

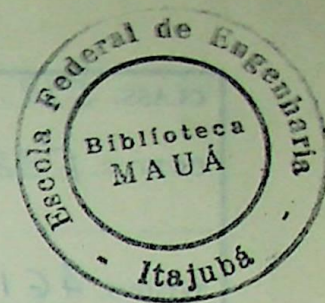
TESE

461

Sistematização das Séries Ortogonais

FRANCISCO DE ASSIS FERREIRA
EFEI—1974

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ



"SISTEMATIZAÇÃO DAS SÉRIES ORTOGONAIS"

Francisco de Assis Ferreira

1974

I T A J U B Á

M I N A S

CLASS. 517.5 (043.2)

CUTTER. F323A

TOMBO. 461

FRANCISCO DE ASSIS FERREIRA

"SISTEMATIZAÇÃO DAS SÉRIES ORTOGONAIS"

Trabalho apresentado como Tese de
Livre-Docência em Matemática Aplicada
na Escola Federal de Engenharia
de Itajubá - Minas Gerais.

S I N O P S E

Este trabalho trata da sistematização, de caráter didático, das séries de funções ortogonais. A exposição está dividida em três partes.

- I - A partir do produto escalar ou interno de vetores, fizemos a extensão, de modo a definirmos funções ortogonais e norma; nesta parte introduzimos o método de ortogonalização de Gram-Schmidt para funções vetores, no espaço de funções.
- II - Com base na 1.^a parte, fizemos um estudo geral do desenvolvimento de funções quaisquer, em séries de funções ortogonais, obtidas de autofunções de problemas de contorno.

Mostramos as utilidades de tais desenvolvimentos, bem como tabelamos as séries mais importantes, que aparecem em problemas de contorno.

- III - Nesta parte fizemos algumas aplicações, de modo a mostrar de imediato, e didaticamente, o uso das séries de funções ortogonais; tiramos a seguir, algumas conclusões e objetivos futuros do trabalho exposto.

P R E F Á C I O

"... Matemática é "aplicada" se concebido no espírito de pronta cooperação com ciências irmãs no grande empenho de compreender nos so ambiente, a percepção sensorial de nós mesmos e de trazer ordem às ações mútuas entre as ciências. Como toda a boa matemática, a boa matemática aplicada é original e imaginativa na invenção e uso de seus conceitos e em suas construções tentativas de modelos".

F. J. WEYL

Não tivemos a intenção de produzir um trabalho original, nem de contribuir com novas teses no domínio da matemática. Nossos objetivos foram, principalmente, didáticos. Como engenheiro e professor de matemática em cursos de engenharia, nossa preocupação tem sido a de colocar a disposição dos futuros profissionais os conhecimentos de matemática, apenas suficientes para a compreensão daquelas disciplinas do currículo da engenharia, que utilizem tais conhecimentos.

Não é desejável, todavia, que um professor de matemática se limite a fornecer somente um receituário de

fórmulas ou processos de resolução de problemas das ciências aplicadas. Acreditamos que em certos aspectos, principalmente, na metodologia, não há muitas diferenças entre matemática pura e aplicada. Com efeito, aplicamos a matemática a outras disciplinas científicas e portanto há lugar para os mesmos anseios de uniformidade, invariância, generalizações, rigor e certo sentido estético, comuns a todas as ciências, tanto no campo prático quanto teórico.

O século XX trouxe à matemática um desenvolvimento que suplanta em muito aos ocorridos em outras épocas, mesmo as denominadas épocas áureas. No início desse século, Hilbert e Fréchet, por caminhos diferentes, iniciaram o desenvolvimento da teoria dos espaços abstratos de funções, antevista por Riemann em meados do século XIX. Nesse tipo de análise, as funções são consideradas como pontos num espaço generalizado. Hilbert se limitou ao espaço funcional de funções, cujo quadrado é integrável e ao espaço de infinitas dimensões, cujos pontos são sucessões tais que a série dos quadrados de seus termos converge, ficando definida uma distância ou métrica análoga à expressão pitagórica da geometria euclidiana. Nessa ordem de idéias, foram desenvolvidas com elegância e simplicidade, as séries de funções ortogonais e as equações integrais. Posteriormente, foram introduzidos espaços com métricas não pitagóricas e mesmo espaços abstratos sem métrica, criando-se definitivamente a moderna topologia abstrata ou, segundo E.H. Moore, a "análise geral".

Compreende-se facilmente que não teríamos condições nem interesse em levar o aluno de engenharia a tais níveis de abstração e generalização. Mas, não haveria nesse

esforço de síntese e generalização, uma lição realmente aproveitável na prática e mesmo no ensino da matemática para engenheiros?

Pensando nessa questão, resolvemos escrever um trabalho, sem nenhuma pretensão inovadora, apenas seguindo intimamente a orientação que levou à topologia, sem elevar o nível da informação do assunto, que ficou dentro das necessidades práticas da solução de problemas de contorno encontrados nas aplicações. Introduzimos os conceitos fundamentais do espaço vetorial funcional e da norma, mostrando em seguida a ortonormalização de Gram (1883), geralmente conhecida sob o nome de Erhard Schmidt, para funções do espaço funcional. Apresentamos, em seguida, um estudo geral do desenvolvimento de funções quaisquer, em séries de funções ortogonais, mostrando finalmente, a utilidade desses desenvolvimentos, na solução de problemas de contorno.

Verificamos que o assunto, assim apresentado, pareceu bastante didático e a exposição ganhou bastante em elegância e concisão, permitindo levar o aluno rapidamente às aplicações, sem perda de rigor, ao mesmo tempo que propiciou uma visão do método, envolvido nessa generalização do espaço vetorial.

Nesta oportunidade, trazemos nossos agradecimentos ao Professor FERNANDO JOSÉ COSTANTI pela preciosa orientação que nos foi prestada, bem como aos demais colegas do Departamento de Física e Matemática da EFEI.

Também agradecemos aos membros da Banca Examinadora.

Igualmente, a Srta. CLAUDETE COLI JUNQUEIRA, pelo dedicado trabalho de "copy-desk" e revisão dos textos originais e a THEREZINHA RITA CORRÊA DE SALLES DIAS, que os da tilografou.

Finalmente, seja-nos permitido ainda, salientar o inestimável apoio da Administração da ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ, que nos facilitou os meios materiais in dispensáveis, sem os quais seriam vãos o nosso trabalho e a participação de quantos nos auxiliaram.

Itajubá, Agosto de 1974

FRANCISCO DE ASSIS FERREIRA

I N D I C E

	PÁG.
CAPÍTULO I	
- FUNÇÕES ORTOGONAIS. NORMA	1
I.0 - INTRODUÇÃO	1
I.1 - VETORES ORTOGONAIS. NORMA	1
I.1.1 - Produto Escalar ou Produto <u>In</u> <u>terno</u>	3
I.1.2 - Comprimento ou Norma de um Vetor	5
I.1.3 - Ângulo entre dois vetores	6
I.1.4 - Ortogonalidade de Vetores	12
I.1.5 - Conjunto Ortogonal e Conjunto <u>Or</u> <u>tonormal</u>	13
I.1.6 - Independência Linear de Conjunto de Vetores Ortogonais	15
I.1.7 - Vetores em N Dimensões no espaço complexo	16
I.1.8 - Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt	23
I.2 - FUNÇÕES ORTOGONAIS E NORMA	30
I.2.1 - Espaço de Funções	30
I.2.2 - Comprimento ou Norma de Função considerada como vetor.....	33

	PÁG.
1.2.3 - Desigualdade de Cauchy-Schwarz..	33
1.2.4 - Ortogonalidade de funções	34
1.2.5 - Conjunto Ortogonal e Conjunto Or <u>tonormal</u> de funções	37
1.2.6 - Independência Linear de Conjunto Ortogonais de Funções Vetores...	46
1.2.7 - Funções Vetores no "Espaço de Funções" complexo	46
1.2.8 - Ortogonalização de Funções Veto <u>res</u>	49
1.2.9 - Produto Escalar ou Interno Rela <u>tivo</u> a uma função peso	56
1.2.10- Comprimento ou Norma de uma fun <u>ção</u> em relação a uma função peso	58
1.2.11- Ortogonalidade de funções rela <u>tivas</u> a uma função peso	58
1.2.12- Conjunto Ortogonal e Ortonormal de funções relativo a uma fun <u>ção</u> peso	58

CAPÍTULO II

II.3 - SÉRIES DE FUNÇÕES ORTOGONAIS. PROBLEMAS DE CONTORNO:	
II.3.0 - Introdução	
II.3.1 - Desenvolvimento de uma função qualquer em série de funções ortogonais	70
II.4 - PROBLEMAS DE CONTORNO	77
II.4.1 - Introdução	77
II.5 - FORMA AUTO-ADJUNTA. PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE	84
II.5.1 - Forma Auto-Adjunta	84
II.6 - PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE	87
II.7 - SÉRIES DE FUNÇÕES ORTOGONAIS OBTIDAS DE PROBLEMAS DE CONTORNO	105
II.8 - SÉRIE DE FOURIER	112
II.8.1 - Série de Fourier de Senos.....	112
II.8.2 - Série de Fourier de Cossenos..	115
II.9 - SÉRIES DE LEGENDRE	120
II.10- SÉRIES DE BESSEL	128
II.10.1 - Ortogonalidade das Funções de Bessel	128
II.10.2 - Séries de Bessel de 1 ^a e 2 ^a Espécies	132

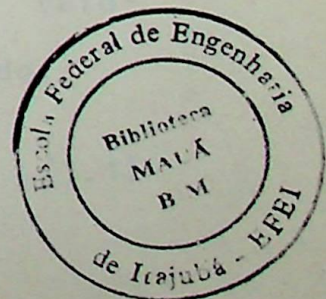
CAPÍTULO III

III:11 - APLICAÇÕES DAS SÉRIES DE FUNÇÕES OR	
TOGONAIS	148
III.11.0 - Introdução	
III.11.1 - Problemas de Contorno Re	
lativos às Equações Dife	
renciais não homogêneas...	148
III.11.2 - Aplicações das Séries Or	
togonais	155
CONCLUSÃO E OBJETIVOS FUTUROS	177
SÍMBOLOS USADOS	178
BIBLIOGRAFIA	179

ÍNDICE DAS FIGURAS E DAS TABELAS

	PÁG.
FIG. 1.1 - Representação do vetor soma de dois vetores concorrentes \vec{A} e \vec{B}	2
FIG. 1.2 - Componentes do vetor \vec{A} em tres <u>di</u> <u>mensões</u>	6
FIG. 1.3 - Vetores no espaço (\mathbb{R}^2)	9
FIG. 1.4 - Representação de dois vetores no espaço (\mathbb{R}^3)	10
FIG. 1.5 - Vetores ortogonais	13
FIG. 1.6 - Ortogonalização de vetores em (\mathbb{R}^2).	23
FIG. 1.7 - Ortogonalização de vetores em (\mathbb{R}^2).	25
FIG. 1.8 - Ortogonalização de vetores em (\mathbb{R}^3).	26
FIG. 1.9 - Ortogonalização de vetores em (\mathbb{R}^3).	29
FIG. 2.1 - Representação gráfica de funções <u>or</u> <u>togonais</u>	36
FIG. 7.1 - Gráfico das funções $\operatorname{tg} \mu$ e $-\operatorname{ctg} \mu$	109
FIG. 9.1 - Gráfico da função $f(x)$ do exemplo 1	125
FIG. 9.2 - Gráfico da função $f(\theta)$ do exemplo 2	126
FIG. 10.1 - Representação gráfica da função $f(x)$ do exemplo 3	142
TABELA 1 -	145

TABELA 2 -	146
TABELA 2 -	147
FIG.11.1 - Oscilações transversais de uma corda	157
FIG.11.2 - Coordenadas esféricas	169
FIG.11.3 - Coordenadas cilíndricas	173



"SÉRIE DE FUNÇÕES ORTOGONAIS"

CAPÍTULO I

FUNÇÕES ORTOGONAIS. NORMA.

I.0 - INTRODUÇÃO

Atendendo ao objetivo deste trabalho, o de sistematizar o emprego das funções ortogonais nos problemas de contorno, de grande aplicação a engenharia, daremos as definições de funções ortogonais e de norma, mediante a extensão de ortogonalidade e norma de vetores, com bases no produto escalar ou produto interno de vetores.

I.1 - VETORES ORTOGONAIS. NORMA

I.1.0 - Consideremos que, em um sistema de coordenadas em três dimensões, um vetor \vec{A} tenha por componentes o conjunto de números (A_1, A_2, A_3) ; e um vetor \vec{B} tenha por componentes o conjunto de números (B_1, B_2, B_3) .

Então, a soma ou diferença desses vetores, Figura (1.1), é definida pelo conjunto ordenado:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_1 \pm B_1, A_2 \pm B_2, A_3 \pm B_3) \quad (1.1)$$

Definição esta que está de acordo com o resultado experimental, obtido da resultante de dois vetores na Física. Notemos ainda que a equação (1.1) satisfaz a lei da distributividade, usada na álgebra elementar.

Dizemos ainda que, dois vetores são iguais quando suas respectivas componentes são iguais, isto é:

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow A_1 = B_1, A_2 = B_2, A_3 = B_3 \quad (1.2)$$

O produto de um número real k pelo vetor \vec{A} é o vetor obtido, multiplicando cada componente de A por k , logo:

$$k \vec{A} = (kA_1, kA_2, kA_3) \quad (1.3)$$

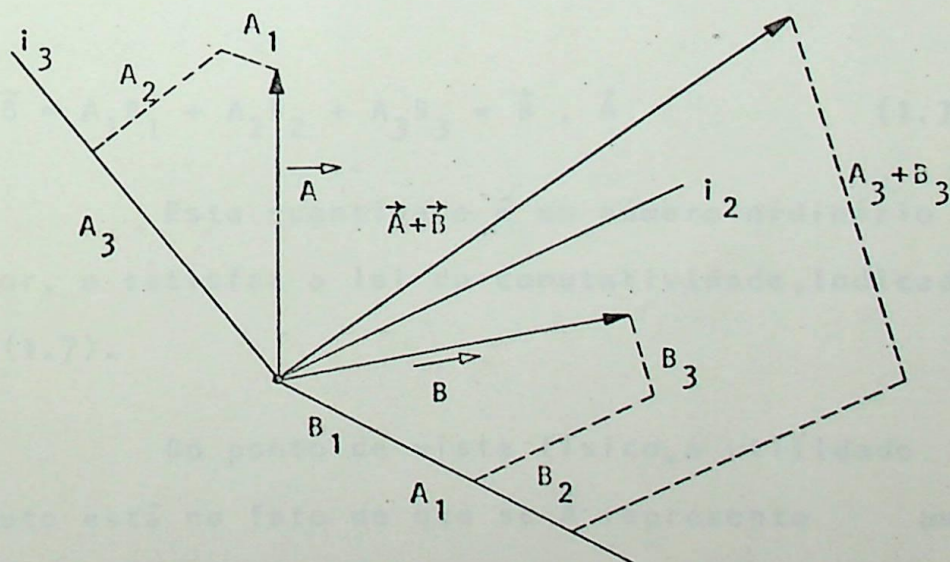


FIG. 1.1 - Representação do vetor soma de dois vetores concorrentes \vec{A} e \vec{B} .

n dimensões (R^n):

$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$$

e

$$\vec{B} = (B_1, B_2, B_3, \dots, B_n)$$

definimos analogamente:

$$i) \vec{A} \pm \vec{B} = (A_1 \pm B_1, A_2 \pm B_2, A_3 \pm B_3, \dots, A_n \pm B_n) \quad (1.4)$$

$$ii) \vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow A_1 = B_1, A_2 = B_2, A_3 = B_3, \dots, A_n = B_n \quad (1.5)$$

$$iii) k\vec{A} = (kA_1, kA_2, kA_3, \dots, kA_n) \quad (1.6)$$

I.1.1 - PRODUTO ESCALAR OU PRODUTO INTERNO

Definimos produto escalar ou produto interno de dois vetores \vec{A} e \vec{B} , o qual representamos por $\vec{A} \cdot \vec{B}$, (lê-se "A escalar B" ou "A interno B") a expressão

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + \dots = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (1.7)$$

Esta quantidade é um número ordinário e não um vetor, e satisfaz a lei da comutatividade, indicada também em (1.7).

Do ponto de vista físico, a utilidade deste produto está no fato de que se \vec{A} representa uma força e \vec{B} um deslocamento, então o produto escalar é igual ao trabalho feito pela força \vec{A} , se seu ponto de

aplicação se move no deslocamento \vec{B} .

Em analogia, se os vetores \vec{A} e \vec{B} são dados em um sistema em n dimensões. (R^n),

$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$$

e

$$\vec{B} = (B_1, B_2, B_3, \dots, B_n)$$

definimos o produto escalar ou produto interno desses vetores pela expressão:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + \dots + A_n B_n = \sum_{i=1}^n A_i B_i \quad (1.8)$$

Além da propriedade comutativa, já citada, esse produto possui as seguintes outras propriedades:

$$i) \quad (\alpha \vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\alpha \vec{B}) = \alpha (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (1.9)$$

α é um número real qualquer.

$$ii) \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad (1.10)$$

$$iii) \quad \vec{A} \cdot \vec{A} \geq 0 \quad \text{e} \quad \vec{A} \cdot \vec{A} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} = 0 \quad (1.11)$$

De um modo mais geral, podemos escrever:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \vec{A} + \alpha_2 \vec{B}) \cdot (\beta_1 \vec{C} + \beta_2 \vec{D}) &= \alpha_1 \beta_1 (\vec{A} \cdot \vec{C}) + \alpha_1 \beta_2 (\vec{A} \cdot \vec{D}) + \\ &+ \alpha_2 \beta_1 (\vec{B} \cdot \vec{C}) + \alpha_2 \beta_2 (\vec{B} \cdot \vec{D}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ são números quaisquer.

Para as demonstrações destas propriedades basta aplicarmos a definição de produto escalar ou produto interno.

1.2. - COMPRIMENTO OU NORMA DE UM VETOR

Seja um vetor $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ em um sistema em três dimensões (R^3); então, o comprimento ou norma do vetor \vec{A} , que indicamos por $||\vec{A}||$, é o número real positivo dada por:

$$||\vec{A}|| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \quad (1.13)$$

esta equação pode ser facilmente vista através da Figura (1.2).

Notemos porém, que podemos expressar a equação (1.13) em termos do produto escalar; para tal procedemos do seguinte modo:

Da equação (1.7), fazendo $\vec{A} = \vec{B}$ podemos escrever:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \quad (1.14)$$

substituindo em (1.13), temos:

$$||\vec{A}|| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} \quad (1.15)$$

que é uma quantidade real, pois $\vec{A} \cdot \vec{A} > 0$.

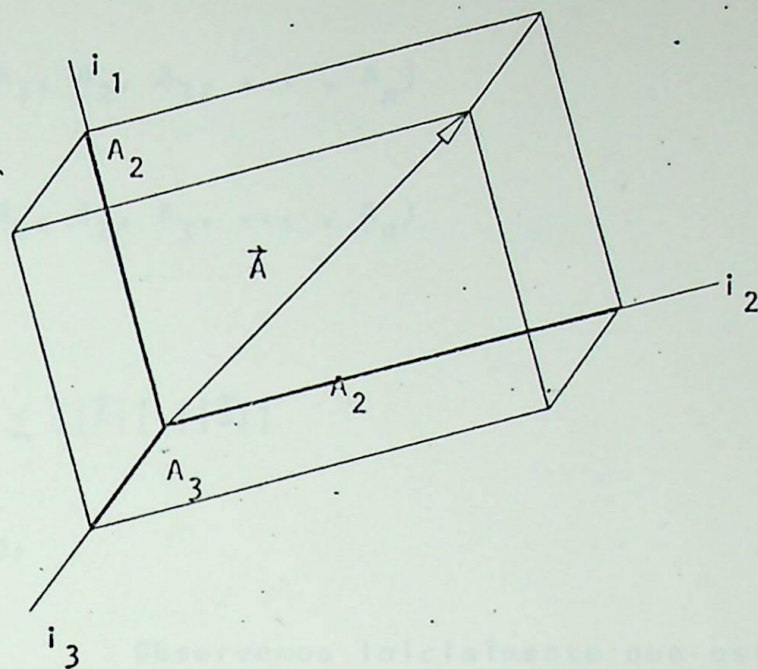


FIG. 1.2 - Componentes do vetor \vec{A} em três dimensões.

Portanto, podemos definir o comprimento ou norma de um vetor \vec{A} como sendo o número real positivo dado pela equação:

$$||\vec{A}|| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \quad (1.16)$$

Por analogia, definiremos comprimento ou norma de um vetor \vec{A} no espaço de n dimensões (R^n), dado por $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$ ao número real positivo:

$$||\vec{A}|| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots + A_n^2} \quad (1.17)$$

1.1.3 - ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES

1.1.4.1 - Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Sejam \vec{A} e \vec{B} dois vetores quaisquer no

espaço de n dimensões (\mathbb{R}^n) dado por:

$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$$

e

$$\vec{B} = (B_1, B_2, B_3, \dots, B_n)$$

então:

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \quad (1.18)$$

DEMONSTRAÇÃO:

Observemos inicialmente que esta desigualdade é válida se $\vec{A} = 0$ ou $\vec{B} = 0$, pois teremos $0 \leq 0 \leq 0$, que é verdadeira. Portanto consideremos o caso em que, $\vec{A} \neq 0$ e $\vec{B} \neq 0$.

Consideremos o produto escalar:

$$(\alpha\vec{A} - \beta\vec{B}) \cdot (\alpha\vec{A} - \beta\vec{B}) \quad (1.19)$$

de acordo com (1.11) temos:

$$(\alpha\vec{A} - \beta\vec{B}) \cdot (\alpha\vec{A} - \beta\vec{B}) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \alpha^2 (\vec{A} \cdot \vec{A}) - 2\alpha\beta (\vec{A} \cdot \vec{B}) + \beta^2 (\vec{B} \cdot \vec{B})$$

logo:

$$2\alpha\beta (\vec{A} \cdot \vec{B}) \leq \alpha^2 (\vec{A} \cdot \vec{A}) + \beta^2 (\vec{B} \cdot \vec{B})$$

fazendo:

$$\alpha = \vec{B} \cdot \vec{B} \quad \text{e} \quad \beta = \vec{A} \cdot \vec{A}$$

temos:

$$2\sqrt{\vec{B} \cdot \vec{B}} \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \leq (\vec{B} \cdot \vec{B}) (\vec{A} \cdot \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{A}) (\vec{B} \cdot \vec{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sqrt{\vec{B} \cdot \vec{B}} \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \leq 2 (\vec{A} \cdot \vec{A}) (\vec{B} \cdot \vec{B})$$

elevando ao quadrado e simplificando, temos:

$$(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \leq (\vec{A} \cdot \vec{A}) (\vec{B} \cdot \vec{B})$$

logo:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \leq \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} \sqrt{\vec{B} \cdot \vec{B}}$$

o qual podemos escrever:

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq \|\vec{A}\| \|\vec{B}\|$$

OBSERVAÇÕES: A desigualdade de Cauchy Schwarz pode ser escrita da forma:

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i B_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n A_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n B_i^2 \right) \quad (1.20)$$

Da equação (1.18), temos que:

$$\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|} \leq 1 \quad (1.21)$$

a qual é válida para todo o par de vetores não nulos de um espaço de n dimensões (\mathbb{R}^n).

Inspirado na equação (1.21) podemos definir o cosseno do ângulo entre dois vetores \vec{A} e \vec{B} , em um espaço de n dimensões, como sendo:

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{||\vec{A}|| \ ||\vec{B}||} \quad (1.22)$$

pois $-1 \leq \cos \theta \leq 1$

Se um dos vetores \vec{A} ou \vec{B} for nulo, faremos $\cos \theta = 0$.

A título de ilustração, mostraremos que no caso de dois vetores \vec{A} e \vec{B} , no espaço de duas dimensões (R^2), isto é, $\vec{A} = (A_1, A_2)$ e $\vec{B} = (B_1, B_2)$ o ângulo entre os dois vetores é dado pela equação (1.22).

Sejam $\vec{A} = (A_1, A_2)$ e $\vec{B} = (B_1, B_2)$ dois vetores no espaço de 2 dimensões R^2 , figura 1.3.

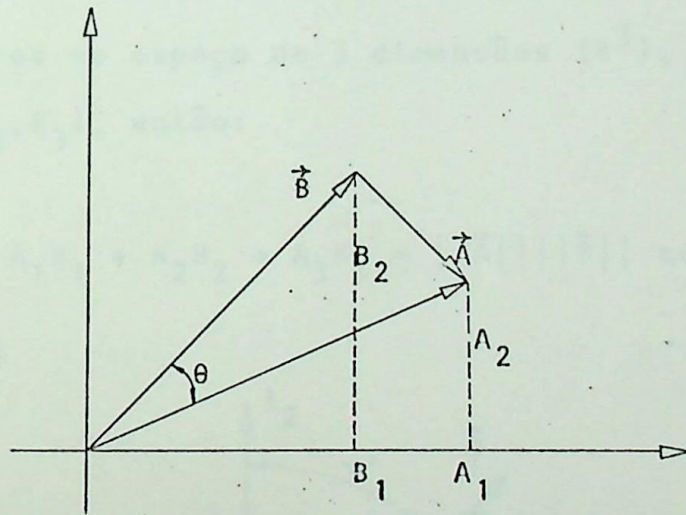


FIG. 1.3 - Vetores no espaço (R^2).

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$||\vec{A}-\vec{B}||^2 = ||\vec{A}||^2 + ||\vec{B}||^2 - 2 ||\vec{A}|| \ ||\vec{B}|| \cos \theta$$

logo:

$$(\vec{A}-\vec{B}) \cdot (\vec{A}-\vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} - 2 \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} - 2 \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} - 2 \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|}$$

Notemos agora, que a expressão (1.22) pode ser usada para definir o produto escalar de dois vetores, \vec{A} e \vec{B} , em um espaço de n dimensões, temos:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta \quad (1.23)$$

Podemos demonstrar, por exemplo, que para 2 vetores no espaço de 3 dimensões (R^3), $A = (A_1, A_2, A_3)$ e $B = (B_1, B_2, B_3)$, então:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta \quad (1.24)$$

DEMONSTRAÇÃO

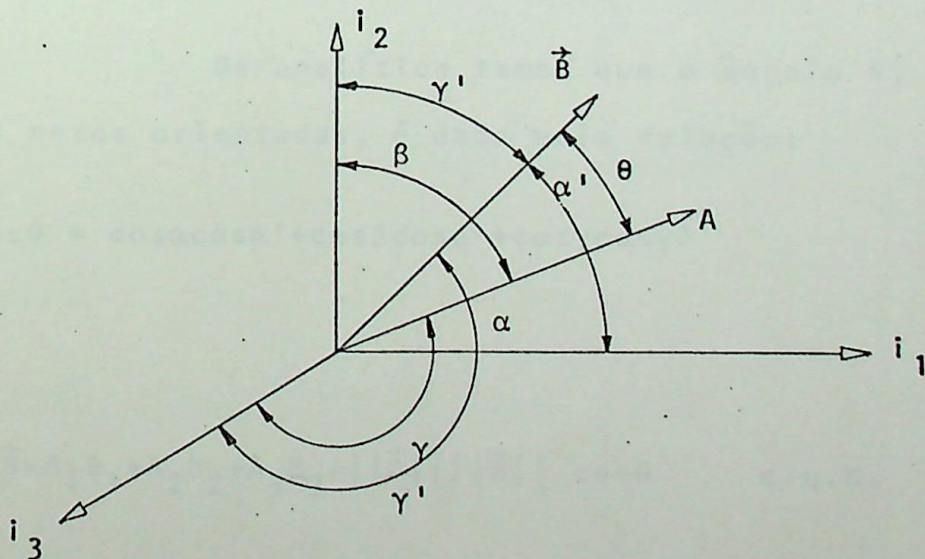


FIG. 1.4 - Representação de dois vetores no espaço (R^3).

Sejam α , β e γ os ângulos diretores de \vec{A} e α' , β' e γ' , os ângulos diretores de \vec{B} . Da Figura 1,4 temos:

$$A_1 = ||\vec{A}|| \cos\alpha$$

$$A_2 = ||\vec{A}|| \cos\beta$$

$$A_3 = ||\vec{A}|| \cos\gamma$$

$$B_1 = ||\vec{B}|| \cos\alpha'$$

$$B_2 = ||\vec{B}|| \cos\beta'$$

$$B_3 = ||\vec{B}|| \cos\gamma'$$

Logo:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = ||\vec{A}|| ||\vec{B}|| \cos\beta \cos\beta' + \\ &+ ||\vec{A}|| ||\vec{B}|| \cos\alpha \cos\alpha' + ||\vec{A}|| ||\vec{B}|| \cos\gamma \cos\gamma' \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = ||\vec{A}|| ||\vec{B}|| (\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma')$$

Da analítica temos que o ângulo θ , entre duas retas orientadas, é dado pela relação:

$$\cos\theta = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma'$$

logo:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = ||\vec{A}|| ||\vec{B}|| \cos\theta \quad \text{c.q.d.}$$

Portanto, de um modo geral, podemos escrever o produto escalar ou produto interno de dois vetores \vec{A} e \vec{B} , no espaço de n dimensões (R^n), como:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + \dots + A_n B_n = \sum_{i=1}^n A_i B_i = \\ &= ||\vec{A}|| \ ||\vec{B}|| \ \cos\theta \end{aligned} \quad (1.25)$$

1.1.4 - ORTOGONALIDADE DE VETORES

Dois vetores \vec{A} e \vec{B} , no espaço de n dimensões (R^n), se dizem ortogonais ou perpendiculares, se for nulo o cosseno do ângulo formado entre eles. Tendo em vista a equação (1.22), vemos que \vec{A} e \vec{B} são ortogonais se, e somente se, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ (1.26).

Tal afirmação pode ser asseverada tendo em vista o seguinte teorema:

TEOREMA 1.1 - Dois vetores \vec{A} e \vec{B} são ortogonais se, e somente se:

$$||\vec{A} + \vec{B}||^2 = ||\vec{A}||^2 + ||\vec{B}||^2 \quad (\text{Pitágoras}) \quad (1.27)$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\begin{aligned} ||\vec{A} + \vec{B}|| &= (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{A} + 2(\vec{A} \cdot \vec{B}) + \vec{B} \cdot \vec{B} = \\ &= ||\vec{A}||^2 + 2(\vec{A} \cdot \vec{B}) + ||\vec{B}||^2 \end{aligned}$$

portanto:

13

$$||\vec{A} + \vec{B}||^2 = ||\vec{A}||^2 + ||\vec{B}||^2$$

se, e somente se:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

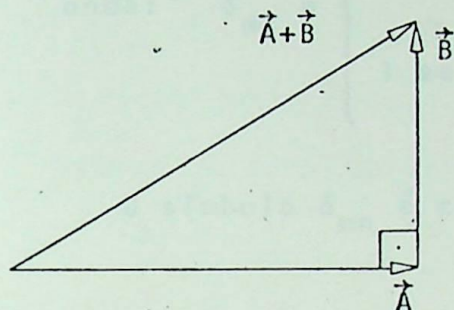


FIG. 1.5 - Vetores ortogonais.

Por exemplo os vetores de componentes $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ são ortogonais, pois o produto escalar dois a dois desses vetores é nulo.

1.1.5 - CONJUNTO ORTOGONAL E CONJUNTO ORTONORMAL

Um conjunto de vetores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_i, \dots$, num espaço de N dimensões (\mathbb{R}^N), diz-se um conjunto ortogonal se o produto escalar de dois vetores quaisquer do conjunto for nulo, isto é:

Se:

$$\vec{x}_m \cdot \vec{x}_n = 0 \quad (1.28) \quad \text{se } m \neq n$$

Por outro lado, se o quadrado da norma for unitária, isto é, de acordo com a equação (1.15):

$$\vec{x}_m \cdot \vec{x}_m = 1 \quad (1.29)$$

o conjunto se diz ortonormal.

Por economia de notação, podemos unificar as equações (1.28) e (1.29), escrevendo-as:

$$\vec{x}_m \cdot \vec{x}_n = \delta_{mn} \quad \text{onde:} \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases} \quad (1.30)$$

O símbolo δ_{mn} é chamado delta de Kronecker.

Notemos das definições que podemos obter um conjunto ortonormal de um conjunto ortogonal de vetores, bastando para isto, dividir cada vetor do conjunto pela sua norma, isto é:

$$\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||} \quad (1.31)$$

o qual chamamos de vetor normalizado, e que terá comprimento ou norma unitário.

Por exemplo, os vetores $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, além de formarem um conjunto ortogonal, formam também um conjunto ortonormal.

Para estes vetores é conveniente a notação seguinte:

$$\vec{t}_1 = (1,0,0); \quad \vec{t}_2 = (0,1,0); \quad \vec{t}_3 = (0,0,1)$$

Notemos que $\vec{i}_m \cdot \vec{i}_n = 0$ para $m \neq n$ e $\vec{i}_m \cdot \vec{i}_m = 1$ para $m = n$, o que mostra que esses vetores são ortogonais e formam um conjunto ortonormal. Tais vetores são chamados vetores unitários.

1.1.6 - INDEPENDÊNCIA LINEAR DE CONJUNTO DE VETORES ORTOGONAIS.

TEOREMA 1.2 - Todo conjunto ortogonal de vetores, num espaço de n dimensões, é linearmente independente.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n, \dots$ um conjunto ortogonal de vetores, isto é $\vec{x}_m \cdot \vec{x}_n = 0$ para $m \neq n$.

Devemos mostrar que a expressão:

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \vec{x}_3 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = 0 \quad (1.32)$$

se, e somente se:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0 \quad (1.33)$$

Se $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n$ formam um conjunto ortogonal, então para cada índice m , $1 \leq m \leq n$, devemos ter:

$$(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \vec{x}_3 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n) \cdot \vec{x}_m = 0 \cdot \vec{x}_m = 0$$

Porém, como $\vec{x}_m \cdot \vec{x}_n = 0$, se $m \neq n$, a equação acima se reduz a:

$$\alpha_m (\vec{x}_m \cdot \vec{x}_m) = 0 \quad \text{como} \quad \vec{x}_m \cdot \vec{x}_m \neq 0$$

logo, $\alpha_m = 0$, isto é, cada um dos coeficientes em (1.29) é nulo, resultando portanto:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$$

1.1.7 - VETORES EM N DIMENSÕES NO ESPAÇO COMPLEXO

1.1.7.1 - Sejam os vetores \vec{A} e \vec{B} em n dimensões no espaço complexo (C^n), cujas componentes são:

$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$$

e

$$\vec{B} = (B_1, B_2, B_3, \dots, B_n)$$

sendo as componentes A_i e B_i pertencentes ao conjunto C dos números complexos.

Assim, como no caso real, definiremos:

$$i) \quad \vec{A} \pm \vec{B} = (A_1 \pm B_1, A_2 \pm B_2, A_3 \pm B_3, \dots, A_n \pm B_n) \quad (1.34)$$

$$ii) \quad \vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow A_1 = B_1, A_2 = B_2, A_3 = B_3, \dots, A_n = B_n \quad (1.35)$$

$$iii) \quad k\vec{A} = (kA_1, kA_2, kA_3, \dots, kA_n) \quad (1.36)$$

onde k pode ser um número real ou complexo.



1.1.7.2 - Produto escalar ou produto interno

Definimos produto escalar ou produto interno de dois vetores $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$ e $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3, \dots, B_n)$, no espaço n dimensional complexo, a expressão:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_1 B_1^* + A_2 B_2^* + A_3 B_3^* + \dots + A_n B_n^* = \\ &= \sum_{i=1}^n A_i B_i^* \end{aligned} \quad (1.37)$$

onde $B_1^*, B_2^*, B_3^*, \dots, B_n^*$ são os conjugados complexo de $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ respectivamente.

Por exemplo, se $\vec{A} = (2+3i, 4-i, 2i)$ e $B = (3-2i, 5, 4-6i)$, então:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (2+3i)(3-2i)^* + (4-i)(5)^* + (2i)(4-6i)^* = \\ &= (2+3i)(3+2i) + (4-i)(5) + (2i)(4+6i) = \\ &= 13i + 20 + 5i - 12 + 8i = 8 + 6i \end{aligned}$$

1.1. .3 - Comprimento ou normal de um vetor.

Seja um vetor $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$, um vetor no espaço n-dimensional complexo, o comprimento ou norma do vetor \vec{A} é definida por:

$$||\vec{A}|| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} \quad (1.38)$$

tendo em vista a equação (1.37) temos:

$$||\vec{A}|| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_1 A_1^* + A_2 A_2^* + A_3 A_3^* + \dots + A_n A_n^*} \quad (1.39)$$

como:

$$A_1 A_1^* = |A_1|^2; A_2 A_2^* = |A_2|^2 \dots A_n A_n^* = |A_n|^2 \quad (1.40)$$

então:

$$\begin{aligned} ||\vec{A}|| &= \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_1 A_1^* + A_2 A_2^* + A_3 A_3^* + \dots + A_n A_n^*} = \\ &= \sqrt{|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + \dots + |A_n|^2} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Por exemplo se $\vec{A} = (2+3i, 4-i, 2i)$ então:

$$\begin{aligned} ||\vec{A}|| &= \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{(2+3i)(2+3i)^* + (4-i)(4-i)^* + (2i)(2i)^*} = \\ &= \sqrt{(2+3i)(2-3i) + (4-i)(4+i) + 2i(-2i)} = \\ &= \sqrt{13 + 17 + 4} = 34 \end{aligned}$$

OBSERVAÇÕES:

- 1) Se para os vetores \vec{A} e \vec{B} no espaço complexo definimos $\vec{A} \cdot \vec{B}$ por $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_n B_n$, então é possível que $\vec{A} \cdot \vec{A} = 0$, mesmo para $A \neq 0$ por exemplo, se $\vec{A} = (1, i, 0)$, então:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_1 A_1 + A_2 A_2 + A_3 A_3 = 1 - 1 + 0 = 0$$

Ainda $\vec{A} \cdot \vec{A}$ pode mesmo nem ser real.

2) Para vetores \vec{A} e \vec{B} no espaço complexo, a lei da comutatividade do produto escalar não se verifica como no caso real, isto é $\vec{A} \cdot \vec{B} \neq \vec{B} \cdot \vec{A}$, porém podemos mostrar que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{A})^* \quad (1.42)$$

senão vejamos:

Sejam $\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ e $\vec{B} = (B_1, B_2, \dots, B_n)$ dois vetores no espaço n-dimensional complexo.

Pelas propriedades do conjugado, e a equação (1.37) podemos escrever:

$$\begin{aligned} (\vec{B} \cdot \vec{A})^* &= (B_1 A_1^* + B_2 A_2^* + \dots + B_n A_n^*)^* = (B_1 A_1^*)^* + \\ &+ (B_2 A_2^*)^* + \dots + (B_n A_n^*)^* = \\ &= B_1^* A_1 + B_2^* A_2 + \dots + B_n^* A_n = A_1^* B_1^* + \\ &+ A_2 B_2^* + \dots + A_n B_n^* = \vec{A} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{A})^* \quad \text{c.q.d.}$$

1.1.7.4 - Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Dóis vetores \vec{A} e \vec{B} no espaço de n -dimensões complexo (C^n) satisfazem a relação de Cauchy-Schwarz.

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \quad (1.43)$$

DEMONSTRAÇÃO:

Se $\vec{B} = 0$, a desigualdade se reduz a $0 \leq 0$, portanto válida. Consideremos, agora $\vec{B} \neq 0$, usando para qualquer número complexo, Z , $Z\bar{Z} = |Z|^2$ e ainda da equação (1.42) $\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{A})$.

Expandindo a expressão $0 \leq \|\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B}\|^2$ onde α é um número real qualquer, temos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B}\|^2 = \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B} \cdot (\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B}) = \\ &= \vec{A} \cdot \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \alpha (\vec{A} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \alpha (\vec{B} \cdot \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{B}) (\vec{A} \cdot \vec{B}) \alpha^2 (\vec{B} \cdot \vec{B}) = \\ &= \|\vec{A}\|^2 - 2\alpha |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 + |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 \alpha^2 \|\vec{B}\|^2 \end{aligned}$$

fazendo:

$$\alpha = \frac{1}{\|\vec{B}\|^2}$$

temos:

$$0 \leq ||\vec{A}||^2 - \frac{|\vec{A} \cdot \vec{B}|^2}{||\vec{B}||^2}, \quad \text{logo:}$$

$$0 \leq ||\vec{A}||^2 ||\vec{B}||^2 - |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 \Rightarrow |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 \leq ||\vec{A}||^2 ||\vec{B}||^2$$

tomando a raiz quadrada de ambos os lados, temos:

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq ||\vec{A}|| ||\vec{B}|| \quad \text{c.q.d.}$$

Da equação (1.43), podemos escrever:

$$\frac{|\vec{A} \cdot \vec{B}|}{||\vec{A}|| ||\vec{B}||} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{||\vec{A}|| ||\vec{B}||} \leq 1$$

que como vimos em (1.22), pode definir o cosseno do ângulo entre \vec{A} e \vec{B} , isto é:

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{||\vec{A}|| ||\vec{B}||} \quad (1.44)$$

1.1.7.5 - Ortogonalidade de vetores no espaço complexo

De modo análogo ao espaço de n dimensões reais R^n , dizemos que dois vetores \vec{A} e \vec{B} , no espaço de n dimensões complexo, são ortogonais ou perpendiculares quando o cosseno do ângulo, por eles formado, é nulo; portanto, da equação (1.44), vemos que \vec{A} e \vec{B} são ortogonais se, e somente se:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.45)$$

levando porém em consideração a definição do produto escalar dada pela equação (1.37).

De modo análogo, dizemos que um conjunto de vetores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_i, \dots$ no espaço n dimensional complexo, formam um conjunto ortogonal e ortonormal de vetores se:

$$\vec{x}_m \cdot \vec{x}_n = \delta_{mn} \quad \text{onde:} \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases} \quad (1.46)$$

e também um conjunto ortogonal se diz normalizado, se sua norma é unitária; do mesmo modo, podemos obter um conjunto ortonormal de um conjunto ortogonal, bastando dividir cada vetor pela sua norma.

Ainda podemos mostrar que, todo conjunto ortogonal de vetores no espaço complexo é linearmente independente, como foi feito em (1.1.7).

Por exemplo, os vetores que indicaremos por:

$$\vec{i}_1 = (i, 0, 0); \quad \vec{i}_2 = (0, i, 0); \quad \text{e} \quad \vec{i}_3 = (0, 0, i)$$

formam um conjunto ortogonal e ortonormal, pois é fácil vermos que:

$$\vec{i}_m \cdot \vec{i}_n = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$$

I.1.8 - PROCESSO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Vimos, pelo Teorema 1.2, que todo conjunto ortogonal de vetores, em um espaço de n dimensões, é linearmente independente. Tal resultado pode ser generalizado, de modo a nos permitir substituir um dado conjunto de vetores linearmente independentes, por um ortogonal correspondente. Este processo de ortogonalizar um conjunto de vetores dados, que tem como resultado a simplificação de muitos cálculos, quando trabalhamos com vetores ortogonais, é chamado de *processo de ortogonalização de Gram-Schmidt*.

Para maior facilidade de compreensão, introduziremos o processo por meio de exemplos; em seguida faremos sua generalização.

- i) Sejam \vec{x}_1 e \vec{x}_2 dois vetores, linearmente independentes, no espaço de duas dimensões (\mathbb{R}^2), figura (1.6).

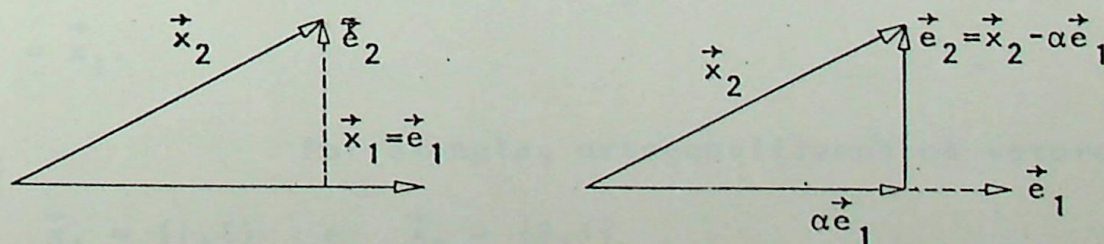


FIG. 1.6 - Ortogonalização de vetores em (\mathbb{R}^2).

Nosso problema será o de substituir os vetores dados, \vec{x}_1 e \vec{x}_2 por outros vetores, \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , que sejam ortogonais.

Para tal, tomemos $\vec{e}_1 = \vec{x}_1$, depois \vec{e}_2 a componente de \vec{x}_2 , perpendicular a \vec{x}_1 , figura (1.6).

Deste modo, podemos escrever \vec{e}_2 na forma:

$$\vec{e}_2 = \vec{x}_2 - \alpha \vec{e}_1 \quad (1.47)$$

para que \vec{e}_1 e \vec{e}_2 sejam ortogonais devemos ter

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$$

de (1.47) temos

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot (\vec{x}_2 - \alpha \vec{e}_1) \Rightarrow \vec{e}_1 \cdot \vec{x}_2 - \alpha \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 0$$

logo, o valor de α que nos permitirá a ortogonalização será:

$$\alpha = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{x}_2}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} \quad (1.48)$$

que levando em (1.47), nos dará \vec{e}_2 que será perpendicular a $\vec{e}_1 = \vec{x}_1$.

Por exemplo, ortogonalizemos os vetores

$$\vec{x}_1 = (1, 1) \quad \text{e} \quad \vec{x}_2 = (0, 1)$$

Tomemos:

$$\vec{e}_1 = \vec{x}_1 := (1, 1)$$

da equação (1.47):

$$\Rightarrow \vec{e}_2 = \vec{x}_2 - \alpha \vec{e}_1$$

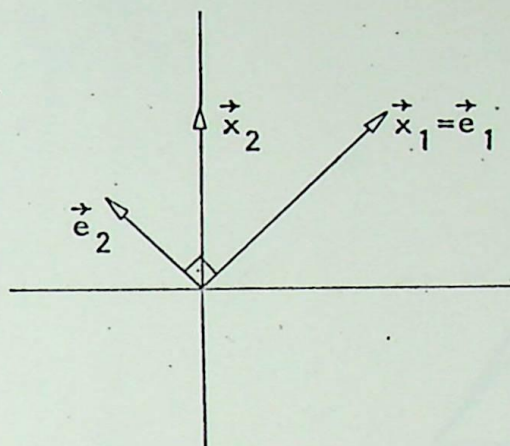


FIG. 1.7 - Ortogonalização de vetores em (\mathbb{R}^2)

de (1.43):

$$\alpha = \frac{(1, 1) \cdot (0, 1)}{(1, 1) \cdot (1, 1)} = \frac{1}{2}$$

logo:

$$\vec{e}_2 = (0, 1) - \frac{1}{2} (1, 1) = (0, 1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

portanto:

$$\vec{e}_1 = (1, 1) \quad \text{e} \quad \vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

são ortogonais, o que nos mostra a figura (1.7).

ii) Sejam agora os vetores \vec{x}_1 , \vec{x}_2 e \vec{x}_3 , linearmente independentes no espaço de três dimensões (\mathbb{R}^3) , conforme figura (1.8).

Nosso problema será substituir os vetores dados \vec{x}_1 , \vec{x}_2 e \vec{x}_3 por outros 3 vetores \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e \vec{e}_3 , que sejam ortogonais.

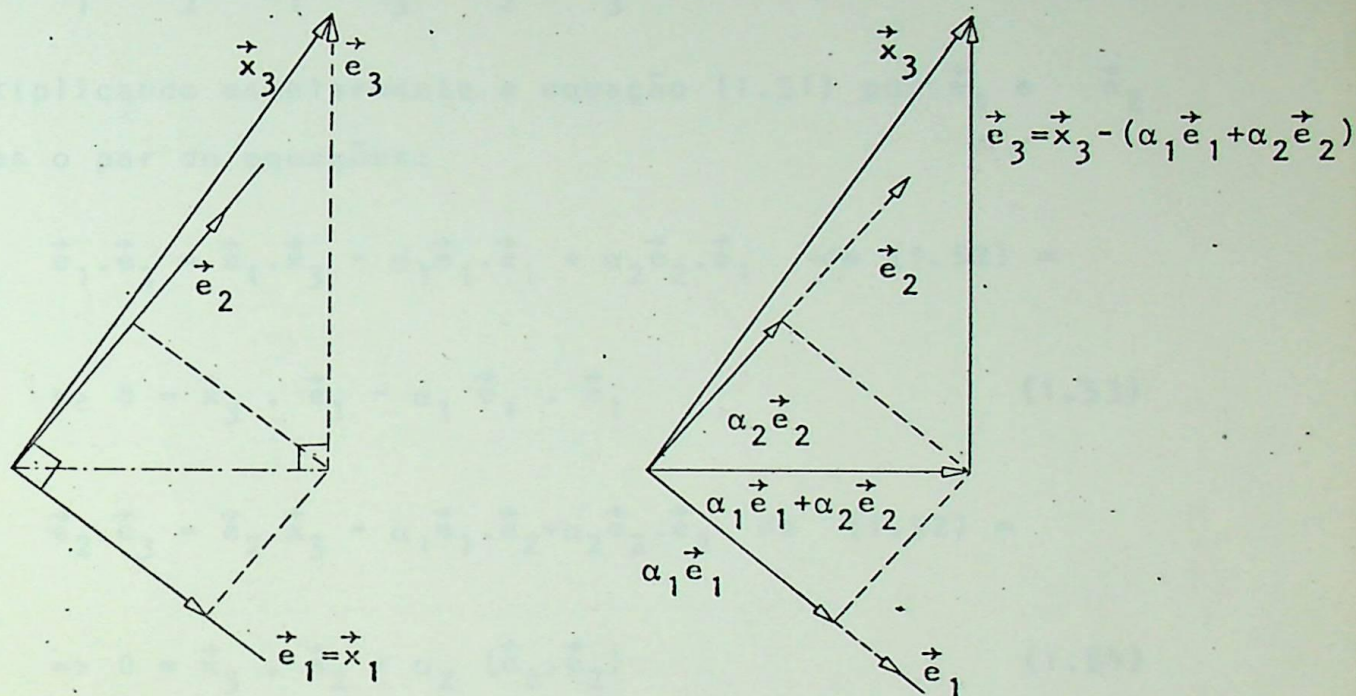


FIG. 1.8 - Ortogonalização de vetores em (R^3)

Façamos $\vec{e}_1 = \vec{x}_1$, devemos determinar \vec{e}_2

tal que

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \vec{e}_2 = \vec{x}_2 - \alpha_1 \vec{e}_1 \quad (1.49)$$

de acordo com o exemplo i, temos:

$$\alpha_1 = \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} \quad (1.50)$$

que levado na equação (1.49) nos dará \vec{e}_2 perpendicular a \vec{e}_1 .

Resta-nos agora determinar o vetor \vec{e}_3 perpendicular simultaneamente a \vec{e}_1 e \vec{e}_2 . Para tal, fazemos:

$$\vec{e}_3 = \vec{x}_3 - \alpha_1 \vec{e}_1 - \alpha_2 \vec{e}_2 \quad (1.51)$$

Para que \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e \vec{e}_3 sejam mutuamente ortogonais, devemos ter:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 \quad (1.52)$$

multiplicando escalarmente a equação (1.51) por \vec{e}_1 e \vec{e}_2 temos o par de equações:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \cdot \vec{x}_3 - \alpha_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 \quad \text{de (1.52) =}$$

$$\Rightarrow 0 = \vec{x}_3 \cdot \vec{e}_1 - \alpha_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 \quad (1.53)$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{x}_3 - \alpha_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \quad \text{de (1.52) =}$$

$$\Rightarrow 0 = \vec{x}_3 \cdot \vec{e}_2 - \alpha_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) \quad (1.54)$$

de (1.53) e (1.54) temos:

$$\alpha_1 = \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} \quad (1.55)$$

$$\alpha_2 = \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{e}_2}{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2} \quad (1.56)$$

que levados em (1.51), nos dará \vec{e}_3 perpendicular a \vec{e}_1 e \vec{e}_2 .

Por exemplo, ortogonalizemos os vetores

$$\vec{x}_1 = (1, 1, 0); \quad \vec{x}_2 = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{x}_3 = (1, 1, 1).$$

Temos que:

$$\vec{e}_1 = \vec{x}_1; \quad \vec{e}_2 = \vec{x}_2 - \alpha \vec{e}_1; \quad \vec{e}_3 = \vec{x}_3 - \alpha_1 \vec{e}_1 - \alpha_2 \vec{e}_2$$

calculemos α , α_1 e α_2 .

$$\alpha = \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} = \frac{(0, 1, 0) \cdot (1, 1, 0)}{(1, 1, 0) \cdot (1, 1, 0)} = \frac{1}{2} =$$

$$\Rightarrow \vec{e}_2 = (0, 1, 0) - \frac{1}{2} (1, 1, 0) = (0, 1, 0) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\alpha_1 = \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} = \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 0)}{(1, 1, 0) \cdot (1, 1, 0)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{e}_2}{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2} = \frac{(1, 1, 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)}{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 0$$

logo:

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 &= (1, 1, 1) - 1 (1, 1, 0) - 0 \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \\ &= (1, 1, 1) - (1, 1, 0) = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

portanto, os vetores ortogonalizados serão:

$$\vec{e}_1 = (1, 1, 0); \quad \vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

e

$$\vec{e}_3 = (0, 0, 1), \text{ o que nos mostra a figura (1.9)}$$

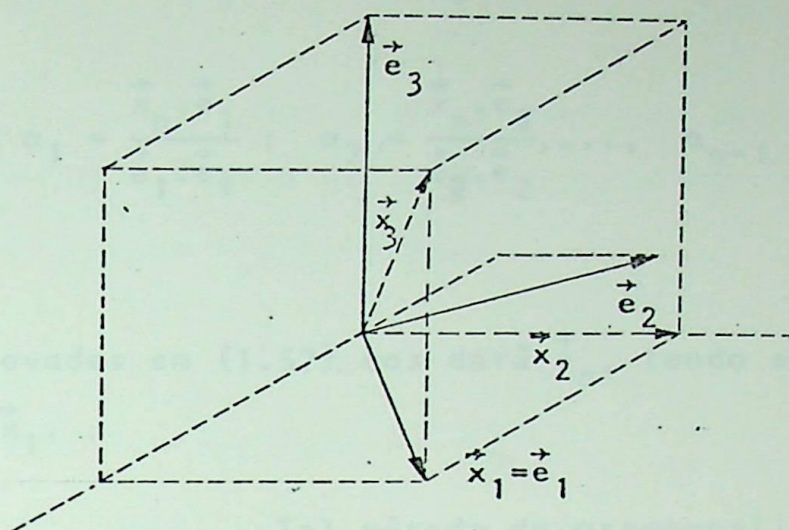


FIG. 1.9 - Ortogonalização de vetores em (R^3) .

Notemos, por indução, que podemos aplicar o mesmo procedimento para um conjunto qualquer de vetores linearmente independentes $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n$. Para tal, basta considerarmos calculado de maneira análoga aos exemplos dados, um conjunto ortogonal de vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$ a partir dos vetores dados $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}$; então para a etapa seguinte, fazemos:

$$\vec{e}_n = \vec{x}_n - \alpha_1 \vec{e}_1 - \alpha_2 \vec{e}_2 - \dots - \alpha_{n-1} \vec{e}_{n-1} \quad (1.57)$$

e calculamos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ de modo que \vec{e}_n seja ortogonal a cada um dos vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$, o que nos levará as equações:

$$\begin{aligned} \vec{x}_n \cdot \vec{e}_1 - \alpha_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) &= 0 \\ \vec{x}_n \cdot \vec{e}_2 - \alpha_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \vec{x}_n \cdot \vec{e}_{n-1} - \alpha_{n-1} (\vec{e}_{n-1} \cdot \vec{e}_{n-1}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.58)$$

Das equações (1.53) tiramos:

$$\alpha_1 = \frac{\vec{x}_n \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} ; \quad \alpha_2 = \frac{\vec{x}_n \cdot \vec{e}_2}{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}, \dots, \quad \alpha_{n-1} = \frac{\vec{x}_n \cdot \vec{e}_{n-1}}{\vec{e}_{n-1} \cdot \vec{e}_{n-1}} \quad (1.59)$$

que levados em (1.57) nos dará \vec{e}_n , tendo em conta que $\vec{e}_1 = \vec{x}_1$.

Tal método de ortogonalização exposto é chamado de processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. E ainda, uma vez conseguida a ortogonalização de um conjunto qualquer de vetores, podemos torná-lo em um conjunto ortonormal.

1.2 - FUNÇÕES ORTOGONAIS E NORMA

Com base nos estudos de produto escalar ou produto interno e comprimento ou norma de vetores, faremos a seguir, a generalização, de modo a definirmos conjuntos de funções ortogonais e ortonormais.

1.2.1 - ESPAÇO DE FUNÇÕES

1.2.1.1 - Produto Escalar ou Produto Interno de Funções

Consideremos um conjunto ordenado de N números como um vetor N -dimensional em R^N .

$$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3, \dots, F_N) \quad (2.1)$$

ou abreviadamente $\vec{F} = \{F_n\}$ onde $n = 1, 2, 3, \dots, N$ (2.2)

Todos os vetores obtidos, dando para as componentes F_n todos os valores numéricos possíveis, chamamos de espaço N -dimensional.

Seja o vetor:

$$\vec{G} = (G_1, G_2, G_3, \dots, G_N) \quad (2.3)$$

ou abreviadamente:

$$\vec{G} = \{G_n\} \quad \text{onde } n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.4)$$

Da equação (1.8) temos que o produto escalar de \vec{F} e \vec{G} é:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{G} &= F_1 \cdot G_1 + F_2 \cdot G_2 + F_3 \cdot G_3 + \dots + F_N \cdot G_N = \\ &= \sum_{n=1}^N F_n \cdot G_n \end{aligned} \quad (2.4)$$

Consideremos agora, que N cresça indefinidamente, isto é, o espaço (R^N) com um número infinito de dimensões, no qual as componentes $\{F_n\}$ e $\{G_n\}$ resultem distribuídas em uma forma contínua e com a mesma densidade; assim procedendo, n não será um índice enumerável e sim, uma variável contínua (x), por conseguinte $\{F_n\}$ e $\{G_n\}$, definem uma função $F(x)$, e $G(x)$ respectivamente, formando o que chamamos de *espaço de funções*.

Baseado nesta consideração, o produto escalar ou interno $\sum_{n=1}^N F_n G_n$, dada pela equação (2.4), fica definido em termos de uma integral, o que representamos

por:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = \int F(x) G(x) dx \quad (2.5)$$

onde a integração se estende sobre o domínio das funções, pois senão, o produto escalar se torna indefinido.

A equação (2.5) é então uma generalização da equação (2.4).

Se as funções são definidas no intervalo comum $C(a,b)$, então o produto escalar será definido por:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = \int_a^b F(x) G(x) dx \quad (2.6)$$

Notemos ainda que a equação (2.6) satisfaz todas as propriedades de um produto escalar, assim por exemplo:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \vec{F} \cdot \vec{G} &= \vec{G} \cdot \vec{F}, \text{ pois } \vec{F} \cdot \vec{G} = \int_a^b F(x) G(x) dx = \\ &= \int_a^b G(x) F(x) dx = \vec{G} \cdot \vec{F} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \text{II)} \quad (\alpha \vec{F}) \cdot \vec{G} &= \alpha (\vec{F} \cdot \vec{G}) \text{ pois } (\alpha \vec{F} \cdot \vec{G}) = \int_a^b F(x) G(x) dx = \\ &= \alpha \int_a^b F(x) G(x) dx = \alpha \vec{F} \cdot \vec{G} \quad \alpha \text{ real} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \text{III)} \quad (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \vec{G} &= \vec{F}_1 \cdot \vec{G} + \vec{F}_2 \cdot \vec{G}, \text{ pois } (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \vec{G} = \\ &= \int_a^b (F_1(x) + F_2(x)) G(x) dx = \int_a^b F_1(x) G(x) dx + \\ &+ \int_a^b F_2(x) G(x) dx = \vec{F}_1 \cdot \vec{G} + \vec{F}_2 \cdot \vec{G} \end{aligned} \quad (2.9)$$

1.2.2 - COMPRIMENTO OU NORMA DE FUNÇÃO CONSIDERADA COMO VETOR

Tendo em vista as mesmas considerações feitas para o produto escalar de funções, no "espaço de funções", podemos agora definir o comprimento ou norma de uma função \vec{F} , considerada como um vetor, que indicamos por $||\vec{F}||$, com base na equação (1.15), temos:

$$||\vec{F}|| = \sqrt{\vec{F} \cdot \vec{F}} \quad (2.10)$$

Considerando que a função \vec{F} é definida no intervalo $C(a,b)$, do conjunto dos reais, e tendo em vista a equação (2.6), temos:

$$||\vec{F}|| = \sqrt{\vec{F} \cdot \vec{F}} = \sqrt{\int_a^b [F(x)]^2 dx} \quad (2.11)$$

onde devemos ter $\vec{F} \cdot \vec{F} > 0$. (2.12)

1.2.3 - DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ

Sejam \vec{F} e \vec{G} funções consideradas vetores no "espaço de funções" e definidas em $C(a,b)$ do conjunto dos números reais, tendo em vista a equação (1.17), e as considerações feitas em (1.2.1), podemos escrever a desigualdade de Cauchy-Schwarz na forma:

$$\left(\int_a^b F(x)G(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b [F(x)]^2 dx \right) \left(\int_a^b [G(x)]^2 dx \right) \quad (2.13)$$

Assim, das equações (1.23) e (2.6), podemos escrever sem perda de generalidade, que:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = \int_a^b F(x)G(x)dx = \|\vec{F}\| \|\vec{G}\| \cos\theta \quad (2.14)$$

logo:

$$\cos\theta = \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}}{\|\vec{F}\| \|\vec{G}\|} \quad (2.15)$$

onde θ é o ângulo entre os vetores função \vec{F} e \vec{G} .

Por exemplo, calculemos o cosseno do ângulo compreendido entre os vetores $\vec{F} = x$ e $\vec{G} = x^2$ definidos em $C(0,1)$.

De (2.14) temos:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}}{\|\vec{F}\| \|\vec{G}\|} = \frac{\int_0^1 x \cdot x^2 dx}{\sqrt{\int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 x^4 dx}} = \\ &= \frac{\left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1}{\sqrt{\left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 \cdot \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^1}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{15}}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

1.2.4 - ORTOGONALIDADE DE FUNÇÕES

Duas funções \vec{F} e \vec{G} , consideradas vetores no "espaço de funções", no domínio de reais, se dizem ortogonais ou perpendiculares se for nulo o cosseno do ângulo formado entre \vec{F} e \vec{G} .

Tendo em vista a equação (2.15), vemos

que \vec{F} e \vec{G} são ortogonais se, e somente se:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = 0 \quad (2.16)$$

logo, pela equação (2.6), devemos ter:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = \int_a^b F(x) G(x) dx = 0 \quad (2.17)$$

portanto, para que duas funções $F(x)$ e $G(x)$ sejam ortogonais em um intervalo $\{a, b\}$, devemos ter a integral do produto dessas funções, no intervalo $C(a, b)$ igual a zero.

Neste caso, também vale o resultado do Teorema 1.1 isto é, se as funções vetores \vec{F} e \vec{G} são ortogonais no intervalo $C(a, b)$, então:

$$||\vec{F} + \vec{G}||^2 = ||\vec{F}||^2 + ||\vec{G}||^2 \quad (2.18)$$

DEMONSTRAÇÃO: Temos que:

$$\int_a^b \left(F(x) + G(x) \right)^2 dx = \int_a^b \left(F(x) \right)^2 dx + 2 \int_a^b F(x) G(x) dx + \int_a^b \left(G(x) \right)^2 dx$$

de 2.17 se \vec{F} e \vec{G} são ortogonais, temos:

$$\int_a^b F(x) G(x) dx = 0$$

logo:

$$\int_a^b \left(F(x) + G(x) \right)^2 dx = \int_a^b \left(F(x) \right)^2 dx + \int_a^b \left(G(x) \right)^2 dx$$

logo, da equação (2.11), temos:

$$||\vec{F} + \vec{G}||^2 = ||\vec{F}||^2 + ||\vec{G}||^2$$

Exemplificando, sejam as funções $\vec{F} = 1$ e $\vec{G} = \text{sen}x$, definidos no intervalo $C(-\Pi, \Pi)$; notemos que \vec{F} e \vec{G} são ortogonais neste intervalo, pois

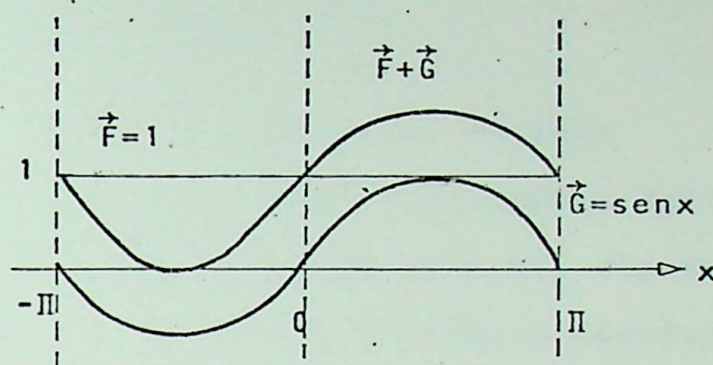


FIG. 2.1 - Representação gráfica de funções ortogonais.

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = \int_{-\Pi}^{\Pi} 1 \cdot \text{sen}x \, dx = - [\cos x]_{-\Pi}^{\Pi} = 0$$

ainda, podemos escrever:

$$\int_{-\Pi}^{\Pi} (1+\text{sen}x)^2 dx = \int_{-\Pi}^{\Pi} 1 \, dx + \int_{-1}^1 \text{sen}x^2 dx +$$

$$+ \int_{-\Pi}^{\Pi} 1 \, \text{sen}x \, dx$$

logo:

$$||1+\text{sen}x||^2 = ||1||^2 + ||\text{sen}x||^2$$

Notemos porém, ao contrário da ilustração facilmente conveniente da Figura (1.5), a da Figura (2.1) tem o aspecto negativo de não transmitir quase ne

nhuma informação, ficando como advertência sobre as limitações de interpretações geométricas, de questões relativas a ortogonalidade de funções.

I.2.5 - CONJUNTO ORTOGONAL E CONJUNTO ORTONORMAL DE FUNÇÕES

Um conjunto de funções vetores $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_i, \dots$, no espaço de funções, definidas no intervalo dos conjuntos de reais $C(a,b)$, diz-se um conjunto ortogonal de funções, se o produto escalar de duas funções quaisquer do conjunto for nulo no intervalo $C(a,b)$ isto é:

$$\vec{F}_m \cdot \vec{F}_n = 0 \quad (2.19) \quad \text{se } m \neq n$$

logo de (2.6) temos:

$$\int_a^b F_m(x) F_n(x) dx = 0 \quad \text{se } m \neq n \quad (2.20)$$

Por outro lado, se o quadrado da norma de cada função for unitário, no intervalo $C(a,b)$ isto é, de (2.11)

$$\vec{F}_m \cdot \vec{F}_m = 1 \quad (2.21)$$

o conjunto se diz ortonormal; logo, de (2.11) ainda temos:

$$\int_a^b \left(F_m(x) \right)^2 dx = 1 \quad (2.22)$$

Por economia de notação, podemos unificar as equações (2.20) e (2.22) escrevendo-as:

$$\vec{F}_m \cdot \vec{F}_n = \int_a^b F_m(x) F_n(x) dx = \delta_{mn} \quad \text{onde: } \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases} \quad (2.23)$$

O símbolo δ_{mn} é o delta de Kronecker.

Notemos também, que podemos obter um conjunto ortonormal de funções, tendo um conjunto ortogonal, bastando para isto, dividir cada função do conjunto pela sua norma, isto é:

$$\frac{\vec{F}}{||\vec{F}||} \quad (2.14)$$

o qual chamamos de função normalizada, e que terá comprimento ou norma unitário.

Destas considerações, surge uma questão: podemos achar um conjunto de funções, o qual serviria como vetores unitários no espaço de funções, como é o caso dos vetores unitários \vec{i}_1, \vec{i}_2 e \vec{i}_3 , definidos em (1.1.6)?

Claramente vemos que, no espaço N-dimensional, a generalização é evidente, e os vetores unitários são:

$$\begin{aligned} \vec{i}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0); \quad \vec{i}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \\ \vec{i}_N &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Tendo em vista as equações (1,4) e (2.25), podemos provar facilmente que qualquer vetor pode ser expresso como uma combinação linear desses vetores u nitários, isto é:

$$\vec{F} = \sum_1^N F_n \vec{i}_n \quad (2.26)$$

ainda pela equação (1.30), podemos provar que qualquer componente do vetor \vec{F}_N pode ser escrito na forma:

$$F_N = \vec{F}_N \cdot \vec{i}_N \quad (2.27)$$

tendo em vista a equação (2.5), podemos escrever no espaço de funções

$$\vec{F}_N = \int F(x) i_n(x) dx \quad (2.28)$$

No espaço de funções, as funções singulares delta de Dirac são diretamente análogas aos vetores unitários da equação (2.25). Tais funções são representadas por:

$$\delta(x - x_0) \quad (2.29)$$

para todos os valores de x_0 e é definida como sendo nula para todos os valores de x , exceto para $x = x_0$, na qual neste ponto, seu valor é tão grande que a área sob a curva é unitária. Há uma função delta em cada ponto x_0 tal que podemos considerar formalmente, um conjunto infinito de tais funções, em todo o espaço de funções. No entanto, tais funções requerem técnicas especiais nos problemas que as envolvem.

Porém, podemos obter funções próprias, que servirão como vetores unitários, no espaço de funções; para tal, basta termos um conjunto de funções ortogonais, em que cada uma delas tenha norma unitária, como referimos em (1.2.5).

Um exemplo particularmente simples de funções unitárias é:

$$\vec{i}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (2.30)$$

onde $(-L \leq x \leq L)$ e n inteiro positivo, podemos mostrar que para estas funções:

$$\int_{-L}^L i_n(x) i_m(x) dx = \delta_{mn} \quad (2.31)$$

onde:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ 1 & \text{para } m = n \end{cases}$$

Tendo em vista a equação (2.26) podemos expressar uma classe de funções ímpares, isto é

$$F(x) = -F(x)$$

pela combinação linear desses vetores;

$$F(x) = \sum_{n=1}^n F_n \vec{i}_n(x) = \sum_{n=1}^n F_n \frac{1}{\sqrt{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (2.32)$$

onde F_n são as componentes de $\vec{F}(x)$ com relação a este conjunto de funções unitárias, onde por analogia a equação (2.27) os coeficientes F_n , são dados por:

$$F_n = \vec{F} \cdot \vec{i}_n = F(x) \vec{i}_n(x) dx = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L F(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2.33)$$

Para acharmos uma classe de funções pares $G(x) = G(-x)$, usamos o seguinte conjunto de funções unitária:

$$\vec{j}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (2.34)$$

onde: $(-L \leq x \leq L)$ e n inteiro positivo, do mesmo modo podemos mostrar, para estas funções que:

$$\int_{-L}^L J_n(x) J_m(x) dx = \delta_{mn} \quad (2.33)$$

onde:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ 1 & \text{para } m = n \end{cases}$$

ainda:

$$\int_{-L}^L i_n(x) J_n(x) dx = 0 \quad (2.35)$$

Podemos escrever as funções consideradas par na forma:

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n J_n(x) \quad (2.36)$$

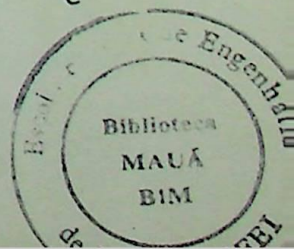
onde G_n são as componentes de $G(x)$ com relação ao conjunto unitário $\vec{J}_n(x)$, logo G_n são dados por:

$$G_n = \vec{G} \cdot \vec{J}_n = \int G(x) J_n(x) dx = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L G(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2.37)$$

Agora, sabendo que uma função qualquer, $f(x)$ pode ser escrita como uma soma de uma função par e uma ímpar na forma:

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} \quad (2.38)$$

então uma função qualquer $f(x)$ pode ser expressa como a soma de duas séries, como as dadas nas equações (2.31) e (2.36), isto é:



$$f(x) = \sum_{n=1}^n F_n \vec{i}_n(x) + \sum_{n=1}^n G_n \vec{j}_n(x) \quad (2.39)$$

onde, novamente em analogia a equação (2.27), temos:

$$F_n = \vec{F}_n \cdot \vec{i}_n = \int f(x) \vec{i}_n(x) dx \quad (2.40)$$

$$G_n = \vec{G}_n \cdot \vec{j}_n = \int f(x) \vec{j}_n(x) dx \quad (2.41)$$

Devido a importância dos conjuntos de funções ortogonais e ortonormais em nossos estudos posteriores, daremos a seguir mais um exemplo sobre tal questão.

Os polinômios de Legendre $P_p(x)$ são dados pelas fórmula de Rodrigues pela expressão:

$$P_p(x) = \frac{1}{2^p p!} \frac{d^p}{dx^p} (x^2 - 1)^p \quad (2.42)$$

mostremos que estes polinômios formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo $(-1, 1)$; em seguida calculemos o conjunto ortonormal correspondente.

DEMONSTRAÇÃO: Devemos mostrar que:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad \text{para } m \neq n \quad (2.43)$$

consideremos o caso $n > m$.

Da equação (2.42) temos:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

pelo método de integração por partes, façamos:

$$u = \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m \Rightarrow du = \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (x^2 - 1)^m dx$$

$$dv = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = dx \Rightarrow v = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n$$

logo:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \left\{ \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \right\}_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (x^2 - 1)^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx$$

Notemos que a primeira parcela entre colchetes do 2º membro se anula no intervalo de integração $(-1, +1)$, pois todas as derivadas contem o termo $x^2 - 1$ logo:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = - \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (x^2 - 1)^m \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx$$

assim procedendo, após n integrações por partes, teremos:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2 - 1)^m \right) (x^2 - 1)^n dx \quad (2.44)$$

para $n > m \Rightarrow m + n > 2m$, logo:

$$\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2 - 1)^m = 0$$

portanto:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad \text{c.q.d.}$$

OBSERVAÇÃO : Resultado análogo teríamos achado se $m > n$, bastando para isto, trocarmos m por n .

Para calcularmos o conjunto ortonormal correspondente, devemos calcular a norma dos $P_p(x)$, temos

$$\|P_m\|^2 = \int_{-1}^1 [P_m(x)]^2 dx \quad (2.45)$$

da expressão (2.44) tomemos: $m = n$, logo:

$$\begin{aligned} \|P_m\|^2 &= \int_{-1}^{+1} [P_m(x)]^2 dx = \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2m} (m!)^2} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^m \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} (x^2 - 1)^m dx \end{aligned}$$

como $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} (x^2 - 1)^m = (2m)!$, temos:

$$\begin{aligned} \|P_m\|^2 &= \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^m dx = \\ &= \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \int_0^1 (x^2 - 1)^m dx \end{aligned}$$

façamos $x = \cos\theta \Rightarrow dx = -\sin\theta d\theta$

para $x = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$x = 1 \Rightarrow \theta = 0$, logo:

$$\|P_m\|^2 = \frac{(-1)^m (2m)! 2}{2^{2m} (m!)^2} \int_{\pi/2}^0 (-\sin^2 \theta)^m (-\sin \theta) d\theta =$$

$$= \frac{2(2m)!}{2^m (m!)^2} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2m+1} d\theta$$

sendo:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2m+1} d\theta = \frac{2^m m!}{1.3.5 \dots (2m+1)}$$

então:

$$\|P_m\|^2 = \frac{2(2m)! 2^m m!}{2^{2m} (m!) 1.3.5 \dots (2m+1)} = \frac{2}{2m+1}$$

portanto:

$$\|P_m\| = \sqrt{\frac{2}{2m+1}}$$

Logo, para obtermos o conjunto ortonormal correspondente aos polinômios de Legendre $P_p(x)$, basta dividirmos cada polinômio do conjunto pela sua respectiva norma, isto é:

$$\frac{P_p(x)}{\|P_p\|}$$

1.2.6 - INDEPENDÊNCIA LINEAR DE CONJUNTO ORTOGONAIS DE FUNÇÕES VETORES

TEOREMA 1.3 - Todo conjunto ortogonal de funções vetores num espaço de funções é linearmente independente, isto é, se $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ é um conjunto de funções ortogonais no espaço de funções, então:

$$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3 + \dots + \alpha_n F_n = 0 \quad (2.45)$$

se, e somente:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0 \quad (2.46)$$

A demonstração deste teorema é feita de modo análogo ao teorema 1.2.

1.2.7 - FUNÇÕES VETORES NO "ESPAÇO DE FUNÇÕES" COMPLEXO

Sejam \vec{F} e \vec{G} duas funções vetores, no "espaço de funções" complexas, definidas no intervalo dos reais $a \leq x \leq b$.

Tendo em vistas a equação (1.33) e as considerações feitas em (1.21) (equação 2.6), podemos generalizar o produto escalar ou produto interno das funções \vec{F} e \vec{G} no espaço de funções complexo, o qual é dado por:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = \int_a^b F(x) G^*(x) dx \quad (2.47)$$

onde $G^*(x)$ é o conjugado complexo de $G(x)$.

Da mesma maneira, tendo em vista a equação (1.35), podemos generalizar a definição de comprimento ou norma de um vetor função \vec{F} no espaço de funções complexo, temos:

$$||\vec{F}|| = \sqrt{\vec{F} \cdot \vec{F}} = \sqrt{\int_a^b F(x) F^*(x) dx} \quad (2.48)$$

Nestes casos, todas as considerações feitas em (1.1.8) devem ser observadas.

De acordo com a equação (1.40) tendo em vista (2.47), dizemos que as funções vetores \vec{F} e \vec{G} , no espaço complexo, são ortogonais se:

$$\int_a^b F(x) G^*(x) dx = 0 \quad (2.49)$$

Ainda podemos dizer que um conjunto de funções vetores $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots$ no espaço complexo de de finidos no intervalo real $a \leq x \leq b$, forma um conjunto or togonal e ortonormal se:

$$\int_a^b F_m(x) F_n(x) dx = \delta_{mn} \quad \text{onde} \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases} \quad (2.50)$$

Do mesmo modo que no espaço real, pode mos obter de um conjunto ortogonal de funções vetores no espaço complexo um conjunto ortonormal, bastando dividir cada função pela sua norma, obtendo com isto um conjunto de funções ditas normalizadas, isto é, de norma unitária.

Um exemplo de um conjunto ortogonal de funções unitárias para o espaço complexo é:

$$\tilde{f}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{\frac{in\pi}{L}x} \quad (2.51)$$

$$-L \leq x \leq L \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

pois temos, de acordo com a equação (2.50):

$$\tilde{f}_m \cdot \tilde{f}_n = \int_{-L}^L f_m(x) f_n^*(x) dx = \delta_{mn}$$

onde:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ 1 & \text{para } m = n \end{cases}$$

senão vejamos:

$$\begin{aligned} \delta_{mn} &= \int_{-L}^L f_m(x) f_n^*(x) dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-\frac{in\pi}{L}x} e^{\frac{im\pi}{L}x} dx = \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{\frac{i\pi}{L}(m-n)x} dx \quad \text{para } m \neq n \quad (2.52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{mn} &= \frac{1}{2L} \cdot \frac{L}{i\pi(m-n)} \left(e^{\frac{i\pi}{L}(m-n)x} \right)_{-L}^L = \\ &= \frac{1}{2i\pi(m-n)} \left(e^{\frac{i\pi}{L}(m-n)L} - e^{-\frac{i\pi}{L}(m-n)L} \right) = \\ &= \frac{1}{2i\pi(m-n)} \left(e^{i\pi(m-n)} - e^{-i\pi(m-n)} \right) = \\ &= \frac{1}{2i\pi(m-n)} \left(\cos\pi(m-n) + i\operatorname{sen}\pi(m-n) - \cos\pi(m-n) + i\operatorname{sen}\pi(m-n) \right) = \\ &= \frac{1}{\pi(m-n)} \operatorname{sen}\pi(m-n); \text{ como } m \neq n \text{ e inteiros, logo:} \end{aligned}$$

$$\delta_{mn} = 0$$

portando o conjunto \vec{e} ortogonal; calculemos a norma do conjunto; da equação (2.52), para $m = n$, temos:

$$\delta_{mm} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx = \frac{1}{2L} \left[x \right]_{-L}^L = \frac{2L}{2L} = 1$$

portanto, o conjunto \vec{e} é ortonormal.

O espaço obtido pela combinação linear destas funções unitárias, dadas pela equação (2.51) é chamado *espaço de Hilbert*.

1.2.8 - ORTOGONALIZAÇÃO DE FUNÇÕES VETORES

Para o caso de um conjunto qualquer de funções vetores $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ no espaço de funções de finidas em um intervalo real $C(a, b)$, podemos também, aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt; para tal, basta fazermos a generalização do processo. Tendo em vista as equações (1.53) e (1.54), e o produto escalar de funções vetores dado na equação (2.6) para ortogonalizarmos o conjunto $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$; procedemos de modo análogo ao visto em (1.1.9) e teremos:

$$\vec{F}_1 = \vec{e}_1 \tag{2.53}$$

$$\vec{e}_n = \vec{F}_n - \alpha_1 \vec{e}_1 - \alpha_2 \vec{e}_2 \dots - \alpha_{n-1} \vec{e}_{n-1} \tag{2.54}$$

calculemos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ de modo que \vec{e}_n seja ortogonal a cada um dos vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$, o que nos levará as equações:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_n \cdot \vec{e}_1 - \alpha_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) = 0 &\Rightarrow \int_a^b F_n(x) e_1(x) dx - \alpha_1 \int_a^b e_1(x) e_1(x) dx = 0 \\
\vec{F}_n \cdot \vec{e}_2 - \alpha_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) = 0 &\Rightarrow \int_a^b F_n(x) e_2(x) dx - \alpha_2 \int_a^b e_2(x) e_2(x) dx = 0 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\vec{F}_n \cdot \vec{e}_{n-1} - \alpha_{n-1} (\vec{e}_{n-1} \cdot \vec{e}_{n-1}) = 0 &\Rightarrow \int_a^b F_n(x) e_{n-1}(x) dx - \alpha_{n-1} \int_a^b e_{n-1}(x) e_{n-1}(x) dx
\end{aligned}
\tag{2.55}$$

Das equações (2.55) temos:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\int_a^b F_n(x) e_1(x) dx}{\int_a^b (e_1(x))^2 dx} ; \alpha_2 = \frac{\int_a^b F_n(x) e_2(x) dx}{\int_a^b (e_2(x))^2 dx} , \dots , \\
&\dots , \alpha_{n-1} = \frac{\int_a^b F_n(x) e_{n-1}(x) dx}{\int_a^b (e_{n-1}(x))^2 dx}
\end{aligned}
\tag{2.56}$$

que levados em (2.54) nos dará \vec{e}_n .

Vejamos alguns exemplos:

EXEMPLO 1 - Seja o conjunto infinito de funções vetores $\vec{F}_0 = 1, \vec{F}_1 = x, \vec{F}_2 = x^2, \vec{F}_3 = x^3, \dots$, ortogonalizemos este conjunto no intervalo de $C(-1,1)$. Consideremos:

$$\vec{e}_0 = \vec{F}_0 = 1$$



das equações (2.54) e (2.56), fazendo passo a passo
remos: cálculo de \vec{e}_1 .

$$\vec{e}_1 = \vec{F}_1 - \alpha_0 \vec{e}_0 \Rightarrow \vec{e}_1 = x - \alpha_0$$

$$\alpha_0 = \frac{\int_{-1}^1 F_1 e_0 dx}{\int_{-1}^1 e_0^2 dx} = \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 dx} = \frac{\left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^1}{\left. x \right|_{-1}^1} = 0$$

logo:

$$\boxed{\vec{e}_1 = x}$$

- Cálculo de \vec{e}_2 :

$$\vec{e}_2 = \vec{F}_2 - \alpha_1 \vec{e}_1 - \alpha_2 \vec{e}_0 \Rightarrow e_2 = x^2 - \alpha_1 - \alpha_2 x, \text{ temos:}$$

$$\alpha_1 = \frac{\int_{-1}^1 F_2 e_0 dx}{\int_{-1}^1 (e_0)^2 dx} = \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 dx} = \frac{\left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1}{\left. x \right|_{-1}^1} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha_2 = \frac{\int_{-1}^1 F_2 e_1 dx}{\int_{-1}^1 e_1^2 dx} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \frac{\left. \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^1}{\left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1} = 0$$

logo:

$$\boxed{\vec{e}_2 = x^2 - \frac{1}{3}}$$

- Cálculo de \vec{e}_3 :

$$\vec{e}_3 = \vec{F}_3 - \alpha_1 \vec{e}_0 - \alpha_2 \vec{e}_1 - \alpha_3 \vec{e}_2 = \vec{e}_3 = x^3 - \alpha_1 - \alpha_2 x - \alpha_3 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

temos:

$$\alpha_1 = \frac{\int_{-1}^1 F_3 e_0 dx}{\int_{-1}^1 e_0^2 dx} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{\int_{-1}^1 F_3 e_1 dx}{\int_{-1}^1 e_1^2 dx} = \frac{\int_{-1}^1 x^4 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\alpha_3 = \frac{\int_{-1}^1 F_3 e_2 dx}{\int_{-1}^1 e_2^2 dx} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx}{\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} = 0$$

logo:

$$\vec{e}_3 = x^3 - \frac{3}{5} x$$

Assim sucessivamente, teremos o conjunto ortogonal correspondente ao conjunto dado no intervalo $C(-1, +1)$:

$$\vec{e}_0 = 1; \vec{e}_1 = x; \vec{e}_2 = x^2 - \frac{1}{3}; \vec{e}_3 = x^3 - \frac{3}{5} x \quad (2.57)$$

Podemos mostrar que, se multiplicarmos cada função vetor do conjunto (2.57) por um número adequado, de modo que o valor numérico de cada um for igual a 1 para $x = 1$, teremos os polinômios de Legendre dados pela equação (2.42), que nos casos particulares são:

$$\vec{P}_0=1; \vec{P}_1=x; \vec{P}_2=\frac{1}{2}(3x^2-1); \vec{P}_3=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\dots \quad (2.58)$$

que como já demonstramos pela equação (2.43), formam um conjunto ortogonal. De um modo geral podemos mostrar que:

$$\vec{P}_p(x) = \frac{(2p)!}{2^p (p!)^2} \vec{e}_p(x) \quad (2.59)$$

EXEMPLO 2 - Ortogonalizemos o conjunto infinito de funções vetores:

$$\vec{T}_0=1; \vec{T}_1=x; \vec{T}_2=2x^2-1; \vec{T}_3=4x^3-3x\dots \quad (2.60)$$

no intervalo $(-1,+1)$; a expressão geral desses conjunto é dada por:

$$\vec{T}_n = \cos(n \arccos x) \quad (2.61)$$

os quais são chamados polinômios de Tschebyscheff.

$$\text{Consideremos } \vec{e}_0 = \vec{T}_0 = 1$$

- Cálculo de \vec{e}_1 , temos:

$$\vec{e}_1 = \vec{T}_1 - \alpha_0 \vec{e}_0 = \vec{e}_1 = x - \alpha_0$$

$$\alpha_0 = \frac{\int_{-1}^{+1} x \, dx}{\int_{-1}^{+1} 1 \, dx} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{e}_1 = x}$$

- Cálculo de \vec{e}_2 , temos:

$$\vec{e}_2 = \vec{T}_2 - \alpha_1 \vec{e}_0 - \alpha_2 \vec{e}_1 \Rightarrow \vec{e}_2 = 2x^2 - 1 - \alpha_1 - \alpha_2 x$$

$$\alpha_1 = \frac{\int_{-1}^{+1} (2x^2 - 1) \, dx}{\int_{-1}^{+1} dx} = -\frac{1}{3}$$

$$\alpha_2 = \frac{\int_{-1}^1 (2x^2 - 1)x dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = 0$$

logo:

$$\vec{e}_2 = 2x^2 - \frac{2}{3}$$

- Cálculo de \vec{e}_3 -

$$\vec{e}_3 = \vec{T}_3 - \alpha_1 \vec{e}_0 - \alpha_2 \vec{e}_1 - \alpha_3 \vec{e}_2 = \vec{e}_3 = 4x^3 - 3x - \alpha_1 - \alpha_2 x - \alpha_3 \left(2x^2 - \frac{2}{3}\right)$$

$$\alpha_1 = \frac{\int_{-1}^1 (4x^3 - 3x) dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{\int_{-1}^1 (4x^3 - 3x)x dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = -\frac{3}{5}$$

$$\alpha_3 = \frac{\int_{-1}^1 (4x^3 - 3x) \left(2x^2 - \frac{2}{3}\right) dx}{\int_{-1}^1 \left(2x^2 - \frac{2}{3}\right) dx} = 0$$

logo:

$$\vec{e}_3 = 4x^3 - 3x + \frac{3}{5}x$$

$$\Rightarrow \vec{e}_3 = 4x^3 - \frac{12}{5}x$$

Assim sucessivamente, teremos o con
 junto ortogonal correspondente ao conjunto dado no inter
 valo $(-1,+1)$.

$$\vec{e}_0=1; \vec{e}_1=x; \vec{e}_2=2x^2-\frac{2}{3}; \vec{e}_3=4x^3-\frac{12}{5}x \dots$$

Deste exemplo, podemos citar uma observa
 ção importante:

Devido a presença dos polinômios de
 Tschbyscheff em problemas de contorno, os quais estudare-
 mos nos capítulos seguintes, veremos que a ortogonalização
 desses polinômios é feita em relação a uma função peso, o
 que irá facilitar futuros cálculos nos problemas de con
 torno.

Devido a isto, e a um outro fator que
 citaremos a seguir, introduziremos uma nova definição de
 produto escalar ou produto interno de duas funções ve
 tores $F(x)$ e $G(x)$, relativas a uma função peso $p(x)$.

Uma outra razão para introduzirmos uma
 nova definição para o produto escalar é a seguinte :

Até agora consideramos as funções veto
 res $F(x)$ e $G(x)$ definidas em um intervalo finito $C(a,b)$ pa
 ra considerarmos o estudo, para funções contínuas por
 partes em toda reta $(-\infty,+\infty)$, a situação se torna diferen-
 te requerendo consideração especial para o produto esca
 lar ou interno. Pois, para duas funções vetores \vec{F} e \vec{G} , o
 produto escalar no intervalo $(-\infty,+\infty)$ é uma integral im
 propria, isto é:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)G(x)dx = \lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ b \rightarrow -\infty}} \int_a^b F(x)G(x)dx \quad (2.61)$$

Nada nos garante que esta integral seja convergente, e é indefinida nos casos em que \vec{F} e \vec{G} sejam polinômios. Portanto, a definição comum vista, até agora, para produto escalar, não é válida neste caso.

Devido ao que ficou dito, daremos a seguir uma nova definição para o produto escalar ou interno de funções, de modo a podermos enquadrar os casos citados no estudo de ortogonalização.

1.2.9 - PRODUTO ESCALAR OU INTERNO RELATIVO A UMA FUNÇÃO PESO

Sejam \vec{F} e \vec{G} duas funções vetores no espaço de funções, e consideremos \vec{p} uma função não negativa, definidas em $C(a,b)$; então definimos o produto escalar ou interno de \vec{F} e \vec{G} em relação a \vec{p} , no intervalo $C(a,b)$ pela expressão:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = \int_b^a p(x) F(x) G(x) dx \quad (2.61)$$

A função \vec{p} é chamada função peso do produto e notemos que, quando $\vec{p} = 1$ a equação (2.61) se reduz ao produto escalar definido pela equação (2.5).

Observemos ainda que a expressão (2.61) satisfaz as propriedades do produto escalar, isto é:

$$I) \quad \vec{F} \cdot \vec{G} = \vec{G} \cdot \vec{F}, \quad \text{pois}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = \int_a^b p(x) F(x) G(x) dx = \int_a^b p(x) G(x) F(x) dx = \vec{G} \cdot \vec{F} \quad (2.62)$$

$$II) \quad (\alpha \vec{F}) \cdot \vec{G} = \alpha (\vec{F} \cdot \vec{G}), \quad \text{pois}$$

$$\begin{aligned} (\alpha \vec{F}) \cdot \vec{G} &= \int_a^b p(x) \alpha F(x) G(x) dx = \\ &= \alpha \int_a^b p(x) F(x) G(x) dx = \alpha (\vec{F} \cdot \vec{G}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

α qualquer real.

$$III) \quad (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \vec{G} = \vec{F}_1 \cdot \vec{G} + \vec{F}_2 \cdot \vec{G}, \quad \text{pois}$$

$$\begin{aligned} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \vec{G} &= \int_a^b p(x) \left[F_1(x) + F_2(x) \right] G(x) dx = \\ &= \int_a^b p(x) F_1(x) G(x) dx + \int_a^b p(x) F_2(x) G(x) dx = \\ &= \vec{F}_1 \cdot \vec{G} + \vec{F}_2 \cdot \vec{G} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Portanto, (2.62) pode ser considerado como produto escalar ou interno.

I.2.10 - COMPRIMENTO OU NORMA DE UMA FUNÇÃO EM RE
LAÇÃO A UMA FUNÇÃO PESO

Definimos comprimento ou norma de uma função vetor \vec{F} , em relação a uma função peso \vec{p} , no intervalo $C(a,b)$, que indicamos por $||\vec{F}||$, a expressão:

$$||\vec{F}|| = \vec{F} \cdot \vec{F} = \sqrt{\int_a^b p(x) [F(x)]^2 dx} \quad (2.65)$$

onde $\vec{F} \cdot \vec{F} > 0$.

I.2.11 - ORTOGONALIDADE DE FUNÇÕES RELATIVAS A UMA
FUNÇÃO PESO

Duas funções vetores, \vec{F} e \vec{G} , no espaço de funções definidas no intervalo $C(a,b)$, se dizem ortogonais ou perpendiculares, relativamente a uma função peso \vec{p} , se o produto escalar ou interno de \vec{F} e \vec{G} em relação a \vec{p} , for nulo no intervalo $C(a,b)$, isto é:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = \int_a^b p(x) F(x) G(x) dx = 0 \quad (2.66)$$

I.2.12 - CONJUNTO ORTOGONAL E ORTONORMAL DE FUNÇÕES
RELATIVO A UMA FUNÇÃO PESO.

Um conjunto de funções vetores $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_i, \dots$, no espaço de funções definidas em $C(a,b)$, diz-se um conjunto ortogonal de funções, relativas a uma função peso \vec{p} , se o produto escalar ou interno de

duas funções quaisquer do conjunto em relação a \vec{p} , no intervalo $C(a,b)$ for nulo, isto é:

$$\vec{F}_m \cdot \vec{F}_n = 0 \quad (2.62)$$

se $m \neq n$, logo de (2.61) temos

$$\int_a^b p(x) F_m(x) F_n(x) dx = 0 \quad (2.68)$$

se $m \neq n$.

O referido conjunto se diz ortonormal com relação a \vec{p} , no intervalo $C(a,b)$, se a norma de cada função em relação a p for unitária, isto é, se:

$$\vec{F}_m \cdot \vec{F}_m = 1 \quad (2.69)$$

logo, da equação (2.65) temos:

$$\int_a^b p(x) \left[F_m(x) \right]^2 dx = 1 \quad (2.70)$$

Podemos unificar as equações (2.68) e (2.70) usando o símbolo de Kronecker, temos:

$$\vec{F}_m \cdot \vec{F}_n = \int_a^b p(x) F_m(x) F_n(x) dx = \delta_{mn} \quad \text{onde:}$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases} \quad (2.71)$$

Podemos também, obter um conjunto ortonormal de um conjunto ortogonal de funções relativo a uma função peso, bastando dividir cada função pelo quadrado da norma.

Ainda podemos mostrar que, um conjunto de funções ortogonais, relativo a uma função peso \underline{p} é linearmente independente.

Resta-nos ainda fazermos referências para o caso em que o intervalo $C(a,b)$ for infinito, isto é, $(-\infty, +\infty)$.

Pois, de acordo com a equação (2.61), o produto escalar ou interno de duas funções vetores \vec{F} e \vec{G} relativo a função peso \vec{p} , no intervalo $(-\infty, +\infty)$, fica:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{G} &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) F(x) G(x) dx = \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b p(x) F(x) G(x) dx \end{aligned} \quad (2.72)$$

o qual é uma integral imprópria. Sua convergência porém, pode ser a obtida mediante uma escolha adequada da função peso $p(x)$.

Portanto, a função peso $p(x)$ deve ser uma função contínua por partes, em todo o intervalo $(-\infty, +\infty)$, de modo que tenda a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$.

No caso por exemplo, de $F(x)$ e $G(x)$ se rem polinômios, uma função peso conveniente de modo que (2.72) convirja é $p(x) = e^{-x^2/2}$, pois esta função tem a propriedade de ser definida em toda reta inteira, e ainda tender a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$.

Em nossos estudos posteriores, teremos

ocasião de encontrar produto escalar ou interno na forma:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} F(x) G(x) dx \quad (2.73)$$

nosso problema, neste caso, será verificar se estas integrais são convergentes.

Caso análogo acontece quando necessitamos do produto escalar ou interno de duas funções vetores \vec{F} e \vec{G} relativas a uma função peso \vec{p} , no intervalo semi-infinito $(0, \infty)$. Para tal, a função peso, em geral, conveniente é: $P(x) = e^{-x}$, e teremos:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = \int_0^{\infty} e^{-x} F(x) G(x) dx \quad (2.74)$$

desde que a integral seja convergente.

Veremos em estudos posteriores como, em certos casos, determinar a função peso, para conjunto de funções.

Resta-nos ainda informar, que, dado um conjunto qualquer de funções vetores $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, podemos igualmente ortogonalizá-lo, em relação a uma função peso \vec{p} , usando o processo de ortogonalização de Gram - Schmidt vista em (1.2.8).

Devido a importância do conjunto de funções ortogonais e ortonormais, relativas a uma função peso nos problemas de contorno, veremos a seguir alguns exemplos que nos serão úteis.

EXEMPLO 1 - Mostremos que o conjunto de funções:

$$T_n = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

chamados polinômios Tshchyscheff, cujos casos particulares vimos no exemplo 2 em (1.28), formam um conjunto de funções ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ em relação a função peso $\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, em seguida calculemos o conjunto or

tonormal correspondente. Devemos mostrar que:

$$T_m \cdot T_n = \delta_{mn} = \int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad (2.75)$$

se $m \neq n$.

$$\delta_{mn} = \int_{-1}^{+1} \frac{\cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

façamos:

$$x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t dt$$

$$t = \arccos x \begin{cases} \text{para } x = -1 \Rightarrow t = \Pi \\ \text{para } x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

logo:

$$\begin{aligned} \delta_{mn} &= - \int_{\Pi}^0 \frac{\cos mt \cos nt}{\sqrt{1-\cos^2 t}} \cdot \sin t dt = \\ &= \int_0^{\Pi} \cos mt \cos nt dt \end{aligned} \quad (2.76)$$

para $m \neq n$.

$$\begin{aligned}\delta_{mn} &= \frac{1}{2} \int_0^{\Pi} \left(\cos(m-n)t + \cos(m+n)t \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m-n)t}{m-n} + \frac{\sin(m+n)t}{m+n} \right) \Big|_0^{\Pi} = 0\end{aligned}$$

logo:

$$\delta_{mn} = 0 \quad \text{para } m \neq n$$

Para calcularmos o conjunto ortonormal correspondentes de \vec{T}_n , devemos calcular a norma $||\vec{T}_m||^2$, da equação (2.76); para $m = n$, temos:

$$\delta_{mm} = \int_0^{\Pi} \cos^2 mt \, dt \quad (2.77)$$

$$\text{para } m = 0 \Rightarrow \delta_{00} = \int_0^{\Pi} dt = t \Big|_0^{\Pi} = \Pi$$

$$\text{para } m = 1, 2, \dots \quad \delta_{mm} = \frac{1}{2} \int_0^{\Pi} (1 + \cos 2mt) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2mt}{2m} \right) \Big|_0^{\Pi} = \frac{\Pi}{2}$$

$$\text{logo: } \delta_{mn} = \begin{cases} \Pi & \text{se } m = 0 \\ \Pi/2 & \text{se } m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\text{logo: } ||\vec{T}_m||^2 = \begin{cases} \Pi & \text{se } m = 0 \\ \Pi/2 & \text{se } m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

portanto, o conjunto ortonormal correspondente de $\vec{T}_n(x)$, nos casos particulares, \vec{e} :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{x}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \frac{2x^2-1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \dots, \quad (2.78)$$

O polinômio de Tschbyscheff é uma solução da equação linear de 2ª ordem.

$$(1-x^2)y'' - 2y' + n^2 y = 0 \quad (2.79)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, conhecida como a equação de Tschbyscheff, de ordem n .

EXEMPLO 2 - Mostremos que os polinômios de Hermite, da dos pela fórmula de Rodrigues

$$\vec{H}_n(x) = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \quad (2.80)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, que nos casos particulares são:

$$\vec{H}_0 = 1, \vec{H}_1 = x, \vec{H}_2 = x^2 - 1, \vec{H}_3 = x^3 - 3x, \dots,$$

são ortogonais em relação a função peso $\vec{p} = e^{-\frac{x^2}{2}}$, no intervalo $(-\infty, +\infty)$, em seguida, calculemos o conjunto ortônornal correspondente.

Devemos mostrar que:

$$\vec{H}_m \cdot \vec{H}_n = \delta_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad (2.81) \quad \text{se } m \neq n$$

consideremos $m < n$, de (2.80) temos:

$$\begin{aligned} \delta_{mn} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx = \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \end{aligned}$$

integrando por partes, temos:

$$u = H_m(x) \Rightarrow du = H'_m(x) dx$$

$$dv = \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \Rightarrow v = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

logo:

$$\begin{aligned} \delta_{mn} &= (-1)^n \left[H_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H'_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \end{aligned}$$

Notemos que a primeira parcela entre colchetes do 2º membro é o produto de um polinômio por $e^{-\frac{x^2}{2}}$, o qual se anula para $x \rightarrow \pm\infty$, logo:

$$\delta_{mn} = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H'_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx$$

integrando por partes m vezes, temos:

$$\delta_{mn} = (-1)^{n+m} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^m(x) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \quad (2.81)$$

podemos verificar que:

$$H_m^m(x) = m!$$

$$\Rightarrow \delta_{mn} = (-1)^{n+m} m! \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \quad (2.82)$$

logo:

$$\delta_{mn} = (-1)^{n+m} m! \left[\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad \text{se } m < n$$

se considerarmos $m > n$, a demonstração é análoga, bastando trocar m por n .

Cálculo da norma dos polinômios de Hermite $||H_m||^2$; da equação (2.82) para $m = n$, temos:

$$\delta_{mm} = ||H_m||^2 = (-1)^{2m} m! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

temos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \quad (\text{integral de Poisson})$$

logo:

$$\delta_{mm} = ||H_m||^2 = m! \sqrt{2\pi} \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

logo, o conjunto ortonormal correspondente será:

$$\frac{H_m(x)}{||H_m||} = \frac{H_m(x)}{\sqrt{m! \sqrt{2\pi}}} \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.83)$$

O polinômio de Hermite é uma solução de equação diferencial linear de 2.^a ordem

$$y'' - xy' + ny = 0 \quad (2.84)$$



para $m = 0, 1, 2, \dots$, conhecida como equação de Hermite de ordem n .

EXEMPLO 3 - Mostremos que os polinômios de Leguerre, da
dos pela fórmula de Rodrigues:

$$\vec{L}_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (2.85)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$, que, nos casos particulares são:

$$\vec{L}_0 = 1, \vec{L}_1 = -x + 1; \vec{L}_2 = x^2 - 4x + 2, \dots$$

são ortogonais em relação a função peso $\vec{p} = e^{-x}$ no in
tervalo semi-infinito $(0, \infty)$, em seguida calculemos o con
junto ortonormal, correspondente.

Devemos mostrar que:

$$\vec{L}_m \cdot \vec{L}_n = \delta_{mn} = \int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = 0 \quad (2.86) \quad \text{se } m \neq n$$

Consideremos $n > m$, de (2.85) temos:

$$\delta_{mn} = \int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx = \int_0^{\infty} L_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx$$

integrando por partes, temos:

$$u = L_m(x) \Rightarrow du = L'_m(x) dx$$

$$dv = \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx \Rightarrow v = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x})$$

$$\delta_{mn} = L_m(x) \cdot \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) \right]_0^\infty - \int_0^\infty L'_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) dx$$

vemos que a 1.^a parcela, entre colchetes, do 2.^o membro é nula, logo:

$$\delta_{mn} = - \int_0^\infty L'_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) dx$$

integrando por partes m vezes, temos

$$\delta_{mn} = (-1)^m \int_0^\infty L_m^m(x) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^n e^{-x}) dx$$

como:

$$L_m^m(x) = (-1)^m (m!), \quad \text{temos:}$$

$$\delta_{mn} = (-1)^{2m} m! \int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^n e^{-x}) dx \quad (2.87)$$

logo:

$$\delta_{mn} = m! \left[\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (x^n e^{-x}) \right]_0^\infty = 0 \quad m \neq n$$

para $m > n$ a demonstração é análoga, bastando trocarmos m por n .

Cálculo da norma dos polinômios de Laguerre $\|L_m\|^2$, da equação (2.87) para $m = n$, temos:

$$\delta_{mm} = ||L_m||^2 = m! \int_0^{\infty} x^m e^{-x} dx$$

sabendo que a função gama é definida por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \Rightarrow \quad (2.88)$$

$$\Rightarrow \Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} dx = \alpha! \quad (2.89)$$

logo:

$$\delta_{mm} = ||\vec{L}_m||^2 = m! \Gamma(m+1) = m! m! = (m!)^2$$

portanto, a norma dos polinômios de Laguerre é $||\vec{L}_m|| = \sqrt{(m!)^2}$ e o conjunto ortonormal correspondentes aos polinômios de Laguerre, é:

$$\frac{L_n(x)}{||\vec{L}_m||} = \frac{L_m(x)}{\sqrt{(m!)^2}} \quad (2.90)$$

CAPÍTULO II

II.3- SÉRIES DE FUNÇÕES ORTOGONAIS. PROBLEMAS DE
CONTORNO

II.3.0 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudaremos várias séries importantes, tendo por base o estudo e considerações feitas no Capítulo I, sobre conjunto de funções ortogonais e ortonormais. Inicialmente, mostraremos como podemos desenvolver uma função qualquer em série de funções ortogonais; a seguir veremos alguns problemas de contorno importantes, os quais são intimamente relacionados a conjuntos de funções ortogonais.

II.3.1 - DESENVOLVIMENTO DE UMA FUNÇÃO QUALQUER EM SÉ
RIE DE FUNÇÕES ORTOGONAIS

Consideremos no espaço de funções, que um conjunto infinito de funções vetores $\vec{g}_0, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots$ (3.1) seja ortogonal em um intervalo $C(a, b)$, em relação a uma função peso \vec{p} .

Seja agora uma função qualquer $f(x)$, definida no intervalo $C(a, b)$; vimos que o conjunto $\vec{g}_0, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots$, sendo ortogonal, de é linearmente independente; devido a isto, consideremos $f(x)$ como sendo uma combinação linear com infinitos termos das funções vetores do conjunto ortogonal dado, isto é:

$$f(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m(x) \quad (3.2)$$

Consideremos que tal desenvolvimento e xista. Nosso problema será o de determinar as constantes c_0, c_1, c_2, \dots , chamadas constantes de Euler; para tal, procedemos da seguinte maneira.

Multipliquemos ambos os membros de (3.2) por $p(x) \cdot g_n(x)$, onde g_n é a n -ésima função do conjunto (3.1) temos:

$$p(x) f(x) g_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m p(x) g_n(x) g_m(x)$$

integrando ambos os membros desta expressão no intervalo $C(a, b)$ onde, o conjunto dado (3.1) é ortogonal, temos:

$$\int_a^b p(x) f(x) g_n(x) dx = \int_a^b \sum_{m=0}^{\infty} c_m p(x) g_n(x) g_m(x) dx \quad (3.3)$$

considerando que a série (3.2) seja uniformemente convergente em $C(a, b)$, podemos escrever formalmente

$$\int_a^b p(x) f(x) g_n(x) dx = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \int_a^b p(x) g_n(x) g_m(x) dx \quad (3.4)$$

tendo em vista a expressão (2.68), temos:

$$\int_a^b p(x) g_n(x) g_m(x) dx = 0 \quad \text{se } m \neq n$$

portanto, para $m \neq n$ todos os termos da soma do 2º membro são nulos, porém para $n = m$ a equação (3.4) fica:

$$\int_a^b p(x) f(x) g_m(x) dx = c_m \int_a^b p(x) \left(g_m(x) \right)^2 dx$$

de acordo com a equação (2.69) temos:

$$\int_a^b p(x) \left(g_m(x) \right)^2 dx = ||g_m||^2 \quad (3.5)$$

logo:

$$\int_a^b p(x) f(x) g_m(x) dx = c_m ||g_m||^2 \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

logo:

$$c_m = \frac{1}{||g_m||^2} \int_a^b p(x) f(x) g_m(x) dx \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

portanto a equação (3.6) nos permite determinar todas as constantes que figuram na série (3.2). Com estes valores das constantes, temos determinado formalmente a série $\sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m(x)$. Alertamos aqui, o fato de não termos demonstrado que tal série represente efetivamente a função $f(x)$ no intervalo $C(a,b)$, pois não demonstramos a convergência da série no intervalo $C(a,b)$ e por conseguinte, que represente uma função.

Tal questão em sua forma geral, nos apresenta bastante complexa e trabalhosa, razão pela qual não abordaremos neste estudo, tendo em vista, os casos particulares que iremos estudar.

Porém, cabe ainda observarmos que, se a função $f(x)$ fosse ortogonal, com todas as funções do

conjunto dado (3.1), no intervalo $C(a,b)$, com relação a função peso $p(x)$, todos os coeficientes C_m do desenvolvimento em (3.2) seriam nulos; portanto não teríamos tal desenvolvimento; porém, felizmente, nos casos que interessam a física não encontramos tal situação.

EXEMPLO 1 - Em (1.2.5) vimos que o conjunto de funções ,

$$G_n = \text{sen} \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{ é um conjunto}$$

ortogonal no intervalo $(-L,L)$, em relação a função peso $\vec{p} = 1$. A representação formal de uma função $f(x)=x$, mediante uma série do conjunto ortogonal dado, pode ser obtida de acordo com o que estudamos, isto é, Considere - mos da equação (3.2):

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n G_n(x) \quad (3.7)$$

os coeficientes C_n são determinados de acordo com a equação (3.6), temos:

$$C_n = \frac{1}{\|\vec{G}_n\|^2} \int_{-L}^L f(x) G_n(x) dx \quad (3.8)$$

de (3.5):

$$\begin{aligned} \|\vec{G}_n\|^2 &= \int_{-L}^L \text{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L (1 - \cos \frac{2n\pi x}{L}) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{L}{2n\pi} \text{sen} \frac{2n\pi}{L} x \right) \Big|_{-L}^L = \frac{1}{2} (L+L) = L \end{aligned}$$

temos que:

$$\int_{-L}^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \left[-\frac{Lx}{n\pi} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right]_{-L}^L =$$

$$= \frac{L^2}{2\pi} \cos \pi - \frac{L^2}{2\pi} \cos n\pi = -\frac{2L^2}{n\pi} \cos n\pi =$$

$$= -\frac{2L^2}{n\pi} (-1)^n = \frac{2L^2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

logo em (3.8), temos:

$$c_n = \frac{1}{L} \cdot \frac{2L^2}{n\pi} (-1)^{n+1} = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

em (3.7), temos a representação formal de $f(x) = x$ em
tão:

$$f(x) = x = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} =$$

$$= \frac{2L}{\pi} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} + \dots \right) \quad (3.9)$$

para termos certeza, não somente formal desta representação, devemos verificar a convergência de (3.9), no intervalo $(-L, L)$, porém podemos notar que para $x = L$ e $x = -L$, (3.9) não representa a função $f(x) = x$; portanto, nosso problema se torna no estudo de convergência de (3.9), para valores de x no intervalo $(-L, L)$.

Observamos ainda, a grande generalidade que oferece o estudo do desenvolvimento de uma função em série de funções ortogonais. Basta notarmos que, por exemplo, o desenvolvimento em série de Taylor ou Mac-Laurin,

de uma função $f(x)$ é muito restrito, pois, como sabemos, para que haja tais desenvolvimentos, devemos ter $f(x)$ e suas derivadas contínuas em todo intervalo, o que não sucede para o caso em que $f(x)$ seja seccionalmente contínua. Ao contrário, como veremos para o desenvolvimento de uma função $f(x)$, em série de funções ortogonais, tal dificuldade é evitada mesmo que a função $f(x)$ possua um número finito de descontinuidades finitas, o que é assegurada tendo em vista as condições de Dirichlet.

Ainda salientamos que o desenvolvimento de uma função qualquer $f(x)$ em série de funções ortogonais, é de grande utilidade na resolução de problemas de contorno.

EXEMPLO 2 - Vimos em (1.2.7) que o conjunto de funções vetores, no espaço de funções complexo

$$\vec{G}_n = e^{\frac{in\pi x}{L}} \quad (3.10)$$

são ortogonais no intervalo $(-L, +L)$, relativo a função peso $\vec{p}=1$; mostremos que para este conjunto, podemos, pelo menos formalmente, desenvolver uma função qualquer $f(x)$ em uma série da forma:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n G_n(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \quad (3.11)$$

calculemos os coeficientes C_n ; com base em (3.1) e de acordo com (1.2.7), multipliquemos ambos os membros de (3.11) por $p(x) G_m^*(x) = 1 \cdot G_m^*(x)$, onde G_m^* é o conjugado complexo de $G_m(x)$, temos:

$$f(x) G_m^*(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n G_n(x) G_m^*(x)$$

integrando ambos os membros no intervalo $(-L, +L)$ temos:

$$\int_{-L}^L f(x) G_m^*(x) dx = \int_{-L}^{+L} \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n G_n(x) G_m^*(x) dx =$$

considerando que a sêrie seja uniformemente convergente em $C(-L, +L)$, podemos escrever formalmente:

$$\int_{-L}^L f(x) G_m^*(x) dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \int_{-L}^L G_n(x) G_m^*(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{im\pi}{L}x} dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \int_{-L}^L e^{-\frac{in\pi}{L}x} e^{-\frac{im\pi}{L}x} dx \quad (3.12)$$

do exemplo de (1.2.7) vimos que para $m \neq n$

$$\int_{-L}^L e^{\frac{in\pi}{L}x} \cdot e^{\frac{im\pi}{L}x} dx = 0$$

portanto, todos os termos do 2º membro de (3.12) são nu los para $m \neq n$. Para $m = n$, de (3.12) temos:

$$\int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi}{L}x} dx = C_n \int_{-L}^L e^{\frac{in\pi}{L}x} e^{-\frac{in\pi}{L}x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi}{L}x} dx = C_n \int_{-L}^L dx = 2L \cdot C_n$$

logo:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi}{L}x} dx \quad (3.13)$$

portanto, obtemos formalmente os coeficientes c_n da série (3.11) do desenvolvimento de uma função qualquer em termos de um conjunto ortogonal de função no espaço complexo. Resta-nos naturalmente, a verificação da convergência de (3.11), com os coeficientes dados em (3.13) para termos a garantia do desenvolvimento de $f(x)$.

11.4 - PROBLEMAS DE CONTORNO

11.4.1 - INTRODUÇÃO

Em muitos problemas de física, vemos a necessidade de acharmos uma solução particular de uma equação diferencial ordinária, que satisfaça determinadas condições dadas para dois ou mais valores da variável independente. Tais questões são chamados *Problemas de Con*torno, diferenciando dos chamados *Problemas de Condições Iniciais*, nos quais todas as condições são dadas em relação a um só valor da variável independente.

A aplicação mais importante do estudo feito no Capítulo anterior ocorre no estudo de problemas de contorno, relativos a equações diferenciais lineares; tal problema consiste em: dada uma equação diferencial linear, acharmos soluções destas, que satisfaçam determinadas condições dadas por exemplo, seja a equação diferencial li

near de 2.^a ordem:

$$r(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad (4.1)$$

sendo $r(x)$, $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$ contínuas em um intervalo $C(a,b)$ e $r(x) \neq 0$ para que a equação (4.1) seja normal.

Consideremos as condições:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = \gamma_1 \quad (4.2)$$

$$\beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = \gamma_2$$

onde α_1 e β_1 são constantes.

Nosso problema será determinar todas as soluções de (4.1) que satisfaçam as condições (4.2).

As condições dadas em (4.2) são ditas condições de contorno não homogêneas; notemos também que a equação diferencial (4.1) é também não homogênea. No caso particular em que $\gamma_1 = 0$ e $\gamma_2 = 0$ as condições (4.2) são ditas condições de contorno homogêneas.

De modo a excluir certos casos triviais, devemos impor como condição que, pelo menos, um dos α_i e um dos β_i , de (4.2) seja diferente de zero, e que o 1.^o membro dessas equações seja linearmente independente. E ainda, de modo a termos certeza de se tratar de um problema de contorno e não um de condição inicial, devemos impor a condição que em (4.2) tenhamos termos não nulos que envolvam valores diferentes da variável independente.

Tendo em vista estudos feitos em equações diferenciais, podemos reduzir o estudo de problemas de contorno com condições de contorno não homogêneas ao caso homogêneo. Devido a isto, admitiremos em nosso estudo condições de contorno homogêneas.

Consideremos ainda, a título de ilustração, um outro problema de contorno mais simples; seja a equação diferencial linear homogênea de 2.^a ordem:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \quad (4.3)$$

e sejam as condições homogêneas:

$$y(a) = 0 \quad (4.4)$$

$$y(b) = 0$$

Sendo a equação (4.3) linear e homogênea, sua solução geral é da forma:

$$J = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (4.5)$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes e C_1 e C_2 constantes arbitrárias. Nosso problema será calcular C_1 e C_2 de modo que (4.5) satisfaça as condições (4.4), temos de (4.4), que:

$$C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) = 0 \quad (4.6)$$

$$C_1 y_1(b) + C_2 y_2(b) = 0$$

Vemos que uma solução de (4.6) é $C_1 = C_2 = 0$ que nos leva a solução $y = 0$, a qual é chamada so

lução trivial. Para que existam soluções diferentes da trivial, sabemos da regra de Cramer, que devemos ter:

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

Com tal condição, vemos que (4.6) são equivalentes, logo $C_2 y_2(a) = -C_1 y_1(a)$. Se fizermos $C_1 = k y_2(a)$ então $C_2 = -k y_2(a)$, substituindo em (4.5) a solução fica:

$$y = k \left[y_2(a) y_1(x) - y_1(a) y_2(x) \right] \quad (4.8)$$

com a constante k arbitrária.

Notemos que (4.8) satisfaz (4.4), isto é, $y(a) = 0$ e $y(b) = 0$, tendo em vista a condição (4.7). Observemos ainda que (4.8) é uma solução diferente da trivial somente se $y_1(a)$ e $y_2(a)$ não são ambas nulas; caso $y_1(a) = y_2(a) = 0$, a primeira equação de (4.6) é uma identidade; neste caso, tomaremos a 2.^a equação de (4.6) para relacionar C_1 e C_2 , o qual analogamente, teremos uma solução da forma:

$$y = k \left[y_2(b) y_1(x) - y_1(b) y_2(x) \right] \quad (4.9)$$

supondo que $y_1(b)$ e $y_2(b)$ não são ambas nulas; caso fossem ambos nulos, então (4.5) satisfaria (4.4) para quaisquer valores de C_1 e C_2 .

Em muitos casos, os coeficientes de uma equação diferencial linear, como $p(x)$ e $q(x)$ de (4.3) contém um parâmetro λ ; portanto, as soluções da equação diferencial como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dependem de λ .

Nosso problema será agora achar todos os valores de λ , para os quais a equação diferencial da admita soluções não triviais, e a seguir, determinar as soluções correspondentes a esses valores de λ .

Este tipo de problema chamamos de Problemas de valores característicos, e os valores de λ são chamados valores característicos. As soluções não triviais, achadas para os λ correspondentes, são chamadas, funções características do problema. É usual outras terminologias, tais como autovalores e autofunções, assim como valores próprios e funções próprias.

Exemplificando o que dissemos, consideremos os problemas de contorno seguintes:

EXEMPLO 1 - Calculemos as soluções não triviais da equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad (4.10)$$

onde λ é um parâmetro; satisfazendo as condições de contorno homogêneas.

$$y(0) = 0$$

$$(4.11) \quad \text{onde } L \neq 0$$

$$y(L) = 0$$

Calculemos a expressão da solução geral de (4.10).

$$(D^2 + \lambda)y = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{-\lambda} \\ r_2 = -\sqrt{-\lambda} \end{cases}$$



devemos considerar os três casos seguintes:

- CASO 1 $\lambda = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$, logo a solução geral de (4.10) é:

$$y = C_1 + C_2 x$$

das condições (4.11) temos:

$$C_1 = 0$$

$$0 = C_2 L \Rightarrow C_2 = 0, \text{ em (4.10) temos } y = 0 \text{ que é solução trivial.}$$

- CASO 2 $\lambda < 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{-\lambda} \\ r_2 = -\sqrt{-\lambda} \end{cases}$

raízes reais, neste caso a solução geral, é:

$$y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \text{ de (4.11), temos:}$$

$$0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = -C_1$$

$$0 = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}L} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0 = C_1 (e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0, \text{ em (4.10) temos:}$$

$$y = 0, \text{ que é solução trivial.}$$

- CASO 3 $\lambda > 0 = \begin{cases} r_1 = i\sqrt{\lambda} \\ r_2 = -i\sqrt{\lambda} \end{cases}$

logo, a solução geral de (4.10), é:

$$y = C_1 \cos\sqrt{\lambda} x + C_2 \sin\sqrt{\lambda} x$$

das condições (4.11) temos:

$$0 = C_1$$

$$0 = C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} L, \text{ temos duas possibilidades:}$$

1.^a POSSIBILIDADE -

$$C_2 = 0, \text{ em 4.10} \Rightarrow y = 0 \text{ solução trivial}$$

2.^a POSSIBILIDADE -

$$\operatorname{sen} \sqrt{\lambda} L = 0 \text{ (4.12), para } C_2 \text{ qualquer.}$$

A equação (4.12) é verificada se $\sqrt{\lambda}L = n\pi$,
 $n = 1, 2, \dots, \Rightarrow \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$, isto é, se λ assume os valores

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (4.13) \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

substituindo em (4.10) para C_2 arbitrário e os valores de λ dados por (4.13), temos a solução particular:

$$y = C_2 \operatorname{sen} \frac{n \pi}{L} x$$

Os valores de $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$, que determinam os casos em que (4.10) tem soluções não triviais, são chamados autovalores do problema. E cada solução não trivial correspondente ao autovalor λ_n são as chamadas autofunções. Podemos, no exemplo dado, representar as autofunções por:

$$y_n = \operatorname{sen} \frac{n \pi}{L} x \quad (4.14) \quad n = 1, 2, \dots,$$

O produto desta função por uma constante qualquer é solução do problema.

Observemos que as autofunções do problema $y_n = \text{sen } \frac{n\pi}{L}x$ formam um conjunto de funções ortogonais no intervalo $(0, L)$; tal observação não é particular e pode ser generalizada de acordo com o que veremos, nos estudos seguintes.

II.5 - FORMA AUTO-ADJUNTA. PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE

II.5.1 - FORMA AUTO-ADJUNTA

Mostremos que, qualquer equação diferencial normal do tipo:

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + \left[a_2(x) + \lambda a_3(x) \right] y = 0 \quad (5.1)$$

com $a_0(x) \neq 0$ e λ um parâmetro, pode ser colocada sob a forma:

$$\frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{dy}{dx} \right] + \left[q(x) + \lambda p(x) \right] y = 0 \quad (5.2)$$

onde:

$$r(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}; \quad q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)} r(x);$$

$$p(x) = \frac{a_3(x)}{a_0(x)} r(x) \quad (5.3)$$

DEMONSTRAÇÃO:

Dividindo ambos os membros de (5.1) por $a_0(x)$, temos:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \frac{dy}{dx} + \left[\frac{a_2(x)}{a_0(x)} + \lambda \frac{a_3(x)}{a_0(x)} \right] y = 0$$

multipliquemos ambos os membros por $e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$

$$e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} \frac{dy}{dx} + \left(\frac{a_2(x)}{a_0(x)} + \lambda \frac{a_3(x)}{a_0(x)} \right) e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} y = 0$$

notemos que:

$$e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} \frac{dy}{dx} \right)$$

logo:

$$\frac{d}{dx} \left(e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} \frac{dy}{dx} \right) + \left(\frac{a_2(x)}{a_0(x)} + \lambda \frac{a_3(x)}{a_0(x)} \right) e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} y = 0$$

fazendo:

$$r(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}; \quad q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)} r(x)$$

e

$$p(x) = \frac{a_3(x)}{a_0(x)} r(x), \quad \text{temos:}$$

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dy}{dx} \right) + \left(q(x) + \lambda p(x) \right) y = 0 \quad \text{c.q.d.}$$

Mediante o operador:

$$L = \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x)$$

podemos escrever a equação (5.2) na forma abreviada.

$$Ly + p(x) y = 0 \quad (5.4)$$

A equação (5.2) é conhecida como a forma auto-adjunta da equação (5.1). A forma (5.2) nos será útil em cálculos futuros, e observemos que a função $r(x)$ é sempre positiva.

Como exemplo, calculemos a forma auto-adjunta da equação diferencial de Bessel.

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2) y = 0 \quad (5.5)$$

Comparando com (5.1) temos:

$$a_0(x) = x^2 \quad a_1(x) = x \quad a_2(x) = x^2 \quad a_3(x) = -1$$

e

$\lambda = p^2$, logo de (5.3), temos:

$$r(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{Lx} = x$$

$$q(x) = \frac{x^2}{x^2} \cdot x = x$$

$$p(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot x = -\frac{1}{x}$$

da equação (5.2) temos:

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(x - \frac{p^2}{2} \right) y = 0$$

ou

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(\frac{x^2 - p^2}{x} \right) y = 0 \quad (5.6)$$

que é a forma auto-adjunta da equação de Bessel (5.5).

Muitos conjuntos de funções ortogonais importantes aparecem como soluções de problemas de contorno, envolvendo equações diferenciais do tipo (5.2); tal afirmativa veremos nos estudos a seguir, e será asseverada, mediante um teorema de caráter geral que demonstraremos.

II.6 - PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

II.6.1 - Vários conjuntos de funções ortogonais importantes aparecem como soluções de equações diferenciais lineares de 2.^a ordem da forma:

$$\frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{dy}{dx} \right] + \left[q(x) + \lambda p(x) \right] y = 0 \quad (6.1)$$

no intervalo $a \leq x \leq b$, satisfazendo as condições homogêneas.

$$k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \quad (6.2)$$

$$l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0$$

onde λ é um parâmetro real e k_1 , k_2 , l_1 e l_2 são constantes reais dadas, no mínimo uma delas em cada condição, deve ser diferente de zero.

A equação diferencial (6.1) é conhecida como equação de Sturm-Liouville, e várias equações importantes, tais como a equação de Legendre, de Bessel e outras, podem ser escritas na forma (6.1).

As condições (6.2) são referentes aos extremos $x = a$ e $x = b$, sendo portanto as condições de contorno do problema.

A equação (6.1) juntamente com as condições (6.2) constitui um problema de contorno, que no caso particular é chamado problema de Sturm-Liouville.

Notemos que tal problema admite a solução trivial $y = 0$. As soluções $y \neq 0$ são as autofunções correspondentes aos autovalores, os quais nos referimos em (11.4.0). Devido a importância de tal problema veremos alguns exemplos.

Calculemos os autovalores e as autofunções dos problemas de Sturm-Liouville seguintes:

EXEMPLO 1

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + (1 - \lambda) y = 0 \quad (6.3)$$

$$y(0) = 0 \quad (6.4)$$

$$y(1) = 0$$

Notemos que (6.3) pode ser escrita na forma (6.1), senão vejamos; da equação (5.1), temos:

$$a_0(x) = 1 \quad a_1(x) = 2 \quad a_2(x) = 0 \quad a_3(x) = 1$$

de (5.2), temos:

$$r(x) = e^{2 \int dx} = e^{2x}$$

logo:

$$q(x) = 0 \quad p(x) = e^{2x}, \text{ em (5.2) temos:}$$

$$\frac{d}{dx} \left(e^{2x} \cdot \frac{dy}{dx} \right) + (1-\lambda)e^{2x} y = 0$$

- Cálculo dos autovalores e autofunções -

Escrevendo (6.3) na forma do operador diferencial temos:

$$\left(D^2 + 2D + (1-\lambda) \right) y = 0$$

$$\Rightarrow D^2 + 2D + (1-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -1 + \sqrt{\lambda} \\ r_2 = -1 - \sqrt{\lambda} \end{cases}$$

para o cálculo da solução geral de (6.3) devemos considerar os seguintes valores de λ , nos casos:

- CASO 1 - $\lambda = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1$, logo a solução geral é

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$$

das condições (6.4) temos:

$$C_1 = 0 \quad C_2 = 0$$

logo a solução particular é $y = 0$, que é trivial.

- CASO 2 - $\lambda > 0$

Neste caso r_1 e r_2 são reais, e a solução geral é:

$$y = c_1 e^{(-1+\sqrt{\lambda})x} + c_2 e^{(-1-\sqrt{\lambda})x}$$

de (6.4), temos:

$$0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

$$0 = c_1 e^{-1+\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-1-\sqrt{\lambda}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = c_1 \left[e^{-1+\sqrt{\lambda}} - e^{-1-\sqrt{\lambda}} \right] \Rightarrow c_1 = 0$$

$\Rightarrow c_2 = 0$, logo $y = 0$, solução trivial.

$$- \text{CASO 3} - \lambda < 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -1 + i\sqrt{-\lambda} \\ r_2 = -1 - i\sqrt{-\lambda} \end{cases}$$

a solução geral de (6.3) é:

$$y = (c_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}x) e^{-x}$$

de (6.4), temos:

$$c_1 = 0$$

$$0 = c_2 \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda} e^{-1}$$

temos duas possibilidades:

1ª POSSIBILIDADE - $c_2 = 0 \Rightarrow y = 0$, solução trivial

2ª POSSIBILIDADE - $\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda} = 0$ para c_2 qualquer, logo:

$$\sqrt{-\lambda} = n\pi \Rightarrow \lambda_n = -n^2 \pi^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

que são os autovalores; as autofunções correspondentes são

$$y_n = e^{-x} \operatorname{sen} n\pi x \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

EXEMPLO 2 -

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad (6.5)$$

$$y(0) = 0 \quad (6.6)$$

$$y'(L) = 0$$

podemos mostrar que (6.5) pode ser colocada na forma (6.1).

Calculemos os autovalores e as autofun

ções:

$$(D^2 + \lambda)y = 0 \Rightarrow D^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{-\lambda} \\ r_2 = -\sqrt{-\lambda} \end{cases}$$

consideremos os casos:

- CASO 1 - $\lambda = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$, solução geral:

$$y = C_1 + C_2 x \Rightarrow y' = C_2$$

de (6.6) $C_2 = 0$ C_1 qualquer, logo a solução particular é $y = C_1$, portanto $\lambda = 0$ é um autovalor.

- CASO 2 - $\lambda < 0$ r_1 e r_2 são reais; solução geral:

$$y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt{-\lambda} c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda} c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

de (6.6), temos:

$$0 = c_1 - c_2 \Rightarrow c_1 = c_2$$

$$0 = \sqrt{-\lambda} c_1 e^{\sqrt{-\lambda}L} - \sqrt{-\lambda} c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \sqrt{-\lambda} c_1 \left(e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L} \right) \Rightarrow$$

$$= c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0, \text{ logo } y = 0 \text{ solução trivial.}$$

- CASO 3 - $\lambda > 0$ $r_1 = i\sqrt{\lambda}$ e $r_2 = -i\sqrt{\lambda}$

solução geral:

$$y = c_1 \cos\sqrt{\lambda} x + c_2 \sin\sqrt{\lambda} x$$

$$y' = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin\sqrt{\lambda} x + c_2 \sqrt{\lambda} \cos\sqrt{\lambda} x$$

de (6.6), temos:

$$0 = c_1 \sqrt{\lambda} \Rightarrow c_1 = 0$$

$$0 = -c_2 \sqrt{\lambda} \sin\sqrt{\lambda} L$$

para $c_2 = 0 \Rightarrow y = 0$ solução trivial.

$$\sin\sqrt{\lambda} L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} L = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

logo os autovalores são:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

e as autofunções correspondentes são:

$$y_n = \cos \frac{n \pi}{L} x \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

II.6.2 - TEOREMA II.1

Sejam as funções $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ da equação Sturm-Liouville (6.1), contínuas no intervalo $a \leq x \leq b$. Consideremos $y_m(x)$ e $y_n(x)$ autofunções distintas do problema de Sturm-Liouville, correspondentes aos autovalores distintos λ_m e λ_n respectivamente, decorrentes das condições (6.2) e sejam ainda contínuas as derivadas $y'_m(x)$ e $y'_n(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$. Mostremos então que, $y_m(x)$ e $y_n(x)$ são ortogonais no intervalo $a \leq x \leq b$ em relação a função peso $p(x)$, isto é:

$$\int_a^b p(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad . m \neq n$$

DEMONSTRAÇÃO

Se $y_m(x)$ e $y_n(x)$ são autovalores de (6.1), logo podemos escrever:

$$\frac{d}{dx} \left(r \frac{dy_m}{dx} \right) + (q + \lambda_m p) y_m = 0 \Rightarrow (q + \lambda_m p) y_m = - \frac{d}{dx} \left(r \frac{dy_m}{dx} \right) \quad (6.7)$$

$$\frac{d}{dx} \left(r \frac{dy_n}{dx} \right) + (q + \lambda_n p) y_n = 0 \Rightarrow (q + \lambda_n p) y_n = \frac{d}{dx} \left(r \frac{dy_n}{dx} \right) \quad (6.8)$$

multiplicando ambos os membros de (6.7) por y_n e de (6.8) por $-y_m$ e somando, temos:

$$(\lambda_m - \lambda_n) p y_m y_n = y_m \frac{d}{dx} \left(r \frac{dy_n}{dx} \right) - y_n \frac{d}{dx} \left(r \frac{dy_m}{dx} \right)$$

somando e subtraindo no 2º membro o termo $r \frac{dy_m}{dx} \frac{dy_n}{dx}$ temos

$$\begin{aligned}
 (\lambda_m - \lambda_n) p y_m y_n &= y_m \frac{d}{dx} \left(r \frac{dy_n}{dx} \right) + \\
 &+ r \frac{dy_m}{dx} \frac{dy_n}{dx} - r \frac{dy_m}{dx} \frac{dy_n}{dx} - y_n \frac{d}{dx} \left(r \frac{dy_m}{dx} \right)
 \end{aligned}$$

notando que o 2º membro pode ser escrito na forma:

$$\frac{d}{dx} \left(\left(r \frac{dy_n}{dx} \right) y_m - \left(r \frac{dy_m}{dx} \right) y_n \right)$$

temos:

$$(\lambda_m - \lambda_n) p y_m y_n = \frac{d}{dx} \left(\left(r \frac{dy_n}{dx} \right) y_m - \left(r \frac{dy_m}{dx} \right) y_n \right)$$

integrando ambos os membros em relação a x de a até b,

temos:

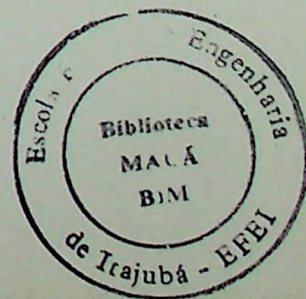
$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p(x) y_m(x) y_n(x) dx = \left[r(x) \left\{ y_m(x) \frac{dy_n(x)}{dx} - y_n(x) \frac{dy_m(x)}{dx} \right\} \right]_a^b$$

logo:

$$\begin{aligned}
 (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p(x) y_m(x) y_n(x) dx &= r(b) \left[y_m(b) y_n'(b) - y_n(b) y_m'(b) \right] - \\
 &- r(a) \left[y_m(a) y_n'(a) - y_n(a) y_m'(a) \right]
 \end{aligned}$$

(6.9)

Tendo em vista que $y_m(x)$ e $y_n(x)$ satisfazem as condições (6.2), dadas para $x = a$ e $x = b$; podemos discutir os seguintes casos, com relação a expressão (6.9).



- CASO 1 - Se $r(a) = r(b) = 0$, como $\lambda_m \neq \lambda_n$, temos que

$$\int_a^b p(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$$

Notemos que, para este caso, não precisamos recorrer às condições de contorno (6.2).

- CASO 2 - Se $r(b) = 0$ $r(a) \neq 0$, das condições (6.2) temos:

$$k_1 y_n(a) + k_2 y'_n(a) = 0$$

(6.10)

$$k_1 y_m(a) + k_2 y'_m(a) = 0$$

considerando $k_2 \neq 0$, e multiplicando a 1.^a equação de (6.10) por $y_m(a)$ e a segunda por $-y_n(a)$ e somando, temos:

$$k_2 \left[y'_n(a) y_m(a) - y'_m(a) y_n(a) \right] = 0$$

como $k_2 \neq 0$, logo:

$$y'_n(a) y_m(a) - y'_m(a) y_n(a) = 0$$

em (6.9), para este caso, temos:

$$\int_a^b p(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$$

Demonstração análoga seria, neste caso, se considerarmos $k_2 = 0$, pois, por hipótese k_1 deverá ser diferente de zero.

- CASO 3 - Se $r(a) = 0$ e $r(b) \neq 0$, das condições (6.2) temos:

$$\lambda_1 y_n(b) + \lambda_2 y'_n(b) = 0 \quad (6.11)$$

$$\lambda_1 y_m(b) + \lambda_2 y'_m(b) = 0$$

considerando $\lambda_2 \neq 0$, e multiplicando a 1.^a equação de (6.11) por $y_m(b)$ e a 2.^a por $-y_n(b)$, somando, temos:

$$\lambda_2 \left[y'_n(b) y_m(b) - y'_m(b) y_n(b) \right] = 0 \quad \text{como } \lambda_2 \neq 0$$

$$y'_n(b) y_m(b) - y'_m(b) y_n(b) = 0$$

em (6.9), para este caso, também teremos:

$$\int_a^b p(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$$

resultado semelhante achamos neste caso se $\lambda_2 = 0$ pois devemos ter $\lambda_1 \neq 0$, e a demonstração será análoga.

- CASO 4 - Se $r(a) \neq 0$ e $r(b) \neq 0$, aplicando as duas equações da condição (6.2), teremos com demonstração análoga ao dos casos 2 e 3, que:

$$\int_a^b p(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad \text{para } m \neq n$$

- CASO 5 - Se $r(a) = r(b) \neq 0$, neste caso, a equação (6.9) fica:

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p(x) y_m(x) y_n(x) dx = r(b) \left[y_n'(b) y_m(b) - y_m'(b) y_n(b) - \right. \\ \left. - y_n'(a) y_m(a) + y_m'(a) y_n(a) \right] \quad (6.10)$$

Vemos que o 2º membro de (6.10) se anula, somente se as condições (6.2), forem dadas por:

$$y(a) = y(b) \quad (6.11)$$

$$y'(a) = y'(b)$$

condições estas chamadas particularmente de condições de contorno periódicas, e temos:

$$\int_a^b p(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$$

Ficando assim completa a demonstração, do Teorema 11.1. Portanto, concluímos finalmente que, duas autofunções quaisquer $y_m(x)$ e $y_n(x)$ de um problema de Sturm-Liouville são ortogonais, com relação a função pe so $p(x)$, em um intervalo considerado. Tal resultado ẽ de grande interesse prático.

Exemplifiquemos o teorema visto:

EXEMPLO 1 - Vimos no exemplo (11.4.0) que para o proble ma de Sturm-Liouville:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad y(0) = 0 \quad e \quad y(L) = 0$$

que os autovalores dados pela equação (4.13), são:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

e as autofunções correspondentes dadas pela equação (4.14), são:

$$y_n = \text{sen } \frac{n \Pi}{L} x$$

Portanto, pelo teorema 11.1, estas funções formam um conjunto de funções ortogonais no intervalo $(0, L)$, com relação a função peso $p(x) = 1$.

EXEMPLO 2 - Vimos no exemplo 1, (11.6.1), que, para o problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + (1-\lambda) y = 0$$

$y(0) = 0$ e $y(1) = 0$, os autovalores são:

$$\lambda_n = -n^2 \Pi^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e as autofunções correspondentes são:

$$y_n = e^{-x} \text{sen } n \Pi x$$

Logo, pelo Teorema 11.1, estas funções formam um conjunto ortogonal no intervalo $(0, 1)$, em relação a função peso $p(x) = e^{2x}$.

EXEMPLO 3 - Seja dada a equação diferencial de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0 \quad (6.12)$$

onde p é um parâmetro real positivo.

Sabemos que para $p = n$ inteiro os polinômios de Legendre $P_p(x)$ são soluções de (6.12).

Notamos que (6.12) pode ser colocada na forma auto-adjunta, fazendo:

$$r(x) = 1 - x^2$$

$$q(x) = 0$$

$$p(x) = 1$$

$$\lambda = p(p+1)$$

logo, podemos escrever (6.12) na forma:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + p(p+1) y = 0 \quad (6.13)$$

vemos que para $x = x \pm 1 \Rightarrow r(x) = 0$; logo, pelo Teorema II.1, caso 1, não precisamos neste intervalo de condições de contorno, e podemos afirmar que os polinômios de Legendre são ortogonais no intervalo $(-1,+1)$ relativo a função peso $p(x) = 1$, o que está de acordo com o demonstrado em (1.2.5).

Portanto, podemos dizer que no intervalo $(-1,+1)$ os polinômios de Legendre $P_p(x)$ são as autofunções do problema correspondentes aos autovalores.

$$\lambda_n = p(p+1) \quad \text{sendo } p = 0, 1, 2, \dots$$

EXEMPLO 4 - Verifiquemos o teorema II.1, para o problema de Sturm-Liouville seguinte:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad (6.14)$$

com condições de contorno periódicas.

$$y(-L) = y(L) \quad (6.15)$$

$$y'(-L) = y'(L)$$

Podemos colocar (6.14) na forma autoadjunta fazendo:

$$r(x) = 1 \quad q(x) = 0 \quad e \quad p(x) = 1$$

Calculemos os autovalores e as autofunções do problema.

De (6.14) temos:

$$(D^2 + \lambda)y = 0 \Rightarrow D^2 + \lambda = 0 = \begin{cases} r_1 = \sqrt{-\lambda} \\ r_2 = -\sqrt{-\lambda} \end{cases}$$

- CASO 1 - $\lambda = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$ = solução geral de (6.14) é:

$$y = C_1 + C_2 x \Rightarrow y' = C_2$$

das condições (6.15), temos:

$$C_1 - C_2 L = C_1 + C_2 L \therefore C_2(1+L) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

C_1 é arbitrário, logo para $\lambda = 0$ a autofunção é

$$y_0 = 1$$

- CASO 2 - $\lambda < 0$ r_1 e r_2 são reais, logo a solução geral de (6.14) é:

$$y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$y' = \sqrt{-\lambda} C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda} C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

das condições (6.15), temos:

$$C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}L} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}L} = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}L} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 (e^{-\sqrt{-\lambda}L} - e^{\sqrt{-\lambda}L}) = C_2 (e^{-\sqrt{-\lambda}L} - e^{\sqrt{-\lambda}L})$$

(6.16)

ainda:

$$\sqrt{-\lambda} c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}L} - \sqrt{-\lambda} c_2 e^{\sqrt{-\lambda}L} = \sqrt{-\lambda} c_2 e^{\sqrt{-\lambda}L} - \sqrt{-\lambda} c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}L}$$

ou

$$c_1 (e^{-\sqrt{-\lambda}L} - e^{\sqrt{-\lambda}L}) = c_2 (e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L}) \quad (6.17)$$

somando ambos os membros de (6.16) e (6.17), temos:

$$2c_1 \left(e^{-\sqrt{-\lambda}L} - e^{\sqrt{-\lambda}L} \right) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

em (6.16) $\Rightarrow c_2 = 0$, logo $y = 0$ solução trivial

$$\text{- CASO 3 - } \lambda > 0 = \begin{cases} r_1 = i\sqrt{\lambda} \\ r_2 = -i\sqrt{\lambda} \end{cases}$$

logo, a solução geral de (6.14) é:

$$y = c_1 \cos\sqrt{\lambda} x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} x \quad (6.18)$$

$$y' = -\sqrt{\lambda} c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} x + c_2 \sqrt{\lambda} \cos\sqrt{\lambda} x$$

das condições (6.15), temos:

$$c_1 \cos\sqrt{\lambda} L - c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L = c_1 \cos\sqrt{\lambda} L + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L = 0 \quad (6.19)$$

$$c_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L + c_2 \cos\sqrt{\lambda} L = -c_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L +$$

$$+ c_2 \cos\sqrt{\lambda} L \Rightarrow 2c_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L = 0 \quad (6.20)$$

Vemos de (6.19) e (6.20) que, para termos soluções não triviais, sendo c_1 e c_2 arbitrário, $\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} L = n \pi$$

logo, as autovalores são:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (6.21) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e as autofunções correspondentes são:

$$y_n = \text{sen } \frac{n \Pi}{L} x + \text{cos } \frac{n \Pi}{L} x \quad (6.22)$$

que serão soluções do problema.

Como foi demonstrado no exemplo em (1.2.5), as autofunções $\text{sen } \frac{n \Pi}{L} x$ e $\text{cos } \frac{n \Pi}{L} x$ formam um conjunto de funções ortogonais no intervalo $(-L, +L)$; consequentemente

$$y_{11} = \text{sen } \frac{n \Pi}{L} x + \text{cos } \frac{n \Pi}{L} x$$

são ortogonais neste intervalo, em relação a função peso $p(x) = 1$, o que vem confirmar a validade do Teorema 11.1 no seu caso 5, sendo as condições de contorno periódicas.

OBS. De modo análogo ao teorema 11.1 visto, podemos facilmente estender suas conclusões para um conjunto de autofunções originadas de um problema de contorno de ordem superior.

Por exemplo, no caso de um problema de contorno constituído de uma equação diferencial de 4.^a ordem, da forma:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[s(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + \frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{dy}{dx} \right] + \left[q(x) + \lambda p(x) \right] y = 0 \quad (6.23)$$

Do mesmo modo visto no Teorema 11.1, chegaremos a uma expressão da forma:

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p(x) y_m(x) y_n(x) dx = \left\{ y_m (S y_n'')' - y_n (S y_m'')' - S (y_m' y_n'' - y_n' y_m'') + r (y_m y_n' - y_n y_m') \right\}_a^b \quad (6.24)$$

onde $y_n(x)$ e $y_m(x)$ são as autofunções correspondentes aos autovalores distintos λ_n e λ_m .

Tendo em vista o 2º membro de (6.24), podemos considerar condições de contorno adequadas no intervalo (a,b) , de modo que o mesmo se anule, e chegamos a conclusão que:

$$\int_a^b p(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad \text{para } m \neq n$$

o que nos permitirá afirmar que as funções $y_m(x)$ e $y_n(x)$ são ortogonais no intervalo (a,b) , com relação a função peso $p(x)$,

EXEMPLO - Calculemos os autovalores e as autofunções do problema:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \lambda^2 y = 0 \quad (6.25)$$

$$y(0) = y''(0) = 0 \quad (6.26)$$

$$y(L) = y''(L) = 0$$

- Cálculo da solução geral de (6.25):

$$(D^4 - \lambda^2)y = 0 \Rightarrow D^4 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow (D^2 + \lambda)(D^2 - \lambda) = 0$$

logo:

$$r_1 = \sqrt{\lambda}$$

$$r_2 = -\sqrt{\lambda}$$

$$r_3 = i\sqrt{\lambda}$$

$$r_4 = -i\sqrt{\lambda}$$

consideremos os casos:

- CASO 1 - $\lambda = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$

logo, a solução geral de (6.25) é:

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$$

$$y' = C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2$$

$$y'' = 2C_3 + 6C_4x$$

das condições (6.26) temos:

$$0 = C_1 \quad 0 = 2C_3 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$0 = C_2L + C_4L \quad e \quad 6C_4L = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

portanto $y = 0$ solução trivial

- CASO 2 - Para $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$ a solução geral de (6.25)

será:

$$y = C_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} x + C_2 \operatorname{cosh}\sqrt{\lambda} x + C_3 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} x + C_4 \operatorname{cos}\sqrt{\lambda} x \quad (6.27)$$

$$y'' = C_1 \operatorname{senh}\sqrt{\lambda} x + C_2 \operatorname{cosh}\sqrt{\lambda} x - \lambda C_3 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} x - C_4 \operatorname{cos}\sqrt{\lambda} x$$

das condições (6.26), temos:

$$0 = C_2 + C_4 \Rightarrow C_2 = -C_4$$

$$0 = C_2 - C_4 \Rightarrow 0 = 2C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \quad e \quad C_4 = 0$$

$$C_1 \operatorname{senh}\sqrt{\lambda} L + C_3 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L = 0$$

(6.28)

$$C_1 \operatorname{senh}\sqrt{\lambda} L - C_3 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L = 0$$

as quais são compatíveis se o determinante dos coeficientes for nulo, logo:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{senh}\sqrt{\lambda} L & \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L \\ \operatorname{senh}\sqrt{\lambda} L & -\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2\operatorname{senh}\sqrt{\lambda} L \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L = 0$$

sendo $\lambda \neq 0$, temos:

$$\operatorname{sen} \sqrt{\lambda} L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} L = n \Pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

logo, os autovalores são:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \Pi^2}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

para estes valores em (6.28), temos:

$$c_1 = 0$$

Portanto em (6.27) a solução particular é:

$$y = c_3 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} x$$

e as autofunções, são:

$$y_n = \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} x = \operatorname{sen} \frac{n \Pi}{L} x \quad (6.29) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Podemos notar que essas autofunções são ortogonais no intervalo $(0, L)$, em relação a função peso $p(x) = 1$, uma vez que a equação dada pode ser colocada na forma da equação (6.23), fazendo:

$$S(x) = 1, \quad r(x) = 0, \quad q(x) = 0 \quad \text{e} \quad p(x) = 1$$

II.7 - SÉRIES DE FUNÇÕES ORTOGONAIS OBTIDAS DE PROBLEMAS DE CONTORNO

Vimos nas considerações 11.6.2 que as autofunções de um problema de contorno, relativos a condições de contorno adequadas em um intervalo (a, b) , são ortogonais em relação a uma função peso $p(x)$, no intervalo considerado.

Com base no que foi estudado em (11.3.1) e tendo em vista tal conclusão, podemos desenvolver uma

função $f(x)$ qualquer, pelo menos formalmente, em séries de funções ortogonais obtidas das autofunções do problema de contorno dado.

Tal conclusão é de grande importância prática pois, podemos obter, como veremos posteriormente as séries de Fourier, de Legendre, de Bessel e outras mediante as autofunções de um problema de contorno. Ainda podemos dizer, como estudaremos posteriormente, que as únicas soluções de certos problemas de contorno que envolvem equações diferenciais não homogêneas disponíveis, são as expressas como séries em termos de autofunções do problema.

A seguir veremos um exemplo do desenvolvimento de uma função, em série de funções ortogonais obtidas de autofunções de um problema de contorno.

EXEMPLO - Desenvolvamos a função $f(x) = 1$ em série de autofunções originadas do problema de contorno

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad (7.1)$$

$$y(0) = 0 \quad a > 0 \quad (7.2)$$

$$\alpha Ly'(L) + y(L) = 0 \quad L > 0$$

no intervalo $(0, L)$.

Devemos inicialmente calcular as autofunções do problema.

Calculemos a solução geral de (7.1):

$$(D^2 + \lambda)y = 0 = D^2 + \lambda = 0 = \begin{cases} r_1 = \sqrt{-\lambda} \\ r_2 = -\sqrt{-\lambda} \end{cases}$$

- CASO 1 - $\lambda = 0$ $r_1 = r_2 = 0$; logo, a solução geral de (7.1) é:

$$y = C_1 + C_2 x \Rightarrow y' = C_2$$

das condições (7.2), temos:

$$0 = C_1$$

$$\alpha L C_2 + C_2 L = 0 = C_2 (\alpha L + L) = 0 \quad \text{para } \alpha > 0$$

$$C_2 = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ solução trivial.}$$

- CASO 2 - $\lambda < 0 \Rightarrow r_1$ e r_2 são reais; logo, a solução geral de (7.1) é:

$$y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$y' = \sqrt{-\lambda} C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda} C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

das condições (7.2), temos:

$$0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$\alpha L \sqrt{-\lambda} C_1 (e^{\sqrt{-\lambda}L} + e^{-\sqrt{-\lambda}L}) + C_1 (e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L}) = 0$$

$$C_1 (2\alpha L \sqrt{-\lambda} \cosh \sqrt{-\lambda} L + 2 \sinh \sqrt{-\lambda} L) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

logo $y = 0$ solução trivial.

- CASO 3 - $\lambda > 0$, logo:

$$\begin{cases} r_1 = i\sqrt{\lambda} \\ r_2 = -i\sqrt{\lambda} \end{cases}$$

solução geral de (7.1) é:

$$y = C_1 \cos\sqrt{\lambda} x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} x \quad (7.3)$$

$$y' = -\sqrt{\lambda} C_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} C_2 \cos\sqrt{\lambda} x$$

das condições (7.2), temos:

$$0 = C_1$$

$$\alpha L \sqrt{\lambda} C_2 \cos\sqrt{\lambda} L + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L = 0$$

$$C_2 (\alpha L \sqrt{\lambda} \cos\sqrt{\lambda} L + \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L) = 0 \quad (7.4)$$

temos duas possibilidades:

1.^a POSSIBILIDADE - $C_2 = 0 \Rightarrow y = 0$ solução trivial.

2.^a POSSIBILIDADE - de (7.4), para qualquer C_2 , temos:

$$\alpha L \sqrt{\lambda} \cos\sqrt{\lambda} L + \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L = 0$$

$$\alpha L \sqrt{\lambda} \cos\sqrt{\lambda} L = -\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} L = \operatorname{tg}\sqrt{\lambda} L = -\alpha L \sqrt{\lambda}$$

fazendo, $\sqrt{\lambda} L = \mu$ (7.4), temos, $\operatorname{tg}\mu = -\alpha\mu$ (7.5)

Note-se que não podemos explicitar a equação (7.4) para λ , porém, a solução de (7.5) pode ser visualizada graficamente, dos pontos de interseção do gráfico das funções $\operatorname{tg}\mu$ e $-\alpha\mu$, conforme figura (7.1).

Da figura, vemos que existem uma infinidade de valores de μ que satisfazem a equação (7.5), sendo eles:

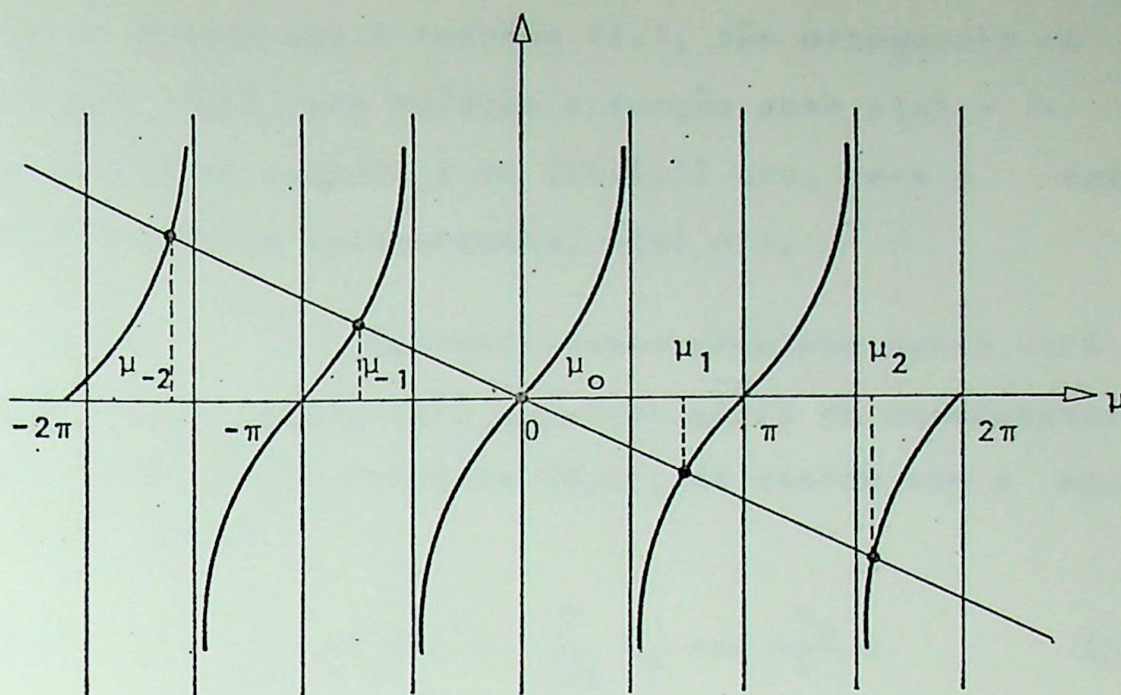


FIG. 7.1 - Gráfico das funções $\text{tg}\mu$ e $-\alpha\mu$

$$\dots \mu_{-2}, \mu_{-1}, \mu_0 = 0, \mu_1, \mu_2, \dots$$

os quais são simétricos em relação a origem; logo, representando estas raízes por μ_n , temos de (7.4), que

$$\sqrt{\lambda} L = \mu_n \Rightarrow \lambda_n = \frac{\mu_n^2}{L^2} \quad (7.6) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

que são os autovalores do problema, de 7.3, temos que, as autofunções do problema, são:

$$y_n(x) = \text{sen} \frac{\mu_n}{L} x$$

ou

$$y_n(x) = \text{sen} \sqrt{\lambda_n} x \quad (7.7) \quad n = 1, 2, \dots$$

que de acordo com o teorema 11.1, são ortogonais no intervalo $(0, L)$, com relação a função peso $p(x) = 1$, pois mostramos no exemplo 2 em (11.6.1) que, para a equação (7.1) na forma auto-adjunta, $p(x) = 1$.

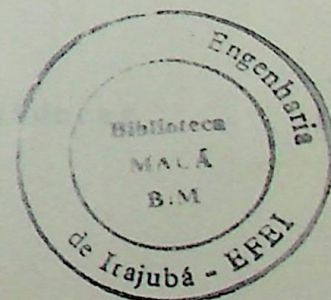
Portanto, nosso problema agora será de desenvolver a função $f(x) = 1$, numa série de autofunções da das em (7.7), no intervalo $(0, L)$; de acordo com a equação (3.2), temos:

$$f(x) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n y_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{\mu_n}{L} x \quad (7.8)$$

- Cálculo dos coeficientes C_n ; da equação (3.6) para $p(x) = 1$, temos:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\|y_n\|^2} \int_0^L f(x) y_n(x) dx = \\ &= \frac{1}{\|y_n\|^2} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{\mu_n}{L} x dx = \\ &= \frac{1}{\|y_n\|^2} \left[-\frac{L}{\mu_n} \cos \frac{\mu_n}{L} x \right]_0^L = \frac{1}{\|y_n\|^2} \frac{1}{\mu_n} (1 - \cos \mu_n) \end{aligned} \quad (7.9)$$

da equação (3.5), temos, para $p(x) = 1$



$$\begin{aligned}
\|y_n\|^2 &= \int_0^L \left(y_n(x) \right)^2 dx = \int_0^L \sin^2 \frac{\mu_n}{L} x dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{2\mu_n}{L} x \right) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{L}{2\mu_n} \sin \frac{2\mu_n}{L} x \right) \Big|_0^L = \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2\mu_n} \sin 2\mu_n \right)
\end{aligned}$$

como de (7.5):

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \mu_n &= -\alpha \mu_n \Rightarrow \cos^2 \mu_n = \frac{1}{1 + \alpha^2 \mu_n^2} \\
\sin^2 \mu_n &= \frac{\alpha^2 \mu_n^2}{1 + \alpha^2 \mu_n^2}
\end{aligned}$$

logo:

$$\sin 2\mu_n = \frac{-2\alpha \mu_n}{1 + \alpha^2 \mu_n^2} = -2\alpha \mu_n \cos^2 \mu_n$$

portanto:

$$\|y_n\|^2 = \frac{L}{2} (1 + \alpha \cos^2 \mu_n)$$

em (7.9), temos:

$$c_n = \frac{2(1 - \cos \mu_n)}{\mu_n (1 + \alpha \cos^2 \mu_n)} \quad (7.10)$$

substituindo em (7.8), temos o desenvolvimento desejado.

$$f(x) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(1 - \cos \mu_n)}{\mu_n (1 + \alpha \cos^2 \mu_n)} \sin \frac{\mu_n}{L} x \quad (7.11)$$

Com base no que acabamos de considerar.

e exemplificar, veremos a seguir algumas séries de funções ortogonais importantes, obtidas de Problemas de Contorno.

11.8 - SÉRIE DE FOURIER

11.8.1 - SÉRIE DE FOURIER DE SENOS

Vimos no exemplo 1 em (11.4.1) que as autofunções do problema de contorno,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{array}$$

são:

$$y_n = \text{sen } \frac{n \pi}{L} x \quad (8.1)$$

correspondentes aos autovalores $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad n=1, 2, 3, \dots$

De acordo com os resultados precedentes, podemos desenvolver uma função qualquer $f(x)$ em uma série da forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= B_1 \text{sen } \frac{\pi}{L} x + B_2 \text{sen } \frac{2 \pi}{L} x + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen } \frac{n \pi}{L} x \end{aligned} \quad (8.2)$$

calculemos os coeficientes B_n .

Como $y_n = \text{sen } \frac{n \pi}{L} x$ são ortogonais no intervalo $(0, L)$ com relação a função peso $p(x)=1$, da equação (3.6), temos que:

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{1}{\|y_n\|^2} \int_0^L f(x) y_n(x) dx = \\
 &= \frac{1}{\|y_n\|^2} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \quad (8.3)
 \end{aligned}$$

da equação (3.5), temos:

$$\begin{aligned}
 \|y_n\|^2 &= \int_0^L \left(y_n(x) \right)^2 dx = \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi}{L} x dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{L} x \right) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{L}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi}{L} x \right]_0^L = \frac{L}{2}
 \end{aligned}$$

logo, em (8.3), temos:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \quad (8.4)$$

que são os coeficientes de Euler da série de Fourier, se no da função $f(x)$ em (8.2).

Pelas condições de Dirichlet podemos dizer que se $f(x)$ e sua derivada $f'(x)$ são seccionalmente contínuas no intervalo $(0, L)$, então a série (8.2), com os coeficientes dados por (8.4), converge para $f(x)$ nos pontos de continuidade; e para o valor médio de ambos os limites laterais de $f(x)$, nos pontos de descontinuidade finita, isto é:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

onde:

$$f(x^+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x+\epsilon) \quad f(x^-) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x-\epsilon) \quad (8.6)$$

Notemos ainda que todos os termos ou harmônicos da série (8.2) tem o período primitivo igual a $2L$; e ainda que se substituirmos x por $-x$, os sinais de cada harmônico fica trocado, isto equivale a dizer que os harmônicos da série (8.2) são funções ímpares. Portanto, no intervalo $(-L, 0)$ a série (8.2) representa a função $-f(-x)$.

Tendo em vista que os harmônicos da série tem período comum (primitivo) $2L$, o comportamento da série em $(-L, L)$ se repete periodicamente para todos os valores de x .

Se a função $f(x)$ é ímpar, isto é, $f(x) = -f(-x)$ a série (8.2) representa $f(x)$ em qualquer ponto, ressalvando a condição de Dirichlet nos pontos de descontinuidades.

Do exemplo 1, em 11.3.1, vimos que o desenvolvimento da função $f(x) = x$ no intervalo $(-L, L)$ em série da forma de (8.2) é:

$$f(x) = x = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \quad (8.7)$$

sendo $f(x) = x$ uma função ímpar, então (8.7) a representa em qualquer ponto do intervalo $(-L, L)$, exceto para os pontos $x = \pm L$, repetindo seu comportamento periodicamente.

11.8.2 - SÉRIE DE FOURIER DE COSSENOS

Vimos no exemplo 2 de 11.6.1, que as autofunções do problema de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y &= 0 & y(0) &= 0 \\ & & y'(L) &= 0 \end{aligned}$$

são:

$$y_n = \cos \frac{n\pi}{L}x \quad (8.8) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

correspondentes aos autovalores:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

De modo análogo a (11.8.1), podemos representar uma função $f(x)$ em uma série de autofunções no intervalo $(0, L)$, com relação a função peso $p(x)=1$, logo:

$$\begin{aligned} f(x) &= A_0 + A_1 \cos \frac{\pi}{L}x + A_2 \cos \frac{2\pi}{L}x + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{L}x \end{aligned} \quad (8.9)$$

calculemos os coeficientes A_n ; da equação (3.6), temos:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\|y_n\|^2} \int_0^L f(x) y_n(x) dx = \\ &= \frac{1}{\|y_n\|^2} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x dx \end{aligned} \quad (8.10)$$

de (3.5), temos:

$$\|y_n\|^2 = \int_0^L \left(y_n(x) \right)^2 dx = \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi}{L} x dx$$

para $n = 0$ $\|y_0\|^2 = \int_0^L dx = \left(x \right)_0^L = L$ para $n=1,2,3\dots$

$$\|y_n\|^2 = \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 + \cos \frac{2n\pi}{L} x \right) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{L}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right)_0^L = \frac{L}{2}$$

logo de (8.10), temos:

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad (8.11)$$

e

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \quad n = 1, 2, 3, \quad (8.12)$$

Portanto (8.11) e (8.12) são os coeficientes da série de Fourier de cossenos de uma função $f(x)$ expressa em (8.9).

Vemos que os harmônicos da série (8.9) são funções pares, portanto ela também representa a função $f(-x)$ no intervalo $(-L, 0)$.

Portanto, se $f(x)$ é uma função par, isto é: $f(x) = f(-x)$, a série (8.9) representará $f(x)$ em todo o intervalo $(-L, L)$; se ainda $f(x)$ é periódica, de período $2L$, a série (8.9) representará $f(x)$ em qualquer ponto, exceto os de descontinuidade.

Assim por exemplo, a série de Fourier de cossenos da função ímpar $f(x) = x$, só a representará no intervalo $(0, L)$, e também a $f(-x) = -x$ no intervalo $(-L, 0)$.

Como sabemos, podemos representar uma função qualquer $f(x)$ como uma soma de uma função par $f_p(x)$ e uma função ímpar $f_i(x)$, isto é:

$$f(x) = f_p(x) + f_i(x) \quad (8.13)$$

que podemos verificar uma vez que a identidade

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (8.14)$$

é verdadeira e vemos que o 1º termo do 2º membro é uma função par de x , e o 2º termo uma função ímpar, logo (8.13) é verdadeira.

De (11.8.1) e (11.8.2) vimos que os desenvolvimentos:

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{L} x \quad (8.15)$$

$$f_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

são válidos no intervalo $(-L, +L)$ sendo A_n e B_n dados por:

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f_p(x) dx \quad (8.17)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_p(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \quad (8.18)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_i(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx \quad (8.19)$$

Tendo em vista duas propriedades das funções pares e ímpares, isto é:

$$\int_{-L}^L f_p(x) dx = 2 \int_0^L f_p(x) dx \quad (8.20)$$

e

$$\int_{-L}^L f_i(x) dx = 0 \quad (8.21)$$

e ainda da equação (8.13); podemos escrever (8.17), (8.18) e (8.19), nas formas:

$$A_0 = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{2} \int_{-L}^L f_p(x) dx = \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L f(x) dx - \int_{-L}^L f_i(x) dx \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (8.22)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \cdot \frac{1}{2} \int_{-L}^L f_p(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx - \int_{-L}^L f_i(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \Rightarrow A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (8.23)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \left(\frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx - \frac{1}{2} \int_{-L}^L f_p(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (8.24)$$

Substituindo as equações (8.15) e (8.16) em (8.13) temos:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{L} x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi}{L} x = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{L} x + B_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \quad (8.25)
 \end{aligned}$$

que representará a função $f(x)$ no intervalo $(-L, L)$ onde A_0 , A_n e B_n de (8.25) são dados pelas equações (8.23) (8.24) e (8.25).

A série (8.25) é chamada série de Fourier completa de $f(x)$, no intervalo $(-L, L)$.

Como exemplo, calculemos a série de Fourier completa da função $f(x) = e^x$ no intervalo $(-\pi, \pi)$, considerada periódica de período 2π .

De (8.25), temos:

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (8.26)$$

calculemos os coeficientes: de (8.23), (8.24) e (8.25), temos:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{2\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{1}{\pi} \sinh \pi$$

Cálculo de A_n e B_n $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^x}{1+n^2} (\cos nx + n \operatorname{sen} nx) \right]_{-\pi}^{\pi} = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{\pi}}{1+n^2} \cos n\pi - \frac{e^{-\pi}}{1+n^2} \cos n\pi \right] = \frac{1}{\pi(1+n^2)} \cos n\pi (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \\
 &= \frac{2(-1)^n}{\pi(1+n^2)} \operatorname{senh} \pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \operatorname{sen} nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^x}{1+n^2} (\operatorname{sen} nx - n \cos nx) \right]_{-\pi}^{\pi} = \\
 &= \frac{1}{\pi(1+n^2)} \left[-ne^{\pi} \cos n\pi + ne^{-\pi} \cos n\pi \right] = \frac{-n \cos n\pi}{\pi(1+n^2)} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \\
 &= \frac{2n(-1)^n}{\pi(1+n^2)} \operatorname{senh} \pi
 \end{aligned}$$

substituindo em (8.26), temos:

$$\begin{aligned}
 f(x) = e^x &= \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} h\pi + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{\pi(1+n^2)} \operatorname{senh} \pi \cos nx - \frac{2n(-1)^n}{\pi(1+n^2)} \operatorname{senh} \pi \operatorname{sen} nx \right)
 \end{aligned}$$

$$f(x) = e^x = \frac{\operatorname{senh} \pi}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)} (\cos nx - n \operatorname{sen} nx) \right]$$

que é o desenvolvimento de $f(x) = e^x$ em série de Fourier completa no intervalo $(-\pi, \pi)$.

11.9 - SÉRIES DE LEGENDRE

Vimos no exemplo 3, em (11.6.2), que para a equação diferencial de Legendre:

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + p(p+1)y = 0 \quad (9.1)$$

ou

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + p(p+1)y = 0, \quad (9.2)$$

Mostramos que sendo $p = n$ inteiro (ou nulo), os polinômios de Legendre $P_p(x)$, que são soluções particulares de (9.1); são as autofunções de (9.1) no intervalo $(-1,+1)$; logo, as autofunções indicadas por:

$$y_n(x) = P_n(x) \quad (9.3)$$

são ortogonais no intervalo $(-1,+1)$, com relação a função peso $p(x) = 1$.

De acordo com os resultados precedentes, podemos desenvolver uma função qualquer $f(x)$ seccionalmente contínua e diferenciável no intervalo $(-1,1)$, em uma série, envolvendo os polinômios de Legendre, da forma:

$$f(x) = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) \quad (-1 < x < 1) \quad (9.4)$$

calculemos os coeficientes de (9.4); da equação (3.6) temos:

$$C_n = \frac{1}{\|P_n\|^2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$$

vimos no exemplo (2) em (11.2.5), que:

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

logo:

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx \quad (9.5)$$

A s\u00e9rie (9.4) com os coeficientes da dos em (9.5) \u00e9 chamada s\u00e9rie de Legendre.

Podemos mostrar que:

$$P_n(x) = (-1)^n P_n(-x) \quad (9.6)$$

permitindo concluir que, para n \u00edmpar os polin\u00f4mios de Legendre s\u00e3o fun\u00e7\u00f5es \u00edmpares, o que para n par os polin\u00f4mios de Legendre s\u00e3o fun\u00e7\u00f5es pares; logo, se $f(x)$ for uma fun\u00e7\u00e3o par, tendo em vistas as equa\u00e7\u00f5es (8.20) e (8.21), os coeficientes em (9.5) s\u00e3o dados por:

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ \u00edmpar} \\ (2n+1) \int_0^1 f(x) P_n(x) dx & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

se $f(x)$ for \u00edmpar, temos:

$$c_n = \begin{cases} (2n+1) \int_0^1 f(x) P_n(x) dx & \text{se } n \text{ \u00edmpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ par} \end{cases} \quad (9.7)$$

OBSERVA\u00c7\u00d5ES:

i) podemos obter o desenvolvimento de uma fun\u00e7\u00e3o $f(x)$ em s\u00e9rie de Legendre num intervalo geral $(-L, L)$; para tal basta substituir x por $\frac{x}{L}$, temos:



$$f(x) = C_0 P_0\left(\frac{x}{L}\right) + C_1 P_1\left(\frac{x}{L}\right) + C_2 P_2\left(\frac{x}{L}\right) + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$-L < x < L \quad (9.8)$$

substituindo x por $\frac{x}{L}$, em (9.5), temos:

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-L}^L f(x) P_n\left(\frac{x}{L}\right) \frac{dx}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{2n+1}{2L} \int_{-L}^L f(x) P_n\left(\frac{x}{L}\right) dx \quad (9.9)$$

que são os coeficientes de (9.8).

ii) Em muitos problemas de contorno, nos quais se usam coordenadas esféricas, é útil a substituição $x = \cos \theta$; neste caso, podemos demonstrar que a equação de Legendre (9.1) se transforma na equação:

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + \cotg \theta \frac{dy}{d\theta} + p(p+1)y = 0 \quad (9.10)$$

e para esta equação, os polinômios de Legendre em $\cos \theta$, dados pela fórmula de Rodrigues são:

$$P_p(\cos \theta) = \frac{1}{2^p p!} \frac{d^p}{d(\cos \theta)^p} (\cos^2 \theta - 1)^p \quad (9.11)$$

Podemos mostrar que para $p = n$ inteiro ou zero, esses polinômios são autofunções da equação (9.10) no intervalo $(0, \pi)$, sendo, portanto, ortogonais neste intervalo; logo, podemos desenvolver uma função $f(\theta)$ em termos dos polinômios de Legendre em $\cos \theta$ no intervalo $(0, \pi)$ isto é:

$$f(\theta) = C_0 P_0(\cos\theta) + C_1 P_1(\cos\theta) + C_2 P_2(\cos\theta) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta)$$

$$0 < x < \Pi \quad (9.12)$$

Calculemos os coeficientes C_n , fazendo $x = \cos\theta$ em (9.5), temos:

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{\Pi}^0 f(\theta) P_n(\cos\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta) d\theta =$$

$$= -\frac{2n+1}{2} \int_{\Pi}^0 f(\theta) \operatorname{sen}\theta P_n(\cos\theta) d\theta$$

logo:

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\Pi} f(\theta) \operatorname{sen}\theta P_n(\cos\theta) d\theta \quad (9.13)$$

A s\u00e9rie (9.12) com os coeficientes da dos em (9.13) \u00e9 chamada s\u00e9rie de Legendre em $\cos\theta$ da fun\u00e7\u00e3o $f(\theta)$ no intervalo $(0, \pi)$.

Veremos a seguir alguns exemplos do de desenvolvimento de uma fun\u00e7\u00e3o em s\u00e9rie de Legendre.

EXEMPLO 1 -

Calculemos os tr\u00eas primeiros termos do desenvolvimento da fun\u00e7\u00e3o (vide figura 9.1).

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-1 < x < 0) \\ x & (0 < x < 1) \end{cases}$$

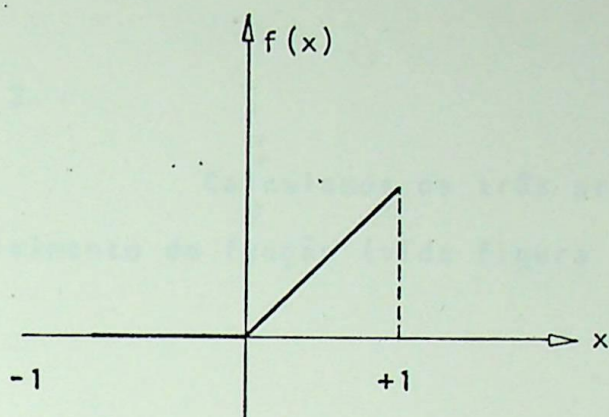


FIG. 9.1 - Gráfico da função $f(x)$ do exemplo 1

Temos de (9.4), que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) \quad (9.14)$$

calculemos os coeficientes C_n ; de (9.5), temos:

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \frac{2n+1}{2} \int_0^1 x P_n(x) dx$$

$$\text{para } n = 0 \Rightarrow P_0(x) = 1 \Rightarrow C_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{4}$$

$$\text{para } n = 1 \Rightarrow P_1(x) = x \Rightarrow C_1 = \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{para } n = 2 \Rightarrow P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \Rightarrow C_2 = \frac{5}{2} \int_0^1 x \frac{1}{2}(3x^2 - 1) dx =$$

$$= \frac{5}{4} \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{16}$$

de (9.14) temos:

$$f(x) = \frac{1}{4} P_0(x) + \frac{1}{2} P_1(x) + \frac{5}{16} P_2(x) + \dots$$

EXEMPLO 2

Calculemos os três primeiros termos do desenvolvimento da função (vide figura 9.2).

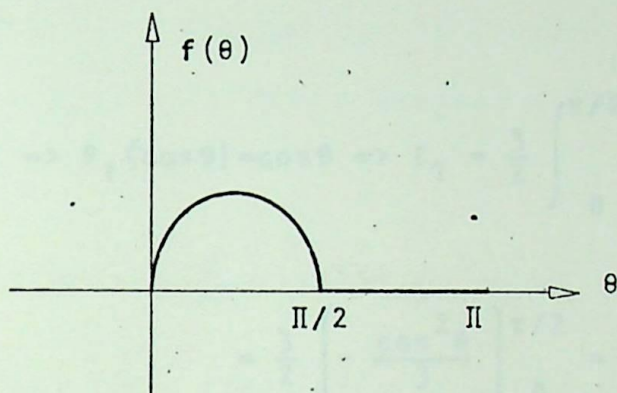


FIG. 9.2 - Gráfico da função $f(\theta)$ do exemplo 2

$$f(\theta) = \begin{cases} \cos \theta & \text{para } 0 < \theta < \pi/2 \\ 0 & \text{para } \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}$$

em série de Legendre em $\cos \theta$.

Temos que de (9.12), que:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \theta) \quad (9.15)$$

calculemos os coeficientes C_n , de (9.13). temos:

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) \operatorname{sen}\theta P_n(\cos\theta) d\theta = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta P_n(\cos\theta) d\theta$$

$$\text{para } n = 0 \Rightarrow P_0(\cos\theta) = 1 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sen}\theta^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{para } n = 1 \Rightarrow P_1(\cos\theta) = \cos\theta \Rightarrow c_1 = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta d\theta =$$

$$= \frac{3}{2} \left(-\frac{\cos^2\theta}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{para } n = 2 \Rightarrow P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4} (3 \cos 2\theta + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{5}{2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \frac{1}{4} (3 \cos 2\theta + 1) d\theta =$$

$$= \frac{5}{8} \left(\frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta \right) =$$

$$= \frac{5}{8} \left(\frac{3}{4} \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{5}{8} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{5}{16}$$

logo em (9.15), temos os três termos do desenvolvimento:

$$f(\theta) = \frac{1}{4} P_0(\cos\theta) + \frac{1}{2} P_1(\cos\theta) + \frac{5}{16} P_2(\cos\theta) + \dots$$

II.10 - SÉRIES DE BESSEL

II.10.1 - ORTOGONALIDADE DAS FUNÇÕES DE BESSEL

Inicialmente, veremos a ortogonalidade das funções de Bessel de 1.^a espécie $J_p(x)$.

Sabemos que as funções de Bessel de 1.^a espécie $J_p(s)$ satisfazem a equação diferencial de Bessel de ordem p , isto é:

$$s^2 \frac{d^2}{ds^2} J_p(s) + s \frac{d}{ds} J_p(s) + (s^2 - p^2) J_p(s) = 0 \quad (10.1)$$

onde p é um número real positivo ou igual a zero, $p \geq 0$.

Fazendo $s = \lambda x$ (10.2) onde λ é uma constante $\lambda \geq 0$, temos:

$$\frac{d}{ds} J_p(s) = \frac{d}{dx} J_p(\lambda x) \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} J_p(\lambda x)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} J_p(s) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} J_p(\lambda x) \right] \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2}{dx^2} J_p(\lambda x)$$

substituindo em (10.1) temos:

$$x^2 \lambda^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2}{ds^2} J_p(\lambda x) + \lambda x \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} J_p(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - p^2) J_p(\lambda x) = 0 =$$

$$\Rightarrow x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_p(\lambda x) + x \frac{d}{dx} J_p(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - p^2) J_p(\lambda x) = 0$$

dividindo por x , temos:

$$x \frac{d^2}{dx^2} J_p(\lambda x) + \frac{d}{dx} J_p(\lambda x) + \left(\lambda^2 x - \frac{p^2}{x} \right) J_p(\lambda x) = 0 \quad (10.2)$$

a qual podemos colocar na forma auto-adjunta, e temos:

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_p(\lambda x) \right] + \left(-\frac{p^2}{x} + \lambda^2 x \right) J_p(\lambda x) = 0 \quad (10.3)$$

comparando com a equação (5.2), temos:

$$r(x) = x \quad q(x) = -\frac{p^2}{x} \quad e \quad p(x) = x$$

com parametro λ^2 , portanto, (10.3) é uma equação de Sturm-Liouville.

Como $r(x) = x$, para $x = 0$ $r(0) = 0$, pelo Teorema 11.1, necessitamos impor apenas uma condição de contorno. Seja a condição homogênea:

$$k_1 J_p(\lambda L) + k_2 J'_p(\lambda L) = 0 \quad (10.4)$$

Tendo em vista o estudo precedente, podemos afirmar que as autofunções associadas a autovalores distintos do problema de Sturm-Liouville constituído da equação (10.3) e da condição (10.4) são ortogonais no intervalo $(0, L)$.

As constantes k_1 e k_2 em (10.4) devem ser não simultaneamente nulas; podemos ter os casos:

- CASO 1 - $k_2 = 0$, logo (10.4) fica:

$$J_p(\lambda L) = 0 \quad (10.5)$$

e temos que $J_p(\lambda x)$ será uma autofunção se, e somente se $J_p(\lambda L) = 0$. Logo, os autovalores λ_n são os zeros positivos de (10.5) e as autofunções correspondentes são:

$$J_p(\lambda_n x) \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.6)$$

- CASO 2 - $k_1 = 0$, logo (10.4) fica:

$$J'_p(\lambda L) = 0 \quad (10.7)$$

os zeros positivos μ_n desta equação são os autovalores e as autofunções associadas são:

$$J_p(\mu_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ quando } p > 0. \quad (10.8)$$

Notemos que, para $\lambda = 0$, a equação de Bessel (10.1) se reduz na equação de Euler.

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_p(x) + x \frac{d}{dx} J_p(x) - p^2 y = 0 \quad (10.9)$$

e $J_p(x)$ fica da forma:

$$J_p(x) = C x^p \quad (10.10)$$

e vemos que para o caso 1, x^p não se anula para $x = L$ logo $\lambda = 0$ não é autovalor neste caso.

Porém, para o caso 2, a função x^p satisfaz (10.7) quando $p = 0$; portanto, $\lambda = 0$ é um autovalor e as autofunções correspondentes tendo em vista (10.6) são

$$J_0(\mu_n x) \quad (10.11)$$

- CASO 3 - $k_1 \neq 0$ e $k_2 \neq 0$

Para este caso, na prática, por muitas razões, a condição (10.3) é substituída por:

$$\lambda J'_p(\lambda L) - h J_p(\lambda L) = 0 \quad \text{para } p > h \quad (10.12)$$

Como esta condição tem coeficiente variável, ela não enquadra nos tipos de condições de contorno por nós exposto. Sem entrarmos em maiores detalhes quanto as possíveis restrições deste caso, diremos que (10.12) tem uma infinidade de zeros positivos η_n , então (10.12) é satisfeita, quando $\lambda = \eta_n$, logo as funções:

$$J_p(\eta_n x) \quad (10.10) \quad n = 1, 2, \dots$$

que satisfazem (10.3) e (10.12) são as autofunções do problema.

Em todos os casos vistos, as autofunções são da forma:

$$y_n = J_p(\lambda_n x) \quad (10.13) \quad n = 1, 2, \dots$$

De acordo com que vimos no teorema 11.1, estas funções são ortogonais no intervalo $(0, L)$, com relação a função peso $p(x) = x^p$; logo, podemos escrever:

$$\int_0^L x J_p(\lambda_m x) J_p(\lambda_n x) dx = 0 \quad \text{para } m \neq n \quad (10.14)$$

Vimos portanto que $J_p(\lambda_n x)$ constitui um sistema completo de funções ortogonais no intervalo $(0, L)$ podemos portanto, pelas considerações anteriores, desenvolver uma função $f(x)$ em uma série dessas funções.

II.10.2 - SÉRIES DE BESSEL DE 1.^a E 2.^a ESPÉCIES

Tendo em vistas as considerações anteriores, podemos representar uma função qualquer $f(x)$ em uma série, envolvendo as autofunções $J_p(\lambda_n x)$ no intervalo $(0, L)$ em relação a função peso $p(x) = x$.

$$f(x) = c_1 J_p(\lambda_1 x) + c_2 J_p(\lambda_2 x) + c_3 J_p(\lambda_3 x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_p(\lambda_n x) \quad (0 < x < L) \quad (10.15)$$

calculemos os coeficientes c_n , da equação (3.6); ; temos, da equação (3.5), que

$$c_n = \frac{1}{||J_p(\lambda x)||^2} \int_0^L x f(x) J_p'(\lambda x) dx \quad n=1, 2 \quad (10.16)$$

da equação (3.5), temos:

$$||J_p(\lambda x)||^2 = \int_0^L x \left[J_p(\lambda x) \right]^2 dx \quad (10.17)$$

calculemos a integral do 2.^o membro; multipliquemos a equação de Bessel (10.2) por $2xJ_p'(\lambda x)$, temos:

$$2x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_p(\lambda x) \frac{d}{dx} J_p(\lambda x) + 2x \frac{d}{dx} \left[J_p(\lambda x) \right]^2 + 2(\lambda^2 x^2 - p^2) J_p(\lambda x) \frac{d}{dx} J_p(\lambda x) = 0$$

a qual podemos escrever na forma:

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^2 \left[\frac{d}{dx} J_p(\lambda x) \right]^2 \right\} + 2(\lambda^2 x^2 - p^2) J_p(\lambda x) \frac{d}{dx} J_p(\lambda x) = 0$$

ou ainda:

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^2 \left(\frac{d}{dx} J_p(\lambda x) \right)^2 \right\} + \frac{d}{dx} \left(\lambda^2 x^2 - p^2 \right) \left\{ J_p(\lambda x) \right\}^2 - 2\lambda^2 x \left\{ J_p(\lambda x) \right\}^2 = 0 \quad (10.18)$$

logo:

$$2\lambda^2 x \left\{ J_p(\lambda x) \right\}^2 = \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \left(\frac{d}{dx} J_p(\lambda x) \right)^2 \right\} + \frac{d}{dx} \left\{ (\lambda^2 x^2 - p^2) \left\{ J_p(\lambda x) \right\}^2 \right\} \quad (10.19)$$

integrando (10.19) de 0 a L, temos:

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 \int_0^L x \left\{ J_p(\lambda x) \right\}^2 dx &= x^2 \left(\frac{d}{dx} \left\{ J_p(\lambda x) \right\}^2 \right) \Big|_0^L + \\ &+ \left\{ (\lambda^2 x^2 - p^2) \left\{ J_p(\lambda x) \right\}^2 \right\} \Big|_0^L = L^2 \left(\frac{d}{dx} J_p(\lambda L) \right)^2 + \\ &+ (\lambda^2 L^2 - p^2) \left\{ J_p(\lambda L) \right\}^2 = \\ &= \int_0^L x \left\{ J_p(\lambda x) \right\}^2 dx = \frac{L^2}{2\lambda^2} \frac{d}{dx} \left\{ J_p(\lambda L) \right\}^2 + \frac{\lambda^2 L^2 - p^2}{2\lambda^2} \left\{ J_p(\lambda L) \right\}^2 \end{aligned} \quad (10.20)$$

temos os seguintes casos:

- CASO 1 - Se $\lambda = \lambda_n$ são os zeros de $J_p(\lambda L)$, logo, de (10.20) e (10.17), temos:

$$\| J_p(\lambda_n x) \|^2 = \frac{L^2}{2\lambda_n^2} \left(\frac{d}{dx} J_p(\lambda_n L) \right)^2 \quad (10.21)$$

de uma propriedade das funções de Bessel, dada por:

$$x \frac{d}{dx} J_p(\lambda x) = p J_p(\lambda x) - \lambda x J_{p+1}(\lambda x) \quad (10.22)$$

para $\lambda = \lambda_n$ e $x = L$, temos:

$$L \frac{d}{dx} J_p(\lambda_n L) = p J_p(\lambda_n L) - \lambda_n L J_{p+1}(\lambda_n L)$$

como:

$$J_p(\lambda_n L) = 0$$

Logo:

$$\frac{d}{dx} J_p(\lambda_n L) = -\lambda_n J_{p+1}(\lambda_n L) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left[J_p(\lambda_n L) \right]^2 = \lambda_n^2 \left[J_{p+1}(\lambda_n L) \right]^2$$

Logo, em (10.21), temos:

$$\|J_p(\lambda_n x)\|^2 = \frac{L^2}{2} \left[J_{p+1}(\lambda_n L) \right]^2 \quad (10.22)$$

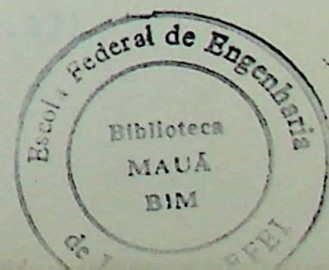
- CASO 2 - Se $\lambda = \mu_n$ são os zeros de $\frac{d}{dx} J_p(\lambda L)$ de (10.20) e (10.21), temos:

$$\|J_p(\mu_n x)\|^2 = \frac{\mu_n^2 L^2 - p^2}{2\mu_n^2} J_p(\lambda_n L)^2 \quad (10.22)$$

No caso particular em que $p = 0$, temos

$$\|J_0(\mu_n x)\|^2 = \frac{L^2}{2} \left[J_0(\mu_n L) \right]^2 \quad (10.23)$$

e de (10.17):



$$||1||^2 = \int_0^L x \, dx = \frac{L^2}{2} \quad (10.24)$$

- CASO 3 - Se $\lambda = \eta_n$ são os zeros de $J'_p(\lambda L) - hJ_p(\lambda L) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \eta_n J'_p(\eta_n L) = hJ_p(\eta_n L)$, de (10.20) e (10.17)
 temos:

$$\begin{aligned} ||J_p(\eta_n x)||^2 &= \frac{L^2}{2\eta_n^2} h^2 \left(J_p(\eta_n L) \right)^2 + \frac{\eta_n^2 L^2 - p^2}{2\eta_n^2} \left(J_p(\eta_n L) \right)^2 = \\ &= \frac{L^2 h^2 + \eta_n^2 L^2 - p^2}{2\eta_n^2} \left(J_p(\eta_n L) \right)^2 \quad p > h \quad (10.25) \end{aligned}$$

Para estes 3 casos, exceto o caso particular $p = 0$, temos, de (10.17), os coeficientes C_n de (10.15), dados por:

- CASO 1 -

$$C_n = \frac{2}{L^2 \left(J_{p+1}(\lambda_n L) \right)^2} \int_0^L x f(x) J_p(\lambda_n x) \, dx \quad (10.26)$$

A série (10.15) com os coeficientes dados por (10.26) é chamada série de Bessel de 1.^a espécie do desenvolvimento de $f(x)$ no intervalo $(0, L)$.

- CASO 2 -

$$C_n = \frac{2\mu_n^2}{(\mu_n^2 L^2 - p^2) \left(J_p(\mu_n L) \right)^2} \int_0^L x f(x) J_p(\mu_n x) \, dx \quad (10.27)$$

No caso particular em que $\lambda = 0$ é um autovalor, vemos que existem autofunções para $p=0$, as quais são $1, J_0(\mu_n x)$.

Para este caso, o desenvolvimento de uma função $f(x)$ em série de Bessel será da forma:

$$f(x) = C_0 + C_1 J_0(\mu_1 x) + C_2 J_0(\mu_2 x) + C_3 J_0(\mu_3 x) + \dots =$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\mu_n x) \quad (0 < x < L) \quad (10.28)$$

De acordo com (10.17), (10.23), (10.24) e (10.16) os coeficientes C_0 e C_n de (10.28) são dados por

$$C_0 = \frac{2}{L^2} \int_0^L x f(x) dx \quad (10.29)$$

$$C_n = \frac{2}{L^2 \left[J_0(\mu_n) \right]^2} \int_0^L x f(x) J_0(\mu_n x) dx \quad (10.30)$$

Uma série de (10.28) com os coeficientes dados por (10.29) e (10.30) é chamada série de Bessel de 2ª espécie.

- CASO 3 -

$$C_n = \frac{2\eta_n^2}{(L^2 h^2 + \eta_n^2 L^2 - p^2) \left[J_p(\eta_n L) \right]^2} \int_0^L x f(x) J_p(\eta_n x) dx \quad p > h \quad (10.31)$$

Para todos os casos considerados, se a função $f(x)$ é seccionalmente contínua, as séries dadas por (10.15) e (10.28) com os coeficientes dados, nos casos respectivos, pelas equações (10.26), (10.27), (10.29) (10.30) e (10.31) convergem para $f(x)$ nos pontos de continuidade do intervalo $(0,L)$; e converge para o valor médio dos limites laterais, isto é:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

nos pontos de descontinuidade do intervalo $(0,L)$.

Veremos a seguir alguns exemplos do desenvolvimento de uma função $f(x)$ em série de Bessel.

EXEMPLO 1 -

Calculemos o desenvolvimento da função $f(x) = 1-x^2$, em uma série de Bessel da forma:

$$f(x) = (1-x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n x) \quad (10.32)$$

no intervalo $(0 < x < 1)$.

Calculemos os coeficientes c_n ; da equação (10.26), temos para $p = 0$, que:

$$c_n = \frac{2}{\left[J_1(\lambda_n)\right]^2} \int_0^1 x (1-x^2) J_0(\lambda_n x) dx \quad (10.33)$$

façamos $w = \lambda_n x \Rightarrow x = \frac{w}{\lambda_n} \Rightarrow dx = \frac{dw}{\lambda_n}$

para: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow w = 0 \\ x = 1 \Rightarrow w = \lambda_n \end{cases}$

logo em (10.33), temos:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{2}{\left[J_1(\lambda_n)\right]^2} \int_0^{\lambda_n} \frac{w}{\lambda_n} \left(1 - \frac{w^2}{\lambda_n^2}\right) J_0(w) \frac{dw}{\lambda_n} = \\
 &= \frac{2}{\lambda_n^4 \left[J_1(\lambda_n)\right]^2} \int_0^{\lambda_n} (\lambda_n^2 w - w^3) J_0(w) dw = \\
 &= \frac{2}{\lambda_n^4 \left[J_1(\lambda_n)\right]^2} \left[\lambda_n^2 \int_0^{\lambda_n} w J_0(w) dw - \int_0^{\lambda_n} w^3 J_0(w) dw \right]
 \end{aligned} \tag{10.34}$$

sabemos, das integrais das funções de Bessel, que:

$$\int x^{p+1} J_p(x) dx = x^{p+1} J_{p+1}(x) + C \tag{10.35}$$

logo:

$$\int w J_0(w) dw = w J_1(w) + C$$

cálculo de $\int w^3 J_0(w) dw$, por parte, façamos: $u = w^2 \Rightarrow du = 2w dw$

$$dv = w J_0(w) dw \Rightarrow v = \int w J_0(w) dw = w J_1(w)$$

logo:

$$\begin{aligned}
 \int w^3 J_0(w) dw &= w^3 J_1(w) - 2 \int w^2 J_1(w) dw = \\
 &= w^3 J_1(w) - 2 w^2 J_2(w) + C
 \end{aligned}$$

substituindo em (10.34), temos:

$$c_n = \frac{2}{\lambda_n^4 \left(J_1(\lambda_n) \right)^2} \left(\lambda_n^2 w J_1(w) - w^3 J_1(w) + 2w^2 J_2(w) \right) \Big|_0^{\lambda_n} =$$

$$= \frac{2}{\lambda_n^4 \left(J_1(\lambda_n) \right)^2} \left(2 \lambda_n^2 J_2(\lambda_n) \right) = \frac{4 J_2(\lambda_n)}{\lambda_n^2 \left(J_1(\lambda_n) \right)^2}$$

Logo, em (10.32), temos o desenvolvimento pedido:

$$f(x) = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\lambda_n)}{\lambda_n^2 \left(J_1(\lambda_n) \right)^2} J_0(\lambda_n x) \quad (0 < x < 1)$$

EXEMPLO 2 - Calculemos o desenvolvimento da função

$f(x) = x^p$, $p \geq 0$, no intervalo $(0,1)$ em uma série de Bessel envolvendo as funções $J_p(\mu_n x)$.

De acordo com o caso 2, devemos fazer duas considerações:

1.^a) $p > 0$, neste caso temos:

$$f(x) = x^p = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_p(\mu_n x) \quad (10.36)$$

da equação (10.27), temos, para $L = 1$

$$c_n = \frac{2\mu_n^2}{(\mu_n^2 - p^2) \left(J_p(\mu_n) \right)^2} \int_0^1 x \cdot x^p J_p(\mu_n x) dx =$$

$$= \frac{2\mu_n^2}{(\mu_n^2 - p^2) \left(J_p(\mu_n) \right)^2} \int_0^1 x^{p+1} J_p(\mu_n x) dx$$

façamos $\mu_n x = w \Rightarrow x = \frac{w}{\mu_n} \Rightarrow dx = \frac{dw}{\mu_n}$

$$\text{para: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow w = 0 \\ x = 1 \Rightarrow w = \mu_n \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2\mu_n^2}{(\mu_n^{2-p^2}) \left(J_p(\mu_n) \right)^2} \int_0^{\mu_n} \frac{w^{p+1}}{\mu_n^{p+1}} J_p(w) \frac{dw}{\mu_n} = \\ &= \frac{2\mu_n^{-p}}{(\mu_n^{2-p^2}) \left(J_p(\mu_n) \right)^2} \int_0^{\mu_n} w^{p+1} J_p(w) dw \end{aligned}$$

de (10.35), temos:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2\mu_n^{-p}}{(\mu_n^{2-p^2}) \left(J_p(\mu_n) \right)^2} \left(w^{p+1} J_{p+1}(w) \right) \Big|_0^{\mu_n} = \\ &= \frac{2\mu_n^{-p} \cdot \mu_n^{p+1} J_{p+1}(\mu_n)}{(\mu_n^{2-p^2}) \left(J_p(\mu_n) \right)^2} \end{aligned}$$

Logo:

$$C_n = \frac{2\mu_n J_{p+1}(\mu_n)}{(\mu_n^{2-p^2}) \left(J_p(\mu_n) \right)^2}$$

substituindo em (10.36), temos:

$$f(x) = x^{p-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n J_{p+1}(\mu_n)}{(\mu_n^{2-p^2}) \left(J_p(\mu_n) \right)^2} J_p(\mu_n x)$$

$$p > 0, \quad 0 < x < 1$$

onde μ_n é o n-ésimo zero positivo de $J'_p(x)$.

2.^a) $p = 0$, neste caso, de acordo com o caso II, equação (10.28), a série de $f(x) = x^0 = 1$, será da forma

$$f(x) = x^0 = 1 = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\mu_n x) \quad (10.37)$$

calculemos C_0 e C_n ; das equações (10.29) e (10.30), para $L = 1$, temos:

$$C_0 = 2 \int_0^1 x \, dx = 1$$

$$C_n = \frac{2}{\left[J_0(\mu_n)\right]^2} \int_0^1 x J_0(\mu_n x) \, dx$$

façamos $\mu_n x = w \Rightarrow x = \frac{w}{\mu_n} \Rightarrow dx = \frac{dw}{\mu_n}$

para: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow w = 0 \\ x = 1 \Rightarrow w = \mu_n \end{cases}$

logo:

$$C_n = \frac{2}{\left[J_0(\mu_n)\right]^2} \int_0^{\mu_n} \frac{w}{\mu_n} J_0(w) \frac{dw}{\mu_n} =$$

$$= \frac{2}{\mu_n^2 \left[J_0(\mu_n)\right]^2} \int_0^{\mu_n} w J_0(w) \, dw$$

de (10.35), temos:

$$c_n = \frac{2}{\mu_n^2 \left(J_0'(\mu_n) \right)^2} \int_0^{\mu_n} w J_1(w) \, dw = \frac{2 J_1(\mu_n)}{\mu_n \left(J_0'(\mu_n) \right)^2} \quad (10.38)$$

tendo em vista que $J_0'(x) = -J_1(x)$, e que a condição a ser satisfeita; para este caso, é $J_0'(\mu_n) = 0$, logo $J_1(\mu_n) = 0$, portanto em (10.38) $c_n = 0$; logo a série (10.37) possui um só termo não nulo $c_0 = 1$.

EXEMPLO 3 - Calculemos o desenvolvimento da função:

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{se } a < x < L \end{cases}$$

vide, figura (10.1);

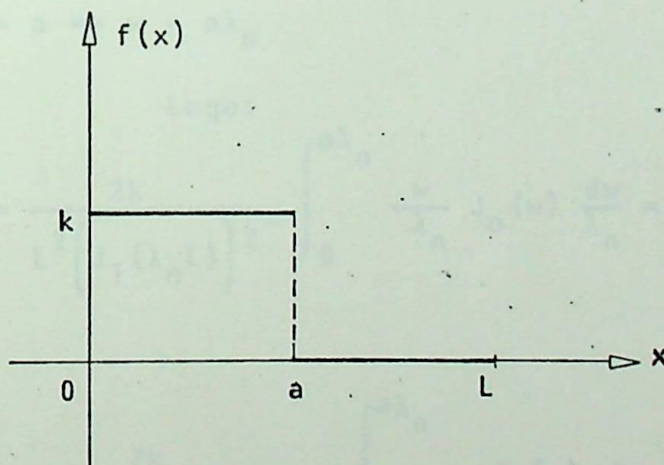


FIG. 10.1 - Representação gráfica da função $f(x)$ do exemplo 3.

numa série de Bessel envolvendo as funções $J_0(\lambda_n x)$, isto é:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n x) \quad (10.39)$$

Calculemos os coeficientes C_n ; da equação (10.26), temos:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{L^2 \left(J_1(\lambda_n L) \right)^2} \int_0^L x f(x) J_0(\lambda_n x) dx = \\ &= \frac{2}{L^2 \left(J_1(\lambda_n L) \right)^2} \int_0^a x J_0(\lambda_n x) dx \end{aligned}$$

façamos $w = \lambda_n x \Rightarrow x = \frac{w}{\lambda_n} \Rightarrow dx = \frac{dw}{\lambda_n}$

para: $x = 0 \Rightarrow w = 0$

para: $x = a \Rightarrow w = a\lambda_n$

Logo:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2k}{L^2 \left(J_1(\lambda_n L) \right)^2} \int_0^{a\lambda_n} \frac{w}{\lambda_n} J_0(w) \frac{dw}{\lambda_n} = \\ &= \frac{2k}{\lambda_n^2 L^2 \left(J_1(\lambda_n L) \right)^2} \int_0^{a\lambda_n} w J_0(w) dw \end{aligned}$$

de (10.35), temos:

$$c_n = \frac{2k}{\lambda_n^2 L^2 \left[J_1(\lambda_n L) \right]^2} \left(w J_1(w) \right)_0^{a\lambda_n} = \frac{2ka J_1(a\lambda_n)}{\lambda_n L^2 \left[J_1(\lambda_n L) \right]^2}$$

substituindo em (10.39), temos o desenvolvimento pedido.

$$f(x) = \frac{2ka}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(a\lambda_n)}{\lambda_n \left[J_1(\lambda_n L) \right]^2} J_0(\lambda_n x)$$

onde λ_n são os zeros de $J_0(x)$.

OBSERVAÇÃO: Como existem outras séries de funções ortogonais, obtidas de autofunções, importantes em certos problemas de contorno, e sendo as considerações análogas aos exemplos dados, faremos uma tabela mais geral, envolvendo as principais séries de autofunções que aparecem nas aplicações.

NOME DA EQUAÇÃO	EQUAÇÃO	FORMA AUTO-ADJUNTA	FUNÇÃO PE SO p(x)	POLINÔMIOS
Legendre	$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + p(p+1)y = 0$	$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + p(p+1)y = 0$	1	$P_p(x) = \frac{1}{2^p p!} (x^2-1)^p$
Legendre em cos θ	$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dy}{d\theta} + p(p+1)y = 0$	$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dy}{d\theta} \right) + p(p+1) \sin \theta = 0$	sen θ	$P_p(\cos \theta) = \frac{1}{2^p p!} \frac{d^p}{d(\cos \theta)^p} (\cos^2 \theta - 1)^p$
Associada de Legendre	$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1) \frac{y}{1-x^2} = 0$	$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[-\frac{m^2}{1-x^2} + n(n+1) \right] y = 0$	1	$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$
Hermite	$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2n y = 0$	$\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{dy}{dx} \right) + 2n e^{-x^2} y = 0$	e^{-x^2}	$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$
Laguerre	$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} + n y = 0$	$\frac{d}{dx} \left(x e^{-x} \frac{dy}{dx} \right) + n e^{-x} y = 0$	e^{-x}	$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$
Associada de Laguerre	$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (m+1-x) \frac{dy}{dx} + (n-m)y = 0$	$\frac{d}{dx} \left(x^{m+1} e^{-x} \frac{dy}{dx} \right) + (n-m) x^m e^{-x} y = 0$	$x^m e^{-x}$	$L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x)$
Tschebyscheff	$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$	$\frac{d}{dx} \left[\sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} \right] + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$	1. ^a Espécie $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 2. ^a Espécie $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	1. ^a Espécie $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ 2. ^a Espécie $U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sin(\arccos x)}$
Bessel	$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - p^2) y = 0$	$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(-\frac{p^2}{x} + \lambda^2 x \right) y = 0$	x	

NOME DA EQUAÇÃO	ORTOGONALIDADE	SÉRIES ORTOGONAIS
Legendre	$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$ $\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) \quad -1 < x < 1$ $C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$
Legendre em $\cos \theta$	$\int_0^{\pi} \sin \theta P_m(\cos \theta) P_n(\cos \theta) d\theta = 0 \quad m \neq n$ $\int_0^{\pi} \sin \theta [P_n(\cos \theta)]^2 d\theta = \frac{2}{2n+1}$	$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \theta) \quad 0 < \theta < \pi$ $C_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta$
Associada de Legendre	$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = 0 \quad n \neq k$ $\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2(n+n)!}{(2n+1)(n-m)!}$	$f(x) = C_n P_n^m(x) + C_{n+1} P_{n+1}^m(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_{m+n} P_{m+n}^m(x) \quad -L < x < L$ $C_k = \frac{2k+1}{2} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_{-1}^1 f(x) P_k^m(x) dx$
Hernite	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = 2^n n!$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x) \quad -\infty < x < \infty$ $C_n = \frac{1}{2^n n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx$
Laguerre	$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$ $\int_0^{\infty} e^{-x} [L_n(x)]^2 dx = (n!)^2$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n(x) \quad 0 < x < \infty$ $C_n = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) L_n(x) dx$
Associada de Laguerre	$\int_0^{\infty} x^m e^{-x} L_n^m(x) L_k^m(x) dx = 0 \quad n \neq k$ $\int_0^{\infty} x^m e^{-x} [L_n^m(x)]^2 dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!}$	$f(x) = C_m L_m^m(x) + C_{m+1} L_{m+1}^m(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_{m+n} L_{m+n}^m(x) \quad 0 < x < \infty$ $C_k = \frac{(k-m)!}{(k!)^3} \int_0^{\infty} x^m e^{-x} L_k^m(x) f(x) dx$

NOME DA EQUAÇÃO	ORTOGONALIDADE	SÉRIES ORTOGONAIS
Tschebyscheff	<p>1.^a Espécie:</p> $\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad m \neq n$ $\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi & \text{se } n=0 \\ \pi/2 & \text{se } n=1,2,\dots \end{cases}$ <p>2.^a Espécie:</p> $\int_{-1}^1 \frac{U_m(x)U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad m \neq n$ $\int_{-1}^1 \frac{U_n(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$	<p>1.^a Espécie:</p> $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(x) \quad -1 < x < 1$ $C_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad C_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad n=1,2,\dots$ <p>2.^a Espécie:</p> $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n U_n(x) \quad -1 < x < 1$ $C_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2) f(x) U_n(x) dx \quad n=1,2,\dots$
Bessel	<p>Caso 1:</p> $\int_0^L x J_p(\lambda_n x) J_p(\lambda_m x) dx = 0 \quad m \neq n$ $\int_0^L x (J_p(\lambda_n x))^2 dx = \frac{L^2}{2} (J_{p+1}(\lambda_n L))^2$ <p>Caso 2:</p> $\int_0^L x J_p(\mu_n x) J_p(\mu_m x) dx = 0 \quad m \neq n$ $\int_0^L x (J_p(\mu_n x))^2 dx = \frac{\mu_n^2 L^2 - p^2}{2\mu_n^2} (J_p(\mu_n L))^2$	<p>Caso 1:</p> $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_p(\lambda_n x) \quad 0 < x < L$ $C_n = \frac{2}{L^2 (J_{p+1}(\lambda_n L))^2} \int_0^L x f(x) J_p(\lambda_n x) dx$ <p>Caso 2:</p> $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_p(\mu_n x) \quad 0 < x < L$ $C_n = \frac{2\mu_n^2}{(\mu_n^2 L^2 - p^2) (J_p(\mu_n L))^2} \int_0^L x f(x) J_p(\mu_n x) dx$
	<p>Em particular para $p = 0$</p> $\int_0^L x J_0(\mu_n x) J_0(\mu_m x) dx = 0 \quad m \neq n$ $\int_0^L x (J_0(\mu_n x))^2 dx = \frac{L^2}{2} (J_0(\mu_n L))^2$ $\int_0^L x dx = \frac{L^2}{2}$	<p>Em particular para $p = 0$</p> $f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\mu_n x) \quad 0 < x < L$ $C_0 = \frac{2}{L^2} \int_0^L x f(x) dx \quad C_n = \frac{2}{L^2 (J_0(\mu_n L))^2} \int_0^L x f(x) J_0(\mu_n x) dx \quad n=1,2,\dots$
	<p>Caso 3:</p> $\int_0^L x J_p(\eta_n x) J_p(\eta_m x) dx = 0 \quad m \neq n$ $\int_0^L x (J_p(\eta_n x))^2 dx = \frac{L^2 h^2 + \eta_n^2 L^2 - p^2}{2\eta_n^2} (J_p(\eta_n L))^2$ <p>para $p > h$</p>	<p>Caso 3:</p> $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_p(\eta_n x) \quad 0 < x < L$ $C_n = \frac{2\eta_n^2}{(L^2 h^2 + \eta_n^2 L^2 - p^2) (J_p(\eta_n L))^2} \int_0^L x f(x) J_p(\eta_n x) dx$ <p>$p > h$</p>

CAPÍTULO III

III.11- "APLICAÇÕES DAS SÉRIES DE FUNÇÕES ORTOGONAIS

III.11.0 - INTRODUÇÃO

Veremos, a título de ilustração, algumas aplicações de séries de funções ortogonais, que aparecem em problemas de contorno.

De acordo com que comentamos em (11.7), alguns problemas de contorno que envolvem equações diferenciais não homogêneas tem, como únicas soluções possíveis, as expressas como séries em termos de autofunções do problema, devido a isto, faremos, como primeira aplicação, um estudo de tal problema.

III.11.1 - PROBLEMAS DE CONTORNO RELATIVOS ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO HOMOGÊNEAS

Consideremos uma equação diferencial linear não homogênea de 2.^o ordem, da forma:

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dy}{dx} \right) + \left[q(x) + \lambda p(x) \right] y = f(x) \quad (11.1)$$

Nosso problema será o de determinar as soluções de (11.1), que satisfaçam as condições de contorno homogêneas, dadas por:

$$k_1 y_1(a) + k_2 y_1'(a) = 0 \quad (11.2)$$

$$l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0$$

Usando o operador

$$L = \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)$$

podemos escrever (11.1), na forma abreviada

$$Ly + \lambda p(x)y = f(x) \quad (11.3)$$

O método que usaremos é uma generalização do que vimos no estudo de autovalores; portanto, depende da existência de um conjunto de funções ortogonais no intervalo $C(a,b)$.

Podemos associar o problema de contorno dado, em um, envolvendo a equação diferencial homogênea

$$Ly + \lambda p(x)y = 0 \quad (11.4)$$

satisfazendo as condições de contorno (11.2). Consideremos que para este problema, as autofunções sejam $Y_n(x)$, correspondentes ao autovalores λ_n , logo, podemos escrever de (11.4), que

$$Ly_n(x) + \lambda_n p(x)y_n(x) = 0 \quad (11.5)$$

Notemos que, pelo teorema 11.1, as autofunções $y_n(x)$ são ortogonais no intervalo $C(a,b)$ em relação a função peso $p(x)$.

Façamos agora, a função desconhecida y de (11.1) ser representada, formalmente, pela série

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n y_n(x) \quad (11.6)$$

Calculemos os α_n de modo que (11.6)

satisfaça (11.3) temos:

$$L \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n y_n(x) + \lambda p(x) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n y_n(x) = f(x)$$

Se L puder ser aplicado termo a termo em (11.6), teremos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n L y_n(x) + \lambda p(x) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n y_n(x) = f(x)$$

de (11.5), temos:

$$L y_n(x) = -\lambda_n p(x) y_n(x), \quad \text{logo:}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda_n p(x) y_n(x) + \lambda p(x) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n y_n(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) \alpha_n y_n(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) \alpha_n y_n(x) = \frac{f(x)}{p(x)} \quad (11.7)$$

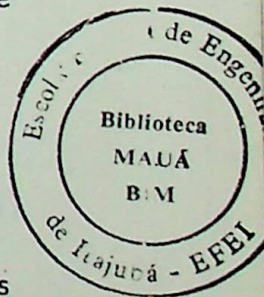
$$\text{consideremos } F(x) = \frac{f(x)}{p(x)} \quad (11.8)$$

Expressemos a função $F(x)$ em uma série de funções ortogonais $y_n(x)$, isto é:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x) \quad (11.9) \quad a < x < b$$

os coeficientes de (11.9) serão dados, de acordo com as equações (3.5) e (3.6), por:

$$c_n = \frac{1}{\|y_n(x)\|^2} \int_a^b p(x) F(x) y_n(x) dx = \frac{\int_a^b p(x) F(x) y_n(x) dx}{\int_a^b [y_n(x)]^2 dx} \quad (11.10)$$



substituindo (11.9) em (11.7), temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) \alpha_n y_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x) \quad (11.11)$$

para que (11.6) seja uma solução da equação (11.1) devemos ter:

$$(\lambda - \lambda_n) \alpha_n = c_n \Rightarrow \alpha_n = \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n} \quad (11.12)$$

logo, em (11.6), a solução do problema não homogêneo, é:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n} y_n(x) \quad (11.13)$$

esta expressão mostra que se $F(x) \neq 0$ o problema de contorno admite, em geral, uma solução, somente se λ não coincide com um dos autovalores do problema homogêneo.

EXEMPLO 1 - Calculemos a solução em série de autofunções, do problema de contorno

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = -x \quad (11.14)$$

$$y(0) = y(\Pi) = 0 \quad (11.15)$$

cálculo das autofunções do problema homogêneo

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad (11.16)$$

satisfazendo as condições (11.15)

$$(D^2 + \lambda)y = 0 \Rightarrow D^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{-\lambda} \\ r_2 = -\sqrt{-\lambda} \end{cases}$$

CASO 1 - $\lambda = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$, logo a solução geral de (11.16), é;

$$y = C_1 + C_2 x, \text{ das condições (11.15), temos:}$$

$$0 = C_1$$

$$0 = C_2 \Pi \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ solução trivial}$$

CASO 2 - $\lambda < 0$ r_1 e r_1 são reais; a solução geral, é:

$$y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}; \text{ das condições (11.15);}$$

temos:

$$0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$0 = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\Pi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\Pi} \Rightarrow 0 = C_1 \left(e^{\sqrt{-\lambda}\Pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\Pi} \right) \Rightarrow$$

$$C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0; y = 0 \text{ solução trivial.}$$

CASO 3 - $\lambda > 0 = r_1 = i\sqrt{\lambda}; r_2 = -i\sqrt{\lambda}$; a solução geral é:

$$y = C_1 \cos\sqrt{\lambda} x + C_2 \text{sen}\sqrt{\lambda} x; \text{ das condições (11.15),}$$

temos:

$$C_1 = 0$$

$$0 = C_2 \text{sen}\sqrt{\lambda} \Pi$$

para $C_2 = 0 \Rightarrow y = 0$ solução trivial.

para C_2 qualquer: $\text{sen}\sqrt{\lambda}\Pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\Pi = n\Pi$, logo $\lambda_n = n^2$
 $n = 1, 2, 3, \dots$, são os autovalores, e as autofunções cor
 respondentes, são:

$$y_n(x) = \text{sen } nx \quad (11.17) \quad n = 1, 2, \dots$$

De acordo com o visto na teoria, a solução do problema não homogênea pode ser expressa na forma

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda - n^2} \operatorname{sen} nx \quad (11.18)$$

da equação (11.10), tendo em vista que $p(x) = 1$ e

$F(x) = -x$, temos:

$$c_n = \frac{-\int_0^{\Pi} x \operatorname{sen} nx dx}{\int_0^{\Pi} \operatorname{sen}^2 nx dx} = -\frac{\left(\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} - \frac{x \operatorname{cos} nx}{n}\right)\Big|_0^{\Pi}}{\frac{1}{2} \left(x - \frac{\operatorname{sen} 2nx}{2n}\right)\Big|_0^{\Pi}} = +\frac{2 \operatorname{cos} n\Pi}{n\Pi}$$

$$\text{logo } c_n = \frac{2}{n\Pi} \operatorname{cos} n\Pi = \frac{2}{n\Pi} (-1)^n$$

logo em (11.18), temos a solução pedida.

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n\Pi(\lambda - n^2)} \operatorname{sen} nx, \text{ devemos ter } \lambda \neq n^2$$

EXEMPLO 2 - Calculemos a solução em série de autofunções do problema de contorno

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x(x - 2\Pi) \quad (11.19)$$

$$y(0) = 0$$

$$(11.20)$$

$$y'(\Pi) = 0$$

Inicialmente, calculemos as autofunções do problema de contorno associado a equação

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad (11.21)$$

satisfazendo as condições (11.20)

$$(D^2 + \lambda)y = 0 \quad D^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{-\lambda} \\ r_2 = -\sqrt{-\lambda} \end{cases}$$

Podemos mostrar, de modo análogo ao exemplo 1, que para $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$, não temos autofunções.

Para $\lambda > 0 \Rightarrow r_1 = i\sqrt{\lambda}$, $r_2 = -i\sqrt{\lambda}$, a solução geral de (11.21), é:

$$y = C_1 \cos\sqrt{\lambda} x + C_2 \sin\sqrt{\lambda} x$$

$y' = -\sqrt{\lambda} C_1 \sin\sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} C_2 \cos\sqrt{\lambda} x$; das condições (11.20) temos:

$$C_1 = 0$$

$$0 = \sqrt{\lambda} C_2 \cos\sqrt{\lambda}\Pi$$

para C_2 qualquer $\cos\sqrt{\lambda}\Pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\Pi = \frac{\Pi}{2} + n\Pi \Rightarrow$

$$\sqrt{\lambda} = n + \frac{1}{2}, \text{ logo os autovalores são:}$$

$\lambda_n = (n + \frac{1}{2})^2$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \sin(n + \frac{1}{2})x \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.22)$$

Calculando a solução do problema não homogêneo, temos, de (11.19), que:

$$\lambda = 0, \quad p(x) = 1 \quad \text{e} \quad F(x) = x(x - 2\Pi)$$

façamos, de acordo com a equação (11.13), a solução da forma

$$y = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{(n + \frac{1}{2})^2} \operatorname{sen} (n + \frac{1}{2})x = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4C_n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x \quad (11.23)$$

Calculemos os coeficientes C_n ; da equação (11.10), temos:

$$C_n = \frac{\int_0^{\Pi} x(x-2) \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}x \, dx}{\int_0^{\Pi} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2n+1}{2}\right)x \, dx} = \frac{32}{\Pi(2n+1)^3}$$

logo, em (11.23), temos a solução pedida

$$y = - \frac{128}{\Pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x$$

III.11.2 - APLICAÇÕES DAS SÉRIES ORTOGONAIS

Os exemplos dados nos capítulos anteriores se referem às equações diferenciais ordinárias, os quais aparecem quando se considera grandezas físicas, que dependem de uma só variável. Nos casos em que os valores das grandezas físicas dependem de mais de uma variável, como, por exemplo, o tempo e outras grandezas que determinam a posição do ponto do campo que se estuda; o problema pode ser frequentemente expresso em termos de uma equação diferencial parcial e certas condições de contorno ou iniciais.

As aplicações, que veremos a seguir, servirá para mostrar a unificação dos resultados sobre as funções e desenvolvimento em séries ortogonais, obtidas nos capítulos anteriores.

Tendo em vista a extensão, que poderia nos levar este estudo, nos limitaremos a alguns exemplos, procurando dar uma idéia geral sobre a importância prática dos estudos feitos nos capítulos anteriores. Ainda, em vários exemplos que serão dados, daremos, sem demonstrações, a equação decorrente de problemas físicos e suas soluções; pois, como ficou dito, o interesse destes exemplos é de mostrar a utilidade prática dos estudos apresentados.

EXEMPLO 1 - Oscilações transversais de uma corda -

Consideremos uma corda tensa, de comprimento l e massa m por unidade de comprimento, fixas nas extremidades, sendo suas coordenadas $(0,0)$ e $(l,0)$. Suponhamos que suas oscilações são de pequenas amplitudes e se realizam no plano que contém os eixos. Desprezando a gravidade, as únicas forças que atuam em um elemento da corda, de comprimento Δx , figura (11.1), são as tensões T e T' em P e Q , respectivamente.

A direção da tensão em P forma um ângulo α com o eixo x , e em Q um ângulo α' . Como a corda se desloca apenas no sentido vertical, as componentes de T e T' na direção horizontal devem cancelar-se; temos

$$T \cos \alpha = T' \cos \alpha' = k \quad (11.24)$$

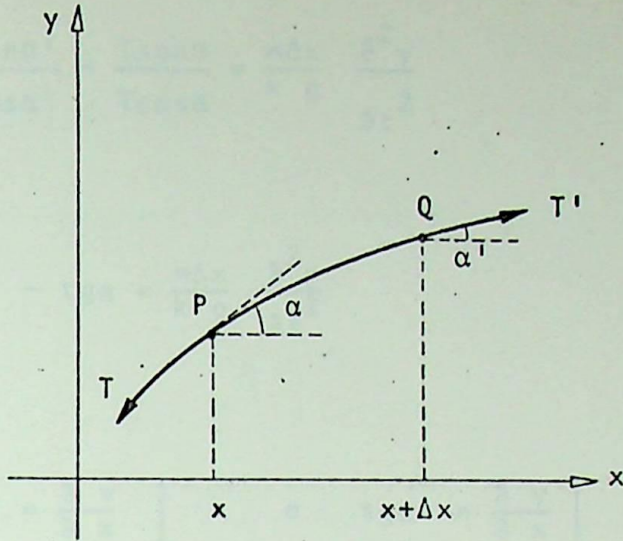


FIG.11.1 - Oscilações transversais de uma corda

onde k é a tensão horizontal constante na corda.

A força total que age no elemento da corda, na direção vertical, é:

$$T' \operatorname{sen} \alpha' - T \operatorname{sen} \alpha \quad (11.25)$$

A aceleração do elemento PQ, na direção vertical é $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$; sendo $m\Delta x$ a massa do trecho considerado, aplicando a segunda lei de Newton, temos:

$$T' \operatorname{sen} \alpha' - T \operatorname{sen} \alpha = \frac{m\Delta x}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (11.26)$$

Dividindo, convenientemente ambos os membros de (11.26) por (11.24), temos:

$$\frac{T' \operatorname{sen} \alpha'}{T' \operatorname{cos} \alpha'} - \frac{T \operatorname{sen} \alpha}{T \operatorname{cos} \alpha} = \frac{m \Delta x}{k g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \Delta x}{k g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (11.27)$$

porém

$$\operatorname{tg} \alpha' = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \alpha = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x$$

temos: de (11.27), que:

$$\frac{\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x}{\Delta x} = \frac{m}{k g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

passando limite para $\Delta x \rightarrow 0$, temos:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{m}{k g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

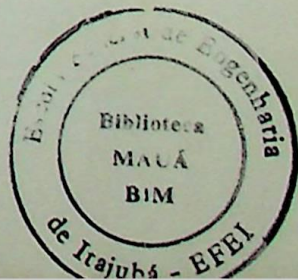
fazendo $a^2 = \frac{k g}{m}$, temos a equação diferencial parcial ,
que rege o problema dado .

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (11.28)$$

Nosso problema será calcular a solução de (11.28), satisfazendo as condições de contorno da das, no problema por:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(l) &= 0 \end{aligned} \quad (11.29)$$

Para tal, calculemos uma solução de (11.28) pelo método do produto.



Consideremos uma solução da forma

$$y = F(x)G(t) \quad (11.30)$$

onde, F é uma função só de x , e G uma função só de t ; te
mos:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = F'G \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F''G$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = FG' \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = FG''$$

substituindo na equação (11.28), temos:

$$F''G = \frac{1}{a^2} FG''$$

separando as variáveis, temos:

$$\frac{F''}{F} = \frac{1}{a^2} \frac{G''}{G} \quad (11.31)$$

Notemos que o 1º membro da equação
(11.31) é uma função só de x e o 2º membro, uma função
só de t ; conseqüentemente, cada membro deve ser igual
a uma constante, chamada constante de separação, então
fazemos:

$$\frac{F''}{F} = \frac{1}{a^2} \frac{G''}{G} = \lambda$$

o qual é equivalente ao par de equações diferenciais li
neares ordinárias

$$F'' - \lambda F = 0$$

(11.32)

$$G'' - \lambda a^2 G = 0$$

Das condições de contorno (11.29)

e da equação (11.30), temos:

$$y(0) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$$

para qualquer t (11.33)

$$y(\ell) = 0 \Rightarrow F(\ell) = 0$$

A 1.^a equação de (11.32) e as condições (11.33) formam um problema de Sturm-Liouville, de modo análogo ao exemplo (1) em (11.4), podemos mostrar que, a menos de constantes, as únicas soluções não triviais deste problema são:

$$F_n(x) = \text{sen } \frac{n\pi}{\ell} x \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.34)$$

correspondentes aos autovalores

$$\lambda_n = - \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \quad (11.35) \quad n = 1, 2, \dots$$

Para estes autovalores, a 2.^a equação de (11.32), fica

$$G_n'' = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} a^2 G_n = 0 \quad (11.36)$$

e sua solução geral é:

$$G_n(t) = A_n \text{sen } \frac{n\pi a}{\ell} t + B_n \text{cos } \frac{n\pi a}{\ell} t \quad (11.37)$$

onde A_n e B_n são constantes arbitrárias; substituindo em (11.30), as equações (11.34) e (11.37), temos:

$$y_n(x, t) = \text{sen } \frac{n\pi}{\ell} x \left(A_n \text{sen } \frac{n\pi a}{\ell} t + B_n \text{cos } \frac{n\pi a}{\ell} t \right) \quad (11.38)$$

cada uma das funções de (11.38), para $n = 1, 2, 3, \dots$ é uma solução da equação (11.28) satisfazendo as condições (11.33).

Sabendo que, para equações diferenciais lineares, se cada função de um conjunto satisfaz a equação, então qualquer combinação linear dessas funções é também uma solução; podemos escrever uma solução da equação (11.28), satisfazendo as condições (11.33), na forma:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \left(A_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t + B_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t \right) \quad (11.39)$$

Para o cálculo das constantes A_n e B_n de (11.39), suponhamos dadas as condições iniciais

$$y(x, 0) = f(x) \quad (11.40)$$

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{x, 0} = g(x)$$

levando estas condições em (11.39), temos:

$$y(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (11.41)$$

derivando (11.39), em relação a t , temos:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \left(\frac{n\pi a}{\ell} A_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t - \frac{n\pi a}{\ell} B_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t \right)$$

da condição (11.40), temos:

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{x, 0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{\ell} A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (11.42)$$

Como as funções $\sin \frac{n\pi}{\ell} x$ $n=1, 2, 3, \dots$ são autofunções e, portanto, ortogonais no intervalo $(0, \ell)$, podemos calcular os coeficientes B_n e $\frac{n\pi}{\ell} A_n$ das equações (11.41) e (11.42), como os coeficientes do desenvol

vimento das funções $f(x)$ e $g(x)$, em termos das autofunções $\text{sen } \frac{n\pi}{l} x$; de acordo com as equações, (3.5) e (3.6) temos:

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{1}{\left| \left| \text{sen } \frac{n\pi}{l} x \right| \right|^2} \int_0^l f(x) \text{sen } \frac{n\pi}{l} x \, dx = \frac{\int_0^l f(x) \text{sen } \frac{n\pi}{l} x \, dx}{\int_0^l \text{sen}^2 \frac{n\pi}{l} x \, dx} = \\
 &= \frac{\int_0^l f(x) \text{sen } \frac{n\pi}{l} x \, dx}{\frac{1}{2} \left(x - \frac{l}{2n\pi} \text{sen } \frac{2n\pi}{l} x \right) \Big|_0^l} \Rightarrow B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \text{sen } \frac{n\pi}{l} x \, dx \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad (11.43)
 \end{aligned}$$

analogamente, temos

$$\frac{n\pi a}{l} A_n = \frac{1}{\left| \left| \text{sen } \frac{n\pi}{l} x \right| \right|^2} \int_0^l g(x) \text{sen } \frac{n\pi}{l} x \, dx = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \text{sen } \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

Logo:

$$A_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l g(x) \text{sen } \frac{n\pi}{l} x \, dx \qquad (11.44)$$

Os coeficientes B_n e A_n , dados pela equação (11.43) e (11.44), levados em (11.39), nos dará a solução $y(x,t)$ satisfazendo as condições iniciais (11.40).

EXEMPLO 2 - Condução do calor ao longo de uma barra-

Consideremos uma barra de seção uniforme A , e comprimento l , cujos lados estejam isolados, de maneira que o fluxo de calor pode ser considerado fluindo completamente ao longo da barra. Seja T a temperatura, num instante t de um ponto P da barra a uma distância x de um extremo.

Admitamos que o fluxo $\phi(x)$ de calor, que flui através de qualquer seção transversal da barra, a uma distância x do extremo é:

$$\phi(x) = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (11.45)$$

onde k é a condutividade térmica do material da barra.

Para uma distância $x + \Delta x$ do extremo da barra o fluxo de calor é aproximadamente dado por:

$$\phi(x+\Delta x) = \phi(x) + \phi'(x) \Delta x \quad (11.46)$$

de (11.45), temos:

$$\phi(x+\Delta x) = -kA \frac{\partial T}{\partial x} - kA \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x \quad (11.47)$$

A quantidade total de calor, que chega ao elemento limitado pelas seções entre as distâncias x e $x+\Delta x$, é:

$$\phi(x) - \phi(x+\Delta x) = kA \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x \quad (11.48)$$

Temos que, se ρ é a densidade e C , o calor específico do material da barra, a quantidade total de calor que chega ao elemento é:

$$\rho C \Lambda \Delta x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (11.49)$$

Igualando as equações (11.48) e (11.49), temos:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho C}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

fazendo $a^2 = \frac{\rho C}{k}$, temos:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t} \quad (11.50)$$

A equação (11.50), chamada equação do calor, se presta a descrever a distribuição da temperatura em uma barra material, como função da posição e do tempo.

Consideremos, como ilustração, as seguintes condições, de modo a chegarmos a uma solução da equação (11.50).

$$T(0, t) = 0$$

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{\ell, t} = -hT(\ell, t) \quad h = \text{constante} \quad (11.51)$$

$$T(x, 0) = f(x)$$

A primeira delas significa que um extremo da barra, de comprimento ℓ , se mantém à temperatura constante 0° ; a segunda, que a barra perde (ou ga

na) calor através da outra extremidade, a uma taxa proporcional à temperatura nesta extremidade, e a terceira, que a distribuição de temperatura inicial é $f(x)$.

Calculemos a temperatura $T(x,t)$, da equação (11.50), satisfazendo as condições (11.51).

Suponhamos uma solução da forma

$$T(x,t) = F(x) G(t) \quad (11.52)$$

analogamente ao visto no exemplo 1, anterior, temos

$$\frac{\partial T}{\partial x} = F' G \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = F'' G$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = FG'$$

substituindo em (11.50), temos:

$$F''G = a^2 FG'$$

separando as variáveis, temos

$$\frac{F''}{F} = a^2 \frac{G'}{G}$$

à qual é equivalente ao par de equações diferenciais ordinárias

$$F'' - \lambda F = 0$$

(11.53)

$$G' - \frac{\lambda}{a^2} G = 0$$

Das duas primeiras condições de contorno em (11.51) e da equação (11.52), temos

$$T(0,t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$$

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{\ell,t} = -hT(\ell,t) \Rightarrow hF(\ell) + F'(\ell) = 0 \quad (11.54)$$

A primeira equação de (11.53) e as condições (11.52) formam um problema de Sturm-Liouville, isto é:

$$F'' - \lambda F = 0 \quad F(0) = 0 \quad hF(\ell) + F'(\ell) = 0$$

Para $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$, podemos mostrar que as soluções são triviais.

Para $\lambda < 0$, temos a solução geral dada por:

$$F = C_1 \cos \sqrt{-\lambda} x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda} x \Rightarrow F' = -\sqrt{-\lambda} C_1 \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda} x + \sqrt{-\lambda} C_2 \operatorname{cps} \sqrt{-\lambda} x$$

das condições, (11.52), temos:

$$C_1 = 0$$

$$h C_2 \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda} \ell + \sqrt{-\lambda} C_2 \operatorname{cos} \sqrt{-\lambda} \ell = 0$$

para C_2 qualquer diferente de zero, temos:

$$h \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda} \ell = -\sqrt{-\lambda} \operatorname{cos} \sqrt{-\lambda} \ell \Rightarrow \operatorname{tg} \sqrt{-\lambda} \ell = -\frac{\sqrt{-\lambda}}{h}$$

fazendo $\sqrt{-\lambda} \ell = \mu$, temos:

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{\ell h} \quad (11.55)$$

A equação (11.53) é uma equação transcendente, sua solução pode ser visualizada graficamente, pela interseção das funções $\operatorname{tg} \mu$ e $-\frac{\mu}{\ell h}$, como visto no exemplo em (11.7), teremos as raízes

$$\dots \mu_{-2}, \mu_{-1}, \mu_0 = 0, \mu_1, \mu_2 \dots$$

logo:

$$\sqrt{-\lambda}l = \mu_n \Rightarrow -\lambda_n = \frac{\mu_n^2}{l^2}$$

portanto os autovalores são:

$$\lambda_n = -\frac{\mu_n^2}{l^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e as autofunções correspondentes são:

$$F_n(x) = \text{sen} \frac{\mu_n}{l} x \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.56)$$

para estes autovalores achados, a 2.^a equação de (11.53)

fica:

$$G'' + \frac{\mu_n^2}{a^2 l^2} G = 0$$

cuja solução geral é:

$$G_n(t) = A_n e^{-\frac{\mu_n^2}{a^2 l^2} t} \quad (11.57)$$

substituindo (11.56) e (11.57) em (11.52), temos as soluções que satisfazem as duas primeiras condições em (11.51), na forma

$$T_n(x, t) = A_n e^{-\frac{\mu_n^2}{a^2 l^2} t} \text{sen} \frac{\mu_n}{l} x$$

Com considerações análogas ao do exemplo 1 anterior, podemos escrever uma solução de (11.50), satisfazendo as condições (11.54), na forma

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{\mu_n^2}{2a^2} t} \operatorname{sen} \frac{\mu_n}{l} x \quad (11.58)$$

Calculamos A_n de modo que (11.58) satisfça a 3.^a equação das condições (11.51), isto é:

$$T(x,0) = f(x)$$

para $t = 0$ em (11.58), temos:

$$T(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{\mu_n}{l} x$$

Como $\operatorname{sen} \frac{\mu_n}{l} x$ são as autofunções do problema e portanto, ortogonais no intervalo $(0,l)$, podemos calcular A_n como os coeficientes do desenvolvimento, em série da função $f(x)$, em termos das autofunções; de acordo com as equações (3.5) e (3.6), temos:

$$A_n = \frac{1}{\left\| \operatorname{sen} \frac{\mu_n}{l} x \right\|^2} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{\mu_n}{l} x \, dx = \frac{\int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{\mu_n}{l} x \, dx}{\int_0^l \operatorname{sen}^2 \frac{\mu_n}{l} x \, dx}$$

substituindo em (11.58), temos uma solução formal do problema em questão

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{\mu_n}{l} x \, dx}{\int_0^l \operatorname{sen}^2 \frac{\mu_n}{l} x \, dx} e^{-\frac{\mu_n^2}{2a^2} t} \operatorname{sen} \frac{\mu_n}{l} x$$

EXEMPLO 3 - Solução da equação de Laplace em coordenadas esféricas, independente de θ -

Podemos mostrar, que, a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (11.59)$$

podé ser expressa, em coordenadas esféricas, pela equação

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (11.60)$$

usando as substituições, vide figura (11.2).

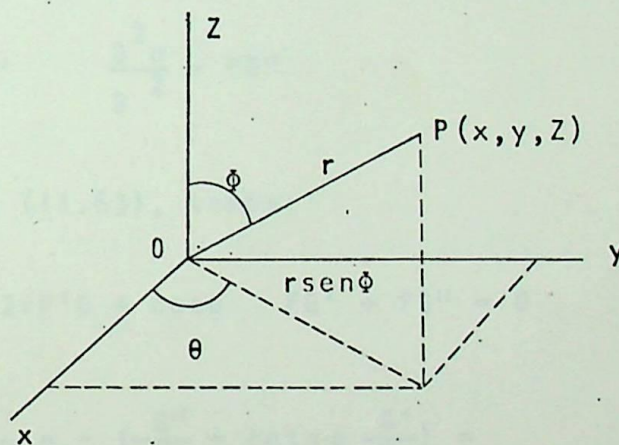


FIG.11.2 - Coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} x &= r \sin \phi \cos \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \phi \end{aligned} \quad (11.61)$$

Resolvamos a equação (11.60), admitindo que a solução seja independente de θ , isto é: $u=u(r, \phi)$ e

e suponhamos que $u(1, \phi) = f(\phi)$; com esta hipótese, a equação (11.60) fica:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\operatorname{sen} \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) = 0$$

ou

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u}{\partial r} + \operatorname{cotg} \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (11.62)$$

Calculemos uma solução de (11.62) pelo método do produto; para tal, suponhamos a solução da forma

$$u(r, \phi) = F(r) G(\phi) \quad (11.63)$$

temos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = F'G \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = F''G$$

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = FG' \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = FG''$$

substituindo em (11.63), temos:

$$r^2 F''G + 2rF'G + \operatorname{cotg} \phi FG' + FG'' = 0$$

$$\frac{r^2 F'' + 2rF'}{F} = - \left(\frac{G''}{G} + \operatorname{cotg} \phi \frac{G'}{G} \right) =$$

que é equivalente ao par de equações:

$$r^2 F'' + 2rF' - \lambda F = 0 \quad (11.64) \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$G'' + \operatorname{cotg} \phi G' + \lambda G = 0 \quad (11.65) \quad 0 \leq \phi \leq \Pi$$

Notemos, de acordo com (9.10), que a equação (11.65) é a equação de Legendre em $\cos \phi$, por

tanto suas autofunções são os polinômios de Legendre em $\cos \Phi$,

$$G_n(\Phi) = P_n(\cos \Phi) \quad (11.66)$$

dados pela equação (9.11), e seus autovalores correspondentes são

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para estes valores de λ , a equação (11.64), fica

$$r^2 F'' + 2rF' - n(n+1)F = 0 \quad (11.67)$$

que é a equação de Euler; cuja soluções são:

$$F_n = A_n r^n + B_n r^{-n-1} \quad (11.68)$$

Para evitar a descontinuidade na origem ($r = 0$), tomamos as soluções:

$$F_n = A_n r^n \quad (11.69)$$

Substituindo (11.66) e (11.69) em (11.63), temos as soluções de (11.62)

$$u_n(r, \Phi) = A_n r^n P_n(\cos \Phi) \quad (11.70) \quad n=0, 1, 2, \dots$$

De modo a satisfazer a condição $u(1, \Phi) = f(\Phi)$, façamos:

$$u(r, \Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \Phi) \quad (11.71)$$

Como vimos em (11.9), os polinômios de Legendre em $\cos \Phi$ são ortogonais no intervalo $(0, \Pi)$; logo, podemos calcular os coeficientes A_n de (11.71), como

os coeficientes do desenvolvimento de $f(\phi)$, em série das autofunções $P_n(\cos\phi)$, temos, de acordo com a equação (9.13), que:

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\phi) \sin\phi P_n(\cos\phi) d\phi \quad (11.72)$$

Portanto, a solução formal da equação (11.62) é:

$$u(r, \phi) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\phi) (2n+1) \int_0^\pi f(\phi) \sin\phi P_n(\cos\phi) d\phi$$

EXEMPLO 4 - Solução da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, independente do ângulo polar θ -

Podemos mostrar que, a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

pode ser expressa em coordenadas cilíndricas, pela equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (11.73)$$

usando as substituições; vide figura (11.3).

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta \quad (11.74)$$

$$z = z$$

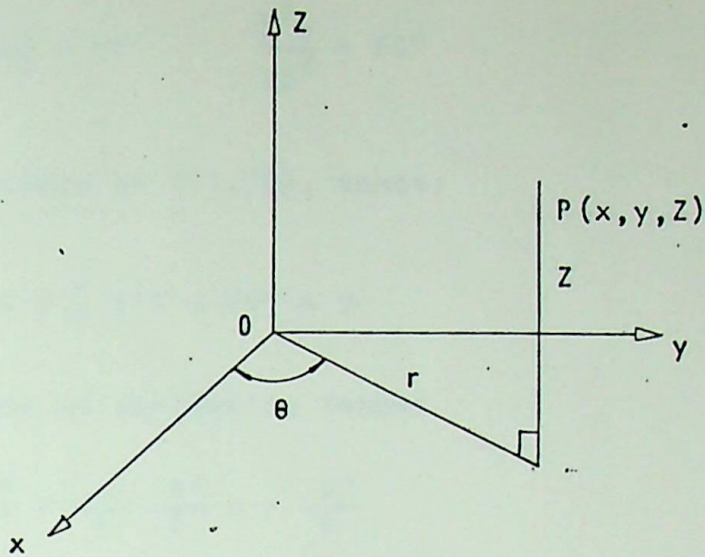


FIG.11.3 - Coordenadas cilíndricas

Resolvamos a equação (11.73), considerando por hipótese que as soluções sejam independentes de θ , na região cilíndrica $r < 1$, $0 < Z < a$, sendo as condições:

$$\begin{aligned} u(1, Z) &= 0 \\ u(r, a) &= 0 \\ u(r, 0) &= f(r) \end{aligned} \quad (11.75)$$

Da hipótese das soluções serem independentes de θ , a equação (11.73), fica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (11.76)$$

Consideremos a solução da forma:

$$u = F(r) G(Z) \quad (11.77)$$

temos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = F'G \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = F''G$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = FG' \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = FG''$$

substituindo em (11.76), temos:

$$F''G + \frac{1}{r} F'G + FG'' = 0$$

separando as variáveis, temos:

$$\frac{F''}{F} + \frac{1}{r} \frac{F'}{F} = - \frac{G''}{G}$$

que é equivalente ao par de equações

$$F'' + \frac{1}{r} F' + \lambda^2 F = 0 \quad (11.78)$$

$$G'' - \lambda^2 G = 0 \quad (11.79)$$

onde λ é uma constante.

Das condições (11.75), e de (11.77), temos:

$$u(1, Z) = 0 \Rightarrow u(1, Z) = F(1)G(Z) = 0 \Rightarrow F(1) = 0 \quad (11.80)$$

$$u(r, a) = 0 \Rightarrow u(r, a) = F(r)G(a) = 0 \Rightarrow G(a) = 0$$

A equação (11.78) é de Bessel de ordem zero, na variável λr ; logo, sua solução geral é:

$$F = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r) \quad (11.81)$$

Para que F seja contínua na origem, de vemos impor $C_2 = 0$; de (11.80), temos:

$$0 = C_1 J_0(\lambda) \Rightarrow J_0(\lambda) = 0$$

logo, os autovalores são $\lambda = \lambda_n$, onde λ_n são os zeros de

$J_0(\lambda)$; portanto, as autofunções correspondentes são:

$$F_n = J_0(\lambda_n r) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.82)$$

Para $\lambda = \lambda_k$, a equação (11.79), fica:

$$G'' - \lambda_n^2 G = 0$$

sua solução geral é:

$$G_n(Z) = B_n \sinh \lambda_n Z + C_n \cosh \lambda_n Z \quad (11.83)$$

da condição (11.80), $G(a) = 0$, temos:

$$B_n \sinh \lambda_n a + C_n \cosh \lambda_n a = 0$$

podemos ter;

$$B_n = -\cosh \lambda_n a$$

$$C_n = +\sinh \lambda_n a$$

substituindo em (11.83)

$$G_n(Z) = -\cosh \lambda_n a \sinh \lambda_n Z + \sinh \lambda_n a \cosh \lambda_n Z = \sinh \lambda_n (a-Z)$$

As soluções de (11.83), são:

$$G_n(Z) = A_n \sinh \lambda_n (a-Z) \quad (11.84)$$

substituindo em (11.77), temos as soluções que satis fazem as condições (11.80), na forma

$$u_n(r, Z) = F_n(r) G_n(Z) = A_n J_0(\lambda_n r) \sinh \lambda_n (a-Z) \quad (11.85)$$

De modo a satisfazer a condição

$u(r,0) = f(r)$, fazemos:

$$u(r,Z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,Z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) \sinh \lambda_n (a-Z) \quad (11.85)$$

temos:

$$u(r,0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) \sinh \lambda_n a \quad 0 < r < 1 \quad (11.86)$$

Como $J_0(\lambda_n r)$ são ortogonais no intervalo $(0,1)$, logo, podemos calcular os coeficientes $A_n \sinh \lambda_n a$ como sendo os coeficientes do desenvolvimento de $f(r)$, em séries de funções ortogonais $J_0(\lambda_n r)$, de acordo com a equação (10.26), temos:

$$A_n \sinh \lambda_n a = \frac{2}{\left[J_1(\lambda_n) \right]^2} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r) dr$$

$$A_n = \frac{2}{\left[J_1(\lambda_n) \right]^2 \sinh \lambda_n a} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r) dr \quad (11.86)$$

substituindo (11.86), em (11.85), temos a solução formal de (11.76), satisfazendo as condições (11.75)

$$u(r,Z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n a) \sinh \lambda_n (a-Z)}{\left[J_1(\lambda_n) \right]^2 \sinh \lambda_n a} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r) dr$$

CONCLUSÃO E OBJETIVOS FUTUROS

Do trabalho apresentado, tendo em vista seu caráter puramente didático, quanto ao seu conteúdo e a sequência de exposição do mesmo, concluímos que a sistematização das séries de funções ortogonais, do modo apresentado, tendo em vista os vários resultados obtidos, mostrou de uma maneira unificada, o estudo de autofunções.

Tal conclusão foi mostrada no Capítulo III, através de exemplos clássicos, cuja única finalidade foi mostrar, de imediato, a importância de autofunções e desenvolvimento em séries ortogonais, nos problemas de contorno, úteis nas aplicações à engenharia, reforçando o ponto de vista segundo o qual esses problemas constituem um corpo unificado do pensamento matemático.

Este trabalho, por nos apresentado, é uma continuação de dois outros trabalhos didáticos, que tivemos ocasião de concluir. Devido a isto, pretendemos, futuramente, continuar com os mesmos, de modo a podermos abranger maiores aplicações relativas a tais questões.

SÍMBOLOS USADOS

R^n	espaço real n dimensional
$C(a,b)$	intervalo de definição
$r(\alpha)$	função gama
$\vec{A} \cdot \vec{B}$	produto escalar ou interno de \vec{A} e \vec{B}
$ \vec{A} $	norma ou comprimento de \vec{A}
δ_{mn}	delta de Kronecker
$P_p(x)$	polinômio de Legendre de grau p
f_i	função ímpar
f_p	função par
$H_n(x)$	polinômio de Hermite de grau n
$T_n(x)$	polinômio de Tschebyscheff de grau n
$L_n(x)$	polinômio de Laguerre de grau n
$J_p(x)$	função de Bessel de 1. ^a Espécie ordem p
$Y_p(x)$	função de Bessel de 2. ^a Espécie ordem p
$P_n(\cos\theta)$	Polinômio de Legendre em $\cos\theta$
$L_m^m(x)$	polinômio associado de Laguerre
$P_m^m(x)$	polinômio associado de Legendre
$\delta(x-x_0)$	função delta de Dirac
$f(x_0^+)$	limite à direita de f em x_0
$f(x_0^-)$	limite à esquerda de f em x_0

BIBLIOGRAFIA

- 1 - BAND WILLIAN - "Introduction to Mathematical Physics"
D. Van Nostrand Company, Inc. - 1959 - New York
- 2 - CHURCHILL, R.V. - "Fourier Series and Boundary Value Problems"
Mc Graw-Hill Company - 2.^a Edição - 1963 - New York
- 3 - COURANT, R e HILBERT, D - "Methods of Mathematical Physics"
Interscience - 1955 - New York
- 4 - HILDEBRAND, F.B. - "Métodos de Cálculo para Ingenieros"
Aguilar, S.A de Ediciones - 2.^a Edição - 1965 - Madrid.
- 5 - KAPLAN, W. e LEWIS, D.J. - "Calculus and Linear Algebra"
Wiley International Edition - John Wiley & Sons, Inc -
1970 - New York.
- 6 - KREIDER, D., KULLER, R.G., OSTBERG, D.R. e PERBINS, F.W -
"An Introduction to Linear Analysis"
Addison-Wesley Publishing Company, Inc. - 1966 -
Massachusetts.
- 7 - KREYSZIG, E. - "Advanced Engineering Mathematics"
A Wiley International Edition, John Willey and Sons
Inc. - 1966 - New York

- 8 - LAMBE, C.G e. TRANTER, C.J. - "Equaciones Diferenciales"
Union Tipografica Editorial Hispano Americana -
1964 - México.
- 9 - LANCASTER, PETER - "Theory of Matrices"
Academic Press - 1969 - New York - London
- 10 - LIPSCHUTG, S. - "Algebra Linear" - Editora McGraw-Hill
do Brasil, Ltda - 1973 - Brasil
- 11 - MARGENAU, H. e LEWIS, D.J. - "Calculus and Linear"
Algebra - Wiley International Edition -
John Wiley & Sons, Inc - 1970 - New York.
- 12 - MORSE, PHILIP M. e FESHBACH, H. - "Methods of Theoretical
Physics" - McGraw-Hill Book Company, Inc.
International student Edition - 1953 - New York.
- 13 - SPIEGEL, M.R. - "Vector Analysis" - Schaun Publishing ,
Co. - 1959 - New York
- 14 - SPOSITO GARRISON - "An Introduction to Quantum Physics"
John Wiley & Sons, Inc. - 1970 - New York.
- 15 - ZAMANSKY, M. - "Introduction à l'Algèbre et l'Analyse Mo
dern" - Dunod - 1967 - Paris.



DATE	08 / 08 / 1986
NO.	
NAME	Lobacar

- 1 - LARBE, C. G. & TRANTER, C. J. - "..."
- 2 - LANCASTER, PETER - "Theory of..."
- 3 - LANGE, H. - "..."
- 4 - LANGE, H. - "..."
- 5 - LANGE, H. - "..."
- 6 - LANGE, H. - "..."
- 7 - LANGE, H. - "..."
- 8 - LANGE, H. - "..."
- 9 - LANGE, H. - "..."
- 10 - LANGE, H. - "..."
- 11 - LANGE, H. - "..."
- 12 - LANGE, H. - "..."
- 13 - LANGE, H. - "..."
- 14 - LANGE, H. - "..."
- 15 - LANGE, H. - "..."

