ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

ESTUDO COMPARATIVO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIGAS E EIXOS OBTIDAS PELOS MÉTODOS DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA E DOS ELEMENTOS FINITOS.

Wlamir Carlos de Oliveira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

ITAJUBÁ - MG

MAIO DE 1984

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca
MAUÁ
Itajubá

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

ESTUDO COMPARATIVO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIGAS E EIXOS OBTIDAS PELOS MÉTODOS DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA E DOS ELEMENTOS FINITOS.

WLAMIR CARLOS DE OLIVEIRA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.**

ITAJUBÁ - M.G.

MAIO DE 1984

CLASS. 519.613:534.14(043.2)
CUTT. .048 e
TOMBO 404

RESUMO

O propósito deste trabalho é comparar os resultados do comportamento dinâmico de vigas e eixos, obtidos através dos métodos das Matrizes de Transferência e dos Elementos Finitos.

Para efeito comparativo, foi ensaiada uma viga engastada-livre com seção variável em vibração transversal.

Foram elaborados vários programas que permitem calcular as frequências e os modos naturais de vibração dos sistemas aqui considerados.

ABSTRACT

The aim of this work is to analyse the dynamic behaviour of beams and shafts by using the methods of the Transfer Matrices and Finite Elements.

For comparative purposes, a variable cross-section cantilever beam under transversal vibration was tested in laboratory.

Various computer programs were developed, for the determination of the vibration modes and natural frequencies of the systems in question.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais:

Afonso e Aparecida.

Aos meus irmãos:

Nancy, Ademir e Almir.

Aos meus sobrinhos:

Giovana, Glauco, Paloma,
Murilo e Janaína.

À minha noiva:

Magda.

AGRADECIMENTOS

Expresso os meus sinceros agradecimentos ao Professor Doutor Márcio Tadeu de Almeida pela orientação e ao Professor Mestre Ricardo Damião Sales Góz pela co-orientação.

Estendo os meus agradecimentos à Escola Federal de Engenharia de Itajubá pela oportunidade que me concedeu em concluir os cursos de Pós-Graduação e esse trabalho.

Ao datilógrafo Luiz Plínio da Silva, desenhista Messias Tadeu Salgado, e a todos que, direta ou indiretamente, contribuiram para a realização deste trabalho, os meus agradecimentos.

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca
MAUÁ
Itajubá

INTRODUÇÃO

Um problema de vibração mecânica como aquele do movimento de uma partícula ou de um corpo oscilando em torno de uma posição de equilíbrio se resolve de maneira simples e rápida.

No entanto, a análise de vibrações torna-se um estudo extenso e complexo quando se tem como problema o desenvolvimento de grandes projetos de engenharia.

Quando se projetam estruturas ou máquinas, são indesejáveis os efeitos como aumento de tensões e perdas de energia, produzidos pelas vibrações, que em muitos casos podem causar a destruição total do sistema em operação. Estes efeitos, portanto, devem ser reduzidos ao máximo, através de adequados projetos.

Por esta e muitas outras razões, a análise do comportamento dinâmico é considerada por todos, já há muito tempo, um estudo de responsabilidade e de grande importância no dimensionamento e projeto de sistemas de engenharia.

Nos últimos anos, tornou-se cada vez mais preocupante o desenvolvimento de novos métodos no cálculo de vibrações, em razão dos grandes aumentos de velocidades dos eixos das máquinas e dos grandes vãos de vigas na construção de estruturas.

Vários métodos de solução, como por exemplo, o método das Matrizes de Transferência e dos Elementos Finitos, são atualmente aplicados para se obter a resposta e aspecto dinâmicos de sistemas contínuos sujeitos à vibrações. Por conseguinte, estes resultados diferem de um para outro método.

O objetivo deste trabalho é exatamente o de comparar os resultados das frequências naturais de sistemas contínuos unidimensionais obtidos através dos métodos acima citados.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - SISTEMAS CONTÍNUOS 1

1.1 - Discussão Geral 1
1.2 - Relações entre Sistemas Contínuos e Discretos ... 2
1.3 - Vibração Livre. O Problema do Auto-valor 7
1.4 - Modelos Discretos Versus Modelos Contínuos para a Vibração Axial de Hastes 14
1.5 - Vibração de Barras a Flexão. Condições de Contorno.. 19
1.6 - Modos Naturais na Vibração de uma Barra a Flexão ... 24
1.7 - Energia Cinética e Potencial para Sistemas Contínuos 29

CAPÍTULO 2 - O MÉTODO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA ... 34

2.1 - Introdução 34
2.2 - Vetores Estado e Matrizes de Transferência 34
2.3 - Análise de Vibrações usando Matrizes de Transferência 39
2.4 - Extensão da Técnica para Sistemas com vários Graus de Liberdade 42
2.5 - Vibrações Transversais de Vigas e Eixos 55
2.5.1 - Matriz Campo para um Elemento "Mola" 56
2.5.2 - Matriz Ponto para um Elemento "Massa" 59
2.6 - Aplicação de Matrizes de Transferência para Cálculo de Frequências Naturais de uma Viga ou Eixo 60
2.6.1 - Solução da Equação (2.104) 63
2.7 - Matrizes de Transferência para Mancais Intermediários Flexíveis 67
2.8 - Matrizes de Transferência Adimensionais 80
2.9 - Matrizes de Transferência para um Sistema Torcional 82

CAPÍTULO 3 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS 91

3.1 - Considerações Gerais 91
3.2 - Equações do Movimento para os Elementos 91
3.3 - Sistemas de Referência 105
3.4 - Equações do Movimento para o Sistema Completo 109
3.5 - O Problema do Auto-Valor 119

CAPÍTULO 4 - TÉCNICA E PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL 126

4.1 - Introdução 126
4.2 - Descrição da Experiência 126
4.3 - Instrumentação e Medidas 131

CAPÍTULO 5 - VALORES DAS FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DE VIGAS E EIXOS 136

5.1 - Considerações Gerais 136
5.2 - Solução do Problema de Vibração Transversal de Vigas ou Eixos pelo Método das Matrizes de Transferência - Programa Nº 1 137
5.3 - Solução do Problema da Vibração Torcional de Eixos pelo Método das Matrizes de Transferência - Programa Nº 2 158
5.4 - Solução do Problema da Vibração Transversal de Vigas pelo Método dos Elementos Finitos - Programa Nº 3 167
5.5 - Solução do Problema de Vibração Torcional de Eixos pelo Método dos Elementos Finitos 177
5.6 - Tabelas dos Resultados 189
5.7 - Comentários e Conclusões 199

APÊNDICE A - EQUAÇÕES DE LAGRANGE 203

A.1 - Princípio dos Trabalhos Virtuais 203
A.2 - Graus de Liberdade 204
A.3 - Coordenadas Generalizadas e Equações de Lagrange ... 206

APÊNDICE B - ORTOGONALIDADE DOS VETORES MODAIS 215

B.1 - Princípio 215

APÊNDICE C - SISTEMAS SEMI-DEFINIDOS 222

C.1 - Generalidades 222

APÊNDICE D - PROGRAMAS ELABORADOS 229

D.1 - Descrição Geral dos Programas 229
D.2 - Dados 229
D.3 - Primeiro Programa Elaborado 231
D.4 - Segundo Programa Elaborado 236
D.5 - Terceiro Programa Elaborado 240

CAPÍTULO 1 - SISTEMAS CONTÍNUOS

1.1 - Discussão Geral

Por ser esse capítulo dedicado aos sistemas contínuos, não deve ser interpretado, no entanto, este fato como prova de que sistemas contínuos e discretos representam diferentes tipos de sistemas exibindo características dinâmicas diferentes. Na realidade, o oposto é que é a realidade, visto que sistemas contínuos e discretos representam meramente dois modelos matemáticos do mesmo sistema físico. Em vista disso, nós devemos esperar um comportamento dinâmico semelhante. A despeito do fato de sistemas discretos serem descritos por equações diferenciais ordinárias e sistemas contínuos por equações diferenciais parciais, o comportamento pode realmente ser mostrado ser semelhante.

Este capítulo começa enfatizando a íntima relação entre sistemas contínuos e discretos. A verdade é que a formulação matemática para um dado sistema contínuo é obtido como um caso limite daquele de um sistema discreto. A discussão continua mostrando que vários conceitos introduzidos no estudo de sistemas discretos têm suas duplicatas em sistemas contínuos. Para um conjunto finito de auto-valores e auto-vetores com dimensão finita corresponde a um conjunto infinito de auto-valores e auto-funções dependentes no espaço. Conceitos como a ortogonalidade de modos naturais de vibração e o resultante teorema da expansão podem ser definidos para sistemas contínuos de uma maneira análoga que para sistemas discretos. Por causa das soluções exatas para a vibração de sistemas contínuos poderem ser obtidas geralmente em casos especiais, somente um número limite de sistemas contínuos serão descutidos, tais como cordas em vibração transversal, hastes em vibração axial, eixos em torção e barras em flexão. Em particular, a analogia entre os três primeiros é enfatizada. Finalmente, expressões para a energia cinética e potencial de sistemas contínuos são obtidas, completando desta forma a analogia com sistemas discretos.

1.2 - Relações entre Sistemas Contínuos e Discretos

Embora isto não seja talvez imediatamente óbvio, existe uma relação muito íntima entre sistemas discretos e contínuos. Na verdade, eles geralmente representam dois modelos matemáticos distintos de um mesmo sistema físico. Para demonstrar isto, nós devemos obter a equação diferencial para a vibração transversal de uma corda, primeiramente considerando-a como um sistema discreto e fazendo-a se aproximar de um modelo contínuo no limite. Então formulamos o problema considerando o sistema como contínuo desde o início.

Vamos considerar um sistema discreto de massas m_i (i = 1,2, ..., n) conectadas por cordas com massas desprezíveis, onde as massas m_i estão sujeitas a forças externas F_i, como mostrado na Fig. 1.1a.

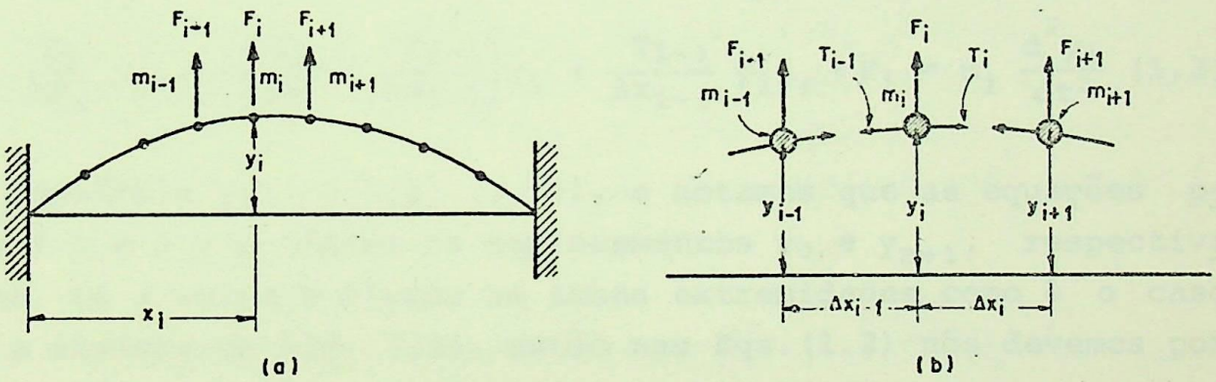


FIG. 1.1 - SISTEMA DISCRETO DA CORDA

Para obter a equação diferencial de movimento para uma massa m_i típica, concentraremos nossa atenção nas três massas adjacentes m_{i-1}, m_i e m_{i+1} da Fig. 1.1b. As tensões nos segmentos de corda que conectam m_i a m_{i-1} e m_{i+1} são denotadas por T_{i-1} e T_i, e as projeções horizontais destes segmentos são

Δx_{i-1} e Δx_i, respectivamente. Os deslocamentos $y_i(t)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ das massas m_i são assumidos serem pequenos, de modo que estas projeções permanecem essencialmente inalteradas durante o movimento. Além disso, os ângulos entre os segmentos de corda e a horizontal são suficientemente pequenos tal que o seno e a tangente dos ângulos são aproximadamente iguais um ao outro. Usando a segunda lei de Newton, a equação do movimento da massa m_i na direção vertical tem a forma

$$T_i \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x_i} - T_{i-1} \frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} + F_i = m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \qquad (1.1)$$

A Eq. (1.1) é aplicável para qualquer massa m_i $(i = 2,3,\ldots,n-1)$. A equação pode também ser usada para $i = 1$ e $i = n$, mas certas condições devem ser feitas para refletir o modo como o sistema é suportado, como veremos brevemente. Rearranjando a Eq. (1.1), obtemos o conjunto simultâneo de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{T_i}{\Delta x_i} y_{i+1} - \left(\frac{T_i}{\Delta x_i} + \frac{T_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}\right) y_i + \frac{T_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} y_{i-1} + F_i = m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \qquad (1.2)$$

nas variáveis y_i $(i = 1,2,\ldots, n)$, e notamos que as equações para $i = 1$ e $i = n$ contêm os deslocamentos y_0 e y_{n+1}, respectivamente. Se a corda é fixada em ambas extremidades, como é o caso com o sistema da Fig. 1.1a, então nas Eqs. (1.2) nós devemos por

$$y_0(t) = y_{n+1}(t) = 0 \qquad (1.3)$$

em outros casos, condições diferentes são possíveis. Realmente, se as extremidades $x = 0$ e $x = L$ são presas à molas verticais, ou se as extremidades são livres a mover ao longo de uma linha vertical, as condições das extremidades devem refletir o fato de que existe uma força proporcional ao alongamento da mola, ou que a componente vertical da força para esta extremidade em particular é zero. Não devemos prosseguir com este assunto além deste ponto mas retornar à Eq. (1.1), porque nosso objetivo é obter a analogia entre sistemas discretos e contínuos.

Se introduzimos a notação $y_{i+1}-y_i = \Delta y_i$,

$y_i - y_{i-1} = \Delta y_{i-1}$, a Eq. (1.1) torna-se

$$T_i \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} - T_{i-1} \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} + F_i = m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \qquad (1.4)$$

Mas os dois primeiros termos do lado esquerdo da Eq.(1.4) constituem a alteração incremental na componente vertical da força entre os lados esquerdo e direito de m_i. Em vista disto, nós podemos escrever a Eq. (1.4) como.

$$\Delta\left(T_i \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right) + F_i = m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \qquad (1.5)$$

Além disso, dividindo ambos os lados de (1.5) por Δx_i, chegamos a

$$\frac{\Delta}{\Delta x_i}\left(T_i \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right) + \frac{F_i}{\Delta x_i} = \frac{m_i}{\Delta x_i} \frac{d^2 y_i}{dt^2} \qquad (1.6)$$

Desta vez vamos fazer o número n de massas m_i crescer indefinidamente, enquanto as suas massas e a distância entre elas decrescem correspondentemente, e substituindo a posição indexada x_i por uma variável espacial independente x, de tal modo que no limite, como $\Delta x_i \to 0$, a Eq.(1.6) reduz a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right] + f(x,t) = \rho(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad (1.7)$$

a qual deve ser satisfeita de um lado a outro do domínio $0<x<L$, onde

$$f(x,t) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{F_i(t)}{\Delta x_i}, \quad \rho(x) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{m_i}{\Delta x_i} \qquad (1.8)$$

são as forças transversais distribuídas na corda e a densidade de massa no ponto x, respectivamente. Notamos que, em virtude do fato de que a posição indexada x_i é substituída por uma variável espacial independente x, as derivadas totais com respeito ao tempo t torna-se derivadas parciais com respeito a t, ao passo que as proporções de incrementos são substituídas diretamente por

derivadas parciais com respeito a x. A Eq. (1.7) representa a "equação diferencial parcial da corda". Similarmente, as condições (1.3) devem ser substituídas por

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \qquad (1.9)$$

as quais são geralmente conhecidas como as "condições de contorno" do problema. As Eqs. (1.7) e (1.9) constituem o que é referido como um "problema de valor limite".

Como mencionado acima, o problema pode ser formulado mais diretamente considerando a corda como um sistema contínuo, como mostrado na Fig. 1.2a, onde $f(x,t)$, $\rho(x)$, e $T(x)$ são a força distribuída, a densidade de massa e a tensão no ponto x, respectivamente. A Fig. 1.2b representa o diagrama de corpo-livre correspondente a um elemento da corda de comprimento dx.

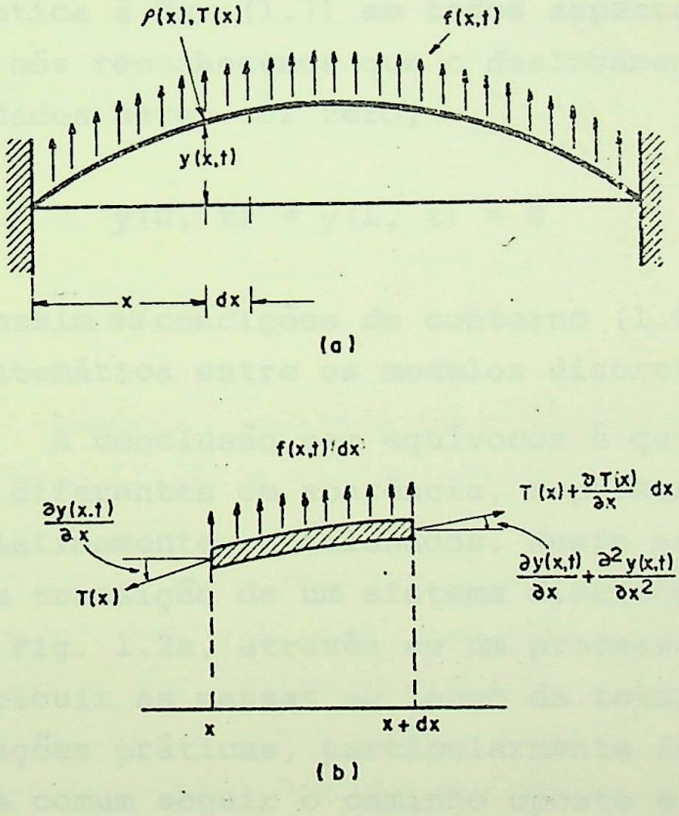


FIG. 1.2 - CORDA COMO SISTEMA CONTÍNUO

Novamente escrevendo a segunda lei de Newton para a componente da força na direção vertical, obtemos

$$\left[T(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial x}\,dx\right]\left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial^2 x}\,dx\right] - T(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} +$$

$$+ f(x,t)dx = \rho(x)dx\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad (1.10)$$

Cancelando os termos apropriados e ignorando os termos de segunda ordem em dx, a Eq. (1.10) reduz a

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x}\,\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\,dx + T(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\,dx + f(x,t)dx = \rho(x)dx\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad (1.11)$$

e, depois dividindo ambos os lados por dx, nós podemos escrever a Eq. (1.11) na forma mais compacta

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right] + f(x,t) = \rho(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\,, \quad 0 < x < L \qquad (1.12)$$

a qual é idêntica à Eq. (1.7) em todos aspectos. Além disso, da Fig. (1.2a), nós reconhecemos que o deslocamento da corda nas duas extremidades deve ser zero,

$$y(0,\ t) = y(L,\ t) = 0 \qquad (1.13)$$

Confirmando assim as condições de contorno (1.9). Isto completa a analogia matemática entre os modelos discretos e contínuos.

A conclusão sem equívocos é que as Figs. 1.1a e 1.2a, embora diferentes em aparência, representam dois modelos matemáticos intimamente relacionados. Nesta secção em particular nós fizemos a transição de um sistema discreto, Fig. 1.1a, para um contínuo, Fig. 1.2a, através de um processo de limite equivalente a distribuir as massas ao longo da totalidade da corda. Em muitas aplicações práticas, particularmente se a corda não é uniforme, é mais comum seguir o caminho oposto e agrupar um sistema contínuo em massas discretas. Isto pode ser feito usando a segunda das Eqs. (1.8) e escrevendo $m_i = \rho(x_i)\Delta x_i$. Independente a qual modelo matemático é fundamentalmente preferido, é claro que devemos esperar semelhantes características vibracionais.

Mostra-se que a vibração longitudinal de uma haste delgada e a vibração de torção de eixos circulares satisfa-

zem semelhantes problemas de valor limite. Na verdade, os problemas correspondentes podem ser obtidos de modelos discretos associados. Nas vibrações longitudinais, os parâmetros $\rho(x)$ e $T(x)$ devem ser substituídos pela massa por unidade de comprimento $m(x)$ e rigidez axial $EA(x)$, respectivamente, onde E é o módulo de elasticidade e $A(x)$ a área da secção transversal. Para vibrações de torção, eles devem ser substituídos pelo momento de inércia polar por unidade de comprimento $I(x)$ e pela rigidez de torção $GJ(x)$, respectivamente, onde G é o módulo de cisalhamento e $J(x)$ o momento de inércia polar da secção transversal.

1.3 - Vibração Livre. O Problema do Autovalor.

Vamos considerar a vibração da corda da Sec.1.2. No caso da vibração livre, isto é, quando a força distribuída é zero, $f(x,t) = 0$, o problema do valor limite reduz-se para a equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right] = \rho(x)\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\,, \quad 0 < x < L \tag{1.14}$$

e as condições de contorno

$$y(0,t) = y(L,t) = 0 \tag{1.15}$$

Embora o problema da vibração livre para um sistema contínuo, Eqs. (1.14) e (1.15), diferem na aparência daquele de um sistema discreto, a aproximação geral para suas soluções é a mesma. Por isso, desejamos pesquisar o movimento síncrono, quer dizer, um movimento no qual a aparência-forma geral-do deslocamento da corda não varia com o tempo, enquanto a amplitude desta forma geral varia com o tempo. Expondo diferentemente, todo ponto da corda executa o mesmo movimento no tempo, passando pela posição de equilíbrio no mesmo tempo e alcançando sua máxima excursão no mesmo tempo. Em terminologia matemática, isto implica que o deslocamento $y(x,t)$ é separável no espaço e no tempo, de modo que desejamos examinar a possibilidade de que a solução do problema do valor limite pode ser escrito na forma

$$y(x,t) = Y(x)F(t) \tag{1.16}$$

onde Y(x) representa a configuração geral da corda e depende somente da variável espacial x, e onde F(t) indica o tipo de movimento que a configuração da corda executa com o tempo e depende somente de t. Introduzindo a Eq. (1.16) na (1.14), e dividindo lado a lado por $\rho(x)Y(x)F(t)$, nós obtemos

$$\frac{1}{\rho(x)Y(x)} \frac{d}{dx}\left[T(x) \frac{dY(x)}{dx}\right] = \frac{1}{F(t)} \frac{d^2F(t)}{dt^2} \qquad (1.17)$$

onde, por causa de Y depender somente de x e F somente de t, as derivadas parciais foram substituídas por derivadas totais. Além disso, as variáveis foram separadas de modo que o lado esquerdo da Eq. (1.17) dependa somente de x, enquanto que o lado direito somente de t. Utilizando o método das variáveis separadas, concluimos que o único meio para que a Eq. (1.17) possa ser satisfeita para todo x e t é que ambos os lados sejam constantes. Vamos denominar esta constante por $-\omega^2$, de modo que a Eq. (1.17) conduz a

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2} + \omega^2F(t) = 0 \qquad (1.18)$$

$$-\frac{d}{dx}\left[T(x) \frac{dY(x)}{dx}\right] = \omega^2\rho(x)Y(x) \qquad (1.19)$$

A razão pela escolha da constante como negativa é que se fizermos isto, a Eq. (1.18) reduz-se à equação de uma oscilação harmônica cuja solução consiste de funções trigonométricas. Se tivéssemos escolhido uma constante positiva, a solução da equação resultante ficaria em termos de funções exponenciais, uma com um expoente positivo e outra com expoente negativo. Como a solução com o expoente positivo diverge com o tempo e aquela com expoente negativo decai com o tempo, estas soluções são inconsistentes com os sistemas conservativos considerados aqui, para os quais a energia total, e portanto a amplitude do movimento, deve permanecer finita. Disto segue que, se é possível o movimento síncrono, então a função F(t) expressando a dependência do tempo deve ser harmônica. Logo, podemos escrever a solução da Eq. (1.18) na forma

$$F(t) = C\cos(\omega t - \phi) \qquad (1.20)$$

onde C é uma constante arbitrária, ω a frequência do movimento harmônico, e ϕ seu ângulo de fase e todas as três quantidades sendo a mesma para qualquer função Y(x) que é a solução da Eq. (1.19).

A questão restante é quanto à configuração do deslocamento, isto é, a função Y(x). É claro que, Y(x) deve satisfazer a Eq. (1.19) ao longo do domínio $0 < x < L$. Além disso, das Eqs. (1.15), devem ser satisfeitas também as condições de contorno

$$Y(0) = Y(L) = 0 \qquad (1.21)$$

A seguir temos a discussão geral da solução das Eqs. (1.19) e (1.20). Ela é paralela com a discussão do problema do auto-valor para sistemas discretos com os vários conceitos sendo inteiramente análogos.

Notamos que a Eq. (1.19) contém o parâmetro ω^2, ainda como indeterminado. O problema da determinação dos valores do parâmetro ω^2 para os quais existem as soluções não-trivial de Y(x) da Eq. (1.19), onde as soluções estão sujeitas às condições de contorno (1.21), é chamado de "problema do valor-característico" ou "problema do auto-valor". Os correspondentes valores do parâmetro são conhecidos como "valores característicos", ou "auto-valores", e as funções associadas Y(x) como "funções características", ou "auto-funções". A Eq. (1.19) é uma equação diferencial de segunda ordem e contém o parâmetro ω^2. Logo, devemos determinar duas constantes de integração, em adição a ω^2, mas temos à nossa disposição somente duas condições de contorno. Como a Eq. (1.19) é homogênea, contudo, nós concluimos que a função Y(x) não pode ser determinada unicamente, exceto para a sua configuração geral, desde que $\alpha Y(x)$ é também uma solução de (1.19), onde α é uma constante multiplicativa. Disto segue que uma das duas condições de contorno (1.21) pode ser usada para encontrar uma constante de integração em função da outra, determinando assim a forma geral de Y(x) mas não sua amplitude. Se lembrarmos que o comprimento da corda é finito, a outra condição de contorno pode ser usada para produzir a tal chamada "equação característica", ou "equação da frequência". Os valores do parâmetro ω^2

são obtidos resolvendo esta equação; a solução da equação característica consiste de um conjunto de valores característicos discretos enumeravelmente infinito, as raízes quadradas das quais são as "frequências naturais" ω_r (r = 1,2,...) do sistema. Para cada valor característico, ou frequência natural, corresponde uma auto-função, ou "modo natural", $Y_r(x)$. Como mencionado acima, e como o problema é homogêneo, $A_r Y_r(x)$ representa o mesmo modo natural, onde A_r é uma constante arbitrária de tal modo que as amplitudes dos modos naturais são indeterminados. As constantes A_r, e logo as amplitudes, podem ser determinadas unicamente se um certo processo de normalização é usado, o caso no qual os modos naturais tornam-se "modos normais". As frequências naturais ω_r e os modos naturais $Y_r(x)$ (r = 1,2,...) associados dependem dos parâmetros $\rho(x)$ e $T(x)$ do sistema, bem como das condições de contorno; logo eles são uma característica do sistema. Note que os modos $Y_r(x)$ podem ser considerados como auto-vetores com dimensão infinita obtidos como casos limites de auto-vetores de dimensão finita em um processo que substitui a posição indexada discreta x_i pela variável espacial contínua x.

Lembrando que para sistemas discretos nós também podemos identificar um conjunto de frequências naturais e modos naturais representando a característica do sistema. Uma outra característica comum para sistemas contínuos e discretos é a "ortogonalidade dos modos" (veja Apêndice B). A condição de ortogonalidade pode ser escrita como

$$\int_0^L \rho(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = 0, \quad r \neq s \tag{1.22}$$

onde $Y_r(x)$ e $Y_s(x)$ são duas auto-funções distintas. Assim, a analogia entre sistemas discretos e contínuos está completa, com a exceção que para sistemas discretos o conjunto de frequências naturais e modos é finito, enquanto que para sistemas contínuos o conjunto é infinito. Por conveniência, os modos podem ser normalizados escrevendo

$$\int_0^L \rho(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = \delta_{rs}, \quad r,s = 1,2,... \tag{1.23}$$

onde δ_{rs} é conhecido como o delta de Kronecker.

Uma simples ilustração da solução do problema do auto-valor com a prova da propriedade da ortogonalidade, é mostrado a seguir.

Vejamos a solução do problema do auto-valor associado com a corda uniforme fixa em $x = 0$ e $x = L$ (veja Fig.1.3), e depois vamos plotar as três primeiras auto-funções. A tensão T na corda é constante.

Inserindo $\rho(x) = \rho$ = constante, $T(x) = T$ = constante na Eq.(1.19), concluímos que o deslocamento transversal $Y(x)$ deve satisfazer a equação diferencial

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} + \beta^2 Y(x) = 0, \qquad \beta^2 = \frac{\omega^2 \rho}{T} \tag{1.24}$$

ao longo do domínio $0 < x < L$. Além disso, por causa das extremidades serem fixas, os deslocamentos devem ser zero para $x = 0$ e $x = L$. Assim a solução Y da Eq.(1.24) está sujeita às condições de contorno

$$Y(0) = 0, \quad Y(L) = 0 \tag{1.25}$$

A Eq. (1.24) é harmônica em x, e sua solução pode ser escrita na forma

$$Y(x) = A\text{sen}\beta x + B\cos\beta x \tag{1.26}$$

onde A e B são constantes de integração. Inserindo a primeira das condições de contorno (1.25) na Eq. (1.26), nós concluímos que $B = 0$, de tal modo que a solução reduz-se a

$$Y(x) = A\text{sen}\beta x \tag{1.27}$$

Por outro lado, introduzindo a segunda das condições de contorno (1.25) na Eq. (1.27), obtemos

$$Y(L) = A\text{sen}\beta L = 0 \tag{1.28}$$

Existem duas maneiras para as quais a Eq. (1.28) pode ser satisfeita, isto é, $A = 0$ e $\text{sen}\beta L = 0$. Mas $A = 0$ deve ser eliminada,

porque esta conduziria à solução trivial $Y(x) = 0$. Disto segue que devemos ter

$$\operatorname{sen}\beta L = 0 \tag{1.29}$$

a qual é reconhecida como a "equação característica". Sua solução consiste de um conjunto infinito de "valores característicos"

$$\beta_r L = r\pi, \qquad r = 1,2,... \tag{1.30}$$

para os quais corresponde um conjunto infinito de "auto-funções"

$$Y_r(x) = A_r \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} \tag{1.31}$$

onde A_r são amplitudes indeterminadas, com a implicação única que somente a configuração dos modos pode ser determinada. Os três primeiros modos naturais estão plotados na Fig. (1.3), onde os modos foram normalizados fazendo $A_r = 1$.

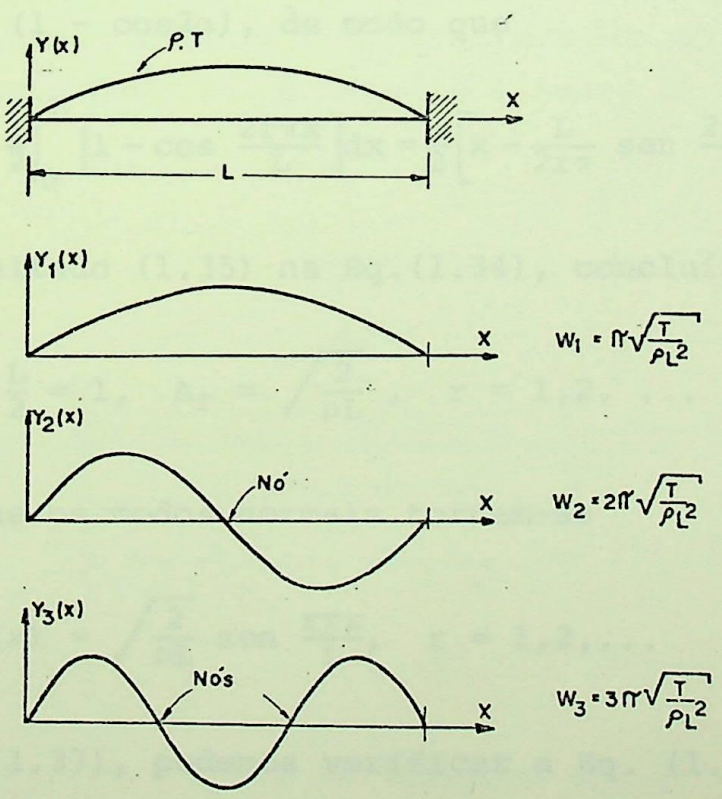


FIG.1.3 - MODOS DA CORDA EM VIBRAÇÃO TRANSVERSAL.

Notamos que o primeiro modo não tem nó, o segundo tem um nó, e o terceiro tem dois nós. Em geral o r-ésimo modo tem $r-1$ nós ($r = 1,2,\ldots$).

Da segunda das Eqs. (1.24) concluimos que as "frequências naturais" do sistema são

$$\omega_r = \beta_r\sqrt{\frac{T}{\rho}} = r\pi\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}\,, \quad r = 1,2,\ldots \tag{1.32}$$

Agora vamos verificar que realmente as auto-funções (1.31) satisfazem a condição Eq.(1.22) de ortogonalidade.

Vamos normalizar os modos de acordo com a Eq.(1.23) fazendo $\delta_{rs} = 1$ e $\rho(x) = \rho$ = constante

$$\int_0^L \rho(x)Y_r(x)Y_r(x)dx = \rho\int_0^L Y_r^2(x)dx = 1, \quad r = 1,2,\ldots \tag{1.33}$$

Logo, inserindo as Eqs. (1.31) na Eq. (1.33) escrevemos

$$\rho A_r^2 \int_0^L \operatorname{sen}^2\frac{r\pi x}{L}\,dx = 1 \tag{1.34}$$

Mas $\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, de modo que

$$\int_0^L \operatorname{sen}^2\frac{r\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L\left[1 - \cos\frac{2r\pi x}{L}\right]dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{L}{2r\pi}\operatorname{sen}\frac{2r\pi x}{L}\right]\Bigg|_0^L = \frac{L}{2} \tag{1.35}$$

Levando o resultado (1.35) na Eq.(1.34), concluímos que

$$\rho A_r^2\,\frac{L}{2} = 1, \quad A_r = \sqrt{\frac{2}{\rho L}}\,, \quad r = 1,2,\ldots \tag{1.36}$$

de tal modo que os modos normais tornam-se

$$Y_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho L}}\operatorname{sen}\frac{r\pi x}{L}, \quad r = 1,2,\ldots \tag{1.37}$$

Usando a Eq. (1.37), podemos verificar a Eq. (1.22)

$$\int_0^L \rho Y_r(x)Y_s(x)dx = \rho\int_0^L \sqrt{\frac{2}{\rho L}}\operatorname{sen}\frac{r\pi x}{L}\sqrt{\frac{2}{\rho L}}\operatorname{sen}\frac{s\pi x}{L}\,dx =$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{s\pi x}{L} \, dx \qquad (1.38)$$

Relembrando que $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha+\beta)]$, podemos escrever

$$\int_0^L \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{s\pi x}{L} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\cos\frac{(r-s)\pi x}{L} - \cos\frac{(r+s)\pi x}{L}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(r-s)\pi x/L}{(r-s)\pi/L} - \frac{\operatorname{sen}(r+s)\pi x/L}{(r+s)\pi/L} \right]_0^L = \begin{cases} 0, & r \neq s \\ \\ \frac{L}{2}, & r = s \end{cases} \qquad (1.39)$$

Nota-se, portanto, que a Eq. (1.39) satisfaz a condição de ortoganalidade (1.22) e a relação (1.23).

1.4 - Modelos Discretos Versus Modelos Contínuos para a Vibração Axial de Hastes.

Para apresentar o paralelo entre modelos discretos e contínuos em um foco inteligente, provar-se-á ser de interêsse considerar um dado sistema e comparar as soluções do problema do autovalor obtido considerando o mesmo sistema primeiramente como contínuo e então como discreto. Um sistema que presta-se prontamente para tal análise é a haste em vibração axial.

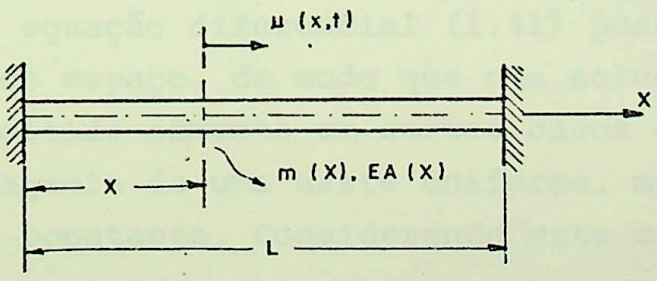


FIG. 1.4 - HASTE EM VIBRAÇÃO AXIAL

Como indicado na Sec.1.2, o problema de valor limite para a vibração axial de uma haste fina tem a mesma estrutura que aquele para a vibração transversal de uma corda. Para obter o primeiro problema a partir do segundo, devemos substituir os parâmetros do sistema $\rho(x)$, $T(x)$ por $m(x)$, $EA(x)$, respectivamente, onde $m(x)$ é a massa por unidade de comprimento da haste e $EA(x)$ a rigidez axial. Segue-se também que a estrutura do problema do auto-valor é semelhante, sujeita às mesmas substituições de parâmetros.

Vamos considerar a vibração axial de uma haste fina fixada nas duas extremidades (veja Fig. 1.4). Em função da discussão acima, usamos as Eqs. (1.19) e (1.21) da Sec.1.3, e assumimos que o deslocamento $u(x,t)$ é separável no espaço e no tempo,

$$u(x,t) = U(x)F(t) \tag{1.40}$$

onde $F(t)$ é harmônico, o problema do auto-valor pode ser escrito diretamente na forma

$$-\frac{d}{dx}\left[EA(x)\,\frac{dU(x)}{dx}\right] = \omega^2 m(x)U(x), \quad 0 < x < L \tag{1.41}$$

onde $U(x)$ está sujeito às condições de contorno

$$U(0) = U(L) = 0 \tag{1.42}$$

A equação diferencial (1.41) possuem coeficientes dependentes do espaço, de modo que uma solução na forma aproximada pode ser obtida somente em certos casos especiais. Um tal caso especial é aquele de uma haste uniforme, $m(x) = m$ = constante, $EA(x) = EA$ = constante. Considerando este caso, a Eq. (1.41) reduz a

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + \beta^2 U(x) = 0, \quad \beta^2 = \omega^2\,\frac{m}{EA} \tag{1.43}$$

a qual deve ser satisfeita ao longo do domínio $0 < x < L$. É claro que, as condições de contorno (1.42) permanecem as mesmas.

O problema do auto-valor definido pela equação diferencial (1.43) e pelas condições de contorno (1.42) tem precisamente a mesma estrutura que aquele para a corda fixada em ambas as extremidades discutido na Sec. 1.3. Segue-se que a solução tem a mesma estrutura, sujeita à substituição de parâmetros mostrado acima. Logo usando os resultados da Sec.1.3, escrevemos diretamente as frequências naturais do sistema

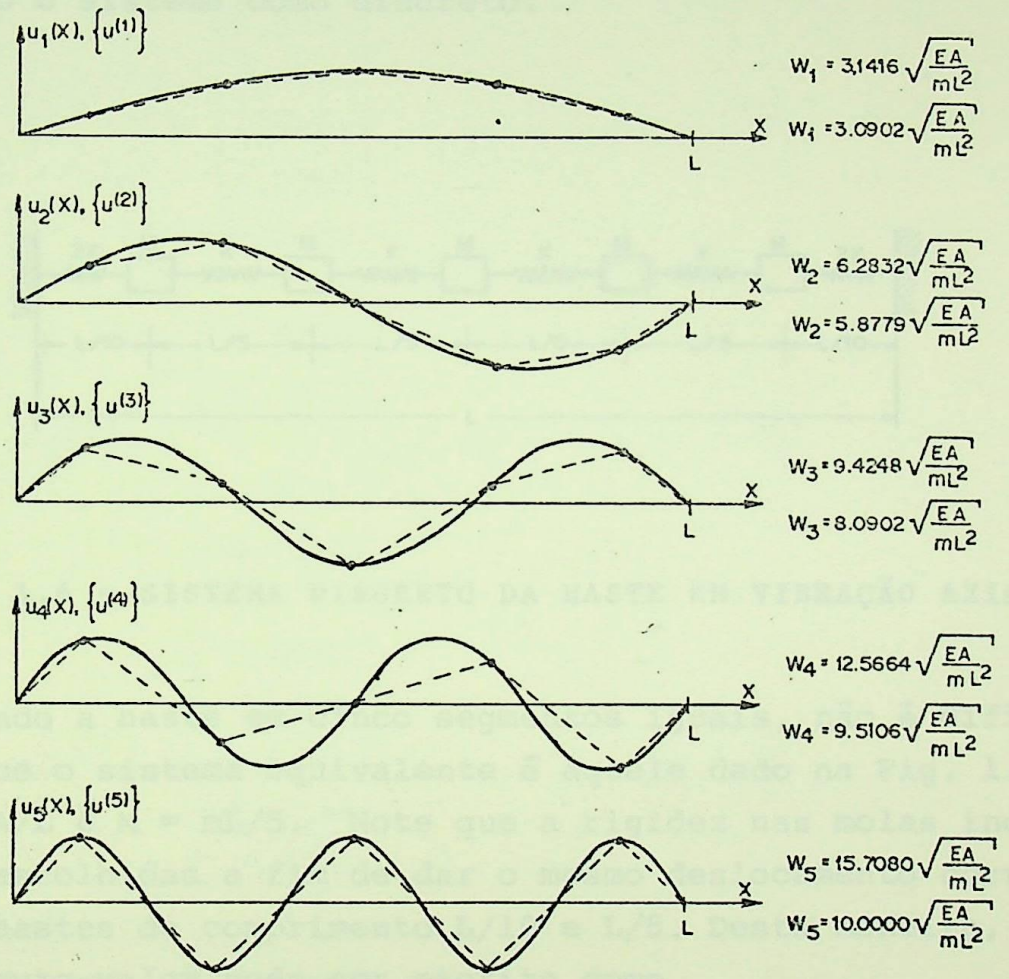


FIG. 1.5 - MODOS DA HASTE EM VIBRAÇÃO AXIAL

$$\omega_r = \beta_r\sqrt{\frac{EA}{m}} = r\pi\sqrt{\frac{EA}{mL^2}}\ , \quad r = 1,2,... \qquad (1.44)$$

Além disso, se os modos são normalizados fazendo $A_r = 1$ (r=1,2,...) obtemos os modos normais

$$U_r(x) = \text{sen}\,\frac{r\pi x}{L}\,, \quad r = 1,2,\ \ldots \tag{1.45}$$

Os cinco primeiros modos normais estão plotados na Fig. 1.5 em linhas contínuas.

A seguir vamos solucionar o mesmo problema considerando o sistema como discreto.

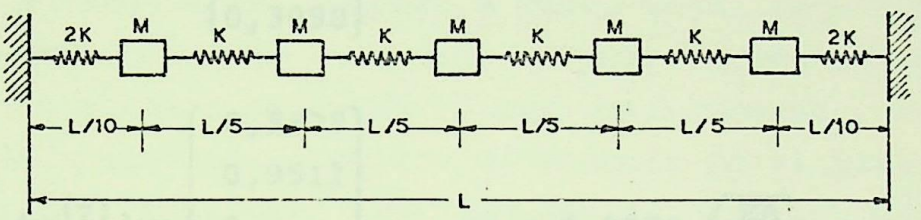


FIG. 1.6 - SISTEMA DISCRETO DA HASTE EM VIBRAÇÃO AXIAL.

Dividindo a haste em cinco segmentos iguais, não é difícil mostrar que o sistema equivalente é aquele dado na Fig. 1.6, onde $K = 5EA/L$ e $M = mL/5$. Note que a rigidez nas molas individuais foram escolhidas a fim de dar o mesmo deslocamento correspondente às hastes de comprimento L/10 e L/5. Desta maneira, o problema do auto-valor pode ser escrito como

$$[K]\{u\} = \omega^2[m]\{u\} \tag{1.46}$$

onde a matriz rigidez tem a forma

$$[K] = \frac{5EA}{L}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

enquanto a matriz massa é simplesmente

$$[m] = \frac{mL}{5}\,[1] \tag{1.48}$$

onde [1] é a matriz unidade da ordem 5. A solução do problema do auto-valor (1.46), em conjunto com as matrizes (1.47) e (1.48), foi obtida por meio de um programa de computador, com o resultado

$$\{u^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0,3090 \\ 0,8090 \\ 1,0000 \\ 0,8090 \\ 0,3090 \end{Bmatrix}, \quad \omega_1 = 3,0902\sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \tag{1.49a}$$

$$\{u^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 0,5878 \\ 0,9511 \\ 0 \\ -0,9511 \\ -0,5878 \end{Bmatrix}, \quad \omega_2 = 5,8779\sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \tag{1.49b}$$

$$\{u^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 0,8090 \\ 0,3090 \\ -1,0000 \\ 0,3090 \\ 0,8090 \end{Bmatrix}, \quad \omega_3 = 8,0902\sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \tag{1.49c}$$

$$\{u^{(4)}\} = \begin{Bmatrix} 0,9511 \\ -0,5878 \\ 0 \\ 0,5878 \\ -0,9511 \end{Bmatrix}, \quad \omega_4 = 9,5106\sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \tag{1.49d}$$

$$\{u^{(5)}\} = \begin{Bmatrix} 1,0000 \\ -1,0000 \\ 1,0000 \\ -1,0000 \\ 1,0000 \end{Bmatrix}, \quad \omega_5 = 10,0000\sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \tag{1.49e}$$

onde os modos foram normalizados a fim de se igualar com os modos normais (1.45) do sistema contínuo. Os modos estão plotados na Fig. 1.5 em linhas tracejadas. As frequências naturais do modelo contínuo são dadas nas correspondentes linhas de cima e aquelas do modelo discreto nas linhas inferiores. É fácil ver que enquanto o primeiro modo e frequência natural estão relativamente próximos daqueles do modelo contínuo, a exatidão é perdida rapidamente para modos mais altos no modelo discreto, no significado de que os deslocamentos não são muito representativos e as frequências não são boas aproximações daquelas do sistema contínuo.

Notamos que as frequências naturais do sistema discreto são baixas do que aquelas do correspondente modelo contínuo. A razão é que, embora a massa total seja a mesma em ambos os sistemas, no caso do modelo discreto a massa é mudada para o centro do sistema ao invés de ser uniformemente distribuída. Isto tende a aumentar o efeito da inércia do sistema relativo à sua rigidez, resultando em frequências naturais mais baixas. É claro que, a exatidão pode ser melhorada aumentando o grau de liberdade do sistema discreto.

1.5 - Vibração de Barras a Flexão. Condições de Contorno.

A vibração transversal de uma corda, a vibração axial de uma haste delgada e a torção de um eixo circular, todos conduzem à mesma forma do problema de valor limite, isto é, um problema consistindo de uma equação diferencial parcial de segunda ordem no espaço e no tempo e com duas condições de contorno, uma em cada extremidade. É claro que, os parâmetros do sistema são diferentes em cada caso, como foi mostrado na Sec.1.2. Por contraste, o problema do valor limite para uma barra em flexão é definido por uma equação diferencial de quarta ordem no espaço e no tempo necessitando de duas condições de contorno em cada extremidade. Nesta seção nós obtemos este problema de valor limite, e usamos a oportunidade para discutir a natureza a vários tipos de condições de contorno.

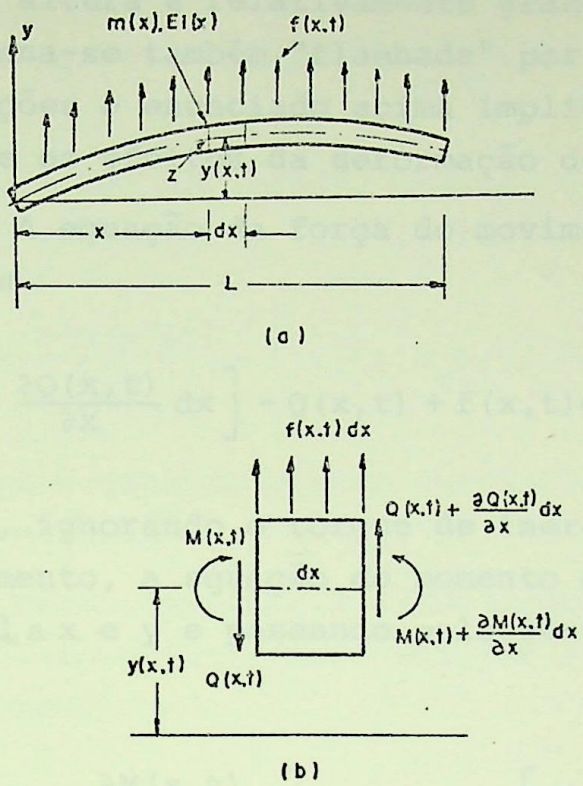


FIG. 1.7 - BARRA À FLEXÃO

Vamos considerar a barra em flexão mostrada na Fig. 1.7a. O deslocamento transversal para qualquer ponto x e tempo t é denotado por y(x,t) e a força transversal por unidade de comprimento por f(x,t). Os parâmetros do sistema são a massa por unidade de comprimento m(x) e a rigidez de flexão EI(x), onde E é o módulo de Young de elasticidade e I(x) o momento de inércia da área da secção transversal com relação a um eixo normal a x e y e passando pelo centro da secção transversal da área. A Fig. 1.7b mostra o diagrama de corpo livre correspondente a um elemento da barra de comprimento dx, onde Q(x,t) denota a força cortante e M(x,t) o momento fletor. Nós usaremos a chamada "teoria da viga simples", e de acordo com a qual a rotação do elemento é insignificante comparada com a translação vertical, e

a deformação de cisalhamento é pequena em relação à deformação de flexão. Esta teoria é válida se a razão entre o comprimento da barra e sua altura é relativamente grande (maior que 10), e se a barra não torna-se também "flambada" por causa da flexão. Na área das vibrações o enunciado acima implica em ignorar a inércia rotatória e os efeitos da deformação de cisalhamento.

A equação da força do movimento na direção vertical tem a forma

$$\left[Q(x,t) + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\,dx\right] - Q(x,t) + f(x,t)\,dx = m(x)\,dx\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{1.50}$$

Por outro lado, ignorando o torque de inércia associado com a rotação do elemento, a equação do momento do movimento em relação ao eixo normal a x e y e passando pelo centro da área transversal é

$$\left[M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x}\,dx\right] - M(x,t) + \left[Q(x,t) + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\,dx\right]dx +$$

$$+ f(x,t)\,dx\,\frac{dx}{2} = 0 \tag{1.51}$$

Cancelado os termos apropriados e ignorando os termos que envolvem potências de segunda ordem em dx escrevemos a Eq. (1.51) na simples forma

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + Q(x,t) = 0 \tag{1.52}$$

Além do mais, cancelando os termos apropriados e considerando a Eq. (1.52), a Eq. (1.50) reduz-se a

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = m(x)\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{1.53}$$

a qual deve ser satisfeita ao longo do domínio $0 < x < L$.

A Eq. (1.53) relaciona o momento fletor $M(x,t)$, a força transversal $f(x,t)$, e o deslocamento de flexão $y(x,t)$. Qualquer texto elementar na mecânica dos manteriais, de qualquer

maneira, dá a relação entre o momento fletor e o deslocamento transversal na forma

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \tag{1.54}$$

Inserindo a Eq.(1.54) em (1.53), obtemos a equação diferencial para a vibração de barras a flexão, escrevendo

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right] + f(x,t) = m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L \tag{1.55}$$

onde notamos que a equação contém derivadas da quarta ordem com relação ao espaço.

Para completar a formulação do problema do valor limite, devemos especificar as condições de contorno. Listamos aqui as mais comuns:

a) Extremidade engastada em $x = 0$. A deflexão e a inclinação (tangente) da deflexão da curva são zero:

$$y(0,t) = 0, \quad \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \tag{1.56}$$

b) Extremidade com dobradiça em $x = 0$. A deflexão e o momento fletor são zero:

$$y(0,t) = 0, \quad EI(x)\left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0 \tag{1.57}$$

Note que a Eq. (1.54) foi usada na segunda das condições (1.57).

c) Extremidade livre em $x = 0$. O momento fletor e a força cortante são zero. Usando as Eqs. (1.52) e (1.54), as condições de contorno tornam-se

$$EI(x)\left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial}{\partial x}\left[EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right]\right|_{x=0} = 0 \tag{1.58}$$

Condições análogas podem ser escritas para a extremidade x = L. É claro que, existem condições de contorno menos comuns, tal como quando a extremidade é suportada por molas, ou quando existe uma massa concentrada na extremidade.

Neste ponto uma discussão das características das condições de contorno é colocada. Compensa notar que as condições de contorno (1.56) e a primeira de (1.57) são resultantes da geometria do sistema. Por esta razão elas são chamadas de "condições de contorno geométricas". Por outro lado, a segunda das condições de contorno (1.57) e ambas as de (1.58) refletem o balanço da força e do momento no contorno; elas são chamadas de "condições de contorno naturais".

Voltando nossa atenção ao correspondente problema do auto-valor, nós primeiramente consideramos a vibração livre caracterizada por f(x,t) = 0, e a solução da Eq.(1.55) torna-se separável no espaço e no tempo. Fazendo

$$y(x,t) = Y(x)F(t) \tag{1.59}$$

e usando o método de separação das variáveis, como na Sec. 1.3, pode ser mostrado que, também neste caso, F(t) é harmônico. Isto não é coincidência, no entanto, visto que para todos os sistemas conservativos discutidos até aqui a dependência do tempo é harmônica. Denotando a frequência de F(t) por ω, o problema do auto-valor tem sua formulação reduzida à equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2Y(x)}{dx^2}\right] = \omega^2 m(x)Y(x), \quad 0 < x < L \tag{1.60}$$

onde a função Y(x) deve satisfazer as condições de contorno apropriadas. Inserindo a Eq.(1.59) em (1.56) mediante (1.58), e eliminando a dependência do tempo, nós obtemos as condições de contorno semelhantes na forma à (1.56) mediante (1.58), com a exceção que y(x,t) é substituída por Y(x) e as derivadas parciais com respeito a x por derivadas totais com relação a x.

Quando a extremidade é suportada por uma mola, a dependência do tempo pode ser eliminada completamente da mesma maneira que a acima. Por outro lado, uma massa concentrada na

extremidade tem o efeito o de aplicar uma força de inércia na extremidade, proporcional à aceleração desta extremidade. Como a dependência do tempo é harmônica com a frequência ω, neste caso a condição de contorno envolve o auto-valor ω^2.

1.6 - Modos Naturais na Vibração de uma Barra a Flexão

Como é natural, para obter os modos naturais de um sistema, devemos resolver um problema de auto-valor. O problema de auto-valor associado com uma barra em flexão, como obtido na Sec. 1.5, consiste da equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2Y(x)}{dx^2}\right] = \omega^2 m(x)Y(x), \quad 0 < x < L \qquad (1.61)$$

onde $EI(x)$ é a rigidez de flexão e $m(x)$ a massa por unidade de comprimento em qualquer ponto x. A solução $Y(x)$ está sujeita às condições de contorno dadas que refletem a maneira na qual as extremidades são suportadas. Vários exemplos de condições de contorno podem ser obtidas substituindo $y(x,t)$ por $Y(x)$ e derivadas parciais por derivadas totais com relação a x nas Eqs. (1.56) a (1.58). Não existe nenhuma forma geral para a solução da Eq. (1.61). As soluções podem ser obtidas para certos casos especiais, especialmente aqueles nos quais a barra é uniforme.

Vamos considerar a barra uniforme presa por dobradiças em ambas as extremidades conforme Fig. 1.8.

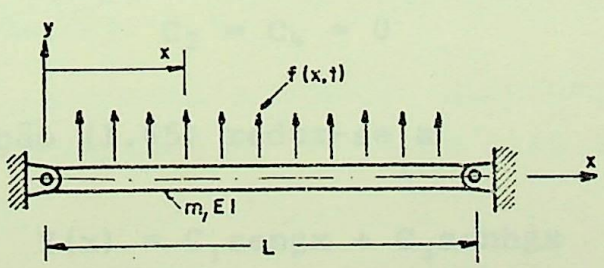


FIG. 1.8 - BARRA UNIFORME À FLEXÃO.

A equação diferencial para a barra reduz-se a

$$\frac{d^4Y(x)}{dx^4} - \beta^4 Y(x) = 0, \quad \beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} \tag{1.62}$$

onde EI e m são constantes. Na extremidade x = 0, as condições de contorno são

$$Y(0) = 0, \quad \left.\frac{d^2Y(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = 0 \tag{1.63}$$

enquanto na extremidade x = L, as condições de contorno são

$$Y(L) = 0, \quad \left.\frac{d^2Y(x)}{dx^2}\right|_{x=L} = 0 \tag{1.64}$$

Notamos que a primeira das condições de contorno em ambas Eqs. (1.63) a (1.64) é geométrica e a segunda é natural.

A solução geral da Eq. (1.62) tem a forma

$$Y(x) = C_1 \text{sen}\beta x + C_2 \cos\beta x + C_3 \text{senh}\beta x + C_4 \cosh\beta x \tag{1.65}$$

onde $C_i (i = 1,2,3,4)$ são constantes da integração. Para estimar três destas constantes em função da quarta, e da mesma forma para obter a equação característica, devemos usar as condições de contorno (1.63) e (1.64). Na verdade, a primeira das condições de contorno (1.63) produz $C_2 + C_4 = 0$, enquanto a segunda de (1.63) dá $C_4 - C_2 = 0$, com a óbvia conclusão que

$$C_2 = C_4 = 0 \tag{1.66}$$

Assim, a solução (1.65) reduz-se a

$$Y(x) = C_1 \text{sen}\beta x + C_3 \text{senh}\beta x \tag{1.67}$$

Por outro lado, as condições de contorno (1.64) conduzem a duas equações simultâneas

$$\begin{aligned} C_1 \text{sen}\beta L + C_3 \text{senh}\beta L &= 0 \\ -C_1 \text{sen}\beta L + C_3 \text{senh}\beta L &= 0 \end{aligned} \tag{1.68}$$

produzindo

$$C_3 = 0 \tag{1.69}$$

e a equação característica

$$\text{sen}\beta L = 0 \tag{1.70}$$

A solução da equação característica é simplesmente

$$\beta_r L = r\pi, \qquad r = 1,2, \ldots \tag{1.71}$$

produzindo as frequências naturais, conforme (1.62)

$$\omega_r = (r\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, \qquad r = 1,2,\ldots \tag{1.72}$$

Além disso, relembrando que $C_3 = 0$, e usando os valores de β dados pela Eq.(1.71), e normalizando de acordo com $\int_0^L mY_r^2(x)dx = 1$ $(r = 1,2,\ldots)$, nós obtemos os modos normais

$$Y_r(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}} \text{ sen } \frac{r\pi x}{L}, \qquad r = 1,2,\ldots \tag{1.73}$$

Os três primeiros modos estão plotados na Fig. 1.3 mas as frequências são diferentes. Note que o número de nós é igual ao número do modo menos 1.

A seguir consideremos a barra uniforme engastada e em balanço da Fig. 1.9.

Enquanto a equação diferencial permanece na forma (1.62), as condições de contorno para a extremidade engastada, $x = 0$, são

$$Y(0) = 0, \qquad \left.\frac{dY(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0 \tag{1.74}$$

Por outro lado, na extremidade em balanço, $x = L$, as condições de contorno reduzem-se a

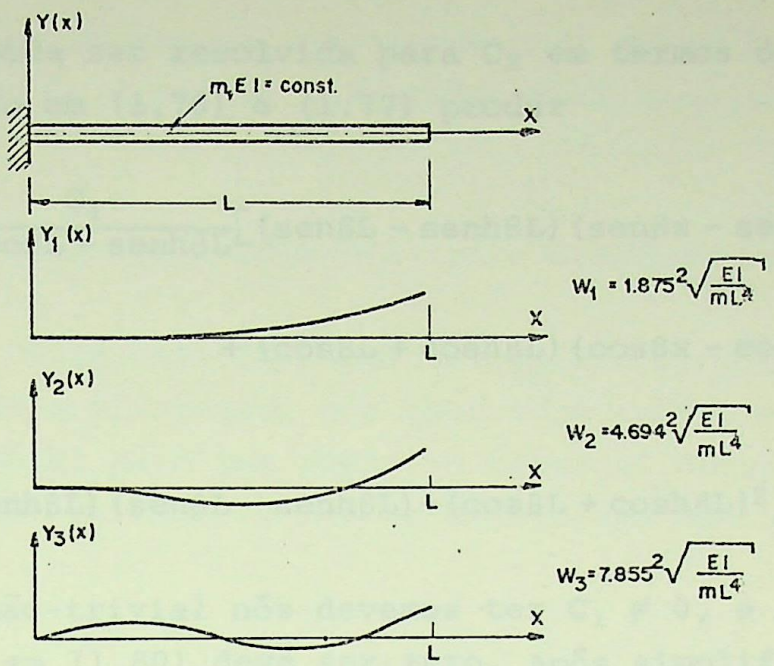


FIG. 1.9 - BARRA ENGASTADA À FLEXÃO

$$\left.\frac{d^2Y(x)}{dx^2}\right|_{x=L} = 0, \qquad \left.\frac{d^3Y(x)}{dx^3}\right|_{x=L} = 0 \tag{1.75}$$

Notamos que as condições de contorno (1.74) e (1.75) são geométricas e naturais, respectivamente.

A solução geral permanece na forma (1.65), mas as constantes C_i têm valores diferentes. Enquanto a primeira das condições de contorno (1.74) conduz novamente a $C_2 + C_4 = 0$, a segunda de (1.74) fornece $C_1 + C_3 = 0$, de modo que a solução(1.65) toma a forma

$$Y(x) = C_1(\text{sen}\beta x - \text{senh}\beta x) + C_2(\cos\beta x - \cosh\beta x) \tag{1.76}$$

Usando as condições de contorno (1.75), nós chegamos a duas equações simultâneas

$$C_1(\text{sen}\beta L + \text{senh}\beta L) + C_2(\cos\beta L + \cosh\beta L) = 0 \tag{1.77}$$

$$C_1(\cos\beta L + \cosh\beta L) - C_2(\text{sen}\beta L - \text{senh}\beta L) = 0 \tag{1.78}$$

A Eq. (1.78), pode ser resolvida para C_2 em termos de C_1 e o resultado colocado em (1.76) e (1.77) produz

$$Y(x) = \frac{C_1}{\text{sen}\beta L - \text{senh}\beta L}\left[(\text{sen}\beta L - \text{senh}\beta L)(\text{sen}\beta x - \text{senh}\beta x) + \right.$$

$$\left. + (\cos\beta L + \cosh\beta L)(\cos\beta x - \cosh\beta x)\right] \tag{1.79}$$

e

$$C_1\left[(\text{sen}\beta L + \text{senh}\beta L)(\text{sen}\beta L - \text{senh}\beta L) + (\cos\beta L + \cosh\beta L)^2\right] = 0 \tag{1.80}$$

Para a solução não-trivial nós devemos ter $C_1 \neq 0$, e a expressão entre colchetes em (1.80) deve ser zero. Após simplificação, esta conduz à equação característica

$$\cos\beta L \cosh\beta L = -1 \tag{1.81}$$

A solução da Eq.(1.81) pode ser obtida numericamente, fornecendo um infinito conjunto de auto-valores $\beta_r (r = 1,2,...)$. Colocando estes valores na Eq. (1.79), nós obtemos os modos naturais

$$Y_r(x) = A_r\left[(\text{sen}\beta_r L - \text{senh}\beta_r L)(\text{sen}\beta_r x - \text{senh}\beta_r x)\right.$$

$$\left. + (\cos\beta_r L + \cosh\beta_r L)(\cos\beta_r x - \cosh\beta_r x)\right],$$

$$r = 1,2,... \tag{1.82}$$

onde a notação $A_r = C_1/(\text{sen}\beta_r L - \text{senh}\beta_r L)$ foi introduzida por simplicidade. Os três primeiros modos estão plotados na Fig.1.9, e notamos novamente que o modo $Y_r(x)$ tem r-1 nós (r = 1,2,...).

Embora a equação característica, Eq. (1.70) ou a Eq. (1.81), produzir infinitos valores característicos levando aos associados modos naturais, nós relembramos que, devido a limitação da teoria da viga simples, os modos crescentes tornam-se cada vez mais fracos. Isto é assim devido o aumento do número de nós com cada modo, de modo que, consequentemente, decresce a distância entre os nós, e a barra torna-se progressivamente mais "franzida". Daí, à medida que aumenta o número do modo, a

energia cinética de rotação do elemento da barra não pode mais ser considerada desprezível comparada com a energia cinética de translação.

1.7 - Energia Cinética e Potencial para Sistemas Contínuos.

Para enfatizar uma vez mais o paralelo entre sistemas contínuos e discretos, nós obteremos agora, a energia cinética e potencial para uma haste em vibração longitudinal considerando-a como um caso limite de um sistema discreto.

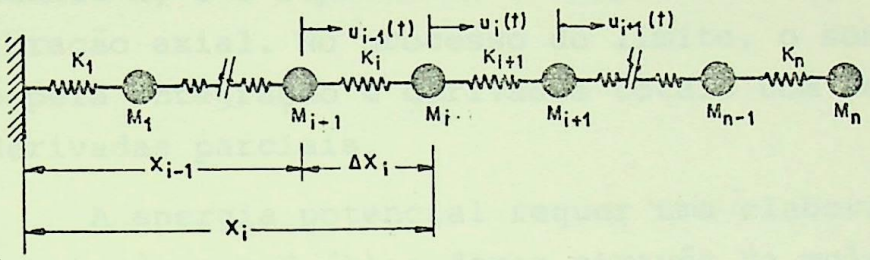


FIG. 1.10 - SISTEMA DISCRETO DE UMA HASTE EM VIBRAÇÃO LONGITUDINAL

Vamos considerar o sistema discreto de massas $M_i (i = 1,2,\ldots,n)$ mostrado na Fig. 1.10. As massas são ligadas por molas que possuem comportamento linear, onde as rigidez das molas são denotadas por $K_i (i = 1,2,\ldots, n)$. A energia cinética é simplesmente

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} M_i \left[\frac{du_i(t)}{dt}\right]^2 \qquad (1.83)$$

onde $du_i(t)/dt$ é a velocidade da massa M_i medida com relação a

um espaço inercial. Na configuração de equilíbrio, M_i ocupa a posição x_i no espaço. Introduzindo a notação $M_i = m_i \Delta x_i$, onde m_i pode ser considerado como a densidade de massa no ponto x_i, fazendo $\Delta x_i \to 0$ enquanto $x_1 \to 0$ e $x_n \to L$, e considerando o limite, podemos escrever

$$T(t) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\frac{du_i(t)}{dt}\right]^2 \Delta x_i =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx \qquad (1.84)$$

onde a posição indexada x_i foi substituída pela variável contínua independente x, e L representa o comprimento equivalente da haste em vibração axial. No processo do limite, o somatório foi substituído pela integração e derivadas totais com relação ao tempo por derivadas parciais.

A energia potencial requer uma elaboração um pouco maior. Denotando por $F_i(t)$ a força através da mola K_i, e relembrando que o sistema é linear, a energia potencial pode ser escrita na forma geral

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i(t)\left[u_i(t) - u_{i-1}(t)\right] \qquad (1.85)$$

onde $u_i - u_{i-1}$ representa a elongação da mola K_i. É claro que, u_o deve ser colocada igual a zero desde que a extremidade esquerda da mola K_1 é fixa. Como para um sistema linear a força é proporcional ao elongamento da mola, $F_i(t) = K_i\left[u_i(t) - u_{i-1}(t)\right]$, a Eq. (1.85) torna-se

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} K_i\left[u_i(t) - u_{i-1}(t)\right]^2 \qquad (1.86)$$

Neste ponto a generalidade deve ser abandonada especificando a rigidez em função de um elemento equivalente contínuo. Introduzindo a notação $K_i = EA_i/\Delta x_i$, $u_i(t) - u_{i-1}(t) = \Delta u_i(t)$, onde K_i é identificado como uma rigidez equivalente correspondente a uma haste de rigidez longitudinal EA_i e comprimento Δx_i, e a Eq. (1.86) reduz-se a

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} EA_i \left[\frac{\Delta u_i(t)}{\Delta x_i}\right]^2 \Delta x_i \tag{1.87}$$

Agora fazendo $\Delta x_i \rightarrow 0$, e tomando o limite, obtemos simplesmente a energia potencial para uma haste em vibração longitudinal

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EA(x) \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx \tag{1.88}$$

A Eq. (1.88) pode ser obtida diretamente da Eq. (1.85). Na verdade, com a notação introduzida acima, a Eq. (1.85) leva no limite a

$$V(t) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i(t) \frac{\Delta u_i(t)}{\Delta x_i} \Delta x_i =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L F(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx \tag{1.89}$$

Além disso, relembrando que $F_i(t) = K_i[u_i(t) - u_{i-1}(t)] = EA_i \, \Delta u_i(t)/\Delta x_i$, temos

$$F(x,t) = \lim_{\Delta x_i \to 0} EA_i \frac{\Delta u_i(t)}{\Delta x_i} = EA(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{1.90}$$

Introduzindo a Eq. (1.90) na (1.89), obtemos a Eq. (1.88).

Vamos considerar agora a energia potencial de uma barra em vibração a flexão. Denotando por $M_i(t)$ o momento fletor na extremidade a direita do elemento de barra (veja Figura 1.11), a energia potencial pode ser escrita na forma

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} M_i(t)[\theta_i(t) - \theta_{i-1}(t)] \tag{1.91}$$

onde $\theta_i(t) - \theta_{i-1}(t)$ representa a inclinação do elemento. Como o momento no elemento é proporcional à sua inclinação, $M_i(t) = K_i[\theta_i(t) - \theta_{i-1}(t)]$, a Eq. (1.91) torna-se

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} K_i[\theta_i(t) - \theta_{i-1}(t)]^2 \tag{1.92}$$

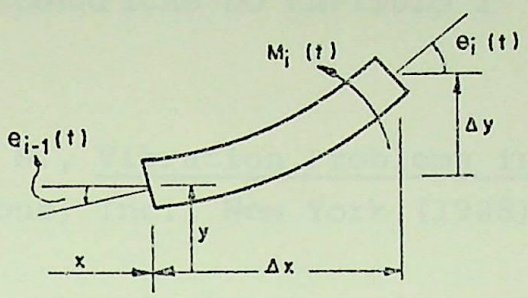


FIG. 1.11 - ELEMENTO DE BARRA À FLEXÃO

Neste ponto a generalidade deve mais uma vez ser abandonada especificando a rigidez em função da barra equivalente. Introduzindo a notação $K_i = EI_i/\Delta x_i$, $\theta_i(t) - \theta_{i-1}(t) = \Delta\theta_i(t)$, onde K_i é identificado como uma rigidez equivalente correspondente a um elemento de rigidez a flexão EI_i e comprimento Δx_i, onde I_i é o momento de inércia da área da secção transversal do elemento em relação ao eixo paralelo à direção do momento $M_i(t)$ e passando pelo centro da secção. Portanto a Eq. (1.92) reduz-se a

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} EI_i \left[\frac{\Delta\theta_i(t)}{\Delta x_i}\right]^2 \Delta x_i \qquad (1.93)$$

Agora, fazendo $\Delta x_i \rightarrow 0$, e tomando o limite, obtemos a energia potencial para uma barra em vibração a flexão com a notação $\theta_i(t) = \partial y(x,t)/\partial x$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right]^2 dx \qquad (1.94)$$

onde $y(x,t)$ é o deslocamento transversal da barra.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO 1

[1] Timoshenko, S., Vibration Problems in Engineering, John Wiley and Sons, Inc., New York (1923)

[2] Den Hartog, J.P., Mechanical Vibrations, McGraw-Hill Book Co., NY (1939)

[3] Thompson, W.T., Theory of Vibration with Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1972)

[4] Seto, W., Theory and Problems of Mechanical Vibrations, Schaum Publ. Co., NY (1964)

[5] Vierck, R.K., Vibration Analysis, International Text-Book Co., Scranton, PA (1967)

[6] Mierovitch, L. Element of Vibration Analysis, McGraw-Hill Book Co., NY (1975)

[7] Timoshenko, S., Young, D.H., and Weaver, W., Vibration Problems in Engineering, 4th edition, John Wiley and Sons, NY (1974)

[8] Blevins, R.D., Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold Co. (1979)

[9] Leissa, A.W., Vibration of Plates, NASA SP-160 (1969)

[10] Leissa, A.W., Vibration of Shells, NASA SP-288 (1973)

[11] Kamal, M. and Wolfe, J., Finite Element Analysis of Vibratio, ASME Monograph, Sixth Vibration Conf., Chicago, IL (Sept 1977).

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

Figura 1.1 - Sistema Discreto da Corda 2
1.2 - Corda como Sistema Contínuo 5
1.3 - Modos da Corda em Vibração Transversal. 12
1.4 - Haste em Vibração Axial 14
1.5 - Modos da Haste em Vibração Axial 16
1.6 - Sistema Discreto da Haste em Vibração Axial 17
1.7 - Barra à Flexão 20
1.8 - Barra Uniforme à Flexão 24
1.9 - Barra Engastada à Flexão 27
1.10 - Sistema Discreto de uma Haste em Vibração Longitudinal 29
1.11 - Elemento de Barra à Flexão 32

CAPÍTULO 2

Figura 2.1 - Esforços e Deslocamentos 35
2.2 - Elementos Massa e Mola 37
2.3 - Sistema Simples Massa-Mola 39
2.4 - Sistema com vários Graus de Liberdade.. 43
2.5 - Frequências Naturais 46
2.6 - Sistema com dois Graus de Liberdade ... 47
2.7 - Curva função em ω^2 55
2.8 - Viga e Elementos Massa-Mola 56
2.9 - Seção e Elementos de Viga 57
2.10 - Elementos Massa-Mola 61
2.11 - Frequências Naturais 65
2.12 - Mancal Flexível 67
2.13 - Viga em Balanço 68
2.14 - Viga em duas Massas Pontuais 70
2.15 - Modos Normais de Viga Bi-apoiada 78
2.16 - Diagramas de Viga Bi-apoiada 79
2.17 - Eixo sem Massa com Discos Rígidos 83
2.18 - Eixo e Disco em Diagramas de Corpo Livre 84

2.19 - Sistema à Torção 86
2.20 - Modos de Vibrar do Sistema 89

CAPÍTULO 3

Figura 3.1 - Deslocamentos das Juntas de um Elemento 92
3.2 - Haste em Vibração Axial 93
3.3 - Eixo à Torção 98
3.4 - Barra à Flexão 98
3.5 - Barra em Flexão com Força Axial 103
3.6 - Barra no Sistema Global 105
3.7 - Barra como Estrutura Plana 107
3.8 - Eixo Circular a Torção 114
3.9 - Barra Uniforme à Flexão 116

CAPÍTULO 4

Figura 4.1 - Engastamento do Corpo de Prova 127
4.2 - Base e Corpo de Prova 127
4.3 - Fixação do Acelerômetro 128
4.4 - Posição do Excitador 129
4.5 - Aparelhos de Medição 130
4.6 - Banco de Ensaios 130
4.7 - Diagrama de Interligação dos Aparelhos . 131
4.8 - Excitação na Primeira Frequência Natu ra Registrada 132
4.9 - Excitação na segunda Frequência Natu- ral Registrada 133

CAPÍTULO 5

Figura 5.1 - Viga Nº 1 (Seção Constante) e Modelo com quatro Massas Pontuais 138
5.2 - Modelo com oito Massas Pontuais para o Sistema da Viga Nº 1 141
5.3 - Viga Nº 2 (Seção Variável) e Modelo com quatro Massas Pontuais 148
5.4 - Modelo com oito Massas Pontuais para o Sistema da Viga Nº 2 149
5.5 - Viga-Eixo Engastado-livre 151
5.6 - Modelo com nove Massas Pontuais para o Sistema Viga-Eixo 152

5.7 - Modelo com vinte e uma Massas Pontuais para o Sistema Viga-Eixo 154
5.8 - Eixo Contínuo e Modelo com quatro Discos 159
5.9 - Modelo com oito Discos para o Sistema do Eixo Contínuo 161
5.10 - Viga Nº 1 (Seção Constante) devidida em três Elementos 168
5.11 - Viga Nº 1 dividida em quatro Elementos. 170
5.12 - Viga Nº 2 (Seção Variável) dividida em três Elementos 173
5.13 - Viga Nº 2 dividida em quatro Elementos. 174
5.14 - Viga-Eixo dividido em três Elementos... 175
5.15 - Viga-Eixo dividido em seis Elementos... 176
5.16 - Eixo Bi-apoiado com três Elementos 177
5.17 - Sistema Bi-apoiado com Eixos e Volantes 187
5.18 - Viga Nº 1 Bi-apoiada 190
5.19 - Viga nº 1 Bi-engastada 191
5.20 - Viga Nº 1 Engastada-livre 192
5.21 - Viga Nº 1 Engastada-apoiada 193
5.22 - Viga Nº 2 Bi-apoiada 194
5.23 - Viga-Eixo Engastado-livre 195
5.24 - Eixo Contínuo Bi-apoiado 196
5.25 - Eixo Contínuo Engastado-livre 197
5.26 - Eixo Contínuo Bi-engastado 198

APÊNDICE A

Figura A.1 - Partícula em Equilíbrio 203
A.2 - Pêndulo Simples 205
A.3 - Sistemas com um Grau de Liberdade 205
A.4 - Sistemas com dois Graus de Liberdade... 206

APÊNDICE C

Figura C.1 - Sistema Semi-definido 222

LISTA DE SÍMBOLOS

a_x, a_y...	Componentes da aceleração
$\vec{a}$, $\ddot{\vec{x}}$	Vetores aceleração
a_{11}, b_{11}...	Elementos de matrizes
A	Área; Amplitude
$[a]$, $[k]^{-1}$	Matriz flexibilidade ou inversa da rigidez
A, B, C, N	Constantes
$[C]$	Matriz de transferência campo; matriz obrigatória
$[D]$	Matriz dinâmica
E	Módulo de elasticidade longitudinal
f, F, Y	Funções escalares
$[F]$	Matriz de transferência para suporte flexível
$\vec{F}$	Vetor força
$\vec{F}_R$	Vetor força resultante
F_x, F_y,...	Componentes da força resultante
F_i	Força externa
G	Módulo de elasticidade transversal
I	Momento de inércia; momento de inércia linear
J, J_T	Momento polar de inércia
$[K]$	Matriz rigidez
K	Rigidez de mola
ℓ, L	Comprimento
$[\ell]$	Matriz de transformação
$[L]$	Matriz total de transformação
L	Potencial cinético
m	Massa; densidade linear de massa
M	Massa; momento fletor
$[m]$, $[M]$	Matrizes massa
n	Variável; deslocamento; número de graus de liberdade
$[P]$	Matriz de transferência ponto
q_j	Deslocamento generalizado
$\dot{q}_j$	Velocidade generalizada
Q	Esforço cortante; força cortante
Q_j	Força
r	Raio de giração
R	Raio
t	Tempo
T	Energia cinética
$[T]$	Matriz total de transferência

T_i	Tensão; torção
$T_{11}, T_{12}...$	Elementos da matriz total de transferência
u, w	Deslocamentos
$u_{11}, u_{12}...$	Elementos de matrizes
U	Deslocamento; função escalar
$\dot{u}_1, \dot{u}_2,...$	Velocidades
$\ddot{u}_1, \ddot{u}_2,...$	Acelerações
V	Energia Potencial
x, y, z	Coordenadas retangulares; distâncias
x_i	Deslocamento horizontal
X_i	Amplitude
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$	Vetores unitários segundo o eixo coordenado
$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$	Componentes da velocidade
$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$	Componentes da aceleração
y_i	Deslocamento vertical
$\{Z_i\}$	Vetor estado
α	Fator de multiplicidade; ângulo
β	Constante; ângulo
δ	Delta de Kronecker
$\delta x, \delta y,...$	Componentes do deslocamento virtual
δT	Trabalho virtual
$\delta \vec{r}$	Deslocamento virtual de uma partícula
θ, θ_i	Deslocamentos angulares de juntas
$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$	Velocidades angulares de discos
θ	Deformação angular obrigatória
ρ	Massa específica
ϕ	Ângulo de fase; deslocamento angular
$\phi_1, \phi_2,...$	Funções aparentes
ω	Frequência natural
∂	Diferencial parcial

CAPÍTULO 2 - O MÉTODO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA

2.1 - Introdução

O capítulo 1 apresentou as duas maneiras de solucionar o problema de análise de vibrações estruturais, considerando o sistema como contínuo e depois como discreto. A relação existente entre os dois casos também foi apresentada chegando-se à conclusão de que a técnica consistindo da discretização do sistema contínuo pode ser utilizada com êxito no cálculo das frequências naturais e modos de vibração desde que o sistema discretizado tenha um número considerável de graus de liberdade. Para tal sistema, uma maneira alternativa de estudar as vibrações de vigas ou eixos é tratado neste capítulo, chamado de "método das matrizes de transferência". Este método, que usa o conceito da matriz de transferência será discutido agora, e a técnica será introduzida por meio de sistemas massa-mola já considerados.

2.2 - Vetores Estado e Matrizes de Transferência

Um "vetor estado" é uma matriz coluna que especifica as forças internas e os deslocamentos em um ponto no sistema, sendo este ponto um extremo de um elemento. Neste ponto incluimos torção, esforço cortante e momento fletor na descrição generalizada de força e deslocamentos angular e linear na descrição generalizada de deslocamento.

Por exemplo, na Fig. 2.1a a força axial F_i ocasiona um deslocamento x_i. O vetor estado $\{Z_i\}$ na estação i é simplesmente

$$\{Z_i\} = \begin{Bmatrix} x_i \\ \\ F_i \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

O deslocamento axial e a força axial descrevem os estados do deslocamento e força. Na Fig. 2.1b a torção T_i e o deslocamento angular ϕ_i descrevem o estado de força e deslocamento. A Fig.2.1c

mostra o momento fletor M_i e o deslocamento angular θ_i e a Fig. 2.1d o esforço cortante Q_i e o deslocamento vertical Y_i. Os vetores estado correspondentes são

$$\{Z_i\} = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \\ T_i \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

$$\{Z_i\} = \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \\ M_i \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

$$\{Z_i\} = \begin{Bmatrix} Y_i \\ \\ Q_i \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

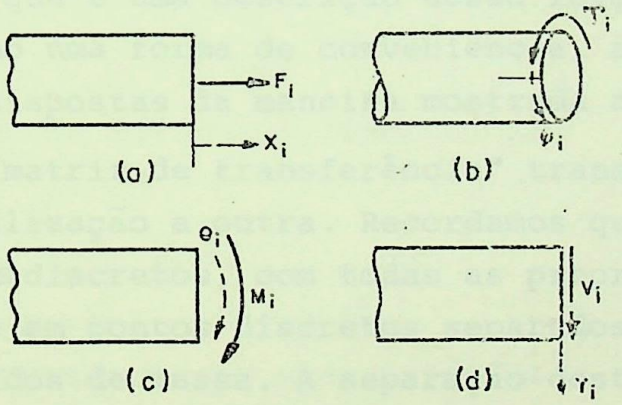


FIG. 2.1 - ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS

Pode ocorrer qualquer combinação de dois, três ou quatro forças, requerendo quatro, seis ou oito vetores no vetor estado. Por exemplo, se ocorrer conjuntamente esforço cortante e momento fletor

$$\{Z_i\} = \begin{Bmatrix} Y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ Q_i \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

Ocorrendo simultaneamente força axial, torção, esforço cortante e momento fletor, o vetor estado fica

$$\{Z_i\} = \begin{Bmatrix} x_i \\ Y_i \\ \theta_i \\ \phi_i \\ T_i \\ M_i \\ Q_i \\ F_i \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

A disposição dos termos no vetor estado é arbitrária, já que cada termo do vetor coluna está conectado com uma fila na matriz de transferência, que é uma descrição dessa força ou deslocamento particular. Como uma forma de conveniência, as filas do vetor estado foram dispostas da maneira mostrada acima.

A "matriz de transferência" transfere os vetores estado de uma localização a outra. Recordamos que estamos trabalhando com sistemas discretos, com todas as propriedades inerciais concentradas em pontos discretos separados por elementos elásticos desprovidos de massa. A separação destas propriedades requer que as matrizes de transferência sejam separadas e diferentes.

Uma matriz de transferência é chamada de "matriz ponto" quando ela transfere o vetor estado de uma estação $i-1$ ao vetor na estação i, e onde i e $i-1$, são os dois lados do mesmo ponto.

Fazendo referência à Fig. 2.2, existem duas equações que descrevem o deslocamento e a força, uma cinemática e a outra cinética. Já que a massa m está concentrada em um ponto, Fig. 2.2a, os deslocamentos na estação $i-1$ e na estação i são os mesmos.

$$x_{i-1} = x_i \tag{2.7}$$

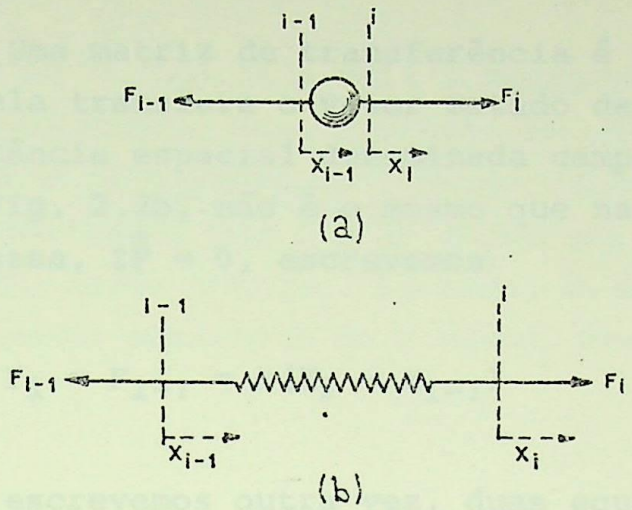


FIG. 2.2 - ELEMENTOS MASSA E MOLA

Da equação $\Sigma\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$ de movimento, escrevemos

$$F_i - F_{i-1} = m\ddot{x}_i \tag{2.8}$$

Para movimento harmônico em um modo principal, $x_i = X_i \cos\omega t$, as Eqs. (2.7) e (2.8) podem ser reescritas como

$$X_i = X_{i-1} \tag{2.9}$$

e

$$F_i = F_{i-1} - m\omega^2 X_i \tag{2.10}$$

Na forma matricial, temos

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ F_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{i-1} \\ F_{i-1} \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

Donde a matriz ponto para a massa m é

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Uma matriz de transferência é chamada de "matriz campo" quando ela transfere o vetor estado de uma estação i através de uma distância espacial denominada campo. O deslocamento na estação i, Fig. 2.2b, não é o mesmo que na estação i-1. Para uma mola sem massa, $\Sigma\vec{F} = 0$, escrevemos

$$F_i = F_{i-1} = k(X_i - X_{i-1}) \tag{2.13}$$

Da Eq. (2.13), escrevemos outra vez, duas equações para movimento harmônico,

$$X_i = X_{i-1} + \frac{F_{i-1}}{k} \tag{2.14}$$

e

$$F_i = F_{i-1} \tag{2.15}$$

As quais podem ser escritas na forma compacta matricial,

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ F_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_{i-1} \\ F_{i-1} \end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

Assim, a matriz campo para uma mola de rigidez k é

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Uma vantagem de usar matrizes de transferência, é que, uma vez que estas têm sido determinadas, se podem usar outras vezes. Todas as molas sem massa têm a mesma matriz de transferência de campo, exceto para o valor do módulo, e todas as

massas concentradas têm a mesma matriz de transferência ponto, exceto para as propriedades inerciais.

2.3 - Análise de Vibrações usando Matrizes de Transferência

Na Fig. 2.3a a mola e massa são unidas para formar um sistema vibrante. Para desenvolver uma análise de vibração, é necessário relacionar os vetores estado para os extremos do sistema, denominados por 1 e 3, desde que existam condições de contorno para estes pontos. As Figs. 2.3b e c mostram os elementos mola e massa separados do sistema, respectivamente.

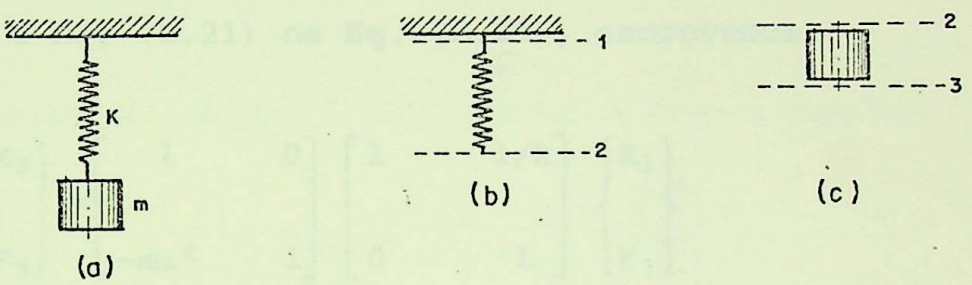


FIG. 2.3 - SISTEMA SIMPLES MASSA-MOLA

Todas as propriedades inerciais estão contidas na massa suspensa m, Fig. 2.3c. Conforme a Eq. (2.12), a matriz ponto de transferência é

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

O vetor estado na estação 3 é calculado conforme a Eq.(2.11), como

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{2.19}$$

Na Fig. 2.3b, todas as propriedades elásticas estão contidas na mola. Conforme a Eq. (2.17), a matriz campo de transferência é

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

o vetor estado na estação 2 é obtido considerando a Eq. (2.11),

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \tag{2.21}$$

Inserindo a Eq. (2.21) na Eq. (2.19), escrevemos

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \tag{2.22}$$

Considerando agora a Eq.(2.1), escrevemos a Eq.(2.22) na forma simplificada

$$\{Z_3\} = [P][C]\{Z_1\} \tag{2.23}$$

Multiplicando as duas matrizes quadradas da Eq.(2.22), podemos determinar a força e o deslocamento na estação 3 diretamente a partir da estação 1

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ -m\omega^2 & \left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$

Quando a relação geral entre as condições nos terminais extremos for determinada, as condições de contorno especificadas devem ser inseridas para reduzir o número de incógnitas. No siste

ma considerado da Fig. 2.3 o ponto 1 é fixo e o ponto 3 é uma extremidade livre, portanto, as condições de contorno para este sistema são

$$X_1 = 0, \qquad F_3 = 0 \tag{2.25}$$

Inserindo as condições de contorno (2.25) na Eq.(2.24), escrevemos

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ -m\omega^2 & 1 - \frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_1 \end{Bmatrix} \tag{2.26}$$

O desenvolvimento da Eq.(2.26) conduz a duas equações

$$X_3 = F_1/k, \qquad 0 = \left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) F_1 \tag{2.27}$$

A primeira equação de (2.27) é uma expressão para o deslocamento da massa em termos da força na mola, e a segunda é a equação de frequência para a solução não trivial, $F_1 \neq 0$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{2.28}$$

Como a vibração é livre, a Eq. (2.28) fornece a frequência natural do sistema

$$\omega = \sqrt{k/m} \tag{2.29}$$

Se no ponto 3 do sistema da Fig. 2.3 for aplicada verticalmente uma força $F_3(t) = F\,\mathrm{sen}\omega t$, a vibração será forçada, e o valor máximo da função forçante harmônica é F. Neste caso, as condições de contorno são

$$F_3 = F, \qquad X_1 = 0 \tag{2.30}$$

Considerando as condições de contorno (2.30), a Eq.(2.24) torna-se

$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ -m\omega^2 & 1 - \frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_1 \end{Bmatrix} \tag{2.31}$$

Novamente, o desenvolvimento da Eq.(2.31) fornece duas equações

$$X_3 = F_1/k \tag{2.32}$$

e

$$F = \left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) F_1 \tag{2.33}$$

Inserindo o valor de F_1 da Eq.(2.33) na Eq.(2.32), a expressão do deslocamento da massa em termos da amplitude da função forçante harmônica é

$$X_3 = \frac{F}{k\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)} \tag{2.34}$$

Inserindo o valor da frequência natural ω_n da Eq.(2.29) na Eq. (2.34), temos

$$X_3 = \frac{F/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{2.35}$$

que é a resposta familiar de um sistema simples com um grau de liberdade submetido a uma função forçante harmônica.

2.4 - Extensão da Técnica para Sistemas com vários Graus de Liberdade

O método da matriz de transferência é obviamente

trabalhoso para um sistema simples, porém ele tem consideráveis vantagens para sistemas com grande número de elementos. A Fig. 2.4 mostra um grande sistema com os elementos enumerados.

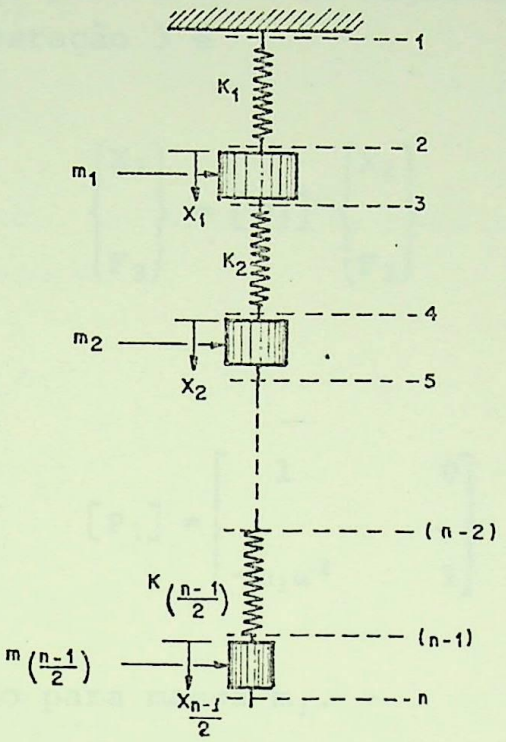


FIG. 2.4 - SISTEMA COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

A técnica exige a determinação de uma matria de transferência relacionando quaisquer condições de contorno para o sistema. As condições de contorno especificadas devem então ser inseridas, e a compatibilidade entre as equações resultantes é obtida somente quando é usado o valor correto da frequência ω.

Da Eq. (2.16), o vetor estado na estação 2 é

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [C_1] \begin{Bmatrix} X_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \tag{2.36}$$

onde

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

é a matriz campo para a mola de rigidez k_1. Da Eq. (2.11) o vetor estado na estação 3 é

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ F_3 \end{Bmatrix} = [P_1] \begin{Bmatrix} X_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{2.38}$$

onde

$$[P_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m_1\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

é a matriz ponto para massa m_1.

Inserindo agora a Eq.(2.36) na Eq.(2.38), escrevemos

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ F_3 \end{Bmatrix} = [P_1][C_1] \begin{Bmatrix} X_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \tag{2.40}$$

Continuando, o vetor estado na localização 4 é

$$\begin{Bmatrix} X_4 \\ F_4 \end{Bmatrix} = [C_2] \begin{Bmatrix} X_3 \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{2.41}$$

onde $[C_2]$ é a matriz campo para mola de rigidez k_2, e

$$\begin{Bmatrix} X_5 \\ F_5 \end{Bmatrix} = [P_2] \begin{Bmatrix} X_4 \\ F_4 \end{Bmatrix} \tag{2.42}$$

onde $[P_2]$ é a matriz ponto para a massa m_2.

Inserindo a Eq.(2.40) na Eq.(2.41) e o resultado levado na Eq. (2.42), escrevemos

$$\begin{Bmatrix} X_5 \\ F_5 \end{Bmatrix} = [P_2][C_2][P_1][C_1] \begin{Bmatrix} X_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \tag{2.43}$$

e assim, portanto, as etapas são repetidas até à estação n, escrevendo finalmente

$$\begin{Bmatrix} X_n \\ F_n \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} X_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \tag{2.44}$$

onde

$$[T] = \left[P_{\frac{n-1}{2}}\right]\left[C_{\frac{n-1}{2}}\right] \ \ldots \ [P_2][C_2][P_1][C_1] \tag{2.45}$$

é a matriz de transferência para o sistema inteiro. Esta matriz $[T]$ é quadrada de ordem 2, portanto, a Eq.(2.44) pode ser escrita na forma

$$\begin{Bmatrix} X_n \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \tag{2.46}$$

No sistema livre considerado na Fig. 2.4 a primeira mola é fixa, portanto, as condições de contorno são análogas àquelas dadas na Eq.(2.25), ou seja, $X_1 = 0$ e $F_n = 0$. Considerando estas condições de contorno, a Eq. (2.46) fornece duas equações

$$X_n = T_{12} F_1 \tag{2.47a}$$

e

$$0 = T_{22} F_1 \tag{2.47b}$$

Devemos ter, então, que $T_{22} = 0$ para uma solução não trivial, tanto que os valores das frequências naturais ω ocorrem para esta condição.

O procedimento para encontrar as frequências naturais cai no cálculo das raízes de uma curva tal como a da Fig. 2.5. A equação $T_{22} = 0$ é uma curva de ordem 2N, onde N é o número de graus de liberdade. Porém, se expressarmos a equação $T_{22}=0$ em termos de ω^2, a ordem da curva será N e, a curva terá, portanto N raízes, que fornecerão os quadrados dos valores das frequências naturais do sistema.

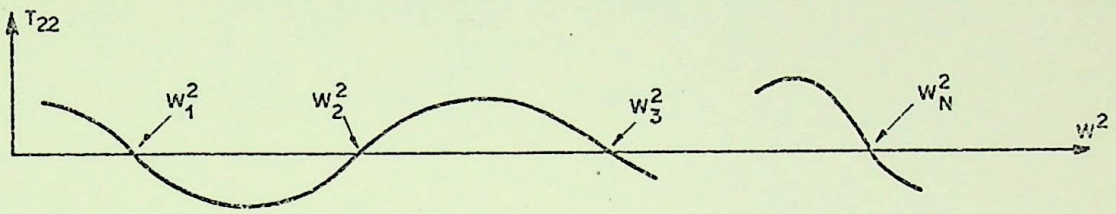


FIG. 2.5 – FREQUÊNCIAS NATURAIS

Para que o procedimento fique mais claro, vamos determinar as frequências naturais e os modos de vibrar, usando vetores estado e matriz de transferência para o sistema da Fig. 2.6 que consiste de duas molas iguais e duas massas iguais.

Para as duas massas, as matrizes de transferência ponto são

$$[P_{2-1}] = [P_{4-3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.48)$$

Para as duas molas, as matrizes de transferência campo são

$$[C_{3-2}] = [C_{1-0}] = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.49)$$

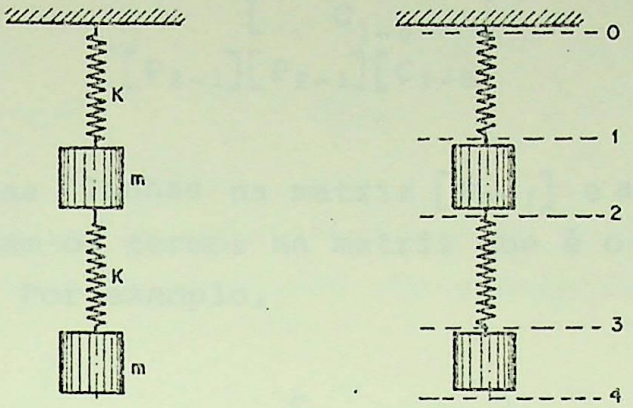


FIG. 2.6 - SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

O vetor estado na estação 4 pode ser encontrado pela multiplicação sucessiva das matrizes de transferência partindo do vetor estado na estação 1, como

$$\begin{aligned} \{Z_1\} &= [C_{1-0}]\{Z_0\} \\ \{Z_2\} &= [P_{2-1}]\{Z_1\} \\ \{Z_3\} &= [C_{3-2}]\{Z_2\} \\ \{Z_4\} &= [P_{4-3}]\{Z_3\} \end{aligned} \tag{2.50}$$

ou seja

$$\{Z_4\} = [P_{4-3}][C_{3-2}][P_{2-1}][C_{1-0}]\{Z_0\} \tag{2.51}$$

A multiplicação sucessiva destas matrizes é um trabalho que requer uma técnica. A técnica consiste em colocar a matriz que vai ser multiplicada na parte superior e a matriz pré-multiplicada na esquerda da matriz que vai ser o produto das duas, como

$$\begin{matrix} [\quad C_{1-0} \quad] \\ [P_{2-1}][P_{2-1}][C_{1-0}] \end{matrix} \tag{2.52}$$

A interseção das linhas na matriz $[P_{2-1}]$ e as colunas na matriz $[C_{1-0}]$ localizam os termos na matriz que é o produto de $[P_{2-1}][C_{1-0}]$. Por exemplo,

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{2.53}$$

Donde,

$$\begin{aligned} c_{11} &= b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} \\ c_{12} &= b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22} \\ c_{21} &= b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21} \\ c_{22} &= b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Então,

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ -m\omega^2 & 1 - \dfrac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{2.55}$$

Portanto, o vetor estado na estação 2 é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ -m\omega^2 & 1 - \frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \{Z_0\} = \{Z_2\} \qquad (2.56)$$

Este sistema coloca a matriz produto em posição para ser multiplicada pela seguinte, formando uma cadeia de multiplicação

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{Z_0\} = \{Z_1\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ -m\omega^2 & 1 - \frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \{Z_0\} = \{Z_2\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{m\omega^2}{k} & \frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k^2} \\ -m\omega^2 & 1 - \frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \{Z_0\} = \{Z_3\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{m\omega^2}{k} & \frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k} \\ \frac{m^2\omega^4}{k} - 2m\omega^2 & -m\omega^2\left(\frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k^2}\right) + 1 - \frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \{Z_0\} = \{Z_4\}$$

(2.57)

Vibração livre. Para a vibração livre, as condições limites são $X_0 = 0$, e $F_4 = 0$. Isto é

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{m\omega^2}{k} & \frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k^2} \\ \frac{m^2\omega^4}{k} - 2m\omega^2 & -m\omega^2\left[\frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k^2}\right] + 1 - \frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_4 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2.58)$$

cuja solução se compreende de duas equações

$$X_4 = \left(\frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k^2}\right) F_0 \tag{2.59}$$

e

$$0 = F_0\left[-m\omega^2\left(\frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k^2}\right) + 1 - \frac{m\omega^2}{k}\right] \tag{2.60}$$

A Eq. (2.60) é a equação da frequência

$$-m\omega^2\left(\frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k^2}\right) + 1 - \frac{m\omega^2}{k} = 0 \tag{2.61}$$

que simplificada torna-se

$$\omega^4 - 3\,\frac{k}{m}\,\omega^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0 \tag{2.62}$$

e, a partir da qual, encontramos as duas frequências naturais

$$\omega_1^2 = \frac{(3-\sqrt{5})}{2}\,\frac{k}{m} \qquad \text{e} \qquad \omega_2^2 = \frac{(3+\sqrt{5})}{2}\,\frac{k}{m} \tag{2.63}$$

Embora pareça ser uma maneira complicada para encontrar as frequências naturais, isto pode ser simplificado; por exemplo, se nós notarmos que a primeira coluna é multiplicada pela condição de contorno $X_0 = 0$ para encontrar a força F_4, vemos que não é necessário calcular a primeira coluna, diminuindo, portanto, os cálculos.

Modos normais. Para estabelecer os modos normais, a amplitude de uma das massas precisa ser normalizada. Façamos $F_0/k = 1{,}000$. Para $\omega_1^2 = [(3-\sqrt{5})/2]\,(k/m)$

$$\{Z_1\} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F_0}{k} \\ F_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}000 \\ k \end{Bmatrix}$$

$$\{Z_2\} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ -m\omega^2 & 1 - \frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F_0}{k} \\ \frac{(-1+\sqrt{5})\,F_0}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}000 \\ 0{,}618k \end{Bmatrix}$$

$$\{Z_3\} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{m\omega^2}{k} & \frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k^2} \\ -m\omega^2 & 1 - \frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{(1+\sqrt{5})F_0}{2k} \\ \frac{(-1+\sqrt{5})F_0}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}618 \\ 0{,}618k \end{Bmatrix}$$

$$\{Z_4\} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{m\omega^2}{k} & \frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k} \\ \frac{m^2\omega^4}{k} - 2m\omega^2 & -m\omega^2\left(\frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k^2}\right) + 1 - \frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{(1+\sqrt{5})F_0}{2k} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}618 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Eq.(2.64)

e para $\omega_2^2 = \left[(3 + \sqrt{5})/2\right]$ (k/m)

$$\{Z_1\} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F_0}{k} \\ F_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}000 \\ k \end{Bmatrix}$$

$$\{Z_2\} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ -m\omega^2 & 1 - \frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{F_0}{k} \\ \frac{(-1-\sqrt{5})F_0}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}000 \\ -1{,}618k \end{Bmatrix}$$

$$\{Z_3\} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{m\omega^2}{k} & \frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k^2} \\ -m\omega^2 & 1 - \frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{(1-\sqrt{5})F_0}{2} \\ \frac{(-1-\sqrt{5})F_0}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}618 \\ -1{,}618k \end{Bmatrix}$$

$$\{Z_4\} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{m\omega^2}{k} & \frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k} \\ \frac{m^2\omega^4}{k} - 2m\omega^2 & -m\omega^2\left(\frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k^2}\right) + 1 - \frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{(1-\sqrt{5})}{2}\frac{F_0}{k} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}618 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Eq.(2.65)

Os modos normais podem ser representados por vetores. O primeiro modo é

$$\begin{Bmatrix} 1,000 \\ \\ 1,618 \end{Bmatrix} \tag{2.66}$$

e o segundo modo como

$$\begin{Bmatrix} 1,000 \\ \\ -0,618 \end{Bmatrix} \tag{2.67}$$

Para, ainda, melhor entender o procedimento, vamos considerar o mesmo problema fazendo $\omega^2 = 1000\ (rd/s)^2$, se $k = 1000\ [N/m]$ e $m = 2\ [kg]$.

O processo mais comum para resolver problemas pelo método das matrizes de transferência é através dos métodos numéricos e usando do computador. Como vimos anteriormente, para sistemas com dois ou mais graus de liberdade, a multiplicação das matrizes contendo símbolos de massa, rigidez ou deslocamento, ao invés de números, é um trabalho quase que impossível.

Na última consideração, k = 1000 N/m.A matriz de transferência campo é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,001 \\ \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

A matriz de transferência massa, para $m\omega^2 = 2 \cdot (1000) = 2000$ N/m, é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ -2000 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

Usando a multiplicação em cadeia como antes,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}001 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{Z_0\} = \{Z_1\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0{,}001 \\ -2000 & -1 \end{bmatrix} \{Z_0\} = \{Z_2\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}001 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2000 & -1 \end{bmatrix} \{Z_0\} = \{Z_3\} \qquad (2.70)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -6000 & -1 \end{bmatrix} \{Z_0\} = \{Z_4\}$$

O resultado final é uma equação matricial em que o vetor estado na estação 4 é colocado em função do vetor estado na estação 0. Esta função é uma matriz que contém elementos u_{11}, u_{12}, u_{21} e u_{22}, como

$$\{Z_4\} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \{Z_0\} \qquad (2.71)$$

ou,

$$\begin{Bmatrix} X_4 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ F_0 \end{Bmatrix} \qquad (2.72)$$

Da Eq.(2.72), tiramos que

$$X_4 = u_{11}\, X_0 + u_{12}\, F_0 \qquad (2.73)$$

e

$$F_4 = u_{21}\, X_0 + u_{22}\, F_0 \qquad (2.74)$$

e considerando as condições de contorno, $X_0 = 0$ e $F_4 = 0$, nota-se pela Eq.(2.74) que o elemento u_{22} deve ser zero. Mas, no caso presente, o elemento u_{22} da matriz resultante dada na Eq.(2.70) é igual a -1, então o valor $\omega^2 = 1000$ não é uma frequência natural.

Supondo uma frequência $\omega^2 = \left[(3-\sqrt{5})/2\right]k/m = 190,98\,(rad/s)^2$, teríamos $-m\omega^2 = -2(190,98) = -381,97$ N/m e,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,001 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{Z_0\} = \{Z_1\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -381,97 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,001 \\ -381,97 & +0,6180 \end{bmatrix} \{Z_0\} = \{Z_2\} \qquad (2.75)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,001 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6180 & 0,00162 \\ -381,97 & 0,6180 \end{bmatrix} \{Z_0\} = \{Z_3\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -381,97 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6180 & 0,00162 \\ -236,1 & 0 \end{bmatrix} \{Z_0\} = \{Z_4\}$$

Vemos, na matriz final da Eq. (2.75), que $u_{22} = 0$ e consequentemente $\omega^2 = 190,98$ (rad/s) é uma frequência natural. Se plotássemos u_{22} como função de ω^2, as raízes desta função seriam as frequências naturais. Esta função, Eq.(2.61), foi obtida anteriormente pela técnica da multiplicação em cadeia resultando o elemento u_{22} da matriz final da Eq. (2.57) que é

$$u_{22} = -m\omega^2\left(\frac{2}{k} - \frac{m\omega^2}{k^2}\right) + 1 - \frac{m\omega^2}{k} \qquad (2.76)$$

Portanto, a curva esboçada na Fig. 2.7 representa a função dada na Eq. (2.76).

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca
MAUÁ
Itajubá

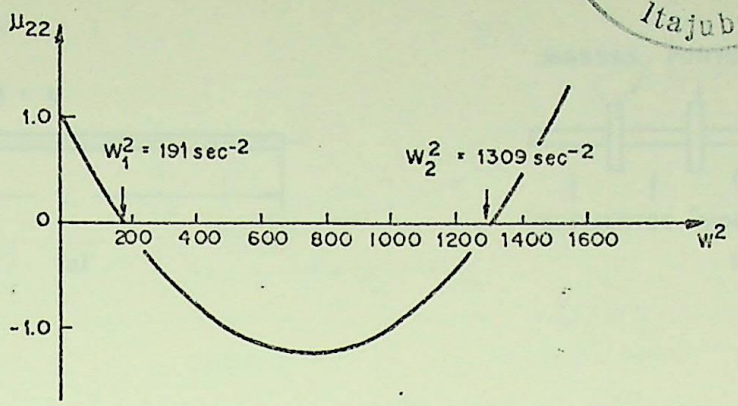


FIG. 2.7 - CURVA FUNÇÃO EM ω^2

Para determinar o vetor estado em qualquer estação, simplesmente se normaliza sobre a primeira massa, fazendo $F_0/k = 1{,}000$ ou usando $F_0 = 0{,}0005$ N. Os vetores estado seriam dados em função de 1 m de deslocamento para a primeira massa. A normalização, naturalmente, pode ser feita sobre a segunda massa.

2.5 - Vibrações Transversais de Vigas e Eixos

Os conceitos prévios vistos neste capítulo serviram para introduzir as matrizes de transferência. O método será agora discutido com respeito à área em que ele é mais aplicado, denominada vibração de uma viga ou eixo.

Para analisar tal sistema é preciso considerar os parâmetros necessários para uma especificação completa destes estados em qualquer ponto. No caso de um sistema simples massa-mola, discutido no ítem 2.2, os parâmetros necessitados foram somente o deslocamento e a força axial. No caso de uma viga, contudo, são necessários mais informações. Para primeira consideração do problema, a viga é analisada como sendo formada por uma série de elementos molas e massas geralmente alternados, como mostra por exemplo, a Fig. 2.8.

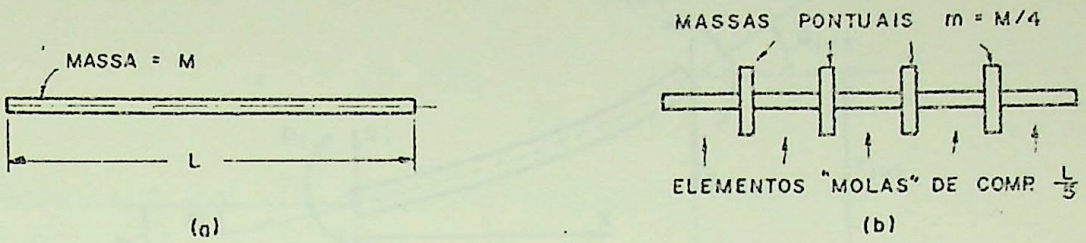


FIG. 2.8 - VIGA E ELEMENTOS MASSA-MOLA

2.5.1 - Matriz Campo para um Elemento "Mola"

Vamos considerar uma seção de viga como mostra a Fig. 2.9. Sua condição para qualquer ponto é definida por quatro parâmetros mutuamente dependentes. Eles são a deflexão y, a inclinação θ, o momento fletor M e o esforço cortante Q. Esses parâmetros definem o vetor estado para o sistema, e esse vetor é expresso convencionalmente por

$$\begin{Bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix} \tag{2.77}$$

Com isto estabelecido, a Fig. 2.9 pode ser usada para relacionar cada um desses parâmetros para as condições das extremidades da seção da viga, considerada uniforme.

Para as vigas sem massa da Fig. 2.9a, as equações de equilíbrio de um elemento de comprimento L são:

Resolvendo verticalmente,

$$Q_{i+1} = Q_i \tag{2.78}$$

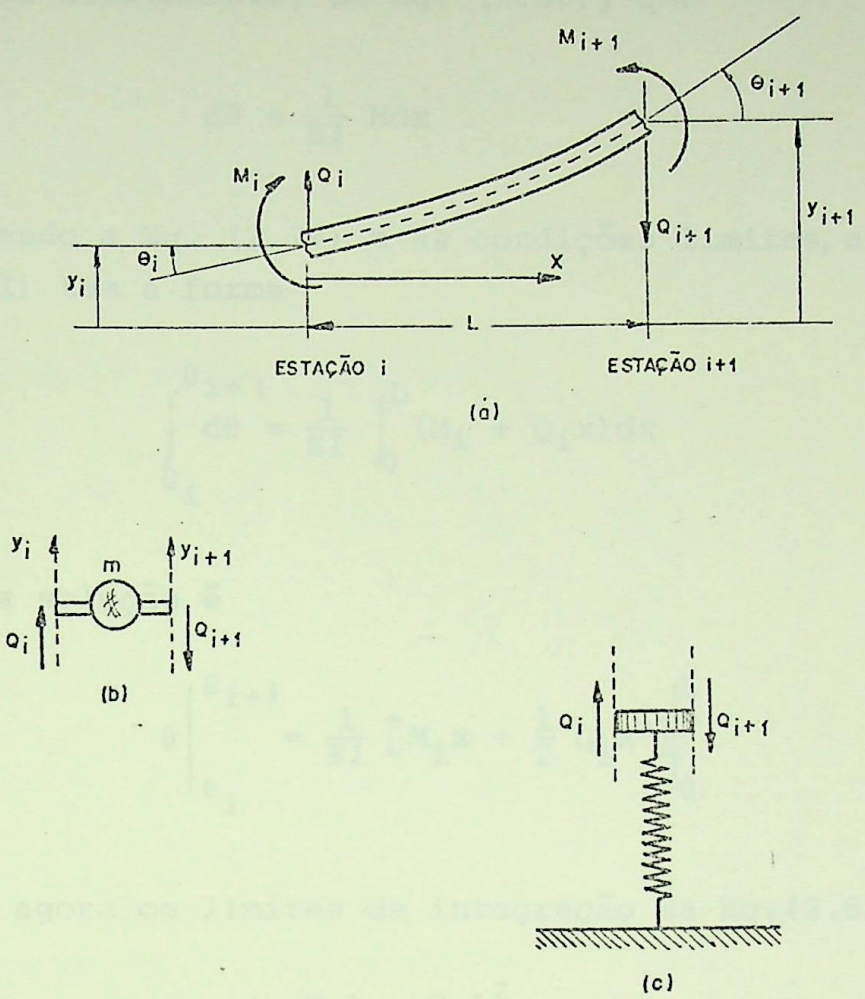


FIG. 2.9 - SEÇÃO E ELEMENTOS DE VIGA

Tomando os momentos na estação i+1,

$$M_{i+1} = M_i + Q_i \cdot L, \qquad x = L \tag{2.79}$$

O comprimento L é de uma seção uniforme de viga e é finita. Para encontrar a diferença das inclinações das extremidades da viga, usaremos a equação da linha elástica, como

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2} = EI \frac{d\theta}{dx} \tag{2.80}$$

Escrevemos diretamente, da Eq. (2.80), que

$$d\theta = \frac{1}{EI} M dx \tag{2.81}$$

Considerando a Eq. (2.79) e as condições limites, a integração da Eq. (2.81) tem a forma

$$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} d\theta = \frac{1}{EI} \int_0^L (M_i + Q_i x)\, dx \tag{2.82}$$

que, cuja solução é

$$\theta \Big|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} = \frac{1}{EI} \left[M_i x + \frac{1}{2} Q_i x^2 \right] \Big|_0^L \tag{2.83}$$

Passando agora os limites de integração na Eq. (2.83), escrevemos

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{M_i L}{EI} + \frac{Q_i L^2}{2EI}, \qquad x = L \tag{2.84}$$

Considerando a inclinação $\theta = dy/dx$, a deflexão $y = \int \theta dx$ se encontra similarmente, escrevendo

$$y_{i+1} = y_i + \int_0^L \left[\theta_i + \frac{M_i x}{EI} + \frac{Q_i x^2}{2EI} \right] dx \tag{2.85}$$

ou,

$$y_{i+1} = y_i + \theta_i L + \frac{M_i L^2}{2EI} + \frac{Q_i L^3}{6EI} \tag{2.86}$$

As Eqs. (2.78), (2.79), (2.84) e (2.86) são tudo o que necessitamos para construir uma matriz de transferência que descreva as propriedades elásticas de uma seção de viga de comprimento L e rigidez a flexão EI constante. Estas quatro equações podem ser reescritas na forma matricial, como

$$\begin{Bmatrix} Y_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ M_{i+1} \\ Q_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ Q_i \end{Bmatrix} \tag{2.87}$$

Então a matriz campo é dada por

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

que pode ser usada para todas as seções de viga com o mesmo comprimento e mesma rigidez constante a flexão.

2.5.2 - Matriz Ponto para um Elemento "Massa".

Tendo estabelecidos os parâmetros necessários para o vetor estado, a matriz de transferência para uma massa pontual pode ser obtida considerando a Fig. 2.9b. Por inspeção, a deflexão, a inclinação e o momento fletor nas estações i e i+1 não se alteram. Então, escrevemos para a deflexão

$$Y_{i+1} = Y_i \tag{2.89}$$

para a inclinação

$$\theta_{i+1} = \theta_i \tag{2.90}$$

e para o momento fletor

$$M_{i+1} = M_i \tag{2.91}$$

A equação de movimento na vertical, considerando ainda a Fig. 2.9b, é

$$Q_{i+1} - Q_i = m\omega^2 y_i \tag{2.92}$$

ou,

$$Q_{i+1} = m\omega^2 y_i + Q_i \tag{2.93}$$

Na forma matricial essas equações tornam-se

$$\begin{Bmatrix} y_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ M_{i+1} \\ Q_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ Q_i \end{Bmatrix} \tag{2.94}$$

Portanto, a matriz de transferência ponto é simplesmente

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.95}$$

2.6 - Aplicação de Matrizes de Transferência para o Cálculo de Frequências Naturais de uma Viga ou Eixo

O procedimento é análogo como aquele descrito na seção 2.4. A viga é considerada como uma série de elementos massa-mola, como mostra a Fig. 2.10.

Partindo da extremidade a esquerda, o vetor estado na estação 2, conforme a Eq.(2.87), é

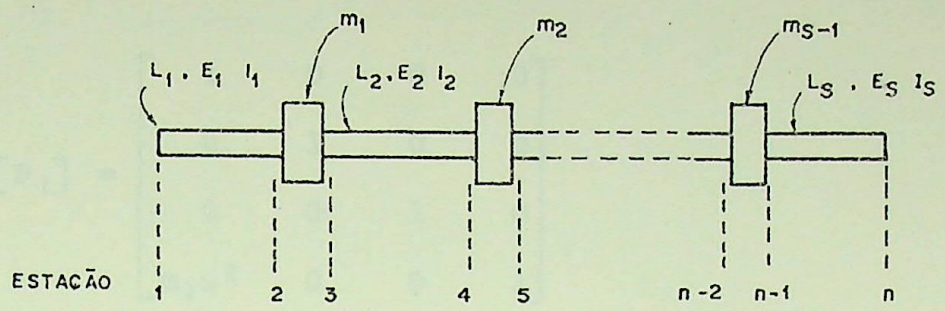


FIG. 2.10 - ELEMENTOS MASSA-MOLA

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = [C_1] \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.96}$$

onde

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 1 & L_1 & \dfrac{L_1^2}{2E_1I_1} & \dfrac{L_1^3}{6E_1I_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{L_1}{E_1I_1} & \dfrac{L_1^2}{2E_1I_1} \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.97}$$

é a matriz campo para a seção de comprimento L_1 e rigidez a flexão E_1I_1.

De acordo com a Eq.(2.94), o vetor estado na estação 3 é

$$\begin{Bmatrix} Y_3 \\ \theta_3 \\ M_3 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = [P_1] \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \tag{2.98}$$

onde

$$[P_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_1\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

é a matriz ponto para a massa m_1.

Inserindo agora a Eq.(2.96) na Eq.(2.98), escrevemos

$$\begin{Bmatrix} Y_3 \\ \theta_3 \\ M_3 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = [P_1][C_1] \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.100}$$

Continuando, o vetor estado na localização 4 é

$$\begin{Bmatrix} Y_4 \\ \theta_4 \\ M_4 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = [C_2] \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \theta_3 \\ M_3 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \tag{2.101}$$

onde $[C_2]$ é a matriz campo para a seção de comprimento L_2 e rigidez a flexão E_2I_2; e na estação 5 temos

$$\begin{Bmatrix} Y_5 \\ \theta_5 \\ M_5 \\ Q_5 \end{Bmatrix} = [P_2] \begin{Bmatrix} Y_4 \\ \theta_4 \\ M_4 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \tag{2.102}$$

onde $[P_2]$ é a matriz ponto para a massa m_2.

Inserindo a Eq.(2.100) na Eq. (2.101) e o resultado levado na Eq. (2.102), escrevemos

$$\begin{Bmatrix} Y_5 \\ \theta_5 \\ M_5 \\ Q_5 \end{Bmatrix} = [P_2][C_2][P_1][C_1] \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.103}$$

e assim, portanto, as etapas são repetidas até à estação n, escrevendo finalmente

$$\begin{Bmatrix} Y_n \\ \theta_n \\ M_n \\ Q_n \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.104}$$

onde

$$[T] = [C_s]\ [P_{s-1}]\ [C_{s-1}] \ldots [P_1]\ [C_1] \tag{2.105}$$

é a matriz de transferência para a viga completa.

Devemos notar que a matriz [T] é quadrada de ordem 4 e seus elementos são independentes das condições ou espécies de vínculos.

2.6.1 - Solução da Equação (2.104)

Se o vetor estado é composto por quatro elementos e a matriz [T] é quadrada, podemos então escrever a Eq. (2.104) na seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} Y_n \\ \theta_n \\ M_n \\ Q_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.106}$$

Nesta equação matricial (2.106) todos os elementos de $[T]$ são conhecidos e todos os oito elementos que compreendem os dois vetores estado são incógnitas. Então, para que a Eq.(2.106) tenha solução, quatro condições de contorno devem ser especificadas no lugar de quatro incógnitas.

Listaremos aqui as condições de contorno mais comuns:

a) Viga bi-apoiada sobre mancais rígidos. As deflexões e os momentos fletores nas extremidades são zero:

$$y_1 = y_n = M_1 = M_n = 0 \tag{2.107}$$

Substituindo estas condições (2.107) na Eq.(2.106), escrevemos

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_n \\ 0 \\ Q_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.108}$$

Resolvendo o segundo membro da Eq.(2.108), escrevemos

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_n \\ 0 \\ Q_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{12}\theta_1 + T_{14}Q_1 \\ T_{22}\theta_1 + T_{24}Q_1 \\ T_{32}\theta_1 + T_{34}Q_1 \\ T_{42}\theta_1 + T_{44}Q_1 \end{bmatrix} \tag{2.109}$$

logo, pela seleção da primeira e terceira linhas, temos

$$0 = T_{12}\theta_1 + T_{14}Q_1 \tag{2.110}$$

e

$$0 = T_{32}\theta_1 + T_{34}Q_1 \tag{2.111}$$

Donde, para uma solução não trivial das Eqs. (2.110) e (2.111),

temos um determinante igual a zero,

$$\begin{vmatrix} T_{12} & T_{14} \\ T_{32} & T_{34} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.112)$$

A Eq.(2.112) é uma função de ω^2, tanto que se ela for plotada em função de ω^2, as frequências naturais serão aquelas dadas nos pontos onde a curva cruza o eixo horizontal. A Fig. 2.11 mostra o aspecto da curva dada pela Eq.(2.112) em função de ω^2 para um sistema com quatro massas pontuais.

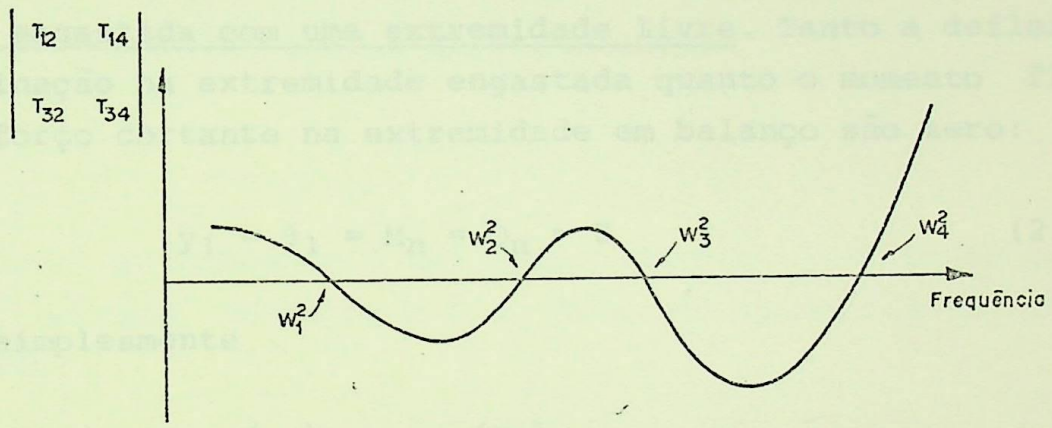


FIG. 2.11 - FREQUÊNCIAS NATURAIS

Será observado que, desde que o sistema é analisado por parâmetros concentrados, a Eq.(2.112) terá várias raízes, que são as frequências naturais do sistema, tanto quanto forem suas massas concentradas.

b) Viga bi-engastada. As deflexões e as inclinações nas extremidades são zero:

$$y_1 = y_n = \theta_1 = \theta_n = 0 \qquad (2.113)$$

Inserindo estas condições (2.113) de contorno na Eq.(2.106) e considerando a Eq.(2.104), podemos escrever

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_n \\ Q_n \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.114}$$

Donde o determinante referente às equações da primeira e segunda linhas da solução da Eq.(2.114) torna-se

$$\begin{vmatrix} T_{13} & T_{14} \\ T_{23} & T_{24} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.115}$$

c) Viga engastada com uma extremidade livre. Tanto a deflexão e inclinação na extremidade engastada quanto o momento fletor e esforço cortante na extremidade em balanço são zero:

$$y_1 = \vartheta_1 = M_n = Q_n = 0 \tag{2.116}$$

Donde, simplesmente

$$\begin{Bmatrix} y_n \\ \vartheta_n \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.117}$$

De maneira similar aos casos anteriores, isto dá o determinante

$$\begin{vmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.118}$$

Outras combinações de vínculos resultarão diferentes determinantes que são equações em função de ω^2 e cujas raízes são as frequências naturais.

2.7 - Matriz de Transferência para Mancais Intermediários Flexíveis

Se um eixo ou viga é suportado por três ou mais suportes, há uma mudança nos valores dos elementos do vetor estado para aqueles mancais.

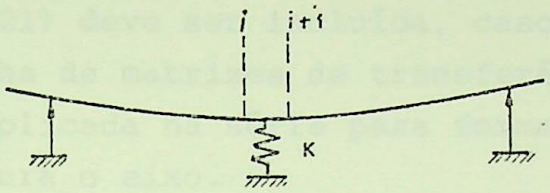


FIG. 2.12 - MANCAL FLEXÍVEL

Se um mancal intermediário tal como o da Fig. 2.12 tiver uma rigidez k, teremos, conforme a Fig. 2.9c, as seguintes equações de equilíbrio:

$$Y_{i+1} = Y_i \tag{2.119a}$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i \tag{2.119b}$$

$$M_{i+1} = M_i \tag{2.119c}$$

$$Q_{i+1} = Q_i - kY_i \tag{2.119d}$$

Colocando as Eqs.(2.119) na forma matricial, escrevemos

$$\begin{Bmatrix} Y_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ M_{i+1} \\ Q_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ Q_i \end{Bmatrix} \tag{2.120}$$

e, portanto, a matriz de transferência para o mancal flexível é

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.121}$$

Esta matriz (2.121) deve ser incluída, caso a viga tenha mancal flexível, na pilha de matrizes de transferência dada pela Eq. (2.105), e multiplicada na série para formar a matriz de transferência total para o eixo.

Para ilustrar o método das matrizes de transferência, vamos determinar a frequência natural de uma viga em balanço, que suporta em sua extremidade livre uma massa m, como mostra a Fig. 2.13a.

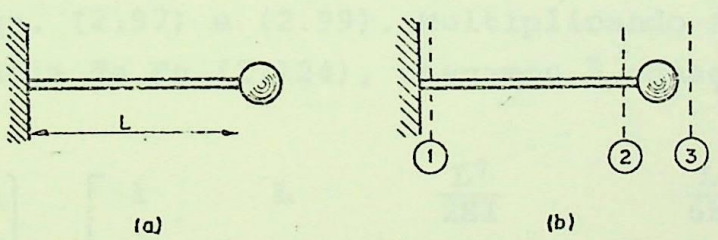


FIG. 2.13 - VIGA EM BALANÇO

Podemos encontrar inicialmente o vetor estado na estação 2, Fig. 2.13b, a partir do vetor estado na estação 1, usando as matrizes de transferência para uma viga. Então conforme a Eq.(2.87) escrevemos

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.122}$$

De acordo com a Eq.(2.94), podemos encontrar o vetor estado na estação 3, a partir do vetor estado na estação 2.

$$\begin{Bmatrix} Y_3 \\ \theta_3 \\ M_3 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \tag{2.123}$$

Inserindo a Eq. (2.122) na (2.123), teremos

$$\begin{Bmatrix} Y_3 \\ \theta_3 \\ M_3 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.124}$$

que é exatamente igual à Eq.(2.100), porém levando-se em consideração as Eqs. (2.97) e (2.99). Multiplicando as duas matrizes de transferência da Eq.(2.124), chegamos à equação matricial

$$\begin{Bmatrix} Y_3 \\ \theta_3 \\ M_3 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & L \\ m\omega^2 & m\omega^2 L & \frac{m\omega^2 L^2}{2EI} & 1 + \frac{m\omega^2 L^3}{6EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.125}$$

onde a matriz quadrada de ordem 4 que aparece na Eq.(2.125) é a matriz $[T]$ total de transferência para a viga completa. As condições de contorno para o sistema considerado são aquelas apresentadas na Eq.(2.116) que representam o caso (c) do ítem 2.6.1. Portanto, o determinante referente a este caso é aquele dado na Eq.(2.118), que solucionado conduzirá à frequência natural do sistema. Então,

$$\begin{vmatrix} 1 & L \\ \frac{m\omega^2 L^2}{2EI} & 1 + \frac{m\omega^2 L^3}{6EI} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.126)$$

ou

$$\omega = \sqrt{\frac{3EI}{mL^3}} \qquad (2.127)$$

que é a frequência natural de uma viga em balanço que suporta uma massa concentrada na extremidade livre.

Para reforçar ainda mais a idéia do método das matrizes de transferência, consideremos agora uma viga bi-apoiada de comprimento L, massa M e rigidez a flexão EI constante, conforme mostra a Fig. 2.14a.

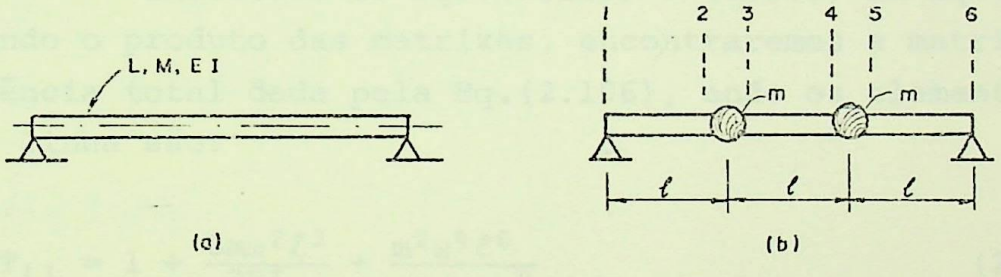


FIG. 2.14 - VIGA EM DUAS MASSAS PONTUAIS

O sistema da Fig. 2.14a é modelado para compor o esquema mostrado na Fig. 2.14b formado por duas massas pontuais, cada uma com massa m = M/2, e três elementos molas de comprimento ℓ = L/3.

Conforme a Eq.(2.105), a matriz de transferência para o sistema completo é dado por

$$[T] = [C_3][P_2][C_2][P_1][C_1] \qquad (2.128)$$

onde

$$[C_1]=[C_2]=[C_3]=\begin{bmatrix} 1 & \ell & \frac{\ell^2}{2EI} & \frac{\ell^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{\ell}{EI} & \frac{\ell^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.129}$$

é a matriz de transferência campo para os três elementos molas, e

$$[P_1]=[P_2]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.130}$$

é a matriz de transferência ponto para as duas massas.

Inserindo as Eqs.(2.129) e (2.130) na Eq.(2.128), e efetuando o produto das matrizes, encontraremos a matriz de transferência total dada pela Eq.(2.106), onde os elementos da primeira linha são:

$$T_{11} = 1 + \frac{3m\omega^2\ell^3}{2EI} + \frac{m^2\omega^4\ell^6}{36(EI)^2} \tag{2.131a}$$

$$T_{12} = 3\ell + \frac{5m\omega^2\ell^4}{3EI} + \frac{m^2\omega^4\ell^7}{36(EI)^2} \tag{2.131b}$$

$$T_{13} = \frac{9\ell^2}{2EI} + \frac{m\omega^2\ell^5}{(EI)^2} + \frac{m^2\omega^4\ell^8}{72(EI)^3} \tag{2.131c}$$

$$T_{14} = \frac{27\ell^3}{6EI} + \frac{4m\omega^2\ell^6}{9(EI)^2} + \frac{m^2\omega^4\ell^9}{216(EI)^3} \tag{2.131d}$$

da segunda linha

$$T_{21} = \frac{5m\omega^2\ell^2}{2EI} + \frac{m^2\omega^4\ell^5}{12(EI)^2} \tag{2.132a}$$

$$T_{22} = 1 + \frac{3m\omega^2\ell^3}{EI} + \frac{m^2\omega^4\ell^6}{12(EI)^2} \qquad (2.132b)$$

$$T_{23} = \frac{3\ell}{EI} + \frac{2m\omega^2\ell^4}{(EI)^2} + \frac{m^2\omega^4\ell^7}{24(EI)^3} \qquad (2.132c)$$

$$T_{24} = \frac{9\ell^2}{2EI} + \frac{m\omega^2\ell^5}{(EI)^2} + \frac{m^2\omega^4\ell^8}{72(EI)^3} \qquad (2.132d)$$

da terceira linha

$$T_{31} = 3m\omega^2\ell + \frac{m^2\omega^4\ell^4}{6EI} \qquad (2.133a)$$

$$T_{32} = 4m\omega^2\ell^2 + \frac{m^2\omega^4\ell^5}{6EI} \qquad (2.133b)$$

$$T_{33} = 1 + \frac{3m\omega^2\ell^3}{EI} + \frac{m^2\omega^4\ell^6}{12(EI)^2} \qquad (2.133c)$$

$$T_{34} = 3\ell + \frac{5m\omega^2\ell^4}{3EI} + \frac{m^2\omega^4\ell^7}{36(EI)^2} \qquad (2.133d)$$

e da quarta linha

$$T_{41} = 2m\omega^2 + \frac{m^2\omega^4\ell^3}{6EI} \qquad (2.134a)$$

$$T_{42} = 3m\omega^2\ell + \frac{m^2\omega^4\ell^4}{6EI} \qquad (2.134b)$$

$$T_{43} = \frac{5m\omega^2\ell^2}{2EI} + \frac{m^2\omega^4\ell^5}{12(EI)^2} \qquad (2.134c)$$

$$T_{44} = 1 + \frac{3m\omega^2\ell^3}{2EI} + \frac{m^2\omega^4\ell^6}{36(EI)^2} \qquad (2.134d)$$

Como a viga da Fig. 2.14 é bi-apoiada, as condições de contorno são aquelas dadas pela Eq.(2.107), e a equação

das frequências naturais será obtida através da solução da Eq. (2.112). Portanto, inserindo as Eqs. (2.131b), (2.131d), (2.133b) e (2.133d) no determinante da Eq. (2.112) resultará em uma equação que solucionada fornecerá as frequências naturais, chegando-se a

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{6EI}{5m\ell^3}} \tag{2.135a}$$

e

$$\omega_2 = 3\sqrt{\frac{2EI}{m\ell^3}} \tag{2.135b}$$

as quais são dadas em função de m e ℓ, que poderão ser substituidos por M/2 e L/3, respectivamente.

A questão restante é quanto à maneira de vibrar as massas do sistema da Fig. 2.14, isto é, a determinação dos modos normais das massas m do sistema. Para isto, devemos relacionar os vetores estado em duas estações vizinhas através da matriz de transferência correpondente; e isto é repetido até a última estação. Então, de acordo com a Eq. (2.87), escrevemos

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ell & \frac{\ell^2}{2EI} & \frac{\ell^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{\ell}{EI} & \frac{\ell^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.136}$$

Note que as condições de contorno (2.107) foram usadas para a primeira estação. Na estação 3, conforme a Eq. (2.94), escrevemos

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \tag{2.137}$$

Na estação 4, temos

$$\begin{Bmatrix} Y_4 \\ \theta_4 \\ M_4 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ell & \frac{\ell^2}{2EI} & \frac{\ell^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{\ell}{EI} & \frac{\ell^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \tag{2.138}$$

na estação 5,

$$\begin{Bmatrix} Y_4 \\ \theta_4 \\ M_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_4 \\ \theta_4 \\ M_4 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \tag{2.139}$$

e, finalmente, escrevemos o vetor estado na estação 6 como

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_6 \\ 0 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ell & \frac{\ell^2}{2EI} & \frac{\ell^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{\ell}{EI} & \frac{\ell^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_4 \\ \theta_4 \\ M_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix} \tag{2.140}$$

onde, nesta estação, mais uma vez foi usada a Eq (2.107) das condições de contorno.

Primeiramente, vamos encontrar o vetor estado na estação 4 em função do vetor estado na estação 1 para $\omega=(6EI/5m\ell^3)^{1/2}$ da Eq.(2.135a). Então, considerando este valor e inserindo a Eq.(2.136) na (2.137) e o resultado na Eq.(2.138), escrevemos

$$\begin{Bmatrix} Y_4 \\ \theta_4 \\ M_4 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{11\ell}{5} & \frac{21\ell^2}{10EI} & \frac{41\ell^3}{30EI} \\ \frac{3}{5\ell} & \frac{8}{5} & \frac{23\ell}{10EI} & \frac{21\ell^2}{30EI} \\ \frac{6EI}{5\ell^2} & \frac{6EI}{5\ell} & \frac{8}{5} & \frac{11\ell}{5} \\ \frac{6EI}{5\ell^3} & \frac{6EI}{5\ell^2} & \frac{3}{5\ell} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.141}$$

Para encontrar o vetor estado na estação 6, basta inserir a Eq.(2.141) na (2.139) e o resultado na Eq.(2.140).

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_6 \\ 0 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{71}{25} & \frac{126\ell}{25} & \frac{143\ell^2}{25EI} & \frac{126\ell^3}{25EI} \\ \frac{78}{25\ell} & \frac{118}{25} & \frac{273\ell}{50EI} & \frac{143\ell^2}{25EI} \\ \frac{96EI}{25\ell^2} & \frac{126EI}{25\ell} & \frac{118}{25} & \frac{126\ell}{25} \\ \frac{66EI}{25\ell^3} & \frac{96EI}{25\ell^2} & \frac{78}{25\ell} & \frac{71}{25} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \qquad (2.142)$$

Da Eq.(2.141), a deflexão y_4 tem como solução a forma

$$y_4 = \frac{11\ell}{5}\theta_1 + \frac{41\ell^3}{30EI} Q_1 \qquad (2.143)$$

Aqui, devemos usar a Eq.(2.110) para podermos expressar a deflexão y_4 em função da inclinação θ_1 ou do esforço cortante Q_1 na Eq.(2.143). Logo, da Eq.(2.110), temos que

$$Q_1 = -\frac{T_{12}}{T_{14}}\theta_1 \qquad (2.144)$$

Os valores de T_{12} e T_{14} são dados pela matriz total da Eq.(2.142), que são identificados como

$$T_{12} = \frac{126\ell}{25}, \quad \text{e} \quad T_{14} = \frac{126\ell^3}{25EI} \qquad (2.145)$$

Inserindo as Eqs.(2.144) e (2.145) na Eq.(2.143), escrevemos a deflexão y_4 como

$$y_4 = \frac{5\ell}{6}\theta_1 \qquad (2.146)$$

O mesmo resultado poderia ser obtido se usássemos a Eq.(2.111) no lugar da Eq.(2.110).

Agora, da Eq.(2.136), a deflexão y_2 tem como solução a equação

$$y_2 = \ell\theta_1 + \frac{\ell^3}{6EI} Q_1 \tag{2.147}$$

Inserindo as Eqs.(2.144) e (2.145) na Eq.(2.147), escrevemos a deflexão y_2 como

$$y_2 = \frac{5\ell}{6} \theta_1 \tag{2.148}$$

Notemos que os modos dados nas Eqs.(2.146) e (2.148) estão em termos da inclinação θ_1; logo, a normalização deve ser feita sobre este valor. Portanto, fazendo $\theta_1 = 6/5\ell$, escrevemos o primeiro modo normal como

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2.149}$$

A seguir, vamos encontrar o segundo modo normal do sistema, que será obtido considerando a segunda frequência natural, $\omega = 3(2EI/m\ell^3)^{1/2}$, dada pela Eq.(2.135b). Para obter o segundo modo de vibração, usaremos o mesmo processo e sequência de fórmulas utilizados na obtenção do primeiro modo. Logo, podemos escrever diretamente que o vetor estado na estação 4 é

$$\begin{Bmatrix} y_4 \\ \theta_4 \\ M_4 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5\ell & \frac{7\ell^2}{2EI} & \frac{11\ell^3}{6EI} \\ \frac{9}{\ell} & 10 & \frac{13\ell}{2EI} & \frac{7\ell^2}{2EI} \\ \frac{18EI}{\ell^2} & \frac{18EI}{\ell} & 10 & 5\ell \\ \frac{18EI}{\ell^3} & \frac{18EI}{\ell^2} & \frac{9}{\ell} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.150}$$

e na estação 6, teremos

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_6 \\ 0 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 42\ell & \frac{27\ell^2}{EI} & \frac{14\ell^3}{EI} \\ \frac{72}{\ell} & 82 & \frac{105\ell}{2EI} & \frac{27\ell^2}{EI} \\ \frac{108EI}{\ell^2} & \frac{126EI}{\ell} & 82 & 42\ell \\ \frac{90EI}{\ell^3} & \frac{108EI}{\ell^2} & \frac{72}{\ell} & 37 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \tag{2.151}$$

Da Eq.(2.150), temos

$$y_4 = 5\ell\theta_1 + \frac{11\ell^3}{6EI} Q_1 \qquad (2.152)$$

Considerando a Eq.(2.144) e os elementos T_{12} e T_{14} dados na Eq.(2.151), a Eq.(2.152) torna-se

$$y_4 = -\frac{\ell}{2}\theta_1. \qquad (2.153)$$

A deflexão y_2 é obtida da Eq.(2.136) e tem o mesmo valor daquele da Eq.(2.147). Mas, para a segunda frequência natural, escrevemos

$$y_2 = \frac{\ell}{2}\theta_1 \qquad (2.154)$$

Portanto, para a normalização $\theta_1 = 2/\ell$, escrevemos o segundo modo normal como

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \qquad (2.155)$$

Os modos normais do sistema são apresentados na Fig. 2.15.

Neste exemplo ilustrativo, a viga foi substituída por duas massas concentradas, e consequentemente, encontramos duas frequências naturais e dois modos de vibrar, que poderão ser comparados com o resultado obtido na Sec.1.6 do Capítulo I para uma viga bi-apoiada. No entanto, quando se aumenta o número de massas concentradas substituindo o sistema contínuo, a precisão do resultado obtido no método das matrizes de transferência cresce consideravelmente; mas, para tal, o processo requer um trabalho quase que impossível quando é tratado com parâmetros literais. A aplicação do método das matrizes de transferência é viável quando se emprega o computador, mesmo sendo gran

de o número de graus de liberdade, como será mostrado no Capítulo 5.

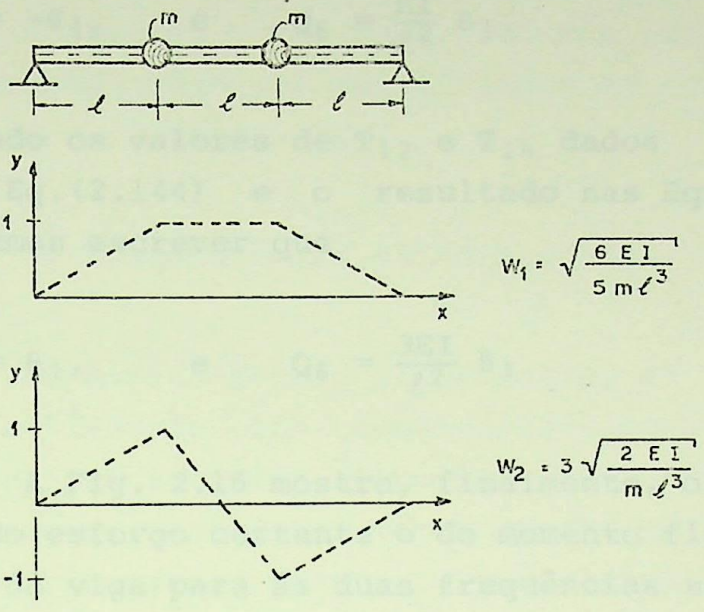


FIG. 2.15 - MODOS NORMAIS DE VIGA BI-APOIADA

Voltando ao exemplo, a inclinação e o esforço cortante da viga no segundo apoio podem ser obtidos considerando mais uma vez as Eqs. (2.141) e (2.144). Portanto, para a primeira frequência natural, temos

$$\theta_6 = \frac{118}{25}\theta_1 + \frac{143\ell^2}{25EI}Q_1 \qquad (2.156a)$$

e

$$Q_6 = \frac{96EI}{25\ell^2}\theta_1 + \frac{71}{25}Q_1 \qquad (2.156b)$$

e para a segunda frequência,

$$\theta_6 = 82\theta_1 + \frac{27\ell^2}{EI}Q_1 \qquad (2.157a)$$

e

$$Q_6 = \frac{108EI}{\ell^2}\theta_1 + 37Q_1 \qquad (2.157b)$$

Logo, inserindo as Eqs. (2.144) e (2.145) nas Eqs. (2.156a) e (2.156b), escrevemos

$$\theta_3 = -\theta_1, \qquad \text{e} \qquad Q_6 = \frac{EI}{\ell^2}\,\theta_1 \tag{2.158}$$

Agora, inserindo os valores de T_{12} e T_{14} dados na matriz da Eq.(2.142) na Eq.(2.144) e o resultado nas Eqs. (2.157a) e (2.157b), podemos escrever que

$$\theta_6 = \theta_1, \qquad \text{e} \qquad Q_6 = \frac{3EI}{\ell^2}\,\theta_1 \tag{2.159}$$

A Fig. 2.16 mostra, finalmente, os diagramas das inclinações, do esforço cortante e do momento fletor para as várias estações da viga para as duas frequências naturais.

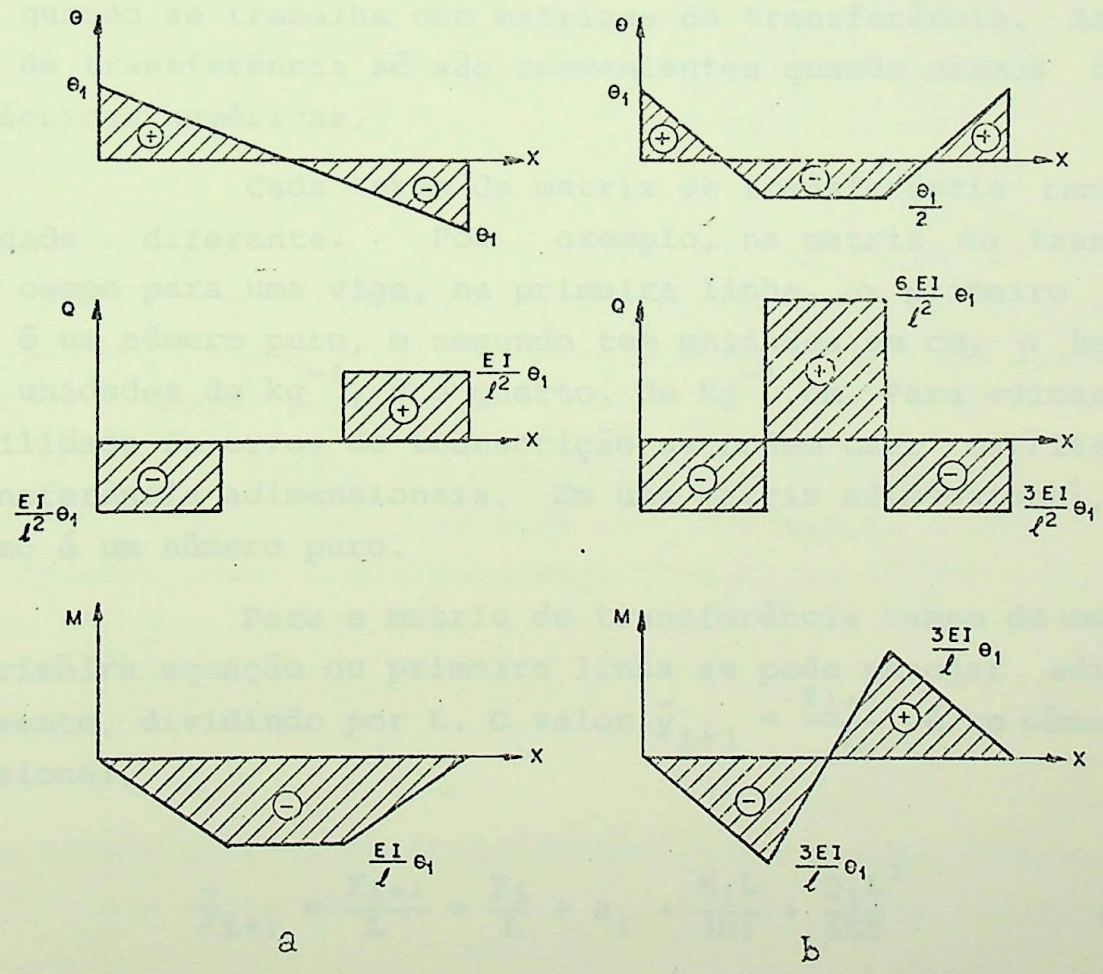


FIG. 2.16 - DIAGRAMAS DE VIGA BI-APOIADA

Os diagramas da Fig. 2.16a correspondem à primeira frequência natural $\omega_1 = (6EI/5m\ell^3)^{1/2}$ e os diagramas da Fig. 2.16b à frequência $\omega_2 = 3(2EI/m\ell^3)^{1/2}$. Os valores das inclinações, esforços cortantes e momentos fletores nas várias estações da viga também podem ser normalizados em relação à inclinação θ_1 do primeiro ponto da viga.

2.8 - Matrizes de Transferência Adimensionais

Em várias seções precedentes, se tem considerado a massa e a elasticidade como quantidades discretas constituintes de propriedades distintas de um ponto ou de uma seção reta, dependendo de se as quantidades vão aparecer em uma matriz ponto ou em uma matriz campo. Sempre se tem simbolizado a massa por m, uma mola pelo módulo elástico k, e uma seção reta de viga por uma rigidez a flexão EI. Não é conveniente manter estes símbolos quando se trabalha com matrizes de transferência. As matrizes de transferência só são convenientes quando usamos números e técnicas numéricas.

Cada termo da matriz de transferência tem uma unidade diferente. Por exemplo, na matriz de transferência campo para uma viga, na primeira linha, o primeiro elemento, é um número puro, o segundo tem unidades em cm, o terceiro tem unidades de kg^{-1}, e o quarto, de kg^{-1} cm. Para evitar a probabilidade de erros de transcrição se podem usar matrizes de transferência adimensionais. Em uma matriz adimensional, cada termo é um número puro.

Para a matriz de transferência campo de uma viga, a primeira equação ou primeira linha se pode manejar adimensionalmente, dividindo por L. O valor $\bar{y}_{i+1} = \frac{Y_{i+1}}{L}$ é um número adimensional,

$$\bar{y}_{i+1} = \frac{Y_{i+1}}{L} = \frac{Y_i}{L} + \theta_i + \frac{M_i L}{2EI} + \frac{Q_i L^2}{6EI} \qquad (2.160)$$

A segunda equação é adimensional. A terceira se

torna adimensional multiplicando por L/EI, e a quarta por L^2/EI. Estas quantidades são combinações arbitrárias de dimensões físicas e são únicas. Isto é,

$$\bar{\theta}_{i+1} = \theta_i + \frac{M_i L}{EI} + \frac{Q_i L^2}{2EI} \tag{2.161}$$

$$\bar{M}_{i+1} = \frac{M_{i+1} L}{EI} = \frac{M_i L}{EI} + \frac{Q_i L^2}{EI} \tag{2.162}$$

$$\bar{Q}_{i+1} = \frac{Q_{i+1} L^2}{EI} = \frac{Q_i L^2}{EI} \tag{2.163}$$

Escrevendo estas equações em forma de matriz,

$$\begin{Bmatrix} \bar{y}_{i+1} \\ \bar{\theta}_{i+1} \\ \bar{M}_{i+1} \\ \bar{Q}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{Q}_i \end{Bmatrix} \tag{2.164}$$

para $\bar{y}_i = y_i/L$, $\bar{\theta}_i = \theta_i$, $\bar{M}_i = M_i L/EI$ e $\bar{Q}_i = Q_i L^2/EI$ como variáveis auxiliares adimensionais. Portanto, a matriz de transferência campo para uma viga, como mostra a Eq.(2.164), é agora um conjunto de números puros.

Existe uma matriz de transferência ponto também na forma adimensional, que pode ser determinada a partir da equação de movimento. Conforme a Fig. 2.9b, a Eq.(2.93) é simplesmente

$$Q_{i+1} = Q_i + m\omega^2 y_i \tag{2.165}$$

Para tornar a força de cisalhamento adimensional, devemos multiplicar cada termo da Eq.(2.165) por L^2/EI, o que resulta

$$\frac{L^2}{EI} Q_{i+1} = \frac{L^2}{EI} Q_i + \frac{m\omega^2 L^2}{EI} y_i \tag{2.166}$$

Lembrando que $\bar{Q}_{i+1} = Q_{i+1}L^2/EI$, $\bar{Q}_i = Q_iL^2/EI$ e $y_i = \bar{y}_iL$, a Eq. (2.166) torna-se

$$\bar{Q}_{i+1} = \bar{Q}_i + \frac{m\omega^2L^3}{EI} \cdot \bar{y}_i \tag{2.167}$$

e na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \bar{y}_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ \bar{M}_{i+1} \\ \bar{Q}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{m\omega^2L^3}{EI} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{Q}_i \end{Bmatrix} \tag{2.168}$$

A matriz de transferência adimensional para um suporte elástico se determina usando a Eq.(2.119d) que tem a forma

$$Q_{i+1} = Q_i - ky_i \tag{2.169}$$

Aqui, também devemos multiplicar cada termo da Eq.(2.169) por L^2/EI, o que torna

$$\frac{L^2}{EI} Q_{i+1} = \frac{L^2}{EI} Q_i - \frac{KL^2}{EI} y_i \quad \text{ou} \quad \bar{Q}_{i+1} = \bar{Q}_i - \frac{KL^3}{EI} \bar{y}_i \tag{2.170}$$

e na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \bar{y}_{i+1} \\ \bar{\theta}_{i+1} \\ \bar{M}_{i+1} \\ \bar{Q}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-KL^3}{EI} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{Q}_i \end{Bmatrix} \tag{2.171}$$

2.9 - Matrizes de Transferência para um Sistema Torcional

O método das matrizes de transferência traz gran

des simplificações quando se trata em resolver problemas referentes a vibrações de eixos submetidos a torção, que são muito frequentes em sistemas mecânicos. Nesta seção, portanto, consideraremos as vibrações torcionais de um eixo elástico com seção reta circular com discos ligados em pontos discretos ao longo deste eixo, como mostra a Fig. 2.17.

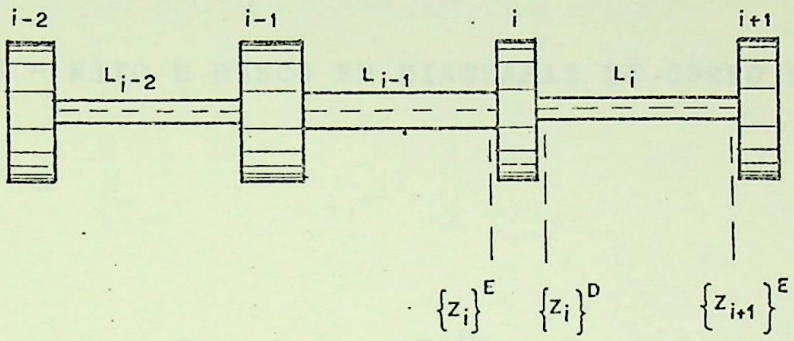


FIG. 2.17 - EIXO SEM MASSA COM DISCOS RÍGIDOS

Na Fig. 2.17, mostra-se também os vetores estado em algumas estações, como $\{z_i\}^E$, que significa o vetor estado na estação a esquerda do disco i, etc. O eixo é considerado ser elástico e sem inércia rotacional (sem massa), e os discos são rígidos e de inércia rotacional I_i (i = 1, ... n).

Para encontrar a matriz de transferência campo para o eixo situado entre os discos i e i+1 devemos isolar o eixo de comprimento L_i. As rotações e torques nas extremidades deste eixo são indicadas na Fig. 2.18.

Fazendo o equilíbrio dos torques no eixo, a Fig. 2.18a mostra que

$$T_{i+1}^{E} = T_i^{D} \tag{2.172}$$

e da relação simples da Resistência dos Materiais, escrevemos que

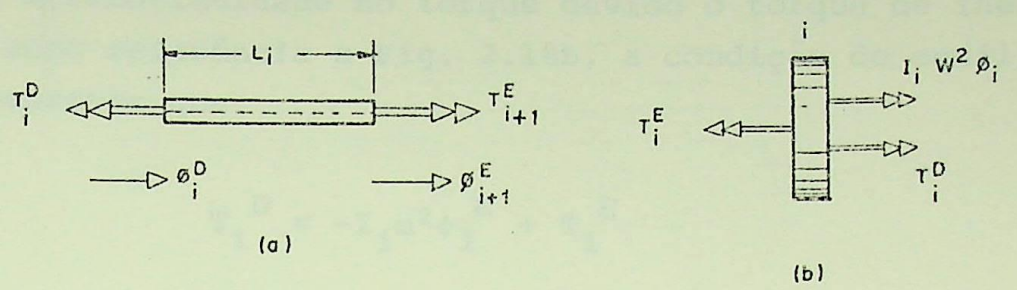


FIG. 2.18 - EIXO E DISCO EM DIAGRAMAS DE CORPO LIVRE

$$\phi_{i+1}^{E} = \phi_i^{D} + \frac{T_i^{D} L_i}{(J_T G)_i} \tag{2.173}$$

onde J_T é o momento de inércia polar da seção reta do eixo e G é o módulo de elasticidade transversal do material do eixo.

As Eqs. (2.172) e (2.173) colocadas na forma matricial tornam-se

$$\begin{Bmatrix} \phi_{i+1} \\ T_{i+1} \end{Bmatrix}^{E} = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{L}{J_T G}\right)_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ T_i \end{Bmatrix}^{D} \tag{2.174}$$

onde

$$[C_i] = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{L}{J_T G}\right)_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.175}$$

é a matriz de transferência campo para um eixo de constantes L, J_T e G.

Quando relacionamos os vetores estado $\{Z_i\}^D$ e $\{Z_i\}^E$ sobre ambos os lados do disco i, nós notamos que os ângu

los de deformação permanecem os mesmos, tal que $\phi_i^E = \phi_i^D$, porém há uma descontinuidade no torque devido o torque de inércia. Tomando como referência a Fig. 2.18b, a condição de equilíbrio permite escrever que

$$T_i^D = -I_i\omega^2\phi_i^E + T_i^E \tag{2.176}$$

Lembrando que $\phi_i^D = \phi_i^E$, e combinando esta com a Eq.(2.176), podemos escrever na forma matricial que

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ T_i \end{Bmatrix}^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I_i & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ T_i \end{Bmatrix}^E \tag{2.177}$$

onde

$$[P_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I_i & 1 \end{bmatrix} \tag{2.178}$$

é agora a matriz de transferência ponto para o disco de momento I_i.

A matriz de transferência total para um sistema como aquele mostrado na Fig. 2.17, tem a forma

$$[T] = [P_n][C_{n-1}][P_{n-1}] \ldots [C_1][P_1] \tag{2.179}$$

onde o índice n indica o número total de discos presentes no sistema. Notamos que a matriz [T] é quadrada de ordem 2 e seus elementos são independentes das condições ou espécies de vínculos. Portanto, para encontrar as frequências naturais do sistema torcional devemos usar um processo análogo àquele descrito no ítem 2.6.1, referente à flexão de vigas.

Para reforçar o entendimento do método, vamos determinar as frequências naturais de um sistema com três discos iguais e dois eixos iguais, como mostra a Fig. 2.19.

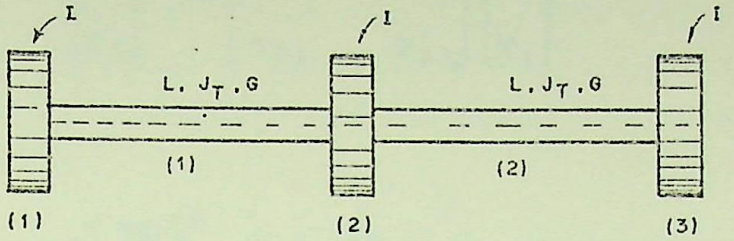


FIG. 2.19 - SISTEMA A TORÇÃO

Da Eq.(2.179), a matriz de transferência total é

$$[T] = [P_3][C_2][P_2][C_1][P_1] \tag{2.180}$$

onde

$$[P_1] = [P_2] = [P_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I & 1 \end{bmatrix} \tag{2.181}$$

é a matriz de transferência ponto para os três discos, e

$$[C_1] = [C_2] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{J_T G} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.182}$$

é a matriz de transferência campo para os dois eixos.

Inserindo as Eqs. (2.181) e (2.182) na Eq.(2.180), encontraremos a matriz de transferência total, que transfere o vetor estado na estação a esquerda do primeiro disco ao vetor estado na estação a direita do terceiro disco. Portanto, escrevemos que

$$\{Z_3\}^D = [T]\ \{Z_1\}^E \tag{2.183a}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \phi_3 \\ T_3 \end{Bmatrix}^D = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ T_1 \end{Bmatrix}^E \tag{2.183b}$$

onde

$$T_{11} = \omega^4 \left(\frac{IL}{J_T G}\right)^2 - 3\omega^2 \frac{IL}{J_T G} + 1 \tag{2.184a}$$

$$T_{12} = -\omega^2 I \left(\frac{L}{J_T G}\right)^2 + \frac{2L}{J_T G} \tag{2.184b}$$

$$T_{21} = -\omega^6 I^3 \left(\frac{L}{J_T G}\right)^2 + 4\omega^4 I^2 \frac{L}{J_T G} - 3\omega^2 I \tag{2.184c}$$

$$T_{22} = T_{11} \tag{2.184d}$$

Como o torque na estação a direita do disco 3 é zero, então a condição de contorno é que $T_3^D = 0$ que inserida na Eq.(2.183b) fornece

$$0 = T_{21}\phi_1{}^E + T_{22}\, T_1{}^E \tag{2.185}$$

Fazendo também $T_1{}^E = 0$ na Eq.(2.185), e para uma solução não trivial, devemos ter $T_{21} = 0$, que para esta condição, as frequências naturais são calculadas. Logo, igualando a zero a expressão dada na Eq.(2.184c), encontraremos as três frequências naturais

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{J_T G}{IL}, \quad \text{e} \quad \omega_3^2 = \frac{3J_T G}{IL} \tag{2.186}$$

A primeira frequência natural ω_1^2 resultou zero, como era de se esperar, pois o sistema da Fig. 2.19 é um sistema semi-definido (veja Apêndice C).

A questão restante é quanto aos modos normais de vibração, isto é, a determinação das deformações angulares dos discos correspondentes às frequências naturais do sistema. Para a primeira frequência $\omega_1^2 = 0$, o sistema responde como se ele estivesse parado, ou seja, as deformações angulares dos discos são

iguais; a rotação do sistema é aquela referente ao movimento de corpo rígido (Veja Apêndice C). O cálculo das deformações angulares para as segunda e terceira frequências naturais se faz através dos vetores estado nas estações a esquerda dos segundo e terceiro discos.

O vetor estado na estação a esquerda do segundo disco é

$$\{Z_2\}^E = [C_1][P_1]\{Z_1\}^E \tag{2.187}$$

e na estação a esquerda do terceiro disco, temos

$$\{Z_3\}^E = [C_2][P_2][C_1][P_1]\{Z_1\}^E \tag{2.188}$$

Inserindo as Eqs.(2.181) e (2.182) nas Eqs.(2.187) e (2.188), e resolvendo para a primeira linha dos vetores estado, encontramos para a segunda frequência natural $\omega_2^2 = J_T G/IL$,

$$\phi_2^E = 0, \quad \text{e} \quad \phi_3^E = -\phi_1^E \tag{2.189}$$

e para a terceira frequência natural $\omega_3^2 = 3J_T G/IL$,

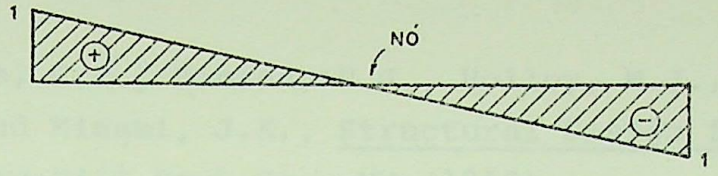
$$\phi_2^E = -2\phi_1^E, \quad \text{e} \quad \phi_3^E = \phi_1^E \tag{2.190}$$

A condição de contorno $T_1^E = 0$ foi usada para obter as Eqs.(2.189) e (2.190). A normalização deve ser feita sobre a deformação ϕ_1^E; então fazendo $\phi_1^E = 1$ nas Eqs. (2.189) e (2.190), encontraremos os modos normais do sistema, que são mostrados na Fig. 2.20.

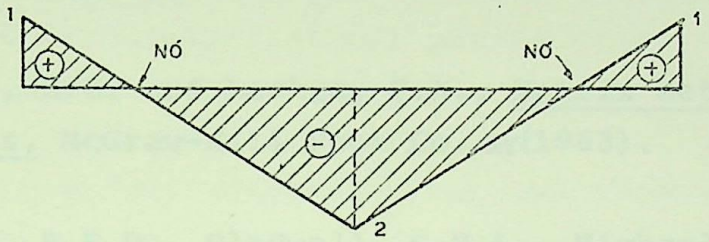
Poderia resolver também para a segunda linha dos vetores estado das Eqs. (2.187) e (2.188) que o resultado forneceria as torções nos eixos em função da deformação angular ϕ_1^E.

A propriedade da ortogonalidade (Veja Apêndice B) pode ser verificada considerando os modos normais da Fig. 2.20. A condição de ortogonalidade para este sistema rotacional tem a forma

$$\sum_{i=1}^{n} I_i \phi_{ij} \phi_{ik} = 0, \quad i = 1, \ldots n, \text{ e } j \neq k \tag{2.191}$$



(a) 2º MODO



(b) 3º MODO

FIG. 2.20 - MODOS DE VIBRAR DO SISTEMA

onde I_i é o momento de inércia do disco i, ϕ_{ij} é a deformação angular do disco i no modo j, e ϕ_{ik} é a deformação angular do disco i correspondente ao modo k. Os índices j e k podem variar de 1 a n, mas para desenvolver a Eq.(2.191), seus valores devem ser pré-fixados e diferentes ($j \neq k$).

Vejamos a condição da ortogonalidade para os modos normais do sistema considerado. Então, para i = 1,2,3, j = 2 e k = 3, escrevemos a Eq.(2.191) como

$$I_1\phi_{12}\phi_{13} + I_2\phi_{22}\phi_{23} + I_3\phi_{32}\phi_{33} = 0 \qquad (2.192)$$

onde $I_1 = I_2 = I_3 = I$, e como os valores dos modos normais são mostrados na Fig. 2.20, podemos escrever a Eq.(2.192) como

$$I(1)(1) + I(0)(-2) + I(-1)(1) = I - I = 0 \qquad (2.193)$$

que fica, portanto, provada a propriedade da ortogonalidade dos modos normais para sistemas torcionais.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA DO CAPÍTULO 2.

[1] Norris, C.H., Hansen, R.J., Holley, M.J., Biggs, J.M., Namyet, S., and Minami, J.K., Structural Design for Dynamic Loads, Mc Graw-Hill Book Co., NY (1959).

[2] Mierovitch, L., Analytical Methods in Vibrations, Macmillan Co., NY (1967).

[3] Pestel, E.C. and Leckie, F.A., Matrix Methods in Elastome -- chanics, McGraw-Hill Book Co., NY(1963).

[4] Bishop, R.E.D., Gladwell, G.M.L., Michaelson, The Matrix Analysis of Vibration, Cambridge Univ. Press. Cambridge, UK (1965).

[5] Blevins, R.D., Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold Co. (1979).

[6] Tuplin, W.A., Torsional Vibrations, Sir Issac Pitman and Sons, Ltd., London, UK, 2nd edition (1966).

[7] Hurty, W.C. and Rubinstein, M.F., Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ (1964).

CAPÍTULO 3 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 - Considerações Gerais

O crescimento da complexidade das estruturas e a sofisticação dos computadores digitais têm sido úteis no desenvolvimento de novos métodos de análise, particularmente o assim chamado "método dos elementos finitos". A idéia que está por trás do método dos elementos finitos é providenciar uma formulação na qual possa utilizar a automação do computador digital para análise de sistemas irregulares. Com esta finalidade, o método considera uma complexa estrutura como uma reunião finita de elementos discretos, onde todo e cada elemento é um membro estrutural contínuo. Exigindo que os deslocamentos sejam compatíveis e as forças internas em equilíbrio em alguns pontos, a estrutura inteira é forçada a agir como uma entidade. Estes pontos são conhecidos como juntas e definidos pelas junções dos vários elementos. O método dos elementos finitos é basicamente um procedimento discreto.

A intenção deste capítulo é apresentar algumas das idéias básicas envolvidas na aplicação do método dos elementos finitos para problemas de vibração em lugar de um exaustivo tratamento do assunto. Conforme a intenção deste trabalho, nós nos preocuparemos principalmente com elementos discretos unidimensionais, embora os conceitos e desenvolvimentos apresentados sejam bem gerais e podem ser prontamente aplicados para elementos bi e tri-dimensionais.

3.2 - Equações do Movimento para os Elementos

Embora o método dos elementos finitos considere contínuo os elementos individuais, ele é na essência uma combinação discreta; tanto que ele expressa o deslocamento em qualquer ponto de um elemento contínuo em termos do número finito de deslocamentos do contorno do elemento. Para ilustrar a idéia, vamos considerar um sistema contínuo bi-dimensional, tal como uma placa, e dividi-la em finitos elementos através de cortes fictí-

cios. Os pontos de intersecção destes cortes fictícios são chamados de "juntas". Muitos autores usam o termo "nós" ao invés de "juntas". Em vista das diferentes conotações que o termo "nós" tem em vibrações, evitaremos confusão usando o termo "juntas". Considerando $\omega(x,y,t)$ ser o deslocamento de um ponto arbitrário de um elemento individual, e denominando por $u_j(t)$ $(j = 1,2,...p)$ os deslocamentos das juntas (veja Fig. 3.1), o deslocamento contínuo ω pode ser expresso em função de um número finito de deslocamento $u_j(t)$ das juntas. Além disso, a força não conservativa distribuída $f(x,y,t)$ de qualquer ponto arbitrário do elemento pode ser convertida em forças equivalentes nas juntas, as quais, somadas com as forças $f_j^*(t)$ $(j=1,2,...,p)$ resultantes da interação com os elementos adjacentes, produzem as forças totais nas juntas $f_j(t)$ $(j = 1,2,...,p)$. O objetivo desta seção é obter as equações do movimento para os deslocamentos $u_j(t)$ das juntas sujeito às forças de juntas $f_j(t)$. Embora a Fig. 3.1 mostre elementos retangulares, a forma dos elementos pode ser arbitrária.

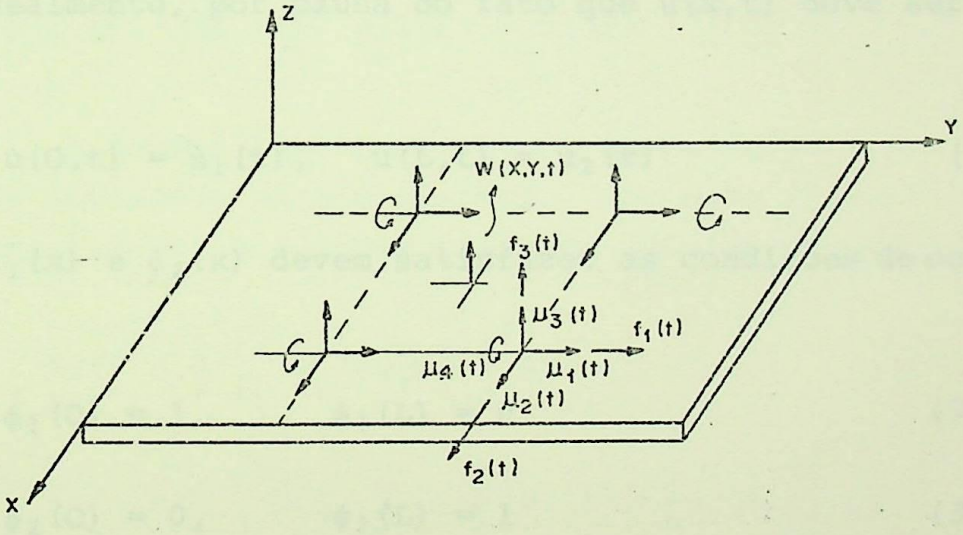


FIG. 3.1 - DESLOCAMENTOS DAS JUNTAS DE UM ELEMENTO

Para introduzir os conceitos, vamos obter as equações do movimento para um elemento na forma de uma haste uniforme mostrada na Fig. 3.2. É claro que, neste caso o elemento é unidimensional e as juntas são meramente os dois pontos extremos. O elemento é de comprimento L e possui massa constante m por unidade de comprimento e rigidez uniforme EA, onde E é o módulo de elasticidade e A a área da secção transversal. O deslocamento

axial de qualquer ponto x da haste pode ser expresso por

$$u(x,t) = \phi_1(x)u_1(t) + \phi_2(x)u_2(t) \qquad (3.1)$$

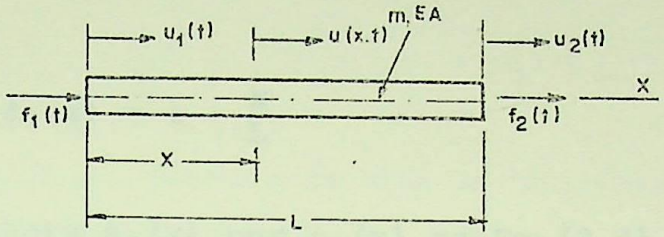


FIG. 3.2 - HASTE EM VIBRAÇÃO AXIAL

onde $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são "funções aparentes" que precisam satisfazer determinadas condições de contorno, mas são por outro lado, arbitrárias. Realmente, por causa do fato que $u(x,t)$ deve ser tal que

$$u(0,t) = u_1(t), \quad u(L,t) = u_2(t) \qquad (3.2)$$

as funções $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ devem satisfazer as condições de contorno

$$\phi_1(0) = 1, \qquad \phi_1(L) = 0 \qquad (3.3a)$$

$$\phi_2(0) = 0, \qquad \phi_2(L) = 1 \qquad (3.3b)$$

Nós devemos admitir que as funções $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são determinadas por deslocamentos estáticos padrões, sujeito às condições de contorno (3.3). Na ausência de forças externas, a equação diferencial para o deslocamento estático axial de uma haste uniforme é obtida levando EA = constante e $\omega^2 = 0$ na Eq. (1.41), dividindo o resultado por EA, e substituindo $U(x)$ por $\phi_1(x)$, dá o resultado

$$\frac{d^2\phi_1(x)}{dx^2} = 0 \qquad 0 < x < L \qquad (3.4)$$

Duas integrações com relação a x produz

$$\phi_1(x) = c_1 x + c_2 \tag{3.5}$$

de modo que, inserindo as condições de contorno (3.3a)na (Eq.3.5), obtemos

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \tag{3.6}$$

Substituindo agora $\phi_1(x)$ por $\phi_2(x)$ na Eq.(3.4) e de uma maneira semelhante, pode ser facilmente verificado que

$$\phi_2(x) = \frac{x}{L} \tag{3.7}$$

Portanto, introduzindo as Eqs.(3.6) e (3.7) na Eq.(3.1), temos

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1(t) + \frac{x}{L} u_2(t)$$

A seguir, desejamos obter as equações de Lagrange Eqs.(A.37) do movimento para o elemento. Com esta finalidade, escrevemos primeiramente a energia cinética, conforme a Eq.(1.84)

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^L m\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L m\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1(t) + \frac{x}{L}u_2(t)\right]\right\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L m\left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)\dot{u}_1(t) + \frac{x}{L}\dot{u}_2(t)\right]^2 dx$$

$$= \frac{mL}{6}\left[\dot{u}_1^2(t) + \dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + \dot{u}_2^2(t)\right] \tag{3.9}$$

Além disso, conforme a Eq.(1.88) a energia potencial tem a forma

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^L EA\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx$$

$$= \frac{EA}{2}\int_0^L \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1(t) + \frac{x}{L} u_2(t)\right]\right\}^2 dx$$

$$= \frac{EA}{2}\int_0^L \left[-\frac{1}{L} u_1(t) + \frac{1}{L} u_2(t)\right]^2 dx$$

$$= \frac{EA}{2L}\left[u_1^2(t) - 2u_1(t)u_2(t) + u_2^2(t)\right] \qquad (3.10)$$

Para obter as forças associadas com as coordenadas $u_1(t)$ e $u_2(t)$, nós usamos a expressão do trabalho virtual. Se $f(x,t)$ representa a força não conservativa distribuida e $f_1^*(t)$ e $f_2^*(t)$ são as forças nas juntas 1 e 2 produzidas por elementos adjacentes, então o trabalho virtual pode ser escrito como

$$\delta\tau = \int_0^L f(x,t)\delta u(x,t)dx + \sum_{j=1}^{2} f_j^*(t)\delta u_j(t)$$

$$= \int_0^L f(x,t)\left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)\delta u_1(t) + \frac{x}{L}\delta u_2(t)\right]dx + \sum_{j=1}^{2} f_j^*(t)\delta u_j(t)$$

$$= \left[\int_0^L f(x,t)\left(1 - \frac{x}{L}\right)dx + f_1^*(t)\right]\delta u_1(t) +$$

$$+ \left[\int_0^L f(x,t)\,\frac{x}{L}\,dx + f_2^*(t)\right]\delta u_2(t)$$

$$= f_1(t)\delta u_1(t) + f_2(t)\delta u_2(t) = \sum_{j=1}^{2} f_j(t)\delta u_j(t) \qquad (3.11)$$

onde

$$f_1(t) = \int_0^L f(x,t)\left(1 - \frac{x}{L}\right)dx + f_1^*(t) \qquad (3.12a)$$

$$f_2(t) = \int_0^L f(x,t)\,\frac{x}{L}\,dx + f_2^*(t) \qquad (3.12b)$$

são as forças nas juntas associadas com os deslocamentos $u_1(t)$ e $u_2(t)$ das juntas, respectivamente.

As Eqs. (A.37) de Lagrange para sistemas que en

volvam somente forças não conservativas é

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \tag{3.13}$$

onde agora, Q_j representa as forças não conservativas, que no nosso caso, são aquelas dadas nas Eqs. (3.12).
Das Eqs. (3.9) e (3.10) podemos escrever o potencial cinético $L = T(t) - V(t)$, como

$$L(t) = \frac{mL}{6}\left[\dot{u}_1^2(t) + \dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + \dot{u}_2^2(t)\right]$$

$$- \frac{EA}{2L}\left[u_1^2(t) - 2u_1(t)u_2(t) + u_2^2(t)\right] \tag{3.14}$$

Derivando a Eq.(3.14) em relação às velocidades $\dot{u}_1(t)$ e $\dot{u}_2(t)$ escrevemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1(t)} = \frac{mL}{6}\left[2\dot{u}_1(t) + \dot{u}_2(t)\right] \tag{3.15}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2(t)} = \frac{mL}{6}\left[\dot{u}_1(t) + 2\dot{u}_2(t)\right] \tag{3.16}$$

E as derivadas das Eqs. (3.15) e (3.16) em relação ao tempo são

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1(t)} = \frac{mL}{6}\left[2\ddot{u}_1(t) + \ddot{u}_2(t)\right] \tag{3.17}$$

e

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2(t)} = \frac{mL}{6}\left[\ddot{u}_1(t) + 2\ddot{u}_2(t)\right] \tag{3.18}$$

E as derivadas da Eq.(3.14) em relação às coordenadas generalizadas $u_1(t)$ e $u_2(t)$ fornecem

$$\frac{\partial L}{\partial u_1(t)} = -\frac{EA}{2L}\left[2u_1(t) - 2u_2(t)\right] \tag{3.19}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial u_2(t)} = -\frac{EA}{2L}\left[-2u_1(t) + 2u_2(t)\right] \tag{3.20}$$

Inserindo as Eqs. (3.12a), (3.17) e (3.19) na Eq.(3.13) de La

grange, vem

$$\frac{mL}{6}\left[2\ddot{u}_1(t) + \ddot{u}_2(t)\right] + \frac{EA}{2L}\left[2u_1(t) - 2u_2(t)\right] = f_1(t) \qquad (3.21)$$

Da mesma forma, considerando as Eqs. (3.12b), (3.18) e (3.20), a Eq. (3.13) torna-se.

$$\frac{mL}{6}\left[\ddot{u}_1(t) + 2\ddot{u}_2(t)\right] + \frac{EA}{2L}\left[-2u_1(t) + 2u_2(t)\right] = f_2(t) \qquad (3.22)$$

As Eqs. (3.21) e (3.22) podem ser escrita na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} mL/3 & mL/6 \\ mL/6 & mL/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \qquad (3.23)$$

Tal equação pode ser escrita na forma familiar compacta

$$[m]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{f(t)\} \qquad (3.24)$$

onde

$$[m] = \frac{mL}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (3.25)$$

é a matriz inércia do elemento e

$$[K] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.26)$$

é a matriz rigidez. Além disso, as matrizes colunas $\{u(t)\}$ e $\{f(t)\}$ representam os deslocamentos e os vetores forças da junta, respectivamente.

Por causa da analogia entre a vibração axial de hastes e a vibração a torção de eixos (ver Sec.1.2), um formulário semelhante é obtido no caso de eixo circular uniforme em torção, mostrado na Fig. 3.3.

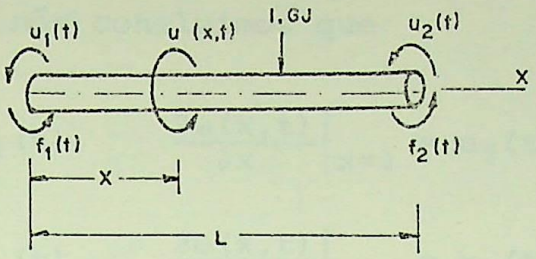


FIG. 3.3 - EIXO A TORÇÃO

Realmente, para obter as equações do movimento para o eixo em torção, nós precisamos somente substituir, na Eq.(3.23), m pelo momento de inércia I por unidade de comprimento e EA pela rigidez a torção GJ. É claro que, os deslocamentos e as forças nas juntas representarão rotações e torques, respectivamente.

Um outro exemplo de particular interesse é a barra em flexão mostrada na Fig. 3.4.

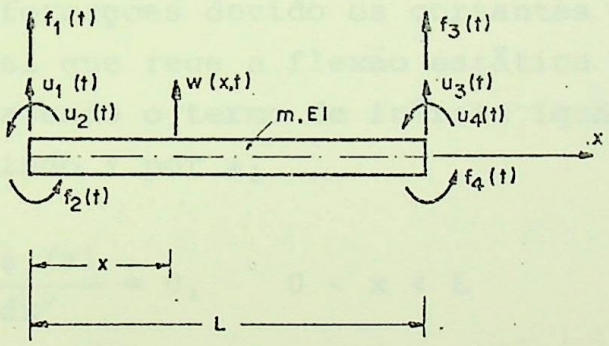


FIG. 3.4 - BARRA A FLEXÃO

Neste caso uma determinada junta pode experimentar ambos deslocamentos, translação e rotação. Correspondentemente, não há somente forças de junta a considerar mas também momentos fletores. Seguindo o padrão estabelecido antes, nós escrevemos o deslocamento para qualquer ponto da barra na forma

$$\omega(x,t) = \phi_1(x)u_1(t) + \phi_2(x)u_2(t) + \phi_3(x)u_3(t) + \phi_4(x)u_4(t) \tag{3.27}$$

onde, da Fig. 3.4, nós concluimos que

$$\omega(0,t) = u_1(t), \qquad \left.\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = u_2(t)$$
$$\omega(L,t) = u_3(t), \qquad \left.\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = u_4(t) \tag{3.28}$$

Portanto, as funções aparentes $\phi_i(x)$ $(i = 1,2,3,4)$ devem satisfazer as condições de contorno .

$$\phi_1(0) = 1, \quad \phi_1(L) = 0, \quad \left.\frac{d\phi_1}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{d\phi_1}{dx}\right|_{x=L} = 0 \tag{3.29a}$$

$$\phi_2(0) = 0, \quad \phi_2(L) = 0, \quad \left.\frac{d\phi_2}{dx}\right|_{x=0} = 1, \quad \left.\frac{d\phi_2}{dx}\right|_{x=L} = 0 \tag{3.29b}$$

$$\phi_3(0) = 0, \quad \phi_3(L) = 1, \quad \left.\frac{d\phi_3}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{d\phi_3}{dx}\right|_{x=L} = 0 \tag{3.29c}$$

$$\phi_4(0) = 0, \quad \phi_4(L) = 0, \quad \left.\frac{d\phi_4}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{d\phi_4}{dx}\right|_{x=L} = 1 \tag{3.29d}$$

Desprezando as deformações devido os cortantes nos resultados, a equação diferencial que rege a flexão estática de uma barra uniforme, é obtida fazendo o termo de inércia igual a zero na Eq. (1.60) e substituindo Y por ϕ_1

$$\frac{d^4\phi_1(x)}{dx^4} = 0, \qquad 0 < x < L \tag{3.30}$$

tendo a solução geral

$$\phi_1(x) = \frac{1}{6}c_1x^3 + \frac{1}{2}c_2x^2 + c_3x + c_4 \tag{3.31}$$

Usando as condições de contorno (3.29a), nós obtemos a função aparente

$$\phi_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \tag{3.32}$$

De maneira semelhante, pode-se verificar que

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca
MAUÁ
Itajubá

$$\phi_2(x) = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$\phi_3(x) = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \qquad (3.33)$$

$$\phi_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

de modo que, inserindo as Eqs. (3.32) e (3.33) na Eq.(3.27), nós obtemos

$$\omega(x,t) = \left(1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}\right)u_1(t) + \left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right)Lu_2(t)$$

$$+ \left(3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}\right)u_3(t) - \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3}\right)Lu_4(t) \qquad (3.34)$$

Para obter as equações de Lagrange do movimento para o elemento, nós primeiramente escrevemos a energia cinética conforme a Eq.(1.84) substituindo u por ω

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^L m\left[\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L m\left[\left(1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}\right)\dot{u}_1(t) + \left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3}\right)L\dot{u}_2(t)\right.$$

$$\left. + \left(3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}\right)\dot{u}_3(t) - \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3}\right)L\dot{u}_4(t)\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{mL}{420}\left[156\dot{u}_1^2(t) + 4L^2\dot{u}_2^2(t) + 156\dot{u}_3^2(t) + 4L^2\dot{u}_4^2(t)\right.$$

$$+ 2\times 22L\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + 2\times 54\dot{u}_1(t)\dot{u}_3(t)$$

$$- 2\times 13L\dot{u}_1(t)\dot{u}_4(t) + 2\times 13L\dot{u}_2(t)\dot{u}_3(t)$$

$$\left. - 2\times 3L^2\dot{u}_2(t)\dot{u}_4(t) - 2\times 22L\dot{u}_3(t)\dot{u}_4(t)\right] \qquad (3.35)$$

e então a energia potencial de acordo com a Eq. (1.94)

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left[\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial x^2}\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L EI\left[-\frac{6}{L^2}\left(1-2\frac{x}{L}\right)u_1(t) - \frac{2}{L}\left(2-3\frac{x}{L}\right)u_2(t)\right.$$

$$\left. + \frac{6}{L^2}\left(1-2\frac{x}{L}\right)u_3(t) - \frac{2}{L}\left(1-3\frac{x}{L}\right)u_4(t)\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{EI}{L^3}\Big[12u_1^2(t) + 4L^2u_2^2(t) + 12u_3^2(t) + 4L^2u_4^2(t)$$

$$+ 2\times 6Lu_1(t)u_2(t) - 2\times 12u_1(t)u_3(t)$$

$$+ 2\times 6Lu_1(t)u_4(t) - 2\times 6Lu_2(t)u_3(t)$$

$$+ 2\times 2L^2u_2(t)u_4(t) - 2\times 6Lu_3(t)u_4(t)\Big] \quad (3.36)$$

Além do mais, o trabalho virtual pode ser mostrado que tem a forma

$$\delta\tau = \sum_{j=1}^{4} f_j(t)\,\delta u_j(t) \quad (3.37)$$

onde

$$f_1(t) = \int_0^L f(x,t)\left(1-3\frac{x^2}{L^2}+2\frac{x^3}{L^3}\right)dx + f_1^*(t)$$

$$f_2(t) = \int_0^L f(x,t)\left(\frac{x}{L}-2\frac{x^2}{L^2}+\frac{x^3}{L^3}\right)Ldx + f_2^*(t)$$

$$f_3(t) = \int_0^L f(x,t)\left(3\frac{x^2}{L^2}-2\frac{x^3}{L^3}\right)dx + f_3^*(t) \quad (3.38)$$

$$f_4(t) = -\int_0^L f(x,t)\left(\frac{x^2}{L^2}-\frac{x^3}{L^3}\right)Ldx + f_4^*(t)$$

são as forças de junta, nas quais $f(x,t)$ é a força não conservativa distribuída e $f_j^*(t)$ $(j = 1,2,3,4)$ são as forças exercidas por elementos adjacentes ao elemento considerado. Desta vez, con

siderando as Eqs. (3.35) e (3.36), o potencial cinético é

$$L(t) = \frac{mL}{420}\Big[78\dot{u}_1^2(t) + 2L^2\dot{u}_2^2(t) + 78\dot{u}_3^2(t) + 2L^2\dot{u}_4^2(t) + 22L\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t)$$

$$+ 54\dot{u}_1(t)\dot{u}_3(t) - 13L\dot{u}_1(t)\dot{u}_4(t) + 13L\dot{u}_2(t)\dot{u}_3(t) - 3L^2\dot{u}_2(t)\dot{u}_4(t)$$

$$- 22L\dot{u}_3(t)\dot{u}_4(t)\Big] - \frac{2EI}{L^3}\Big[3u_1^2(t) + L^2u_2^2(t) + 3u_3^2(t) + L^2u_4^2(t)$$

$$+ 3Lu_1(t)u_2(t) - 6u_1(t)u_3(t) + 3Lu_1(t)u_4(t) - 3Lu_2(t)u_3(t)$$

$$+ L^2u_2(t)u_4(t) - 3Lu_3(t)u_4(t)\Big] \qquad (3.39)$$

Derivando a Eq.(3.39) em relação às velocidades $\dot{u}_j$ (j=1,2,3,4), vem

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1(t)} = \frac{mL}{420}\Big[156\dot{u}_1(t) + 22L\dot{u}_2(t) + 54\dot{u}_3(t) - 13L\dot{u}_4(t)\Big] \qquad (3.40a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2(t)} = \frac{mL}{420}\Big[4L^2\dot{u}_2(t) + 22L\dot{u}_1(t) + 13L\dot{u}_3(t) - 3L^2\dot{u}_4(t)\Big] \qquad (3.40b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_3(t)} = \frac{mL}{420}\Big[156\dot{u}_3(t) + 54\dot{u}_1(t) + 13L\dot{u}_2(t) - 22L\dot{u}_4(t)\Big] \qquad (3.40c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_4(t)} = \frac{mL}{420}\Big[4L^2\dot{u}_4(t) - 13L\dot{u}_1(t) - 3L^2\dot{u}_2(t) - 22L\dot{u}_3(t)\Big] \qquad (3.40d)$$

Tomando agora as derivadas da Eq. (3.39) em relação às coordenadas generalizadas $u_j(t)$ (j = 1,2,3,4), escrevemos

$$\frac{\partial L}{\partial u_1(t)} = -\frac{2EI}{L^3}\Big[6u_1(t) + 3Lu_2(t) - 6u_3(t) + 3Lu_4(t)\Big] \qquad (3.41a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2(t)} = -\frac{2EI}{L^3}\Big[2L^2u_2(t) + 3Lu_1(t) - 3Lu_3(t) + L^2u_4(t)\Big] \qquad (3.41b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_3(t)} = -\frac{2EI}{L^3}\Big[6u_3(t) - 6u_1(t) - 3Lu_2(t) - 3Lu_4(t)\Big] \qquad (3.41c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_4(t)} = -\frac{2EI}{L^3}\Big[2L^2u_4(t) + 3Lu_1(t) + L^2u_2(t) - 3Lu_3(t)\Big] \qquad (3.41d)$$

Inserindo as Eqs.(3.38) com as derivadas em relação ao tempo das Eqs.(3.40) e com as Eqs. (3.41) nas equações da Lagrange, Eqs. (3.13), considerando as equações separadamente para cada deslocamento, as equações do movimento podem uma vez mais ser escritas na forma (3.24), mas desta vez as matrizes inércia e rigidez são

$$[m] = \frac{mL}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad (3.42)$$

e

$$[K] = \frac{2EI}{L^3}\begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \qquad (3.43)$$

e os vetores $\{u(t)\}$ e $\{f(t)\}$ são quadri-dimensionais. Note que $u_2(t)$ e $u_4(t)$ representam ângulos e $f_2(t)$ e $f_4(t)$ representam momentos.

Mais um caso de interesse é aquele de uma barra em flexão submetida a forças axiais. Pelo fato de estarmos interessados aqui em sistemas lineares, este caso é essencialmente uma combinação dos dois já discutidos, a única diferença sendo a nova notação para as forças e momentos, como mostrado na Fig. 3.5.

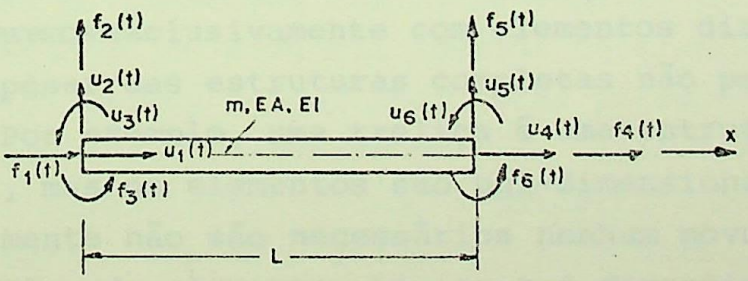


FIG. 3.5 - BARRA EM FLEXÃO COM FORÇA AXIAL

Portanto, nós podemos escrever diretamente a matriz inércia

$$[m] = \frac{mL}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad (3.44)$$

e a matriz rigidez

$$[K] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} (L/r)^2 & 0 & 0 & -(L/r)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & .6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -(L/r)^2 & 0 & 0 & (L/r)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad (3.45)$$

onde $r = \sqrt{I/A}$ é o raio de giração da área da secção transversal em relação ao eixo centroidal normal ao plano da flexão. Se em adição a barra é submetida a momentos de torção, a matriz (3.44) pode ser aumentada usando a analogia com as forças axiais e simplesmente adicionando duas filas e colunas com elementos IL/3 nas posições designadas pelos índices correspondentes aos números das linhas e colunas quando os dois índices são iguais e com elementos IL/6 quando os índices são diferentes; os elementos com um dos índices correspondente à linha ou coluna diferente destes dois são todos iguais a zero. A matriz (3.45) deve ser aumentada também desta maneira.

Deve ser salientado que, por todo este trabalho, nós nos preocuparemos exclusivamente com elementos discretos uni-dimensionais, apesar das estruturas completas não precisarem ser tão limitadas. Por exemplo, uma treliça é uma estrutura bi ou tri-dimensional, mas os elementos são uni-dimensionais. Além do mais, essencialmente não são necessários nenhum novo conceito para problemas envolvendo elementos bi- ou tri-dimensionais. Realmente, matrizes inércia e rigidez para elementos bi ou tri-dimensionais podem ser prontamente obtidas uma vez que seja disponível um razoável conjunto de funções aparentes.

3.3 - Sistemas de Referência

Lembramos que de acordo com o método dos elementos finitos o sistema dinâmico é considerado como uma reunião de elementos individuais discretos. As componentes dos deslocamentos nas juntas de qualquer elemento individual são escolhidas numa direção a qual depende da natureza do elemento considerado. Por exemplo, no caso de uma barra delgada com as extremidades denotadas por a e b, é conveniente escolher as componentes do deslocamento de qualquer um dos extremos de modo que uma componente esteja na direção axial x e as outras duas nas direções transversais y e z (veja Fig. 3.6).

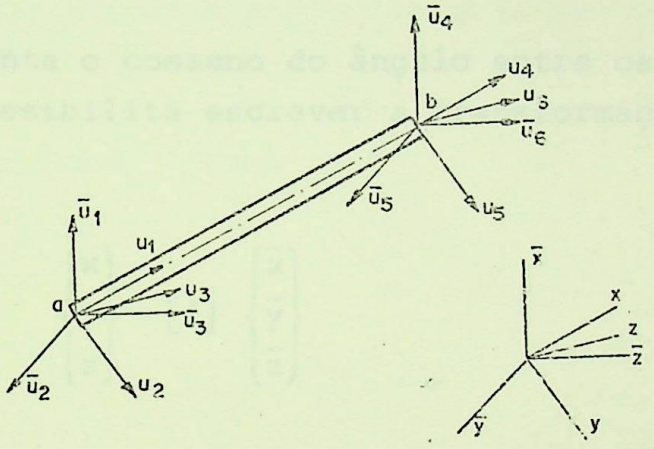


FIG. 3.6 - BARRA NO SISTEMA GLOBAL

As componentes dos deslocamentos das extremidades a e b ao longo destes eixos são denotados por u_1, u_2, u_3 e u_4, u_5, u_6, respectivamente. Mas os elementos individuais podem ter diferentes orientações no espaço, de modo que podemos criar dificuldades em combinar os deslocamentos de uma dada junta se expressarmos para cada elemento seus deslocamentos em cada sistema particular de referência; pois cada sistema é sempre referido a um "sistema local de coordenadas". Por esta razão é recomendável trabalhar com as componentes dos deslocamentos num conjunto simples de coordenadas, por quanto guarda as vantagens de identificar as componentes dos deslocamentos de qualquer elemento com as dire

ções mais convenientespara este particular elemento. Especificamente, nós devemos escolher um "sistema de referência global" $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ e denominar as componentes do deslocamento ao longo destas direções em a por $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ e em b por $\bar{u}_4$, $\bar{u}_5$, $\bar{u}_6$, respectivamente. Então uma simples transformação de coordenadas pode resolver as componentes do deslocamento ao longo de coordenadas x,y, z, particular para o elemento em questão, em componentes ao longo de um sistema global de referência $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Com esta finalidade, nós introduzimos a matriz dos cossenos diretores

$$[\ell] = \begin{bmatrix} \ell x\bar{x} & \ell x\bar{y} & \ell x\bar{z} \\ \ell y\bar{x} & \ell y\bar{y} & \ell y\bar{z} \\ \ell z\bar{x} & \ell z\bar{y} & \ell z\bar{z} \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

onde $\ell x\bar{x}$ representa o cosseno do ângulo entre os eixos x e $\bar{x}$, etc. Isto nos possibilita escrever a transformação de coordenadas

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [\ell] \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} \tag{3.47}$$

na qual $[\ell]$ representa o papel de uma matriz de transformação. A mesma transformação de coordenadas se aplica para as componentes do deslocamento, de tal modo que

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [\ell] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = [\ell] \begin{Bmatrix} \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{Bmatrix} \tag{3.48}$$

As Eqs. (3.48) podem ser combinadas a fim de aplicar para o elemento inteiro escrevendo simplesmente

$$\{u\} = [L]\{\bar{u}\} \tag{3.49}$$

onde $\{u\}$ e $\{\bar{u}\}$ são matrizes colunas com elementos u_i (i=1,2,..., 6) e $\bar{u}_j$ (j = 1,2,...,6), respectivamente, e a matriz de transformação $[L]$ é definida por

$$[L] = \begin{bmatrix} [\ell] & [0] \\ [0] & [\ell] \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

Claramente, existem diferentes matrizes $[L]$ para elementos diferentes, a não ser que alguns dos elementos tenham a mesma orientação no espaço, isto é, as coordenadas locais são paralelas. Deve ser notado que as matrizes $[L]$ são ortonormais, $[L]^{-1} = [L]^T$, porque $[\ell]$ representa uma transformação entre dois sistemas de eixos ortogonais.

No caso especial de estruturas planas, todos os sistemas locais têm um eixo paralelo a um dos eixos do sistema global. A Fig. 3.7 mostra o caso no qual o eixo z de um sistema local arbitrário é paralelo ao eixo $\bar{z}$ do sistema global. Neste caso, a matriz dos cossenos diretores pode ser verificada como

$$[\ell] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

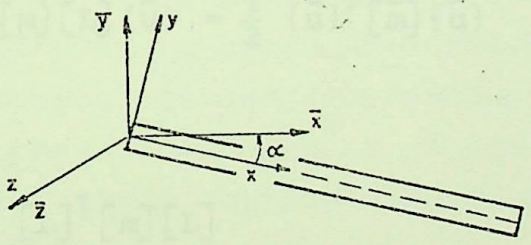


FIG. 3.7 - BARRA COMO ESTRUTURA PLANA

Para futura referência, provar-se-á ser útil expressar as matrizes inércia e rigidez, da mesma forma que o vetor das forças na junta, em termos de um sistema global de referência $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ ao invés de um sistema local x, y, z. Com esta finalidade, nós reconhecemos que a energia cinética e a energia potencial podem ser escritas na forma de um produto triplo de matrizes

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [m] \{\dot{u}\} \tag{3.52}$$

e

$$V = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} \tag{3.53}$$

enquanto que o trabalho virtual tem a expressão

$$\delta\tau = \{\delta u\}^T \{f\} \tag{3.54}$$

Mas, se as componentes dos deslocamentos dos sistemas local e global são relacionadas pela Eq.(3.49), então as componentes das velocidades são relacionadas por

$$\{\dot{u}\} = [L] \{\dot{\bar{u}}\} \tag{3.55}$$

e os correspondentes deslocamentos virtuais por

$$\{\delta u\} = [L]\{\delta \bar{u}\} \tag{3.56}$$

Daí, inserindo a Eq.(3.55) na (3.52), nós obtemos

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\bar{u}}\}^T [L]^T [m][L]\{\dot{\bar{u}}\} = \frac{1}{2} \{\dot{\bar{u}}\}^T [\bar{m}]\{\dot{\bar{u}}\} \tag{3.57}$$

onde

$$[\bar{m}] = [L]^T [m][L] \tag{3.58}$$

é a matriz inércia do elemento em termos das coordenadas globais $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Além disso, usando a Eq.(3.49), nós podemos escrever a Eq. (3.53) da energia potencial como

$$V = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [L]^T [K][L]\{\bar{u}\} = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [\bar{K}]\{\bar{u}\} \tag{3.59}$$

onde

$$[\bar{K}] = [L]^T [K][L] \tag{3.60}$$

é a matriz rigidez do elemento em função das coordenadas globais. Note que $[\bar{m}]$ e $[\bar{K}]$ são matrizes simétricas pois $[m]$ e $[K]$ são si

métricas. Continuando, inserimos a Eq.(3.56) na Eq.(3.54) do trabalho virtual resulta

$$\delta\tau = \{\delta\bar{u}\}^T [L]^T \{f\} = \{\delta\bar{u}\}^T \{\bar{f}\} \tag{3.61}$$

onde

$$\{\bar{f}\} = [L] \{f\} \tag{3.62}$$

é reconhecida como o vetor das forças nas juntas em função das componentes globais.

As expressões acima podem ser usadas para escrever as equações do movimento para o elemento simples em função do sistema global da referência. Contudo, este passo pode ser omitido, visto que o interesse está nas equações do movimento de uma estrutura completa em função das coordenadas globais, e não somente naquele de um elemento simples.

3.4 - Equações do Movimento para o Sistema Completo

Na Sec. 3.2 nós obtivemos as equações do movimento para um elemento simples em função das coordenadas locais, e na Sec. 3.3, nós mostramos como as coordenadas locais podem ser relacionadas com as coordenadas globais. A questão restante está como estender os resultados obtidos dos elementos discretos para uma estrutura completa.

A essência do método dos elementos finitos é considerar a estrutura contínua como uma reunião de elementos discretos. Para esta reunião de elementos discretos representar a estrutura adequadamente, os deslocamentos da fronteira devem corresponder, isto é, os deslocamentos das juntas partilhadas por vários elementos devem ser os mesmos e as forças correspondentes devem ser estaticamente equivalentes com as forças aplicadas. Note que os deslocamentos incluem as rotações e as forças incluem os torques.

Provar-se-á conveniente introduzir um novo conjunto de deslocamentos $\bar{U}_j$ (j = 1,2, ..., N) representando os des

locamentos das juntas da estrutura completa em função das componentes ao longo de um sistema global de coordenadas. Nós devemos denominar este valor N-dimensional pela matriz coluna $\{\bar{U}\}$. Então assumindo que a estrutura consiste de p elementos, e denominando as quantidades que pertencem a um s-ésimo elemento pelo símbolo s, a relação entre os vetores $\{\bar{u}\}_s$ e $\{\bar{U}\}$ pode ser escrita na forma matricial

$$\{\bar{u}\}_s = [A]_s \{\bar{U}\}, \quad s = 1,2,\ldots, p \tag{3.63}$$

onde $[A]_s$ é uma matriz retangular. É lógico que, $[A]_s$ deve ter tantas linhas quanto $\{\bar{u}\}_s$ e tantas colunas quanto $\{\bar{U}\}$ tem de linhas. Os elementos de cada linha de $[A]_s$ são todos zero, com a exceção de um elemento em cada linha o qual é igual à unidade. A posição do elemento unidade em cada linha de $[A]_s$ é tal que a Eq. (3.63) represente uma identidade. Note que um dado deslocamento pode aparecer em vários dos vetores $\{\bar{u}\}_s$. De fato, ele aparece naqueles vetores que partilham uma junta correspondente. Por outro lado, o mesmo deslocamento aparece somente uma vez em $\{\bar{U}\}$. Daí, os elementos de $\{\bar{U}\}$ podem ser considerados como um conjunto de coordenadas generalizadas para o sistema completo.

A seguir, vamos obter as equações diferenciais do movimento para uma estrutura completa. Nós relembramos que na Sec. 3.3 obtivemos as expressões para a energia cinética, energia potencial, e para o trabalho virtual para um elemento simples em função de um sistema global de referência. Se nós considerarmos a Eq. (3.57) como representando a energia cinética para um elemento típico s, a energia cinética para a estrutura completa pode ser obtida pela adição das contribuições de todos os elementos finitos, isto é,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{P} \{\dot{\bar{u}}\}_s^T [\bar{m}]_s \{\dot{\bar{u}}\}_s \tag{3.64}$$

Mas, se a Eq. (3.63) relaciona os deslocamentos do elemento s com estes da estrutura total, então a relação equivalente para as velocidades é

$$\{\dot{\bar{u}}\}_s = [A]_s \{\dot{\bar{U}}\}, \quad s = 1,2,\ldots,P \tag{3.65}$$

de modo que, inserindo a Eq.(3.65) na (3.64), nós obtemos

$$[T] = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{P} \{\dot{\bar{U}}\}^T [A]_s^T [\bar{m}]_s [A]_s \{\dot{\bar{U}}\} = \frac{1}{2} \{\dot{\bar{U}}\}^T [\bar{M}] \{\dot{\bar{U}}\} \qquad (3.66)$$

onde

$$[\bar{M}] = \sum_{s=1}^{P} [A]_s^T [\bar{m}]_s [A]_s \qquad (3.67)$$

representa a "matriz inércia para a estrutura completa". Uma interpretação similar da energia potencial para o elemento finito, Eq. (3.59), em conjunto com a transformação (3.63), fornece

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{P} \{\bar{u}\}_s^T [\bar{K}]_s \{\bar{u}\}_s = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{P} \{\bar{U}\}^T [A]_s^T [\bar{K}]_s [A]_s \{\bar{U}\}$$

$$= \frac{1}{2} \{\bar{U}\}^T [\bar{K}] \{\bar{U}\} \qquad (3.68)$$

onde

$$[\bar{K}] = \sum_{s=1}^{P} [A]_s^T [\bar{K}]_s [A]_s \qquad (3.69)$$

é a "matriz rigidez para a estrutura completa". Além disso, usando a mesma analogia para o trabalho virtual, a Eq. (3.61) fornece o trabalho virtual para a estrutura completa na forma

$$\delta\tau = \sum_{s=1}^{P} \{\delta\bar{u}\}_s^T \{\bar{f}\}_s \qquad (3.70)$$

Da Eq.(3.63), contudo, nós concluímos que os deslocamentos virtuais do elemento s têm relação com este da estrutura inteira dada por

$$\{\delta\bar{u}\}_s = [A]_s \{\delta\bar{U}\}, \quad s = 1,2,\ldots, P \qquad (3.71)$$

de modo que o trabalho virtual fica

$$\delta\tau = \sum_{s=1}^{P} \{\delta\bar{U}\}^T [A]_s^T \{\bar{f}\}_s = \{\delta\bar{U}\}^T \sum_{s=1}^{P} [A]_s^T \{\bar{f}\}_s \qquad (3.72)$$

Mas o trabalho virtual deve ser o mesmo, se ele é expresso em função dos deslocamentos virtuais e das forças correspondentes à reunião de elementos, ou em função destes correspondentes à estrutura completa. Daí,

$$\delta\tau = \{\delta\bar{U}\}^T\{\bar{F}\} \tag{3.73}$$

Comparando as Eqs. (3.72) e (3.73), nós concluímos que "o vetor das forças não conservativas das juntas para a estrutura completa", correspondendo ao vetor deslocamento $\{\bar{U}\}$, tem a expressão

$$\{\bar{F}\} = \sum_{s=1}^{P} [A]_s^T \{\bar{f}\}_s \tag{3.74}$$

Deve ser chamado a atenção que, enquanto o vetor força $\{\bar{f}\}_s$ inclue as forças que interagem entre elementos, o vetor força $\{\bar{F}\}$ não inclue. Este fato é o resultado do princípio que as juntas são pontos de pequena massa, de tal modo que as forças de interação, sendo iguais em módulo e opostas em sinal, se cancelam aos pares. Aplicando as equações de Lagrange nos vários elementos, em conjunto com as Eqs.(3.66), (3.68) e (3.74), nós obtemos as "equações de Lagrange do movimento para a estrutura completa" na forma matricial

$$[\bar{M}]\{\ddot{\bar{U}}\} + [\bar{K}]\{\bar{U}\} = \{\bar{F}\} \tag{3.75}$$

onde, o vetor $\{\bar{F}\}$ representa o vetor das forças não conservativas nas juntas.

A discussão precendente considera todo elemento discreto como possuindo juntas livres, isto é, juntas as quais podem ser submetidas a deslocamentos como se elas não tivessem restrição. A implicação é que a estrutura completa não tem restrições e é capaz de ter movimento de um corpo rígido, de modo que a matriz $[\bar{K}]$ é singular (veja Apêndice C). Muitas estruturas, contudo, são fixas com suportes a fim de evitar o movimento de corpo rígido, o que é refletido nas condições geométricas de contorno. Outras estruturas, tais como as indeterminadas, são fixas por suportes de tal maneira que os deslocamentos são zero para um número de pontos excedente do número exigido para evitar o movimento de corpo rígido. Uma maneira simples de tratar o pro

blema quando $[\bar{K}]$ é singular e a estrutura é fixada de modo que um dado número de deslocamentos de juntas é zero é eliminar das matrizes $[\bar{M}]$, $[\bar{K}]$, e $\{\bar{F}\}$ o correspondente número de linhas e colunas. Para ilustrar o procedimento, vamos chamar de $\{\bar{U}\}_0 = \{0\}$ o vetor nulo correspondendo aos deslocamentos zero e por $\{\bar{U}\}_1$ o vetor em $\{\bar{U}\}$ formado pelos deslocamentos dos elementos restantes, de modo que $\{\bar{U}\}$ pode ser separado como segue:

$$\{\bar{U}\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{U}\}_0 \\ \{\bar{U}\}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\bar{U}\}_1 \end{Bmatrix} \tag{3.76}$$

e expressões análogas existem para o vetor velocidade $\{\dot{\bar{U}}\}$ e o vetor aceleração $\{\ddot{\bar{U}}\}$. De uma maneira semelhante, nós separamos as matrizes $[\bar{M}]$, $[\bar{K}]$, e $\{\bar{F}\}$ escrevendo

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} [\bar{M}]_{00} & [\bar{M}]_{01} \\ [\bar{M}]_{10} & [\bar{M}]_{11} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [\bar{K}]_{00} & [\bar{K}]_{01} \\ [\bar{K}]_{10} & [\bar{K}]_{11} \end{bmatrix}, \quad \{\bar{F}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{F}\}_0 \\ \{\bar{F}\}_1 \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

onde as dimensões das sub-matrizes de $[\bar{M}]$, $[\bar{K}]$ e $\{\bar{F}\}$ são tais que as matrizes produtos resultante da introdução das Eqs.(3.76) e (3.77) são definidas. Lógico que, $\{\bar{F}\}_0$ e $\{\bar{F}\}_1$ devem ter a mesma dimensão que $\{\bar{U}\}_0 = \{0\}$ e $\{\bar{U}\}_1$, respectivamente. Disto segue imediatamente que $[\bar{M}]_{00}$ e $[\bar{K}]_{00}$ são matrizes quadradas tendo a mesma ordem quanto a dimensão de $\{\bar{U}\}_0$. $[\bar{M}]_{11}$ e $[\bar{K}]_{11}$ são matrizes quadradas que têm a mesma ordem quanto a dimensão de $\{\bar{U}\}_1$. Introduzindo as Eqs. (3.76) e (3.77) na Eq. (3.75), nós obtemos as duas equações de matrizes

$$[\bar{M}]_{11}\{\ddot{\bar{U}}\}_1 + [\bar{K}]_{11}\{\bar{U}\}_1 = \{\bar{F}\}_1 \tag{3.78}$$

e

$$[\bar{M}]_{01}\{\ddot{\bar{U}}\}_1 + [\bar{K}]_{01}\{\bar{U}\}_1 = \{\bar{F}\}_0 \tag{3.79}$$

As Eqs. (3.78) e (3.79) fornecem a resposta do sistema tão bem quanto as reações para qualquer excitação externa. Realmente, a Eq. (3.78) pode ser resolvida para o vetor de

deslocamento não nulo da junta $\{\bar{U}\}_1$ para qualquer excitação inicial e excitação externa $\{\bar{F}\}_1$. Por outro lado, introduzindo a solução de $\{\bar{U}\}_1$ na Eq.(3.79) nós obtemos o vetor $\{\bar{F}\}_0$, onde $\{\bar{F}\}_0$ representa as forças associadas com a sub-matriz nula de $\{\bar{U}\}$ e pode ser identificada como as forças de reação dinâmica devido ao movimento $\{\bar{U}\}_1$. Para isso nós devemos adicionar a parte do carregamento externo originariamente distribuído aos correspondentes pontos de $\{\bar{U}\}$. Se as presentes reações não interessarem, a Eq. (3.79) pode ser ignorada.

Para ilustrar os conceitos vamos obter as equações do movimento para um eixo circular uniforme submetido a torção sendo que é fixo na extremidade x = 0 e livre na extremidade x = L, (veja Fig. 3.8)

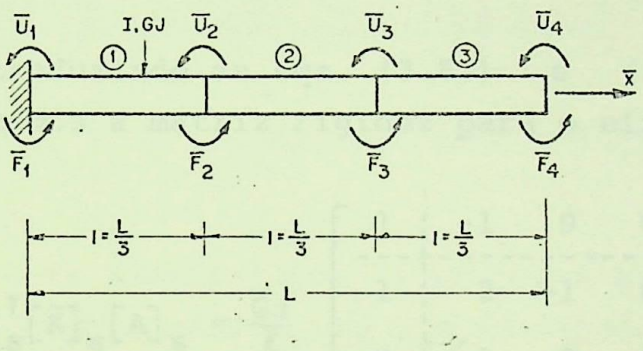


FIG. 3.8 - EIXO CIRCULAR A TORÇÃO

Para simplificar, nós dividimos o eixo em três elementos de igual comprimento $\ell = L/3$. O problema sendo uni-dimensional, a orientação das coordenadas locais e globais é a mesma. Daí, da Sec.3.2, nós podemos escrever diretamente as matrizes inércia e rigidez para os elementos na forma

$$[\bar{m}]_s = [m]_s = \frac{I\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad s = 1,2,3 \tag{3.80}$$

e

$$[\bar{K}]_s = [K]_s = \frac{GJ}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad s = 1,2,3 \tag{3.81}$$

Em vista da discussão referente à Eq.(3.63), as matrizes $[A]_s$

são simplesmente

$$[A]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A]_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

de tal modo que, introduzindo as Eqs. (3.80) e (3.82) na fórmula (3.67), nós obtemos a matriz inércia para o eixo completo na forma

$$[\bar{M}] = \sum_{s=1}^{3} [A_s]^T [\tilde{m}]_s [A]_s = \frac{I\ell}{6} \left[\begin{array}{c|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{3.83}$$

Além disso, introduzindo as Eqs. (3.81) e (3.82) na fórmula (3.69), nós obtemos a matriz rigidez para o eixo completo

$$[\bar{K}] = \sum_{s=1}^{3} [A]_s^T [\bar{K}]_s [A]_s = \frac{GJ}{\ell} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \tag{3.84}$$

É facil de ver, por inspeção, que a matriz $[\bar{K}]$ é singular. Isto pode ser verificado considerando o determinante de $[\bar{K}]$ e simplesmente adicionando a segunda, terceira, e a quarta linha à primeira, do que resulta uma linha com todos os seus elementos iguais a zero. Daí, o determinante de $[\bar{K}]$ é zero, o que implica que $[\bar{K}]$ é singular. Isto pode ser facilmente explicado pelo fato de que a matriz $[\bar{K}]$ foi obtida na base de três elementos livres independentes, de tal modo que cada sistema admite rotação de corpo rígido. Mas o eixo é preso na extremidade esquerda, de maneira que devemos ter $\bar{U}_1 = 0$. Daí, o sistema discreto possui somente três graus de liberdade. Seguindo o procedimento esboçado antes, nós podemos repartir as matrizes (3.83) e (3.84) da acordo com as linhas pontilhadas e escrever as equações do movimento, Eq.3.75, para as coordenadas não nulas.

$$\frac{IL}{18}\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\bar{U}}_2\\ \ddot{\bar{U}}_3\\ \ddot{\bar{U}}_4\end{Bmatrix} + \frac{3GJ}{L}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{U}_2\\ \bar{U}_3\\ \bar{U}_4\end{Bmatrix} = \{0\} \qquad (3.85)$$

Vamos considerar agora, uma barra uniforme em flexão presa em x = 0 e livre em x = L, como mostra a Fig. 3.9 e vamos obter as equações para a vibração livre do sistema.

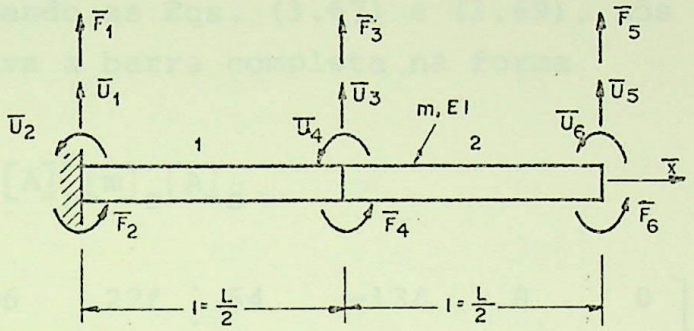


FIG. 3.9 - BARRA UNIFORME A FLEXÃO

Para simplificar, dividindo a barra em dois elementos de igual comprimento $\ell = \frac{L}{2}$, e identificando uma vez mais que o problema é uni-dimensional, nós podemos usar as Eqs. (3.42) e (3.43) e escrever a matriz inércia dos elementos

$$[\bar{m}]_s = [m]_s = \frac{m\ell}{420}\begin{bmatrix}156 & 22\ell & 54 & -13\ell\\ 22\ell & 4\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2\\ 54 & 13\ell & 156 & -22\ell\\ -13\ell & -3\ell^2 & -22\ell & 4\ell^2\end{bmatrix}, \quad s = 1,2 \qquad (3.86)$$

e a matriz rigidez dos elementos

$$[\bar{K}]_s = [K]_s = \frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix}12 & 6\ell & -12 & 6\ell\\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2\\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell\\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2\end{bmatrix}, \quad s = 1,2 \qquad (3.87)$$

Além disso, as matrizes $[A]_s$ têm a forma

$$[A]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

de modo que, usando as Eqs. (3.67) e (3.69), nós obtemos a matriz inércia para a barra completa na forma

$$[\bar{M}] = \sum_{s=1}^{2} [A]_s^T [\bar{m}]_s [A]_s$$

$$= \frac{m\ell}{420} \left[\begin{array}{cc:cccc} 156 & 22\ell & 54 & -13\ell & 0 & 0 \\ 22\ell & 4\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 & 0 & 0 \\ \hdashline 54 & 13\ell & 312 & 0 & 54 & -13\ell \\ -13\ell & -3\ell & 0 & 8\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ 0 & 0 & -54 & 13\ell & 156 & -22\ell \\ 0 & 0 & -13\ell & -3\ell^2 & -22\ell & 4\ell^2 \end{array}\right] \tag{3.89}$$

e a correspondente matriz rigidez na forma

$$[\bar{K}] = \sum_{s=1}^{2} [A]_s^T [\bar{K}]_s [A]_s = \frac{EI}{\ell^3} \left[\begin{array}{cc:cccc} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell & 0 & 0 \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 & 0 & 0 \\ \hdashline -12 & -6\ell & 24 & 0 & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & 0 & 8\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 0 & 0 & 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{array}\right] \tag{3.90}$$

Por causa da barra estar fixa em x = 0, os deslocamentos de translação e rotação devem ser zero, $\bar{U}_1 = 0$ e $\bar{U}_2 = 0$. Daí, repartindo as matrizes $[\bar{M}]$ e $[\bar{K}]$ conforme as linhas pontilhadas, podemos escrever as matrizes $[\bar{M}]_{01}$, $[\bar{K}]_{01}$, $[\bar{M}]_{11}$ e $[\bar{K}]_{11}$

como

$$[\bar{M}]_{01} = \frac{m\ell}{420}\begin{bmatrix} 54 & -13\ell & 0 & 0 \\ 13\ell & -3\ell^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [\bar{K}]_{01} = \frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} -12 & 6\ell & 0 & 0 \\ -6\ell & 2\ell^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.91}$$

$$[\bar{M}]_{11} = \frac{m\ell}{420}\begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13\ell \\ 0 & 8\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ 54 & 13\ell & 156 & -22\ell \\ -13\ell & -3\ell^2 & -22\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \tag{3.92a}$$

$$[\bar{K}]_{11} = \frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6\ell \\ 0 & 8\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \tag{3.92b}$$

Lembrando que $\ell = L/2$, e usando as Eqs.(3.76) e (3.78) fazendo $\{\bar{F}\}_1 = \{0\}$, pois a vibração é livre, nós escrevemos as equações do movimento levando-se em conta as Eqs.(3.92a) e (3.92b)

$$\frac{mL}{3360}\begin{bmatrix} 1248 & 0 & 216 & -26L \\ 0 & 8L^2 & 26L & -3L^2 \\ 216 & -26L & 624 & -44L \\ -26L & -3L^2 & -44L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\bar{U}}_3 \\ \ddot{\bar{U}}_4 \\ \ddot{\bar{U}}_5 \\ \ddot{\bar{U}}_6 \end{Bmatrix} \tag{3.93}$$

$$+ \frac{4EI}{L^3}\begin{bmatrix} 48 & 0 & -24 & 6L \\ 0 & 4L^2 & -6L & L^2 \\ -24 & -6L & 24 & -6L \\ 6L & L^2 & -6L & 2L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \\ \bar{U}_5 \\ \bar{U}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Além do mais, usando as Eqs. (3.91), e (3.79), as reações dinâmicas podem ser obtidas de

$$\frac{mL}{3360}\begin{bmatrix} 216 & -26L & 0 & 0 \\ 26L & -3L^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\bar{U}}_3 \\ \ddot{\bar{U}}_4 \\ \ddot{\bar{U}}_5 \\ \ddot{\bar{U}}_6 \end{Bmatrix} + \frac{4EI}{L^3}\begin{bmatrix} -24 & 6L & 0 & 0 \\ -6L & L^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \\ \bar{U}_5 \\ \bar{U}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.94)$$

resultando $\bar{F}_5 = \bar{F}_6 = 0$, como era esperado, pois a extremidade direita é livre.

3.5 - O Problema do Auto Valor

A equação descrevendo a vibração livre do sistema completo é obtida da Eq. (3.75) não considerando as forças não conservativas, isto é, fazendo iguais a zero as forças externas. Além do mais, com o conhecimento de que todas as quantidades em (3.75) são em função de um sistema global de referência, nós podemos omitir o símbolo - (barras) e escrever a equação da vibração livre na forma

$$[M]\{\ddot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = \{0\} \quad (3.95)$$

onde [M] e [K] são as matrizes massa e rigidez equivalentes para a estrutura discretizada, respectivamente, e {U} é o vetor dos deslocamentos das juntas. Na vibração livre, o vetor dos deslocamentos é uma função harmônica da forma

$$\{U(t)\} = \{U\}\cos(\omega t - \phi) \quad (3.96)$$

onde ω é a frequência de oscilação, ϕ o ângulo de fase, e {U} um vetor constante definindo a amplitude do movimento. A derivada de segunda ordem da Eq.(3.96) fornece

$$\{\ddot{U}(t)\} = -\omega^2\{U\}\cos(\omega t - \phi) \quad (3.97)$$

Inserindo as Eqs. (3.96) e (3.97) na Eq. (3.95) resulta

$$-[M]\omega^2\{U\}\cos(\omega t - \phi) + [K]\{U\}\cos(\omega t - \phi) = \{0\} \quad (3.98)$$

A Eq. (3.98) tem como consequência o problema do auto-valor na

forma

$$[K]\{U\} = \omega^2[M]\{U\} \tag{3.99}$$

Embora o vetor {U} seja N-dimensional, o sistema pode não possuir N graus elásticos de liberdade. Isto é tal porque os elementos U_j (j = 1,2,...,N) podem não ser todos independentes, ou porque alguns dos elementos podem ser zero. Isto provar-se-á ser vantajoso para distinguir entre dois casos, aquele de um sistema sem restrição daquele outro com restrição. Considerando primeiramente um sistema sem restrição, nós relembramos que isto é realmente o caso para o qual a nossa formulação original é válida, pois todos os elementos individuais discretos foram considerados como sem restrições. Como resultado, a matriz [K] é singular e o sistema é semi-definido (veja Apêndice C), com a implicação física de que é possível o movimento de corpo rígido do sistema. Contudo, por causa do interesse normalmente estar nos modos elásticos de deformação, é conveniente eliminar os modos de corpo rígido da formulação dos problemas. Para um sistema completamente sem restrição, existem em qualquer lugar, de um a seis modos de corpo rígido, de modo que matematicamente os elementos U_j são sujeitos a "c" equações obrigatórias, onde "c" é uma integral variando de 1 a 6, dependendo da natureza do sistema. Para um sistema sem restrição em movimento axial, ou movimento rotacional em torno de um eixo simples, existe somente um modo de corpo rígido, ao passo que para um sistema sem restrição no espaço existe um máximo de seis modos de corpo rígido que podem ser identificados como três translações e três rotações. Por outro lado, se o sistema é restrito de tal modo que o movimento é impedido para um número dado de direções, então alguns dos elementos de {U} são zero, dependendo da maneira na qual o sistema é suportado. Denominando por "c" o número de elementos zero, ou o número de modos de corpo rígido, onde no segundo caso "c" deve variar de 1 a 6, nós concluimos que "o grau elástico de liberdade de um sistema" é

$$n = N - c \tag{3.100}$$

Deve ser reconhecido, no entanto, que os dois casos são inteira

mente diferentes, e por esta razão nós devemos discutí-los separadamente.

Vamos considerar primeiramente o caso no qual o sistema é sem restrição, e assumir que um dado número de vetores {U} são tais que da Eq.(3.99)

$$[K]\{U\} = \{0\} \tag{3.101}$$

Por causa destes mesmos vetores {U} os produtos $[M]\{U\}$ não são iguais ao vetor nulo. Segue-se da Eq.(3.99) que para cada vetor {U} satisfazer a Eq. (3.101), um auto-valor ω^2 igual a zero deve ser correspondido. É lógico que os vetores {U} que satisfazem a Eq. (3.101) podem ser identificados como os graus de liberdade do sistema de corpo rígido, um fato típico de sistemas semi-definidos (veja Apêndice C). Assumindo que existem "c" vetores {U} satisfazendo a Eq.(3.101), o problema do auto-valor (3.99) pode ser satisfeito somente se um autovalor ω^2 zero tiver multiplicidade "c", de tal modo que o problema do auto-valor (3.99) é satisfeito por "c" auto-vetores $\{U^{(1)}\},\{U^{(2)}\}, \ldots,\{U^{(c)}\}$, com correspondentes auto-valores $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \ldots = \omega_c^2 = 0$. Um problema de auto-valor do tipo (3.99) possui em geral N soluções, consistindo de um sistema de auto-vetores $\{U^{(r)}\}$ e auto-valores associados ω_r^2 (r = 1,2,...,N). Além disso, os auto-vetores são ortogonais com respeito à matriz massa [M], de tal modo que para dois auto valores distintos ω_r^2 e ω_s^2 nós temos

$$\{U^{(r)}\}^T[M]\{U^{(s)}\} = 0, \qquad r \neq s \tag{3.102}$$

Quando dois (ou mais) auto-valores são iguais, qualquer combinação linear de auto-vetores correspondendo ao auto-valor em questão é também um auto-vetor.

Isto significa que os auto-vetores representando os modos de corpo rígido podem ainda ser escolhidos para satisfazer a Eq. (3.102), embora para cada um deles exista um auto-valor nulo correspondente, e por isso os auto-valores não são distintos. Para resolver para os modos elásticos, vamos eliminar os modos de corpo rígido do problema do auto-valor (3.99). Com esta finalidade, nós usamos o fato de que os auto-vetores, incluindo aqueles representando o movimento de corpo rígido, são ortogonais com respei

to à matriz massa. Daí, podemos escrever "c" condições de ortogonalidade na forma

$$\{U^{(r)}\}^T [M] \{U\} = 0, \quad r = 1,2,\ldots,c \tag{3.103}$$

as quais podem ser consideradas como "c" equações obrigatórias, onde os vetores $\{U^{(r)}\}$ (r = 1,2,..., c) são assumidos ser conhecidos. As Eqs. (3.103) podem ser resolvidas para "c" destes elementos U_j (j = 1,2,...,c) em função dos restantes n = N - c elementos. Então, usando o mesmo procedimento como aquele do Apêndice C, nós podemos construir uma matriz [c] constante obrigatória de dimensões N x n tal que

$$\{U\}_c = [c] \{U\} \tag{3.104}$$

onde $\{U\}_c$ representa um vetor N - dimensional obrigatório e $\{U\}$ um n-dimensional sem obrigatoriedade. Como os vetores $\{U\}$ na Eq.(3.99) são vistos com obrigatoriedade, escrevemos a energia cinética e potencial como no Apêndice C na forma

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{U}\}_c^T [M]\{\dot{U}\}_c = \frac{1}{2}\{\dot{U}\}^T [c]^T [M][c]\{\dot{U}\} = \frac{1}{2}\{\dot{U}\}^T [M']\{\dot{U}\} \tag{3.105}$$

e

$$V = \frac{1}{2}\{U\}_c^T [K]\{U\}_c = \frac{1}{2}\{U\}^T [c]^T [K][c]\{U\} = \frac{1}{2}\{U\}^T [K'][U] \tag{3.106}$$

onde

$$[M'] = [c]^T [M][c], \quad [K'] = [c]^T [K][c] \tag{3.107}$$

são matrizes massa e rigidez reduzidas de ordem n x n. Isto nos possibilita escrever o problema de auto-valor reduzido

$$[K']\{U\} = \omega^2 [M']\{U\} \tag{3.108}$$

fornecendo n auto-vetores $\{U^{(r)}\}$ a não nulos auto-valores associados ω_r^2 (r = c + 1, c + 2,..., N) correspondendo aos modos elásticos de deformação, onde os auto-vetores possuem somente n ele

mentos. Para obter todos os N deslocamentos elásticos, nós simplesmente usamos a Eq.(3.104) e escrevemos

$$\{U^{(r)}\}_c = [C]\ \{U^{(r)}\},\quad r = c+1,\ c+2,\ldots,\ N \tag{3.109}$$

Agora vamos voltar a nossa atenção para o caso no qual o sistema é restrito por meio de suportes os quais impedem o movimento de translação ou rotação de um dado número de pontos. Conforme a notação da Sec. 3.4, vamos denotar por $\{U\}_0 = \{0\}$ o vetor nulo c-dimensional correspondendo a translação ou rotação zero das juntas e por $\{U\}_1$ o vetor n-dimensional consistindo dos elementos restantes, de tal modo que neste caso o vetor obrigatório é

$$\{U\}_c = \begin{Bmatrix} \{U\}_0 \\ \cdots \\ \{U\}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \cdots \\ \{U\}_1 \end{Bmatrix} \tag{3.110}$$

As matrizes $[M]$ e $[K]$ podem ser repartidas consequentemente, escrevendo

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{00} & \vdots & [M]_{01} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [M]_{10} & \vdots & [M]_{11} \end{bmatrix},\quad [K] = \begin{bmatrix} [K]_{00} & \vdots & [K]_{01} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [K]_{10} & \vdots & [K]_{11} \end{bmatrix} \tag{3.111}$$

Segue-se que da Eq.(3.110) o vetor velocidade $\{\dot{U}\}_c$ é

$$\{\dot{U}\}_c = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \cdots \\ \{\dot{U}\}_1 \end{Bmatrix} \tag{3.112}$$

Inserindo a matriz $[M]$ da Eq.(3.111) e a Eq.(3.112) na Eq.(3.105) escrevemos

$$T = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \cdots \\ \{\dot{U}\}_1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [M]_{00} & \vdots & [M]_{01} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [M]_{10} & \vdots & [M]_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \cdots \\ \{\dot{U}\}_1 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\{0\}^T \vdots \{\dot{U}\}_1^T\right) \begin{Bmatrix} [M]_{01}\{\dot{U}\}_1 \\ \cdots \\ [M]_{11}\{\dot{U}\}_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\ \{\dot{U}\}_1^T [M]_{11} \{\dot{U}\}_1 \tag{3.113}$$

Introduzindo agora a Eq.(3.110) e a matriz $[K]$ da Eq.(3.111) na

Eq. (3.106) temos

$$V = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\{0\}\\ \cdots\\ \{U\}_1\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}[K]_{00} & \vdots & [K]_{01}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ [K]_{10} & \vdots & [K]_{11}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{0\}\\ \cdots\\ \{U\}_1\end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(\{0\}^T \vdots \{U\}_1^T)\begin{Bmatrix}[K]_{01}\{U\}_1\\ \cdots\\ [K]_{11}\{U\}_1\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\{U\}_1^T[K]_{11}\{U\}_1 \quad (3.114)$$

comparando as Eqs.(3.105) e (3.106) com as Eqs. (3.113)e(3.114), respectivamente, temos

$$[M'] = [M]_{11}\ , \quad [K'] = [K]_{11} \quad (3.115)$$

de tal modo que o problema reduzido do auto-valor tem de novo a forma (3.108), mas desta vez não existe nenhum modo de corpo rígido a ser considerado. Daí, as matrizes massa e rigidez reduzidas são obtidas simplesmente ignorando as primeiras "c" linhas e colunas nas matrizes [M] e [K], ao invés de calcular o produto triplo de matrizes (3.107).

A solução do problema do auto-valor da forma (3.108) é uma questão à parte e não será apresentada neste trabalho.

Em alguns casos, o sistema é suportado de uma maneira que impede alguns, mas não todos, os modos de corpo rígido. Neste caso, a formulação pode ser efetuada combinando apropriadas características de dois casos distintos mostrados acima.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO 3

[1] Kamal, M. and Walfe, J., Finite Element Analysis of Vibration, ASME Monograph, Sixth Vibration Conf., Chicago, IL (Sept 1977)

[2] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method, McGraw - Hill Boock Co., NY (1972).

[3] Levy, S. and Wilkinson, J.C., The Component Element Method in Structural Dynamics, McGraw-Hill Boock Co., NY (1976).

[4] Mierovitch, L., Element of Vibration Analysis, McGraw-Hill Boock Co., NY (1975).

[5] Mierovitch, L., Analytical Methods in Vibrations, Macmillan Co., NY (1967).

[6] Pilkey, W.D. and Pilkey, B., Shock and Vibration Computer Programs: Reviews and Summaries, SVIC (1975).

CAPÍTULO 4 - TÉCNICA E PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

4.1 - Introdução

Para complementar o objetivo deste trabalho, foi necessário ensaiar um corpo de prova - uma viga engastada-livre em vibração transversal.

Para se realizar a experimentação, foi projetado e construído um corpo de prova, cujas condições geométricas e de apoio são equivalentes às hipóteses adotadas em alguns dos modelos matemáticos considerados nos Capítulos 2 e 3.

Através das medidas das velocidades máximas de vibração em uma posição pré-estabelecida do corpo de prova, foram anotadas as frequências naturais correspondentes que serão, no Capítulo 5, comparadas com as frequências naturais obtidas pelos métodos teóricos, conforme apresenta a Tab. 5.6.

4.2 - Descrição da Experiência

A base e os dispositivos de fixação do corpo de prova (veja Fig. 4.1) foram projetados e construidos de tal forma que satisfizessem, à primeira vista, a condição de que as vibrações externas não interferissem nas leituras das medidas e que o corpo ensaiado apresentasse nesta fixação um engastamento perfeito, ao passo que a outra extremidade continuasse livre.Mas, no entanto, este tipo de engastamento não foi possível conseguir quando a viga era submetida às baixas frequências de excitação. A chapa de aço (veja Fig. 4.2) constituindo a base de engastamento apresentou vibrações para baixas frequências. Portanto, para estas frequências a hipótese adotada anteriormente, ou seja, engastamento perfeito entre a base e o corpo de prova, foi prejudicada.

No entanto, a chapa de aço se comportou, para as altas frequências de excitação, quase como se fosse uma base rígida com grande massa inercial, condição ideal de que a única elasticidade e massa em jogo fosse, durante a experimentação, o próprio corpo de prova. Em assim sendo, não houve grandes vibra

ções externas que interferissem no sistema de medidas.

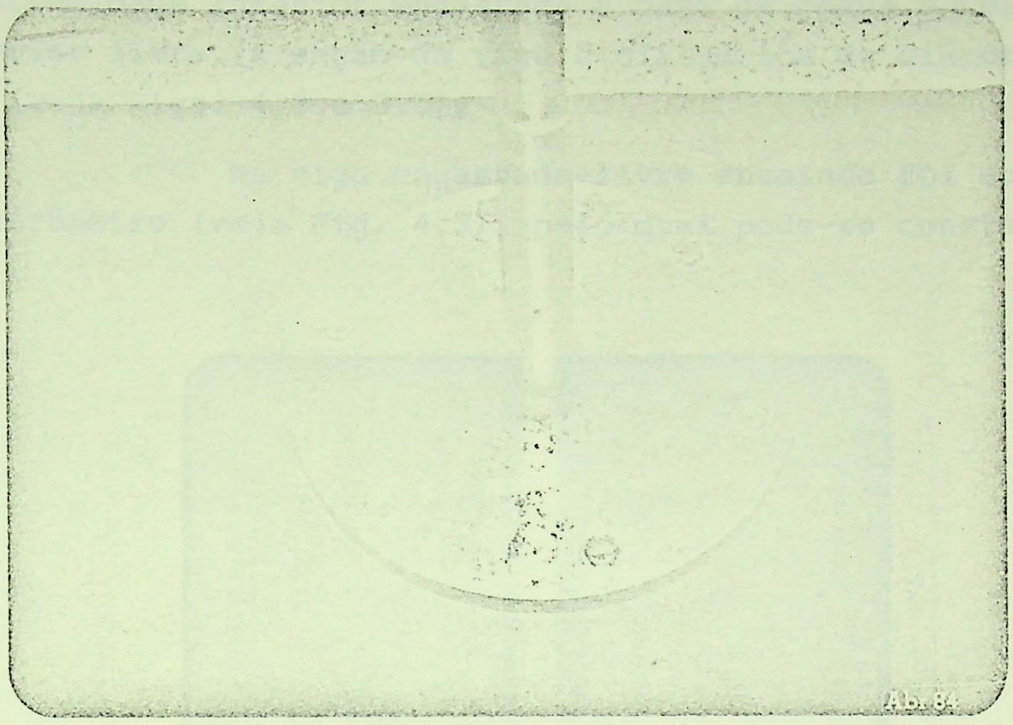


FIG. 4.1 - ENGASTAMENTO DO CORPO DE PROVA

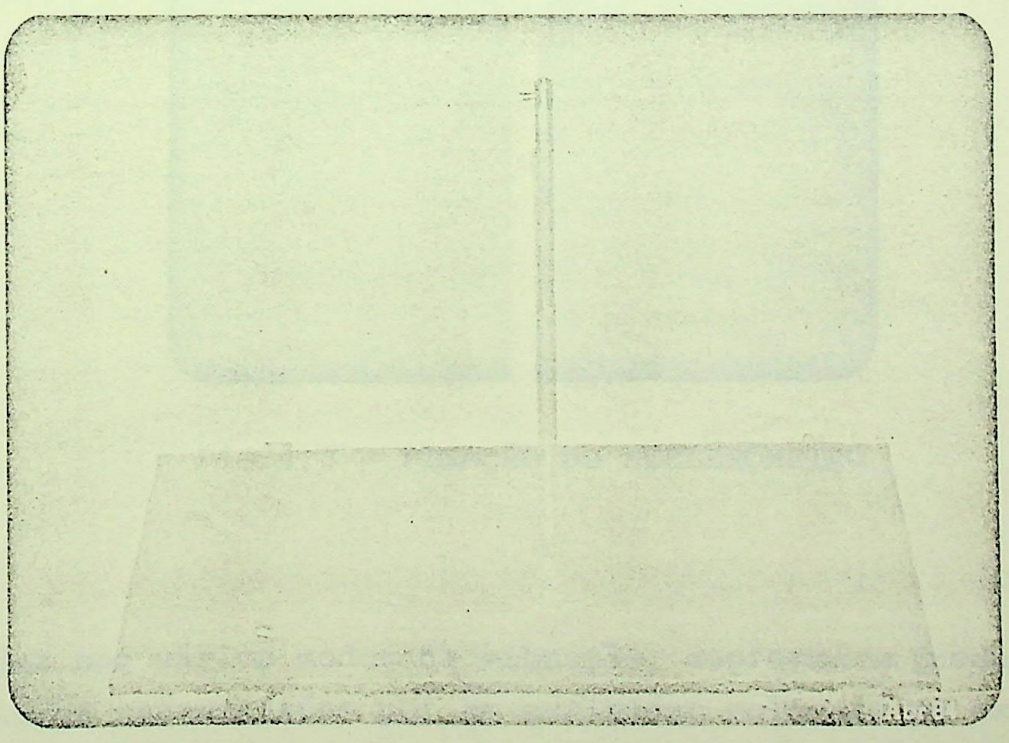


FIG. 4.2 - BASE E CORPO DE PROVA

O corpo de prova foi construído observando-se a uma das condições de apoio supostas no desenvolvimento teórico da formulação matemática. Em assim sendo, a viga ensaiada teve a extremidade inferior engastada à base de chapa e a extremidade superior livre. A seção da viga é cilíndrica de diâmetro variável (veja Figs. 4.2 e 5.5).

Na viga engastada-livre ensaiada foi acoplado um acelerômetro (veja Fig. 4.3), pelo qual pode-se constatar as vi

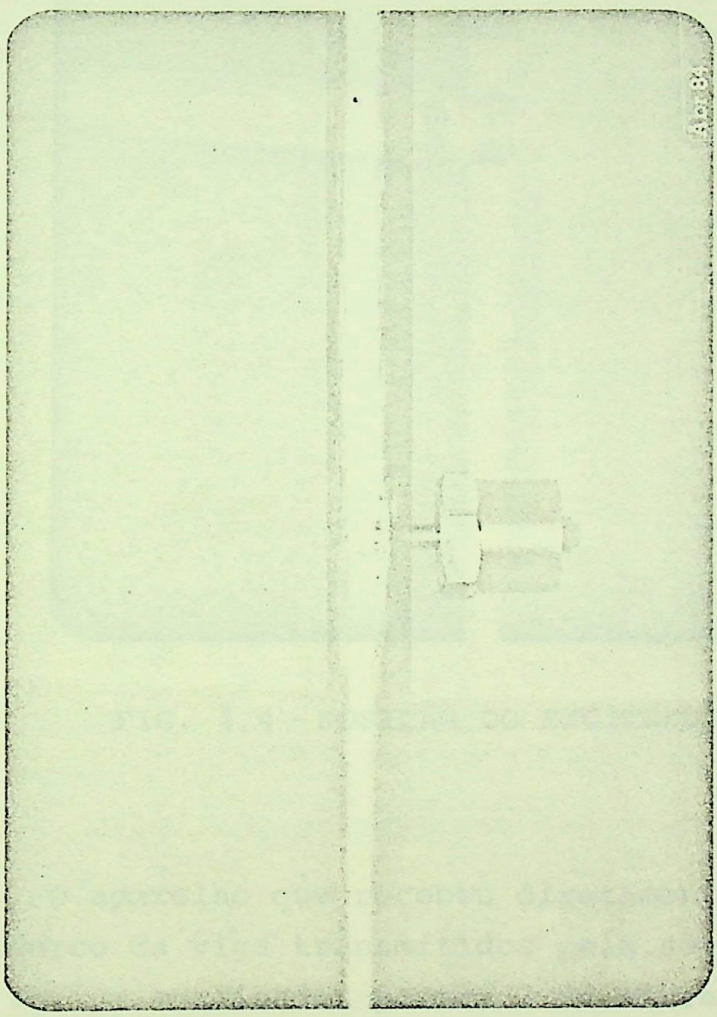


FIG.4.3 - FIXAÇÃO DO ACELERÔMETRO

brações nos vários modos de vibração, conforme as frequências de excitação transmitidas por um excitador colocado na extremidade livre da viga, conforme mostra a Fig. 4.4. O excitador, por sua vez, recebeu estas frequências de um gerador de sinais juntamen

te com um amplificador de potência.

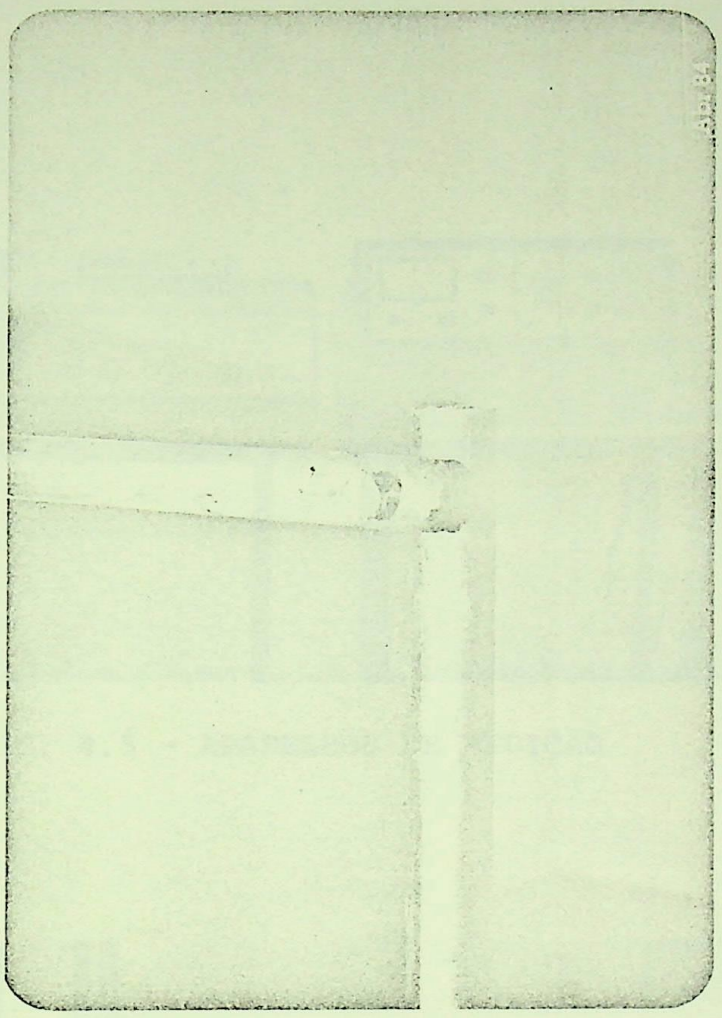


FIG. 4.4 - POSIÇÃO DO EXCITADOR

O aparelho que recebeu diretamente os efeitos do movimento dinâmico da viga transmitidos pela sensibilidade do acelerômetro foi um analisador portátil de vibração que é composto por um pré-amplificador, um medidor de nível e um filtro. Estes aparelhos são mostrados na Fig. 4.5 juntamente com o excitador.

A vista geral do conjunto formando um banco de ensaios é mostrada na Fig. 4.6. Este conjunto é constituido em sequência da operação por um gerador de sinais, um amplificador de potência, um excitador de ímã permanente, um acelerômetro, um corpo de prova com base rígida tipo engastamento devido os dispositivos de fixação, um medidor de nível de vibração e finalmen-

te por um filtro passa-faixa sintonizável.

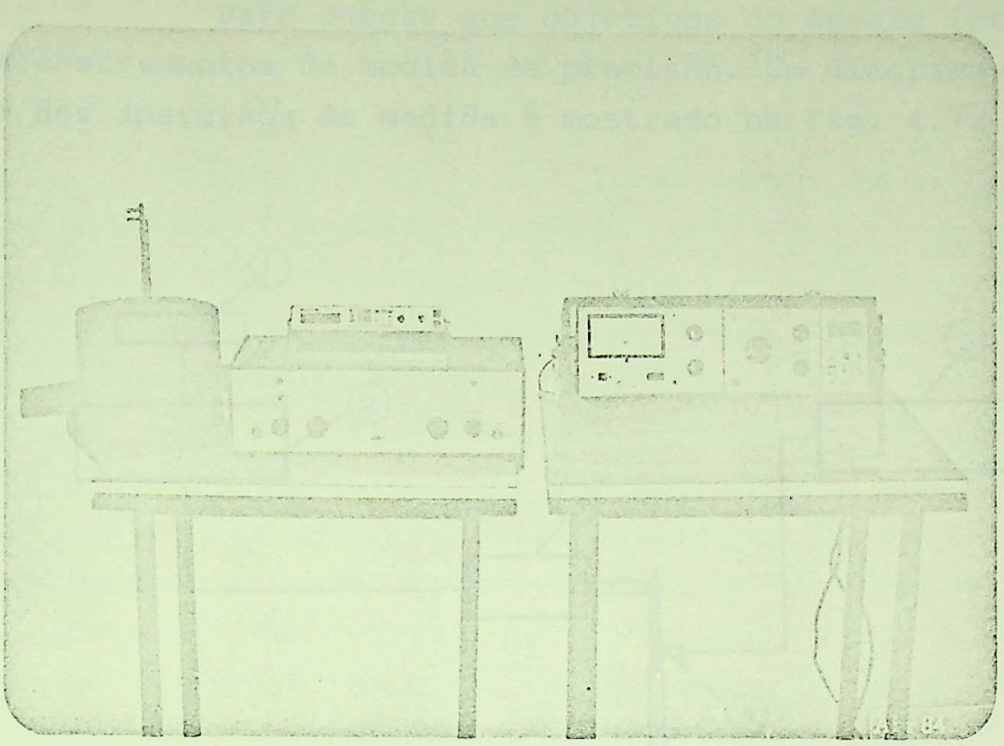


FIG. 4.5 - APARELHOS DE MEDIÇÃO

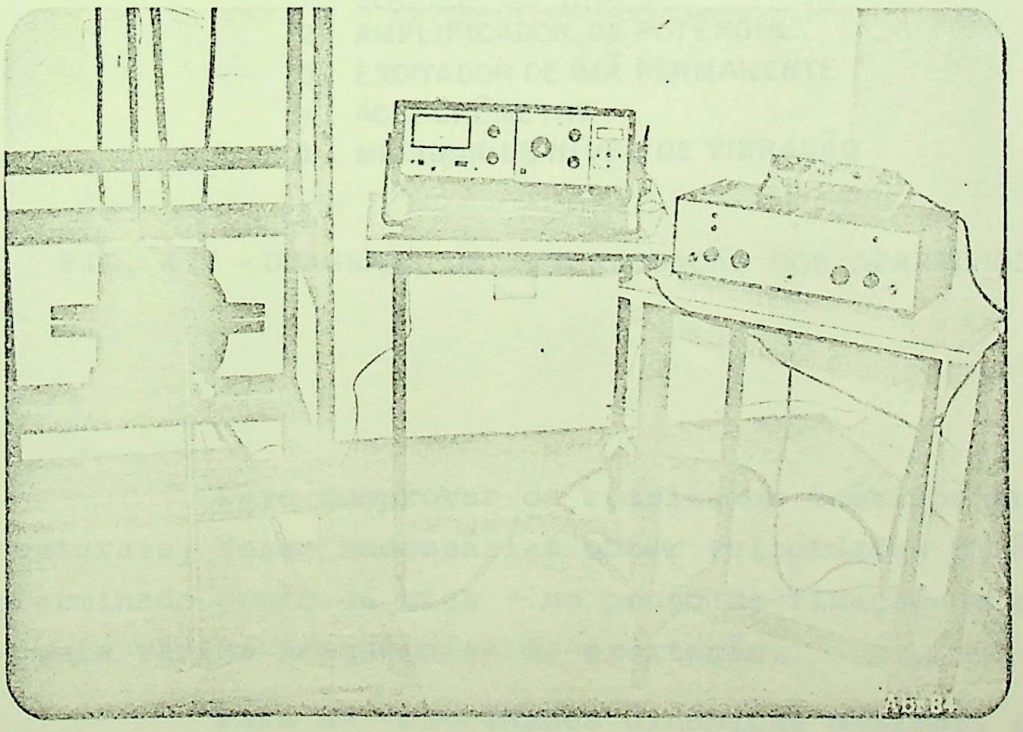
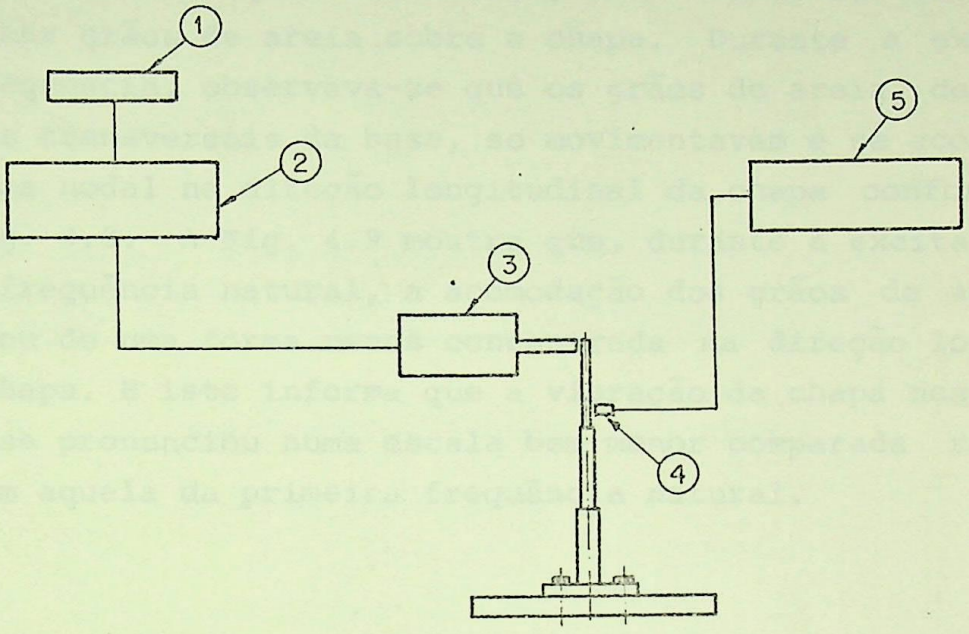


FIG. 4.6 - BANCO DE ENSAIOS

4.3 - Instrumentação e Medidas

Para chegar aos objetivos do ensaio foram utilizados instrumentos de medida de precisão. Um diagrama de interligação dos aparelhos de medida é mostrado na Fig. 4.7.



1 - GERADOR DE SINAIS
2 - AMPLIFICADOR DE POTÊNCIA
3 - EXCITADOR DE IMÃ PERMANENTE
4 - ACELERÔMETRO
5 - MEDIDOR DE NÍVEL DE VIBRAÇÃO

FIG. 4.7 - DIAGRAMA DE INTERLIGAÇÃO DOS APARELHOS

Para comprovar os resultados teóricos das frequências naturais, foram necessárias obter velocidades dinâmicas em um determinado ponto da viga - no ponto da fixação do acelerômetro - para várias frequências de excitação.

Para as velocidades dinâmicas máximas, anotavam-se as frequências de excitação correspondentes, pois estas eram as frequências naturais da viga. As velocidades dinâmicas, máximas ou não, foram captadas através do acelerômetro e lidas em um

medidor de nível de vibração.

Convêm salientar aqui, que a medida da primeira frequência natural registrada teve grandes influências das vibrações externas da chapa da base.

Para se ter uma idéia da magnitude da vibração da base na primeira frequência natural, foi necessário inicialmente espalhar grãos de areia sobre a chapa. Durante a excitação nesta frequência, observava-se que os grãos de areia, devido às vibrações transversais da base, se movimentavam e se acomodavam numa faixa nodal na direção longitudinal da chapa conforme mostra a Fig. 4.8. A Fig. 4.9 mostra que, durante a excitação na segunda frequência natural, a acomodação dos grãos de areia se apresentou de uma forma menos concentrada na direção longitudinal da chapa. E isto informa que a vibração da chapa nesta frequência se pronunciou numa escala bem menor comparada relativamente com aquela da primeira frequência natural.

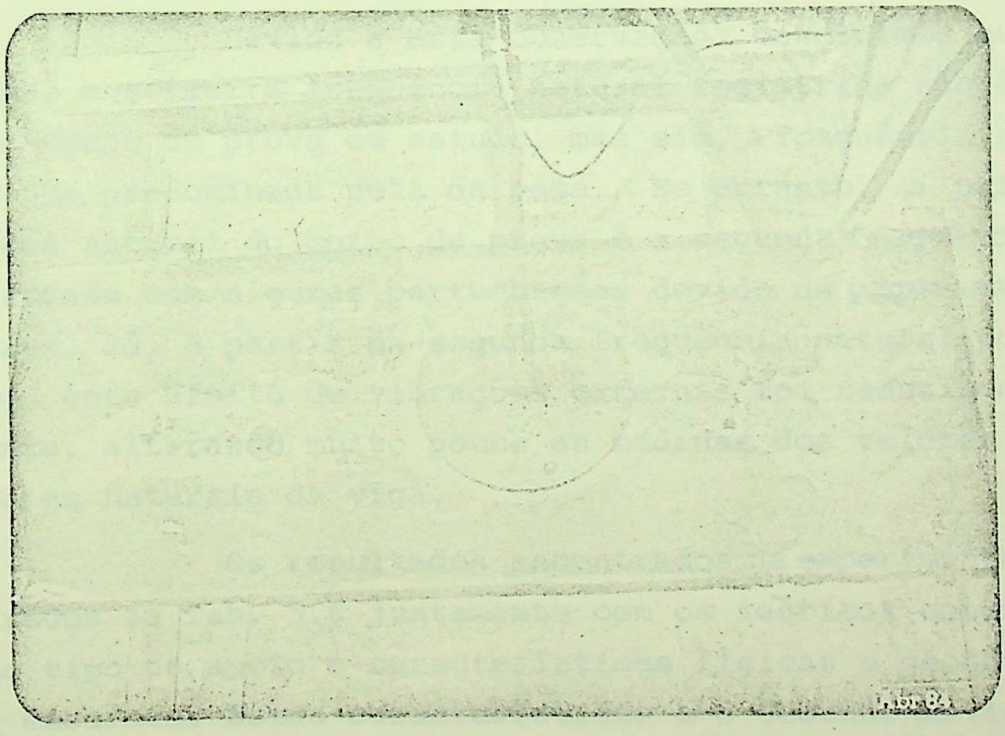


FIG. 4.8 - EXCITAÇÃO NA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL REGISTRADA

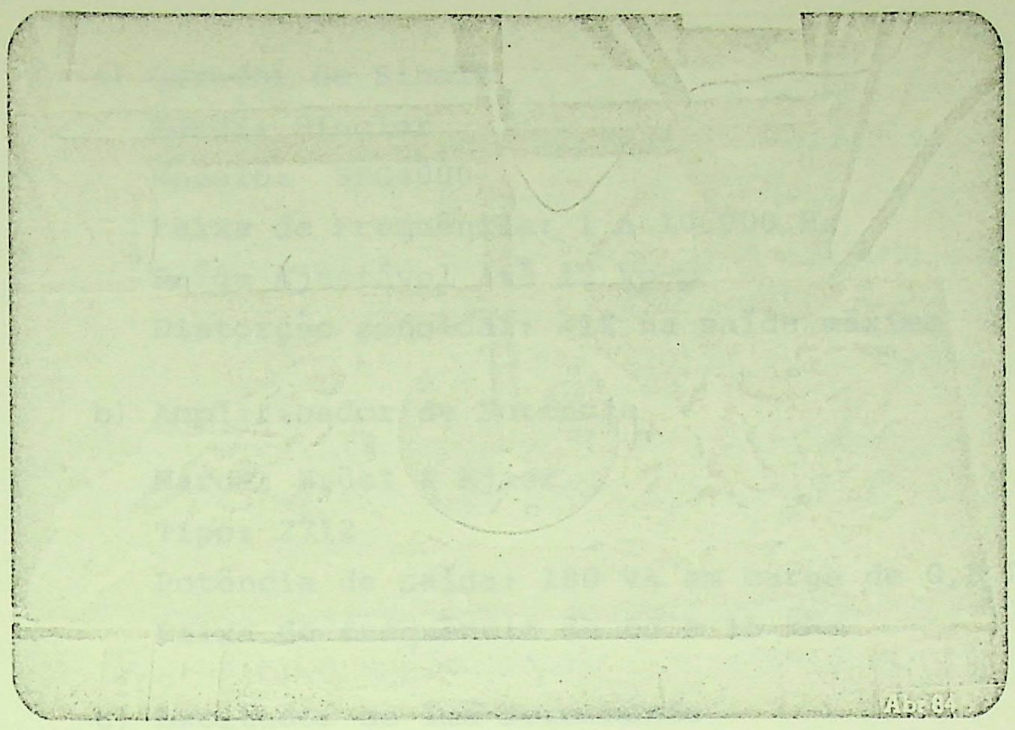


FIG. 4.9 - EXCITAÇÃO NA SEGUNDA FREQUÊNCIA NATURAL REGISTRADA

Devido a esta observação, concluímos que, na realidade, a primeira frequência natural registrada não é a primeira do corpo de prova em estudo, mas sim, a frequência natural do conjunto, predominada pela da base. No entanto, a primeira frequência natural do corpo de prova é a segunda frequência natural registrada com algumas perturbações devido às pequenas vibrações da base. Já, a partir da segunda frequência natural do corpo de prova, este efeito de vibrações externas foi reduzindo gradativamente, alterando muito pouco as medidas dos valores das frequências naturais da viga.

Os resultados encontrados na experimentação serão mostrados na Tab. 5.6 juntamente com os teóricos considerando o mesmo tipo de apoio e características físicas e geométricas da viga ensaiada. Estas características e o desenho da viga em questão são apresentados na Fig. 5.5.

Os aparelhos utilizados no ensaio assim como suas características são descritos a seguir:

a) Gerador de Sinais

Marca: Sincler
Modelo: SFG4000
Faixa de Frequência: 1 a 10.000 Hz
Saída Ajustável até 12 Vp-p
Distorção senoidal: <1% na saída máxima

b) Amplificador de Potência

Marca: Brüel & Kjaer
Tipo: 2712
Potência de saída: 180 VA em carga de 0,8 Ω
Faixa de frequência de cc a 15 kHz

c) Excitador de Ímã Permanente

Marca: Brüel & Kjaer
Tipo: 4808
Gama de frequência: 5 a 10.000 Hz
Pico de força senoidal: 112 N(25 ℓbf)*
Máx. pico de acel. da mesa livre: 700* m/s^2
Máx. deslocamento, pico a pico: 12,7 mm(0,5 in)
Máx. corrente de entrada: 15*A
* forçando-se a refrigeração a ar da bobina excitadora atinge a 187 N(42 ℓbf), 1170 m/s^2 e 25 A, respectivamente.

d) Acelerômetro

Marca: Brüel & Kjaer
Tipo: 4370
Sensibilidade de Carga: 10±2% (pC/ms^{-2})
Sensibilidade de Tensão: ∿10 (mV/ms^{-2})
Faixa Freq. com limite +10% : 0,2 a 6.000 Hz
Ressonância "Montada": 18 kHz
Massa: 54 g

e) Medidor de Nível de Vibração

Marca: Brüel & Kjaer
Tipo: 2511

Faixa Freq.: 0,3 Hz a 15 kHz· p/ aceleração
1 Hz a 15 kHz· p/ velocidade
1 Hz a 2,5 kHz p/ deslocamento

Gama Medição*: 0,002 a 100 m/s^2 p/aceleração
0,02 a 1000 mm/s^2 p/velocidade
0,0003 a 10 mm p/deslocamento

* Com acelerômetro tipo 4370 e para medições em faixa larga. Níveis mais baixo são conseguidos com o uso de filtro externo.

· Limite superior de frequência depende do acelerômetro usado. Com acelerômetro tipo 4370 é +10% a 6 kHz.

CAPÍTULO 5 - VALORES DAS FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DE VIGAS E EIXOS.

5.1 - Considerações Gerais

O método das Matrizes de Transferência e o método dos Elementos Finitos, estudados nos capítulos 2 e 3, respectivamente, são aqui aplicados, para se determinar as frequências naturais de vibração e os modos de vibração de vigas e eixos.

Trataremos, para exemplificar, de dois casos de vibração: transversal e torcional.

O problema da vibração transversal ou flexional será resolvido numericamente para vigas de seção constante e com seção variável, ao passo que, a solução numérica do problema da vibração torcional será encontrada considerando eixos de seção constante e sistemas constituídos de eixos e volantes.

Alguns computadores, os mais sofisticados, são também uma ferramenta muito importante na solução dos problemas de vibração; portanto, a utilização destes levará-nos a uma solução rápida e precisa. Os resultados obtidos neste trabalho foram conseguidos utilizando o computador HP-3000 da Escola Federal de Engenharia de Itajubá. Os programas Nº 1 e Nº 2 fornecem os resultados da solução dos problemas da vibração transversal de vigas e da vibração torcional de eixos, respectivamente, utilizando o método das Matrizes de Transferência. O programa Nº 3 fornece os resultados da solução do problema da vibração transversal de vigas utilizando o método dos Elementos Finitos.Na solução do problema da vibração torcional de eixos através do método dos Elementos Finitos foi utilizado o computador apenas para determinar os auto-valores e os auto-vetores das matrizes dinâmicas. Os programas Nº 1 e Nº 2 foram elaborados e executados na linguagem BASIC, já o programa Nº 3 na linguagem FORTRAN (veja Apêndice D).

5.2 - Solução do problema da vibração transversal de vigas ou eixos pelo mëtodo das Matrizes de Transferência - programa Nº 1.

Nesta seção apresentamos as frequências naturais e os modos naturais de vibração transversal de vigas obtidos pelo método das Matrizes de Transferência.

Os resultados foram obtidos através do computador (programa Nº 1), considerando-se quatro tipos de apoio das vigas: viga bi-apoiada, viga bi-engastada, viga engastada - livre e viga engastada - apoiada.

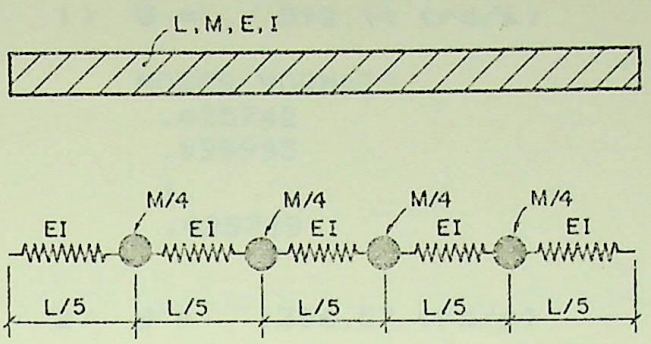


FIG. 5.1 - VIGA Nº 1 (SEÇÃO CONSTANTE) E MODELO COM QUATRO MASSAS PONTUAIS.

CARACTERISTICAS DO TRECHO 1

L(i)= 4.00 m , M(i)= 1000.0000 Kg , E(i)= 2.0E+10 N/m2
I(i)= 2.1E-03 m4 e N(i)= 4

FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA BI-APOIADA

1) W = 226.12 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.618035
1
.999997
.61803

2) W = 902.33 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.999993
.618026
-.618036
-1

3) W = 1997.46 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1
-.618003
-.618073
.999989

4) W = 3290.05 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.617426
-.999316
1
-.619274

FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA BI-ENGASTADA

1) W = 512.11 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.425742
.999995
i
.425749

2) W = 1396.57 (rd/s)

MODOS NORMAIS
i
.852394
-.852403
-.999984

3) W = 2591.45 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.999996
-.425366
-.426263
i

4) W = 3617.28 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.850645
-.998688
i
-.855422

FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE

1) W = 100.60 (rd/s)

MODOS NORMAIS
9.25297E-02
.328083
.646959
i

2) W = 648.13 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.505206
i
.543804
-.726642

3) W = 1830.46 (rd/s)

MODOS NORMAIS
i
.333935
-.972382
.427037

4) W = 3297.97 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1
-.96925
.619881
-.174745

FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA ENGASTADA-APOIADA

1) W = 353.14 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.302793
.801606
1
.68717

2) W = 1138.38 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.77396
.945557
-.305163
-1

3) W = 2301.19 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1
-.162883
-.756912
.851139

4) W = 3481.87 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.918115
-1
.866846
-.499638

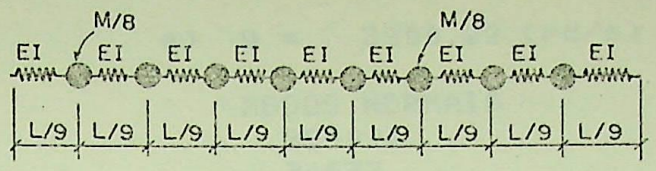


FIG.. 5.2 - MODELO COM OITO MASSAS PONTUAIS
PARA O SISTEMA DA VIGA Nº 1

CARACTERISTICAS DO TRECHO 1

L(1)= 4.00 m , M(1)= 1000.0000 Kg , E(1)= 2.0E+10 N/m2
I(1)= 2.1E-03 m4 e N(1)= 8

FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA BI-APOIADA

1) W = 238.37 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.347297
.652704
.879386
1
.999999
.879384
.652701
.347295

2) W = 953.32 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.652703
.999998
.87938
.34729
-.347302
-.879385
-1
-.652712

3) W = 2143.15 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.999852
.999816
-7.08004E-05
-.999884
-.999763
1.64772E-04
1
.999835

```
4)  W =   3800.22 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     .999094
     .34633
    -.879039
    -.651042
     .653409
     .877462
    -.35
    -i

5)  W =   5915.49 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     .987063
    -.35174
    -.861719
     .658845
     .627232
    -.882143
    -.314286
     i

6)  W =   8819.56 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     .83876
    -.941249
     .217504
     .697286
    -i
     .43804
     .614793
    -.491835

7)  W =  10038.12 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     .721257
    -i
     .665223
     7.77683E-02
    -.773135
     .989613
    -.69855
     0

8)  W =  13932.56 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     9.60537E-02
    -.197382
     .30955
    -.438639
     .591146
    -.770833
     1
     0
```

FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA BI-ENGASTADA

1) W = 540.33 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.147905
.470562
.798945
i
.999999
.798942
.47056
.147907

2) W = 1488.67 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.377274
.928536
.999988
.429184
-.429271
-i
-.928461
-.37712

3) W = 2911.63 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.597479
.999537
.261617
-.76765
-.767698
.261605
i
.598839

4) W = 4861.63 (rd/s)

MODOS NORMAIS
i
.823462
-.844452
-.768184
.867808
.739472
-.933067
-.939415

5) W = 6363.03 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.98648
.285914
-i
.223076
.89411
-.661433
-.578302
.925284

6) W = 8456.58 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.88292
-.286877
-.506958
.822266
-.345703
-.5
.625
-1

7) W = 10533.04 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.184993
-.151259
.051796
7.56836E-02
-.162109
.179688
0
1

8) W = 13871.21 (rd/s)

MODOS NORMAIS
8.86328E-03
-1.26391E-02
1.73788E-02
-2.29034E-02
.029541
-3.51563E-02
.0625
-1

FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE

1) W = 95.51 (rd/s)

MODOS NORMAIS
2.50912E-02
9.46302E-02
.200088
.333174
.486087
.651827
.824558
1

2) W = 603.26 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.170667
.526965
.853155
.983132
.828801
.391052
-.254916
-1

```
3)  W =    1700.27 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     .428511
     i
     .958105
     .224591
    -.642151
    -.930858
    -.342495
     .829283

4)  W =    3350.29 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     .683665
     i
     5.41015E-03
    -.951708
    -.488808
     .679611
     .750092
    -.624225

5)  W =    5469.79 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     .940919
     .561366
    -.920087
    -.332178
     i
     .123564
    -.975842
     .354851

6)  W =    8169.92 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     i
    -.248409
    -.666503
     .905478
    -.210326
    -.716185
     .828359
    -.552239

7)  W =   19741.13 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     5.82404E-03
    -1.23788E-02
     2.77367E-02
    -6.23779E-02
     .142578
    -.3125
     i
     0
```

8) W = 27839.68 (rd/s)

MODOS NORMAIS
3.47038E-06
-9.21893E-06
2.60845E-05
-7.34329E-05
2.13623E-04
0
.0625
1

FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA ENGASTADA-APOIADA

1) W = 372.37 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.108242
.35989
.649787
.886047
1
.954343
.747037
.40964

2) W = 1206.34 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.302233
.800517
1
.691281
1.29851E-02
-.656819
-.934599
-.661695

3) W = 2513.31 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.533291
1
.488895
-.529776
-.918494
-.240864
.716941
.848119

4) W = 4281.49 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.818426
.863565
-.503777
-.914177
.352865
.977941
-.181373
-1

```
5)  W =    6342.68 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     .985525
     .292205
    -i
     .211063
     .901916
    -.641523
    -.57665
     .922639

6)  W =   18477.74 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     2.25588E-02
    -4.52237E-02
     9.49843E-02
    -.200521
     .420139
    -i
     0
     0

7)  W =   21716.43 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     7.99885E-05
    -1.83146E-04
     4.44233E-04
    -1.08147E-03
     2.68555E-03
    -5.85938E-03
     .03125
     1

8)  W =   37192.51 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     3.38152E-08
    -1.00510E-07
     3.18047E-07
    -1.04308E-06
     3.81470E-06
     0
    -7.81250E-03
    -i
```

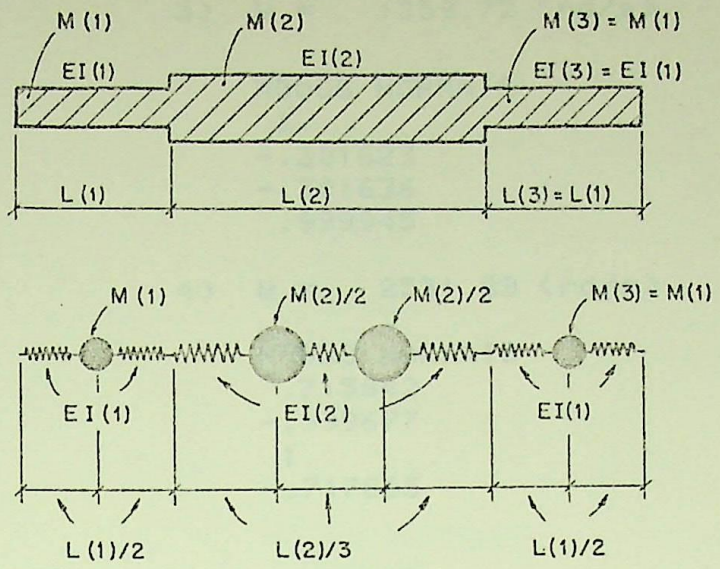


FIG. 5.3 - VIGA Nº 2 (SEÇÃO VARIÁVEL) E MODELO COM QUATRO MASSAS PONTUAIS

CARACTERISTICAS DO TRECHO 1

L(1)= 1.00 m , M(1)= 75.0000 Kg , E(1)= 2.0E+10 N/m2
I(1)= 2.0E-04 m4 e N(1)= 1

CARACTERISTICAS DO TRECHO 2

L(2)= 2.00 m , M(2)= 250.0000 Kg , E(2)= 2.0E+10 N/m2
I(2)= 1.0E-03 m4 e N(2)= 2

CARACTERISTICAS DO TRECHO 3

L(3)= 1.00 m , M(3)= 75.0000 Kg , E(3)= 2.0E+10 N/m2
I(3)= 2.0E-04 m4 e N(3)= 1

FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA BI-APOIADA

1) W = 191.44 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.502717
1
.999998
.502712

2) W = 736.77 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1
.429789
-.429794
-.999995

3) W = 1359.72 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1
-.301623
-.301636
.999945

4) W = 2531.89 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.715842
-.999677
1
-.717865

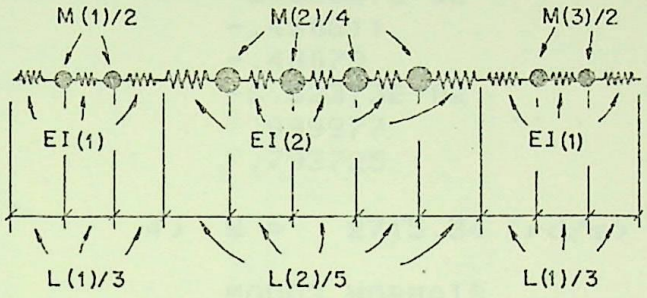


FIG. 5.4 - MODELO COM OITO MASSAS PONTUAIS PARA O SISTEMA DA VIGA Nº 2

CARACTERISTICAS DO TRECHO 1

L(1)= 1.00 m , M(1)= 75.0000 Kg , E(1)= 2.0E+10 N/m2
I(1)= 2.0E-04 m4 e N(1)= 2

CARACTERISTICAS DO TRECHO 2

L(2)= 2.00 m , M(2)= 250.0000 Kg , E(2)= 2.0E+10 N/m2
I(2)= 1.0E-03 m4 e N(2)= 4

CARACTERISTICAS DO TRECHO 3

L(3)= 1.00 m , M(3)= 75.0000 Kg , E(3)= 2.0E+10 N/m2
I(3)= 2.0E-04 m4 e N(3)= 2

FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA BI-APOIADA

1) W = 193.77 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.343232
.632408
.936797
.999998
1
.936003
.632417
.34324

2) W = 697.63 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.62264
.999998
.661292
.234346
-.234356
-.6613
-1
-.62264

3) W = 1502.11 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.793618
1
-6.62867E-02
-.480811
-.48079
-6.62373E-02
.999977
.793725

4) W = 2715.34 (rd/s)

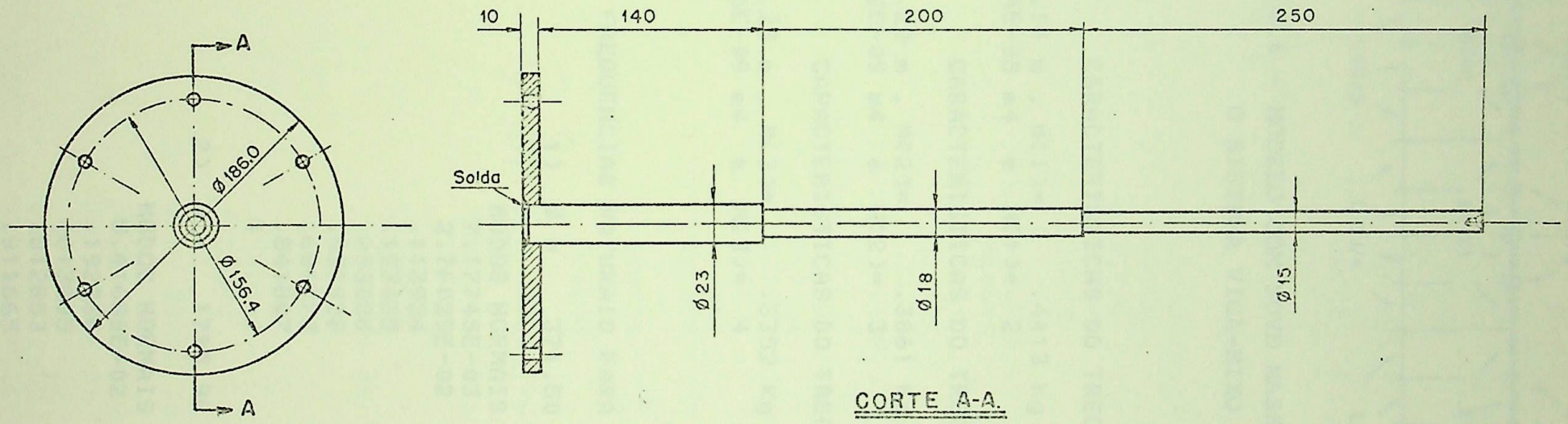
MODOS NORMAIS
1
.648943
-.974517
-.506262
.506729
.974353
-.649411
-.998801

5) W = 4872.06 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1
-.333215
-.758795
.549841
.68133
-.632749
-.834185
.75835

6) W = 11127.30 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.176673
-.301771
.547626
-1
.81805
-.232897
0
0



CORTE A-A.

$E = 2{,}1 \times 10^{11}\ N/m^2$

L(1) = 140,0 mm	M(1) = 0,4413 Kg	Ø(1) = 23 mm
L(2) = 200,0 mm	M(2) = 0,3861 Kg	Ø(2) = 18 mm
L(3) = 250,0 mm	M(3) = 0,3352 Kg	Ø(3) = 15 mm

Fig. 5.5 – VIGA-EIXO ENGASTADO-LIVRE.

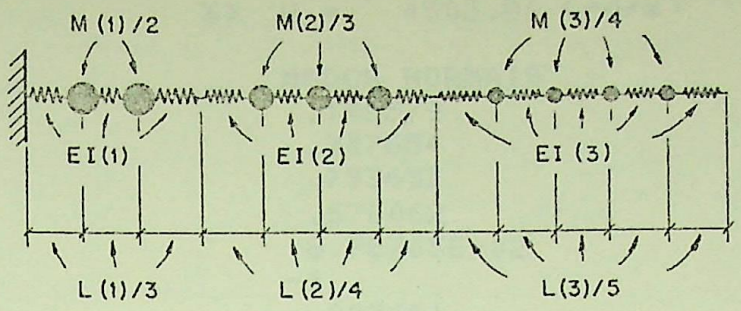


FIG. 5.6 - MODELO COM NOVE MASSAS PONTUAIS PARA O SISTEMA VIGA-EIXO

CARACTERISTICAS DO TRECHO 1

L(1)= .14 m , M(1)= .4413 Kg , E(1)= 2.1E+11 N/m2
I(1)= 1.4E-08 m4 e N(1)= 2

CARACTERISTICAS DO TRECHO 2

L(2)= .20 m , M(2)= .3861 Kg , E(2)= 2.1E+11 N/m2
I(2)= 5.2E-09 m4 e N(2)= 3

CARACTERISTICAS DO TRECHO 3

L(3)= .25 m , M(3)= .3352 Kg , E(3)= 2.1E+11 N/m2
I(3)= 2.5E-09 m4 e N(3)= 4

FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE

1) W = 371.50 (rd/s)

MODOS NORMAIS
7.17745E-03
2.76025E-02
.113924
.193435
.293086
.539928
.686773
.841807
1

2) W = 1795.98 (rd/s)

MODOS NORMAIS
5.41688E-02
.192836
.613895
.812853
.911665
.665891
.233154
-.349169
-1

3) W = 4505.86 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.106579
.347654
.753652
.576062
6.78765E-02
-1
-.897651
-.168219
.92795

4) W = 9366.98 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.323561
.837957
.718668
-.27348
-1
-2.24677E-02
.761419
.531505
-.621927

5) W = 14851.37 (rd/s)

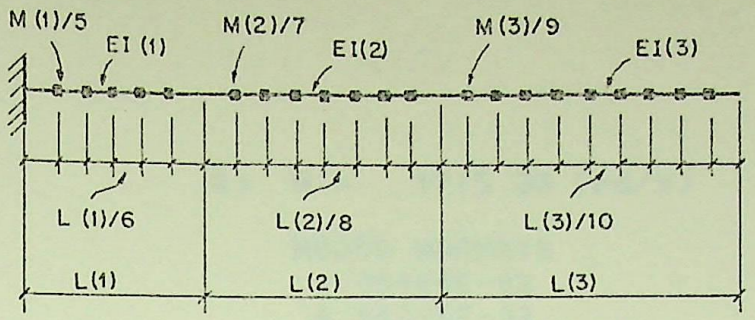
MODOS NORMAIS
.340424
.647954
-.326078
-.514557
.206518
1
-.428954
-.922252
.600536

6) W = 20244.76 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.287478
.374453
-.722286
-6.12981E-03
.654647
-1
.225641
.902564
-.65641

7) W = 30726.30 (rd/s)

MODOS NORMAIS
2.24888E-02
9.55635E-03
-6.19411E-02
6.43463E-02
-6.22559E-03
-.117188
.1875
0
1



5.7 - MODELO COM VINTE E UMA MASSAS PONTUAIS PARA O SISTEMA VIGA-EIXO

CARACTERISTICAS DO TRECHO 1

L(1)= .14 m , M(1)= .4413 Kg , E(1)= 2.1E+11 N/m2
I(1)= 1.4E-08 m4 e N(1)= 5

CARACTERISTICAS DO TRECHO 2

L(2)= .20 m , M(2)= .3861 Kg , E(2)= 2.1E+11 N/m2
I(2)= 5.2E-09 m4 e N(2)= 7

CARACTERISTICAS DO TRECHO 3

L(3)= .25 m , M(3)= .3352 Kg , E(3)= 2.1E+11 N/m2
I(3)= 2.5E-09 m4 e N(3)= 9

FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE

1) W = 367.03 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1.67456E-03
6.57261E-03
1.45058E-02
2.52863E-02
3.87268E-02
.076357
.10448
.138417
.177583
.221412
.269354
.320883
.434073
.497133
.56379
.633227
.70471
.777602
.85137
.925598
1

2) W = 1715.35 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1.06464E-02
4.04098E-02
.086041
.14434
.212208
.373589
.463666
.548992
.622698
.679198
.71436
.725633
.661514
.562661
.41937
.23726
2.33025E-02
-.21476
-.469127
-.732715
-1

3) W = 4294.81 (rd/s)

MODOS NORMAIS
2.76769E-02
.100815
.204812
.325823
.451495
.671683
.711233
.677703
.568608
.391231
.161041
-.100876
-.615213
-.784739
-.846234
-.781985
-.59121
-.288925
.098318
.537958
1

4) W = 8574.99 (rd/s)

MODOS NORMAIS
6.44726E-02
.220747
.415235
.600836
.742274
.774808
.547918
.190988
-.214747
-.577333
-.816976
-.886502
-.493076
-4.35496E-02
.425292
.771501
.886662
.723032
.301749
-.306122
-1

5) W = 13677.18 (rd/s)

MODOS NORMAIS
8.41893E-02
.268922
.459271
.579929
.588127
.215907
-.158889
-.486252
-.632406
-.531532
-.205862
.248624
1
.920921
.473473
-.158158
-.696697
-.896897
-.656657
.032032
.832833

6) W = 20497.92 (rd/s)

MODOS NORMAIS
7.77848E-02
.228685
.342649
.34596
.217833
-.297493
-.472816
-.411453
-.134399
.211792
.439331
.425049
-.197266
-.480469
-.476563
-.171875
.1875
.375
.375
0
-1

7) W = 22718.56 (rd/s)

MODOS NORMAIS
3.83034E-02
.109852
.157758
.146374
6.97131E-02
-.184484
-.233421
-.153297
1.33514E-02
.16687
.21228
.115723
-.271484
-.302734
-.132813
.125
.3125
.25
0
.5
1

5.3 - Solução do problema da vibração torcional de eixos pelo método das Matrizes de Transferência - Programa Nº 2.

Nesta seção é apresentada os valores das frequências e modos naturais de vibração torcional de eixos utilizando-se o método das Matrizes de Transferência.

Os resultados apresentados são aqueles obtidos pelo computador (programa Nº 2), correspondentes a três tipos de apoio dos eixos: eixo bi-apoiado, eixo bi-engastado e eixo engastado-livre ou engastado-apoiado.

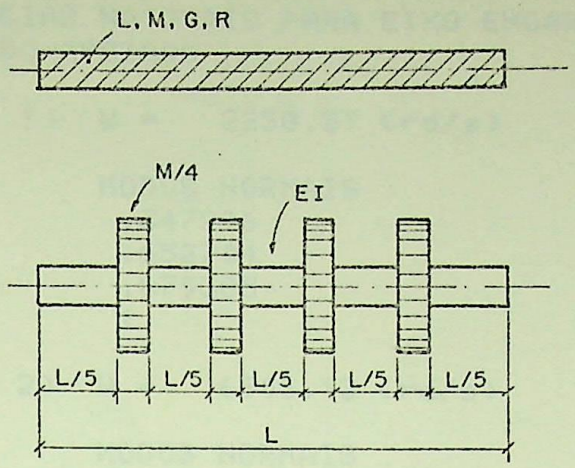


FIG. 5.8 - EIXO CONTÍNUO E MODELO COM QUATRO DISCOS

CARACTERISTICAS DO TRECHO 1

L(1)= 2,00 m , M(1)= 130,0000 Kg , G(1)= 7,0E+10 N/m2
R(1)= ,0500 m e N(1)= 4

FREQUENCIAS NATURAIS PARA EIXO BI-APOIADO

1) W = ,00 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1
1
1
1

2) W = 4977,28 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1.
,414213
-,414214
-1

3) W = 9196,80 (rd/s)

MODOS NORMAIS
,999999
-,999998
-1
,999998

4) W = 12016,21 (rd/s)

MODOS NORMAIS
,414214
-1
1.
-,414212

FREQUENCIAS NATURAIS PARA EIXO ENGASTADO-LIVRE OU ENGASTADO-APOIADO

1) W = 2258.51 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.347296
.652704
.879385
1

2) W = 6503.12 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1.
1
7.81281E-07
-.999999

3) W = 9963.37 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1
-.347297
-.879385
.652704

4) W = 12221.88 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.652703
-1
.879389
-.347302

FREQUENCIAS NATURAIS PARA EIXO BI-ENGASTADO

1) W = 4019.15 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.618034
1
.999999
.618033

2) W = 7644.88 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1
.618033
-.618035
-.999999

3) W = 10522.28 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.999999
-.618035
-.618031
1

4) W = 12369.68 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.618035
-1
.999998
-.618029

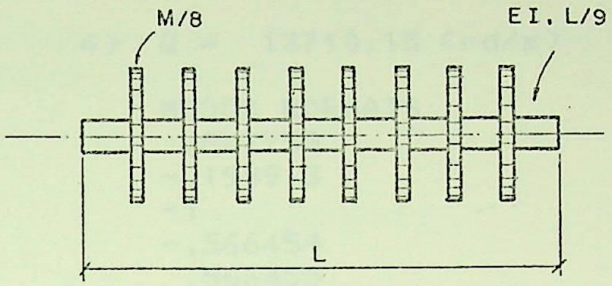


FIG. 5.9 - MODELO COM OITO DISCOS PARA O SISTEMA DO EIXO CONTÍNUO

CARACTERISTICAS DO TRECHO 1

L(1)= 2.00 m , M(1)= 130.0000 Kg , G(1)= 7.0E+10 N/m2
R(1)= .0500 m e N(1)= 8

FREQUENCIAS NATURAIS PARA EIXO BI-APOIADO

1) W = .00 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1
1
1
1
1
1
1
1

2) W = 4814.37 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1.
.847759
.566454
.198912
-.198913
-.566455
-.847759
-1

3) W = 9443,71 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1,
,414214
-,414213
-,999999
-1
-,414215
,414212
,999999

4) W = 13710,15 (rd/s)

MODOS NORMAIS
,847759
-,198913
-1
-,566454
,566455
1
,198911
-,84776

5) W = 17449,71 (rd/s)

MODOS NORMAIS
,999998
-,999998
-,999997
,999999
,999996
-1,
-,999996
1

6) W = 20518,69 (rd/s)

MODOS NORMAIS
,566454
-1,
,198912
,847759
-,847758
-,198913
1
-,566454

7) W = 22799,15 (rd/s)

MODOS NORMAIS
,414213
-,999999
,999998
-,41421
-,414216
1
-,999997
,414208

8) W = 24203.45 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.198911
-.566452
.847756
-.999998
1
-.847763
.566462
-.198924

FREQUENCIAS NATURAIS PARA EIXO ENGASTADO-LIVRE OU ENGASTADO-APOIADO

1) W = 2276.97 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.184537
.36279
.528688
.676582
.801437
.898999
.965946
1

2) W = 6753.35 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.528687
.898998
1
.801436
.362789
-.184537
-.676582
-.965946

3) W = 10999.76 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.801436
.965946
.362789
-.528688
-1
-.676581
.184539
.898999

4) W = 14871.60 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.965946
.528686
-.676583
-.898997
.18454
1
.362785
-.801439

5) W = 18236.98 (rd/s)

MODOS NORMAIS
1
-.184537
-.965946
.36279
.898998
-.528688
-.801435
.676583

6) W = 20981.34 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.898998
-.801437
-.184535
.965946
-.676594
-.362786
1
-.528691

7) W = 23011.20 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.676582
-1
.801436
-.184536
-.528688
.965946
-.898997
.362787

8) W = 24257.43 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.362792
-.676585
.899001
-1
.965941
-.801424
.528669
-.184513

FREQUENCIAS NATURAIS PARA EIXO BI-ENGASTADO

1) W = 4285.22 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.347296
.652703
.879385
1.
1
.879385
.652704
.347297

```
2)  W =    8440.24 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     .652704
     1
     .879385
     .347296
    -.347297
    -.879386
    -1
    -.652703

3)  W =   12338.81 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     1.
     1.
     1.75788E-07
    -1.
    -1.
    -5.27365E-07
     .999999
     1

4)  W =   15862.47 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     1.
     .347296
    -.879385
    -.652704
     .652703
     .879385
    -.347296
    -1

5)  W =   18904.16 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     .999999
    -.347296
    -.879385
     .652704
     .652703
    -.879385
    -.347296
     1

6)  W =   21371.45 (rd/s)

    MODOS NORMAIS
     1
    -1
     0
     1
    -1
     0
     1
    -1
```

7) W = 23189.38 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.652704
-1
.879382
-.34729
-.347304
.87939
-.999998
.652694

8) W = 24302.71 (rd/s)

MODOS NORMAIS
.347298
-.652706
.879387
-1
.999997
-.879377
.652691
-.34728

5.4 - Solução do problema da vibração transversal de vigas pelo método dos Elementos Finitos - programa Nº 3.

Os valores das frequências naturais e modos naturais de vibração transversal de vigas, utilizando-se o método dos Elementos Finitos, são mostrados nesta seção.

Os resultados foram obtidos pelo computador (programa Nº 3), considerando quatro tipos de apoio, que são: viga bi-apoiada, viga engastada-livre, viga bi-engastada e viga engastada-apoiada.

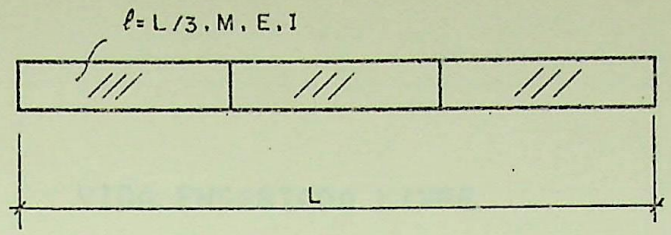


FIG. 5.10 - VIGA Nº 1 (SEÇÃO CONSTANTE) DIVIDIDA EM TRÊS ELEMENTOS

ELEMENTO	ℓ	M	E	I
1	1.333	333.3333	.2000D+11	.2100D-02
2	1.333	333.3333	.2000D+11	.2100D-02
3	1.333	333.3333	.2000D+11	.2100D-02

VIGA BI-APOIADA

AUTOVALORES

253. .102E+04 .253E+04 .470E+04 .116E+05 .840E+04

MATRIZ AUTOVETOR

.907E+00	.100E+01	-.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01
.100E+01	.553E+00	.278E-16	-.172E+00	.196E-11	-.823E-01
.453E+00	-.500E+00	.100E+01	-.500E+00	.100E+01	.500E+00
.100E+01	-.553E+00	-.278E-16	.172E+00	.108E-11	-.823E-01
-.453E+00	-.500E+00	-.100E+01	-.500E+00	.100E+01	-.500E+00
-.907E+00	.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01	-.100E+01

VIGA BI-ENGASTADA

AUTOVALORES

576. .161E+04 .375E+04 .745E+04

MATRIZ AUTOVETOR

.100E+01	-.167E+01	.866E-01	.844E-01
.796E+00	.100E+01	-.100E+01	.100E+01
.100E+01	.167E+01	.866E-01	-.844E-01
-.796E+00	.100E+01	.100E+01	.100E+01

VIGA ENGASTADA LIVRE

AUTOVALORES

90.1	566.	.160E+04	.360E+04	.678E+04	.135E+05

MATRIZ AUTOVETOR

.166E+00	-.493E+00	.374E+00	-.788E-01	-.531E-01	.160E-01
.226E+00	-.369E+00	-.209E+00	.755E+00	-.742E+00	.123E+00
.547E+00	-.354E+00	-.330E+00	-.364E-01	.935E-01	.251E-01
.327E+00	.618E+00	-.160E+00	-.774E+00	-.488E+00	.347E+00
.100E+01	.836E+00	.503E+00	.313E+00	.201E+00	.133E+00
.344E+00	.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01

VIGA ENGASTADA E APOIADA

AUTOVALORES

396.	.130E+04	.303E+04	.584E+04	.103E+05

MATRIZ AUTOVETOR

.681E+00	.611E+00	-.163E+00	-.445E-01	.466E-01
.653E+00	-.697E-01	.799E+00	-.964E+00	.404E+00
.100E+01	-.402E+00	.825E-01	.159E+00	.283E-01
-.304E+00	-.714E+00	-.943E+00	-.148E+00	.837E+00
-.995E+00	.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01

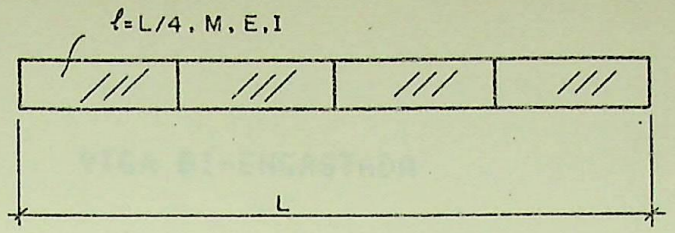


FIG. 5.11 - VIGA Nº 1 DIVIDIDA EM QUATRO ELEMENTOS

ELEMENTO	ℓ	M	E	I
1	1.000	250.0000	.2000D+11	.2100D-02
2	1.000	250.0000	.2000D+11	.2100D-02
3	1.000	250.0000	.2000D+11	.2100D-02
4	1.000	250.0000	.2000D+11	.2100D-02

VIGA BI-APOIADA

AUTOVALORES

253.	.102E+04	.232E+04	.449E+04	.714E+04	.113E+05

MATRIZ AUTOVETOR

.785E+00	.100E+01	-.100E+01	.100E+01	-.100E+01	.100E+01
.707E+00	.637E+00	-.303E+00	.167E-15	.119E+00	-.109E+00
.555E+00	.365E-10	.707E+00	-.100E+01	.707E+00	.622E-14
.100E+01	.264E-10	.429E+00	-.496E-16	-.168E+00	.155E-14
.894E-17	-.100E+01	.271E-08	.100E+01	-.830E-10	-.100E+01
.707E+00	-.637E+00	-.303E+00	.278E-16	.119E+00	.109E+00
-.555E+00	-.196E-10	-.707E+00	-.100E+01	-.707E+00	.355E-14
-.785E+00	.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01

.206E+05	.169E+05

.100E+01	.100E+01
-.444E-15	-.375E-01
.100E+01	.707E+00
-.444E-15	-.530E-01
.100E+01	.646E-09
.555E-15	-.375E-01
.100E+01	-.707E+00
.100E+01	-.100E+01

VIGA BI-ENGASTADA

AUTOVALORES

574.	,159E+04	,316E+04	,598E+04	,990E+04	,159E+05

MATRIZ AUTOVETOR

,543E+00	,185E+01	,850E+00	,938E-01	-,275E-01	,480E-01
,761E+00	,100E+01	-,100E+01	-,894E+00	-,100E+01	,615E+00
,100E+01	,174E-15	-,875E+00	,756E-10	,129E+00	,362E-10
,508E-09	-,366E+01	-,399E-09	,100E+01	,616E-09	,100E+01
,543E+00	-,185E+01	,850E+00	-,938E-01	-,275E-01	-,480E-01
-,761E+00	,100E+01	,100E+01	-,894E+00	,100E+01	,615E+00

VIGA ENGASTADA LIVRE

AUTOVALORES

90.1	565.	,159E+04	,314E+04	,584E+04	,939E+04

MATRIZ AUTOVETOR

,973E-01	-,349E+00	,369E+00	-,257E+00	,823E-01	,150E-01
,182E+00	-,478E+00	,202E+00	,295E+00	-,715E+00	,806E+00
,340E+00	-,597E+00	,112E-01	,265E+00	-,113E-01	-,107E+00
,291E+00	,947E-01	-,705E+00	,172E-01	,815E+00	-,134E+00
,659E+00	-,113E+00	-,297E+00	-,228E+00	-,535E-01	,530E-01
,337E+00	,814E+00	,336E+00	-,252E+00	-,743E+00	-,705E+00
,100E+01	,837E+00	,508E+00	,358E+00	,249E+00	,180E+00
,344E+00	,100E+01	,100E+01	,100E+01	,100E+01	,100E+01

,149E+05	,244E+05

-,464E-01	,603E-02
-,635E+00	,616E-01
,160E-01	,921E-02
-,885E+00	,173E+00
,645E-01	,172E-01
-,237E+00	,363E+00
,131E+00	,993E-01
,100E+01	,100E+01

VIGA ENGASTADA E APOIADA

AUTOVALORES

395.	.129E+04	.273E+04	.513E+04	.836E+04	.133E+05

MATRIZ AUTOVETOR

.450E+00	.540E+00	-.416E+00	.134E+00	-.380E-02	-.513E-01
.687E+00	.435E+00	.259E+00	-.735E+00	.101E+01	-.801E+00
.100E+01	.229E+00	.371E+00	-.900E-01	-.129E+00	.499E-01
.270E+00	-.946E+00	.383E+00	.870E+00	-.504E+00	-.818E+00
.845E+00	-.554E+00	-.224E+00	.467E-01	.129E+00	.827E-01
-.575E+00	-.199E+00	-.830E+00	-.967E+00	-.498E+00	.302E+00
-.988E+00	.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01

.193E+05

.266E-01
.299E+00
.212E-01
.663E+00
.116E-01
.912E+00
.100E+01

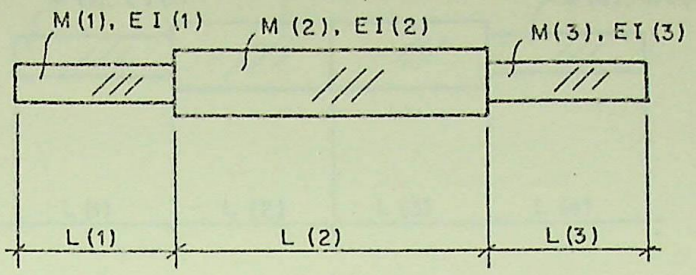


FIG. 5.12 - VIGA Nº 2 (SEÇÃO VARIÁVEL) DIVIDIDA EM TRÊS ELEMENTOS

ELEMENTO	L	M	E	I
1	1,000	75,0000	,2000D+11	,2000D-03
2	2,000	250,0000	,2000D+11	,1000D-02
3	1,000	75,0000	,2000D+11	,2000D-03

VIGA BI-APOIADA

AUTOVALORES

197,	654,	,185E+04	,370E+04	,666E+04	,871E+04

MATRIZ AUTOVETOR

,100E+01	,100E+01	-,100E+01	,100E+01	,100E+01	,100E+01
,773E+00	,516E+00	-,184E+00	-,249E-01	-,713E-01	-,671E-01
,330E+00	-,339E+00	,780E+00	-,497E+00	,208E+00	,509E+00
,773E+00	-,516E+00	-,184E+00	,249E-01	-,713E-01	,671E-01
-,330E+00	-,339E+00	-,780E+00	-,497E+00	-,208E+00	,509E+00
-,100E+01	,100E+01	,100E+01	,100E+01	-,100E+01	,100E+01

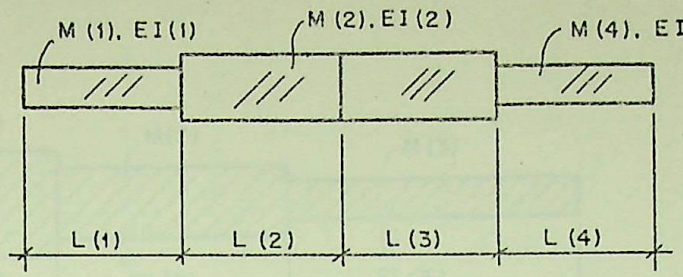


FIG. 5.13 - VIGA Nº 2 DIVIDIDA EM QUATRO ELEMENTOS

ELEMENTO	L	M	E	I
1	1.000	75.0000	.2000D+11	.2000D-03
2	1.000	125.0000	.2000D+11	.1000D-02
3	1.000	125.0000	.2000D+11	.1000D-02
4	1.000	75.0000	.2000D+11	.2000D-03

VIGA BI-APOIADA

AUTOVALORES

197.	653.	.170E+04	.358E+04	.536E+04	.771E+04

MATRIZ AUTOVETOR

.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01	-.100E+01	.100E+01
.773E+00	.516E+00	.230E+00	-.149E-01	.786E-01	-.795E-01
.330E+00	-.339E+00	-.722E+00	-.516E+00	.112E+00	.340E+00
.948E+00	-.211E-09	-.271E+00	-.236E-15	-.741E-01	-.566E-10
-.386E-10	-.618E+00	.683E-14	.449E+00	-.859E-10	-.416E+00
.773E+00	-.516E+00	.230E+00	.149E-01	.786E-01	.795E-01
-.330E+00	-.339E+00	.722E+00	-.516E+00	-.112E+00	.340E+00
-.100E+01	.100E+01	-.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01

.117E+05	.176E+05

.100E+01	.730E+00
-.388E-01	.619E-02
.844E+00	.888E+00
-.741E-01	.288E-10
-.595E-09	.100E+01
-.388E-01	-.619E-02
-.844E+00	.888E+00
-.100E+01	.730E+00

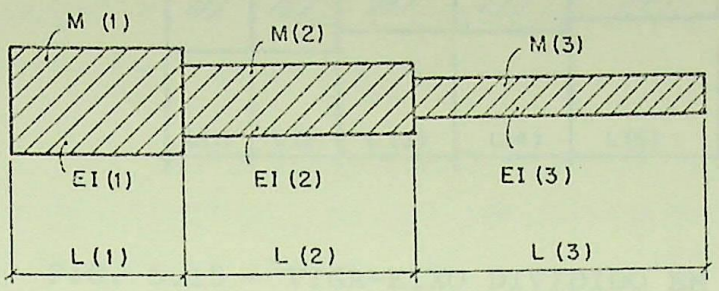


FIG. 5.14 - VIGA-EIXO DIVIDIDO EM TRÊS ELEMENTOS

$E = 2{,}1 \times 10^{11}$ N/m^2

L (1) = 140,0 mm

L (2) = 200,0 mm

L (3) = 250,0 mm

M (1) = 0,4413 Kg

M (2) = 0,3861 Kg

M (3) = 0,3352 Kg

Ø 1 = 23 mm

Ø 2 = 18 mm

Ø 3 = 15 mm

ELEMENTO	L	M	E	I
1	,140	,4413	,2100D+12	,1374D-07
2	,200	,3861	,2100D+12	,5153D-08
3	,250	,3352	,2100D+12	,2485D-08

VIGA ENGASTADA LIVRE

AUTOVALORES

363.	,165E+04	,436E+04	,953E+04	,181E+05	,287E+05

MATRIZ AUTOVETOR

,179E-01	-,254E-01	,379E-01	-,158E-01	,378E-02	,165E-02
,241E+00	-,293E+00	,321E+00	-,124E-02	-,155E+00	,884E+00
,124E+00	-,670E-01	-,208E-01	,125E-01	,633E-02	-,371E-02
,740E+00	,602E-01	-,653E+00	-,372E+00	,303E+00	,685E+00
,357E+00	,111E+00	,629E-01	,368E-01	,253E-01	,215E-01
,100E+01	,100E+01	,100E+01	,100E+01	,100E+01	,100E+01

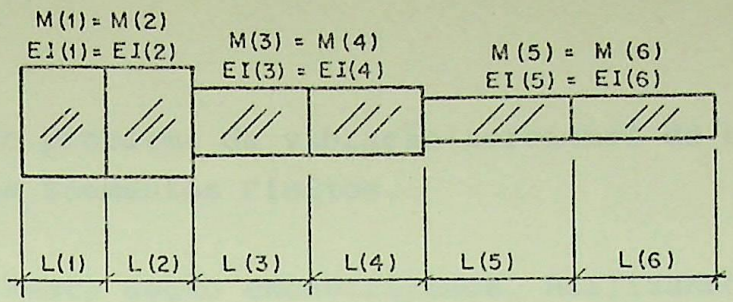


FIG. 5.15 - VIGA-EIXO DIVIDIDO EM SEIS ELEMENTOS

ELEMENTO	L	M	E	I
1	.070	.2206	.2100D+12	.1374D-07
2	.070	.2206	.2100D+12	.1374D-07
3	.100	.1930	.2100D+12	.5153D-08
4	.100	.1930	.2100D+12	.5153D-08
5	.125	.1676	.2100D+12	.2485D-08
6	.125	.1676	.2100D+12	.2485D-08

VIGA ENGASTADA LIVRE

AUTOVALORES

363.	.165E+04	.418E+04	.804E+04	.136E+05	.222E+05

MATRIZ AUTOVETOR

.476E-02	-.758E-02	.122E-01	-.116E-01	.143E-01	-.107E-01
.132E+00	-.199E+00	.294E+00	-.242E+00	.231E+00	-.930E-01
.179E-01	-.254E-01	.342E-01	-.239E-01	.161E-01	-.967E-04
.241E+00	-.293E+00	.295E+00	-.706E-01	-.203E+00	.341E+00
.584E-01	-.561E-01	.348E-01	.611E-02	-.255E-01	.629E-02
.549E+00	-.254E+00	-.318E+00	.472E+00	-.875E-01	-.425E+00
.124E+00	-.669E-01	-.173E-01	.254E-01	.200E-01	-.776E-02
.741E+00	.616E-01	-.600E+00	-.188E+00	.614E+00	.429E+00
.233E+00	-.712E-02	-.368E-01	-.334E-01	-.172E-01	.539E-03
.964E+00	.817E+00	.451E+00	-.665E-01	-.564E+00	-.792E+00
.357E+00	.112E+00	.683E-01	.491E-01	.370E-01	.271E-01
.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01

.302E+05	.433E+05	.660E+05	.788E+05	.100E+06	.190E+06

.120E-01	-.835E-02	.237E-02	-.156E-02	.312E-02	.410E-02
.171E-01	.101E+00	-.113E+00	.128E+00	-.660E+00	.100E+01
-.799E-02	.979E-02	-.211E-02	.441E-03	.517E-02	-.449E-02
-.414E+00	.143E+00	.131E+00	-.176E+00	.779E+00	.882E+00
.851E-02	-.848E-02	-.204E-02	.225E-02	-.104E-02	-.234E-02
.346E+00	.465E+00	-.315E+00	.962E-01	.100E+01	.355E+00
-.121E-01	-.273E-02	.305E-02	.521E-03	-.344E-02	-.103E-02
-.265E+00	-.783E+00	-.209E+00	.307E+00	.627E+00	.113E+00
.726E-02	.839E-02	.388E-02	.155E-02	-.730E-03	-.256E-03
-.677E+00	-.308E+00	.219E+00	.411E+00	.369E+00	.416E-01
.218E-01	.170E-01	.132E-01	.122E-01	.667E-02	.446E-03
.100E+01	.100E+01	.100E+01	.100E+01	.597E+00	.453E-01

5.5 - Solução do problema da vibração torcional de eixos pelo método dos Elementos Finitos.

Nesta seção encontraremos, utilizando o método dos Elementos Finitos , as frequências naturais e os modos de vibração de eixos a torção. Uma solução viável para o problema será obtida com êxito mesmo considerando que o eixo seja dividido em poucos elementos. Considerando assim, a matemática da solução será bastante simples, dispensando portanto o uso do computador.

Então, como aplicação do método, vamos considerar a barra circular uniforme da Fig. 3.9 do Capítulo 3 e determinar suas frequências naturais e seus modos de vibração. Lembrando que, para simplificar, nós dividimos o eixo em três elementos de igual comprimento $\ell = L/3$.

Vamos supor, inicialmente, que o eixo seja bi - apoiado.

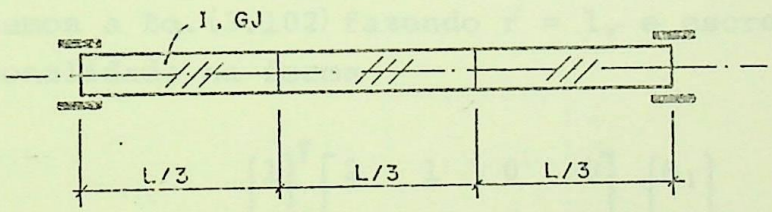


FIG. 5.16 - EIXO BI-APOIADO COM TRÊS ELEMENTOS

Do capítulo 3, nós obtemos a matriz inércia (Eq. 3.83) para o sistema completo dada por

$$[M] = [\bar{M}] = \frac{IL}{18}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

e da Eq. (3.84) a correspondente matriz rigidez

$$[K] = [\bar{K}] = \frac{3GJ}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Como foi salientado antes, no Capítulo 3, a matriz $[K]$ é singular, porque o sistema é sem restrição. Realmente, não é difícil verificar que o modo de corpo rígido (Veja Apêndice C) é

$$\{\theta^{(1)}\} = \theta_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

e satisfaz a Eq. (3.101). Para resolver o problema somente para o movimento elástico, istó é, a fim de eliminar o modo de corpo rígido, nós usamos a Eq.(3.102) fazendo r = 1, e escrevemos a condição de ortogonalidade na forma

$$\{\theta^{(1)}\}^T[M]\{\theta\} = \frac{IL\theta_0}{18}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} \tag{5.4}$$

$$= \frac{IL\theta_0}{18}(3\theta_1 + 6\theta_2 + 6\theta_3 + 3\theta_4) = 0$$

Resolvendo para θ_1 em termos de θ_2, θ_3 e θ_4, nós podemos construir a matriz obrigatória $[C]$, como

$$[C] = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

de tal modo que, da primeira das Eqs.(3.107), a matriz inércia reduzida torna-se

$$[M'] = [C]^T [M][C] = \frac{IL}{18}\begin{bmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 7 & 12 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

ao passo que, da segunda das Eqs.(3.107), nós podemos escrever a matriz rigidez reduzida na forma

$$[K'] = [C]^T [K][C] = \frac{3GJ}{L}\begin{bmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Inserindo as matrizes das Eqs. (5.6) e (5.7) na Eq. (3.108) e resolvendo o problema do auto-valor, nós obtemos as frequências naturais e os modos elásticos associados, dados por

$$\omega_2 = 3,28633\sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \left\{\Theta^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} -0,40825 \\ 0,40825 \\ 0,81650 \end{Bmatrix} \tag{5.8a}$$

$$\omega_3 = 7,34846\sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \left\{\Theta^{(3)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0,40825 \\ 0,40825 \\ -0,81650 \end{Bmatrix} \tag{5.8b}$$

$$\omega_4 = 10,39230\sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \left\{\Theta^{(4)}\right\} = \begin{Bmatrix} -0,57735 \\ 0,57735 \\ -0,57735 \end{Bmatrix} \tag{5.8c}$$

onde os modos representam os deslocamentos angulares das juntas 2, 3 e 4 isoladamente. Para obter os modos elásticos completos, nós inserimos os vetores $\left\{\Theta^{(r)}\right\}$ da Eq. (5.8), em conjunto com a Eq. (5.5) na Eq. (3.109), fornecendo o resultado

$$\left\{\Theta^{(2)}\right\}_C = \begin{Bmatrix} -0,81650 \\ -0,40825 \\ 0,40825 \\ 0,81650 \end{Bmatrix}, \quad \left\{\Theta^{(3)}\right\}_C = \begin{Bmatrix} -0,81650 \\ 0,40825 \\ 0,40825 \\ -0,81650 \end{Bmatrix}, \quad \left\{\Theta^{(4)}\right\}_C = \begin{Bmatrix} 0,57735 \\ -0,57735 \\ 0,57735 \\ -0,57735 \end{Bmatrix}$$

(5.9)

onde os modos não estão normalizados. É claro que não podemos esquecer o modo de corpo rígido com a frequência natural $\omega_1 = 0$.

Vamos, agora, resolver o problema para o caso no qual a extremidade esquerda da barra é fixa. A barra será, também, dividida em três elementos de igual comprimento.

Por causa de $\theta_1 = 0$ para a barra presa, as matrizes reduzidas de inércia e rigidez são obtidas diretamente das Eqs. (5.1) e (5.2) do caso anterior, ignorando as primeiras linhas e colunas, o que resulta

$$[M'] = \frac{IL}{18}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [K'] = \frac{3GJ}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Introduzindo as matrizes da Eq. (5.10) na Eq.(3.108), e resolvendo o problema do auto-valor, nós obtemos as frequências naturais e os modos elásticos.

$$\omega_1 = 1,58880\sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \left\{\theta^{(1)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0,35355 \\ 0,61237 \\ 0,70711 \end{Bmatrix} \tag{5.11a}$$

$$\omega_2 = 5,19615\sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \left\{\theta^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0,70711 \\ 0 \\ -0,70711 \end{Bmatrix} \tag{5.11b}$$

$$\omega_3 = 9,42661 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \ , \quad \left\{\theta^{(3)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0,35355 \\ -0,61237 \\ 0,70711 \end{Bmatrix} \tag{5.11c}$$

onde os modos não estão normalizados.

Não podemos deixar de salientar que o mesmo resultado seria obtido considerando a barra como engastada - apoiada.

Finalmente, caso a barra tenha as duas extremidades presas, e mais uma vez dividida em três elementos de igual comprimento, as matrizes reduzidas de inércia e rigidez são obtidas diretamente das Eqs. (5.10), eliminando as últimas linhas e colunas, fornecendo

$$[M'] = \frac{IL}{18} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad [K'] = \frac{3GJ}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

Inserindo as matrizes da Eq. (5.12) na Eq. (3.108), e resolvendo novamente o problema do auto-valor, obteremos as frequências naturais e os modos elásticos, como

$$\omega_1 = 3,28623 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \ , \quad \left\{\theta^{(1)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.13a}$$

$$\omega_2 = 7,34847 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \ , \quad \left\{\theta^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{5.13b}$$

Aqui, os modos estão normalizados.

Para se obter resultados mais próximos dos reais, dividiremos agora o eixo uniforme em quatro elementos de igual comprimento. Seguindo o mesmo procedimento para os casos anteriores, obteremos as frequências naturais e os modos elásticos do eixo, resultando para

EIXO BI-APOIADO

$$\omega_2 = 3{,}2225 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \quad , \quad \left\{\Theta^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -0{,}707 \\ 0 \\ 0{,}707 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.14a}$$

$$\omega_3 = 6{,}9281 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \quad , \quad \left\{\Theta^{(3)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.14b}$$

$$\omega_4 = 11{,}2579 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \left\{\Theta^{(4)}\right\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0{,}707 \\ 0 \\ -0{,}707 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.14c}$$

$$\omega_5 = 13{,}8543 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \left\{\Theta^{(5)}\right\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{5.14d}$$

EIXO ENGASTADO-LIVRE OU ENGASTADO-APOIADO

$$\omega_1 = 1{,}5814 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \left\{\theta^{(1)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0{,}383 \\ 0{,}707 \\ 0{,}924 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.15a}$$

$$\omega_2 = 4{,}9872 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \left\{\theta^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} -0{,}924 \\ -0{,}707 \\ 0{,}383 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.15b}$$

$$\omega_3 = 9,0592 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \{\theta^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 0,924 \\ -0,707 \\ -0,383 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.15c}$$

$$\omega_4 = 13,0999 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \{\theta^{(4)}\} = \begin{Bmatrix} -0,383 \\ 0,707 \\ -0,924 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.15d}$$

EIXO BI-ENGASTADO

$$\omega_1 = 3,2225 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \{\theta^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0,707 \\ 1 \\ 0,707 \end{Bmatrix} \tag{5.16a}$$

$$\omega_2 = 6,9281 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \{\theta^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{5.16b}$$

$$\omega_3 = 11,2579 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \quad \{\theta^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 0,707 \\ -1 \\ 0,707 \end{Bmatrix} \tag{5.16c}$$

Dividindo o eixo em oito elementos de igual comprimento, teríamos para

EIXO BI-APOIADO

$$\omega_2 = 3,1628 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \qquad \omega_3 = 6,4608 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \tag{5.17a}$$

$$\omega_4 = 10,0292 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}, \qquad \omega_5 = 13,8563 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \tag{5.17b}$$

$$\omega_6 = 17{,}7598 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \quad , \qquad \omega_7 = 21{,}9082 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \tag{5.17c}$$

$$\omega_8 = 25{,}9058 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \quad , \qquad \omega_9 = 27{,}7086 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \tag{5.17d}$$

$$\left\{\Theta^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -0{,}924 \\ -0{,}707 \\ -0{,}383 \\ 0 \\ 0{,}383 \\ 0{,}707 \\ 0{,}924 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad , \qquad \left\{\Theta^{(3)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}707 \\ 0 \\ -0{,}707 \\ -1 \\ -0{,}707 \\ 0 \\ 0{,}707 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.18a}$$

$$\left\{\Theta^{(4)}\right\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -0{,}383 \\ 0{,}707 \\ 0{,}924 \\ 0 \\ -0{,}924 \\ -0{,}707 \\ 0{,}383 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad , \qquad \left\{\Theta^{(5)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.18b}$$

$$\left\{\Theta^{(6)}\right\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0{,}383 \\ 0{,}707 \\ -0{,}924 \\ 0 \\ 0{,}924 \\ -0{,}707 \\ -0{,}383 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad , \qquad \left\{\Theta^{(7)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}707 \\ 0 \\ 0{,}707 \\ -1 \\ 0{,}707 \\ 0 \\ -0{,}707 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.18c}$$

$$\left\{\Theta^{(8)}\right\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0{,}924 \\ -0{,}707 \\ 0{,}383 \\ 0 \\ -0{,}383 \\ 0{,}707 \\ -0{,}924 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad , \qquad \left\{\Theta^{(9)}\right\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{5.18d}$$

EIXO ENGASTADO-LIVRE

$$\omega_1 = 1{,}5734 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \quad , \qquad \omega_2 = 4{,}7814 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \tag{5.19a}$$

$$\omega_3 = 8,1715 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \quad , \qquad \omega_4 = 11,8653 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \tag{5.19b}$$

$$\omega_5 = 15,9452 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \quad , \qquad \omega_6 = 20,3406 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \tag{5.19c}$$

$$\omega_7 = 24,5341 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \quad , \qquad \omega_8 = 27,3167 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \tag{5.19d}$$

$$\left\{\Theta^{(1)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0,195 \\ 0,383 \\ 0,556 \\ 0,707 \\ 0,831 \\ 0,924 \\ 0,981 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad , \qquad \left\{\Theta^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} -0,556 \\ -0,924 \\ -0,981 \\ -0,707 \\ -0,195 \\ 0,383 \\ 0,831 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.20a}$$

$$\left\{\Theta^{(3)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0,831 \\ 0,924 \\ 0,195 \\ -0,707 \\ -0,981 \\ -0,383 \\ 0,556 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \left\{\Theta^{(4)}\right\} = \begin{Bmatrix} -0,981 \\ -0,383 \\ 0,831 \\ 0,707 \\ -0,556 \\ -0,924 \\ 0,195 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.20b}$$

$$\left\{\Theta^{(5)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0,981 \\ -0,383 \\ -0,831 \\ 0,707 \\ 0,556 \\ -0,924 \\ -0,195 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \left\{\Theta^{(6)}\right\} = \begin{Bmatrix} -0,831 \\ 0,924 \\ -0,195 \\ -0,707 \\ 0,981 \\ -0,383 \\ -0,556 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.20c}$$

$$\left\{\Theta^{(7)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0,556 \\ -0,924 \\ 0,981 \\ -0,707 \\ 0,195 \\ 0,383 \\ -0,831 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \left\{\Theta^{(8)}\right\} = \begin{Bmatrix} -0,195 \\ 0,383 \\ -0,556 \\ 0,707 \\ -0,831 \\ 0,924 \\ -0,981 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.20d}$$

EIXO BI-ENGASTADO

$$\omega_1 = 3,1628 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \quad , \qquad \omega_2 = 6,4608 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \tag{5.21a}$$

$$\omega_3 = 10,0292 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \quad , \qquad \omega_4 = 13,8563 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \tag{5.21b}$$

$$\omega_5 = 17,7598 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \quad , \qquad \omega_6 = 21,9082 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \tag{5.21c}$$

$$\omega_7 = 25,9058 \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}} \tag{5.21d}$$

$$\left\{\Theta^{(1)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0,383 \\ 0,704 \\ 0,924 \\ 1 \\ 0,924 \\ 0,707 \\ 0,383 \end{Bmatrix} \qquad \left\{\Theta^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1,390 \\ -1,010 \\ -1,020 \\ 0,993 \\ 1,410 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.22a}$$

$$\left\{\Theta^{(3)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1,050 \\ 0,736 \\ -0,384 \\ -1,080 \\ -0,431 \\ 0,754 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \left\{\Theta^{(4)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,083 \\ -0,833 \\ 0 \\ 0,833 \\ 0 \\ -0,833 \end{Bmatrix} \tag{5.22b}$$

$$\left\{\Theta^{(5)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,819 \\ -0,197 \\ 0,845 \\ -0,400 \\ -0,563 \\ 0,797 \end{Bmatrix} \qquad \left\{\Theta^{(6)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0,713 \\ -1,050 \\ 0,882 \\ -0,225 \\ -0,582 \\ 1 \\ -0,751 \end{Bmatrix} \tag{5.22c}$$

$$\left\{\Theta^{(7)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0,297 \\ -0,586 \\ 0,861 \\ -1,030 \\ 1 \\ -0,791 \\ 0,435 \end{Bmatrix} \tag{5.22d}$$

Finalmente, vamos determinar as frequências naturais e os modos de vibração de um sistema constituido por dois eixos iguais e três volantes iguais, como mostra a Fig. 5.17.

Comparando a Fig. 5.17 com a Fig. C-1 do Apêndice C, escrevemos as seguintes relações

$$L_1 = L_2 = L, \quad I_1 = I_2 = I_3 = I \ , \ GJ_1 = GJ_2 = GJ = KL \tag{5.23}$$

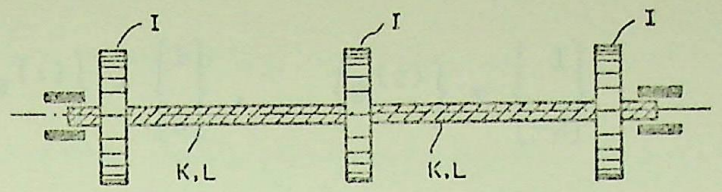


FIG. 5.17 - SISTEMA BI-APOIADO COM EIXOS E VOLANTES

Sendo o sistema semi-definido, devemos utilizar as matrizes massa e rigidez reduzidas. Estas matrizes, para o sistema considerado, já foram encontradas no Apêndice C, dadas pelas Eqs. C-19 e C-20, respectivamente, que em conjunto com as relações (5.23), fornecem

$$[I'] = \frac{1}{I}\begin{bmatrix} 2I^2 & I^2 \\ I^2 & 2I^2 \end{bmatrix} = I\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

e

$$[K'] = \frac{1}{I^2}\begin{bmatrix} 2KI^2 & KI^2 \\ KI^2 & 5KI^2 \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

A matriz dinâmica $[D]$ é

$$[D] = [K']^{-1}[I'] = \frac{I}{3K}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

e resolvendo o problema do auto-valor, escrevemos as frequências naturais como,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{I}} = \sqrt{\frac{GJ}{IL}} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{I}} = \sqrt{\frac{3GJ}{IL}} \tag{5.27}$$

e auto-vetores associados por

$$\left\{\Theta^{(1)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \left\{\Theta^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} \tag{5.28}$$

Usando a Eq. (C.16), podemos escrever a matriz obrigatória [C] por

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

Inserindo as Eqs. (5.28) e (5.29) na Eq. (C.22), encontraremos os auto-vetores obrigatórios correspondentes aos modos elásticos do sistema, que são

$$\left\{\Theta^{(1)}\right\}_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{5.30a}$$

$$\left\{\Theta^{(2)}\right\}_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.30b}$$

Logo, relembrando o modo de corpo rígido, podemos escrever as frequências naturais e os modos naturais, por

$$\omega_0 = 0, \quad \left\{\Theta^{(0)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.31a}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{GJ}{IL}}, \quad \left\{\Theta^{(1)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{5.31b}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3GJ}{IL}}, \quad \left\{\Theta^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.31c}$$

5.6 - Tabelas dos resultados

Nesta seção apresentamos os resultados teóricos e experimentais tabelados (Tabelas 5.1 a 5.9).

A fim de compararmos os resultados teóricos obtidos pelos métodos da Matriz de Transferência e Elementos Finitos, foram necessários incluir nas tabelas (exceto as Tab.5.5 e 5.6) as frequências naturais do sistema considerando-o como sendo contínuo, fornecendo portanto, os resultados pela solução exata. Nestas tabelas os números entre parênteses indicam os desvios porcentuais dos resultados teóricos obtidos por aqueles métodos para os teóricos da solução exata.

Na Tab. 5.6, os desvios foram tomados dos resultados teóricos para os experimentais.

A parte experimental foi executada segundo a descrição do Capítulo 4.

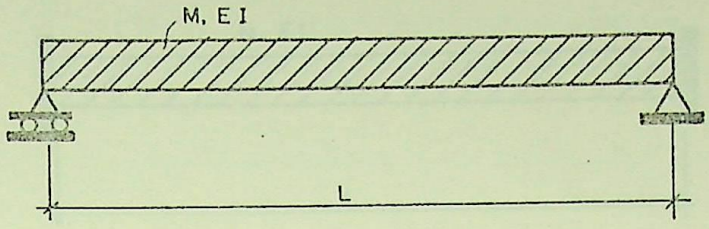


FIG. 5.18 - VIGA Nº 1 BI-APOIADA

$L = 4\ [m]$, $M = 1000\ [kg]$

$E = 2 \times 10^{10}[N/m^2]$, $I = 2{,}1 \times 10^{-3}\ [m^4]$

Valores de ω em [rd/s]

	Sistema Contínuo	Matrizes de Transferência (N = 4)	Elementos Finitos N = 3
1	253	226 (-10,7%)	253 (0,0%)
2	1011	902 (-10,8%)	1020 (0,9%)
3	2276	1998 (-12,2%)	2530 (11,2%)
4	4045	3290 (-18,7%)	4700 (16,2%)
5	6321	—	8400 (32,9%)
6	9102	—	11600 (27,4%)

	Sistema Cont.	Mat.Transf. (N = 8)	Elem.Fin. (N = 4)
1	253	238 (- 5,9%)	253 (0,0%)
2	1011	953 (- 5,7%)	1020 (0,9%)
3	2276	2143 (- 5,8%)	2320 (1,9%)
4	4045	3800 (- 6,1%)	4490 (11,0%)
5	6321	5916 (- 6,4%)	7140 (13,0%)
6	9102	8820 (- 3,1%)	11300 (24,1%)
7	12389	10038 (-19,0%)	16900 (36,4%)
8	16181	13933 (-13,9%)	20600 (27,3%)

Tab. 5.1

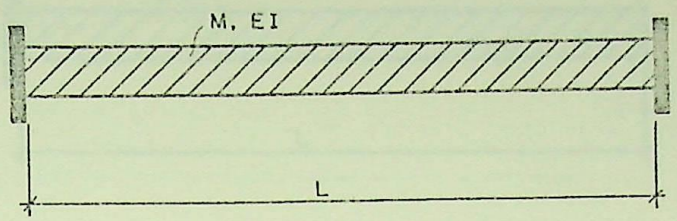


FIG. 5.19 - VIGA Nº 1 BI-ENGASTADA

$L = 4\ [m]$, $M = 1000\ [kg]$

$E = 2 \times 10^{10}\ [N/m^2]$, $I = 2{,}1 \times 10^{-3}\ [m^4]$

Valores de ω em [rd/s]

Sistema Contínuo		Matrizes de Transferência (N = 4)	Elementos Finitos (N = 3)
1	573	512 (-10,6%)	576 (0,5%)
2	1580	1397 (-11,6%)	1610 (1,9%)
3	3097	2591 (-16,3%)	3750 (21,0%)
4	5120	3617 (-29,4%)	7450 (45,5%)

Sistema Cont.		Mat. Transf. (N=8)	Elem. F. (N = 4)
1	573	540 (- 5,8%)	574 (0,2%)
2	1580	1489 (- 5,8%)	1590 (0,6%)
3	3097	2912 (- 6,0%)	3160 (2,0%)
4	5120	4862 (- 5,0%)	5980 (16,8%)
5	7648	6363 (-16,8%)	9900 (29,4%)
6	10682	8457 (-20,8%)	15900 (48,8%)

Tab. 5.2

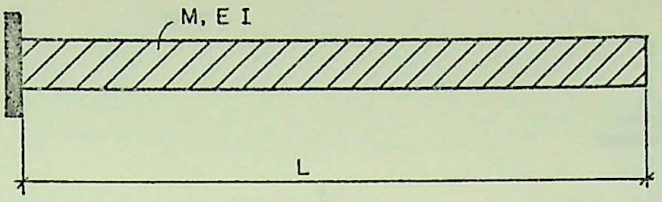


FIG. 5.20 - VIGA Nº 1 ENGASTADA-LIVRE

$L = 4\ [m]$, $M = 1000\ [kg]$

$E = 2 \times 10^{10}\ [N/m^2]$, $I = 2{,}1 \times 10^{-3}\ [m^4]$

Valores de ω em [rd/s]

	Sistema Contínuo	Matrizes de Transferências (N = 4)	Elementos Finitos (N = 3)
1	90	101 (12,2%)	90 (0,0%)
2	564	648 (14,9%)	565 (0,4%)
3	1581	1830 (15,7%)	1600 (1,2%)
4	3097	3298 (6,5%)	3600 (16,2%)
5	5120		6780 (32,4%)
6	7648		13500 (76,6%)

	Sist. Continuo	Mat.Transf.(N=8)	Elem.Fin. (N = 4)
1	90	96 (6,7%)	90 (0,0%)
2	564	603 (6,9%)	565 (0,2%)
3	1581	1700 (7,5%)	1590 (0,6%)
4	3097	3350 (8,2%)	3140 (1,4%)
5	5120	5470 (6,8%)	5840 (14,1%)
6	7648	8170 (6,8%)	9390 (22,8%)
7	10682	19741 (84,8%)	14900 (39,5%)
8	14222	27840 (95,8%)	24400 (71,6%)

Tab. 5.3

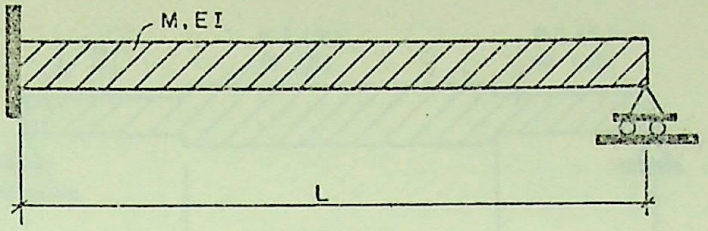


FIG. 5.21 - VIGA Nº 1 ENGASTADA-APOIADA

$L = 4\ [m]$, $M = 1000\ [kg]$

$E = 2 \times 10^{10}\ [N/m^2]$, $I = 2{,}1 \times 10^{-3}\ [m^4]$

Valores de ω em [rd/s]

	Sistema Contínuo	Matrizes de Transferência (N = 4)	Elementos Finitos (N = 3)
1	395	353 (-10,6%)	396 (0,3%)
2	1280	1138 (-11,1%)	1300 (1,6%)
3	2671	2301 (-13,9%)	3030 (13,4%)
4	4567	3482 (-23,8%)	5840 (27,9%)
5	6969		10300 (47,8%)

	Sist. Contínuo	Mat. Transf. (N=8)	Elem.Finitos (N=4)
1	395	372 (- 5,8%)	395 (0,0%)
2	1280	1206 (- 5,8%)	1290 (0,8%)
3	2671	2513 (- 5,9%)	2730 (2,2%)
4	4567	4281 (- 6,3%)	5130 (12,3%)
5	6969	6343 (- 9,0%)	8360 (20,0%)
6	9876	18478 (+87,1%)	13300 (34,7%)
7	13290	21716 (+63,4%)	19300 (45,2%)

Tab. 5.4

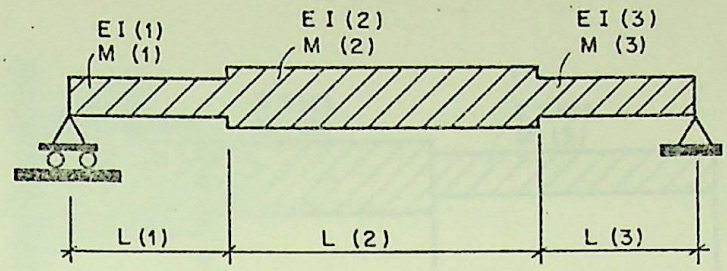


FIG. 5.22 - VIGA Nº 2 BI-APOIADA

$L(1) = L(3) = 1\ [m]$, $L(2) = 2\ [m]$

$M(1) = M(3) = 75\ [kg]$, $M(2) = 250\ [kg]$

$I(1) = I(3) = 2 \times 10^{-4}\ [m^4]$, $I(2) = 1 \times 10^{-3}\ [m^4]$

$E(1) = E(2) = E(3) = 2 \times 10^{10} [N/m^2]$,

Valores de ω em [rd/s]

	Matrizes de Transferência		Elementos Finitos	
	N = 4	N = 8	N = 3	N = 4
1	191	194	197	197
2	737	698	654	653
3	1360	1502	1850	1700
4	2532	2715	3700	3580
5		4872	6660	5360
6		11127	8710	7710
7		-		11700
8		-		17600

Tab. 5.5

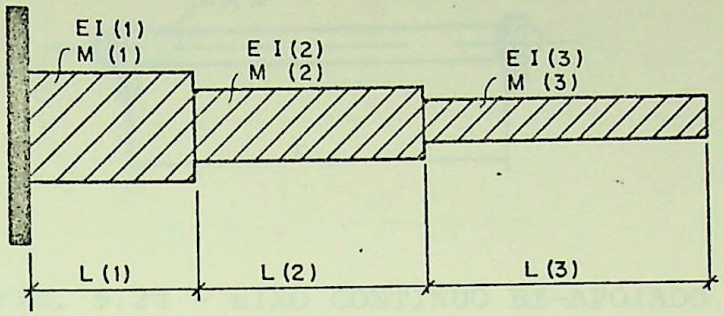


FIG. 5.23 - VIGA-EIXO ENGASTADO-LIVRE

$L(1) = 0{,}140\ [m]$, $L(2) = 0{,}200\ [m]$, $L(3) = 0{,}250\ [m]$
$M(1) = 0{,}4413\ [kg]$, $M(2) = 0{,}3861\ [kg]$, $M(3) = 0{,}3352\ [kg]$
$\phi(1) = 0{,}023\ [m]$, $\phi(2) = 0{,}018\ [m]$, $\phi(3) = 0{,}015\ [m]$
$E(1) = E(2) = E(3) = 2{,}1 \times 10^{11}\ [N/m^2]$, $\rho = 7587\ [kg/m^3]$

Valores de ω em [rd/s]

Experimental		Matrizes de Transferência (N = 9)	Elementos Finitos (N = 3)
1	254	372 (46,5%)	363 (42,9%)
2	1687	1796 (6,5%)	1650 (2,2%)
3	3750	4506 (20,2%)	4360 (16,3%)
4	7795	9367 (20,2%)	9530 (22,3%)
5	12810	14851 (15,9%)	18100 (41,3%)

Experimental		Mat. T. (N = 21)	Elem. F. (N = 6)
1	254	367 (44,5%)	363 (42,9%)
2	1687	1715 (1,7%)	1650 (2,2%)
3	3750	4295 (14,5%)	4180 (11,5%)
4	7795	8575 (10,0%)	8040 (3,1%)
5	12810	13677 (6,8%)	13600 (6,2%)

Tab. 5.6

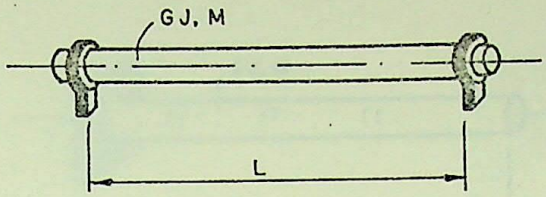


FIG. 5.24 - EIXO CONTÍNUO BI-APOIADO

Valores de $\omega/\sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}$

Sistema Contínuo		Matrizes de Transferência (N = 4)	Elementos Finitos (N = 4)
1	0	0	0
2	3,1416	3,4228 (9,0%)	3,2225 (2,6%)
3	6,2832	6,3245 (0,7%)	6,9281 (10,3%)
4	9,4248	8,2634 (-12,3%)	11,2579 (19,5%)
5	12,5664		13,8543 (10,3%)

Sist. Cont.		Mat. Transf. (N=8)	Elem. F. (N = 8)
1	0	0	0
2	3,1416	3,3108 (5,4%)	3,1628 (0,7%)
3	6,2832	6,4943 (3,4%)	6,4608 (0,4%)
4	9,4248	9,4283 (0,04%)	10,0292 (6,4%)
5	12,5664	12,0000 (- 4,5%)	13,8563 (10,3%)
6	15,7080	14,1105 (-10,2%)	17,7598 (13,1%)
7	18,8496	15,6787 (-16,8%)	21,9082 (16,2%)
8	21,9911	16,6445 (-24,3%)	25,9058 (17,8%)
9	25,1327	—	27,7086 (10,2%)

Tab. 5.7

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca
MAUÁ
Itajubá

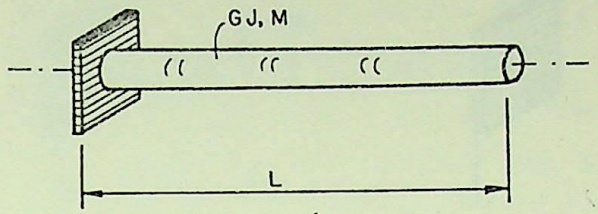


FIG. 5.25 - EIXO CONTÍNUO ENGASTADO-LIVRE

Valores de $\omega/\sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}$

	Sistema Contínuo	Matrizes de Transferência (N = 4)	Elementos Finitos (N = 4)
1	1,5708	1,5532 (- 1,1%)	1,5814 (0,7%)
2	4,7124	4,4721 (- 5,1%)	4,9872 (5,8%)
3	7,8540	6,8517 (-12,8%)	9,0592 (15,3%)
4	10,9956	8,4049 (-23,6%)	13,0999 (19,3%)

	Sist. Cont.	Mat. Transf. (N=8)	Elem. Fin. (N = 8)
1	1,5708	1,5658 (- 0,3%)	1,5734 (0,2%)
2	4,7124	4,6442 (- 1,5%)	4,7814 (1,5%)
3	7,8540	7,5644 (- 3,7%)	8,1715 (4,0%)
4	10,9956	10,2271 (- 7,0%)	11,8653 (7,9%)
5	14,1372	12,5414 (-11,3%)	15,9452 (12,8%)
6	17,2788	14,4287 (-16,5%)	20,3406 (17,7%)
7	20,4204	15,8246 (-22,5%)	24,5341 (20,1%)
8	23,5619	16,6816 (-29,2%)	27,3167 (15,9%)

Tab. 5.8

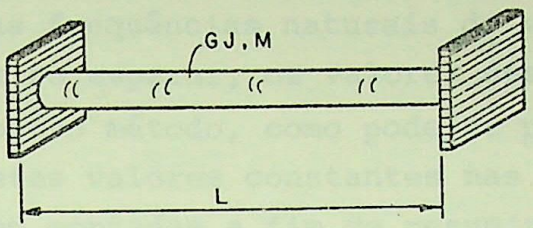


FIG. 5.26 - EIXO CONTÍNUO BI-ENGASTADO

Valores de $\omega \Big/ \sqrt{\frac{GJ}{IL^2}}$

Sistema Contínuo		Matrizes de Transferência (N = 4)	Elementos Finitos (N = 4)
1	3,1416	2,7639 (-12,0%)	3,2225 (2,6%)
2	6,2832	5,2573 (-16,3%)	6,9281 (10,3%)
3	9,4248	7,2361 (-23,2%)	11,2579 (19,5%)
4	12,5664	8,5065 (-32,2%)	

Sist. Cont.		Mat. Transf. (N=8)	Elem. F. (N = 8)
1	3,1416	2,9469 (- 6,2%)	3,1628 (0,7%)
2	6,2832	5,8043 (- 7,6%)	6,4608 (0,4%)
3	9,4248	8,4853 (-10,0%)	10,0292 (6,4%)
4	12,5664	10,9085 (-13,2%)	13,8563 (10,3%)
5	15,7080	13,0002 (-17,2%)	17,7598 (13,1%)
6	18,8496	14,6969 (-22,0%)	21,9082 (16,2%)
7	21,9911	15,9471 (-27,5%)	25,9058 (17,8%)
8	25,1327	16,7127 (-33,5%)	

Tab. 5.9

5.7 - Comentários e Conclusões

O método das Matrizes de Transferência e o método dos Elementos Finitos foram utilizados neste trabalho com o objetivo de comparar as frequências naturais de vigas e eixos. No entanto, como era de se esperar, os valores destas frequências diferem de um para outro método, como pode-se perceber através de uma comparação destes valores constantes nas tabelas 5.1 a 5.9. Estas tabelas foram montadas a fim de resumir e comparar os valores das frequências naturais das vigas e eixos calculadas através dos programas do Apêndice D elaborado e executados conforme a teoria dos Capítulos 2 e 3. Com o mesmo objetivo também foram tabeladas as frequências naturais da viga engastada-livre ensaiada no laboratório de acordo com a descrição do Capítulo 4.

As freqüências naturais da viga ensaiada são colocadas na Tab. 5.6 considerando os valores obtidos experimentalmente e aqueles encontrados através dos métodos das Matrizes de Transferência e dos Elementos Finitos. Já, para o comportamento dinâmico de outros sistemas contínuos unidimensionais considerados neste trabalho, a comparação é feita através das tabelas 5.1 a 5.9 - exceto as Tabs. 5.5 e 5.6 - que fornecem os valores das frequências naturais obtidas pelos métodos de discretização das Matrizes de Transferência e dos Elemento Finitos e os valores das frequências naturais obtidas pela solução exata, ou seja, considerando que tais sistemas sejam realmente contínuos conforme a apresentação do Capítulo 1.

Para o preenchimento das tabelas 5.1 a 5.4, os valores das frequências naturais das vigas em vibração transversal, considerando-as como sistemas contínuos, foram encontradas pela solução das equações características correspondentes, conforme apresentou a seção 1.6 do Capítulo 1. As equações características para a vibração transversal livre de vigas para os quatro tipos de apoio considerados neste trabalho são:

a) $\text{sen}\beta_r L = 0$, para viga bi-apoiada;
b) $\cos\beta_r L \cosh\beta_r L = 1$, para viga bi-engastada;
c) $\cos\beta_r L \cosh\beta_r L = -1$, para viga engastada-livre, e
d) $\text{tg}\beta_r L - \text{tgh}\beta_r L = 0$, para viga engastada-apoiada.

A solução da primeira equação característica é $\beta_r L = r\pi$, para r = 1, 2, ... Para as outras equações, a solução é obtida numericamente, fornecendo um infinito conjunto de auto-valores β_r (r = 1, 2, ...). E finalmente, com os valores de β_r, a segunda das equações (1.62) é utilizada para fornecer as frequências naturais ω_r do sistema contínuo.

Da mesma maneira, as tabelas 5.7 a 5.9 foram preenchidas para os valores das frequências naturais de eixos em vibração torcional, considerando-os como sistemas contínuos, obtidos pela solução das equações características da vibração torcional livre de eixos para os três tipos de apoio aqui considerados. As equações características correspondentes são:

a) $\text{sen}\beta_r L = 0$, para eixos bi-apoiado e bi-engastado, e
b) $\cos\beta_r L = 0$, para eixo engastado-livre ou eixo engastado-apoiado.

A solução da primeira equação característica é $\beta_r L = r\pi$, para r = 1, 2, ..., e da segunda equação é $\beta_r L = r\pi/2$, para valores ímpares de r. E finalmente, com os auto-valores β_r, a segunda das equações (1.43) do Capítulo 1 é usada para obter as frequências naturais ω_r do sistema contínuo em vibração torcional. Na segunda das equações (1.43), os parâmetros m e EA devem ser substituidos pelo momento polar de inércia da massa por unidade de comprimento I e pela rigidez à torção GJ, respectivamente.

As frequências naturais para os sistemas da viga Nº 1 mostrados nas Figs. 5.18 a 5.21 são apresentadas, para os quatro tipos de apoio, nas tabelas 5.1 a 5.4. Para esta viga, a fim de encontrarmos suas frequências naturais pelo método das Matrizes de Transferência próximas das frequências naturais obtidas considerando-a como um sistema contínuo e para efeito de comparação, foi necessário dividi-la em quatro e em oito massas pontuais como modelos de discretização (Veja Figs. 5.1 e 5.2). Já, usando o método dos Elementos Finitos, foi necessário dividir a viga em três e em quatro elementos. Mesmo assim podemos observar, através das tabelas acima mencionadas, que os desvios porcentuais das primeiras frequências naturais obtidas pelo método dos Elementos Finitos são muito baixos relativamente aos desvios

porcentuais das frequências naturais obtidas pelo método das Matrizes de Transferência. Os resultados para a modelagem fazendo-se N = 8 no método das Matrizes de Transferência são satisfatórios até a sexta frequência natural, pois os desvios porcentuais se mantêm numa faixa realtivamente baixa (de 3 a 9%) com exceções da quinta e sexta frequências da viga bi-engastada da Fig. 5.19 e também da sexta frequência natural da viga engastada - apoiada da Fig. 5.21.

As frequências naturais para o sistema da viga Nº 2 bi-apoiada com seção variável mostrado na Fig. 5.22 são apresentadas na Tab. 5.5. Os valores das frequências naturais desta viga não foram determinadas pela solução exata por se tratar a solução de um desenvolvimento matemático extenso e exaustivo, devido a viga ter a seção variável. Mas a comparação dos métodos para esta viga pode, mesmo assim, ser efetuada conforme a explicação dada no final desta seção.

As frequências naturais para o sistema viga-eixo engastado-livre de seção cilíndrica e diâmetro variável da Fig. 5.23 são mostradas na Tab. 5.6. As frequências naturais da primeira coluna desta tabela foram obtidas experimentalmente conforme a apresentação do Capítulo 4. Podemos observar, pela Tab. 5.6, que para se ter uma aproximação razoável das frequências naturais daquelas obtidas experimentalmente foi necessário dividir a viga em grandes números de massas concentradas, no caso N = 9 e N = 21, pelo método das Matrizes de Transferência, ao passo que pelo método dos Elementos Finitos foi necessário dividir a viga em apenas três e seis elementos, fornecendo praticamente os mesmos desvios percentuais. Nota-se, portanto, mais uma vez a eficiência do método dos Elementos Finitos. Os valores altos das frequências naturais da viga em questão são devido a sua grande rigidez à flexão.

Finalmente, as frequências naturais para os sistemas do eixo contínuo mostrados nas Figs. 5.24 a 5.26 são apresentadas nas tabelas 5.7 a 5.9, para os três tipos de apoio, respectivamente. Para estes sistemas à torção, na determinação das frequências naturais, foi preciso considerar o número de elementos finitos igual ao número de discos concentrados para se obter desvios porcentuais próximos para uma mesma frequência obtida

através dos métodos. Portanto, concluimos que a eficiência do método dos Elementos Finitos para sistemas à torção é menor que quando é aplicado a sistemas à flexão. A primeira frequência natural do eixo bi-apoiado da Fig. 5.24 resultou zero pelo fato do sistema ser semi-definido.

Uma conclusão importante a que podemos chegar é mostrada na seguinte explicação. Consideremos, por exemplo, o sistema em vibração transversal da viga da Fig. 5.22. Para a primeira linha das frequências naturais da Tab. 5.5 podemos notar que utilizando o método das Matrizes de Transferência o valor da primeira frequência natural cresce assim que se aumenta o número de massas pontuais na modelagem (de 4 para 8 no exemplo), aproximando-se do primeiro valor da frequência natural quando é aplicado o método dos Elementos Finitos para N = 3 ou 4. Já, o valor da segunda frequência natural diminui assim que se aumenta também o número de massas pontuais no método das Matrizes de Transferência, aproximando-se este valor, da mesma forma, do segundo valor da frequência natural obtida pelo método dos Elementos Finitos. Para o terceiro valor em diante se aplica o que se disse relativamente ao primeiro valor da frequência natural. Portanto, notamos que os valores das frequências naturais do primeiro método quando se aumenta o número de massas pontuais tendem para os valores do segundo método. Como, quanto mais o modelo matemático se aproxima do sistema real, as frequências naturais se aproximam também das reais e considerando a discussão acima, podemos concluir que, portanto, o método que nos traz a melhor solução para as frequências naturais de sistemas à vibração transversal é o dos Elementos Finitos. Esta conclusão é também válida para outros sistemas à vibração transversal considerados neste trabalho.

Também é importante salientar que se na modelagem de sistemas à vibração transversal para o método das Matrizes de Transferência o número de massas pontuais for igual ao número de elementos finitos na modelagem para o método dos Elementos Finitos, as frequências naturais que se apresentam menores desvios porcentuais em relação às frequências naturais da solução exata, são aquelas obtidas pelo método dos Elementos Finitos.

APÊNDICE A - EQUAÇÕES DE LAGRANGE

A.1 - Princípio dos Trabalhos Virtuais

Este princípio é de grande aplicabilidade no cálculo das relações entre as forças que atuam em um corpo em equilíbrio.

O método em questão é baseado no cálculo do trabalho realizado pelas forças que agem sobre um sistema durante uma suposto movimento do mesmo. Este processo foi utilizado na solução dos problemas de Mecânica pela primeira vez em 1717 por John Bernoulli, e posteriormente por Lagrange, como o fundamento da Mecânica Analítica.

Consideremos um ponto material, com liberdade de se mover em qualquer direção, submetido à ação de várias forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ..., $\vec{F}_k$ (Fig. A.1).

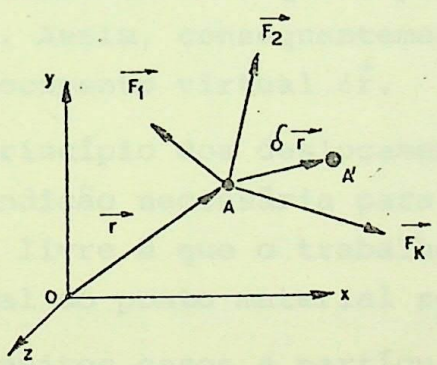


FIG. A.1 - PARTÍCULA EM EQUILÍBRIO

Vamos supor que a partícula se mova da posição A para A' segundo um deslocamento $\delta\vec{r}$. Este deslocamento não será necessariamente realizado. É imaginário, chamado de deslocamento virtual. O símbolo $\delta\vec{r}$ representa uma diferença de primeira ordem; ele é usado para distinguir o deslocamento virtual do deslocamento $d\vec{r}$ que o substituiria se de fato a partícula movimentasse.

O trabalho realizado por uma força $\vec{F}$ durante o deslocamento $\delta\vec{r}$ será o produto escalar de $\vec{F}$ por $\delta\vec{r}$, ou seja:

$$\delta\tau = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} \qquad (A.1)$$

A quantidade $\delta\tau$ é chamada de trabalho virtual da força $\vec{F}$. O trabalho virtual de todas as forças que agem sobre a partícula é:

$$\delta\tau = \vec{F}_1 \cdot \delta\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \delta\vec{r} + \ldots + \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}$$

$$\delta\tau = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_k) \cdot \delta\vec{r}$$

ou $$\delta\tau = \vec{F}_R \cdot \delta\vec{r} \qquad (A.2)$$

onde $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_k$ é a resultante das forças aplicadas à partícula. Portanto, o trabalho virtual total de todas as forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_k$ é igual ao trabalho virtual de sua resultante $\vec{F}_R$.

Se considerarmos que a partícula está em equilíbrio, então $\vec{F}_R = 0$. Assim, consequentemente, $\delta\tau = 0$ para qualquer valor do deslocamento virtual $\delta\vec{r}$.

O princípio dos deslocamentos virtuais informa, portanto, que a condição necessária para que o ponto material esteja em equilíbrio livre é que o trabalho realizado em qualquer deslocamento virtual do ponto material seja nulo.

Em muitos casos a partícula não está completamente livre, ou seja, ela é obrigada a permanecer imóvel numa certa direção. Os vínculos são, geralmente, os responsáveis para tal situação.

A.2 - Graus de Liberdade

No caso de um ponto material tiver vínculos, é necessário modificar a definição de deslocamento virtual, pois não são possíveis certos deslocamentos. Neste caso, o deslocamento virtual não pode ser arbitrário, pois está restringido pelos chamados GRAUS de LIBERDADE do vínculo. Define-se então o deslocamento virtual como o deslocamento infinitesimal do ponto mate

rial compatível com os graus de liberdade do vínculo.

A posição de um pêndulo simples (Fig. A.2) é determinada pelo valor de uma variável, que é a sua inclinação em relação à vertical, ou a componente vertical, ou a componente horizontal do deslocamento da massa do pêndulo. Portanto, a posição do pêndulo é indicada por uma variável ou coordenada. Um sistema cuja posição pode ser especificada por meio de uma variável ou coordenada é dito possuir um grau de liberdade. Alguns sistemas que possuem um grau de liberdade são mostrados na Fig. A.3.

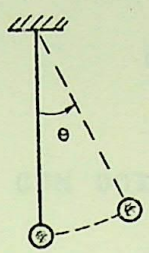


FIG. A.2 - PÊNDULO SIMPLES

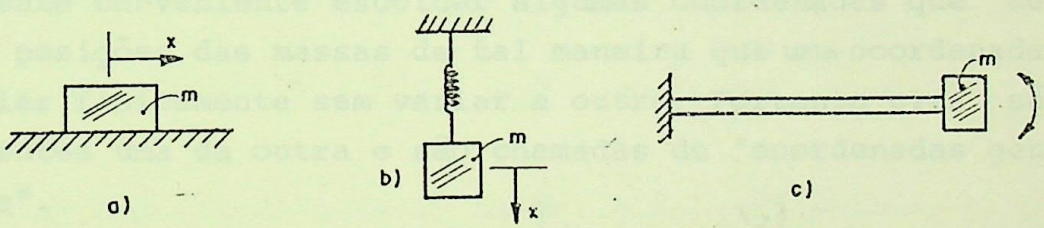


FIG. A.3 - SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

Dois volantes ligados por eixos de certa rigidez a torção (Fig. A.4a) e com liberdade de girarem em torno desses eixos podem ter suas posições determinadas por duas variáveis: os ângulos de rotação em relação a uma referência. Cada uma das variáveis pode tomar valores arbitrários. Um sistema cuja posição pode ser especificada por duas variáveis arbitrárias e independentes é um sistema que possui dois graus de liberdade (Fig. A.4).

Analogamente há sistemas com "n" graus de liberdade, sendo "n" igual a 1, 2 (como foi visto nos exemplos acima) 3, 4, 5 ... .

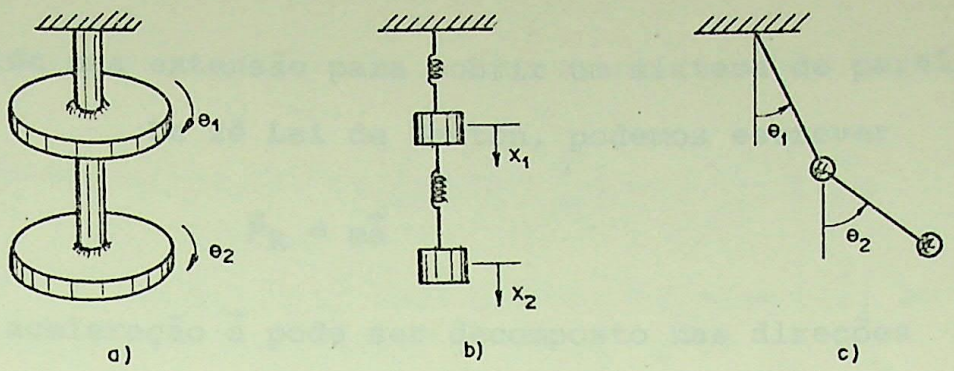


FIG. A.4 - SISTEMAS COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Portanto se "n" coordenadas independentes são necessárias para especificar as posições das massas de um sistema, então o sistema terá "n" graus de liberdade.

A.3 - Coordenadas Generalizadas e Equações de Lagrange

Para sistemas com múltiplos graus de liberdade é geralmente conveniente escolher algumas coordenadas que descrevam as posições das massas de tal maneira que uma coordenada possa variar fisicamente sem variar a outra. Portanto elas são independentes uma da outra e são chamadas de "coordenadas generalizadas".

As coordenadas dos sistemas mostrados nas Fig.A.3 e A.4 são generalizadas.

Para se determinar as equações de movimento de um sistema dinâmico usam-se as coordenadas generalizadas no método de Lagrange, o qual veremos a seguir.

Podemos observar que um sistema com "n" graus de liberdade necessita geralmente de "n" coordenadas generalizadas que são designadas por q_1, q_2, ..., q_n. As coordenadas generalizadas podem ser comprimentos, ângulos ou algum outro conjunto de quantidades independentes que possa definir as posições das massas do sistema.

As equações de Lagrange serão primeiramente desenvolvidas para o movimento de uma partícula de massa "m" onde age uma força resultante de componentes F_x, F_y e F_z. Faremos

em seguida uma extensão para cobrir um sistema de partículas.

Da 2ª Lei de Newton, podemos escrever

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \tag{A.3}$$

O vetor aceleração $\vec{a}$ pode ser decomposto nas direções x, y e z como

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z} \tag{A.4}$$

sendo a_x, a_y e a_z as derivadas de 2ª ordem das componentes x, y e z do vetor posição $\vec{r}$ (Fig. A.1). Levando estas derivadas na Eq.(A.4) escrevemos

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\hat{y} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\hat{z} \tag{A.5}$$

A força resultante $\vec{F}_R$ pode ser escrita em suas componentes retangulares como

$$\vec{F}_R = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z} \tag{A.6}$$

Levando as Eqs. (A.4) e (A.6) na Eq.(A.3), escrevemos

$$F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z} = m(a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}) \tag{A.7}$$

Inserindo a Eq.(A.7) na Eq.(A.2), vem

$$\delta\tau = \vec{F}_R \cdot \delta\vec{r} = \vec{F}_R \cdot (\delta x\hat{x} + \delta y\hat{y} + \delta z\hat{z})$$

considerando a Eq.(A.7), vem

$$(F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}) \cdot (\delta x\hat{x} + \delta y\hat{y} + \delta z\hat{z}) = m(a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}) \cdot (\delta x\hat{x} + \delta y\hat{y} + \delta z\hat{z})$$

Resolvendo os produtos escalares, torna-se

$$F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z = m(a_x\delta x + a_y\delta y + a_z\delta z) \tag{A.8}$$

Tendo-se em mente a Eq.(A.5), a Eq.(A.8) pode ser escrita como

$$F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) \qquad (A.9)$$

A Eq.(A.9) será brevemente reescrita em termos das coordenadas generalizadas da massa "m".

As coordenadas retangulares x, y e z do vetor posição $\vec{r}$ podem ser escritas como relações funcionais das coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \ldots, q_n$ do sistema, da seguinte forma

$$\begin{aligned} x &= f_1(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ y &= f_2(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ z &= f_3(q_1, q_2, \ldots, q_n) \end{aligned} \qquad (A.10)$$

Podemos escrever as variações em x, y e z em termos das correspondentes variações em $q_1, q_2, \ldots, q_n$ como

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_n}\delta q_n \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_n}\delta q_n \\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_n}\delta q_n \end{aligned} \qquad (A.11)$$

Nas expressões (A.11) as variações δ's são infinitesimais das coordenadas retangulares e generalizadas. Foi visto que as coordenadas q's são independentes e o movimento pode ser examinado pelo efeito da variação de uma coordenada generalizada enquanto as outras permanecem constantes.

Faremos, portanto $\delta q_1 \neq 0$ e $\delta q_2 = \ldots = \delta q_n = 0$. Voltando às Eqs. (A.11), escrevemos

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 \quad e \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 \qquad (A.12)$$

Levando as Eqs. (A.12) na Eq. (A.9), vem

$$\left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\delta q_1 = m\left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\delta q_1 \qquad (A.13)$$

O trabalho realizado pelas forças F_x, F_y e F_z durante o deslocamento δq_1 é exatamente o lado esquerdo da Eq.(A.13). O termo entre parênteses deste lado é uma força, uma quantidade que aqui vai ser introduzida e definida como Q_1, como uma "força generalizada".

Portanto $$Q_1 = F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \qquad (A.14)$$

O trabalho virtual realizado pela quantidade Q_1 será $Q_1\delta q_1$. A força generalizada, é portanto, a quantidade que quando multiplicada pelo deslocamento virtual da coordenada generalizada fornece corretamente a expressão para o trabalho virtual executado pelas forças que atuam no sistema. Se a coordenada generalizada for um ângulo, a força generalizada terá as dimensões de momento ao contrário de força.

Vemos também que a força generalizada é igual ao produto da massa pelo termo entre parênteses do lado direito da Eq.(A.13).

Faremos algumas simplificações nos termos do lado direito da Eq (A.13), como

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1}\right) = \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_1}$$

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1}\right) - \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_1} \qquad (A.15)$$

A velocidade $\dot{x}$ pode ser colocada como

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial x}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dt} ,$$

ou

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial x}{\partial q_n} \dot{q}_n \qquad (A.16)$$

Diferenciando a Eq.(A.16) em relação a $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_n$, podemos escrever

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial x}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial x}{\partial q_n} \tag{A.17}$$

Levando a primeira igualdade da Eq. (A.17) na Eq. (A.15), escrevemos

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dot{x} \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{dx}{dt}\right) \tag{A.18}$$

e

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} \tag{A.19}$$

Os termos da direita da Eq.(A.19) podem ser escritos separadamente, como

$$\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) \quad \text{e} \quad \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) \tag{A.20}$$

Inserindo as Eqs. (A.20) na Eq. (A.19), vem

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) \tag{A.21}$$

Analogamente, podemos escrever as expressões equivalentes para as coordenadas y e z, como

$$\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right) \tag{A.22}$$

e

$$\ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{\dot{z}^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\dot{z}^2}{2}\right) \tag{A.23}$$

Substituindo as Eqs. (A.21), (A,22) e (A.23) na Eq. (A.13), vem

$$Q_1\delta q_1 = m\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left(\dot{x}^2\right)\right]+\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left(\dot{y}^2\right)\right]+\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left(\dot{z}^2\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\dot{x}^2\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\dot{y}^2\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\dot{z}^2\right)\right\}\delta q_1 \qquad (A.24)$$

Agrupando os termos em $\dot{x}^2$, $\dot{y}^2$ e $\dot{z}^2$, podemos reescrever a Eq. (A.24) como

$$Q_1\delta q_1 = m\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)\right\}\delta q_1 \qquad (A.25)$$

que dividida por δq_1 torna-se

$$Q_1 = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)\right]\right\}-\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)\right] \qquad (A.26)$$

O termo entre colchetes da Eq.(A.26) é a energia cinética total da partícula de massa "m"

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) \qquad (A.27)$$

Substituindo a Eq.(A.27) na Eq.(A.26), podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \qquad (A.28)$$

Equações análogas podem ser deduzidas para as variações $\delta q_2, \ldots,$ δq_n tomadas separadamente, que resulta

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2\\
&\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\quad\vdots\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_n}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_n} = Q_n
\end{aligned} \qquad (A.29)$$

De uma maneira geral podemos escrever as Eqs. (A.29) na forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad (A.30)$$

onde $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

As Eqs. (A.30) são as de Lagrange, deduzidas para uma simples partícula. Sucessivas aplicações, uma para cada grau de liberdade "j", produzirá a equação do movimento da partícula correspondente a cada grau de liberdade.

Se as forças que atuam na massa "m" da partícula são conservativas, então elas podem ser derivadas da função energia potencial V da partícula, e a força generalizada Q_j pode ser escrita como

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad (A.31)$$

Como a energia potencial é uma função das coordenadas generalizadas q_j e não das velocidades $\dot{q}_j$, também podemos escrever

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad (A.32)$$

Introduzindo a Eq.(A.31) na Eq.(A.30), vem

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \qquad (A.33)$$

Inserindo a Eq.(A.32) nos parênteses da Eq.(A.33) e fazendo L = T-V, vem

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}\right) = 0$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (A.34)$$

A quantidade L = T - V que é a diferença das energias cinética e potencial é conhecida como Função Lagrangeana ou Potencial Cinético, e as Eqs.(A.34) são as equações de Lagrange para uma partícula.

Como foi introduzida a Eq.(A.31) que é válida apenas quando as forças são conservativas, as Eqs.(A.34) só são aplicadas para o caso quando o sistema for conservativo, enquanto que as Eqs. (A.30) são aplicáveis a sistemas conservativos e não conservativos.

As equações de Lagrange são de grande aplicabilidade quando se trata de um sistema constituído de várias partículas e, particularmente, aqueles com múltiplos graus de liberdade. Para fazer uma extensão das equações de Lagrange para um sistema de N partículas façamos i a identificação da i-ésima partícula do sistema. A energia cinética do sistema é $T = \sum_{i=1}^{N} T_i$ e a resultante das forças generalizadas é $\sum_{i=1}^{N} Q_{ji} = Q_j$ onde Q_{ji} é a força generalizada Q_j correspondente à coordenada j aplicada à partícula i. Portanto a Eq. (A.30) pode ser escrita para a partícula i e posteriormente fazendo o somatório para N partículas do sistema, o que se chega a

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j}\right\} - \frac{\partial T_i}{\partial q_j}\right\} = \sum_{i=1}^{N} Q_{ji} \quad (j = 1,2,\ldots,n) \qquad (A.35)$$

Na Eq.(A.35) o somatório é feito para N partículas para cada valor de j.

Portanto, as equações de Lagrange para um sistema geral de partículas, sendo conservativo ou dissipativo, é

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j = 1,2,\ldots, n) \qquad (A.36)$$

E na ausência de forças não conservativas, tornam-se

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots, n) \qquad (A.37)$$

onde T e L = T-V são os termos de energia para o sistema intei

ro e onde, como antes, existem tantas equações n quanto forem os graus de liberdade do sistema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO APÊNDICE A

[1] Arnold, R.N. and Mauder, L., Gyrodynamics and Its Engineering Applications, Academic Press, NY (1961).

[2] Seto, W., Theory and Problems of Mechanical Vibrations, Schaum Publ. Co., NY (1964).

[3] Vierck, R.K., Vibration Analysis, Iternational Textbook Co., Scranton, PA (1967).

[4] Tse, F.S., Morse, I.E., Hinkle, R.T., Mechanical Vibrations: Theory and Applications, Allyn and Bacon Inc., Boston, MA, 2nd edition (1978).

APÊNDICE B - ORTOGONALIDADE DOS VETORES MODAIS

B.1 - Princípio

Os modos naturais possuem uma propriedade muito útil conhecida como ortogonalidade. Ela não é uma ortogonalidade ordinária, mas uma ortogonalidade com respeito à matriz inércia $[m]$ (e também com respeito à matriz rigidez $[k]$). Segue-se a demonstração da ortogonalidade dos vetores modais $\{u^{(r)}\}$.

Vamos considerar duas distintas soluções $\omega_r^2, \{u^{(r)}\}$ e $\omega_s^2, \{u^{(s)}\}$ do problema do auto-valor. Estas soluções podem ser escritas na forma

$$[k]\{u^{(r)}\} = \omega_r^2 [m]\{u^{(r)}\} \tag{B-1}$$

$$[k]\{u^{(s)}\} = \omega_s^2 [m]\{u^{(s)}\} \tag{B-2}$$

Pré-multiplicando ambos os lados de (B-1) por $\{u^{(s)}\}^T$ e ambos os lados de (B-2) por $\{u^{(r)}\}^T$, nós obtemos

$$\{u^{(s)}\}^T [k]\{u^{(r)}\} = \omega_r^2 \{u^{(s)}\}^T [m]\{u^{(r)}\} \tag{B-3}$$

$$\{u^{(r)}\}^T [k]\{u^{(s)}\} = \omega_s^2 \{u^{(r)}\}^T [m]\{u^{(s)}\} \tag{B-4}$$

A seguir transpomos a Eq. (B-4), assumindo que as matrizes $[m]$ e $[k]$ são simétricas e subtraimos o resultado de (B-3), para obter

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \{u^{(s)}\}^T [m]\{u^{(r)}\} = 0 \tag{B-5}$$

Como em geral as frequências naturais são distintas, $\omega_r \neq \omega_s$, a Eq. (B-5) é satisfeita desde que

$$\{u^{(s)}\}^T [m]\{u^{(r)}\} = 0, \quad r \neq s \tag{B-6}$$

o qual é a manifestação da condição de ortogonalidade dos vetores modais. Notamos que a ortogonalidade é com respeito a matriz inércia $[m]$, a qual desempenha o papel de uma matriz peso. Inserindo a Eq. (B-6) na (B-3), é fácil ver que os vetores modais

são também ortogonais com respeito a matriz rigidez [k],

$$\{u^{(s)}\}^T [k] \{u^{(r)}\} = 0, \quad r \neq s \tag{B-7}$$

Insistimos ainda que as relações de ortogonalidade (B-6) e (B-7) são válidas somente se [m] e [k] são simétricas. Em muitos problemas de interesse prático a matriz inércia [m] é diagonal, de tal modo que nestes casos a condição de ortogonalidade (B-6) é simples de usar. Indiferentemente de [m] ser diagonal ou não, de qualquer maneira, a condição (B-6) é ordinariamente usada.

Se os modos são normalizados, então eles são chamados ortonormais. A conveniente normalização consiste em pré-multiplicar a Eq. (B-1) por $\{u^{(r)}\}^T$, fornecendo

$$\{u^{(r)}\}^T [k] \{u^{(r)}\} = \omega_r^2 \{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(r)}\} \tag{B-8}$$

A normalização consiste em fazer na Eq. (B-8)

$$\{u^{(s)}\}^T [m] \{u^{(r)}\} = \delta_{rs}, \quad r,s = 1,2, \ldots, n \tag{B-9}$$

onde δ_{rs} é chamado de delta de Kronecker. Fazendo $\delta_{rs} = 1$, tal normalização, juntamente com a Eq. (B-8) tem a vantagem de produzir

$$\{u^{(r)}\}^T [k] \{u^{(r)}\} = \omega_r^2 \, \delta_{rs} = \omega_r^2 \tag{B-10}$$

A questão restante é quanto ao caso no qual "p" frequências naturais são iguais, onde p é um inteiro tal que $2 \leq p \leq n$. Neste caso os vetores modais associados com o repetido auto-valor são ortogonais para os restantes n-p vetores, mas em geral eles podem não ser ortogonais para qualquer outro. Felizmente, quando o problema do auto-valor é definido em função de duas matrizes simétricas reais, tal como as matrizes [m] e [k] no caso presente, os vetores modais correspondendo ao auto-valor repetido são ortogonais para qualquer outro. Realmente, de acordo com um teorema da álgebra linear, se um auto-valor de uma matriz simétrica real é repetido p vezes, então a matriz tem p mas não mais que p auto-vetores mutualmente ortogonais correspon

dentes ao auto-valor repetido. Os auto-vetores não são singularmente determinados porque, para repetidos auto-valores, qualquer combinação linear de auto-vetores associados é também um auto-vetor. Em geral, no entanto, é possível escolher p combinações lineares de auto-vetores correspondendo ao auto-valor repetido de tal modo que estas combinações constituem auto-vetores mutualmente ortogonais, determinando desta forma singularmente os auto-vetores em questão. O teorema acima é igualmente válido para o caso no qual o problema do auto-valor é definido em função de duas matrizes reais simétricas ao invés de uma, uma vez que aquele problema possa ser transformado em um que seja em função de uma simples matriz real simétrica por meio de uma transformação linear. Neste trabalho nós estamos preocupados exclusivamente com sistemas para os quais tal transformação é possível. Um sistema com repetidos auto-valores é classificado como "degenerado".

Os vetores modais podem ser convenientemente arranjados numa matriz quadrada de ordem n, conhecida como "matriz modal" e tendo a forma

$$[u] = [\{u^{(1)}\}\{u^{(2)}\} \ldots \{u^{(n)}\}] \qquad \text{(B-11)}$$

Em vista da definição (B-11) todas as n soluções do problema do auto-valor (B-1) podem ser escritas na equação matricial compacta

$$[k][u] = [m][u][\omega^2] \qquad \text{(B-12)}$$

onde $[\omega^2]$ é uma matriz diagonal das frequências naturais ao quadrado. O fato é que a matriz modal $[u]$ pode ser usada como matriz transformação não reunindo o sistema diferencial das equações de movimento causando a propriedade de ortogonalidade dos modos naturais. Se os modos são normalizados de acordo com o esquema (B-9), então nós podemos escrever, fazendo $\delta_{rs} = 1$

$$[u]^T[m][u] = [1], \quad [u]^T[k][u] = [\omega^2] \qquad \text{(B-13)}$$

onde $[1]$ é a matriz unidade. Note que a segunda das Eqs. (B-13)

vem diretamente da Eq. (B-12).

Os auto-vetores $\{u^{(r)}\}$ ($r = 1, 2, \ldots, n$) formam um conjunto linearmente independente, implicando que um vetor n-dimensional representando qualquer possível, mas por outro lado arbitrária, configuração de sistema pode ser construído como uma combinação linear destes auto-vetores. Fisicamente isto implica que qualquer movimento de sistema resultando de uma excitação arbitrária pode ser considerado, por um dado período, como uma superposição de modos naturais multiplicados por constantes apropriadas, onde as constantes são uma medida do grau de participação de cada modo. O modo normal de representação do movimento permite a transformação de um simultâneo conjunto de equações diferenciais de movimento em um conjunto independente, onde a matriz transformação é a matriz modal $[u]$. O processo de obtenção da resposta do sistema pela transformação das equações de movimento em um conjunto independente é conhecido como "análise modal".

Para provar que o conjunto de vetores $\{u^{(r)}\}$ é linearmente independente, assumimos que os vetores são linearmente dependentes e chegamos a uma contradição. Para os vetores $\{u^{(r)}\}$ serem linearmente dependentes eles devem satisfazer uma equação do tipo

$$c_1\{u^{(1)}\} + c_2\{u^{(2)}\} + \ldots + c_n\{u^{(n)}\} = \sum_{r=1}^{n} c_r\{u^{(r)}\} = \{0\} \qquad \text{(B-14)}$$

onde c_r ($r = 1,2,\ldots, n$) são constante não nulas. Pré-multiplicando a Eq. (B-14) por $\{u^{(s)}\}^T[m]$, nós obtemos

$$\sum_{r=1}^{n} c_r\{u^{(s)}\}^T[m]\{u^{(r)}\} = \{0\} \qquad \text{(B-15)}$$

Mas o produto triplo de matriz $\{u^{(s)}\}^T[m]\{u^{(r)}\}$ pela condição de ortogonalidade é igual a zero para $r \neq s$ e é diferente de zero para $r = s$. Segue-se que a Eq. (B-14) pode ser satisfeita somente se $c_s = 0$. Repetindo a operação n vezes, para $s = 1,2,\ldots,n$, nós concluimos que a Eq. (B-15) pode ser satisfeita somente no caso trivial definido por $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Logo, os autovetores $\{u^{(r)}\}$ não podem satisfazer qualquer equação do tipo (B-14), com a óbvia conclusão que o sistema de vetores modais

são linearmente independentes.

Como os vetores modais $\{u^{(r)}\}$ não podem satisfazer qualquer equação do tipo (B-14), nós devemos ter

$$\{u\} = c_1\{u^{(1)}\} + c_2\{u^{(2)}\} + \ldots + c_n\{u^{(n)}\} \neq \{0\} \qquad \text{(B-16)}$$

onde $\{u\}$ é chamado de "combinação linear" de $\{u^{(1)}\}$, $\{u^{(2)}\}$,..., $\{u^{(n)}\}$, com coeficientes c_1, c_2, ..., c_n. A totalidade de combinações lineares obtidas pela consideração dos coeficientes c_1, c_2, ..., c_n em várias formas é chamado de "espaço vetorial$\{u\}$", o qual é dito ser expandido por $\{u^{(1)}\}$, $\{u^{(2)}\}$,...,$\{u^{(n)}\}$.O conjunto de vetores $\{u^{(r)}\}$ (r = 1,2,..., n) é chamado "sistema geral" de $\{u\}$, e, por causa dos vetores $\{u^{(r)}\}$ serem independentes, o sistema geral é chamado de "base" de $\{u\}$. Logo, qualquer vetor pertencendo ao espaço $\{u\}$ pode ser generalizado na forma da combinação linear (B-16). Fisicamente isto implica que "qualquer possível movimento de um sistema pode ser descrito como uma combinação linear de vetores modais". Considerando a Eq. (B-16) e a condição de ortogonalidade, os coeficientes c_r podem ser obtidos escrevendo simplesmente

$$c_r = \{u^{(r)}\}^T[m]\{u\}, \quad r = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(B-17)}$$

onde os coeficientes c_r são a medida de contribuição dos modos associados $\{u^{(r)}\}$ ao movimento $\{u\}$. As Eqs. (B-16) e (B-17) são conhecidas em vibração sob o nome de "teorema da expansão". A obtenção da resposta de um sistema pela análise modal é baseada no teorema da expansão.

As frequências naturais ω_r e os modos naturais $\{u^{(r)}\}$ (r = 1, 2, ..., n) associados são ajustados juntos aos pares e representam a única característica do sistema. Seus valores dependem somente das matrizes $[m]$ e $[k]$. Cada um dos pares ω_r, $\{u^{(r)}\}$ pode ser excitado independentemente de qualquer outro par ω_s, $\{u^{(s)}\}$, $r \neq s$. Por exemplo, se o sistema é excitado por uma função harmônica forçada com frequência ω_r, então a configuração do sistema assemelhar-se-á com o modo natural $\{u^{(r)}\}$. (Claro, isto representa uma condição de ressonância, e o movimento tenderá a crescer sem limites até que a suposição dos pequenos

movimentos é violada). Por outro lado, se ao sistema é conferido uma excitação inicial parecida com o modo natural $\{u^{(r)}\}$, então o movimento seguinte será uma oscilação harmônica síncrona com a frequência natural ω_r. A discussão deve terminar por aqui, pois nós deveríamos dedicar a um amplo espaço para melhor entender a relação entre a resposta do sistema e os modos normais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO APÊNDICE B

[1] Hurty, W.C. and Rubinstein, M.F., Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ (1964).

[2] Tse, F.S., Morse, I.E., Hinkle, R.T., Mechanical Vibrations Theory and Applications, Allyn and Bacon Inc., Boston, MA, 2nd edition (1978).

[3] Bishop, R.E.D., Gladwell, G.M.L., Michaelson, The Matrix Analysis of Vibration, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (1965).

[4] Pestel, E.C. and Leckie, F.A., Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill Boock Co., NY (1963).

[5] Mierovitch, L., Analytical Methods in Vibrations, Macmillan Co., NY (1967).

[6] McCallian, H., Vibration of Linear Mechanical Systems, John Wiley and Sons, NY (1973).

[7] Myklestad, N.O., Fundamentals of Vibration Analysis, Mc Graw-Hill Book Co., NY (1956).

[8] Norris, C. H., Hansen, R. J., Holley, M.J., Biggs, J. M. , Namyet, S., and Minami, J.K., Structural Design for Dynamic Loads, Mc Graw-Hill Book Co., NY (1959).

APÊNDICE C - SISTEMAS SEMI-DEFINIDOS

C.1 - Generalidades

Quando um sistema é suportado de tal maneira que seja possível o movimento de todo o corpo ele é dito ser um sistema semi-definido. Tal movimento é chamado de movimento de corpo rígido. Se um corpo sofre movimento de corpo rígido, isto é, se não existem deformações elásticas, então a energia potencial é zero, pois a energia potencial é causada por efeitos elásticos, sem que todas as coordenadas sejam identicamente iguais a zero. Um sistema semi-definido semelhante é mostrado na Fig.C.1, onde o sistema consiste de 3 discos de momentos de inércia polar I_1, I_2 e I_3 conectados por 2 barras de massa desprezível de comprimento L_1 e L_2 e rigidez de torção GJ_1 e GJ_2, respectivamente. O sistema é suportado em ambas as extremidades por meio de juntas com atrito desprezível de tal maneira que o sistema pode girar livremente como um todo.

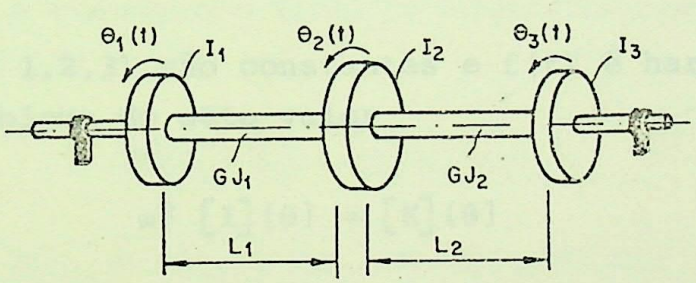


FIG. C.1 - SISTEMA SEMI-DEFINIDO

É claro que deformações de torção podem também estar presente, de modo que no geral o movimento do sistema é uma combinação de movimentos rígidos e elásticos. Chamando de $\theta_i(t)$ e $\dot{\theta}_i(t)$ (i = 1, 2, 3) os deslocamentos angulares e velocidades angulares dos três discos, a energia cinética torna-se

$$T = \frac{1}{2}(I_1\dot{\theta}_1^2 + I_2\dot{\theta}_2^2 + I_3\dot{\theta}_3^2) = \frac{1}{2}\{\dot{\theta}\}^T[I]\{\dot{\theta}\} \qquad (C-1)$$

onde a matriz inércia [I] é diagonal,

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \qquad (C-2)$$

Por outro lado, a energia potencial tem a expressão

$$V = \frac{1}{2}[K_1(\theta_2-\theta_1)^2 + K_2(\theta_3-\theta_2)^2] = \frac{1}{2}\{\theta\}^T [K]\{\theta\} \qquad (C-3)$$

onde a matriz rigidez tem a forma

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_3 \end{bmatrix} \qquad (C-4)$$

na qual usamos a notação $K_i = GJ_i/L_i$ (i = 1, 2). Assumindo movimento síncrono,

$$\theta_i(t) = \theta_i\, f(t), \quad i = 1,2,3 \qquad (C-5)$$

onde θ_i (i = 1,2,3) são constantes e f(t) é harmônico, nós chegamos no problema do auto-valor

$$\omega^2 [I]\{\theta\} = [K]\{\theta\} \qquad (C-6)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Eq. (C-6) por $\{\theta\}^T$, nós obtemos

$$\omega^2\{\theta\}^T[I]\{\theta\} = \{\theta\}^T[K]\{\theta\} \qquad (C-7)$$

Considerando a matriz (C-4), nós concluimos por inspeção que o movimento de corpo rígido é

$$\{\theta\} = \{\theta^{(0)}\} = \theta\{1\} \qquad (C-8)$$

onde {1} é a matriz coluna com todos seus elementos iguais à unidade e θ = const $\neq 0$, restituindo o lado direito da Eq. (C-7) igual a zero. Mas o produto triplo de matrizes no lado esquerdo

da Eq. (C-7) é sempre positivo,

$$\{\Theta^{(0)}\}^T [I] \{\Theta^{(0)}\} > 0 \qquad \text{(C-9)}$$

exceto quando todos $\Theta_i^{(0)}$ (i = 1,2,3) são identicamente zero, um caso indicado como trivial. Segue-se que o único caminho possível de satisfazer a Eq. (C-7) é para as frequências correspondentes a $\{\Theta^{(0)}\}$ serem zeros, $\omega_0 = 0$. Assim para um sistema semidefinido existe pelo menos um auto-valor nulo. Nós referimos ao modo definido por ω_0, $\{\Theta^{(0)}\}$ como o "modo de corpo rígido", ou "modo zero".

Como o modo de corpo rígido, definido para um vetor constante $\{\Theta^{(0)}\}$ e uma frequência natural ω_0, é a solução do problema do auto-valor (C-6), segue-se que qualquer outro autovetor deve ser ortogonal a ele, particularmente, ele deve satisfazer a condição

$$\{\Theta^{(0)}\}^T [I] \{\Theta\} = 0 \qquad \text{(C-10)}$$

como $\{\Theta^{(0)}\}^T$ é uma matriz linha de elementos idênticos e constantes, a Eq. (C-10) conduz a

$$I_1\Theta_1 + I_2\Theta_2 + I_3\Theta_3 = 0 \qquad \text{(C-11)}$$

Em vista das Eqs. (C-5), a Eq. (C-11) pode ser também escrita na forma

$$I_1\dot{\theta}_1(t) + I_2\dot{\theta}_2(t) + I_3\dot{\theta}_3(t) = 0 \qquad \text{(C-12)}$$

o que implica fisicamente que o sistema do momento angular associado com o movimento elástico é igual a zero, onde o momento é tomado em relação ao eixo coincidente com o eixo da barra. Assim, a ortogonalidade referente ao modo de corpo rígido é equivalente à conservação do momento angular.

O movimento geral de um sistema sem restrição consiste de uma combinação de modos elásticos superpostos ao movimento de corpo rígido. É claro que este tipo de movimento é possível somente para sistema sem restrição, tal como aquele mos-

trado na Fig. C-1, porque se uma das extremidades fosse fixa então o torque de reação naquela extremidade evitaria o movimento de rotação de corpo rígido. Da Eq. (C-11) nós concluimos que o movimento elástico deve ser tal que a rotação média ponderada do sistema é zero, onde os fatores ponderantes são os momentos de inércia $I_i (i = 1,2,3)$. O equivalente enunciado para um sistema discreto sem restrição em movimento de translação seria que o centro de massa do sistema estaria em repouso em qualquer tempo.

Não é difícil mostrar da Eq. (C-4) que o determinante de $[K]$ é igual a zero, de modo que $[K]$ é uma matriz singular, com a implicação que a matriz inversa $[K]^{-1}$ não existe. Lembrando que $[K]^{-1} = [a]$ é a matriz de flexibilidade, este fato pode ser facilmente explicado admitindo que para um sistema sem restrição, não é possível definir coeficientes com influência de flexibilidade. Se o interesse está em resolver o problema do auto-valor usando a matriz dinâmica $[D] = [K]^{-1}[m]$, então nós devemos descobrir uma maneira de sobrepor a singularidade da matriz $[K]$. Com esta finalidade, nós desejamos transformar o problema do auto-valor associado com o sistema sem restrição em um problema referido somente aos modos elásticos, como mostrado a seguir.

Embora existam três discos envolvidos no sistema da Fig. C-1, este não é um sistema com três graus de liberdade, porque a Eq. (C-12) pode ser considerada como uma equação obrigatória que pode ser usada para eliminar uma coordenada da formulação do problema. Realmente, se escrevemos

$$\theta_3 = -\frac{I_1}{I_2}\theta_1 - \frac{I_2}{I_3}\theta_2 \qquad \text{(C-13)}$$

então nós podemos expressar a relação entre o vetor obrigatório $\{\theta\}_c$ e o vetor arbitrário $\{\theta\}$ na forma

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{I_1}{I_3} & -\frac{I_2}{I_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{I_1}{I_3} & -\frac{I_2}{I_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{(C-14)}$$

onde notamos que a coordenada θ_3 não é realmente necessária na solução para o sistema com movimento elástico, porque ela é au

tomaticamente determinada no momento em que θ_1 e θ_2 são conhecidos. Isto não é único de θ_3, pois poderíamos eliminar também θ_1 ou θ_2 da formulação do problema sem afetar os resultados finais. Uma expressão similar a (C-14) existe para as velocidades angulares $\dot{\theta}_i$ (i = 1,2,3), de modo que podemos escrever

$$\{\theta\}_c = [C]\{\theta\}, \quad \{\dot{\theta}\}_c = [C]\{\dot{\theta}\} \tag{C-15}$$

onde

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{I_1}{I_3} & -\frac{I_2}{I_3} \end{bmatrix} \tag{C-16}$$

representa o papel de uma matriz obrigatória. Notamos novamente que enquanto os vetores obrigatórios $\{\theta\}_c$ e $\{\dot{\theta}\}_c$ possui três elementos, os vetores arbitrários $\{\theta\}$ e $\{\dot{\theta}\}$ nas Eqs. (C-15) possuem somente dois elementos. As transformações lineares (C-15) podem ser usadas para reduzir a energia potencial e cinética para expressões somente em θ_1 e θ_2. De fato, inserindo as Eqs. (C - 15) na Eq. (C-1) e na Eq. (C-3) e admitindo que os vetores da Eq. (C-1) e da Eq. (C-3) são obrigatórios, nós obtemos

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{\theta}\}_c^T[I]\{\dot{\theta}\}_c = \frac{1}{2}\{\dot{\theta}\}^T[C]^T[I][C]\{\dot{\theta}\} = \frac{1}{2}\{\dot{\theta}\}^T[I']\{\dot{\theta}\} \tag{C-17}$$

e

$$V = \frac{1}{2}\{\theta\}_c^T[K]\{\theta\}_c = \frac{1}{2}\{\theta\}^T[C]^T[K][C]\{\theta\} = \frac{1}{2}\{\theta\}^T[K']\{\theta\} \tag{C-18}$$

onde

$$[I'] = [C]^T[I][C] = \frac{1}{I_3}\begin{bmatrix} I_1^2 + I_3^2 & I_1 I_2 \\ I_1 I_2 & I_2^2 + I_3^2 \end{bmatrix} \tag{C-19}$$

e

$$[K'] = [C]^T[K][C]$$

$$[K'] = \frac{1}{I_3^2}\begin{bmatrix} K_1 I_3^2 + K_2 I_1^2 & -K_1 I_3^2 + K_2 I_1 (I_2+I_3) \\ -K_1 I_3^2 + K_2 I_1 (I_2+I_3) & (K_1+K_2) I_3^2 + K_2 I_2 (2I_2+I_3) \end{bmatrix} \quad (C-20)$$

são matrizes simétricas 2 x 2 definidas com certeza.

O problema do auto-valor associado com o sistema transformado torna-se

$$\omega^2 [I']\{\Theta\} = [K']\{\Theta\} \quad (C-21)$$

que possui todas as características associadas com um sistema positivo definido. Sua solução consiste de modos naturais $\{\Theta^{(1)}\}$, $\{\Theta^{(2)}\}$ e as frequências naturais associadas ω_1, ω_2, respectivamente. Os modos $\{\Theta^{(1)}\}$ e $\{\Theta^{(2)}\}$ fornecem somente as rotações dos discos 1 e 2. As rotações do disco 3 nestes modos elásticos são obtidos considerando a primeira das Eqs. (C-15), e escrevendo

$$\{\Theta^{(1)}\}_c = [C]\{\Theta^{(1)}\}, \quad \{\Theta^{(2)}\}_c = [C]\{\Theta^{(2)}\} \quad (C-22)$$

onde os elementos dos modos obrigatórios $\{\Theta^{(1)}\}_c$ e $\{\Theta^{(2)}\}_c$ são tais que a Eq. (C-11) é satisfeita automaticamente.

Nós insistimos novamente que as Eqs. (C-22) representam somente os modos elásticos. Em compensação, para este sistema semi-definido, nós temos o modo de corpo rígido $\{\Theta^{(0)}\}=\Theta_0\{1\}$ com a frequência natural $\omega_0 = 0$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO APÊNDICE C

[1] Loewy, R.G. and Piarulli, V.J., Dynamics of Rotating Shafts, SVIC (1969).

[2] Tong, K.N., Theory of Mechanical Vibration, John Wiley and Sons, NY (1960).

[3] Ker Wilson, Practical Solution of Torsional Vibration Problems, Vol. I-V, John Wiley and Sons, NY, 2nd edition (1956-1965).

[4] Tuplin, W.A., Torsional Vibrations, Sir Issac Pitman and Sons, Ltd., London, UK, 2nd edition (1966).

[5] Manley, R. G., Fundamentals of Vibration Study, Chapman and Hall, Ltd., London, UK (1942).

[6] Dimarogonas, A.D., Vibration Engineering, West Publ.Co., St. Paul, MN (1976).

[7] Jacobsen, L.S. and Ayre, R.S., Engineering Vibrations, McGraw-Hill Book Co., NY (1958).

APÊNDICE D - PROGRAMAS ELABORADOS

D.1. Descrição geral dos programas

O primeiro programa determina as N primeiras frequências naturais de vibração transversal de vigas ou eixos e seus modos normais de vibração correspondentes, pelo método das matrizes de Transferência, sendo N o número de massas pontuais, na modelagem do sistema.

O segundo programa determina as N primeiras frequências naturais de vibração torcional de eixos e seus modos normais de vibração através do método das matrizes de Transferência, sendo N o número de discos considerados para a modelagem do eixo.

O terceiro programa calcula as primeiras frequências naturais de vibração transversal de vigas ou eixos e seus modos de vibração utilizando-se o método dos Elementos Finitos para N elementos na divisão do sistema.

D.2. Dados

São fornecidos os seguintes dados básicos:

PROGRAMA Nº 1

L(k) = Comprimento do trecho k em [m];
M(k) = Massa do trecho k em [kg];
E(k) = Módulo de Elasticidade do trecho k em [N/m^2];
I(k) = Momento de Inércia do trecho k em [m^4];
N(k) = Número de massas pontuais a considerar no trecho k.

PROGRAMA Nº 2

L(k) = Comprimento do trecho k em [m];
M(k) = Massa do trecho k em [kg];
G(k) = Módulo de Elasticidade transversal do trecho k em [N/m^2];
R(k) = Raio do trecho k em [m];
N(k) = Número de discos a considerar no trecho k.

PROGRAMA Nº 3

NV = Número de elementos da viga;
L(I) = Comprimento do elemento I em [m];
M(I) = Massa do elemento I em [kg];
E(I) = Módulo de Elasticidade do elemento I em [N/m^2];
I(I) = Momento de Inércia do elemento I em [m^4].

```
 10 REM ------------------------------------------------------------
 20 REM ------------------------------------------------------------
 30 REM
 40 REM ---------- POS-GRADUACAO EM ENGENHARIA MECANICA ------------
 50 REM
 60 REM ---------------------- P R O G R A M A   No 01 -------------
 70 REM
 80 REM ------ DETERMINACAO DAS PRIMEIRAS FREQUENCIAS NATURAIS
 90 REM        DE VIGAS OU EIXOS A FLEXAO PELO METODO DAS
100 REM        MATRIZES DE TRANSFERENCIA
110 REM
120 REM ------------------------------------------------------------
130 REM ------------------------------------------------------------
140 REM
150 REM
160 REM
170 REM ----------DIMENSOES DAS MATRIZES C, P , T  e D
180 REM
190 DIM C[4,4],P[4,4],T[4,4],D[30,50]
200 REM
210 REM -------- VARIAVEIS INTEIRAS
220 REM
230 INTEGER H1,H2,A,F,J,N,N1
240 REM
250 REM
260 REM -------- ENTRADA DO NUMERO DE TRECHOS DA VIGA
270 REM
280 PRINT TAB(10);"ENTRE COM O NUMERO DE TRECHOS"
290 INPUT S
300 REM -------- ENTRADA DAS CARACTERISTICAS DE CADA TRECHO
310 REM            NO SISTEMA MKS
320 REM
330 FOR K=1 TO S
340   IMAGE "ENTRE COM OS VALORES DE ","L(",1D,")",X,", M(",1D,")"
350   PRINT USING 340;K,K
360   INPUT L[K],M[K]
370   IMAGE "ENTRE COM OS VALORES DE ","E(",1D,")",X,", I(",1D,")",X,
"e N(",1D,")"
380   PRINT USING 370;K,K,K
390   INPUT E[K],I[K],N[K]
400 NEXT K
410 REM ------- LEITURA DAS MATRIZES DE TRANSFERENCIA CAMPO
420 REM
430 DATA 1,9,9,9,0,1,9,9,0,0,1,9,0,0,0,1
440 MAT READ C
450 REM ------- LEITURA DA MATRIZ DE TRANSFERENCIA PONTO
460 REM
470 DATA 1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,9,0,0,1
480 MAT READ P
490 REM ------- CALCULO DO NUMERO N TOTAL DE MASSAS CONCENTRADAS
500 REM
510 N=0
520 FOR K=1 TO S
530   N=N+N[K]
540 NEXT K
550 A=1
560 F=1,W=10,W1=50
570 GOSUB 1570
580 REM ------- CALCULO DA MATRIZ T TOTAL DE TRANSFERENCIA
```

```
590 REM          USANDO UMA SUB-ROTINA
600 REM
610 IF A=1 THEN 730
620 IF A=2 THEN 710
630 IF A=3 THEN 690
640 REM
650 REM ------- CALCULO DOS DETERMINANTES
660 REM
670 F1=T[1,3]*T[3,4]-T[1,4]*T[3,3]
680 GOTO 740
690 F1=T[3,3]*T[4,4]-T[3,4]*T[4,3]
700 GOTO 740
710 F1=T[1,3]*T[2,4]-T[1,4]*T[2,3]
720 GOTO 740
730 F1=T[1,2]*T[3,4]-T[1,4]*T[3,2]
740 REM
750 REM
760 REM ------- A FUNCAO DETERMINANTE NAO TROCA DE SINAL
770 REM
780 W=W+W1
790 REM -------- CALCULO DA MATRIZ T TOTAL DE TRANSFERENCIA
800 REM          PARA NOVO VALOR DE W ATRAVES DA MESMA SUB-
810 REM          ROTINA
820 REM
830 GOSUB 1570
840 IF A=1 THEN 960
850 IF A=2 THEN 940
860 IF A=3 THEN 920
870 REM
880 REM ------- CALCULO DOS DETERMINANTES PARA NOVO VALOR DE W
890 REM
900 F2=T[1,3]*T[3,4]-T[1,4]*T[3,3]
910 GOTO 970
920 F2=T[3,3]*T[4,4]-T[3,4]*T[4,3]
930 GOTO 970
940 F2=T[1,3]*T[2,4]-T[1,4]*T[2,3]
950 GOTO 970
960 F2=T[1,2]*T[3,4]-T[1,4]*T[3,2]
970 IF W1<=.005 THEN 1110
980 REM
990 REM ------- PESQUISA DE RAIZES
1000 REM
1010 H1=1,H2=1
1020 IF F1>0 THEN H1=0
1030 IF F2>0 THEN H2=0
1040 IF H1=H2 THEN 780
1050 REM
1060 REM ------- A FUNCAO DETERMINANTE TROCA DE SINAL
1070 REM
1080 W=W-W1
1090 W1=W1/2
1100 GOTO 780
1110 IF F>1 THEN 1350
1120 REM
1130 REM ------- ESCOLHA DO TIPO DE APOIO DA VIGA
1140 REM
1150 IF A<2 THEN 1210
1160 IF A<3 THEN 1300
1170 IF A<4 THEN 1320
1180 GOTO 1340
```

```
1190 REM ------- SAIDA DAS FREQUENCIAS NATURAIS
1200 REM
1210 FOR K=1 TO S
1220   PRINT LIN(1);TAB(25);"CARACTERISTICAS DO TRECHO";K
1230   IMAGE /,13X,"L(",1D,")=",X2D.2DX,"m , M(",1D,")=",X4D.4DX,"Kg ,
E(",1D,")=",X1D.1DEX,"N/m2"
1240   IMAGE 13X,"I(",1D,")=",X1D.1DEX,"m4  e  N(",1D,")=",X2D
1250   PRINT USING 1230;K,L[K],K,M[K],K,E[K]
1260   PRINT USING 1240;K,I[K],K,N[K]
1270 NEXT K
1280 PRINT LIN(3);TAB(22);"FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA BI-APOIADA"
1290 GOTO 1350
1300 PRINT LIN(3);TAB(22);&
    "FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA BI-ENGASTADA"
1310 GOTO 1350
1320 PRINT LIN(3);TAB(22);&
    "FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE"
1330 GOTO 1350
1340 PRINT LIN(3);TAB(22);&
    "FREQUENCIAS NATURAIS PARA VIGA ENGASTADA-APOIADA"
1350 IMAGE /,30X,1D,")",2X,"W =",X6D.2DX,"(rd/s)"
1360 PRINT USING 1350;F,W
1370 GOSUB 1980
1380 REM
1390 REM ------- CALCULO DA NOVA FREQUENCIA
1400 REM
1410 F=F+1
1420 IF F>N THEN 1460
1430 W1=150*F
1440 W=W+W1
1450 GOTO 570
1460 A=A+1
1470 REM ------- FIM DA EXECUCAO
1480 REM
1490 IF A>4 THEN END
1500 GOTO 560
1510 REM ------- SUB-ROTINA PARA CALCULO DA MATRIZ TOTAL T
1520 REM          DE TRANSFERENCIA
1530 REM
1540 REM ------- A MATRIZ T DE TRANSFERENCIA INICIALMENTE E IGUAL
1550 REM          'A MATRIZ IDENTIDADE
1560 REM
1570 FOR K=1 TO 4
1580   FOR Z=1 TO 4
1590     T[K,Z]=0
1600     IF K=Z THEN T[K,Z]=1
1610   NEXT Z
1620 NEXT K
1630 REM ------- CICLO DA SUB-ROTINA PARA DETERMINAR A MATRIZ T
1640 REM          EM CADA TRECHO DA VIGA
1650 REM
1660 FOR K=1 TO S
1670   N1=N[K]
1680   X=L[K]/(N[K]+1)
1690   M1=M[K]/N[K]
1700   Y1=2*E[K]*I[K]
1710   Y2=X*X
1720   C[1,2]=X
1730   C[1,3]=Y2/Y1
1740   C[1,4]=(Y2*X)/(3*Y1)
```

```
1750    C[2,3]=(2*X)/Y1
1760    C[2,4]=C[1,3]
1770    C[3,4]=X
1780    P[4,1]=M1*W*W
1790    J=2
1800    MAT T=C*T
1810    MAT T=P*T
1820    MAT T=C*T
1830    IF J>N1 THEN 1910
1840    J=J+1
1850    GOTO 1810
1860    REM -------- MATRIZ T TOTAL PARA CADA TRECHO
1870    REM
1880    REM -------- MULTIPLICACAO DA MATRIZ T DO TRECHO ANTERIOR
1890    REM          PELA MATRIZ DO TRECHO SEGUINTE
1900    REM
1910 NEXT K
1920 RETURN
1930 REM
1940 REM
1950 REM -------- CALCULO DOS MODOS NORMAIS PARA CADA FRE-
1960 REM          QUENCIA ATRAVES DE UMA SUB-ROTINA
1970 REM
1980 IF A=1 THEN Q1=-T[1,2]/T[1,4]
1990 IF A=2 THEN Q1=-T[1,3]/T[1,4]
2000 IF A=3 THEN Q1=-T[3,3]/T[3,4]
2010 IF A=4 THEN Q1=-T[1,3]/T[1,4]
2020 FOR K=1 TO 4
2030    FOR Z=1 TO 4
2040       T[K,Z]=0
2050       IF K=Z THEN T[K,Z]=1
2060    NEXT Z
2070 NEXT K
2080 FOR K=1 TO S
2090    N1=N[K]
2100    X=L[K]/(N[K]+1)
2110    M1=M[K]/N[K]
2120    Y1=2*E[K]*I[K]
2130    Y2=X*X
2140    C[1,2]=X
2150    C[1,3]=Y2/Y1
2160    C[1,4]=(Y2*X)/(3*Y1)
2170    C[2,3]=(2*X)/Y1
2180    C[2,4]=C[1,3]
2190    C[3,4]=X
2200    P[4,1]=M1*W*W
2210    FOR Z=1 TO N[K]
2220       MAT T=C*T
2230       D[K,Z]=T[1,3]+T[1,4]*Q1
2240       IF A=1 THEN D[K,Z]=T[1,2]+T[1,4]*Q1
2250       MAT T=P*T
2260       IF Z=N[K] THEN MAT T=C*T
2270    NEXT Z
2280 NEXT K
2290 REM
2300 REM ------- NORMALIZACAO DOS MODOS
2310 REM
2320 V=ABS(D[1,1])
2330 FOR K=1 TO S
2340    FOR Z=1 TO N[K]
```

```
2350       IF V<=ABS(D[K,Z]) THEN V=ABS(D[K,Z])
2360     NEXT Z
2370   NEXT K
2380   REM
2390   REM ------- SAIDA DOS MODOS NORMAIS DE VIBRACAO
2400   REM           PARA CADA FREQUENCIA NATURAL
2410   REM
2420   PRINT LIN(1);TAB(34);"MODOS NORMAIS"
2430   FOR K=1 TO S
2440     FOR Z=1 TO N[K]
2450       D[K,Z]=D[K,Z]/V
2460       PRINT TAB(34);D[K,Z]
2470     NEXT Z
2480   NEXT K
2490   RETURN
2500   REM ------------------------------------------------------
2510   REM ------------------------------------------------------
```

```
 10 REM ------------------------------------------------------------
 20 REM ------------------------------------------------------------
 30 REM
 40 REM ---------- POS-GRADUACAO EM ENGENHARIA MECANICA ------------
 50 REM
 60 REM --------------------- P R O G R A M A   No 02 --------------
 70 REM
 80 REM ------ DETERMINACAO DAS PRIMEIRAS FREQUENCIAS NATURAIS
 90 REM        DE EIXOS A TORCAO PELO METODO DAS MATRIZES DE
100 REM        TRANSFERENCIA
110 REM
120 REM ------------------------------------------------------------
130 REM ------------------------------------------------------------
140 REM
150 REM
160 REM
170 REM -------- DIMENSOES DAS MATRIZES  C, P, T e D
180 REM
190 DIM C[2,2],P[2,2],T[2,2],D[50;50]
200 REM
210 REM -------- VARIAVEIS INTEIRAS
220 REM
230 INTEGER H1,H2,A,F,J,N,N1
240 REM
250 REM ---------- ENTRADA DO NUMERO DE TRECHOS DO EIXO
260 REM
270 PRINT TAB(10);"ENTRE COM O NUMERO DE TRECHOS"
280 INPUT S
290 REM -------- ENTRADA DAS CARACTERISTICAS DE CADA TRECHO
300 REM            NO SISTEMA MKS
310 REM
320 FOR K=1 TO S
330   IMAGE "ENTRE COM OS VALORES DE ","L(",1D,")",X,", M(",1D,")",X,
",G(",1D,")",X,",R(",1D,")",X," e N(",1D,")"
340   PRINT USING 330;K,K,K,K,K
350   INPUT L[K],M[K],G[K],R[K],N[K]
360 NEXT K
370 REM ------- LEITURA DAS MATRIZES DE TRANSFERENCIA CAMPO
380 REM
390 DATA 1,9,0,1,1,0,9,1
400 MAT READ C,P
410 REM
420 REM ------- CALCULO DO NUMERO N TOTAL DE MASSAS CONCENTRADAS
430 REM
440 N=0
450 FOR K=1 TO S
460   N=N+N[K]
470 NEXT K
480 A=1,E1=0
490 F=1,W=0,W1=500
500 GOSUB 1440
510 REM ------- CALCULO DA MATRIZ T TOTAL DE TRANSFERENCIA
520 REM          USANDO UMA SUB-ROTINA
530 REM
540 IF A=1 THEN 630
550 IF A=2 THEN 610
560 REM
570 REM ------- CALCULO DOS DETERMINANTES
580 REM
```

```
590 F1=T[1,2]
600 GOTO 640
610 F1=T[1,1]
620 GOTO 640
630 F1=T[2,1]
640 IF ABS(F1)=E1 THEN 990
650 REM
660 REM ------- A FUNCAO DETERMINANTE NAO TROCA DE SINAL
670 REM
680 W=W+W1
690 REM -------- CALCULO DA MATRIZ T TOTAL DE TRANSFERENCIA
700 REM          PARA NOVO VALOR DE W ATRAVES DA MESMA SUB-
710 REM          ROTINA
720 REM
730 GOSUB 1440
740 IF A=1 THEN 830
750 IF A=2 THEN 810
760 REM
770 REM ------- CALCULO DOS DETERMINANTES PARA NOVO VALOR DE W
780 REM
790 F2=T[1,2]
800 GOTO 840
810 F2=T[1,1]
820 GOTO 840
830 F2=T[2,1]
840 REM
850 IF W1<=.005 THEN 990
860 REM
870 REM ------- PESQUISA DE RAIZES
880 REM
890 H1=1,H2=1
900 IF F1>0 THEN H1=0
910 IF F2>0 THEN H2=0
920 IF H1=H2 THEN 680
930 REM
940 REM ------- A FUNCAO DETERMINANTE TROCA DE SINAL
950 REM
960 W=W-W1
970 W1=W1/2
980 GOTO 680
990 IF F>1 THEN 1210
1000 REM
1010 REM --------- ESCOLHA DO TIPO DE APOIO DO EIXO
1020 REN
1030 IF A<2 THEN 1080
1040 IF A<3 THEN 1170
1050 GOTO 1200
1060 REM ------- SAIDA DAS FREQUENCIAS NATURAIS
1070 REM
1080 FOR K=1 TO S
1090   PRINT LIN(1);TAB(29);"CARACTERISTICAS DO TRECHO";K
1100   IMAGE /,13X,"L(",1D,")=",X2D.2DX,"m , M(",1D,")=",X4D.4DX,"Kg
G(",1D,")=",X1D.1DEX,"N/m2"
1110   IMAGE 13X,"R(",1D,")=",X1D.4DX,"m e N(",1D,")=",X2D
1120   PRINT USING 1100;K,L[K],K,M[K],K,G[K]
1130   PRINT USING 1110;K,R[K],K,N[K]
1140 NEXT K
1150 PRINT LIN(3);TAB(22);"FREQUENCIAS NATURAIS PARA EIXO BI-APOIADO"
1160 GOTO 1210
1170 PRINT LIN(3);TAB(22);&
```

```
    "FREQUENCIAS NATURAIS PARA EIXO ENGASTADO-LIVRE OU"
1180 PRINT TAB(22);"ENGASTADO-APOIADO"
1190 GOTO 1210
1200 PRINT LIN(3);TAB(22);&
    "FREQUENCIAS NATURAIS PARA EIXO BI-ENGASTADO"
1210 IMAGE /,30X,1D,")",2X,"W =",X6D.2DX,"(rd/s)"
1220 PRINT USING 1210;F,W
1230 GOSUB 1790
1240 REM
1250 REM -------- CALCULO DA NOVA FREQUENCIA
1260 REM
1270 F=F+1
1280 IF F>N THEN 1320
1290 W1=500
1300 W=W+W1
1310 GOTO 500
1320 A=A+1
1330 REM
1340 REM ------- FIM DA EXECUCAO
1350 REM
1360 IF A>3 THEN END
1370 GOTO 490
1380 REM ------- SUB-ROTINA PARA CALCULO DA MATRIZ TOTAL T
1390 REM          DE TRANSFERENCIA
1400 REM
1410 REM ------- A MATRIZ T DE TRANSFERENCIA INICIALMENTE E IGUAL
1420 REM          'A MATRIZ IDENTIDADE
1430 REM
1440 FOR K=1 TO 2
1450   FOR Z=1 TO 2
1460     T[K,Z]=0
1470     IF K=Z THEN T[K,Z]=1
1480   NEXT Z
1490 NEXT K
1500 REM -------- CICLO DA SUB-ROTINA PARA DETERMINAR A
1510 REM          MATRIZ T EM CADA TRECHO DO EIXO
1520 REM
1530 FOR K=1 TO S
1540   N1=N[K]
1550   X=L[K]/(N[K]+1)
1560   M1=M[K]/N[K]
1570   I[K]=M1*R[K]*R[K]/2
1580   J[K]=3.14159*R[K]*R[K]*R[K]*R[K]/2
1590   C[1,2]=X/(J[K]*G[K])
1600   P[2,1]=-W*W*I[K]
1610   J=2
1620   MAT T=C*T
1630   MAT T=P*T
1640   IF J>N1 THEN 1690
1650   J=J+1
1660   GOTO 1620
1670   REM ------- MATRIZ T TOTAL PARA CADA TRECHO
1680   REM
1690   MAT T=C*T
1700   REM ------- MULTIPLICACAO DA MATRIZ T DO TRECHO ANTERIOR
1710   REM          PELA MATRIZ DO TRECHO SEGUINTE
1720   REM
1730 NEXT K
1740 RETURN
1750 REM
```

```
1760 REM ------- CALCULO DOS MODOS NORMAIS PARA CADA FREQUENCIA
1770 REM         NATURAL ATRAVES DE UMA SUB-ROTINA
1780 REM
1790 FOR K=1 TO 2
1800   FOR Z=1 TO 2
1810     T[K,Z]=0
1820     IF K=Z THEN T[K,Z]=1
1830   NEXT Z
1840 NEXT K
1850 FOR K=1 TO S
1860   X=L[K]/(N[K]+1)
1870   M1=M[K]/N[K]
1880   I[K]=(M1*R[K]*R[K])/2
1890   J[K]=3.14159*R[K]*R[K]*R[K]*R[K]/2
1900   C[1,2]=X/(J[K]*G[K])
1910   P[2,1]=-W*W*I[K]
1920   FOR Z=1 TO N[K]
1930     MAT T=C*T
1940     D[K,Z]=T[1,2]
1950     IF A=1 THEN D[K,Z]=T[2,2]
1960     MAT T=P*T
1970   NEXT Z
1980   MAT T=C*T
1990 NEXT K
2000 REM
2010 REM ------- NORMALIZACAO DOS MODOS DE VIBRACAO
2020 REM
2030 V=ABS(D[1,1])
2040 FOR K=1 TO S
2050   FOR Z=1 TO N[K]
2060     IF V<=ABS(D[K,Z]) THEN V=ABS(D[K,Z])
2070   NEXT Z
2080 NEXT K
2090 REM
2100 REM ------- SAIDA DOS MODOS NORMAIS DE VIBRACAO PARA
2110 REM         CADA FREQUENCIA NATURAL
2120 REM
2130 PRINT LIN(1);TAB(34);"MODOS NORMAIS"
2140 FOR K=1 TO S
2150   FOR Z=1 TO N[K]
2160     D[K,Z]=D[K,Z]/V
2170     PRINT TAB(34);D[K,Z]
2180   NEXT Z
2190 NEXT K
2200 RETURN
2210 REM ------------------------------------------------------
2220 REM ------------------------------------------------------
```

D.5 - Terceiro Programa Elaborado.

```
$CONTROL INIT
$CONTROL FILE=03-06
C     ------------------------------------------------------------
C     ------------------------------------------------------------
C
C                  POS-GRADUACAO EM ENGENHARIA MECANICA
C
C     ------------------------------------------------------------
C     ---                                                      ---
C     ---------- P R O G R A M A   No. 3 ---------------------
C     --                                                       ---
C     ---------- DETERMINACAO DAS PRIMEIRAS FREQUENCIAS -----
C     ---------- NATURAIS DE VIGAS OU EIXOS 'A   FLEXAO -----
C     ---------- PELO METODO DOS ELEMENTOS FINITOS.     -----
C     ---                                                      ---
C     ------------------------------------------------------------
C
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION V1(20),V2(20),COL1(200),LV(20),MV(20)
      DIMENSION D(22,22),Y(20,20),Z(20,20),RCHOL(22,22)
      DIMENSION X(22,22),EIG(20),X5(20,20),VEX(20,20)
      DIMENSION VALU(20),W(20),SUBMX(20,20),X3(22,4),X4(22,22)
      DIMENSION A(4,22),AT(22,4),X1(22,4),X2(22,22)
      DOUBLE PRECISION MASS(22,22),MATM(22,22),MATK(22,22)
      DOUBLE PRECISION LC,DL,ML,MEL,MOIN,MS(4,4),MK(4,4)
      CHARACTER*20 TIPOV(4)
      CHARACTER*80 STRING
      CHARACTER*30 IT
      CHARACTER*1 IFR,ENT
      SYSTEM INTRINSIC COMMAND
      DATA TIPOV/"BI-APOIADA","BI-ENGASTADA","ENGASTADA LIVRE",
     *"ENGASTADA E APOIADA"/
      DATA NINT/15000/
C
C     Comandos implicitos  do sistema
C
      DISPLAY "deseja listagem na impressora?"
      ACCEPT ENT
      IF(ENT.EQ."N") GO TO 1
      STRING="FILE FTN04;DEV=LP;CCTL"
      STRING[23:1]=%15C
      CALL COMMAND(STRING,IERR,IPARM)
      IF(IERR.EQ.0) GO TO 1
    2 DISPLAY "### ERRO - COMANDO ###"
      DISPLAY "ERRO --> ", IERR
      DISPLAY "PARAMETRO --> ",IPARM
      GO TO 500
C
C     Determinacao das matrizes resultantes
C
    1 WRITE(4,700)
  700 FORMAT(///10X,"CALCULO DE FREQUENCIAS NATURAIS"/
     *10X,"E MODOS DE VIBRAR DE VIGAS E EIXOS "//
     *10X,"- METODO DOS ELEMENTOS FINITOS "///)
      DISPLAY "No. de elementos da viga"
      ACCEPT NV
```

```
      NA=NV+NV+2
      K=0
      WRITE(4,701)
  701 FORMAT(2X,"ELEMENTO",4X,"L",12X,"M",10X,"E",13X,"I"//)
      DO 20 I=1,NV
         DISPLAY "Elementos No. ",I
         DISPLAY "Comprimento "
         ACCEPT LC
         DISPLAY "Massa"
         ACCEPT ML
         DISPLAY "Modulo de elasticidade "
         ACCEPT MEL
         DISPLAY "Momento de inercia "
         ACCEPT MOIN
         DISPLAY "----------------------------"
         DL=ML/LC
C
C     Elementos da matriz massa
C
         MS(1,1)=156.
         MS(1,2)=22*LC
         MS(1,3)=54.
         MS(1,4)=-13*LC
         MS(2,1)=22*LC
         MS(2,2)=4*LC*LC
         MS(2,3)=13*LC
         MS(2,4)=-3*LC*LC
         MS(3,1)=54.
         MS(3,2)=13*LC
         MS(3,3)=156.
         MS(3,4)=-22*LC
         MS(4,1)=-13*LC
         MS(4,2)=-3*LC*LC
         MS(4,3)=-22*LC
         MS(4,4)=4*LC*LC
C
C     Elementos da matriz rigidez
C
         MK(1,1)=12.
         MK(1,2)=6*LC
         MK(1,3)=-12.
         MK(1,4)=6*LC
         MK(2,1)=6*LC
         MK(2,2)=4*LC*LC
         MK(2,3)=-6*LC
         MK(2,4)=2*LC*LC
         MK(3,1)=-12.
         MK(3,2)=-6*LC
         MK(3,3)=12.
         MK(3,4)=-6*LC
         MK(4,1)=6*LC
         MK(4,2)=2*LC*LC
         MK(4,3)=-6*LC
         MK(4,4)=4*LC*LC
         DO 21 L=1,4
         DO 21 J=1,4

C
```

```
115      C      Matriz massa
116      C
117                   MS(L,J)=MS(L,J)*LC*DL/420.
118      C
119      C      Matriz rigidez
120      C
121                   MK(L,J)=MK(L,J)*MEL*MOIN/(LC**3)
122         21     CONTINUE
123      C
124      C      Montagem da matriz A
125      C
126                DO 22 J=1,4
127                   IF(K.NE.0) A(J,(J+K-2))=0.
128                   A(J,(J+K))=1.
129         22     CONTINUE
130      C
131      C      Transposta da matriz A
132      C
133                DO 23 L=1,4
134                DO 23 J=1,NA
135                   AT(J,L)=A(L,J)
136         23     CONTINUE
137                CALL MULTIMAT(AT,MS,NA,4,X1)
138                CALL MULTIMAT(X1,A,NA,NA,X2)
139                CALL MULTIMAT(AT,MK,NA,4,X3)
140                CALL MULTIMAT(X3,A,NA,NA,X4)
141      C
142      C       Montagem das matrizes M e K para o sistema completo
143      C
144                DO 24 L=1,NA
145                DO 24 J=1,NA
146                   MATM(L,J)=MATM(L,J)+X2(L,J)
147                   MATK(L,J)=MATK(L,J)+X4(L,J)
148         24     CONTINUE
149                K=K+2
150             WRITE(4,3011) I,LC,ML,MEL,MOIN
151          3011 FORMAT(5X,I2,3X,F6.3,5X,F8.4,5X,D10.4,5X,D10.4)
152            20 CONTINUE
153             DISPLAY "Qual e' a precisao desejada "
154             ACCEPT ERR
155             DISPLAY "TIPO DE APOIO"
156             ACCEPT IV
157             WRITE(6,601) TIPOV(IV).
158             WRITE(4,601) TIPOV(IV)
159            601 FORMAT(1H1,18X,"VIGA ",S)
160             CALL TIPOVIGA(MATM,IV,MASS,N,NA)
161             CALL TIPOVIGA(MATK,IV,RCHOL,N,NA)
162      C----------Inversao da matriz Rigidez
163             CALL INVER(RCHOL,N,D)
164      C---------Multiplicao de matrizes
165             DO 99 I=1,N
166             DO 99 J=1,N
167             X(I,J)=0.
168             DO 99 K=1,N
169             X(I,J)=X(I,J)+D(I,K)*MASS(K,J)
170            99 CONTINUE
171             DO 10 I=1,N
```

```
172           DO 10 J=1,N
173         10 X5(I,J)=X(I,J)
174           LL=N-1
175           NN=N
176           DO 1000 L=1,LL
177           CALL ITER(X5,NN,ERR,B,EIG,MAQ,KK,NINT,NL)
178           IF(MAQ)2000,2000,2001
179        2001 WRITE(6,2002) NL,L
180        2002 FORMAT(1X,"Nao convergir, depois de ",I4," Loops, ",
181           *"interrompeu no vetor No. ",I2)
182           GOTO 500
183        2000 CONTINUE
184        C---------Se esta e' a primeira chamada da iteracao, EIG e'
185        C---------o verdadeiro Autovetor e pode ser gravado.
186           IF(L-1)3000,3000,3001
187        3000 DO 3002 K=1,N
188        3002 VEX(K,1)=EIG(K)
189        3001 VALU(L)=B
190           DO 4000 I=1,NN
191           DO 4000 J=1,NN
192        4000 SUBMX(I,J)=EIG(I)*X5(KK,J)
193           DO 5000I=1,NN
194           DO 5000 J=1,NN
195        5000 SUBMX(I,J)=X5(I,J)-SUBMX(I,J)
196        C---------Remove uma linha e uma coluna da matriz X5.
197           NN=NN-1
198           II=0
199           DO 6000 I=1,NN
200          25 II=II+1
201           IF(II-KK)26,25,26
202          26 CONTINUE
203           JJ=0
204           DO 6000 J=1,NN
205          28 JJ=JJ+1
206           IF(JJ-KK)27,28,27
207          27 X5(I,J)=SUBMX(II,JJ)
208        6000 CONTINUE
209        1000 CONTINUE
210        C---------Ultimo Autovalor e' o ultimo elemento de X5
211           VALU(N)=X5(1,1)
212        C---------Todos autovalores estao em VALU.
213           DO 333 I=1,N
214           W(I)=SQRT(1./ABS(VALU(I)))
215         333 CONTINUE
216           WRITE(6,103)
217           WRITE(4,103)
218         103 FORMAT(//5X,"AUTOVALORES"/)
219           WRITE(4,3012) (W(I),I=1,N)
220        3012 FORMAT(1X,12(G9.3,2X))
221           WRITE(6,3013) (W(I),I=1,N)
222        3013 FORMAT(1X,8F8.2)
223           NK=N-1
224        C---------Calculo dos autovetores no. 2/N.
225           DO 888 L=2,N
226        C---------Monta a coluna do lado direito.
227           DO 37 I=2,N
228            III=I-1
```

```
229        37 V1(III)=-X(I,1)
230      C---------Monta a matriz reduzida
231            DO 1500 I=1,NK
232            DO 1500 J=1,NK
233            MJ = J +1
234            MI = I+1
235       1500 SUBMX(I,J)=X( MI , MJ)
236      C---------Subtrai o autovalor dos elementos da diagonal.
237            DO 750 M=2,N
238            MM = M -1
239         750 SUBMX(MM,MM  )=X(M,M)-VALU(L)
240            DO 68 J=1,NK
241            DO 68 I=1,NK
242            LL=(J-1)*NK+I
243          68 COL1(LL)=SUBMX(I,J)
244            CALL MINV(COL1,NK,D)
245            DO 771 I=1,NK
246         771 Z(I,1)=V1(I)
247            CALL MULTI(Z,Y,NK, D    ,1,20,20)
248            DO 666 I=1,NK
249         666 V2(I)=Y(I,1)
250      C---------Autovetor esta agora em V2, exceto os elementos i
251      C---------Elemento principal esta em i.
252            IFLG=0
253            B=1.0
254            VEX(1,L)=1.0
255      C---------Verifica o maior elemento e normaliza.
256            DO 850 K=1,NK
257            IF(B-ABS(V2(K)))900,850,850
258         900 B=V2(K)
259            IFLG=1
260         850 CONTINUE
261            IF(IFLG)875,875,876
262         876 VEX(1,L)=VEX(1,L)/B
263            DO 69 K=1,NK
264          69 V2(K)=V2(K)/B
265         875 DO 877 I=2,N
266      C---------O vetor normalizado esta' em VEX.
267            II1 =I-1
268         877 VEX(I,L)=V2(II1)
269         888 CONTINUE
270            WRITE(6,712)
271            WRITE(4,712)
272         712 FORMAT(//5X,"MATRIZ AUTOVETOR "/)
273            DO 713 I=1,N
274               WRITE(4,3003) (VEX(I,J),J=1,N)
275               WRITE(6,3033)(VEX(I,J),J=1,N)
276         713 CONTINUE
277        3003 FORMAT(1X,12(E9.3,2X))
278        3033 FORMAT(1X,7E10.4)
279         500 STRING="RESET @"
280            STRING[8:1]=%15C
281            CALL COMMAND(STRING,IERR,IPARM)
282            STOP
283            END
284            SUBROUTINE ITER(X,N,ERR,B,EIG,MAQ,KK,NINT,NL)
285      C---------Esta subrotina faz as iteracoes
```

```
286           IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
287           DIMENSION X(20,20),EIG(20),ANUD(20)
288           NL=0
289           MAQ=0
290     C---------Monta o vetor unitario ao primeiro teste.
291           DO 1 K=1,N
292           EIG(K)=1.0
293         1 CONTINUE
294     C---------Calcula o produto da matriz com o vetor teste.
295         7 DO 2 J=1,N
296           ANUD(J)=0.0
297           DO 2 K=1,N
298           ANUD(J)=ANUD(J)+X(J,K)*EIG(K)
299         2 CONTINUE
300           B=ANUD(1)
301           KK=1
302     C---------Verifica o maior elemento e normaliza
303           DO 30 J=2,N
304           IF(ABS(B)-ABS(ANUD(J)))31,30,30
305        31 B=ANUD(J)
306           KK=J
307        30 CONTINUE
308           DO 3 J=1,N
309           ANUD(J)=ANUD(J)/B
310         3 CONTINUE
311     C---------Compara o novo vetor com o vetor teste.
312           DO 5 J=1,N
313           IF(ABS(EIG(J)-ANUD(J))-ERR)5,5,4
314         5 CONTINUE
315           GOTO 9
316     C---------Coloca o novo vetor no vetor teste.
317         4 DO 6 J=1,N
318           EIG(J)=ANUD(J)
319         6 CONTINUE
320           NL=NL+1
321     C---------Teste das iteracoes.
322           IF(NINT-NL)20,20,21
323        21 GOTO 7
324        20 MAQ=1
325         9 CONTINUE
326           RETURN
327           END
328           SUBROUTINE MINV (COL,M,A)
329     C---------Esta subrotina troca a ordem da matriz coluna,
330     C---------invertendo-a atraves da subrotina INV.
331           IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
332           DIMENSION  COL(200),A(20,20)
333           K=0
334           DO  999  J=1,M
335           DO  999  I=1,N
336           K=K+1
337           A(I,J)=COL(K)
338       999 CONTINUE
339           CALL  INV(A,M,20,0.1D-10)
340           K=0
341           DO  888  J=1,M
342           DO  888  I=1,M
```

```
343           K=K+1
344           COL(K)=A(I,J)
345         888 CONTINUE
346           RETURN
347           END
348           SUBROUTINE INV(A,N,NDIM,P)
349       C---------Esta subrotina inverte a matriz coluna da
350       C---------subrotina MINV.
351           IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
352           INTEGER*2 X(200),W(200)
353           DIMENSION A(NDIM,NDIM)
354           J7=0
355           L=0
356           M=0
357           DO 1 K=1,N
358           IF(ABS(A(K,K)).LT.P)  GO TO 2
359           M=M+1
360           X(M)=K
361           GO TO 1
362         2 L=L+1
363           W(L)=K
364         1 CONTINUE
365         3 K1=0
366         4 K1 = K1 + 1
367        30 IF(K1.GT.M) GO TO 31
368           K= X(K1)
369           IF(ABS(A(K,K)).GT.P)  GO TO 32
370           L=L+1
371           W(L)=K
372           GO TO 4
373        32 IF(K1.EQ.M) GO TO 40
374           C=A(X(K1),X(K1))
375           I1=K1
376           K2=K1+1
377           DO 41 I=K2,M
378           IF(ABS(A(X(1),X(1))).LE.C)  GO TO  41
379           I1=I
380           C=ABS(A(X(I),X(I)))
381        41 CONTINUE
382           I=X(K1)
383           X(K1)=X(I1)
384           X(I1)=I
385        40 K=X(K1)
386           A(K,K) = -1./A(K,K)
387           DO 5 I=1,N
388           IF(I.EQ.K) GO TO 5
389           A(I,K)=A(I,K)*A(K,K)
390         5 CONTINUE
391           DO 6 I=1,N
392           IF(I.EQ.K) GO TO 6
393           DO 7 J=1,N
394           IF(J.EQ.K) GO TO 7
395           A(I,J) = A(I,J) + A(I,K) * A(K,J)
396         7 CONTINUE
397         6 CONTINUE
398           DO 8 J=1,N
399           IF(K.EQ.J) GO TO 8
```

```
400           A(K,J) = A(K,J) * A(K,K)
401         8 CONTINUE
402           GO TO 4
403        31 IF(L.EQ.0) GO TO 9
404           L1=L
405           L=0
406           M=0
407           DO 10 I=1,L1
408           IF(ABS(A(W(I),W(I))).LT.P)  GO TO 11
409           M=N+1
410           X(M)=W(I)
411           GO TO 10
412        11 L=L+1
413           W(L) = W(I)
414        10 CONTINUE
415           J7=J7+1
416           IF(J7.LE.N) GO TO 3
417           WRITE(4,12)
418        12 FORMAT(1X,'MATRIZ SINGULAR')
419           STOP
420         9 DO 13 I= 1,N
421           DO 13 J= 1,N
422           A(I,J) = - A(I,J)
423        13 CONTINUE
424           RETURN
425           END
426           SUBROUTINE MULTI(RHCOL,THISS,M,B,N,MDIM,NDIM)
427        C---------Esta subrotina multiplica a matriz inversa B
428        C---------pela matriz RHCOL.
429           IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
430           DIMENSION RHCOL(NDIM,NDIM),THISS(NDIM,NDIM),B(NDIM,NDIM)
431           DO  10  I=1,M
432           DO 10 J=1,N
433           THISS(I,J)=0.0
434           DO  10  K=1,M
435           THISS(I,J)=THISS(I,J)+B(I,K)*RHCOL(K,J)
436        10 CONTINUE
437           RETURN
438           END
439        C----------Subrotina para inverter matrizes quadradas
440        $CONTROL INIT
441            SUBROUTINE INVER(XSTOR,N,XINV)
442           IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
443            DIMENSION  XSTOR(22,22),X(23,23),XINV(22,22),Y(23)
444            INTEGER F,Q,H
445            DO 1000 K=1,N
446        C
447            DO 111  I=1,N
448            DO 111  J=1,N
449            X(I,J)=XSTOR(I,J)
450       111  CONTINUE
451            DO 11   I=1,N
452            X(I,N+1)=0.
453        11  CONTINUE
454            X(K,N+1)=1.
455            Q=0
456            F=0
```

```
457             DO 2000 M=1,N
458       C
459             IF(Q) 60,60,61
460          61 F=0
461             Q=0
462          60 CONTINUE
463             A=X(M,M)
464             L=M
465             MA=M+1
466             DO 4     I=MA,N
467             IF(A-X(I,M)) 2,2,4
468           2 A=X(I,M)
469             L=I
470           4 CONTINUE
471             F=F+1
472       C
473             NA=N+1
474             DO 5     J=M,NA
475             Y(J)=X(L,J)
476           5 CONTINUE
477       C
478             I=L
479          30 DO 7     J=M,NA
480             X(I,J)=X(I-1,J)
481           7 CONTINUE
482             IF(I-MA) 21,21,20
483          20 I=I-1
484             GO TO 30
485       C
486          21 DO 8     J=M,NA
487             X(M,J)=Y(J)
488       C
489           8 CONTINUE
490             DO 9     I=MA,N
491             B=X(I,M)/X(M,M)
492             DO 9     J=M,NA
493             X(I,J)=X(I,J)-B*X(M,J)
494           9 CONTINUE
495       C
496             IF(F-N) 2000,3000,3000
497        3000 Q=1
498             J=N
499          50 XINV(J,K)=X(J,N+1)/X(J,J)
500             IF(J-1) 2000,2000,40
501          40 L=J
502             J2=J
503             DO 199  H=1,L
504             X(J2,N+1)=X(J2,N+1)-X(J2,J)*XINV(J,K)
505             J2=J2-1
506         199 CONTINUE
507             J=J-1
508             GO TO 50
509        2000 CONTINUE
510       C
511        1000 CONTINUE
512             RETURN
513             END
```

```
514      C
515      C       Subrotina para remover linhas e colunas das matrizes
516      C       M e K
517              SUBROUTINE TIPOVIGA(MAT,IV,MARES,NI,NN)
518              IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
519              DOUBLE PRECISION MAT(22,22),MARES(22,22)
520              L=1
521              GO TO (70,80,90,100),IV
522      C
523      C       Remocao de linhas e colunas para viga bi-apoiada
524      C
525           70 NI=NN-2
526              DO 72 I=1,NN
527                 K=1
528                 IF(I.EQ.1.OR.I.EQ.(NN-1)) GO TO 72
529                 DO 71 J=1,NN
530                    IF(J.EQ.1.OR.J.EQ.(NN-1)) GO TO 71
531                    MARES(L,K)=MAT(I,J)
532                    K=K+1
533           71       CONTINUE
534                 L=L+1
535           72    CONTINUE
536                 GO TO 110
537      C
538      C       Remocao de linhas e colunas para viga bi-engastada
539      C
540           80 NI=NN-4
541              DO 82 I=1,NN
542                 K=1
543                 IF(I.LE.2.OR.I.GE.(NN-1)) GO TO 82
544                 DO 81 J=1,NN
545                    IF(J.LE.2.OR.J.GE.(NN-1)) GO TO 81
546                    MARES(L,K)=MAT(I,J)
547                    K=K+1
548           81       CONTINUE
549                 L=L+1
550           82    CONTINUE
551                 GO TO 110
552      C
553      C       Remocao de linhas e colunas para viga engastada-livre
554      C
555           90 NI=NN-2
556              DO 92 I=1,NN
557                 K=1
558                 IF(I.LE.2) GO TO 92
559                 DO 91 J=1,NN
560                    IF(J.LE.2) GO TO 91
561                    MARES(L,K)=MAT(I,J)
562                    K=K+1
563           91       CONTINUE
564                 L=L+1
565           92    CONTINUE
566                 GO TO 110
567      C
568      C       Remocao de linhas e colunas para viga engastada-apoiada
569      C
570          100 NI=NN-3
```

```
571            DO 102 I=1,NN
572               K=1
573               IF(I.LE.2.OR.I.EQ.(NN-1)) GO TO 102
574               DO 101 J=1,NN
575                  IF(J.LE.2.OR.J.EQ.(NN-1)) GO TO 101
576                  MARES(L,K)=MAT(I,J)
577                  K=K+1
578        101       CONTINUE
579               L=L+1
580        102    CONTINUE
581        110    RETURN
582               END
583        C
584        C       Subrotina de multiplicacao de matrizes
585        C
586               SUBROUTINE MULTIMAT(AT,M,N1,N2,X)
587               IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
588               DOUBLE PRECISION M(4,22)
589               DIMENSION  AT(22,4),X(22,22)
590               DO 10 I=1,N1
591               DO 10 J=1,N2
592                  X(I,J)=0.
593                  DO 10 K=1,4
594                     X(I,J)=X(I,J)+AT(I,K)*M(K,J)
595           10 CONTINUE
596               RETURN
597               END
598        C-------------------------------------------------------------------
599        C-------------------------------------------------------------------
```

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca
MAUÁ
Itajubá

DAT 02/10/1984
PROC. –
PEL. CPG-M
LIV. –
NCr$ Locação

BIB - EFEI
DATA

O 48 e T-404
519.613:534.14(043.2)
EFEI / Biblioteca Mauá

OLIVEIRA, Wlamir Carlos de
Estudo comparativo das frequências naturais de vigas e eixos obtidas pelos métodos das matrizes.....

Data Retirada	Nº. Registro	Data Devolução
02/10/86	Prof. Paulo Ide	1
		25-
7	Prof. Paulo Ide	25-

EFEI

BIBLIOTECA MAUÁ

Esta publicação deverá ser devolvida dentro do prazo estipulado.

O leitor é responsável pela publicação em seu poder.

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200404
NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA