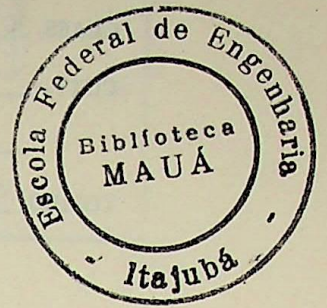


TESE

464

- ANGEL ROBERTO LAURENT -



UM ALGORÍTMO RÁPIDO PARA O
TRAÇADO DO LUGAR DAS RAÍZES
PELO MÉTODO DA CONTINUAÇÃO

ORIENTADOR: PROF. CARLOS ALBERTO DIAS COELHO

TRABALHO DE DISSERTAÇÃO APRESENTADO À COMISSÃO
DE PÓS-GRADUAÇÃO DA ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ COMO
PARTE DOS REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE "MESTRE EM EN-
GENHARIA ELÉTRICA".

ITAJUBÁ, janeiro de 1982.

CLASS.	681.3.058:51-7(043.2)
CUTT.	L 382 a
TUMBO	464

L 382 a



Ministério da Educação e Cultura
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

A N E X O I

PRONUNCIAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, nomeada por Portaria nº 028 de 10 / 02 / 82, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada: "UM ALGORÍTMO RÁPIDO PARA O TRAÇADO DO LUGAR DAS RAÍZES PELO MÉTODO DA CONTINUAÇÃO"

apresenta pronunciamento no sentido de que a Comissão de Pós-Graduação da Escola Federal de Engenharia de Itajubá solicite à DDD (Divisão de Divulgação e Documentação) a expedição do título de Mestre em Engenharia ELÉTRICA na Área de Concentração de SISTEMAS DE POTÊNCIA satisfeitas as demais exigências regimentais à ANGEL ROBERTO LAURENT.

Itajubá, 12 de fevereiro de 1982

1º Examinador
Prof. Wladimir Borgest - ITA

2º Examinador
Prof. Alberto Eduardo Fregosi
BARRETOS

3º Examinador
Prof. Carlos Alberto Dias Coelho
ORIENTADOR



Ministério da Educação e Cultura
 ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

A N E X O I I

FOLHA DE JULGAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA

Título da Dissertação: "UM ALGORÍTMO RÁPIDO PARA O TRAÇADO DO LUGAR DAS RAÍZES PELO MÉTODO DA CONTINUAÇÃO"

Autor: ANGEL ROBERTO LAURENT

JULGAMENTO

EXAMINADORES	CONCEITO	RUBRICA
1º	A+	<i>W Borgest</i>
2º	A+	<i>Alberto Fregosi</i>
3º	A+	<i>Carlos Dias Coelho</i>

Resultado médio: Conceito A+, ou seja aprovado com distinção

Observações: Sujeito a correção de erros tipográficos na preparação da versão definitiva

Itajubá, 12 de fevereiro de 1982

W Borgest

1º Examinador
 Prof. Wladimir Borgest - ITA

Alberto Fregosi

2º Examinador
 Prof. Alberto Eduardo Fregosi
 BARRETOS

Carlos Dias Coelho

3º Examinador
 Prof. Carlos Alberto Dias Coelho
 ORIENTADOR

AGRADECIMENTOS

A Universidad Nacional del Comahue e ã Escola Federal de Engenharia de Itajubã pela oportunidade concedida para a realizaçãõ do curso.

Ao Professor Carlos Alberto Dias Coelho, pela orienta_çãõ e o incentivo que tornaram possí_vel a elab_oraçãõ des_te trabalho.

Ao Professor Alberto Eduardo Fregosi, pela valiosa sug_es_tãõ do tema e sua grande amizade.

Ao Professor Antonio Eduardo Hermeto, pelo const_ante apoio e demonstra_çãõ de confian_ça.

Ã minha esposa Adair Vilas Boas Martins, pela sua grande ajuda e dedica_çãõ.

Ãs secretãrias Regina Célia Ferreira Sales e Maria Apare_cida Sales, pela grande eficiê_ncia e presteza que tive_ram na datilografia dos manuscritos.

A todos aqueles que de alguma maneira cóo_operaram na rea_liza_çãõ do presente trabalho.

À minha esposa

Adair

Aos meus pais e irmão

Oswaldo, Teresa e Marcelo.

RESUMO

Este trabalho descreve um algoritmo muito eficiente para a plotagem do Lugar das Raízes de sistemas lineares invariantes. A técnica pode ser classificada na categoria de métodos de seguimento de ramo. Está baseada no conceito dos métodos da continuação, nos quais a solução de uma família parametrizada de problemas algébricos é convertida na solução de equações diferenciais. O Lugar das Raízes é obtido de maneira sistemática por integração numérica em combinação com o método de Newton-Raphson.

O método teve origem no proposto previamente por C.T. Pan e K.S. Chao [13], do qual difere significativamente em alguns aspectos; foram conseguidas com respeito a ele grandes vantagens em velocidade e exatidão. O Lugar das Raízes de sistemas com retardamento de tempo e funções com número de zeros maior ou igual ao número de polos podem ser obtidos facilmente por este método.

São dadas resumidamente algumas sugestões para outras aplicações da técnica (Lugar das Raízes de sistemas multivariáveis e solução de polinômios).

Os resultados obtidos são ilustrados por meio de exemplos numéricos e gráficos.

ABSTRACT

This work describes a highly efficient algorithm for plotting Root Locus of linear time-invariant systems. The approach may be classified into the category of branch-following methods, which is based on the concept of continuation methods in which the solution of a parametrized family of algebraic problems is converted into the solution of a differential equation. The Root-Locus is obtained in a systematic manner by numerical integration in combination with the Newton-Raphson method.

The technique is developed from the previously proposed by C.T. Pan and K. S. Chao [13], but it differs widely from it in several aspects, so that significant gains in speed and accuracy have been achieved. The Root-Locus of time-delay systems and functions having the same number of zeros and poles or more zeros than poles can be easily obtained by this method.

A few suggestions are given for others applications of the technique (Root-Locus of multivariable systems and computation of roots of polynomials).

The results obtained are illustrated by means of numerical and graphical examples.

LISTA DOS SIMBOLOS PRINCIPAIS

s	Variável complexa
σ	Parte real de s
ω	Parte imaginária de s
$G(s)$	Função de transferência direta
$H(s)$	Função de transferência de realimentação
$B(s)$	Polinômio denominador da função de transferência de laço aberto
$A(s)$	Polinômio numerador da função de transferência de laço aberto
p	Polo
z	Zero
n	Número de polos
m	Número de zeros
K	Ganho da função de transferência de laço aberto
$T(s)$	Função de transferência de laço fechado
λ	Ponto do plano s pertencente ao Lugar das Raízes
$g(s,.)$	Polinômio característico de um sistema
w	Pontos iniciais aproximados nos polos múltiplos
h	Intervalo de integração
T_k	Erro por truncamento estimado
ϵ	Erro por truncamento máximo permitido
α	Coefficiente de segurança

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - Introdução	1
1.1 - O Lugar das Raízes	5
1.2 - Os Métodos da Continuação	11
1.3 - Objetivo e Desenvolvimento da Dissertação ..	19
CAPÍTULO 2 - O Lugar das Raízes pelo Método da Continuação	23
2.1 - Versão de C.T. Pan e K.S. Chao	23
2.2 - A Combinação Método de Integração-Método Iterativo	26
2.3 - Condições Iniciais de Integração	35
2.4 - Pontos Múltiplos	38
CAPÍTULO 3 - Variação do Intervalo de Integração e Utilização de Escalas Mistas	51
3.1 - Variação do Intervalo de Integração	52
3.1.1 - Estimação Prática do Erro	55
3.1.2 - Estratégia de Ajuste do Intervalo de Inte gração	57
3.1.3 - Estabilidade	63
3.2 - Utilização de Escalas Mistas	67
CAPÍTULO 4 - Exemplos Ilustrativos	70
CAPÍTULO 5 - Algumas Generalizações e Extensão do LR pelo Méto do da Continuação	83

CAPÍTULO 5

5.1 - O LR em função de Qualquer Parâmetro	83
5.2 - O LR de Sistemas de Múltiplas Entradas e Saídas	86
5.3 - O LR de Sistemas com Retardamento de Tempo	92
5.4 - Resolução de Polinômios pelo LR	96

CAPÍTULO 6 - Conclusões	104
-------------------------------	-----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	107
----------------------------------	-----

APÊNDICE I - Fluxogramas do Programa	112
--	-----

APÊNDICE II - Listagem do Programa	115
--	-----

CAPITULO I

INTRODUÇÃO

Recordando as primeiras tentativas de estudo dos sistemas usando técnicas específicas, pode-se mencionar Nyquist, Bode, Harris, Hall, Brown, Campbell, Nichols etc., apresentando suas análises e projetos através de métodos de resposta em frequência. Isto representou um considerável avanço e permitiu solucionar problemas de projeto por meio da análise e da compensação dos sistemas propostos. Mas a dificuldade consistiu em que, salvo em casos muito simples, o conhecimento da resposta transitória do sistema era aproximado mediante relações empíricas ou semi-empíricas, que às vezes nem sequer forneciam informação sobre o possível erro dessas aproximações. Por isso, o projeto no domínio da frequência não foi completamente satisfatório naqueles problemas em que é imprescindível se conhecer com precisão o comportamento transitório.

Nos fins da década de 1940 e princípios da de 1950, com base na teoria das funções de variáveis complexas e da transformada de Laplace, os trabalhos de investigação foram se desenvolvendo para a utilização de todo o plano da variável independente s e não somente seu eixo imaginário $j\omega$, estabelecendo assim a possibilidade de se conhecer simultaneamente as respostas no tempo e na frequência.

Como parte destas investigações, destacam-se os trabalhos de W. R. Evans, que, baseado no conceito já desenvolvido anteriormente de Função de Transferência e no fato de

que, nos sistemas realimentados mais usuais, ela é uma função algébrica racional, desenvolveu um método gráfico conhecido como Lugar das Raízes (LR). Deu conhecimento do mesmo em um artigo em 1948 [1]. Também através de um artigo [2], indicou suas aplicações ao projeto de sistemas. Finalmente o incluiu como parte principal de um livro sobre dinâmica de sistemas de controle [3].

O método é baseado em uma técnica gráfica para se obter as raízes de um polinômio. O LR é um lugar geométrico que representa os valores das raízes de um polinômio de coeficientes reais quando se varia o valor de um parâmetro que afeta um ou vários de seus coeficientes.

Do LR pode-se conhecer o comportamento de um sistema (tanto no domínio do tempo como da frequência), a influência dos diversos parâmetros sobre ele e a forma de se obter o comportamento desejado. O LR conjuga a possibilidade de uma rápida avaliação qualitativa com a segurança de uma determinação quantitativa exata. Estas qualidades fizeram com que esta técnica fosse e ainda seja muito utilizada. Prova disto é sua crescente utilização, nos últimos anos, em estudos relacionados com estabilidade dinâmica de sistemas de potência. Algumas publicações a respeito são brevemente resumidas a seguir.

Em 1975 e 1979 foram publicados trabalhos [4], [5] descrevendo metodologias para diminuir oscilações nas linhas de interligação inserindo estabilizadores nos sistemas de excitação, aplicadas com excelentes resultados a uma central da "Saskatchewan Power Corporation System" e a central de Monticello respectivamente, ambas nos Estados Unidos.

P. Anderson e A. Fouad [6] em seu livro sobre controle e estabilidade dos sistemas de potência, editado em 1977, fazem uso intensivo do LR, bem como das técnicas de resposta em frequência.

Num artigo no ano de 1979 A. DeCarlo e R. Saeks [7] apresentaram um método para obter numericamente, utilizando o método da continuação, as trajetórias dos autovalores de um sistema interconectado partindo dos autovalores dos subsistemas, permitindo estudar a estabilidade do sistema composto em termos de componentes e informação da interconexão.

Em 1980 foi realizado um estudo [8] no sistema elétrico peruano para eliminar oscilações eletromecânicas, por inserção de estabilizadores e escolha adequada de geradores, a partir de cálculo digital de autovalores e autovetores.

Também em 1980 Z. Elrazaz e N. Sinha [9] publicaram uma técnica para determinar as trajetórias dos autovalores para grandes variações nos parâmetros dos sistemas de potência, utilizando o conceito de sensibilidade.

Embora o método do LR possa, por si só, oferecer resposta a toda questão que surja durante a análise e o projeto de um sistema de controle pelo enfoque clássico, para muitos usuários vem a ser mais simples executar o processo de tentativa e erro, filosofia básica do enfoque clássico, no método da resposta em frequência, e utilizar o método do LR só para comprovar o transitório obtido.

As extensões para sistemas multivariáveis são difíceis. Por esta razão, no caso específico de sistemas de po-

tência, são mais utilizadas outras técnicas, como a simples simulação.

Pela importância do LR houve o esforço de desenvolver meios auxiliares eficientes de obtê-lo, especialmente através de computação analógica [10] e digital [11], [12]:

Sobressai nos últimos anos um trabalho de C.T. Pan e K.S. Chao [13] publicado em 1978, baseado na aplicação do método da continuação. A grosso modo consiste na obtenção da plotagem por integração numérica. Em 1980 O. A. Sebakhly [14] indicou que o algoritmo sugerido por C.T. Pan e K.S. Chao está implícito no conceito de sensitividade, que mede o efeito das variações dos parâmetros na posição das raízes, introduzido por Bode e discutido em vários textos de engenharia de controle [18], [19]. Em abril de 1981 D. Ricciulli e A. Fregosi [15] generalizaram o método para valores negativos do parâmetro variável e propuseram um uso mais intensivo do método iterativo de Newton-Raphson como procedimento auxiliar e a possibilidade de plotar o LR em escalas mistas (linear-logarítmicas).

O presente trabalho é o resultado de pesquisas destinadas a diminuir o número de pontos necessários a serem calculados, e conseqüentemente o tempo de computação, devido a que o método da continuação proposto por C.T. Pan e K.S. Chao para obter o LR torna-se proibitivo quando existem polos e/ou zeros muito distantes entre si e especialmente quando se deseja ou existe a necessidade de obter o LR numa faixa muito grande de valores do parâmetro variável.

Nas duas seções seguintes são dadas as equações e conceitos fundamentais do LR e dos métodos da continuação.

Os objetivos e conteúdo do resto do trabalho serão melhor esclarecidos no final do capítulo.

1.1 O LUGAR DAS RAÍZES

Seja o sistema de controle realimentado representado esquematicamente na figura 1.1, cujas funções de transferência direta e de realimentação são dadas por quocientes de polinômios como segue:

$$G(s) = K_G \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \quad \text{e} \quad H(s) = K_H \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

A função de transferência a laço aberto \bar{e} da da por:

$$G(s) H(s) = K_G K_H \frac{N_G(s) N_H(s)}{D_G(s) D_H(s)}$$

ou

$$G(s) H(s) = K \frac{A(s)}{B(s)} = K \frac{(s-z_1)(s-z_2) \dots (s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_n)} \quad (1.1-1)$$

onde $A(s) = N_G(s) N_H(s)$, $B(s) = D_G(s) D_H(s)$ e $K = K_G K_H$ é o ganho de laço aberto e usualmente $m \leq n$.

A função de transferência de laço fechado \bar{e} :

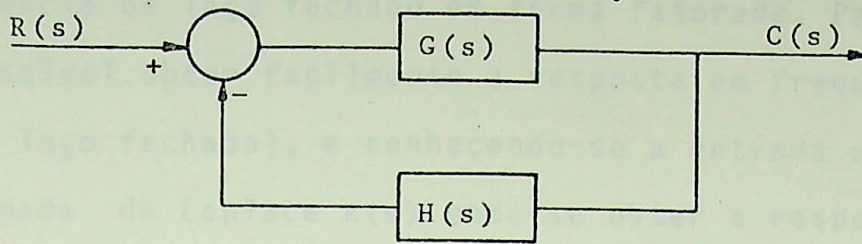


FIGURA 1.1 - Sistema de controle realimentado

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s) H(s)}$$

ou

$$T(s) = \frac{K_G N_G(s) D_H(s)}{N_G(s) N_H(s) + K_G K_H D_G(s) D_H(s)} = \frac{K_G N_G(s) D_H(s)}{B(s) + K A(s)} \quad (1.1-2)$$

O LR para a função de transferência $T(s)$ é definido como o lugar geométrico dos polos de $T(s)$ quando $|K|$ varia de zero a infinito. Este diagrama consiste do conjunto de pontos denotado por ℓ , pertencentes ao plano complexo s ($s=\sigma+j\omega$), tal que:

$$g(s,K) = B(s) + K A(s) = 0 \quad (1.1-3)$$

ou seja:

$$\ell = \{s/g(s,K) = 0\}$$

Conhecidos os zeros de $T(s)$ (Raízes de $N_G(s)$)

e $D_H(s)$) com a determinação de seus polos tem-se a função de transferência de laço fechado em forma fatorada. Partindo-se dela, é possível obter facilmente a resposta em frequência do sistema (Em laço fechado), e conhecendo-se a entrada $r(t)$ e sua transformada de Laplace $R(s)$ pode-se obter a resposta no tempo $c(t)$, dada pela antitransformada de Laplace de $C(s) = R(s) T(s)$. Daí a importância da determinação das raízes de $g(s, k)$.

As dificuldades para se obter estas raízes aparecem quando o grau do polinômio é maior que 3. Para complicar ainda mais o panorama, no estudo da estabilidade e do comportamento do sistema é imprescindível analisar as variações destas raízes em face das variações do valor de K . Muitas vezes não se dá outra limitação a variação desse parâmetro que a de ser sempre seu valor um número real. Mesmo naquelas situações em que, por razões físicas, a faixa de variação de K seja limitada ($K_{\min} \leq K \leq K_{\max}$), pode-se considerar o conjunto de seus valores possíveis como um subconjunto dos números reais.

Exemplo 1.1 Apresenta-se a seguir um exemplo que poderia ser resolvido sem necessidade da construção de um LR. Não obstante permitirá definir componentes e algumas propriedades do LR. Sejam os polinômios seguintes:

$$B(s) = s^2 + 2s \rightarrow p_1 = 0 ; p_2 = -2 \quad (1.1-4)$$

$$A(s) = s^2 + 2s + 2 \rightarrow z_1 = -1 + j ; z_2 = -1 - j \quad (1.1-5)$$

Desta forma $g(s, K)$ será:

$$B(s) + K A(s) = s^2 + 2s + K (s^2 + 2s + 2) \quad (1.1-6)$$

ou

$$B(s) + K A(s) = s^2 (1 + K) + 2s (1 + K) + 2K$$

de onde

$$s_1 = -1 + \sqrt{\frac{1-K}{1+K}} \quad \text{e} \quad s_2 = -1 - \sqrt{\frac{1-K}{1+K}} \quad (1.1-7)$$

Determinando-se o valor das duas raízes s_1 e s_2 em função de K , pode-se construir um gráfico como o da figura 1.2.

As convenções gráficas usadas para representar o LR foram as seguintes:

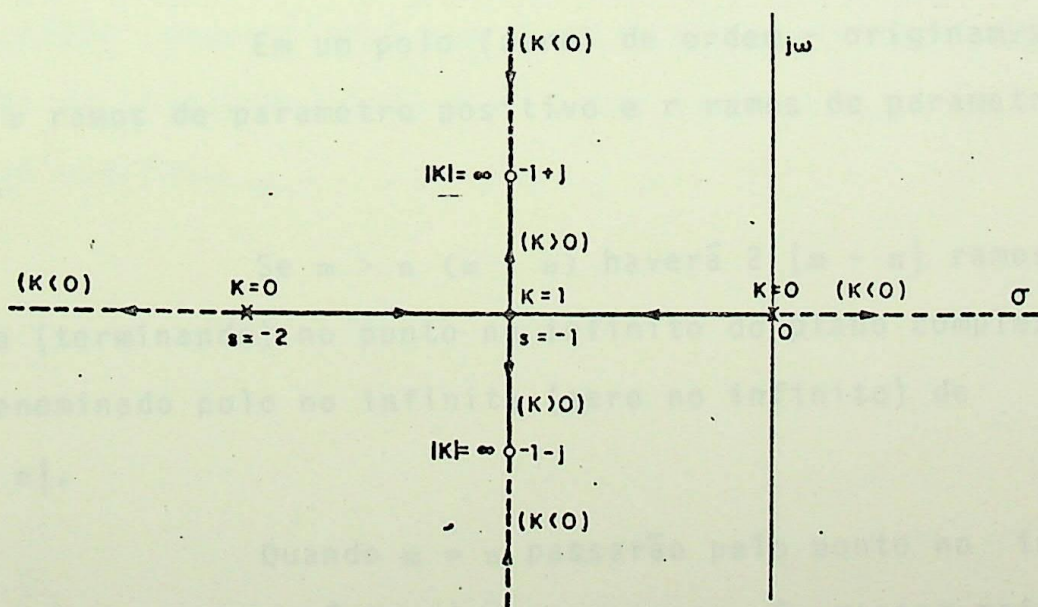


FIGURA 1.2 - LR correspondente a Equação (1.1-6)

- 1) As raízes de $B(s)$ foram representadas com um "x".
- 2) As raízes de $A(s)$ foram representadas com um "0".
- 3) As raízes de $g(s,K)$ para valores de $K > 0$ (parametro positivo) foram representadas por linhas cheias.
- 4) As raízes de $g(s,K)$ para valores de $K < 0$ (parametro negativo) foram representadas por linhas tracejadas.

As linhas orientadas do LR, tal que sobre cada uma delas $|K|$ varia monotonamente entre zero e infinito, serao denominados ramos. Na Figura 1.2 para $K = 1$ tem-se um ponto comum aos dois ramos de parametro positivo, a partir do qual a escolha da continuação dos ramos é arbitraria. Um ponto como este será denominado ponto múltiplo. Será um ponto múltiplo de ordem r , todo aquele que, não sendo polo nem zero, seja comum a r ramos. (O do exemplo é de ordem 2).

Os ramos do LR começam nas raízes de $B(s)$ ou polos $(K = 0 \Rightarrow B(s) + K A(s) = B(s))$, e terminam nas raízes de $A(s)$ ou zeros $(|K| \rightarrow \infty \Rightarrow B(s) + K A(s) \rightarrow K A(s))$.

Em um polo (zero) de ordem r originam-se (terminam) r ramos de parametro positivo e r ramos de parametro negativo.

Se $m > n$ ($m < n$) haverá $2 |m - n|$ ramos começando (terminando) no ponto no infinito do plano complexo que será denominado polo no infinito (zero no infinito) de ordem $|m - n|$.

Quando $m = n$ passarão pelo ponto no infinito um mínimo de um e um máximo de $m = n$ ramos. Se passar mais de um ramo, deverá haver ali um ponto múltiplo (No exempl

plo existe um ponto múltiplo no infinito de ordem 2 nos ramos de parâmetro negativo).

Quando o grau do polonômio $g(s,K)$ é maior que 3, como já foi mencionado, não é possível, em geral, obter expressões explícitas do tipo (1.1-7) para suas raízes como funções do parâmetro K . Nestes casos o conjunto das propriedades dos LRs, adequadamente conhecidas e interpretadas, podem ser utilizadas como regras construtivas de um LR. Para um tratamento completo deste tema pôde-se recorrer à Referência [16], na qual foi baseada a maior parte desta seção.

Mediante a aplicação destas regras, é possível a um usuário experiente construir com relativa facilidade um LR em forma aproximada. Mas as dificuldades crescem com o grau de $g(s,K)$, sendo especialmente difícil e trabalhosa a obtenção de pontos exatos e os correspondentes valores de K , sem recursos computacionais adequados. Por estas razões o atrativo de um algoritmo computacional que permita de maneira automática a obtenção do LR com precisão e ao mesmo tempo o valor de K em forma quase contínua.

1.2 OS MÉTODOS DA CONTINUAÇÃO

São apresentados nesta seção, baseada na Referência [17], os métodos da continuação. Preferiu-se dar uma idéia geral das diferentes variações destes métodos e não são das possibilidades que tem aplicação direta na plotagem do LR, devido a serem pouco conhecidas e não existirem nos textos comuns de análise numérica.

A maioria dos métodos iterativos, convergem à solução x^* de $F(x) = 0$, onde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m(x) \end{bmatrix}$$

somente se as aproximações iniciais estão suficientemente perto de x^* . Os métodos da continuação podem ser considerados como uma tentativa de dilatar o domínio de convergência de um método iterativo dado, ou, alternativamente, como um procedimento para obter pontos suficientemente próximos da solução.

Em muitas situações práticas, o problema pode depender de uma maneira natural de um parametro t , e, quando este parametro é igual a um valor especificado, digamos 1, então resulta a função $F(x)$, enquanto para $t = 0$ o sistema resultante $F_0(x) = 0$ tem a solução conhecida x_0 . Mais precisamente, ao invés de uma simples função F , temos uma família H tal que:

$$H(x,0) = F_0(x) , H(x,1) = F(x) \quad (1.2-1)$$

onde a solução x_0 de $H(x,0) = 0$ é conhecida, e se deseja resolver a equação $H(x,1) = 0$.

Se F não depende naturalmente de um certo parâmetro t , sempre pode-se definir a família H satisfazendo (1.2-1) em várias maneiras. Por exemplo, podemos citar:

$$H(x,t) = t F(x) + (1 - t) F_0(x) , 0 \leq t \leq 1 \quad (1.2-2)$$

com uma dada função F_0 para a qual a solução x_0 de $F_0(x) = 0$ é conhecida, ou

$$H(x,t) = F(x) + (t - 1) F(x_0) , 0 \leq t \leq 1 \quad (1.2-3)$$

onde x_0 é fixado. Note que (1.2-2) pode-se obter de (1.2-3) para $F_0(x) = F(x) - F(x_0)$.

Não importando como H foi obtido, considere-se a equação

$$H(x,t) = 0 , 0 \leq t \leq 1 \quad (1.2-4)$$

e suponha-se que (1.2-4) tem para cada $0 \leq t \leq 1$ a solução $x = x(t)$ a qual depende continuamente de t . Em outras palavras, assume-se que existe a função contínua x tal que:

$$H(x(t),t) = 0 , 0 \leq t \leq 1 \quad (1.2-5)$$

Então x descreve uma curva com um ponto inicial x_0 e um ponto final na solução $x^* = x(1)$ de $F(x) = H(x,1) = 0$.

Como uma primeira aproximação para obter $x = x(1)$, dividimos o intervalo $0 \leq t \leq 1$ em n partes tais que

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_n = 1 \quad (1.2-6)$$

e consideramos a solução dos problemas

$$H(x, t_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.2-7)$$

por algum método iterativo; o qual usa a solução x_{i-1} do $(i-1)$ -ésimo problema como uma aproximação inicial para resolver o (i) -ésimo problema. Se $t_{i+1} - t_i$ é suficientemente pequeno, então, x_i será uma aproximação de x_{i+1} suficientemente boa para acontecer a convergência.

Agora claramente, algumas iterações permitirão resolver cada problema (i) . Se, por exemplo, o método de Newton-Raphson é usado e se $m_i - 1$ iterações são realizadas, temos a seguinte representação explícita

$$x_{i, k+1} = x_{i, k} - \left[\frac{\partial H(x_{i, k}, t_i)}{\partial x} \right]^{-1} H(x_{i, k}, t_i), \quad k=0, \dots, m_i-1,$$

$$x_{1,0} = x_0, \quad x_{i+1,0} = x_{i, m_i}, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (1.2-8)$$

Após $i = N - 1$ a iteração de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\partial H(x_k, 1)}{\partial x}^{-1} H(x_k, 1), \quad k=k_0, \dots, \quad x_{k_0} = x_{N, m_N} \quad (1.2-9)$$

converge para $x(1)$.

Como um exemplo de (1.2-8) e (1.2-9), considere a equação (1.2-3) e suponha que sã uma iteraçãõ de Newton-Raphson ã realizada para obter a soluçãõ de cada problema (1.2-7). Entãõ temos o processo:

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{-1} F(x_k) + (t_k - 1) F(x_0), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{-1} F(x_k), \quad k = N, N+1, \dots \quad (1.2-10)$$

onde $F'(x_k)$ ã a matriz jacobiana de $F(x_k)$.

Note que nesta discussãõ, o uso do mÃtodo de Newton-Raphson ã somente ilustrativo, e os mesmos princÃpios podem ser aplicados a outro processo iterativo.

Vamos considerar a seguir uma forma diferente para obter a soluçãõ de (1.2-4). Assumindo que x satisfazendo (1.2-5) ã continuamente diferenciãvel em $0 \leq t \leq 1$ e que H tem derivada parcial contÃnua com respeito a x e t . Definimos

$$\phi(t) = H(x(t), t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.2-11)$$

que serã continuamente diferenciãvel para $0 \leq t \leq 1$ e que

$$\phi'(t) = \frac{\partial H(x(t), t)}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial H}{\partial t}(x(t), t) \quad (1.2-12)$$

Desde que $x = x(t)$ satisfaz (1.2-5), temos $\phi'(t) = 0$ para todo t , e conseqüentemente, x satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{\partial H(x(t), t)}{\partial x} x'(t) = \frac{-\partial H(x(t), t)}{\partial t}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.2-13)$$

No que segue, assumiremos que $\partial H/\partial x$ não é singular para todo x e t em consideração e escrevemos (1.2-13) na forma

$$x'(t) = - \frac{\partial H(x, t)}{\partial x}^{-1} \frac{\partial H}{\partial t}(x, t), \quad 0 \leq t \leq 1, H(x(0), 0) = 0 \quad (1.2-14)$$

Consideremos agora a solução de (1.2-13) aproximada por integração numérica. Um dos mais simples esquemas de integração é o método de Euler, o qual para a equação diferencial

$$x' = f(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.2-15)$$

e a partição (1.2-6) toma a forma

$$x_{k+1} = x_k + (t_{k+1} - t_k) f(x_k, t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.2-16)$$

e no caso de (1.2-3), (1.2-16) assume a forma simples

$$x_{k+1} = x_k - h_k F'(x_k)^{-1} F(x_0), \quad k=0, \dots, N-1, \quad h_k = t_{k+1} - t_k \quad (1.2-17)$$

Note que o processo (1.2-17) tem uma certa se

melhança com o método de Newton-Raphson. Para analisar a conexão entre os dois processos, introduzimos a mudança de variável $t = 1 - e^{-\tau}$. Então τ varia de 0 a $+\infty$ com t variando de 0 a 1, e, em consequência, (1.2-3) assume a forma

$$H(x, \tau) = F(x) - e^{-\tau} F(x_0), \quad 0 < \tau < +\infty \quad (1.2-18)$$

A equação correspondente a (1.2-16) consequentemente é:

$$x' = -F'(x)^{-1} e^{-\tau} F(x_0) = -F'(x)^{-1} F(x), \quad 0 < \tau < +\infty, \quad x(0) = 0 \quad (1.2-19)$$

Se novamente integramos (1.2-19) pelo método de Euler, e usando agora um intervalo de integração $h_k = 1$, obtemos

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{-1} F(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.2-20)$$

que é o método de Newton.

Note que o uso do método de Euler para a integração numérica de (1.2-13) é somente ilustrativo, e métodos mais sofisticados de integração podem ser empregados.

A mais antiga aplicação das técnicas da continuação para a solução numérica de equações foi feita por Lahaye [20] (1934, 1935) para uma equação simples, usando o método de Newton para mover-se ao longo da curva solução. Mais tarde Lahaye [21] (1948) considerou também sistemas de equações. A mesma idéia básica tem sido redescoberta várias vezes, vemos,

por exemplo, Sidlovskaya (1958), Freudenstein e Roth (1963) e Deist e Sefor (1967).

Independentemente do trabalho de Lahaye, Davidenko [22] (1953) introduziu a equação diferencial (1.2-14) como um meio de resolver $\ddot{H}(x, \dot{x}) = 0$ para $0 \leq \dot{x} \leq 1$ e aplicou esta idéia a grande variedade de problemas, incluindo equações integrais, inversão de matrizes, cálculo de determinantes, problemas de autovalores de matrizes, e sistemas de equações.

A técnica de Davidenko tem sido chamada "método de diferenciação com respeito a um parâmetro" e a equação (1.2-14) "equação de Davidenko".

Mais recentemente Kizner [23] (1964), Meyer [24] (1968), Boggs [25] (1971), Branin [26] (1972) Waserstrom [27] (1973), Chao e Saeks [28] (1977) têm estudado e aplicado com êxito os métodos da continuação.

C.T.Pan e K.S. Chao [13] (1978) utilizaram uma variante empírica da equação (1.2-14) para obter a plotagem do LR, que será apresentada no próximo capítulo.

A seguir um exemplo numérico muito simples permitirá ilustrar a aplicação da "equação de Davidenko" na resolução de uma equação não linear e ao mesmo tempo mostrar como pode-se utilizar para plotar LRs.

Exemplo 1.2 Seja o polinômio (1.1-6) da seção anterior:

$$g(s, K) = B(s) + K A(s) = s^2 + 2s + K(s^2 + 2s + 2) \quad (1.1-6)$$

Sabendo-se que as raízes de $B(s) = s^2 + 2s$ são $p_1 = 0$ e $p_2 = -2$ deseja-se obter as raízes de (1.1-6) para $K=1$. Isto é, para $K = 0$ o polinômio coincide com $B(s)$ e as raízes são conhecidas, para $K = 1$ temos o polinômio

$$2s^2 + 4s + 2 = 0 \tag{1.2-21}$$

cujas raízes deseja-se conhecer.

A "equação de Davidenko" associada a (1.2-21) é:

$$s' = \frac{ds}{dK} = - \frac{\partial g / \partial K}{\partial g / \partial s} = - \frac{s^2 + 2s + 2}{2s + 2 + K(2s + 2)} \tag{1.2-22}$$

Utilizando integração numérica de Euler temos:

$$s_{k+1} = s_k - h \frac{s_k^2 + 2s_k + 2}{2s_k + 2 + K_k(2s_k + 2)}, \quad s_1(0) = 0,$$

$$s_2(0) = -2, \quad K_{k+1} = K_k + h \tag{1.2-23}$$

Os resultados obtidos utilizando um intervalo de integração $h = 0,1$ são apresentados na tabela 1.1.

É óbvio que os valores da tabela correspondem aos subramos do LR (Figura 1.2) que vão dos polos $p_1 = 0$ e $p_2 = -2$ ao ponto múltiplo localizado em $s = -1$. Nota-se

K	s_1	s_2
0	0,00000	- 2,00000
0,1	- 0,10000	- 1,90000
0,2	- 0,19141	- 1,80859
0,3	- 0,27664	- 1,72336
0,4	- 0,35763	- 1,64237
0,5	- 0,43617	- 1,56383
0,6	- 0,51408	- 1,48592
0,7	- 0,59358	- 1,40642
0,8	- 0,67790	- 1,52210
0,9	- 0,77308	- 1,22692
1	- 0,89503	- 1,10497

TABELA 1.1 - Obtenção das raízes do polinômio (1.3-2) pelo método da continuação.

que houve no processo numérico uma acumulação relativamente grande de erro e alguma providencia deve ser tomada para obter curvas e valores mais representativos dos exatos.

A variante empírica da equação (1.2-15) utilizada por Pan e Chao para plotar o LR, tenta contornar este fato, mas ao mesmo tempo resulta muito instável, impedindo variar em forma eficaz o intervalo de integração.

1.3 OBJETIVO E DESENVOLVIMENTO DA DISSERTAÇÃO

Na sua Dissertação de Mestrado D. Ricciulli

[29] (1981) baseada no artigo de C. T. Pan e K. S. Chao [13], desenvolveu toda a programação para o traçado do LR pela impressora de um computador digital.

Utilizou integração de Euler e uma estratégia de variação do intervalo, consistindo basicamente em manter a diferença entre dois pontos calculados sucessivos ($s_{k+1} - s_k$) entre um valor máximo (VMAX) e um valor mínimo (VMIN) por ajuste automático do intervalo de integração (HE) a partir de um valor inicial fixo (HH). Observou algumas importantes limitações no uso destes parâmetros parte das quais são transcritas a seguir:

" ... para um valor elevado de HH, ter-se-ia a construção do diagrama com poucos pontos, porém com uma péssima precisão, podendo até cessar a convergência do método. Já para a construção do lugar das raízes com polos muito distantes ... se o valor de HH fosse muito pequeno, seriam calculados muitos pontos, o que implicaria num aumento no tempo de computação... Na maioria dos casos, a escolha de HE em função de HH pela verificação da diferença entre os dois últimos valores gerados pela fórmula iterativa foi útil, pois melhorou a precisão em certos trechos do diagrama e aumentou a velocidade em outros, reduzindo consideravelmente o tempo de computação. Porém em uma determinada função, devido a propagação de erros na geração dos pontos pertencentes a dois ramos paralelos ao eixo imaginário ..., a medida que os valores calculados se afastavam do eixo σ , a parte imaginária destes valores sofriam oscilações, o mesmo ocorrendo em menor escala para a parte real que deveria ser constante e no caso, igual a -1,0. Logo, a convergência do

método é dificultada, devendo-se alterar o valor de HE quando isto ocorrer. Também se observou que quando um ramo do lugar das raízes descreve uma trajetória curva que não corta o eixo real, nas imediações do ponto onde há a mudança de direção tem-se baixa convergência provocada pelo valor corrente de HE".

O presente trabalho surgiu da necessidade de melhorar estes aspectos limitativos do método.

Num primeiro estágio foram experimentados diferentes métodos de integração e estratégias de variação do intervalo, observando-se que tanto técnicas de diferente sofisticação como diferentes exigências de exatidão influenciavam muito pouco no número de pontos calculados e conseqüentemente no tempo de computação, devido a que o intervalo de integração permanecia sempre limitado a valores pequenos e dentro de uma faixa pouco variável.

Estes fatos levaram a rever a equação diferencial utilizada por Pan e Chao, concluindo-se que quando integrada combina implicitamente integração da equação correspondente à versão de Davidenko com iterações de Newton-Raphson. Evidentemente a utilização deste método iterativo é o meio mais natural de controlar o erro cometido no processo de integração.

A experiência posterior mostrou que a combinação explícita entre o método de integração e o método iterativo de Newton-Raphson produz as melhoras esperadas, resolvendo em forma ótima o problema proposto, permitindo obter LRs para faixas muito grandes do parametro variável, mesmo quando o número de polos e zeros é grande ou existem polos e/ou zeros muito

distantes entre si, com a precisão desejada e pouco tempo de computação.

O acima exposto, como também o referido a condições iniciais de integração e tratamento dos pontos múltiplos é discutido em detalhe no capítulo seguinte.

No capítulo 3 sugerimos um método de integração e uma estratégia de variação do intervalo de integração. Também é comentada a utilização de escalas mistas.

Apresentamos no Capítulo 4 vários exemplos ilustrando os processos descritos nos Capítulos 2 e 3.

Várias possíveis generalizações são mostradas no Capítulo 5, incluindo LR em função de qualquer parâmetro, LR de sistemas com retardamento de tempo, LR de sistemas multivariáveis e obtenção de raízes de polinômios.

Conclusões finais são apresentadas no Capítulo 6 e diagramas de fluxo e listagem da programação desenvolvida nos apêndices.

CAPÍTULO 2

O LUGAR DAS RAIZES PELO MÉTODO DA CONTINUAÇÃO

O propósito deste Capítulo é apresentar o algoritmo computacional baseado no conceito de métodos da continuação para a plotagem do LR de uma maneira sistemática. Está baseado no artigo original de C.T. Pan e K.S. Chao [13] e em algumas idéias de E. Waserstrom [27].

Na seção 2.1 apresentamos as equações diferenciais sugeridas na publicação original. Mostramos na seção 2.2 que a integração destas equações inclui implicitamente integração da "equação de Davidenko" (1.2-14) com iterações do método de Newton-Raphson, e propomos uma combinação explícita como melhor solução do problema.

Na seção 2.3 são apresentadas as condições iniciais a partir das quais podem-se obter todos os ramos do LR por integração numérica.

Finalmente, a seção 2.4 é relativa a análise e contorno dos ponto múltiplos.

2.1 VERSÃO DE C.T. PAN E K.S. CHAO [13]

Ao invés de determinar diretamente as raizes de (1.1-3) para cada valor de K , Pan e Chao consideraram as seguintes equações diferenciais relativas a este problema:

$$\frac{d}{dt} g(s(t), K(t)) = -g(s(t), K(t)), \quad g(s(0), K(0)) = 0$$

$$\frac{d}{dt} K(t) = \pm 1, \quad K(0) = K_0 \quad (2.1-1)$$

onde $s(0) = s_0$ é uma raiz de (1.1-3) correspondente ao ganho inicial K_0 e t uma variável fictícia. Como $g(s, K)$ não é uma função explícita de t , aplicando a regra da cadeia tem-se:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial g}{\partial K} \frac{dK}{dt} \quad (2.1-2)$$

de onde resulta:

$$\frac{ds}{dt} = - \left(g \pm \frac{\partial g}{\partial K} \right) / \frac{\partial g}{\partial s}$$

$$\frac{dK}{dt} = \pm 1, \quad K(0) = K_0 \quad (2.1-3)$$

ou as equações equivalentes:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{B(s) + KA(s) \pm A(s)}{B'(s) + K A'(s)}, \quad s(0) = s_0$$

$$\frac{dK}{dt} = \pm 1, \quad K(0) = K_0 \quad (2.1-4)$$

As equações acima podem ser resolvidas por alguma técnica de integração numérica. Por exemplo utilizando-

-se o método de Euler, obtêm-se:

$$s_{k+1} = s_k - h \frac{B(s_k) + K_k A(s_k) + A(s_k)}{B'(s_k) + K_k A'(s_k)}$$

$$K_{k+1} = K_k \pm h \tag{2.1-5}$$

Da solução de (2.1-1)

$$g(s, K) = g(s(0), K(0)) e^{-t} = 0 e^{-t} = 0$$

$$K = \pm t$$

vê-se que para algum par admissível K_0 e s_0 considerado, a trajetória correspondente obtida de (2.1-5) resultará na curva solução de $g(s, K) = 0$ com o ganho K variando.

O intervalo de integração h em (2.1-5) deve ser sempre positivo e o sinal "+" ou "-" é escolhido quando um aumento ou decréscimo no valor de K for desejado. Pan e Chao consideraram só o sinal "+" e $K > 0$, sendo o sinal "-" e $K < 0$ tratado posteriormente nas Referências [15], [29] e [30].

Como a trajetória computada não satisfará $g(s, K) = 0$ exatamente, o sinal menos de g em (2.1-1) é usado para assegurar que a trajetória computada não divirja do LR.

Equações como as (2.1-1) foram sugeridas por L.E. Kugel e utilizadas por F. H. Branin [26] para encontrar soluções múltiplas de sistemas de equações não lineares. Branin observou que grandes intervalos de integração podiam fazer com

que as trajetórias computadas saltassem para outras soluções, e notou ser de azar inevitável a existência de regiões de não convergência deste método.

2.2 A COMBINAÇÃO MÉTODO DE INTEGRAÇÃO-MÉTODO ITERATIVO

Sugerimos a seguir um procedimento diferente do apresentado na seção anterior para obter o LR por integração numérica. Utilizando a regra da cadeia, a derivada de $g(s,K)$ - (Equação (1.1-3)) com respeito ao parametro variável K é:

$$\frac{dg}{dK} = \frac{\partial g}{\partial s} \frac{ds}{dK} + \frac{\partial g}{\partial K} = 0 \quad (2.2-1)$$

de onde, conforme visto no Capítulo 1, seção 1.2, a equação diferencial ("Equação de Davidenko") associada à equação não linear parametrada $g(s,K)$ resulta:

$$\frac{ds}{dK} = -\frac{\partial g}{\partial K} / \frac{\partial g}{\partial s} \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dK} = -\frac{A(s)}{B'(s) + K A'(s)},$$

$$g(s(K_0), K_0) = 0 \quad (2.2-2)$$

onde $s(K_0)$ é uma raiz de $g(s,K)$ correspondente ao ganho inicial K_0 .

Note que (2.2-2) pode-se obter de (2.1-3) fazendo a mudança de variável $t = |K|$ e considerando $g(s(t),K(t)) = 0$ em (2.1-1).

A equação (2.2-2) é apresentada na Ref. [14] e a quantidade ds/dK (a qual é uma medida da variação da localização da raiz com relação ao ganho K) é definida como a sensibilidade da raiz [14], [18], [19].

A integração numérica de (2.2-2) resultará no lugar da raiz $s(K_0)$ de $g(s,K)$ com K variando. Utilizando o método de Euler tem-se:

$$\dot{s}_{k+1} = s_k - h \frac{A(s_k)}{B'(s_k) + K_k A'(s_k)}, \quad s_0 = s(K_0)$$

$$K_{k+1} = K_k + h \tag{2.2-3}$$

Note que nas equações acima basta considerar um h positivo ou negativo para obter um aumento ou decréscimo no valor de K respectivamente, e que salvo pelo "+" as equações (2.1-5) são iguais as (2.2-3) para $g(s,K) = B(s) + K A(s) = 0$.

Conhecida a solução \dot{s}_k do polinômio $B(\dot{s}_k) + K_k A(\dot{s}_k) = 0$ mediante (2.2-3) pode-se obter a solução s_{k+1} do polinômio $B(s_{k+1}) + K_{k+1} A(s_{k+1}) = 0$ em forma aproximada. No caso de se requerer maior exatidão é necessário subdividir o intervalo h ou utilizar um método de integração de ordem superior.

Como foi indicado no Capítulo 1, seção 1.2, outra forma de obter s_{k+1} a partir de \dot{s}_k é mediante o método iterativo de Newton-Raphson, o qual é definido pela expressão iterativa:

$$s_{k+1, i+1} = s_{k+1, i} - \frac{g(s_{k+1, i}, K_{k+1, i})}{g'(s_{k+1, i}, K_{k+1, i})}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.2-4)$$

que gera a seqüência $s_{k+1, 1}, s_{k+1, 2}, \dots$ a partir de $s_{k+1, 0} = s_k$, a qual converge "às vezes" para a solução, ou seja:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_{k+1, i} = s_{k+1}$$

A característica do método de Newton é sua relativa simplicidade e rápida convergência. Em contraposição só converge se s_k está "suficientemente perto" de s_{k+1} , ou mais precisamente, se s_k está no "domínio de atração" de s_{k+1} .

No método de integração a solução s_{k+1} é obtida ainda se s_k está muito distante. Em contraste é lento quando se requer muita exatidão.

Comparando ambos os métodos vemos que são complementares e é de interesse combiná-los. Uma das formas possíveis de fazer isto com pouco custo computacional adicional consiste em corrigir o ponto $s_{k,0}$ estimado pelo método de integração de Euler, com uma iteração de Newton-Raphson:

$$s_{k,1} = s_{k,0} - \frac{B(s_{k,0}) + K_k A(s_{k,0})}{B'(s_{k,0}) + K_k A'(s_{k,0})} \quad (2.2-5)$$

e utilizar os mesmos valores de $A(s_{k,0})$, $B'(s_{k,0})$ e $A'(s_{k,0})$ para estimar s_{k+1} com o método de Euler:

$$s_{k+1,0} = s_{k,1} - \frac{h A(s_{k,0})}{B'(s_{k,0}) + K_k A'(s_{k,0})}$$

$$K_{k+1} = K_k + h \tag{2.2-6}$$

Conforme será visto nos exemplos numéricos s̄o uma iteração de Newton ẽ necessãria para obter resultados sufi cientemente exatos.

Esta combinação aproximada dos m̄etodos envol ve o cãlculo de s̄o quatro polinõmios (B(s_{k,0}), A(s_{k,0}), B'(s_{k,0}), A'(s_{k,0})) ao invẽs de sete (B(s_{k,0}), A(s_{k,0}), B'(s_{k,0}), A'(s_{k,0}), A(s_{k,1}), B'(s_{k,1}), A'(s_{k,1})), no caso de ser exata, por cada pon to s_{k,1} calculado.

Na combinação exata, para (2.2-6), ter-se-ia:

$$s_{k+1,0} = s_{k,1} - \frac{h A(s_{k,1})}{B'(s_{k,1}) + K_k A'(s_{k,0})}$$

$$K_{k+1} = K_k + h \tag{2.2-7}$$

Para fazer uma comparação, considere-se a equação (2.1-5) com a notação modificada:

$$s_{k+1,0} = s_{k,0} - h \frac{B(s_{k,0}) + K_k A(s_{k,0}) + A(s_{k,0})}{B'(s_{k,0}) + K_k A'(s_{k,0})}$$

$$K_{k+1} = K_k + h \tag{2.2-8}$$

que pode ser desdobrada em

$$s_{k,1} = s_{k,0} - h \frac{B(s_{k,0}) + K_k A(s_{k,0})}{B'(s_{k,0}) + K_k A'(s_{k,0})} \quad (2.2-9)$$

e

$$s_{k+1,0} = s_{k,1} - \frac{h(+ A(s_{k,0}))}{B'(s_{k,0}) + K_k A'(s_{k,0})} \quad (2.2-10)$$

$$K_{k+1} = K_k \pm h$$

De (2.2-9) e (2.2-10) pode-se observar que (2.2-8) envolve implicitamente um processo muito semelhante ao definido por (2.2-5) e (2.2-6). A equação (2.2-9) corresponde-se com (2.2-5) com a única diferença do fator h , e (2.2-10) com (2.2-6) diferindo apenas no " \pm ".

Outra diferença importante é que (2.2-8) em bora utilize o ponto corrigido por uma iteração de Newton para estimar o próximo ponto por integração de Euler, não dá estes pontos em forma explícita.

Se os pontos calculados estão suficientemente próximos do LR o termo correspondente à correção por Newton em (2.2-9) não pode ser multiplicada por um fator muito diferente de 1. Em outras palavras a iteração de Newton levará cada ponto estimado por integração praticamente ao LR. A grosso modo cada iteração de Newton duplica o número de casas decimais exatas [31].

Logo, se na equação (2.2-8) se utiliza um h superior a 1, a correção efetuada por (2.2-9) poderá ser excessiva, em particular se $h = 2$ a correção inverterá o sentido do erro permanecendo o módulo aproximadamente o mesmo, e se $h > 2$ o processo seguramente se instabilizará. Por estas razões não é possível variar em forma eficaz o intervalo de integração quando se utiliza a equação (2.2-8) ou outra técnica de integração aplicada a (2.1-4).

Exemplo 2.1 Com o objetivo de realizar um teste numérico considere-se um sistema como o da Figura 1.1 com:

$$g(s, K) = (s + 1) (s + 4) (s + 2 - j2) (s + 2 + j2) + K \quad (2.2-10)$$

Os resultados obtidos numericamente por diferentes processos e os erros cometidos por cada um deles para $s(0) = -2 + j2$, $0 \leq K \leq 50$ e um $h = 2,5$ são mostrados nas Tabelas 2.1 e 2.2 respectivamente.

Neste exemplo podemos fazer as seguintes observações:

- 1) A trajetória computada pelo processo sugerido por Pan e Chao e utilizando o método de Euler (Equação (2.2-8)) diverge do LP.
- 2) A solução obtida por integração de Euler (Equação (2.2-3)) da equação (2.2-2), embora não divirja, apresenta grande acumulação de erro.

GANHO	EULER				COMBINADO EULER-NEWTON				NEWTON			
	EQ. (2.2-8)		EQ. (2.2-3)		APROXIMADO		EXATA		VALORES EXATOS			
	V	U	V	U	V	U	V	U	V	U	V	U
0	-2.00000	2.00000	-2.00000	2.00000	-2.00000	2.00000	-2.00000	2.00000	-2.00000	2.00000	-2.00000	2.00000
2.5	-1.98875	1.90625	-1.98875	1.90625	-1.96183	1.89886	-1.96183	1.89886	-1.96183	1.89886	-1.96183	1.89886
5.0	-1.90668	1.77938	-1.92399	1.79765	-1.90103	1.78063	-1.90097	1.78063	-1.90097	1.78063	-1.90097	1.78079
7.5	-1.81382	1.65449	-1.85406	1.67090	-1.79149	1.64979	-1.79163	1.65029	-1.79170	1.65143	-1.79170	1.65143
10.0	-1.61930	1.51325	-1.73167	1.52744	-1.61005	1.56814	-1.61204	1.56590	-1.61454	1.56388	-1.61454	1.56388
12.5	-1.39164	1.61426	-1.50905	1.42116	-1.44146	1.55543	-1.43983	1.55994	-1.43818	1.56009	-1.43818	1.56009
15.0	-1.36625	1.50772	-1.23930	1.47204	-1.30274	1.52208	-1.30303	1.53154	-1.30290	1.53197	-1.30290	1.53197
17.5	-1.04672	1.79585	-1.16274	1.54144	-1.19763	1.62157	-1.19761	1.63152	-1.19767	1.63165	-1.19767	1.63165
20.0	-1.28838	1.47933	-1.07010	1.60043	-1.11174	1.67164	-1.11174	1.67161	-1.11178	1.67165	-1.11178	1.67165
22.5	-1.56526	2.18095	-1.95516	1.65166	-1.03897	1.71001	-1.03896	1.71001	-1.03899	1.71002	-1.03899	1.71002
25.0	-1.33062	1.39039	-1.93142	1.69719	-1.97559	1.74631	-1.97559	1.74631	-1.97560	1.74632	-1.97560	1.74632
27.5	-1.25982	3.03138	-1.87556	1.73337	-1.91929	1.78056	-1.91929	1.78055	-1.91929	1.78056	-1.91929	1.78056
30.0	-1.21272	1.43804	-1.82552	1.77209	-1.86850	1.81288	-1.86849	1.81288	-1.86850	1.81288	-1.86850	1.81288
32.5	-1.17820	3.09535	-1.78016	1.81100	-1.82314	1.84348	-1.82314	1.84348	-1.82314	1.84348	-1.82314	1.84348
35.0	-1.17820	1.47504	-1.73546	1.84356	-1.77543	1.87252	-1.77543	1.87252	-1.77543	1.87252	-1.77543	1.87252
37.5	-1.52089	3.23335	-1.69381	1.87412	-1.73977	1.90016	-1.73977	1.90016	-1.73977	1.90016	-1.73977	1.90016
40.0	-1.08354	1.52104	-1.66374	1.90297	-1.70271	1.92653	-1.70271	1.92653	-1.70271	1.92653	-1.70271	1.92653
42.5	-1.44614	3.26034	-1.62997	1.93032	-1.66788	1.95177	-1.66788	1.95177	-1.66788	1.95177	-1.66788	1.95177
45.0	-1.06265	1.54741	-1.59791	1.95534	-1.63501	1.97596	-1.63501	1.97596	-1.63501	1.97596	-1.63501	1.97596
47.5	-1.71151	3.40650	-1.56763	1.98118	-1.60386	1.99922	-1.60386	1.99922	-1.60386	1.99922	-1.60386	1.99922
50.0	-1.98942	1.59077	-1.53883	2.00497	-1.57423	2.02161	-1.57423	2.02161	-1.57423	2.02161	-1.57423	2.02161

TABELA 2.1 - Ramo do LR do Polinômio (2.2-10) obtido por diferentes métodos.

GARHO	EULER						COMBINAÇÃO EULER-NEWTON					
	EQ. (2.2-8)			EQ. (2.2-3)			APROXIMADA			EXATA		
	V	I	M	V	I	M	V	I	M	V	I	M
.0	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
2.5	-.007025	.007355	.007355	-.007025	.007355	.007355	-.007025	.007355	.007355	-.007025	.007355	.007355
5.0	-.005492	.001408	.001408	-.023279	.017008	.017008	-.000318	-.000225	-.000225	-.000318	-.000225	-.000162
7.5	-.022112	.033061	.033061	-.062355	.019458	.019458	.000241	-.001637	-.001637	.000241	-.001637	.000078
10.0	-.004760	.050630	.050630	-.117133	-.036440	-.036440	.004492	.004257	.004257	.004492	.004257	.002018
12.5	.048543	.084164	.084164	-.070861	-.139938	-.139938	-.003271	-.004560	-.004560	-.003271	-.004560	-.000150
15.0	-.063943	.034403	.034403	.013247	-.119930	-.119930	.000162	.000111	.000111	.000162	.000111	-.000432
17.5	.150957	.164199	.164199	.034930	-.090210	-.090210	.000426	-.000053	-.000053	.000426	-.000053	-.000135
20.0	-.168875	-.152323	-.152323	.041531	-.071220	-.071220	.000038	-.000015	-.000015	.000038	-.000015	-.000039
22.5	.473739	.479935	.479935	.043393	.058752	.058752	.000018	-.000007	-.000007	.000018	-.000007	-.000012
25.0	-.355032	-.356025	-.356025	.044178	-.049127	-.049127	.000010	-.000002	-.000002	.000010	-.000002	-.000004
27.5	1.179107	1.250824	1.250824	.043736	-.042190	-.042190	.000007	-.000001	-.000001	.000007	-.000001	-.000001
30.0	-.344231	.374843	.374843	.042356	-.036794	-.036794	.000004	.000000	.000000	.000004	.000000	-.000000
32.5	1.014258	1.251869	1.251869	.041933	-.032433	-.032433	.000003	.000000	.000000	.000003	.000000	-.000000
35.0	-.398770	.397435	.397435	.040374	-.028961	-.028961	.000002	.000000	.000000	.000002	.000000	-.000000
37.5	1.260559	1.338388	1.338388	.039251	-.026034	-.026034	.000002	.000000	.000000	.000002	.000000	-.000000
40.0	-.382931	.405494	.405494	.038370	-.023563	-.023563	.000001	.000000	.000000	.000001	.000000	-.000000
42.5	1.114035	1.368576	1.368576	.038014	-.021452	-.021452	.000001	.000000	.000000	.000001	.000000	-.000000
45.0	-.427529	.428528	.428528	.037100	-.015620	-.015620	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	-.000000
47.5	1.315374	1.407277	1.407277	.036329	-.016336	-.016336	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	-.000000
50.0	-.415183	.430834	.430834	.035461	-.016639	-.016639	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	-.000000

TABELA 2.2 - Erros cometidos pelos diferentes métodos na Tabela 2.1

- 3) A combinação exata entre o método de integração de Euler e o iterativo de Newton (Equação (2.2-5) e (2.2-7)) permite seguir com pouca acumulação de erro a curva verdadeira.
- 4) Os resultados obtidos pela combinação aproximada (Equação (2.2-5) e (2.2-6)) não diferem significativamente dos obtidos pela combinação exata.

Note que nos processos comparados o menor custo computacional por ponto calculado corresponde ao método de Euler (Equação (2.2-3)), seguindo o processo sugerido por Pan e Chao (Equação (2.2-8)) e a combinação aproximada entre os métodos de Euler e Newton (Equação (2.2-5) e (2.2-6)) com custo igual, correspondendo o custo maior a combinação exata (Equação (2.2-5) e (2.2-7)).

Conclui-se que dos processos comparados a combinação aproximada é provavelmente o melhor processo para a plotagem do LR em termos de exatidão e tempo de computação.

E. Waserstrom [27] comentou as razões e vantagens de combinar, dentro dos métodos da continuação, os processos de integração e os processos iterativos em geral, mas não sugeriu métodos específicos com os quais efetuar a combinação.

Evidentemente outros métodos de integração, como também outros métodos iterativos podem-se combinar em forma semelhante à aqui sugerida.

No Capítulo seguinte apresentaremos como pode-se aplicar uma estratégia de variação do intervalo de integra

ção numa variante melhorada do método de Euler, combinando-a também em forma aproximada com o método iterativo de Newton.

2.3 CONDIÇÕES INICIAIS DE INTEGRAÇÃO

Do Capítulo 1 temos que o LR de $T(s)$ contém $2n$ ramos partindo dos polos da função de transferência de laço aberto para $K = 0$, correspondendo n ramos a valores positivos de K e os outros n ramos aos valores negativos de K . No caso em que estes polos são distintos, as n condições iniciais correspondentes aos n ramos de parâmetro positivo e aos n ramos de parâmetro negativo serão:

$$s(0)_i = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad K = 0 \quad (2.3-1)$$

Quando a função de transferência de laço aberto exibe polos múltiplos, o termo correspondente a $\partial g / \partial s$ torna-se nulo quando estes polos são considerados. Como resultado, a obtenção dos pontos de partida quando tivermos polos múltiplos não poderá ser feita para $K = 0$. Porém, próximo aos polos pode-se obtê-los considerando as propriedades do LR na vizinhança de um polo múltiplo. Generalizando o procedimento sugerido na Ref. [27] para pontos singulares de ordem dois, expandindo $g(s, K)$ por Taylor ao redor do polo múltiplo p_k de ordem r , e considerando que as derivadas parciais de $g(s, K)$ com respeito a s de ordem inferior a r se anulam, tem-se:

$$\frac{\partial g}{\partial K} \Delta K + \frac{1}{r!} \frac{\partial^r g}{\partial s^r} (\Delta s)^r + \dots = 0 \quad (2.3-2)$$

onde ΔK e Δs são incrementos de K e s ao longo da trajetória.

De (2.3-2) temos

$$\Delta s_{1, \dots, r} = \left(-r! \Delta K \frac{\partial g}{\partial K} / \frac{\partial^r g}{\partial s^r} \right)^{1/r} \Bigg|_{s = p_k} \quad (2.3-3)$$

Logo, para $\Delta K > 0$ temos os seguintes r pontos iniciais correspondentes aos r ramos de parâmetro positivo que se originam no polo múltiplo p_k :

$$w_{1, \dots, r} = p_k + \Delta s_{1, \dots, r}, \quad K = \Delta K \quad (2.3-4)$$

onde ΔK é um número real arbitrariamente pequeno.

Para os pontos iniciais correspondentes a parâmetro negativo basta considerar $\Delta K < 0$ em (2.3-3).

Os pontos (2.2-4) podem ser melhorados com auxílio de uma ou duas iterações de Newton.

Desde que g é um polinômio com coeficientes reais (2.3-3) é fácil de avaliar. Também é possível colocar (2.3-3) em função dos polinômios $A(s)$ e $B(s)$. Com este objetivo definimos:

$$C(s) (s - p_k)^r = B(s) \quad (2.3-5)$$

As derivadas parciais sucessivas de g com re

lação a s são:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = r C(s) (s - p_k)^{r-1} + C'(s) (s - p_k)^r + K A'(s)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} = r(r-1) C(s) (s-p_k)^{r-2} + 2rC'(s) (s-p_k)^{r-1} + C''(s)(s-p_k)^r + K A''(s)$$

·
·
·

$$\frac{\partial^r g}{\partial s^r} = r! C(s) + \dots + C^{(r)}(s) (s - p_k)^r + K A^{(r)}(s) \quad (2.3-6)$$

onde os apóstrofes denotam derivada com relação a s .

Considerando $K = 0$ e $s = p_k$ em (2.3-6), e sabendo que $\partial g / \partial K = A(s)$, (2.3-3) fica:

$$\Delta s_{1, \dots, r} = \left(-\Delta K \frac{A(s) \cdot (s - p_k)^r}{B(s)} \right)^{1/r} \Bigg|_{s = p_k} \quad (2.3-7)$$

A aritmética complexa dos computadores $s\bar{o}$ dá um dos valores em (2.3-7). Segundo o teorema de De Moivre [32], o conhecimento de uma das raízes por exemplo Δs_1 , permitirá obter todas elas multiplicando Δs_1 pelas raízes r -ésimas da unidade, isto é:

$$\Delta s_{i+1} = \Delta s_1 e^{2i\pi j/r}, \quad i = 1, \dots, r - 1 \quad (2.3-7)$$

Note que de (2.3-7) pode-se obter a equação

do ângulo (ϕ_p) que forma um ramo de parâmetro positivo com o eixo σ na sua partida em um polo múltiplo de ordem r localizado em $s = p_k$ [16], que é dada por:

$$\phi_p = \frac{1}{r} \left[+ 180 + \sum_{j=1}^m \arg (p_k - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k, k+1, \dots, k+r-1}}^n \arg (p_k - p_i) \right]$$

Com a escolha apropriada dos $2n$ pontos iniciais, os $2n$ ramos do LR podem ser traçados de uma maneira quase contínua por integração numérica. Porém, esta integração deverá ser interrompida quando houver aproximação de um ponto múltiplo e alguma providência deverá ser tomada para continuá-la.

2.4 PONTOS MÚLTIPLOS

Um ponto s^* satisfazendo:

$$\left. \frac{dK}{ds} \right|_{s=s^*} = \frac{d}{ds} \left(- \frac{B(s)}{A(s)} \right) \Big|_{s=s^*} = 0$$

$$= \frac{-A(s^*) B'(s^*) - B(s^*) A'(s^*)}{A^2(s^*)} = 0 \quad (2.4-1)$$

no plano complexo é chamado um ponto singular. Desde que o numerador de (2.4-1) é um polinômio com grau $(n + m - 1)$, com coeficientes reais, existem $(n + m - 1)$ pontos singulares no plano s . Denominamos de ponto múltiplo, ao ponto satisfazendo (2.4-1), que não seja um zero nem um polo múltiplo e que satisfaça (1.1-3), ou seja, K obtido de:

$$K(s) = - \frac{B(s)}{A(s)} \Big|_{s = s^*} \quad (2.4-2)$$

deve ser um número real. Considerando o fato de que $A(s^*)$ não pode ser zero para K finito, sucede que no LR a condição:

$$A(s^*) B'(s^*) - B(s^*) A'(s^*) = A(s^*) [B'(s^*) + K A'(s^*)] = 0 \quad (2.4-3)$$

implica em:

$$\frac{\partial g}{\partial s} \Big|_{s = s^*} = B'(s^*) + K A'(s^*) = 0 \quad (2.4-4)$$

Logo, a equação diferencial (2.2-2) não é válida para os pontos múltiplos e deverão ser introduzidas modificações para contornar estes pontos. A equação estabelecida em (2.4-1) inclui os pontos sobre o eixo real onde dois ramos chegam ou saem, conhecidos como pontos de entrada (break-in point) e de saída (break-away point) respectivamente. Um ponto de saída é estabelecido quando se considera a presença de dois polos consecutivos no eixo real, então, necessariamente deve existir um ponto múltiplo, no caso de saída, onde devido ao valor de $|K|$ crescer a partir dos polos, neste ponto, o seu valor é máximo. Do mesmo modo, um ponto de entrada é estabelecido quando o valor de $|K|$ é um mínimo local, pois agora, após atingido este valor, $|K|$ cresce com os ramos caminhando em direções opostas, sempre tendendo a um zero ou a um outro ponto de saída.

Visto que K é uma função real de s para todo

s pertencente a ℓ , a derivada direcional $dK/d\ell$ juntamente com suas derivadas de ordem superior ao longo da direção tangencial do LR são bem definidas. É então possível considerar os extremos locais de K mencionados anteriormente ao longo de ℓ usando a notação de derivada direcional. Seja:

$$K(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = U(\sigma, \omega) + j V(\sigma, \omega) \quad (2.4-5)$$

onde U e V são funções reais estimadas de σ e ω e $s = \sigma + j\omega$. A derivada direcional de K em um ponto $s \in \ell$ na direção unitária $\bar{v} = e^{j\theta} = \bar{v}_\sigma + j\bar{v}_\omega$ tangencial ao LR, visto K ser real \bar{v} :

$$\frac{dK}{d\ell} = \nabla U(\sigma, \omega) \cdot \bar{v} = \frac{\partial U}{\partial \sigma} \bar{v}_\sigma + \frac{\partial U}{\partial \omega} \bar{v}_\omega \quad (2.4-6)$$

onde $\nabla U(\sigma, \omega)$ \bar{v} é o gradiente de U em (σ, ω) e o ponto denota produto escalar. A equação acima pode ser também escrita na forma:

$$\frac{dK}{d\ell} = \text{Re} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \sigma} - j \frac{\partial V}{\partial \omega} \right) (\bar{v}_\sigma + j \bar{v}_\omega) \right], \quad s \in \ell \quad (2.4-7)$$

Considerando $K(s)$ dado pela expressão (2.4-5) e fazendo uso da condição de Cauchy-Riemann, ou seja, $\partial U/\partial \omega = -\partial V/\partial \sigma$, ficamos com:

$$\frac{dK}{d\ell} = \text{Re} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \sigma} + j \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right) e^{j\theta} \right] = \text{Re} \left[K'(s) e^{j\theta} \right] \quad (2.4-8)$$

onde $K'(s) = dK(s)/ds$

Do mesmo modo, a derivada direcional de ordem m está relacionada com a derivada de ordem m de K com respeito a s por:

$$\frac{d^m K}{d\ell^m} = \operatorname{Re} [K^{(m)}(s) e^{jm\theta}] \quad (2.4-9)$$

Assim, é observado de (2.4-9) que ao longo de ℓ , K e suas derivadas direcionais são funções reais. Vejamos agora um teorema que representa um papel importante na classificação das singularidades para que seja possível contorná-las adequadamente.

O ponto s^* passa a partir deste instante a designar um ponto múltiplo, visto que um ponto singular tem um significado mais amplo, incluindo-se polos e zeros múltiplos. Os polos múltiplos foram analisados na seção anterior e os zeros múltiplos não são de interesse prático por corresponderem a K igual a infinito.

Teorema: Suponha uma função analítica $p(s)$ tal que:

$$p(s^*) = a, \text{ para } a \text{ real e } a \neq 0$$

$$p^{(k)}(s^*) = 0, \text{ para } k = 1, 2, \dots, q - 1$$

$$\text{e } p^{(q)}(s^*) \neq 0, \text{ para } 2 \leq q \leq n$$

para algum ponto s^* de tal forma que $\operatorname{Im}[p(s^*)] = 0$. Seja:

$$R_p = \{s \mid \operatorname{Im}[p(s)] = 0\}$$

então, na vizinhança de s^* , R_p consiste de um conjunto de q ramos $R_{p1}, R_{p2}, \dots, R_{pq}$ tal que $R_{p1} \cap R_{p2} \cap \dots \cap R_{pq} = s^*$. Além disso, para cada $i, 1 \leq i \leq q$, $\operatorname{Re} [p(s)] \Big|_{R_{pi}}$ é ou um máximo local ou um mínimo local para s^* se q for par, e uma função crescente ou decrescente se q for ímpar.

Prova: Sem perda da generalidade, s^* pode ser considerado como zero. Antes de considerar o caso geral, o teorema é provado para:

$$h(s) = a + s^q$$

Identificando o conjunto R_h como:

$$R_h = \{s \mid \operatorname{Im} [h(s)] = 0\}$$

e considerando que $s = \sigma + j\omega = r e^{j\theta}$ e $h(s) = a + r e^{jq\theta}$, temos que:

$$\begin{aligned} R_h &= \{r e^{j\theta} \mid r^q \operatorname{sen} q\theta = 0\} = \\ &= \{r e^{j\theta} \mid \theta = i\pi/q, i = 0, 1, 2, \dots, q-1\} \end{aligned}$$

onde θ está restrito à metade superior do plano s e r assume valores negativos na metade inferior do mesmo plano. Logo, R_h consiste de q ramos $R_{hi}, i = 0, 1, 2, \dots, q-1$ que se interceptam em $r = 0$. Para cada i , tem-se:

$$\operatorname{Re} [h(s)] \Big|_{R_{hi}} = a + r^q \cos (i\pi)$$

Em consequência, se q for par $r^q \geq 0$, e

$$\operatorname{Re} [h(s)] \Big|_{R_{hi}} \geq a \text{ quando } \cos (i\pi) = 1$$

$$\operatorname{Re} [h(s)] \Big|_{R_{hi}} \leq a \text{ quando } \cos (i\pi) = -1$$

isto é, $h(s) \Big|_{R_{hi}}$ é um máximo ou um mínimo local. Agora, se q for ímpar, para cada i temos:

$$\operatorname{Re} [h(s)] \Big|_{R_{hi}} = a + r^q \cos (i\pi)$$

Logo, $(h(s) \Big|_{R_{hi}} - a)$ mudará de sinal mais para menos com r passando de valor negativo para positivo ou vice-versa, isto é, $h(s) \Big|_{R_{hi}}$ é uma função monotona.

Retornando ao caso geral, $p(s)$ pode ser ex p a n d i d o em torno de s^* utilizando a s é r i e de Taylor, r e s u l t a n d o:

$$\begin{aligned} p(s) &= p(s^*) + \sum_{i=q}^{\infty} c_i (s - s^*)^i = \\ &= a + (s - s^*)^q \sum_{k=0}^{\infty} c_{q+k} (s - s^*)^k. \end{aligned}$$

Visto que o somatório da equação acima é uma função analítica, e existe uma região limitada por um pequeno

disco ao redor de s^* sem conter outro ponto singular, de um teorema da teoria de variáveis complexas (ver [32]) existe uma função analítica $u(s)$ tal que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{q+k} (s - s^*)^k = \exp(u(s))$$

$$v(s) = \exp(u(s)/q), \text{ então}$$

$$p(s) = a + [(s - s^*) v(s)]^q = a + [f(s)]^q$$

onde $f(s^*) = 0$, $f'(s^*) \neq 0$, portanto $f(s)$ é um homomorfismo local.

Agora para o conjunto R_p temos:

$$R_p = \{s \mid \text{Im}[a + (f(s))^q] = 0\} = \{s \mid f(s) \in R_h\}$$

Seja:

$$R_{pi} = \{s \mid f(s) \in R_{hi}\}, \quad i = 0, 1, \dots, q - 1$$

Se q for par, então $s \in R_{pi}$ resultando em $f(s) \in R_{hi}$. Prosseguindo temos:

$$\text{Re}[h(f(s))] \geq \text{Re}[h(0)] = \text{Re}[h(f(s^*))], \text{ para } \cos(i\pi) = 1$$

$$\text{Re}[h(f(s))] \leq \text{Re}[h(0)] = \text{Re}[h(f(s^*))], \text{ para } \cos(i\pi) = -1$$

isto é,

$$\operatorname{Re}[p(s)] \Big|_{R_{pi}} \geq \operatorname{Re}[p(s^*)] \quad \text{quando } \cos(i\pi) = 1$$

$$\operatorname{Re}[p(s)] \Big|_{R_{pi}} \leq \operatorname{Re}[p(s^*)] \quad \text{quando } \cos(i\pi) = -1$$

Portanto, $\operatorname{Re}[p(s)] \Big|_{R_{pi}}$ é um máximo ou um mínimo local para $s = s^*$. Similarmente, se q for ímpar, então pode-se mostrar que $\operatorname{Re}[p(s)] \Big|_{R_{pi}}$ é uma função crescente ou decrescente.

Como uma consequência direta do teorema visto, o seguinte corolário é deduzido:

Corolário: Suponha s^* um ponto múltiplo em ℓ tal que:

$$K(s^*) \neq 0$$

$$\frac{d^k K}{ds^k} \Big|_{s = s^*} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, q - 1$$

$$\frac{d^q K}{ds^q} \Big|_{s = s^*} \neq 0, \quad 2 \leq q \leq n \quad (2.4-10)$$

onde $K(s) = -B(s) / A(s)$, então existem q ramos que se interceptam em $s = s^*$. Além disso, se q for par, ao longo de cada ramo de interseção do LR para $s = s^*$, $K(s^*)$ tem um máximo ou um mínimo local, por outro lado, se q for ímpar, $K(s^*)$ é uma função monotônica de s na vizinhança de s^* em cada ramo.

Prova: Seja $f(s) = -B(s) / A(s)$, então $f(s)$ é uma fun

ção analítica. Segue que:

$$B(s) + f(s) A(s) = 0$$

que comparando-se com a equação (1.1-3), é óbvio que:

$$K = \operatorname{Re} [f(s)]$$

$$0 = \operatorname{Im} [f(s)] , \text{ para todo } s \in \ell$$

Conforme o corolário apresentado, os pontos múltiplos são caracterizados de acordo com os resultados obtidos nas derivadas de ordens superiores de $K(s)$. Note-se que:

$$\frac{d^k K}{ds^k} = \frac{d^k}{ds^k} [-B(s) / A(s)] = - \frac{\partial^k g}{\partial s^k} / A(s) \quad (2.4-11)$$

Como $g(s)$ é um polinômio de enésima ordem, com coeficientes reais, as derivadas parciais deste polinômio em relação a s podem ser facilmente obtidos. Entretanto, q pode ser no máximo igual a n , pois:

$$\frac{d^n K}{ds^n} = \frac{-n!}{A(s)} \neq 0 \quad (2.4-12)$$

Com o corolário visto, os pontos sobre o eixo real onde dois ramos entram ou saem, definidos no eixo real, podem agora ser generalizados como segue.

Definição: No teorema, um ponto múltiplo s^* é chamado de ponto múltiplo par se o valor de q for divisível por dois, caso contrário, é chamado de ponto múltiplo ímpar.

É claro que do corolário, no LR, um ponto múltiplo par é um máximo ou um mínimo local de $K(s)$ ao longo do ramo conforme definido no teorema. Os pontos de entrada e de saída são casos especiais de pontos múltiplos pares de ordem dois, isto é, $q = 2$, localizados no eixo real. Em geral, se um ponto múltiplo está localizado fora do eixo real, o conceito de derivada direcional pode ser usado para caracterizar este ponto. Considerando-se a equação (2.4-9) e o corolário é óbvio que para um ponto múltiplo de q -ésima ordem temos:

$$\frac{d^k K}{d\ell^k} = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, q - 1$$

(2.4-15)

$$\frac{d^q K}{d\ell^q} \neq 0$$

existindo q ramos no ponto de interseção correspondente a este ponto no LR.

Cada ramo do diagrama é obtido separadamente por integração numérica. Se houver aproximação de um ponto múltiplo ímpar, visto que $K(s)$ é uma função monotônica de s em ℓ , há necessidade de pular este ponto por adição de uma pequena variação Δs ao longo da direção tangencial do ramo. Já para um ponto múltiplo par este procedimento não é válido, visto que no diagrama do LR, estes pontos são um máximo local ou um mínimo

local, sendo necessário mudar a direção de plotagem. Dependendo do valor de q , neste ponto, a mudança de direção Δz é dada por:

$$\Delta z = \Delta s e^{-j\pi/q} \quad (2.4-14)$$

onde Δs é um vetor suficientemente pequeno na direção tangencial do ramo em questão. O fator $\exp(-j\pi/q)$ pode ser visto como um operador rotacional, o qual gira a direção de plotagem em sentido horário.

Conforme pode ser observado pelas afirmações anteriores, quando temos um ponto múltiplo ímpar, q ramos se cortam neste ponto, sendo por esta maneira denominado de ponto interceptante, e, quando temos um ponto múltiplo par, os ramos devem apenas tocar este ponto, sendo por isso denominado de ponto tocante. As ilustrações gráficas para estes dois tipos de singularidades são mostrados na Figura 2.1 para $q = 2$ e $q = 3$, onde os ramos estão numerados e as setas apontam na direção crescente de K .

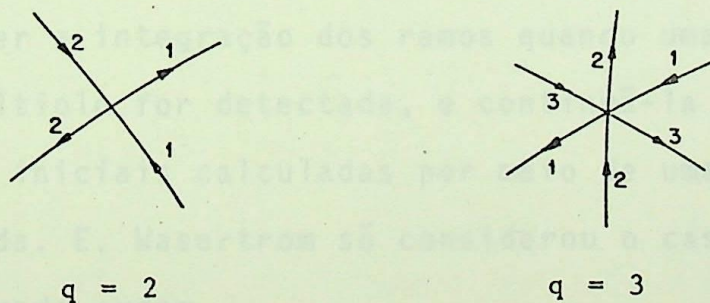


FIGURA 2.1 - Pontos Múltiplos

Após uma mudança de direção devido a presença de um ponto tocante ou um salto sobre um ponto interceptante

te, há necessidade de melhorar o valor obtido. Isto pode ser feito em poucos passos utilizando-se a iteração de Newton:

$$s_{k+1} = s_k - \frac{B(s_k) + K A(s_k)}{B'(s_k) + K A'(s_k)} \quad (2.4-15)$$

onde K pode ser avaliado através de:

$$K = - \operatorname{Re}[B(s)] / \operatorname{Re}[A(s)] \quad (2.4-16)$$

ou
$$K = -\operatorname{Im}[B(s)] / \operatorname{Im}[A(s)] \quad (2.4-17)$$

A análise e contorno dos pontos múltiplos até aqui apresentados foram baseados no artigo original de Pan e Chao [13].

Existe outro modo mais exato de contornar estes pontos. Num algoritmo para obter as raízes de um polinômio E. Waserstrom [27] usou implicitamente a ideia de plotar computacionalmente o LR pelo método da continuação. Neste algoritmo propôs deter a integração dos ramos quando uma aproximação a um ponto múltiplo for detectada, e continuá-la a partir de novas condições iniciais calculadas por meio de uma série de Taylor truncada. E. Waserstrom só considerou o caso de pontos múltiplos de segunda ordem.

A ideia acima já foi utilizada na seção anterior para obter as condições iniciais correspondentes a polos múltiplos (Equação (2.3-2)), sendo aí generalizada para qualquer ordem de multiplicidade. Logo, para um ponto múltiplo s^* de or

dem q , as q condições iniciais para continuar a integração estarão dadas pelas equações correspondentes a (2.3-3) e (2.3-4), isto é:

$$\Delta s_{1, \dots, q} = (-q! \Delta K A(s) / \frac{\partial^q g}{\partial s^q})^{1/q} \Big|_{s=s^*} \quad (2.4-18)$$

e

$$w_{1, \dots, q} = s^* + \Delta s_{1, \dots, q}, \quad K = K(s^*) + \Delta K \quad (2.4-19)$$

onde ΔK será positivo ou negativo segundo se trate de ramos de parametro positivo ou negativo respectivamente, e o valor de ΔK deverá ser da ordem de magnitude dos últimos intervalos de integração utilizados na aproximação ao ponto múltiplo.

Os pontos iniciais assim obtidos podem ser melhorados com algumas iterações de Newton (Equação (2.2-4)).

CAPÍTULO 3



VARIAÇÃO DO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO E UTILIZAÇÃO DE ESCALAS MISTAS

No caso mais geral a equação (2.2-2) deve ser integrada de $|K| = 0$ a $|K| = \infty$ com s seguindo trajetórias desde os polos até os zeros de laço aberto (incluindo polos e zeros no infinito). Na prática não é possível, mas também não é necessário integrar até $|K|$ infinito, é suficiente chegar a uma pequena distância dos zeros prefixada ou calculada automaticamente pelo programa segundo algum critério. De qualquer maneira deverá integrar-se até algum valor de $|K|$ muito grande. Quando se utiliza um intervalo de integração (h) constante, este fato implica na necessidade do cálculo de um número muito grande de pontos, e conseqüentemente, num tempo também grande de computação.

A curva solução se comportará mais suavemente em certos intervalos da variável independente que em outros. Logo não será razoável utilizar o mesmo h sobre todo o intervalo da variável independente. Uma vez que o erro cometido em cada passo de integração pode ser estimado, esta informação permite decidir se aceitar ou rejeitar o valor computado, e calcular um novo h , para repetir a computação ou continuá-la. O novo h deve ser tal que o erro cometido com ele seja menor que um erro permissível. Na seção 3.1 apresentaremos os detalhes de como isto pode ser feito na prática.

Quando se requer o LR até valores muito grandes de $|x|$, ou os polos e zeros de laço aberto estão muito espaçados, pode existir a necessidade de representar uma porção muito grande do plano complexo. Nestes casos, geralmente, se fazem representações parciais do LR. A plotagem computacional do LR permite utilizar facilmente escalas mistas [15], [30], isto é, uma escala linear na vizinhança dos eixos e uma escala logaritmica no resto. Resulta desta maneira uma representação mais completa do LR sem perda de detalhe na região de maior interesse, e, sem a necessidade de representações parciais. Alguns detalhes referentes as escalas mistas serão apresentados na seção 3.2.

3.1 VARIAÇÃO DO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO

Os métodos numéricos de integração mais usados, para resolver uma equação diferencial da forma $y' = f(x, y)$, são os de Runge - Kutta e os preditor-corretor [33], [34], [35]. Os primeiros são chamados de passo simples, porque o cálculo de cada ponto só requer informação da solução no ponto anterior, e os segundos de passo múltiplo, porque cada ponto é avaliado com informação de vários pontos prévios.

A diferença entre o valor verdadeiro de $y(x)$ e um ponto calculado por integração numérica, assumindo que a solução obtida até o ponto anterior é exata, é denominada erro local por truncamento ou erro local de discretização.

Quando um método de integração é exato até polinômios de grau r , se diz que tem uma exatidão de ordem r ou

é de ordem r . No cálculo de um ponto y_{k+1} por um método de integração de ordem r o erro local por truncamento é da forma

$$T_{k+1} = c y^{(r+1)}(\xi) h^{r+1} \text{ ou } T_{k+1} = c_{k+1} h^{r+1} \quad (3.1-1)$$

onde c é uma constante que depende do método e $x_k \leq \xi \leq x_{k+1}$, sendo $x_{k+1} = x_k + h$.

Quando comparados os métodos de Runge-Kutta com os métodos preditor-corretor da correspondente ordem, notam-se os pontos seguintes [35]:

- 1) Os métodos de Runge-Kutta são auto-iniciáveis, o intervalo de integração pode ser variado muito facilmente, e são particularmente adequados para aplicar em computadores digitais.
- 2) São comparáveis em exatidão (muitas vezes mais exatos) aos métodos corretor-preditor da correspondente ordem. Porém, se não estimarmos o erro em cada estágio de integração usando avaliações adicionais da derivada, geralmente o intervalo de integração tem que ser escolhido muito conservativamente, isto é, menor que o necessário para obter a exatidão desejada.
- 3) Requerem um número de avaliações da derivada por passo de integração pelo menos igual a ordem do método. Enquanto os métodos preditor-corretor geralmente necessitam somente duas avaliações por passo de

integração. Como a avaliação da derivada corresponde usualmente a maior parte do tempo para resolver uma equação diferencial, os métodos preditor - corretor são geralmente mais rápidos que os métodos de Runge-Kutta (Por exemplo, os métodos preditor-retor de quarta ordem são aproximadamente duas vezes mais rápidos que os métodos de Runge-Kutta da mesma ordem).

- 4) Finalmente, estimar o erro local por truncamento não envolve avaliações adicionais da derivada nos métodos preditor-corretor, enquanto nos métodos de Runge-Kutta é muito custoso.

Existe um método que é preditor-corretor e ao mesmo tempo de Runge-Kutta quando o corretor é aplicado sõ uma vez; possui portanto as qualidades de ambos. É o par preditor-corretor que consiste do método de Euler (Preditor) seguido da regra do trapézio ou Euler modificado (Corretor).

Na plotagem do LR cada ponto $(\hat{s}_{k,3})$ é obti do melhorando com uma iteração de Newton o ponto estimado por integração $(s_{k,2})$, isto é:

$$s_{k,3} = s_{k,2} - \frac{B(s_{k,2}) + K_k A(s_{k,2})}{B'(s_{k,2}) + K_k A'(s_{k,2})} \quad (3.1-2)$$

como no capítulo anterior os valores de $A(\hat{s}_{k,2})$, $B'(\hat{s}_{k,2})$ e $A'(\hat{s}_{k,2})$ podem ser utilizados no método de integração. Logo, o próximo ponto $(\hat{s}_{k+1,2})$ será estimado por integração como segue

$$\begin{aligned}
 s_{k+1,1} &= s_{k+1,0} - h s'_{k,2} = \\
 &= s_{k+1,0} - h \frac{A(s_{k,2})}{B'(s_{k,2}) + K_k A'(s_{k,2})} \quad (3.1-3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{k+1,2} &= s_{k+1,0} - \frac{h}{2} (s'_{k,2} + s'_{k+1,1}) = \\
 &= s_{k+1,0} - \frac{h}{2} \left[\frac{A(s_{k,2})}{B'(s_{k,2}) + K_k A'(s_{k,2})} + \frac{A(s_{k+1,1})}{B'(s_{k+1,1}) + K_{k+1} A'(s_{k+1,1})} \right] \quad (3.1-4)
 \end{aligned}$$

onde $s_{k+1,0} = s_{k,3}$ e $K_{k+1} = K_k + h$. O apóstrofo em s denota derivada com respeito a K e em A e B derivada com respeito a s .

A fórmula (3.1-3) constitui o preditor e (3.1-4) o corretor. Note que o preditor é uma fórmula explícita e o corretor uma fórmula implícita.

3.1.1 ESTIMAÇÃO PRÁTICA DO ERRO

A mais simples estimação do erro local de discretização, em geral, uma estimação conservativa, consiste na diferença entre o preditor e o corretor. Para simplificar a análise vamos considerar uma série de Taylor da equação diferencial (2.2-2) ao redor do ponto (s_{k-1}, K_{k-1}) , $s_{k-1} = s_{k-1,3}$:

$$s' = s'_{k-1} + \lambda_{k-1} (s - s_{k-1}) \dots, \quad \lambda_{k-1} = \left. \frac{\partial s'}{\partial s} \right|_{s=s_{k-1}} \quad (3.1-5)$$

que truncada após o termo de primeira ordem dá uma equação diferencial linear não homogênea a cada passo de integração. Fazendo a mudança de variável:

$$z = s - s_{k-1} + s'_{k-1} / \lambda_{k-1} \quad (3.1-6)$$

a equação (3.1-5) fica:

$$z' = \lambda_{k-1} z \quad ; \quad \lambda_{k-1} = \left. \frac{\partial z'}{\partial z} \right|_{z = z_{k-1}} \quad (3.1-7)$$

Aplicando o método de Euler a (3.1-7) temos:

$$z_{k,1} = (1 + h_k \lambda_{k-1}) z_{k-1} \quad (3.1-8)$$

onde o subíndice em h_k indica que o intervalo de integração está sendo variado.

Substituindo (3.1-8) na regra do trapézio o novo ponto estimado por integração fica:

$$z_{k,2} = \left(1 + h_k \lambda_{k-1} + \frac{(h_k \lambda_{k-1})^2}{2} \right) z_{k-1} \quad (3.1-9)$$

Considerando o módulo da diferença entre preditor e corretor como uma estimativa do módulo do erro local de discretização (T_k), e a mudança de variável (3.1-6) temos:

$$|T_k| \cong |s_{k,2} - s_{k,1}| = |z_{k,2} - z_{k,1}| =$$

$$= \left| \frac{(h_k \lambda_{k-1})^2}{2} z_{k-1} \right| = |c_k| h_k^2 \quad (3.1-10)$$

Pode concluir-se que a estimativa do erro local de discretização como diferença entre o preditor e o corretor é proporcional a segunda potência do intervalo de integração. Este fato pode ser utilizado para ajustar o intervalo de integração de tal forma que o erro local por truncamento assim estimado seja sempre menor que um valor específico.

3.1.2 ESTRATÉGIA DE AJUSTE DO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO

Nos casos práticos, em geral, o erro local de discretização se mantém aproximadamente igual entre dois passos de integração sucessivos para o intervalo de integração constante [34]. Conseqüentemente, o módulo da constante c_k em (3.1-10) também varia pouco entre dois passos de integração sucessivos, isto é:

$$|c_{k+1}| \cong |c_k| = \frac{|T_k|}{h_k^2} \quad (3.1-11)$$

Logo, como o valor de c_{k+1} é conhecido aproximadamente, h_{k+1} pode ser escolhido de tal forma que T_{k+1} seja menor que um valor especificado ϵ , ou seja:

$$|T_{k+1}| \leq \epsilon \text{ ou } |T_{k+1}| \cong \alpha\epsilon = |c_{k+1}| h_{k+1}^2 \quad (3.1-12)$$

onde α é um coeficiente de segurança na faixa $0 < \alpha < 1$ (por exemplo $\alpha = 0,5$).

De (3.1-12) temos que o próximo intervalo de integração (h_{k+1}) deverá ser:

$$h_{k+1} = \left(\frac{\alpha \epsilon}{|c_{k+1}|} \right)^{1/2} \quad (3.1-13)$$

que considerando (3.1-11) fica:

$$h_{k+1} \cong \left(\frac{\alpha \epsilon}{|c_k|} \right)^{1/2} = h_k \left(\frac{\alpha \epsilon}{|T_k|} \right)^{1/2} \quad (3.1-14)$$

No caso em que $|T_{k+1}|$ resulta maior que ϵ , o ponto s_{h+1} deve ser recalculado com h_{k+1} menor. Nestes casos basta considerar o novo h_{k+1} igual ao valor que corresponderia a h_{k+2} .

Pode acontecer o caso eventual de $|T_k|$ em (3.1-14) ser nulo ou muito menor que ϵ . Estes casos devem ser detetados para evitar divisão por zero ou aumentos não desejados do intervalo de integração. Uma tática possível nestas situações é verificar se $|T_k|$ é menor que uma determinada tolerância, e se isto acontece, aumentar o intervalo de integração um certo número de vezes; por exemplo, com alguma regra do seguinte tipo: quintuplicar o intervalo de integração se $|T_k| < \alpha \epsilon / 5^2$.

Exemplo 3.1 Com o objetivo de ilustrar o procedimento apresentado, repetimos na tabela 3.1 o exemplo 2.1 (Tabelas 2.1 e 2.2) até um ganho de pouco mais de $0,2 \times 10^6$. Foi especificada

PONTO	H	GANHO	S		S _{n-1} - S _{n-2}	ERRO
			Y	U		
0	.000000E+00	.000000E+00	-.200000E+01	.200000E+01	.000000E+00	.000000E+00
1	.100000E+00	.100000E+00	-.199874E+01	.199624E+01	.140424E-04	.128392E-05
2	.421938E+01	.431933E+01	-.192066E+01	.181469E+01	.316987E-01	.476837E-05
3	.237977E+01	.664915E+01	-.183414E+01	.169236E+01	.225115E-01	.215897E-05
4	.250786E+01	.920701E+01	-.167544E+01	.158187E+01	.449765E-01	.167675E-04
5	.186974E+01	.110767E+02	-.153378E+01	.155444E+01	.272919E-01	.152662E-05
6	.176951E+01	.128663E+02	-.141593E+01	.156360E+01	.172762E-01	.238419E-06
7	.215268E+01	.150189E+02	-.130201E+01	.159226E+01	.157281E-01	.337175E-06
8	.271401E+01	.177329E+02	-.118898E+01	.163542E+01	.151416E-01	.337175E-06
9	.348735E+01	.212203E+02	-.107488E+01	.163063E+01	.151629E-01	.235419E-06
10	.447751E+01	.256982E+02	-.959241E+00	.175608E+01	.152812E-01	.429815E-06
11	.572753E+01	.314287E+02	-.841575E+00	.183053E+01	.154617E-01	.606000E+00
12	.728297E+01	.387087E+02	-.721550E+00	.191306E+01	.156589E-01	.266560E-06
13	.920234E+01	.479111E+02	-.598889E+00	.200296E+01	.158306E-01	.119209E-06
14	.115543E+02	.594654E+02	-.473353E+00	.209969E+01	.160531E-01	.476837E-06
15	.144190E+02	.738844E+02	-.344749E+00	.220285E+01	.162409E-01	.596046E-07
16	.178896E+02	.917739E+02	-.212868E+00	.231212E+01	.164215E-01	.000000E+00
17	.220731E+02	.113847E+03	-.775792E-01	.242725E+01	.165940E-01	.149012E-07
18	.270930E+02	.140940E+03	.612676E-01	.254803E+01	.167595E-01	.298023E-06
19	.330900E+02	.174036E+03	.203799E+00	.267432E+01	.169185E-01	.149012E-06
20	.402231E+02	.214254E+03	.350125E+00	.280600E+01	.170712E-01	.119209E-06
21	.486770E+02	.262931E+03	.500346E+00	.294295E+01	.172180E-01	.000000E+00
22	.586546E+02	.321586E+03	.654552E+00	.308511E+01	.173591E-01	.000000E+00
23	.703886E+02	.391975E+03	.812827E+00	.323241E+01	.174957E-01	.000000E+00
24	.841419E+02	.476117E+03	.975242E+00	.338481E+01	.176274E-01	.119209E-06
25	.100205E+03	.576322E+03	.114187E+01	.354226E+01	.177543E-01	.000000E+00
26	.118907E+03	.695229E+03	.131276E+01	.370473E+01	.178786E-01	.000000E+00
27	.140610E+03	.835835E+03	.148798E+01	.387221E+01	.179966E-01	.000000E+00
28	.165727E+03	.100157E+04	.166758E+01	.404467E+01	.181123E-01	.235419E-06
29	.194704E+03	.119627E+04	.185161E+01	.422211E+01	.182243E-01	.000000E+00
30	.228044E+03	.142431E+04	.204011E+01	.440450E+01	.183324E-01	.000000E+00
31	.266305E+03	.169062E+04	.223312E+01	.459186E+01	.184374E-01	.000000E+00
32	.310099E+03	.200072E+04	.243069E+01	.478417E+01	.185401E-01	.000000E+00
33	.360093E+03	.236081E+04	.263285E+01	.498144E+01	.186395E-01	.476837E-06
34	.417030E+03	.277784E+04	.283963E+01	.518366E+01	.187355E-01	.476837E-06
35	.481730E+03	.325957E+04	.305106E+01	.539084E+01	.188297E-01	.000000E+00
36	.555075E+03	.381465E+04	.326718E+01	.560298E+01	.189205E-01	.106624E-05
37	.633052E+03	.445270E+04	.348601E+01	.582009E+01	.190096E-01	.476837E-06
38	.731708E+03	.518441E+04	.371359E+01	.604217E+01	.190957E-01	.000000E+00
39	.837220E+03	.602163E+04	.394393E+01	.626924E+01	.191798E-01	.000000E+00
40	.955846E+03	.697747E+04	.417906E+01	.650130E+01	.192621E-01	.000000E+00
41	.108895E+04	.806642E+04	.441901E+01	.673835E+01	.193422E-01	.000000E+00
42	.123801E+04	.930443E+04	.466379E+01	.698040E+01	.194195E-01	.000000E+00
43	.140467E+04	.107091E+05	.491343E+01	.722746E+01	.194956E-01	.000000E+00
44	.159065E+04	.122998E+05	.516794E+01	.747955E+01	.195697E-01	.000000E+00
45	.179785E+04	.140976E+05	.542735E+01	.773666E+01	.196404E-01	.553674E-06
46	.202839E+04	.161260E+05	.569168E+01	.799883E+01	.197124E-01	.553674E-06
47	.228429E+04	.184103E+05	.594094E+01	.826603E+01	.197811E-01	.000000E+00
48	.256799E+04	.209763E+05	.623515E+01	.853829E+01	.198465E-01	.000000E+00
49	.288219E+04	.238604E+05	.651433E+01	.881562E+01	.199146E-01	.000000E+00
50	.322923E+04	.270857E+05	.679848E+01	.909801E+01	.199755E-01	.000000E+00
51	.361263E+04	.307024E+05	.708764E+01	.938550E+01	.200406E-01	.553674E-06
52	.403495E+04	.347373E+05	.738180E+01	.967808E+01	.200992E-01	.553674E-06
53	.450066E+04	.392374E+05	.768099E+01	.997576E+01	.201606E-01	.000000E+00
54	.501115E+04	.442485E+05	.798522E+01	.102786E+02	.202192E-01	.000000E+00
55	.557219E+04	.498207E+05	.829450E+01	.105865E+02	.202738E-01	.000000E+00
56	.618765E+04	.560684E+05	.860886E+01	.108995E+02	.203304E-01	.000000E+00
57	.686159E+04	.628700E+05	.892830E+01	.112177E+02	.203871E-01	.000000E+00
58	.759931E+04	.704683E+05	.925281E+01	.115410E+02	.204369E-01	.000000E+00
59	.840387E+04	.788722E+05	.958249E+01	.118695E+02	.204827E-01	.000000E+00
60	.928223E+04	.881544E+05	.991718E+01	.122032E+02	.205435E-01	.000000E+00
61	.102397E+05	.983942E+05	.102570E+02	.125420E+02	.205907E-01	.000000E+00
62	.112830E+05	.109677E+06	.106020E+02	.128860E+02	.206419E-01	.000000E+00
63	.124173E+05	.122094E+06	.109522E+02	.132351E+02	.206870E-01	.000000E+00
64	.136500E+05	.135744E+06	.113075E+02	.135995E+02	.207363E-01	.000000E+00
65	.149877E+05	.150732E+06	.116679E+02	.139491E+02	.207822E-01	.000000E+00
66	.164384E+05	.167170E+06	.120336E+02	.143139E+02	.208267E-01	.000000E+00
67	.180103E+05	.185181E+06	.124044E+02	.146839E+02	.208725E-01	.000000E+00
68	.197107E+05	.204891E+06	.127804E+02	.150591E+02	.209130E-01	.000000E+00

TABELA 3.1 - Obtenção de um ramo do LR do polinômio [2.2-10] com ajuste do intervalo de integração.

PONTO	H	GANHO	S		S _{n-1} - S _{n-1}	ERRO ACUMULADO
			V	U		
0	.000000E+00	.000000E+00	-.200000E+01	.200000E+01	.000000E+00	.000000E+00
1	.100000E+00	.100000E+00	-.199374E+01	.199624E+01	.140124E-04	.476837E-06
2	.421938E+01	.431938E+01	-.192272E+01	.181478E+01	.316996E-01	.206453E-02
3	.244123E+01	.676061E+01	-.183138E+01	.168838E+01	.216117E-01	.805336E-03
4	.262564E+01	.936625E+01	-.165875E+01	.157494E+01	.489703E-01	.361919E-02
5	.187602E+01	.112623E+02	-.151997E+01	.155492E+01	.242258E-01	.879080E-03
6	.190577E+01	.131660E+02	-.139843E+01	.156720E+01	.186657E-01	.334063E-03
7	.220555E+01	.153736E+02	-.128573E+01	.159780E+01	.155823E-01	.168967E-03
8	.279364E+01	.181672E+02	-.117330E+01	.164247E+01	.151567E-01	.127134E-03
9	.358788E+01	.217551E+02	-.105966E+01	.169881E+01	.152172E-01	.101818E-03
10	.459877E+01	.263539E+02	-.944422E+00	.176510E+01	.153581E-01	.810848E-04
11	.566736E+01	.322212E+02	-.827182E+00	.184014E+01	.155348E-01	.648381E-04
12	.744320E+01	.396644E+02	-.707595E+00	.192305E+01	.157320E-01	.522796E-04
13	.936268E+01	.490471E+02	-.585394E+00	.201315E+01	.159243E-01	.431901E-04
14	.117562E+02	.608033E+02	-.460339E+00	.211006E+01	.161349E-01	.375883E-04
15	.146337E+02	.754370E+02	-.332246E+00	.221292E+01	.162239E-01	.135671E-03
16	.181655E+02	.936025E+02	-.200922E+00	.232321E+01	.170541E-01	.663097E-03
17	.219939E+02	.115596E+03	-.657960E-01	.242853E+01	.159804E-01	.739969E-02
18	.268452E+01	.124281E+03	-.278349E-01	.249852E+01	.346515E-01	.234574E-01
19	.389534E+01	.128177E+03	.455530E-02	.247278E+01	.464572E-01	.214652E-01
130	.239808E+01	.960767E+03	.162096E+01	.400925E+01	.408493E-01	.678755E-02
131	.187604E+01	.962644E+03	.162727E+01	.400648E+01	.637562E-02	.420628E-03
132	.371493E+01	.966359E+03	.163176E+01	.400965E+01	.783445E-03	.359093E-03
133	.111448E+02	.977505E+03	.164184E+01	.402217E+01	.201723E-02	.162835E-02
134	.334344E+02	.101094E+04	.169462E+01	.403607E+01	.279217E-01	.249536E-01
135	.396157E+01	.101490E+04	.166359E+01	.407469E+01	.495714E-01	.244024E-01
136	.281333E+01	.101771E+04	.169075E+01	.405322E+01	.343995E-01	.990682E-02
1218	.263179E+01	.995101E+04	.478191E+01	.709728E+01	.765011E-02	.110626E-03
1219	.367294E+01	.995468E+04	.478271E+01	.709807E+01	.203765E-03	.924474E-04
1220	.110186E+02	.996570E+04	.478432E+01	.709954E+01	.506368E-03	.415715E-03
1221	.330565E+02	.999876E+04	.479466E+01	.711050E+01	.690144E-02	.644213E-02
1222	.130780E+02	.100118E+05	.476866E+01	.708189E+01	.421289E-01	.356054E-01
1223	.228810E+01	.100141E+05	.479683E+01	.711240E+01	.469644E-01	.534685E-02
1224	.178748E+01	.100159E+05	.479392E+01	.710920E+01	.477517E-02	.572363E-03
11508	.243161E+01	.999516E+05	.103040E+02	.125886E+02	.196545E-01	.346520E-02
11509	.274242E+01	.999543E+05	.103073E+02	.125922E+02	.475362E-02	.128629E-02
11510	.628914E+01	.999606E+05	.103048E+02	.125894E+02	.404873E-02	.276045E-02
11511	.156279E+02	.999763E+05	.103197E+02	.126059E+02	.215906E-01	.188234E-01
11512	.421805E+01	.999905E+05	.102933E+02	.125766E+02	.396386E-01	.208139E-01
11513	.334983E+01	.999838E+05	.103168E+02	.126026E+02	.349240E-01	.141075E-01
11514	.283420E+01	.999867E+05	.103035E+02	.125879E+02	.199666E-01	.586115E-02
11515	.317122E+01	.999998E+05	.103099E+02	.125949E+02	.929813E-02	.343571E-02
11516	.519995E+01	.999950E+05	.103041E+02	.125884E+02	.893235E-02	.549523E-02
11517	.869934E+01	.100004E+06	.103203E+02	.126065E+02	.239147E-01	.184182E-01
11518	.491736E+01	.100009E+06	.102902E+02	.125730E+02	.452188E-01	.267974E-01
11519	.365631E+01	.100012E+06	.103232E+02	.126096E+02	.491017E-01	.223019E-01
11520	.260894E+01	.100015E+06	.103036E+02	.125881E+02	.290399E-01	.673489E-02
11521	.242034E+01	.100017E+06	.103094E+02	.125943E+02	.815828E-02	.142070E-02
21282	.299526E+02	.185155E+06	.124275E+02	.147151E+02	.424367E-01	.395870E-01
21283	.181894E+01	.185156E+06	.124061E+02	.146864E+02	.359022E-01	.368623E-02
21284	.151785E+01	.185158E+06	.124045E+02	.146842E+02	.279586E-02	.889230E-03
21285	.453880E+01	.185163E+06	.124034E+02	.146927E+02	.201667E-02	.112916E-02
21286	.136164E+02	.185176E+06	.124082E+02	.146891E+02	.769556E-02	.656639E-02
21287	.136728E+02	.185190E+06	.123816E+02	.146533E+02	.448710E-01	.383084E-01
21288	.217837E+01	.185192E+06	.124067E-02	.146870E+02	.418322E-01	.353034E-02
21289	.168402E+01	.185194E+06	.124050E+02	.146846E+02	.297222E-02	.559663E-03
21290	.488401E+01	.185199E+06	.124043E+02	.146836E+02	.136501E-02	.805349E-03
21291	.146520E+02	.185213E+06	.124081E+02	.146887E+02	.589308E-02	.508772E-02
23690	.231231E+02	.204849E+06	.127542E+02	.150383E+02	.354661E-01	.323922E-01
23691	.290178E+01	.204851E+06	.127913E+02	.150675E+02	.471052E-01	.147124E-01
23692	.211396E+01	.204854E+06	.127791E-02	.150575E+02	.155367E-01	.821563E-03
23693	.263156E+01	.204856E+06	.127800E+02	.150587E+02	.110277E-02	.278218E-03
23694	.804468E+01	.204864E+06	.127793E+02	.150581E+02	.112271E-02	.844492E-03
23695	.241340E+02	.204888E+06	.127877E+02	.150649E+02	.101863E-01	.933317E-02

TABELA 3.2 - Obtenção do exemplo da Tabela 3.1 por integração das equações diferenciais sugeridas por Pan e Chao.

uma diferença máxima entre preditor e corretor $\epsilon = 0,05$, um coeficiente de segurança $\alpha = 0,5$ e um intervalo inicial de integração $h = 0,1$. Não se estabeleceu limite no aumento do intervalo de integração.

Da tabela 3.1 podemos fazer as seguintes observações:

- 1) O valor de h ajustou-se em \bar{s} um passo de integração para dar a diferença entre preditor e corretor especificada. A partir daí passou progressivamente de pouco mais de 4.2 a cerca de $0,2 \times 10^5$ sem modificar-se por isso a diferença entre preditor e corretor, que se manteve inferior a 0,05 (ϵ), e em geral, bastante próxima de $0,025$ ($\alpha\epsilon$).
- 2) O erro acumulado (Erro verdadeiro) se manteve limitado a valores muito pequenos (como máximo da ordem de $0,1 \times 10^{-4}$) e verifica com margem a regra prática segundo a qual o número de casas exatas se duplica pela iteração de Newton [31].

Com o objetivo de fazer uma comparação, na tabela 3.2 repetimos o exemplo resolvido com as mesmas especificações e o mesmo método de integração aplicado as equações sugeridas por Pan e Chao (Equação (2.1-3)).

Da tabela 3.2 se observa o seguinte:

- 1) O intervalo de integração não aumentou como na tabela 3.1, apresentando oscilações, e permanecendo li

mitado a valores com s̄o uma ou duas casas inteiras.

- 2) Consequentemente o n̄mero de pontos calculados é muito maior que na tabela 3.1, acentuando-se intensamente esta diferença com o crescimento do ganho . Até um ganho de pouco mais de 100 o n̄mero de pontos é praticamente o mesmo em ambas tabelas (Pontos 1 a 17). Já para um ganho de 10000 a relaçao entre o n̄mero de pontos é 1222/43, subindo a 23695/68 para um ganho de $0,20489 \times 10^6$ no ponto final. Enquanto cada um dos primeiros pontos da tabela 3.1 requereu o cálculo de um ponto na tabela 3.2, cada um dos últimos requereu mais de 2000.
- 3) A diferença entre preditor e corretor apresenta os cilaçoes e o erro acumulado é muito maior que na tabela 3.1, em geral da ordem da diferença entre preditor e corretor.

Uma comparaço adicional resulta da consideraço dos tempos de computaço. Utilizando um computador HP-3000 a obtenço da tabela 3.1 requereu menos de 2.1 segundos enquanto a tabela 3.2 mais de 21 minutos. O tempo de computaço por ponto calculado foi de menos de 30 milisegundos na tabela 3.1 contra mais de 50 milisegundos na tabela 3.2; esta diferença é devida ao maior custo computacional por ponto calculado e a repetiço do cálculo de pontos por no verificaço da diferença especificada entre preditor e corretor.

Este exemplo mostra as vantagens da utilizaço de uma adequada estratégia de ajustamento do intervalo de

integração, e a superioridade da combinação método de integração - método iterativo de Newton sobre a integração das equações diferenciais sugeridas por Pan e Chao.

3.1.3 ESTABILIDADE

É bem sabido que o método de Newton às vezes não consegue resolver equações não lineares. Isto acontece, por exemplo, quando uma aproximação muito pobre da solução é conhecida. Considerando o método de Newton como o método de Euler aplicado à equação diferencial correspondente (Capítulo 1 - Seção 1.2), pode-se perguntar se existe uma maneira melhor de integrar essa equação diferencial. P.T. Boggs [25] estudou este problema desde o ponto de vista da estabilidade dos métodos numéricos de integração; concluiu que desse ponto de vista a regra do trapézio é uma escolha muito atrativa e razoável, e indicou a utilização do método de Euler como o preditor mais natural.

A grosso modo, um processo numérico de integração é estável se erros pequenos durante o cálculo não produzem erros grandes na solução final, ou em outras palavras, se erros cometidos num passo de integração não tendem a magnificar-se nos passos seguintes [34], [35].

Nos métodos numéricos de integração existe em geral, um limite máximo no valor de h para o qual o processo de integração resulta estável. Este limite depende do método de integração e as características da equação diferencial em cada ponto.

No método aqui discutido, como o erro acumulado é diminuído pelas iterações de Newton, o limite no valor de h é sensivelmente aumentado. Experiência computacional em um grande número de casos tem mostrado que se o valor de h é ajustado para obter uma exatidão razoável não é necessário fazer considerações de estabilidade na sua escolha.

As regiões de instabilidade do método de integração, quando não combinado com o método de Newton, se evidenciam apenas em diminuição da exatidão, quando combinado com ele.

A computação é menos exata nas proximidades dos pontos múltiplos. Em primeiro lugar o método de integração é muito instável nas proximidades destes pontos, devido a que a instabilidade tem uma relação direta com o valor de $|\lambda| = |\partial s' / \partial s|$, e, como pode demonstrar-se facilmente, este valor tende a infinito quando s tende a um ponto múltiplo. Por outro lado, a convergência do método de Newton é afetada pela proximidade de outras raízes, devido a fraca convergência deste método na presença de raízes múltiplas ou quase-múltiplas [31].

A computação é mais exata na parte dos ramos em que estes tendem assintoticamente aos zeros de laço aberto. Assim como, com o método de Euler aplicado ao sistema de equações diferenciais associado a um sistema de equações não lineares (Método de Newton), se obtém convergência para a variável independente tendendo a infinito, os ramos do LR obtidos numericamente convergem aos zeros de laço aberto quando o valor absoluto do ganho tende a infinito. Consequentemente, existe a partir de um certo valor absoluto do ganho, e às vezes a partir de

ganho igual a zero, uma tendência a aumentar a exatidão (Diminuir o erro acumulado) quando o valor absoluto do ganho cresce.

Exemplo 3.2 Com o objetivo de ilustrar os fatos discutidos mostram-se na tabela 3.3 os resultados numéricos correspondentes a um ramo do exemplo do Capítulo 1 (Figura 2.1). Os valores obtidos correspondem ao ramo de parametro positivo que vai do polo na origem ao ponto múltiplo em $s = -1 + j0$ e $K = 1$ (Pontos 1 a 7), e daí ao zero em $s = -1 + 1j$ (Pontos 8 a 36). A computação foi interrompida um pouco antes do ponto múltiplo e continuada um pouco depois. Foi utilizada uma diferença entre preditor e corretor $\epsilon = 0,05$ e um coeficiente de segurança $\alpha = .5$.

Observa-se a menor exatidão nos pontos 1 a 7 e 9 a 12 que envolvem o ponto múltiplo. A partir do ponto 13 obtêm-se 6 casas exatas até "chegar" ao zero, no ponto 35.

As primeiras diferenças entre preditor e corretor apresentam oscilações, devido ao fato de que alguns pontos tiveram que ser recalculados. Isto acontece porque $|\lambda| = |\partial s' / \partial s|$ varia muito rapidamente nas proximidades dos pontos múltiplos e conseqüentemente a equação (3.1-11) resulta pouco exata.

Experiência computacional num grande número de casos tem mostrado que, para a obtenção de resultados satisfatórios, uma regra prática é escolher a diferença entre preditor e corretor muito menor, pelo menos dez vezes menor, que a distância mínima entre os polos e/ou zéros de laço aberto.

A regra prática segundo a qual o número de casas decimais exatas, especificadas na diferença entre preditor e corretor, é dobrada pela iteração de Newton, pode não ser

PONTO	H	GAMHO	S	U	$S_{k_2} - S_{k_1}$	ERRO ACUMULADO
0	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
1	.300000E+00	.300000E+00	-.256171E+00	.000000E+00	.271978E-01	.299215E-04
2	.297623E+00	.597623E+00	-.490323E+00	.000000E+00	.322676E-02	.264645E-04
3	.222419E+00	.810042E+00	-.675029E+00	.000000E+00	.147803E-01	.163317E-04
4	.608687E-01	.870911E+00	-.737325E+00	.000000E+00	.381458E-02	.238419E-04
5	.107850E+00	.978761E+00	-.896301E+00	.000000E+00	.370777E-01	.966787E-04
6	.164681E-01	.993229E+00	-.950992E+00	.000000E+00	.125270E-01	.107884E-03
7	.362732E-02	.998856E+00	-.975007E+00	.000000E+00	.566530E-02	.720024E-04
8	.000000E+00	.100357E+01	-.100000E+01	.420185E-01	.000000E+00	.000000E+00
9	.367320E-02	.100739E+01	-.100000E+01	.604976E-01	.358646E-02	.196695E-05
10	.290940E-01	.103644E+01	-.100000E+01	.133880E+00	.403321E-01	.109762E-03
11	.229059E-01	.105975E+01	-.100000E+01	.169760E+00	.424510E-02	.685453E-06
12	.949137E-01	.115476E+01	-.100000E+01	.267599E+00	.329999E-01	.387430E-05
13	.826119E-01	.123687E+01	-.100000E+01	.325414E+00	.846815E-02	.000000E+00
14	.141944E+00	.137882E+01	-.100000E+01	.399056E+00	.136220E-01	.000000E+00
15	.192295E+00	.157111E+01	-.100000E+01	.471303E+00	.130219E-01	.000000E+00
16	.265440E+00	.183795E+01	-.100000E+01	.543293E+00	.136906E-01	.000000E+00
17	.360055E+00	.219761E+01	-.100000E+01	.611990E+00	.137902E-01	.000000E+00
18	.484789E+00	.268239E+01	-.100000E+01	.675925E+00	.137167E-01	.000000E+00
19	.654402E+00	.333688E+01	-.100000E+01	.734056E+00	.134388E-01	.000000E+00
20	.892662E+00	.422954E+01	-.100000E+01	.785648E+00	.130055E-01	.115209E-06
21	.123764E+01	.546713E+01	-.100000E+01	.831111E+00	.124425E-01	.000000E+00
22	.175433E+01	.722150E+01	-.100000E+01	.869905E+00	.117691E-01	.000000E+00
23	.255688E+01	.977538E+01	-.100000E+01	.902465E+00	.109373E-01	.000000E+00
24	.388511E+01	.136335E+02	-.100000E+01	.929154E+00	.101347E-01	.000000E+00
25	.605402E+01	.196883E+02	-.100000E+01	.950435E+00	.915674E-02	.000000E+00
26	.988227E+01	.296756E+02	-.100000E+01	.966852E+00	.816035E-02	.000000E+00
27	.174826E+02	.471592E+02	-.100000E+01	.979015E+00	.706635E-02	.000000E+00
28	.328851E+02	.800443E+02	-.100000E+01	.987584E+00	.592113E-02	.000000E+00
29	.675721E+02	.147816E+03	-.100000E+01	.993248E+00	.475526E-02	.000000E+00
30	.464806E+03	.612422E+03	-.100000E+01	.998368E+00	.160259E-01	.000000E+00
31	.530544E+03	.119297E+04	-.100000E+01	.999162E+00	.720975E-03	.000000E+00
32	.102557E+05	.114487E+05	-.100000E+01	.999913E+00	.652790E-02	.000000E+00
33	.200701E+05	.315187E+05	-.100000E+01	.999968E+00	.772476E-04	.000000E+00
34	.108317E+07	.111464E+07	-.100000E+01	.999999E+00	.121212E-02	.000000E+00
35	.147576E+08	.158723E+08	-.100000E+01	.100000E+01	.216961E-04	.000000E+00
36	.150235E+10	.151873E+10	-.100000E+01	.100000E+01	.123262E-03	.000000E+00

TABELA 3,3 - Ramo do LR da figura 1.2 incluindo um ponto múltiplo.

válida em alguns poucos pontos nas proximidades dos pontos múltiplos.

Se é necessário muita exatidão pode-se utilizar mais de uma iteração de Newton, um número fixo de iterações, ou iterações até atingir uma tolerância determinada. Quando se utiliza precisão simples, duas ou três iterações são suficientes para obter exatidão máxima.

3.2 UTILIZAÇÃO DE ESCALAS MISTAS

Uma possibilidade para representar LRs ocupando uma porção muito grande do plano complexo é utilizar escalas mistas [15], [30]. Esta representação consiste no uso de escalas lineares na vizinhança dos eixos, e logarítmicas na parte restante. Desta maneira aproveitam-se as vantagens das escalas logarítmicas e consegue-se representar a origem. Obtém-se com estas escalas uma representação mais ampla do LR sem perda de detalhe na região de maior importância, que é perto da origem e dos eixos, especialmente do eixo imaginário.

A escala linear é utilizada quando a parte real ou imaginária do LR está dentro de um determinado intervalo. O mais simples e natural é escolher este intervalo da forma $[-10^n, 10^n]$, sendo n um número inteiro.

A relação entre os comprimentos de uma década da escala logarítmica e a parte linear, pode ser escolhida de forma tal que exista uma certa continuidade na passagem de uma escala para outra.

Seja a escala mista representada na figura 3.1 correspondente a parte positiva do eixo imaginário ($j\omega$). Supondo que a parte linear representada meça b unidades de comprimento, a relação entre um $\Delta\omega$ e seu comprimento será nela igual a $1/b$. Para que a passagem de uma escala para outra não seja descontínua deverá cumprir-se em 1^+ a mesma relação, isto é:

$$\lim_{\omega \rightarrow 1^+} \frac{\omega - 1}{a \log \omega} = \frac{1}{b} \quad (3.2-1)$$

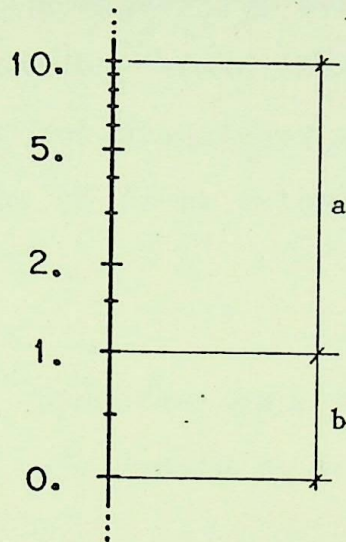


FIGURA 3.1 - Escala mista

Pela regra de L'hospital

$$\lim_{\omega \rightarrow 1^+} \frac{(\omega - 1)'}{(a \log \omega)'} = \lim_{\omega \rightarrow 1^+} \frac{1}{a \log e / \omega} = \frac{1}{a \log e} \quad (3.2-2)$$

Logo, generalizando, temos que a relação en

tre os comprimentos de uma década logarítmica e um sub-intervalo linear da forma $[-10^n, 0]$ ou $[0, 10^n]$ será:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\log e} \cong 2,3026 \quad (3.2-3)$$

No Capítulo seguinte serão apresentados vários exemplos ilustrativos que esclarecerão melhor a utilidade das escalas mistas.

Exemplo 4.1 Considere um sistema linear invariante no tempo como o da Figura 1.4, cujo função de transferência se pode escrever da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+3,32)}{(s+2,195)^2}$$

O LR é obtido aplicando-se (3.2-2) e (3.2-3) e (3.1-4) com pontos iniciais nos polos simples e pontos iniciais aproximados para o polo duplo calculados com base em (3.1-7).

CAPITULO 4

EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

Utilizando o algoritmo discutido no Capítulo 2 e o processo de integração apresentado no Capítulo 3 foi elaborado um programa na linguagem FORTRAN-IV para um computador digital HP-3000 dotado de um plotador de gráficos. O dito programa é mostrado no apêndice.

A seguir são apresentados vários exemplos ilustrativos, selecionados intencionalmente para mostrar a eficiência dos procedimentos discutidos em diferentes situações. Todos eles foram obtidos em forma automática pela programação desenvolvida.

Exemplo 4.1 Considere um sistema linear realimentado como o da figura 1.1, cuja função de transferência de laço aberto está dada por:

$$G(s) H(s) = K \frac{(s+2) (s + 1,32) (s + 40) \dots \dots \dots}{s(s+70)^2 (s+10+j 50) (s+10 -j 50) \dots \dots \dots} \dots \dots \dots$$
$$\dots \dots \dots \frac{(s + 50) \dots \dots \dots}{(s+2,195 +j 2,1845) (s+2,195 -j 2,1845)}$$

O LR é obtido aplicando (3.1-2), (3.1-3) e (3.1-4) com pontos iniciais nos polos simples e pontos iniciais aproximados para o polo duplo calculados por meio de (2.3-7) e

(2.3-8).

Os pontos múltiplos são previamente calculados como as raízes do polinômio numerador da expressão (2.4-1). São consideradas as raízes que não são polos nem zeros múltiplos nas quais o ganho calculado como

$$K = - B(s) / A(s)$$

é um número real. Existem pontos múltiplos de segunda ordem em

$$\begin{aligned} s_1 &= -1,6369 & , & & K &= -0,46813 \times 10^6 \\ s_2 &= -4,6058 & , & & K &= 0,38325 \times 10^5 \\ s_3 &= -45,500 & , & & K &= -0,40592 \times 10^7 \end{aligned}$$

Quando um ponto múltiplo é alcançado a obtenção do ramo é continuada após uma mudança de direção de noventa graus no sentido horário segundo o indicado no Capítulo 2 (Seção 2.4).

Cada ramo é computado até alcançar uma das margens do diagrama ou até chegar perto de um zero.

O LR é mostrado na figura 4.1 em escalas lineares e 4.2 em escalas mistas. Observa-se a grande vantagem da representação em escalas mistas ao mostrar ampliada a região perto da origem, cujos detalhes são pouco visíveis no gráfico em escalas lineares.

Todos os ramos foram obtidos com uma precisão

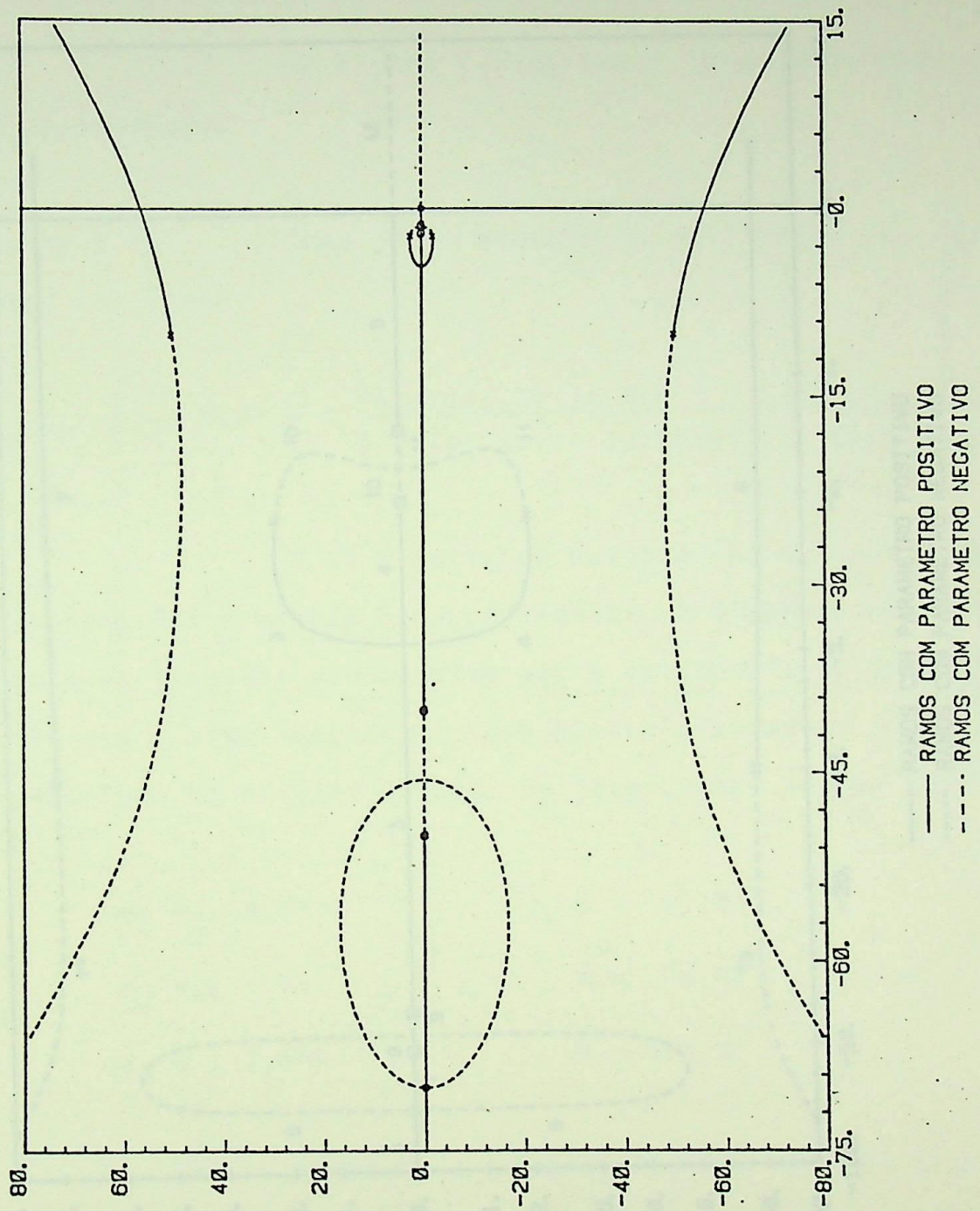


FIGURA 4.1 - LR em escalas lineares

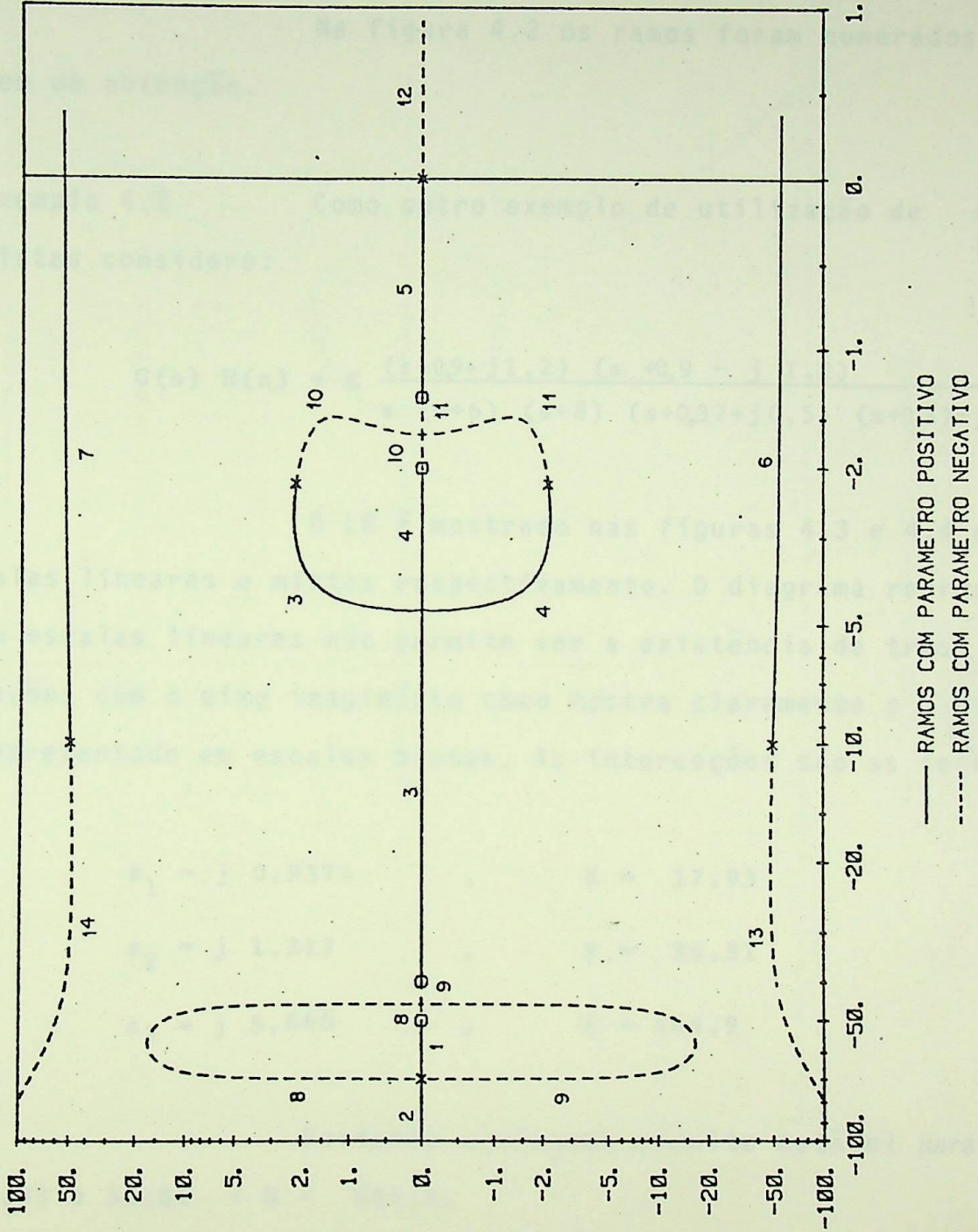


FIGURA 4.2 - LR da figura 4.1 em escalas mistas

superior a 5×10^{-4} e até um $|K|$ de pelo menos 10^6 . O LR em escalas mistas foi obtido em um tempo de computação de aproximadamente 23 segundos, sendo calculados 690 pontos.

Na figura 4.2 os ramos foram numerados na ordem de obtenção.

Exemplo 4.2 Como outro exemplo de utilização de escalas mistas considere:

$$G(s) H(s) = K \frac{(s+0,9+j1,2) (s +0,9 - j 1,2)}{s (s+6) (s+8) (s+0,37+j0,5) (s+0,37-j0,5)}$$

O LR é mostrado nas figuras 4.3 e 4.4 em escalas lineares e mistas respectivamente. O diagrama representado em escalas lineares não permite ver a existência de três interseções com o eixo imaginário como mostra claramente o diagrama representado em escalas mistas. As interseções são as seguintes:

$$\begin{array}{ll} s_1 = j 0,9374 & , \quad K = 17,93 \\ s_2 = j 1,217 & , \quad K = 36,81 \\ s_3 = j 5,666 & , \quad K = 464,9 \end{array}$$

Portanto o sistema resulta estável para $0 < K < 17,93$ e $36,81 < K < 464,9$.

Exemplo 4.3 Seja a função de transferência:

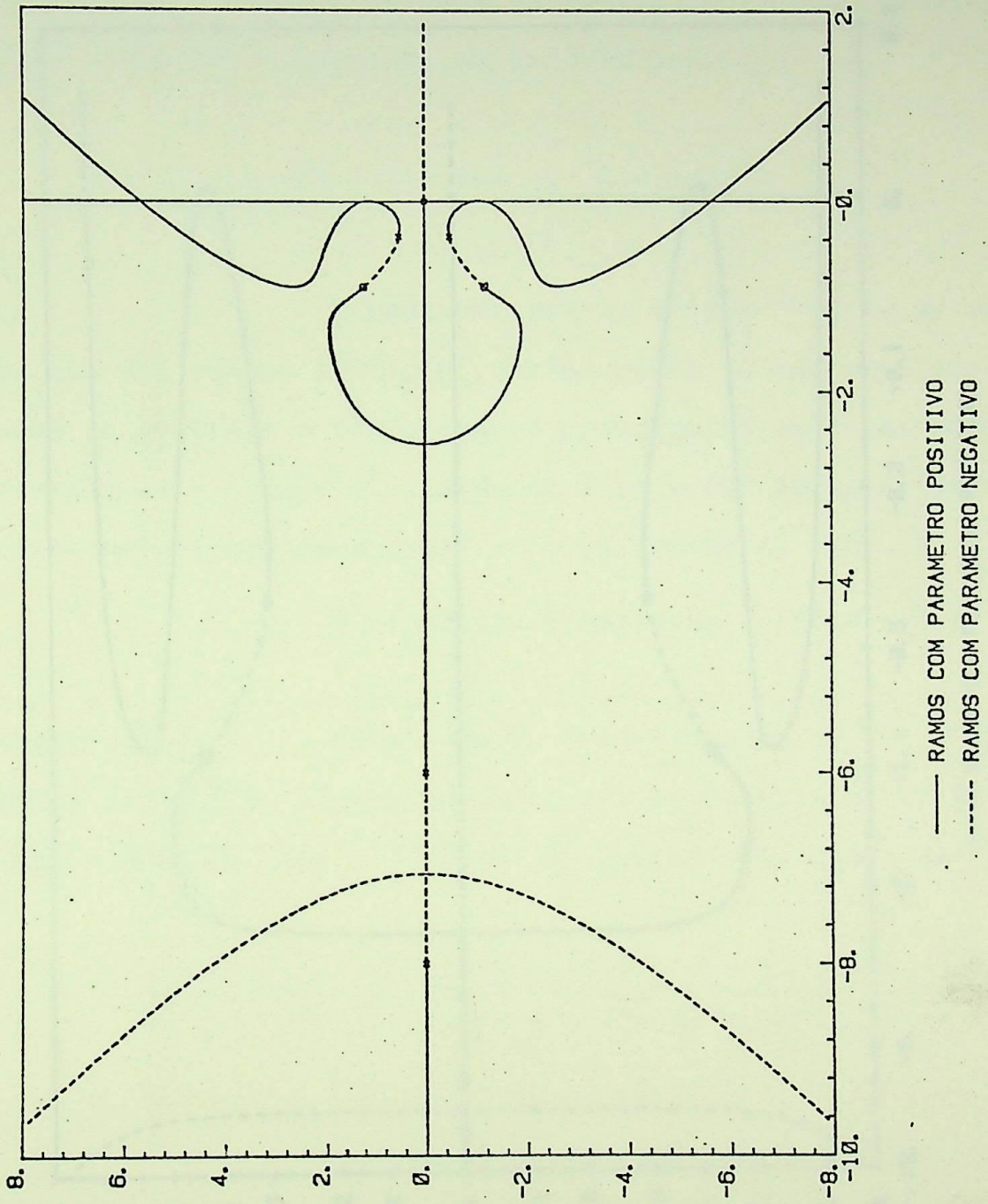


FIGURA 4,3 - LR em escalas lineares

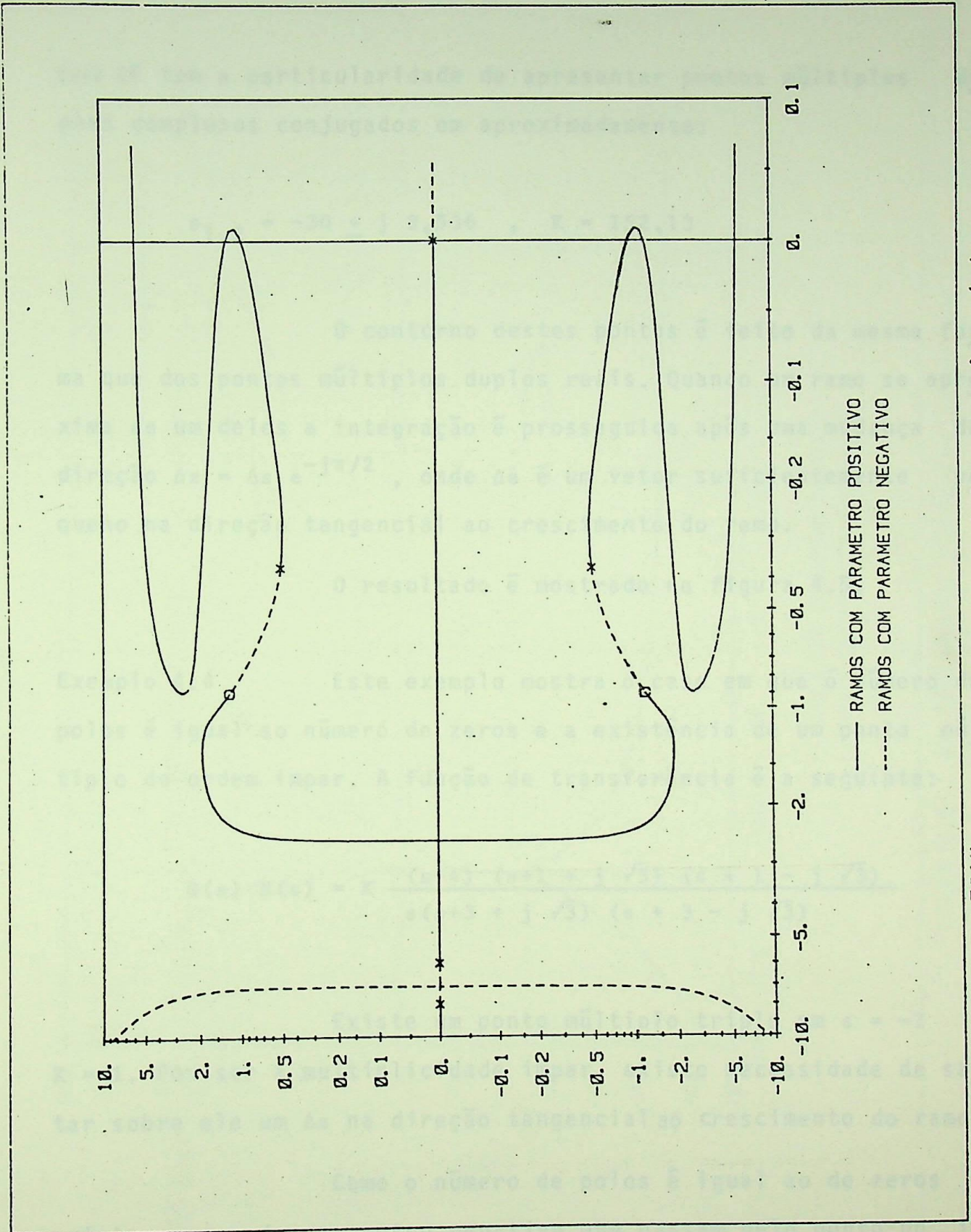


FIGURA 4.4 - LR da figura 4.3 em escalas mistas

$$G(s) H(s) = K \frac{(s+0,7+j \cdot 4) (s+0,7-j \cdot 4)}{(s+30)^2 (s+30+j5) (s+30-j5) (s+1-j3) (s+1+j3)}$$

cujo LR tem a particularidade de apresentar pontos múltiplos duplos complexos conjugados em aproximadamente:

$$s_{1,2} = -30 \pm j 3,536 \quad , \quad K = 152,13$$

O contorno destes pontos é feito da mesma forma que dos pontos múltiplos duplos reais. Quando um ramo se aproxima de um deles a integração é prosseguida após uma mudança de direção $\Delta z = \Delta s e^{-j\pi/2}$, onde Δs é um vetor suficientemente pequeno na direção tangencial ao crescimento do ramo.

O resultado é mostrado na figura 4.5.

Exemplo 4.4 Este exemplo mostra o caso em que o número de polos é igual ao número de zeros e a existência de um ponto múltiplo de ordem ímpar. A função de transferência é a seguinte:

$$G(s) H(s) = K \frac{(s+4) (s+1 + j \sqrt{3}) (s + 1 - j \sqrt{3})}{s(s+3 + j \sqrt{3}) (s + 3 - j \sqrt{3})}$$

Existe um ponto múltiplo triplo em $s = -2$, $K = 1$. Por ser a multiplicidade ímpar, existe necessidade de saltar sobre ele um Δz na direção tangencial ao crescimento do ramo.

Como o número de polos é igual ao de zeros, existem ramos de parametro negativo que passam pelo ponto no infinito do plano complexo, pode-se pensar na existência de um ponto

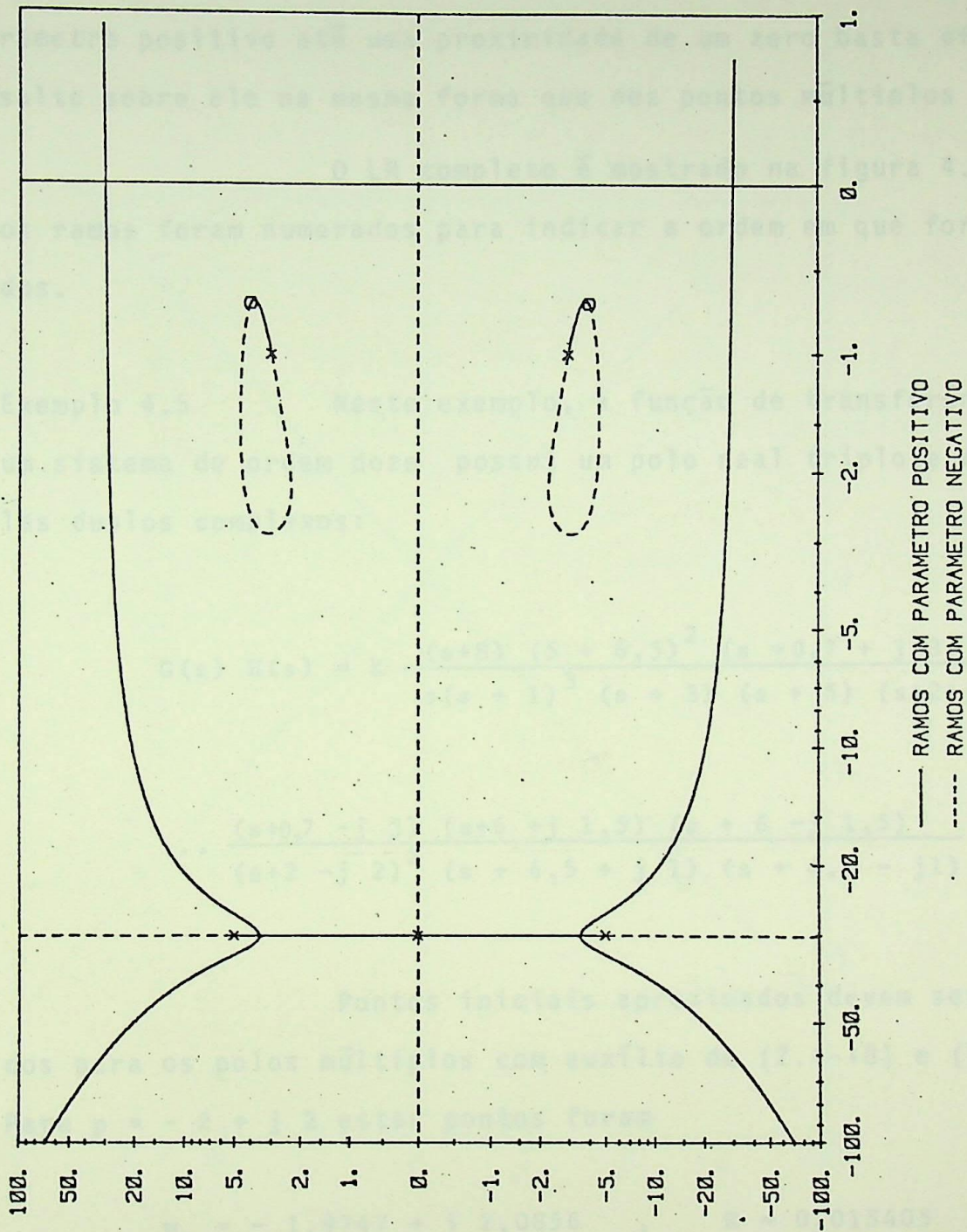


FIGURA 4.5 - LR com pontos múltiplos complexos.

to múltiplo no infinito. Logo começando nos polos não é possível obter os sub-ramos de parametro negativo que chegam aos zeros desde o ponto no infinito. Uma alternativa nestes casos é obter estes sub-ramos a partir dos zeros. Uma vez obtido um ramo de parametro positivo até uma proximidade de um zero basta efetuar um salto sobre ele na mesma forma que nos pontos múltiplos impares.

O LR completo é mostrado na figura 4.6, onde os ramos foram numerados para indicar a ordem em que foram obtidos.

Exemplo 4.5 Neste exemplo, a função de transferência de um sistema de ordem doze possui um polo real triplo e dois polos duplos complexos:

$$G(s) H(s) = K \frac{(s+8) (s+6,5)^2 (s+0,7+j3)}{s(s+1)^3 (s+3) (s+5) (s+2+j2)^2} \dots$$

$$\dots \frac{(s+0,7-j3) (s+6+j1,5) (s+6-j1,5)}{(s+2-j2)^2 (s+4,5+j1) (s+4,5-j1)}$$

Pontos iniciais aproximados devem ser calculados para os polos múltiplos com auxílio de (2.4-18) e (2.4-19). Para $p = -2 + j2$ estes pontos foram

$$w_1 = -1,9747 + j2,0856, \quad K = 0,015405$$

$$w_2 = -2,0448 + j1,8950, \quad K = 0,015405$$

$$w_3 = -2,0858 + j2,0384, \quad K = -0,015405$$

$$w_4 = -1,8981 + j1,9801, \quad K = -0,015405$$

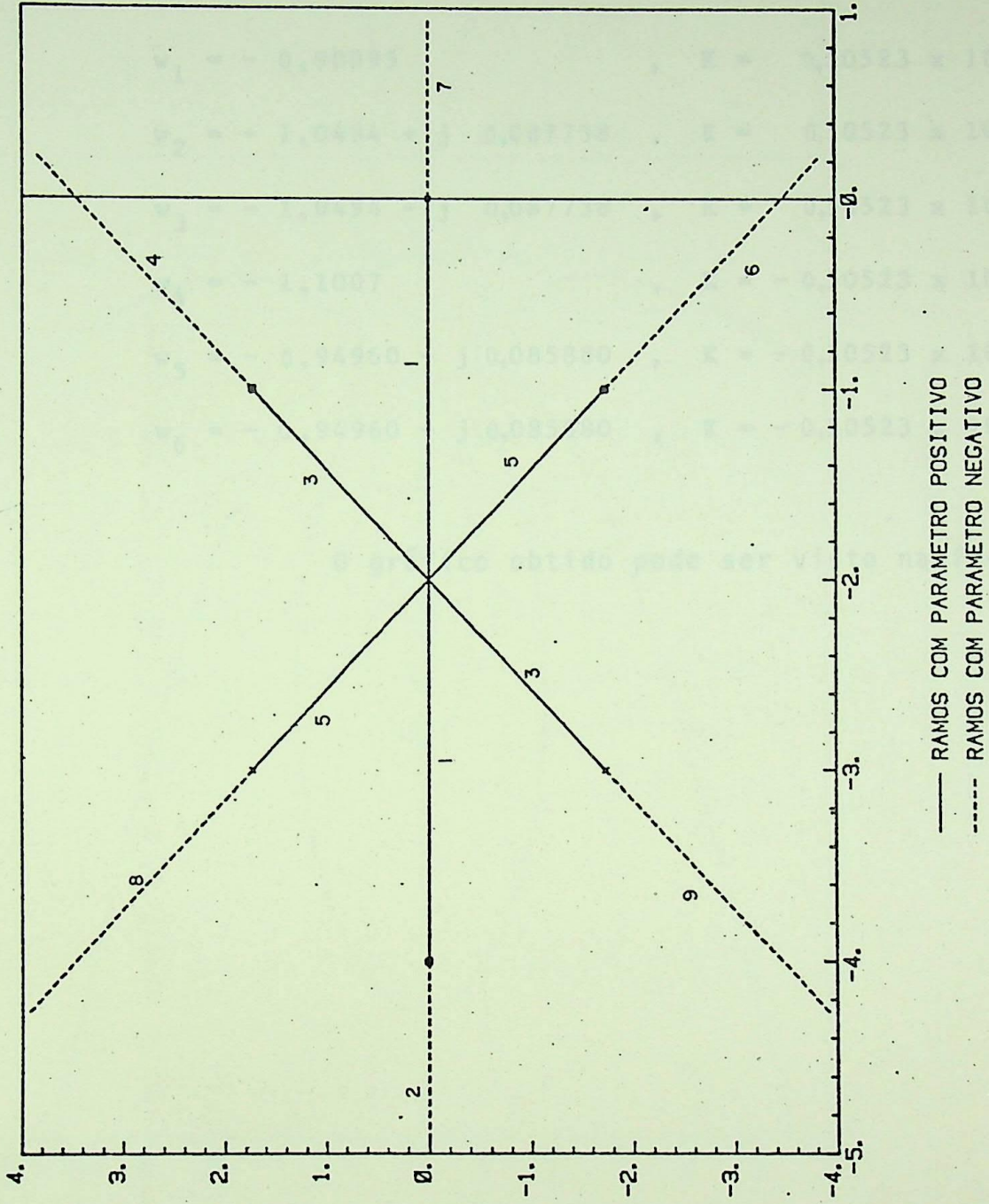


FIGURA 4.6 - LR com ponto múltiplo ímpar e ponto múltiplo no infinito.

e para $p = -2 + j 2$ os conjugados dos pontos acima.

Para o polo triplo $p = -1$ obtiveram-se os seis pontos iniciais seguintes:

$$w_1 = - 0,90095 \quad , \quad K = 0,50523 \times 10^{-4}$$

$$w_2 = - 1,0494 + j 0,087738 \quad , \quad K = 0,50523 \times 10^{-4}$$

$$w_3 = - 1,0494 - j 0,087738 \quad , \quad K = 0,50523 \times 10^{-4}$$

$$w_4 = - 1,1007 \quad , \quad K = - 0,50523 \times 10^{-4}$$

$$w_5 = - 0,94960 + j 0,085880 \quad , \quad K = - 0,50523 \times 10^{-4}$$

$$w_6 = - 0,94960 - j 0,085880 \quad , \quad K = - 0,50523 \times 10^{-4}$$

O gráfico obtido pode ser visto na figura 4.7.

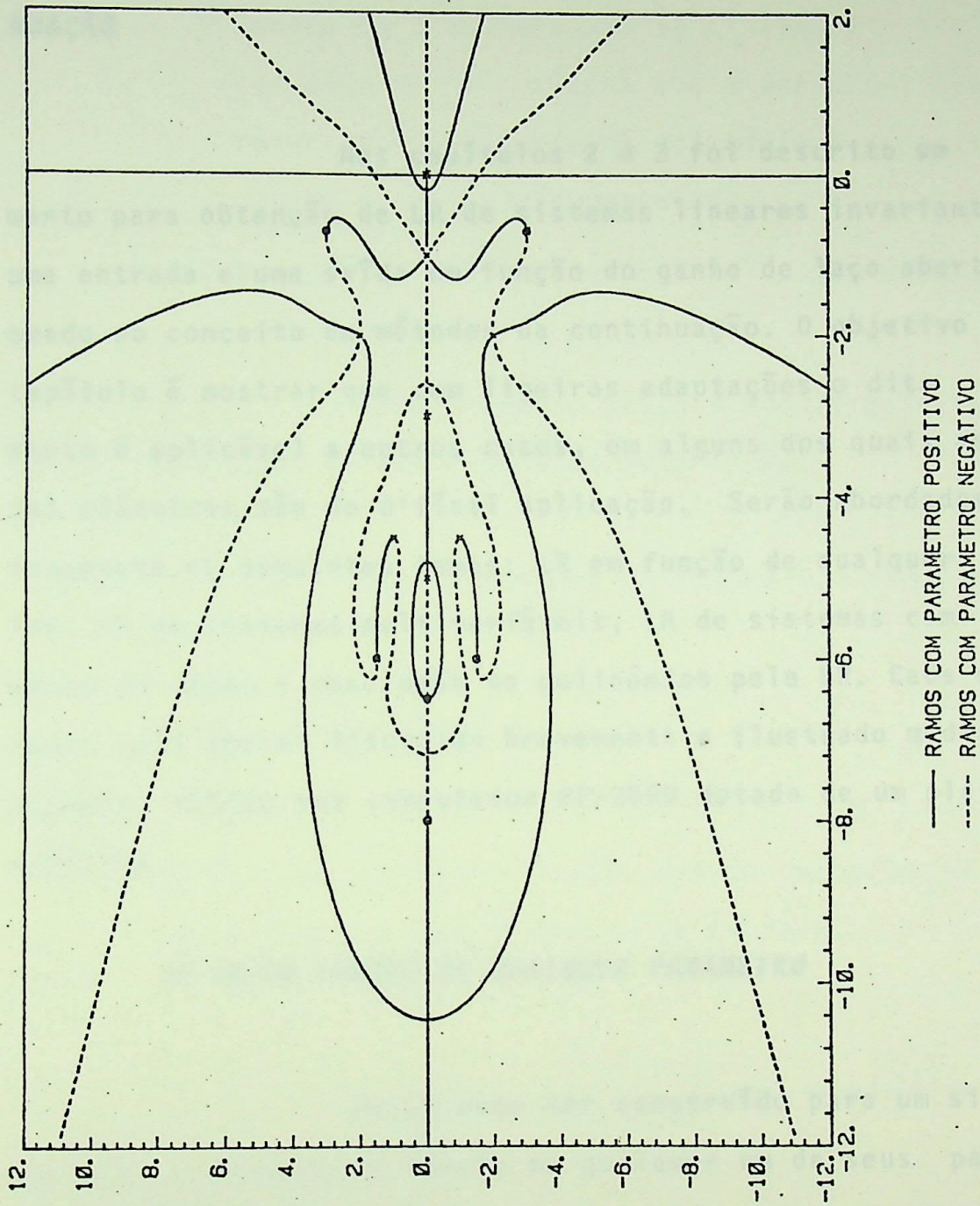


FIGURA 4.7 - LR com polos múltiplos duplos complexos e triplo real.

CAPITULO 5

ALGUMAS GENERALIZAÇÕES E EXTENSÕES DO LR PELO MÉTODO DA CONTINUAÇÃO

Nos capítulos 2 e 3 foi descrito um procedimento para obtenção de LR de sistemas lineares invariantes de uma entrada e uma saída em função do ganho de laço aberto, baseado no conceito de métodos da continuação. O objetivo deste capítulo é mostrar que com ligeiras adaptações o dito procedimento é aplicável a outros casos, em alguns dos quais as técnicas clássicas são de difícil aplicação. Serão abordados sucessivamente os seguintes temas: LR em função de qualquer parâmetro, LR de sistemas multivariáveis, LR de sistemas com retardamento de tempo e resolução de polinômios pelo LR. Cada um dos temas será apenas discutido brevemente e ilustrado mediante um exemplo, obtido num computador HP-3000 dotado de um plotador de gráficos.

5.1 O LR EM FUNÇÃO DE QUALQUER PARÂMETRO

Um LR pode ser construído para um sistema de qualquer estrutura em função de qualquer um de seus parâmetros [16], [19]. Sinteticamente o procedimento indicado para tal fim é o seguinte:

- 1) Obter a função de transferência do sistema em forma desenvolvida.

- 2) Colocar em evidência o parâmetro escolhido e determinar os termos nos quais ele intervêm.
- 3) Operar algébricamente o polinômio denominador da função de transferência do sistema até que fique agrupado de tal maneira que o parâmetro escolhido apareça multiplicando um polinômio e não esteja incluído no polinômio restante.
- 4) Extrair as raízes dos polinômios obtidos no passo anterior.

Após o quarto passo o problema se reduz, em geral, ao discutido nos capítulos anteriores.

Exemplo 5.1 Seja o sistema da figura 5.1 com [16]:

$$G(s) = \frac{8(s + 1)}{s(s + 1/\tau)} \quad (5.1-1)$$

no qual deseja-se conhecer a influência da variação da constante de tempo τ sobre o comportamento do sistema.

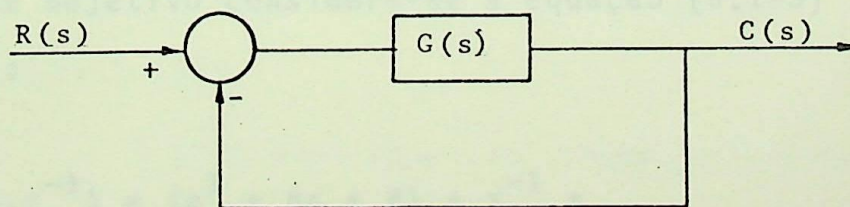


FIGURA 5.1 - Sistema com realimentação unitária.

A função de transferência do sistema resulta:

$$\tau(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{8\tau (s + 1)}{s + \tau(s^2 + 8s + 8)} \quad (5.1-2)$$

De onde o polinômio característico do sistema fica:

$$g(s, \tau) = s + \tau(s^2 + 8s + 8) = 0 \quad (5.1-3)$$

Por analogia com a equação (1.1-3) vemos que existem dois zeros nas raízes de $s^2 + 8s + 8$, ou seja:

$$\begin{aligned} s_1 &= -6,83 \\ s_2 &= -1,17 \end{aligned} \quad (5.1-4)$$

e um polo na origem e outro no infinito. Como consequência do polo no infinito não é possível obter todos os ramos a partir dos polos segundo o indicado no capítulo 2 (Seção 2.3). Uma alternativa possível nestes casos é começar a integração nos zeros. Com este objetivo considere-se a equação (5.1-3) multiplicada por τ^{-1} :

$$g(s, \tau^{-1}) = (s^2 + 8s + 8) + \tau^{-1} s \quad (5.1-5)$$

Vê-se que os polos e zeros estão trocados entre si com relação a (5.1-3), o que assegura que o novo LR será

coincidente com o anterior e terá seu parametrado recíproco [16].

Considerando τ^{-1} como parâmetro variável, temos que todos os ramos do LR do polinômio (5.1-5) começam nos pontos finitos do plano complexo (5.1-4) para $\tau^{-1} = 0$ ($|\tau| \rightarrow \infty$), resultando o mesmo caso discutido nos capítulos anteriores.

O LR obtido por este procedimento é mostrado na figura 5.2.

Dos resultados numéricos observa-se que existem pontos múltiplos em $\tau = -0,4255$, $\sigma = -2,83$ e $\tau = -0,2740$, $\sigma = 2.83$, e que o sistema resulta estável para $\tau > 0$ e $\tau < -0,25$.

5.2 O LR DE SISTEMAS DE MULTIPLAS ENTRADAS E SAÍDAS

A técnica clássica do LR para a análise e compensação de sistemas realimentados de uma entrada e uma saída está bem estabelecida como uma ferramenta usual de desenho. É natural, portanto, considerar a possibilidade de estender a técnica a análises de sistemas de múltiplas entradas e saídas (multivariáveis). Vários tem sido os trabalhos a respeito nos últimos anos, mas não está claro no presente se uma extensão completa é possível [36].

A diferença com o LR clássico é o aparecimento de termos no parâmetro variável de ordem superior ao linear usual, motivo pelo qual as técnicas tradicionais não são aplicáveis.

Mostraremos a seguir, mediante um exemplo,

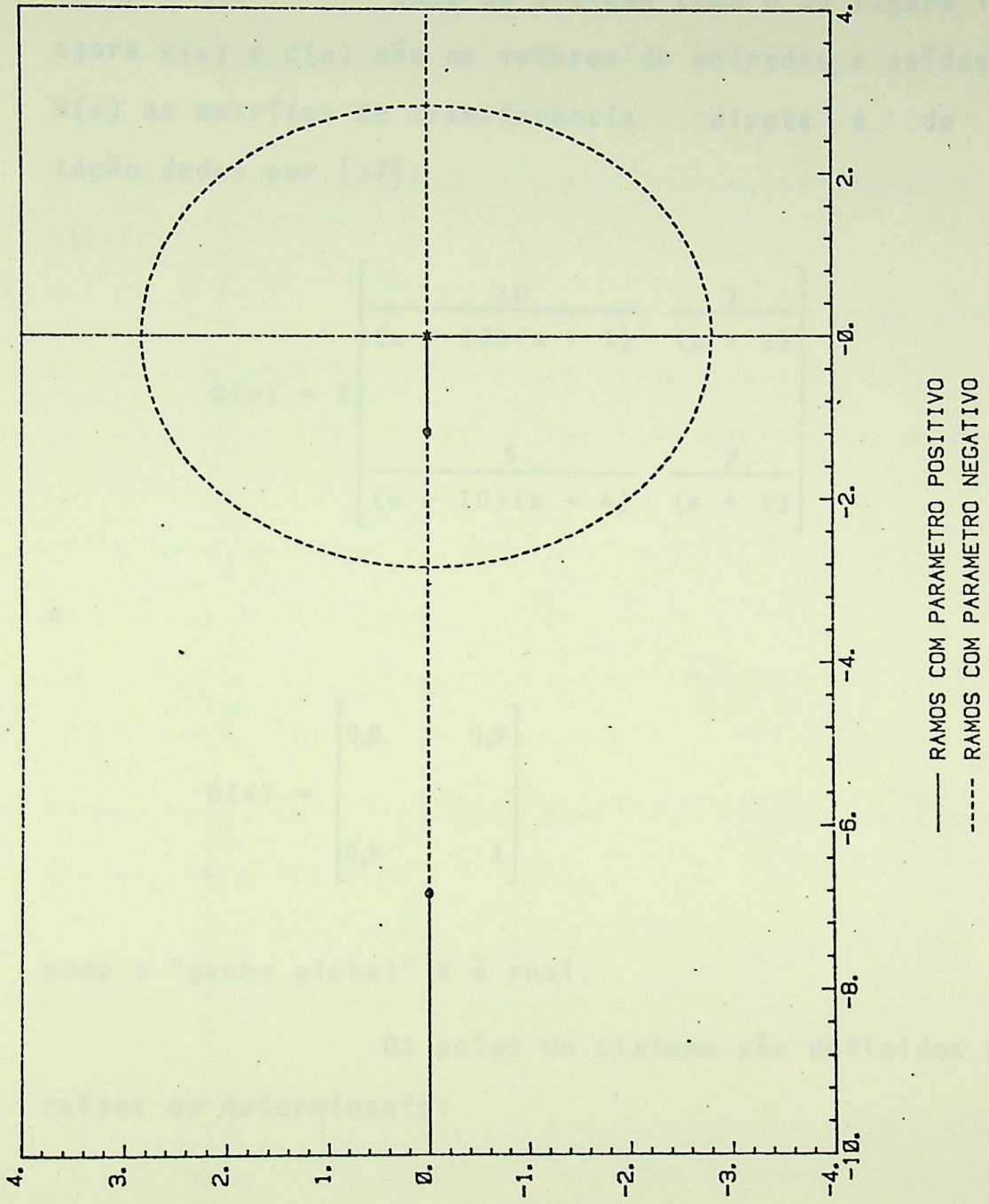


FIGURA 5.2 - LR em função de uma constante de tempo

que o algoritmo discutido nos capítulos anteriores é facilmente aplicável nestes casos.

Exemplo 5.2 Seja um sistema como o da figura 1.1 onde agora $R(s)$ e $C(s)$ são os vetores de entradas e saídas, e $G(s)$ e $H(s)$ as matrizes de transferência direta e de realimentação dadas por [37]:

$$G(s) = K \begin{bmatrix} \frac{10}{(s+10)(s+1)} & \frac{1}{(s+1)} \\ \frac{5}{(s+10)(s+4)} & \frac{2}{(s+1)} \end{bmatrix} \quad (5.2-1)$$

e

$$H(s) = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,9 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2-2)$$

onde o "ganho global" K é real.

Os polos do sistema são definidos como as raízes do determinante:

$$|I + H(s) G(s)| = 0 \quad (5.2-3)$$

onde I é a matriz unidade da correspondente ordem.

Operando algebricamente chegamos ao polinomio

característico do sistema dado por:

$$g(s, K) = K^2 1,2 (s+5) + K 2,8 (s^3 + 19,4643 s^2 + 71,5 s + 53,0357) + (s^4 + 16 s^3 + 69 s^2 + 94 s + 40) \quad (5.2-4)$$

que possui um termo quadrático no parâmetro variável e outro linear.

Por inspeção de (5.2-4), temos que os ramos do LR começarão para $K = 0$ nas raízes do polinômio

$$s^4 + 16s^3 + 69s^2 + 94s + 40 \text{ (polos), ou seja:}$$

$$s_{1,2} = -1$$

$$s_3 = -4$$

$$s_4 = -10 \quad (5.2-5)$$

e terminarão em $s = -5$ e no ponto no infinito do plano complexo (zeros) para $|K| \rightarrow \infty$.

O LR pode ser obtido a partir das condições iniciais (5.2-5) por integração numérica da equação diferencial:

$$\frac{ds}{dK} = - \frac{\partial g / \partial K}{\partial g / \partial s} = - \frac{K 2,4(s+5) + 2,8(s^3 + 19,4643s^2 + 71,5s + 53,0357)}{K^2 1,2 + K 2,8(3s^2 + 38,9286s + 71,5) + (4s^3 + 48s^2 + 138s + 94)}$$

$$(2.2-6)$$

em combinação aproximada com o método iterativo de Newton - Raphson e forma semelhante a discutida no Capítulo 3.

O LR correspondente é mostrado na figura 5.3.

Como não é possível integrar a partir de exatamente $\kappa = 0$ no polo duplo $s_{1,2} = -1$, porque nesse caso se anularia o denominador de (2.2-6), as condições iniciais para esses pontos foram calculadas nas suas proximidades com auxílio de algumas iterações de Newton-Raphson, resultando:

$$\begin{aligned}w_1 &= -1,00244, & \kappa &= 0,05 \\w_2 &= -0,99756, & \kappa &= -0,05\end{aligned}\tag{2.2-7}$$

cada uma das quais dá origem a dois ramos coincidentes, a primeira de parametro positivo e a segunda de parametro negativo.

Para contornar os pontos múltiplos foi adicionado aos pontos estimados por integração um pequeno vetor com módulo igual a diferença entre preditor e corretor especificada e perpendicular ao crescimento do ramo. Após este pequeno desvio e da iteração de Newton-Raphson, devido a convergência monotona deste método nas proximidades de raízes múltiplas, fica um pequeno erro residual no sentido do desvio. Quando um ponto múltiplo é alcançado, a obtenção do ramo prossegue automaticamente no sentido do pequeno erro residual. Adotando a direção do desvio adequadamente obtém-se com este procedimento o LR completo sem omissão nem repetição de nenhum sub-ramo. No presente exemplo, para os ramos que se originam em polos simples a direção do desvio foi adotada de modo a produzir rotação dos ramos no sentido horário; e para os ramos que se originam no polo duplo foram adotados direções contrárias para cada um dos ramos do

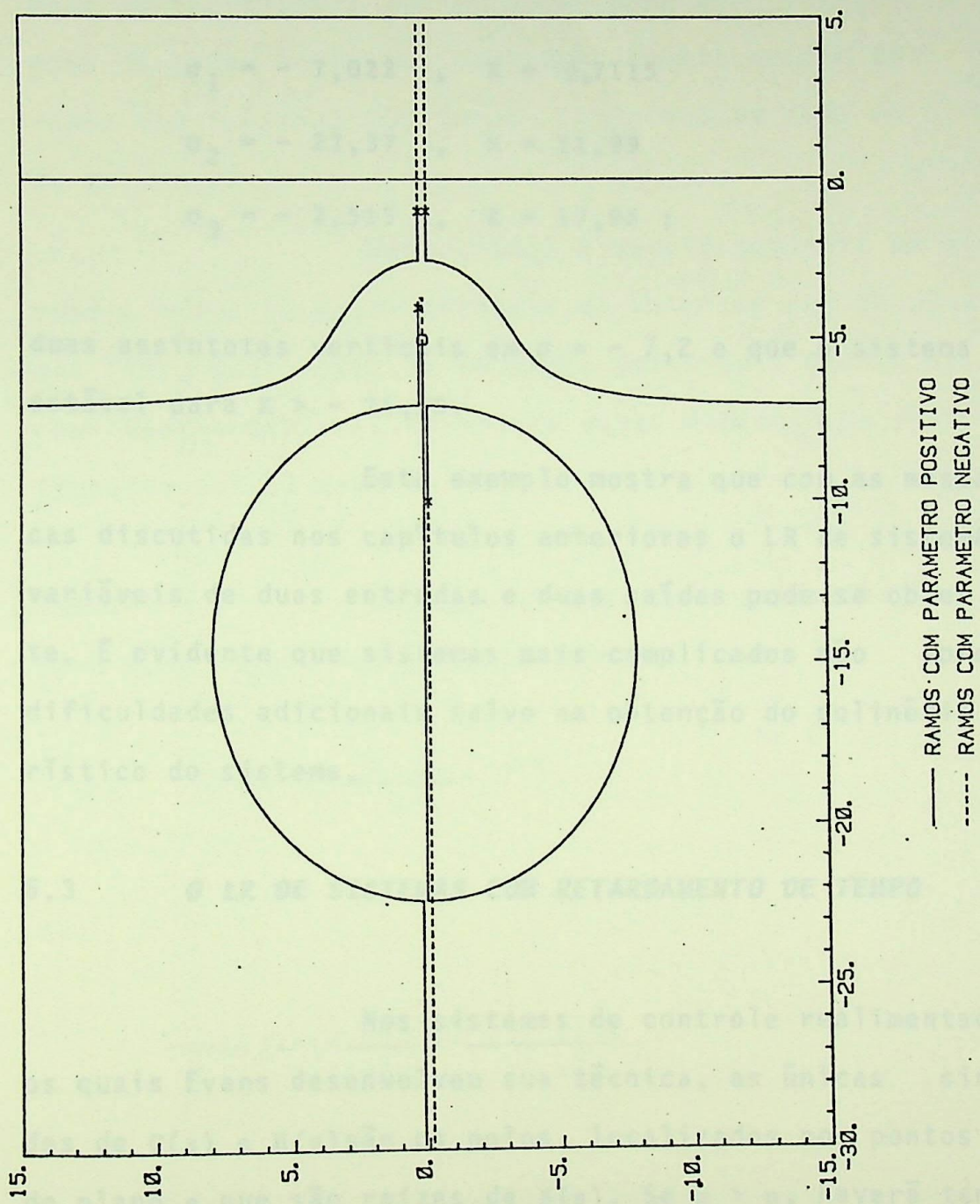


FIGURA 5.3 - LR de um sistema multivariável

mesmo sinal.

Resumindo os resultados numéricos temos que existem pontos múltiplos em

$$\sigma_1 = - 7,022 \quad , \quad K = 0,7115$$

$$\sigma_2 = - 22,37 \quad , \quad K = 11,99$$

$$\sigma_3 = - 2,515 \quad , \quad K = 17,96 \quad ; \quad (2.2-8)$$

duas assintotas verticais em $\sigma = - 7,2$ e que o sistema resulta estável para $K > - 24,50$.

Este exemplo mostra que com as mesmas técnicas discutidas nos capítulos anteriores o LR de sistemas multivariáveis de duas entradas e duas saídas pode-se obter facilmente. É evidente que sistemas mais complicados não apresentarão dificuldades adicionais salvo na obtenção do polinômio característico do sistema.

5.3 O LR DE SISTEMAS COM RETARDAMENTO DE TEMPO

Nos sistemas de controle realimentados, para os quais Evans desenvolveu sua técnica, as únicas singularidades de $G(s)$ e $H(s)$ são os polos, localizados nos pontos finitos do plano s que são raízes de $B(s)$. Se $m > n$, haverá também um polo de ordem $m - n$ no ponto no infinito do plano s .

Em situações de interesse na teoria de controle aparecem outros tipos de singularidades. Os sistemas com retardamento de tempo são um exemplo. Neles o tempo τ de trans

missão da informação através do sistema não pode ser considerado nulo. Nestes casos pode-se adicionar um bloco retardador cuja função de transferência é e^{-sT} . Aparece assim uma singularidade essencial para $s \rightarrow -\infty$, que pode ser considerada como um polo de ordem infinita. Consequentemente emanam dele infinitos ramos que terminam nos zeros, incluindo um zero de ordem infinita em $s \rightarrow +\infty$.

Mostraremos a seguir mediante um exemplo que embora estes LR sejam difíceis de obter-se por técnicas clássicas [38], [39], [16], a obtenção deles pelo método discutido nos capítulos anteriores apresenta pouca dificuldade adicional com respeito aos LR usuais.

Exemplo 5.3 Seja um sistema com realimentação unitária como o da figura 5.1 com $G(s)$ dado por:

$$G(s) = K \frac{(s + 0,3)}{s^2} e^{-s}$$

ou

$$G(s) = K \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{K(s + 0,3)}{s^2 e^s} \quad (5.3-1)$$

Por inspeção temos que existe um polo duplo na origem, um polo de ordem infinita em $s \rightarrow -\infty$, um zero em $s = -0,3$ e um zero de ordem infinita em $s \rightarrow +\infty$.

O sistema possui um retardamento na transmissão de informação no ramo direto de um segundo.

A função de transferência do sistema \bar{e} dada por:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K A(s)}{B(s) + K A(s)} = \frac{(s+0,3)}{s^2 e^2 + K(s+0,3)} \quad (5.3-2)$$

de onde para o polinomio caracteristico do sistema vem:

$$g(s, K) = B(s) + K A(s) = s^2 e^5 + K(s + 0,3) \quad (5.3-3)$$

de onde resulta a equação diferencial

$$\frac{ds}{dK} = -\frac{g/K}{g/s} = -\frac{A(s)}{B'(s) + K A'(s)} = \frac{K(s + 0,3)}{e^s (2s + s^2) + K} \quad (5.3-4)$$

cuja integração a partir das condições iniciais adequadas resultará no LR de (5.3-3). Até aqui não existem diferenças significativas com LR usuais. Mas a dificuldade reside no fato de que a integração não pode começar em $K = 0$ para os ramos que nascem no polo no infinito. Para contornar este inconveniente propomos obter as condições iniciais para estes ramos na sua intercessão com a margem esquerda do diagrama. Com este objetivo pode-se efetuar uma busca baseada no fato de que o ganho calculado como

$$K = \frac{-B(s)}{A(s)} \quad (5.3-5)$$

em um ponto s correspondente ao LR deve ser real.

Um procedimento possível é o seguinte:

- 1) Verificar sucessivamente se a parte imaginária do ganho em dois pontos consecutivos da margem esquerda do diagrama correspondente a ω positivo, separados por um $j\Delta\omega$ arbitrariamente pequeno, muda de sinal.
- 2) Quando a condição anterior se verifica a intersecção de um ramo com a margem esquerda pode-se determinar, a menos de uma tolerância especificada, com ajuda de algumas iterações da "regula falsi" [31]:

$$s_{k+1} = s_k - \frac{\text{Im}(K(s_k)) (s_k - s_{k-1})}{\text{Im}(K(s_k) - K(s_{k-1}))} \quad (5.3-6)$$

Os pontos obtidos por este procedimento, junto com seus conjugados, constituem as condições iniciais para os ramos que se originam em $s \rightarrow -\infty$. Para o exemplo presente e o intervalo $0 < |\omega| \leq 20$ ($\sigma = -20$) foram as seguintes:

$$\begin{aligned} s_1 &= -20, & K &= 0,4185 \times 10^{-7} \\ s_{2,3} &= -20 \pm j 3,292, & K &= -0,4239 \times 10^{-7} \\ s_{4,5} &= -20 \pm j 6,590, & K &= 0,4400 \times 10^{-7} \\ s_{6,7} &= -20 \pm j 9,880, & K &= -0,4654 \times 10^{-7} \\ s_{8,9} &= -20 \pm j 13,15, & K &= 0,4485 \times 10^{-7} \\ s_{10,11} &= -20 \pm j 16,37, & K &= -0,5375 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

Para os ramos que nascem em polos finitos, neste exemplo um polo duplo na origem, o procedimento pode ser o mesmo do caso usual.

O LR correspondente é mostrado em escalas lineares na figura 5.5 e em escalas mistas na figura 5.6. Na referência [39] este mesmo exemplo aparece representado utilizando-se escala mista no eixo real. Da comparação das figuras 5.5 e 5.6 vê-se a vantagem das escalas mistas ao mostrar ampliada a região cerca da origem onde se encontram os polos dominantes do sistema.

A principal informação que pode-se obter é que o sistema resulta estável para $0 < K < 1,3204$, enquanto é fácil demonstrar que se não fosse considerado o retardamento de tempo o LR mostraria o sistema aparentemente estável para todo K positivo.

5.4 RESOLUÇÃO DE POLINÔMIOS PELO LR

E. Waserstrom [27] sugeriu um algoritmo para obter todas as raízes de um polinômio pelo método da continuação, que envolve implicitamente o conceito do LR. Mostraremos a seguir, através de um exemplo, uma variante desse algoritmo que apresenta duas diferenças com respeito a ele. A primeira consiste na utilização de um intervalo de integração infinito ao invés de finito e igual a $[0,1]$, com o qual a exatidão dos cálculos intermediários tem muito pouca influência sobre os resul

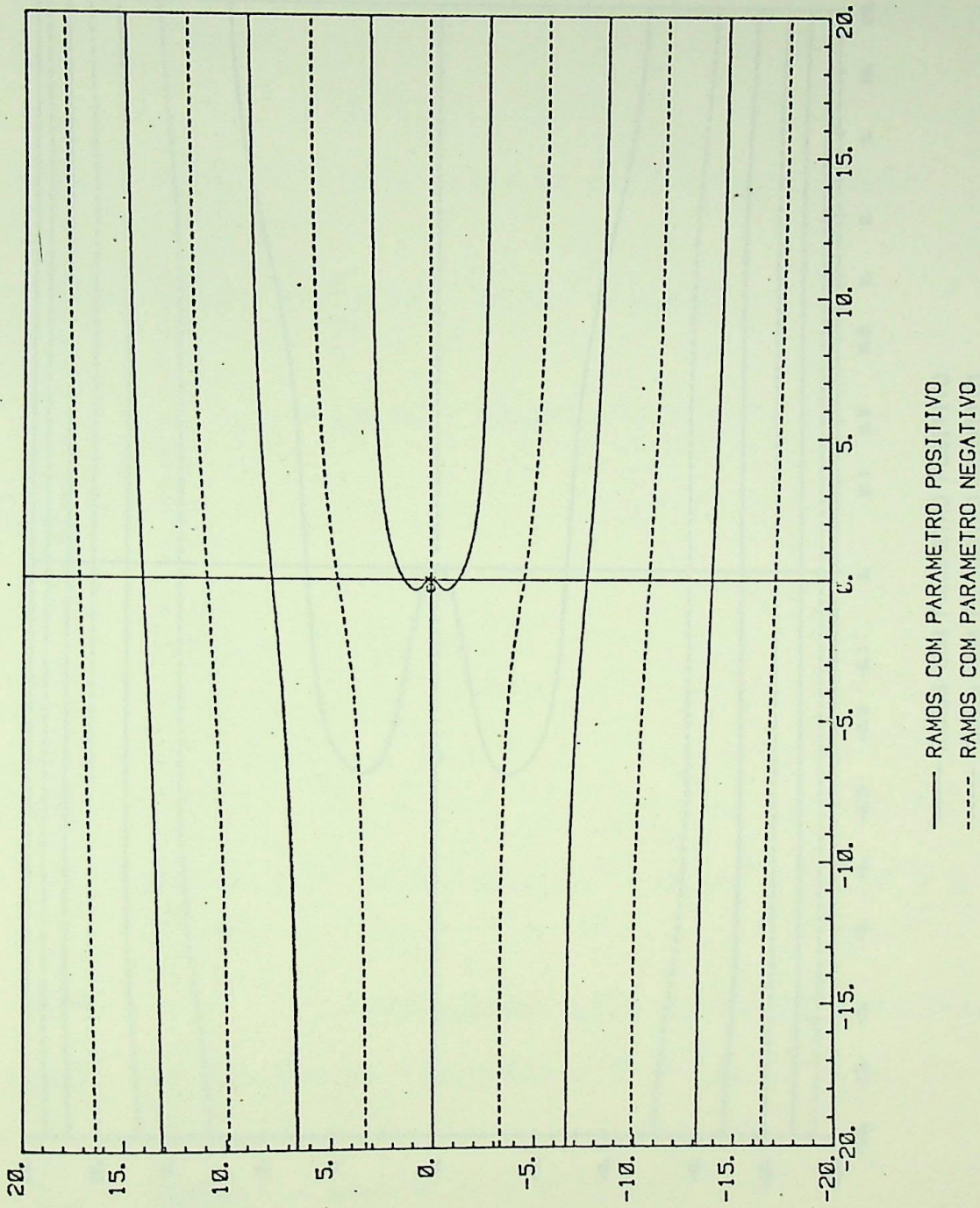


FIGURA 5,5 - LR de um sistema com retardamento de tempo em escalas lineares.

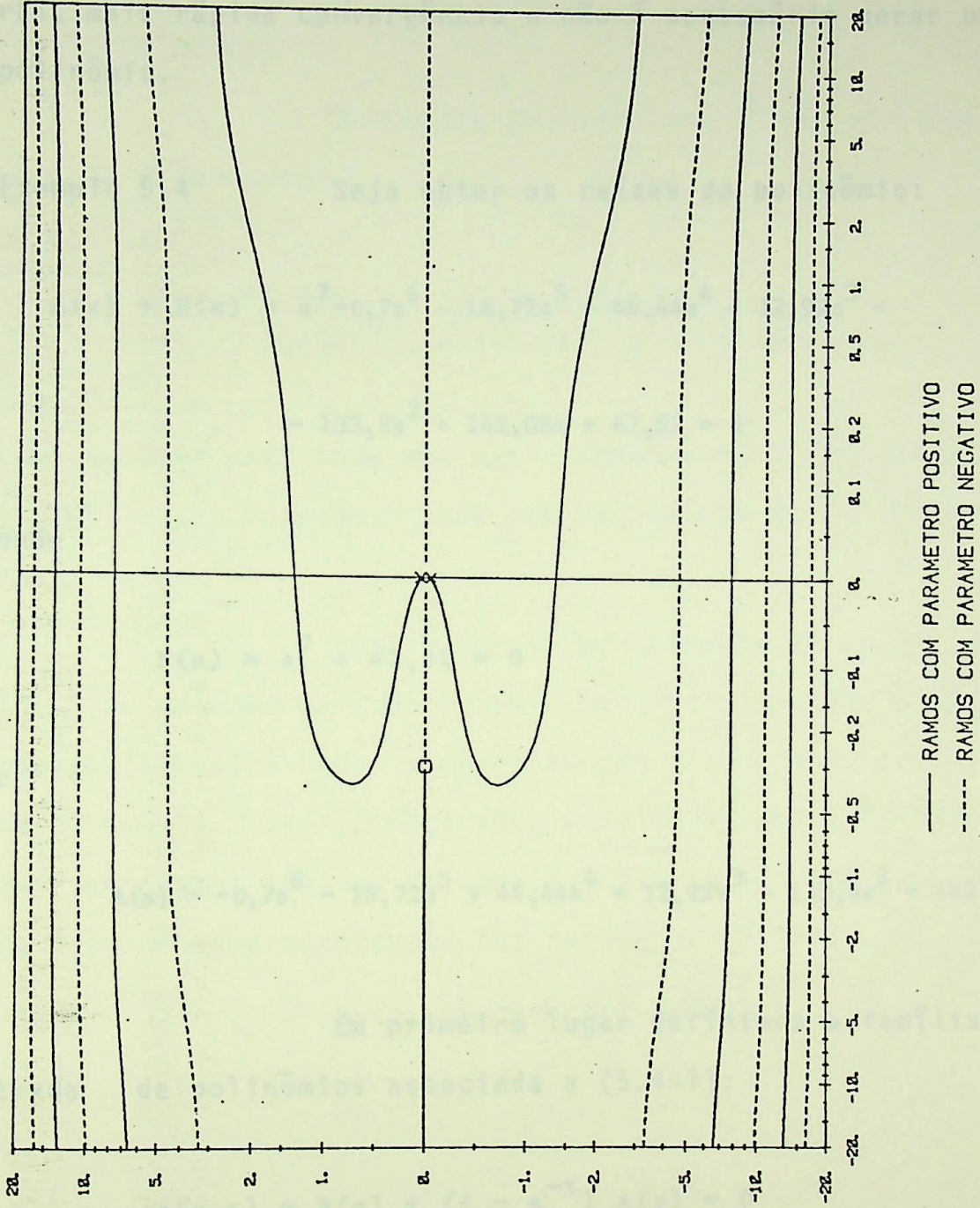


FIGURA 5.6 - LR da figura 5.5 em escalas mistas

tados finais [25]. A outra diferença consiste na escolha das condições iniciais de integração em função do termo constante do polinômio ao invés de arbitrárias, com as quais obtêm-se, em geral, mais rápida convergência e não é necessário gerar um novo polinômio.

Exemplo 5.4 Seja obter as raízes do polinômio:

$$\begin{aligned} A(s) + B(s) = & s^7 - 0,7s^6 - 18,72s^5 + 44,44s^4 + 12,92s^3 - \\ & - 133,8s^2 + 142,08s + 47,52 = 0 \end{aligned} \quad (5.4-1)$$

onde

$$B(s) = s^7 + 47,52 = 0 \quad (5.4-2)$$

e

$$A(s) = -0,7s^6 - 18,72s^5 + 44,44s^4 + 12,92s^3 - 133,8s^2 + 142,08s \quad (5.4-3)$$

Em primeiro lugar definimos a família parametrada de polinômios associada a (5.4-1):

$$g(s, \tau) = B(s) + (1 - e^{-\tau}) A(s) = 0 \quad (5.4-4)$$

que para $\tau = 0$ se reduz ao polinômio (5.4-2), cujas raízes podem ser obtidas facilmente, resultando:

$$s_{1, \dots, 7} = 47.2^{1/7} e^{j\pi(2i - 1)/7}, \quad i = 0, \dots, 6 \quad (5.4-5)$$

e para $\tau \rightarrow +\infty$ coincide com o polinômio (5.4-1), cujas raízes deseja-se obter.

Derivando (5.4-4) com relação a τ resulta a equação diferencial:

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{-\partial g / \partial \tau}{\partial g / \partial s} = - \frac{e^{-\tau} A(s)}{B'(s) + (1 - e^{-\tau}) A'(s)} \quad (5.4-6)$$

cuja solução para cada uma das condições iniciais dadas por (5.4-5) e $\tau = 0$ tende a cada uma das raízes do polinômio (5.4-1) para $\tau \rightarrow +\infty$.

Como o termo independente de um polinômio é igual ao produto de suas raízes com sinal trocado, o módulo dos pontos (5.4-5) é igual a média geométrica do módulo das raízes do polinômio (5.4-1). Portanto, na falta de uma informação melhor os pontos obtidos da equação (5.4-5) são uma boa estimativa inicial para a obtenção das raízes de (5.4-1).

Note que fazendo a mudança:

$$K = (1 - e^{-\tau}) \quad (5.4-7)$$

em (5.4-4) o procedimento se transforma na obtenção do LR de

$$g(s, K) = B(s) + K A(s) = 0 \quad (5.4-8)$$

para K variando de 0 ($\tau = 0$) a 1 ($\tau \rightarrow +\infty$), resultando um problema muito semelhante ao discutido nos capítulos anteriores.

Os resultados numéricos para o polinômio (5.4-9) são mostrados na tabela 5.1 e o LR correspondente na figura 5.7.

Na figura 5.7 foi utilizado um "x" para indicar as condições iniciais (5.4-5) e um "o" para as raízes de (5.4-1).

As raízes de (5.4-1) com seis casas significativas exatas são as seguintes:

$$s_{1,6} = 2$$

$$s_{2,5} = 0,939190 \pm j0,191002$$

$$s_3 = -4,75628$$

$$s_4 = -1,87350$$

$$s_7 = 1,45140$$

A pequena diferença com as raízes calculadas deve-se à utilização de precisão simples (seis casas significativas exatas).

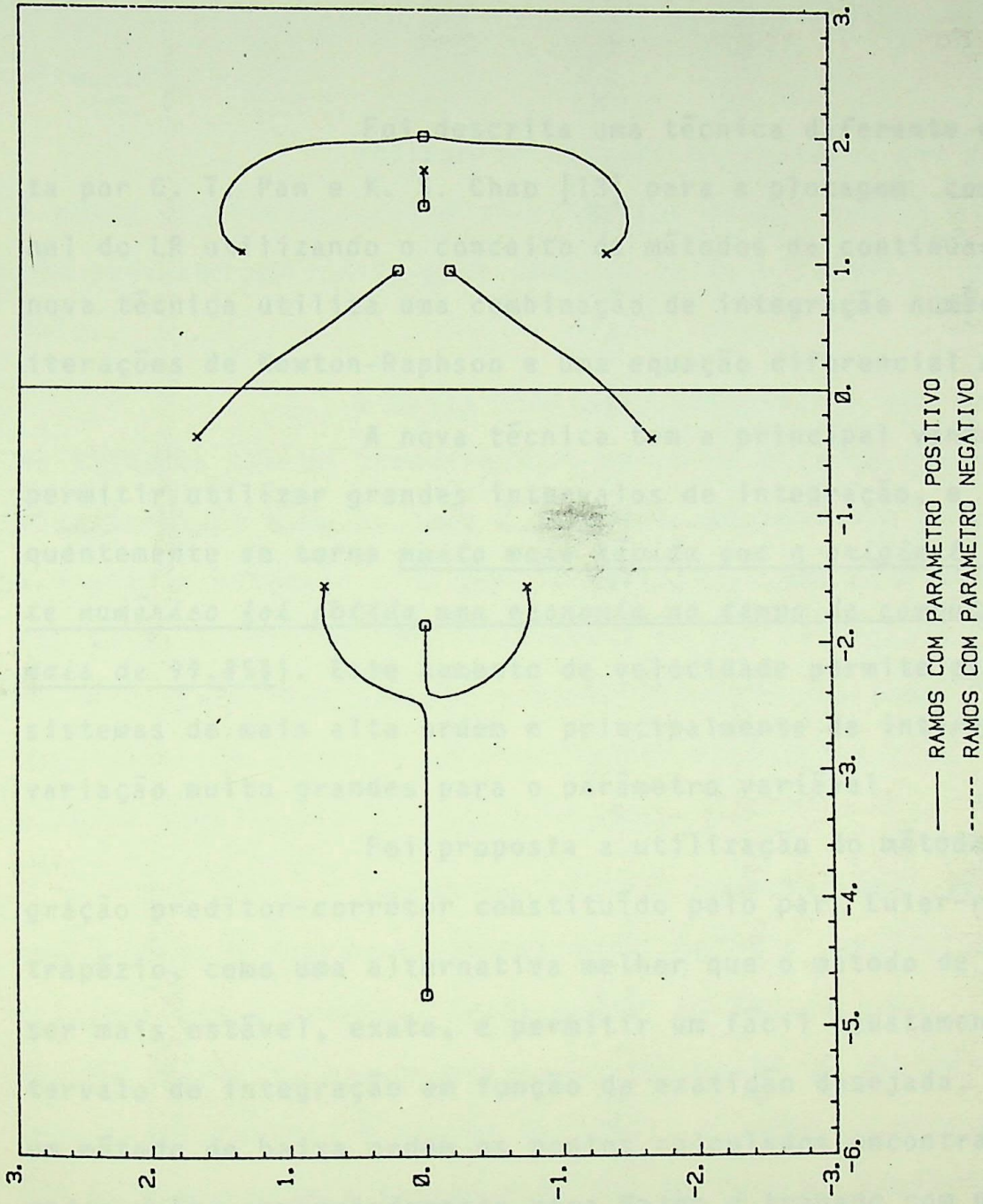


FIGURA 5.7 - Obtenção das raízes de um polinômio pelo LR.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Foi descrita uma técnica diferente da proposta por C. T. Pan e K. S. Chao [13] para a plotagem computacional do LR utilizando o conceito de métodos da continuação. Esta nova técnica utiliza uma combinação de integração numérica com iterações de Newton-Raphson e uma equação diferencial diferente.

A nova técnica tem a principal vantagem de permitir utilizar grandes intervalos de integração, e consequentemente se torna muíto mais rápida que a original (Num teste numérico foi obtida uma economia no tempo de computação de mais de 99,85%). Este aumento de velocidade permite estudos de sistemas de mais alta ordem e principalmente de intervalos de variação muito grandes para o parâmetro variável.

Foi proposta a utilização do método de integração preditor-corretor constituído pelo par Euler-regra de trapézio, como uma alternativa melhor que o método de Euler, por ser mais estável, exato, e permitir um fácil ajustamento do intervalo de integração em função da exatidão desejada. Por ser um método de baixa ordem os pontos calculados encontram-se espaçados muito apropriadamente para fazer o traçado com um plotador de gráficos e para obter pontos intermediários com muita precisão através de interpolação linear.

Foram feitas algumas sugestões que permitem estudos de sistemas com retardamento de tempo e número de polos

igual ou menor que o número de zeros.

O LR de sistemas nos quais o espectro de polos e zeros abrange várias décadas podem ser facilmente traçados com esta técnica utilizando-se escalas mistas (linear-logarítmicas).

Mostrou-se através de exemplos que o método é muito eficiente para se obter raízes de polinômios e que também pode ser utilizado para obter o LR de sistemas multivariáveis.

A única limitação observada é que em estudo de sistemas com um grande número de polos e zeros, quando se utiliza precisão simples, não é possível determinar a priori e com a exatidão necessária os pontos múltiplos. Uma alternativa nestes casos é utilizar precisão dupla na sua obtenção ou uma maneira de contorná-los que não precise de seu conhecimento prévio. Uma delas foi descrita no exemplo correspondente a um sistema multivariável.

Tem-se uma técnica computacional de amplas aplicações, e fundamentalmente mais rápida e simples que as publicadas até o momento. Desde que é utilizada para obter a função implícita que relaciona as raízes de um polinômio com seus coeficientes, é também aplicável a todos aqueles casos em que seja necessário traçar gráficos de funções implícitas. Como o procedimento consiste basicamente na integração de uma equação diferencial de primeira ordem, é também muito adequado para ser usado em computadores analógicos ou híbridos.

Visto que os sistemas lineares e os computa

dores têm um papel vital na atualidade, espera-se que o algoritmo apresentado encontre ampla aceitação, e que faça da técnica do LR um método ainda mais usual de análise e projeto de sistemas lineares invariantes (incluindo sistemas multivariáveis).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] W.R. Evans, "Graphical Analysis of Control Systems", Trans. AIEE, Vol. 67, parte I, pg. 547-51, 1948.
- [2] W.R. Evans, "Control System Synthesis by Root Locus Method", Trans. AIEE, vol. 69, parte I, pg. 66-69, 1950.
- [3] W.R. Evans, Control System Dynamic. New York: McGraw-Hill, 1954.
- [4] K. Bollinger e A. Laha, "Power Stabilizer Design using Root Locus Methods", IEEE Trans. on PAS., vol. PAS-94, nº 5, pg. 1484-87, 1975.
- [5] E.L. Busby e J. D. Hurley, "Dynamic Stability improvement at Monticello Station-Analytical Study and Field Tests", IEEE Trans. on PAS., vol. PAS-98, nº 3, pg.889-901, 1979.
- [6] P.M. Anderson e A.A. Fouad, Power System Control and Stability. Iowa, U.S.A.: Science Press, Ephrata, 1977.
- [7] R.A. DeCarlo e R. Saeks, "A Root Locus Technique for Interconnected Systems", IEEE Trans. on SMC, vol. MSC-9, nº 1, pg. 53-55, 1979.
- [8] V. Arcidiacono e E. Ferrari, "Evaluation and Improvement of Electromechanical Oscillation Damping by Means of Eigenvalue-Eigenvectors Analysis - Practical Results in the Central Peru Power System", IEEE Trans. on PAS., vol. PAS-99, nº 2, pg. 769-778, 1980.

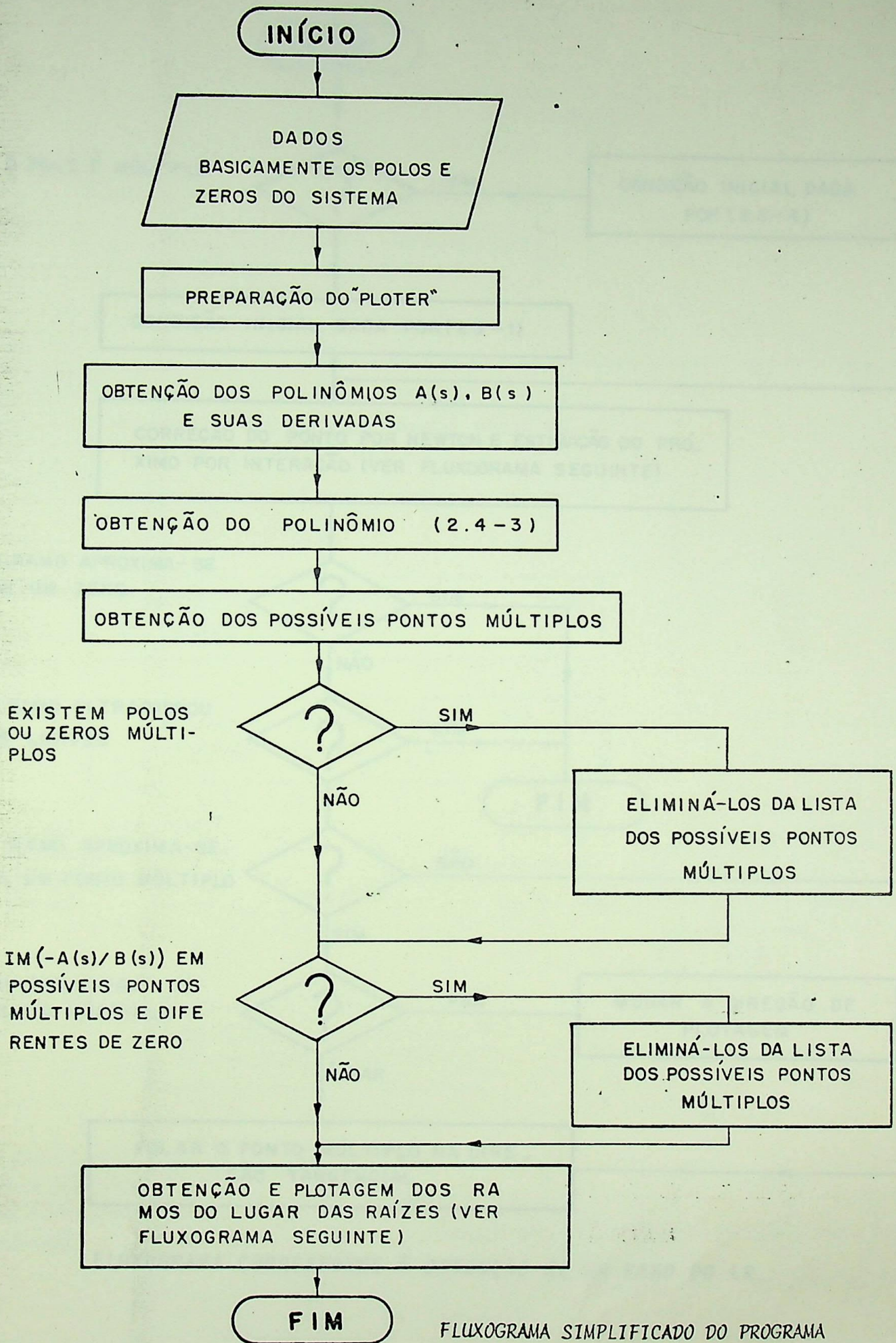
- [9] Z. Elrazaz e N. Sinha, "Large Parameter variations, changes in System Eigenvalues calculated using tracking approach", IEEE Trans. on PAS., vol. PAS-99, nº 2, pg. 1326, 1980.
- [10] F. Liethem e C. Houpis, "Root Locus Using an Analogue Computer", AIEE Trans. Applications and Industry, vol. 79, nº 52, pg. 523-7, 1961.
- [11] S. Williamson, "Accurate Root Locus Plotting Including the Effects of Pure Time Delay", Proc. IEE, vol. 116, nº 7, pg. 1269-71, 1969.
- [12] F. Nagy e M. Al-Tikriti, "Root-Locus Plotting by Digital Computer Using Operational-Array Technique", Proc. IEE, vol. 119, nº 2, pg. 243-46, 1972.
- [13] C. Pan e K. Chao, "A Computer-Aided Root-Locus Method", IEEE Trans. on AC., vol. AC-23, nº 8, pg. 856-860, 1978.
- [14] O. A. Sebakhy, "Comments on 'A Computer-Aided Root-Locus Method'", IEEE Trans. on AC., vol. AC-25, nº 4, pg. 855, 1980.
- [15] D. Ricciulli e A. Fregosi, "Comments on 'A Computer-Aided Root-Locus Method'", IEEE Trans. on AC., vol. AC-26, nº 2, pg. 605-606, 1981.
- [16] A. Fregosi, J. Feinstein e L. Caldeira, Enfoque Clássico da Teoria de Contrôles: Método do Lugar das Raízes. Rio de Janeiro: Campus, 1980.

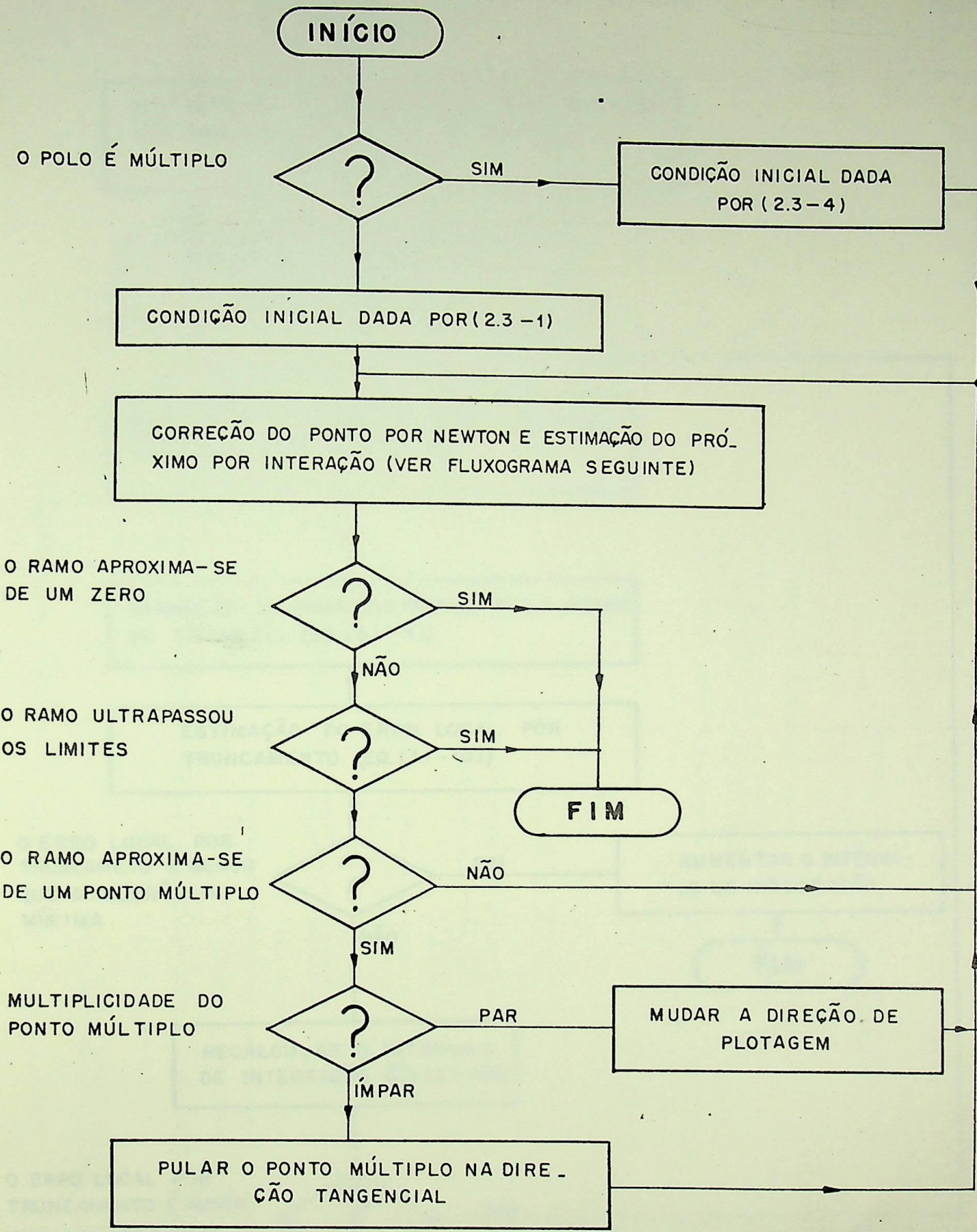
- [17] J. M. Ortega e W. C. Rheinboldt, Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables. New York : Academic Press, 1970.
- [18] F. H. Raven, Automatic Control Engineering. New York : McGraw-Hill, pg. 199-202, 1961.
- [19] R.C. Dorf, Modern Control Systems. Reading, MA: Addison-Wesley, pg. 155-164, 1973.
- [20.a] E. Lahaye, Une méthode de résolution d'une catégorie d'équations transcendentes, C.R. Acad. Sei. Paris 198 , pg. 1840-42, 1934.
- [20.b] E. Lahaye, "Sur la représentation des racines systèmes d'équations transcendentes, Deuxième Congrès National des Sciences 1, pg. 141 -146, 1935.
- [21] E. Lahaye, "Solution of systems of transcendental equations", Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., 5, pg.805-822, 1948.
- [22.a] D. Davidenko, "On a new method of numerically integrating a system of nonlinear equations", Dokl. Akad. Nauk SSSR, 88, pg. 601-604, 1953.
- [22.b] D. Davidenko, "On the approximate solution of a system of nonlinear equations", Ukrain. Mat. Z.5, pg. 196-206, 1953.
- [23] W. Kizner, "A Numerical Method for Finding Solutions of Nonlinear Equations", J. Soc. Indust. Appl. Math., vol.

12, nº 2, pg. 424-428, 1964.

- [24] G. Meyer, "On Solving Nonlinear Equations with a One-Parameter Operator Imbedding", SIAM J. Numer. Anal. , vol. 5, nº 4, pg. 739-752, 1968.
- [25] P. Boogs, "The Solution of Nonlinear Systems of equations by A-Stable Integration Techniques", SIAM J. Numer. Anal., vol. 8, nº 4, pg. 767-789, 1971.
- [26] F. Branin, "Widely Convergent Method for Finding Multiple Solutions of Simultaneous Non linear Equations", IBM J. Res. Dev., vol. 16, nº 5, pg. 504-522, 1972.
- [27] E. Wasertröm, "Numerical Solutions by the continuation methods", SIAM Rev., vol. 15, nº 1, pg. 89-119, 1973.
- [28] K. Chao e R. Saeks, "Continuation methods in circuit analysis", Proc. IEEE, vol. 65, nº 8, pg. 1187-1194 , 1977.
- [29] D. Ricciulli, Uso do Método da Continuação para a construção do Lugar das Raízes pelo computador digital. Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá - MG. - Brasil , 1981.
- [30] D. Ricciulli, "Estudo e Aplicação do Método da Continuação para Plotagem Computacional do Lugar das Raizes", Revista EFEI-PESQUISA, vol. 6, nº 4, Brasil-1980.
- [31] R.G. Stanton, Numerical Methods for Science and Engineering. Tokyo: Maruzen Company, Ltd., 1961.

- [32] M. Spiegel, Variáveis Complexas. Brasil: MacGraw-Hill do Brasil, 1973.
- [33] P. Henrici, Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations. New York: John Wiley, 1962.
- [34] L. Lapidus e J. Seinfeld, Numerical solution of ordinary Differential Equations. New York: Academic Press, Inc., 1971.
- [35] A. Ralston e P. Rabinowitz, A first course in numerical analysis. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1978.
- [36] D.H. Owens, Feedback and Multivariable Systems England: Peter Peregrinus Ltd., 1978.
- [37] D.G. Retallack, "Extended root-locus technique for design of linear multivariable feedback systems", Proc. IEE, vol. 117, nº 3, 1970.
- [38] Y. Chu, "Feedback control systems with dead-time lag or distributed lag by root-locus method", trans. AIEE (Applications and Industry), vol. 71, pg. 291-296, 1952.
- [39] It-Bau Hvang, "Root Locus Determination of Linear systems with Transport Lag", IEEE Trans. on AC., vol. AC-12, nº 5, pg. 632-634, 1967.





FLUXOGRAMA CORRESPONDE À OBTENÇÃO DE UM RAMO DO LR

INÍCIO

CORREÇÃO DO PONTO ESTIMADO POR INTEGRAÇÃO COM UMA ITERAÇÃO DE NEWTON. (EQ.(3.1-2))

IMPRESSÃO E PLOTAGEM DO PONTO OBTIDO

ESTIMAÇÃO DO PRÓXIMO PONTO PELO MÉTODO DE EULER (EQ.(3.1-3))

CORREÇÃO DO PONTO ESTIMADO PELA REGRA DO TRAPÉZIO (EQ.(3.1-4))

ESTIMAÇÃO DO ERRO LOCAL POR TRUNCAMENTO (EQ.(3.1-10))

O ERRO LOCAL POR TRUNCAMENTO É MENOR QUE A TOLERÂNCIA MÍNIMA

?

SIM

AUMENTAR O INTERVALO DE INTEGRAÇÃO

FIM

NÃO

RECALCULAR O INTERVALO DE INTEGRAÇÃO (EQ.(3.1-14))

O ERRO LOCAL POR TRUNCAMENTO É MAIOR QUE A TOLERÂNCIA MÁXIMA.

?

SIM

FLUXOGRAMA CORRESPONDENTE À CORREÇÃO DE UM PONTO POR NEWTON E ESTIMAÇÃO DO PRÓXIMO POR INTEGRAÇÃO

NÃO

FIM

APÊNDICE II - Listagem do Programa

```

1 $CONTROL NOSOURCE,NOLIST,USLINIT
2 $CONTROL FILE=07,FILE=08
3 C
4 C
5 C
6 C
7 C
8 C
9 C
10 C
11 C
12 C
13 C
14 C
15 C
16 C
17 C
18 C
19 C
20 C
21 C
22 C
23 C
24 C
25 C
26 C
27 C
28 C
29 C
30 C
31 C
32 C
33 C
34 C
35 C
36 C
37 C
38 C
39 C
40 C
41 C
42 C
43 C
44 C
45 C
46 C
47 C
48 C
49 C
50 C
51 C
52 C
53 C
54 C
55 C
56 C
57 C

PROGRAMA PARA O TRACADO
DO LUGAR DAS RAIIZES

ANGEL ROBERTO LAURENT
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBA
ITAJUBA, JANEIRO DE 1982

DIMENSION AKP(20),AKK(20),ZA(20),ZB(20),ZC(20),ZD(20),ZE(20),ZF(20),
*BD(20),BDS(20),BDD(20),ZAA(20),ZBB(20),ZCC(20),ZDD(20),ZEE(20),LAP(20),
*,LAZ(20),RNF(20),KK(20)
*,XPL(20),YPL(20),XPR(20),YPR(20),XPK(20),YPK(20),CA(20),AUX(20)
COMPLEX RAZ(20),RAP(20),RA(20),COC(20),ZC(20),DC(20),XK(4),E(20),RN,
*BDX,ADX,ZX,ASP,BSP,CA,ROA,DS,RZ(20),CAZ(20),CRAP(20),CRNP(20),ZM(2
*0),REN,RED,DR(20),CAP(20),RP(20),SB,BS,AS,RD,P,SA,SAI,SA2,HELP
CHARACTER*1 S
CHARACTER*3 ESC,LOG,LIN
INTEGER*4 CPU1,CPU2,CPU3
DOUBLE PRECISION XCOF(20),ROOTR(20),ROOTI(20)
SYSTEM INTRINSIC PROCTIME
COMMON COD(20),ICOD,COH(20),ICON,COAD(20),ICOH,COBD(20),ICOB,ER
DATA PI /3.1415927/
DATA IPILOT/1/,NUJ/0/
DATA H,EPS,NU,HIT,MPLT,MH/.01,.001,100,100,0,.07
DATA LOG/3HLOG/,LIN/3HLIN/
CPU1=PROCTIME

LEITURA DE DADOS
M=NUMERO DE ZEROS
N=NUMERO DE POLOS
XMIN=LIMITE ESQUERDO DO DIAGRAMA
YMIN=LIMITE INFERIOR DO DIAGRAMA
XMAX=LIMITE DIREITO DO DIAGRAMA
ER=TOLERANCIA (PELO MENOS DEZ VEZES MENOR QUE A DISTANCIA MINIMA
ENTRE OS POLOS E/OU ZEROS)
ESC="LIN"=>ESCALA LINEAR, "LOG"=>ESCALA MISTA (PARA ESCALA MISTA
OS LIMITES SAO AUTOMATICAMENTE ARREDONDADOS PELO PROGRAMA)
MPLT="1"=>SONENTE RAMOS DE PARAMETRO POSITIVO, "0"=>RAMOS DE PARA
METRO POSITIVO E NEGATIVO
MJ="1"=>IMPRESSAO DE RESULTADOS, "0"=>NAO IMPRESSAO DE RESULTADOS
EXEMPLO=2,5,-10,-0.2,.02,LIN,0,0
ACCEPT M,N,XMIN,YMIN,XMAX,ER,ESC,MPLT,MJ
CALL LIMITE(XMIN,YMIN,XMAX,YMAX,ESC)
IF(CIPILOT.EQ.1)CALL PREP(XMIN,YMIN,XMAX,YMAX,ESC)

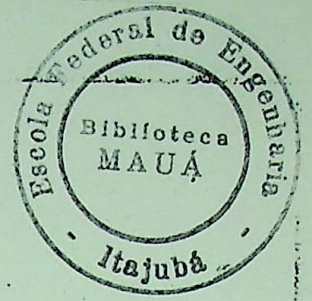
LEITURA DOS POLOS

```

```

58 C EXEMPL0=0,0
59 C -6,0
60 C -8,0
61 C -.37,.5
62 C -.37,-.5
63 C
64 C DO 2 I=1,N
65 C ACCEPT HELP
66 C 2 RAP(I)=-HELP
67 C IF(IPL0T.EQ.1)CALL POLCS(RAP,N,XMAX,YMAX,ESC)
68 C 10 FORMAT(2F10.6)
69 C IAZ=0
70 C IRZ=0
71 C IF(M.EQ.0)GO TO 17
72 C
73 C LEITURA DOS ZEROS
74 C
75 C EXEMPL0=-.9,1.2
76 C -.9,-1.2
77 C
78 C DO 1 I=1,M
79 C ACCEPT HELP
80 C 1 RAZ(I)=-HELP
81 C IF(IPL0T.EQ.1)CALL ZEROS(RAZ,M,XMAX,YMAX,ESC)
82 C 11 FORMAT(2F10.6)
83 C CALL REPR(M,RAZ,CAZ,IAZ,LAZ,RZ,IRZ)
84 C WRITE(6,23)
85 C 23 FORMAT(////,18X,"ZEROS, POLOS E PONTOS MUL
86 C *T I P L O S")
87 C WRITE(6,12)
88 C 12 FORMAT(////,18X," ZEROS ",/)
89 C DO 16 I=1,M
90 C XPR(I)=-REAL(RAZ(I))
91 C YPR(I)=-AIMAG(RAZ(I))
92 C IF(YPR(I).GE.0)GO TO 13
93 C S="-"
94 C AUX(I)=ABS(YPR(I))
95 C GO TO 14
96 C 13 S="+"
97 C AUX(I)=YPR(I)
98 C 14 WRITE(6,21)XPR(I),S,AUX(I)
99 C 16 CONTINUE
100 C 17 WRITE(6,18)
101 C 18 FORMAT(////,18X," POLOS ",/)
102 C DO 22 I=1,N
103 C XPL(I)=-REAL(RAP(I))
104 C YPL(I)=-AIMAG(RAP(I))
105 C IF(YPL(I).GE.0)GO TO 19
106 C S="-"
107 C AUX(I)=ABS(YPL(I))
108 C GO TO 20
109 C 19 S="+"
110 C AUX(I)=YPL(I)
111 C 20 WRITE(6,21)XPL(I),S,AUX(I)
112 C 21 FORMAT(18X,F10.6,1X,A1,1X,"J",F10.6)
113 C 22 CONTINUE
114 C

```



```

15 C FORMACAO DO POLINOMIO DOS PONTOS MULTIPLOS
16 C
17 CALL POLIN(N,RKZ,CON,ICOH)
18 CALL POLIN(N,RAP,COD,ICOD)
19 CALL DEFOL(COAB,ICOD,CON,ICOH)
20 CALL DEFOL(COBD,ICOD,COD,ICOD)
21 CALL PROD(ZA,IZDA,CON,ICOH,COD,ICOD)
22 CALL PROD(ZB,IZDB,COD,ICOD,COD,ICOD)
23 CALL SUBT(CO,ICOD,ZA,IZDA,ZB,IZDB)
24 DO 30 I=1, IDCO
25 CONTINUE
26 IAP=0
27 CALL REPR(N,RAP,CAP,IAP,LAP,RP,IRP)
28 NC=M+N-1
29 IF(NC.GT.1)GO TO 36
30 K=1
31 Z(K)=CMPLX(-COK)/COK+1,0.0)
32 GO TO 147
33 C
34 C
35 C
36 M1=NC+1
37 DO 37 I=1,M1
38 XCOF(I)=COK(I)
39 CALL POLRT(XCOF,NC,ROOTR,ROOTI)
40 DO 38 I=1,NC
41 Z(I)=CMPLX(SNGL(ROOTR(I)),SNGL(ROOTI(I)))
42 DO 145 I=1,NC
43 Z(I)=REAL(Z(I))
44 ZB(I)=AIMAG(Z(I))
45 IF(ZB(I).GE.0)GO TO 135
46 S="-"
47 ZB(I)=ABS(ZB(I))
48 GO TO 140
49 135 S="+"
50 CONTINUE
51 140 CONTINUE
52 145 CONTINUE
53 C
54 C DETERMINACAO DOS PONTOS MULTIPLOS CUJO GANHO RESULTA REAL
55 C E NAO SAO POLOS NEM ZEROS MULTIPLOS
56 C
57 147 CALL PSKR(ZM,NCR,Z,NC,GA,IQ,CAP,IAP,CAZ,IAZ)
58 C
59 C DETERMINACAO DE Q NO PONTO MULTIPLO
60 C
61 IF(NCR.EQ.0)GO TO 211
62 WRITE(6,201)
63 FORNAT(//'/',18X," PUNTO MULTIPLO ",13X,"GANHO",
64 +5X,"MULTIPLICIDADE",/)
65 DO 205 I=1,NCR
66 XPM(I)=REAL(ZM(I))
67 YPM(I)=AIMAG(ZM(I))
68 IF(YPM(I).GE.0.)GO TO 202
69 S="--"
70 AUX(I)=ABS(YPM(I))
71 GO TO 203
72 202 S="+"

```

```

172 AUX(I)=YPAK(I)
173 WRITE(6,204)XPM(I),S,AUX(I),GA(I),IG(I)
174 204 FORMAT(15X,E15.7,1X,A1,1X,"J",E15.7,5X,E15.7,5X,11)
175 205 CONTINUE
176 C
177 C OBTENCAO DOS PONTOS A SEREM PLOTADOS
178 C
179 C 211 CPUZ=PROCTIME
180 LL=0
181 IF(MJ.EQ.1)WRITE(6,1020)
182 1020 FORMAT('1',17X,'VALORES OBTIDOS PELO METODO DA CONTINUACAO',/,/,/,/,
183 *10X,58(' '),/,/,16X,'X',15X,'Y',15X,'K',9X,'PONTO',/,/,10X,58(' '),/,/,
184 212 DO 215 L=1,NCR
185 KK(L)=0
186 215 CONTINUE
187 IA=0
188 IF(IAP.HE.0)GO TO 330
189 I=1
190 J=1
191 HE=HH
192 IF(IAP.HE.0)GO TO 230
193 SAI=-RP(I)
194 X=REAL(SAI)
195 Y=AIMAG(SAI)
196 IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEX(XMAX,X)
197 IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEY(YMAX,Y)
198 CALL PERUP
199 IF(IPLOT.EQ.1)CALL MOVE(X,Y)
200 AK1=0.
201 SB=CMLPX(0.,0.)
202 230 IF(AK1.NE.0.)SAI=SA2
203 IF(AK1.NE.0.)AK1=AK2
204 C
205 C OBTENCAO DE UM NOVO PONTO E ESTIMACAO DO PROXIMO
206 C
207 CALL PONTO(SAI,SA2,AK1,AK2,HE)
208 IF(ABS(AIMAG(SA2)).LT..1E-10)SA2=CMLPX(REAL(SA2),0.)
209 IF(ABS(AIMAG(SAI)).LT..1E-10)SA1=CMLPX(REAL(SAI),0.)
210 IF(MJ.EQ.1.AND.AK1.NE.0.)WRITE(6,1000)SAI,AK1,J
211 1000 FORMAT(10X,3(E13.7,3X),I3)
212 IF(REAL(SAI).GT.0..AND.REAL(SA2).LT.0..OR.REAL(SAI).LT.0..AND.REAL
213 *(SA2).GT.0.)CALL CRUZA(SAI,SA2,J)
214 IF(MJ.EQ.1.AND.AK1.EQ.0.)WRITE(6,1003)SAI,AK1
215 1003 FORMAT(10X,3(E13.7,3X),'POLO')
216 IF(AK1.EQ.0.)SB=CMLPX(0.,0.)
217 IF(AK1.EQ.0.)GO TO 234
218 SB=SAI-SA
219 RSB=ABS(REAL(SB))
220 AISB=ABS(AIMAG(SB))
221 APPR=3.*RSB
222 APPR=3.*AISB
223 SAR=REAL(SAI)
224 SAI=AIMAG(SAI)
225 J=J+1
226 SA=SAI
227 SAI=SA2
228 AK1=AK2

```

```

129 C
130 C
131 C
132 C
133 C
134 C
135 C
136 C
137 C
138 C
139 C
140 C
141 C
142 C
143 C
144 C
145 C
146 C
147 C
148 C
149 C
150 C
151 C
152 C
153 C
154 C
155 C
156 C
157 C
158 C
159 C
160 C
161 C
162 C
163 C
164 C
165 C
166 C
167 C
168 C
169 C
170 C
171 C
172 C
173 C
174 C
175 C
176 C
177 C
178 C
179 C
180 C
181 C
182 C
183 C
184 C
185 C

VERIFICACAO SE O RAMO APROXIMA-SE DE UM ZERO
IF(M.EQ.0)GO TO 247
DO 240 L=1,N
RAZI=AIMAG(RAZ(L))
RAZR=REAL(RAZ(L))
IF(ABS(SAR+RAZR).GT.(3*ER).OR.ABS(SAI+RAZI).GT.(3*ER))GOTO 240
X=-RAZR
Y=-RAZI
IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEX(XMAX,X)
IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEY(YMAX,Y)
IF(I.PLOT.EQ.1)CALL PLOT(X,Y,4)
IF(MJ.EQ.1)WRITE(6,1001)(<-RAZR>,<HH/ABS(HH)*.9999999E+77>
1001 FORMAT(10X,3(E13.7,3X), 'ZERO')
GO TO 320
240 CONTINUE

C
C
C
VERIFICACAO SE O RAMO APROXIMA-SE DOS LIMITES
247 IF(SAR.GE.XMAX)GO TO 320
IF(SAR.LE.XMIN)GO TO 320
IF(ABS(SAI).GE.ABS(YMIN))GO TO 320
X=SAR
Y=SAI
IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEX(XMAX,X)
IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEY(YMAX,Y)
IF(I.PLOT.EQ.1)CALL PLOT(X,Y,4)

C
C
C
VERIFICACAO SE O RAMO APROXIMA-SE DE UM PONTO MULTIPLO
IF((APPR+APRI).EQ.0.)GO TO 230
IF(NCR.EQ.0)GO TO 230
DO 250 L=1,NCR
IF(KK(L).EQ.L)GO TO 250
ZR=REAL(ZK(L))
ZI=AIMAG(ZK(L))
IF(CABS(ZK(L)-SA).LT.(2.5*CABS(SB)))GO TO 260
250 CONTINUE
GO TO 230
260 KK(L)=L
X=ZR
Y=ZI
IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEX(XMAX,X)
IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEY(YMAX,Y)
IF(I.PLOT.EQ.1)CALL PLOT(X,Y,4)
IF(MJ.EQ.1)WRITE(6,1002)ZR,ZI,GAKL)
1002 FORMAT(10X,3(E13.7,3X), 'PONTO MULT. ')

C
C
C
VERIFICACAO DA MULTIPLICIDADE DO PONTO MULTIPLO
IF(10(L)-3)270,390,271

C
C
MUDAR A DIRECAO DE PLOTAGEM <MULTIPLICIDADE PAR>
271 ZX=CMPLX(.7,-.7)
GO TO 272

```

```

266 ZK=CMPLX(0.,-1.)
267 ACR=CABS(2*SB)
272 ANG=ATAN2(AIMAG(SB),REAL(SB))
SBR=COS(ANG)
SBI=SIN(ANG)
J=J+1
SA=ZK(L)
SAI=ZK(L)+ACR*CMPLX(SBR,SBI)*ZX
AK1=GA(L)+HE*2.5
CALL CONEW(AK1,SAI)
SAR=REAL(SAI)
SAI=AIMAG(SAI)
IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEX(XMAX,SAR)
IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEY(YMAX,SAI)
IF(I.PLOT.EQ.1)CALL PLOT(SAR,SAI,4)
301 SA2=SAI
302 AK2=AK1
303 GO TO 230
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000

```

POLOS REPETIDOS- DETERMINACAO DAS CONDICOOES INICIAIS E PONTOS

```

343 EPS=5*ER
344 J=J+1
345 IF(ILL.EQ.0)GO TO 352
346 AK1=-EPS**LAP(K))/RO
347 ARG=<FI+2.*PI*IL+PI)/LAP(K)
348 GO TO 354
349 AK1=<EPS**LAP(K))/RO
350 ARG=<FI+2.*PI*IL)/LAP(K)
351 SA1=-CAP(K)*EPS*CMPLX(COS(ARG),SIN(ARG))
352 IF(MJ.EQ.1)WRITE(6,1005) (-CAP(K)),0.
353 FORMAT(10X,3(E13.7,3X),'POLO MULT. ')
354 SA=-CAP(K)
355 CALL PENUP
356 X=REAL(SA)
357 Y=AIMAG(SA)
358 IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEX(XMAX,X)
359 IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEY(YMAX,Y)
360 IF(IPLT.EQ.1)CALL PLOT(X,Y,4)
361 CALL CONEW(AK1,SA1)
362 SA2=SA1
363 AK2=AK1
364 GO TO 225
365 IL=IL+1
366 IF(ILL.EQ.LAP(K))GO TO 370
367 I=I+1
368 GO TO 350
369 K=K+1
370 IF(K.GT.IAP)GO TO 380
371 I=I+1
372 GO TO 340
373 IF(I.EQ.N)GO TO 400
374 IA=JA+1
375 I=I+1
376 SA1=-RP(IA)
377 X=REAL(SA1)
378 Y=AIMAG(SA1)
379 IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEX(XMAX,X)
380 IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEY(YMAX,Y)
381 CALL PENUP
382 IF(IPLT.EQ.1)CALL PLOT(X,Y,4)
383 AK1=0.
384 GO TO 225
385
386
387
388
389
390 AT=ATAN2(AIMAG(SB),REAL(SB))
391 PINGUI=CABS(SB)
392 DS=CMPLX(COS(AT),SIN(AT))*2.*CABS(SB)
393 SA=ZK(L)
394 SA1=ZN(L)+DS
395 AK1=GA(L)+HE*2.5
396 J=J+1
397 CALL CONEW(AK1,SA1)
398 SA2=SA1
399 AK2=AK1
400 GO TO 230
401 IF(ILL.EQ.1)GO TO 415

```

C PULAR O PONTO MULTIPLO <MULTIPLICIDADE IMPAR>
C
C


```

DIMENSION X(20),Y(20)
IF(IDIMX-1)3,3,1
1 IDIMY=IDIMX-1
EXPT=0.
DO 2 I=1, IDIMY
EXPT=EXPT+1.
2 Y(I)=X(I+1)*EXPT
GO TO 4
3 IDIMY=0
4 RETURN
END

```

C MONTAGEM DE UM POLINOMIO COM COEFICIENTES REAIS

```

SUBROUTINE POLIN(N,RA,COF,ICO)
DIMENSION COF(20)
COMPLEX RA(20),X(20),Y(20),CO(20)
IF(N-1)1,2,3
1 COF(1)=1
ICO=1
GO TO 70
2 CO(1)=RA(1)
CO(2)=CMPLX(1.,0.)
ICO=2
GO TO 50
3 IDIMX=2
IDIMY=2
X(2)=CMPLX(1.,0.)
Y(2)=CMPLX(1.,0.)
X(1)=RA(1)
K=2
5 Y(1)=RA(K)
ICO=IDIMX+IDIMY-1
DO 10 I=1, ICO
CO(I)=CMPLX(0.,0.)
10 CONTINUE
DO 20 I=1, IDIMX
DO 20 J=1, IDIMY
L=I+J-1
CO(L)=X(I)*Y(J)+CO(L)
20 CONTINUE
K=K+1
IF(K-N)30,30,50
30 DO 40 I=1, ICO
X(1)=CO(I)
40 CONTINUE
IDIMX=ICO
GO TO 5
50 DO 60 I=1, ICO
COF(I)=REAL(CO(I))
60 CONTINUE
70 RETURN
END

```

C C

C MONTAGEM DE UM POLINOMIO COM COEFICIENTES COMPLEXOS

SUBROUTINE POLIC(N,RA,CO,ICO)

457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513

```

514 COMPLEX RA(Z),XC(20),Y(20),CO(20)
515 IDIMX=2
516 IDIMY=2
517 XC(2)=CMPLX(1.,0.)
518 Y(2)=CMPLX(1.,0.)
519 XC(1)=RA(1)
520 K=2
521 Y(1)=RA(K)
522 ICO=IDIMX+IDIMY-1
523 DO 10 I=1,ICO
524 CO(I)=CMPLX(0.,0.)
525 10 CONTINUE
526 DO 20 J=1, IDIMX
527 DO 20 J=1, IDIMY
528 L=I+J-1
529 CO(L)=X(I)*Y(J)+CO(L)
530 CONTINUE
531 K=K+1
532 IF(K-N)30,30,50
533 DO 40 I=1,ICO
534 X(I)=CO(I)
535 40 CONTINUE
536 IDIMX=ICO
537 GO TO 5
538 50 RETURN
539 END
540
541 C
542 C
543 C
544 C
545 C
546 C
547 C
548 C
549 C
550 C
551 C
552 C
553 C
554 C
555 C
556 C
557 C
558 C
559 C
560 C
561 C
562 C
563 C
564 C
565 C
566 C
567 C
568 C
569 C
570 C

```

C MULTIPLICACAO DE POLINOMIOS

```

SUBROUTINE PROXZ, IDIMZ, X, IDIMX, Y, IDIMY
DIMENSION Z(20), X(20), Y(20)
IF(IDIMX*IDIMY)10,10,20
10 IDIMZ=0
GO TO 50
20 IDIMZ=IDIMX+IDIMY-1
DO 30 I=1, IDIMZ
30 Z(I)=0.
DO 40 J=1, IDIMX
DO 40 J=1, IDIMY
K=I+J-1
40 Z(K)=X(I)*Y(J)+Z(K)
50 RETURN
END

```

C DETERMINACAO DOS PONTOS MULTIPLoS

```

SUBROUTINE PSKR(ZM,K,B,HC,GA,IG,CAP,IAP,CAZ,IAZ)
COMPLEX Z(20),SA,BS,AS,GAH(20),ZM(20),B(20),CAZ(20),CAP(20)
DIMENSION ZI(20),ZR(20),GAI(20),GAK(20),IQ(20)
COMMON COD(20),ICOD,CON(20),ICON
DO 28 I=1,NC
28 IQ(I)=1
IF(NC.EQ.1)IQ(I)=2
IF(NC.EQ.1)GO TO 15
DO 2 I=1,NC
DO 2 J=1,NC
IF(ABS(AIMAG(B(I))-AIMAG(B(J)))>.GT.0.010.OR.ABS(REAL(B(I))-REAL(B(

```

```

571 *J)).GT.0.01)GO TO 2
572 IQ(J)=IQ(J)+1
573 2 CONTINUE
574 DO 41 I=1,NC
575 41 CONTINUE
576 L=0
577 DO 4 I=1,NC
578 .FLAC=0
579 K=I+1
580 IF(I.EQ.NC)GO TO 5
581 DO 3 J=K,NC
582 IF(ABS(AIMAG(B(I))-AIMAG(B(J)))>.LT.0.01.AND.ABS(REAL(B(I))-REAL(B(
583 *J)))>.LT.0.01)FLAG=1
584 3 CONTINUE
585 IF(FLAG.EQ.1.)GO TO 4
586 5 L=L+1
587 Z(L)=B(I)
588 IQ(L)=IQ(I)
589 NCI=L
590 4 CONTINUE
591 DO 42 I=1,NC1
592 42 CONTINUE
593 NC=NC1
594 15 DO 30 I=1,NC
595 Z(I)=AIMAG(Z(I))
596 ZR(I)=REAL(Z(I))
597 IF(ABS(Z(I)).GT.0.0001)GO TO 20
598 ZM(I)=CMPLX(ZR(I),0.)
599 GO TO 30
600 20 ZM(I)=Z(I)
601 30 CONTINUE
602 K=0
603 DO 40 I=1,NC
604 SA=ZM(I)
605 IF(IAP.EQ.0)GO TO 31
606 DO 31 J=1,IAP
607 IF(CABS(-CAP(J)-SA).LT..05)GO TO 40
608 31 CONTINUE
609 IF(IA2.EQ.0)GO TO 32
610 DO 32 J=1,IA2
611 IF(CABS(-CAZ(J)-SA).LT..05)GO TO 40
612 32 CONTINUE
613 CALL VAPOK(BS,SA,COO,ICOD)
614 CALL VAPOK(AS,SA,CON,ICON)
615 GAN(I)=-BS/AS
616 IF(ABS(REAL(GAN(I)))>.LT.(100.*ABS(AIMAG(GAN(I))))GO TO 40
617 K=K+1
618 ZM(K)=ZM(I)
619 IQ(K)=IQ(I)
620 GAK(K)=REAL(GAN(I))
621 40 CONTINUE
622 DO 43 I=1,K
623 43 CONTINUE
624 RETURN
625 END
626
627 C C VERIFICACAO DA EXISTENCIA DE POLOS E ZEROS MULTIPLOS

```

```

SUBROUTINE REPR(M,A,C,IC,L,D,ID)
DIMENSION LL(20),LINK(21),ARC(20),AIG(20),L(20)
COMPLEX A(20),C(20),D(20)
IC=0
IF<M.GT.1>GO TO 5
DO 10 I=1,M
  ARCI)=REAL(A(I))
  AIG(I)=AIMAG(A(I))
10 CONTINUE
DO 15 I=1,M
  LL(I)=1
  LINK(M+I)=M
  LINK(M)=M+1
DO 20 I=1,M-1
  J=M-I
  MR=LINK(M+1)
  ML=M+1
20 IF<AR(MR)-AR(J)>40,30,50
30 IF<AIG(MR)-AIG(J)>40,60,50
40 ML=MR
MR=LINK(ML)
IF<MR.LT.M+1>GO TO 20
50 LINK(ML)=J
LINK(J)=MR
GO TO 70
60 LL(MR)=LL(MR)+1
70 CONTINUE
K=M+1
80 K=LINK(K)
IF<K.GT.M>RETURN
IF<LL(K).EQ.1>GO TO 90
IC=IC+1
C(IC)=A(K)
L(IC)=LL(K)
GO TO 80
90 ID=ID+1
D(ID)=A(K)
GO TO 80
END

```

SOMA DE POLINOMIOS

```

SUBROUTINE SOMA(Z,IDIHZ,X,IDIHX,Y,IDIHY)
DIMENSION Z(20),X(20),Y(20)
NDIM=IDIHX
IF<IDIHX-IDIHY>10,20,20
10 NDIM=IDIHY
20 IF<NDIM>90,90,30
30 DO 80 I=1,NDIM
  IF<I-IDIHX>40,40,60
  40 IF<I-IDIHY>50,50,70
  50 Z(I)=X(I)+Y(I)

```

629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684

```

685 GO TO 60
686 60 Z(I)=Y(I)
687 GO TO 60
688 70 Z(I)=X(I)
689 80 CONTINUE
690 90 IDIM2=NDIM
691 RETURN
692 END
693
694 C SUBTRACAO DE POLINOMIOS
695 C
696 C
697 SUBROUTINE SUBT(Z, IDIMZ, X, IDIMX, Y, IDIMY)
698 DIMENSION Z(20), X(20), Y(20)
699 NDIM=IDIMX
700 IF (IDIMX-IDIMY) 10, 20, 20
701 10 NDIM=IDIMY
702 20 IF (NDIM) 90, 90, 30
703 30 DO 80 I=1, NDIM
704 IF (I-IDIMX) 40, 40, 60
705 40 IF (I-IDIMY) 50, 50, 70
706 50 Z(I)=X(I)-Y(I)
707 GO TO 80
708 60 Z(I)=-Y(I)
709 GO TO 80
710 70 Z(I)=X(I)
711 80 CONTINUE
712 90 IDIMZ=NDIM
713 RETURN
714 END
715
716 C OBTENCAO DO VALOR DE UM POLINOMIO COM COEFICIENTES REAIS
717 C
718 C
719 SUBROUTINE VAPO(RES, PONTO, X, IDIMX)
720 DIMENSION X(20)
721 COMPLEX PONTO, RES
722 RES=CMPLX(0., 0.)
723 J=IDIMX
724 1 IF (J) 3, 3, 2
725 2 RES=RES+PONTO*X(J)
726 J=J-1
727 GO TO 1
728 3 RETURN
729 END
730
731 C OBTENCAO DO VALOR DE UM POLINOMIO COM COEFICIENTES COMPLEXOS
732 C
733 C
734 SUBROUTINE VAPOL(RES, PONTO, X, IDIMX)
735 COMPLEX PONTO, RES, X(20)
736 RES=CMPLX(0., 0.)
737 J=IDIMX
738 1 IF (J) 3, 3, 2
739 2 RES=RES+PONTO*X(J)
740 J=J-1
741 GO TO 1
742 3 RETURN
743 END
744
745 C

```

```

742 C GRAFICACAO DOS POLOS
743 C
744 SUBROUTINE POLOS(RAP, N, XMAX, YMAX, ESC)
745 DIMENSION LARAY(1)
746 CHARACTER*3 ESC, LOG, LIN
747 COMPLEX RAP(20)
748 DATA LARAY, '-', LOG/3HLOG/, LIN/3HLIN/
749 DO 1 I=1, N
750 X=-REAL(RAP(I))
751 Y=-AIMAG(RAP(I))
752 IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEX(XMAX, X)
753 IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEY(YMAX, Y)
754 CALL LOG(5)
755 A=1.
756 IF(ESC.EQ.LIN)A=10
757 CALL SYMBOL(X, Y, (.25*YMAX/A), LARAY, 45., 1)
758 CALL SYMBOL(X, Y, (.25*YMAX/A), LARAY, 135., 1)
759 1 CONTINUE
760 RETURN
761 END

```

```

762 C
763 C GRAFICACAO DOS ZEROS
764 C
765 SUBROUTINE ZEROS(RAZ, M, XMAX, YMAX, ESC)
766 DIMENSION LARAY(1)
767 CHARACTER*3 ESC, LOG, LIN
768 COMPLEX RAZ(20)
769 DATA LARAY, '0', LOG/3HLOG/, LIN/3HLIN/
770 CALL CSIZER(.15*YMAX), 1., 0.)
771 DO 1 I=1, M
772 X=-REAL(RAZ(I))
773 Y=-AIMAG(RAZ(I))
774 IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEX(XMAX, X)
775 IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEY(YMAX, Y)
776 CALL LOG(5)
777 A=1.
778 IF(ESC.EQ.LIN)A=10.
779 CALL SYMBOL(X, Y, (.15*YMAX/A), LARAY, 0., 1)
780 1 CONTINUE
781 RETURN
782 END

```

```

783 C
784 C ARREDONDAMENTO DOS LIMITES (ESCALAS MISTAS)
785 C
786 SUBROUTINE LIMITES(XMIN, YMIN, XMAX, YMAX, ESC)
787 CHARACTER*3 ESC, LIN
788 DATA LIN/3HLIN/
789 YMAX=-YMIN
790 IF(ESC.EQ.LIN)GO TO 1
791 I=ALOG10(ABS(XMIN))*99
792 XMIN=-10.**I
793 I=ALOG10(ABS(YMIN))*99
794 YMIN=-10.**I
795 XMAX=-XMIN/100.
796 YMAX=-YMIN/100.
797 1 RETURN
798 END

```

```

799 C TRANSFORMACAO DE COORDENADAS (X)
800 C
801 C
802 SUBROUTINE CORDEY(XMAX,X)
803 IF<X.LT.<-XMAX>>X=-ALOG10<ABS(X)/XMAX>)*XMAX*2.302586-XMAX
804 RETURN
805 END
806 C
807 C TRANSFORMACAO DE COORDENADAS (Y)
808 C
809 C
810 SUBROUTINE CORDEY(YMAX,Y)
811 A=1.
812 IF<Y.LT.<-YMAX>>A=-1.
813 IF<ABS(Y).GT.YMAX>Y=A*ALOG10<ABS(Y)/YMAX>)*YMAX*2.302586+A*YMAX
814 RETURN
815 END
816 C
817 C PREPARACAO DO "PLOTTER" E TRACADO DOS EIXOS
818 C
819 SUBROUTINE PREP(XMIN,YMIN,XMAX,YMAX,ESC)
820 CHARACTER*3 ESC,LIN,LOG
821 DIMENSION TIK(25),LARRAY(1),IL1(14),IL2(14)
822 DATA LARRAY/' ',TIK/1.,.5,0.,-.5,-1.,-1.5,-2.,-3.,-4.,-5.,-6.,-7.,
* -8.,-9.,-10.,-15.,-20.,-30.,-40.,-50.,-60.,-70.,-80.,-90.,
* -100./,REL/2.30326/
823 *
824 DATA IL1/2HRA,2HMO,2HS ,2HCO,2HM ,2HPA,2HRA,2HME,2HTR,2HO ,2HPO,2H
*SI,2HTI,2HVO/,IL2/2HRA,2HMO,2HS ,2HCO,2HM ,2HPA,2HRA,2HME,2HTR,2HO
* ,2HNE,2HCA,2HTI,2HVO/
825 *
826 DATA LIN/3HLIN/,LOG/3HLOG/
827 CALL PLOTS(1,7,8)
828 CALL NEWPEN(3)
829 CALL LIMIT(1.,14.,.5,10.5)
830 CALL LOCATE(2.,12.,2.,9.)
831 CALL SETIN
832 CALL FRAME
833 CALL LOCATE(0.,13.,0.,10.)
834 CALL FRAME
835 CALL MOVE(4,8.,8)
836 CALL LOG(2)
837 A=1.
838 IF<ESC.EQ.LIN>A=50.
839 CALL DASLNH(3,<.1*YMAX/A>)
840 CALL DRAW(5,3,8)
841 CALL MOVE(4,8,1,1)
842 CALL DASLNH(1,0.)
843 CALL DRAW(5,3,1,1)
844 CALL LOG(2)
845 CALL SYMBOL(5,4,1,1,12,IL1,0.,28)
846 CALL SYMBOL(5,4,8,12,IL2,0.,28)
847 IF<ESC.EQ.LIN>GO TO 10
848 AUX1=<2.+2.*REL>*XMAX
849 AUX2=<2.+4.*REL>*YMAX
850 YMI1=<1.+2.*REL>*XMAX
851 XMI1=<1.+2.*REL>*YMAX
852 CALL MAPUX<XMI1-2./10.*AUX1>,<XMAX+1./10.*AUX1>,<YMI1-2./7.*AUX2>
*,<-YMI1+7.*AUX2>)
853 CALL SETUU
854 Y1=YMIN
855

```

```

856 Y2=-YMIN
857 CALL CORDEY(YMAX,Y1)
858 CALL CORDEY(YMAX,Y2)
859 CALL MOVE(0.,Y1)
860 CALL DRAW(0.,Y2)
861 DO 2 I=1,25
862 HEIGHT=.06377.*AUX2
863 X=TIK(I)*XMAX
864 IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEX(XMAX,X)
865 IF(ABS(TIK(I)).NE.1..AND.TIK(I).NE.0..AND.TIK(I).NE.(-2)..AND.TIK
866 *I).NE.(-5)..AND.TIK(I).NE.(-10)..AND.TIK(I).NE.(-20)..AND.TIK(I).N
867 *E.(-50)..AND.TIK(I).NE.(-100.))GO TO 1
868 *CALL CASAS((TIK(I)*XMAX),N)
869 CALL LARG(6)
870 CALL NUMBER(X,(YMI1-.1577.*AUX2),(.1277.*AUX2),(TIK(I)*XMAX),0.,N)
871 HEIGHT=2.*HEIGHT
872 1 CALL LORG(5)
873 CALL SYMBUL(X,YMI1,HEIGHT,LARAY,90.,1)
874 2 CONTINUE
875 DO 6 I=3,25
876 Y=TIK(I)*YMAX
877 IF(ESC.EQ.LOG)CALL CORDEX(YMAX,Y)
878 T=ABS(TIK(I))
879 DO 7 J=1,2
880 HEIGHT=.06377.*AUX2
881 IF(T.NE.0..AND.T.NE.2..AND.T.NE.5..AND.T.NE.10..AND.T.NE.20..AND.T
882 *.NE.50..AND.T.NE.100..AND.T.NE.1.)GO TO 3
883 CALL CASAS((TIK(I)*YMAX),N)
884 CALL LORG(8)
885 CALL NUMBER((XMI1-.15/10.*AUX1),Y,(.1277.*AUX2),(TIK(I)*YMAX),0.,N
886 *)
887 HEIGHT=2.*HEIGHT
888 3 CALL LORG(5)
889 CALL SYMBUL(XMI1,Y,HEIGHT,LARAY,0.,1)
890 IF(TIK(I).EQ.0.)GO TO 6
891 Y=-Y
892 TIK(I)=-TIK(I)
893 7 CONTINUE
894 6 CONTINUE
895 GO TO 11
896 10 CALL LOCATE(2.,12.,2.,9.)
897 CALL MAPUJ(XMIN,XMAX,YMIN,(-YMIN))
898 CALL FXD(0)
899 CALL LAXE((-XMIN/25.),(XMIN/20.),XMIN,YMIN,-5.5,1.)
900 CALL MOVE(0.,YMIN)
901 CALL DRAW(0.,-YMIN)
902 11 RETURN
903 END
904
905 C DETERMINACAO DO NUMERO DE CASAS APOS A VIRGULA
906 C
907 SUBROUTINE CASAS(X,N)
908 N=0
909 X=ABS(X)
910 IF(X.EQ.0..OR.X.GE.1.)RETURN
911 N=ABS(ALOG10(ABS(X)))+.99
912 2 RETURN

```

```

913 END
914
915 C CORRECAO DE UM PONTO POR NEWTON E ESTIMACAO
916 C DO PROXIMO POR INTEGRACAO
917 C
918 SUBROUTINE PONTO(S0,S2,AK0,AK1,H)
919 COMPLEX S0,S1,S2,SAUX,A,B,DA,DB,AUX1,D1,D2,AUX2
920 COMMON COB<20>,ICOD,CON<20>,ICON,COAD<20>,ICOAD,COBD<20>,ICOBD,E
921 SAUX=S0
922 AKAUX=AK0
923 CALL VAPO<B,S0,COB,ICOD>
924 CALL VAPO<A,S0,CON,ICON>
925 CALL VAPO<DB,S0,COBD,ICOBD>
926 CALL VAPO<DA,S0,COAD,ICOAD>
927 AUX1=0.5+AK0*DA
928 S0=S0-(B+AK0*A)/AUX1
929 D1=-A/AUX1
930 S1=S0+H*D1
931 AK1=AK0+H
932 CALL VAPO<B,S1,COB,ICOD>
933 CALL VAPO<A,S1,CON,ICON>
934 CALL VAPO<DB,S1,COBD,ICOBD>
935 CALL VAPO<DA,S1,COAD,ICOAD>
936 AUX2=DB+AK1*DA
937 IF<CABS<AUX2>.EQ.0.>DISPLAY "AUX2 = ",AUX2
938 D2=-A/AUX2
939 S2=S0+H*(D1+D2)/2
940 EEULER=CABS<S2-S1>
941 IF<EEULER.LT.<E/25.>>H=5*H
942 IF<EEULER.LT.<E/25.>>GO TO 2
943 H=H*SQRT<E*.5/EEULER>
944 IF<EEULER.LT.E>GO TO 2
945 S0=SAUX
946 AK0=AKAUX
947 GO TO 1
948
949 2 RETURN
950 END
951
952 C OBTENCAO DAS RAIZES DE UM POLINOMIO
953 C
954 SUBROUTINE POLRT<XCOF,N,ROOTR,ROOTI>
955 DIMENSION XCOF<20>,COF<20>,ROOTR<20>,ROOTI<20>
956 DOUBLE PRECISION X0,Y0,X,Y,XPR,UX,UY,XT,YT,U,XT2,
957 Y2,SUNSO,P,DX,DY,TEMP,ALPHA,XCOF,
958 COF,ROOTR,ROOTI
959 1 N=M
960 IER=0
961 IF<XCOF<N+1>>10,25,10
962 10 IF<N>15,15,32
963 15 IER=1
964 20 RETURN
965 25 IER=4
966 N=N-1
967 GO TO 1
968 30 IER=2
969 GO TO 20

```

32 IF (IN - 36) 35, 35, 30

35 NX = N

NX = N + 1

N2 = 1

KJ1 = N + 1

DO 40 L = 1, KJ1

MT = KJ1 - L + 1

40 COF(MT) = XCOF(L)

45 X0 = 0.00500101

Y0 = 0.01000101

IN = 0

50 X = X0

X0 = -10.0 * Y0

Y0 = -10.0 * X

X = X0

Y = Y0

IN = IN + 1

GO TO 59

55 IFIT = 1

XPR = X

YPR = Y

ICT = 0

60 UX = 0.0

UY = 0.0

V = 0.0

YT = 0.0

XT = 1.0

U = COF(N+1)

IF (U) 65, 130, 65

65 DO 70 I = 1, N

L = N - I + 1

XT2 = X * XT - Y * YT

YT2 = X * YT + Y * XT

U = U + COF(L) * XT2

V = V + COF(L) * YT2

FI = I

UX = UX + FI * XT * COF(L)

UY = UY - FI * YT * COF(L)

XT = XT2

YT = YT2

70 YR = Y

SUNSQ = UX * UX + UY * UY

IF (SUNSQ) 75, 110, 75

75 DX = (Y * UY - U * UX) / SUNSQ

X = X + DX

78 IF (DABS(DY) + DABS(DX) - 1.0D-05) 100, 80, 80

80 ICT = ICT + 1

IF (ICT - 500) 60, 85, 85

85 IF (IFIT) 100, 90, 100

90 IF (IN - 5) 50, 95, 95

95 IER = 3

GO TO 20

100 DO 105 L = 1, NX

MT = KJ1 - L + 1

TEMP = XCOF(MT)

XCOF(MT) = COF(L)

1023

1024

1025

1026

105 COF(L) = TEMP

ITEMP = N

N = NX

HX = ITEMP

IF (IFIT) 120, 55, 120

110 IF (IFIT) 115, 50, 115

115 X = XPR

Y = YPR

120 IFIT = 0

IF (X) 122, 125, 122

122 IF (DABS(Y) - DABS(X) * 1.0D-05) 135, 125, 125

125 ALPHA = X + X

SUMSQ = X * X + Y * Y

N = N - 2

GO TO 140

130 X = 0.0

NX = NX - 1

HXX = HXX - 1

135 Y = 0.0

SUMSQ = 0.0

ALPHA = X

N = N - 1

140 L1 = 1

L2 = 2

COF(L2) = COF(L2) + ALPHA * COF(L1)

145 DO 150 L = 2, N

150 COF(L+1) = COF(L+1) + ALPHA * COF(L) - SUMSQ * COF(L-1)

155 ROOT1(N2) = Y

ROOTR(N2) = X

N2 = N2 + 1

IF (SUMSQ) 160, 165, 160

160 Y = -Y

SUMSQ = 0.0

GO TO 155

165 IF (N) 20, 20, 45

END

C C C

OBTENCAO DAS INTERCOES COM O EIXO IMAGINARIO

SUBROUTINE CRUZA(S3, S4, J)

COMPLEX S3, S4, S1, S2, SAUX, AK2, AK1, B, A, AKAUX

COMMON COD(20), ICOD, CON(20), ICON

S1 = CMLPLX(0., AIMAG(S3))

S2 = CMLPLX(0., AIMAG(S4))

CALL VAP0(B, S1, COD, ICOD)

CALL VAP0(A, S1, CON, ICON)

AK1 = -B/A

DO 10 I = 1, 20

CALL VAP0(B, S2, COD, ICOD)

CALL VAP0(A, S2, CON, ICON)

AK2 = -B/A

IF (ABS(AIMAG(AK2)) .LT. .0001 .OR. ABS(AIMAG(AK2-AK1)) .LT. .0001)

*GO TO 20

SAUX = S2

AKAUX = AK2

S2 = S2 - (S2 - S1) * AIMAG(AK2) / (AIMAG(AK2 - AK1))

S1 = SAUX

1027

1028

1029

1030

1031

1032

1033

1034

1035

1036

1037

1038

1039

1040

1041

1042

1043

1044

1045

1046

1047

1048

1049

1050

1051

1052

1053

1054

1055

1056

1057

1058

1059

1060

1061

1062

1063

1064

1065

1066

1067

1068

1069

1070

1071

1072

1073

1074

1075

1076

1077

1078

1079

1080

1081

1082

1083

DATA 27, 08, 1986
PR
LTV. Xerox
Nets Lucas

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200464



NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA