

TESE

456

CLASS. 537.8.029:533.98(043.2)
CUT. D 535 †
TUMBO 456



TEORIA DE ESPALHAMENTO DE ONDAS
ELETROMAGNÉTICAS EM PLASMAS

AROLDO BORGES DINIZ

TEORIA DE ESPALHAMENTO DE ONDAS
ELETROMAGNÉTICAS EM PLASMAS

Trabalho apresentado co
mo Tese de Livre-Docência em E
letromagnetismo Teórico na Es
cola Federal de Engenharia de
Itajubá.

Itajubá - M.G.

1 9 7 4

SUMÁRIO

O objetivo deste trabalho consiste numa investigação teórica do problema do espalhamento de ondas eletromagnéticas planas em incidência oblíqua sobre uma configuração cilíndrica de plasma magnetizada longitudinalmente.

A solução analítica foi determinada e os resultados numéricos, para o caso de polarização normal, foram obtidos num computador IBM 1130. Como consequência, foram traçados os diagramas de espalhamento para vários valores dos parâmetros característicos, mostrando sua assimetria em relação à direção de incidência.

Foi considerado, outrossim, uma possível aplicação dos resultados na determinação das propriedades de um plasma.

PREFÁCIO

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sistemático da teoria do espalhamento de ondas eletromagnéticas em plasmas cuja configuração, por uma questão de simplicidade na formulação matemática e crescente aplicação prática, foi considerada de forma cilíndrica circular.

No capítulo I fazemos uma breve apresentação da situação atual do assunto e dos objetivos a serem alcançados no trabalho.

No capítulo II apresentamos um resumo dos conceitos básicos da teoria eletromagnética necessários para o desenvolvimento da teoria do espalhamento de ondas eletromagnéticas. Assim é que, partindo das equações de Maxwell e de outras equações básicas, apresentamos, por exemplo, o teorema de Poynting, as condições de contorno e o conceito de polarização. Deduzimos a condição de irradiação de Sommerfeld e a apresentamos como condição básica para a determinação dos campos espalhados.

No capítulo III apresentamos as propriedades eletromagnéticas de um plasma. Partindo da definição de plasma, e usando as equações de Maxwell, deduzimos o tensor permissividade para o plasma, permitindo o seu tratamento como um meio dielétrico. Os efeitos de colisões e de temperatura foram considerados.

No capítulo IV apresentamos a teoria para a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma cilíndrico de secção transversal arbitrária. Obtivemos um par de equações diferenciais de segunda ordem acopladas para as componentes longitudinais dos campos eletromagnéticos no plasma. Concluimos a possibilidade de pro

pagação de modos de caráter híbrido no interior do plasma. As expressões gerais para as componentes transversais dos campos em função das componentes longitudinais foram determinadas.

No capítulo V apresentamos o tratamento da teoria de propagação de ondas eletromagnéticas em uma região cilíndrica circular. Deduzimos as expressões das componentes dos campos no interior do plasma e dos campos espalhados fora do plasma.

No capítulo VI apresentamos a Teoria do Espalhamento das Ondas Eletromagnéticas incidindo obliquamente sobre um plasma cilíndrico magnetizado. As componentes dos campos incidente e espalhado foram determinadas a partir das condições de contorno e, em seguida, determinamos a expressão da secção transversal total de espalhamento. Foram considerados os casos particulares de campo magⁿético dc zero e infinito.

No capítulo VII consideramos o caso de incidência normal. Para este caso particular obtivemos a expressão da secção transversal total de espalhamento e usando um computador IBM-1130 traçamos os diagramas de espalhamento.

No último capítulo intitulado "Resumo e Conclusões" discutimos, de uma forma geral, os resultados obtidos no trabalho.

Incluimos, em apêndices, um resumo das Funções de Bessel e das Funções Potenciais bem como os programas de computador utilizados.

Finalmente, externamos os nossos agradecimentos aos membros da Banca Examinadora e à Administração da Escola Federal de Engenharia de Itajubá.

Um agradecimento especial ao Sr. Hildo Romeo Quinsan Jr. pe
la elaboração dos programas de computador.

Itajubá, Novembro de 1974

Aroldo Borges Diniz

ÍNDICE

I	- CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
II	- REVISÃO DE CONCEITOS BÁSICOS	3
	2.1 - Equações básicas	3
	2.2 - A equação de onda para meios homogêneos, lineares e isotrópicos	6
	2.3 - O teorema de Poynting	7
	2.4 - Condições de contorno para os campos eletromagnéticos	10
	2.5 - Polarização de ondas eletromagnéticas	11
	2.6 - Tipos de ondas eletromagnéticas que se propagam em uma estrutura guiada	15
	2.7 - Soluções para as equações de ondas escalar e <u>ve</u> torial não homogêneas. Condição de irradiação..	16
	2.8 - Espalhamento de ondas planas	22
III	- PROPRIEDADES ELETROMAGNÉTICAS DO PLASMA	24
	3.1 - O plasma	24
	3.2 - O tensor permissividade	28
IV	- ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM UM PLASMA CILÍNDRICO DE SECÇÃO TRANSVERSAL ARBITRÁRIA	34
	4.1 - Formulação do problema	34
	4.2 - Equação de ondas	35
	4.3 - Solução das equações de ondas	39
	4.4 - Componentes dos campos em função das <u>componen</u> tes longitudinais	42

4.5 - Características dos modos de propagação no plasma 44

V - ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM UMA REGIÃO CILÍNDRICA CIRCULAR 45

5.1 - Solução na região contendo plasma 45

5.2 - Determinação das componentes longitudinais dos campos no plasma 46

5.3 - Determinação das componentes transversais dos campos no plasma 48

5.4 - Solução para os campos espalhados 51

VI - ESPALHAMENTO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS INCIDINDO OBLIQUAMENTE SOBRE UM PLASMA CILÍNDRICO MAGNETIZADO 55

6.1 - Introdução 55

6.2 - Componentes dos campos da onda incidente 55

6.3 - Condições de contorno 58

6.4 - Determinação dos coeficiente dos campos 60

6.5 - Determinação da secção transversal total de espalhamento 65

6.6 - Espalhamento no caso de incidência oblíqua sobre um plasma em campo magnético dz zero e infinito 67

VII - ESPALHAMENTO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS INCIDINDO NORMALMENTE SOBRE UM PLASMA CILÍNDRICO MAGNETIZADO 70

7.1 - Introdução 70

7.2 - Componentes dos campos 71

7.3 - Secção transversal total de espalhamento 73

7.4 - Diagramas de espalhamento 75

VIII - RESUMO E CONCLUSÕES 82

APÊNDICES

A - Funções de Bessel 85

B - Funções potenciais escalar e vetorial 92

C - Programa de computador 95

D - Referências bibliográficas 100

ÍNDICE DAS FIGURAS

2.1	Volume V limitado pela superfície S. Dedução do Teore <u>ma</u> de Poynting	9
2.2	Superfície de separação entre os meios 1 e 2, para a aplicação das condições de contorno	10
2.3	Vetor campo elétrico para uma onda polarizada elipticamente	13
2.4	Volume V limitado pela superfície S, para aplicação do Teorema de Green	18
3.1	Distribuição de plasmas nas regiões próximas da Terra	26
4.1	Plasma cilíndrico de secção transversal arbitrária ..	34
5.1	Plasma cilíndrico circular	45
6.1	Onda eletromagnética com polarização normal incidindo obliquamente sobre um plasma cilíndrico circular	56
7.1	Diagramas de espalhamentos correspondentes a uma onda eletromagnética com polarização normal incidindo <u>nor</u> malmente sobre um plasma cilíndrico com parâmetros $\omega_p/\omega = 0,707$ e $ka = 1$	77

7.2	Diagramas de espalhamentos correspondentes a uma onda eletromagnética com polarização normal incidindo normalmente sobre um plasma cilíndrico com parâmetros $\omega_p/\omega = 0,95$ e $ka = 1$	78
7.3	Diagramas de espalhamentos correspondentes a uma onda eletromagnética com polarização normal incidindo normalmente sobre um plasma cilíndrico com parâmetros $\omega_p/\omega = 3,16$ e $ka = 1$	79
7.4	Diagramas de espalhamentos correspondentes a uma onda eletromagnética com polarização normal incidindo normalmente sobre um plasma cilíndrico com parâmetros $\omega_c/\omega = 0$ e $ka = 1$	80
A.1	Funções $J_n(x)$	87
A.2	Funções $N_n(x)$	87
A.3	Funções $I_n(x)$ e $K_n(x)$	87

LISTA DE SÍMBOLOS

A, A', A_e, A_1	Constantes arbitrárias.
A'	Expressão matemática.
\vec{A}	Vetor potencial magnético.
a	Raio do plasma.
$\vec{B}, \vec{B}_1, \vec{B}_2$	Densidade de fluxo magnético comple <u>x</u> a.
\vec{B}_0	Componente dc da densidade de fluxo magnético.
\vec{B}_t	Densidade de fluxo magnético total.
B	Constante arbitrária.
B'	Expressão matemática.
\vec{b}	Valor instantâneo do vetor densida <u>d</u> e de fluxo magnético.
$c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$	Velocidade da luz.
$c = \gamma_1^2 \epsilon_3/\epsilon_1$	
C, C'	Constantes arbitrárias.
$C_{1,2}$	Expressão matemática.
$c_{1,2} = c - e_{1,2}^2$	
$\vec{D}, \vec{D}_1, \vec{D}_2$	Vetor densidade de fluxo elétrico complexo.
D_n, D_t, D_z, D_T	Componentes do vetor densidade de fluxo elétrico.
D, D_1, D_2	Expressões matemáticas.
\vec{d}	Valor instantâneo do vetor densida <u>d</u> e de fluxo elétrico.

$$d = \beta\omega\mu_0 (\epsilon_2/\epsilon_1)$$

$$d_1, d_2$$

$$\vec{E}, \vec{E}_1, \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_e$$

$$\vec{E}_i$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_e + \vec{E}_i$$

$$E_n, E_t, E_z, E_T$$

$$E_r, E_\phi, E_z$$

$$E_{ir}, E_{i\phi}, E_{iz}$$

$$E_{er}, E_{e\phi}, E_{ez}$$

$$\vec{E}^*$$

$$|\vec{E}_e|^2 = \vec{E}_e \cdot \vec{E}_e^*$$

$$|\vec{E}_i|^2 = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_i^*$$

$$\vec{e}$$

$$e_1, e_2$$

$$F$$

$$\Phi$$

$$F_0$$

$$F_n = e^{-i(n\phi + \beta z)}$$

Expressões matemáticas.

Vetores campos elétricos complexos.

Campo elétrico espalhado.

Campo elétrico incidente.

Componentes arbitrárias do vetor campo elétrico.

Componentes do campo elétrico no plasma.

Componentes do campo elétrico incidente.

Componentes do campo elétrico espalhado.

Conjugado de \vec{E} .

Valor instantâneo do campo elétrico.

Constantes de propagação radial no plasma.

Representação generalizada das quantidades eletromagnéticas.

Função da coordenada angular na solução da equação de Bessel.

Representação geral da componente dc das quantidades eletromagnéticas.

$n = 0, \pm 1, \pm 2.$

$$f = \gamma_1^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_2^2 / \epsilon_1$$

$$g = \beta \omega \epsilon_2 \epsilon_3 / \epsilon_1$$

$$\vec{H}, \vec{H}_1, \vec{H}_2$$

Vetores campos magnéticos complexos.

$$\vec{H}^*$$

Conjugado de \vec{H} .

$$\vec{H}_e$$

Campo magnético espalhado.

$$\vec{H}_i$$

Campo magnético incidente.

$$H_n, H_t, H_z, H_T$$

Componentes arbitrárias do vetor campo magnético.

$$H_r, H_\phi, H_z$$

Componentes do campo magnético no plasma.

$$H_{ir}, H_{i\phi}, H_{iz}$$

Componentes do campo magnético incidente.

$$H_{er}, H_{e\phi}, H_{ez}$$

Componentes do campo magnético espalhado.

$$|\vec{H}_e|^2 = \vec{H}_e \cdot \vec{H}_e^*$$

$$|\vec{H}_i|^2 = \vec{H}_i \cdot \vec{H}_i^*$$

$$H_0$$

Amplitude do campo magnético incidente.

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iN_n(x)$$

Função de Hankel de 2.^a espécie.

$$H_n^{(2)}(\gamma r) = \frac{d H_n^{(2)}(\gamma r)}{d(\gamma r)}$$

$$\vec{h}$$

Valor instantâneo do vetor campo magnético.

$$I_n(x)$$

Função de Bessel modificada de 1.^a espécie de ordem n.

$$i = \sqrt{-1}$$

Unidade imaginária.

$$\vec{J}$$

Densidade de corrente.

$$\vec{J}_s$$

Densidade superficial de corrente.

$J_n(x)$	Função de Bessel ordinária de 1. ^a espécie de ordem n.
$J'_n(\gamma r) = \frac{d J_n(\gamma r)}{d(\gamma r)}$	
\vec{j}	Valor instantâneo da densidade de corrente.
K	Constante de Boltzmann.
$K_n(x)$	Função de Bessel modificada de 2. ^a espécie de ordem n.
$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$	Constante de fase no espaço livre.
m	Massa do elétron.
m_1, m_2	Expressão matemática.
$N_n(x)$	Função de Bessel ordinária de 2. ^a espécie de ordem n.
\hat{n}	Vetor unitário normal.
$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	Constante de separação angular.
n_e	Número de elétrons.
n_i	Número de ions.
p_1, p_2	Constantes arbitrárias.
$Q = (\omega^2 \mu_0 \epsilon_2)^2 - \gamma_1^4$	
$q_{1,2} = m_{1,2} p_{1,2}$	
\vec{R}	Vetor de posição relativa.
R_1, R_2	Expressão matemática.
R	Função da coordenada radial na solução da equação de Bessel.
r	Coordenada radial.
S	Superfície envolvendo um volume V.
\vec{S}_i	Vetor de Poynting complexo correspondente à onda incidente.

\vec{S}_e	Vetor de Poynting complexo correspondente à onda espalhada.
dS	Elemento de superfície.
\vec{S}	Valor instantâneo do vetor de Poynting.
T	Temperatura do gás eletrônico.
t	Tempo.
$u = \beta \sqrt{\frac{KT}{m \omega_c^2}} \ll 1$	
V	Volume.
V	Velocidade complexa.
\vec{V}	Velocidade instantânea.
\vec{V}_K	Velocidade do K-ésimo tipo de partícula que constitui o plasma.
w	Valor instantâneo da energia.
$Z_n(x)$	Função arbitrária representando as funções de Bessel.
$Z'_n(\gamma r) = \frac{d Z_n(\gamma r)}{d(\gamma r)}$	
α	Grau de ionização.
$\beta = k \cos \theta$	Constante de fase longitudinal
$\gamma = k \sin \theta$	Constante de fase radial, exterior ao plasma.
$\gamma_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \beta^2$	
δ	Função da coordenada radial no plasma.
ϵ	Permissividade elétrica.

$$\epsilon_0 = (1/36\pi) 10^{-9} \text{ Farad/m}$$

$\overleftrightarrow{\epsilon}$

$$\epsilon_i \quad i = 1, 2, 3$$

η

$\overleftrightarrow{\mu}$

μ

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Henry/m}$$

ν

ζ

$$\pi = 3.1415$$

ρ

ρ_0

σ

σ

Σ
K

ϕ

ϕ

θ

$$\omega_c = \eta B_0$$

$$\omega_p = \sqrt{-\rho_0 \eta / \epsilon_0}$$

Permissividade elétrica do meio exterior ao plasma (ar).

Tensor permissividade elétrica do plasma.

Elementos do tensor permissividade elétrica do plasma.

Relação entre a carga e a massa do elétron.

Tensor permeabilidade magnética

Permeabilidade magnética escalar.

Permeabilidade magnética do vácuo.

Frequência de colisão.

Função da coordenada radial no plasma.

Densidade volumétrica de cargas.

Componente dc da densidade volumétrica de cargas.

Densidade superficial de cargas.

Secção transversal total de espalhamento.

Somatória em K.

Função potencial escalar.

Coordenada angular

Ângulo de incidência.

Frequência de ciclotron.

Frequência de plasma.

ω	Frequência angular.
∇	Operador nabla.
∇_T	Componente transversal do operador nabla.
∇^2	Operador Laplaciano.

CAPÍTULO I

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O espalhamento de ondas eletromagnéticas planas, em vários tipos de materiais de formas diversas, foi estudado por vários pesquisadores. Em particular, Wait⁴ considerou o espalhamento de ondas eletromagnéticas com incidência arbitrária sobre um dielétrico de forma cilíndrica, tendo considerado as soluções aproximadas para os campos espalhados em regiões distantes, no caso de cilindros com diâmetros pequenos relativamente ao comprimento de onda do sinal.

Neste trabalho é apresentado o estudo do espalhamento de ondas eletromagnéticas planas com incidência oblíqua sobre uma estrutura cilíndrica de plasma.

A escolha da forma cilíndrica para a configuração do plasma é devido tratar-se de uma configuração muito encontrada em problemas práticos e de solução particularmente simples em termos de funções de Bessel. As propriedades de um plasma cilíndrico sob a ação de um campo magnético estático aplicado axialmente são aproximadamente descritas por uma constante dielétrica tensorial, sendo possível resolver o problema do espalhamento, nesta configuração, usando as equações de Maxwell.

Dois tipos de polarização para a onda plana incidente podem ser considerados separadamente, no tratamento do problema de espalhamento, as polarizações normal e paralela ao plano de incidência sendo os resultados para o caso de polarização arbitrária de

terminados a partir destes casos.

O espalhamento de ondas planas em uma coluna de plasma anisotrópica, no caso de incidência normal, foi estudado por Platzmann⁷, que considerou os campos eletromagnéticos independentes da coordenada axial z . Neste caso podem existir separadamente modos TE e TM no plasma anisotrópico. No caso de incidência oblíqua não podem existir modos TE e TM puros; eles aparecem acoplados e são chamados de modos híbridos.

Neste trabalho obtém-se, como caso particular, as expressões para os campos eletromagnéticos dentro e fora do plasma, juntamente com a expressão da secção transversal total de espalhamento, no caso de polarização normal ao plano de incidência.

A secção transversal total de espalhamento foi calculada numéricamente em função de vários parâmetros, no caso de incidência normal, e os diagramas de espalhamentos apresentados na forma polar. A presente análise teórica mostra que a secção transversal de espalhamento depende do ângulo de incidência, da frequência de plasma e do campo magnético dc aplicado. Resta ainda assinalar a importância prática do conhecimento dos campos espalhados na determinação de algumas características dos plasmas, como, por exemplo, densidade e frequência de colisão.

CAPÍTULO II

REVISÃO DE CONCEITOS FUNDAMENTAIS

O objetivo deste capítulo é apresentar um resumo dos conceitos básicos necessários para o desenvolvimento da teoria do espalhamento de ondas eletromagnéticas¹.

2.1 - EQUAÇÕES BÁSICAS

Do ponto de vista matemático, a teoria eletromagnética consiste de um conjunto de equações que estabelecem determinadas relações entre diferentes funções escalares e vetoriais.

O campo eletromagnético é caracterizado pelos dois vetores \vec{e} e \vec{h} , campo elétrico e campo magnético, e pelos dois outros vetores \vec{d} e \vec{b} , densidades de fluxos elétrico e magnético, respectivamente. Por outro lado, a presença de cargas elétricas é caracterizada pela densidade de carga volumétrica ρ e o movimento destas cargas é expresso pela densidade de corrente \vec{j} .

As equações de Maxwell estabelecem as relações entre estas diferentes grandezas. No estudo de propagação de ondas eletromagnéticas em um sistema, em princípio, as equações de Maxwell podem ser tomadas como ponto de partida. No sistema de unidades MKS racionalizado, elas se escrevem:

$$\nabla \times \vec{e} = -\partial \vec{b} / \partial t \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{h} = \vec{j} + \partial \vec{d} / \partial t \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{b} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{d} = \rho \quad (2.4)$$

onde, as letras minúsculas representam os valores instantâneos das quantidades eletromagnéticas.

Os fenômenos que serão tratados se processarão em meios que possuem permissividade elétrica ϵ e permeabilidade magnética μ , tais que:

$$\vec{d} = \epsilon \vec{e} \quad (2.5)$$

e

$$\vec{b} = \mu \vec{h} \quad (2.6)$$

Estes parâmetros ϵ e μ são constantes características do meio. No ar, meio homogêneo, linear e isotrópico, tem-se

$$\epsilon = \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Farad/m} \quad (2.7)$$

e

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Henry/m} \quad (2.8)$$

Um plasma, sob a ação de um campo magnético estático, comporta-se como um meio com anisotropia da permissividade elétrica $\vec{\epsilon}$, que assume o caráter tensorial, ao mesmo tempo que a permeabilidade magnética μ permanece escalar e próxima de μ_0 .

As equações de movimento,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\eta \vec{e} - \eta \vec{v} \times \vec{B}_t - v \vec{v} \quad (2.9)$$

com $\vec{B}_t = \vec{B}_0 + \vec{b}$, onde \vec{B}_0 é o campo estático, e a de continuidade

$$\nabla \cdot \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.10)$$

serão também usadas no desenvolvimento do trabalho. η , na equação (2.9), corresponde à relação entre a carga e a massa do elétron e v à frequência de colisão.

Todas as quantidades apresentam um valor médio mais uma pequena perturbação, que é função senoidal do tempo:

$$F_t(r, \phi, z, t) = F_0(r, \phi, z) + F(r, \phi, z) e^{i\omega t} \quad (2.11)$$

sendo as perturbações de natureza ondulatória, tal que $F(r, \phi, z)$ é da forma:

$$F(r, \phi, z) = F(r, \phi) e^{-i\beta z} \quad (2.12)$$

onde $i\beta$ é a constante de propagação ao longo do eixo longitudinal do sistema.

No caso em que as quantidades variam senoidalmente no tempo, as equações de Maxwell, eqs. (2.1) a (2.4), são escritas nas formas:

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega \vec{B} \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + i\omega \vec{D} \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.16)$$

onde todas as quantidades são funções complexas espaciais, mas não funções do tempo.

Neste trabalho consideraremos, ainda, sinais de pequena amplitude de tal forma a linearizar as equações.

2.2 - A EQUAÇÃO DE ONDA PARA MEIOS HOMOGÊNEOS, LINEARES E ISOTRÓPICOS.

As equações de Maxwell, relacionando os campos elétrico e magnético possibilitam descrever os fenômenos de propagação de ondas eletromagnéticas.

Considerando um meio sem cargas e sem correntes, homogêneo, isotrópico e linear para o qual ϵ e μ são constantes, resulta para o rotacional da eq. (2.13):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu \nabla \times \vec{H}$$

ou,

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -i\omega\mu \nabla \times \vec{H} \quad (2.17)$$

Combinando as eqs. (2.14), (2.16) considerando $\rho = 0$, e (2.17), vem:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (2.18)$$

Analogamente, obtemos para o campo magnético a equação de onda:

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad (2.19)$$

onde,

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \omega/c \quad (2.20)$$

e $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ é a velocidade da luz no meio.

As eqs. (2.18) e (2.19) são conhecidas como equações de Helmholtz.

2.3 - O TEOREMA DE POYNTING.

É possível, das equações de Maxwell, deduzir expressões para as densidades de energia a serem atribuídas ao campo eletromagnético. As equações de Maxwell são substituídas nas expressões do segundo membro da identidade vetorial:

$$\nabla \cdot (\vec{e} \times \vec{h}) = \vec{h} \cdot (\nabla \times \vec{e}) - \vec{e} \cdot (\nabla \times \vec{h}) \quad (2.21)$$

Resulta:

$$\nabla \cdot (\vec{e} \times \vec{h}) = -\vec{e} \cdot \vec{j} - \vec{h} \cdot \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} - \vec{e} \cdot \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} \quad (2.22)$$

A eq. (2.22) pode ser escrita na forma:

$$\nabla \cdot (\vec{e} \times \vec{h}) = -\vec{e} \cdot \vec{j} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon e^2 + \mu h^2}{2} \right) \quad (2.23)$$

Definindo as quantidades

$$w = \frac{1}{2} (\epsilon e^2 + \mu h^2) \quad (2.24)$$

a eq. (2.23) pode ser escrita na forma:

$$\nabla \cdot \vec{s} = -\vec{e} \cdot \vec{j} - \partial w / \partial t \quad (2.25)$$

onde o vetor

$$\vec{s} = \vec{e} \times \vec{h} \quad (2.26)$$

é chamado de vetor de Poynting.

Considerando uma região do espaço de volume V limitada por uma superfície fechada S , fig. 2.1, a eq. (2.25) é escrita como:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{s}) \, dV = - \int_V \vec{e} \cdot \vec{j} \, dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V w \, dV \quad (2.27)$$

Aplicando-se o teorema da divergência:

$$\oint_S \vec{s} \cdot \hat{n} \, dS = - \int_V \vec{e} \cdot \vec{j} \, dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V w \, dV \quad (2.28)$$

A eq. (2.28) é o Teorema de Poynting, onde:

\hat{n} = vetor unitário normal à superfície S .

$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V w \, dV$ = decréscimo com o tempo da energia eletromagnética total armazenada no volume V .

$-\int_V \vec{e} \cdot \vec{j} \, dV$ = decréscimo com o tempo da energia cinética no interior do volume V , quando são conside

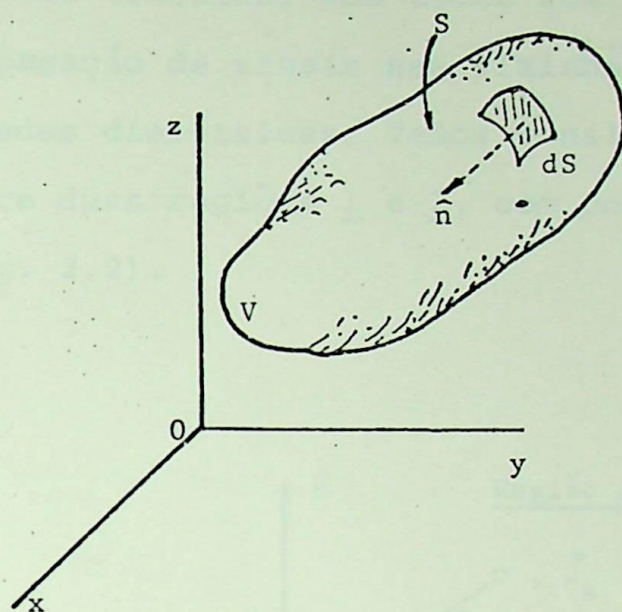


Fig. 2.1 - Volume V limitado pela superfície S. Dedução do Teorema de Poynting.

radas cargas em movimento.

$$\oint \vec{s} \cdot \hat{n} \, dS = \text{fluxo de potência eletromagnética penetrando no volume V através de S.}$$

O valor médio do vetor de Poynting instantâneo \vec{s} , é obtido a partir das representações complexas, como:

$$\langle \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} R_e (\vec{E} \times \vec{H}^*) \tag{2.29}$$

onde \vec{H}^* representa o conjugado de \vec{H} .

2.4 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA OS CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS.

Os problemas de espalhamento de ondas eletromagnéticas que consideraremos neste trabalho, são todos com contornos clássicos, envolvendo a propagação de sinais nas vizinhanças de condutores metálicos ou paredes dielétricas. Vamos considerar a superfície de separação entre duas regiões 1 e 2, com constantes $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ e $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ (fig. 2.2).

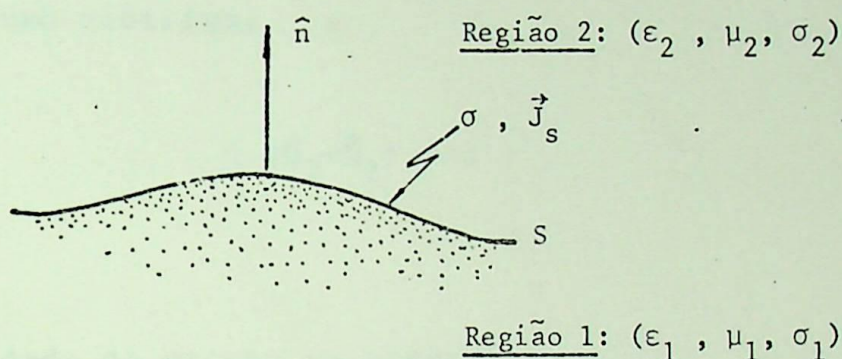


Fig. 2.2 - Superfície de separação entre os meios 1 e 2, para a aplicação das condições de contorno.

As condições de contorno sobre a superfície S , são:

Cond. 1 - Continuidade das componentes tangenciais dos campos elétricos:

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (2.30)$$

Cond. 2 - Descontinuidade das componentes tangenciais dos campos magnéticos:

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_S \quad (2.31)$$

onde,

\vec{J}_S = densidade de corrente na superfície S.

Cond. 3 - Continuidade das componentes normais do vetor densidade de fluxo magnético:

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (2.32)$$

Cond. 4 - Descontinuidade das componentes normais do vetor densidade de fluxo elétrico:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \quad (2.33)$$

onde,

σ = densidade de cargas na superfície S.

2.5 - POLARIZAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS.

Em uma onda eletromagnética, a orientação do vetor campo elétrico define a polarização elétrica da onda e a orientação do vetor campo magnético define a polarização magnética. Existem três tipos de polarização: polarização linear, polarização elíptica e polarização circular, muito embora todos os tipos de polarização sejam casos particulares da polarização elíptica. Nesta seção nos referiremos à polarização elétrica sendo os resultados aplicáveis à polarização magnética.

2.5.1 - Polarização Linear

Neste tipo, o campo elétrico encontra-se em qualquer instante na mesma direção. A projeção da extremidade do vetor campo elétrico descreve uma reta sobre um plano normal à direção de propagação à medida que a onda se propaga. Esta condição resulta da superposição de ondas com os campos elétricos na mesma direção ou em direções diferentes mas em fase.

Considera-se dois tipos de polarização linear: a polarização linear vertical, em que o campo elétrico é vertical a uma superfície de referência, comumente a superfície terrestre e a polarização linear horizontal, em que o campo elétrico é horizontal à superfície terrestre.

2.5.2 - Polarização Elíptica

Neste tipo, a projeção da extremidade do vetor campo elétrico descreve uma elipse sobre um plano normal à direção de propagação à medida que a onda se propaga. Resulta da combinação de duas ondas planas uniformes de mesma frequência, propagando-se na mesma direção, tendo os campos, fases, amplitudes e orientações diferentes mas não arbitrárias. Para entender este tipo de polarização, vamos considerar duas ondas planas uniformes propagando-se na direção +z em um dielétrico perfeito e decompor os campos elétricos nas direções x e y. As duas componentes na direção x produzem uma onda do tipo:

$$e_x = E_{x0} \cos(\omega t - kz) \quad (2.34)$$

As duas componentes na direção y adicionam-se para produzir uma onda com amplitude e fase diferentes da onda da com

ponente x:

$$e_y = E_{y0} \cos(\omega t - kz + \phi) \quad (2.35)$$

Em qualquer plano normal à direção de propagação, por exemplo, $z = 0$, as eqs. (2.34) e (2.35) se escrevem:

$$e_x = E_{x0} \cos \omega t$$

$$e_y = E_{y0} \cos(\omega t + \phi)$$

que são as equações paramétricas de uma elipse.

Portanto, a projeção da extremidade do vetor campo elétrico traça uma trajetória elíptica em um plano normal à direção de propagação (fig. 2.3).

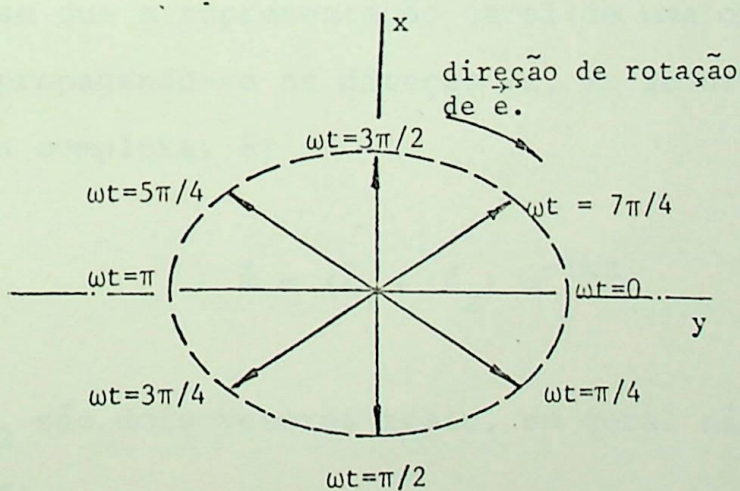


fig. 2.3 - Vetor campo elétrico para uma onda polarizada elípticamente.

2.5.3 - Polarização Circular

É um caso particular da polarização elíptica (como também o é a polarização linear), em que:

$$E_{x0} = E_{y0} = E_0$$

$$\phi = \pm \pi/2$$

Neste caso, a elipse reduz-se a um círculo e a polarização é dita circular.

É costume distinguir-se dois tipos de polarização circular: polarização circular para a direita, $\phi = \pi/2$, e para a esquerda, $\phi = -\pi/2$, de acordo com o sentido de rotação do vetor campo elétrico, no sentido ou em sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio.

2.5.4 - Representação Complexa de uma Onda Polarizada

Escrevendo as eqs. (2.34) e (2.35) na forma complexa, mostra-se que a representação geral de uma onda elipticamente polarizada propagando-se na direção $+z$, em um dielétrico perfeito, na forma complexa, é:

$$\vec{E} = (\vec{E}_1 + i\vec{E}_2) e^{-ikz} \quad (2.36)$$

onde \vec{E}_1 e \vec{E}_2 são dois vetores reais, em geral não mutuamente perpendiculares:

$$\vec{E}_1 = E_{x0} \hat{z} + E_{y0} \cos\phi \hat{y}$$

$$\vec{E}_2 = E_{y0} \operatorname{sen}\phi \hat{y}$$

No caso de polarização circular:

$$\vec{E} = E_0 (\hat{x} \pm i\hat{y}) e^{-ikz} \quad (2.37)$$

No caso de polarização linear:

$$\vec{E} = (E_{x0} \hat{x} \pm E_{y0} \hat{y}) e^{-ikz} \quad (2.38)$$

2.6 - TIPOS DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS QUE SE PROPAGAM EM UMA ESTRUTURA GUIADA.

Qualquer configuração de campos eletromagnéticos em uma estrutura guiada deve satisfazer às equações de Maxwell e às condições de contorno impostas. Cada configuração de campo satisfazendo estas condições caracteriza um modo possível de propagação. Uma análise dos possíveis modos que podem existir em uma estrutura guiada revela que eles pertencem a um dos tipos fundamentais seguintes:

a) Ondas TM

São modos cuja única componente longitudinal (na direção do eixo da estrutura) de campo é dada pelo campo elétrico da onda ($E_z \neq 0$). Isto significa que não existem componentes de campo magnético ao longo da direção de propagação que coincide com a direção do eixo z ($H_z = 0$).

b) Ondas TE

São modos cuja única componente longitudinal é a do cam

po magnético da onda ($H_z \neq 0$; $E_z = 0$).

c) Ondas híbridas

São ondas que apresentam as componentes longitudinais dos campos elétrico e magnético acopladas, conforme é apresentado nas eqs. (4.19) para o caso de um plasma sob a ação de um campo magnético estático aplicado axialmente ($E_z \neq 0$; $H_z \neq 0$).

2.7 - SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES DE ONDAS ESCALAR E VETORIAL NÃO HOMOGÊNEAS. CONDIÇÃO DE IRRADIAÇÃO.

Nesta seção, vamos apresentar uma derivação da solução particular para a equação de onda escalar não-homogênea, e, daí, para a equação de onda vetorial não-homogênea. Vamos nos limitar ao caso mais simples onde as distribuições dadas de \vec{J} e ρ estão localizadas em uma região finita no espaço livre. A técnica matemática necessária para resolver este problema, utiliza o teorema de Green que, pode ser deduzido do teorema da divergência de Gauss. O teorema da divergência afirma que, uma função vetorial arbitrária \vec{F} possuindo as primeiras derivadas contínuas em uma região V limitada por uma superfície S , satisfaz a

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} \, dV = \oint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) \, dS \quad (2.39)$$

onde \hat{n} representa o vetor unitário normal a dS e orientado para o exterior. Se fazemos:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 = \phi_1 \nabla \phi_2 \quad (2.40)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são duas funções escalares, então:

$$\nabla \cdot \vec{F}_1 = \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 + \phi_1 \nabla^2 \phi_2 \quad (2.41)$$

$$\vec{F}_1 \cdot \hat{n} = \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad (2.42)$$

e daí:

$$\int_V (\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 + \phi_1 \nabla^2 \phi_2) dV = \oint_S \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} dS \quad (2.43)$$

A continuidade das primeiras derivadas de \vec{F}_1 implica que as primeiras derivadas de ϕ_1 e ϕ_2 , e as segundas derivadas de ϕ_2 devem ser contínuas dentro de V . A eq. (2.43) é conhecida como a Primeira Identidade de Green.

Se escolhermos

$$\vec{F} = \vec{F}_2 = \phi_2 \nabla \phi_1 \quad (2.44)$$

então:

$$\int_V (\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 + \phi_2 \nabla^2 \phi_1) dV = \oint_S \epsilon_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} dS \quad (2.45)$$

Tomando-se a diferença das eqs. (2.43) e (2.45), obtêm-se a Segunda Identidade de Green:

$$\int_V (\phi_1 \nabla^2 \phi_2 - \phi_2 \nabla^2 \phi_1) dV = \oint_S (\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n}) dS \quad (2.46)$$

A eq. (2.46) é também comumente conhecida como Teorema de Green.

Consideremos agora uma região limitada por uma grande esfera S_1 dentro da qual existe uma dada distribuição de cargas com densidade ρ . O problema consiste em achar a função potencial ϕ definida pela eq. (B.7) em um ponto de observação $P'(x', y', z')$, como mostra a Fig. (2.4), devido a esta distribuição contínua de cargas.

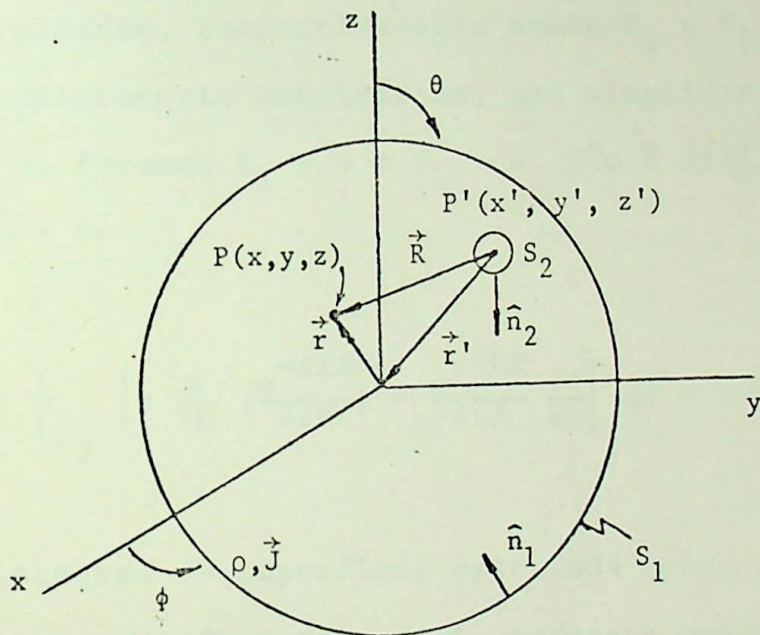


Fig. 2.4 - Volume V limitado pela superfície S , para aplicação do Teorema de Green.

Vamos identificar ϕ_1 na eq. (2.46) como sendo nossa função potencial ϕ ; para ϕ_2 , escolhemos a função: $\phi_2 = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R}$ onde R é a distância do ponto de observação P' ao ponto variável $P(x, y, z)$, dentro de S_1 .

Uma vez que a função ϕ_2 e suas derivadas são descontínuas em P' (ou, ponto $R = 0$), não podemos aplicar o teorema de Green diretamente a toda a região dentro de S_1 . Suponhamos agora que a

região V é modificada tal que seja limitada exteriormente por S_1 e interiormente por S_2 , uma pequena superfície esférica envolvendo P' . Nesta região, então, o teorema de Green, com ϕ_1 e ϕ_2 assim especificados, pode ser aplicado sem qualquer restrição. Substitui-se ϕ_1 e ϕ_2 na eq. (2.46), resultando:

$$\int_V \frac{\rho e^{-ikR}}{\epsilon 4\pi R} dV = \oint_{S_1+S_2} \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \right) - \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS \quad (2.47)$$

A integral de superfície consiste de duas integrais, a serem determinadas, respectivamente sobre S_1 e S_2 . Uma vez que S_1 e S_2 são completamente arbitrárias, uma simplificação considerável resulta, se fazemos $S_1 \rightarrow \infty$ e $S_2 \rightarrow 0$. Não é difícil mostrar que, quando $S_2 \rightarrow 0$:

$$\lim_{S_2 \rightarrow 0} \oint_{S_2} \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \right) - \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS = \phi(x', y', z') \quad (2.48)$$

A integral de superfície calculada sobre S_1 necessita alguma discussão. Quando o raio de S_1 torna-se muito grande, a integral pode ser escrita:

$$\begin{aligned} & - \oint_{S_1} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial R} + ik\phi \right) \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} + \phi \frac{e^{-ikR}}{4\pi R^2} \right] dS = \\ & = - \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} e^{-ikR} \left[R \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} + ik\phi \right) + \phi \right] d\Omega \end{aligned}$$

onde $d\Omega$ é o ângulo sólido diferencial subentendido por dS de P' .

Assim, a integral terá limite zero, se comportar-se tal que, quando $S_1 \rightarrow \infty$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (R\phi) = \text{finito} \quad (2.49)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} + ik\phi \right) = 0 \quad (2.50)$$

A condição definida pela eq. (2.49) é referida como regularidade no infinito, e a condição definida pela eq. (2.50) é chamada condição de irradiação de Sommerfeld. Então, se ϕ satisfaz a estas duas condições no infinito, a integral de superfície calculada em S_1 não contribue a nada. O potencial em $P'(x', y', z')$ passa a ser simplesmente dado por:

$$\phi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(x, y, z) e^{-ikR}}{R} dV \quad (2.51)$$

onde:

$$R = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{1/2}$$

É conveniente, às vezes, usar as coordenadas (x', y', z') como variáveis de integração, e, as coordenadas (x, y, z) para o ponto de observação; resulta, então, para a eq. (2.51), a seguinte forma:

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(x', y', z') e^{-ikR}}{R} dV' \quad (2.52)$$

Pode-se verificar que a solução para a eq. (B.7) tal como é definida pela eq. (2.52) não satisfaz, na verdade, a condição da regularidade e a condição de irradiação de Sommerfeld. O resultado final é, portanto, consistente com as considerações baseado nas quais ele foi deduzido. Talvez seja digno de referência que, quando $k \rightarrow 0$ ou $\lambda \rightarrow \infty$, a eq. (2.52) reduz-se à expressão familiar do potencial eletrostático devido a uma distribuição contínua de cargas com densidade de carga igual a ρ . Em um problema eletromagnético, no entanto, não devemos interpretar ϕ como tendo o mesmo significado que o potencial eletrostático. Isto é óbvio, do exame da eq. (B.3) onde ϕ , somente, não é suficiente para determinar \vec{E} . De fato, em um problema eletromagnético, o vetor \vec{A} está mais intimamente relacionado com \vec{E} e \vec{H} , matematicamente, do que ϕ .

Por um procedimento semelhante, pode-se integrar a eq. (B.6) considerando-se cada componente daquela equação como uma equação de onda escalar não homogênea. Resulta, então:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(x', y', z') e^{-ikR}}{R} dV' \quad (2.53)$$

Importa assinalar, contudo, que somente em coordenadas cartesianas, é possível associar A_x como sendo contribuído por J_x e etc.. Em um sistema curvilíneo geral, não existe uma tal relação simples. Por exemplo, se \vec{J} e \vec{A} são expressos em um sistema de coordenadas esféricas, então, A_r , em geral, terá contribuições de todas as três componentes de \vec{J} .

2.8 - ESPALHAMENTO DE ONDAS PLANAS².

Em um objeto colocado num campo eletromagnético, são induzidas correntes de deslocamento e condução, de forma a produzir campos, que juntamente com o campo incidente original \vec{E}_i , satisfazem às condições de contorno na superfície do objeto. No caso das ondas secundárias não interagirem com a fonte de irradiação, então

$$\vec{E}_t = \vec{E}_i + \vec{E}_e \quad (2.54)$$

onde, \vec{E}_t é o campo total ou difratado e \vec{E}_e é o campo secundário ou espalhado.

A solução matemática de um problema de espalhamento envolve o cálculo dos vetores campos totais em todo o espaço: os campos incidentes especificados são, então, subtraídos dos campos totais a fim de obter-se os campos espalhados.

As propriedades do espalhamento de um objeto são caracterizadas pela secção transversal de espalhamento. Para um objeto de forma cilíndrica, tem-se:

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \frac{|\vec{S}_e|}{|\vec{S}_i|} \quad (2.55)$$

onde, σ é a secção transversal total de espalhamento por unidade de comprimento de um objeto cilíndrico, \vec{S}_e é a densidade de fluxo de potência espalhado a uma distância r e \vec{S}_i é a densidade de fluxo de potência em uma onda plana incidente.

Em termos dos campos eletromagnéticos, a eq. (2.55) é escrita como:

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \frac{|\vec{E}_e|^2}{|\vec{E}_i|^2} \quad (2.56.a)$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \frac{|\vec{H}_e|^2}{|\vec{H}_i|^2} \quad (2.56.b)$$

A expressão (2.56) será usada neste estudo para a determinação da secção transversal total de espalhamento.

CAPÍTULO III

PROPRIEDADES ELETROMAGNÉTICAS DO PLASMA

3.1 - O PLASMA^{8,9}.

O termo PLASMA é usado em Física para definir um estado ionizado. Como exemplos podemos citar as estrelas onde existem plasmas com ionização intensa, e as lâmpadas neon, as válvulas a gás e o fogo, onde são encontrados plasmas com baixa ionização.

Grande parte dos primeiros trabalhos em plasmas referiram-se a plasmas com baixa densidade de ionização, para os quais os movimentos das partículas são governados, principalmente, por processos de colisão. Hoje é possível produzir no laboratório, plasmas com elevada densidade de ionização para os quais os fenômenos de colisões tornam-se menos importantes.

Os principais elementos que constituem um plasma são elétrons, partículas neutras e ions.

Nesta análise consideraremos sempre um plasma ideal, constituído por um gás parcialmente ionizado que, na ausência de perturbações, é eletricamente neutro. Consideraremos as seguintes hipóteses simplificadoras:

(a) Velocidades térmicas dos elétrons desprezíveis. Esta aproximação pode ser considerada boa, pois as velocidades da onda são muito maiores do que as velocidades térmicas médias.

(b) Movimento dos ions desprezíveis. Em frequências baixas esse movimento é importante, mas como consideraremos frequências de microondas esta aproximação pode ser considerada boa.

(c) Fenômenos de ionização e de recombinação desprezíveis.

A propriedade básica que define um plasma é ser constituído por um meio eletricamente neutro. Se não fosse neutro, apareceriam forças Coulombianas com intensidade suficiente para afastar os eletrons ou os ions, de modo a restaurar a neutralidade. Se o plasma for constituído por n átomos por unidade de volume e o grau de ionização for tal que existam n_e eletrons e n_i ions, a condição de neutralidade requer que $n_e = n_i$. O grau de ionização é definido pela relação:

$$\alpha = n_i/n_e \quad (3.1)$$

Talvês o processo físico do tipo plasma mais importante que ocorre no universo são as reações termonucleares nas estrelas. Uma estrela é constituída por um plasma aproximadamente esférico com elevada densidade, cuja forma é mantida por forças gravitacionais muito intensas sendo a temperatura suficiente para manter uma reação de fusão constante. O Sol, por exemplo, é constituído por um plasma de hidrogênio no qual a reação de fusão converte hidrogênio em hélio mais energia. Sendo não homogêneo, o Sol ocasionalmente emite para a Terra certa quantidade de plasma e irradiação eletromagnética, produzindo alguns fenômenos terrestres não comuns como, por exemplo, interrupções dos sistemas de comunicação terrestres.

Existem vários plasmas importantes ligados à Terra. Na fig. 3.1 são apresentados algumas regiões nas vizinhanças da Terra com densidade de plasma elevada.

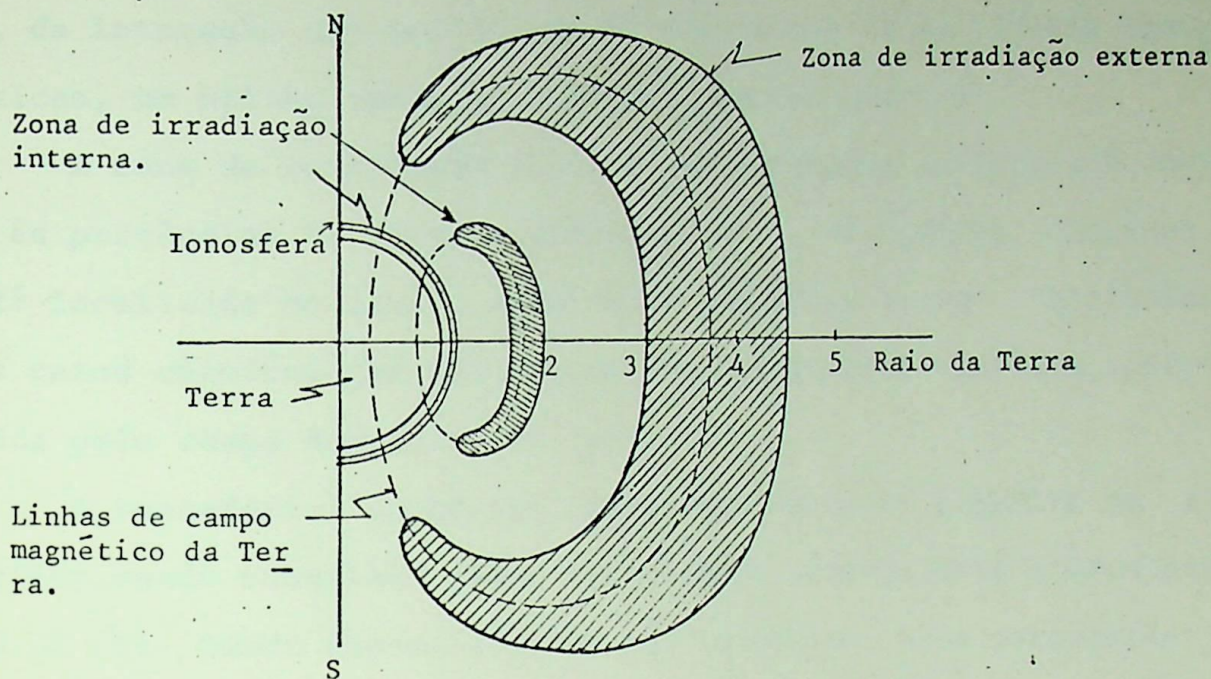


Fig. 3.1 - Distribuição de plasmas nas regiões próximas da Terra.

A zona externa de irradiação é formada por plasma proveniente do Sol e sua forma e intensidade dependem das atividades do Sol e dos ventos solares. À medida que o plasma encontra-se mais próximo da Terra, mais é influenciado pelo campo magnético terrestre, resultando no seu confinamento em zonas com formas de bananas envolvendo, eventualmente, a Terra (fig. 3.1).

Nos polos a intensidade do campo magnético é maior, e portanto, o movimento das partículas ao longo das linhas de campo magnético são convertidas em movimentos orbitais nas proximidades dos polos. Quando o campo magnético é muito intenso, o movimento longitudinal desaparece sendo a partícula refletida. Se o plasma vindo do Sol entra ao longo dos polos, não é confinado, e se movimenta ao longo das linhas de campo, dando origem a correntes e campos muito intensos. Estes campos dão origem a tempestades geo

magnéticas, ou flutuações no campo magnético da Terra, resultando, da interação das partículas de plasma com as partículas atmosféricas, um brilho vermelho chamado "auroras boreais".

A zona de irradiação interna, mais próxima da Terra, é devida às partículas de origem galácticas com velocidades elevadas. Está localizada no limite externo da atmosfera sendo atribuída aos raios cósmicos que dão origem a pares prótons-elétrons confinados pelo campo magnético da Terra.

A ionosfera é um plasma localizado na parte superior da atmosfera sendo originada pelas irradiações ultravioleta provenientes do Sol. Sendo essencialmente não homogênea, suas características variam do dia para a noite; como propriedade principal reflete sinais de baixa frequência, sendo, portanto, útil para comunicações terrestres a grandes distâncias.

Existem vários outros plasmas locais na atmosfera. Por exemplo, meteoros entrando na atmosfera criam rastros de vapores ionizados que podem ser usados com a finalidade de comunicação. Normalmente estes rastros têm a forma de uma coluna cilíndrica de comprimento infinito.

O espalhamento de ondas eletromagnéticas em colunas infinitas de plasma será o objeto deste trabalho.

Veículos espaciais ao reentrar na atmosfera são envolvidos por uma camada de plasma. Do ponto de vista prático este problema é importante visto que o plasma poderá silenciar as comunicações Terra-veículo espacial.

Muito esforço está sendo empregado em outros tipos de pesquisa com plasma, tais como reação de fusão controlada para geração de potência, geração de potência por magnetohidrodinâmica,

propagação de sinais em plasma, etc. (3.1).

3.2 - O TENSOR PERMISSIVIDADE

É conveniente no estudo de ondas eletromagnéticas em plasmas o seu tratamento como um meio dielétrico. A presença de ions e de eletrons no plasma dão origem a correntes de convecção que devem ser consideradas na dedução da permissividade equivalente. Quando o plasma está sob a ação de um campo magnético estático se comporta como um material anisotrópico tendo a sua permissividade um caráter tensorial.

Meios anisotrópicos são aqueles cujas propriedades elétricas variam com a direção dos vetores \vec{E} ou \vec{H} . Os vetores \vec{D} e \vec{B} não são, em geral, paralelos aos vetores \vec{E} e \vec{H} , respectivamente. Cada componente de \vec{D} ou \vec{B} está, assim, relacionada linearmente às componentes de \vec{E} e \vec{H} . Por exemplo,

$$D_r = \epsilon_{11} E_r + \epsilon_{12} E_\phi + \epsilon_{13} E_z \quad (3.2)$$

$$D_\phi = \epsilon_{21} E_r + \epsilon_{22} E_\phi + \epsilon_{23} E_z \quad (3.3)$$

$$D_z = \epsilon_{31} E_r + \epsilon_{32} E_\phi + \epsilon_{33} E_z \quad (3.4)$$

Assim, de um modo geral, tem-se:

$$\vec{D} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{E} \quad (3.5)$$

$$\vec{B} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{H} \quad (3.6)$$

onde $\overleftrightarrow{\epsilon}$ e $\overleftrightarrow{\mu}$ são quantidades tensoriais.

Na análise que se segue, mostraremos que o plasma é caracterizado por uma permissividade tensorial. A permeabilidade é escalar.

No plasma, a eq. (2.14) é escrita como:

$$(2.14) \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + i\omega\epsilon_0 \vec{E}$$

A corrente total pode ser escrita em termos de uma corrente de deslocamento, considerando a nova permissividade $\overleftrightarrow{\epsilon}$, tal que:

$$\vec{J} + i\omega\epsilon_0 \vec{E} = i\omega \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{E} \quad (3.7)$$

Em geral existem vários tipos de partículas carregadas no plasma sendo a corrente de convecção a soma de todas as correntes presentes. Representado a componente dc da densidade de cargas do K-ésimo tipo como ρ_{0K} , a corrente é escrita como

$$\vec{J} = \sum_K \rho_{0K} \vec{v}_K \quad (3.8)$$

e a eq. (3.7) torna-se

$$\sum_K \rho_{0K} \vec{v}_K + i\omega\epsilon_0 \vec{E} = i\omega \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{E} \quad (3.9)$$

Usaremos a equação de movimento (2.9) para relacionar \vec{v}_K ao campo elétrico \vec{E} ; a partir da eq. (3.9) determinaremos as componentes

do tensor $\vec{\epsilon}$. A equação de movimento linearizada, escrita para as quantidades complexas, é:

$$i\omega\vec{V} = -\eta\vec{E} - \eta(\vec{V} \times \vec{B}) - v\vec{V} \quad (3.10)$$

Em seguida, escreve-se a equação de movimento na forma de componentes, em coordenadas cilíndricas, considerando o campo magnético estático aplicado na direção $+z$, isto é:

$$\vec{B} = B_0 \hat{z} \quad (3.11)$$

Tendo em vista as simplificações consideradas na seção 3.1, consideraremos a densidade de corrente, na eq. (3.9), devida somente aos elétrons. Resulta:

$$i\omega V_r = -\eta E_r - \omega_c V_\theta - v V_r \quad (3.12)$$

$$i\omega V_\theta = -\eta E_\theta + \omega_c V_r + v V_\theta \quad (3.13)$$

$$i\omega V_z = -\eta E_z - v V_z \quad (3.14)$$

onde

$$\omega_c = \eta B_0 \quad (3.15)$$

Resolvendo o sistema de eqs. (3.12) a (3.14) para as componentes da velocidade, vem:

$$V_r = \frac{(i\omega + \nu) \eta E_r + \omega_c \eta E_\theta}{(i\omega + \nu)^2 + \omega_c^2} \quad (3.16)$$

$$V_\theta = \frac{(i\omega + \nu) \eta E_\theta - \omega_c \eta E_r}{(i\omega + \nu)^2 + \omega_c^2} \quad (3.17)$$

$$V_z = \frac{\eta}{(i\omega + \nu)} E_z \quad (3.18)$$

A eq. (3.9) é escrita como:

$$\rho_0 \vec{V} + i\omega \epsilon_0 \vec{E} = i\omega \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{E} \quad (3.19)$$

Entrando com as componentes V_r , V_θ e V_z na eq. (3.19) e determinando os elementos do tensor $\overleftrightarrow{\epsilon}$, resulta para a representação na forma nônica,

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & i \epsilon_2 & 0 \\ -i \epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

onde,

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 \left\{ 1 + \frac{\omega_p^2 (i\omega + \nu)}{i\omega [(i\omega + \nu)^2 + \omega_c^2]} \right\} \quad (3.21)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega [(i\omega + \nu)^2 + \omega_c^2]} \quad (3.22)$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_0 \left[1 + \frac{\omega_p^2}{i\omega(\nu+i\omega)} \right] \quad (3.23)$$

Devemos observar que, embora os elementos ϵ_1 , ϵ_2 , e ϵ_3 tenham sido obtidos a partir de um sistema de coordenadas particular, no caso cilíndricas, eles são independentes do sistema de coordenadas ortogonal adotado. A frequência de plasma é definida como:

$$\omega_p^2 = - \frac{\rho_0 \eta}{\epsilon_0} \quad (3.24)$$

sendo sempre um número positivo. Os termos fora da diagonal na exp. (3.20) definem a propriedade anisotrópica do meio e mostram que a anisotropia é devida ao campo magnético estático aplicado.

Quando $\omega_c = 0$,

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_0 \left[1 + \frac{\omega_p^2}{i\omega(\nu+i\omega)} \right]$$

e $\epsilon_2 = 0$; tem-se, assim, uma permissividade escalar e o plasma torna-se isotrópico.

No caso de não serem consideradas as colisões dos eletrons com as partículas gasosas, as eqs. (3.21) a (3.23) são escritas como:

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2} \right) \quad (3.25)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega_c^2 - \omega^2)} \quad (3.26)$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad (3.27)$$

Deve-se observar que as exp. (3.21) a (3.23) e (3.25) a (3.27) são válidas para um plasma frio. No caso de um plasma quente no qual podem ocorrer colisões, os elementos do tensor $\vec{\epsilon}$ são mais complexos, tendo sido determinados por Mower¹⁰, e são:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2 (\nu + i\omega)}{i\omega [(\nu + i\omega)^2 + \omega_c^2]} \left\{ 1 - \frac{\omega_c^2 u^2 [(\nu + i\omega)^2 - 3\omega_c^2]}{[(\nu + i\omega)^2 + \omega_c^2]^2} \right\} \quad (3.28)$$

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega [(\nu + i\omega)^2 + \omega_c^2]} \left\{ 1 - \frac{\omega_c^2 u^2 [3(\nu + i\omega)^2 - \omega_c^2]}{[(\nu + i\omega)^2 + \omega_c^2]^2} \right\} \quad (3.29)$$

$$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{i\omega (\nu + i\omega)} \left[1 - \frac{3\omega_c^2 u^2}{(\nu + i\omega)^2} \right] \quad (3.30)$$

onde o termo u^2 é dado pela expressão

$$u^2 = \beta^2 \frac{KT}{m \omega_c^2} \quad (3.31)$$

para propagação ao longo do eixo z, tendo sido considerada a aproximação $u^2 \ll 1$, K = Constante de Boltzman e T a temperatura do gás eletrônico.

CAPÍTULO IV

ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM UM PLASMA CILÍNDRICO
DE SECÇÃO TRANSVERSAL ARBITRÁRIA

4.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Neste capítulo apresentaremos a teoria para a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma cilíndrico, de secção transversal arbitrária, como é apresentado na fig. 4.1.

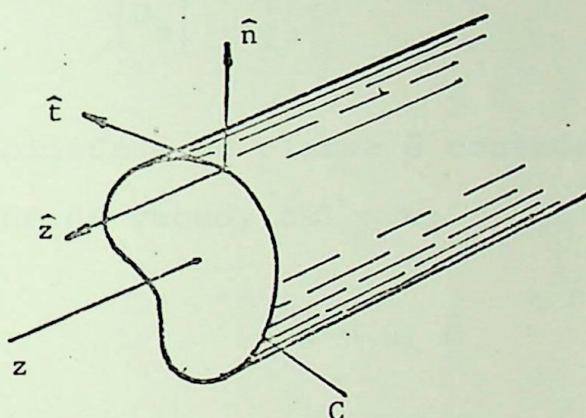


Fig. 4.1 - Plasma cilíndrico de secção transversal arbitrária.

O plasma considerado é suposto homogêneo e linear. Usaremos o sistema de unidades M.K.S. racionalizado. O eixo do cilindro é coincidente com o eixo z.

Determinaremos a equação de ondas, suas soluções e as expressões para as componentes transversais dos campos em função das componentes longitudinais. As características dos modos de propagação no plasma serão discutidas.

4.2 - EQUAÇÃO DE ONDAS

Deduziremos as equações para ondas eletromagnéticas que se propagam em um plasma na presença de um campo magnético estático aplicado na direção de propagação, seguindo o procedimento de A.B. Diniz³.

A anisotropia do plasma cilíndrico é caracterizada numa forma diádica da permissividade elétrica $\overleftrightarrow{\epsilon}$, tal que a eq. (2.5) é escrita, na representação complexa, como:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_n \\ D_t \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & i\epsilon_2 & 0 \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_n \\ E_t \\ E_z \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

A permeabilidade do plasma é considerada constante e igual à permeabilidade do vácuo, tal que:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (4.2)$$

Podemos escrever para os campos elétrico e magnético:

$$\vec{E} = (\hat{u} E_T + \hat{z} E_z) \exp(-i\beta z) \quad (4.3)$$

$$\vec{H} = (\hat{v} H_T + \hat{z} H_z) \exp(-i\beta z) \quad (4.4)$$

onde \hat{u} e \hat{v} são vetores unitários no plano transversal e β é a constante de fase segundo a direção z .

Para o vetor deslocamento:

$$\vec{D} = (\hat{w} D_T + \hat{z} D_z) \exp(-i\beta z) \quad (4.5)$$

onde \hat{W} é o vetor unitário da componente transversal de \vec{D} .

Das eqs. (4.1), (4.3) e (4.5), vem:

$$\left. \begin{aligned} \hat{W} D_T &= \epsilon_1 E_T \hat{u} - i\epsilon_2 \hat{z} \times \hat{u} E_T \\ D_z &= \epsilon_3 E_z \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Estas relações serão substituídas nas equações de Maxwell, resultando em um par de equações diferenciais em E_z e H_z .

As equações de Maxwell no plasma, considerado como um dielétrico, podem ser escritas na forma:

$$\nabla \times \vec{E} = -i \omega \vec{B} \quad (4.7.a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = i \omega \vec{D} \quad (4.7.b)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (4.7.c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.7.d)$$

onde o operador ∇ pode ser decomposto em uma componente transversal ∇_T e uma longitudinal $-i\beta\hat{z}$, isto é:

$$\nabla = \nabla_T - i\beta\hat{z}$$

Usando as eqs. (4.5) e (4.6), vem da eq. (4.7.b):

$$\nabla_T \times \hat{v}H_T - i\beta\hat{z} \times \hat{v}H_T + \nabla_T \times \hat{z}H_z = i\omega(\epsilon_1 E_T \hat{u} - i\epsilon_2 \hat{z} \times \hat{u}E_T + \hat{z}\epsilon_3 E_z) \quad (4.8)$$

Analogamente, da eq. (4.7.a) obtém-se:

$$\nabla \times \hat{u}E_T - i\beta\hat{z} \times \hat{u}E_T + \nabla_T \times \hat{z}E_z = -i\omega \mu_0 \hat{H} \quad (4.9)$$

Tomando as componentes transversais das eqs. (4.8) e (4.9), eliminando-se entre si E_T e H_T , obtemos:

$$\gamma_1^2 E_T \hat{u} - i\omega^2 \mu_0 \epsilon_2 \hat{z} \times \hat{u}E_T + i\beta \nabla_T E_z - i\omega \mu_0 \hat{z} \times \nabla_T H_z = 0 \quad (4.10)$$

e

$$\gamma_1^2 H_T \hat{v} + i\beta \nabla_T H_z + i\omega \epsilon_1 \hat{z} \times \nabla_T E_z - \omega \epsilon_2 \nabla_T E_z - i\omega^2 \mu_0 \epsilon_2 \hat{z} \times \hat{v}H_T = 0 \quad (4.11)$$

com

$$\gamma_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \beta^2$$

Da eq. (4.7.c):

$$\epsilon_1 \nabla_T \cdot \hat{u}E_T - i\epsilon_2 \nabla_T \cdot (\hat{z} \times \hat{u}) E_T = i\beta \epsilon_3 E_z$$

Tomando o divergente da eq. (4.10) e usando esta, encontramos:

$$(\epsilon_1 \nabla_T^2 + \gamma_1^2 \epsilon_3) E_z - i\beta \omega \epsilon_2 \mu_0 H_z = 0 \quad (4.12)$$

Da eq. (4.9), resulta:

$$\nabla_T \cdot \hat{v}H_T = i\beta H_z \quad (4.13)$$

Tomando o divergente da eq. (4.11), e a seguir usando a eq. (4.13), a componente longitudinal da eq. (4.8) e a eq. (4.12), obtemos:

$$\epsilon_1 (\nabla_T^2 + \gamma_1^2) H_z - \omega^2 \epsilon_2 \mu_0 H_z + i\beta \omega \epsilon_2 \epsilon_3 E_z = 0 \quad (4.14)$$

Se definirmos c, d, f, g , respectivamente, como:

$$c = \gamma_1^2 \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} \quad (4.15)$$

$$d = \beta\omega \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \mu_0 \quad (4.16)$$

$$f = \gamma_1^2 - \omega^2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \mu_0 \quad (4.17)$$

$$g = \beta\omega \frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{\epsilon_1} \quad (4.18)$$

as eqs. (4.12) e (4.14) são escritas como:

$$\left. \begin{aligned} (\nabla_T^2 + c) E_z - idH_z &= 0 \\ (\nabla_T^2 + f) H_z + igE_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Das equações diferenciais de segunda ordem acopladas, eqs. (4.19), pode-se deduzir as seguintes equações diferenciais de quarta ordem para E_z e H_z :

$$(\nabla_T^2 + e_1^2) \cdot (\nabla_T^2 + e_2^2) E_z = 0 \quad (4.20)$$

e

$$(\nabla_T^2 + e_1^2) \cdot (\nabla_T^2 + e_2^2) H_z = 0 \quad (4.21)$$

onde,

$$e_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[(f+c) \mp \sqrt{(f-c)^2 + 4gd} \right] \quad (4.22)$$

4.3 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ONDAS

Vamos tentar transformar as eqs. (4.19) em um par de equações de onda, expressando E_z e H_z em termos de duas variáveis independentes ζ e δ :

$$E_z = p_1 \zeta + p_2 \delta \quad (4.23)$$

$$H_z = q_1 \zeta + q_2 \delta \quad (4.24)$$

onde p_1, p_2, q_1, q_2 são constantes a determinar. Substituindo E_z e H_z , definidos na eq. (4.23), nas eqs. (3.15), vem:

$$(\nabla_T^2 + c)(p_1 \zeta + p_2 \delta) - id(q_1 \zeta + q_2 \delta) = 0$$

$$(\nabla_T^2 + f)(q_1 \zeta + q_2 \delta) + ig(p_1 \zeta + p_2 \delta) = 0$$

ou

$$p_1 \nabla_T^2 \zeta + (cp_1 - idq_1)\zeta + p_2 \nabla_T^2 \delta + (cp_2 - idq_2)\delta = 0 \quad (4.25)$$

$$q_1 \nabla_T^2 \zeta + (fq_1 + igp_1)\zeta + q_2 \nabla_T^2 \delta + (fq_2 + igp_2)\delta = 0 \quad (4.26)$$

Vamos definir as seguintes expressões:

$$\left. \begin{aligned} cp_1 - idq_1 &= e_1^2 p_1 \\ fq_1 + igp_1 &= e_1^2 q_1 \\ cp_2 - idq_2 &= e_2^2 p_2 \\ fq_2 + igp_2 &= e_2^2 q_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

com,

$$\left. \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} c - e_1^2 & - id \\ ig & f - e_1^2 \end{array} \right| = 0 \\ \\ \left| \begin{array}{cc} c - e_2^2 & - id \\ ig & f - e_2^2 \end{array} \right| = 0 \end{array} \right\} \quad (4.28)$$

e

$$\left. \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} c - e_1^2 & - id \\ ig & f - e_1^2 \end{array} \right| = 0 \\ \\ \left| \begin{array}{cc} c - e_2^2 & - id \\ ig & f - e_2^2 \end{array} \right| = 0 \end{array} \right\}$$

Nas exp. (4.27), e_1^2 e e_2^2 são constantes a determinar.

As eqs. (4.25) e (4.26) podem, então, ser escritas nas formas:

$$p_1 (\nabla_T^2 \zeta + e_1^2 \zeta) + p_2 (\nabla_T^2 \delta + e_2^2 \delta) = 0 \quad (4.29)$$

$$q_1 (\nabla_T^2 \zeta + e_1^2 \zeta) + q_2 (\nabla_T^2 \delta + e_2^2 \delta) = 0 \quad (4.30)$$

Se fôr satisfeita a condição

$$\left| \begin{array}{cc} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{array} \right| \neq 0 \quad (4.31)$$

o que significa que p_1, p_2, q_1, q_2 serem independentes, resulta:

$$(\nabla_T^2 + e_1^2) \zeta = 0 \quad (4.32)$$

$$(\nabla_T^2 + e_2^2) \delta = 0 \quad (4.33)$$

onde $e_{1,2}^2$ são raízes da equação:

$$\begin{vmatrix} c - e^2 & -id \\ ig & f - e^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.34)$$

ou,

$$e_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[(f+c) \mp \sqrt{(f-c)^2 + 4gd} \right] \quad (4.35)$$

Das eqs. (4.27), vem:

$$q_1 = \frac{ig}{e_1^2 - f} p_1 = i \frac{e_1^2 - c}{d} p_1 \quad (4.36)$$

$$q_2 = \frac{ig}{e_2^2 - f} p_2 = i \frac{e_2^2 - c}{d} p_2 \quad (4.37)$$

Conclue-se, portanto, que se e_1^2 e e_2^2 são dados pela eq. (4.35) e ζ e δ são soluções das equações de ondas:

$$(4.32) \quad (\nabla_T^2 + e_1^2) \zeta = 0$$

$$(4.33) \quad (\nabla_T^2 + e_2^2) \delta = 0$$

as componentes longitudinais dos campos eletromagnéticos no plasma são dadas por:

$$E_z = p_1 \zeta + p_2 \delta \quad (4.38)$$

$$H_z = m_1 p_1 \zeta + m_2 p_2 \delta \quad (4.39)$$

onde,

$$m_{1,2} = \frac{ig}{e_{1,2}^2 - f} = i \frac{e_{1,2}^2 - c}{d} = \frac{ig}{c - e_{2,1}^2} \quad (4.40)$$

4.4 - COMPONENTES DOS CAMPOS EM FUNÇÃO DAS COMPONENTES LONGITUDINAIS E_z e H_z .

Afim de aplicar as condições de contorno na solução do problema de espalhamento torna-se necessário obter as componentes dos campos elétrico e magnético. Adotaremos um sistema de coordenadas generalizadas $(\hat{n}, \hat{t}, \hat{z})$, conforme é apresentado na fig.4.1. Resolvendo as eqs. (4.10) e (4.11) com respeito às componentes $E_T \hat{u}$ e $H_T \hat{v}$, resulta:

$$E_T \hat{u} = - \frac{1}{Q} \left[\nabla_T (\omega^3 \mu_0^2 \epsilon_2 H_z - i\beta \gamma_1^2 E_z) + \hat{z} \times \nabla_T (i\omega \mu_0 \gamma_1^2 H_z + \omega^2 \mu_0 \epsilon_2 \beta E_z) \right] \quad (4.41)$$

$$H_T \hat{v} = - \frac{1}{Q} \left\{ \nabla_T \left[(\gamma_1^2 \omega \epsilon_2 - \omega^3 \mu_0 \epsilon_1 \epsilon_2) E_z - i\beta \gamma_1^2 H_z \right] + \hat{z} \times \nabla_T \left[(i\omega^3 \mu_0 \epsilon_2^2 - i\omega \epsilon_1 \gamma_1^2) E_z + \omega^2 \mu_0 \epsilon_2 \beta H_z \right] \right\} \quad (4.42)$$

onde,

$$Q = (\omega^2 \mu_0 \epsilon_2)^2 - \gamma_1^4 \quad (4.43)$$

Decompondo E_T e H_T nas componentes normal e tangencial à superfície do guia e considerando as equações:

$$E_T \hat{u} = E_n \hat{n} + E_t \hat{t} \quad (4.44.a)$$

$$H_T \hat{v} = H_n \hat{n} + H_t \hat{t} \quad (4.44.b)$$

$$\nabla_T = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial n} \hat{n} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial t} \hat{t} \quad (4.45)$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ e $\frac{\partial}{\partial t}$ representam, respectivamente, as derivadas normal e tangencial sobre C, teremos:

$$E_n = \frac{1}{Q} \left[\frac{i\beta\gamma_1^2}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial n} + \frac{i\omega\mu_0\gamma_1^2}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\omega^2\mu_0\epsilon_2\beta}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{\omega^3\mu_0^2\epsilon_2}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial n} \right] \quad (4.46)$$

$$E_t = \frac{1}{Q} \left[\frac{i\beta\gamma_1^2}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{\omega^3\mu_0^2\epsilon_2}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{i\omega\mu_0\gamma_1^2}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial n} - \frac{\omega^2\mu_0\epsilon_2\beta}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial n} \right] \quad (4.47)$$

$$H_n = \frac{1}{Q} \left[\frac{i\beta\gamma_1^2}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial n} + \frac{i\omega^3\mu_0\epsilon_2^2 - i\omega\epsilon_1\gamma_1^2}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\omega^2\mu_0\epsilon_2\beta}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\beta^2\omega\epsilon_2}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial n} \right] \quad (4.48)$$

$$H_t = \frac{1}{Q} \left[\frac{i\beta\gamma_1^2}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{\gamma_1^2\omega\epsilon_2 - \omega^3\mu_0\epsilon_1\epsilon_2}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{i\omega^3\mu_0\epsilon_2^2 - i\omega\epsilon_1\gamma_1^2}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial n} - \frac{\omega^2\mu_0\epsilon_2\beta}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial n} \right] \quad (4.49)$$

As eqs. (4.46) a (4.49) são as expressões gerais das componentes dos campos eletromagnéticos em função das componentes longitudinais E_z e H_z , no plasma.

4.5 - CARACTERÍSTICAS DOS MODOS DE PROPAGAÇÃO NO PLASMA.

Da análise das eqs. (4.19) que representam um sistema de e quações diferenciais a ser resolvido para E_z e H_z , conclui-se que soluções do tipo TE ou TM puras não existem. No entanto, o acoplamento entre E_z e H_z desaparece no caso $d = 0$ e/ou $g = 0$.

Esta condição é satisfeita quando:

1) $\epsilon_2 = 0$.

Este é o caso em que o campo magnético axial é nulo ou infinito.

2) $\beta = 0$.

É a condição de corte, isto é, a onda eletromagnética não se propaga no guia constituído pelo plasma.

Em geral há propagação de modos de carácter híbrido, os quais apresentam componentes longitudinais dos campos elétrico e magnético diferentes de zero. Esse carácter híbrido das relações é exibido analiticamente pela dependência entre as constantes de propagação transversais e_1^2 e e_2^2 e a constante de propagação longitudinal β . O acoplamento entre as ondas que se propagam transversalmente e longitudinalmente decorre dessa condição.

CAPÍTULO V

ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM UMA REGIÃO

CILÍNDRICA CIRCULAR

5.1 - SOLUÇÃO NA REGIÃO CONTENDO PLASMA.

Como estamos interessados em uma configuração cilíndrica, a dotaremos um sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , conforme é apresentado na fig. 5.1. O raio do cilindro é a.

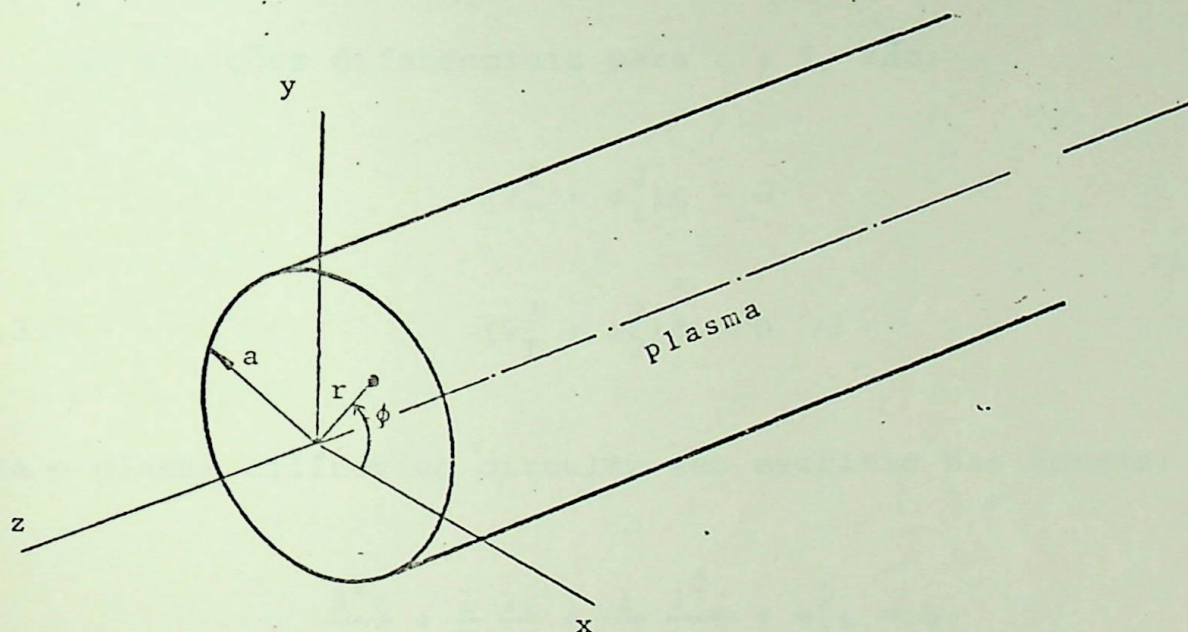


Fig. 5.1 - Plasma cilíndrico circular.

Neste capítulo, aplicaremos os resultados da teoria geral desenvolvida para o caso de coordenadas cilíndricas generalizadas.

As equações de ondas para as componentes longitudinais dos campos eletromagnéticos são reescritas, como:

$$(4.19) \quad \begin{cases} (\nabla_T^2 + c) E_z - idH_z = 0 \\ (\nabla_T^2 + f) H_z + igE_z = 0 \end{cases}$$

onde, em um sistema de coordenadas cilíndricas a componente transversal do operador nabla é,

$$\nabla_T^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (5.1)$$

As equações diferenciais para ζ e δ , são:

$$(4.32) \quad (\nabla_T^2 + e_1^2) \zeta = 0$$

$$(4.33) \quad (\nabla_T^2 + e_2^2) \delta = 0$$

Para o plasma cilíndrico circular são escritas nas formas:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} + e_1^2 \zeta = 0 \quad (5.2)$$

e

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial \phi^2} + e_2^2 \delta = 0 \quad (5.3)$$

5.2 - DETERMINAÇÃO DAS COMPONENTES LONGITUDINAIS E_z E H_z NO PLASMA.

Vamos resolver a equação diferencial para ζ , uma vez que a

solução da equação para δ é semelhante.

Aplicando o método de separação de variáveis, escreve-se:

$$\zeta = R(r) F(\phi) \quad (5.4)$$

A substituição da eq. (5.4) na eq. (5.2) conduz a duas equações diferenciais ordinárias:

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(e_1^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (5.5)$$

e

$$F'' + n^2 F = 0 \quad (5.6)$$

onde n é a constante de separação.

As soluções da eq. (5.5) (equação diferencial ordinária de Bessel) são escritas em termos das funções de Bessel ordinárias de ordem n (Ap. A), como:

$$R(r) = A' J_n(e_1 r) + A_1 N_n(e_1 r) \quad (5.7)$$

As soluções da eq. (5.6) são:

$$F(\phi) = C e^{-in\phi} + C' e^{in\phi} \quad (5.8)$$

e, em face da eq. (5.4), resulta:

$$\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A' J_n(e_1 r) + A_1 N_n(e_1 r)] \cdot (C e^{-in\phi} + C' e^{in\phi}) \quad (5.9)$$

onde a somatória leva em consideração todas as harmônicas cilíndricas.

Na estrutura cilíndrica circular, proposta para estudo, a solução finita e univalente no interior, será:

$$\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A J_n(e_1 r) e^{-in\phi} \quad (5.10)$$

uma vez que $N_n(e_1 r)$ torna-se infinito para $r = 0$, exigindo pois que se tome $A_1 = 0$ na solução geral. Também, devido à simetria circular, $F(\phi)$ deve ter o mesmo valor para $\phi = x r d$ e para $\phi = (x+2\pi)r d$, uma vez que correspondem ao mesmo ponto no plasma. Isto exige que n seja inteiro e as funções $F(\phi)$ trigonométricas.

Para a equação diferencial em δ , obtêm-se resultado semelhante:

$$\delta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B J_n(e_2 r) e^{-in\phi} \quad (5.11)$$

Em vista das eqs. (4.38) e (4.39), os campos no plasma cilíndrico anisotrópico poderão ser escritos nas formas:

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A J_n(e_1 r) + B J_n(e_2 r)] e^{-i(n\phi + \beta z)} \quad (5.12)$$

e

$$H_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [m_1 A J_n(e_1 r) + m_2 B J_n(e_2 r)] e^{-i(n\phi + \beta z)} \quad (5.13)$$

onde $m_{1,2}$ é definido na eq. (4.40).

5.3 - DETERMINAÇÃO DAS COMPONENTES TRANSVERSAIS DOS CAMPOS NO PLASMA.

Em princípio, as expressões das componentes transversais dos campos eletromagnéticos podem ser obtidas substituindo-se E_z e H_z nas eqs. (4.46) a (4.49) escritas convenientemente para o caso de coordenadas cilíndricas circulares. Neste caso, tem-se:

$$\vec{E}_T = E_r \hat{r} + E_\phi \hat{\phi} \quad (5.14)$$

e

$$\vec{H}_T = H_r \hat{r} + H_\phi \hat{\phi} \quad (5.15)$$

Ainda, para a componente transversal do operador nabla, tem-se:

$$\nabla_T = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial n} \hat{n} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial t} \hat{t} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (5.16)$$

resultando, os valores $h_1 = 1$ e $h_2 = r$.

Em face do exposto, das eqs. (4.46) a (4.49), resultam as seguintes expressões para as componentes transversais (r, ϕ) dos campos:

$$E_r = \frac{1}{Q} \left[i\beta\gamma_1^2 \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{i\omega\mu_0\gamma_1^2}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{\omega^2\mu_0\epsilon_2\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega^3\mu_0^2\epsilon_2 \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] \quad (5.17)$$

$$E_\phi = \frac{1}{Q} \left[\frac{i\beta\gamma_1^2}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\omega^3\mu_0^2\epsilon_2}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - i\omega\mu_0\gamma_1^2 \frac{\partial H_z}{\partial r} - \omega^2\mu_0\epsilon_2\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \quad (5.18)$$

$$H_r = \frac{1}{Q} \left[i\beta\gamma_1^2 \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{i\omega^3 \mu_0 \epsilon_2^2 - i\omega \epsilon_1 \gamma_1^2}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \frac{\omega^2 \mu_0 \epsilon_2^\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \beta^2 \omega \epsilon_2 \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \quad (5.19)$$

$$H_\phi = \frac{1}{Q} \left[\frac{i\beta\gamma_1^2}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\gamma_1^2 \omega \epsilon_2 - \omega^3 \mu_0 \epsilon_1 \epsilon_2}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - (i\omega^3 \mu_0 \epsilon_2^2 - i\omega \epsilon_1 \gamma_1^2) \frac{\partial E_z}{\partial r} - \omega^2 \mu_0 \epsilon_2^\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] \quad (5.20)$$

onde, Q é definido na eq. (4.43).

Considerando as expressões para as componentes longitudinais dos campos, E_z e H_z , a partir das eqs. (5.17) a (5.20), podemos mostrar que os campos eletromagnéticos no interior do cilindro de plasma anisotrópico tem as seguintes representações:

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n [A J_n(e_1 r) + B J_n(e_2 r)] \quad (5.21)$$

$$H_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n [m_1 A J_n(e_1 r) + m_2 B J_n(e_2 r)] \quad (5.22)$$

$$E_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \left\{ \frac{A}{Qm_2} \left[e_1 C_2 J_n'(e_1 r) + n\omega \epsilon_1 e_2^2 \frac{J_n(e_1 r)}{r} \right] - \frac{B}{Qm_1} \left[e_2 C_1 J_n'(e_2 r) - n\omega \epsilon_1 e_1^2 \frac{J_n(e_2 r)}{r} \right] \right\} \quad (5.23)$$

$$E_{\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \left\{ \frac{A}{iQm_2} \left[\omega \epsilon_1 e_1 e_2^2 J_n'(e_1 r) + n C_2 \frac{J_n(e_1 r)}{r} \right] + \right. \\ \left. + \frac{B}{iQm_1} \left[\omega \epsilon_1 e_1^2 e_2 J_n'(e_2 r) - n C_1 \frac{J_n(e_2 r)}{r} \right] \right\} \quad (5.24)$$

$$H_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \left\{ \frac{m_1 A}{iQ} \left[e_1 R_2 J_n'(e_1 r) - \frac{n e_2^2 c_2 \epsilon_1^2}{\beta \epsilon_3 \epsilon_2} \frac{J_n(e_1 r)}{r} \right] + \right. \\ \left. + \frac{m_2 B}{iQ} \left[e_2 R_1 J_n'(e_2 r) - \frac{n e_1^2 c_1 \epsilon_1^2}{\beta \epsilon_3 \epsilon_2} \frac{J_n(e_2 r)}{r} \right] \right\} \quad (5.25)$$

$$H_{\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \left\{ \frac{m_1 A}{Q} \left[\frac{\epsilon_1^2 e_1 e_2^2 c_2}{\beta \epsilon_3 \epsilon_2} J_n'(e_1 r) - n R_2 \frac{J_n(e_1 r)}{r} \right] + \right. \\ \left. + \frac{m_2 B}{Q} \left[\frac{\epsilon_1^2 e_1^2 e_2 c_1}{\beta \epsilon_3 \epsilon_2} J_n'(e_2 r) - n R_1 \frac{J_n(e_2 r)}{r} \right] \right\} \quad (5.26)$$

onde A e B são constantes arbitrárias a determinar, e

$$F_n = e^{-i(n\phi + \beta z)} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.27)$$

$$(4.40) \quad m_{1,2} = \frac{ig}{e_{1,2}^2 - f} = \frac{c - e_{1,2}^2}{id} = \frac{ig}{c - e_{2,1}^2}$$

$$(4.43) \quad Q = (\omega^2 \mu_0 \epsilon_2)^2 - \gamma_1^4$$

$$c_{1,2} = \mp \frac{\gamma_1^2 \epsilon_1 (c - e_{1,2}^2) - (\omega^2 \mu_0 \epsilon_2)^2 \epsilon_3}{\omega \mu_0 \epsilon_2} \quad (5.28)$$

$$R_{1,2} = \beta (c_{1,2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} - \gamma_1^2) \quad (5.29)$$

$$c_{1,2} = c - e_{1,2}^2 \quad (5.30)$$

$$J'_n(e_{1,2}r) = \frac{d J_n(e_{1,2}r)}{d(e_{1,2}r)} \quad (5.31)$$

As expressões das componentes dos campos eqs. (5.21) a (5.26) serão usadas nas condições de contorno para determinação das constantes arbitrárias.

5.4 - SOLUÇÃO PARA OS CAMPOS ESPALHADOS.

Os campos espalhados devem satisfazer à equação de ondas em coordenadas cilíndricas, sendo a solução geral escrita na forma:

$$F_{ez} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_e Z_n(\gamma r) e^{-i(n\phi + \beta z)} \quad (5.32)$$

onde F_{ez} representa a componente z dos campos elétrico e magnético espalhados, indistintamente. Além das condições de contorno para os campos na superfície de limite do plasma, uma condição de contorno adicional no infinito é necessária. Considerações físicas indicam que os campos espalhados devem conter somente ondas

caminhantes se afastando do plasma cilíndrico. Portanto, F_{ez} deve satisfazer a condição de irradiação de Sommerfeld apresentada na eq. (2.50). Introduzindo a função F_{ze} dada pela eq. (5.32) na eq. (2.50), determina-se a natureza da função de Bessel $Z_n(\gamma r)$. A condição de irradiação é satisfeita se

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma r (Z'_n + i Z_n) = 0 \quad (5.33)$$

onde o fator k na eq. (2.50) foi substituído por γ que é a constante de propagação na direção radial. Considerando

$$Z_n = A J_n(\gamma r) + B N_n(\gamma r) \quad (5.34)$$

e as aproximações para grandes argumentos das funções de Bessel, obtêm-se a partir da eq. (5.33):

$$A - i B = 0 \quad (5.35)$$

A relação específica entre os coeficientes A e B dados pela eq. (5.35) restringe a função de Bessel geral Z_n para a função de Hankel $H_n^{(2)} = J_n - i N_n$. A função de Hankel de segunda ordem, portanto, representa ondas propagando-se na direção radial positiva. A eq. (5.32) é escrita, portanto, como:

$$F_{ez} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(\gamma r) e^{-i(n\phi + \beta z)} \quad (5.36)$$

Não considerando a polarização da onda plana incidente, as

expressões para as componentes longitudinais dos campos espalhados ($r > a$) satisfazendo a condição de irradiação é escrita, segundo a eq. (5.36), na forma:

$$E_{ez} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_e H_n^{(2)}(\gamma r) F_n \quad (5.37)$$

e

$$H_{ez} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_e H_n^{(2)}(\gamma r) F_n \quad (5.38)$$

As componentes transversais são obtidas a partir das eqs. (5.17) a (5.20), nas condições $\epsilon_2 = 0$ e $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_0$, e considerando as expressões para as componentes longitudinais apresentadas. Resultam:

$$\begin{aligned} E_{er} &= -\frac{1}{\gamma^2} \left[i\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{i\omega\mu_0}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} - \left[\frac{i\beta}{\gamma} A_e H_n^{\prime(2)}(\gamma r) + \frac{n\omega\mu_0}{\gamma^2 r} B_e H_n^{(2)}(\gamma r) \right] F_n \quad (5.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{e\phi} &= \frac{1}{\gamma^2} \left[-\frac{i\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{n\beta A_e}{\gamma^2 r} H_n^{(2)}(\gamma r) + \frac{i\omega\mu_0}{\gamma} B_e H_n^{\prime(2)}(\gamma r) \right] F_n \quad (5.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{er} &= \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{i\omega\epsilon_0}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - i\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} - \left[\frac{i\beta}{\gamma} B_e H_n^{(2)}(\gamma r) + \frac{n\omega\epsilon_0}{\gamma^2 r} A_e H_n^{(2)}(\gamma r) \right] F_n \quad (5.41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{e\phi} &= - \frac{1}{\gamma^2} \left[i\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{i\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right] = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} - \left[\frac{n\beta}{\gamma^2 r} B_e H_n^{(2)}(\gamma r) + \frac{i\omega\epsilon_0}{\gamma} A_e H_n^{(2)}(\gamma r) \right] F_n \quad (5.42)
 \end{aligned}$$

Nas eqs. (5.37) a (5.42) A_e e B_e são constantes arbitrárias e γ é a constante de propagação radial na região $r > a$. Afim de satisfazer às condições de contorno em $r = a$, torna-se necessário considerar a mesma dependência segundo z para os campos fora e dentro do plasma. É importante assinalar que as constantes de propagação β e γ dependem do ângulo de incidência da onda eletromagnética.

CAPÍTULO VI

ESPALHAMENTO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

INCIDINDO OBLIQUAMENTE SOBRE UM

PLASMA CILÍNDRICO MAGNETIZADO

6.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar a teoria do espalhamento de ondas eletromagnéticas com incidência oblíqua sobre uma coluna de plasma. Com relação a um sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) o cilindro de plasma ocupa a região $r < a$. O plano de incidência considerado é o plano $x-z$ e a direção da onda plana incidente faz um ângulo θ com o eixo z negativo, como é apresentado na fig. 6.1. Podem ser considerados dois tipos de polarização para a onda eletromagnética plana incidindo obliquamente, os casos de polarização paralela e de polarização normal ao plano $x-z$ de incidência⁴. A solução geral para o caso de uma onda plana incidente com polarização arbitrária pode ser determinada pela superposição das soluções obtidas para os casos considerados. Sendo semelhante o tratamento para os dois casos, consideraremos somente o caso de polarização normal ao plano de incidência.

6.2 - COMPONENTES DOS CAMPOS DA ONDA INCIDENTE.

Neste caso, a componente z do vetor campo magnético da onda incidente é dado por:

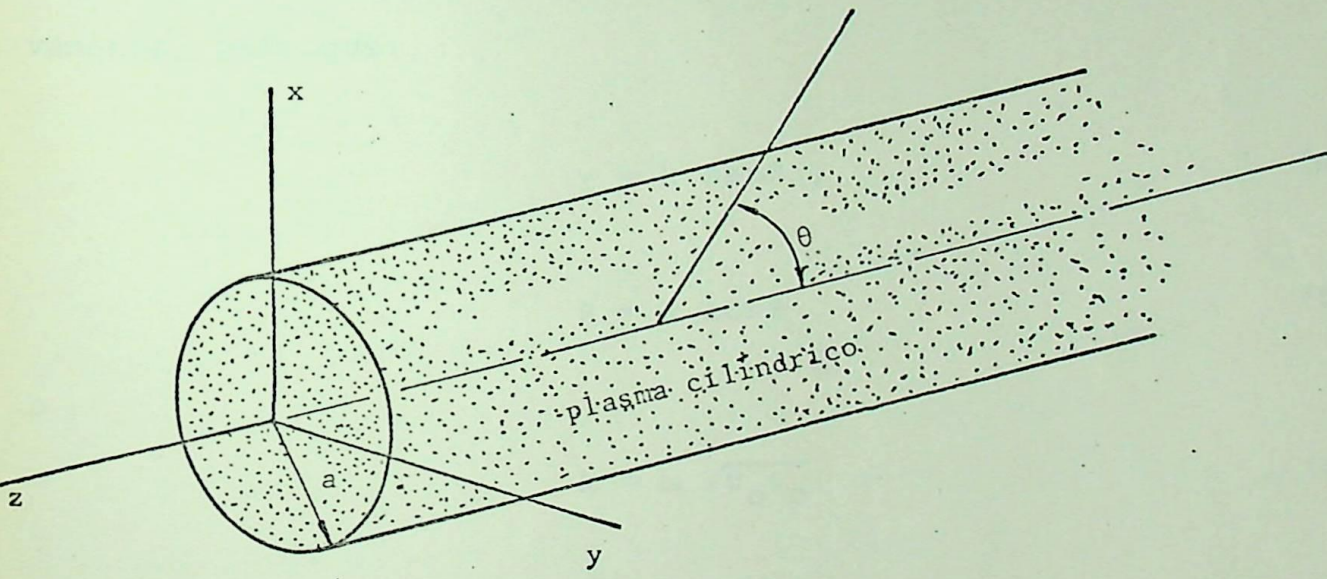
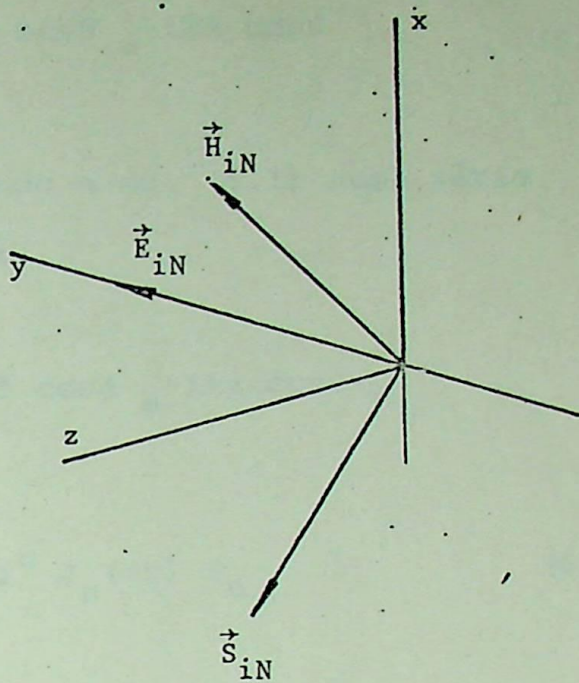


Fig. 6.1 - Onda eletromagnética com polarização normal incidindo obliquamente sobre um plasma cilíndrico circular.

$$H_{iz} = H_0 \sin\theta e^{ikx \sin\theta} e^{-ikz \cos\theta} \quad (6.1)$$

Considerando, $x = r \cos\phi$ e expandindo a eq. (6.1) numa série de funções de Bessel, eq. (A.43), vem:

$$\begin{aligned} H_{iz} &= H_0 \sin\theta e^{ikr \sin\theta \cos\phi} e^{-ikz \cos\theta} = \\ &= H_0 \sin\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\gamma r) F_n \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde, H_0 é a amplitude do campo magnético e γ e β as constantes de propagação segundo as direções radial e longitudinal, respectivamente, tais que:

$$\gamma = k \sin\theta, \quad (6.3)$$

$$\beta = k \cos\theta \quad (6.4)$$

e

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (6.5)$$

A componente longitudinal do campo elétrico devido à polarização considerada é nulo, isto é:

$$E_{iz} = 0. \quad (6.6)$$

As componentes transversais são obtidas a partir das eqs. (5.17) a (5.20), nas condições $\epsilon_2 = 0$ e $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_0$ e considerando as componentes longitudinais apresentadas em (6.2) e (6.6). Assim,

$$E_{ir} = - \frac{i\omega\mu_0}{\gamma^2 r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} = - H_0 \operatorname{sen}\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{n\omega\mu_0}{\gamma^2} \frac{J_n(\gamma r)}{r} F_n \quad (6.7)$$

$$E_{i\phi} = \frac{i\omega\mu_0}{\gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} = i H_0 \operatorname{sen}\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{\omega\mu_0}{\gamma} J'_n(\gamma r) F_n \quad (6.8)$$

$$H_{ir} = - \frac{i\beta}{\gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} = -i H_0 \operatorname{sen}\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{\beta}{\gamma} J'_n(\gamma r) F_n \quad (6.9)$$

$$H_{i\phi} = - \frac{i\beta}{\gamma^2 r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} = - H_0 \operatorname{sen}\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{n\beta}{\gamma^2} \frac{J_n(\gamma r)}{r} F_n \quad (6.10)$$

6.3 - CONDIÇÕES DE CONTORNO.

Nesta seção aplicaremos as condições de contorno apresentadas nas eqs. (2.30) a (2.33), na superfície de separação plasma-espaco livre, afim de determinarmos as constantes A , B , A_e e B_e em função da geometria do plasma, das características dos meios e da amplitude do campo magnético incidente.

1. A continuidade do campo elétrico tangencial para $r = a$, requer:

$$E_{i\phi} + E_{e\phi} = E_{\phi} \quad (6.11)$$

e

$$E_{ez} = E_z \quad (6.12)$$

2. A continuidade do campo magnético tangencial para $r = a$,
requer:

$$H_{i\phi} + H_{e\phi} = H_{\phi} \quad (6.13)$$

e

$$H_{iz} + H_{ez} = H_z \quad (6.14)$$

As cond. (6.11) a (6.14) fornecem um sistema de quatro equações a quatro incógnitas que permitem calcular os coeficientes A , B , A_e e B_e .

6.4 - DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DOS CAMPOS.

Aplicando as condições de contorno (6.11) a (6.14) às eqs. (5.21) a (5.26), (5.37) a (5.42) e (6.2) a (6.10), resulta um sistema de quatro equações lineares a quatro incógnitas, que colocado na forma matricial, toma a forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{24} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ A_e \\ B_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

onde,

$$a_{11} = \frac{1}{iQm_2} \left[\omega \epsilon_1 e_1 e_2^2 J'_n(e_1 a) + n C_2 \frac{J_n(e_1 a)}{a} \right] \quad (6.16)$$

$$a_{12} = \frac{1}{iQm_1} \left[\omega \epsilon_1 e_1^2 e_2 J'_n(e_2 a) - n C_1 \frac{J_n(e_2 a)}{a} \right] \quad (6.17)$$

$$a_{13} = a_{34} = \frac{n\beta}{\gamma^2 a} H_n^{(2)}(\gamma a) \quad (6.18)$$

$$a_{14} = - \frac{i\omega\mu_0}{\gamma} H_n^{(2)}(\gamma a) \quad (6.19)$$

$$a_{21} = m_1 J_n(e_1 a) \quad (6.20)$$

$$a_{22} = m_2 J_n(e_2 a) \quad (6.21)$$

$$a_{24} = a_{43} = - H_n^{(2)}(\gamma a) \quad (6.22)$$

$$a_{31} = \frac{m_1}{Q} \left[\frac{\epsilon_1^2 e_1 e_2^2 c_2}{\beta \epsilon_3 \epsilon_2} J'_n(e_1 a) - n R_2 \frac{J_n(e_1 a)}{a} \right] \quad (6.23)$$

$$a_{32} = \frac{m_2}{Q} \left[\frac{\epsilon_1^2 e_1^2 e_2 c_1}{\beta \epsilon_3 \epsilon_2} J'_n(e_2 a) - n R_1 \frac{J_n(e_2 a)}{a} \right] \quad (6.24)$$

$$a_{33} = \frac{i\omega\epsilon_0}{\gamma} H_n^{(2)}(\gamma a) \quad (6.25)$$

$$a_{41} = J_n(e_1 a) \quad (6.26)$$

$$a_{42} = J_n(e_2 a) \quad (6.27)$$

$$b_1 = i^{(n+1)} H_0 \operatorname{sen} \theta \frac{\omega \mu_0}{\gamma} J_n'(\gamma a) \quad (6.28)$$

$$b_2 = i^n H_0 \operatorname{sen} \theta J_n(\gamma a) \quad (6.29)$$

$$b_3 = -i^n H_0 \operatorname{sen} \theta \frac{n\beta}{\gamma} \frac{J_n(\gamma a)}{a} \quad (6.30)$$

Vamos definir os seguintes determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{24} & 0 \end{vmatrix} \quad (6.31)$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{13} \\ 0 & a_{42} & a_{24} & 0 \end{vmatrix} \quad (6.32)$$

$$\Delta B = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{13} \\ a_{41} & 0 & a_{24} & 0 \end{vmatrix} \quad (6.33)$$

$$\Delta A_e = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (6.34)$$

$$\Delta B_e = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{24} & 0 \end{vmatrix} \quad (6.35)$$

Os coeficientes A, B, A_e e B_e são, então, determinados como:

$$A = \frac{\Delta A}{\Delta} = i^{n+1} \frac{D_2 g}{\pi D m_1} \cdot 2\omega\mu_0 \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right)^2 e_1^2 e_2^2 H_0 \text{ sen}\theta \quad (6.36)$$

$$B = \frac{\Delta B}{\Delta} = -i^{n+1} \frac{D_1 g}{\pi D m_2} \cdot 2\omega\mu_0 \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right)^2 e_1^2 e_2^2 H_0 \text{ sen}\theta \quad (6.37)$$

$$A_e = \frac{\Delta A_e}{\Delta} = \frac{i^n 2\omega\mu_0 (\epsilon_1/\epsilon_0)^2 e_1^2 e_2^2 H_0 \text{ sen}\theta}{\pi D H_n^{(2)}(\gamma a)} \cdot$$

$$\cdot [c_2 D_2 J_n(e_1 a) - c_1 D_1 J_n(e_2 a)] \quad (6.38)$$

$$B_e = \frac{\Delta B_e}{\Delta} = \frac{i^n H_0 \text{sen}\theta}{\pi D H_n^{(2)}(\gamma a)} \left\{ 2ik^2 \beta (\epsilon_2/\epsilon_0) (\epsilon_3/\epsilon_0) (\epsilon_1/\epsilon_0) e_1^2 e_2^2 \cdot \right. \\ \left. \cdot [D_2 J_n(e_1 a) - D_1 J_n(e_2 a)] - \pi D J_n(\gamma a) \right\} \quad (6.39)$$

onde,

$$D = D_1 d_2 - D_2 d_1 \quad (6.40)$$

e

$$D_1 = \left\{ \gamma a (\epsilon_1/\epsilon_0)^2 e_1 e_2^2 c_2 [(\epsilon_2/\epsilon_0) e_1 H_n^{(2)}(\gamma a) J_n(e_1 a) - \right. \\ \left. - (\epsilon_3/\epsilon_0) \gamma H_n^{(2)}(\gamma a) J_n'(e_1 a)] + n\beta (\epsilon_2/\epsilon_0) (\epsilon_3/\epsilon_0) H_n^{(2)}(\gamma a) J_n(e_1 a) \cdot \right. \\ \left. \cdot [\beta (\epsilon_1/\epsilon_0) e_1^2 e_2^2 + (\epsilon_3/\epsilon_0) R_2 \gamma^2] \right\} \quad (6.41)$$

$$D_2 = \left\{ \gamma a (\epsilon_1/\epsilon_0)^2 e_1^2 e_2 c_1 [(\epsilon_2/\epsilon_0) e_2 H_n^{(2)}(\gamma a) J_n(e_2 a) - \right. \\ \left. - (\epsilon_3/\epsilon_0) \gamma H_n^{(2)}(\gamma a) J_n'(e_2 a)] + n\beta (\epsilon_2/\epsilon_0) (\epsilon_3/\epsilon_0) H_n^{(2)}(\gamma a) J_n(e_2 a) \cdot \right. \\ \left. \cdot [\beta (\epsilon_1/\epsilon_0) e_1^2 e_2^2 + (\epsilon_3/\epsilon_0) R_1 \gamma^2] \right\} \quad (6.42)$$

$$d_1 = \left\{ k^2 (\epsilon_1/\epsilon_0) (\epsilon_3/\epsilon_0) \gamma a e_1 e_2^2 \beta (\epsilon_2/\epsilon_0) [e_1 H_n^{(2)}(\gamma a) J_n(e_1 a) - \right. \\ \left. - \gamma H_n^{(2)}(\gamma a) J_n'(e_1 a)] + n\beta H_n^{(2)}(\gamma a) J_n(e_1 a) \cdot \right. \\ \left. \cdot [(\epsilon_1/\epsilon_0)^2 c_2 e_1^2 e_2^2 - (\epsilon_3/\epsilon_0)^2 \omega \mu_0 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} c_2 \gamma^2] \right\} \quad (6.43)$$

$$d_2 = \left\{ k^2 (\epsilon_1/\epsilon_0) (\epsilon_3/\epsilon_0) \gamma a e_1^2 e_2 \beta (\epsilon_2/\epsilon_0) [e_2 H_n^{(2)}(\gamma a) J_n(e_2 a) - \right. \\ \left. - \gamma H_n^{(2)}(\gamma a) J_n'(e_2 a)] + n\beta J_n(e_2 a) H_n^{(2)}(\gamma a) \cdot \right. \\ \left. \cdot [(\epsilon_3/\epsilon_0)^2 \omega \mu_0 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} c_1 \gamma^2 + (\epsilon_1/\epsilon_0)^2 c_1 e_1^2 e_2^2] \right\} \quad (6.44)$$

6.5 - DETERMINAÇÃO DA SECCÃO TRANSVERSAL TOTAL DE ESPALHAMENTO.

A secção transversal total de espalhamento é determinada a partir das eqs. (2.56):

$$(2.56) \quad \sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \frac{|\vec{E}_e|^2}{|\vec{E}_i|^2}$$

No caso de polarização normal considerado, tem-se:

$$|\vec{E}_e|^2 = |E_{e\phi} H_{ez}^* - E_{ez} H_{e\phi}^*| \quad (6.45)$$

e

$$|\vec{E}_i| = |-E_{iy} H_{iz}^*| \quad (6.46)$$

resultando,

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \left| \frac{E_{e\phi} E_{ez}^* - E_{ez} H_{e\phi}^*}{-E_{iy} H_{iz}^*} \right| \quad (6.47)$$

Usando as expressões assintóticas:

$$H_n^{(2)}(\gamma r) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma r}} e^{-i\gamma r + i(\pi/4)(2n+1)} \quad (6.48)$$

e

$$H_n^{(2)}(\gamma r) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma r}} e^{-i\gamma r + i(\pi/4)(2n-1)} \quad (6.49)$$

a definição (6.47) e as expressões das componentes dos campos elétrico e magnético dadas pelas eqs. (5.37) a (5.42) e (6.2) a (6.10), pode-se mostrar que a expressão para σ é:

$$\sigma = \frac{4 k^2}{H_0 \gamma^3} \left\{ \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_e e^{-in(\phi-\pi/2)} \right] \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_e^* e^{in(\phi-\pi/2)} \right] + \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_e e^{-in(\phi-\pi/2)} \right] \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_e^* e^{in(\phi-\pi/2)} \right] \right\} \quad (6.50)$$

ou,

$$\sigma = \frac{4 k^2}{H_0 \gamma^3} \left[\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_e e^{-in(\phi-\pi/2)} \right|^2 + \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_e e^{-in(\phi-\pi/2)} \right|^2 \right] \quad (6.51)$$

A expressão (6.51) permite calcular a secção transversal total de espalhamento para o caso de polarização considerado, com A_e e B_e dados pelas eqs. (6.38) e (6.39).

6.6 - ESPALHAMENTO NO CASO DE INCIDÊNCIA OBLÍQUA SOBRE UM PLASMA EM CAMPO MAGNÉTICO DC ZERO E INFINITO.

Na presença de um campo magnético dc zero ou infinito na direção axial desaparece a anisotropia transversal do plasma.

Caso 1. Campo magnético dc infinito.

No caso de um campo magnético dc infinito tem-se: $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$ e $Q = \gamma_1^2$.

As expressões para as componentes dos campos fora do cilindro de plasma permanecem idênticas às apresentadas nas eqs. (5.37) a (5.42) e (6.2) a (6.10). Os campos dentro do cilindro de plasma se reduzem para:

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A' J_n(e_1 r) F_n \quad (6.52)$$

$$H_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B' J_n(e_2 r) F_n \quad (6.53)$$

$$E_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{iA'\beta\epsilon_3}{\epsilon_1 e_1} J_n'(e_1 r) - \frac{nB'\omega\mu_0}{e_2 r} J_n(e_2 r) \right] F_n \quad (6.54)$$

$$E_{\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{nA'\beta\epsilon_3}{\epsilon_1 e_1^2 r} J_n(e_1 r) + \frac{iB'\omega\mu_0}{e_2} J'_n(e_2 r) \right] F_n \quad (6.55)$$

$$H_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{iB'\beta}{e_2} J'_n(e_2 r) + \frac{nA'\omega\epsilon_3}{e_1^2 r} J_n(e_1 r) \right] F_n \quad (6.56)$$

$$H_{\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{nB'\beta}{e_2 r} J_n(e_2 r) - \frac{iA'\omega\epsilon_3}{e_1} J'_n(e_1 r) \right] F_n \quad (6.57)$$

onde,

$$A' = \frac{A_e H_n^{(2)}(\gamma a)}{J_n(e_1 a)} \quad (6.58)$$

$$B' = \frac{i^n H_0 \text{sen}\theta J_n(\gamma a) + B_e H_n^{(2)}(\gamma a)}{J_n(e_2 a)} \quad (6.59)$$

$$A_e = \frac{-i^n 2H_0 \text{sen}\theta n\beta}{\omega\epsilon_0 \pi D(\gamma a)^2 [H_n^{(2)}(\gamma a)]^2} \left[\frac{1}{(\gamma a)^2} - \frac{1}{(e_2 a)^2} \right] \quad (6.60)$$

$$B_e = i^n H_0 \text{sen}\theta \left\{ -\frac{J_n(\gamma a)}{H_n^{(2)}(\gamma a)} - \frac{2i}{\pi D(\gamma a)^2 [H_n^{(2)}(\gamma a)]^2} \cdot \left[\frac{H_n^{(2)}(\gamma a)}{(\gamma a) H_n^{(2)}(\gamma a)} - \frac{(\epsilon_3/\epsilon_0) J'_n(e_1 a)}{(e_1 a) J_n(e_1 a)} \right] \right\} \quad (6.61)$$

onde,

$$\begin{aligned}
 D = & \left\{ \left[\frac{1}{\gamma a} \frac{H_n^{(2)}(\gamma a)}{H_n^{(2)}(\gamma a)} - \frac{1}{e_2 a} \frac{J_n'(e_2 a)}{J_n(e_2 a)} \right] \cdot \right. \\
 & \cdot \left[\frac{1}{\gamma a} \frac{H_n^{(2)}(\gamma a)}{H_n^{(2)}(\gamma a)} - \frac{(\epsilon_3/\epsilon_0)}{e_1 a} \frac{J_n'(e_1 a)}{J_n(e_1 a)} \right] - \\
 & \left. - \frac{n^2 \beta^2}{k^2} \left[\frac{1}{(\gamma a)^2} - \frac{(\epsilon_3/\epsilon_0)}{(e_1 a)^2} \right] \left[\frac{1}{(\gamma a)^2} - \frac{1}{(e_2 a)^2} \right] \right\} \quad (6.62)
 \end{aligned}$$

A expressão para σ é dada pela eq. (6.51), com A_e e B_e definidos pelas eqs. (6.60) e (6.61).

Caso 2. Campo magnético dc nulo.

Neste caso, $\epsilon_3 = \epsilon_1$ e o plasma torna-se isotrópico. As eqs. (6.52) a (6.62) se aplicam com a substituição: $e_1^2 = e_2^2 = k^2 - \beta^2$.

CAPÍTULO VII

ESPALHAMENTO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

INCIDINDO NORMALMENTE SOBRE UM PLASMA

CILÍNDRICO MAGNETIZADO

7.1 - INTRODUÇÃO

O espalhamento de ondas eletromagnéticas incidindo normalmente sobre estruturas cilíndricas de diversos tipos de materiais foi estudado por vários autores. Wait⁵ apresentou a solução completa para incidência arbitrária sobre um dielétrico cilíndrico. Discutiu as soluções aproximadas para os campos distantes e o caso de um cilindro com diâmetro pequeno comparado com o comprimento de onda. Eggimann⁶ investigou o espalhamento de uma onda plana incidindo normalmente em um cilindro de ferrita magnetizado segundo a direção axial. Platzman e Ozaki⁷ resolveram analiticamente o problema do espalhamento de ondas eletromagnéticas planas incidindo normalmente sobre uma estrutura cilíndrica de plasma magnetizado longitudinalmente. No entanto, Platzman e Ozaki não estabeleceram claramente a assimetria do diagrama de espalhamento, uma vez que o diagrama foi traçado somente em um semi-plano ($0 \leq \phi \leq 180^\circ$). Neste capítulo levaremos em consideração a assimetria do diagrama de espalhamento devido à assimetria do tensor permissividade. O estudo será realizado somente para o caso de incidência normal tendo em vista a simplificação que apresenta este caso e a possibilidade de comparação com os resultados de Wait para o plasma isotrópico, e Platzman e Ozaki para o plas-

ma anisotrópico.

7.2 - COMPONENTES DOS CAMPOS

As componentes dos campos são determinadas a partir das expressões para o caso de incidência oblíqua, considerando os seguintes valores para os parâmetros usados:

$$\theta = \pi/2 \quad (7.1)$$

$$\beta = 0 \quad (7.2)$$

$$\gamma = k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (7.3)$$

$$e_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_3 \quad (7.4)$$

$$e_2^2 = k^2 \left| (\epsilon_1/\epsilon_0)^2 - (\epsilon_2/\epsilon_0)^2 \right| / (\epsilon_1/\epsilon_0) \quad (7.5)$$

$$A_e = 0 \quad (7.6)$$

$$c_1 = 0 \quad (7.7)$$

$$R_1 = 0 \quad (7.8)$$

$$R_2 = 0 \quad (7.9)$$

$$c_2 = e_1^2 - e_2^2 \quad (7.10)$$

Usando estes limites, resultam para as componentes dos campos, a partir das expressões para o caso de incidência oblíqua:

a) Campos incidentes.

$$H_{iz} = H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) F_n \quad (7.11)$$

$$E_{i\phi} = i H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{\omega \mu_0}{k} J_n'(kr) F_n \quad (7.12)$$

$$E_{ir} = -H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{n \omega \mu_0}{k^2 r} J_n(kr) F_n \quad (7.13)$$

b) Campos espalhados.

$$H_{ez} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_e H_n^{(2)}(kr) F_n \quad (7.14)$$

$$E_{e\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i \omega \mu_0}{k} B_e H_n^{(2)'}(kr) F_n \quad (7.15)$$

$$E_{er} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} - \frac{n \omega \mu_0}{k^2 r} B_e H_n^{(2)}(kr) F_n \quad (7.16)$$

c) Campos no plasma.

$$H_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B' J_n(e_2 r) F_n \quad (7.17)$$

$$E_{\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i \omega \mu_0 B'}{Q} \left[n \omega^2 \mu_0 \epsilon_2 \frac{J_n(e_2 r)}{r} - \gamma_1^2 e_2 J_n'(e_2 r) \right] F_n \quad (7.18)$$

$$E_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega \mu_0 B'}{Q} \left[n \gamma_1^2 \frac{J_n(e_2 r)}{r} - \omega^2 \mu_0 \epsilon_2 e_2 J_n'(e_2 r) \right] F_n \quad (7.18)$$

onde,

$$F_n = e^{-in\phi} \quad (7.20)$$

Nas eqs. (7.11) a (7.19) os valores dos coeficientes B_e e B' são determinados a partir das condições de contorno (6.11) a (6.14) sobre a superfície de separação plasma-ar, resultando:

$$B_e = \frac{-i^n H_0 \{ k J_n(ka) [n \omega^2 \mu_0 \epsilon_2 J_n(e_2 a) - \gamma_1^2 (e_2 a) J_n'(e_2 a)] - a Q J_n(e_2 a) J_n'(ka) \}}{\{ k H_n^{(2)}(ka) [n \omega^2 \mu_0 \epsilon_2 J_n(e_2 a) - \gamma_1^2 (e_2 a) J_n'(e_2 a)] - a Q J_n(e_2 a) H_n^{(2)'}(ka) \}} \quad (7.21)$$

$$B' = \frac{[i^n H_0 J_n(ka) + B_e H_n^{(2)}(ka)] F_n}{J_n(e_2 a)} \quad (7.22)$$

7.3 - SECÇÃO TRANSVERSAL TOTAL DE ESPALHAMENTO

A secção transversal total de espalhamento é determinada usando os valores (7.1) a (7.10) para os parâmetros na eq. (6.51).

Resulta:

$$\sigma = \frac{4}{k} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} B'_e e^{-in(\phi-\pi)} \right|^2 \quad (7.23)$$

onde, B'_e é obtido da eq. (7.21) e pode ser escrito na seguinte forma conveniente:

$$B'_e = \frac{G J_n(e_2 a) J'_n(ka) - J_n(ka) M}{M H_n^{(2)}(ka) - G J_n(e_2 a) H_n^{(2)}(ka)} \quad (7.24)$$

com,

$$G = \sqrt{\frac{\frac{\epsilon_1/\epsilon_0}{2}}{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right)^2 - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}\right)^2}} \quad (7.25)$$

e

$$M = - \left[\frac{n(\epsilon_2/\epsilon_0) J_n(e_2 a)}{ka \sqrt{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right)^2 - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}\right)^2}} - J'_n(e_2 a) \right] \quad (7.26)$$

No caso limite isotrópico de campo magnético de nulo, $\epsilon_1 = \epsilon_3$ e $\epsilon_2 = 0$. A expressão (7.24) é escrita na forma conveniente:

$$B'_e = - \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \left[\frac{\frac{(e_2 a)}{(ka)^2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}} \frac{J'_n(e_2 a)}{J_n(e_2 a)} - \frac{J'_n(ka)}{ka J_n(ka)}}{\frac{e_2 a}{(ka)^2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}} \frac{J'_n(e_2 a)}{J_n(e_2 a)} - \frac{H_n^{(2)}(ka)}{ka H_n^{(2)}(ka)}} \right] \quad (7.27)$$

A eq. (7.27) concorda com o resultado obtido por Wait⁵ para o caso de incidência normal sobre um dielétrico cilíndrico.

7.4 - DIAGRAMAS DE ESPALHAMENTO.

Para o plasma cilíndrico situado na origem de um sistema de coordenadas cilíndricas, a função $\sigma(\phi)$ define, no plano transversal ao plasma, um diagrama chamado diagrama de espalhamento.

Usando um computador IBM 1130 obteve-se os valores de σk em função de ϕ para o caso do plasma magnetizado. Para fins de simplificação, não foi incluído nos cálculos numéricos o efeito da frequência de colisões. Isto poderá ser justificado uma vez que $v/\omega \ll 1$, não devendo influenciar de modo considerável nos valores de σk .

Torna-se importante assinalar, ainda, que todos os resultados numéricos obtidos correspondem ao caso, tratado neste capítulo, de incidência normal. A expressão de σ é dada pela eq. (7.23) com B'_e dado pela eq. (7.24).

Nas figs. 7.1, 7.2 e 7.3 apresentamos os diagramas de espalhamento da secção transversal total de espalhamento normalizada σk , como função de ϕ ($-\pi \leq \phi \leq \pi$), com os parâmetros ω_p/ω e $ka=1$ considerados constantes e ω_c/ω variável.

Das figs. 7.1 e 7.2 observamos que para valores de $\omega_p/\omega < 1$ e $\omega_c/\omega = 0$ os diagramas de espalhamento apresentam simetria, isto é, resultam valores de $\sigma k(\phi) = \sigma k(-\phi)$. Isto se verifica devido à isotropia do plasma na condição $\omega_c/\omega = 0$. Para valores $\omega_c/\omega \neq 0$, observamos uma assimetria nos diagramas de espalhamentos apontando a necessidade do estudo de σk em função de ϕ , em todo o inter

valo de variação de ϕ ($-\pi < \phi < \pi$). Observamos, também, que para valores de $\omega_p/\omega \ll 1$ e $\omega_c/\omega < 1$ o espalhamento é mais intenso no intervalo $40^\circ < \phi < 140^\circ$. Para valores de ω_p/ω próximo da ressonância, $\omega_p/\omega \approx 1$, o espalhamento torna-se mais intenso no intervalo $-60^\circ > \phi > -160^\circ$. Quando $\omega_c/\omega \sim 1$, os diagramas de espalhamento tornam-se aproximadamente simétricos relativamente à direção de incidência, com máximo de espalhamento nas direções $\phi = \pm 90^\circ$. Na fig. 7.3 apresentamos os diagramas de espalhamento para o caso $\omega_p/\omega > 1$ (no caso $\omega_p/\omega = 3.16$) e $ka = 1$, considerados constantes e ω_c/ω variável. Observamos, neste caso, que somente valores de ω_c/ω elevados influirão na forma dos diagramas de espalhamentos. Para valores baixos de ω_c/ω o diagrama de espalhamento mantém sua forma, variando somente a secção transversal de espalhamento. Na fig. 7.4 apresentamos os diagramas de espalhamento para o caso $\omega_c/\omega = 0$ e $ka = 1$ considerados constantes e ω_p/ω variável. Como fato a constatar observamos que, para este caso de plasma isotrópico ($\omega_c/\omega = 0$), desaparece a simetria no diagrama de espalhamento considerada anteriormente se $\omega_p/\omega > 1$. Neste caso, o plasma corresponde a um dielétrico com permissividade negativa, tornando assimétrico o diagrama de espalhamento. Estes diagramas mostram que a secção transversal de espalhamento depende, essencialmente, da frequência de plasma. Assim, a medida da secção transversal de espalhamento poderá constituir-se num método de determinação das propriedades do plasma.

Devemos chamar a atenção para o fato que embora os resultados obtidos no trabalho nos conduzam a conclusões otimistas devemos considerar que em todo o desenvolvimento tratamos de um plasma cilíndrico frio de comprimento infinito, que sabemos não acon-

$$\frac{\omega_p}{\omega} = 0,707$$

$$ka = 1$$

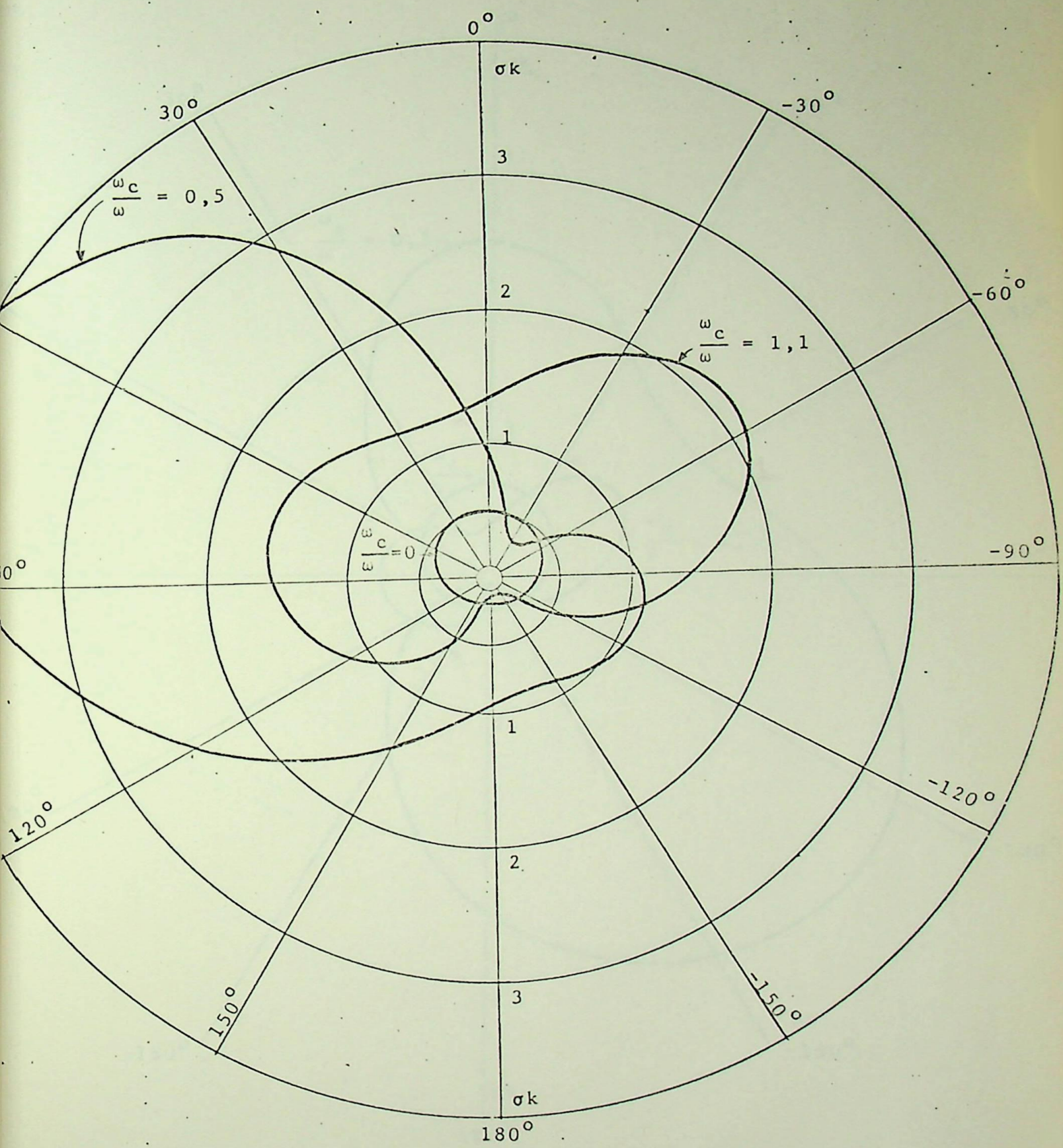


Fig. 7.1 - Diagramas de espalhamentos correspondentes a uma onda eletromagnética com polarização normal incidindo normalmente sobre um plasma cilíndrico com parâmetros $\omega_p/\omega = 0,707$ e $ka = 1$.

$$\frac{\omega_p}{\omega} = 0,95$$

$$ka = 1$$

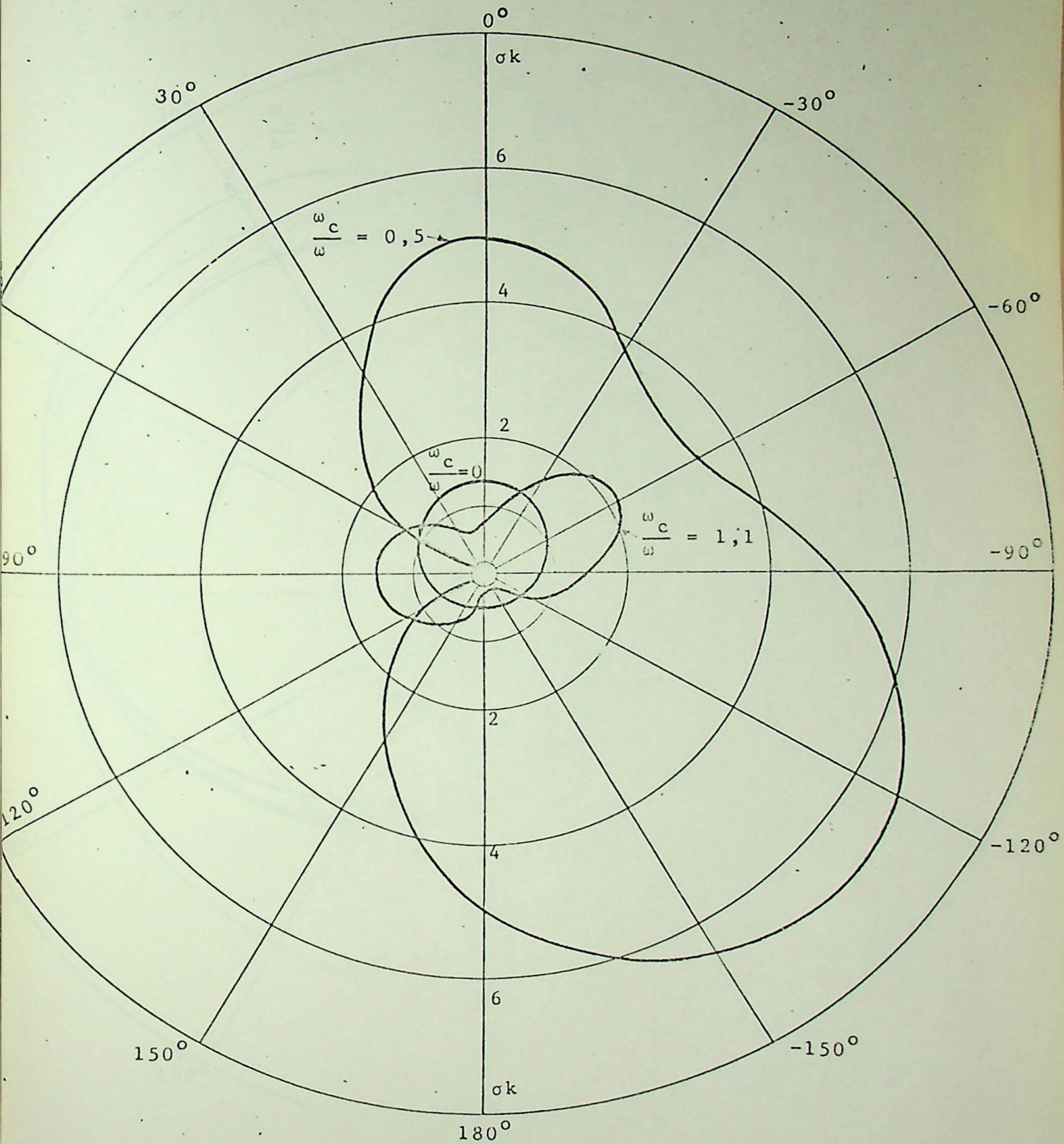


Fig. 7.2 - Diagramas de espalhamentos correspondentes a uma onda eletromagnética com polarização normal incidindo normalmente sobre um plasma cilíndrico com parâmetros $\omega_p/\omega = 0,95$ e $ka = 1$.

$$\frac{\omega_p}{\omega} = 3,16$$

$$ka = 1$$

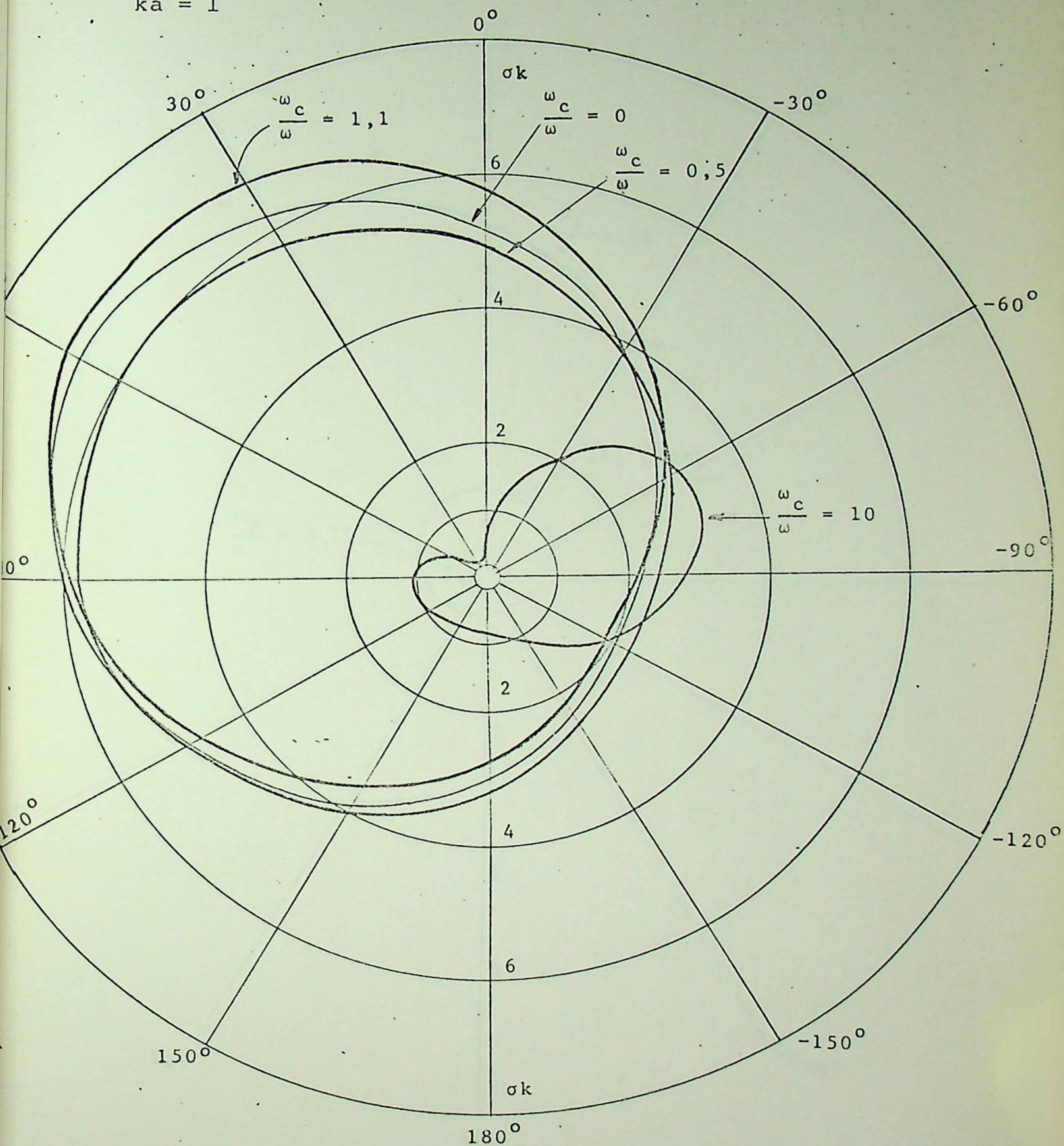


Fig. 7.3 - Diagramas de espalhamentos correspondentes a uma onda eletromagnética com polarização normal incidindo normalmente sobre um plasma cilíndrico com parâmetros $\omega_p/\omega = 3,16$ e $ka = 1$.

$$\frac{\omega_c}{\omega} = 0$$

$$ka = 1$$

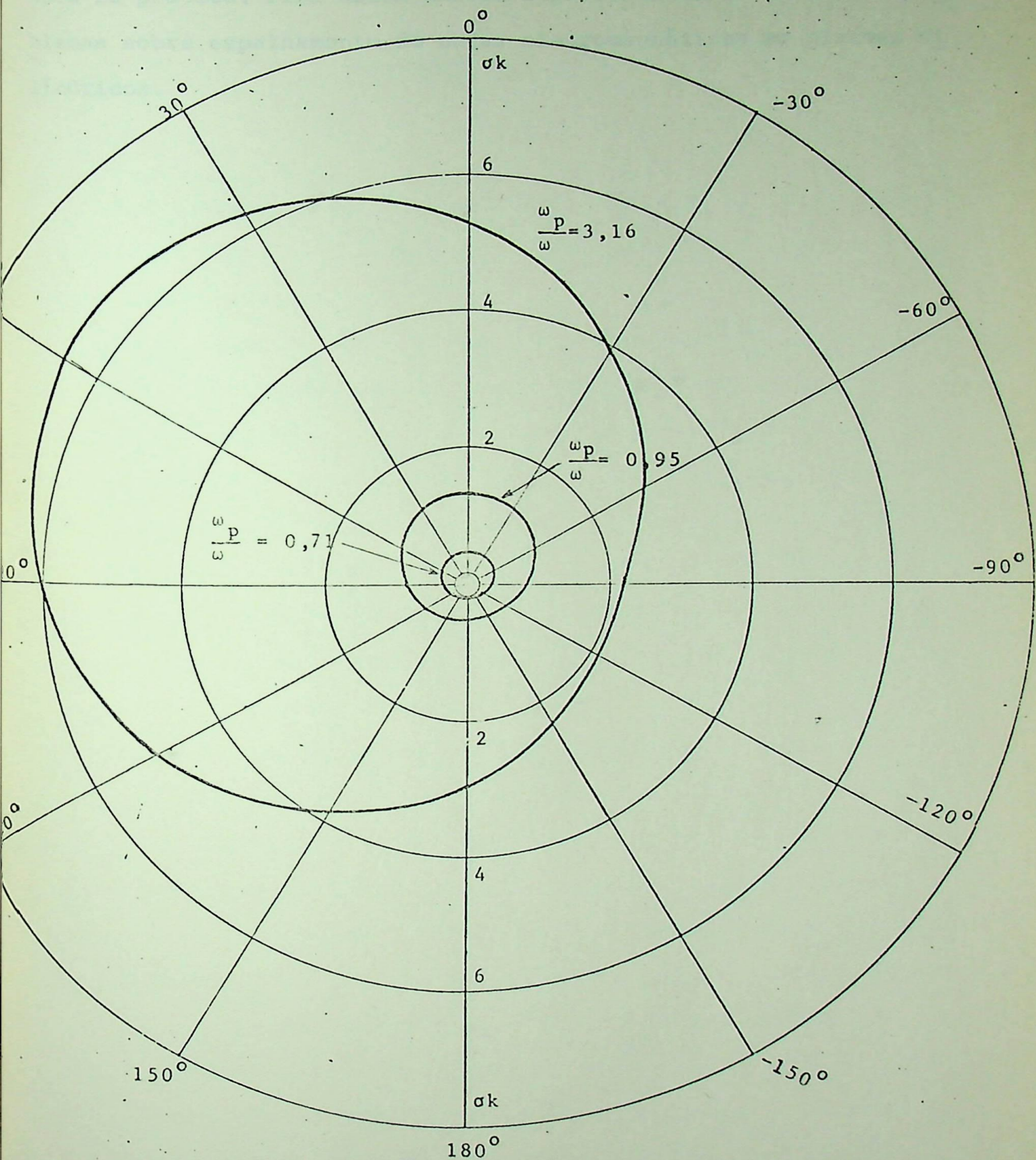


Fig. 7.4 - Diagramas de espalhamentos correspondentes a uma onda eletromagnética com polarização normal incidindo normalmente sobre um plasma cilíndrico com parâmetros $\omega_c/\omega = 0$ e $ka = 1$.

tece na prática. Fica assim aberta a possibilidade de outros problemas sobre espalhamento de ondas eletromagnéticas em plasmas cilíndricos.

CAPÍTULO VIII

RESUMO E CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido, de uma forma sistemática, a teoria do espalhamento de ondas eletromagnéticas em plasmas com formas cilíndricas circulares.

Em um primeiro passo apresentamos uma revisão dos conceitos da teoria eletromagnética básicos no desenvolvimento da teoria de espalhamento proposta. Assim é que, apresentamos conceitos, tais como, teorema de Poynting, condições de contorno, polarização de ondas eletromagnéticas e espalhamento de ondas planas. Deduzimos a condição de irradiação de Sommerfeld, condição fundamental satisfeita pelos campos espalhados. Concluimos desta condição que os campos espalhados devem ser representados em termos das funções de Hankel de segunda espécie.

Apresentamos um estudo das propriedades eletromagnéticas de um plasma. Partindo da definição de plasma e usando as equações de Maxwell deduzimos o tensor permissividade para o plasma sob a ação de um campo magnético estático permitindo o seu tratamento como um meio dielétrico. Concluimos o aparecimento de uma frequência de plasma $\omega_p^2 = -\rho_0 \eta / \epsilon_0$, que define as propriedades do plasma e uma frequência de ciclotron $\omega_c = \eta B_0$ que define a presença do campo magnético estático aplicado. No caso particular $\omega_c = 0$ concluimos que o plasma torna-se isotrópico, perdendo o caráter anisotrópico do caso $\omega_c \neq 0$. Os efeitos de colisões e de temperatura do gás eletrônico foram considerados.

Em seguida, apresentamos a teoria para a propagação de on das eletromagnéticas em um plasma cilíndrico de secção transver sal arbitrária. Determinamos as equações de ondas, suas soluções e as expressões para as componentes transversais dos campos em função das componentes longitudinais. Resultou, assim, um par de equações diferenciais de segunda ordem acopladas para as componentes longitudinais dos campos eletromagnéticos do plasma. Em geral há propagação de modos de caráter híbrido, os quais apresentam componentes longitudinais dos campos elétrico e magnético diferentes de zero. Este caráter híbrido é exibido analiticamente pela dependência entre as constantes de propagação transversais e a constante de propagação longitudinal no plasma.

O tratamento da teoria de propagação de ondas eletromagnéticas em uma região cilíndrica circular nos conduziu a soluções envolvendo funções de Bessel ordinárias para o interior do plasma e função de Hankel de segunda espécie para os campos espalhados. A apresentamos as expressões das componentes dos campos no interior do plasma e dos campos espalhados fora do plasma.

Apresentamos um estudo da teoria do espalhamento das ondas eletromagnéticas incidindo obliquamente sobre um plasma cilíndri co magnetizado. As componentes dos campos incidente e espalhado foram determinadas a partir das condições de contorno. Deduzimos a expressão da secção transversal total de espalhamento para o ca so de polarização normal ao plano de incidência que é apresentada na eq. (6.51).

Estudamos o caso de incidência normal em detalhe, culminan do com a determinação dos valores numéricos para a secção trans versal total de espalhamento normalizada em função de ϕ . Concluí

mos que para valores de $\omega_p/\omega < 1$ e $\omega_c/\omega = 0$ os diagramas de espalhamentos apresentam simetria. No entanto, para os casos $\omega_p/\omega > 1$ e $\omega_c/\omega = 0$ a simetria desaparece devido o caráter negativo da permissividade do plasma. De um modo geral, para o plasma anisotrópico, observamos uma assimetria nos diagramas de espalhamentos, na condição $\omega_c/\omega \neq 0$. Assim, os diagramas de espalhamentos indicam que a secção transversal de espalhamento depende, essencialmente, da frequência de plasma, resultando que a medida da secção transversal de espalhamento poderá constituir-se num método de determinação das propriedades do plasma.

APÊNDICE A

FUNÇÕES DE BESSEL

A equação de Bessel é obtida da equação de ondas por separação de variáveis em coordenadas cilíndricas. A equação diferencial referente à coordenada radial é:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\gamma^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0 \quad (\text{A.1})$$

A solução da equação de Bessel em termos das funções de Bessel de primeira e segunda espécies, é escrita como:

$$R = A J_n(\gamma r) + B N_n(\gamma r) \quad (\text{A.2})$$

onde A e B são constantes arbitrárias e

$$J_n(\gamma r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\gamma r/2)^{n+2m}}{m! (m+n)!} \quad (\text{A.3})$$

$$N_n(\gamma r) = \frac{\cos n\pi J_n(\gamma r) - J_{-n}(\gamma r)}{\text{sen } n\pi} \quad (\text{A.4})$$

As soluções podem ser escritas em termos das funções de Hankel de primeira e segunda espécies,

$$R = AH_n^{(1)}(\gamma r) + BH_n^{(2)}(\gamma r) \quad (\text{A.5})$$

onde,

$$H_n^{(1)}(\gamma r) = J_n(\gamma r) + iN_n(\gamma r) \quad (\text{A.6})$$

$$H_n^{(2)}(\gamma r) = J_n(\gamma r) - iN_n(\gamma r) \quad (\text{A.7})$$

Quando γ é imaginário, costuma-se escrever as soluções em termos das funções de Bessel modificadas de primeira e segunda espécies,

$$R = AI_n(\tau r) + BK_n(\tau r) \quad (\text{A.8})$$

onde,

$$\theta = i\tau \quad (\text{A.9})$$

$$I_n(\tau r) = i^{-n} J_n(\gamma r) \quad (\text{A.10})$$

$$K_n(\tau r) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(\gamma r) \quad (\text{A.11})$$

Nas figs. A.1, A.2 e A.3, são apresentados os gráficos de algumas funções de Bessel ordinárias e modificadas.

A seguir, algumas relações úteis aplicáveis às funções de Bessel serão apresentadas. As funções J_n , N_n , $H_n^{(1)}$ e $H_n^{(2)}$, serão representadas indistintamente por Z_n .

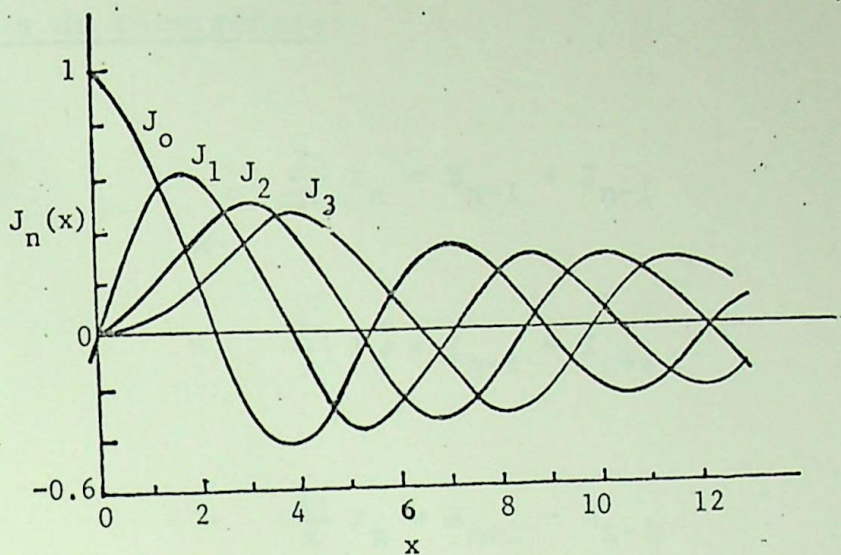


Fig. A.1 - Funções $J_n(x)$.

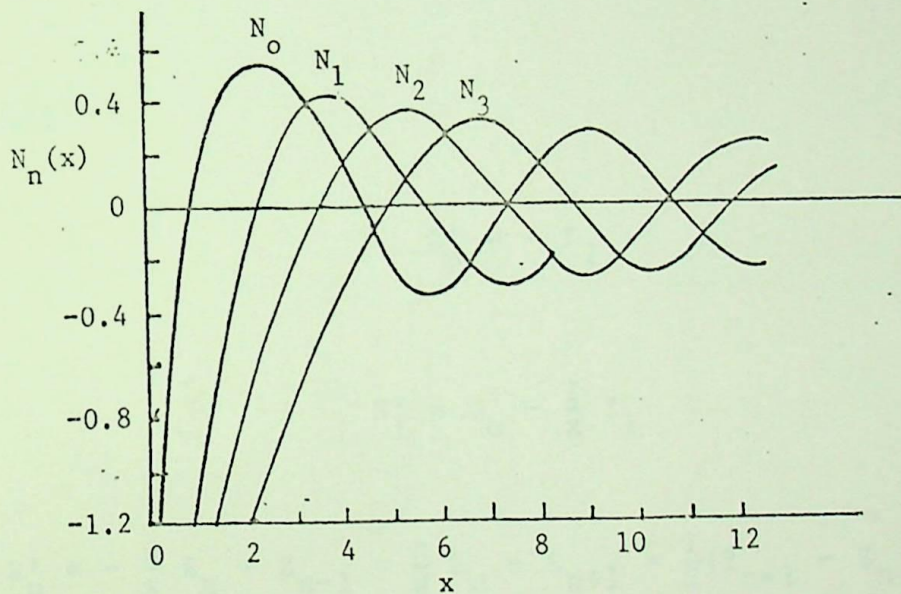


Fig. A.2 - Funções $N_n(x)$.

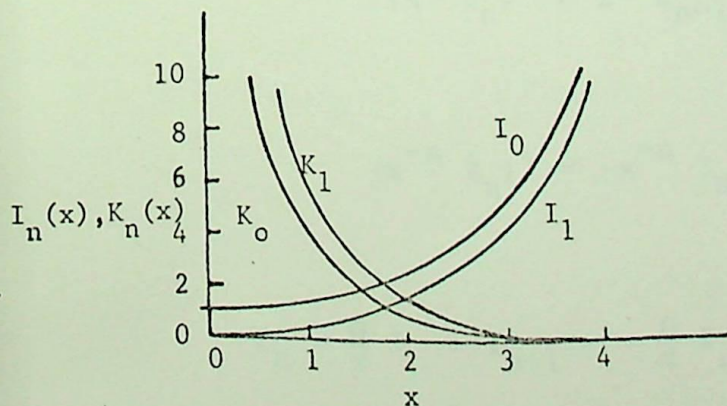


Fig. A.3 - Funções $I_n(x)$ e $K_n(x)$.

Expressões de recorrência:

$$\frac{2n}{x} z_n = z_{n+1} + z_{n-1} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{2n}{x} I_n = I_{n-1} - I_{n+1} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{2n}{x} K_n = K_{n+1} - K_{n-1} \quad (\text{A.14})$$

$$z_{-n} = (-1)^n z_n, \text{ para } n=\text{inteiro} \quad (\text{A.15})$$

Derivadas:

$$z'_0 = -z_1 \quad (\text{A.16})$$

$$z'_1 = z_0 - \frac{1}{x} z_1 \quad (\text{A.17})$$

$$z'_n = -\frac{n}{x} z_n + z_{n-1} = \frac{n}{x} z_n - z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_{n-1} - z_{n+1}) \quad (\text{A.18})$$

$$(x^n z_n)' = x^n z_{n-1} \quad (\text{A.19})$$

$$(x^{-n} z_n)' = -x^{-n} z_{n+1} \quad (\text{A.20})$$

$$I'_n = \frac{n}{x} I_n + I_{n+1} = -\frac{n}{x} I_n + I_{n-1} \quad (\text{A.21})$$

$$K'_n = \frac{n}{x} K_n - K_{n+1} = -\frac{n}{x} K_n - K_{n-1} \quad (\text{A.22})$$

Integrais:

$$\int z_1 dx = -z_0 \quad (\text{A.23})$$

$$\int xz_0 dx = xz_1 \quad (\text{A.24})$$

$$\int x^{n+1} z_n dx = x^{n+1} z_{n+1} \quad (\text{A.25})$$

$$\int x^{-n+1} z_n dx = -x^{-n+1} z_{n-1} \quad (\text{A.26})$$

$$\int xz_n(\alpha x)z_n(\beta x) dx = \frac{\beta xz_n(\alpha x)z_{n-1}(\beta x) - \alpha xz_{n-1}(\alpha x)z_n(\beta x)}{\alpha^2 - \beta^2} \quad \alpha \neq \beta \quad (\text{A.27})$$

$$\int xz_n^2(\alpha x) dx = \frac{x^2}{2} [z_n^2(\alpha x) - z_{n-1}(\alpha x)z_{n+1}(\alpha x)] \quad (\text{A.28})$$

Aproximações para grandes argumentos:

$$J_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{A.29})$$

$$N_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{A.30})$$

$$H_n^{(1)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x-\pi/4-n\pi/2)} \quad (\text{A.31})$$

$$H_n^{(2)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x-\pi/4-n\pi/2)} \quad (\text{A.32})$$

$$I_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x \quad (\text{A.33})$$

$$K_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (\text{A.34})$$

Aproximações para pequenos argumentos:

$$J_0 = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad (\text{A.35})$$

$$J_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad n > 0 \quad (\text{A.36})$$

$$N_0 = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\Gamma x} \quad \Gamma = 1,781672 \quad (\text{A.37})$$

$$N_n = -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n \quad (\text{A.38})$$

$$I_0 = 1 + \left(\frac{1}{2} x\right)^2 \quad (\text{A.39})$$

$$I_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (\text{A.40})$$

Representação por integral:

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos\phi} e^{in\phi} d\phi \quad (\text{A.41})$$

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ix \cos\phi} \cos n\phi d\phi \quad (\text{A.42})$$

Representação de ondas planas:

$$e^{ix} = e^{+iy r \cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{+n} J_n(\gamma r) e^{-in\phi} \quad (\text{A.43})$$

$$H_0^{(2)}(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(r') J_n(r) e^{in(\phi-\phi')} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r') H_n^{(2)}(r) e^{in(\phi-\phi')} \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

A eq. (A.44) é conhecida como o Teorema da adição das funções de Hankel.

APÊNDICE BFUNÇÕES POTENCIAIS ESCALAR E VETORIAL

As funções potenciais que consideraremos são as funções potenciais vetorial e escalar \vec{A} e ϕ , que são extensões do potencial vetorial magnetostático e do potencial escalar eletrostático. Consideraremos o caso em que estas funções são funções harmônicas do tempo. O vetor \vec{B} é sempre solenoidal ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$) e pode, portanto, ser deduzido do rotacional de uma função potencial vetorial \vec{A} :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{B.1})$$

Desde que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$, temos $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Assim, uma das equações de Maxwell é satisfeita identicamente. Substituindo a eq. (B.1) na equação do rotacional para \vec{E} , temos:

$$\nabla \times (\vec{E} + i\omega\vec{A}) = 0 \quad (\text{B.2})$$

Como $\nabla \times \nabla\phi = 0$, o resultado acima pode ser integrado uma vez, dando:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - i\omega\vec{A} \quad (\text{B.3})$$

onde ϕ é uma função escalar de posição chamada de potencial escalar. Temos, portanto, duas das equações de Maxwell satisfeitas e

resta encontrar a relação entre ϕ e \vec{A} e as condições que devem satisfazer para que as duas equações de Maxwell restantes, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ e $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + i\omega\vec{D}$, sejam satisfeitas.

A equação do rotacional para \vec{H} dá:

$$\nabla \times \mu\vec{H} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla\nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2\vec{A} = i\omega\epsilon\mu\vec{E} + \mu\vec{J}$$

$$\nabla \times \mu\vec{H} = k^2\vec{A} - i\omega\mu\epsilon\nabla\phi + \mu\vec{J} \quad (\text{B.4})$$

As funções ϕ e \vec{A} são ainda arbitrárias e temos a liberdade de escolher uma relação entre elas.

Tendo em vista simplificar a equação satisfeita pelo potencial vetor \vec{A} , isto é, eq. (B.4), escolhemos:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -i\omega\epsilon\mu\phi \quad (\text{B.5})$$

Esta escolha particular é conhecida como condição de Lorentz.

Usando a eq. (B.5), encontramos que a eq. (B.4) reduz-se para:

$$\nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = -\mu\vec{J} \quad (\text{B.6})$$

Afim de que a equação do divergente de \vec{D} seja satisfeita, é necessário que:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = -i\omega\nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2\phi, \text{ da eq. (B.3).}$$

Usando a condição de Lorentz para eliminar $\nabla \cdot \vec{A}$, temos a seguinte equação que deverá ser satisfeita pelo potencial esca

lar ϕ :

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = - \frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{B.7})$$

O potencial vetorial deve ser uma solução da equação de on da vetorial não homogênea (B.6), enquanto que o potencial escalar deve ser uma solução da equação de onda escalar não homogênea (B.7).

Assim, os potenciais \vec{A} e ϕ , definidos em termos de \vec{J} e ρ , podem ser usados para determinar os campos elétrico e magnético, pelas eqs. (B.1) e (B.3).

É claro que houve certa vantagem na introdução dos poten ciais \vec{A} e ϕ , pois as equações de onda que eles devem satisfazer são mais simples do que as equações de onda para \vec{E} e \vec{H} . Devido à equação da continuidade, os potenciais estão relacionados entre si pela condição de Lorentz.

PROGRAMA DE COMPUTADOR

PAGE . 1 BL23 ,A

// JOB T 1002 BL23 ,A PR ARGLDO

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	3000	3000	0000
0001	1002	1002	0001
		2ED0	0002

V2 M09 ACTUAL 32K CONFIG 32K

```
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
  SUBROUTINE FBESS(E2,K,EXAT,JNE,INE)
  REAL JNE(30),INE(30),JE,IE
  DO 1 J=1,K
  N=J-1
  CALL BESJ(E2,N,JE,EXAT,IERJ)
  IF(IERJ)7,3,7
  3 JNE(J)=JE
  CALL BESI(E2,N,IE,IERI)
  IF(IERI)22,5,22
  5 INE(J)=IE
  1 CONTINUE
  GO TO 202
  7 WRITE(5,111)IERJ,N
111 FORMAT(1H , 'ERRO NA SUBROTINA BESJ, IERJ=', I3, 1X, 'E N=', I4)
  GO TO 202
  22 WRITE(5,911)IERI,N
  911 FORMAT(1H , 'ERRO NA SUBROTINA BESI, IERI=', I3, 1X, 'E N=', I4)
202 RETURN
  END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR FBESS
COMMON 0 VARIABLES 10 PROGRAM 146

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 003E (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA FBESS
CART ID 3000 DB ADDR 3486 DB CNT 000A

```
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1403 PRINTER,DISK)
*LIST SOURCE PROGRAM
  REAL JNE2,JME2,JNIE2,JNKA,JMKA,JNIKA,NNKA,NMKA,NIKA
  REAL KAL(5),KA,LR,L,LL,LLIN,LLINI,JLIN,JLINK,NU,NUN,NUM,NUMN
  REAL INE2,IME2,INIE2
  REAL JNK(30),NNK(30),JNE(30),INE(30),JKA,NKA
  REAL ICPHI
  REAL JMNE2,JMNKA,JLMKA,JLME2,JMIKA,MMKA,MIKA
  REAL IP,IN,IMP,IMN
  DIMENSION SIGK(360),PHII(360),WPWL(5),WCWL(5)
```

```

READ(2,100)PHIN,EXAT,ICPHI
100 FORMAT(F5.0,F6.3,F3.0)
READ(2,101)N1,(KAL(I),I=1,N1)
101 FORMAT(I2,5F3.0)
READ(2,102)N2,(WPWL(I),I=1,N2)
102 FORMAT(I2,5F5.1)
READ(2,103)N3,(WCWL(I),I=1,N3)
103 FORMAT(I2,5F5.1)
NV=(360-PHIN)/ICPHI+1.
DO 201 I1=1,N1
KA=KAL(I1)
DO 201 I2=1,N2
WPW=WPWL(I2)
WPW=SQRT(WPW)
DO 201 I3=1,N3
WCW=WCWL(I3)
PHI=PHIN
PHIR=PHI*0.01745329
DENOM=WCW**2-1
EP1=1+WPW**2/DENOM
EP2=WPW**2*WCW/DENOM
A=EP1**2-EP2**2
LR=EP1/A
L1=EP1*A
K=26
K=K+1
DO 1 J=1,K
N=J-1
CALL BESJ(KA,N,JKA,EXAT,IERJ)
IF(IERJ)7,8,7
8 JNK(J)=JKA
CALL BESY(KA,N,NKA,IERN)
IF(IERN)9,13,9
13 NNK(J)=NKA
1 CONTINUE
IF(LR)4,5,6
5 WRITE(5,123)KA,WPW,WCW
123 FORMAT(1H , 'L=0 PARA 8 KA = ',F3.0,1X,'WPW = ',F5.1,1X,'WCW = ',F
15.1,1X)
GO TO 201
6 L=SQRT(LR)
LLIN=SQRT(L1)
E2=KA/L
CALL FBESS(E2,K,EXAT,JNE,INE)
DO 300 II=1,NV
K=26
SRP=0.
SIP=0.
K=K-1
DO 200 I=1,K
N=I-1
JNE2=JNE(I)
JME2=JNE(I+1)
JNKA=JNK(I)
JMKA=JNK(I+1)
NNKA=NNK(I)
NMKA=NNK(I+1)
JLIN=N*JNE2/E2-JME2
JLINK=N*JNKA/KA-JMKA

```

```

FA=EP2/(KA*LLIN)
DELTA=- (N*FA*JNE2-JLIN)
X1=N*JNKA/KA-JMKA
X2=N*NNKA/KA-NMKA
Y1=DELTA*JNKA-L*JNE2*X1
Y2=L*JNE2*X2-DELTA*NNKA
NU=L*JNE2*JLINK-JNKA*DELTA
FAT=NU/(Y1**2+Y2**2)
Z1=FAT*Y1
Z2=FAT*Y2
ARG=N*(PHIR-3.141593)
RP=Z1*COS(ARG)-Z2*SIN(ARG)
IP=Z1*SIN(ARG)+Z2*CCS(ARG)
SRP=SRP+RP
SIP=SIP+IP

```

200 CONTINUE

```

SRN=0.
SIMN=0.
DO 205 N=1,K
JNE2=JNE(N+1)
JN1E2=JNE(N)
JNKA=JNK(N+1)
JN1KA=JNK(N)
NN1KA=NNK(N)
NNKA=NNK(N+1)
JMNE2=(-1)**N*JNE2
JMKA=(-1)**N*JNKA
JLMKA=(-1)**N*(-N*JNKA/KA+JN1KA)
JLME2=(-1)**N*(-N*JNE2/E2+JN1E2)
DN=-(-N*JMNE2*FA-JLME2)
NUN=L*JMNE2*JLMKA-JMKA*DN
JM1KA=(-1)**(N-1)*JN1KA
NMNKA=(-1)**N*NNKA
NM1KA=(-1)**(N-1)*NN1KA
X1N=-N*JMKA/KA-JM1KA
X2N=-N*NMNKA/KA-NM1KA
Y1N=DN*JMKA-L*X1N*JMNE2
Y2N=L*X2N*JMNE2-DN*NMNKA
FATN=NUN/(Y1N**2+Y2N**2)
Z1N=FATN*Y1N
Z2N=FATN*Y2N
ARG=-N*(PHIR-3.141593)
RN=Z1N*COS(ARG)-Z2N*SIN(ARG)
IN=Z1N*SIN(ARG)+Z2N*CCS(ARG)
SRN=SRN+RN
SIMN=SIMN+IN

```

205 CONTINUE

```

SIGK(II)=4*((SRP+SRN)**2+(SIP+SIMN)**2)
PHI(II)=PHI
PHI=PHI+ICPHI
PHIR=PHI*0.01745329

```

300 CONTINUE

GC TO 350

4 LR=-LR

```

L=SQRT(LR)
L1=-L1
LLIN1=SQRT(L1)
E2=KA/L
CALL FBESS(E2,K,EXAT,JNE,INE)

```

```

DO 500 II=1,NV
K=26
SRMP=0.
SIMP=0.
K=K-1
DO 400 I=1,K
N=I-1
INE2=INE(I)
IME2=INE(I+1)
JNKA=JNK(I)
JMKA=JNK(I+1)
JLINK=N*JNKA/KA-JMKA
NNKA=NNK(I)
NMKA=NNK(I+1)
DL=(N/KA)*INE2*(EP2/LLIN1+L)+IME2
NUM=L*INE2*JLINK-JNKA*DL
X1=N*JNKA/KA-JMKA
X2=N*NNKA/KA-NMKA
Y1M=DL*JNKA-L*INE2*X1
Y2M=L*INE2*X2-DL*NNKA
FATM=NUM/(Y1M**2+Y2M**2)
Z1M=FATM*Y1M
Z2M=FATM*Y2M
ARG=N*(PHIR-3.141593)
RMP=Z1M*CCS(ARG)-Z2M*SIN(ARG)
IMP=Z2M*CCS(ARG)+Z1M*SIN(ARG)
SRMP=SRMP+RMP
SIMP=SIMP+IMP
400 CONTINUE
SRMN=0.
SIMN=0.
DO 206 N=1,K
INE2=INE(N+1)
INIE2=INE(N)
JNKA=JNK(N)
JNKA=JNK(N+1)
NNKA=NNK(N+1)
NNKA=NNK(N)
JLMKA=(-1)**N*(-N*JNKA/KA+JNKA)
JMKA=(-1)**N*JNKA
JMKA=(-1)**(N-1)*JNKA
NMKA=(-1)**N*NNKA
NMKA=(-1)**(N-1)*NNKA
DLM=(-N*INE2/KA)*(EP2/LLIN1+L)+INIE2
NUMN=L*INE2*JLMKA-JMKA
X1N=-N*JMKA/KA-JMKA
X2N=-N*NMKA/KA-NMKA
Y1MN=DLM*JMKA-L*INE2*X1N
Y2MN=L*INE2*X2N-DLM*NMKA
FATMN=NUMN/(Y1MN**2+Y2MN**2)
Z1MN=FATMN*Y1MN
Z2MN=FATMN*Y2MN
ARG=-N*(PHIR-3.141593)
RMN=Z1MN*CCS(ARG)-Z2MN*SIN(ARG)
IMN=Z1MN*SIN(ARG)+Z2MN*CCS(ARG)
SRMN=SRMN+RMN
SIMN=SIMN+IMN
206 CONTINUE
SIGK(II)=4*((SRMP+SRMN)**2+(SIMP+SIMN)**2)

```

PAGE. 5 BL23 ,A

```
PHII(II)=PHI
PHI=PHI+ICPHI
PHIR=PHI*0.01745329
500 CONTINUE
350 WRITE(5,131)
131 FCRMAT(1H1)
WRITE(5,121)WPW,WCW,KA
121 FORMAT(1H , 'WP/W=',F11.5,2X, 'WC/W=',F11.5,2X, 'KA=',F3.0,///,1H ,30
1X, 'SIGK',24X, 'PHI',//)
WRITE(5,888)(SIGK(JI),PHII(JI),JI=1,NV)
888 FORMAT(1H ,24X,E15.7,12X,E15.7)
GO TO 201
7 WRITE(5,111)IERJ,N
111 FORMAT(1H , 'ERRC NA SUBROTINA BESJ, IERJ=',I3,1X, 'E N=',I4)
GO TO 202
9 WRITE(5,125)IERN,N
125 FORMAT(1H , 'ERRC NA SUBROTINA BESY, IERN=',I3,1X, 'E N=',I4)
202 WRITE(5,124)KA,WPW,WCW,EP1,EP2
201 CONTINUE
124 FORMAT(1H , 'KA=',F3.0,1X, 'WPW=',F10.5,1X, 'WCW=',F10.5,1X, 'RESULTAN
1DC EM EP1=',F10.5,1X, 'EP2='F10.5)
CALL EXIT
END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON 0 VARIABLES 1912 PROGRAM 2022

END OF COMPIATION

// XEQ

APÊNDICE D

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) Freire, G.F.O. - Diniz, A.B. - Ondas Eletromagnéticas - Li
vros Técnicos e Científicos Editora S.A. - GB - 1973.
- (2) Stratton, J.A. - Electromagnetic Theory - McGraw-Hill Book
Company, Inc. - New York - 1941.
- (3) Diniz, A.B. - Propagação de Ondas Eletromagnéticas em Guias
Contendo Plasma - Tese de Mestre em Ciências - Instituto
Tecnológico de Aeronáutica - Abril - 1963.
- (4) Wait, J.R. - Scattering of a plane wave from a circular
dielétric cylinder at oblique incidence - Can. J. Phys.,
Vol. 33, pp. 189-195 - 1955.
- (5) Wait, J.R. - Electromagnetic Radiation from Cylindrical
Structures - Pergamon Press, New York, 1959.
- (6) Eggimann, W.H. - Scattering of a Plane Wave on a Ferrite
Cylinder at Normal Incidence - IRE Trans. MTT - Vol. 8 -
pp. 440-445 - July, 1960.
- (7) Platzmann, P.M. e Ozaki, H.T. - Scattering of Electro-
magnetic Waves from an Infinitely Long Magnetized Cylindrical
Plasma - J.Appl.Phys., Vol. 31, pp. 1597-1601, September,
1960.

- (8) Bachynski, M.P. - Plasma Physics - An Elementary Review - Proc. I.R.E., Vol. 49, December, 1961, pp. 1751.
- (9) Special Issue on the Ionosphere, Proc. IRE, Vol. 47, pp. 131-323, February, 1959.
- (10) Mower, L. - Phys. Rev., Vol. 116, pp. 16, 1959.
- (11) Harrington, R.F. - Time-Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1967.
- (12) Wait, J.R. - Some Boundary Value Problems Involving Plasma Media, J. of Research, NBS, Vol. 65B, pp. 137-150, April-June, 1961.
- (13) Batorsky D.V., Felsen L.B. - Scattering by Obstacles in an Inhomogeneously Filled Waveguide, Radio Sci., Vol. 8, Nº 6, pp. 547-557 (June 1973).

