

**CÁLCULO DO ESCOAMENTO POTENCIAL
EM PERFIS AERODINÂMICOS ISOLADOS
E EM GRADES DE TURBOMÁQUINAS**

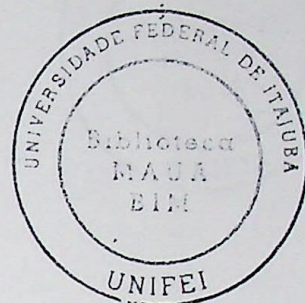
532.537:533.6:62-135
(043.2)

A524c
475

JOSÉ CARLOS CESAR AMORIM

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



"CÁLCULO DO ESCOAMENTO POTENCIAL
EM PERFIS AERODINÂMICOS ISOLADOS
E EM GRADES DE TURBOMÁQUINAS"

JOSÉ CARLOS CESAR AMORIM

ORIENTADORES:

PROF. DR. EUCLIDES CARVALHO FERNANDES

PROF. MSC. NELSON MANZANARES FILHO

ITAJUBÁ - MG

1987

CLASS. 532.537.533.6:62-1
CUTTER. A524
no. 475

35 (043.2)



CALCULO DE ECONOMIA HORTICOLA
EM PERFE. AGRICULTURAS
E EM GRANDES DE TERRACONSTR.

JOSE CARLOS CESAR AKORIN

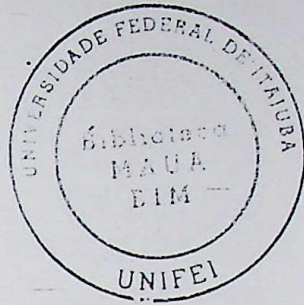
PROF. DR. EUCLIDES CARVALHO FERNANDES

PROF. MSc. NELSON MANZANARES FILHO

ESTADO DO RIO DE JANEIRO

1983

AGRADECIMENTOS



Agraço a UNIFEI - Faculdade de Engenharia de Itajubá
pelas facilidades concedidas para a realização deste trabalho
e a Biblioteca MAUA EIM pelo apoio técnico e material
durante a realização do mesmo.

Deixo aqui meus agradecimentos ao Prof. Dr. Euríclides Car-
valho por sua orientação e assistência durante a realização deste
trabalho e ao Prof. Dr. Euríclides Carvalhinho por sua
colaboração e apoio técnico.

Devo também agradecer ao Prof. Dr. Nelson Antônio Filho por
sua orientação e assistência durante a realização deste trabalho
e ao Prof. Dr. Euríclides Carvalhinho por sua colaboração e
apoio técnico.

Por fim, agradeço a todos os familiares e amigos que
me apoiaram e incentivaram durante a realização deste trabalho.

À Carlos, Anna,
Cláudia e Lúcia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à UNESP - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá pelas facilidades concedidas para a realização deste trabalho, e à Escola Federal de Engenharia de Itajubá pela acolhida e pelo suporte operacional oferecido.

Externo os meus agradecimentos ao Prof. Dr. Euclides Carvalho Fernandes pela orientação oferecida na realização deste trabalho e pela confiança depositada.

Desejo agradecer ao Prof. Msc. Nelson Manzanares Filho pela orientação dedicada a este trabalho e, particularmente, pela paciência e amizade.

Pela grande ajuda na confecção destes originais, agradeço à Lúcia.

RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se, com base no método das singularidades, uma técnica numérica para o cálculo do escoamento potencial incompressível em perfis aerodinâmicos isolados e em grades de turbomáquinas.

As velocidades induzidas pelos perfis são representadas por distribuições de vórtices no contorno dos mesmos, segundo a formulação clássica de Martensen. Essa formulação apresenta como vantagem o fato de que a intensidade da distribuição de vórtices é igual à velocidade no contorno externo do perfil.

A solução numérica é obtida através de uma técnica de painéis. Utilizam-se painéis retos e introduz-se uma correção simples e eficiente para levar em consideração a curvatura do perfil.

Alguns resultados numéricos obtidos para distribuições de velocidades e de pressões sobre os perfis são apresentados em comparação com resultados teóricos e experimentais encontrados na literatura.

A técnica de painéis baseada em distribuições de vórtices, apresentada neste trabalho, mostrou-se versátil e eficiente na análise do escoamento potencial em perfis aerodinâmicos isolados e em grades de turbomáquinas.

ABSTRACT

A numerical technique for the calculation of the potential incompressible flow on isolated airfoils and turbomachines cascades, based on the singularities method, is presented.

The perturbation velocities are introduced by vorticity distributions on the airfoils surfaces according to the Martensen's classical formulation. This formulation is advantageous due to the fact that the vorticity intensity equals the velocity magnitude on the exterior surface of the airfoil.

A panel technique is used in order to obtain the numerical solution. Straight panels are used and a simple and efficient correction is introduced to take in account the airfoil curvature.

Some numerical results for the velocities and pressures distributions on the airfoils surface are obtained. Comparisons with published theoretical and experimental results are made.

It is shown that the developed technique is versatile and efficient to analyse potential flow on isolated airfoils and turbomachines cascades.

CONTEÚDO

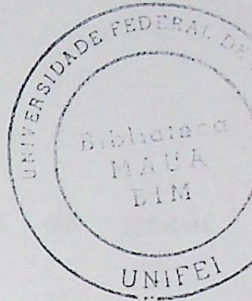
RESUMO	i
ABSTRACT	ii
CONTEÚDO	iii
SIMBOLOGIA	v
	Pág.
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	01
CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	08
2.1 - Formulação do escoamento potencial em grades lineares.	08
2.2 - Formulação do escoamento potencial em grades lineares por meio de distribuição de vórtices.	11
2.3 - Formulação para perfis aerodinâmicos isolados.	16
2.4 - Formulação para grades circulares fixas.	17
CAPÍTULO 3 - SOLUÇÃO NUMÉRICA	19
3.1 - Algumas características do método dos painéis.	19
3.2 - Campo de velocidades induzidas por uma grade linear, segundo o método dos painéis.	21
3.3 - Condição de contorno para o escoamento sobre os pontos de controle do perfil de referência.	24
3.4 - Correção devido à curvatura do perfil.	26
3.5 - Solução do sistema de equações lineares.	27
3.6 - Cálculo da distribuição de pressões.	29

3.7 - Cálculo da circulação e do coeficiente de sustentação.	30
3.8 - Cálculo da velocidade de saída do escoamento.	30
3.9 - Solução numérica para perfis aerodinâmicos isolados.	31
3.10 - Solução numérica para grades circulares fixas.	31
3.11 - Algumas características dos programas computacionais.	32
CAPÍTULO 4 - RESULTADOS NUMÉRICOS	34
4.1 - Distribuição de pressões em perfil isolado, com parada com o método de Jacob e Riegels (vórtices).	34
4.2 - Distribuição de pressões em grade linear, com parada com o método de Hess e Smith (fontes).	34
4.3 - Influência da correção devido à curvatura do perfil.	36
4.4 - Comparações com resultados experimentais.	38
CAPÍTULO 5 - COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES	42
APÊNDICE A - DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADES DO ESCOAMENTO POTENCIAL EM GRADES LINEARES	44
APÊNDICE B - COMPORTAMENTO DOS NÚCLEOS λ_I E λ_{II}	54
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	56

SIMBOLOGIA

Caracteres Latinos

A	coeficiente de influência; ponto sobre (C)
B	coeficiente de influência; ponto sobre (C)
b	vetor segundo membro
C	curvatura; ponto sobre (C)
C _p	coeficiente de pressão
C _s	coeficiente de sustentação
(C)	curva fechada de contorno da região (T)
c _t	constante
D	ponto sobre (C)
d	distância entre o ponto P e o ponto de integração
E	ponto sobre (C)
F	função potencial complexo; ponto sobre (C)
F _s	força de sustentação
G	ponto sobre (C)
g	densidade complexa de singularidades
H	ponto sobre (C)
i	unidade imaginária ($i = \sqrt{-1}$)
L	comprimento da curva (C)
l	corda do perfil
N	número de pás da grade circular
n	número de painéis
P	ponto interior ou exterior a região (T)
p	pressão
Q	intensidade da fonte, na origem da grade circular
R	raio da curvatura
r	raios de entrada (r_1) e de saída (r_2) da grade circular, no plano χ
s	comprimento de arco; linha ao longo de (C)
(T)	domínio plano simplesmente conexo
t	espaçamento entre os perfis em grade linear
W	velocidade (complexa ou componente)
z	variável complexa ($z = x + iy$)



Caracteres Gregos

α	ângulo formado pelo eixo x e a tangente ao perfil
β	ângulo de grade; ângulo da velocidade com relação ao eixo x
ϕ	função potencial de velocidade
λ	função núcleo ($\lambda = R + iJ$)
κ	constante
(κ)	contorno do perfil
ρ	massa específica
γ	densidade de vórtices
Γ	circulação; intensidade do vórtice, na origem da grade circular
χ	variável complexa ($\chi = r e^{i\theta}$)
δ	ângulo do perfil em grade circular; ângulo de ataque
ζ	variável complexa ($\zeta = \xi + i\eta$)

Índices Inferiores

c	grandezas referentes ao ponto de controle
j	grade elementar genérica ou painel correspondente
k	ponto de controle genérico
n	componente normal
p	induzido
s	componente tangencial
x	componente x
y	componente y
∞	condições do escoamento não perturbado
1	condições à montante da grade
2	condições à jusante da grade

Índices Superiores

-	conjugado; interior ao perfil
+	exterior ao perfil
'	variável de integração; derivada

Operadores

d	diferencial total
∂	diferencial parcial
Δ	diferença finita
∇^2	Laplaciano
$\vec{\nabla}$	operador vetorial nabla

CAPÍTULO I INTRODUÇÃO

O projeto de turbomáquinas caminha para o desenvolvimento de grupos unitários de potências cada vez mais elevadas, com características hidráulicas mais difíceis de se obter. Isso é traduzido pelo estudo de máquinas de grandes dimensões e de performances elevadas. A solução da maioria dos problemas hidráulicos ou mecânicos exige o conhecimento dos campos de escoamentos: através do sistema de aletas fixas de regulagem da máquina através do sistema de pás do rotor e à saída deste último.

Até recentemente, os métodos aproximados baseados em teorias unidimensionais, suplementadas por resultados experimentais, têm, principalmente, sido usados. A teoria unidimensional conduz, porém a resultados bastante restritos, o que leva a necessidade de se encontrar métodos teóricos capazes de permitir uma otimização mais rápida dos principais parâmetros que influenciam o escoamento nas turbomáquinas, reservando-se os dados experimentais para o controle dos resultados.

Tendo em vista as dificuldades de se levar em conta todos os efeitos do escoamento nas turbomáquinas de uma vez (atrito viscoso, turbulências, geometrias complexas, etc.), surge a conveniência de simplificar. A hipótese de escoamento bidimensional, potencial e incompressível, aparece como uma opção natural fornecendo uma base teórica mais geral que a teoria unidimensional.

O escoamento através dos sistemas estator e rotor das turbomáquinas, se considerado, para efeito de análise bidimensional, poderá ser tratado como um escoamento através de grades lineares (no caso de turbomáquinas axiais) ou grades circulares (no caso de turbomáquinas radiais ou diagonais).

O escoamento no interior de turbomáquinas possibilita a solução clássica de dois tipos de problemas: análise das características aerodinâmicas decorrentes de uma dada configuração geométrica (problema direto), e determinação da configuração geométrica adequada para a obtenção de certas características

aerodinâmicas pretendidas (problema indireto).

Entre os métodos de formulação destes problemas, destacam-se o método de transformação conforme e o método das singularidades. No início, a aplicação de ambos foi no estudo do perfil aerodinâmico isolado, tendo sido, posteriormente, estendidos aos casos de perfis em grades lineares e circulares, representativas de sistemas estator e rotor de turbomáquinas.

No método de transformação conforme, utiliza-se a teoria da variável complexa para obter um mapeamento que transforme a geometria do problema, em geral complicada, numa geometria mais simples para a qual já existe solução potencial. Uma vez conhecida a relação de transformação e aplicando-se as condições necessárias, é possível determinar a solução para a geometria original.

Em 1931, Theodorsen [1] obteve uma solução do problema direto para perfis isolados de formatos arbitrários. Uma transformação de Joukowski foi usada para mapear o perfil sobre um círculo aproximado; este, por sua vez, foi mapeado sobre um círculo exato, usando uma equação integral que foi resolvida iterativamente.

Garrick [2] propôs um método cuja solução era baseada na transformação de Theodorsen, transformando uma grade de linhas retas em um círculo. Hall e Thwaites [3] aperfeiçoaram o método de Garrick para grades de perfis arbitrários.

Em 1944 Mutterperl [4] mapeou a grade arbitrária diretamente para a grade de linhas retas, que foi, então, transformada em um círculo. O método de Mutterperl resolve os problemas direto e indireto somente para perfis de pequena curvatura e espessura devido a dificuldades de análise no bordo de ataque.

Em um trabalho interessante, Traupel [5] mapeou o campo do escoamento em grade sobre uma curva fechada. Os pontos de uma grade plana infinita são trazidos sobre um plano finito. São requeridas pelo menos quatro transformações. Com o tipo de curva obtida, Traupel pôde usar a fórmula de Green para encon

trar uma equação integral que era resolvida por um procedimento iterativo.

No método das singularidades, utiliza-se uma distribuição adequada de fontes, sumidouros e vórtices para se representar o campo de velocidades induzidas pelos obstáculos. Esta distribuição pode ser feita sobre a superfície dos obstáculos ou no interior dos mesmos e deve satisfazer às condições de continuidade e de contorno.

O método das singularidades foi desenvolvido por Birnbaum [6], Glauert [7] e Allan [8], para perfis de pequena espessura e curvatura, com bordo de fuga afilado. Katzoff et alii [9] usaram a transformação Theodorsen para determinar a distribuição de pressões em torno de um perfil isolado. Eles corrigiram a distribuição de pressões para os efeitos de interferência devidos aos outros perfis na grade, usando distribuições convenientes de fontes e vórtices. Este procedimento iterativo usava tabelas padronizadas para os efeitos de interferência e tornou-se obsoleto quando os computadores foram introduzidos.

Posteriormente, o método das singularidades foi estendido ao estudo de grades lineares. Contribuições importantes nesse sentido foram dadas por Schlichting [10] e Mellor [11] dentro do âmbito da teoria de perfis delgados.

No caso de perfis aerodinâmicos de formato arbitrário, isolados ou em grades lineares, Martensen [12] tratou o problema através da solução numérica de uma equação integral, tendo como incógnita a intensidade de uma distribuição de vórtices no contorno dos perfis. A equação integral resultante no método de Martensen é uma equação integral de Fredholm de segunda espécie, com núcleo contínuo e periódico, e cujo procedimento numérico para solução reduz-se a um somatório. Segundo essa formulação, a velocidade no contorno externo dos perfis iguala-se à própria intensidade dos vórtices.

Algumas variantes da técnica usada por Martensen foram introduzidas por Jacob e Riegels [13] no caso de perfis isolados ou segmentados. Posteriormente, Fisher e Inoue [14] esten-

deram a formulação de Martensen ao tratamento de grades circulares fixas, visando ao estudo da interação difusor/rotor de turbocompressores centrífugos.

Visando superar as dificuldades matemáticas e aplicar o método das singularidades na solução exata do escoamento potencial sobre obstáculos de formato arbitrário, Hess e Smith [15] desenvolveram um método numérico apropriado, referido como método dos painéis, motivados principalmente pela crescente disponibilidade de computadores digitais. Segundo este método, a superfície dos obstáculos é discretizada em elementos ou painéis, sobre os quais se distribuem singularidades de intensidade a se determinar, porém de forma conhecida (uniforme, linear, etc.). Com esse procedimento, as dificuldades numéricas ficam superadas, e as intensidades das singularidades são determinadas, resolvendo-se um sistema de equações lineares. Cabe salientar que o método dos painéis só pode ser eficientemente aplicado na solução do problema direto.

Hess e Smith desenvolveram suas técnicas baseadas em distribuições de fontes no contorno para o cálculo do escoamento potencial em torno de corpos arbitrários. Adaptações destas técnicas para o caso de grades lineares foram feitas por Giesing [16]. Todavia, no caso de corpos bidimensionais com sustentação, torna-se necessário introduzir uma distribuição de vórtices adicional. Sendo assim, a formulação baseada apenas em distribuições de vórtices no contorno parece ser mais natural que a formulação baseada em fontes.

Uma técnica de painéis bastante simples e eficaz foi desenvolvida por Mavriplis [17] para o estudo de escoamento potencial em torno de perfis aerodinâmicos isolados ou segmentados, visando ao desenvolvimento de dispositivos de alta sustentação. A técnica de Mavriplis baseia-se na formulação de Martensen [12].

No Brasil, já há algum tempo, tem-se desenvolvido trabalhos, usando o método das singularidades, para o cálculo do escoamento potencial em grades. Salomon [18], por exemplo, apresentou uma sistemática para a análise do escoamento em grades

circulares, utilizando uma distribuição única de vórtices sobre o contorno da pá. O estudo foi generalizado para os casos de pás infinitamente finas ou com espessura finita, problema direto ou indireto, um ou vários estágios, com sistema diretor ou não. Porém, as aplicações ficaram restritas ao problema direto de grades isoladas com pás infinitamente finas, de traçado logarítmico.

Henn [19] estudou a influência do número finito de pás nas turbomáquinas radiais, usando o método das singularidades. Baseou-se no trabalho de Salomon [18], considerando pás infinitamente finas de traçado logarítmico.

Seguindo sugestões do trabalho de Salomon [18], Ferreira [20] atacou o problema indireto em turbomáquinas geradoras radiais, considerando somente o caso de pás infinitamente finas e, através de alguns exemplos, obteve formas de pás bastante próximas à forma logarítmica.

Fernandes [21] determinou, através do método das singularidades, a solução do escoamento potencial para uma família de perfis, combinados de forma a constituir grades de turbomáquinas axiais, usando a teoria dos perfis delgados. Preocupou-se em analisar e estabelecer critérios de dimensionamento para a geometria das grades. Os resultados foram reunidos na forma de tabelas e de diagramas, cobrindo as diversas possibilidades de geometria, e comparados com resultados obtidos experimentalmente.

No trabalho de Castro [22], o método das singularidades é aplicado às grades lineares para a avaliação de como os parâmetros geométricos da grade e o tipo do perfil escolhido influem no comportamento aerodinâmico da mesma. O estudo utiliza a teoria dos perfis delgados e os resultados obtidos são comparados com resultados encontrados na literatura.

Manzanares [23] propôs um método para a solução do escoamento potencial através de grades circulares móveis, com pás infinitamente finas, conhecida sua geometria. A formulação foi efetuada segundo o modelo clássico das singularidades e a solu

ção obtida através do método dos painéis, o que permitiu superar as dificuldades numéricas de outros métodos. Algumas comparações com outros resultados teóricos e experimentais foram efetuadas.

Procurando estabelecer um critério de dimensionamento de turbomáquinas axiais, De La Fuente [24] usou a teoria dos perfis delgados para obter a solução do escoamento potencial em grades lineares e, posteriormente, obteve uma aproximação entre os resultados numéricos e experimentais, considerando uma correção no arqueamento do perfil.

Com base no método dos painéis, Negrão [25] analisou o escoamento potencial em grades lineares. A análise foi feita para perfis NACA da série 65 e os resultados obtidos foram comparados com aqueles obtidos por Castro [22].

No presente trabalho, propõe-se a descrição de uma técnica de painéis para a solução do escoamento potencial em torno de perfis aerodinâmicos isolados e dispostos em grades lineares e circulares. A técnica é semelhante a de Mavriplis [17], apoiando-se também na formulação de Martensen [12].

No capítulo 2, é desenvolvida a formulação, com base no método das singularidades, para permitir o cálculo das características aerodinâmicas decorrentes do escoamento em perfis aerodinâmicos isolados e em grades. No capítulo 3, será proposto um procedimento para a solução do problema direto do escoamento potencial, baseado no método dos painéis, visando à elaboração de um programa computacional. No capítulo 4, apresentam-se alguns resultados numéricos obtidos para a distribuição de velocidades ou de pressões sobre os perfis em comparação com outros métodos e com resultados experimentais encontrados na literatura. São apresentados, também, resultados numéricos mostrando a influência, no método, de alguns parâmetros, tais como: o número de painéis escolhido e a correção devido à curvatura do perfil. Finalmente, no capítulo 5, conclusões e sugestões são apresentadas. Pode-se adiantar que, a técnica de painéis baseada em distribuição de vórtices apresentada neste trabalho, é uma ferramenta versátil para análise do escoamento

potencial em perfis aerodinâmicos isolados e em grades de turbomáquinas. Como uma vantagem dessa formulação, destaca-se o fato de que a velocidade no contorno externo dos perfis iguala-se à própria intensidade da distribuição de vórtices.

CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O objetivo deste capítulo é desenvolver a formulação necessária para permitir o cálculo de algumas características aerodinâmicas decorrentes do escoamento em perfis aerodinâmicos isolados e em grades lineares e circulares.

Devido à complexidade desse escoamento, será utilizada a hipótese de escoamento bidimensional, potencial e incompressível.

O cálculo do escoamento em perfis aerodinâmicos isolados, conforme será mostrado na seqüência da formulação, é um caso particular do escoamento em grades lineares, quando o espaçamento entre os perfis tende para o infinito. Também será mostrado que o cálculo do escoamento no plano de uma grade circular, pode ser feito no plano de uma grade linear através de uma transformação conforme adequada. Sendo assim, para efeito de simplificação, apresentar-se-á a formulação completa apenas para o caso do escoamento em grades lineares.

A formulação adotada para o cálculo do escoamento potencial incompressível em grades lineares de perfis aerodinâmicos tem como base o método das singularidades. As velocidades induzidas pela grade são representadas por distribuições de vórtices no contorno dos perfis, segundo a formulação clássica de Martensen [12].

No primeiro item deste capítulo, será apresentado um resumo da formulação de Martensen [12], seguindo a linha apresentada nos trabalhos de Nyiri [26] e Eremeev [27]. A formulação detalhada encontra-se no apêndice A, para referência.

2.1. Formulação do escoamento potencial em grades lineares

Considere-se a Figura 2.1., onde está representado um esquema de uma grade linear infinita no plano $z = x + iy$, com espaçamento t entre os perfis aerodinâmicos de corda l , dispostos com um ângulo β em relação ao eixo x , bem como o diagrama de

velocidades correspondente.

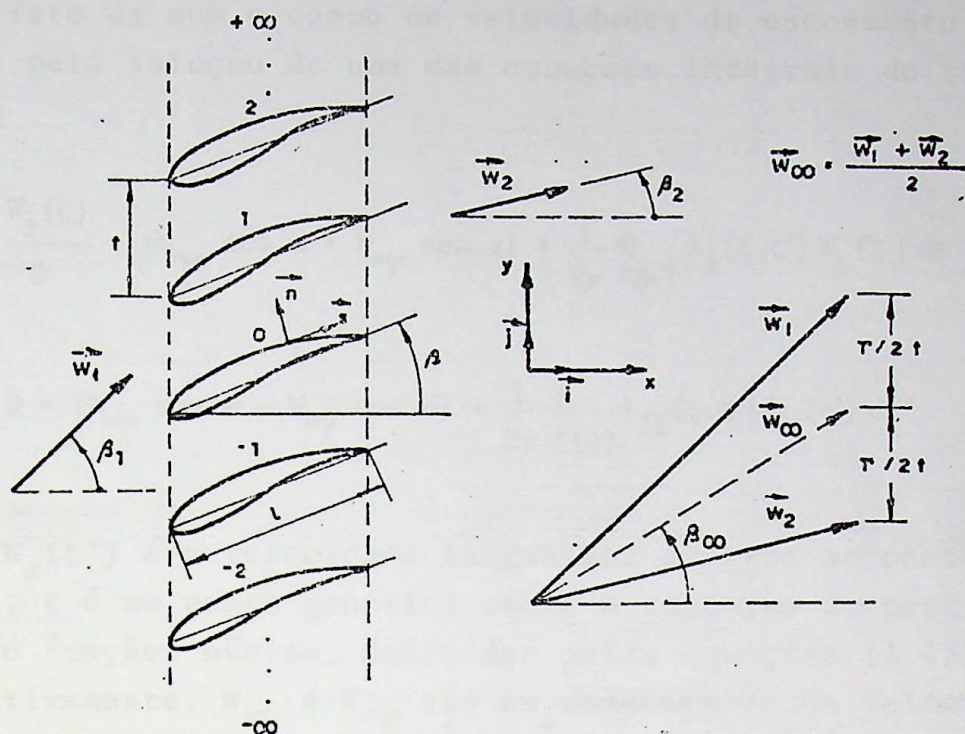


Figura 2.1. - Esquema de uma grade linear e diagrama de velocidades.

O escoamento potencial incompressível através da grade satisfaz à equação de Laplace para o potencial ϕ , sujeita às condições de contorno e de infinito:

$$\text{domínio exterior: } \nabla^2 \phi = 0, \quad (2.1)$$

$$\text{contorno exterior: } \vec{W} \cdot \vec{n} = 0, \quad (2.2)$$

$$\text{infinito à montante: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \vec{W} = \vec{W}_1, \quad (2.3)$$

$$\text{infinito à jusante: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \vec{W} = \vec{W}_2. \quad (2.4)$$

Nas equações anteriores, $\vec{W} = \nabla \phi$ é a velocidade do escoamento, \vec{W}_1 e \vec{W}_2 são, respectivamente, as velocidades a montante e a jusante da grade e \vec{n} é o versor normal, direcionado para fora do perfil.

Mostra-se, no apêndice A, que a necessidade do escoamento

potencial em grades lineares satisfazer a equação de Laplace, sujeita às condições de contorno e de infinito apresentadas, leva ao fato de que o campo de velocidades do escoamento pode ser obtido pela solução de uma das equações integrais do tipo Fredholm:

$$\frac{W_S(\zeta)}{2} = (W_{\infty X} \cos \alpha + W_{\infty Y} \sin \alpha) + \frac{1}{2\pi} \oint_{(K)} \lambda_I(\zeta, \zeta') W_S(\zeta') ds' \quad (2.5)$$

e

$$0 = (W_{\infty X} \sin \alpha - W_{\infty Y} \cos \alpha) + \frac{1}{2\pi} \oint_{(K)} \lambda_{II}(\zeta, \zeta') W_S(\zeta') ds' \quad (2.6)$$

onde, $W_S(\zeta')$ é a velocidade tangencial externa ao contorno do perfil; ζ é um ponto genérico sobre o contorno do perfil, λ_I e λ_{II} são funções núcleo, definidas pelas equações (A.43) e (A.44), respectivamente. $W_{\infty X}$ e $W_{\infty Y}$ são as componentes da velocidade \vec{W}_{∞} dada pela média vetorial de \vec{W}_1 e \vec{W}_2 , isto é,

$$\vec{W}_{\infty} = \frac{\vec{W}_1 + \vec{W}_2}{2} \quad (2.7)$$

Introduzindo a circulação Γ_p , sobre o contorno do perfil,

$$\Gamma_p = \oint_{(K)} W_S ds, \quad (2.8)$$

demonstra-se, com a equação (2.7) e as equações (A.32) e (A.33) do apêndice A, que

$$\vec{W}_1 = \vec{W}_{\infty} + \frac{\Gamma_p}{2t} \vec{j} \quad (2.9)$$

e

$$\vec{W}_2 = \vec{W}_{\infty} - \frac{\Gamma_p}{2t} \vec{j} \quad (2.10)$$

— Tendo em vista desenvolvimentos futuros, é conveniente introduzir a seguinte notação complexa para as equações (2.9) e (2.10):

$$W_1 = W_{\infty} + i \frac{\Gamma_p}{2t} \quad (2.11)$$

e

$$W_2 = W_\infty - i \frac{\Gamma p}{2t} \quad (2.12)$$

onde $W = W_x + i W_y$, com i representando a unidade imaginária ($i = \sqrt{-1}$).

As equações (2.6) e (2.5) são equações integrais do tipo Fredholm de primeira e segunda espécie, respectivamente. A equação (2.6) pode ser interpretada no contexto da condição de contorno (2.2), ao passo que a equação (2.5) decorre do fato do campo de velocidades interno ao perfil dever, obrigatoriamente, ser nulo, conforme se mostra no apêndice A. Logo, a condição

$$\text{domínio interior: } \vec{W} \cdot \vec{s} = 0 \quad (2.13)$$

é necessária, sendo \vec{s} o versor tangente ao perfil.

Neste trabalho, será usada a equação de segunda espécie, uma vez que o núcleo λ_I dessa equação é limitado, quando o ponto de integração ζ' tende para o ponto de cálculo ζ , o que não ocorre com o núcleo λ_{II} da equação de primeira espécie (2.6), que, neste caso, é singular (vide apêndice B).

A formulação resumida anteriormente e detalhada no apêndice A, pode ser recuperada, de maneira relativamente simples, utilizando distribuições de vórtices no contorno dos perfis da grade para gerar um campo de velocidade de perturbação sobre o campo de velocidade uniforme \vec{W}_∞ , assumindo as condições de contorno expressas pelas equações (2.2) e (2.13). Isso será mostrado a seguir.

2.2. Formulação do escoamento potencial em grades lineares por meio de distribuição de vórtices

Considere-se a Figura 2.2 onde se representa uma grade infinita, no plano $z = x + iy$, composta de perfis de formato arbitrário, idênticos, de corda l , com espaçamento t constante. O problema que se apresenta no momento consiste em se determinar o campo de velocidades induzidas por distribuições contínuas

de vórtices, representando os perfis da grade, dispostos sobre o contorno dos mesmos.

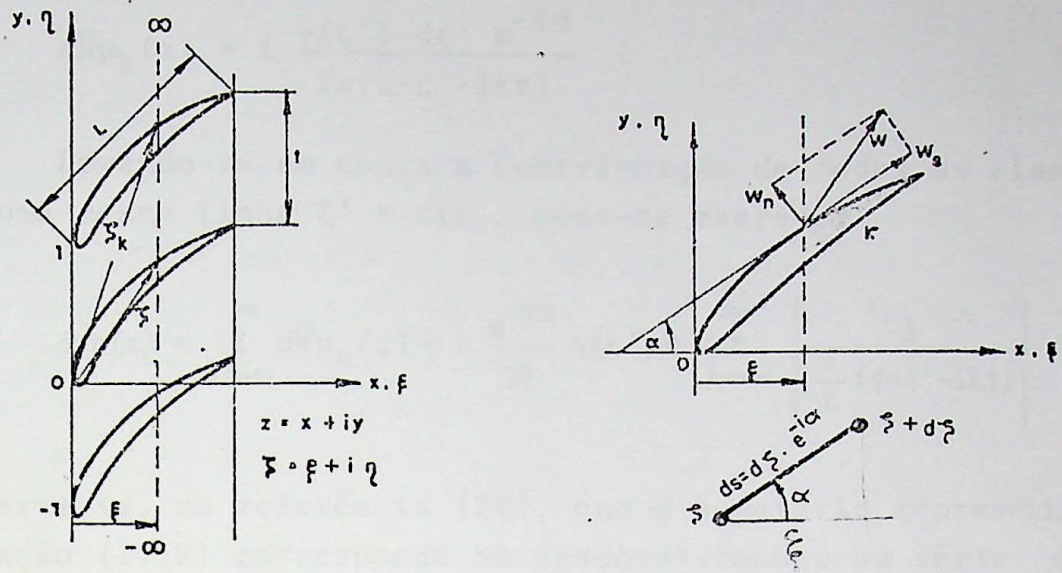


Figura 2.2. - Esquema de uma grade linear e detalhe do perfil de referência.

O potencial complexo devido a uma distribuição de vórtices sobre o elemento ds , no ponto ζ_k do plano complexo z (vide referência [28.]), é dado por

$$dF_k(z) = i \frac{\gamma(s') ds'}{2\pi} \ln(z - \zeta'_k) \quad (2.14)$$

O campo de velocidades conjugadas induzidas devido a este elemento é representado por

$$d\bar{w}_{p_k}(z) = \frac{d[dF_k(z)]}{dz} = i \frac{\gamma(s') ds'}{2\pi(z - \zeta'_k)} \quad (2.15)$$

Da Figura 2.2 é válido escrever que

$$\zeta_k = \zeta + ikt \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty \quad (2.16)$$

e

$$ds = d\zeta e^{-i\alpha} \quad , \quad (2.17)$$

sendo ζ um ponto genérico sobre o perfil de referência e $\alpha = \alpha(s)$

é o ângulo formado pelo eixo x e a tangente ao perfil no ponto ζ . Com as relações (2.16) e (2.17) na equação (2.15) obtém-se,

$$d\bar{w}_{p_k}(z) = i \frac{\gamma(\zeta') d\zeta' e^{-i\alpha}}{2\pi(z-\zeta'-ikt)} \quad (2.18)$$

Levando-se em conta a contribuição de todos os elementos de uma mesma linha $\xi' = \text{cte.}$, pode-se escrever

$$d\bar{w}_p(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d\bar{w}_{p_k}(z) = i \frac{e^{-i\alpha}}{2t} \gamma(\zeta') d\zeta' \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{t} (z-\zeta'-ikt)} \right] \quad (2.19)$$

Observa-se, na referência [29], que o somatório representado na equação (2.19) corresponde ao desenvolvimento em série da função $\text{cotgh} \left[\frac{\pi}{t} (z-\zeta') \right]$. Logo,

$$d\bar{w}_p(z) = i \frac{e^{-i\alpha}}{2t} \gamma(\zeta') d\zeta' \text{cotgh} \left[\frac{\pi}{t} (z-\zeta') \right] \quad (2.20)$$

Ao se trabalhar com a equação (2.20) o efeito de interferência da grade já está incluído, sendo suficiente concentrar a análise sobre o perfil de referência $k = 0$.

Adiciona-se a contribuição da distribuição de vórtices sobre todo o contorno (κ) do perfil, tem-se o campo de velocidades conjugadas induzidas pela grade expresso por

$$\bar{w}_p(z) = i \frac{e^{-i\alpha}}{2\pi} \oint_{(\kappa)} \gamma(\zeta') \lambda(z, \zeta') d\zeta' \quad (2.21)$$

com

$$\lambda(z, \zeta') = \frac{\pi}{t} \text{cotgh} \frac{\pi}{t} (z-\zeta') \quad (2.22)$$

O campo de velocidade total W é obtido pela superposição do campo de velocidade uniforme W_∞ e do campo de velocidade induzida w_p , ou seja,

$$\bar{W}(z) = \bar{W}_\infty + \bar{w}_p(z) = \bar{W}_\infty + i \frac{e^{-i\alpha}}{2\pi} \oint_{(\kappa)} \gamma(\zeta') \lambda(z, \zeta') d\zeta' \quad (2.23)$$

Quando o ponto z de cálculo tende para um ponto ζ genérico sobre o contorno do perfil, a aplicação das fórmulas de Plemej (ver referência [30]) à integral da equação (2.23) conduz a

$$\bar{W}^{\pm}(\zeta) = \bar{W}_{\infty} \pm e^{-i\alpha} \frac{\gamma(\zeta)}{2} + i \frac{e^{-i\alpha}}{2\pi} \oint_{(\kappa)} \gamma(\zeta') \lambda(\zeta, \zeta') d\zeta' \quad (2.24)$$

onde \bar{W}^+ e \bar{W}^- são os valores limites obtidos, quando o ponto z tende para o ponto ζ pelo exterior ou pelo interior do perfil, respectivamente. A integral sobre o contorno (κ) passa a ser interpretada no sentido de Cauchy, isto é, elimina-se o ponto $\zeta = \zeta'$ no cálculo da integral.

De acordo com a Figura 2.2, a velocidade conjugada pode ser expressa pelas componentes tangencial, W_s , e normal, W_n , ao contorno do perfil,

$$\bar{W}(\zeta) = (W_s - i W_n) e^{-i\alpha} \quad (2.25)$$

As condições de que a velocidade tangencial interna e a velocidade normal externa ao perfil são nulas, podem ser expressas como

$$\text{Re} \left[\bar{W}^-(\zeta) e^{i\alpha} \right] = 0 \quad (2.26.a)$$

e

$$\text{Im} \left[\bar{W}^+(\zeta) e^{i\alpha} \right] = 0 \quad (2.26.b)$$

respectivamente. Levando as equações (2.24) nas equações (2.26.a) e (2.26.b) e desenvolvendo, resultam as seguintes equações integrais

$$\frac{\gamma(\zeta)}{2} = (W_{\infty x} \cos \alpha + W_{\infty y} \sin \alpha) + \frac{1}{2\pi} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') \gamma(\zeta') ds' \quad (2.27)$$

e

$$0 = (W_{\infty x} \sin \alpha - W_{\infty y} \cos \alpha) + \frac{1}{2\pi} \oint_{(\kappa)} \lambda_{II}(\zeta, \zeta') \gamma(\zeta') ds' \quad (2.28)$$

onde

$$\lambda_{\text{I}}(\zeta, \zeta') = -R(\zeta, \zeta') \operatorname{sen} \alpha - J(\zeta, \zeta') \operatorname{cos} \alpha, \quad (2.29.a)$$

$$\lambda_{\text{II}}(\zeta, \zeta') = R(\zeta, \zeta') \operatorname{cos} \alpha - J(\zeta, \zeta') \operatorname{sen} \alpha, \quad (2.29.b)$$

$$R(\zeta, \zeta') = \operatorname{Re} \left[\lambda(\zeta, \zeta') \right] = \frac{\pi}{t} \frac{\operatorname{senh} \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi')}{\cosh \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') - \operatorname{cos} \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta')} \quad (2.29.c)$$

e

$$J(\zeta, \zeta') = \operatorname{Im} \left[\lambda(\zeta, \zeta') \right] = \frac{-\pi}{t} \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta')}{\cosh \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') - \operatorname{cos} \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta')}. \quad (2.29.d)$$

Comparando as equações (2.27) e (2.28) com as equações (A.45) e (A.46) obtidas no apêndice A, para o campo de velocidades do escoamento potencial em grades lineares, conclui-se que

$$\gamma(\zeta) = W_s(\zeta), \quad (2.30)$$

ou seja, a intensidade da distribuição de vórtices representativa do perfil é igual à velocidade tangencial no contorno externo do mesmo, o que representa uma vantagem da formulação baseada em distribuições de vórtices sobre o contorno dos perfis, proposta por Martensen [12], pois, uma vez determinada a intensidade dessas distribuições, obtém-se, diretamente, as distribuições de velocidades sobre o contorno dos perfis.

Pela formulação de Martensen [12], obter a solução do escoamento pela equação integral do tipo Fredholm de segunda espécie, definida em (2.5), que é a proposta do presente trabalho, é equivalente a solucionar a equação (2.27), obtida quando se considera a velocidade tangencial interna ao perfil nula, lembrando que a intensidade da distribuição de vórtices é igual à velocidade tangencial no contorno do perfil. Da mesma forma, a equação de primeira espécie (2.6) é equivalente à equação (2.28).

Nessa formulação as distribuições de vórtices perturbam o escoamento uniforme W_∞ dado pela média aritmética entre W_1 e W_2 . Logo, W_∞ pode ser chamado de campo básico do escoamento potencial em grades lineares. As equações (2.11) e (2.12), relacionando o desvio ocasionado pela grade e a circulação em torno de um perfil, podem ser recuperadas impondo os limites $x \rightarrow \pm\infty$ na equação (2.23).

As observações anteriores ganham relevância no presente trabalho, pelo fato de que a técnica a ser usada no capítulo seguinte, para a solução numérica do escoamento potencial em grade linear, é baseada nas distribuições de vórtices para representar os perfis.

2.3. Formulação para perfis aerodinâmicos isolados

O estudo do escoamento em um perfil aerodinâmico isolado é um caso particular do escoamento em grade linear, quando o espaçamento t entre os perfis tende para o infinito. Nesse caso, obtem-se das equações (2.11) e (2.12), com $t \rightarrow \infty$ e circulação Γ_p limitada, que

$$W_1 = W_2 = W_\infty, \quad (2.31)$$

ou seja, não há desvio no escoamento após o perfil.

A formulação do escoamento potencial por meio de distribuição de vórtices, proposta no presente trabalho, pode ser aplicada para o caso do perfil isolado, bastando para isso estabelecer a nova expressão para a função núcleo $\lambda(z, \zeta)$, definida na equação (2.22), para o espaçamento t tendendo para o infinito. Calculando o limite da equação (2.22), com $t \rightarrow \infty$, encontra-se

$$\lambda(z, \zeta) = \frac{1}{(z - \zeta)}. \quad (2.32)$$

Com a condição (2.31) e levando a equação (2.32) na equação integral (2.23), a formulação apresentada neste capítulo torna-se válida para o escoamento em um perfil aerodinâmico isolado.

2.4. Formulação para grades circulares fixas

Considere-se a Figura 2.3, onde está representado um esquema de uma grade circular fixa no plano $\chi = r e^{i\theta}$. Para fins de formulação e exemplificação será considerado o caso de uma grade difusora com raio de entrada (interno) r_1 e raio de saída (externo) r_2 , formada por N perfis aerodinâmicos de formato arbitrário, idênticos, igualmente espaçados e identicamente orientados.

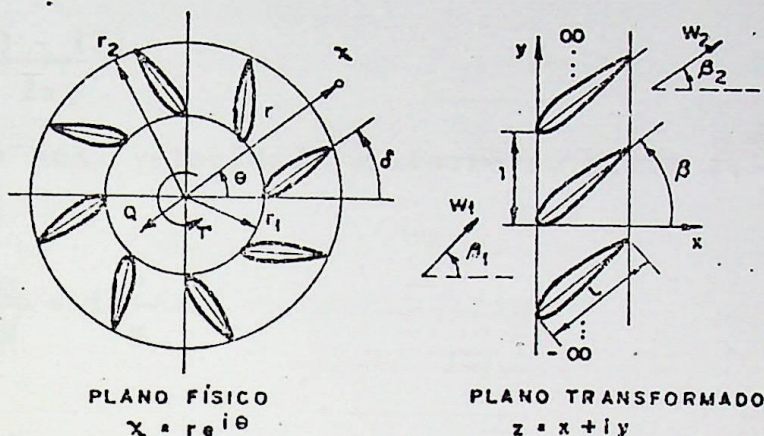


Figura 2.3. - Plano físico da grade circular e plano transformado da grade linear.

Através da seguinte transformação conforme introduzida por König [31],

$$z(\chi) = \frac{N}{2\pi} \ln \left(\frac{\chi}{r_1} \right), \quad (2.33)$$

a grade circular no plano χ é transformada numa grade linear infinita no plano $z = x + iy$ com espaçamento unitário entre os perfis transformados, de acordo com a Figura 2.3. Linhas $r = \text{cte.}$ e $\theta = \text{cte.}$ no plano χ são transformadas em linhas $x = \text{cte.}$ e $y = \text{cte.}$, respectivamente, no plano z . Tem-se também que

$$z(r_1) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} x = -\infty, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} x = +\infty. \quad (2.34)$$

Dessa forma, o estudo do escoamento potencial do plano χ pode ser feito no plano z , considerando-se a relação de trans-

formação entre as respectivas velocidades complexas conjugadas:

$$\bar{W}_X = \bar{W}_Z \frac{dz}{dX} = \bar{W}_Z \frac{N}{2\pi X} \quad (2.35)$$

O escoamento básico do plano X é dado pela combinação de uma fonte de intensidade Q e um vórtice de intensidade Γ na origem da grade circular, simulando a vazão e a pré-circulação, respectivamente. De acordo com a equação (2.35), a velocidade complexa conjugada do escoamento básico no plano X ,

$$\bar{W}_{X_1} = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi X} \quad (2.36)$$

transforma-se numa velocidade uniforme no plano z , anterior a grade ($x \rightarrow -\infty$):

$$\bar{W}_{z_1} = \frac{Q}{N} - i \frac{\Gamma}{N} \quad (2.37)$$

A relação entre o ângulo β_1 do escoamento de aproximação na grade linear e os parâmetros cinemáticos da grade circular é dada por

$$\text{tg } \beta_1 = \frac{\Gamma}{Q} \quad (2.38)$$

Utilizando-se da transformação que acaba de ser apresentada, as análises do escoamento no plano da grade circular poderão ser feitas no plano da grade linear, sabendo-se que as equações (2.33), (2.35) e (2.38) se encarregam de efetuar as necessárias correspondências entre geometrias, escoamentos e parâmetros cinemáticos, respectivamente.

CAPÍTULO 3 - SOLUÇÃO NUMÉRICA

No capítulo anterior foi apresentada a formulação para o problema direto do escoamento potencial em grades lineares por meio de distribuições de vórtices. Verificam-se dificuldades numéricas no método utilizado para o cálculo da integral representativa do campo de velocidades induzidas.

Visando superar as referidas dificuldades numéricas e tornar o cálculo menos trabalhoso, será proposto neste capítulo um procedimento alternativo para a solução do problema direto do escoamento potencial em grades lineares. Esse procedimento baseia-se num método conhecido como Método dos Painéis. Usando-se esse método, o problema será colocado na forma de um sistema de equações lineares algébricas, tendo por incógnitas os valores da densidade de vórtices.

Neste capítulo, ainda, procurar-se-á desenvolver as equações de forma a facilitar a implantação de um programa computacional para a solução do problema. Serão discutidos alguns aspectos importantes relacionados com o desenvolvimento deste programa.

3.1. Algumas características do método dos painéis

Torna-se conveniente, antes de aplicar-se o método dos painéis na solução do campo de velocidades induzidas por uma grade linear, discutir algumas características próprias do método, tendo em vista que o mesmo pode ser aplicado na solução do escoamento potencial em torno de corpos de formato arbitrário.

Sendo assim, considere na Figura 3.1 um corpo de formato arbitrário, sobre o qual se deseja conhecer o escoamento potencial devido a uma corrente inicial uniforme (W_∞). Segundo o método dos painéis, divide-se a superfície do corpo em n elementos de superfície, ou painéis, de forma genérica. Sobre cada painel j admite-se a existência de uma distribuição de singularidades (g_j) perturbando o escoamento ($j = 1, 2, \dots, n$). A forma

desta distribuição é fixada: uniforme, linear, etc. Admita-se que a mesma seja uniforme. Desta forma, a velocidade induzida num certo ponto do escoamento é dada pela soma das contribuições de cada painel, combinando-se linearmente as intensidades g_j .

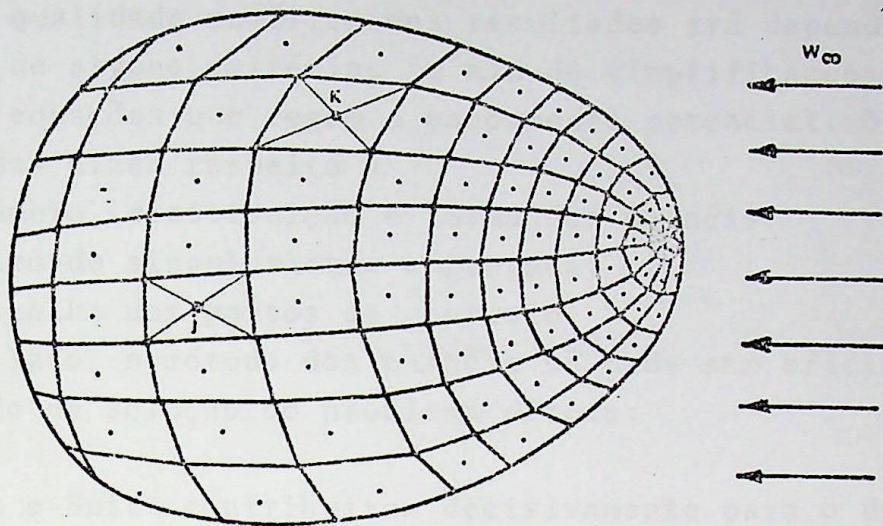


Figura 3.1. - Idéia do método dos painéis: aproximação do corpo por meio de elementos de superfície (painéis).

Se em cada painel k for escolhido um determinado ponto de controle k , a velocidade induzida nesse ponto devido ao conjunto de painéis j pode ser escrita na forma de

$$W_{p_k} = \sum_{j=1}^n A_{kj} g_j, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

onde A_{kj} são coeficientes numéricos que dependem do tipo de singularidade empregada, das distâncias entre os pontos de controle e da geometria do obstáculo, podendo ser calculados imediatamente quando se trata do problema direto.

Combinando a velocidade induzida no ponto de controle k , dada pela equação (3.1), com a velocidade do escoamento não perturbado W_∞ , e impondo a condição de contorno aos n pontos de controle, resulta um sistema de equações lineares $n \times n$, cujas incógnitas são os valores das distribuições de singularidades g_j . Resolvendo-se o sistema, determinam-se os valores g_j , podendo-se calcular diretamente as velocidades nos pontos de controle

através da equação (3.1). Em seguida, é possível determinar a pressão nos mesmos pontos, segundo a equação de Bernoulli.

As grandes vantagens do método dos painéis são a simplicidade conceitual e a facilidade de adaptação a casos bastantes gerais. Além do mais, o método pode ser considerado exato, uma vez que a qualidade numérica dos resultados irá depender apenas da adoção de alguns critérios e não de simplificações que se façam nas equações que regem o escoamento potencial. Os critérios citados dizem respeito a

- número, distribuição e forma dos painéis;
- tipo de singularidade empregada;
- escolha dos pontos de controle.

Por outro lado, o método dos painéis só pode ser eficientemente aplicado na solução do problema direto.

Hess e Smith contribuíram decisivamente para o desenvolvimento do método dos painéis. Na referência [15] apresentam um sumário da aplicação do método na solução do escoamento potencial para diversos casos de interesse: corpos tridimensionais, aerofólios, hidrofólios, grades axiais, entradas de ar, etc. O método de Hess e Smith, contudo, baseia-se em distribuições de fontes sobre o contorno.

Uma técnica de painéis, orientada para a utilização da formulação de Martensen [12], isto é, para a utilização de vórtices no contorno, foi desenvolvida por Mavriplis [17] visando à análise de escoamento potencial sobre corpos bidimensionais isolados ou segmentados. Nos itens seguintes, será mostrado como a técnica de Mavriplis pode ser aplicada no caso de grades lineares.

3.2. Campo de velocidades induzidas por uma grade linear segundo o método dos painéis

Neste item será apresentado o procedimento que se adotou, com base no método dos painéis, para o tratamento numérico de uma parte importante do problema formulado no capítulo anterior, ou seja, a determinação do campo de velocidades induzidas por uma grade linear de perfis aerodinâmicos.

Considere-se, na Figura 3.2, um certo perfil de referência ($p=0$) de uma grade linear infinita no plano z . O espaçamento entre os perfis é igual a uma constante t . Seguindo a sistemática do método dos painéis, são escolhidos $n+1$ pontos, incluindo o bordo de fuga, sobre o contorno deste perfil de referência ($p=0$), e um polígono de n lados - painéis - é formado pela união destes pontos. Cada painel j , definido pelos pontos extremos z_j e z_{j+1} ($j=1,2,\dots,n$), é considerado como suporte de uma distribuição uniforme de vórtices de sentido horário e de intensidade γ_j . Deve-se observar que a numeração adotada cresce no sentido em que o domínio interior do perfil fica sempre à direita. Considerando-se o mesmo procedimento em relação aos demais perfis ($p=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$), várias grades de painéis são formadas. Em cada painel do perfil de referência ($p=0$), toma-se o ponto médio z_{cj} - ponto de controle - para efeito da aplicação da condição de contorno a ser realizada posteriormente.

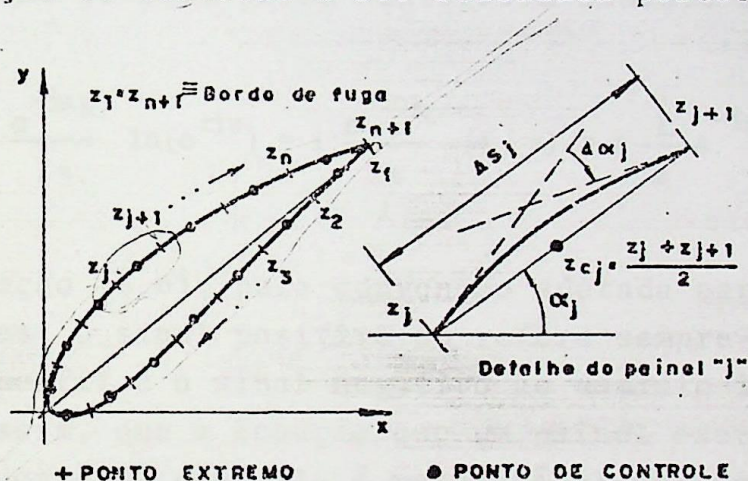


Figura 3.2. - Discretização em painéis de um perfil aerodinâmico da grade linear.

A velocidade complexa conjugada induzida pela grade de painéis j sobre o ponto de controle z_{ck} , conforme Giesing [16], é dada por

$$\bar{w}_{pj}(z_{ck}) = i \gamma_j \frac{e^{-i\alpha_j}}{2\pi} \ln \left\{ \frac{\sinh \left[\frac{\pi}{t} (z_{ck} - z_j) \right]}{\sinh \left[\frac{\pi}{t} (z_{ck} - z_{j+1}) \right]} \right\}. \quad (3.2)$$

Tomando o conjugado da equação (3.2), obtém-se, de uma forma resumida que

$$Wp_j(z_{ck}) = \bar{A}_{kj} \gamma_j \quad (3.3)$$

onde

$$A_{kj} = i \frac{e^{-i\alpha_j}}{2\pi} \ln \left\{ \frac{\sinh \left[\frac{\pi}{t} (z_{ck} - z_j) \right]}{\sinh \left[\frac{\pi}{t} (z_{ck} - z_{j+1}) \right]} \right\} \quad (3.4)$$

O coeficiente A_{kj} não é univocamente determinado para $k=j$, pois, neste caso, como $z_{ck} = (z_j + z_{j+1})/2$, a equação (3.4) fica

$$A_{kk} = i \frac{e^{-i\alpha_k}}{2\pi} \ln(-1) = i \frac{e^{-i\alpha_k}}{2\pi} \ln[e^{\pm i(2m+1)\pi}], \text{ com } m=0,1,2\dots \quad (3.5)$$

Para o problema físico, porém interessa somente o caso $m=0$, que fornece

$$A_{kk} = i \frac{e^{-i\alpha_k}}{2\pi} \ln(e^{\pm i\pi}) = i \frac{e^{-i\alpha_k}}{2\pi} (\pm i\pi) = \pm \frac{1}{2} e^{-i\alpha_k} \quad (3.6)$$

Na equação (3.6), pela convenção adotada para a numeração dos pontos, o sinal positivo se refere sempre ao domínio exterior ao perfil e o sinal negativo ao domínio interior. Verifica-se, assim, que a indução que um painel exerce sobre o seu próprio ponto de controle é responsável por uma descontinuidade no valor da velocidade e, portanto, no valor da pressão sobre o painel. Tal descontinuidade é uma característica de toda a distribuição de vórtices, e é a representação matemática do desequilíbrio que ocorre em problemas deste tipo.

Observa-se também que para os casos em que $j \neq k$, o valor de A_{kj} na equação (3.4) é univocamente determinado, não contribuindo para o efeito de descontinuidade.

A velocidade complexa total induzida pela grade linear sobre o ponto de controle z_{ck} é dada pela superposição das contribuições de todas as grades elementares, ou seja

$$W_p(z_{ck}) = \sum_{j=1}^n Wp_j(z_{ck}) = \sum_{j=1}^n \bar{A}_{kj} \gamma_j \quad (3.7)$$

Observa-se que a equação (3.7) fornece o valor de $W_p(z_{ck})$ em função dos valores de γ_j ; em princípio desconhecidos. A de terminação de γ_j só pode ser feita após a imposição da condi ção de contorno para o escoamento sobre os pontos de controle do perfil de referência, o que será feito a seguir.

3.3. Condição de contorno para o escoamento sobre os pontos de controle do perfil de referência

Para o ponto de controle z_{ck} , a velocidade total do escoamento pode ser definida em função das componentes tangencial e normal ao painel. Denominando-se a componente tangencial por $W_s(z_{ck})$, a componente normal por $W_n(z_{ck})$ e considerando a Figura 3.2, escreve-se que

$$W(z_{ck}) = \left[W_s(z_{ck}) + i W_n(z_{ck}) \right] e^{i\alpha k} \quad (3.8)$$

de onde obtêm-se

$$W_s(z_{ck}) = \text{Re} \left[e^{-i\alpha k} W(z_{ck}) \right] \quad (3.9.a)$$

$$W_n(z_{ck}) = \text{Im} \left[e^{-i\alpha k} W(z_{ck}) \right] \quad (3.9.b)$$

Conforme citado no capítulo anterior, a condição de con torno para o escoamento, quando se usa a formulação clássica de Martensen [12], é expressa pela imposição de que a componente tangencial da velocidade total no contorno interior do perfil seja nula. Aplicando-se esta condição de contorno, para o pon to de controle z_{ck} , em cada painel do perfil de referência, obtêm-se

$$W_s^-(z_{ck}) = \text{Re} \left[e^{-i\alpha k} W^-(z_{ck}) \right] = 0, \quad k=1,2,\dots,n \quad (3.10)$$

onde $W^-(z_{ck})$ é a velocidade complexa total do escoamento calculada sobre o contorno interior do perfil. Esta velocidade é ob tida pela superposição do escoamento básico W_∞ e do escoamento induzido $W_p^-(z_{ck})$. Assim, da equação (3.10), tem-se

$$\text{Re} \left\{ e^{-i\alpha k} \left[W_\infty + W_p^-(z_{ck}) \right] \right\} = 0, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (3.11)$$

É de interesse, neste trabalho, expressar a velocidade do escoamento básico W_∞ em função da velocidade de aproximação W_1 . Para isso, fazendo uso da equação (2.11) encontra-se

$$W_\infty = W_1 - i \frac{\Gamma_p}{2t} \quad (3.12)$$

A circulação ao redor do perfil, dada por

$$\Gamma_p = \oint_{(\kappa)} \gamma ds, \quad (3.13)$$

pode ser aproximada, no método dos painéis, pela expressão

$$\Gamma_p = \sum_{j=1}^n \gamma_j \Delta s_j \quad (3.14)$$

onde, $\Delta s_j = |z_{j+1} - z_j|$ é o comprimento do painel j no perfil de referência.

Substituindo as equações (3.7), (3.12) e (3.14) na equação (3.11) resulta que,

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha k} \left(W_1 - i \sum_{j=1}^n \gamma_j \frac{\Delta s_j}{2t} + \sum_{j=1}^n \gamma_j \bar{A}_{kj} \right) \right] = 0, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (3.15)$$

Reagrupando tem-se,

$$\sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha k} \left(\bar{A}_{kj}(z_{ck}) - i \frac{\Delta s_j}{2t} \right) \right] \gamma_j = -\operatorname{Re}(e^{-i\alpha k} W_1), \quad k=1,2,\dots,n. \quad (3.16)$$

Referindo-se à análise feita por Martensen [12] a respeito da existência de soluções para o tipo de equação integral de Fredholm de segunda espécie, da qual o sistema de equações lineares (3.16) é uma forma discretizada, verifica-se que uma solução única γ_j só pode ser obtida mediante uma condição suplementar sobre o campo de escoamento.

No presente trabalho, tal condição será representada pela adição arbitrária de uma constante κ , diferente de zero, no segundo membro da equação (3.16). Essa constante pode ser entendida como um erro uniforme necessariamente imposto sobre a

condição de contorno do problema, isto é, deve-se admitir que as velocidades no contorno interior do perfil não serão realmente nulas, mas iguais a um valor κ diferente de zero. Finalmente, o sistema de equações (3.16) é reescrito na seguinte forma compacta:

$$\sum_{j=1}^n B_{kj} \gamma_j = b_k \quad , \quad k=1,2,\dots,n \quad (3.17)$$

onde,

$$B_{kj} = \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\alpha_k} \left[\bar{A}_{kj}(z_{ck}) - i \frac{\Delta s_j}{2t} \right] \right\} \quad (3.18)$$

e

$$b_k = -\operatorname{Re} (e^{-i\alpha_k} W_1) + \kappa \quad (3.19)$$

Os coeficientes de influência B_{kj} dependem apenas da geometria da grade. É importante salientar que, no caso $j=k$, a expressão do coeficiente de influência fica

$$B_{kk} = -\frac{1}{2} - \operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha_k} \left(i \frac{\Delta s_k}{2t} \right) \right] \quad (3.20)$$

O sinal negativo no termo $1/2$ do segundo membro decorre da equação (3.6), quando se considera o domínio interior do perfil, conforme se exige na condição de contorno.

3.4. Correção devido à curvatura do perfil

Pela aplicação do método dos painéis, o perfil aerodinâmico é aproximado por um polígono formado por painéis. Neste trabalho, utilizam-se painéis retos, que são suportes de uma distribuição uniforme de singularidades. Para incrementar a precisão dos resultados, para um mesmo número e distribuição de painéis, podem-se usar painéis curvos e/ou distribuições de singularidades de ordem mais alta. Porém, uma alternativa simples e eficiente, é a introdução de uma correção para levar em conta o efeito da curvatura do perfil, como sugerem os trabalhos de Wilkinson [32], Lewis [33] e Mavriplis [17]. Essa correção, adotada neste trabalho é feita nos coeficientes de influência B_{kk} ,



alterando a equação (3.20) para

$$B_{kk} = -\frac{1}{2} - \operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha_k} \left(i \frac{\Delta s_k}{2t} \right) \right] \pm \frac{|\Delta\alpha_k|}{4\pi}, \quad k=1,2,\dots,n \quad (3.21)$$

onde $\Delta\alpha_k$ é o ângulo de curvatura subtendido pelo perfil entre os pontos extremos do painel k (vide Figura 3.2). O sinal positivo é para um elemento convexo e o negativo para um elemento côncavo.

No procedimento numérico elaborado no presente trabalho, o cálculo de $\Delta\alpha_k$ é efetuado, de maneira aproximada, a partir de uma interpolação quadrática entre as inclinações dos painéis $k-1$, k e $k+1$. Para os painéis $k=1$ e $k=n$ as correções correspondentes são efetuadas por meio de uma extrapolação linear das correções adjacentes. Dessa forma, o cálculo dos coeficientes de influência B_{kj} fica na dependência exclusiva dos pontos extremos z_k ($k=1,2,\dots,n,n+1$, com $z_1 = z_{n+1}$) dos painéis.

No apêndice B, ao se analisar o comportamento dos núcleos das equações integrais de Fredholm, referentes ao problema tratado neste trabalho, constata-se a validade do termo de correção $|\Delta\alpha_k|/4\pi$ na equação (3.21).

3.5. Solução do sistema de equações lineares

A formulação apresentada nos itens anteriores mostra que dada a geometria de uma certa grade linear, isto é, formato do perfil e espaçamento t , o escoamento potencial referente a esta geometria, para uma dada condição de escoamento de aproximação W_1 , pode ser determinado através da solução do sistema de equações (3.17), submetido a uma condição suplementar conveniente. Em outras palavras, com os coeficientes de influência B_{kj} e os valores b_k do vetor segundo membro determinados, temos n equações (3.17) que, juntamente com a condição suplementar (admitida como uma combinação linear dos γ_j), formam um sistema de $n+1$ equações lineares algébricas nas $n+1$ incógnitas $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ e κ .

Para evitar a solução repetida do sistema de equações pa

ra cada situação de escoamento W_1 , que se deseje analisar no caso de uma mesma geometria de grade, é conveniente determinar certas soluções básicas do sistema de equações (3.17) e escrever a solução genérica como uma superposição dessas soluções. Conforme a sugestão de Mavriplis [17], serão utilizadas, neste trabalho, as três soluções básicas seguintes:

1) escoamento com ângulo de ataque zero grau dado por:

$$\beta_1 = 0^\circ, |W_1| = 1, \kappa = 0. \quad (3.22.a)$$

2) escoamento com ângulo de ataque noventa graus dado por:

$$\beta_1 = 90^\circ, |W_1| = 1, \kappa = 0. \quad (3.22.b)$$

3) escoamento puramente circulatório dado por:

$$|W_1| = 0, \kappa = -1/2. \quad (3.22.c)$$

A distribuição de vórtices total γ_j , que é igual à própria velocidade tangencial no contorno externo, será obtida, para qualquer escoamento, pela combinação linear das três soluções básicas escolhidas. Portanto,

$$\gamma_j = |W_1| \cos \beta_1 \gamma_j^0 + |W_1| \sin \beta_1 \gamma_j^{90} + c_t \gamma_j^\Gamma. \quad (3.23)$$

Neste ponto, introduz-se a condição suplementar já referida, ficando a constante c_t determinada. No caso de perfis aerodinâmicos, em geral se aplica a condição de Kutta, exigindo-se que as velocidades no bordo de fuga sejam finitas e contínuas. No contexto deste trabalho, a condição de Kutta assume a seguinte forma:

$$\gamma_n = -\gamma_1. \quad (3.24)$$

Com a condição (3.24) e a equação (3.23) obtém-se a constante c_t ,

$$c_t = - \frac{|W_1| \left[(\gamma_1^0 + \gamma_n^0) \cos \beta_1 + (\gamma_1^{90} + \gamma_n^{90}) \sin \beta_1 \right]}{\gamma_1^\Gamma + \gamma_n^\Gamma}. \quad (3.25)$$

Determinada a constante c_t , pode-se calcular a intensidade total da distribuição de vórtices γ_k , através de (3.23), e, conseqüentemente, a velocidade no contorno externo, pois

$$W_S^+(z_{ck}) = \gamma_k, \quad k=1,2,\dots,n, \quad (3.26)$$

ou seja, a velocidade do escoamento sobre o perfil, W_S^+ , é igual à própria intensidade de vórtices, γ , conforme já discutido no capítulo anterior. Com isso, determinada a intensidade da distribuição de vórtices, obtém-se, diretamente, a distribuição de velocidades sobre o perfil.

3.6. Cálculo da distribuição de pressões

Uma vez determinada a distribuição de velocidades no contorno do perfil, tem-se interesse em determinar a distribuição de pressões correspondentes. Aplicando a equação de Bernoulli entre um ponto sobre o perfil e um ponto de referência qualquer pode-se escrever para o escoamento potencial e incompressível que,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} = \frac{p_r}{\rho} + \frac{W_r^2}{2} \quad (3.27)$$

onde, p e W são, respectivamente, a pressão e a velocidade em um ponto sobre o perfil, p_r e W_r são, respectivamente, a pressão e a velocidade de referência, por exemplo, no escoamento não perturbado anterior à grade, e ρ é a massa específica do fluido em escoamento.

Usando a equação (3.27), define-se o seguinte coeficiente de pressão

$$C_{Pr} = \frac{p - p_r}{\frac{\rho W_r^2}{2}} = 1 - \left(\frac{W}{W_r} \right)^2 \quad (3.28)$$

Para o ponto de controle z_{ck} , sabendo-se que $W(z_{ck}) = \gamma_k$, obtém-se

$$C_{Pr}(z_{ck}) = 1 - \left(\frac{\gamma_k}{W_r} \right)^2, \quad k=1,2,\dots,n \quad (3.29)$$

Pelo cálculo dos coeficientes de pressão em todos os pontos do perfil de referência, determina-se a distribuição de pressões ao redor do mesmo.

3.7. Cálculo da circulação e do coeficiente de sustentação

A circulação ao redor do perfil pode ser calculada pela equação (3.14), ou seja,

$$\Gamma_p = \sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta s_k \quad . \quad (3.14)$$

Do teorema de Kutta - Joukowski, a força de sustentação para um perfil aerodinâmico é dada por

$$F_s = \rho W_\infty \Gamma_p \quad . \quad (3.30)$$

Pode-se definir, com relação a um escoamento de referência, um coeficiente de sustentação expresso por

$$C_s = \frac{F_s}{\frac{1}{2} \rho W_r^2 l} = \frac{2 \Gamma_p W_\infty}{W_r^2 l} \quad (3.31)$$

onde W_r é a velocidade do escoamento de referência, por exemplo, do escoamento de aproximação e l é a corda do perfil.

3.8. Cálculo da velocidade de saída do escoamento

Quando o caso em estudo refere-se à grade, torna-se importante conhecer o desvio que a mesma causa no escoamento. Nestes casos, normalmente, a velocidade de aproximação do escoamento é conhecida, podendo-se daí determinar a velocidade de saída do escoamento pelas equações (2.11) e (2.12):

$$W_2 = W_1 - i \frac{\Gamma_p}{t} \quad . \quad (3.32)$$

Com isso, pode-se calcular o ângulo de saída do escoamento, com relação ao eixo x , por

$$\beta_2 = \text{arc tg} \left[\frac{\text{Im}(W_2)}{\text{Re}(W_2)} \right] \quad (3.33)$$

3.9. Solução numérica para perfis aerodinâmicos isolados

Por ser o perfil aerodinâmico isolado um caso particular do perfil aerodinâmico em grade linear, todo desenvolvimento feito neste capítulo também é válido para o caso de perfil isolado. Deve-se, porém, modificar o coeficiente A_{kj} para:

$$A_{kj} = i \frac{e^{-i\alpha_j}}{2\pi} \ln \left(\frac{z_{ck} - z_j}{z_{ck} - z_{j+1}} \right) \quad (3.34)$$

Este coeficiente A_{kj} também não é univocamente determinado para $k = j$, fornecendo, para o caso de interesse do problema físico

$$A_{kk} = \pm \frac{1}{2} e^{-i\alpha_k} \quad , \quad (3.35)$$

expressão idêntica à obtida para o caso de grades lineares, equação (3.6). Este fato é natural, já que o efeito de descontinuidade é próprio do perfil isolado. Cabe ainda lembrar que, neste caso,

$$W_1 = W_2 = W_\infty \quad , \quad (3.36)$$

ou seja, não há desvio no escoamento.

Com essas alterações, é possível obter-se a solução do escoamento potencial em perfis aerodinâmicos isolados, através do procedimento descrito nos itens anteriores para o caso de grades lineares.

3.10. Solução numérica para grades circulares fixas

Conforme mostrado no capítulo anterior, o cálculo do escoamento no plano da grade circular fixa pode ser feito no plano da grade linear, usando a transformação conforme introduzida por König [31].

Uma vez conhecidas as velocidades complexas conjugadas no plano da grade linear segundo a equação (3.23), é simples determinar as velocidades correspondentes no plano da grade cir

cular aplicando a equação (2.35), isto é,

$$\bar{W}_\chi(z_{ck}) = \bar{W}_z(z_{ck}) \frac{N}{2\pi \chi(z_{ck})}, \quad k=1,2,\dots,n, \quad (3.37)$$

onde χ é o plano da grade circular e z é o plano da grade linear, e da equação (2.33) tem-se,

$$\chi(z_{ck}) = r_1 \exp\left(\frac{2\pi}{N} \cdot z_{ck}\right). \quad (3.38)$$

A partir disso, outras características aerodinâmicas, tal como a distribuição de pressões, são facilmente obtidas.

3.11. Algumas características dos programas computacionais

A solução numérica desenvolvida neste capítulo possibilita o cálculo das características aerodinâmicas decorrentes do escoamento potencial em torno de perfis aerodinâmicos isolados ou em grades. Pela utilização do método dos painéis o problema foi colocado na forma de um sistema de equações lineares algébricas, cujas incógnitas são as intensidades da distribuição de vórtices.

O equacionamento efetuado segundo o método dos painéis facilita a implantação de uma rotina computacional para a solução do escoamento. Assim, foram elaborados programas computacionais em linguagem FORTRAN para o computador HP-3000, visando a solução automática do problema, bastando para isso fornecer a geometria do perfil e/ou da grade de maneira conveniente.

No programa computacional elaborado para a solução do problema direto em grades lineares, a geometria da grade deve ser fornecida através dos pares de valores (x_j, y_j) , que formam os números complexos $z_j = x_j + iy_j$ representativos dos pontos extremos dos painéis no perfil de referência, e do ângulo da grade β , com relação ao eixo x . Deve-se, também, fornecer o ângulo de aproximação do escoamento, com relação ao eixo x . Uma restrição de desempenho, dada nela condição de Kutta, está imposta no corpo do programa.

Sabe-se que a solução do problema fica condicionada à

solução do sistema de equações lineares (3.17), que fornecerá as intensidades γ_j da distribuição de vórtices. Inicialmente é feita a montagem da matriz de coeficientes (3.18) do sistema de equações, e dos vetores segundo membro (3.19), para os três escoamentos básicos dados pelas condições (3.22), sendo todos os cálculos necessários efetuados diretamente através da álgebra complexa do computador.

As soluções básicas do sistema de equações lineares (3.17) são obtidas pelo uso de uma subrotina computacional que utiliza o método de eliminação de Gauss. Essa subrotina de nome SOLVER pode ser encontrada na referência [34]. Determinadas as três soluções básicas, calcula-se a distribuição de vórtices total γ_j , para qualquer condição de escoamento, através da equação (3.23).

Uma vez determinada a distribuição de vórtices total, os cálculos das outras características aerodinâmicas de interesse são facilmente efetuados. Por exemplo, a distribuição de pressões é obtida pela equação (3.29), o coeficiente de sustentação pela equação (3.31) e o ângulo de saída do escoamento pela equação (3.33).



CAPÍTULO 4 - RESULTADOS NUMÉRICOS

O objetivo principal deste capítulo é demonstrar a validade da técnica desenvolvida neste trabalho como ferramenta útil na análise do escoamento potencial em perfis aerodinâmicos isolados e em grades de turbomáquinas. Utilizando os programas computacionais elaborados, são obtidos resultados numéricos de características aerodinâmicas, tais como: distribuição de velocidades, distribuição de pressões, coeficiente de sustentação, desvio no escoamento provocado pela grade. Esses resultados serão apresentados a seguir em comparação com resultados teóricos e experimentais encontrados na literatura. Salvo observação em contrário, a correção devido à curvatura do perfil, discutida no item 3.4, foi aplicada na obtenção de todos os resultados do presente método.

4.1. Distribuição de pressões em perfil isolado, comparada com o método de Jacob e Riegels (vórtices)

Como um teste preliminar, na Figura 4.1, a distribuição de pressões calculada pelo presente método está comparada com os resultados numéricos de Jacob e Riegels [13], no caso de um perfil isolado, obtidos, também, por uma formulação semelhante a de Martensen [12], ou seja, baseada em distribuições de vórtices sobre o contorno do perfil. Observa-se uma boa concordância entre os resultados ao longo de todo o perfil. Os resultados obtidos para o coeficiente de sustentação também apresentam uma boa concordância.

4.2. Distribuição de pressões em grades lineares, comparada com o método de Hess e Smith (fontes)

Na Figura 4.2, a distribuição de pressões sobre um perfil em grade linear, calculada pelo presente método, está comparada com os resultados numéricos apresentados por Giesing [16] e calculados pelo método de Hess e Smith [15], que se baseia em distribuições de fontes sobre o contorno dos perfis. Novamente a concordância entre os resultados é satisfatória, com pequenas discordâncias nas regiões do bordo de fuga e do lado de sucção

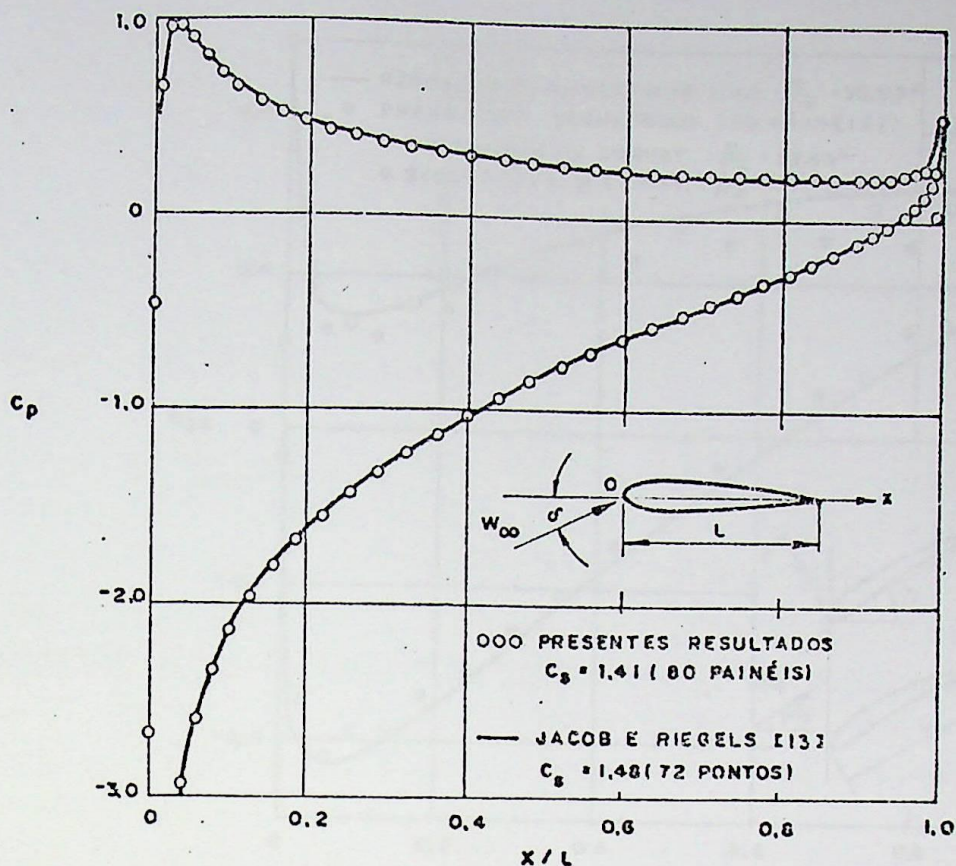


Figura 4.1 - Distribuição de pressões sobre o perfil NACA 2412, isolado ($t/l \rightarrow \infty$), $\delta = 10^\circ$, $C_p = 1 - (W/W_\infty)^2$.

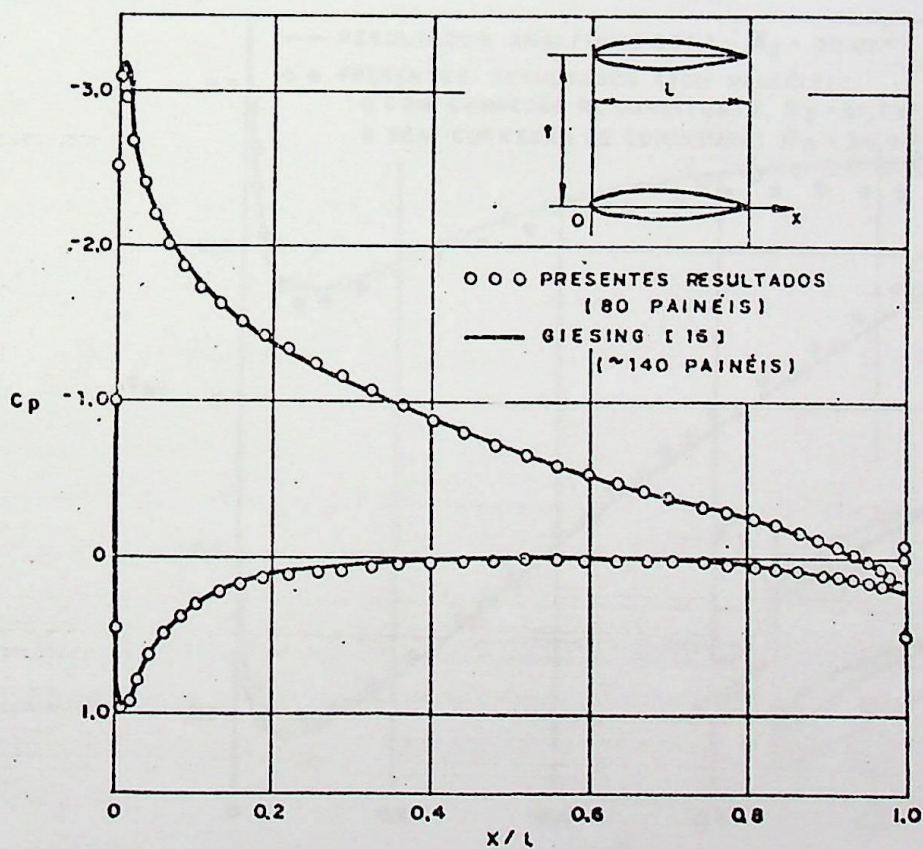


Figura 4.2 - Distribuição de pressões sobre o perfil NACA 4412, em grade linear: $\beta = 0^\circ$, $t/l = 0,968$, $C_s = 1,0$, $C_p = 1 - (W/W_\infty)^2$.

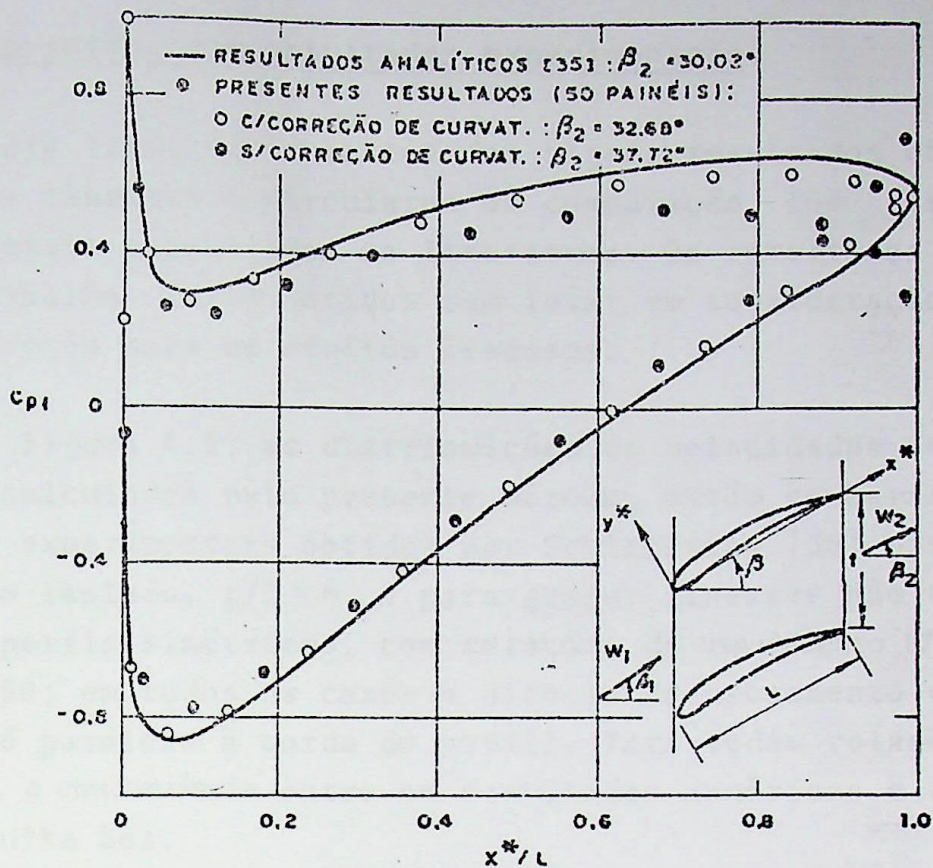


Figura 4.3 - Distribuição de pressões para o perfil analítico grade linear: $\beta=37,5^\circ$, $\beta_1=53,5^\circ$, $t/l=0,9901573$, $C_{p1}=1-(W/W_1)$

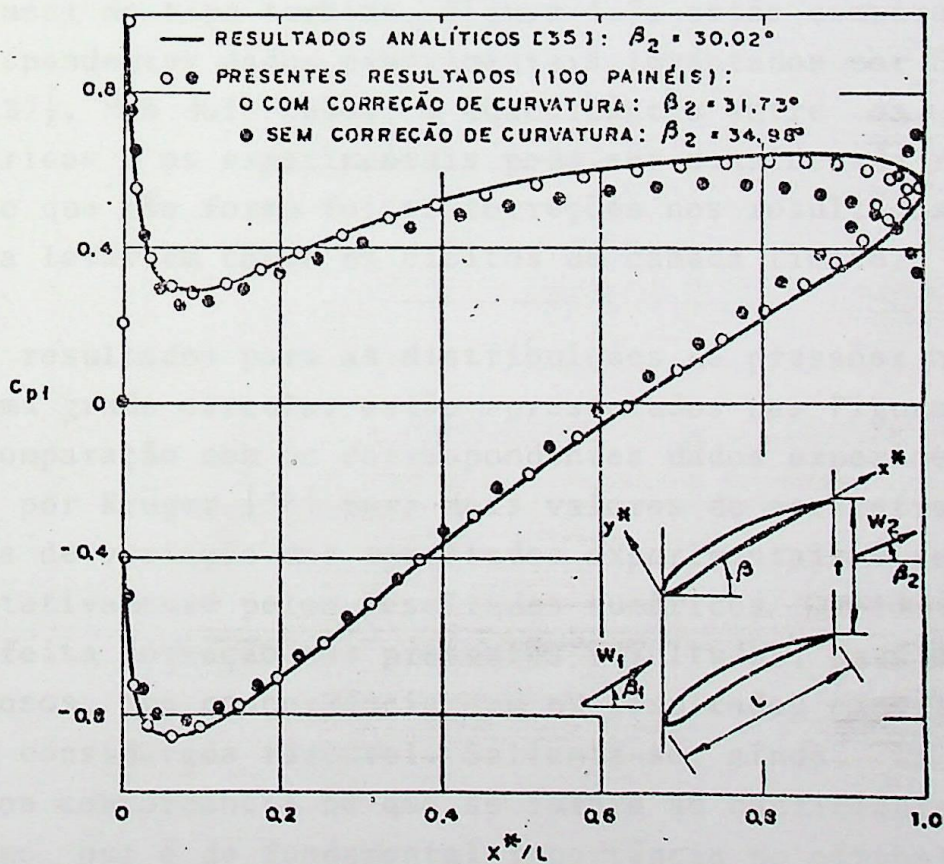


Figura 4.4 - Distribuição de pressões para o perfil analítico grade linear: $\beta=37,5^\circ$, $\beta_1=53,5^\circ$, $t/l=0,9901573$, $C_{p1}=1-(W/W_1)$

4.4. Comparações com resultados experimentais.

Neste item, são apresentados alguns resultados obtidos para grades lineares e circulares em comparação com resultados experimentais encontrados na literatura. Os resultados do presente trabalho foram obtidos sem levar em consideração qualquer correção para os efeitos viscosos.

Na Figura 4.5, as distribuições de velocidades sobre o perfis, calculadas pelo presente método, estão comparadas com os dados experimentais obtidos por Schlichting [36] para perfil simétrico isolado, $t/l = \infty$, e para grades lineares não escalonadas, de perfis simétricos, com relações de espaçamento $t/l = 1,0, 0,75, 0,50$; em todos os casos a direção do escoamento de aproximação é paralela à corda do perfil. Para todas relações de espaçamento, a concordância entre os resultados numéricos e experimentais é muito boa.

Os resultados para as distribuições de pressões nos perfis de uma grade linear do tipo compressor, Figura 4.6, e de uma grade linear do tipo turbina, Figura 4.7, estão comparados com os correspondentes dados experimentais levantados por Speidel Scholz [37]. Nos dois casos, a concordância entre os resultados numéricos e os experimentais pode ser considerada razoável lembrando que não foram feitas correções nos resultados numéricos, para levar em conta os efeitos de camada limite.

Os resultados para as distribuições de pressões nos perfis de uma grade circular estão apresentados nas Figuras 4.8 e 4.9 em comparação com os correspondentes dados experimentais publicados por Krüger [38] para dois valores do parâmetro Γ/Q . A tendência de variação dos resultados experimentais é reproduzida qualitativamente pelos resultados numéricos. Considerando que não foi feita correção nos presentes resultados, para os efeitos viscosos, sua concordância com os resultados experimentais pode ser considerada razoável. Salienta-se, ainda, na Figura 4.9, a boa concordância no que se refere ao coeficiente de pressão mínimo, que é de fundamental importância no estabelecimento de critérios de projeto de turbomáquinas.

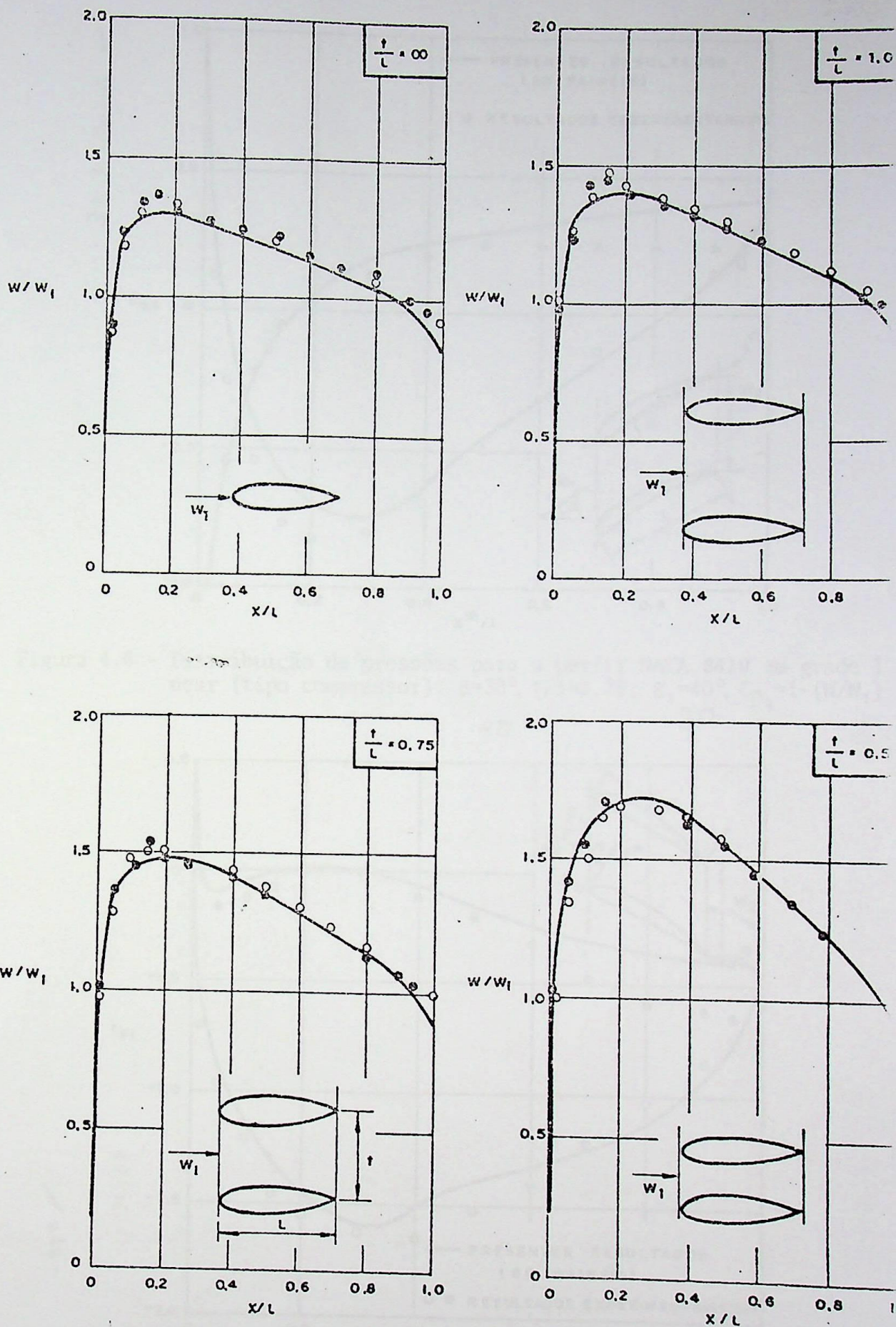


Figura 4.5 - Distribuição de velocidades para o perfil NACA 0020 isolado em grade linear: $\beta=0^\circ$, $\beta_1=0^\circ$. Comparação entre os presentes resultados (—) e resultados experimentais [36] (o •)

31,3 Δ

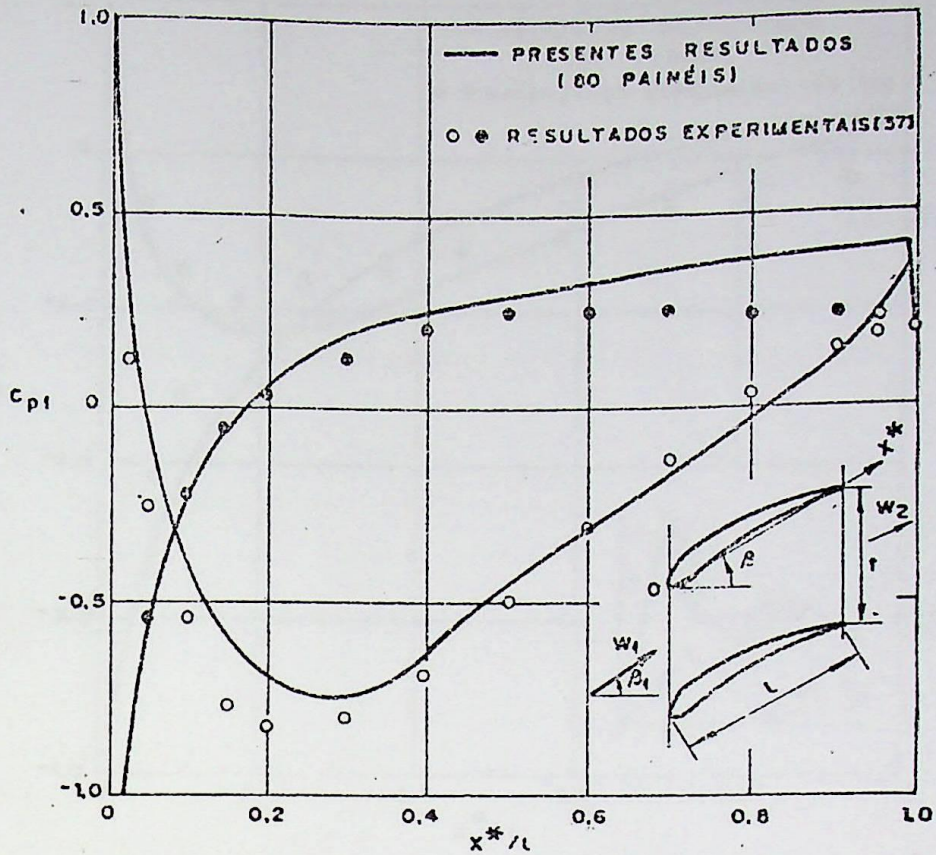


Figura 4.6 - Distribuição de pressões para o perfil NACA 8410 em grade 1 near (tipo compressor): $\beta=30^\circ$, $t/l=0,75$, $\beta_1=40^\circ$, $C_{p1}=1-(W/W_1)$

40

30

$$W_{cr} = \frac{W_1 + W_2}{2}$$

-31°
= 30,07

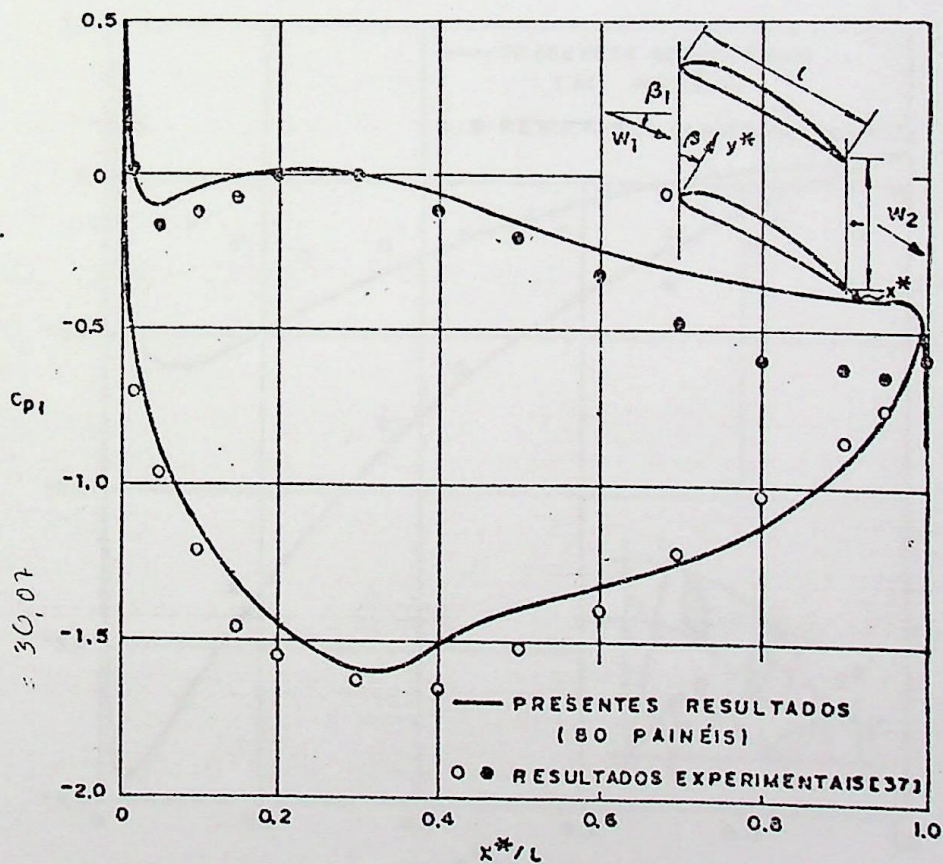


Figura 4.7 - Distribuição de pressões para o perfil NACA 8410 em grade 1: near (tipo turbina): $\beta=-30^\circ$, $t/l=0,75$, $\beta_1=-15^\circ$, $C_{p1}=1-(W/W_1)^2$

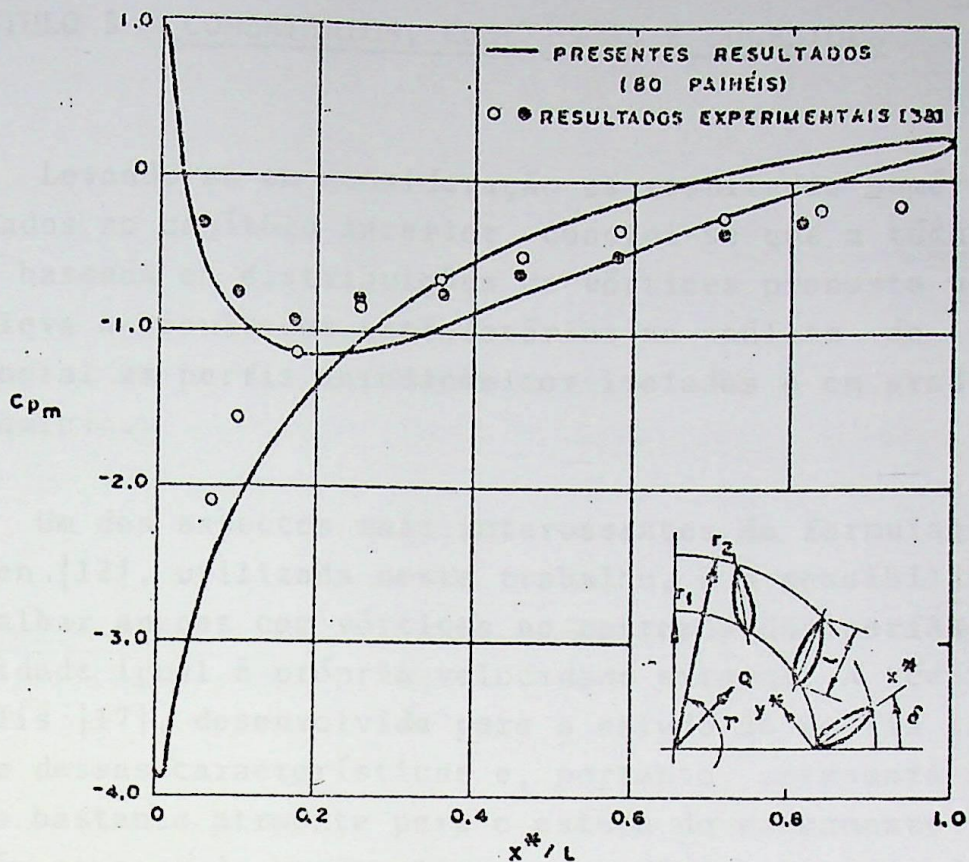


Figura 4.8 - Distribuição de pressões para o perfil Joukowski simétrico e grade circular: $y^*/l = \pm 0,052$ em $x^*/l = 0,31$, $\delta = 36,88^\circ$, $r_1/r_2 = 0,6$, $N = 12$, $\Gamma/Q = 0,46$, em $r_m = \sqrt{r_1 r_2}$: $W_m = Q/2\pi r_m$ e $C_{pm} = 1 - (W/W_m)^2$

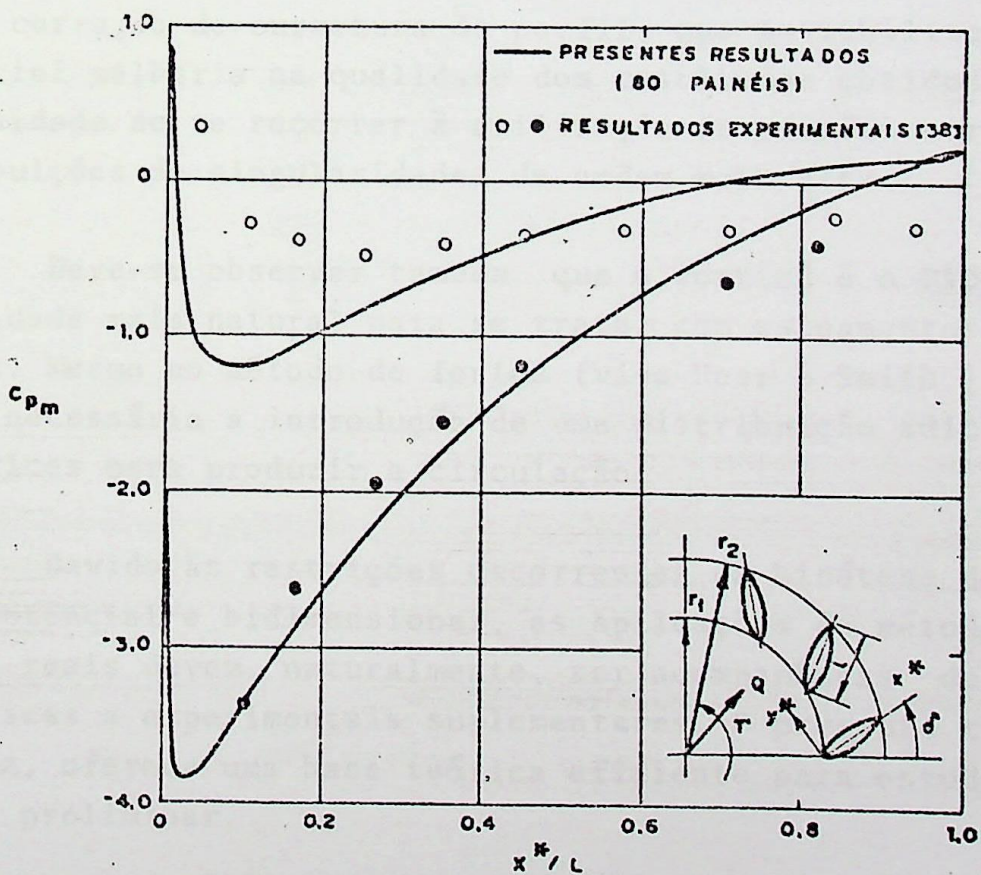


Figura 4.9 - Idem Figura 4.8, com $\Gamma/Q = 0,86$.

CAPÍTULO 5 - COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Levando-se em consideração os resultados numéricos apresentados no capítulo anterior, conclui-se que a técnica de painéis baseada em distribuições de vórtices proposta neste trabalho leva a resultados satisfatórios na análise do escoamento potencial em perfis aerodinâmicos isolados e em grades de turbomáquinas.

Um dos aspectos mais interessantes da formulação de Maitzen [12], utilizada neste trabalho, é a possibilidade de trabalhar apenas com vórtices no contorno dos perfis, com intensidade igual à própria velocidade externa. A técnica de Maitzen [17], desenvolvida para o estudo de perfis isolados, deve-se a essas características e, portanto, apresenta-se como uma opção bastante atraente para o estudo do escoamento potencial também no caso de grades lineares e circulares, conforme demonstram os resultados já apresentados neste trabalho.

Um dos atrativos da técnica descrita no presente trabalho é a correção de curvatura do perfil, que possibilita uma substancial melhoria na qualidade dos resultados obtidos, sem a necessidade de se recorrer à utilização de painéis curvos ou distribuições de singularidades de ordem mais alta.

Deve-se observar também que o vórtice é o tipo de singularidade mais natural para se tratar com escoamentos circulares. Mesmo no método de fontes (vide Hess e Smith [15]) torna-se necessária a introdução de uma distribuição adicional de vórtices para produzir a circulação.

Devido às restrições decorrentes da hipótese de escoamento potencial e bidimensional, as aplicações do método às situações reais devem, naturalmente, ser acompanhadas de análises teóricas e experimentais suplementares. O presente trabalho, portanto, oferece uma base teórica eficiente para estudos de natureza preliminar.

Algumas sugestões de trabalhos futuros podem ser apresentadas.

tadas. Uma delas seria a simples extensão deste trabalho para o caso de grades circulares móveis, pois o efeito da rotação da grade pode ser introduzido, facilmente, na formulação aqui proposta.

Uma outra pesquisa que pode ser realizada, refere-se a estudo do escoamento quasi-tridimensional em turbomáquinas, conforme a linha de Nyiri [26] e Eremeev [27], também baseada na formulação de Martensen [12]. A idéia seria estender a presente técnica de painéis para abordar este problema.

Outra possibilidade que se apresenta, é o estudo de estgios de turbomáquinas e grades em "tandem", onde os efeitos recíprocos entre grades móveis e fixas podem ser levados em conta.

Em determinadas situações, a distribuição potencial de velocidades sobre o perfil de uma grade aproxima-se bem da distribuição real. Nessas situações, torna-se possível empreender um estudo dos fenômenos viscosos oriundos do desenvolvimento da camada limite, tais como perdas e atrito. Um estudo nesse sentido é, portanto, de grande interesse na previsão de geometrias de turbomáquinas que conduzam a determinadas características aerodinâmicas com a máxima eficiência. A técnica apresentada no presente trabalho pode ser utilizada como ponto de partida para este estudo, fornecendo as distribuições potenciais necessárias.

Finalmente, tendo como motivação a necessidade de se verificar, ajustar e limitar a validade de todos os estudos sugeridos neste trabalho, faz-se necessária a realização de estudos experimentais sistemáticos do escoamento em grades de turbomáquinas.

APÊNDICE A - DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADES DO ESCOAMENTO POTENCIAL EM GRADES LINEARES

Considere-se a Figura A.1, onde está representado um esquema de uma grade linear infinita no plano $z = x + iy$ com espaçamento t entre os perfis aerodinâmicos de corda l , disposto com um ângulo β em relação ao eixo x , bem como as velocidades do escoamento.

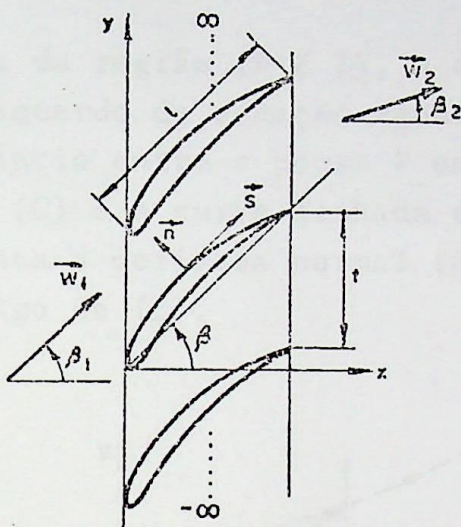


Figura A.1 - Esquema de uma grade linear.

O campo de velocidades do escoamento potencial em grade lineares deriva de um potencial ϕ que verifica a equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (\text{A.1})$$

Da Figura A.2, as condições de contorno para o potencial de velocidade são:

$$\text{infinito \tilde{a} montante: } \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=-\infty} = W_{1x}, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{x=-\infty} = W_{1y}; \quad (\text{A.2.a})$$

$$\text{infinito \tilde{a} jusante: } \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=+\infty} = W_{2x}, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{x=+\infty} = W_{2y}; \quad (\text{A.2.b})$$

$$\text{contorno do perfil } (\kappa): \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{(\kappa)} = W_n \Big|_{(\kappa)} = 0. \quad (\text{A.2.c})$$

A solução da equação (A.1) satisfazendo as condições de contorno \hat{e} determinada pelo teorema integral de Green, no ponto interior (P) de um domínio simplesmente conexo (T), mostrado na Figura A.2, por

$$\left. \begin{array}{l} P \in T: 2\pi \phi(P) \\ P \notin T: 0 \end{array} \right\} = \oint_{(C)} \ln d \frac{\partial \phi}{\partial n'} ds' - \oint_{(C)} \phi \frac{\partial}{\partial n'} (\ln d) ds'. \quad (\text{A.3})$$

Para um ponto fora da região ($P \notin T$), o acima mencionado \hat{e} válido com o lado esquerdo da equação igual a zero. Na equação (A.3), d \hat{e} a distância entre o ponto P em consideração e o ponto de integração, (C) \hat{e} a curva fechada de contorno da região (T), $\partial/\partial n$ representa a derivada normal interior \hat{a} curva (C) s \hat{e} a linha ao longo de (C).

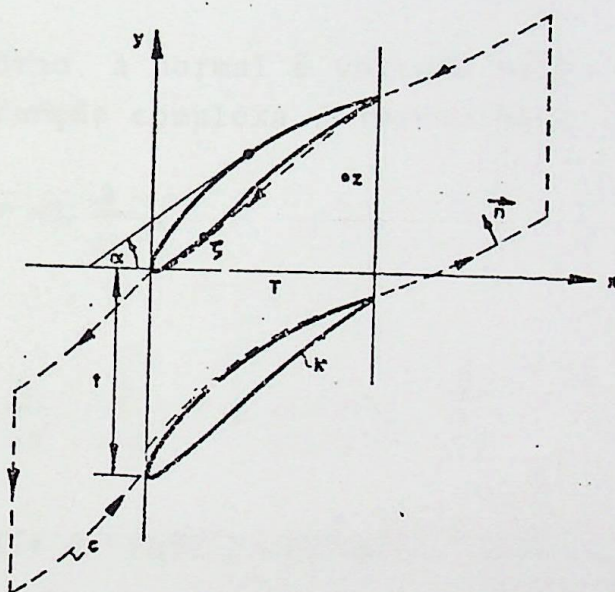


Figura A.2 - Representação do domínio (T) limitado pela curva fechada (C) na grade linear.

Pela diferenciação da equação (A.3) com relação primeiro a x e depois a y obtêm-se

$$\left. \begin{array}{l} P \in T: 2\pi W_x(P) \\ P \notin T: 0 \end{array} \right\} = \oint_{(C)} \frac{x-x'}{d^2} \frac{\partial \phi}{\partial n'} ds' - \oint_{(C)} \phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{x-x'}{d^2} \right) ds' , \quad (A.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} P \in T: 2\pi W_y(P) \\ P \notin T: 0 \end{array} \right\} = \oint_{(C)} \frac{y-y'}{d^2} \frac{\partial \phi}{\partial n'} ds' - \oint_{(C)} \phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{y-y'}{d^2} \right) ds' . \quad (A.5)$$

As coordenadas complexas no ponto P no plano z são $z = x + iy$, as coordenadas do ponto de integração são $\zeta' = \xi' + i\eta'$. Com as derivadas do potencial de velocidade, a velocidade complexa conjugada é

$$\bar{W}(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = W_x - i W_y \quad (A.6)$$

e, portanto, as equações (A.4) e (A.5) podem ser resumidas na seguinte forma complexa:

$$\left. \begin{array}{l} P \in T: 2\pi \bar{W}(z) \\ P \notin T: 0 \end{array} \right\} = \oint_{(C)} \frac{\partial \phi}{\partial n'} \frac{ds'}{z-\zeta'} - \oint_{(C)} \phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{z-\zeta'} \right) ds' . \quad (A.7)$$

Sobre o contorno, a normal é voltada para o interior da região e para uma função complexa diferenciável vale:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial n} = -i \frac{\partial}{\partial n} , \quad (A.8)$$

e com isto

$$\frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{z-\zeta'} = i \frac{\partial}{\partial s'} \frac{1}{z-\zeta'} = i \frac{1}{(z-\zeta')^2} \frac{d\zeta'}{ds'} . \quad (A.9)$$

Na equação (A.7) para a segunda integral tem-se

$$\begin{aligned} \oint_{(C)} \phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{z-\zeta'} \right) ds' &= i \oint_{(C)} \frac{\phi}{(z-\zeta')^2} \frac{d\zeta'}{ds'} ds' = \\ &= i \frac{\phi}{z-\zeta'} \Big|_{s=0}^L - i \oint_{(C)} \frac{\partial \phi}{\partial s'} \frac{ds'}{z-\zeta'} \end{aligned} \quad (A.10)$$

onde L é o comprimento da curva (C). A curva fechada (C) é o contorno de uma região simplesmente conexa (T), onde ϕ é uma função unívoca, dessa forma o primeiro membro da direita da

equação (A.10) é nulo. Disto, e com as equações (A.10) e (A.7) resulta:

$$\left. \begin{array}{l} P \in T: 2\pi \bar{W}(z) \\ P \notin T: 0 \end{array} \right\} = \oint_{(C)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n'} + i \frac{\partial \phi}{\partial s'} \right) \frac{ds'}{z-\zeta'} \quad (A.11)$$

Sobre o contorno, pode-se escrever

$$\bar{W}(\zeta) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} - i \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) e^{-i\alpha} \quad (A.12)$$

e além disso

$$d\zeta = e^{i\alpha} ds \quad (A.13)$$

portanto

$$i \oint_{(C)} \bar{W}(\zeta') \frac{d\zeta'}{z-\zeta'} = \begin{cases} 2\pi \bar{W}(z) & , \text{ se } z \in T \\ 0 & , \text{ se } z \notin T \end{cases} \quad (A.14)$$

A grade linear infinita pode ser considerada como uma série infinita de perfis aerodinâmicos cercados por uma série de regiões T_μ conformes com a região T , como mostra a Figura A.3. Nestas regiões as configurações do escoamento estão em conformidade, portanto as funções potencial e suas derivadas são funções periódicas, com a periodicidade it.

Para eliminar a integração sobre a curva (C) nas seções em comum com as regiões vizinhas, escreve-se para o ponto $z \in T$

$$0 = i \oint_{(C_\mu)} \bar{W}(\zeta'_\mu) \frac{d\zeta'_\mu}{z-\zeta'_\mu} \quad , \quad \mu = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (A.15)$$

sendo que $z \notin T_\mu$.

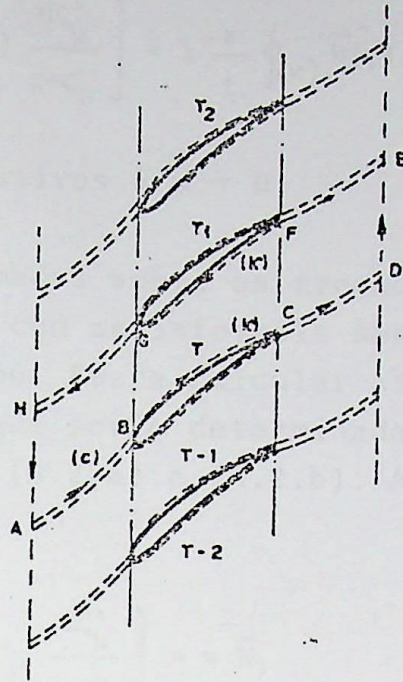


Figura A.3 - Representação dos domínios (T_μ) limitados pelas curvas fechadas (C_μ) na grade linear.

O somatório para todos μ resulta:

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \left[i \oint_{(C_\mu)} \bar{W}(\zeta'_\mu) \frac{d\zeta'_\mu}{z-\zeta'_\mu} \right] = \begin{cases} 2\pi \bar{W}(z) , & z \in T \\ 0 , & z \notin T \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Observa-se, na referência [29], que o somatório representado na equação (A.16) corresponde ao desenvolvimento em série da função $\text{cotgh} [\pi/t (z-\zeta')]$, ou seja,

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-\zeta'_\mu} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-\zeta'+i\mu t} = \frac{\pi}{t} \text{cotgh} \frac{\pi}{t} (z-\zeta') , \quad (\text{A.17})$$

onde ζ' é relativo a $\mu = 0$.

A curva fechada (C_μ) pode ser discretizada como mostra a Figura A.3, assim, a integral sobre (C_μ) da equação (A.16) pode ser determinada pela soma das integrais sobre cada trecho discretizado. Dessa forma, usando-se a equação (A.17), a integral sobre o contorno do perfil (κ_μ) é escrita por

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \left[i \oint_{(\kappa_{\mu})} \bar{W}(\zeta'_{\mu}) \frac{d\zeta'_{\mu}}{z-\zeta'_{\mu}} \right] = i \frac{\pi}{t} \oint_{(\kappa)} \bar{W}(\zeta') \operatorname{cotgh} \frac{\pi}{t} (z-\zeta') d\zeta' \quad (\text{A.18}).$$

onde (κ) e ζ' são relativos a $\mu = 0$.

As integrais tomadas sobre os trechos $A_{\mu}B_{\mu}$ e $C_{\mu}D_{\mu}$ se anulam, respectivamente, com as integrais sobre os trechos $G_{\mu}H_{\mu}$ e $E_{\mu}F_{\mu}$ do domínio vizinho. Resta calcular as integrais sobre os trechos $H_{\mu}A_{\mu}$ e $D_{\mu}E_{\mu}$, que serão determinadas considerando-se as condições de contorno (A.2.a) e (A.2.b). Assim, pode-se escrever

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \left[i \int (H_{\mu}A_{\mu}) \bar{W}(\zeta'_{\mu}) \frac{d\zeta'_{\mu}}{z-\zeta'_{\mu}} \right] = \pi \bar{W}_1 \quad (\text{A.19})$$

e

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \left[i \int (D_{\mu}E_{\mu}) \bar{W}(\zeta'_{\mu}) \frac{d\zeta'_{\mu}}{z-\zeta'_{\mu}} \right] = \pi \bar{W}_2 \quad (\text{A.20})$$

Finalmente, pode-se escrever a seguinte expressão para a velocidade complexa conjugada, considerando as equações (A.18), (A.19) e (A.20):

$$\pi(\bar{W}_1 + \bar{W}_2) + i \frac{\pi}{t} \oint_{(\kappa)} \bar{W}(\zeta') \operatorname{cotgh} \frac{\pi}{t} (z-\zeta') d\zeta' = \begin{cases} 2\pi \bar{W}(z), & z \in T \\ 0, & z \notin T \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

introduzindo

$$\bar{W}_{\infty} = \frac{\bar{W}_1 + \bar{W}_2}{2} \quad (\text{A.22})$$

e

$$\lambda(z, \zeta') = \frac{\pi}{t} \operatorname{cotgh} \frac{\pi}{t} (z-\zeta') \quad (\text{A.23})$$

a equação (A.21) pode ser escrita por

$$\bar{W}_{\infty} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\kappa)} \bar{W}(\zeta') \lambda(\zeta', z) d\zeta' = \begin{cases} \bar{W}(z), & z \in T \\ 0, & z \notin T \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

A equação (A.24) é a forma integral da solução da equação diferencial (A.1).

Os valores limites do núcleo $\lambda(z, \zeta')$ à montante e à jusante da grade são:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \lambda(z, \zeta') = \mp \frac{\pi}{t} \quad . \quad (\text{A.25})$$

Usando estes valores limites,

$$\bar{W}_{1,2} = \bar{W}_\infty \mp \frac{i}{2t} \oint_{(\kappa)} \bar{W}(\zeta') d\zeta' \quad , \quad (\text{A.26})$$

de onde,

$$\begin{aligned} \bar{W}_1 + \bar{W}_2 &= 2\bar{W}_\infty \\ \bar{W}_1 - \bar{W}_2 &= -\frac{i}{t} \oint_{(\kappa)} W(\zeta') d\zeta' \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

De acordo com a Figura A.4, a velocidade pode ser expressa pelas componentes tangencial e normal ao contorno do perfil

$$\bar{W}(\zeta) = (W_s - iW_n) e^{-i\alpha} \quad ; \quad (\text{A.28})$$

da equação (A.13)

$$d\zeta = e^{i\alpha} ds$$

com isso, pode-se escrever que a integral da velocidade ao longo do contorno é

$$\oint_{(\kappa)} \bar{W} d\zeta = \oint_{(\kappa)} W_s ds - i \oint_{(\kappa)} W_n ds \quad . \quad (\text{A.29})$$

A integral da componente tangencial da velocidade ao longo do contorno do perfil dá a circulação:

$$\Gamma_p = \oint_{(\kappa)} W_s ds \quad . \quad (\text{A.30})$$

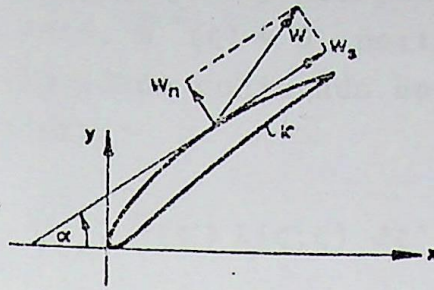


Figura A.4 - Representação da velocidade sobre o perfil e suas componentes.

A integral da componente normal da velocidade no contorno é naturalmente nula, devido à condição de contorno (A.2.c). Usando isso e a equação (A.30) na equação (A.27), resulta

$$\bar{W}_1 - \bar{W}_2 = W_{1x} - i W_{1y} - W_{2x} + i W_{2y} = -\frac{i}{t} \Gamma_P \quad (\text{A.31})$$

Separando-se as partes real e imaginária:

$$W_{1x} - W_{2x} = 0 \quad , \quad (\text{A.32})$$

$$W_{1y} - W_{2y} = \frac{\Gamma_P}{t} \quad . \quad (\text{A.33})$$

Conforme a referência [30], por meio da fórmula de Plemelj pode-se escrever que, para $z \rightarrow \zeta \in (\kappa)$, quando $z \in T$, então $\bar{W}(z) \rightarrow \bar{W}^+(\zeta)$, e

$$\bar{W}^+(\zeta) = \bar{W}_\infty + \frac{1}{2} \bar{W}(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\kappa)} \bar{W}(\zeta') \lambda(\zeta', \zeta) d\zeta' \quad , \quad (\text{A.34})$$

quando ao contrário $z \rightarrow \zeta \in (\kappa)$, mas $z \notin T$, então $\bar{W}(z) \rightarrow \bar{W}^-(\zeta)$, cujo valor é:

$$\bar{W}^-(\zeta) = \bar{W}_\infty - \frac{1}{2} \bar{W}(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\kappa)} \bar{W}(\zeta') \lambda(\zeta', \zeta) d\zeta' \quad . \quad (\text{A.35})$$

A diferença entre os valores limites nos dois lados do contorno é:

$$\bar{W}^+ - \bar{W}^- = \bar{W}(\zeta) \quad , \quad (\text{A.36})$$

mas de acordo com a equação (A.24) nos pontos fora de (T) a velocidade conjugada é zero, $\bar{W}^-(\zeta) = 0$, portanto $\bar{W}^+(\zeta) = \bar{W}(\zeta)$. Conseqüentemente a velocidade conjugada ao longo do contorno do perfil pode ser escrita:

$$\bar{W}(\zeta) = 2\bar{W}_\infty + \frac{1}{\pi i} \oint_{(\kappa)} \bar{W}(\zeta') \lambda(\zeta; \zeta') d\zeta' \quad (\text{A.37})$$

Usando a equação (A.28) e impondo a condição que o contorno do perfil é uma linha de corrente, isto é, que não há escoamento através dele, conseqüentemente a velocidade é somente tangencial ao longo do contorno do perfil, resulta:

$$\text{Re} \left[\bar{W}(\zeta) e^{i\alpha} \right] = W_s(\zeta) \quad (\text{A.38})$$

$$\text{Im} \left[\bar{W}(\zeta) e^{i\alpha} \right] = W_n(\zeta) = 0 \quad (\text{A.39})$$

A solução da equação (A.38) ou (A.39) permite obter a distribuição de velocidades do escoamento potencial em grades lineares.

Separando a função núcleo $\lambda(\zeta, \zeta')$ em parte real e imaginária

$$\lambda(\zeta, \zeta') = R(\zeta, \zeta') + i J(\zeta, \zeta') \quad (\text{A.40})$$

onde

$$R(\zeta, \zeta') = \frac{\pi}{t} \frac{\sinh \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi')}{\cosh \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') - \cos \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta')} \quad (\text{A.41})$$

e

$$J(\zeta, \zeta') = - \frac{\pi}{t} \frac{\text{sen} \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta')}{\cosh \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') - \cos \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta')} \quad (\text{A.42})$$

Pode-se definir as funções

$$\lambda_I(\zeta, \zeta') = -R(\zeta, \zeta') \operatorname{sen} \alpha - J(\zeta, \zeta') \operatorname{cos} \alpha \quad (\text{A.43})$$

$$\lambda_{II}(\zeta, \zeta') = R(\zeta, \zeta') \operatorname{cos} \alpha - J(\zeta, \zeta') \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{A.44})$$

Dessa maneira pode-se escrever, das equações (A.38) e (A.39), que

$$\frac{W_S(\zeta)}{2} = (W_{\infty X} \operatorname{cos} \alpha + W_{\infty Y} \operatorname{sen} \alpha) + \frac{1}{2\pi} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') W_S(\zeta') ds' \quad (\text{A.45})$$

e

$$0 = (W_{\infty X} \operatorname{sen} \alpha - W_{\infty Y} \operatorname{cos} \alpha) + \frac{1}{2\pi} \oint_{(\kappa)} \lambda_{II}(\zeta, \zeta') W_S(\zeta') ds' \quad (\text{A.46})$$

As equações (A.46) e (A.45) são equações integrais do tipo Fredholm de primeira e segunda espécie, respectivamente. É possível mostrar que o núcleo λ_I da equação (A.45) é limitado quando o ponto de integração ζ' tende para o ponto ζ . Pelo contrário, o núcleo λ_{II} da equação (A.46) é singular. Assim, a escolha da equação de Fredholm de segunda espécie é preferível para a determinação das incógnitas $W_S(\zeta)$.

A formulação apresentada neste apêndice é uma particularização da formulação constante nos trabalhos de Nyiri [26] e Eremeev [27], para o caso de grades lineares.

APÊNDICE B - COMPORTAMENTO DOS NÚCLEOS λ_I E λ_{II}

Os núcleos λ_I e λ_{II} são do tipo $f|\xi', \eta'(\xi')| / g|\xi', \eta'(\xi')|$, nos quais o comportamento é da forma 0/0 quando $\xi' \rightarrow \xi$ e $\eta' \rightarrow \eta$. Estudando a relação das derivadas f'/g' para o núcleo λ_I ,

$$\lambda_I = \frac{f}{g} = \frac{\frac{\pi}{t} \left[\cos\alpha \operatorname{sen} \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{senh} \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right]}{\cosh \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') - \cos \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta')}, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{f'}{g'} = \frac{\frac{\pi}{t} \left[-\frac{2\pi}{t} \frac{d\eta'}{d\xi'} \cos\alpha \cos \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') + \frac{2\pi}{t} \operatorname{sen}\alpha \cosh \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right]}{-\frac{2\pi}{t} \operatorname{senh} \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') - \frac{2\pi}{t} \frac{d\eta'}{d\xi'} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta')}. \quad (\text{B.2})$$

Para $\xi' \rightarrow \xi$ e $\eta' \rightarrow \eta$, $\frac{d\eta'}{d\xi'} \rightarrow \operatorname{tg}\alpha$, com isso,

$$\lim_{\substack{\xi' \rightarrow \xi \\ \eta' \rightarrow \eta}} \frac{f'}{g'} = \frac{0}{0}. \quad (\text{B.3})$$

Derivando-se a equação (B.2), obtêm-se:

$$\frac{f''}{g''} = \frac{\frac{\pi}{t} \left[-\frac{d^2\eta'}{d\xi'^2} \cos\alpha \cos \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') - \frac{2\pi}{t} \left(\frac{d\eta'}{d\xi'} \right)^2 \cos\alpha \operatorname{sen} \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') - \frac{2\pi}{t} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{senh} \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right]}{\frac{2\pi}{t} \cosh \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') + \frac{2\pi}{t} \left(\frac{d\eta'}{d\xi'} \right)^2 \cos \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta')}. \quad (\text{B.4})$$

tomando o limite, para $\xi' \rightarrow \xi$ e $\eta' \rightarrow \eta$, encontra-se,

$$\lim_{\substack{\xi' \rightarrow \xi \\ \eta' \rightarrow \eta}} \frac{f''}{g''} = -\frac{1}{2} \cos^3\alpha \frac{d^2\eta}{d\xi^2}. \quad (\text{B.5})$$

Se a curva $\eta(\xi)$ é conhecida sob a forma paramétrica $\xi(s)$ e $\eta(s)$, pode-se escrever,

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{\frac{d\xi}{ds} \frac{d^2\eta}{ds^2} - \frac{d\eta}{ds} \frac{d^2\xi}{ds^2}}{\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^3} = \frac{\cos\alpha \frac{d^2\eta}{ds^2} - \text{sen}\alpha \frac{d^2\xi}{ds^2}}{\cos^3\alpha} \quad (\text{B.6})$$

Com a equação (B.6) na equação (B.5) obtém-se, para o núcleo λ_I , quando $\xi' \rightarrow \xi$ e $\eta' \rightarrow \eta$, a seguinte expressão:

$$\lambda_I = -\frac{1}{2} \left[\cos\alpha \frac{d}{ds} (\text{sen}\alpha) - \text{sen}\alpha \frac{d}{ds} (\cos\alpha) \right] = -\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{ds} \quad (\text{B.7})$$

Denominando por curvatura C de uma curva uma expressão que varia em sentido inverso do raio R da curva, ou seja $C=1/R$, e considerando-se que, a curvatura é a variação da inclinação da tangente à curva em relação à unidade de arco da mesma, pode-se escrever, no limite, quando a variação do arco tende a zero, que, $C = d\alpha/ds$. Com isso, a equação (B.7) pode ser escrita por

$$\lambda_I = -\frac{1}{2R} \quad (\text{B.8})$$

com R sendo o raio de curvatura no ponto considerado.

Explicitando o núcleo λ_{II} ,

$$\lambda_{II} = \frac{f}{g} = \frac{\frac{\pi}{t} \left[\cos\alpha \sinh\frac{2\pi}{t} (\xi-\xi') + \text{sen}\alpha \sin\frac{2\pi}{t} (\eta-\eta') \right]}{\cosh\frac{2\pi}{t} (\xi-\xi') - \cos\frac{2\pi}{t} (\eta-\eta')} \quad (\text{B.9})$$

e derivando, obtém-se

$$\frac{f'}{g'} = \frac{\frac{\pi}{t} \left[-\frac{2\pi}{t} \cos\alpha \cosh\frac{2\pi}{t} (\xi-\xi') - \frac{2\pi}{t} \frac{d\eta'}{d\xi'} \text{sen}\alpha \cos\frac{2\pi}{t} (\eta-\eta') \right]}{-\frac{2\pi}{t} \sinh\frac{2\pi}{t} (\xi-\xi') - \frac{2\pi}{t} \frac{d\eta'}{d\xi'} \text{sen}\frac{2\pi}{t} (\eta-\eta')} \quad (\text{B.10})$$

No limite, para $\xi' \rightarrow \xi$ e $\eta' \rightarrow \eta$, f' tende para $1/\cos\alpha$ e g' tende para zero. Por conseguinte, λ_{II} cresce indefinidamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- |1| Theodorsen, T., Theory of wing sections of arbitrary shape. NACA Report 411 (1931).
- |2| Garrick, I.E., On the plane potential flow past a lattice of arbitrary aerofoils. NACA Report 788 (1944).
- |3| Hall, W.S. and Thwaites, B., On the calculation of cascade flows. ARC (Aeronautical Research Council), 25-350 (1963)
- |4| Mutterperl, W., A solution of the direct and inverse potential problems for arbitrary cascades of airfoils. NACA WR L-81 (1944).
- |5| Traupel, W., Die Berechnung der Strömung durch Schaufelgitter. Sulzer Tech. Rundschau, 1-25 (1945).
- |6| Birnbaum, W., Die Tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. ZAMM, 3-4:290 (1923).
- |7| Glauert, H., A theory of thin aerofoils. ARC Report & Memorandum, 910 (1924).
- |8| Allan, W.K., A theory of cascade interference. ARC (Aeronautical Research Council) 23-214.
- |9| Katzoff, S., Finn, R.S. and Laurence, J.C., Interference method for obtaining potential flow past an arbitrary cascade of airfoils. NACA Report, 879 (1947).
- |10| Schlichting, H., Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes Schaufelgitter. VDI - Forschungsheft, 447 (1955).
- |11| Mellor, G.L., An analysis of axial flow compressor cascade aerodynamics - Part I. Journal of Basic Engineering,

81 : 362-378 (1959).

- [12] Martensen, E., The calculation of the pressure distribution on a cascade of thick airfoils by means of Fredholm integral equations of the second kind. NASA TT F-702 (1971).
- [13] Jacob, K & Riegels, F.W., Berechnung der Druckverteilung endlich dicker Profile ohne und mit Klappen und Vorflügeln. Zeitschrift für Flugwissenschaften, 11 : 357-367 (1963).
- [14] Fisher, E.H. and Inoue, M., A study of diffuser/rotor interaction in a centrifugal compressor. Journal Mechanical Engineering Science, 23-3 : 149-156 (1981).
- [15] Hess, J.L. and Smith, A.M.O., Calculation of potential flow about arbitrary bodies. Progress in Aeronautical Sciences, 8 : 1-138 (1966).
- [16] Giesing, J.P., Extension of the Douglas Neumann program to problems of lifting, infinite cascades. Douglas Aircraft Co., Inc., Report n° LB-31653 (1964).
- [17] Mavriplis, F., Aerodynamic research on high lift systems. Canadian Aeronautics and Space Journal, 17 : 175-183 (1971).
- [18] Salomon, L.B.R., Método de cálculo do escoamento de um fluido através de máquinas de fluxo radiais. Tese de Mestrado, EFEI - Itajubá - MG (1972).
- [19] Henn, E.A.L., Influência do número finito de pás em máquinas de fluxo. Tese de Mestrado, EFEI - Itajubá - MG (1972).
- [20] Ferreira, J.G., Um processo para o cálculo de máquinas geradoras radiais. Tese de Mestrado, EFEI - Itajubá - MG. (1973).
- [21] Fernandes, E.C., Análise da influência dos parâmetros

- geométricos no dimensionamento das máquinas de fluxo axiais. Tese de Mestrado. ITA - São José dos Campos - SP. (1973).
- |22| Castro, P.R. de, Análise do escoamento em grades lineares. Tese de Mestrado. ITA - São José dos Campos - SP. (1981).
- |23| Manzanares Fº, N., Escoamento potencial em grades radiais de máquinas de fluxo. Tese de Mestrado. EFEI - Itajubá - MG. (1982).
- |24| De La Fuente, R.P., Critérios de avaliação de desempenho de grades lineares. Tese de Mestrado. ITA - São José dos Campos - SP. (1982).
- |25| Negrão, J.R.P., Escoamento potencial em grades lineares - método dos painéis. Tese de Mestrado. ITA - São José dos Campos - SP. (1983).
- |26| Nyiri, A., Determination of the theoretical characteristics of hydraulic machines, based on potential theory. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, 69/3-4 : 243-273 (1970).
- |27| Eremeev, L.R., Calcul des écoulements dans les turbomachines en fluide parfait et incompressible. Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique - Compte rendu de fin de contrat nº 73.7.1765.00.221.75.01 - France (1974).
- |28| Fernandes, E.C., Análise do escoamento em máquinas de fluxo segundo o método das singularidades. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Publicação Interna (1978).
- |29| Lavrentiev, M. et Chabat, B., Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Editions Mir-Moscou, 2ª ed. (1977).
- |30| Bitsadze, A.V., Equations of mathematical physics. Mir Publishers - Moscou (1980).

- | 31 | König, E., Potentialströmung durch Gitter. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 2 : 422-429 (1922).
- | 32 | Wilkinson, D., A numerical solution of the analysis and design problems for the flow past one or more aerofoils or cascades. ARC Report & Memorandum, 3545 (1968).
- | 33 | Lewis, R.I., Simplifications to surface vorticity aerofoil and cascade theory to facilitate computation. University of Newcastle upon Tyne, Internal Report n° Tb. 55 (1980).
- | 34 | Connor, J.J. and Brebbia, C.A., Finite element techniques for fluid flow. Newnes - Butterworths - Londres (1976).
- | 35 | Gostelow, J.P., Cascade aerodynamics. Pergamon Press - Oxford (1984).
- | 36 | Schlichting, H., Problems and results of investigations on cascade flow. Journal of the Aeronautical Sciences, março : 163-178 (1954).
- | 37 | Speidel, L. & Scholz, N., Untersuchungen über die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern. VDI - Forschungsheft, 464 (1954).
- | 38 | Krüger, H., Ein Verfahren zur Druckverteilungsrechnung an geraden und radialen Schaufelgittern. Ingenieur - Archiv, 26 : 242-267 (1958).

