mathbf{v}} \rho \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla}(\delta \Omega) dv + \oint_{\mathbf{s}} \delta \Omega H ds = 0 \quad (2.23)$$

Sabemos que

$$\int_{\mathbf{v}} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla} \Omega \delta \Omega) dv = \int_{\mathbf{v}} \rho \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla}(\delta \Omega) dv + \int_{\mathbf{v}} \rho \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Omega) \delta \Omega dv \quad (2.24)$$

Aplicando o teorema do divergente [21], para a integral do lado esquerdo da igualdade (2.24), verificamos que

$$\int_{\mathbf{v}} \rho \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla}(\delta \Omega) dv = \oint_{\mathbf{s}} \rho \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{n} \delta \Omega ds - \int_{\mathbf{v}} \rho \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Omega) \delta \Omega dv \quad (2.25)$$

Substituindo (2.25) em (2.23), obtemos

$$\int_{\mathbf{v}} \rho \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Omega) \delta \Omega dv + \oint_{\mathbf{s}} (H - \rho \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{n}) \delta \Omega ds = 0 \quad (2.26)$$

Substituindo (2.8a) em (2.26), resulta

$$\int_{\mathbf{v}} \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \delta \Omega dv + \oint_{\mathbf{s}} (H - \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \delta \Omega ds = 0 \quad (2.27)$$

Considerando a Nota 4 do apêndice A, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{no volume } V \quad (2.28a)$$

e

$$H = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \quad \text{na superfície } S \quad (2.28b)$$

Com isto, mostramos o princípio variacional de Dirichlet, pois as equações (2.28a) e (2.28b) são idênticas as equações (2.3) e (2.1) respectivamente. Pode ser mostrado [11] que o funcional (2.17) é um máximo.

O sistema de equações (2.1), (2.3) e (2.8a) é obtido através da minimização da energia cinética [eq.(2.2)] (princípio de Kelvin) e da maximização do funcional (2.17) (princípio de Dirichlet). Desta forma, os princípios variacionais acima podem fornecer limitantes superior e inferior à energia cinética, tal que

$$J[\vec{v}'] \leq \int_V \frac{1}{2} \rho \vec{v}' \cdot \vec{v}' \, dv \leq E_c[\vec{v}']$$

onde $J[\vec{v}']$ é definido pela equação (2.17), \vec{v}' é uma solução aproximada para o campo de velocidades e \vec{v} é a solução exata do sistema (2.1), (2.3) e (2.8a). As igualdades na expressão acima são obtidas quando $\vec{v}' = \vec{v}$, de modo que

$$J[\vec{v}] = \int_V \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \, dv = E_c[\vec{v}] \quad (2.29)$$

A expressão (2.29) pode ser mostrada [30], da seguinte maneira:

Substituindo (2.1) em (2.17), obtemos

$$J[\vec{v}] = - \int_V \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \, dv + \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds \quad (2.30)$$

Aplicando o teorema do divergente [21], à integral de superfície da equação (2.30), resulta

$$J[\vec{v}] = - \int_V \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \, dv + \int_V \vec{\nabla} \cdot (\Omega \rho \vec{v}) \, dv \quad (2.31)$$

Desenvolvendo (2.31), temos

$$J[\vec{v}] = - \int_V \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \, dv + \int_V \rho \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{v} \, dv + \int_V \rho \Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \, dv \quad (2.32)$$

Substituindo (2.3) e (2.8a) em (2.32), verificamos que

$$J[\vec{v}] = \int_V \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \, dv \quad (2.33)$$

Das equações (2.2) e (2.33) chegamos à (2.29).

2.3 - Princípio Variacional de Bateman

Nesta seção vamos estudar um princípio variacional para o caso de escoamento irrotacional em regime permanente de um fluido ideal e compressível.

Consideremos inicialmente a equação de Euler [eq. (1.11)] para o escoamento irrotacional em regime permanente

$$\frac{\rho}{2} \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \rho \vec{f}_c - \vec{\nabla} p \quad (2.34)$$

Dividindo (2.34) por ρ e considerando que as forças de volume são conservativas, temos

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \vec{\nabla} \psi - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (2.35)$$

sendo que $\vec{f}_c = \vec{\nabla} \psi$.

Sabemos que

$$\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \frac{p}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \quad (2.36)$$

De (2.36) e (2.35), obtemos que

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \psi + \frac{p}{\rho} \right) = - \frac{p}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \quad (2.37)$$

Multiplicando (2.37) escalarmente por \vec{v} , resulta

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \psi + \frac{p}{\rho} \right) = - \frac{p}{\rho} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad (2.38)$$

Fazendo a hipótese adicional que o escoamento é isentrópico, verificamos que a equação da energia [eq.(1.21)] em regime permanente, fica

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} e = - p \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \quad (2.39)$$

onde "e" é a energia interna específica, sendo que neste caso $e = e(\rho)$.

Dividindo (2.39) por ρ e somando com (2.38), temos

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \psi + e + \frac{p}{\rho} \right) = - \frac{p}{\rho} (\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho) \quad (2.40)$$

Devido a continuidade para fluido compressível [eq.(1.4)], obtemos de (2.40) que

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \psi + e + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (2.41)$$

A menos que $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \psi + e + \frac{p}{\rho} \right)$, obtemos de (2.41) que

$$\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + e + \frac{p}{\rho} = C \quad (2.42a)$$

ou

$$\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + h = C \quad (2.42b)$$

onde C é uma constante de integração, h é a entalpia específica definida em (1.17) e admitimos que $\psi = 0$.

Bateman [1] em 1929 foi o primeiro a formular um princípio variacional para o escoamento irrotacional, em regime permanente, de um fluido compressível. Este princípio pode ser enunciado da seguinte maneira [30]:

Entre todos os campos de velocidade que obedecem as equações (2.8a) e (2.42a), abaixo relacionadas

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\Omega \quad (2.43a)$$

$$\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + e + \frac{p}{\rho} = C, \quad (2.43b)$$

aquele que maximiza o funcional

$$J[\vec{v}] = \int_V p dv + \oint_S \Omega H ds, \quad (2.44)$$

satisfaz a continuidade [eq.(1.4)] e tem a densidade do fluxo de massa (H) especificado e fixo na fronteira (S) do volume (V) [eq.(2.1)].

No problema variacional acima desejamos achar qual a função Ω , que extremiza o funcional (2.44) sujeito aos vínculos (2.43a) e (2.43b). Substituindo (2.43a) em (2.43b), obtemos

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla}\Omega \cdot \vec{\nabla}\Omega + e + \frac{p}{\rho} = C \quad (2.45)$$

Desta forma, o problema acima se reduz à extremização do funcional (2.44) sujeito ao vínculo (2.45), o qual resolveremos com a utilização da técnica dos multiplicadores de Lagrange. Seguindo o procedimento mostrado no apêndice A, montamos um novo funcional

$$J^*[\Omega] = \int_V \left[p + \beta \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla}\Omega \cdot \vec{\nabla}\Omega + e + \frac{p}{\rho} - C \right) \right] dv + \oint_S \Omega H ds \quad (2.46)$$

onde β é o multiplicador de Lagrange.

Os parâmetros independentes que extremizam o funcional (2.46) são Ω e ρ . Lembremos que $p = p(\rho)$ e $e = e(\rho)$, pois consideramos escoamento isentrópico.

Nota: A variação do funcional (2.46) com respeito ao multiplicador de Lagrange (β) resulta na equação (2.45).

Para obtermos as funções Ω e ρ que extremizam (2.46) vamos seguir o procedimento mostrado na seção A.2 do apêndice A. Inicialmente vamos construir as famílias monoparamétricas de curvas

$$\Omega^* = \Omega + \alpha \delta\Omega \quad (2.47a)$$

$$\rho^* = \rho + \alpha \delta\rho \quad (2.47b)$$

onde α é um parâmetro, que fixa uma curva em cada uma das famílias acima. É fácil ver que para $\alpha = 0$ temos que $\Omega^* = \Omega$ e $\rho^* = \rho$, que são as curvas que extremizam o funcional (2.46).

Se considerarmos os valores do funcional (2.46) somente nas curvas das famílias (2.47a) e (2.47b), obtemos

$$J^* = \int_V \left\{ p(\rho^*) + \beta \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Omega + \alpha \vec{\nabla} \delta \Omega) \cdot (\vec{\nabla} \Omega + \alpha \vec{\nabla} \delta \Omega) + e(\rho^*) + \frac{p(\rho^*)}{\rho^*} - C \right] \right\} dv + \int_S (\Omega + \alpha \delta \Omega) H ds \quad (2.48)$$

Considerando a Nota 3 do apêndice A, observamos que (2.48) é uma função de α , a qual alcança um extremo para $\alpha = 0$, pois admitimos anteriormente que Ω e ρ são as funções que extremizam o funcional (2.46). Com isto, a função (2.48) alcança um extremo quando

$$\left. \frac{dJ^*}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (2.49)$$

onde J^* é a função (2.48). Desenvolvendo (2.49), obtemos

$$\int_V \left\{ \frac{dp}{d\rho^*} \cdot \frac{d\rho^*}{d\alpha} + \beta \left[\vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla} \delta \Omega + \frac{de}{d\rho^*} \cdot \frac{d\rho^*}{d\alpha} + \frac{1}{\rho^*} \frac{dp}{d\rho^*} \cdot \frac{d\rho^*}{d\alpha} - \frac{p}{\rho^{*2}} \cdot \frac{d\rho^*}{d\alpha} \right] \right\} dv + \int_S \delta \Omega H ds = 0 \quad (2.50)$$

De (2.47a) e (2.47b) verificamos que $\frac{d\rho^*}{d\alpha} = \delta\rho$ e para $\alpha = 0$ temos $\Omega^* = \Omega$ e $\rho^* = \rho$. Com isto, (2.50) fica

$$\int_V \left\{ \frac{dp}{d\rho} \delta\rho + \beta \left[\vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla} \delta \Omega + \frac{de}{d\rho} \cdot \delta\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \delta\rho - \frac{p}{\rho^2} \delta\rho \right] \right\} dv + \int_S \delta \Omega H ds \quad (2.51)$$

Agrupando os termos de (2.51), obtemos

$$\int_V \left[\left(1 + \frac{\beta}{\rho} \right) \frac{dp}{d\rho} + \beta \left(\frac{de}{d\rho} - \frac{p}{\rho^2} \right) \right] \delta\rho dv + \int_V \beta \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla} \delta \Omega dv + \int_S \delta \Omega H ds = 0 \quad (2.52)$$

Sabemos que

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\beta \vec{\nabla} \Omega \delta \Omega) dv = \int_V \beta \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla} \delta \Omega dv + \int_V \vec{\nabla} \cdot (\beta \vec{\nabla} \Omega) \delta \Omega dv \quad (2.53)$$

Aplicando o teorema do divergente [21], à integral do lado esquerdo da igualdade (2.53), temos

$$\int_V \beta \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{\nabla} \delta \Omega dv = \oint_S \beta \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{n} \delta \Omega ds - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\beta \vec{\nabla} \Omega) \delta \Omega dv \quad (2.54)$$

Substituindo (2.54) em (2.52), resulta

$$\int_V \left[\left(1 + \frac{\beta}{\rho} \right) \frac{dp}{d\rho} + \beta \left(\frac{de}{d\rho} - \frac{p}{\rho^2} \right) \right] \delta \rho dv - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\beta \vec{\nabla} \Omega) \delta \Omega dv + \oint_S (\beta \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{n} + H) \delta \Omega ds = 0 \quad (2.55)$$

Considerando a Nota 4 do apêndice A, verificamos que as equações de Euler-Lagrange para o funcional (2.46) são:

$$\left(1 + \frac{\beta}{\rho} \right) \frac{dp}{d\rho} + \beta \left(\frac{de}{d\rho} - \frac{p}{\rho^2} \right) = 0 \quad (2.56a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\beta \vec{\nabla} \Omega) = 0 \quad (2.56b)$$

$$\beta \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{n} + H = 0 \quad (2.56c)$$

onde as equações (2.56a) e (2.56b) são válidas no volume V, enquanto (2.56c) é válida na superfície de contorno S.

Da termodinâmica [20], sabemos que em um processo isentrópico

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2 \quad (2.57a)$$

$$\frac{de}{d\rho} = \frac{p}{\rho^2} \quad (2.57b)$$

onde C é a velocidade do som e a energia interna específica (e) é uma função de ρ .

Substituindo (2.57a) e (2.57b) em (2.56a), obtemos

$$\left(1 + \frac{\beta}{\rho} \right) C^2 = 0 \quad (2.58)$$

De (2.58) verificamos que, a menos que $C = 0$, temos

$$\beta = -\rho \quad (2.59)$$

Substituindo (2.59) em (2.56b) e (2.56c), temos respectivamente

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla} \Omega) = 0 \quad \text{em } V \quad (2.60a)$$

$$H = \rho \vec{\nabla} \Omega \cdot \vec{n} \quad \text{sobre } S \quad (2.60b)$$

Substituindo (2.43a) em (2.60a) e (2.60b), resulta

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{em } V \quad (2.61a)$$

$$H = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \quad \text{sobre } S \quad (2.61b)$$

Com isto, verificamos que a extremização do funcional (2.44) sujeito aos vínculos (2.43a) e (2.43b), nos fornece as equações (2.61a) e (2.61b), sendo este o princípio variacional de Bateman enunciado no início desta seção.

Na referência [11] é mostrado que, quando o escoamento é subsônico ($\vec{v} \cdot \vec{v} < C^2$) em todos os pontos do volume V , o funcional (2.44) é um máximo.

2.4 - Princípio Variacional de Bateman-Kelvin

Aqui, vamos apresentar um princípio variacional recíproco ao princípio de Bateman, apresentado na seção 2.3. Tal princípio pode ser enunciado da seguinte maneira [2], [30] :

Entre todos os campos de velocidade, que satisfazem as equações (2.61a), (2.43b) no volume V e (2.61b) na superfície de contorno S , aquele que minimiza o funcional

$$I[\vec{v}] = \int_V (p + \rho \vec{v} \cdot \vec{v}) dv, \quad (2.62)$$

satisfaz a equação (2.43a), a qual caracteriza um escoamento irrotacional.

A afirmação acima pode ser mostrada solucionando o problema variacional da extremização do funcional (2.62) sujeito aos vínculos (2.61a) e (2.43b). Para tanto, vamos utilizar a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Seguindo o procedimento mostrado no apêndice A, montamos um novo funcional

$$I^* = \int_V \left[p + \rho \vec{v} \cdot \vec{v} + \beta \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + e + \frac{p}{\rho} - C \right) + \Omega \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] dv \quad (2.63)$$

onde β e Ω são multiplicadores de Lagrange.

Considerando um sistema de coordenadas cartesianas, obtemos de (2.63) que

$$I^* = \int_V \left\{ p + \rho (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \beta \left[\frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + e + \frac{p}{\rho} - C \right] + \Omega \left[\rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right] \right\} dv \quad (2.64)$$

Como a densidade do fluxo de massa (H) é especificado e fixo na fronteira de V , verificamos que $\delta H = 0$ e portanto, devido à equação (2.61b), $\delta \vec{v} = 0$ na superfície de contorno S . Com isto, as funções v_1 , v_2 , v_3 e ρ que extremizam o funcional (2.64) são as soluções do sistema de equações de Euler-Lagrange, constituído pelas equações (2.6a,b,c,d), onde na equação (2.6d) substituímos Ω por ρ e F é o integrando do funcional (2.64). Notemos que a variação de (2.64) com respeito aos multiplicadores de Lagrange β e Ω , resultam respectivamente nas equações (2.61a) e (2.43b).

Sabendo-se que $p = p(\rho)$ e que a energia interna específica (e) é uma função de ρ (processo isentrópico), desenvolvemos o sistema (2.6), obtendo respectivamente

$$2 \rho v_1 + \beta v_1 - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 0 \quad (2.65a)$$

$$2 \rho v_2 + \beta v_2 - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = 0 \quad (2.65b)$$

$$2 \rho v_3 + \beta v_3 - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} = 0 \quad (2.65c)$$

$$\frac{dp}{d\rho} + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \beta \left[\frac{de}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} - \frac{p}{\rho^2} \right] -$$

$$- v_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} - v_3 \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} = 0 \quad (2.65d)$$

Substituindo (2.57a) e (2.57b) em (2.65d), temos

$$c^2 + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \frac{\beta}{\rho} c^2 - v_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} - v_3 \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} = 0 \quad (2.66)$$

De (2.65a,b,c), resulta

$$v_1 \left(2 + \frac{\beta}{\rho} \right) = \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \quad (2.67a)$$

$$v_2 \left(2 + \frac{\beta}{\rho} \right) = \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \quad (2.67b)$$

$$v_3 \left(2 + \frac{\beta}{\rho} \right) = \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} \quad (2.67c)$$

Substituindo (2.67a,b,c) em (2.66), temos

$$\left(1 + \frac{\beta}{\rho} \right) \left[c^2 - (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \right] = 0 \quad (2.68)$$

Analisando (2.68) verificamos que, com exceção do caso onde o escoamento é sônico, tal que

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = C^2, \quad (2.69)$$

podemos afirmar que

$$\beta = -\rho \quad (2.70)$$

Substituindo (2.70) em (2.67a,b,c) e colocando o sistema na forma invariante, resulta

$$\vec{v} = \vec{v}\Omega \quad (2.71)$$

A equação (2.71) é idêntica a (2.43a) e, portanto, o procedimento acima mostra o princípio de Bateman - Kelvin, enunciado no início desta seção. Pode ser mostrado [30] que o funcional (2.62) é um mínimo sempre que o escoamento for subsônico ($\vec{v} \cdot \vec{v} < C^2$) em todos os pontos do volume V.

Como já visto, os princípios variacionais estudados nas seções 2.3 e 2.4 são recíprocos, sendo assim, os mesmos fornecem limitantes inferior e superior para a integral

$$\int_V (p + \rho \vec{v} \cdot \vec{v}) dv, \quad (2.72)$$

de modo que

$$J[\vec{v}'] \leq \int_V (p + \rho \vec{v} \cdot \vec{v}) dv \leq I[\vec{v}'] \quad (2.73)$$

onde $J[\vec{v}']$ é definido pela equação (2.44), \vec{v}' é uma solução aproximada para o campo de velocidades e \vec{v} é a solução exata do sistema (2.43a), (2.1) e (1.4). As igualdades na expressão (2.73) são obtidas quando $\vec{v}' = \vec{v}$, de maneira que

$$J[\vec{v}] = \int_V (p + \rho \vec{v} \cdot \vec{v}) dv = I[\vec{v}] \quad (2.74)$$

A equação (2.74) pode ser mostrada [30] substituindo-se (2.1) no funcional (2.44), obtendo-se



$$J [\vec{v}] = \int_V pdv + \oint_S \Omega \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds \quad (2.75)$$

Aplicando o teorema do divergente [21] para a integral de superfície de (2.75), obtemos

$$J [\vec{v}] = \int_V \left[p + \vec{\nabla} \cdot (\Omega \rho \vec{v}) \right] dv \quad (2.76)$$

Desenvolvendo (2.76), resulta

$$J [\vec{v}] = \int_V \left[p + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Omega + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \Omega \right] dv \quad (2.77)$$

Substituindo (1.4) e (2.43a) em (2.77), temos

$$J [\vec{v}] = \int_V (p + \rho \vec{v} \cdot \vec{v}) dv \quad (2.78)$$

Das expressões (2.78) e (2.62), obtemos (2.74) que queríamos mostrar.

2.5 - Princípio Variacional de Herivel

Nesta seção vamos estudar um princípio variacional válido para escoamentos rotacionais, em regime não permanente, para fluido ideal e compressível. Tal princípio foi formulado por Herivel [16], que fez as seguintes considerações válidas para o sistema lagrangeano (variações são feitas nas posições das partículas do fluido).

Para o caso de sistemas dinâmicos discretos, nos quais a termodinâmica pode ser desprezada, o princípio de Hamilton, para sistemas conservativos, é tal que

$$\delta \int_1^2 (E_c - E_p) dt = 0 \quad (2.79)$$

onde E_c é a energia cinética do sistema e E_p é a energia potencial.

Para o caso de sistemas dinâmicos contínuos, nos quais a termodinâmica não pode ser desprezada, o princípio de Hamilton deve ser generalizado, de tal modo que (2.79) transforme-se em

$$\delta \int_1^2 (E_c - E_p - E) dt = 0 \quad (2.80)$$

onde E é a energia interna do sistema.

Para sistemas dinâmicos contínuos, no sistema euleriano (variações são feitas nas velocidades do fluido) Herivel [16] propôs que a forma de (2.80) fosse mantida, de modo a obter-se as equações do movimento para fluido ideal.

Segundo Herivel [16], o funcional correspondente ao princípio variacional (2.80) pode ser escrito da seguinte maneira, para o caso de escoamento de fluido ideal:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} - \rho(e - \psi) \right] dv dt \quad (2.81)$$

onde $e = e(\rho, s)$ é a energia interna específica, que é função da densidade (ρ) e da entropia (s) e ψ é o potencial das forças de volume.

Como se sabe [16], o princípio de Hamilton é aplicado para sistemas onde não há criação de entropia, de maneira que

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (2.82)$$

Devemos lembrar que qualquer solução das equações do movimento deve satisfazer a continuidade [eq.(1.3)]. Após tais considerações, vamos verificar que as equações do movimento são obtidas da extremização do funcional (2.81) sujeito aos vínculos (2.82) e (1.3). Para resolvermos o problema variacional acima, vamos utilizar a técnica dos multiplicadores de Lagrange. No apêndice A, verificamos que devemos construir um novo funcional

$$J^* = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left\{ \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} - \rho(e - \psi) + \beta \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] + \Omega \rho \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s \right] \right\} dv dt \quad (2.83)$$

onde β e Ω são multiplicadores de Lagrange.

Considerando um sistema de coordenadas cartesianas, obtemos de (2.83) que

$$\begin{aligned}
 J^* = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \rho (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - \rho(e - \psi) + \right. \\
 & + \beta \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right] + \\
 & \left. + \Omega \rho \left[\frac{\partial s}{\partial t} + v_1 \frac{\partial s}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial s}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial s}{\partial x_3} \right] \right\} dv dt \quad (2.84)
 \end{aligned}$$

As funções v_1, v_2, v_3, ρ, s que extremizam o funcional (2.84) são as soluções do sistema de equações de Euler-Lagrange [ver apêndice A].

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{1,t}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{1,1}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{1,2}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{1,3}} \right] = 0 \quad (2.85a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{2,t}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{2,1}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{2,2}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{2,3}} \right] = 0 \quad (2.85b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_3} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{3,t}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{3,1}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{3,2}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{3,3}} \right] = 0 \quad (2.85c)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial F}{\partial \rho, t} \right] - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial \rho, 1} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \rho, 2} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial F}{\partial \rho, 3} \right] = 0 \quad (2.85d)$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial F}{\partial s, t} \right] - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial s, 1} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial s, 2} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial F}{\partial s, 3} \right] = 0 \quad (2.85e)$$

onde F é o integrando do funcional (2.84) e

$$v_{i,t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} ; v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} ; \rho, t = \frac{\partial \rho}{\partial t} ; \rho, j = \frac{\partial \rho}{\partial x_j} ; \text{ etc ...}$$

Desenvolvendo o sistema (2.85) obtemos respectivamente

$$v_1 - \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + \Omega \frac{\partial s}{\partial x_1} = 0 \quad (2.86a)$$

$$v_2 - \frac{\partial \beta}{\partial x_2} + \Omega \frac{\partial s}{\partial x_2} = 0 \quad (2.86b)$$

$$v_3 - \frac{\partial \beta}{\partial x_3} + \Omega \frac{\partial s}{\partial x_3} = 0 \quad (2.86c)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (e - \psi) - \rho \frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{\partial \beta}{\partial t} - v_1 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial \beta}{\partial x_2} - v_3 \frac{\partial \beta}{\partial x_3} + \\ + \Omega \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v_1 \frac{\partial s}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial s}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial s}{\partial x_3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.86d)$$

$$- \rho \frac{\partial e}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Omega) - \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho \Omega v_1) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho \Omega v_2) - \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho \Omega v_3) = 0 \quad (2.86e)$$

Colocando o sistema (2.86) na forma invariante, resulta:

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \beta - \Omega \vec{\nabla} s \quad (2.87a)$$

$$\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - (e - \psi) - \rho \frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{\partial \beta}{\partial t} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \beta + \Omega \frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (2.87b)$$

$$- \rho \frac{\partial e}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Omega) - \vec{\nabla} \cdot (\rho \Omega \vec{v}) = 0 \quad (2.87c)$$

Lembremos que a variação do funcional (2.84) com relação aos multiplicadores de Lagrange β e Ω , resulta respectivamente em:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.88a)$$

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (2.88b)$$

Da termodinâmica [16], podemos obter

$$\vec{\nabla} e = T \vec{\nabla} s + \frac{p}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \quad (2.89a)$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_{\rho} = T \quad (2.89b)$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_{s} = \frac{p}{\rho^2} \quad (2.89c)$$

onde T é a temperatura absoluta.

Substituindo (2.88a,b) e (2.89b,c) no sistema (2.87), resulta

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \beta - \Omega \vec{\nabla} s \quad (2.90a)$$

$$\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - (e - \psi) - \frac{p}{\rho} - \frac{\partial \beta}{\partial t} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \beta = 0 \quad (2.90b)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Omega = -T \quad (2.90c)$$

Arranjando (2.90b) de uma outra forma, temos

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} - \vec{\nabla}\beta) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{p}{\rho} + (e - \psi) \quad (2.91)$$

Tomando o gradiente de (2.91), obtemos

$$\vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} - \vec{\nabla}\beta) \right] - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}\beta = \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + e - \psi \right) \quad (2.92)$$

Substituindo (2.90a) em (2.92), resulta

$$- \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \Omega \vec{\nabla}s) - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} + \Omega \vec{\nabla}s) = \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + e - \psi \right) \quad (2.93)$$

Sabemos que

$$\vec{\nabla} (\Omega \vec{v} \cdot \vec{\nabla}s) = \vec{\nabla}\Omega (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}s) + \Omega \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}s) \quad (2.94a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Omega \vec{\nabla}s) = \frac{\partial \Omega}{\partial t} \vec{\nabla}s + \Omega \vec{\nabla} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) \quad (2.94b)$$

Somando (2.94a) com (2.94b), obtemos

$$\vec{\nabla} (\Omega \vec{v} \cdot \vec{\nabla}s) + \frac{\partial}{\partial t} (\Omega \vec{\nabla}s) = \vec{\nabla}\Omega (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}s) + \frac{\partial \Omega}{\partial t} \vec{\nabla}s + \Omega \vec{\nabla} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}s \right) \quad (2.95)$$

Do cálculo vetorial podemos mostrar a seguinte identidade

$$\vec{\nabla}\Omega (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}s) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\Omega) \vec{\nabla}s = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \Omega \vec{\nabla}s) \quad (2.96)$$

Substituindo (2.96) e (2.88b) em (2.95), resulta

$$\vec{\nabla} (\Omega \vec{v} \cdot \vec{\nabla}s) + \frac{\partial}{\partial t} (\Omega \vec{\nabla}s) = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \Omega \vec{\nabla}s) + \vec{\nabla}s \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\Omega \right) \quad (2.97)$$

Recorrendo às equações (2.90c) e (2.97), verificamos que (2.93) fica:

$$- \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \Omega \vec{\nabla}s) = \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \vec{\nabla}e - \vec{\nabla}\psi - T \vec{\nabla}s \quad (2.98)$$

Substituindo (2.90a) e (2.89a) em (2.98), temos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \psi \quad (2.99a)$$

ou então

$$\frac{D \vec{v}}{Dt} = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \psi \quad (2.99b)$$

A equação (2.99) é exatamente igual a equação de Euler [eq.(1.11)], que descreve o movimento de um escoamento rotacional, em regime não permanente de um fluido ideal e com pressível.

Podemos obter a vorticidade

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}, \quad (2.100)$$

substituindo (2.90a) em (2.100). Desta forma

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \Omega \times \vec{\nabla} s \quad (2.101)$$

Se um escoamento possuir entropia (s) uniforme em todo o volume sob consideração, então a análise de (2.101) nos leva a concluir que o escoamento é irrotacional. Entretanto, sa bemos que tal conclusão não é válida em geral, pois existem es coamentos rotacionais que possuem entropia uniforme [29].

O multiplicador de Lagrange β pode ser obtido da seguinte maneira:

Tomando a derivada substancial de (2.90a), resulta

$$\frac{D \vec{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt} (\vec{\nabla} \beta) - \Omega \frac{D}{Dt} (\vec{\nabla} s) - \vec{\nabla} s \left(\frac{D \Omega}{Dt} \right) \quad (2.102)$$

Desenvolvendo (2.102), temos

$$\frac{D \vec{v}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \beta) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \beta - \Omega \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} s) - \Omega (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} s - \vec{\nabla} s \left(\frac{D \Omega}{Dt} \right) \quad (2.103)$$

Do cálculo vetorial, verifica-se as identidades

$$\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} s) = \vec{\nabla} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} s \quad (2.104a)$$

e

$$\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \beta) = \vec{\nabla} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \beta + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \beta \quad (2.104b)$$

Substituindo (2.104a,b) em (2.103), obtemos

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right) + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \beta) - \vec{\nabla} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \beta - \Omega \vec{\nabla} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) - \Omega \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} s) + \Omega \vec{\nabla} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s - \vec{\nabla} s \left(\frac{D\Omega}{Dt} \right) \quad (2.105)$$

Agrupando os termos de (2.105), temos

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{\nabla} \left(\frac{D\beta}{Dt} \right) - \Omega \vec{\nabla} \left(\frac{Ds}{Dt} \right) + \vec{\nabla} \vec{v} \cdot (\Omega \vec{\nabla} s - \vec{\nabla} \beta) - \vec{\nabla} s \left(\frac{D\Omega}{Dt} \right) \quad (2.106)$$

Substituindo (2.88b), (2.90a) e (2.90c) em (2.106),

resulta

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{\nabla} \left(\frac{D\beta}{Dt} \right) - \vec{\nabla} \vec{v} \cdot \vec{v} + T \vec{\nabla} s \quad (2.107)$$

Substituindo (2.99b) e (2.89a) em (2.107), temos

$$\vec{\nabla} \left(\frac{D\beta}{Dt} \right) = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \psi - \vec{\nabla} e + \frac{p}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho + \vec{\nabla} \vec{v} \cdot \vec{v} \quad (2.108)$$

Agrupando os termos de (2.108), obtemos

$$\vec{\nabla} \left(\frac{D\beta}{Dt} \right) = - \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \vec{\nabla} e + \vec{\nabla} \psi + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) \quad (2.109)$$

Da equação (2.109), verificamos que

$$\frac{D\beta}{Dt} = - \frac{p}{\rho} - e + \psi + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \quad (2.110)$$

Substituindo (1.17) em (2.110), obtemos

$$\frac{D\beta}{Dt} = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - (h - \psi) \quad (2.111)$$

A equação (2.111) mostra que a derivada substancial de β é igual a energia cinética específica menos a entalpia específica somada com o potencial das forças de volume. A equação (2.90c) mostra que a derivada substancial de Ω é igual a temperatura absoluta multiplicada por (-1).

2.6 - Princípio Variacional de Herivel-Lin

Na seção anterior, verificamos que, para escoamentos com entropia uniforme, o princípio de Herivel só admite escoamentos irrotacionais. Esta limitação foi retirada por Lin em 1963 [29], que fez as seguintes considerações:

No sistema lagrangeano, a posição das partículas no instante t é dada por $\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t)$, onde \vec{a} é o vetor que caracteriza a posição inicial da partícula de fluido.

No sistema euleriano, podemos afirmar que as coordenadas iniciais $\vec{a}(\vec{x}, t)$ permanecem constantes ao longo da trajetória da partícula e portanto

$$\frac{D\vec{a}}{Dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} = 0 \quad (2.112)$$

Lin propôs que o funcional (2.81) fosse extremizado, tendo como vínculos as equações (2.82), (1.3) e ainda as três componentes escalares de (2.112). Entretanto, Seliger e Whitham [29] mostraram que as três componentes de (2.112) podem ser substituídas por apenas uma, tal que

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} a = 0 \quad (2.113)$$

onde a é qualquer componente do vetor \vec{a} .

Do exposto acima, vamos obter as equações do movimento para o escoamento de um fluido ideal, através da extremização do funcional (2.81) sujeito aos vínculos (2.82), (1.3) e (2.113). Para tanto, vamos utilizar a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Seguindo o procedimento mostrado no apêndice A, montamos um novo funcional

$$J^* = \int_{t_1}^{t_2} \int_v \left\{ \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} - \rho(e - \psi) + \beta \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] + \Omega \rho \frac{Ds}{Dt} + \gamma \rho \frac{Da}{Dt} \right\} dv dt \quad (2.114)$$

onde β , Ω e γ são os multiplicadores de Lagrange.

Considerando um sistema de coordenadas cartesianas, obtemos de (2.114) que

$$J^* = \int_{t_1}^{t_2} \int_v \left\{ \frac{1}{2} \rho (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - \rho(e - \psi) + \beta \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right] + \Omega \rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v_1 \frac{\partial s}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial s}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial s}{\partial x_3} \right) + \gamma \rho \left(\frac{\partial a}{\partial t} + v_1 \frac{\partial a}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial a}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial a}{\partial x_3} \right) \right\} dv dt \quad (2.115)$$

As funções v_1 , v_2 , v_3 , ρ , s , a que extremizam o funcional (2.115) são as soluções do sistema de equações de Euler-Lagrange, constituído pelas equações (2.85a,b,c,d,e) e ainda por

$$\frac{\partial F}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial F}{\partial a_{,t}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial a_{,1}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial a_{,2}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial F}{\partial a_{,3}} \right] = 0, \quad (2.116)$$

onde F é o integrando de (2.115) e

$$a_{,t} = \frac{\partial a}{\partial t} ; \quad a_{,j} = \frac{\partial a}{\partial x_j}$$

Desenvolvendo o sistema acima e colocando-o na forma invariante, obtemos

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\beta - \Omega\vec{\nabla}s - \gamma\vec{\nabla}a \quad (2.117a)$$

$$\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - (e - \psi) - \rho \frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{\partial \beta}{\partial t} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\beta + \Omega \frac{Ds}{Dt} + \gamma \frac{Da}{Dt} = 0 \quad (2.117b)$$

$$- \rho \frac{\partial e}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t} (\rho\Omega) - \vec{\nabla} \cdot (\rho\Omega\vec{v}) = 0 \quad (2.117c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\gamma) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\gamma\vec{v}) = 0 \quad (2.117d)$$

Lembremos que a variação do funcional (2.115) com respeito aos multiplicadores de Lagrange β , Ω e γ , resulta respectivamente em:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \quad (2.118a)$$

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (2.118b)$$

$$\frac{Da}{Dt} = 0 \quad (2.118c)$$

Substituindo as equações (2.118a,b,c) e (2.89b,c) no sistema (2.117), obtemos

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\beta - \Omega\vec{\nabla}s - \gamma\vec{\nabla}a \quad (2.119a)$$

$$\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - (e - \psi) - \frac{p}{\rho} - \frac{\partial \beta}{\partial t} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\beta = 0 \quad (2.119b)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\Omega = -T \quad (2.119c)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\gamma = 0 \quad (2.119d)$$

Seguindo o mesmo procedimento mostrado na seção 2.6, chegamos novamente a equação (2.99), que é a equação do movimento para o escoamento rotacional, em regime permanente de um fluido ideal e compressível.

Podemos obter a vorticidade, relativa ao campo de velocidades definido por (2.119a), substituindo (2.119a) em (2.100). Desta forma

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla}\Omega \times \vec{\nabla}s + \vec{\nabla}\gamma \times \vec{\nabla}a \quad (2.120)$$

Segundo Seliger e Whitham [29], a expressão (2.120) mostra a vorticidade dividida em duas parcelas, sendo uma a vorticidade introduzida inicialmente ($\vec{\nabla}\gamma \times \vec{\nabla}a$) e a outra ($\vec{\nabla}\Omega \times \vec{\nabla}s$) a vorticidade devido a subseqüentes gradientes de entropia.

Observemos que a equação (2.119d) mostra que a derivada substancial do multiplicador de Lagrange γ é igual a zero.

CAPÍTULO 3 - PRINCÍPIOS VARIACIONAIS PARA FLUIDO VISCOZO

Neste capítulo vamos expor alguns princípios variacionais aplicados aos escoamentos de fluidos viscosos em regi_ime permanente. Analisaremos escoamentos de fluidos incompressíveis e compressíveis, além de mostrar princípios variacionais pa_ara fluidos newtonianos e não-newtonianos.

3.1 - Teorema de Helmholtz

Helmholtz [21] em 1882 mostrou que, (i) se os termos de inércia são desprezados ("creeping flow"), (ii) se as velocidades nos contornos de uma região simplesmente conectada fo_{re}m constantes, (iii) se as forças externas de volume forem conservativas e (iv) se o fluido for incompressível, então o movimento é tal que a dissipação, na região sob consideração, é mínima.

Iniciemos a demonstração do teorema acima consi_{der}ando um escoamento no interior de uma região com volume V , o qual é caracterizado por um campo de velocidades com componentes v_1 , v_2 e v_3 , no sistema cartesiano.

Vamos admitir um outro campo de velocidades qual_{quer}, com componentes de velocidades v_1^* , v_2^* e v_3^* , sendo que

$$v_i^* = v_i + v_i^! \quad c/i = 1,2,3 \quad (3.1)$$

onde $v_i^!$ é igual a zero na superfície de contorno S do volume V .

Considerando o sistema cartesiano, podemos verifi_{car} que a dissipação [eq.(1.16)] do escoamento, na região de volume V , para o campo de velocidades com componentes v_1^* , v_2^* e v_3^* , fica

$$\begin{aligned}
 P_d^* &= \int_V \Phi^* dv = \int_V \{ (\tau_{11} + \tau'_{11}) (d_{11} + d'_{11}) + (\tau_{22} + \tau'_{22}) (d_{22} + d'_{22}) + \\
 &+ (\tau_{33} + \tau'_{33}) (d_{33} + d'_{33}) + 2 (\tau_{12} + \tau'_{12}) (d_{12} + d'_{12}) + \\
 &+ 2 (\tau_{13} + \tau'_{13}) (d_{13} + d'_{13}) + 2 (\tau_{23} + \tau'_{23}) (d_{23} + d'_{23}) \} dx_1 dx_2 dx_3
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

onde

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \text{ e } \tau'_{ij} = \tau_{ij} + \tau'_{ij}$$

Na equação (3.2) τ'_{ij} é a componente do tensor de tensões viscosas, quando consideramos v'_1 , v'_2 e v'_3 . A mesma convenção é adotada para τ'_{ij} e τ_{ij} .

Desenvolvendo (3.2), obtemos

$$\begin{aligned}
 P_d^* &= \int_V \{ \tau_{11} d_{11} + \tau_{22} d_{22} + \tau_{33} d_{33} + 2 \tau_{12} d_{12} + 2 \tau_{13} d_{13} + 2 \tau_{23} d_{23} \} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
 &+ \int_V \{ \tau'_{11} d'_{11} + \tau'_{22} d'_{22} + \tau'_{33} d'_{33} + 2 \tau'_{12} d'_{12} + 2 \tau'_{13} d'_{13} + 2 \tau'_{23} d'_{23} \} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
 &+ \int_V \{ \tau_{11} d'_{11} + \tau_{22} d'_{22} + \tau_{33} d'_{33} + 2 \tau_{12} d'_{12} + 2 \tau_{13} d'_{13} + 2 \tau_{23} d'_{23} \} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
 &+ \int_V \{ \tau'_{11} d_{11} + \tau'_{22} d_{22} + \tau'_{33} d_{33} + 2 \tau'_{12} d_{12} + 2 \tau'_{13} d_{13} + 2 \tau'_{23} d_{23} \} dx_1 dx_2 dx_3
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Considerando fluido newtoniano e incompressível, obtemos de (1.22) que

$$\tau_{ij} = 2 \mu d_{ij}$$

Desta forma

$$\begin{aligned}
 I &= \tau_{11}d'_{11} + \tau_{22}d'_{22} + \tau_{33}d'_{33} + 2 \tau_{12}d'_{12} + 2 \tau_{13}d'_{13} + 2 \tau_{23}d'_{23} = \\
 &= 2\mu \{ d_{11}d'_{11} + d_{22}d'_{22} + d_{33}d'_{33} + 2 d_{12}d'_{12} + 2 d_{13}d'_{13} + 2 d_{23}d'_{23} \} \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
 I' &= \tau'_{11}d_{11} + \tau'_{22}d_{22} + \tau'_{33}d_{33} + 2 \tau'_{12}d_{12} + 2 \tau'_{13}d_{13} + 2 \tau'_{23}d_{23} = \\
 &= 2\mu \{ d'_{11}d_{11} + d'_{22}d_{22} + d'_{33}d_{33} + 2 d'_{12}d_{12} + 2 d'_{13}d_{13} + 2 d'_{23}d_{23} \} \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Comparando (3.5) e (3.6), obtemos que

$$I = I' \quad (3.7)$$

Portanto, de (3.3) obtemos

$$\int_v \phi^* dv = \int_v \phi dv + \int_v \phi' dv + 2 \int_v I dv \quad (3.8)$$

onde

$$\int_v \phi dv = \text{primeira parcela do lado direito de (3.3)}$$

$$\int_v \phi' dv = \text{segunda parcela do lado direito de (3.3)}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}
 \int_v I dv &= \int_v \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\tau_{11}v'_1 + \tau_{21}v'_2 + \tau_{31}v'_3 \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\tau_{12}v'_1 + \tau_{22}v'_2 + \tau_{32}v'_3 \right] + \right. \\
 &+ \left. \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\tau_{13}v'_1 + \tau_{23}v'_2 + \tau_{33}v'_3 \right] \right\} dv - \int_v \left\{ v'_1 \left[\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} \right] + \right. \\
 &+ v'_2 \left[\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} \right] + v'_3 \left[\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \right] \left. \right\} dv \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Aplicamos o teorema do divergente para a primeira integral do lado direito de (3.9) e lembrando que $v'_i \text{ c/i} = 1, 2, 3$

é igual a zero na superfície de contorno de V , obtemos

$$\int_V I \, dv = \int_V \vec{v}' \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}) \, dv \quad (3.10)$$

onde

\vec{v}' = vetor velocidade, cujas componentes cartesianas são v'_1, v'_2 e v'_3 .

$\vec{\tau}$ = tensor cujas componentes cartesianas são τ_{ij} .

Para escoamento de fluido incompressível, onde os termos de inércia são desprezados, obtemos de (1.8) que

$$\rho \vec{f}_c - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} = 0 \quad (3.11)$$

Considerando que as forças de volume (\vec{f}_c) são conservativas, então de (3.11) obtemos

$$-\rho \vec{\nabla} \psi + \vec{\nabla} p = \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}, \quad (3.12)$$

sendo que $\vec{f}_c = \vec{\nabla} \psi$.

Definindo $\phi = -\rho \psi + p$, obtemos de (3.12) que

$$\vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.10), temos

$$\int_V I \, dv = \int_V \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} \phi \, dv \quad (3.14)$$

Sabemos que

$$\int_V I \, dv = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}' \phi) \, dv - \int_V \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' \, dv \quad (3.15)$$

Aplicando o teorema do divergente para a primeira integral do lado direito de (3.15), obtemos

$$\int_V I \, dv = \oint_S \phi \vec{v}' \cdot \vec{n} \, ds - \int_V \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' \, dv \quad (3.16)$$

Lembrando que $\vec{v}' = 0$ na superfície de contorno de V e admitindo que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0$, temos

$$\int_V I \, dv = 0 \quad (3.17)$$

Substituindo (3.17) em (3.8), obtemos

$$\int_V \phi^* \, dv = \int_V \phi \, dv + \int_V \phi' \, dv \quad (3.18)$$

De (3.18) conclui-se [21] que a dissipação no volume V causada pelo campo de velocidades com componentes v_1^* , v_2^* e v_3^* é maior que a dissipação causada pelo campo de velocidades v_1 , v_2 e v_3 , pois a integral

$$\int_V \phi' \, dv \quad (3.19)$$

é uma quantidade positiva. Assim, sob as hipóteses admitidas pelo teorema de Helmholtz, o movimento é tal que torna a dissipação no volume V um mínimo.

3.2 - Princípio Variacional de Helmholtz

Para obtermos as equações do movimento, utilizando o teorema da dissipação mínima de Helmholtz, basta minimizarmos a dissipação [eq.(1.16)]

$$P_d = \int_V \phi \, dv, \quad (3.20)$$

tendo a equação da continuidade para fluido incompressível [eq.(1.5)] como restrição, pois qualquer solução das equações do movimento deve obedecer necessariamente o princípio da conservação da massa.

Para resolvermos o problema variacional acima, vamos utilizar a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Seguindo o procedimento mostrado no apêndice A, montamos um novo funcional

$$P_d^* = \int_V \left[\phi + \Omega (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] dv \quad (3.21)$$

onde Φ é a função dissipação [eq.(1.16)], $\Omega = \Omega(x_1, x_2, x_3)$ é o multiplicador de Lagrange e V é o volume total onde é considerado o escoamento.

Admitindo um sistema de coordenadas cartesianas, substituímos (1.22) para fluido incompressível em (1.16) e obtemos

$$\begin{aligned} \Phi = & 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sabemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (3.23)$$

Substituindo (3.22) e (3.23) em (3.21), obtemos

$$\begin{aligned} P_d^* = & \int_V \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \mu \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \Omega \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right] \right\} dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Chamando o integrando de (3.24) de F , temos que

$$F = F(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3, \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \Omega) \quad (3.25)$$

Sabendo que as funções independentes do funcional

(3.24) são v_1 , v_2 , v_3 e Ω , verificamos no apêndice A que as equações de Euler-Lagrange, para funcionais que tenham como integrando uma função como F , são:

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{1,1}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{1,2}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{1,3}} \right] = 0 \quad (3.26a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{2,1}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{2,2}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{2,3}} \right] = 0 \quad (3.26b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_3} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{3,1}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{3,2}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{3,3}} \right] = 0 \quad (3.26c)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial \Omega_{,1}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \Omega_{,2}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial F}{\partial \Omega_{,3}} \right] = 0 \quad (3.26d)$$

onde

$$v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \Omega_{,i} = \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}$$

Substituindo F do funcional (3.24) no sistema de equações (3.26), temos após manipulações algébricas simples

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) = 0 \quad (3.27a)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) = 0 \quad (3.27b)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_3} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right) = 0 \quad (3.27c)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (3.27d)$$

Comparando (3.27a), (3.27b) e (3.27c) com as equações de Navier-Stokes para fluido incompressível [eq.(1.24)], quando os termos de inércia são desprezados, verificamos que os dois sistemas são idênticos se

$$\Omega = 2 (\rho \psi - p) \quad (3.28)$$

onde

p = pressão

ρ = densidade do fluido

ψ = função potencial das forças de volume, sendo $\vec{f}_c = \vec{\nabla} \psi$.

Desta forma, substituindo (3.28) em (3.27a,b,c), temos exatamente as equações do movimento de um fluido viscoso, incompressível em regime permanente, onde os termos de inércia são desprezados ("creeping flow"). A equação (3.27d) é a continuidade para fluido incompressível.

Substituindo (3.28) em (3.21), temos

$$P_d^* = \int_v \left[\Phi + 2 (\rho \psi - p) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right] dv \quad (3.29)$$

que é a forma final do funcional P_d^* , que minimizado, tem como equações de Euler-Lagrange as equações do movimento e da cont

nuidade.

Um exemplo simples de aplicação do princípio da dissipação mínima de Helmholtz é encontrado no apêndice B, onde minimizamos a dissipação sujeita a um vínculo do tipo isoperimétrico.

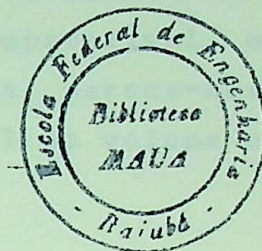
Lord Rayleigh [27] em 1913 mostrou que a dissipação é um mínimo sempre que se possa escrever

$$\nabla^2 \vec{v} = \vec{\nabla} H \quad (3.30)$$

onde

\vec{v} = vetor velocidade do escoamento

H = qualquer função de valor único, sujeita à condição $\nabla^2 H = 0$



As equações do movimento que resultam da minimização de (3.29), são

$$\vec{\nabla}(\rho\psi - p) + \mu \nabla^2 \vec{v} = 0 \quad (3.31)$$

Comparando (3.30) com (3.31) observamos que a equação (3.30) é satisfeita no presente caso, pois sempre podemos escrever

$$H = \frac{1}{\mu} (p - \rho\psi) \quad (3.32)$$

Podemos verificar que a condição $\nabla^2 H = 0$ é satisfeita, pois

$$\nabla^2 p - \rho \nabla^2 \psi = 0 \quad (3.33)$$

Com isto, Lord Rayleigh [27] verificou que o princípio de Helmholtz é um mínimo.

3.3 - Princípio Variacional de Brill

Brill [22] em 1895 determinou que o princípio variacional de Helmholtz poderia ser generalizado de modo a in

cluír nas equações do movimento uma parte dos termos de inêr
cia.

Através do princípio de Helmholtz, obtemos as e
quações do movimento do escoamento de um fluido viscoso, incom
pressível, em regime permanente, quando os termos de inércia são
desprezados. Observamos que neste caso o fluxo líquido de ener
gia cinética que atravessa a fronteira do volume estudado também
é desprezado. Para obtermos as equações do movimento de escoamento
s permanentes de um fluido viscoso e incompressível, onde uma
parte dos termos de inércia são considerados, parece-nos intuitivo
que tentemos minimizar a dissipação total no volume considerado
[eq.(3.20)].

$$P_d = \int_V \phi \, dv, \quad (3.34)$$

tendo como restrição a equação da continuidade para fluido incom
pressível [eq.(1.5)]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.35)$$

e ainda impormos a condição que o fluxo líquido de energia cinética,
que atravessa as fronteiras de V [22], deve ser uma consta
nante diferente de zero, tal que

$$\oint_S \frac{\rho}{2} (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{n} \cdot \vec{v} \, ds = C \quad (3.36)$$

onde C é constante porque estamos considerando escoamentos em regi
me permanente, e

\vec{n} = versor normal a superfície ds

S = área da superfície que envolve o volume V

Aplicando o teorema do divergente à (3.36), obtemos

$$\oint_S \frac{\rho}{2} \vec{n} \cdot (v^2 \vec{v}) \, ds = \int_V \frac{\rho}{2} \vec{\nabla} \cdot (v^2 \vec{v}) \, dv = C \quad (3.37)$$

onde $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$. Desenvolvendo (3.37), temos

$$\frac{\rho}{2} \int_{\mathbf{v}} \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{v}^2 \vec{\nabla}) d\mathbf{v} = \frac{\rho}{2} \int_{\mathbf{v}} v^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) d\mathbf{v} + \frac{\rho}{2} \int_{\mathbf{v}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) v^2 d\mathbf{v} = C \quad (3.38)$$

Substituindo (3.35) em (3.38), verificamos que

$$\frac{\rho}{2} \int_{\mathbf{v}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) v^2 d\mathbf{v} = C \quad (3.39)$$

Para variarmos o funcional (3.34), sujeito aos vínculos (3.35) e (3.39), montamos o funcional

$$P_d^* = \int_{\mathbf{v}} \left[\phi + \Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} + K \frac{\rho}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) v^2 \right] d\mathbf{v} \quad (3.40)$$

onde Ω e K são multiplicadores de Lagrange, porém Ω é uma função de três variáveis independentes e K é uma constante, pois o vínculo (3.39) é do tipo isoperimétrico [ver apêndice A].

Considerando um sistema de coordenadas cartesianas, verificamos que

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) v^2 = v_1 \frac{\partial v^2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v^2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v^2}{\partial x_3} \quad (3.41)$$

onde

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \quad (3.42)$$

Substituindo (3.42) em (3.41), resulta:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) v^2 &= 2 v_1^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + 2 v_1 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + 2 v_1 v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + 2 v_1 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \\ &+ 2 v_2^2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + 2 v_2 v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + 2 v_3 v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + 2 v_3 v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \\ &+ 2 v_3^2 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Desta forma o funcional (3.40) em coordenadas cartesianas \bar{e} obtido substituindo-se (3.22), (3.23) e (3.43) em (3.40), obtendo

$$\begin{aligned}
 P_d^* = & \int_v \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \right. \\
 & + \mu \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \\
 & + \Omega(x_1, x_2, x_3) \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right] + \\
 & + K\rho \left[v_1^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_1 v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + v_1 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2^2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \right. \\
 & \left. + v_2 v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + v_3 v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_3 v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3^2 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right] \Big\} dx_1 dx_2 dx_3
 \end{aligned}
 \tag{3.44}$$

Verificamos que as variáveis independentes são v_1, v_2, v_3 e Ω , pois K é uma constante. A função F correspondente ao funcional (3.44) tem a mesma forma que aquela definida em (3.25), desta maneira as equações de Euler-Lagrange para (3.44) são as mesmas do sistema de equações (3.26)

Substituindo F do funcional (3.44) no sistema de equações (3.26a,b,c,d), temos respectivamente

$$K\rho \left[v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right] = \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + 2\mu \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right]
 \tag{3.45a}$$

$$K\rho \left[v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right] = \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} + 2\mu \left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right]
 \tag{3.45b}$$

$$K\rho \left[v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right] = \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} + 2\mu \left[\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right] \quad (3.45c)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (3.45d)$$

Fazendo $\Omega = 2(\rho\psi - p)$ como na eq. (3.28) e colocando o sistema de equações (3.45a,b,c) em forma invariante, temos

$$K \frac{\rho}{2} \vec{\nabla} v^2 = 2\rho \vec{\nabla} \psi - 2 \vec{\nabla} p + 2\mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.46)$$

A equação de Navier-Stokes para escoamento de um fluido viscoso, incompressível [eq.(1.24)], em regime permanente, onde $\vec{f}_c = \vec{\nabla} \psi$, é igual a

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \rho \vec{\nabla} \psi - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.47)$$

Substituindo (1.9) em (3.47), obtemos

$$\frac{\rho}{2} \vec{\nabla} v^2 - \rho \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \rho \vec{\nabla} \psi - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.48)$$

Fazendo $K = 2$ na equação (3.46) e comparando-a com (3.48) verificamos que se $\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$, então (3.46) e (3.48) são idênticas. Desta forma o funcional (3.44) com $\Omega = 2(\rho\psi - p)$ e $K = 2$ é válido para escoamentos de fluido incompressível, em regime permanente quando a vorticidade é igual a zero (escoamento irrotacional) ou quando a mesma é paralela a velocidade do escoamento em todos os pontos

Substituindo os valores de Ω e K acima no funcional (3.40), temos

$$P_d^* = \int_v \left[\phi + 2(\rho\psi - p)\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v^2 \right] dv \quad (3.49)$$

o qual minimizado nos fornece as equações do movimento (3.46) e a continuidade para fluido incompressível, sendo este o princípio variacional de Brill [22].

3.4 - Quanto a existência de um funcional para a equação de Navier-Stokes

Na seção anterior, verificamos a existência de um princípio variacional, que tem como equações de Euler-Lagrange.

$$\frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} v^2 = \rho \vec{\nabla} \psi - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.50)$$

A comparação de (3.50) com a equação Navier-Stokes [eq.(3.47)] sugere que devemos somar uma função F' ao integrando do funcional (3.49), tal que

$$P_{dI}^* = \int_v \left[\phi + 2(\rho\psi - p)\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v^2 + F' \right] dv, \quad (3.51)$$

de modo a obtermos os termos que completam a equação (3.50) tornando-a igual à equação de Navier-Stokes. Considerando um sistema de coordenadas cartesianas, verificamos que os termos que faltam para completar (3.50), são:

$$v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad e \quad v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \quad \text{na direção 1} \quad (3.52a)$$

$$v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \quad e \quad v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \quad \text{na direção 2} \quad (3.52b)$$

$$v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \quad e \quad v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \quad \text{na direção 3} \quad (3.52c)$$

Os termos acima são do mesmo tipo, isto é, com uma permutação dos índices do termo $v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ encontramos todos os demais. Desta

forma se encontrarmos uma função F_1 , que tenha como equação de Euler-Lagrange o termo $v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$, poderemos obter facilmente a função F' .

Começaremos tentando obter o termo $v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ a partir de uma função F_1 que dependa das componentes da velocidade e de suas derivadas primeiras.

$$F_1 = v_1^\alpha \cdot v_2^\beta \cdot v_3^\gamma \cdot v_{1,1}^{\alpha_1} \cdot v_{1,2}^{\alpha_2} \cdot v_{1,3}^{\alpha_3} \cdot v_{2,1}^{\beta_1} \cdot v_{2,2}^{\beta_2} \cdot v_{2,3}^{\beta_3} \cdot v_{3,1}^{\gamma_1} \cdot v_{3,2}^{\gamma_2} \cdot v_{3,3}^{\gamma_3} \quad (3.53)$$

onde os expoentes são números reais quaisquer e

$$v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Notemos que a escolha adequada dos expoentes de (3.53) nos fornece qualquer combinação das componentes da velocidade e de suas derivadas primeiras. Por exemplo se escolhermos $\alpha = 2$ e $\alpha_1 = 1$, temos

$$F_1 = v_1^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

Substituindo (3.53) na equação de Euler-Lagrange (3.26a) encontramos uma expressão que possui como parâmetros α , β , γ e α_i , β_i , γ_i ($i = 1, 2, 3$).

Dando valores adequados aos parâmetros talvez encontremos o termo $v_2 v_{1,2}$. A expressão acima foi obtida por Millikan [22] em 1929 que analisou todas as combinações possíveis dos parâmetros e chegou a conclusão que é impossível obter o termo $v_2 v_{1,2}$ a partir da função F_1 ou de uma soma de funções deste tipo.

Sabemos que para qualquer função

$$F_2 = F_2(v_1, v_2, v_3, v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{3,3}) \quad (3.54)$$

a qual não tem singularidades no interior da região sob consideração, uma série

$$S = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i F_1^i \quad (3.55)$$

pode ser achada, a qual converge uniformemente para a função F_2 . Isto permite que os resultados encontrados para a função F_1 sejam generalizados para qualquer função do tipo (3.54), isto é, Millikan [22] concluiu que, para uma região que não tenha singularidades no seu interior, não existe uma função F_2 que, substituída no integrando de (3.51) no lugar de F' , conduza aos termos que completam (3.50), após a extremização do funcional (3.51). As funções do tipo (3.54) que possuem singularidades, no interior da região sob consideração, são descartadas por razões de ordem física.

O problema da existência de um funcional para as equações de Navier-Stokes pode ser enfocado de uma outra maneira, a qual utiliza o conceito de derivada de Fréchet.

Partindo de um sistema de equações diferenciais dado, seguindo o formalismo apresentado por Finlayson [10], pode-se verificar se existe algum funcional, o qual extremizado, tenha como equações de Euler-Lagrange o sistema de equações dado.

Admitindo que o sistema de equações acima é constituído pelas equações de Navier-Stokes para fluido newtoniano, incompressível em regime permanente [eq.(3.47)], verifica-se [10] que não se pode achar um funcional do tipo

$$\int_v F \left[v_1, v_2, v_3, v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{3,2}, v_{3,3}, p \right] dv \quad (3.56)$$

o qual extremizado, tenha como equações de Euler-Lagrange o sistema (3.47). Assim, Finlayson [10] em 1972 comprovou os resultados obtidos anteriormente por Millikan [22], isto é, não é possível encontrar-se um funcional do tipo (3.56) que, após a extremização, resulte nas equações do movimento de um fluido viscoso, incompressível em regime permanente, a menos que $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = 0$ (princípio de Helmholtz) ou $\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$ (princípio de Brill).

3.5 - Princípio Variacional de Bird

Nesta seção vamos estudar um princípio variacional para fluido não-newtoniano, incompressível em regime permanente, quando os termos de inércia são desprezados.

Consideremos a forma mais simples para a relação tensão-razão de deformações de um fluido não-newtoniano [3].

$$\tau_{ij} = -\eta(\Pi) d_{ij} \quad (3.57)$$

onde

η = coeficiente de viscosidade dinâmica

$\Pi = d_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta}$

τ_{ij} = elementos do tensor de tensões viscosas ($\vec{\tau}$)

d_{ij} = elementos do tensor de razões de deformações (\vec{D}), definido no sistema cartesiano por $d_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right]$

O fluido que obedece a relação (3.57) é normalmente chamado de fluido newtoniano generalizado. Como exemplos de relações deste tipo podemos citar [3]:

1 - Modelo para fluido newtoniano

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} \quad (3.58)$$

onde μ é uma função que não depende de Π .

2 - Modelo de Ostwald-de Waele

$$\tau_{ij} = -2m (2\Pi)^{\frac{n-1}{2}} d_{ij} \quad (3.59)$$

onde m e n são dois parâmetros característicos do fluido determinados por medidas viscosimétricas.

As equações do movimento de um fluido incompressível [eq.(1.8)], onde os termos de inércia são desprezados, e a

continuidade [eq.(1.5)] são respectivamente

$$-\vec{\nabla}p + \rho \vec{f}_c + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} = 0 \quad (3.60a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.60b)$$

Substituindo (3.57) em (3.60a) e admitindo que as forças de volume são conservativas, temos

$$-\vec{\nabla}(p - \rho\psi) + \vec{\nabla} \cdot (\eta \vec{D}) = 0 \quad (3.61)$$

sendo que $\vec{f}_c = \vec{\nabla}\psi$.

Fazendo $\phi = p - \rho\psi$ e substituindo em (3.61), obtemos

$$-\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \cdot (\eta \vec{D}) = 0 \quad (3.62)$$

Bird [3] em 1960 obteve um princípio variacional para as equações (3.62) e (3.60b), que tem como funcional

$$B = \int_{\mathbf{v}} F \, dv \quad (3.63)$$

onde

$$F = F_I + F_{II} \quad (3.64)$$

$$F_I = -2(p - \rho\psi) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -2\phi \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

$$F_{II} = \int_0^{\Pi} \eta(\Pi) \, d\Pi$$

$$\Pi = d_{ij} d_{ij}$$

Notemos que para fluido newtoniano (3.63) fica

$$B_N = \int_{\mathbf{v}} \left[\phi - 2(p - \rho\psi) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right] dv \quad (3.65)$$

e para o fluido que obedece o modelo de Ostwald-de Waele (3.63) fica

$$B_{O.W.} = \int_v \left[\eta \Pi \cdot \frac{2}{n+1} - 2 (p - \rho \psi) \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \right] dv \quad (3.66)$$

onde

$$\Phi = 2 \mu \Pi \quad (\text{função dissipação})$$

$$\eta = 2m \left(2\Pi \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

Considerando um sistema de coordenadas cartesia nas vamos variar o funcional (3.63) com respeito às suas variáveis independentes v_1, v_2, v_3 e ϕ . Verificamos que (3.64) é uma função do tipo (3.25) e portanto as equações de Euler-Lagrange, para este caso, são as equações (3.26a,b,c,d) onde na equação (3.26d) substituímos Ω por ϕ .

Sabemos que

$$\frac{\partial F}{\partial v_{i,i}} = \frac{\partial F_I}{\partial v_{i,i}} + \frac{\partial F_{II}}{\partial v_{i,i}} = -2 \phi + \frac{dF_{II}}{d\Pi} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial v_{i,i}} \quad (3.67a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_{i,j}} = \frac{\partial F_I}{\partial v_{i,j}} + \frac{\partial F_{II}}{\partial v_{i,j}} = 0 + \frac{dF_{II}}{d\Pi} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial v_{i,j}} \quad (3.67b)$$

de onde resulta

$$\frac{\partial F}{\partial v_{i,i}} = -2 \phi + 2 \eta d_{ii} \quad (3.68a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_{i,j}} = 2 \eta d_{ij} \quad (3.68b)$$

Utilizando as relações (3.68a) e (3.68b), verificamos que as equações (3.26a,b,c,d) ficam respectivamente

$$- 2 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (\eta d_{11}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\eta d_{12}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\eta d_{13}) \right\} = 0$$

$$(3.69a)$$

$$- 2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (n d_{21}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (n d_{22}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (n d_{23}) \right\} = 0 \quad (3.69b)$$

$$- 2 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (n d_{31}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (n d_{32}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (n d_{33}) \right\} = 0 \quad (3.69c)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (3.69d)$$

Colocando o sistema de equações acima na forma invariante, temos

$$- \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \cdot (n \vec{D}) = 0 \quad (3.70a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.70b)$$

Comparando (3.70a) e (3.70b) com (3.62) e (3.60b) verificamos que o princípio variacional de Bird [3] generaliza o princípio de Helmholtz [21] para o caso de fluidos não-newtonianos que obedecem a equação (3.57).

O princípio variacional de Bird [3] pode ser generalizado para incluir parte dos termos de inércia de forma análoga ao princípio de Brill [22]. Isto é feito com a inclusão de mais um termo na equação (3.64), de modo que

$$F = F_I + F_{II} + F_{III} \quad (3.71)$$

onde

$$F_{III} = \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v^2$$

Substituindo (3.71) no funcional (3.63) e variando com relação as variáveis independentes v_1 , v_2 , v_3 e ϕ obtemos

$$\frac{\rho}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}^2 = \rho \vec{\nabla} \psi - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\eta \vec{D}) \quad (3.72a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.72b)$$

que são as equações do movimento de um fluido incompressível, o qual obedece a equação (3.57), em regime permanente quando os termos de inércia $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ são substituídos por $\frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} v^2$.

3.6 - Princípio variacional para escoamento de fluido compressível com forças de volume e inércia desprezadas

Nesta seção o autor desenvolve uma formulação variacional que descreve o escoamento em regime permanente de um fluido viscoso e compressível, onde as forças de volume e os termos de inércia são desprezados.

Inicialmente vamos mostrar que a extremização do funcional

$$J[\vec{v}] = \int_V \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{v} \left(h + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) + \vec{q}_s \right] - \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c \right\} dv \quad (3.73)$$

com relação às componentes do vetor velocidade é igual a zero. Para tanto, vamos multiplicar a equação do movimento [eq.(1.8)] escalarmente por \vec{v} , tal que

$$\rho \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}) \quad (3.74)$$

Considerando sistemas onde não há geração de calor devido a fontes internas ($q_v = 0$), podemos escrever a equação da energia [eq.(1.15)].

$$\rho \frac{De}{Dt} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s - p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \Phi \quad (3.75)$$

Considerando regime permanente e somando as equações (3.74) e (3.75) obtemos

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(e + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) = \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c - \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s - \vec{\nabla} \cdot (p \vec{v}) + \phi + \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}) \quad (3.76)$$

Recorrendo à equação da continuidade para fluido compressível [eq.(1.4)], podemos agrupar os termos de (3.76) tal que

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{v} \left(e + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + \vec{q}_s \right] - \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c = \phi + \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}) \quad (3.77)$$

Integrando (3.77) no volume V, temos

$$\int_V \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{v} \left(e + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + \vec{q}_s \right] - \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c \right\} dv = \int_V \left[\phi + \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}) \right] dv \quad (3.78)$$

Tomando a variação de ambos os lados da igualdade (3.78), obtemos

$$\delta \int_V \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{v} \left(e + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + \vec{q}_s \right] - \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c \right\} dv = \delta \int_V \left[\phi + \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}) \right] dv \quad (3.79)$$

Analisemos o lado direito de (3.79). Para tanto, consideremos um sistema de coordenadas cartesianas e um escoamento bi-dimensional pois desta forma simplificaremos a exposição dos raciocínios. Devemos enfatizar que a generalização para escoamentos tri-dimensionais é imediata. Recorrendo à equação (1.16) e admitindo que o fluido seja newtoniano [eq.(1.22)], verificamos que

$$\begin{aligned} J = \int_S \left[\phi + \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}) \right] ds = \int_S \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \right. \\ \left. + \lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + v_1 \left[\mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right] + \right. \\ \left. + v_2 \left[\mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right] \right\} dx_1 dx_2 \quad (3.80) \end{aligned}$$

onde S é a superfície onde estamos considerando o escoamento bi-

dimensional. Podemos verificar no apêndice A, que as funções v_1 , v_2 e v_3 que extremizam o funcional (3.80) são as soluções do sistema de equações de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{1,1}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{1,2}} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[\frac{\partial F}{\partial r_1} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial s_1} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[\frac{\partial F}{\partial t_1} \right] = 0$$

(3.81a)

$$\frac{\partial F}{\partial v_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{2,1}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial v_{2,2}} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[\frac{\partial F}{\partial r_2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial s_2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[\frac{\partial F}{\partial t_2} \right] = 0$$

(3.81b)

onde F é o integrando de (3.80) e

$$v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad r_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2}, \quad s_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad t_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2}$$

Desenvolvendo o sistema (3.81), no caso do funcional (3.80), obtemos

$$\begin{aligned} & \mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - 2\mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) - 2(\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[\mu v_1 + (\mu + \lambda) v_1 \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[(\mu + \lambda) v_2 \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[\mu v_1 \right] = 0 \end{aligned}$$

(3.82a)

$$\begin{aligned}
& \mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - 2\mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) - 2(\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[\mu v_2 \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[(\mu + \lambda) v_1 \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[\mu v_2 + (\mu + \lambda) v_2 \right] = 0
\end{aligned}
\tag{3.82b}$$

Desenvolvendo as equações (3.82a) e (3.82b) verificamos que todos os termos do lado esquerdo das igualdades se cancelam. Com isto, concluímos que a primeira variação de (3.80) com relação as componentes da velocidade é identicamente nula, tal que

$$\delta J = \delta \int_s \left[\phi + \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}) \right] ds = 0
\tag{3.83}$$

Como já dissemos acima, a equação (3.83) é generalizada de forma imediata para escoamentos tri-dimensionais. Desta forma, recorrendo a equação (3.79) podemos afirmar que

$$\delta J = \delta \int_v \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{v} \left(e + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + \vec{q}_s \right] - \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c \right\} dv = 0
\tag{3.84}$$

onde a variação é feita com relação as componentes da velocidade.

Substituindo (1.17) em (3.84), obtemos

$$\delta J = \delta \int_v \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{v} \left(h + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) + \vec{q}_s \right] - \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c \right\} dv = 0
\tag{3.85}$$

A equação (3.85) comprova a afirmação feita no início desta seção com relação ao funcional (3.73). Lembremos que o símbolo δ significa que o funcional sofre variação com relação às componentes da velocidade.

Recorrendo a equação da continuidade para fluido compressível [eq.(1.4)], obtemos de (3.85) que

$$\delta J = \delta \int_{\mathbf{v}} \left\{ \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} h + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s - \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c \right\} dv = 0 \quad (3.86)$$

A equação da energia [eq.(1.19)] para sistemas onde não há geração de calor devido a fontes internas e para regime permanente, fica:

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} h = - \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p + \phi \quad (3.87)$$

Substituindo (3.87) em (3.86), temos

$$\delta J = \delta \int_{\mathbf{v}} \left\{ \phi + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p + \frac{\rho}{2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c \right\} dv = 0 \quad (3.88)$$

O funcional referente ao princípio variacional (3.88) é igual a:

$$J = \int_{\mathbf{v}} \left\{ \phi + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p + \frac{\rho}{2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c \right\} dv \quad (3.89)$$

Lembremos que a pressão (p) e a densidade (ρ) devem ser expressos em termos das componentes de velocidade (\vec{v}).

A seguir vamos aplicar o princípio variacional (3.88) para o caso particular onde os termos de inércia e as forças de volume (\vec{f}_c) são desprezados. Desta forma, o funcional (3.89) se reduz a

$$J = \int_{\mathbf{v}} \left\{ \phi + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p \right\} dv \quad (3.90)$$

A relação entre pressão e velocidade é dada pela equação da conservação da quantidade de movimento para fluido compressível e newtoniano [eq.(1.23)].

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = - \vec{\nabla} p + \rho \vec{f}_c + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (3.91)$$

Para o escoamento estudado, a equação (3.91) se

reduz a

$$-\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0 \quad (3.92)$$

Nosso problema pode ser formulado da seguinte maneira. Desejamos extremizar o funcional (3.90) sujeito ao vínculo (3.92). Para resolver este problema variacional vamos utilizar a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Seguindo o procedimento mostrado no apêndice A, montamos um novo funcional

$$J^* = \int_v \left\{ \phi + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{\alpha} \cdot \left[-\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] \right\} dv \quad (3.93)$$

sendo que agora, a variável p tem que ser tratada como independente. Considerando um sistema cartesiano e escoamento bi-dimensional, obtemos de (3.93)

$$\begin{aligned} J^* = & \int_s \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \right. \\ & + \alpha_1 \left[-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right] + \\ & + \alpha_2 \left[-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right] + \\ & \left. + v_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial p}{\partial x_2} \right\} dx_1 dx_2 \quad (3.94) \end{aligned}$$

onde α_1 e α_2 são multiplicadores de Lagrange. Os parâmetros independentes v_1 , v_2 e p que extremizam (3.94) são as soluções do sistema de equações de Euler-Lagrange [ver apêndice A], constituído pelas equações (3.81a,b) e por

$$\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial p_{,1}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial p_{,2}} \right] = 0 \quad (3.95)$$

onde F é o integrando do funcional (3.94) e $p_{,i} = \frac{\partial p}{\partial x_i}$. Desenvolvendo o sistema de equações acima obtemos respectivamente

$$- 2\mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) - 2(\mu+\lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_2^2} \right) + (\mu+\lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (3.96a)$$

$$- 2\mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) - 2(\mu+\lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_2^2} \right) + (\mu+\lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (3.96b)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad (3.96c)$$

Colocando o sistema (3.96) na forma invariante, temos

$$- 2\mu \nabla^2 \vec{v} - 2(\mu+\lambda) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{\alpha} + (\mu+\lambda) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha}) = 0 \quad (3.97a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (3.97b)$$

De (3.97b) obtemos que $\vec{\alpha} = \vec{v}$. Substituindo este

valor de $\vec{\alpha}$ na equação (3.97a), obtemos

$$-\vec{\nabla}p + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0 \quad (3.98)$$

A equação (3.98) descreve o escoamento em regime permanente de um fluido compressível, onde os termos de inércia e as forças de volume são desprezados. Notemos que a equação (3.98) é idêntica à equação (3.92), que já foi considerada como vínculo entre a pressão e as componentes de velocidade.

3.7 - Princípio Variacional para escoamento de fluido compressível com os termos de inércia desprezados

Aqui, vamos generalizar o caso estudado na seção (3.6) aplicando o princípio variacional (3.88) para o estudo de escoamentos em regime permanente de fluido compressível, onde as forças de volume são consideradas e os termos de inércia são desprezados. Para este tipo de escoamento o funcional (3.89) se reduz a

$$J = \int_V \{ \phi + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}p - \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c \} dv \quad (3.99)$$

Notemos que, para fazermos a primeira variação, a pressão (p) e a densidade (ρ), que aparecem no funcional (3.99), devem ser expressas em termos das componentes da velocidade. Para tanto, consideremos a equação da conservação da quantidade de movimento [eq.(3.91)], onde os termos de inércia são desprezados

$$-\vec{\nabla}p + \rho \vec{f}_c + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0 \quad (3.100)$$

e a equação da continuidade para fluido compressível [eq.(1.4)]

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.101)$$

Para resolvermos o problema variacional da extremização do funcional (3.99) sujeito aos vínculos (3.100) e (3.101), vamos utilizar a técnica dos multiplicadores de Lagran

ge. Seguindo o procedimento mostrado no apêndice A, montamos um novo funcional

$$J^* = \int_v \left\{ \phi + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p - \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c + \vec{\alpha} \cdot \left[-\vec{\nabla} p + \rho \vec{f}_c + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] + \Omega \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right\} dv \quad (3.102)$$

onde $\vec{\alpha}$ e Ω são multiplicadores de Lagrange. Considerando um sistema de coordenadas cartesianas e escoamento bi-dimensional, obtemos de (3.102)

$$\begin{aligned} J^* = \int_s \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + v_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial p}{\partial x_2} - \right. \\ \left. - \rho v_1 f_{c1} - \rho v_2 f_{c2} + \alpha_1 \left[-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho f_{c1} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \alpha_2 \left[-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho f_{c2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \Omega \left[\rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \right] \right\} dx_1 dx_2 \quad (3.103) \end{aligned}$$

onde α_1 e α_2 são as componentes de $\vec{\alpha}$ nas direções de v_1 e v_2 e S é a superfície onde estamos estudando o escoamento bi-dimensional. Os parâmetros independentes v_1 , v_2 , p e ρ que extremizam o funcional (3.103) são as soluções do sistema de Euler-Lagrange constituído pelas equações (3.81a,b), (3.95) e

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial \rho, 1} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \rho, 2} \right] = 0 \quad (3.104)$$

onde F é o integrando de (3.103) e $\rho, i = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$. Desenvolvendo o sistema de equações acima obtemos respectivamente

$$\begin{aligned}
- 2\mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) - 2(\mu+\lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho f_{c_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_2^2} \right) + \\
+ (\mu+\lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \right) - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 0 \quad (3.105a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- 2\mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) - 2(\mu+\lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_2} - \rho f_{c_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_2^2} \right) + \\
+ (\mu+\lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \right) - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = 0 \quad (3.105b)
\end{aligned}$$

$$- \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad (3.105c)$$

$$- v_1 f_{c_1} - v_2 f_{c_2} + \alpha_1 f_{c_1} + \alpha_2 f_{c_2} - v_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = 0 \quad (3.105d)$$

Colocando o sistema (3.105) na forma invariante,

temos

$$- 2\mu \nabla^2 \vec{v} - 2(\mu+\lambda) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla} p - \rho \vec{f}_c + \mu \nabla^2 \vec{\alpha} + (\mu+\lambda) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha}) - \rho \vec{\nabla} \Omega = 0 \quad (3.106a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} \quad (3.106b)$$

$$- \vec{v} \cdot \vec{f}_c + \vec{\alpha} \cdot \vec{f}_c - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Omega = 0 \quad (3.106c)$$

Da equação (3.106b) resulta

$$\vec{\alpha} = \vec{v} \quad (3.107)$$

Substituindo (3.107) em (3.106a) e (3.106c), obtemos

$$-\mu \nabla^2 \vec{v} - (\mu + \lambda) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla} p - \rho \vec{f}_c - \rho \vec{\nabla} \Omega = 0 \quad (3.108a)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Omega = 0 \quad (3.108b)$$

A menos que $\vec{v} \perp \vec{\nabla} \Omega$, verificamos que (3.108b) é satisfeita quando

$$\vec{\nabla} \Omega = 0 \quad (3.109)$$

Substituindo (3.109) em (3.108a), resulta

$$-\vec{\nabla} p + \rho \vec{f}_c + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0 \quad (3.110)$$

Lembremos que a extremização do funcional (3.103) com relação ao multiplicador de Lagrange Ω resulta na equação da continuidade para fluido compressível. Notemos que a equação (3.110) é idêntica a (3.100), que já foi utilizada como vínculo entre a pressão e as componentes de velocidade. De qualquer maneira, verificamos acima que a extremização do funcional (3.99) sujeito aos vínculos (3.100) e (3.101) resultam em equações idênticas a (3.100) e (3.101), que são as equações que descrevem o escoamento estudado nesta seção.

3.8 - Princípio Variacional para escoamento de fluido compressível em regime permanente

Nesta seção vamos considerar o escoamento em regime permanente de um fluido viscoso e compressível, onde as forças de volume e os termos de inércia são considerados. Como já feito nas seções (3.6) e (3.7), vamos nos valer do princípio variacional (3.88). Para o caso estudado nesta seção o funcional (3.89) fica

$$J = \int_{\mathcal{V}} \left\{ \phi + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p + \frac{\rho}{2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c \right\} dv \quad (3.111)$$

Notemos que, para fazermos a primeira variação de (3.111), a pressão (p) e a densidade (ρ) devem ser expressas em termos das componentes de velocidade. Para tanto, consideremos a equação da conservação da quantidade de movimento [eq.(3.91)], em regime permanente

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \vec{\nabla} p + \rho \vec{f}_c + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) \quad (3.112)$$

e a equação da continuidade para escoamento compressível [eq. (3.101)]

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.113)$$

Para resolvermos o problema variacional da extremização do funcional (3.111) sujeito aos vínculos (3.112) e (3.113) vamos utilizar a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Seguindo o procedimento mostrado no apêndice A, montamos um novo funcional

$$J^* = \int_{\mathcal{V}} \left\{ \phi + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p + \frac{\rho}{2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \vec{f}_c + \right. \\ \left. + \vec{\alpha} \cdot \left[-\vec{\nabla} p - \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \rho \vec{f}_c + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) \right] + \right. \\ \left. + \Omega \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right\} dv \quad (3.114)$$

onde $\vec{\alpha}$ e Ω são multiplicadores de Lagrange. Considerando um sistema de coordenadas cartesianas e escoamento bi-dimensional, obtemos de (3.114)

$$\begin{aligned}
 J^* = & \int_S \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + v_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial p}{\partial x_2} + \right. \\
 & + \rho \left(v_1^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_2 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2^2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \rho (v_1 f_{c_1} + v_2 f_{c_2}) + \\
 & + \alpha_1 \left[- \frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \rho f_{c_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right] + \\
 & + \alpha_2 \left[- \frac{\partial p}{\partial x_2} - \rho \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \rho f_{c_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right] + \\
 & \left. + \Omega \left[\rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \right] \right\} dx_1 dx_2 \quad (3.115)
 \end{aligned}$$

onde α_1 e α_2 são as componentes de $\vec{\alpha}$ nas direções de v_1 e v_2 e S é a superfície onde estamos estudando o escoamento. Os parâmetros independentes v_1, v_2, p e ρ que extremizam o funcional (3.115) são as soluções do sistema de equações de Euler-Lagrange (ver apêndice A), constituído pelas equações (3.81a,b), (3.95) e (3.104), onde F é o integrando do funcional (3.115). Desenvolvendo este sistema de equações, obtemos respectivamente

$$\begin{aligned}
 -2\mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) - 2(\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) - \rho f_{c_1} + \\
 + \rho \left(-\alpha_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_2^2} \right) + \\
 + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \right) - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 0 \quad (3.116a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2 \mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) - 2(\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \rho f_{c_2} + \\
 & + \rho \left(- \alpha_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \alpha_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_2^2} \right) + \\
 & + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \right) - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = 0 \tag{3.116b}
 \end{aligned}$$

$$- \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} = 0 \tag{3.116c}$$

$$\begin{aligned}
 & v_1 \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + v_2 \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - v_1 f_{c_1} - v_2 f_{c_2} - \alpha_1 \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \\
 & - \alpha_2 \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \alpha_1 f_{c_1} + \alpha_2 f_{c_2} - v_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = 0 \tag{3.116d}
 \end{aligned}$$

Colocando sistema (3.116) na forma invariante, temos

$$\begin{aligned}
 & - 2 \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} - 2(\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla} p + \rho (\vec{\nabla} \vec{v}) \cdot \vec{v} - \rho \vec{f}_c - \rho (\vec{\nabla} \vec{v}) \cdot \vec{\alpha} + \\
 & + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\alpha} + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{\alpha} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha}) - \rho \vec{\nabla} \Omega = 0 \tag{3.117a}
 \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} \tag{3.117b}$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{f}_c - \vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\alpha} \cdot \vec{f}_c - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Omega = 0 \tag{3.117c}$$

Da equação (3.117b), obtemos

$$\vec{\alpha} = \vec{v} \quad (3.118)$$

Substituindo (3.118) em (3.117a) e (3.117c), resulta

$$-\mu \nabla^2 \vec{v} - (\mu + \lambda) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla} p - \rho \vec{f}_c + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \rho \vec{\nabla} \Omega = 0 \quad (3.119a)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Omega = 0 \quad (3.119b)$$

Admitindo que \vec{v} não é perpendicular a $\vec{\nabla} \Omega$, verificamos de (3.119b) que

$$\vec{\nabla} \Omega = 0 \quad (3.120)$$

Substituindo (3.120) em (3.119a), temos

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{f}_c + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (3.121)$$

A equação (3.121) descreve o escoamento em regime permanente de um fluido viscoso e compressível. Notemos que (3.121) é idêntica a equação (3.112), que já foi utilizada como vínculo entre a pressão e as componentes de velocidade. Lembremos que a variação do funcional (3.115) com relação ao multiplicador de Lagrange Ω retorna a equação da continuidade para fluido compressível. Vale a pena notarmos que, nas seções (3.6), (3.7) e (3.8), o segundo coeficiente de viscosidade (λ) pode admitir qualquer valor desde que constante.

CAPÍTULO 4 - COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Neste capítulo faremos algumas considerações adicionais sobre os princípios variacionais apresentados nos capítulos dois e três.

O escoamento irrotacional, em regime permanente de um fluido ideal e incompressível, é descrito pelos princípios variacionais de Kelvin [sec.-2.1] e de Dirichlet [sec.-2.2]. Para obtermos uma solução aproximada para escoamentos deste tipo, basta utilizarmos o método variacional, levando em conta um dos princípios variacionais acima citados.

Obtida a solução aproximada, resta-nos verificar a precisão desta solução, isto é, qual a diferença entre a solução aproximada e a exata. Neste ponto, tiramos vantagem do fato de existirem princípios variacionais recíprocos, que descrevam o escoamento que estamos estudando. Substituindo-se a solução aproximada no funcional (2.2) obtemos um valor aproximado para a energia cinética do volume onde estamos considerando o escoamento. Este valor aproximado certamente será um limitante superior para o valor exato da energia cinética, pois sabemos que esta constitui um mínimo para o escoamento analisado. Substituindo-se a solução aproximada no funcional (2.17), vamos obter uma aproximação para $J[\vec{v}]$. Como mostrado na seção 2.2, esta aproximação fornece um limitante inferior para a energia cinética exata. A diferença entre os dois limitantes acima pode nos dar uma idéia da precisão da solução aproximada. Quando a diferença entre os limitantes for grande, podemos afirmar que a precisão da solução aproximada é pobre, porém, se esta diferença for pequena, podemos dizer apenas que a solução aproximada pode estar próxima da solução exata. Se queremos analisar o valor aproximado obtido para a energia cinética, então uma diferença pequena entre os limitantes permite-nos concluir que este valor aproximado tem boa precisão.

O escoamento irrotacional em regime permanente de um fluido ideal e compressível também é descrito por princípios variacionais recíprocos [sec.-2.3 e 2.4]. De maneira análoga ao exposto acima, podemos encontrar uma solução aproximada pelo método variacional e ainda verificar sua precisão com a utiliza

ção dos princípios variacionais recíprocos.

As equações do movimento de um escoamento em regime não permanente de um fluido ideal e compressível são obtidas através do princípio variacional de Herivel [sec.-2.5]. A diferença fundamental entre este e os princípios apresentados nas seções anteriores, consiste no fato que o princípio de Herivel não necessita de um conhecimento "a priori" das equações do movimento, obtendo-as sempre que conheçamos as energias cinética, potencial e interna do sistema que estamos estudando.

Segundo Herivel [16], a única forma do princípio de Hamilton, própria para sistemas contínuos, é aquela apresentada na seção 2.5. Este considera que a obtenção das equações do movimento do escoamento de um fluido ideal, representa apenas um caso particular de um princípio geral que, de forma análoga ao princípio de Hamilton, sempre obtém as equações do movimento.

O princípio de Herivel-Lin [sec.-2.6] permite que, através do método variacional, obtenhamos soluções aproximadas para qualquer escoamento de um fluido ideal. Segundo Serin [30], o princípio de Herivel não é um mínimo nem um máximo. Assim, se o escoamento que queremos analisar é em regime permanente e irrotacional, é preferível estudá-lo utilizando os princípios das seções anteriores à 2.5, pois desta forma podemos tirar vantagem do fato de existirem princípios variacionais recíprocos.

O escoamento em regime permanente de um fluido viscoso e incompressível, onde os termos de inércia são desprezados, possui uma descrição variacional conhecida como princípio da dissipação mínima de Helmholtz [sec.-3.2]. Admitindo que a dissipação viscosa seja análoga a dissipação elétrica, obtivemos as relações entre as correntes que passam por cada resistor e a corrente total que passa por um circuito elétrico, através da aplicação do conceito da dissipação mínima [ver apêndice C]. Os exemplos acima representam casos particulares de aplicação do conceito da dissipação mínima e baseados neles não podemos afirmar que este conceito sempre seja válido. No entanto, tais exemplos nos mostram que o conceito da dissipação mínima possui certas possibilidades que devem ser exploradas em trabalhos futu

ros.

O princípio variacional de Brill [sec.-3.3] tentou estender o princípio de Helmholtz para o caso de escoamentos onde os termos de inércia são considerados. Sua tentativa obteve sucesso parcial, pois seu princípio variacional conduz a equação

$$\frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} v^2 = \rho \vec{\nabla} \psi - \vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad , \quad (4.1)$$

onde o termo $\frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} v^2$ aparece no lugar de $\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$, isto é, o princípio de Brill descreve escoamentos em regime permanente, onde o termo $\rho \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$ é igual a zero. Na seção 3.3 podemos observar que $\frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} v^2$ foi obtido diretamente do termo $\frac{1}{2} \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v^2$, o qual faz parte do integrando do funcional (3.40).

Este termo pode ser obtido pela multiplicação de $\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ escalarmente por \vec{v} , porém, quando esta multiplicação é efetuada perdemos o termo $\rho \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$, pois

$$\vec{v} \cdot \left[\rho \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right] = 0 \quad (4.2)$$

Notemos que o raciocínio acima fica mais claro se lembrarmos que

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - \rho \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad (4.3)$$

A análise anterior tem o objetivo de mostrar que o funcional (3.40) não possui informações a respeito do termo $\rho \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$. Pensando desta maneira não poderíamos esperar que este termo aparecesse na equação (4.1). Do exposto acima, concluímos que alguma informação a respeito do termo $\rho \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$ deve ser fornecida ao modelo matemático, representado pelo funcional (3.40). Devemos lembrar dos trabalhos de Millikan e Finlayson [sec.-3.4] que provaram que tais termos não podem ser obtidos através da extremização de funcionais que dependam das componentes do vetor velocidade e de suas derivadas primeiras. Baseados nestas informações, talvez seja possível obter um princípio variacional que conduza a equação de Navier-Stokes para fluido incompressível e regime permanente.

Na seção 3.5, apresentamos o princípio variacional de Bird, o qual generaliza o princípio de Helmholtz para o caso de fluido newtoniano generalizado. Segundo Bird [3], a dissipação é um mínimo quando consideramos fluidos newtonianos e de Ostwald-de Waele, porém, para outros tipos de fluidos, verifica-se [3] que a dissipação não é um mínimo.

Para o caso de escoamento compressível, mostramos na seção 3.6 um princípio variacional válido para o regime permanente. Verificamos nas seções 3.6, 3.7 e 3.8, que a extremização do funcional (3.89) sujeito aos vínculos dados pelas equações do movimento e continuidade, nos conduzem às próprias equações que foram usadas como vínculos. O exposto acima mostra que a formulação apresentada tem como único objetivo a obtenção de soluções aproximadas para os campos de velocidade, pressão e densidade de escoamentos em regime permanente de fluidos newtonianos e compressíveis.

No capítulo três valorizamos o conceito da dissipação mínima. Tal procedimento foi motivado pelo teorema de Helmholtz [sec.-3.1] e pela utilização do conceito da dissipação mínima na análise de circuitos elétricos. No entanto, devemos enfatizar que o procedimento adotado no capítulo três pode não ser o mais "natural".

Na opinião do autor, os exemplos acima são casos particulares de um "princípio" variacional geral, que poderia inclusive ser aplicado a vários campos da física. Esta afirmação é baseada na hipótese intuitiva que o caminho percorrido por cada partícula, de um conjunto de partículas em movimento num meio dissipativo, deve ser tal que, a "resistência oferecida" a todo o conjunto seja a mínima possível.

Para finalizar, achamos que pesquisas futuras poderiam ser orientadas no sentido de encontrar-se uma expressão matemática, que representasse a "resistência oferecida" a todo o conjunto de partículas do meio em estudo. A minimização de tal expressão poderia resultar nas equações do movimento.

APÊNDICE A - GENERALIDADES SOBRE CÁLCULO VARIACIONAL

Apresentamos aqui, alguns aspectos simples sobre cálculo variacional por ser a base matemática dos princípios variacionais estudados neste trabalho. Nosso objetivo é evitar redundâncias desnecessárias durante as análises dos princípios variacionais.

A.1 - Introdução

Chamamos $v = v [y(x)]$ de funcional dependente da função $y(x)$, a qual pertence à uma certa classe de funções, se a cada função $y(x)$ desta classe corresponder um número v . Como exemplo podemos citar

$$v [y(x)] = \int_a^b y(x) dx, \quad (A.1)$$

para qualquer função $y(x)$ integrável em $[a, b]$. Neste caso, as funções integráveis em $[a, b]$ constituem a classe que nos referimos na definição acima.

Nota 1: Analogamente pode-se definir funcionais que dependem de várias funções, e ainda funcionais que dependem de funções de várias variáveis independentes.

Chama-se incremento ou variação δy do argumento $y(x)$ do funcional $v = v [y(x)]$ à diferença entre duas funções admissíveis $\bar{y}(x)$ e $y(x)$, tal que

$$\delta y = \bar{y}(x) - y(x) \quad (A.2)$$

Nota 2: funções admissíveis são aquelas que pertencem a uma certa classe de funções.

Pode-se definir [8] variação (δv) de um funcional $v [y(x)]$ da seguinte maneira:

$$\delta v = \left. \frac{d}{d\alpha} v [y(x) + \alpha \delta y] \right|_{\alpha=0} \quad (A.3)$$



onde $y(x) + \alpha \delta y$ é uma família monoparamétrica de funções.

Podemos mostrar [8] que a condição necessária para que um funcional tenha um extremo é que a variação δv deste funcional seja igual a zero.

A.2 - Problema mais simples do cálculo variacional

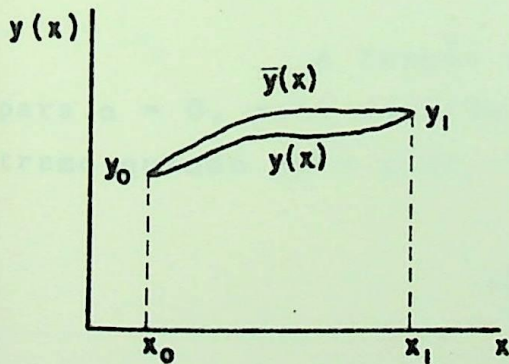
Desejamos analisar o extremo do funcional

$$v [y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F [x, y(x), y'(x)] dx \quad (A.4)$$

onde a função $F(x, y, y')$ é derivável duas vezes com relação a todos os argumentos e $y' = dy/dx$. Já sabemos que para analisarmos o extremo do funcional (A.4) devemos encontrar a variação δv . Para tanto, suponhamos que o funcional (A.4) alcança um extremo para a curva $y = y(x)$ diferenciável duas vezes. A seguir, vamos construir uma família monoparamétrica de curvas

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha [\bar{y}(x) - y(x)] \quad (A.5)$$

onde $y = \bar{y}(x)$ é uma curva admissível (diferenciável duas vezes) vizinha de $y = y(x)$, como mostrado na figura A.1



Notemos que os valores das curvas admissíveis nos pontos extremos são fixos, isto é

$$y_0 = y(x_0) = \bar{y}(x_0)$$

$$y_1 = y(x_1) = \bar{y}(x_1)$$

Figura A-1

Substituindo (A.2) em (A.5), obtemos

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y \quad (A.6)$$

Observando (A.5) verificamos que para $\alpha = 0$ obtemos $y(x,0) = y(x)$ e para $\alpha = 1$ obtemos $y(x,1) = \bar{y}(x)$.

Se considerarmos os valores do funcional (A.4) somente nas curvas da família monoparamétrica (A.6), verificamos que o funcional (A.4) se transforma em uma função do parâmetro α , de modo que

$$\phi(\alpha) = v [y(x,\alpha)] = \int_{x_0}^{x_1} F [x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)] dx \tag{A.7}$$

Nota 3: As funções $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ são consideradas fixas, de modo que para cada valor de α , temos uma função da família $y(x,\alpha)$, e para esta função temos um valor do funcional $v [y(x,\alpha)]$. Por definição o funcional (A.7) alcança um extremo para $\alpha = 0$, pois para $\alpha = 0$ temos $y(x,0) = y(x)$ que foi admitida ser a função que extremiza (A.4).

A condição necessária para que a função $\phi(\alpha)$ alcance um extremo [8] é:

$$\frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} = 0 \tag{A.8}$$

A função $\phi(\alpha)$ da equação (A.7) alcança um extremo para $\alpha = 0$, pois admitimos que o funcional (A.4) alcança um extremo quando $y = y(x)$. Logo

$$\frac{d\phi(0)}{d\alpha} = 0 \tag{A.9}$$

Efetuada a derivação de $\phi(\alpha)$ definida por (A.7), obtemos

$$\frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + F_{y'} \frac{dy'(x,\alpha)}{d\alpha} \right] dx \tag{A.10}$$

onde

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F [x, y, y']$$

$$F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F [x, y, y']$$

$$\frac{d}{d\alpha} y(x, \alpha) = \frac{d}{d\alpha} [y(x) + \alpha \delta y] = \delta y$$

$$\frac{d}{d\alpha} y'(x, \alpha) = \frac{d}{d\alpha} [y'(x) + \alpha \delta y'] = \delta y'$$

A função $\phi(\alpha)$ alcança um extremo quando $\alpha = 0$ e

portanto

$$\frac{d\phi(0)}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x, y(x), y'(x)) \delta y + F_{y'}(x, y(x), y'(x)) \delta y' \right] dx = 0 \quad (A.11)$$

Por meio de uma integração por partes da segunda parcela do integrando de (A.11), obtemos

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] \delta y dx + \left[F_{y'} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} = 0 \quad (A.12)$$

Sabemos que

$$\delta y \Big|_{x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0 \quad (A.13a)$$

$$\delta y \Big|_{x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0 \quad (A.13b)$$

Considerando as condições (A.13a,b) obtemos de

(A.12) que

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] \delta y dx = 0 \quad (A.14)$$

Nota 4: O lema fundamental do cálculo variacional [8] afirma que:

Se para cada função contínua $\eta(x)$ temos

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi(x) \eta(x) dx = 0$$

sendo $\phi(x)$ uma função contínua em $[x_0, x_1]$, então

$$\phi(x) = 0$$

Apliquemos agora o lema fundamental para simplificar a equação (A.14). Verificamos que as condições do lema são todas obedecidas, pois o fator $(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'})$ é uma função contínua e a variação δy é uma função arbitrária, com limitações de caráter geral [8]. Assim de (A.14) temos que

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (\text{A.15})$$

A função $y = y(x)$ que é a solução da equação (A.15) torna o funcional (A.4) um extremo.

Desenvolvendo (A.15), obtemos

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0 \quad (\text{A.16})$$

onde

$$F_{y'x} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial x}; \quad F_{y'y} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial y}; \quad F_{y'y'} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

As equações (A.15) ou (A.16) são conhecidas como equações de Euler-Lagrange.

A.3 - Funcionais que dependem de várias funções

Aqui vamos estudar funcionais do tipo

$$v [y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F [x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n] dx \quad (A.17)$$

com condições de contorno

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}$$

$$y_1(x_1) = y_{11}, \quad y_2(x_1) = y_{21}, \quad \dots, \quad y_n(x_1) = y_{n1}$$

Seguindo o procedimento mostrado na seção anterior, verifica-se [8] que as equações de Euler-Lagrange para funcionais do tipo (A.17) são:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (A.18)$$

Assim as funções $y_i = y_i(x)$ que são soluções do sistema de equações (A.18), tornam o funcional (A.17) um extremo.

A.4 - Funcionais que dependem das derivadas de ordem superior da função $y(x)$

Nesta seção vamos estudar funcionais do tipo

$$v [y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F [x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)] dx \quad (A.19)$$

No funcional (A.19) a função F é diferenciável $n+2$ vezes com respeito a todos os argumentos e temos como condições de contorno

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (A.20a)$$

$$y(x_1) = y_1 ; y'(x_1) = y'_1 ; \dots ; y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)} \quad (\text{A.20b})$$

A função $y = y(x)$ que extremiza o funcional (A.19) é a solução da equação de Euler-Lagrange

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0 \quad (\text{A.21})$$

A.5 - Funcionais que dependem de várias funções e de suas derivadas de ordem superior

Seja o funcional

$$v [y_1, y_2, \dots, y_k] = \int_{x_0}^{x_1} F \left[x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_1'', y_1''', \dots, y_1^{(n_1)}, y_2', y_2'', \dots, y_2^{(n_2)}, y_1', y_1'', \dots, y_k^{(n_k)} \right] dx \quad (\text{A.22})$$

De forma análoga as seções anteriores, verifica-se [8] que as funções y_1, y_2, \dots, y_k que extremizam o funcional (A.22) são as soluções do sistema de equações de Euler-Lagrange abaixo

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y_i''} + \dots + (-1)^{n_i} \frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}} F_{y_i^{(n_i)}} = 0$$

$$c/i = 1, 2, \dots, k.$$

(A.23)

A.6 - Funcionais que dependem de uma função de várias variáveis independentes

Nesta seção vamos analisar um funcional que depende de uma função z dependente de duas variáveis independentes, de modo que $z = z(x, y)$.

Seja o funcional

$$v [z(x,y)] = \int \int_D F(x,y,z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) dx dy \tag{A.24}$$

Vamos supor que os valores da função $z = z(x,y)$ são dados na fronteira da região D, por onde devem passar todas as superfícies admissíveis.

Para simplificar a notação, façamos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

Pode ser mostrado [8] que a variação do funcional (A.24) é igual a

$$\delta v = \int \int_D \left[F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q \right] \delta z dx dy \tag{A.25}$$

Igualando (A.25) a zero e levando em conta que o lema fundamental do cálculo variacional pode ser generalizado para este caso [8], obtemos

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q = 0 \tag{A.26}$$

onde

$$F_z = \frac{\partial F}{\partial z} ; \quad F_p = \frac{\partial F}{\partial p} ; \quad F_q = \frac{\partial F}{\partial q}$$

Desta forma, a função $z = z(x,y)$, que é a solução da equação de Euler-Lagrange (A.26), é a função que extremiza o funcional (A.24).

A.7 - Functionais que dependem de várias funções, as quais dependem de várias variáveis independentes

Seja o funcional

$$v \left[w_1, w_2, w_3 \right] = \iiint_v F \left[x, y, z, w_1, w_2, w_3, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, u_1, u_2, u_3 \right] dx dy dz \quad (A.27)$$

onde

$$p_i = \frac{\partial w_i}{\partial x} \quad ; \quad q_i = \frac{\partial w_i}{\partial y} \quad ; \quad u_i = \frac{\partial w_i}{\partial z}$$

$$w_i = w_i(x, y, z) \quad c/ i = 1, 2, 3$$

Este problema variacional é uma generalização da seção anterior, sendo que as funções $w_i = w_i(x, y, z)$ que extremizam (A.27) são as soluções do sistema de Euler-Lagrange.

$$F_{w_i} - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_i} - \frac{\partial}{\partial y} F_{q_i} - \frac{\partial}{\partial z} F_{u_i} = 0 \quad c/ i = 1, 2, 3 \quad (A.28)$$

A.8 - Funcionais que dependem de funções de duas variáveis independentes e de suas derivadas de primeira e segunda ordem

Seja o funcional

$$v \left[z(x, y) \right] = \iint_D F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (A.29)$$

A função $z = z(x, y)$, que torna o funcional (A.29) um extremo, é a solução da equação diferencial parcial de 4a. ordem abaixo

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_r + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_s + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_t = 0 \quad (A.30)$$

onde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

A equação (A.30) é a equação de Euler-Lagrange para funcionais do tipo (A.29).

A.9 - Funcionais que dependem de funções, as quais estão relacionadas entre si por meio de vínculos

A.9.1 - Analisaremos agora o problema de se determinar quais as funções

$$y_i = y_i(x) \quad c/ i = 1, 2, \dots, n,$$

que extremizam o funcional

$$v [y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F [x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n'] dx \quad (A.31)$$

e ainda devem satisfazer as equações

$$\phi_j (x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad c/ j = 1, 2, \dots, m; \quad m < n \quad (A.32)$$

As equações (A.32) são chamadas de vínculos.

Para resolver o problema variacional acima, vamos utilizar a técnica dos multiplicadores de Lagrange [8], mostrada a seguir.

Inicialmente, montamos um novo funcional

$$v^* = v + \int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \cdot \phi_j \right) dx \quad (A.33)$$

Logo

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \phi_j \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx \quad (A.34)$$

onde

$$F^* = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \cdot \phi_j$$

$\lambda_j(x)$ = multiplicadores de Lagrange.

Com isto, podemos agora analisar quais as funções $y_i = y_i(x)$ que extremizam o funcional (A.34), utilizando os métodos mostrados nas seções anteriores, sem nos preocuparmos com os vínculos (A.32). Desta forma, obtemos as funções $y_i(x)$ que, entre as funções admissíveis que satisfazem os vínculos (A.32), extremizam o funcional (A.31).

As funções $y_i(x)$ e $\lambda_j(x)$ são as soluções do sistema de equações

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{y_i'}^* = 0 \quad c/ i = 1, 2, \dots, n \quad (A.35a)$$

$$\phi_j = 0 \quad c/ j = 1, 2, \dots, m \quad (A.35b)$$

A.9.2 - Vamos analisar o problema de se obter as funções $y_i = y_i(x)$ que extremizam o funcional (A.31), sabendo-se que estas estão relacionadas entre si por meio de vínculos do tipo

$$\phi_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0 \quad c/ j = 1, 2, \dots, m \quad (A.36)$$

Novamente utilizaremos a técnica dos multiplicadores

dores de Lagrange [8] e para tanto montamos o funcional

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \phi_j \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx \quad (\text{A.37})$$

onde

$$F^* = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \phi_j$$

$\lambda_j(x)$ = multiplicadores de Lagrange

De maneira análoga a seção anterior, as funções $y_i(x)$ e $\lambda_j(x)$ são obtidas do sistema de equações

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{y_i'}^* = 0 \quad \text{c/ } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.38a})$$

$$\phi_j = 0 \quad \text{c/ } j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{A.38b})$$

Notemos que as funções $y_i(x)$ encontradas acima são aquelas que, entre as funções admissíveis que satisfazem os vínculos (A.36), extremizam o funcional (A.31).

A.9.3 - Aqui desejamos obter as funções $y_i(x)$ que extremizam o funcional (A.31), sabendo-se que estas devem satisfazer aos vínculos

$$\int_{x_0}^{x_1} F_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx = L_j \quad \text{c/ } j=1, 2, \dots, m \quad (\text{A.39})$$

onde L_j são constantes para $j = 1, 2, \dots, m$.

Os vínculos do tipo (A.39) são chamados de isoperimétricos.

Novamente, vamos utilizar a técnica dos multiplicadores de Lagrange [8], para tanto montamos um novo funcional

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{j=1}^m \lambda_j F_j \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx \quad (A.40)$$

onde

$$F^* = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j F_j$$

Pode ser mostrado [8], que neste caso os multiplicadores de Lagrange λ_j são constantes.

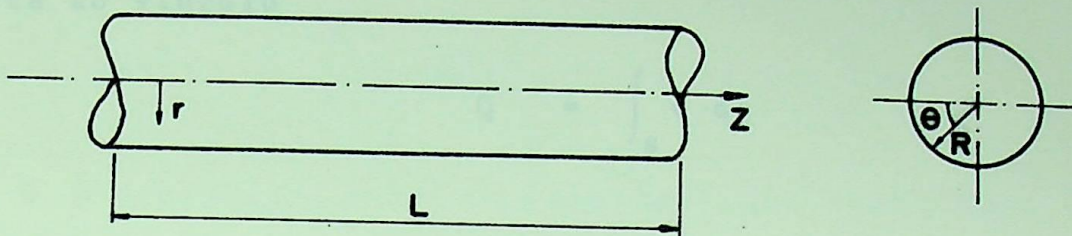
As equações de Euler-Lagrange para o funcional (4.40) são:

$$F^*_{y_i} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_i} = 0 \quad c/ i = 1, 2, \dots, n \quad (A.41)$$

As funções $y_i = y_i(x)$ tem como parâmetros os multiplicadores de Lagrange, os quais devem ser determinados pela utilização dos vínculos isoperimétricos (A.39).

APÊNDICE B - APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DA DISSIPACÃO MÍNIMA PARA ESCOAMENTO NO INTERIOR DE TUBO

Estudaremos a seguir o escoamento de um fluido newtoniano e incompressível em regime permanente no interior de um tubo de seção constante. Vamos considerar escoamento laminar e desenvolvido.



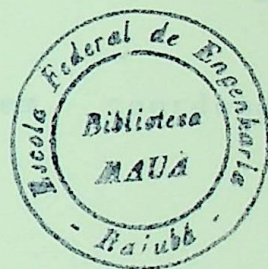
Devido a simetria axial do problema $v_\theta = 0$. Logo o vetor velocidade em coordenadas cilíndricas fica

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_z \vec{e}_z \quad (\text{B.1})$$

onde

v_r = componente da velocidade na direção r

v_z = componente da velocidade na direção z .



Como o escoamento é desenvolvido $v_r = 0$ e devido a equação da continuidade em coordenadas cilíndricas [24], temos

$$v_z = v_z(r) \quad (\text{B.2})$$

Como v_z é a única componente da velocidade diferente de zero, vamos chamá-la simplesmente de v para facilitar a notação.

As condições de contorno para este problema são:

$$r = 0 \quad \rightarrow \quad v(0) = V_{\max} \quad (\text{B.3a})$$

$$r = R \quad \rightarrow \quad v(R) = 0 \quad (\text{B.3b})$$

Desejamos conhecer o campo de velocidade $v = v(r)$ do escoamento no interior do tubo da figura acima, quando a vazão em volume que atravessa a seção transversal do tubo for conhecida. Para tanto vamos minimizar a dissipação total [eq. (3.20)]

$$Pd = \int_v \phi dv \quad (B.4)$$

sujeita ao vínculo

$$Q = \int_s v ds \quad (B.5)$$

onde

Q = vazão em volume que atravessa área S

S = área da seção transversal do tubo

$ds = 2\pi r dr$ (elemento da superfície de área S)

Notemos que a vazão Q é constante, pois estamos considerando escoamento em regime permanente, e portanto, o vínculo (B.5) é do tipo isoperimétrico!

Para este caso, a função dissipação em coordenadas cilíndricas [24] fica

$$\phi = \mu \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 \quad (B.6)$$

Substituindo (B.6) em (B.4), obtemos

$$Pd = \int_0^L \int_0^R \mu \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 \cdot 2\pi r dr dz \quad (B.7)$$

Sabemos que $v = v(r)$ [eq.(B.2)] e, portanto (B.7) fica

$$Pd = \int_0^R \mu L \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 \cdot 2\pi r dr \quad (B.8)$$

De (B.5) obtemos que

$$Q = \int_0^R v \cdot 2\pi r \, dr \quad (B.9)$$

Para resolvermos o problema variacional, da minimização de (B.8) sujeito ao vĩnculo (B.9), vamos utilizar a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Seguindo o procedimento mostrado no apêndice A, montamos um novo funcional

$$Pd^* = \int_0^R \left[\mu L \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 \cdot 2\pi r + \Omega v \cdot 2\pi r \right] dr \quad (B.10)$$

onde Ω é o multiplicador de Lagrange, que neste caso é constante.

A função $v = v(r)$ que minimiza o funcional (B.10) é a solução da equação de Euler-Lagrange [ver apêndice A]

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dr} \left[\frac{\partial F}{\partial v'} \right] = 0 \quad (B.11)$$

onde

$$F = \text{integrando do funcional (B.10)}$$

$$v' = \frac{dv}{dr}$$

Substituindo a expressão da função F na equação (B.11), temos

$$2\mu L \frac{d}{dr} \left[r \frac{dv}{dr} \right] = \Omega r \quad (B.12)$$

Integrando (B.12), temos

$$r \frac{dv}{dr} = \frac{\Omega}{4\mu L} \cdot r^2 + C_1 \quad (B.13)$$

$$v(r) = \frac{\Omega}{8\mu L} \cdot r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (B.14)$$

A equação (B.14) é a solução geral do problema considerado. As constantes de integração C_1 e C_2 são determina

das pelas condições de contorno e a constante Ω (multiplicador de Lagrange) é obtida pela condição isoperimétrica (B.9).

Aplicando as condições de contorno

$$r = 0 \rightarrow v(0) = V_{\max} = \frac{\Omega}{8\mu L} \cdot 0 + C_1 \ln 0 + C_2 \quad (\text{B.15})$$

como V_{\max} tem um valor finito, concluimos que $C_1 = 0$

$$r = R \rightarrow v(R) = \frac{\Omega}{8\mu L} R^2 + C_2 = 0 \quad (\text{B.16})$$

então

$$C_2 = - \frac{\Omega}{8\mu L} R^2 \quad (\text{B.17})$$

Desta forma a equação (B.14) fica

$$v(r) = - \frac{\Omega}{8\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \quad (\text{B.18})$$

Substituindo $v = v(r)$ da eq. (B.18) na condição isoperimétrica (B.9) obtemos

$$Q = -2\pi \int_0^R \frac{\Omega}{8\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] r dr \quad (\text{B.19})$$

efetuando a integral acima, obtemos

$$\Omega = - \frac{16\mu L Q}{\pi R^4} \quad (\text{B.20})$$

Substituindo (B.20) em (B.18), temos

$$v(r) = \frac{16\mu L Q}{\pi R^4} \cdot \frac{R^2}{8\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \quad (\text{B.21})$$

$$v(r) = \frac{2Q}{\pi R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \quad (\text{B.22})$$

Sabemos que a relação entre vazão (Q) e velocidade de média (\bar{v}) é dada por

$$Q = \pi R^2 \cdot \bar{v} \quad (\text{B.23})$$

Substituindo (B.23) em (B.22), resulta que

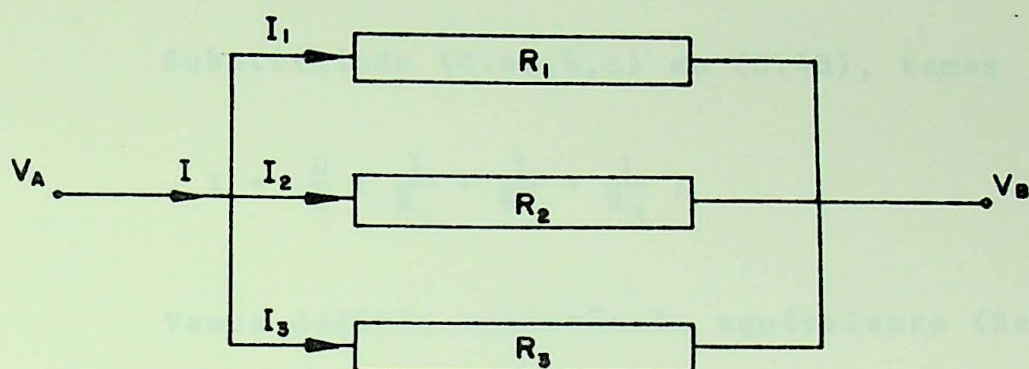
$$v(r) = 2 \bar{v} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{B.24})$$

Utilizando a condição de contorno (B.3a) obtemos que $2 \bar{v} = v_{\max}$.

APÊNDICE C - APLICAÇÃO DO CONCEITO DA DISSIPACÃO MÍNIMA NA ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Este apêndice tem o objetivo de ilustrar a obtenção das relações entre as correntes que passam por cada resistor e a corrente total que passa pelo circuito, através da aplicação do conceito da dissipação mínima. Isto é feito com a finalidade de compararmos com o escoamento de fluidos.

Consideremos o circuito elétrico simples, constituído por três resistores em paralelo como mostrado na figura abaixo.



Vamos admitir que os resistores possuem resistências R_1 , R_2 e R_3 conhecidas e que $V_A - V_B$ é a diferença de potencial entre os pontos mostrados na figura acima. Queremos determinar quais as correntes que passam por cada um dos resistores. Para tanto, vamos minimizar a potência total dissipada pelo circuito

$$P_T = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 \quad (C.1)$$

sujeita ao vínculo

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (C.2)$$

Para resolver o problema formulado acima, vamos utilizar a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Esta técnica diz que devemos montar uma nova função

$$P_T^* = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + \Omega (I - I_1 - I_2 - I_3) \quad (C.3)$$

onde Ω é o multiplicador de Lagrange. Na equação (C.3) a função

P_T^* é dependente das variáveis independentes I_1 , I_2 , I_3 e Ω . Minimizando (C.3), obtemos

$$2 R_1 I_1 - \Omega = 0 \quad (C.4a)$$

$$2 R_2 I_2 - \Omega = 0 \quad (C.4b)$$

$$2 R_3 I_3 - \Omega = 0 \quad (C.4c)$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (C.4d)$$

Substituindo (C.4a,b,c) em (C.4d), temos

$$I = \frac{\Omega}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \quad (C.5)$$

Vamos definir resistência equivalente (R_{eq}) por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (C.6)$$

Substituindo (C.6) em (C.5), resulta

$$\Omega = 2 R_{eq} I \quad (C.7)$$

Substituindo (C.7) em (C.4a,b,c), obtemos

$$I_1 = \frac{R_{eq}}{R_1} I \quad (C.8a)$$

$$I_2 = \frac{R_{eq}}{R_2} I \quad (C.8b)$$

$$I_3 = \frac{R_{eq}}{R_3} I \quad (C.8c)$$

Através do sistema de equações (C.8a,b,c) podemos obter as correntes I_1 , I_2 e I_3 desde que saibamos o valor de valor

da corrente I . Notemos que a lei de Ohm não foi utilizada e que o conceito de diferença de potencial não apareceu. Devemos enfatizar que o método apresentado neste apêndice é válido para circuitos mais complexos com resistores em série e paralelo.

- [1] BAYEN, J. - "On the Variational Principles for the Flow of a Viscous Fluid and the Associated Variational Problems". *Proc. Roy. Soc. Lond. (Ser. A)*, 2, 123, p. 398-412, 1925.
- [2] BATTMAN, H. - "Variational Solution of a Compressible Viscous Fluid". *Proc. Roy. Soc. Lond. (Ser. A)*, Vol. 13, p. 412-425, 1930.
- [3] BIRD, R.B. - "New Variational Principles for Incompressible Non-Newtonian Flow". *Journal of Applied Physics*, Vol. 3, No. 2, p. 329-341, 1962.
- [4] BRINTON, P.H. - "A Note on Hamilton's Principle for Perfect Fluids". *J. Fluid Mech.*, Vol. 14, 1962, 1, p. 27-31, 1970.
- [5] BRUGER, A.S. - *The Dynamics of Fluid Motion*. McGraw-Hill, U.S.A., 1977.
- [6] BUTHA, R.M. & SHERIFF, G. - "Application of a Variational Formulation to Equilibrium Flow Flow". *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 19, p. 1253-1266, 1976.
- [7] CHENG, S.C.; KISHA, S.O. & CHU, T.C. - "Application of a Variational Method to Flow over a Flat Plate". *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 19, p. 1277-1284, 1976.
- [8] ELSGOLITZ, L. - *Variational Methods in Physics and Engineering*. Butterworths, Editorial Div., London, 1961.
- [9] FINLAYSON, B.A. & SCRIVEN, G.E. - "The Variational Principles". *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 10, p. 799-821, 1967.
- [10] FINLAYSON, B.A. - "Variational Principles for the Navier-Stokes Equations". *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 10, p. 1277-1284, 1967.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BATEMAN, H. - "Notes on a Differential Equation which Occurs in Two-Dimensional Motion of a Compressible Fluid and the Associated Variational Problems". Roy. Soc. Proc. (London), A 125, p. 598-618, 1929.
- [2] BATEMAN, H. - "Irrotational Motion of a Compressible Inviscid Fluid". Proc.Nat.Acad.Sci. (USA), Vol. 16, p. 816-825, 1930.
- [3] BIRD, R.B. - "New Variational Principle for Incompressible Non-Newtonian Flow". Physics of Fluids, Vol. 3, nº 4, p. 539-541, 1960.
- [4] BRETHERTON, F.P. - "A Note on Hamilton's Principle for Perfect Fluids". J. Fluid Mech., Vol. 44, part. 1, p. 19-31, 1970.
- [5] BRODKEY, R.S. - The Phenomena of Fluid Motions. Addison-Wesley, U.S.A., 1967.
- [6] BUTLER, H.W. & RACKLEY, R. - "Application of a Variational Formulation to Nonequilibrium Fluid Flow". Int.J.Heat Mass Transfer, Vol. 10, p. 1255-1266, 1967.
- [7] CHENG, S.C.; BIRTA, L.G. & SU, Y.L. - "Application of a Variational Method to Flow over a Flat Plate in the Entrance Region with variable Physical Properties". Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, p. 1933-52, 1972.
- [8] ELSGOLTZ, L. - Ecuaciones diferenciales y Cálculo Variacional. Editorial MIR, Moscu, 1977.
- [9] FINLAYSON, B.A. & SCRIVEN, L.E. - "On the Search for Variational Principles". Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.10, p. 799-821, 1967.
- [10] FINLAYSON, B.A. - "Existence of Variational Principles for the Navier-Stokes Equation". Phys. of Fluids, Vol.15, nº 6, p. 963-67, 1972.

- [11] FINLAYSON, B.A. - The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. (with application in Fluid Mechanics, Heat and Mass Transfer). Academic Press, U.S.A., 1972.
- [12] GLANSDORFF, P.; PRIGOGINE, I. & HAYS, D.F. - "Variational Properties of a Viscous Liquid at a Monuniform Temperature". Phys. of Fluids, Vol. 5, n^o 2, p. 144-149, 1962.
- [13] GLANSDORFF, P. & PRIGOGINE, I. - "On a General Evolution Criterion in Macroscopic Physics". Physica, Vol. 30, p. 351-374, 1964.
- [14] HAYS, D.F. - "An Extended Variational Method Applied to Poiseuille Flow: Temperature Dependent Viscosity". Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 9, p. 165-170, 1966.
- [15] HAYS, D.F. - "A Variational Approach to Lubrication Problems and the Solution of Finite Journal Bearing". J. Basic Eng., Vol. 81, p. 13-23, 1959.
- [16] HERIVEL, J.W. - "The Derivation of the Equations of Motion of an Ideal Fluid by Hamilton's Principle". Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 51, p. 344-349, 1955.
- [17] HILL, R. & POWER, G. - "Extremum Principles for slow Viscous Flow and the Approximate Calculation of Drag". Quart. Journ. Mech. Appl. Math., Vol. IX, p. 313-319, 1956.
- [18] JOHNSON, M.W. - "Some Variational Theorems for Non-Newtonian Flow". Phys. of Fluids, Vol. 3, n^o 6, p. 871-878, 1960.
- [19] KEARLEY, E.A. - "Bounds on the Dissipation of Energy in Steady Flow of a Viscous Incompressible Fluid around a Body Rotating Within a Finite Region". Archs. ration. Mech. Analysis, Vol. 5, n^o 1, p. 347-354, 1960.
- [20] LUSH, P.E. & CHERRY, T.M. - "The Variational Method in Hydrodynamics". Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. IX, p. 6-21, 1956.

- [21] LAMB, H. - Hydrodynamics. Dover Publications, 6th edition U.S.A., p. 617-619, 1945.
- [22] MILLIKAN, C.B. - "On the Steady Motion of Viscous, Incompressible Fluids; with particular reference to a Variational Principle". Phil. Mag., Vol. 7, n^o 44, p. 641-662, 1929.
- [23] ODEN, J.T. & REDDY, J.N. - Variational Methods in Theoretical Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [24] PARKER, J.D.; BOGGS, J.H. & BLICK, E.F. - Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer. Addison-Wesley, USA, 1969.
- [25] PAVLOVIĆ, M.I. & MILOJEVIĆ, D.Ž. - "A Variational Approach to the problem of Stationary Laminar Convection with Dissipation in the Variable Property Fluid". Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 24, p. 343-354, 1981.
- [26] PRIGOGINE, I. & GLANSDORFF, P. - "Variational Properties and Fluctuation Theory". Physica, Vol. 31, p. 1242-56, 1965.
- [27] RAYLEIGH - "On the Motion of a Viscous Fluid". Phil. Mag., Vol. LXV, p. 776-786, 1913.
- [28] SCHECHTER, R.S. - The Variational Method in Engineering. McGraw-Hill, U.S.A., 1967.
- [29] SELINGER, R.L. & WHITHAM, G.B. - "Variational Principles in Continuum Mechanics". Proc. Roy.Soc., Vol. A 305, p.1-25, 1968.
- [30] SERRIN, J. - "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics". Handbuch der Physik, Vol. 8, Part. 1, p. 125, edited by Flügge, Springer-Verlag, Berlin, 1959.
- [31] SIENIUTYCZ, S. - "The Variational Principles of Classical Type for non-coupled non-stationary irreversible Transport Processes with Convective Motion and Relaxation". Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 20, p. 1221-31, 1977.

[32]

STEPHENS, J.J. - "Alternate Forms of the Herivel-Lin Va
riational Principle". Phys. Fluids, Vol. 10, n^o 1, p. 76-
-77, 1967

Data 22/10/1983
Proc. _____
Ped. _____
Liv. 099/8063
NCR\$ 20000

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200373



NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA