

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

PATRICK EDUARDO DA CONCEIÇÃO

**POSSIBILIDADES DO USO DO CELULAR PARA O ENSINO
DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS POR MEIO DE
TAREFAS INVESTIGATIVAS**

ITAJUBÁ
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

PATRICK EDUARDO DA CONCEIÇÃO

**POSSIBILIDADES DO USO DO CELULAR PARA O ENSINO
DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS POR MEIO DE
TAREFAS INVESTIGATIVAS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Educação em Ciências.

Área de concentração: Educação em Ciências

Linha de Pesquisa: Educação e Tecnologias

Orientador: Prof. Dr. Newton de Figueiredo Filho

ITAJUBÁ
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

PATRICK EDUARDO DA CONCEIÇÃO

**POSSIBILIDADES DO USO DO CELULAR PARA O ENSINO
DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS POR MEIO DE
TAREFAS INVESTIGATIVAS**

Banca Examinadora:

Prof Dr. Newton de Figueiredo Filho (orientador)
Universidade Federal de Itajubá

Prof^ª Dr^a. Eliane Matesco Cristovão
Universidade Federal de Itajubá

Prof^ª Dr^a. Ana Paula dos Santos Malheiros
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Filho

ITAJUBÁ
2023

"Ninguém ama o que não conhece": então fica explicado porque tantos alunos não gostam da matemática, pois, se a eles não foi dado conhecer a matemática, como podem vir a admirá-la?

(LORENZATO, 2006, p. 34)

Dedicatória

À memória de minha mãe, Dona Rosa, que se faz presente em todos os dias de minha vida.

Agradecimentos

Ao meu pai Carlos e minha mãe Rosa (*em memória*), que mais do que me proporcionar uma boa infância e vida acadêmica, formaram os fundamentos do meu caráter e me apontaram para a vida.

Aos meus familiares, por entenderem minhas ausências, pela companhia constante, orações, palavras, abraços e aconchego.

Ao professor Newton, orientador desta pesquisa, por sua sabedoria, incentivo, apoio e, principalmente, pela paciência com todas as minhas falhas enquanto orientando.

Às professoras Eliane e Ana Paula pelas palavras e sugestões valiosas que contribuíram muito para o aperfeiçoamento deste estudo.

Aos professores do Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências, pelas trocas de conhecimento e experiências que foram tão importantes na minha vida acadêmica e pessoal.

À todos os meus colegas do Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências, que de uma forma ou de outra me incentivaram nessa batalha. Quero agradecer de forma especial a colega Aline, pelo incentivo e companheirismo durante todo o tempo de desenvolvimento desta pesquisa.

Ao Grupo de Estudos Interdisciplinares e Formação de Professores (Geifop), em especial ao subgrupo da Matemática, pelos momentos de discussões que contribuíram para minha formação e para reflexões importantes desta pesquisa.

Aos alunos que participaram desta pesquisa, pelo comprometimento, seriedade e dedicação durante os momentos de intervenção.

Aos amigos de perto e de longe. Obrigado, pela paciência, pela mão que sempre se estendia quando eu precisava. Foram vocês que aliviaram minhas horas difíceis, me alimentando de certezas, força e alegria.

À Deus, que mais do que me criar, deu propósito à minha vida.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Diferenciação entre exercícios; problemas; explorações e investigações.....	12
Figura 2: Exemplo CRMG.	17
Figura 3: Fases do desenvolvimento tecnológico em Educação Matemática.	18
Figura 4: Símbolo do aplicativo Photomath.	22
Figura 5: Tela inicial do aplicativo.....	23
Figura 6: opções de “ajuda” apresentadas pelo <i>Photomath</i>	24
Figura 7: Exemplo de soluções apresentadas pelo aplicativo.....	24
Figura 8: ícone da extensão <i>mute tab</i>	55
Figura 9: Registro da Atividade 1 realizada pelo G2-I.....	57
Figura 10: Registro G2-I.	59
Figura 11: Utilização do <i>Photomath</i> pela aluna técnica do G3-I.	60
Figura 12: Imagem apresentada pelo G3-I sobre domínio e imagem.	61
Figura 13: passo a passo do calculo do período da função $f(x)=\text{sen}(-4x)$	73
Figura 14: Imagem apresentada pelo G3-I sobre período na atividade 2.....	77
Figura 15: Apresentação do G3-I sobre detalhes do gráfico de $f(x)=\text{sen}(12x)$	77
Figura 16: Tela do GeoGebra online.	82
Figura 17: Registro da atividade extra do grupo G1-A.	83
Figura 18: plotagem gráfica das funções do desafio proposto ao grupo G1-A.	84
Figura 19: Atividade 1.....	89
Figura 20: Exemplo apresentado pelo grupo G1-A.....	90
Figura 21: Considerações do grupo G1-A sobre o item c da atividade 2.....	91
Figura 22: Demonstração realizada no GeoGebra.....	94
Figura 23: Imagem intervenção professor pesquisador.	96
Figura 24: Gráficos da situação 2.	99
Figura 25: Gráficos da situação 2.	101
Figura 26: Resolução segunda parte da Situação 3.	103

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Momentos de realização de uma investigação	8
Quadro 2: ambientes de aprendizagem.....	8
Quadro 3: Quadro de análise de tarefas matemáticas do OEM-Bahia.	11
Quadro 4: Habilidades relacionadas ao conceito de função apresentadas na BNCC.....	15
Quadro 5: Exemplos de aplicativos disponíveis para celulares inteligentes.	22
Quadro 6: Pesquisas que contemplam o levantamento bibliográfico.....	27
Quadro 7: problema apresentado por Dante (2012).	43
Quadro 8: questionamentos envolvidos em cada atividade.....	43
Quadro 9: Cronograma das atividades realizadas.	46
Quadro 10: Atividade 1 relacionada a função seno.....	56
Quadro 11: Atividade 2 relacionada a função seno.....	65
Quadro 12: Situação 1.	98
Quadro 13: Situação 2.	98
Quadro 14: Situação 3 apresentada aos alunos.....	100

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
2. COMPREENDENDO ASPECTOS IMPORTANTES DESTE ESTUDO	6
2.1. A investigação Matemática e o papel do professor	6
2.1.1. Grupos colaborativos e o quadro teórico de análise de tarefas matemáticas	10
2.2. O conceito de função no currículo de Matemática e em documentos oficiais.....	13
2.3. As tecnologias digitais e o celular inteligente na vida e no ensino.....	18
2.3.1 O aplicativo Photomath.....	22
3. O CAMINHO PERCORRIDO POR OUTRAS PESQUISAS.....	27
3.1. Pesquisas que investigaram práticas com aplicativos e/ou celulares.....	28
3.2. Pesquisas que desenvolveram aplicativos e/ou materiais didáticos.....	35
4. PERCURSO METODOLÓGICO	38
4.1. Abordagem da Pesquisa.....	38
4.2. Contexto e participantes da pesquisa	39
4.3. As tarefas investigativas e a atividade diagnóstica.....	42
4.4. (Re) adaptando as atividades investigativas ao ensino remoto.....	45
4.5. Procedimento de análise de dados	48
5. ANÁLISES E RESULTADOS	50
5.1. Momentos iniciais: revisão e atividade diagnóstica	50
5.2. Introdução e apresentação da tarefa aos alunos	53
5.3. Divisão dos grupos e primeiro contato com as atividades.....	54
5.4. Investigação por parte dos alunos: reflexões e análise	56
5.5. Socialização e discussão dos resultados encontrados pelos alunos	89
5.6. Discussão final.....	98
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	104
7. REFERÊNCIAS	108
8. APÊNDICES	112
APÊNDICE A – Tarefa investigativa.....	112
APÊNDICE B – Atividade diagnóstica	117
APÊNDICE C – Questionário	119
APÊNDICE D – Entrevista.....	120

RESUMO

Apesar de o celular estar presente na rotina diária de diversas pessoas, adentrando inclusive o ambiente escolar, percebe-se uma resistência quanto ao seu uso neste contexto. Neste sentido, esta pesquisa buscou investigar possibilidades e limitações do uso de um aplicativo para celulares inteligentes, mediado por uma tarefa investigativa, para a apreensão de conceitos relacionados ao comportamento gráfico de funções trigonométricas. Buscando meios para alcançar o objetivo traçado, se utilizou de procedimentos da pesquisa qualitativa, sendo elaborada uma tarefa investigativa, com auxílio do aplicativo *Photomath*, realizada no contexto de aula de uma turma de 3º ano do Ensino Médio. Devido à pandemia do novo coronavírus, SARS-CoV2, a realização das etapas de intervenção aconteceu de forma remota, por meio da plataforma *Google Meet*. As fontes de dados para a pesquisa foram as gravações dos momentos de aulas no *Google Meet*, um diário de campo com observações do pesquisador, uma entrevista realizada com a professora assistente, uma atividade diagnóstica e um questionário aplicado aos alunos. Para a análise dos dados utilizou-se de três eixos emergentes da própria intervenção: (1) a manifestação do conhecimento matemático durante as etapas da tarefa investigativa; (2) o envolvimento dos alunos com o aplicativo *Photomath* em aulas remotas; e (3) a presença de habilidades como criar hipóteses, construir estratégias e verificá-las a partir da tarefa investigativa usando o aplicativo *Photomath*. Foi possível identificar a familiaridade dos alunos em relação ao uso do celular e da tecnologia, havendo certa dificuldade inicialmente em relação ao uso pedagógico do aplicativo proposto, assim como na assimilação da proposta investigativa. Apesar disso, percebe-se que no decorrer das investigações os alunos apresentaram um avanço no conhecimento matemático, realizando a exploração de diversos gráficos, elaborando e testando conjecturas, além de trabalharem na construção de propriedades. Houve limitações em relação à dinamicidade do aplicativo *Photomath*, assim como na plotagem de determinadas funções. Contudo, ressalta-se a importância da inserção do celular no ambiente de sala de aula, permitindo que os alunos se sintam motivados e capacitados para trabalhar com conceitos matemáticos e que percebam a riqueza dessa ferramenta para a sua aprendizagem.

Palavras-chave: Smartphone; Ensino de Matemática; Tecnologias Digitais; Investigação; Ensino Médio.

ABSTRACT

Although the cell phone is present in the daily routine of many people, even entering the school environment, there is resistance to its use in this context. In this sense, this research sought to investigate possibilities and limitations of using an application for smart phones, mediated by an investigative task, for the apprehension of concepts related to the graphic behavior of trigonometric functions. Seeking ways to reach the established objective, qualitative research procedures were used, an investigative task being elaborated, with the help of the Photomath application, carried out in the context of a class of a 3rd year of High School class. Due to the pandemic of the new coronavirus, SARS-CoV2, the intervention steps took place remotely, through the Google Meet platform. The data sources for the research were the recordings of class moments on Google Meet, a field diary with the researcher's observations, an interview with the assistant teacher, a diagnostic activity and a questionnaire applied to the students. For data analysis, three axes emerging from the intervention itself were used: (1) the manifestation of mathematical knowledge during the stages of the investigative task; (2) student engagement with the Photomath app in remote classes; and (3) the presence of skills such as creating hypotheses, building strategies and verifying them from the investigative task using the Photomath application. It was possible to identify the students' familiarity with the use of cell phones and technology, with some difficulty initially regarding the pedagogical use of the proposed application, as well as the assimilation of the investigative proposal. Despite this, it is clear that in the course of the investigations, the students showed an advance in mathematical knowledge, exploring various graphs, elaborating and testing conjectures, in addition to working on the construction of properties. There were limitations regarding the dynamicity of the Photomath application, as well as the plotting of certain functions. However, the importance of inserting the cell phone in the classroom environment is highlighted, allowing students to feel motivated and able to work with mathematical concepts and to perceive the richness of this tool for their learning.

Keywords: Smartphone; Mathematics Teaching; Digital Technologies; Investigation;

1. INTRODUÇÃO

Durante minha trajetória na Educação Básica, houve professores memoráveis, que sempre me incentivaram a estudar e continuar buscando conhecimento, servindo como exemplo do professor que hoje almejo ser: aquele que respeita, incentiva e inspira seus alunos. Apesar disso, as vivências proporcionadas pela inserção em sala de aula como estagiário e bolsista de iniciação à docência (ID), assim como assumindo a profissão de professor, permitiram algumas mudanças de concepções. Hoje, vejo que a Matemática aprendida durante a fase escolar, cujo objetivo principal era fazer com que atingíssemos certa “nota”, era baseada no ensino de técnicas e em repetições que poucos significados traziam aos conceitos estudados. O material utilizado se limitava ao livro didático, não havendo espaço para a exploração de outras formas de aprendizado.

A vivência prática em sala de aula, como professor, aliada ao aprendizado propiciado pelas disciplinas e experiências durante a graduação, por um lado permitiu que eu refletisse sobre os problemas causados pela limitação do uso de metodologias de cunho mais tradicional. Por outro lado, possibilitou que eu conhecesse e vivenciasse metodologias alternativas, a partir das quais pude compreender o meu papel enquanto educador. Neste cenário, pude sentir algumas das dificuldades diárias enfrentadas no trabalho com determinados conteúdos em sala de aula. O que me fez corroborar que, muitas vezes, a falta de compreensão por parte dos alunos gera desmotivação e, conseqüentemente, uma antipatia pela Matemática. Dessa forma, torna-se necessário propor alternativas que resgatem a motivação e que apoiem o processo de construção do conhecimento. Como afirmam Fiorentini e Miorin (1990),

Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um 'aprender' mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. Muito menos um 'aprender' que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade. (FIORENTINI E MIORIN, 1990, p. 60).

É importante destacar as vivências junto ao subprojeto Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), o qual se estabeleceu como um grupo colaborativo, focado em discussões relacionadas ao “ser professor” e em estratégias de ensino. Uma experiência única, a partir da qual pude sentir e vivenciar, de maneira prática, o dia a dia em sala de aula, e não apenas como expectador, mas como mediador entre os alunos e o conhecimento. Esse espaço

possibilitou, também, que me tornasse um pesquisador da própria prática, visto que muitos dos momentos em grupo eram dedicados a reflexões relacionadas ao planejamento e discussão de nossas ações após o desenvolvimento das atividades no ambiente escolar.

Foram várias experiências significativas junto ao subprojeto. A construção de um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), na escola onde era bolsista, permitiu reflexões sobre a importância da ludicidade e de colocar o aluno como protagonista em sala de aula, o que despertou minha afeição em relação a atividades que utilizam materiais concretos e jogos, apoiadas em metodologias como a resolução de problemas e a investigação.

Durante uma pesquisa desenvolvida ao final da graduação, com apoio do subgrupo do Pibid, me deparei com o uso do celular. Após desenvolver uma atividade com o jogo “Torre de Hanói” a partir de um aplicativo instalado em *tablets*, observei que, em um segundo momento, boa parte dos alunos já utilizava o aplicativo nos próprios aparelhos celulares. Nessa investigação objetivava-se analisar se o uso de jogos promoveria um maior envolvimento e uma aprendizagem mais significativa por parte dos alunos, visto que a utilização desta ferramenta permitiria uma forma dinâmica de se explorar os conceitos a serem trabalhados. Como resultado, percebeu-se um avanço no pensamento matemático dos alunos, o que fez com que elaborassem estratégias na busca de respostas para as situações propostas.

Em outro momento, realizou-se uma intervenção buscando conectar a Matemática com nosso mundo atual, o que reforçou a importância de despertar a motivação dos alunos e permitiu utilizar a tecnologia como meio para a geração de materiais didáticos produzidos por eles próprios. Como resultado, foi produzido um acervo de vídeos que retrata o conteúdo de Geometria Espacial e sua relação com o cotidiano. A partir dessa experiência, a produção de vídeos conquistou meu interesse pelas possibilidades que permeiam a aprendizagem dos alunos, além da motivação despertada durante esse processo. Numa busca por entender esta metodologia, pude participar dos cursos de extensão “Tendências em Educação Matemática: modelagem matemática e vídeos digitais” e “Tendências em Educação Matemática: Produção de vídeos com temas matemáticos” pela Unesp de Rio Claro. Estes cursos possibilitaram um estudo e reflexão sobre a relevância e o potencial das tecnologias e do uso dos vídeos em ambientes de aprendizagem.

Devido a estas vivências, ampliou-se a afeição pelo uso de recursos tecnológicos, os quais podem assumir um caráter lúdico capaz de propiciar um aumento do interesse dos alunos e auxiliar na construção de seu próprio conhecimento. Tem-se consciência de que estes

não se limitam ao caráter motivacional, mas podem ser utilizados como uma forma de apresentar conteúdos, muitas vezes abstratos, de forma mais clara e dinâmica ao aluno.

Computadores, *notebooks*, *tablets* e *smartphones* são instrumentos comuns em vários ambientes, sendo que a facilidade de acesso à internet proporciona informações e notícias compartilhadas de forma instantânea. Diante desta realidade, na qual as tecnologias digitais se mostram cada vez mais presentes no dia a dia, evidenciando uma dependência de artefatos tecnológicos e a influência da sociedade no desenvolvimento desta indústria, mostra-se necessário pensar em estratégias de aproximação desta realidade com os contextos de sala de aula.

Os *smartphones*, ou em português, celulares inteligentes, fazem parte do cotidiano de um número significativo de pessoas, inclusive no âmbito escolar, e isso ficou ainda mais evidente com a pandemia do novo coronavírus, visto a necessidade de distanciamento social. Esse fato impactou fortemente o ensino, exigindo uma transformação do ambiente de sala de aula, que passou a ser mediada pelo uso da tecnologia, gerando a necessidade de internet acessível para todos. Essas transformações têm impacto direto no cenário educacional, exigindo que a escola esteja preparada para auxiliar os alunos de maneira a construir uma reflexão, frente às informações que se aglomeram nas diversas mídias digitais. Porém, no contexto de um ensino com traços tradicionais, em que se utiliza de uma abordagem mais mecanicista, existe uma barreira contra este movimento. O que pode ser consequência de diversos fatores, desde dificuldades relacionadas ao uso dos aparatos tecnológicos, aplicativos, softwares e/ou a falta de acesso à internet e informações adequadas.

Isso me fez refletir sobre o quanto ouvimos críticas por parte de colegas professores sobre o uso da tecnologia em sala de aula. Como afirmam Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018), a sala de aula resiste, mas a tecnologia já faz parte desse ambiente, estando a sala de aula conectada ou não. Nesse sentido, concordo com Andrade, Alencar e Coutinho (2019), quando questionam: por que em lugar de excluir as tecnologias da sala de aula, não pensamos em meios de fazer com que elas auxiliem no processo de ensino e aprendizagem?

Diante deste cenário, comecei a me indagar sobre as potencialidades e limitações do uso do celular como auxílio em intervenções em sala de aula. Com o intuito de compreender de forma mais ampla o tema, procurei fazer uma revisão da literatura e encontrei pesquisas tais quais Almeida (2015), Romanello (2016), Maduro (2016), Schmitz (2016) e Barreto (2017) que apontam para o potencial do celular como uma ferramenta no ambiente

educacional, que pode motivar e instigar os alunos na descoberta e aprendizagem de conceitos matemáticos. Barreto (2017) ressalta que,

por mais que haja resistência, os smartphones, tablets e os mais diversos aplicativos já dominam alunos e professores, por isso o grande desafio é usar todo esse potencial tecnológico na contribuição para uma Educação de qualidade para todos (BARRETO, 2017, p. 131).

Schmitz (2016) aponta ainda que o uso pedagógico do celular tem potencial para estreitar a comunicação entre o professor e os alunos, bem como proporcionar diferentes formas de abordagem dos conteúdos matemáticos.

Mediante este contexto, esta investigação visa construir uma compreensão sobre possibilidades e limitações do uso do celular, mediado por aplicativos, como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem, de modo que se possa traçar considerações importantes a respeito de sua utilização.

Nesse sentido, realizou-se uma intervenção em uma escola pública mineira, buscando apresentar aos alunos um sentido mais significativo aos conceitos de função trigonométrica, partindo do trabalho com a tecnologia mediado por uma abordagem investigativa. Assim, surge a questão que conduziu esta pesquisa: *em que aspectos o uso de aplicativos para celulares inteligentes, mediado por uma tarefa investigativa, pode contribuir para aprendizagem de conceitos matemáticos no Ensino Médio?*

Com vistas a entender o questionamento que direciona esta pesquisa, ficou estabelecido como objetivo geral investigar possibilidades e limitações do uso do aplicativo *Photomath* para celulares inteligentes, mediado por uma tarefa investigativa, para a apreensão de conceitos relacionados ao comportamento gráfico de funções trigonométricas por alunos de Ensino Médio.

Para atingir este objetivo, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- Identificar e analisar possibilidades do uso do celular como apoio no ensino de conceitos Matemáticos para alunos de Ensino Médio;
- Identificar e analisar possíveis limitações do celular e do aplicativo *Photomath* durante a realização das tarefas investigativas.
- Analisar a presença de habilidades como criar hipóteses, desenvolver resoluções e a construção de estratégias a partir do uso do aplicativo.

Para relatar o caminho percorrido e os resultados obtidos, este trabalho foi estruturado em seis seções. Após esta breve introdução, na 2ª seção é apresentado o aporte teórico da pesquisa, baseado nas contribuições de Ponte, Brocardo e Oliveira e Skovsmose, ao

referenciar sobre a abordagem investigativa, e autores como Borba, Scucuglia e Gadanidis, Maltempi e Mendes e Ribas, Silva e Galvão, a partir dos quais realizou-se um diálogo sobre a importância das tecnologias no ambiente de sala de aula.

Buscando descrever o que pesquisas anteriores já investigaram sobre as contribuições do celular e aplicativos no ensino, a seção 3 apresenta uma revisão bibliográfica realizada a partir de teses e dissertações defendidas entre os anos de 2015 e 2020, focando em trabalhos que apontam o uso do celular ou aplicativo como metodologia nas aulas de matemática.

A seção 4 é dedicada a uma descrição dos procedimentos metodológicos e do contexto no qual a pesquisa foi desenvolvida. Na 5ª seção, por sua vez, busca-se apresentar detalhes do desenvolvimento das intervenções junto às turmas; os eixos emergentes durante um estudo inicial e a análise baseada tanto nas próprias observações do pesquisador quanto nas produções dos alunos.

Por fim, a seção 6 é dedicada às considerações finais sobre a pesquisa, na qual busca-se resgatar a questão inicial e uma síntese dos principais resultados, além de destacar os desdobramentos para a aprendizagem docente do pesquisador.

2. COMPREENDENDO ASPECTOS IMPORTANTES DESTE ESTUDO

Nesta seção são apresentados os principais referenciais que deram suporte para o desenvolvimento da intervenção e das análises posteriores, os quais dividem-se em três subseções: a primeira apresenta pontos importantes em relação à investigação matemática; a segunda destaca a relevância do conceito de função a partir de documentos oficiais; a terceira apresenta as tecnologias digitais no contexto da Educação Matemática, bem como os celulares inteligentes e aplicativos.

2.1. A investigação Matemática e o papel do professor

A curiosidade e a vontade de entender como as coisas acontecem nos acompanham desde pequenos. Uma forma de aliar este processo de descoberta ao ambiente escolar, particularmente nas aulas de Matemática, é a utilização da Investigação. Como Prática Pedagógica, esta mostra-se favorável para o ensino de matemática por permitir que os alunos vivenciem a natureza desta disciplina. Ou seja, quando os alunos se ocupam das estratégias envolvidas na resolução de um determinado problema, estes acabam preocupados em dar significado à matemática envolvida (VAN DE WALLE, 2009).

Ao pensar no ato de investigar, logo nos vemos com a ideia do descobrimento, da procura, do entender. Em cenários matemáticos, “investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2013, p. 13).

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), as aulas investigativas são aquelas que “mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação” (p. 29).

A investigação Matemática busca despertar nos alunos a experimentação, a fim de que aprendam com os erros, criando possibilidades e levantando hipóteses de resolução, além de promover a discussão acerca dos resultados encontrados (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2013). O objetivo é fazer com que se tornem exploradores, utilizando de variados recursos matemáticos e caminhem na busca de resolver uma situação proposta.

Ponte (2003) enfatiza que investigar não significa trabalhar com situações difíceis, mas levantar indagações que garantam o interesse e permitam, apesar de confuso inicialmente,

clarear o problema e estudá-lo de maneira organizada. Nesse sentido, faz-se necessário que as atividades investigativas se diferenciem daquela concepção tradicional que os alunos estão acostumados, ou seja, aquelas atividades nas quais “o enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido, sem quaisquer ambiguidades” (PONTE, 2003, p.101).

Nesse sentido, Skovsmose (2000) aponta que a Educação Matemática tradicional se encontra em um paradigma do exercício e, se observarmos, geralmente a própria estrutura oferecida nos livros didáticos representa essa condição. Os alunos não questionam; as atividades apresentam todos os dados para sua resolução; a relevância de trabalhar determinados conteúdos acaba não fazendo parte da aula; ou seja, o paradigma do exercício tem como premissa principal que existe uma, e apenas uma resposta correta, assim como uma única forma de se chegar a ela. O autor defende o diálogo como meio para uma educação matemática crítica, e, nesse sentido, como contraposição ao paradigma do exercício, aponta para a utilização de uma abordagem investigativa, com objetivo de se construir cenários para investigação.

Para o autor, um cenário investigativo é aquele que convida os alunos a formular questões e procurar explicações. Ou seja, trabalha-se com situações que possam levar os alunos a descobrir conceitos matemáticos, além de se permitir a reflexão, a compreensão e a tomada de decisões visando entender uma situação proposta. Quando os alunos se envolvem e apresentam engajamento ativo nas atividades propostas é sinal de que aceitaram o convite ao cenário investigativo, o que pode depender de como estão intencionados naquele momento, da natureza das atividades e/ou de como foi feita a abordagem pelo professor (SKOVSMOSE, 2000).

Segundo Ponte (2003), em uma investigação,

o ponto de partida é uma situação aberta, ou seja, a questão não está completamente definida, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua concretização. Sendo possível concretizar de vários modos os pontos de partida, os pontos de chegada, naturalmente são também diferentes. Ao requerer a participação ativa do aluno na própria formulação das questões a estudar, favorecemos o seu envolvimento na aprendizagem (PONTE, 2003, p. 101).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) apontam que o investigar, em Matemática, assume características muito próprias, na qual conduz-se rapidamente à formulação de conjecturas que se busca testar e provar. “As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjecturas-teste-demonstração” (p.10). Nesse sentido, os autores

apontam que a investigação matemática perpassa por quatro momentos, conforme apresentado no quadro 1.

Quadro 1: Momentos de realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> – Reconhecer uma situação problemática – Explorar a situação problemática – Formular questões
Conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> – Organizar dados – Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	<ul style="list-style-type: none"> – Realizar testes – Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> – Justificar uma conjectura – Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 21.

Esses momentos podem ser divididos em três fases importantes: a primeira fase é aquela na qual o professor introduz a tarefa de forma clara e objetiva, instigando e incentivando os alunos; na segunda fase os alunos irão investigar e elaborar hipóteses, e isto pode ocorrer de forma individual ou em grupo; e por fim, a fase de discussão é

fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 41).

Skovsmose (2000) aponta que o método de ensino, as atividades desenvolvidas, a forma de comunicação professor/aluno, entre outros aspectos, podem ser elementos que caracterizam os diversos formatos de uma aula de Matemática. Nesse sentido, o autor apresenta parte dessa multiplicidade, em termos de ambientes de aprendizagem, como se observa no quadro 2.

Quadro 2: ambientes de aprendizagem

Referências	Exercícios	Cenários para investigação
MATEMÁTICA PURA	(1)	(2)
SEMIRREALIDADE	(3)	(4)
REALIDADE	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000).

O autor apresenta seis ambientes de aprendizagem situados entre o paradigma do exercício e os cenários para investigação, com referências à matemática pura, à semirrealidade

e à realidade. Entre essas referências, a primeira é aquela que está situada em um contexto puramente matemático; a segunda, semirrealidade, é aquela em que se observa uma situação da realidade a partir de dados construídos; e a terceira faz referência à realidade, ou seja, a situações da vida real.

Salienta-se que não existe uma única possibilidade de ambiente de aprendizagem, sendo a linha que separa o paradigma do exercício dos cenários para investigação “muito espessa” (SKOVSMOSE, 2000, p.14). Nesse sentido, pode-se mover entre os diferentes ambientes apresentados na matriz, inclusive em uma mesma atividade. Cabe então ao professor, junto aos alunos, encontrar o melhor percurso entre os ambientes.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) também apontam para a importância de o professor e os alunos terem autonomia de modo a articular diferentes tipos de tarefas, a fim de se desenvolver o raciocínio matemático em diferentes níveis. É importante entender que Skovsmose não centra sua atenção apenas nas investigações matemáticas, mas também foca na importância do diálogo e da matemática em ação como contraposição ao paradigma do exercício.

Ao trabalhar em cenários para investigação, o professor acaba se colocando em uma zona de risco, não conseguindo prever os questionamentos dos alunos e os direcionamentos de como a dinâmica poderá ocorrer (SKOVSMOSE, 2000). O autor aponta que, muitas vezes, o professor acaba buscando uma forma de eliminar o risco, tentando guiar todos de volta ao paradigma do exercício. Porém, qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor e para os alunos.

Nesse sentido,

a solução não é voltar para a zona de conforto do paradigma do exercício, mas ser hábil para atuar no novo ambiente. A tarefa é tornar possível que os alunos e o professor sejam capazes de intervir em cooperação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma atividade produtiva e não uma experiência ameaçadora (SKOVSMOSE, 2000, p. 19).

Além disso, é importante entender que a utilização da abordagem investigativa em sala de aula não deve servir apenas como estímulo, mas necessita de uma proposta didática objetiva e bem estruturada. O professor deve se comprometer a criar um ambiente favorável à aprendizagem, auxiliando para que os alunos possam agir como matemáticos, “não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e o professor.” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2013, p.22).

Porém, a intervenção do professor deve ser ponderada, de forma que não interfira nas ideias formuladas pelos alunos, o que pode fazer com que se perca o sentido de construção dos conhecimentos envolvidos com as ações da investigação. Nesse sentido, o professor deve,

por um lado, dar-lhes a autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 47).

Os autores apontam ainda que o professor é convidado a desempenhar alguns papéis no decorrer desse processo, dentre os quais: desafiar os alunos; avaliar o progresso; raciocinar matematicamente e apoiar seu trabalho.

Através do estudo teórico, percebe-se que a investigação é apresentada a partir de diferentes pontos de vista por cada referencial, que podem se complementar. Skovsmose defende uma educação matemática crítica, na qual a investigação matemática estaria em contraposição com um paradigma do exercício. Já Ponte, Brocardo e Oliveira apontam a investigação como um ato de experimentação, que faz com que o aluno possa vivenciar o papel de um matemático.

Nesse sentido, a experiência descrita neste trabalho utiliza a concepção de investigação matemática apresentada por Ponte, Brocardo e Oliveira, (2013), sendo que os olhares de Skovsmose (2000) contribuíram para percepções sobre os diálogos e reflexões durante a busca de justificação Matemática pelos alunos.

A próxima subseção ressalta a importância de ambientes de colaboração conjunta e apresenta um quadro teórico que tem como objetivo analisar tarefas matemáticas.

2.1.1. Grupos colaborativos e o quadro teórico de análise de tarefas matemáticas

O professor pesquisador participa de um Grupo de Estudos Interdisciplinares e Formação de Professores (Geifop), da Universidade Federal de Itajubá; um grupo colaborativo no qual “professores e futuros professores são instigados a problematizar e valorizar suas experiências pedagógicas, da escola e da universidade, enriquecendo-as mutuamente e transformando-as em práticas que podem extrapolar o contexto da sala de aula convencional” (CRISTOVÃO, SILVA e BORTOLUZZI, 2018, p. 2). O Geifop tem ligação com o Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências (PPGEC) da Unifei devido à presença de formadores do programa e mestrandos, sendo um espaço no qual os membros

levantam problemáticas, estudam e propõem projetos disciplinares ou

interdisciplinares a serem desenvolvidos na escola básica, sempre partindo das demandas dos componentes do grupo, especialmente dos professores (CRISTOVÃO, SILVA e BORTOLUZZI, 2018, p. 2).

Desse modo, o Geifop serviu de apoio para reflexões pertinentes relacionadas a esta pesquisa, desde momentos relacionados a estudos teóricos, elaboração das tarefas investigativas e considerações sobre os dados produzidos.

O tema do subgrupo de Matemática do Geifop em 2021 esteve relacionado ao estudo da abordagem investigativa no ensino de matemática, havendo várias discussões pertinentes que serviram de suporte para reflexões desta pesquisa. Neste sentido, foi realizado o estudo e a discussão de um quadro teórico de análise de tarefas matemáticas, criado pelo grupo colaborativo Observatório da Educação Matemática (OEM) da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia (UFBA), como um guia que pudesse auxiliar na elaboração e classificação das tarefas matemáticas elaboradas pelo grupo.

Assim, após a apresentação da tarefa investigativa junto ao Geifop, buscou-se identificar se as atividades propostas neste estudo estariam de acordo com este quadro, o qual é apresentado no quadro 3 e detalhado em sequência.

Quadro 3: Quadro de análise de tarefas matemáticas do OEM-Bahia.

CRITÉRIOS	POSSIBILIDADES			
	EXERCÍCIOS	PROBLEMA	EXPLORAÇÃO	INVESTIGAÇÃO
ESTRUTURA	Fechado	Semiaberto/Intermediário (sugestões de como fechar sem perder o caráter investigativo)	Aberto	
FOCO DO ENSINO	CONCEITUAL	PROCEDIMENTAL	CONCEITUAL/ PROCEDIMENTAL	
REFERÊNCIA	Matemática pura	Semirealidade	Realidade	
DESAFIO	Reduzido	Intermediário	Elevado	
TEMPO	Curto (1 ou 2 aulas)	Médio (3 ou 4 aulas)	Longo/médio (mais de 4 aulas)	
POSSIBILIDADE GERAL DE COMUNICAÇÃO	Diretiva		Dialogica	
BACKGROUND (familiaridade com conteúdos)	Sim		Não	

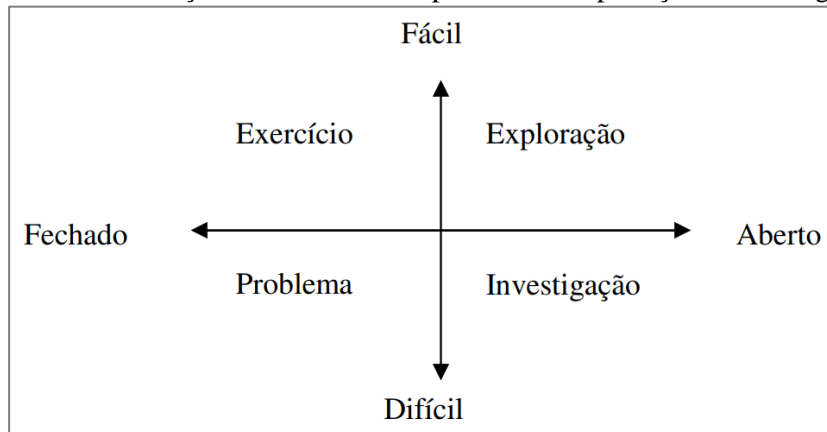
Fonte: COSTA e OLIVEIRA, 2019, p.112.

O grupo colaborativo OEM-Bahia decidiu que as tarefas produzidas pelos membros deveriam ser guiadas a partir do espectro verde no quadro, buscando um repertório comum em suas produções. Já os critérios destacados em vermelho estariam se distanciando deste

repertório comum, apesar de alguns desses ainda caracterizarem tarefas investigativas.

Percebe-se que parte desses critérios foram baseados nos estudos de Ponte (2003), sendo que o critério “Tipos de tarefas” é apresentado pelo autor em um diagrama, no qual tem-se quatro tipos diferentes de atividades matemáticas: exercícios; problemas; explorações e investigações, conforme figura 1.

Figura 1: Diferenciação entre exercícios; problemas; explorações e investigações.



Fonte: Ponte, 2003.

De acordo com o autor, as explorações são atividades abertas, com menor dificuldade em relação às investigações, demandando um tempo relativamente pequeno de trabalho. As investigações também são situações abertas, mas com maior dificuldade, permitindo que os alunos encontrem várias alternativas durante a exploração e investigação. Já as atividades que envolvem exercícios e problemas são tarefas fechadas, sendo os exercícios de um grau de dificuldade reduzido, fácil, e os problemas um grau de dificuldade maior, difícil. Além disso, os exercícios tem curta duração, enquanto os problemas demandam um tempo maior.

Buscando mais possibilidades para a produção de tarefas matemáticas, o subgrupo do OEM, partindo de discussões e negociações, elaborou os demais critérios. Dentre estes, o critério “Foco de ensino” se divide em “Conceitual” – no qual o objetivo está relacionado à construção de um conceito matemático –; e “Procedimental” – aquele que exige a realização de procedimentos –; podendo-se ter a junção dos dois.

Já no critério “Possibilidade geral de comunicação” tem-se a divisão em “Diretiva” – em que as questões propostas determinam qual caminho o estudante precisa seguir –; e “Dialogica” – na qual existe a possibilidade de diálogo do professor com os estudantes, a fim de auxiliar na compreensão e/ou resolução de uma tarefa.

Por último o critério “*Background*”, que seria a familiaridade com o conteúdo.

Dessa forma, o estudo deste quadro auxiliou na elaboração da tarefa investigativa, assim como permitiu caracterizá-la dentre os critérios destacados, o que é apresentado posteriormente neste texto, no campo metodológico.

Tendo em vista o intuito de relacionar, nesta pesquisa, a investigação matemática com o conceito de função, a próxima seção busca apresentar aspectos relacionados a este conceito, assim como sua inserção em documentos oficiais.

2.2. O conceito de função e sua presença em documentos oficiais

O conceito de função está entrelaçado em diversas áreas da Matemática, desempenhando um “papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento” (BRASIL, 1998, p.48). No estudo da Trigonometria, parte importante diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. Na abordagem de sequências, progressões aritméticas e geométricas podem ser consideradas funções particulares. Em Geometria Analítica, as propriedades de retas e parábolas são, na verdade, propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Polinômios e equações algébricas podem ser incluídos também no estudo de funções polinomiais.

Apesar disso, Ponte (1990) aponta que este conceito, desde o início do Século XX, não teve sua importância tão reconhecida, ocupando um papel moderado nos currículos de Matemática. Ele pode ser apresentado neste currículo levando em consideração três aspectos importantes: “(a) a natureza mais algébrica ou mais funcional da abordagem, (b) a generalidade do conceito, e (c) a sua ampliação a problemas e situações da vida real e de outras ciências” (PONTE, 1990, p.6). Porém, percebe-se que a forma mais valorizada no currículo diz respeito à generalidade, deixando, muitas vezes, os demais aspectos de lado (ROMANELLO, 2016). Muitos conteúdos acabam sendo abordados de forma inadequada, visto que exigem que os alunos tenham certo amadurecimento para compreender sua abstração. Nesse sentido, Ponte (1990) aponta que a preocupação em inserir diversas terminologias abstratas, que muitas vezes não são utilizadas, é algo frequente no cenário escolar.

Buscando entender o que documentos oficiais ressaltam sobre o conceito de função, estudou-se os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), considerando-se sua relevância para esta pesquisa, visto sua concepção, que possui semelhanças com características das atividades

investigativas, ou seja, entende-se que os PCN preconizam a aprendizagem a partir de problemas, tendo o aluno papel importante nesse processo. Por outro lado, buscou-se entender a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo de Referência de Minas Gerais (CRMG), que diferentemente dos PCN, apresentam foco na resolução do problema, ou seja, uma proposta para resolver problemas nos quais o conteúdo antecede os questionamentos.

Os PCN apontam que ao trabalhar com a Álgebra,

é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe (regras para resolução) de uma equação. Para apoiar a compreensão desses conceitos pode-se lançar mão da construção e interpretação de planilhas, utilizando recursos tecnológicos como a calculadora e o computador. (BRASIL, 1998, p.84)

Este documento aponta algumas atitudes didáticas na abordagem desta temática no ambiente escolar, das quais podem-se destacar:

- Evitar uma abordagem excessivamente formal ao fim do ensino fundamental, no sentido de trazer formalizações que serão trabalhadas posteriormente;
- Propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas, e identificar suas estruturas;
- Propor situações envolvendo variações de grandezas;
- Utilizar gráficos para o desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos e para mostrar a variedade de relações possíveis entre duas variáveis;
- Utilização de softwares que possam ser integrados às atividades algébricas.

Nesse sentido, cabe então ao professor, junto à escola, pensar no ensino de Matemática de forma a garantir que o aluno adquira flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, através de uma variedade de situações problema, seja incentivado a buscar uma solução, ajustando seus conhecimentos no sentido de construir um modelo para interpretação. (BRASIL, 1998, p.44).

Assim como os PCN, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) ressaltam que o estudo de funções pode ser iniciado a partir da exploração das relações entre duas grandezas em diferentes situações; além de apontarem que é interessante provocar os alunos para que apresentem outras relações funcionais, podendo esboçá-las por meio de uma representação gráfica ou algébrica. Este documento destaca a importância de dar significado e entender a “representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja,

identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes” (p.72), conceitos que foram explorados durante a intervenção prática desta pesquisa.

Ao abordar as funções trigonométricas, tema da tarefa investigativa desta pesquisa, o documento aponta para o “trabalho com a trigonometria, que deve anteceder a abordagem das funções seno, cosseno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do cosseno” (p.73). Além disso, pede atenção quanto à transição do seno e cosseno no triângulo retângulo, para o seno e o cosseno definidos no círculo trigonométrico e para a associação das funções trigonométricas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico (BRASIL, 2006).

Já a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio destaca a importância das funções e aponta para a necessidade de uma noção intuitiva de seu conceito. O documento ressalta algumas estratégias para auxiliar neste processo, podendo-se utilizar a resolução de problemas para uma exploração envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas. Ademais, destaca o uso das tecnologias e da investigação, que podem possibilitar aos estudantes um aprofundamento e uma participação ativa durante esse processo de exploração. Essas “são alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.” (BRASIL, 2018, p. 536).

O Quadro 4 apresenta as habilidades relacionadas ao conceito de função apresentadas na BNCC do Ensino Médio.

Quadro 4: Habilidades relacionadas ao conceito de função apresentadas na BNCC.

(EM13MAT101)	Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302)	Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.
(EM13MAT304)	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.
(EM13MAT305)	Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306)	Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT401)	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(EM13MAT402)	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT403)	Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas.
(EM13MAT404)	Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405)	Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento.
(EM13MAT501)	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502)	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503)	Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros.
(EM13MAT506)	Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507)	Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508)	Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Dentre as habilidades apresentadas, duas tem relação com as funções trigonométricas, sendo a primeira ligada à ideia de periodicidade em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, buscando comparar suas representações com as funções seno e cosseno, apresentando ainda a opção de se apoiar em aplicativos de álgebra e geometria. A segunda novamente aponta para o uso das tecnologias, como opção, para identificar características fundamentais das funções seno e cosseno.

Percebe-se que a BNCC, apesar de sugerir metodologias alternativas, tem como foco nortear as diretrizes curriculares, as formas de gestão escolar e conseqüentemente a conduta do professor em sua sala de aula. Nesse sentido, entende-se que este documento acaba controlando e desvalorizando o professor, visto que a maior preocupação aparenta estar focada nos possíveis resultados.

O Currículo de Referência de Minas Gerais (CRMG), construído a partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e resultado da revisão dos currículos pré-existent na rede pública mineira, traz uma visão de cada competência e habilidade da BNCC de forma

comentada e adaptada. Este documento, além das habilidades da BNCC já apresentadas, aponta para uma unidade temática e os objetos de conhecimento envolvidos, conforme exemplo apresentado na figura 1.

Figura 2: Exemplo CRMG.

HABILIDADES	UNIDADE TEMÁTICA	OBJETO DE CONHECIMENTO
(EM13MAT510). Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.	NÚMEROS ÁLGEBRA E	<ul style="list-style-type: none"> ● Funções polinomiais do 1º grau (função afim, linear e constante). Gráficos de funções. ● Taxa de variação de uma função (crescimento/decrescimento). ● Razões trigonométricas: tangente de um ângulo. ● Equação da reta: coeficiente angular.

Fonte: CRMG, 2021, p.161.

Assim como a BNCC, o CRMG sugere o uso das tecnologias digitais como calculadora; planilhas eletrônicas; softwares; entre outros; apontando que podem servir como apoio no desenvolvimento das habilidades matemáticas. Destaca também a Resolução de Problemas, a Modelagem Matemática, a Interdisciplinaridade, assim como projetos educacionais que se apoiem na Etnomatemática e em atividades em que os alunos se envolvam em investigações como forma de desenvolver a reflexão, a utilização do pensamento lógico, a criatividade e a intuição, sem recorrer aos métodos que buscam apenas a memorização. (CRMG, 2021).

A partir do estudo desses documentos é perceptível a importância da noção intuitiva do conceito de função, visto sua presença em várias situações no cotidiano. Destaca-se também a necessidade de compreender e utilizar diferentes registros de sua representação, na busca de solução e comunicação de resultados.

Portanto, a exploração desenvolvida nesta pesquisa buscou utilizar da investigação matemática aliada ao uso da tecnologia como forma de fazer com que os alunos pudessem entender e relacionar as representações algébrica e gráfica das funções seno e cosseno. Além disso, buscou-se instigar o reconhecimento da noção de periodicidade associada a essas funções.

A próxima seção apresenta um diálogo entre autores que defendem o uso da tecnologia no ambiente de sala de aula, reforçando também a importância do professor em atividades que utilizem deste recurso.

2.3. As tecnologias digitais e o celular inteligente na vida e no ensino

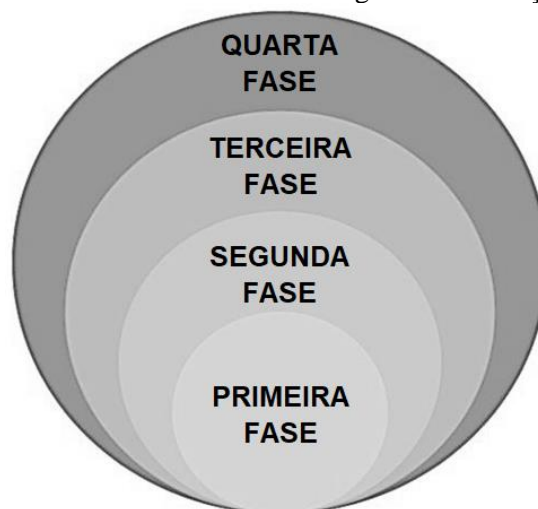
É perceptível o avanço das tecnologias digitais em diversos meios sociais, o que também deveria acontecer no campo da Educação. Contudo, a velocidade de mudança nesse contexto é bem menor, de maneira particular quando relacionada à disciplina de Matemática.

Apesar de pesquisas envolvendo o uso do celular inteligente em cenários educacionais serem recentes, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) apontam para várias outras mídias e aparatos que estiveram presentes no campo da Educação Matemática ao longo dos últimos anos. Buscando refletir sobre as influências da internet e outras tecnologias em sala de aula, os autores sistematizaram pesquisas em Educação Matemática relacionadas ao uso de tecnologias, dividindo-as em quatro fases. Em síntese,

a primeira fase é caracterizada pelo uso do software LOGO, a segunda pelo uso de softwares de geometria dinâmica e sistemas de computação algébrica, a terceira pelo uso da internet em cursos a distância e a quarta pelo uso da internet rápida que democratiza a publicação de material digital na grande rede (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018, p. 17).

Para os autores, uma nova fase surge quando inovações tecnológicas possibilitam novos cenários de investigação matemática. Porém, é importante entender que o surgimento de cada fase não exclui ou substitui a anterior. Havendo certa “sobreposição” entre as fases, “elas vão se integrando. Ou seja, muitos dos aspectos que surgiram nas três primeiras fases são ainda fundamentais dentro da quarta fase. Muitas das tecnologias ‘antigas’ ainda são utilizadas” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018, p. 41). Nesse sentido, o diagrama da figura 2 possibilita entender as relações apresentadas pelos autores entre as quatro fases.

Figura 3: Fases do desenvolvimento tecnológico em Educação Matemática.



Fonte: Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018, p. 42).

Vivenciamos atualmente a quarta fase, que teve início por volta de 2004, com o surgimento da internet rápida, o que proporcionou melhor qualidade de conexão e permitiu o aprimoramento dos recursos disponíveis via internet e da comunicação online (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018). Nessa fase torna-se comum a expressão Tecnologias Digitais (TD), referindo-se aos recursos tecnológicos utilizados. Entre as características dessa fase destaca-se o uso das tecnologias móveis, dentre as quais se encontram os celulares inteligentes, objeto de estudo desta pesquisa.

Os celulares inteligentes estão presentes em nossa vida de forma contínua, sendo fortemente utilizados como meio de comunicação e apresentando ferramentas cada vez mais sofisticadas que atraem um grande público, desde jovens até adultos mais exigentes. São horas diárias frente às telas cada vez maiores, momentos de lazer, informação, comunicação e aprendizagem.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) apontam que existe uma “cultura do celular” sendo desenvolvida, que privilegia interações sociais por essa mídia como meio de contato social. Dessa forma, para muitas pessoas, o celular virou item indispensável, seja para a vida pessoal, trabalho ou para o lazer. Segundo os autores, os celulares

[...] são um bem de consumo democrático, no sentido de que praticamente todos os alunos os têm (embora ainda persista a desigualdade entre os celulares disponíveis) cremos que se os celulares passarem a contar com aplicativos que emulem uma calculadora gráfica, as escolas poderiam ter sensores e a ideia de uma sala de aula de Matemática com movimento corporal intenso poderia voltar a fazer parte do imaginário dos educadores matemáticos (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018, p. 84).

No ambiente escolar é possível perceber uma resistência de educadores à utilização da tecnologia, resistência esta ampliada no que condiz ao uso do celular. Embora estejam surgindo avanços teóricos nesse campo, instituições de ensino insistem em se opor ao uso dessa ferramenta. Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) relatam uma realidade comum em nossas escolas, em que, apesar de o aluno estar conectado à internet, neste espaço ela é proibida, e reforçam que “a sala de aula resiste, mas a internet já faz parte dos coletivos que geram conhecimento, estando a sala de aula conectada ou não.” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018, p. 137).

Ao tentar conectar a realidade do ambiente escolar com os avanços dessas tecnologias, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) afirmam que a tecnologia digital está transformando o ambiente em que vivemos, suas normas e valores. Maltempi e Mendes (2016) apontam que:

é inegável a influência das TDs em nossas vidas, mas, estranhamente, a sala

de aula pouco mudou nas últimas décadas, ou seja, a configuração física da sala de aula (a disposição dos móveis e os recursos disponíveis), o papel do professor e dos alunos, e o senso comum do que acontece em uma aula, pouco foram influenciados pelas TDs. (MALTEMPI; MENDES, 2016, p.87).

Nesse sentido, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) realizam uma crítica às instituições educacionais, diante de uma realidade perturbadora, frente à divergência entre teoria e prática, onde “mais uma vez isso acontece em ritmo diferente fora e dentro da escola. Assim o abismo entre práticas que alunos e professores têm fora da escola e dentro da mesma instituição aumenta” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018, p.46).

[...] alunos e professores pressionam por mudanças no ensino de matemática. Os primeiros ao manifestarem insatisfação com uma matemática difícil, desinteressante e dissociada do mundo em que vivem; e os professores por estarem frustrados por não conseguirem estimular seus alunos a aprenderem matemática. (MALTEMPI; MENDES, 2016, p.87).

No contexto do novo coronavírus, SARS-CoV2, ficou ainda mais evidente a necessidade do uso das tecnologias nos ambientes educacionais, assim como evidenciou-se também a falta de acesso a elas. Nesse sentido, entende-se que “utilizar as Tecnologias Digitais em sala de aula é ser coerente com o tempo em que vivemos” (MALTEMPI; MENDES, 2016, p.95).

Assim como os autores apresentados, acredita-se nas potencialidades das TD e do celular como recurso pedagógico, que podem auxiliar na motivação dos alunos, assim como facilitar o aprendizado de conteúdos muitas vezes considerados complexos. Nesse sentido, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) expõem que:

A utilização de tecnologias móveis como laptops, telefones celulares ou tablets tem se popularizado consideravelmente nos últimos anos em todos os setores da sociedade. Muitos de nossos estudantes, por exemplo, utilizam a internet em sala de aula a partir de seus telefones para acessar plataformas como o Google. Eles também utilizam as câmeras fotográficas ou de vídeo para registrar momentos das aulas. Os usos dessas tecnologias já moldam a sala de aula, criando novas dinâmicas, e transformam a inteligência coletiva, as relações de poder (de Matemática) e as normas a serem seguidas nessa mesma sala de aula (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018, p. 81).

Para Ribas, Silva e Galvão (2015), entre as vantagens de se utilizar este material em sala de aula destaca-se

o poder de convergência dos celulares, integrando diversos recursos como câmera fotográfica, filmadora, gravador de voz, mensagem de texto via Short Message Service (SMS), Multimedia Messaging Service (MMS) ou e-mail, Global Positioning System (GPS), calculadora, calendário, bloco de notas, mapas, acesso a redes sociais, entre outros, é mais um aspecto a ser

considerado. Principalmente quando se leva em conta a falta de recursos didáticos disponíveis na escola para o professor mediar as suas práticas de ensino, e ele sabe que vários recursos podem estar facilmente disponíveis, sem custo, nos telefones celulares usados pelos estudantes (RIBAS; SILVA; GALVÃO, 2015, p. 9).

Além disso, outro aspecto relevante é o fato de atualmente os alunos crescerem em um mundo tecnológico, sendo que seus padrões de pensamento acabam funcionando de acordo com essa realidade. “Em contrapartida, observam-se educadores alheios à apropriação de tecnologias em suas práticas, apresentando, em muitos casos, resistência a elas” (RIBAS; SILVA; GALVÃO, 2015, p.10).

Percebe-se então que este recurso pode servir como meio de desenvolvimento do conhecimento, sendo que cabe ao professor atuar como mediador neste processo, pois o celular deve ser entendido como um recurso que demanda planejamento, não sendo um objeto para ser trabalhado apenas por seu caráter motivacional. Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) reconhecem que muitos alunos deixam de lado a atenção aos colegas e ao próprio professor diante das notificações e outras atualizações no aparelho, mas “discutir como utilizá-los, ou como incorporá-los, nos parece ser um caminho muito mais promissor do que evitá-lo” (p.103).

Dessa forma, o desenvolvimento prático de uma intervenção com o uso do celular deve ser acompanhado por uma estratégia pedagógica que contenha objetivos e resultados pré-determinados. Reforçando essa concepção, os PCN dizem que:

O uso de recursos tecnológicos em sala de aula tem por finalidade ampliar a visão do aluno sobre determinado conteúdo, visto que, a utilização dessas ferramentas deve atentar para um objetivo pedagógico com planos e metas definidos almejando resultados esperados. (BRASIL, 1998, p. 56).

Além disso, este documento defende que a tecnologia

é um instrumento capaz de aumentar a motivação dos alunos, se a sua utilização estiver inserida num ambiente de aprendizagem desafiador. Não é por si só um elemento motivador. Se a proposta de trabalho não for interessante, os alunos rapidamente perdem a motivação. (BRASIL, 1998, p. 157).

Percebe-se que, apesar do avanço tecnológico nas últimas duas décadas, os PCN já retratavam a importância do uso da tecnologia em ambientes de ensino, sendo atual nesse sentido e também quanto ao objetivo de despertar o interesse no aluno, ou seja, fazer com que este seja ativo no processo de construção do seu aprendizado.

Devido a experiências de sala de aula vivenciadas pelo pesquisador, o objeto de estudo





desta pesquisa é o aplicativo *Photomath*. Ele é comum entre os alunos, visto a facilidade de uso e por apresentar “soluções” detalhadas de problemas apresentados nas aulas de matemática. Nesse sentido, a próxima subseção apresenta informações sobre os aplicativos, apontando algumas opções e destacando o *Photomath*.

2.3.1 O aplicativo Photomath

Como forma de trazer novas funcionalidades e deixar os celulares ainda mais completos, são vários os aplicativos disponibilizados nas “lojas” de cada sistema operacional de celulares inteligentes. Existe, assim, uma enorme diversidade, desde aplicativos para diversão e entretenimento até ferramentas que auxiliam no dia a dia do trabalho e, inclusive, no cenário educacional.

Neste sentido, é possível realizar explorações de forma a conhecer e buscar uma integração dessas ferramentas em sala de aula, visto que esta pode ser uma maneira de trazer a realidade dos alunos para este contexto. O quadro 5 apresenta alguns exemplos de aplicativos que podem auxiliar no estudo de diversos conceitos matemáticos.

Quadro 5: Exemplos de aplicativos disponíveis para celulares inteligentes.

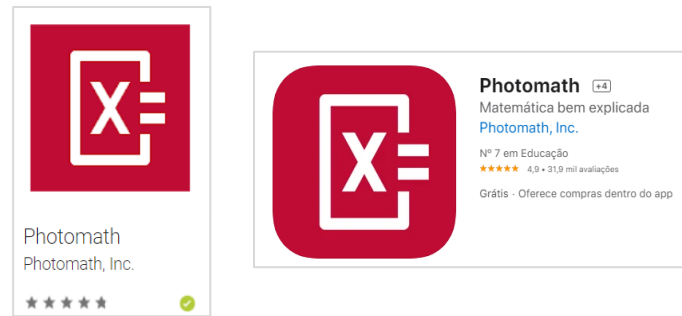
	<p>Mathway Uma calculadora gráfica que auxilia em problemas matemáticos ao permitir tirar uma foto ou digitar a questão.</p>
	<p>GeoGebra Versão para dispositivos móveis do GeoGebra, que consiste em um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra.</p>
	<p>Mathematics Uma calculadora avançada que auxilia no trabalho com funções. Apresenta gráficos, limites e integrais de forma simples.</p>
	<p>Angulus Permite identificar ângulos a partir da câmera do celular ou em alguma imagem na galeria de forma prática.</p>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os exemplos em destaque são lúdicos e de fácil interação, o que pode aproximar e despertar a atenção dos alunos, permitindo que trabalhem diversos conceitos de forma diferenciada.

O aplicativo utilizado nesta pesquisa é o *Photomath*, uma calculadora gráfica que digitaliza de forma instantânea problemas impressos ou escritos à mão utilizando a câmera do

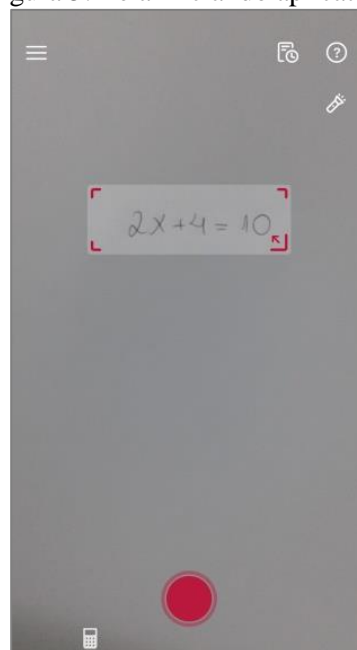
celular, sendo possível também digitá-lo com o auxílio do teclado. O aplicativo decompõe o problema matemático em passos simples e fáceis para que o aluno possa compreender os conceitos envolvidos, além de, quando possível, esboçar seu gráfico. O motivo de escolha do *Photomath* foi devido à familiaridade com o mesmo, já que é recomendado aos alunos como forma de confirmar e entender o desenvolvimento de cálculos e os processos de manipulação algébrica.



Fonte: Imagem do aplicativo na Play Store e na Aple Store.

O *Photomath* está disponível, de forma gratuita, para celulares com os sistemas operacionais *Android* e *IOS*. Para obter o aplicativo, basta acessar a loja do dispositivo em cada sistema, digitar a palavra “*Photomath*” no campo de busca, localizar o aplicativo com o símbolo indicado na figura 4 e instalar. Uma desvantagem do aplicativo é a necessidade de conexão com a internet, ou seja, ele não funciona de modo *off-line*.

Figura 5: Tela inicial do aplicativo



Fonte: Imagem do aplicativo.

Além de possuir funcionalidades bastante intuitivas, o aplicativo oferece um botão de “ajuda” que mostra um pequeno manual em três vídeos curtos, conforme figura 6. Neste

manual são apresentadas: (1) opção de ajuste e funcionalidade da câmera; (2) calculadora avançada; (3) função histórico.

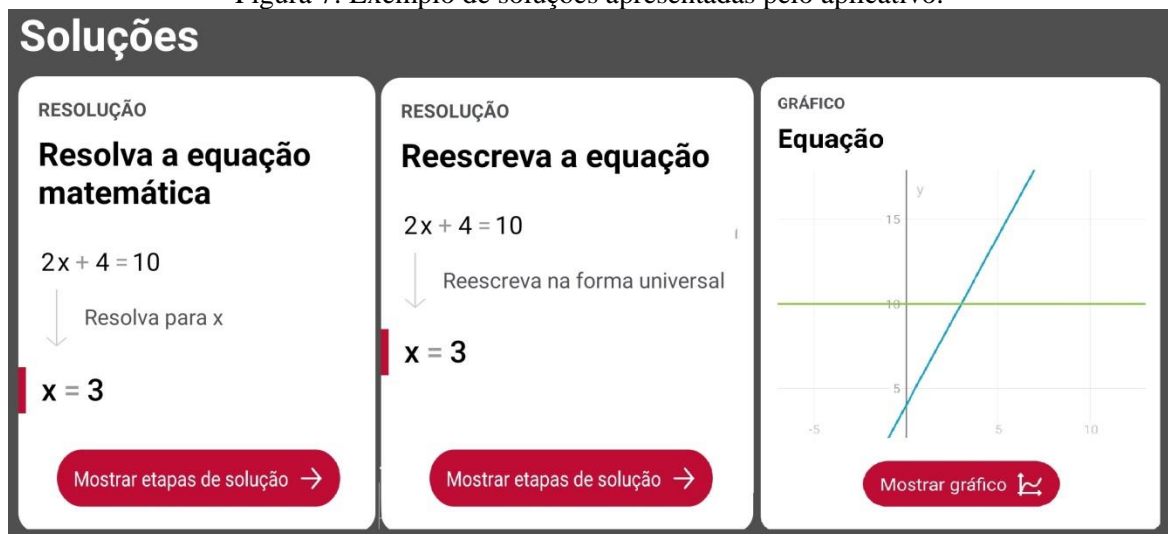
Figura 6: opções de “ajuda” apresentadas pelo *Photomath*.



Fonte: Imagem do aplicativo.

Após a digitalização ou digitação de um problema o aplicativo apresenta sua solução, assim como a opção de mostrar um passo a passo de sua resolução. Além disso, quando o problema proposto possui uma representação gráfica, o mesmo é apresentado como uma das soluções. Na figura 7 é apresentado um exemplo das possíveis soluções apresentadas pelo aplicativo, a partir da digitalização de “ $2x+4=10$ ”.

Figura 7: Exemplo de soluções apresentadas pelo aplicativo.



Fonte: Imagem do aplicativo.

Na figura 7, ao digitalizar “ $2x+4=10$ ” tem-se uma representação gráfica, a qual esta associada à ideia de função e não da equação apresentada, visto que a mesma possui solução

única. Nesse sentido, é importante deixar claro que o professor precisa dominar o aplicativo e as ferramentas de modo a explicar e auxiliar os alunos que nem tudo que é apresentado é uma solução direta do problema proposto.

Conceição (2018), ao estudar concepções de professores em relação a aplicativos educacionais voltados a Matemática, realizou uma oficina utilizando o *Photomath*. Com isso, a partir de avaliações docentes, a autora aponta algumas potencialidades do aplicativo:

- *Potencializar a compreensão de conceitos*: pois apresenta um passo a passo da resolução, informando as propriedades matemáticas que foram utilizadas;
- *Introduzir e/ou fixar conteúdos*: visto que o reconhecimento manuscrito facilita o uso do aplicativo para sanar dúvidas e pode despertar a curiosidade dos alunos na introdução de novos conteúdos;
- *Corrigir (feedback imediato)* – o aplicativo permite a verificação de resultados, permitindo uma avaliação imediata;
- *Oportunizar a investigação Matemática* – a resolução dos cálculos apresentados pelo aplicativo viabiliza o tempo de aula para atividades de resolução de problemas;
- *Visualizar a resolução de exercícios avançados ou complexos* – a apresentação da resolução detalhada oportuniza visualizar exemplos mais complexos;
- *Possibilitar a recuperação paralela* – a quantidade de conteúdos que o aplicativo reconhece possibilita que os alunos revisem conteúdos já estudados;
- *Oportunizar o uso em diferentes níveis de ensino* – o reconhecimento de diferentes conteúdos possibilita a utilização no Ensino Fundamental, Médio e Superior;
- *Visualizar diferentes representações matemáticas* – o aplicativo possibilita a visualização algébrica, analítica e geométrica.

Apesar de possuir algumas vantagens perceptíveis, o *Photomath* muitas vezes é criticado por professores de matemática, por estes acreditarem que ele acaba fazendo o papel do aluno, ao mostrar o resultado e solução das questões e problemas propostos. Nesse sentido é importante destacar o uso pedagógico do mesmo, que vai depender da proposta e da intencionalidade aplicada durante uma intervenção. Pois, para que um aplicativo seja considerado educativo, deve não apenas facilitar o ensino, mas promover aprendizagem (MORGADO, SPILKER E SILVA, 2013).

Percebe-se então a necessidade de organização e planejamento bem alinhados para que o aplicativo auxilie na construção de conhecimentos e permita a reflexão, não se limitando a ser apenas um meio de apresentação de soluções. Em relação às atividades investigativas, o *Photomath* pode ser um aliado quanto a exploração numérica e algébrica, permitindo ainda analisar a forma gráfica de diversas funções. Devido à facilidade de seu uso e dinamismo, ele atrai a atenção dos alunos, e estes, com a exploração das ferramentas do aplicativo, podem

levantar debates e questões pertinentes, além de poderem verificar possíveis conjecturas e testá-las. Romanello (2016) aponta que

[...] o aplicativo permite que os alunos testem suas conjecturas à medida que são tomados pela curiosidade, incentivando a busca pelo conhecimento. Além disso, permite uma interação imediata do aluno com o aplicativo, não sendo necessário que ele aprenda a usar softwares sofisticados. O *feedback* imediato fornecido pelo aplicativo faz com que professor e alunos explorem uma maior variedade de exemplos e em menor tempo do que se estivessem apenas utilizando a lousa. Além disso, as discussões que podem ocorrer durante essas explorações permitem que os alunos falem matematicamente e expressem suas ideias durante as aulas. (ROMANELLO, 2016, p.11)

Buscando um maior aprofundamento em relação a estudos sobre o uso dos celulares inteligentes e aplicativos no ambiente de sala de aula, na seção seguinte apresenta-se uma revisão bibliográfica de pesquisas que utilizaram esse dispositivo como metodologia e/ou objeto de pesquisa.

3. O CAMINHO PERCORRIDO POR OUTRAS PESQUISAS

Com o intuito de entender de forma mais ampla o tema desta pesquisa, particularmente no que se refere à compreensão das possibilidades apresentadas pelos celulares inteligentes como recurso para a aprendizagem de determinados conceitos matemáticos, realizou-se um levantamento bibliográfico que se constituiu na busca de teses e dissertações que investigaram o uso do “celular” e/ou “aplicativos” como objeto de pesquisa.

Percebendo um maior número de trabalhos relacionados a este tema nos últimos anos, optou-se por realizar uma análise de pesquisas entre 2015 e 2020, que se encontravam no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), com área de concentração em Ensino de Matemática ou Educação Matemática. Para a busca dos trabalhos, utilizaram-se os termos: “smartphone”, “telefone”, “celular inteligente”, “Matemática” e “Ensino de Matemática”, resultando em 2349 trabalhos, dos quais optou-se por estudar aqueles que utilizavam a palavra “celular” ou “aplicativo” no próprio título e, apresentavam relação com o tema desta pesquisa, o que reduziu a busca a 15 trabalhos.

Todas as 15 pesquisas estudadas eram dissertações, das quais 13 aconteceram no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. O programa busca atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica, propondo em sua ementa uma capacitação com base em uma formação aprofundada dos conteúdos matemáticos.

Durante o estudo e análise dos trabalhos, alguns pareceram não estar enquadrados no critério estabelecido, ou seja, práticas de sala de aula, mas na criação e desenvolvimentos de aplicativos e materiais didáticos, o que fez com que se dividissem os trabalhos em dois grupos.

Quadro 6: Pesquisas que contemplam o levantamento bibliográfico.

PESQUISAS QUE INVESTIGARAM PRÁTICAS COM APLICATIVOS E/OU CELULARES			
Autor	Título da Pesquisa	Instituição	Ano
ALMEIDA, Ana Mary Fonseca Barreto.	REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE POLINÔMIOS USANDO APLICATIVOS EM TABLETS	UENF	2015
ROMANELLO, Lais Aparecida.	POTENCIALIDADES DO USO DO CELULAR NA SALA DE AULA: ATIVIDADES INVESTIGATIVAS PARA O ENSINO DE FUNÇÃO	UNESP	2016
MADURO, Rosiany Marla Riker.	O USO DO CELULAR EM SALA DE AULA: ATIVIDADES DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO	UFOPA	2016

SCHMITZ, Neuri.	O USO DO TELEFONE CELULAR COM O APLICATIVO WHATSAPP COMO FERRAMENTA DE ENSINO DE MATEMÁTICA	UTFPR	2016
BARRETO, Liliâne Silva Faria.	APLICATIVOS GRATUITOS COMO FERRAMENTA TECNOLÓGICA NO DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO MENTAL	UENF	2017
CONCEIÇÃO, Daiane Leal.	APLICATIVOS EDUCACIONAIS NO ENSINO DA MATEMÁTICA: POTENCIALIDADES DE USO EM CONCEPÇÕES E PRÁTICAS DOCENTES	UFPEL	2018
SILVA, Luciano Pinto.	CELULAR COMO FERRAMENTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA	UNIR	2018a
NOGUEIRA, Eduardo Leandro Peres.	O USO DA CALCULADORA GRÁFICA GEOGEBRA NO SMARTPHONE COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA	UFRN	2018
AMIM JUNIOR, Jair Elias.	TOMADA DE DECISÕES E O APRENDIZADO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA: UMA EXPERIÊNCIA COM APLICATIVOS PARA SMARTPHONE.	UFG	2018
SILVA, Paulo Cosme Amorim.	GEOMETRIA ESPACIAL: USO DO APLICATIVO GEOGEBRA EM SMARTPHONES	UFG	2018b
NEIVA, Ramon da Silva.	O ENSINO DA MATEMÁTICA E AS NOVAS TECNOLOGIAS DIGITAIS: A APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DO APLICATIVO PHOTOMATH.	UFRB	2019
PESQUISAS QUE DESENVOLVERAM APLICATIVOS E/OU MATERIAIS DIDÁTICOS			
Autor	Título da Pesquisa	Instituição	Ano
SANTOS, Alexandre Ribeiro.	MAXIMA ON ANDROID: UMA FERRAMENTA TECNOLÓGICA NA CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE FUNÇÕES DE VARIÁVEL REAL	UFRB	2015
PEDROSO, Giselle Cacure.	UM ESTUDO SOBRE CÔNICAS E CURVAS CÚBICAS NO PLANO, E O APLICATIVO EASYMATH	UNICAMP	2015
SIMÃO, Rafael Luiz.	UM APLICATIVO EM TEORIA DOS NÚMEROS E SUA UTILIZAÇÃO COMO RECURSO DIDÁTICO	UTFPR	2018
CAMPEÃO, Vagner.	PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA DE APLICATIVO	UEL	2020

Fonte: Elaborado pelo autor

Nas próximas subseções são apresentados uma breve análise dos objetivos, objeto de estudo e principais resultados de cada um desses trabalhos, que contribuíram para a ampliação do conhecimento sobre o uso do celular e aplicativos em práticas de sala de aula. Além disso, busca-se situar o presente estudo em relação aos demais.

3.1. Pesquisas que investigaram práticas com aplicativos e/ou celulares

O trabalho de Almeida (2015), intitulado “Registros de representações semióticas no estudo de polinômios usando aplicativos em tablets”, objetivou investigar se as conversões entre o registro gráfico e o registro algébrico influenciam no processo de ensino e aprendizagem de polinômios, a alunos de 3º ano do Ensino Médio, de uma escola pública

fluminense. A autora utilizou de Duval¹ (2003, 2009, 2011), como aporte teórico em relação aos Registros de Representações Semióticas (RRS); e de Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), Nascimento (2013), Marés (2012), entre outros autores, para reforçar sobre o contexto das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) no ensino da Matemática. A pesquisa teve caráter qualitativo, utilizando a metodologia denominada Engenharia Didática caracterizada como uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa, cuja avaliação é baseada na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* da intervenção proposta.

A autora elaborou uma sequência didática com atividades investigativas, utilizando o aplicativo *xGraphing*, disponível para dispositivos com sistema *Android*. Como resultados, Almeida (2015) aponta que a conversão entre os RRS algébricos e gráficos, por meio da sequência didática, influenciou positivamente a aprendizagem de Polinômios por parte dos alunos. Além disso, o uso do plotador gráfico *xGraphing* contribuiu de forma significativa para a compreensão do comportamento gráfico das funções polinomiais, acelerou os tratamentos e permitiu um potencial de manipulações, propiciando uma aprendizagem heurística², além de possibilitar maior motivação e participação dos alunos.

Assim como Almeida (2015), Romanello (2016) também realiza um estudo envolvendo o comportamento gráfico de funções. A autora parte do questionamento: *Quais as potencialidades do uso do celular inteligente na sala de aula, quando conceitos de função são trabalhados?* Ela buscou investigar o uso do aplicativo *Matemática* para celulares inteligentes no desenvolvimento de conceitos de função quadrática. Inicialmente é realizado um panorama sobre o ensino de funções a partir de Ponte (1990) e documentos oficiais do estado de São Paulo. A autora utiliza de Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), Frederico e Gianoto (2015), Borba e Penteado (2001), dentre outros autores para relacionar o celular inteligente à Educação; e Papert (1994) e Maltempo (2009) como referência para o construcionismo. Além disso, apresenta conceitos da investigação em sala de aula, assim como o papel do professor mediante tais atividades, a partir de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013).

Durante a etapa prática foram desenvolvidas atividades com alunos de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual de Limeira, SP. A autora ressalta que o papel da professora foi muito importante, permitindo que os alunos chegassem às próprias conclusões,

¹Não são trazidas as referências dos autores citados pelas pesquisas do levantamento, pois estes não foram efetivamente utilizados como referência deste trabalho.

²O aluno é levado a descobrir e inventar ou resolver problemas mediante a experiência (própria ou observada), somada à criatividade e ao pensamento.

o que é fundamental em atividades investigativas. Romanello (2016) evidencia algumas potencialidades do uso do celular na sala de aula, das quais podem se destacar: proporcionar discussões matemáticas, dar voz à curiosidade dos alunos, possibilitar a generalização de resultados por meio da exploração de gráficos de funções e tabelas de valores, permitir que sejam trabalhados assuntos de anos posteriores e proporcionar a interação aluno-aluno e aluno-professor.

A presente pesquisa apresenta características comuns com a de Almeida (2015) e Romanello (2016), no sentido de trabalhar com atividades envolvendo o comportamento gráfico de funções, assim como a ideia de colocar o aluno como centro do processo. Além disso, aproxima-se do estudo realizado por Romanello (2016) quanto ao foco na abordagem investigativa e em relação a alguns dos referenciais utilizados.

Maduro (2016) desenvolveu uma oficina com alunos de 2º ano do Ensino Médio, através de uma sequência de atividades utilizando o software *FreeGeo*, a calculadora do celular e a internet como fonte de pesquisa. Buscando discutir e refletir sobre a inserção do celular em aulas de Matemática, visando à aprendizagem dos alunos e a tornar as aulas mais dinâmicas e atrativas, a autora utiliza de Verhmuller e Silveira (2012) e Moran (2007) ao dialogar sobre as novas tecnologias no contexto escolar; Vivian e Pauly (2012), Cavalcante (2013) e Souza (2013) quando aponta sobre as inovações e possibilidades pedagógicas e Verza (2008) relacionando o uso do celular nas aulas de Matemática.

Em suas considerações a autora aponta que o objetivo de sua pesquisa foi alcançado, se referindo à elaboração de um cenário utilizando do celular em sala de aula e do aprendizado dos alunos em relação à Matemática. Porém, ela também chama atenção para a falta de recursos e estrutura nas escolas públicas, que não acompanham os avanços tecnológicos, sendo que muitas vezes acabam restringindo-os.

Assim como Maduro (2016), Schmitz (2016) realiza um estudo com o objetivo de identificar elementos que justifiquem o uso didático do celular inteligente, investigando a tendência do m-learning³ (mobile learning). A autora destaca ainda a escassez de estudos a respeito do uso do celular como ferramenta didática. Como aporte teórico utiliza de Bairral (2016), Dorigoni e Silva (2014), Antonio (2010, 2014), Borba e Lacerda (2015), Fernandes (2015), além de vários documentos oficiais para ressaltar a importância das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) e do celular no ambiente escolar. Além disso,

³ metodologia de ensino que utiliza dispositivos móveis como plataformas para viabilizar o aprendizado.

aponta Honorato e Reis (2014), Porto (2006), Barreto (2002), Prensky (2010), entre outros autores, ao falar da relação aluno, professor, celular e *WhatsApp*.

Schmitz (2016) realizou um trabalho de campo, acompanhando dois grupos no *WhatsApp* compostos por alunos de terceiro ano do Ensino Médio que utilizaram o aparelho como ferramenta de estudo. Diante dos estudos realizados e dos grupos acompanhados, a autora conclui que o uso pedagógico do celular inteligente tem potencial para revolucionar e estreitar a comunicação entre professor e alunos, bem como proporcionar diferentes abordagens sobre os conteúdos. No entanto, observa que existe uma resistência, por parte dos docentes, à presença desse instrumento em sala de aula para fins pedagógicos.

Nesse sentido, Barreto (2017) aponta que

por mais que haja resistência, os smartphones, tablets e os mais diversos aplicativos já dominam alunos e professores, por isso o grande desafio é usar todo esse potencial tecnológico na contribuição para uma Educação de qualidade para todos (BARRETO, 2017, p. 131).

Em sua pesquisa, a autora busca investigar como o uso de aplicativos com conteúdos matemáticos pode colaborar para o desenvolvimento do raciocínio lógico por parte dos alunos, através de uma sequência de atividades que estimulem o cálculo mental aplicado às operações básicas da aritmética. A autora aponta Moran (2006) e Masseto (2006) ao relacionar as TDIC e Educação; Rosa e Azenha (2015) ao apresentar a aprendizagem móvel e Carreira e Amado (2015) ao apresentar os recursos tecnológicos para a Educação Matemática.

Sua pesquisa teve características de pesquisa-ação, na qual participaram duas turmas de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola de Macaé, RJ. O objeto de intervenção foram aplicativos gratuitos instalados em *tablets*, disponibilizados pela pesquisadora, e um planejamento, a partir do qual os alunos testaram e construíram habilidades através de jogos e explicações fornecidas pelos aplicativos, juntamente com intervenções pedagógicas feitas pela pesquisadora.

A autora aponta que, apesar do contato dos alunos com esses recursos tecnológicos, ainda não os haviam experimentado como ferramenta educacional. Ao decorrer da pesquisa, os alunos tornaram-se mais confiantes ao utilizarem os aplicativos, assim como os conteúdos e habilidades desenvolvidas, e mostraram maior interesse por entender a matemática.

Entende-se que a disseminação dos celulares inteligentes vem transformando as relações do mundo em que vivemos, inclusive no ambiente escolar, visto a relevância e potencial dessa tecnologia como ferramenta nos processos de ensino e aprendizagem.

Conceição (2018) realizou um estudo que teve como objetivo investigar as concepções de docentes sobre as potencialidades do uso de Aplicativos Educacionais no ensino da Matemática. A pesquisa teve apoio teórico de Traxler (2005) e Moura (2010) em relação ao campo da Mobile Learning; e de Saccol e Schlemmer (2011), Dias e Araújo Jr (2012) e Figueiredo (2005) nas discussões acerca do uso dos aplicativos na educação.

Conceição (2018) desenvolveu um minicurso com professores de Matemática da rede pública de ensino de diferentes regiões do Brasil. Os dados foram produzidos a partir de entrevistas realizadas com os docentes; observação das interações no fórum de discussões; análise do conteúdo dos planos de aula e narrativas digitais produzidas pelos docentes a partir de uma prática de ensino desenvolvida com o aplicativo *Photomath*. Na análise dos dados, três categorias foram concebidas: (1) relação dos docentes com as Tecnologias Digitais Móveis; (2) Apps Educacionais em avaliações docentes; e (3) práticas docentes com Apps Educacionais. Com isso, a autora aponta o reconhecimento de nove potencialidades identificadas pelos docentes na avaliação e na prática realizada, e, como resultado, evidencia que o uso desses softwares no ensino de matemática contribui em cinco aspectos: pedagógico; social; comportamental; físico e avaliativo.

Silva (2018a), em seu trabalho “celular como ferramenta de ensino e aprendizagem de Matemática”, buscou mostrar as possibilidades da implementação do celular inteligente no ambiente de sala de aula. O autor apresenta a relação do celular com o ambiente educacional a partir de Chaves (1988), Antonio (2010) e Rodrigues (2015).

Foram desenvolvidas três atividades, na forma de oficinas, com alunos de uma escola pública de Porto Velho, RO, sendo cada uma pensada a partir da utilização de um aplicativo diferente (GeoGebra, Rei da Matemática e Mestre da Matemática).

Como resultados, o autor aponta para a familiaridade dos alunos com a utilização do celular. As intervenções com os aplicativos permitiram corroborar que o celular não é somente um facilitador na aprendizagem, mas desenvolve um espírito motivador que faz com que os alunos pensem na matemática como um possível obstáculo a ser superado. Então Silva (2018a) defende que o celular não é um vilão da sociedade educacional, e, se bem utilizado, pode se transformar em uma ferramenta em sala de aula, transformando-a em um verdadeiro laboratório de ensino e aprendizagem de Matemática.

Com o objetivo de analisar o uso do *GeoGebra* em celulares inteligentes, para o ensino das Funções Exponencial e Logarítmica, a pesquisa de Nogueira (2018) buscou verificar a

capacidade do aplicativo em conduzir os alunos às definições e algumas propriedades dessas funções. Inicialmente o autor apresenta um estudo teórico sobre as tecnologias no ambiente escolar a partir de documentos oficiais e autores como Borba e Penteado (2007) e Moran (2004) e Silva (2016).

Foram elaboradas duas atividades com questões discursivas, a fim de verificar a influência dos parâmetros dos gráficos das funções Exponencial e Logarítmica, as quais foram aplicadas a turmas de 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Natal, RN.

Como resultados, Nogueira (2018) aponta que as respostas obtidas nas atividades e as opiniões dos alunos levaram a verificar que o *GeoGebra* facilitaram a compreensão do conteúdo trabalhado, além de aumentarem o interesse, sendo uma ferramenta de grande potencial benéfico para o trabalho docente e para o aprendizado do aluno. Ainda assim, o autor ressalta a importância da mediação do professor frente às tecnologias, uma vez que sua investigação aconteceu sem nenhuma intervenção, o que resultou em atividades incompletas por parte dos alunos.

Essa mesma preocupação em relação ao papel do professor é apresentada na pesquisa de Amim Junior (2018), que buscou verificar o desenvolvimento de alunos em relação à tomada de decisões em situações nas quais pudessem escolher aplicativos para auxiliar na resolução de problemas. Dentre os referenciais apresentados, destacam-se: Polya (1995), que apresenta aspectos da resolução de problemas; Voltolini (2016) e Soares (2016), que retratam o uso dos celulares inteligentes e aplicativos como ferramentas pedagógicas; e Skovsmose (2000) em relação à matemática crítica associada à resolução de problemas.

O pesquisador realizou uma intervenção em quatro encontros, o que permitiu um olhar cuidadoso da capacidade de autonomia dos alunos na escolha dos aplicativos e no desenvolvimento de um olhar crítico ao analisar as taxas de juros e opções de pagamentos.

Como resultado das intervenções, o autor elaborou uma apostila eletrônica que conta com resumos teóricos e links que direcionam a vídeos no *YouTube*. Amim Junior (2018) considera que o smartphone “não é o centro do processo, mas facilita a elaboração do raciocínio do aluno para que possa focar na tomada de decisão e na atividade em si” (p. 59), ou seja, com o uso dos aplicativos o aluno tem ampliada a possibilidade de tomada de decisões. Além disso, o autor aponta dificuldades em relação a exercícios com solução apenas algébrica, o que retrata um aspecto limitador em relação a um conceito que os alunos precisavam estar familiarizados.

O aplicativo *Geogebra* é uma opção para o trabalho com conceitos relacionados a álgebra e a geometria de forma dinâmica, além de muitas outras funcionalidades. Silva (2018b) realizou um estudo no qual questionava se o aplicativo em celulares inteligentes poderia ser um facilitador para o aluno e para o professor no processo de ensino-aprendizagem. Ao apontar sobre as TIC e sua Inserção no processo de ensino e aprendizagem ele utiliza de Fante (2007; 2008), Serpa (2008), Valente e Almeida (2009); e ao relacionar os aspectos éticos e legais no uso das tecnologias e internet aponta autores como Peck e Sleiman (2007; 2008) e Ferreira (1996).

Sua pesquisa foi realizada em uma turma de segundo ano do Ensino Médio, na qual o autor lecionava. Nem todos os alunos possuíam celulares compatíveis com o aplicativo, o que evidenciou a necessidade de trabalho em grupo. Houve a elaboração de uma sequência de atividades abordando o conteúdo de Geometria Espacial, voltada para o incentivo aos discentes, para que, de posse das informações analisadas, pudessem participar de forma mais crítica do estudo desenvolvido por meio do aplicativo. Silva (2018b) apresenta uma análise de cada uma das aulas e apresenta considerações em relação às dificuldades de se trabalhar esse conteúdo pelo método tradicional, utilizando apenas livros, lousa e giz. Evidencia ainda que

o GeoGebra é uma ferramenta que incorpora grandes facilidades ao processo de ensino e aprendizagem, indo além da mera ilustração, levando os alunos a pensar matematicamente. Neste sentido, a utilização de recursos tecnológicos na escola, como o GeoGebra e vários outros, permite aos professores mediar o processo de uma forma mais enriquecedora, motivando o aluno a ser ativo na construção do seu próprio conhecimento. (SILVA, 2018b, p. 68)

Assim como Silva (2018b), Neiva (2019) realizou uma investigação com um aplicativo que também une álgebra e geometria, o *Photomath*. O autor buscou analisar a contribuição que o aplicativo *Photomath* pode trazer para o ensino e aprendizagem de conceitos de Função Trigonométrica.

Ele realizou uma intervenção prática com estudantes de uma escola pública e através da análise desses momentos e de questionários respondidos pelos alunos, considera que o aplicativo estudado pode ser empregado como uma ferramenta para auxiliar e complementar o processo de ensino. Por fim, afirma que quando integrado a uma estratégia pedagógica mais ampla, planejada e estruturada, certamente resultará em uma prática relevante e necessária nos dias atuais. Apesar da pesquisa de Neiva (2019) apresentar semelhança com este estudo, entende-se que a definição da abordagem é um ponto de destaque, o que pode ser considerado um avanço em relação ao que foi percebido em muitos dos trabalhos analisados.

Além disso, com o estudo destas pesquisas, é possível perceber a relevância do celular como uma ferramenta que pode auxiliar em sala de aula no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, resgatando o interesse e construindo uma nova maneira do aluno desenvolver seu conhecimento. Possibilitou entender também algumas das dificuldades apresentadas, como a falta de estruturação e informações adequadas, o que faz com que este objeto não seja melhor aproveitado no ambiente escolar.

Vale ressaltar que o professor assume um papel importante, defendido em grande parte das pesquisas, na função de mediador entre os alunos e a forma de construção de conhecimento. Ademais, destaca-se a necessidade de um planejamento estruturado, de forma que o trabalho junto ao celular assuma significado e permita que os alunos sejam instigados a realizar o que for proposto.

Percebe-se que alguns dos trabalhos estudados se utilizaram, além da mediação do professor, de um condutor, ou seja, uma metodologia específica ou estratégia didática para auxiliar nas atividades com o celular e/ou aplicativo. Destacam-se a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas. Pode-se notar, também, a presença de alguns autores como importantes referências a respeito das TD, assim como em relação aos celulares inteligentes, dentre os quais estão inseridos aqueles que compõem o aporte teórico desta pesquisa.

Buscando situar este estudo em relação às pesquisas contidas neste levantamento, pode-se considerar que se trata também de uma investigação de prática de aulas envolvendo o uso de aplicativos e do celular, apresentando semelhanças com alguns dos autores quanto ao foco no comportamento gráfico, metodologia adotada e escolha do aplicativo. Porém, entende-se que o questionamento que direciona esta pesquisa poderá trazer considerações relevantes com relação ao uso do celular e dos aplicativos, assim como das tarefas investigativas. Além disso, visto o contexto das aulas remotas, podem surgir percepções significativas para estudos futuros.

3.2. Pesquisas que desenvolveram aplicativos e/ou materiais didáticos

Buscando apresentar as potencialidades do aplicativo Maxima on Android como ferramenta para a construção de gráficos de funções de variável real, Santos (2015) faz um estudo em relação a teoremas sobre funções, limites, continuidade e derivadas. Com isso, apresenta o aplicativo Maxima on Android, ressaltando as ferramentas disponíveis e

funcionalidades que podem ser utilizadas na complementação da teoria de diversos conteúdos matemáticos.

Sua pesquisa não aponta uma metodologia específica, assim como um aprofundamento teórico, mas se volta à apresentação e ao estudo do aplicativo, que é apontado como um diferencial tecnológico que torna o estudo da disciplina envolvida mais interessante para os alunos, podendo comprovar resultados, descobrir novos ou buscar mais informações.

Assim como na pesquisa de Santos (2015), Pedroso (2015) realiza um estudo sobre cônicas e curvas cúbicas no plano, e como parte de uma aplicação didática apresenta o aplicativo EasyMath. A autora realiza uma revisão sobre álgebra linear, classificando curvas e cônicas no plano, levando em conta translações e rotações. Além disso, apresenta também o Teorema do Hexágono de Pascal e a classificação de Newton de Curvas Cúbicas no Plano. Como parte de seu trabalho, desenvolve o aplicativo "EasyMath" para smartphones e tablets disponível no sistema Android, contendo os assuntos abordados de forma intuitiva e simples.

Simão (2018) apresenta um estudo teórico sobre teoria dos conjuntos, a fim de justificar o desenvolvimento de um aplicativo do tipo quiz para dispositivos móveis, isto é, um jogo com questões e soluções relacionadas a tópicos em Teoria de Números elementar. O autor aponta que a criação do aplicativo "Teoria dos Números Quis Show" tem o intuito de servir como ferramenta de apoio a professores de matemática, além de motivar os estudantes.

Assim como no presente estudo, Campeão (2020) desenvolveu uma proposta investigativa envolvendo o pensamento algébrico com o uso do aplicativo Algebrizar. Sua investigação foi desenvolvida pensando nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental de forma alinhada às competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular – BNCC. O autor apresenta uma reflexão sobre o atual cenário do ensino da álgebra, afirmando ser fundamental que esta seja inserida nos anos iniciais de escolaridade, sem o formalismo simbólico e rigor algébrico, mas por meio de diálogos, levantamento de hipóteses e formulação de conjecturas, visando promover uma generalização e percepção de regularidades, ou seja, o pensamento algébrico.

As semelhanças entre as pesquisas, em fazer um estudo de determinado conteúdo Matemático e sua ligação com um material tecnológico, são características comuns a algumas das dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, no qual as pesquisas foram realizadas. Apesar destes trabalhos não relatarem intervenção no ambiente de sala de aula, é perceptível a valorização das TD, em especial o uso dos

aplicativos, que podem ser facilmente encontrados e utilizados. Os autores ressaltam que estes objetos são facilitadores da aprendizagem, isso porque permitem despertar o interesse do aluno e os tornam ativos no processo de aprendizagem.

4. PERCURSO METODOLÓGICO

Esta seção tem o objetivo de apresentar a metodologia adotada nesta pesquisa. Além disso, evidencia o processo de produção dos dados, a escolha dos participantes e do contexto de pesquisa, o aplicativo *Photomath*, as atividades elaboradas e o procedimento adotado para análise dos dados.

4.1. Abordagem da Pesquisa

Com vistas a investigar possibilidades e limitações do uso do aplicativo *Photomath* para a apreensão de conceitos relacionados ao comportamento gráfico de funções trigonométricas por alunos de Ensino Médio, e a compreender à questão que conduz este estudo, optou-se pela pesquisa qualitativa do tipo naturalista ou de campo, a qual acredita-se ter traços que melhor se adequam a este estudo, por ser uma

modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece e pode se dar por amostragem, entrevista, observação participante, pesquisa-ação, aplicação de questionário, teste, entre outros (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 106).

Pesquisas qualitativas “fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações” (ARAÚJO; BORBA, 2019, p. 25), características que são ímpares em relação a outras modalidades. Goldenberg (2004) reforça que neste tipo de estudo a “preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória.” (p. 14). Além disso,

partindo do princípio de que o ato de compreender está ligado ao universo existencial humano, as abordagens qualitativas não se preocupam em fixar leis para se produzir generalizações. Os dados da pesquisa qualitativa objetivam uma compreensão profunda de certos fenômenos sociais apoiados no pressuposto da maior relevância do aspecto subjetivo da ação social (GOLDENBERG, 2004, p. 49).

A pesquisa qualitativa exige mais do que simplesmente colher e verificar dados, exigindo do pesquisador uma reflexão cuidadosa sobre esses elementos a fim de levantar considerações pertinentes. Ou seja, o principal interesse em uma pesquisa qualitativa está centrado no processo e não nos resultados (BOGDAN E BILKEN, 1994).

Nesse sentido, tendo também definida a questão de pesquisa, assim como os objetivos a serem alcançados, foi necessário determinar a forma de trabalho, pois “só se escolhe o

caminho quando se sabe aonde se quer chegar” (GOLDENBERG, 2004, p. 14). Portanto, buscando atingir o objetivo de pesquisa e refletir sobre a questão proposta, utilizou-se dos seguintes instrumentos para a produção dos dados:

- a. registros de observação em diário de campo, que, segundo Bogdan e Biklen (1994), constituem-se como um instrumento no qual o pesquisador registra acontecimentos relevantes que vão surgindo no decorrer das intervenções, assim como ideias e preocupações;
- b. gravações em vídeo dos momentos de interação síncrona pelo *Google Meet*, nos quais os alunos expressavam suas observações para o professor e entre eles próprios, realizando discussões e reflexões pertinentes sobre as atividades propostas;
- c. apresentação produzida pelos alunos no *Apresentações Google*, que serviu para auxiliar no entendimento das conclusões e conjecturas apresentadas;
- d. atividade diagnóstica acerca do tema de intervenção, objetivando verificar os conceitos de maior dificuldade e possibilitando compreender avanços no pensamento matemático e na capacidade de argumentação dos alunos.

Na próxima seção é realizada uma descrição da forma de produção dos dados deste estudo, sendo apresentados o contexto e participantes da pesquisa; o processo de elaboração da atividade diagnóstica; a estrutura das tarefas investigativas desenvolvidas e um detalhamento da forma de realização das atividades propostas.

4.2. Contexto e participantes da pesquisa

A investigação teve como ambiente um Centro de Educação Profissional estadual público, localizado na cidade de Brazópolis, MG que, desde 2016, teve implementado o Ensino Médio Integrado aos cursos técnicos de Administração, Eletrônica, Informática e, mais recentemente, Logística. Devido à qualidade e reconhecimento dos cursos técnicos da instituição, a escola forma alunos de várias localidades desde 1986, quando ainda era denominada como uma escola Técnico-Industrial.

No ano de 2021, a escola possuía 305 alunos divididos entre 10 turmas de 1º, 2º e 3º ano de Ensino Médio. Além disso, no período noturno, contava com duas turmas de curso técnico pós-médio. Os participantes da pesquisa foram alunos de duas turmas de 3º ano, com idades entre 16 e 18 anos. Dentre eles, 30 alunos pertenciam a uma turma de Informática (I3A) e 14 alunos a uma turma de Administração (A3A).

A escolha deste ambiente, em particular, aconteceu devido ao contato do professor pesquisador com a escola, na qual lecionava desde 2020. O mesmo relata que este contexto se mostra aberto a novas propostas, porém, mediante situações vivenciadas, é possível perceber que parte do corpo docente utiliza métodos tradicionais, não fazendo uso de metodologias alternativas. Apesar disso, visto que os alunos passam grande parte do dia na escola, além de terem uma formação técnica incorporada às disciplinas básicas, existe um incentivo para que novas estratégias sejam adotadas.

Entendendo que podem existir riscos relacionados a pesquisa, buscou-se esclarecer aos participantes que os dados registrados teriam uso único e exclusivo do pesquisador, ressaltando-se ainda que em nenhum momento serão divulgados nomes e todo o material coletado será utilizado apenas com o propósito da pesquisa. Salienta-se ainda que o projeto desse estudo foi aprovado pelo Comitê de Ética⁴ do Centro Universitário de Itajubá e que foram utilizados nesse processo o termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE), destinado aos alunos maiores de idade e aos responsáveis dos alunos menores de idade, e o termo de assentimento livre e esclarecido (TALE) destinado aos alunos menores de idade.

Devido ao contexto da pandemia do novo coronavírus, SARS-CoV2, mediante o decreto nº 113 de 12 de março de 2020, instaurou-se situação de emergência em Minas Gerais, sendo que em 15 de março, através do decreto nº 47.886, foram determinadas medidas de distanciamento social. Em deliberação, o Comitê Extraordinário da Covid-19 determinou a suspensão das aulas em todas as escolas da rede estadual como formas de combate e enfrentamento à doença, iniciando-se em 18 de março. Em deliberação nº 26 de 8 de abril de 2020, determinou-se a volta às atividades, em regime de teletrabalho, de diretores, vice-diretores, assistentes técnicos, analistas e auxiliares de educação básica.

Através da resolução nº 4.310, publicada em 18 de abril de 2020, foi instituído o Regime Especial de Teletrabalho para os servidores em exercício nas unidades escolares da Rede Pública Estadual de Ensino de MG, sendo adotado o Regime Especial de Atividades Não Presenciais (REANP), visando à organização das atividades escolares obrigatórias. Neste sentido, após reorganização do calendário escolar, em 13 de maio de 2020 foram retomadas as atividades, de maneira remota. Essa mudança impôs a migração das aulas para ambientes virtuais, sem que houvesse treinamento prévio ou orientação quanto às formas de contato com os alunos.

⁴ Aprovado sob parecer nº 4.464.365.

As ferramentas oferecidas pela Secretaria de Estado de Educação (SEEMG), como suporte, neste primeiro momento, foram:

- O Plano de Estudo Tutorado (PET), oferecido para a continuidade no processo de ensino e aprendizagem, o qual se assemelhava a uma apostila contendo atividades e orientação de estudos, devendo ser realizado de forma obrigatória;
- O Programa “Se Liga na educação”, transmitido pelo canal Rede Minas de segunda a sexta, ficando também disponível no *Youtube*. Este teve como objetivo auxiliar os alunos em relação aos conteúdos apresentados nos PET;
- O aplicativo Conexão Escola, disponível para celulares inteligentes, no qual o aluno, após o download, teria acesso aos PETs, às aulas do programa “Se liga na educação” e em teoria, contato com os professores.

Neste sentido, foi necessária uma adaptação da escola, assim como do corpo docente e pedagógico a esta nova realidade. Devido à demora da disponibilidade e problemas constantes do aplicativo *Conexão Escola*, optou-se por aderir ao *Google Sala de Aula* como forma de divulgar as atividades dos PET, auxiliar em dúvidas e estar em contato com os alunos. Além disso, os professores que demonstrassem interesse poderiam realizar encontros de maneira síncrona com as turmas, utilizando a ferramenta *Google Meet*.

Não havendo expectativa quanto a um possível retorno presencial, o ano letivo de 2021 iniciou-se ainda de forma remota. Porém, as estratégias adotadas pela SEEMG foram aprimoradas, tendo em vista os resultados de 2020. Apesar da escola já utilizar o *Google Sala de Aula*, este se torna uma ferramenta obrigatória, que foi incorporada ao aplicativo Conexão Escola 2.0. Os PETs passaram a ser bimestrais, permitindo uma maior autonomia ao professor em poder elaborar materiais complementares. Como forma de acompanhar o aprendizado dos estudantes, foram realizadas três avaliações diagnósticas ao longo dos bimestres, tendo por base os conteúdos abordados nos PETs.

Com a disponibilidade das ferramentas do *Google Workspace*⁵ pela SEEMG, apesar de não ser uma estratégia obrigatória, a escola definiu junto aos professores que todos adotassem as aulas síncronas através do *Google Meet*. Este movimento se fez necessário devido às baixas perspectivas de retorno presencial e à defasagem dos estudantes em relação aos conteúdos de cada disciplina.

⁵ Serviço do Google que oferece versões de vários produtos Google, os quais foram adquiridos pela SEEMG e disponibilizados acesso a todos os servidores da educação.

Diante deste cenário, a investigação precisou ser repensada para que a realização das etapas de intervenção pudesse acontecer de forma remota. Neste sentido, na próxima seção são apresentados os movimentos de (re)adaptação das atividades relacionadas à tarefa investigativa para este contexto das aulas remotas.

4.3. As tarefas investigativas e a atividade diagnóstica

A escolha do tema a ser trabalhado precisou estar vinculada à acessibilidade dos estudantes, bem como à disposição dos conteúdos no material disponibilizado aos alunos e a relação com o aplicativo *Photomath*, observando pontos importantes para auxiliar no desenvolvimento deste estudo. Neste sentido, com a intenção de realizar a pesquisa no primeiro bimestre de 2021, inicialmente foi realizada uma análise do PET Volume 1 disponibilizado pela SEEMG, buscando um conteúdo que pudesse auxiliar no objetivo da pesquisa.

O PET de Matemática do 3º ano do 1º Bimestre apresentava uma revisão de alguns conteúdos de 2º ano, trabalhados em 2020. Este material apresentava quatro blocos, divididos da seguinte maneira:

- **Semana 1:** Análise Combinatória e Probabilidade;
- **Semana 2:** Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e Sistemas Lineares;
- **Semana 3:** Trigonometria no círculo e funções trigonométricas;
- **Semana 4:** Geometria Espacial.

Definiu-se que as atividades da tarefa investigativa⁶ abordariam o tema da semana 3, visto que é um conceito que os alunos apresentam maior dificuldade, além de permitir várias explorações através do *Photomath*. Levando em conta que estes conceitos já haviam sido apresentados anteriormente através do material dos PETs em 2020, optou-se por explorar como a mudança nos coeficientes das funções seno e cosseno podem interferir no comportamento de seus gráficos.

Para a elaboração da tarefa investigativa, assim como seu desenvolvimento, considerou-se os passos apontados por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013): preparação de uma tarefa exploratória e inquiridora para os alunos; introdução da tarefa e arranque para sua realização; realização da tarefa e elaboração do relatório da atividade desenvolvida e;

⁶ Apêndice A

socialização e discussão coletiva dos resultados produzidos pelos grupos.

O ponto de partida para a elaboração da tarefa investigativa foi uma atividade do livro de Dante (2012), quadro 07, a qual inicialmente pode parecer bastante difícil. Além disso, ela pode ser considerada um problema fechado, não permitindo mais de uma solução. Sendo situada no ambiente de aprendizagem 3, ou seja, um exercício da semirrealidade (SKOVSMOSE, 2000).

Quadro 7: problema apresentado por Dante (2012).

Carol e Cláudio, passeando em um parque de diversões, resolvem andar na roda-gigante. Segundo informações que leram, a altura em que estariam em relação ao solo pode ser aproximadamente descrita pela função, em que t é dado em segundos e h em metros:

$$h(t) = 19.\text{sen}(24t + \pi) + 20$$

- a) Qual é o raio da roda-gigante?
b) Qual é o tempo necessário para eles darem uma volta completa na roda-gigante?

Fonte: DANTE, 2012, p. 280.

O motivo de escolha deste problema é por entender que o mesmo pode gerar dúvidas em relação aos conceitos necessários para sua solução, que serão trabalhados por meio das atividades investigativas propostas. Com isso, espera-se que, ao final das etapas de intervenção, os alunos sejam capazes de voltar a atividade, compreendê-la e resolvê-la de maneira mais tranquila.

Neste sentido, buscando a elaboração de uma tarefa exploratória e que pudesse trazer indagações aos alunos, o professor pesquisador optou por realizar uma adaptação de uma proposta de Cristovão (2012), na qual buscava-se analisar o papel dos coeficientes no comportamento de funções trigonométricas utilizando-se o software *GeoGebra*. Porém, diferentemente da autora, que trouxe uma proposta mais aberta, o professor pesquisador preferiu trazer alguns questionamentos que pudessem auxiliar os alunos, tendo cuidado em não eliminar o caráter investigativo das situações propostas.

As atividades foram divididas em duas partes (etapa 1 e etapa 2), que buscavam investigar cada um dos coeficientes em funções do tipo $f(x) = a.\text{sen}(b.x + c) + d$ ou $f(x) = a.\text{cos}(b.x + c) + d$. Na etapa 1 investigou-se os coeficientes a e b e na etapa 2 os coeficientes c e d . Além disso, após a socialização de todos os grupos, houve uma discussão final com questionamentos que formariam uma etapa 3, que precisou ser replanejada por conta do tempo de aplicação.

A primeira etapa envolvia duas atividades. Elas tinham o objetivo de instigar os alunos

a investigarem o papel dos coeficientes a e b no comportamento gráfico das funções seno e cosseno. Em cada uma das atividades os alunos precisavam plotar seis gráficos no *Photomath*, gráficos estes que tinham os coeficientes variando entre valores positivos, negativos e decimais. A segunda etapa teve características semelhantes, sendo que a investigação ocorreu em relação aos coeficientes c e d . Como forma de auxílio aos alunos, foram propostos alguns questionamentos em ambas as etapas, conforme quadro 8.

- a) Após explorar as funções, o que vocês podem dizer sobre as diferenças e semelhanças entre os gráficos analisados?
- b) Vocês conseguem apontar o domínio, imagem e período das funções analisadas? Busquem explorar o aplicativo.
- c) O que é possível afirmar sobre o coeficiente “ a ” em uma função do tipo:

$$f(x) = a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Além das etapas apresentadas, planejou-se um momento de discussão final, que seria dedicado à interação com os alunos em relação a algumas questões envolvendo os conceitos abordados nas etapas 1 e 2. Além disso, este momento seria dedicado ao problema de Dante apresentado inicialmente, buscando compreendê-lo e encontrar sua solução a partir da investigação realizada anteriormente.

Tendo em vista que o professor pesquisador participa do Grupo de Estudos Interdisciplinares e Formação de Professores (GEIFOP), houve um momento de discussão com uma das integrantes do grupo sobre cada atividade, visto que a mesma realizava estudos voltados à investigação matemática. Este momento foi dedicado a entender as características de cada etapa, a abertura das atividades propostas, ou seja, se realmente caracterizavam uma atividade investigativa, e discutir possíveis soluções e caminhos que os alunos poderiam apresentar.

Além disso, ao analisar a tarefa investigativa a partir do quadro teórico de análise de tarefas matemáticas (COSTA e OLIVEIRA, 2019) é possível entender que a mesma está de acordo com a maior parte dos critérios. Ela pode ser considerada uma tarefa investigativa com nível de dificuldade intermediário, apresentando uma estrutura semiaberta, com foco de ensino conceitual, perpassando pela Matemática pura e semirrealidade, tendo possibilidade de comunicação dialógica e familiaridade com o conteúdo. No critério tempo, a atividade é considerada longa, o que se justifica pela divisão em etapas, em que cada uma ocupa em torno de 3 ou 4 momentos de aula.

Além da tarefa investigativa criou-se uma atividade diagnóstica com o objetivo de identificar os conhecimentos que os alunos já possuíam, assim como auxiliar na compreensão, no avanço do pensamento matemático e na capacidade de argumentação destes. Foram dispostas oito questões, das quais as questões 1 e 2 envolviam características das funções trigonométricas, as questões 3 e 6 envolviam análise gráfica, as questões 4, 5 e 7 envolviam os coeficientes da função e a questão 8 apresentava a atividade proposta como pontapé inicial da tarefa investigativa.

4.4. (Re) adaptando as atividades investigativas ao ensino remoto

Inicialmente a intervenção seria planejada pensando no ambiente de sala de aula em um contexto presencial, porém, devido à pandemia do coronavírus, a realização das etapas precisou acontecer de forma remota, o que exigiu uma adaptação da proposta a este novo cenário. Nesse sentido, buscou-se alternativas para que não houvesse grandes mudanças em relação a dinâmica que seria desenvolvida presencialmente.

Um dos aspectos mais desafiadores neste processo foi em relação ao trabalho em grupo, assim como a exploração do aplicativo durante a realização das discussões, visto que a maior parte dos alunos utilizava o próprio celular para acompanhar as aulas. Como alternativa, planejou-se a divisão dos alunos em subsalas no *Google Meet*, criadas previamente.

Devido à necessidade do registro das discussões e resultados, assim como um bom desenvolvimento do trabalho em equipe, sugeriu-se aos alunos que assumissem alguns papéis dentro de cada grupo (CRISTOVÃO, 2012), papéis estes que seriam importantes para a realização das atividades propostas. Podem-se destacar:

- Técnico: responsável por apresentar a tela do celular no Google Meet e realizar a plotagem dos gráficos no Photomath;
- Redator: responsável pela redação final do registro a ser apresentado no Google Apresentações;
- Relatores: responsáveis pela apresentação dos resultados encontrados pela equipe;
- Coordenador: responsável pela organização e resolução de possíveis conflitos.

Assim como as atividades presentes na tarefa investigativa, essas funções foram adaptadas de Cristovão (2012). Além dos papéis apresentados pela autora, foi necessário criar o papel de Técnico, tendo em vista o contexto remoto e a necessidade de utilização do *Photomath* durante as discussões.

Com objetivo de apresentar os resultados da tarefa investigativa, o pesquisador elaborou um template na forma de uma apresentação do *Apresentações Google*. A apresentação foi repassada para cada grupo, ficando sob responsabilidade do redator, que teria de registrar as considerações, resultados e hipóteses levantadas. A função de técnico seria atribuída a um aluno que pudesse projetar a tela do aplicativo *Photomath* no *Google Meet*, auxiliando a equipe na visualização dos gráficos e na exploração das funções do aplicativo. O relator seria responsável por apresentar as conclusões do grupo durante a socialização e o coordenador teria a responsabilidade de organizar o grupo e estar em constante contato com toda a equipe.

O desenvolvimento das tarefas investigativas elaboradas pelo pesquisador perpassou pelas três fases, apontadas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) como fases importantes em atividades de Investigação Matemática: (1) introdução e apresentação da tarefa de forma clara e objetiva; (2) investigação por parte dos alunos, objetivando elaborar hipóteses e (3) discussão dos resultados e debate sobre possibilidades em relação à apresentação dos grupos.

O quadro 9 apresenta um cronograma dos momentos de intervenção que ocorreram em cada turma, destacando também a programação de cada encontro e algumas tarefas solicitadas aos alunos de um encontro para o seguinte. Ressalta-se que este cronograma sofreu alterações no decorrer das intervenções, sendo que esta é sua versão final.

Quadro 9: Cronograma das atividades realizadas.

I3A	A3A	Programação	Tarefa
22/04	22/04	Revisão - Razões trigonométricas no triângulo retângulo.	
23/04	23/04	Revisão - Transformação entre Radianos e Graus.	Atividade diagnóstica
03/05	04/05	Revisão - Ciclo Trigonométrico;	
03/05	04/05	Revisão - Construção gráfica seno e cosseno.	Instalação Photomath.
04/05	04/05	Apresentação da pesquisa e Photomath.	Termos
05/05	05/05	Divisão dos grupos; Distribuição Templates; Início da Etapa 1.	
06/05	06/05	Etapa 1	
07/05	07/05	Etapa 1	
10/05	11/05	Etapa 2	
10/05	11/05	Etapa 2	
11/05	11/05	Etapa 2 e Desafio	
12/05	12/05	Apresentação Etapa 1	

13/05	13/05	Apresentação Etapa 2 e desafio	
14/05	14/05	Discussão final e encerramento	Relatório/Slides; Questionário.

Fonte: Elaborado pelo autor

Durante a realização das tarefas, destacou-se aos alunos a importância de analisar as regularidades encontradas em cada atividade e realizar, ao mesmo tempo o levantamento, teste e validação das possíveis conjecturas, elaborar também o relato e registro de forma adequada do processo vivenciado e as descobertas do grupo, e a organização de uma apresentação para socializar os resultados obtidos com os demais grupos, sendo esta apresentação um dos materiais que serviram de auxílio durante o processo de análise dessa pesquisa.

Tendo em vista que a turma de informática teria um número maior de subgrupos, pois 30 alunos pertenciam a turma de Informática (I3A) e 14 alunos a turma de Administração (A3A), e pensando na necessidade de suporte a todas as equipes, assim como a imprevisibilidade em relação à conexão simultânea de todas as salas do *Google Meet*, fez-se necessário buscar um suporte para o professor pesquisador. Neste sentido, durante a aplicação das atividades junto à turma de informática, contou-se com a colaboração de uma professora assistente, que acordou a colaboração junto ao professor pesquisador. O motivo de escolha foi devido à mesma já ter contato com a escola e com o cenário das aulas remotas e devido ao acompanhamento dela, como estagiária, nas aulas do professor pesquisador no ano anterior.

Além disso, a professora assistente destaca ter tido contato com a abordagem investigativa e o uso de tecnologias por meio de atividades e seminários durante sua graduação, sendo que anteriormente havia realizado uma intervenção utilizando esta abordagem por meio de uma Webquest⁷ como atividade prática de seu estágio com uma turma que o professor pesquisador lecionava no ano anterior.

Destaca-se que, anteriormente à aplicação das tarefas investigativas, a professora teve contato com as mesmas, podendo estudá-las e tirar dúvidas, além de vários momentos de reunião com o professor pesquisador, nos quais este apresentou a intenção de cada atividade e a importância da mediação de forma ponderada durante os momentos de intervenção.

Com isso, definiu-se que nas turmas de informática ocorreria um revezamento entre

⁷ Uma atividade feita totalmente online, em que os alunos acessam informações e recursos para completar uma proposta feita pelo professor.

professor pesquisador e professora assistente em cada etapa da intervenção, ou seja, uma turma seria acompanhada pelo pesquisador em uma etapa e pela professora assistente na seguinte. Neste sentido, a professora assistente assume as funções didáticas junto ao grupo, podendo mediar e auxiliar os alunos, tendo o suporte do professor quando necessário. Já na turma de Administração, devido ao menor número de equipes, apenas o professor pesquisador ficaria responsável por auxiliar as equipes.

4.5. Procedimento de análise de dados

Como apresentado anteriormente, os dados desta pesquisa consistem nas gravações dos momentos de aulas no *Google Meet*; do diário de campo com observações do pesquisador; de uma atividade diagnóstica e um questionário aplicado aos alunos. Sendo assim, buscou-se realizar um estudo de cada uma dessas fontes de dados, a fim de observar uma mesma situação a partir de vários posicionamentos, tendo em vista a busca pelo entendimento de aspectos relacionados à questão de pesquisa.

Inicialmente foi realizado um estudo da atividade diagnóstica, buscando identificar pontos de dificuldade em comum, assim como aqueles com os quais os alunos têm maior familiaridade. Esse instrumento foi adotado com objetivo de entender os conceitos que os alunos já conheciam – visto que o tema da tarefa investigativa já havia sido trabalhado anteriormente –, assim como auxiliar em percepções relacionadas a avanços no conhecimento matemático dos alunos.

Na sequência, realizou-se o estudo das gravações em vídeo dos momentos de aula no *Google Meet*, de forma a compor a escrita de um texto com percepções importantes de cada aula, sendo que este documento foi complementado com informações obtidas através do diário de campo e dos registros das apresentações no *Apresentações Google*. Por fim, foi realizada uma análise das respostas dos alunos ao questionário aberto, buscando entender suas visões acerca dos conceitos apresentados e pontos relacionados ao uso da abordagem investigativa, assim como do aplicativo *Photomath*.

Diante desses dados, investigou-se traços que pudessem evidenciar categorias emergentes da análise da própria intervenção ou categorias utilizadas por pesquisas constantes no levantamento bibliográfico. A partir de um estudo inicial dos registros dos momentos das intervenções, buscou-se interpretar esses dados em articulação com a questão e o objetivo de pesquisa. Essa ação permitiu a construção de uma visão mais aprofundada em relação a

situações vivenciadas pelos alunos e suas produções. Após a realização desse estudo, de forma conciliada com o aporte teórico, foram estabelecidos três eixos norteadores, ou seja, os eixos que emergiram durante esse primeiro processo de análise.

- **Eixo 1** – A manifestação do conhecimento matemático durante as etapas da tarefa investigativa;
- **Eixo 2** – O envolvimento dos alunos com o aplicativo *Photomath* em aulas remotas;
- **Eixo 3** – A presença de habilidades como criar hipóteses, construir estratégias e verificá-las a partir da tarefa investigativa usando o aplicativo *Photomath*;

O primeiro eixo denominado “A manifestação do conhecimento matemático durante as etapas da tarefa investigativa” busca perceber o avanço do conhecimento matemático por parte dos alunos, ou seja, momentos em que os alunos passam a compreender de maneira mais clara aquilo que estão discutindo, passam a pensar matematicamente.

A praticidade na utilização das funções do *Photomath*, da visualização dos gráficos e da variação dos coeficientes, são aspectos que foram levados em consideração para entender o envolvimento dos alunos com o aplicativo. Ou seja, o segundo eixo, “o envolvimento dos alunos com o aplicativo *Photomath* em aulas remotas”, buscou analisar a interação e o envolvimento dos alunos com o aplicativo, levando-se em consideração as tarefas investigativas e o contexto remoto.

O eixo “a presença de habilidades como criar hipóteses, construir estratégias e verificá-las a partir da tarefa investigativa usando o aplicativo *Photomath*” ressalta as características de uma atividade investigativa. A análise está centrada nos momentos em que os sujeitos passam a aceitar o convite ao cenário investigativo (SKOVSMOSE, 2000), assumindo um papel de exploradores realmente (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2013).

É importante entender que esses eixos se entrelaçam, sendo que a união entre os três é fundamental para as reflexões sobre as possibilidades do celular e do *Photomath*, aliado à tarefa investigativa, para a apreensão do comportamento gráfico das funções trigonométricas estudadas, assim como na busca de dar sentido à Matemática vista pelos alunos, fazendo com que se tornem ativos frente à construção do próprio conhecimento.

A próxima seção apresenta inicialmente os momentos que precederam a investigação realizada pelos próprios alunos. Na sequência buscou-se realizar a interpretação dos resultados, tendo em vista a relação com a fundamentação teórica, assim como os três eixos definidos.

5. ANÁLISES E RESULTADOS

Diante do objetivo de investigar possibilidades e limitações do uso do aplicativo *Photomath* para celulares inteligentes, mediado por uma tarefa investigativa, para a apreensão do comportamento gráfico de funções trigonométricas por alunos de Ensino Médio, nesta seção são apresentadas as análises, principais resultados e discussões acerca do desenvolvimento de cada etapa das intervenções.

Para auxiliar neste processo, ao relatar as atividades desenvolvidas, dividiu-se em momentos, de acordo com as fases apontadas por Ponte; Brocardo e Oliveira (2013):

- (1) introdução e apresentação da tarefa aos alunos;
- (2) investigação por parte dos alunos, objetivando elaborar hipóteses e;
- (3) discussão dos resultados e debate sobre possibilidades em relação às apresentações dos grupos.

Apesar da divisão apresentada, as três fases não são o foco de análise, mas auxiliam na organização dos dados. Além disso, optou-se por apresentar o desenvolvimento das tarefas investigativas em ordem cronológica dos acontecimentos, aula a aula, realizando-se reflexões no decorrer das apresentações. Em paralelo, aparecem recortes do questionário aplicado aos alunos relacionados com as discussões de cada momento.

Nas próximas seções são detalhados os momentos iniciais de revisão com a turma, um panorama sobre a atividade diagnóstica, o desenvolvimento das atividades propostas junto com as reflexões e análises de aspectos relevantes para essa pesquisa.

5.1. Momentos iniciais: revisão e atividade diagnóstica

Visto que alguns conceitos relacionados à trigonometria seriam necessários para um bom desenvolvimento das etapas de intervenção, foram realizados alguns momentos voltados para revisão, nos quais buscou-se apresentar aos alunos as razões trigonométricas, o ciclo trigonométrico e a forma gráfica das funções seno e cosseno. Apesar desses conceitos terem sido apresentados nos materiais dos PETs no ano anterior, durante os momentos de revisão percebeu-se que alguns deles pareciam desconhecidos aos alunos, o que ressaltou a importância dessa etapa inicial.

Foram quatro momentos, divididos da seguinte maneira:

- 1ª aula - buscou-se lembrar a relação de Pitágoras e as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no triângulo retângulo. Foram realizados exemplos envolvendo estas relações e algumas situações da semirrealidade, utilizando os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis;
- 2ª aula - apresentação da ideia de arco e a unidade de medida radiano⁸, o que gerou algumas dúvidas. Partindo de uma demonstração utilizando a fórmula do comprimento da circunferência, os alunos conseguiram compreender melhor a conversão de um ângulo para radianos e vice-versa;
- 3ª aula - apresentação do ciclo trigonométrico, observando-se alguns conceitos importantes como o raio unitário, o eixo x, que corresponde aos valores de cosseno, o eixo y que corresponde aos valores de seno, os quadrantes, o sentido de rotação positivo e negativo e os arcos notáveis contidos nos eixos. Além disso, trabalhou-se com a ideia de arcos simétricos e a redução ao primeiro quadrante;
- 4ª aula - utilização do ciclo trigonométrico para discutir alguns conceitos relacionados ao sinal e crescimento do seno e cosseno em cada quadrante, culminando com a construção gráfica de cada função e a apresentação dos conceitos de período e amplitude. Os alunos foram questionados em relação a percepções de semelhanças e diferenças entre os gráficos e lembrou-se o conceito de senoide.

Destaca-se que este momento de revisão, apesar de expositivo, contou com a participação de grande parte dos alunos, que eram constantemente indagados pelo professor pesquisador e se mostraram participativos e questionadores.

Entre a 2ª e 3ª aula de revisão, por conta de uma demanda da escola, houve uma semana sem aulas síncronas. Nesse sentido, aproveitou-se este intervalo para que os alunos pudessem responder a atividade diagnóstica⁹, que foi adaptada a um questionário do *Google Forms* e divulgada a partir do ambiente de cada turma no *Google Sala de Aula*. Apresentam-se considerações acerca deste material na próxima seção.

A atividade diagnóstica contemplava alguns conceitos que seriam explorados na tarefa investigativa. As questões apresentadas possibilitaram compreender a familiaridade dos alunos com conceitos relacionados à trigonometria e às funções trigonométricas. Apesar disso, os questionamentos foram elaborados de modo a não direcionar os alunos em relação ao que seria investigado durante a intervenção.

⁸ O radiano é a razão entre o comprimento de um arco e seu raio.

⁹ Apêndice B

No total, 42 alunos responderam a atividade, sendo que não houve a obrigatoriedade, no formulário, de responder a todas as questões. Nesse sentido, apresenta-se uma síntese de pontos de destaque das respostas dadas pelos alunos.

As primeiras questões buscavam perceber se os alunos se recordavam de aspectos comuns das funções trigonométricas. A primeira pedia que apontassem características das funções seno e cosseno, havendo como respostas:

- *uso dos ângulos.*
- *seno é o cateto oposto que é dividido por hipotenusa, cosseno é o cateto adjacente que é dividido por hipotenusa.*
- *Uma das diferenças é que o seno está ligado ao eixo y e o cosseno ao eixo x.*
- *Não sei.*

Já a segunda questão perguntava o nome de uma função cujos valores “se repetem” a intervalos regulares, sendo apresentadas quatro alternativas de respostas. Com isso, 87% dos alunos responderam que seria uma função periódica. Percebe-se que boa parte da turma se recorda de algumas características iniciais, sendo que foram vários os alunos que destacaram conceitos relacionados às razões trigonométricas.

As questões 3 e 6 envolviam análise gráfica. A primeira apresentava quatro gráficos de diferentes tipos de funções (quadrática, exponencial, seno, tangente) e questionava qual representava a função seno. Houve 39 respostas, sendo que 71% responderam de maneira correta. Um ponto de destaque é que 20,5% marcou a função quadrática, o que pode ter ocorrido pela associação do formato da senoide com o de uma parábola.

A sexta questão apresentava uma função cosseno deslocada verticalmente e questionava-se qual era sua representação gráfica. Nesta questão, das 36 respostas, apenas 16 alunos responderam de maneira correta. Das alternativas apresentadas, apenas uma realizava um deslocamento vertical.

As questões 4, 5 e 7 envolviam os coeficientes de funções trigonométricas. Nessas questões houve menos da metade das respostas de toda a turma, sendo que, por ser uma questão aberta, muitos alunos afirmaram não saber. Já a última questão apresentava a atividade de Dante, proposta como pontapé inicial da tarefa investigativa. Das respostas apresentadas, a maior parte respondeu em branco ou apontou não saber.

Algumas respostas apresentavam os valores corretos pedidos nas questões, o que

poderia ser levado em consideração como algo positivo, porém, quando o professor pesquisador questionou as turmas durante um momento de aula, alguns alunos afirmaram terem realizado buscas na internet, afirmando que acreditavam que a atividade diagnóstica teria algum valor cumulativo às notas do bimestre.

Apesar da busca na internet por alguns dos alunos, as respostas apresentadas destacam desconhecimento em relação a conceitos relacionados às funções trigonométricas, o que é ressaltado quanto ao estudo dos coeficientes. Nesse sentido, verifica-se a importância da intervenção realizada nesta pesquisa, que buscou instigar os alunos a assumirem um papel investigativo, a fim de se construir uma compreensão mais clara sobre conceitos relacionados ao comportamento gráfico de funções trigonométricas.

5.2. Introdução e apresentação da tarefa aos alunos

Dedicou-se o momento de aula do dia 04 de Maio, em ambas as turmas, para a apresentação da pesquisa aos alunos e como a intervenção aconteceria, etapa por etapa. Ressaltou-se a importância da atividade diagnóstica que haviam respondido e buscou-se esclarecer que os dados registrados seriam de uso único e exclusivo do pesquisador. Foi reforçado ainda que em nenhum momento seriam divulgados os nomes e que todo o material coletado seria utilizado apenas com o propósito da pesquisa.

Na sequência, houve a apresentação do aplicativo *Photomath* e uma demonstração das principais funções que poderiam auxiliar no decorrer da intervenção. Para isso, o professor pesquisador compartilhou a tela do próprio celular na janela do *Google Meet* e foi digitalizando alguns problemas e apresentando as ferramentas do aplicativo. Durante esse momento, foi possível perceber um deslumbre maior dos alunos de informática, que questionaram de maneira mais intensa as funcionalidades do aplicativo e pediram que fosse realizada a demonstração de algumas equações mais complexas.

Ao fim da aula, foi solicitado que os alunos já instalassem e testassem as funções do aplicativo, de modo a estarem familiarizados no início das atividades práticas. Além disso, foi negociada a forma como prefeririam a organização e divisão dos grupos, ficando acordado nas duas turmas que os próprios alunos trariam os grupos já formados na aula seguinte.

5.3. Divisão dos grupos e primeiro contato com as atividades

Na aula do dia 05 de Maio um momento foi dedicado para verificar a divisão dos grupos de cada turma e, novamente, realizar uma exploração do aplicativo *Photomath*. Ademais, foi verificado com os alunos o entendimento da proposta envolvendo as atividades investigativas.

A turma de informática trouxe os grupos já divididos, porém, por conta de afinidades, pediram que houvesse um grupo além do que havia sido proposto inicialmente. Isso fez com que fosse necessário ao professor pesquisador repensar o planejamento de forma rápida, já que foram persistentes e não aceitaram reordenar as equipes. Dessa forma, foi preciso criar um *template* extra no *Apresentações Google* e uma nova subsala do *Google Meet*. A dinâmica com a turma de administração foi mais tranquila, visto que o número de alunos era menor, então se dividiram em duas equipes.

Após a divisão dos grupos, foi disponibilizado o link de cada subsala e a tarefa investigativa de cada grupo no *Apresentações Google*. Explicou-se ainda a forma como as equipes poderiam se dividir para realizar as atividades, visto que, apesar de solicitado anteriormente, nem todos os membros haviam conseguido instalar o aplicativo e em alguns casos o mesmo apresentava incompatibilidade com a câmera, funcionando apenas com a função de calculadora.

Conforme exposto anteriormente, na turma de informática houve a presença da professora assistente, que deu suporte a duas equipes, enquanto o professor pesquisador ficou responsável em auxiliar três. Já na turma de administração houve suporte apenas do professor pesquisador.

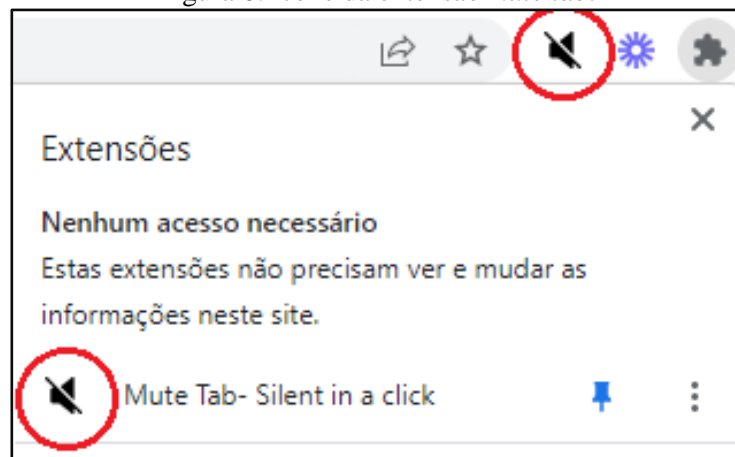
Após o início das atividades, um imprevisto fez com que o professor pesquisador e a professora assistente não conseguissem dar total auxílio aos grupos nesse primeiro momento. Apesar de terem previsto a necessidade de desabilitar o áudio de uma subsala ao interagir com outra, ao desativar em uma guia do *Google Meet*, todas as outras também eram desativadas, nesse sentido foi necessário entrar em uma sala por vez, o que fez com que houvesse um maior tempo dos alunos sozinhos.

Além disso, apesar de todas as instruções e demonstração, os alunos se mostraram um pouco desorientados inicialmente, devido à falta de familiaridade com atividades nas quais precisavam estar à frente das decisões. Nesse sentido, foi necessário apontar novamente, de forma individual em cada grupo, o que se esperava que realizassem, sendo que em alguns

casos foi necessário debater as funções a serem assumidas pelos membros para que pudessem encaminhar as atividades investigativas.

Encerrada a aula, foi necessário localizar e instalar uma extensão que auxiliasse durante a dinâmica da intervenção nos próximos momentos. Após alguns testes, a extensão “mute tab”¹⁰ para o navegador *Google Chrome* se mostrou muito eficiente, sendo compartilhada com a professora assistente para que auxiliasse nas etapas seguintes. Esta extensão permite silenciar guias individuais do navegador *Google Chrome* pelo menu de extensões ou apenas clicando no ícone da extensão, conforme apresentado na figura 8.

Figura 8: ícone da extensão *mute tab*.



Fonte: Imagem da extensão no navegador.

Apesar da organização e planejamento inicial, já era esperado que pudessem surgir situações imprevistas que precisariam ser supridas sem que a realização da intervenção fosse prejudicada. Como afirmam Araújo e Borba (2019), ao desenvolver uma pesquisa deve-se estar aberto a situações inesperadas que possam acontecer no decorrer da investigação.

Como apresentado anteriormente, os participantes desta pesquisa são alunos de duas turmas de 3º ano de Ensino Médio, integradas aos cursos de Informática e Administração, identificadas por I3A e A3A, respectivamente. Destas, após a divisão dos alunos, foram obtidos sete grupos, sendo cinco da turma I3A e dois da A3A.

Após a coleta dos dados e um estudo inicial dos momentos de intervenção, optou-se por realizar uma análise aprofundada de três grupos, visto o grande quantitativo de dados produzido. Estes grupos foram escolhidos levando-se em consideração aqueles que apresentaram maiores possibilidades no auxílio ao entendimento da questão de pesquisa. No decorrer das reflexões e da análise, são apresentados diálogos dos alunos com os professores e entre eles próprios. Buscando preservar a identidade dos mesmos, nesta pesquisa serão

¹⁰ Disponível em (<https://chrome.google.com/webstore/detail/mute-tab/blljoffcekcobpmkgfhhpcjmbfnelkfg>)

apresentados como A1; A2; A3; ...; A13. Além disso, utiliza-se da seguinte simbologia para apresentar cada grupo escolhido: G1-A, grupo 1, da turma de Administração; G2-I, grupo 2, da turma de Informática; e G3-I, Grupo 3, da turma de Informática. Nos momentos de discussão geral com todos os alunos, os demais serão identificados seguindo-se o mesmo critério, ou seja, tem-se ainda os grupos G2-A; G1-I; G4-I e G5-I.

Na próxima seção são apresentados os relatos das investigações realizadas por parte dos alunos, buscando estabelecer reflexões acerca de pontos importantes para a compreensão e entendimento da questão que conduz esta pesquisa.

5.4. Investigação por parte dos alunos: reflexões e análise

Visto que a aula anterior foi dedicada a uma familiarização com a proposta, deu-se sequência com as discussões relacionadas à atividade 1 da primeira etapa, em ambas as turmas. A professora assistente acompanhou as equipes G2-I e G3-I, deixando acordado com os alunos que registrassem as dúvidas no chat, de modo que, assim que verificasse os questionamentos, daria suporte. Na turma de Administração o professor pesquisador auxiliou os dois grupos, sendo que o G1-A, que é foco de estudo desta pesquisa, não exigiu grandes interferências.

A primeira atividade, quadro 10, instigava os alunos a compreenderem o comportamento gráfico das funções seno e cosseno quando se altera o coeficiente **a** em uma função do tipo $f(x) = a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d$ ou $f(x) = a \cdot \text{cos}(b \cdot x + c) + d$.

Quadro 10: Atividade 1 relacionada a função seno.

Atividade 1 - Utilizando a calculadora do *Photomath* ou escrevendo e fotografando as funções abaixo, visualize e registre o gráfico de cada uma delas na apresentação do grupo.

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

$$f(x) = -4 \cdot \text{sen}(x)$$

$$f(x) = 0,2 \cdot \text{sen}(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(x)$$

$$f(x) = 10 \cdot \text{sen}(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot \text{sen}(x)$$

Questões para debate:

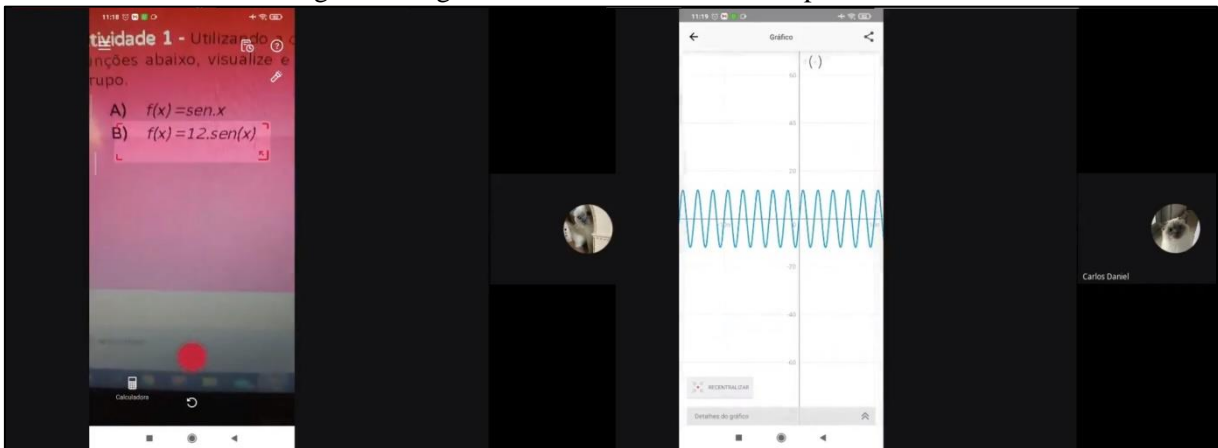
- Após explorar as funções, o que vocês podem dizer sobre as diferenças e semelhanças entre os gráficos analisados?
- Vocês conseguem apontar o domínio, imagem e período das funções analisadas? Busquem explorar o aplicativo.
- O que é possível afirmar sobre o coeficiente “**a**” em uma função do tipo:

$$f(x) = a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

O grupo G2-I discutiu entre si e com a professora assistente sobre o entendimento do que deveriam realizar. Os membros se organizaram de maneira tranquila, sendo que um dos alunos entrou simultaneamente na sala do *Google Meet* pelo celular e computador, compartilhando a tela do aplicativo *Photomath* na sala e utilizando a própria apresentação do *Apresentações Google* para fotografar as funções e gerar os gráficos, conforme figura 9.

Figura 9: Registro da Atividade 1 realizada pelo G2-I.



Fonte: acervo do autor.

Os alunos demonstraram facilidade ao utilizarem o *Photomath*, e na exploração de seus comandos e ferramentas. Além disso, conseguiram intercalar a tela do aplicativo com a de apresentação, a qual preferiram realizar pelo *PowerPoint* de maneira online. Além do espaço da aula, a equipe realizou discussões pelo aplicativo *WhatsApp*, que também foi útil no compartilhamento dos gráficos plotados. Todo o processo realizado pelo aluno técnico (A5) era compartilhado na tela do *Meet*, e percebeu-se a facilidade que o mesmo teve para fotografar, gerar e compartilhar os gráficos, muitos destes gerados utilizando a função de calculadora do *Photomath*. Percebe-se nos alunos um conhecimento prévio relacionado às ferramentas tecnológicas e às mídias digitais e sociais, o que pode ser resultado de vivências no curso de Informática assim como o grande uso em várias situações do dia a dia. Em seu questionário individual, o aluno A5 aponta que a experiência de se trabalhar com o aplicativo *Photomath* foi:

inovadora, já que muitos não concordam com o uso do celular para a aprendizagem. Me chamou a atenção a praticidade e agilidade do aplicativo, pois se fosse realizado de forma escrita cada coisa demoraria um tempo incomparável. Além de auxiliar na montagem dos gráficos e resolução de problemas através das funções e fórmulas.

Percebe-se que a utilização da tecnologia como parte da aula permite que os alunos se aproximem da realidade que vivenciam diariamente, na qual o celular e os aplicativos são

objetos de uso constante. Além disso, pode haver um impacto significativo no ensino de conceitos relacionados a Matemática, visto que seu uso permite o reforço da linguagem gráfica e de formas variadas de representação, possibilitando também a exploração e a investigação (PONTE, 2002). Visto isso, ressalta-se o envolvimento dos alunos com o aplicativo e com as tecnologias envolvidas no ambiente remoto, o que caracteriza o segundo eixo de análise.

Ao discutirem possibilidades de diferenças e semelhanças entre as funções apresentadas, houve vários diálogos entre os membros, destacando-se também o aluno técnico (A5), que, além de discutir com a equipe, foi dinâmico na transposição entre gráficos, *WhatsApp* e *Google Meet*. Na sequência, apresenta-se parte da discussão realizada sobre o gráfico da função $f(x)=10.\text{sen}(x)$.

A6: *ambos os gráficos estão entre 10 e -10, nenhum passa disso.*

A8: *eu não sei como fala isso em termo de Matemática, mas uma semelhança é que todos tem a mesma distância de um ponto até o outro, de um vale até o outro. Todos lá tem a mesma coisa.*

A5: *e agora?*

A6: *a gente tem de debater e analisar os gráficos.*

A8: *segundo a aula de física que a gente teve a um tempo atrás, se eu não me engano é o comprimento né, o lambda. O lambda de todos vai ser a mesma coisa.*

A6: *não sei se a gente pode usar o lambda aqui não.*

A8: *é o comprimento de uma crista até a outra, o lambda. Uma função senoidal.*

A5: *uma coisa que da pra reparar é que todos passam no zero. – passando pelos gráficos.*

Percebe-se que os alunos buscam conhecimentos anteriores para tentar entender o que é apresentado. Ainda assim, se questionam se podem ou não utilizar estes conceitos. Na sequência, o aluno técnico (A5) passa pelos gráficos dando zoom para que os colegas possam observar os valores apresentados no eixo x.

A5: *todos vai passar lá ó. Em 2π , π , $-\pi$.*

A8: *olha lá pra você ver ó, de uma crista até a outra, de um vale até o outro é a mesma distância em todos os gráficos.*

[...]

A5: *a cada 2π ela se repete é isso? A cada 2π ela se repete, é uma regra.*

A8: *será que não é só uma coincidência?*

A5: *não ó, se repete, 2π , 4π , 6π .*

A8: *será que não é só uma coincidência feita pelo professor nos exercícios? É. Não deixa de ser uma semelhança.*

A6: Então a semelhança é o período e a diferença a altura, a amplitude.

É perceptível que os alunos apresentam conhecimento dos termos a serem utilizados visto que trazem nomes específicos relacionados às funções estudadas. Além disso, é feita a transposição de um conceito visto na Física, o qual apresenta o comprimento de uma onda, que no caso da Matemática poderia se equivaler ao período do gráfico de uma função seno ou cosseno. Ainda assim, realizam constantes indagações, não aceitando de maneira fácil o resultado apontado por alguns dos colegas. Ressalta-se nesse contexto a presença do terceiro eixo de análise, ou seja, os alunos apresentam possíveis conjecturas, se questionam e buscam verificá-las, o que também são características de uma atividade investigativa (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2013).

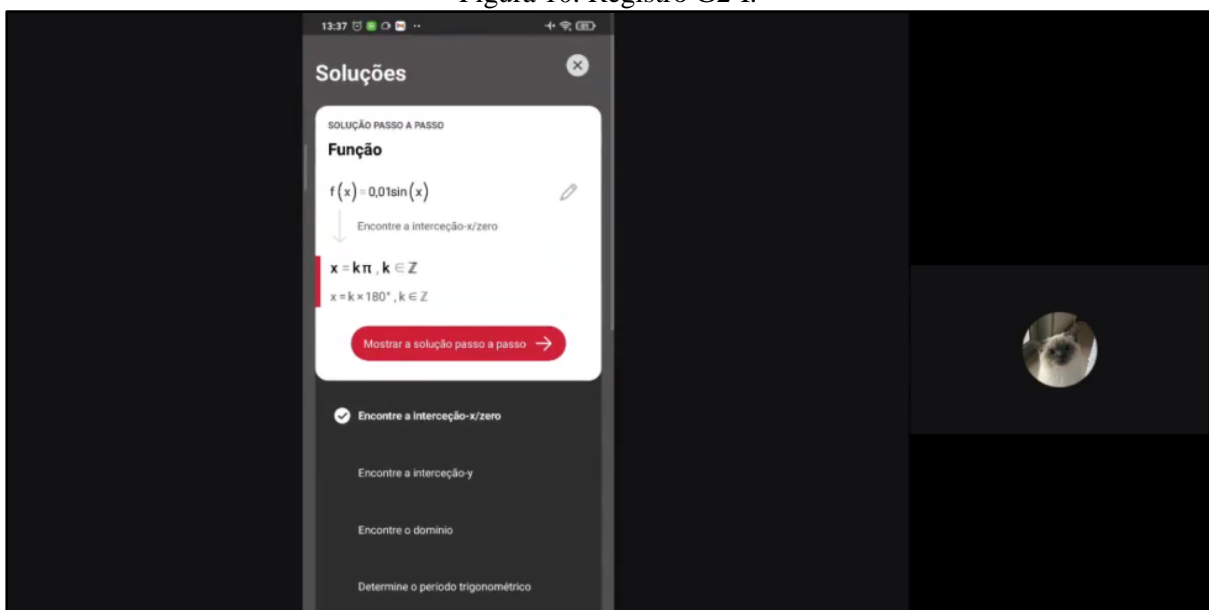
Na sequência, o aluno técnico aponta para alguns gráficos nos quais o coeficiente a é próximo de zero, ou seja, se aproxima do eixo x , e afirma que seria uma reta. Nisso o colega A6 pede para calcularem a amplitude, dizendo que seria “o pico menos o meio”.

A6: eu acho que a função de seno não fica reto.

A5: verdade, ela meche um pouquinho olha – mostrando o gráfico e dando zoom – bem pouquinho.

Nesse momento o aluno técnico (A5) passa pelas opções do resultado apresentado no *Photomath*, para cada função (figura 10), percebendo, com isso, que o domínio também era algo comum em todos os gráficos. Pelo próprio aplicativo os alunos conseguem identificar o domínio, a imagem e o período dos gráficos estudados.

Figura 10: Registro G2-I.

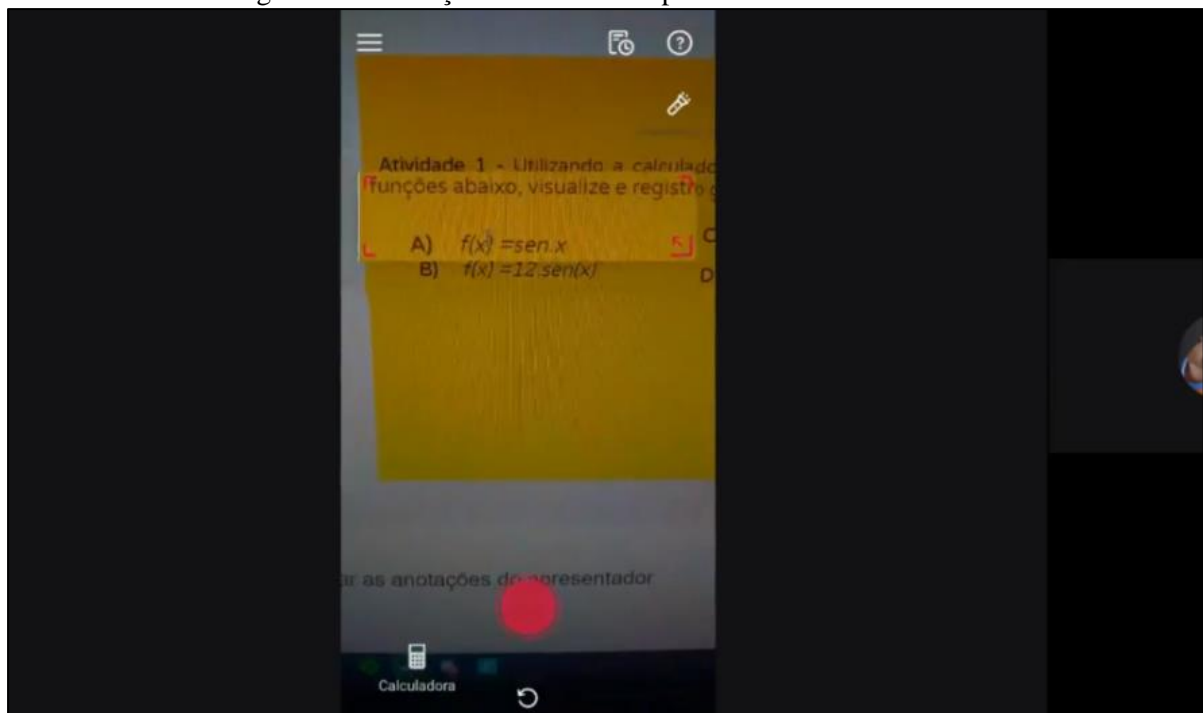


Fonte: acervo do autor.

Com o término da aula, acordaram de conversarem através do *WhatsApp* para que pudessem adiantar a plotagem dos gráficos para a aula seguinte e realizar alguns direcionamentos. Ressalta-se que este grupo apresentou maior autonomia em relação aos demais, tendo facilidade no uso das tecnologias envolvidas e no diálogo e envolvimento entre os membros da equipe.

O grupo G3-I precisou do incentivo da professora assistente para iniciar a investigação e as discussões entre os membros. Ela pediu que compartilhassem a tela do celular no *Meet*, para que pudessem interagir com o aplicativo e realizar as atividades propostas. A equipe não debateu sobre a função de cada membro, apenas uma aluna (A10) que se responsabilizou pela função de técnico e também realizou a organização das apresentações, e, assim como o G2-I, utilizou o celular e o computador simultaneamente para realizar a plotagem dos gráficos, conforme a figura 11.

Figura 11: Utilização do *Photomath* pela aluna técnica do G3-I.



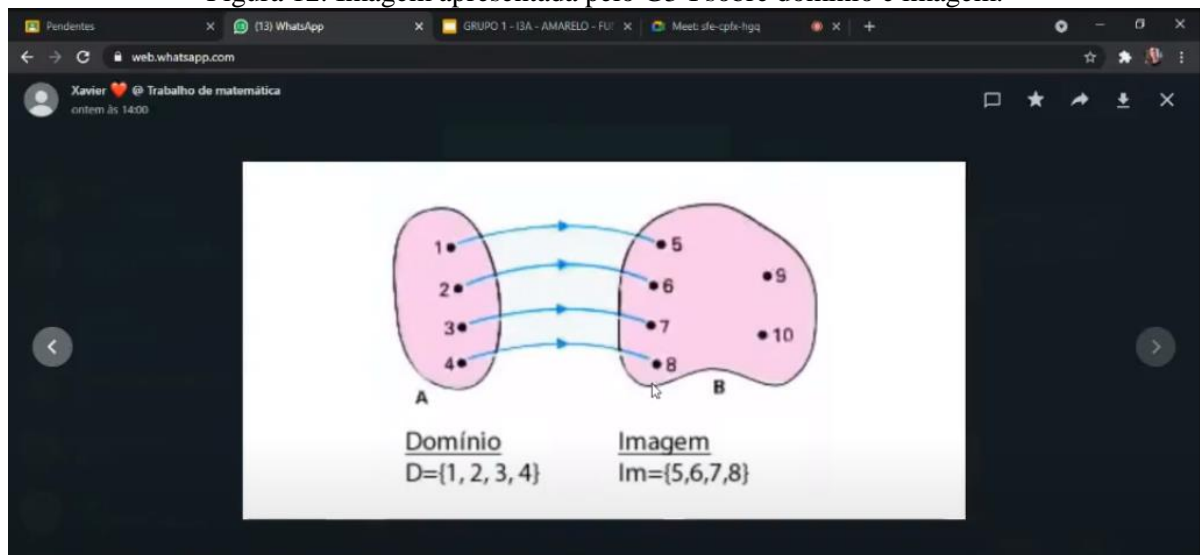
Fonte: acervo do autor.

A equipe discutiu sobre o que deveria ser realizado nas atividades enquanto a aluna técnica passava pelas ferramentas e opções oferecidas pelo *Photomath* até encontrar a opção que fornecia o gráfico. As imagens foram compartilhadas em um grupo da turma no *WhatsApp*, que constantemente era apresentado no *Meet* através do compartilhamento pela aluna técnica.

Ao se depararem com o item b da atividade 1, que pedia o registro do período, imagem e domínio das funções, surgiram dúvidas sobre estes conceitos. Uma das alunas sugeriu realizarem uma busca ou assistirem um vídeo para lembrar, porém isso não foi realizado durante a aula. Um ponto de destaque para o grupo é que utilizaram o ambiente do *Google Meet* de forma espontânea, conversando sobre diversos assuntos, inclusive não relacionados às atividades. No entanto, essa dinâmica fez com que a equipe, por vários momentos, perdesse o foco da investigação.

Persistindo a dificuldade em relação aos conceitos de domínio e imagem, questionam os demais colegas presentes e um membro aponta que o domínio estaria relacionado ao eixo X, porém não há confirmação ou diálogo sobre o que é apontado. Com isso, a aluna técnica realiza uma busca na internet e encontra um diagrama de flechas que utiliza para incentivar os colegas a debaterem sobre esse conceito (figura 12).

Figura 12: Imagem apresentada pelo G3-I sobre domínio e imagem.



Fonte: acervo do autor.

Apesar desse esforço, não há clareza sobre os conceitos entre os membros, o que faz com que peçam apoio da professora assistente para entender sobre o domínio e imagem nos gráficos plotados. Ao apresentar um destes gráficos, surgem os questionamentos conforme o diálogo.

A10: *O domínio seria o π , o 2π , o 3π ?*

PA: *Não, o domínio seriam todos os valores em X. Ai você pegou só um pedaço, uma parte do gráfico né?*

A11: *mas não vai acabar nunca.*

PA: *Se você pegar todos os números como que você escreve?*

A11: *é infinito?*

[...]

Na sequência a professora conversa com os alunos sobre o conceito de período. Explicando, com base no gráfico que estava sendo apresentado, que o período seria “o tamanho até onde o gráfico começa a repetir”. Visto que os alunos continuaram com dúvida a professora foi indagando-os com questionamentos até conseguir fazer com que compreendessem de forma mais clara o conceito.

PA: *de 0 a 2π é quanto?*
 A10: *2π*
 PA: *e de 2π a 4π ?*
 A11: *2π de novo? Então os próximos vão ser 6π , 8π ?*
 PA: *o que vocês acham?*
 [...]
 PA: *se você pegar de 0 a 2π da um desenho né? De 2π a 4π da um mesmo desenho de novo. O período seria essa distância, esse tamanho.*

Percebe-se que a professora assistente não apresenta uma resposta pronta aos alunos, instigando-os a pensar e refletir, o que caracteriza seu papel em uma atividade investigativa (PONTE, BROCARD E OLIVEIRA, 2013), sendo primordial que o professor levante questionamento aos alunos para que as discussões permitam reflexões e sejam cada vez mais completas matematicamente (ROMANELLO, 2016).

A equipe utilizou o aplicativo apenas nos momentos iniciais, deixando-o de lado durante os debates, visto que os gráficos haviam sido plotados anteriormente, ou seja, buscaram realizar as discussões pelas imagens já registradas, o que acabou dificultando algumas percepções. Durante o restante da aula a aluna técnica (A10) organizou a apresentação enquanto conversavam sobre os domínios dos gráficos. Acordaram que seria algo comum em todos. A partir do apontamento da aluna A13, concluíram que o domínio seria “infinito” em todos os gráficos, visto que não tinha início e nem fim e fizeram acordos de conversarem pelo *WhatsApp* para que dividissem o que cada um se responsabilizaria antes da próxima aula.

Percebe-se que inicialmente não houve uma boa organização e interação entre os membros do grupo, dentre os quais houve alunos interagindo apenas por meio do *WhatsApp*. Entende-se que a proposta investigativa acaba sendo uma novidade, além de mudar o cenário de aula ao qual estão acostumados. Com isso, apesar de ainda não entenderem muito bem o processo os alunos vão aceitando gradualmente os desafios propostos, ou seja, vão se adaptando no decorrer das discussões e reflexões no sentido de aceitar o convite ao cenário investigativo (SKOVSMOSE, 2000).

O grupo G1-A da turma de Administração, acompanhado pelo professor pesquisador, realizou as atividades com a função cosseno. Inicialmente se mostraram confusos sobre a dinâmica de compartilhamento, tanto do *Photomath* quanto da apresentação, sendo necessário o auxílio do professor para que compartilhassem a apresentação, e mesmo sendo instigados a compartilharem a tela do *Photomath*, acabaram utilizando o aplicativo de maneira externa ao *Google Meet*. A equipe se comunicou por meio do *WhatsApp*, interagindo pelo *Meet* quando o professor estava presente. Desse modo, foi necessário solicitar que realizassem os debates por meio do ambiente, visto a necessidade de registro dos dados.

Num segundo momento, compartilharam a apresentação e foram adicionando os gráficos plotados, porém novamente faltou diálogo entre os membros. Apesar de não discutirem o papel de cada um dos membros, uma aluna (A1) assumiu a organização da equipe, sendo também responsável pela redação da apresentação, além de, nos relatos desta pesquisa, apontada como coordenadora do grupo.

O professor foi questionado se o período e a imagem poderiam ser apontados utilizando alguma das opções apresentadas pelo *Photomath*, o qual concordou dizendo que poderiam explorar e utilizar de todos os dados fornecidos pelo aplicativo. Porém, não conseguiram localizar a imagem pelas opções apresentadas, sendo instigados pelo professor a relembrem o conceito.

Com isso, após alguns apontamentos, um dos alunos (A2) ressaltou que a imagem seria o intervalo correspondido entre o menor valor no eixo y e o maior, o que era apresentado nos detalhes de cada gráfico com o nome de intervalo¹¹. Porém, essa opção não era apresentada em todos os gráficos. Apesar de não compartilharem a tela do aplicativo, é perceptível a interação dos alunos com o *Photomath*, caracterizando o segundo eixo de análise.

Na sequência, a coordenadora do grupo G1-A incentivou os colegas a iniciarem as discussões em relação às semelhanças e diferenças entre os gráficos apresentados, indagando sobre o que percebiam ao observá-los.

A1: *O que vocês perceberam nesse caso? Nada de diferente?*

A3: *da pra perceber que ali na letra a as ondas são menores e na b elas estão com menor distância, mas tem mais ondinhas.* – referindo-se aos itens a e b da atividade 1.

A1: *e agora?* – mostrando os gráficos dos itens c e d.

A3: *as ondinhas da c tá menor do que a d né?*

¹¹ Atualmente, após uma atualização do aplicativo a opção é apresentada como “alcance”.

Nesse momento a aluna coordenadora questiona os demais alunos, pedindo para que também participem e ajudem na discussão. O aluno A3 pede auxílio ao professor, que aponta que as discussões estão no caminho, sendo que a ideia não é ir longe, mas perceber visualmente o que está acontecendo nos gráficos.

PP: *Vocês observaram que todas as funções que coloquei para vocês tem um valor numérico? Esse valor numérico a gente chama de coeficiente a . Vai chegar na última questão que vai ser perguntado para vocês o que esse coeficiente a faz em uma função. O que ele determina? – pedindo para a coordenadora voltar o gráfico nos itens a e b – olhando a primeira função, qual seria o valor do coeficiente a ?*

A1: *1*

PP: *e na letra b?*

A1: *12*

PP: *ai vocês precisam perceber o que acontece. Precisam chegar em uma conclusão. E quando chegarem nessa conclusão, vocês testam para ver se isso é válido para outros gráficos.*

Destaca-se novamente o papel do professor em uma atividade investigativa, que busca clarear o entendimento dos alunos instigando e os incentivando a refletirem sobre suas próprias percepções. Além disso, ressalta-se também seu papel em *avaliar o progresso* dos alunos, ou seja, buscando acompanhar e entender a forma como estão desenvolvendo as situações, e procurando “compreender o pensamento dos alunos, fazendo perguntas e pedindo explicações” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA 2013, p. 49).

Ao responder o item b da atividade 1, os alunos ressaltam que “as ondas diferem-se em comprimento e altura”. Ao serem questionados pelo professor sobre o que estavam entendendo como comprimento, associaram a ideia com o período da função. Nesse sentido, o professor os incentivou a realizarem novas observações antes de chegarem a uma conclusão. Com isso, após verificar as opções apresentadas pelo *Photomath* em cada gráfico, um dos alunos (A4) aponta que o período se mantinha, ou seja, poderia ser considerado uma das semelhanças neste item da atividade. Visto as primeiras conclusões, que não haviam sido devidamente testadas, ressalta-se a importância da intervenção do professor pois, para os alunos, uma hipótese é apontada como solução com a realização de poucos testes (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2013).

Ao explorar os gráficos, a coordenadora do grupo G1-A sugere que “o valor em y é igual o valor do coeficiente a ”. Para argumentar com os colegas, a mesma apresenta gráfico por gráfico ressaltando o valor do coeficiente a e mostrando os pontos extremos. Destaca

ainda que os dois últimos itens da atividade 1 parecem difíceis, por conta de o coeficiente ter um valor muito pequeno. Neste momento o professor questiona:

PP: o que vai acontecer se você tiver um valor ainda menor?

A1: vai parecer reto, mas não é.

PP: ou seja, o que vocês podem concluir desse coeficiente a ai? O que ele vai fazer na função cosseno no caso?

A1: ele determina a altura?

PP: Tentem criar uma teoria, que teoria vai ser essa? A ideia é essa. Outra coisa, pensem no zero, o que aconteceria se esse coeficiente fosse zero?

O professor deixou o grupo com essa indagação, e os alunos concluíram as respostas sobre diferenças e semelhanças e combinaram de conversar pelo *WhatsApp* sobre o questionamento apresentado. Percebe-se a manifestação do pensamento matemático através das respostas e sugestões apresentadas pela aluna (A1), caracterizando o primeiro eixo de análise, sendo que a mesma indaga os colegas constantemente, buscando levantar conclusões.

Encerrados os primeiros momentos de discussão, percebeu-se que os alunos necessitariam de um tempo maior, visto que grande parte dos grupos não havia se aprofundado realmente nas discussões relacionadas às atividades 1 e 2. Desse modo, o momento seguinte, que seria dedicado às primeiras apresentações, foi utilizado para a continuidade das reflexões referentes às atividades da Etapa 1.

No dia 07 de Maio iniciaram-se as discussões junto à turma de administração, da qual o grupo G1-A deu início à atividade 2, quadro 11, sendo que a coordenadora já havia realizado a plotagem de todos os gráficos anteriormente, além de determinar tarefas a alguns membros buscando adiantar o andamento das atividades.

Quadro 11: Questões da atividade 2.

Questões para debate:

a) Após explorar as funções, o que vocês podem dizer sobre as diferenças e semelhanças entre os gráficos analisados?

b) Vocês conseguem apontar o domínio, imagem e período das funções analisadas?

c) O que é possível afirmar sobre o coeficiente “**b**” em uma função do tipo:

$$f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d$$

d) O que aconteceria em uma função do tipo $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d$ caso o coeficiente **b** fosse zero?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Devido à maior atenção do professor pesquisador em relação ao segundo grupo, por conta da dificuldade dos mesmos, a equipe acabou encaminhando a maior parte das discussões. A coordenadora do grupo apresentou aos colegas os gráficos dos itens a e b questionando-os sobre o que percebiam de semelhanças e diferenças.

A3: *a eu notei de diferença entre esses dois aí é que as ondas do da direita é maior.*

A1: *olha, na verdade a altura é 1. – ampliando os gráficos e passando para outros – aqui é 1, no b também é 1, e aqui não dá pra ver, mas deve ser 1 também – mostrando o gráfico do item e. – então a altura não muda, que é a amplitude. Mas repara no período pra ver se você consegue perceber alguma coisa?*

A5: *os períodos são iguais?*

A1: *Se acha que são iguais? – mostrando novamente os gráficos dos itens a e b. – aqui é π , aqui é $\pi/2$ – mostrando o primeiro período da função. – agora olha aqui, $\pi/2$ olha quanto ó - destacando a quantidade de ondas entre o 0 e $\pi/2$.*

A2: *aí é tipo, frequência?*

A1: *então, na verdade acho que determina o período. Mas não tenho certeza.*

[...]

A1: *Mas vocês tão conseguindo perceber que o período muda? Quanto mais alto o coeficiente é, mais ondinha ele tem. E quanto mais baixo mais próximo do 0, vocês tão conseguindo observar? – não havendo resposta – o que mais vocês estão percebendo?*

Apesar do esforço da aluna coordenadora (A1), muitas vezes os colegas permaneceram em silêncio, o que fez com que a mesma trabalhasse de maneira isolada nas reflexões para formulação das respostas sobre diferenças e semelhanças entre os gráficos. A aluna apontou que cada gráfico possuía um período diferente, sendo a altura comum a todos, e buscando mais semelhanças, persistiu com os colegas de equipe para que a auxiliassem. Nesse momento ela volta explicando, desde a primeira questão, buscando relembrar os conceitos como forma de incentivar a participação dos demais.

A1: *Vamos tenta entender, vamos lá – mostrando novamente os gráficos dos primeiros itens – Vocês aprenderam em Física sobre as ondas né? Todo mundo aprendeu esse conteúdo em Física? – os colegas respondem que sim.*

A1: *Isso aqui é uma onda - mostrando no gráfico - a altura aqui é igual a amplitude que a gente viu em Física. Nessa onda a amplitude é 12, pois o coeficiente é 12. Por essa fórmula, vemos que o termo a é a amplitude. – mostrando a fórmula geral da função cosseno.*

[...]

A1: *Agora a gente está vendo a questão desses outros gráficos, que a amplitude, como não tem coeficiente a , é 1. Todos estão com a mesma amplitude. – passando pelos gráficos. – Agora a gente está tentando ver o fato desse coeficiente que está junto com o x . Aqui não tem, então é 1.- sobre a função $f(x) = \cos x$.*

A1: *Agora aqui tem um 12, percebem que não é igual? Aqui o gráfico passa em 0, $\pi/2$, π e nesse outro caso olha onde tá o $\pi/2$, bem aqui. – mostrando o número de*

ondas do gráfico antes do $\pi/2$. – Nesse caso o que a gente tem de falar é que o coeficiente mexe com o periodozinho da onda, eu acho.

A2: Então o **a** determina a amplitude e o **b** seria o período.

A1: acho que é. Mas vocês conseguem perceber isso?

A2: Acho que é.

É perceptível o espírito de liderança da aluna coordenadora da equipe. Ela muitas vezes chama os colegas para a dinâmica das atividades, instigando-os e buscando fazer com que participem. Apesar disso, destaca-se também a falta de participação dos demais membros do grupo que, mesmo com o incentivo da colega, muitas vezes a deixam falando e debatendo de maneira solitária.

Esse fato é ressaltado pelas respostas de alguns desses alunos no questionário final quando indagados sobre a própria participação, ao justificarem essa ausência apontando dificuldades relacionadas à Matemática.

A3: *Pra ser bem sincero e justo com os outros colegas que desenvolveram a maior parte do trabalho acredito que eu não tenha ajudado o suficiente, sinto que poderia ter ajudado mais se eu não tivesse tanta dificuldade nos conteúdos básicos de matemática.*

A1: *A minha participação foi bem ativa. Em relação aos colegas, eu percebo que muitos tem dificuldade, mas não falam, o que prejudica a situação. Pois no trabalho estava disposta a tentar ajudá-los na aprendizagem.*

Com a presença do professor, a aluna coordenadora o questiona sobre uma percepção ainda relacionada à atividade 1, que havia sido apontado pelo aluno A2.

A2: *o valor da amplitude tem relação com o raio da circunferência professor? – digitado pelo chat.*

PP: *Olha, vocês foram longe hein, rs. Mas realmente, a primeira atividade vai falar do que?*

A1: *da amplitude né?*

PP: *Será que a amplitude tem relação com o raio da circunferência? Não sei se vocês perceberam, mas quando o valor da amplitude é negativo o que acontece lá na hora que vocês vão colocar no gráfico? Por exemplo, se eu tivesse lá $(-10\cos x)$?*

A1: *Ela fica parada? Vai em módulo?*

PP: *Vocês percebem que a imagem vai de -10 a 10, certo? E a amplitude vai ser quanto?*

A1: *é 10*

PP: *olha o que acontece, se você coloca valores positivos a amplitude fica? E se você coloca valores negativos a amplitude fica? O que isso quer dizer?*

A1: *que a gente está falando de módulo?*

PP: *vocês estão afiados, exatamente. Não vou falar mais porque senão entrego tudo.*

Ponte, Brocardo, Oliveira (2013), ressaltam o papel do professor, que deve sempre indagar os alunos, mas sem apresentar soluções. Apesar disso, os autores apontam para a necessidade de um feedback por parte dos alunos, pois eles sentem a necessidade de saber se estão no caminho correto. Porém, assim como é ressaltado por Romanello (2016), as atividades aplicadas não tinham o intuito de saber o certo ou errado, mas incentivar os alunos a assumirem o papel de exploradores, buscando entender o potencial do celular junto às tarefas investigativas, como forma de auxiliar nas discussões matemáticas.

Ainda aproveitando a presença do professor, a coordenadora o questionou sobre o direcionamento da segunda atividade. Este, por sua vez, apontou que estavam no caminho e pediu para trabalharem nas conclusões, indagando aos alunos sobre as situações propostas. Apesar do encerramento do tempo de aula, os alunos permanecem no ambiente, sendo que a aluna coordenadora fizera um resumo de maneira rápida das descobertas das duas atividades e havia pedido para que um colega ficasse responsável por responder um dos itens da atividade 2.

Na turma de informática, o grupo G2-I fez uma revisão do que já haviam feito, apontando pontos importantes das discussões anteriores. O aluno A8 levantou novamente um questionamento sobre o conceito de amplitude na Matemática, indagando os colegas se seria diferente do que haviam visto em Física. Nesta direção, um dos membros da equipe buscou na internet uma definição de amplitude, apresentada como “uma medida escalar negativa ou nula ou positiva da magnitude de oscilação temporal de uma onda, caso esta apresente alternâncias em torno do eixo horizontal”.

A8: A6, você lembra o que é amplitude no conceito da Matemática? Eu só lembro na Física.

A6: É a metade da diferença do mínimo e do máximo valor que essa função vai assumir.

A7: Eu pesquisei aqui e está falando que amplitude é a distância entre a linha média e um dos pontos extremos.

A8: Mas isso aí é a diferença entre o valor máximo e mínimo em relação ao eixo central né?

A7: a mesma coisa.

A4: amplitude é o maior menos o menor? Mas se fosse isso daria zero né?

A7: Não

A5: tipo se fosse 1 e -1

A7: seria $1 - (-1)$ que daria 2.

A8: Então amplitude em matemática não é a mesma coisa que em Física não?

A5: *Amplitude é a distância entre a crista da onda e o eixo horizontal ao comprimento da onda, isso em Física. Acho que é a mesma coisa não?*

A6: *aqui tem uma fórmula $a = y_{máx} - y_{min}$*

A8: *Isso também é o que eu acho. Amplitude é a distância do maior ponto ao menor.*

Nesse diálogo está presente a criticidade entre os participantes da equipe, que se indagaram sobre o conceito de amplitude vista na Matemática e na Física e realizam diversas buscas, debatendo e refletindo a fim de entender este conceito. Percebe-se então, de maneira entrelaçada, características dos eixos 1 e 3 de análise, ou seja, os alunos levantam diversos debates e reflexões intencionando entender o conceito de amplitude matematicamente.

Ao serem questionados pela professora assistente sobre dificuldades, os alunos apresentam o que formularam sobre o conceito de amplitude e indagaram se estaria correto ou não. A professora concordou com os alunos e os questionou sobre qual coeficiente estaria relacionado com essa ideia da amplitude.

PA: *Analise os gráficos, quando o valor do parâmetro aumenta ou diminui o que acontece com o gráfico?* – enquanto o gráfico de $f(x) = 10.\text{sen}x$ era apresentado.

A6: *a amplitude muda né? então a amplitude esta relacionada ao coeficiente a ? – após esse momento a professora acaba saindo da sala.*

[...]

A4: *ei, a diferença é que a amplitude muda né?*

A6: *a amplitude vai mudar, a imagem também* – durante o debate, o aluno técnico passava pelos gráficos dando zoom e clicando em seus detalhes.

A4: *a raiz, aqui está zero e zero né, a interseção?* – clicando sobre o ponto (0,0) no gráfico.

A6: *ela vai ser igual, não?*

A4: *não muda não, então essa vai ser uma semelhança. A raiz nunca muda, a interseção vertical não vai mudar.*

Com isso os alunos apontaram para a amplitude e imagem como diferença, ressaltando que a raiz seria igual em todos os gráficos, devido ao *Photomath* apontar o ponto (0, 0) como raiz e interseção vertical. Dando sequência, os alunos realizaram um debate sobre a ideia de período relacionada à atividade 1.

A8: *é, o período também muda.*

A4: *o período muda. Muda?*

A7: *o período muda sim viu. O período é a distância entre dois pontos máximos ou intervalo de repetição da função. Se for entre dois pontos máximos, vamos pegar a letra d e a letra c pra gente ver.* – Pedindo ao aluno técnico para apresentar os gráficos.

A6: *mostra os detalhes do gráfico. Agora dá um zoom ali no 2π . Nesse daí ele tá repetindo a cada 2π .*

A4: *isso.*

A6: *agora volta e entra em outro.*

A4: *esse aqui já muda ó.*

A6: *dá um zoom, o período muda né? Clica na bolinha ai.* – pedindo para o aluno técnico clicar sobre um ponto no gráfico. – *ué, mas não mudou.*

A4: *vamos pegar o exemplo da c agora.* – dando zoom no gráfico para os colegas – π , 2π , 3π .

A8: *mas não faz sentido.*

A6: *o período vai ser sempre o mesmo doído. Ele segue o gráfico do plano x que é 0 , π , 2π , 3π .*

A4: *essa é uma semelhança então, o período não muda.*

A partir dos diálogos da equipe, é perceptível a interação aluno-aluno, tanto nos momentos que são indagados pelos professores quanto nas discussões entre os próprios colegas, demonstrando interesse e realizando discussões pertinentes, que podem ser apontados como características relacionadas às tarefas investigativas. Além disso, entende-se que as tarefas trabalhadas cumprem o papel de *desafiar os alunos*, de modo que estes se envolvem no processo, e despertam a criatividade na hora da exploração (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013). Assim como Romanello (2016), entende-se que o uso do aplicativo, assim como do ambiente do *Google Meet*, permitiram discussões e reflexões acerca do conteúdo que estava sendo trabalhado, sendo feito o desenvolvimento desse conteúdo em conjunto com os alunos, não havendo apenas a transmissão pelo professor. Percebe-se que este contexto entrelaça os três eixos de análise dessa pesquisa, ou seja, a manifestação do pensamento matemático durante as discussões, o envolvimento dos alunos com o aplicativo e a elaboração de hipóteses e estratégias, que são questionadas e verificadas pelos próprios alunos.

Dando sequência, o aluno técnico compartilha a tela do *WhatsApp* na sala e é possível perceber que os alunos realizavam várias discussões e compartilhamento de material pelo aplicativo. Um dos alunos pede que o aluno técnico mostre as opções que o *Photomath* apresenta de cada gráfico para que possam analisar e comparar outros pontos. Com isso destacam que o domínio é o conjunto dos reais, o período se mantém e ressaltam que o extremo seria uma diferença. Após observar os detalhes de vários gráficos, levantam a hipótese de que a função seno seria ímpar, porém, quando o valor do coeficiente é negativo, o aplicativo não apresentava opção. Os alunos realizam testes com outros valores e percebem que realmente não era dada opção nesta situação. Além disso, o *Photomath* aponta para um

ponto de inflexão, mas não sabendo do que se trata, os alunos não realizam debate sobre essa opção, assim como para a opção que aponta a assíntota oblíqua.

Por fim, os alunos combinaram de discutir durante o fim de semana para fecharem a primeira etapa. Destaca-se o entrosamento e participação conjunta de todos os membros da equipe, que além de se ajudarem, discutem, buscam soluções, e se questionam sobre os levantamentos e teorias apresentadas. Ressalta-se que os próprios alunos tiveram essa percepção, tendo em vista as respostas de alguns integrantes do grupo quanto à própria participação e a dos colegas durante as etapas de intervenção, que foram apresentadas no questionário final.

A6: Conseguimos nos comunicar muito bem, cooperando juntamente para a resolução das atividades propostas. Alguns de nós tivemos bastante dificuldade. Mas todos nos ajudamos, sem julgamentos. Todos dispostos a ajudar de alguma forma.

A8: Todos fizeram um incrível trabalho no projeto. E isso que me deixa mais admirado, nós (meus colegas e eu) fomos autodidatas, e provamos para nós mesmos que estudar juntos é uma incrível ideia, principalmente por conta do espírito de equipe.

O grupo G3-I, também acompanhado pela professora assistente, deu sequência à realização da atividade 2, construindo os gráficos e debatendo sobre possibilidades nos questionamentos propostos. Os mesmos deixaram um colega que não estava presente nas aulas síncronas responsável por encontrar o domínio e período, mas não havendo retorno, aproveitaram o momento de aula para lembrarem estes conceitos. Novamente questionaram a professora sobre o que seria o período.

A11: o período seria infinito?

PA: vocês perceberam que tem aquele valor, o comprimento que fica se repetindo né? Então o período seria o valor de quanto em quanto está se repetindo. Seria essa distância, de quanto em quanto que ele se repete?

A12: seria então o 2π ?

PA: nesse caso sim, mas verifiquem se é isso mesmo.

Porém, assim que a professora deixou a equipe, para que debatessem sobre os questionamentos, os alunos se voltaram novamente à atividade 1, visto que o colega havia enviado pelo *WhatsApp* o que deveria ser acrescentado em uma das questões. Os membros se questionaram sobre o que o colega apresentou sobre o domínio ser comum a todos os itens e a imagem estar mudando. Em certo momento ficaram em dúvida sobre o que seria a amplitude que havia sido mencionada entre as respostas enviadas.

A10: *e o que é amplitude?*

A12: *amplitude é o número que você tá multiplicando. É tipo, se pega ai ó, a imagem da letra a se tá multiplicando por 1 ai a amplitude é 1. Da b por 12 ai a amplitude é 12.*

A10: *então, eu lembro que tinha de fazer uma conta pra achar.*

A12: *eu lembro que a Adrianinha deu isso – falando de uma ex professora.*

Apesar de não haver uma organização na realização das atividades, os alunos buscaram entender o que foi apresentado pelo colega, resgatando, inclusive, conceitos trabalhados em anos anteriores. Na sequência, a aluna redatora (A10) terminou de inserir os domínios, imagens e período na apresentação e questionou os colegas sobre as semelhanças e diferenças. Com isso, destacaram que o domínio e o período eram comuns a todos os gráficos e que a imagem se diferenciava. Por fim, combinaram uma divisão de tarefas entre os membros antes da próxima aula e reclamaram sobre os membros da equipe que não estariam participando das atividades.

Ao final da aula, os alunos começaram a conversar de forma livre e espontânea, ligando inclusive a câmera para os colegas verem um animal de estimação. Quando surge um comentário mais pessoal, um aluno lembra aos colegas sobre a gravação realizada e sugere que continuem conversando por outra sala. A partir deste contexto é possível perceber um pouco da falta que os alunos sentiam dos momentos presenciais, nos quais conseguiam conversar de forma livre, ter uma interação entre os colegas e falar sobre diversos assuntos. Percebe-se que os momentos síncronos pelo *Google Meet* permitiram uma interação mais próxima entre os alunos, e incentivados pelas atividades investigativas puderam ter maior liberdade ao se expressarem durante os momentos de aula.

Com o encerramento das atividades deste dia, percebeu-se que o número de aulas planejadas não seria suficiente para que os grupos realizassem todas as etapas propostas inicialmente. Nesse sentido, foi necessária uma reorganização do planejamento, de modo que não se estendesse o prazo. Araújo e Borba (2019), apontam que, ao desenvolver uma pesquisa, devemos partir de um planejamento inicial, não muito rígido, ou seja, devendo ser flexível de modo a não sufocar a realidade, estando ainda aberto às diversas situações imprevistas que podem vir a ocorrer.

A etapa 1 não foi modificada, visto que os alunos já estavam empenhados no desenvolvimento das atividades. A etapa 2 inicialmente apresentava duas atividades relacionadas aos coeficientes c e d . Dividiu-se essas atividades de modo que cada grupo

trabalhasse com um dos coeficientes, o que ficou definido como uma atividade extra. Além disso, a etapa 3 foi repensada de modo a assumir a forma de um debate final em conjunto com todas as equipes, visto que o tempo seria pouco para a realização de todas as etapas; momentos de apresentação e discussão. Nesse sentido, as aulas dos dias 10 e 11 de Maio, divididas em três momentos, foram utilizadas para que os alunos realizassem o fechamento das atividades da primeira etapa e a atividade extra, planejando-se que as discussões e o fechamento fossem realizados a partir do dia 12.

No dia 10 de Maio, o grupo 2 de Informática (G2-I) continuou realizando a segunda atividade, sendo que os membros haviam se reunido durante o final de semana e concluído algumas discussões relacionadas à atividade 1. Os alunos exploraram amplamente o *Photomath*, sendo que, como forma de facilitar a discussão, o aluno técnico fotografou todas as funções da atividade, deixando-as registradas na opção *histórico* do aplicativo e, com isso, conseguiu acessar facilmente cada função durante as discussões, além das opções de resultados apresentadas.

Durante a exploração, quando clicado na opção “encontrar período”, os alunos aproveitaram do que era apresentado pelo aplicativo, que apresentava a função escolhida e detalhava o processo do cálculo do período, ou seja, desde a apresentação da fórmula, os valores do coeficiente e o cálculo passo a passo, conforme a figura 13.

Figura 13: passo a passo do cálculo do período da função $f(x)=\text{sen}(-4x)$.



Fonte: acervo do autor

Neste contexto, é possível identificar a interação dos alunos com o aplicativo e com o cenário investigativo, caracterizando o terceiro eixo de análise. Além disso, como é apontado por Romanello (2016), o celular permite ao aluno a exploração do aplicativo e de suas funcionalidades de forma imediata, visto que estão acostumados, não havendo grande necessidade de instruções prévias. Essa característica pode ser entendida como uma das potencialidades do celular, uma vez que este permite uma “possibilidade de o aprendiz facilmente acessar os elementos básicos que compõe o ambiente de aprendizagem, e progredir na manipulação destes elementos de acordo com sua necessidade e desenvolvimento cognitivo” (MALTEMP *apud* ROMANELLO, 2016).

Ao debaterem sobre diferenças entre os gráficos, os alunos apontaram para a mudança do “ π ”. Um dos alunos questionou se a imagem mudaria. Desse modo, ao visualizarem os gráficos, perceberam que as imagens se mantinham entre -1 e 1 e que o domínio se mantinha o mesmo. Novamente, passaram a analisar as opções apresentadas pelo *Photomath* e definiram que o domínio, a imagem, a interseção vertical e a amplitude são semelhantes enquanto o período e a raiz seriam diferentes.

Percebe-se que apesar dos alunos apontarem que a raiz das funções seriam diferentes, estes não relacionam este conceito com a periodicidade da função. Neste sentido, entende-se que nem sempre o professor consegue explorar todos os conceitos envolvidos em uma tarefa e a investigação acaba mobilizando estes a procurar saber mais sobre a própria Matemática.

No momento seguinte, a professora assistente instigou os alunos sobre uma conclusão em relação ao que o coeficiente **b** estaria causando no gráfico das funções quando comparado com o de $g(x)=\text{sen}(x)$. Com isso, os alunos apontaram para a possibilidade de ele estar mudando o período da função.

Ao realizar uma busca no *Google*, um dos alunos encontrou uma informação que invertia os coeficientes **a** e **b** em relação à forma que era apresentado na questão. Com isso foi necessário refletirem sobre o fato de a informação estar equivocada. Os próprios alunos discutiram a respeito dos sites que estavam consultando e, após questionarem a professora assistente, chegaram à conclusão de que a forma apresentada no site era diferente da que estava apresentada nas situações propostas. Além disso, apontaram que uma fórmula encontrada em uma das buscas, a qual determinaria o período da função, poderia ser adaptada para o coeficiente **b**, o que também era apresentado pelo aplicativo *Photomath* na opção “determine o período trigonométrico”.

Por fim, ao serem incentivados pela professora, realizaram testes para verificar o que acontece quando o coeficiente b assume o valor zero, porém, como o *Photomath* não apresentou um gráfico, ficaram em dúvida sobre a questão.

A8: *Não tem gráfico, não existe solução.*

A5: *será?*

A6: *mas ali da solução ó. Quando é $f(0)=0$.*

A7: *é isso, se o b for zero sempre vai ser seno de zero. Estranho não ter gráfico.*

A8: *mas tem gráfico?*

A7: *era pra ter, seria uma constante, porque seno de zero é zero, mas era pra ter.*

É perceptível que os alunos tem uma noção de conceitos matemáticos anteriores. Eles se indagam e questionam inclusive o que é apresentado pelo aplicativo. Apesar disso, acabaram afirmando na apresentação final que não existiria gráfico, mesmo havendo a contradição apresentada por um dos colegas. Entende-se que muitas vezes os alunos acabam não estando acostumados a este processo de reflexão, o que pode fazer com que não se sintam seguros com as hipóteses levantadas. Porém, esse processo pode permitir que o aluno mobilize seus recursos cognitivos e afetivos a fim de atingir determinado objetivo, o que Ponte, Brocardo, Oliveira (2013) acreditam auxiliar no processo de aprendizagem. Este contexto ressalta ainda a manifestação do conhecimento matemático, eixo 1 de análise, e a elaboração de hipóteses e construção de estratégias (eixo 3), apesar de não terem sido testadas adequadamente.

Destaca-se também uma das limitações do aplicativo *Photomath*, sendo que por conta da ausência de resposta em casos particulares pode-se gerar dúvidas nos alunos. Nesse ponto, destaca-se a necessidade da intervenção do professor, no sentido de mostrar que estas limitações existem e que não se deve estar preso apenas ao que é apresentado pelo aplicativo.

No grupo 3 (G3-I) da turma de informática apenas duas integrantes estavam presentes, as quais, inicialmente, conversaram sobre diversos assuntos e criticaram a falta de compromisso dos colegas. Na sequência continuaram o debate sobre a atividade 2 e, mesmo a professora assistente oferecendo ajuda, apontaram que estavam conseguindo realizar as reflexões. Apesar de já terem realizado a primeira atividade, a aluna redatora (A10) fez uma busca na internet de um vídeo sobre domínio, imagem e período. Com isso, a partir do que é apresentado no vídeo, apontou que o domínio nas funções apresentadas seria o conjunto dos “reais”. A colega, por sua vez, explicou que a imagem poderia ser escrita a partir dos pontos de máximo e mínimo que era apresentado pelo *Photomath*. Apesar disso, esta não soube dizer

qual ordenada iria primeiro na escrita do intervalo, momento em que a professora assistente se manifestou e explicou que seria o valor que estaria abaixo, ou seja, o menor valor.

As alunas questionaram a professora assistente sobre os períodos encontrados na primeira atividade, e esta as instigou até compreenderem que seriam semelhantes em todos os gráficos. Para isso, a professora pediu que a aluna responsável pelo compartilhamento da tela ampliasse os gráficos e assim pudessem contar o número de repetições de cada um. Dessa forma conseguiram entender que o período seria 2π em ambas as situações. Ao apresentar o gráfico de $f(x) = 0.01.\text{sen}x$ a aluna questionou a professora sobre o gráfico não ter período, por conta de se assemelhar a uma reta. A professora explica que realmente é mais difícil de perceber, mas ao pedir para as alunas ampliarem um pouco o gráfico, conseguiram observar que ainda existem ondas e que essas novamente começam a repetir em 2π .

Apesar do *Photomath* permitir ver o período de maneira direta, as alunas não tiveram essa percepção ao explorar o aplicativo e, com isso, houve uma dificuldade para encontrá-lo na segunda atividade. Nesse sentido, apresentaram os gráficos e questionam a professora sobre a forma de encontrar o período, tendo-se o seguinte diálogo.

A10: *o período da letra a é 2π né? Porque ele começa no 0 e começa a repetir no 2π .*

A11: *e o da b é diferente da a.*

PA: *isso, e depois repete em 4π , 6π e assim vai indo de dois em dois.*

A10: *da letra b deixa eu ver, é que eu to passando o dedo aqui pra entender. Ele começa no zero, ai ele vem ...*

A11: *mas não tem número.*

A10: *é.*

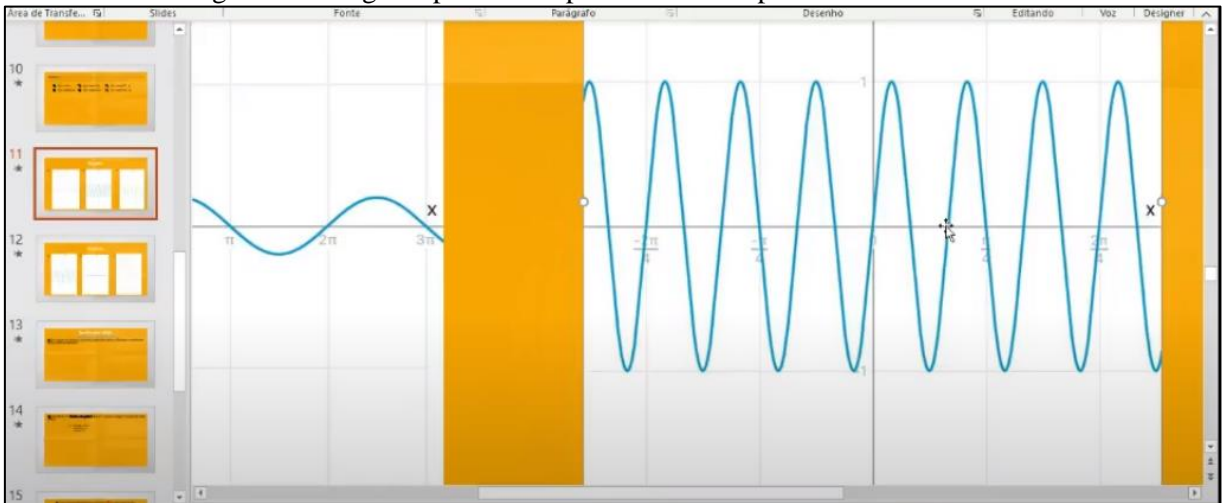
[...]

A10: *aqui no 2 ele começa no 0 e começa a repetir no $\pi/4$?*

PA: *ele começa a repetir antes né?*

Visto que as alunas buscaram identificar o período pelos gráficos já plotados, houve certa dificuldade, que foi ampliada por utilizarem as imagens da apresentação no lugar da exploração pelo aplicativo. O diálogo apresentado ressalta essa dificuldade, visto que não é possível identificar o valor no eixo x onde o período começa a se repetir, conforme figura 14.

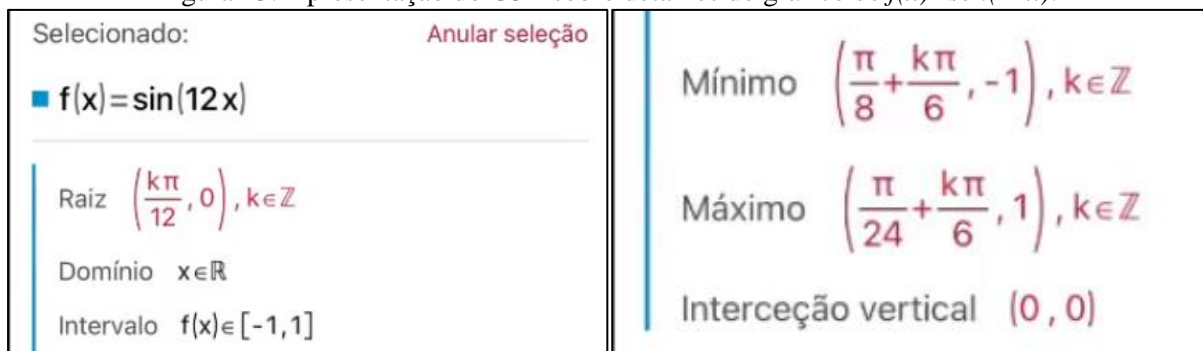
Figura 14: Imagem apresentada pelo G3-I sobre período na atividade 2.



Fonte: acervo do autor.

Mesmo encerrando o tempo de aula, as alunas permanecem no ambiente com objetivo de entender e adiantar a atividade, sendo que a professora buscou auxiliá-las para que conseguissem dar prosseguimento. A aluna A11 solicitou à colega que compartilhasse a tela do celular, a fim de conseguirem ver os gráficos de maneira mais tranquila, além de possibilitar ampliá-lo. Durante a exploração da função $f(x)=\text{sen}(12x)$, ao clicarem sobre os detalhes do gráfico (figura 15) seria possível perceber o período como parte da abscissa da raiz da função, porém, mesmo se questionando sobre cada uma das opções não houve essa percepção.

Figura 15: Apresentação do G3-I sobre detalhes do gráfico de $f(x)=\text{sen}(12x)$.



Fonte: acervo do autor.

A professora assistente buscou explorar o gráfico da figura 15 junto com as alunas para que pudessem entender esse conceito.

PA: Vocês conseguem ver que vai de 0 até $2\pi/8$, é isso né?

A10: é sim.

PA: Você vai contando até chegar em um número que você conhece.

A10: de 0 até π certo?

PA: *de 0 até depois do $\pi/8$ né? que é um período. Se continuar, até onde que vai?*

A10: *o primeiro período vai do 0 até um número que a gente não sabe qual é.*

PA: *isso mesmo. Mas se continuar olhando o gráfico, vai até a onde?*

A11: *o segundo vai de um número que a gente não sabe até outro que a gente também não sabe.*

PA: *isso, e o próximo vai até $4\pi/8$ né? – as alunas concordam.*

A10: *Ahan. Então esse é o período?*

PA: *não. Quantas vezes vocês tiveram até chegar nele? Três vezes né?*

A10: *isso.*

A11: *então a gente vai dividir?*

PA: *Isso.*

A11: *Mas e como a gente vai dividir?*

Visto o horário, a professora explica a necessidade de sair da sala, mas ainda assim as mesmas permaneceram em discussão de como realizar a divisão apresentada. Não havendo sucesso, combinaram de deixar as operações escritas e realizar o cálculo com ajuda dos demais colegas no próximo momento de aula. Neste sentido, realizaram a contagem do número de períodos nos outros gráficos, deixando-o anotado. Antes de deixarem o ambiente, ficaram um bom tempo conversando sobre assuntos pessoais.

Percebe-se que, apesar das ferramentas disponíveis, tanto no aplicativo, quando na dinâmica de utilização do *Google Meet*, as alunas tiveram dificuldade de perceber e utilizar de maneira eficiente todas essas opções, o que fez com que tivessem mais trabalho e dificuldade na realização de tarefas que poderiam ser tranquilas. Além disso, é possível perceber uma carência relacionada a conceitos matemáticos básicos que auxiliariam nas discussões e reflexões. Nesse sentido aponta-se para a necessidade de um trabalho mais lento e de maneira gradual, fazendo com que os alunos busquem entender os conceitos de forma mais tranquila com foco no aumento das habilidades e buscando aumentar sua confiança (BARRETO, 2017).

Na aula seguinte, ainda no mesmo dia, as alunas foram acompanhadas pelo professor pesquisador. Inicialmente trabalharam na organização de informações disponibilizadas por um colega ausente. Com a presença do professor, pediram ajuda em relação ao conceito de período, explicando como estavam realizando anteriormente junto da professora assistente. Novamente compartilham a tela do celular e iniciam um diálogo com o professor.

PP: *o primeiro período vocês não sabem, então vocês vão ir até onde termina um período completo. Ali ó, 4π sobre?*

A10: 8.

PA: *tem de ter dado um número certinho de voltas. Ai vocês veem quantas voltas que deu.*

A11: *são 3.*

PP: *3 voltas? Ai você vai pegar $4\pi/8$ e dividir por 3.*

A10: *mas como que faz essa conta?*

PP: *lembra ó, é divisão de fração. Você multiplica o $4\pi/8$ pelo 3 invertido. Se quiser até anotar ai, fica $4\pi/8$ dividido por 3. Como que eu resolvo uma conta desse jeito? Ficaria $4\pi/8$, ao invés de dividir, vocês multiplicariam pela inversa de 3. Então $4\pi/8$ vezes $1/3$. Que daria $4\pi/24$.*

A11: *então o período é $\pi/6$.*

Com isso as alunas conseguiram entender a forma de determinar o período e durante o restante da aula trabalharam na descoberta dos demais. Ainda discutiram com o professor sobre as diferenças e semelhanças apresentadas nos gráficos, sendo indagadas sobre suas percepções em relação aos gráficos e ao período que haviam determinado anteriormente. Novamente, receberam informações transmitidas por um colega que não estava presente, desta vez sobre a atividade 1, e questionaram o professor se estaria correto. O mesmo ouviu as conclusões e indagou as alunas sobre o que seria a amplitude e como esta poderia ser calculada. As mesmas discutiram entre si e apontaram que a amplitude seria a metade da distância entre a imagem.

PP: *coloca o gráfico pra gente. Nessa função, qual o valor do coeficiente a? – sobre a função $f(x) = 10\text{sen}x$.*

A10: *é o 10.*

PP: *a distância entre os pontos da imagem é 20 e o que tá lá é o 10. Então o que seria a amplitude?*

A10: *é a distância entre os pontos mínimo e máximo?*

PP: *e qual a relação da amplitude com o coeficiente a?*

A10: *é o mesmo valor.*

Visto os questionamentos e a interação dos alunos com o professor, concorda-se com Romanello (2016) quando aponta que:

a postura do professor de sempre tratar as questões dos alunos com outra questão faz com que o aluno reflita acerca do conteúdo das ideias que os cercam. Desse modo, retomando o que os alunos já conhecem, outros conhecimentos vão tomando forma nas falas dos alunos (ROMANELLO, 2016, p.99).

Apesar do esforço das alunas presentes, percebe-se que a falta dos demais colegas dificulta o debate e, conseqüentemente, prejudica as reflexões visando a realização das

atividades. Além disso, apesar de estarem enviando respostas às colegas, esse movimento acaba descaracterizando a ideia da atividade investigativa, (PONTE; BROCARDO; OLIVERA, 2013), visto que essas respostas são apresentadas sem que exista o movimento dos debates, reflexões e testes para validação dessas hipóteses. É importante entender que esta acaba sendo uma limitação imposta pela pandemia, pelo ensino remoto e não pelas TD utilizadas.

No dia 11 de Maio, o grupo G1-A teve três momentos de aula. Estes alunos estavam adiantados em relação às atividades 1 e 2, já iniciando a extra. Ao conversarem com o professor, a aluna coordenadora (A1) fez um breve apanhado de tudo que haviam realizado e salientou que discutiram através do grupo da turma no *WhatsApp*. Uma vez que a equipe estava adiantada em relação as atividades, o professor verificou com os alunos se aceitariam ser desafiados com uma questão além da extra e eles concordaram de maneira tranquila. Além disso, visto que o segundo grupo da turma estava tendo muita dificuldade, o professor pediu que o avisassem caso precisassem de ajuda.

Na sequência, a coordenadora da equipe compartilhou a apresentação, sendo que a atividade extra era voltada à investigação do coeficiente c relacionado à função cosseno. A equipe se dividiu de modo que um dos alunos fizesse a plotagem dos gráficos e compartilhasse no grupo da equipe no *WhatsApp*; a coordenadora organizasse a apresentação e os demais buscassem entender as semelhanças e diferenças, a fim de elaborar uma conclusão sobre o coeficiente. Surge o seguinte diálogo mediante a visualização dos gráficos.

A1: *Ó, eles são meios iguais em ondinhas, mas aqui tá meio distante não tá?.* – apontando para um segundo gráfico, o qual estava deslocado horizontalmente.

A2: *espera, fala de novo. Eu não consegui entender.*

A1: *as ondinhas são todas iguais né? como você falou são parecidas, são iguais. Mas aqui a ondinha tá aqui no meio ó, tá vendo ne? -* apontando para o ponto de máximo da função $f(x)=\cos x$, quando $x=0$, ou seja, o ponto máximo em y .

A2: *sim, sim. Esta diferente mesmo.* – o aluno responde enquanto a coordenadora passa para outros gráficos.

A1: *ai a gente tem que saber o que é isso eu acho*

[...]

A1: *Num tem haver com período?*

A4: *pera ai, eu tava mandando os print lá, o que se perguntou?*

A1: *o A2 falou que era parecido, são parecidos mesmo, mas tem alguma coisa que muda. O período não é porque o período deu tudo igual.*

A partir desse diálogo percebe-se que os alunos conseguiram assimilar a mudança entre os gráficos, porém não sabiam como explicar o que causa a mudança. Com a presença do professor, são indagados buscando-se obter novas descobertas.

PP: *A dica que dou pra vocês é quem tiver com ou Photomath aberto ir mudando o valor do coeficiente c e verificar o que acontece. – como nenhum aluno se manifestou o professor continua. – ou olhar para o que vocês construíram mesmo.*

A1: *A gente tava dando uma olhadinha aqui e ele só muda a posição da onda.*

PP: *ai ó, você já falou o que muda rs*

A1: *sei*

PP: *mas muda a posição em que sentido? Que mais que muda? A imagem muda?*

A1: *não*

PP: *o período muda?*

A1: *não*

PP: *o que mais, o domínio muda?*

A1: *também não*

PP: *tá mudando o que você acabou de me falar. Tá mudando a?*

A1: *ondinha, mas mudando só a posição.*

PP: *mudando a posição em relação ao que? Subindo, descendo, indo pra qual lado?*

A4: *ao eixo x né? Conforme maior o número que você soma ele anda mais pra direita.*

PP: *é umas coisas que da pra vocês se perguntarem ó. Conforme maior for o número anda pra direita e se eu colocar um número negativo vai andar pra onde?*

A4: *pra esquerda.*

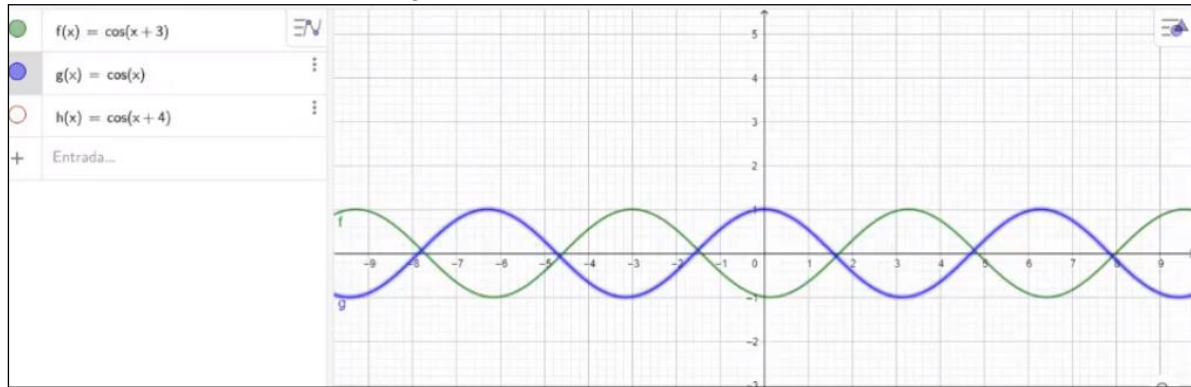
PP: *será que é isso mesmo? Confere pra ter certeza ok.*

Pelo diálogo é possível perceber que o professor busca incentivar os alunos. Apesar de surgirem comentários mais diretivos, em nenhum momento o professor trouxe uma resposta pronta. Além disso, percebem-se indícios do avanço do conhecimento matemático dos alunos, visto a interação com o professor e as respostas apresentadas, o que caracteriza o primeiro eixo de análise.

Não conseguindo formalizar uma hipótese, os alunos questionam o professor sobre como poderiam concluir a questão. Com isso, o professor pede que verifiquem se o *Photomath* trabalha com o valor do coeficiente c em radianos, porém, apesar de ser possível escrever a função, o mesmo não apresenta um gráfico nesta situação. Neste sentido, o professor pede aos alunos que utilizem o valor $3,14$ e $-3,14$ no lugar do coeficiente, pensando no valor de π , o que permite a construção dos gráficos. Ainda assim, quando indagados, os alunos não conseguem tecer uma consideração a respeito do coeficiente. Visto isso, o

professor pede permissão e explica que utilizaria o aplicativo *GeoGebra* de forma online, buscando facilitar a visualização e entendimento dos conceitos relacionados ao coeficiente. A tela do *GeoGebra Online* é compartilhada com o grupo, e o professor insere algumas funções (figura 16) enquanto questiona os alunos.

Figura 16: Tela do GeoGebra online.



Fonte: acervo do autor.

A dificuldade da equipe estava no entendimento do sentido que a senoide se movia conforme era alterado o coeficiente. Com isso o professor foi modificando os valores em diálogo com os alunos, a fim de que pudessem perceber e levantar considerações pertinentes.

PP: Temos aqui o $\cos x$, que é o gráfico padrão de vocês. – apresentando o gráfico no GeoGebra. – o que acontece se eu colocar $\cos(x+3)$? Ó, o gráfico apareceu aqui. A dificuldade que to percebendo é perceber se o gráfico foi pra frente ou pra trás. Observem esse ponto aqui – marcando o ponto $(0,1)$ – eu quero saber pra onde ele foi. Vamos dar um zoom aqui. Vocês acham que ele veio aqui pro 3? – dando zoom no gráfico próximo de $(3,1)$

A4: Não. Não tá centralizado certinho.

PP: Agora vamos ver no -3. Olha lá ó.

A1: então foi pra trás.

PP: vamos marcar a função $\cos(x-4)$ – repetindo o processo.

[...]

A4: Pera ai. Quando coloca positivo ele volta? E quando é negativo ele vai?

PP: Neste sentido mesmo. Mas deu pra compreender?

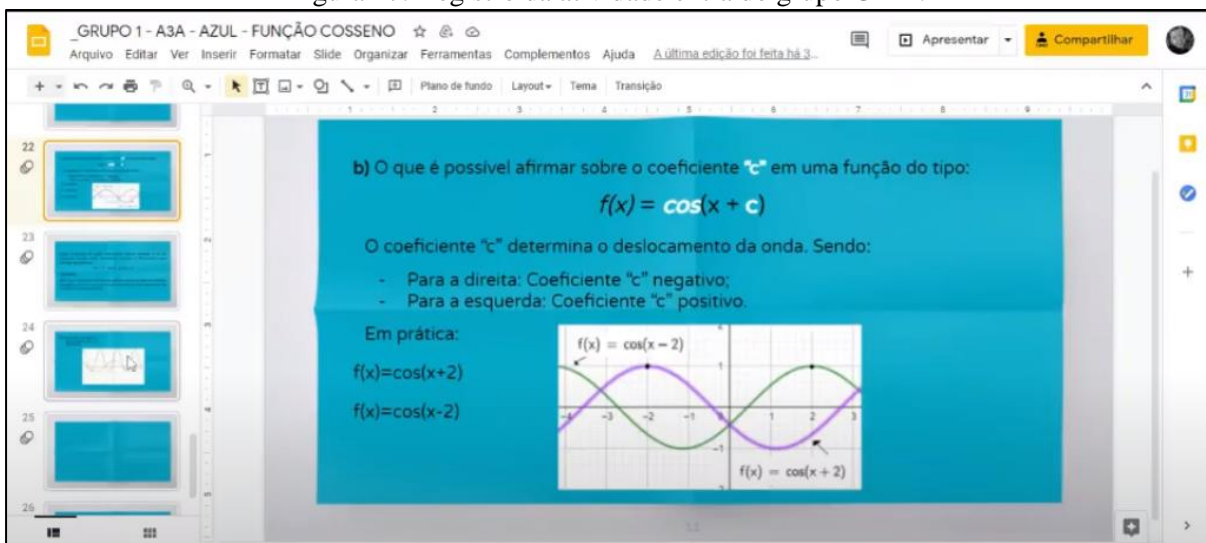
Os alunos ainda questionam como poderiam justificar, se existiria algum termo matemático para essa situação, e o professor pede que utilizem as próprias palavras, escrevendo o que haviam entendido e percebido com as investigações. As indagações por parte do professor, assim como a necessidade de testes constantes evidenciam, novamente, características das Atividades Investigativas (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2013). Apesar de algumas limitações impostas pelo aplicativo, entende-se que mesmo se tendo

proposto uma ferramenta específica, pode-se dispor de outras para superar estas limitações. Romanello (2016) ressalta sobre “a importância da utilização de não apenas uma tecnologia, mas de outras também disponíveis ao professor de modo a buscar enriquecer a aula e melhor atender aos alunos” (p. 89).

Os momentos de aula seguinte foram em sequência, sendo que inicialmente continuaram a discussão sobre a atividade extra, um dos alunos (A1) fez uma pequena revisão do que haviam conversado anteriormente e entraram em acordo que as semelhanças apresentadas nas funções incluíam a amplitude, a imagem, o domínio e o período. Além disso, destacaram que a partir do coeficiente c haveria um deslocamento do gráfico, sendo que, quando c fosse positivo o gráfico “andaria” para “trás” e quando fosse negativo para “frente”. Concluem então que o coeficiente c determina o “sentido da onda”, sendo que a onda iria para a direita quando $c < 0$ e para a esquerda quando $c > 0$.

A pedido da coordenadora do grupo, dois alunos fizeram testes com outras funções variando o coeficiente c , o que serviu para comprovarem o que haviam formulado. Além disso, fizeram a plotagem do gráfico das funções $f(x) = \cos(x-2)$ e $f(x) = \cos(x+2)$, os quais são colocados na apresentação como uma forma de provar a hipótese que haviam formulado. Um membro pediu à aluna coordenadora que deixasse os pontos $(-2,1)$ e $(2,1)$ em destaque, o que não é possível fazer no *Photomath*. Apesar disso, a mesma tenta utilizar o *Geogebra Online* e com certa dificuldade consegue gerar os gráficos novamente, mas não consegue localizar a opção de marcar os pontos, que são destacados a partir do editor de imagens *paint*, conforme apresentado na figura 17.

Figura 17: Registro da atividade extra do grupo G1-A.

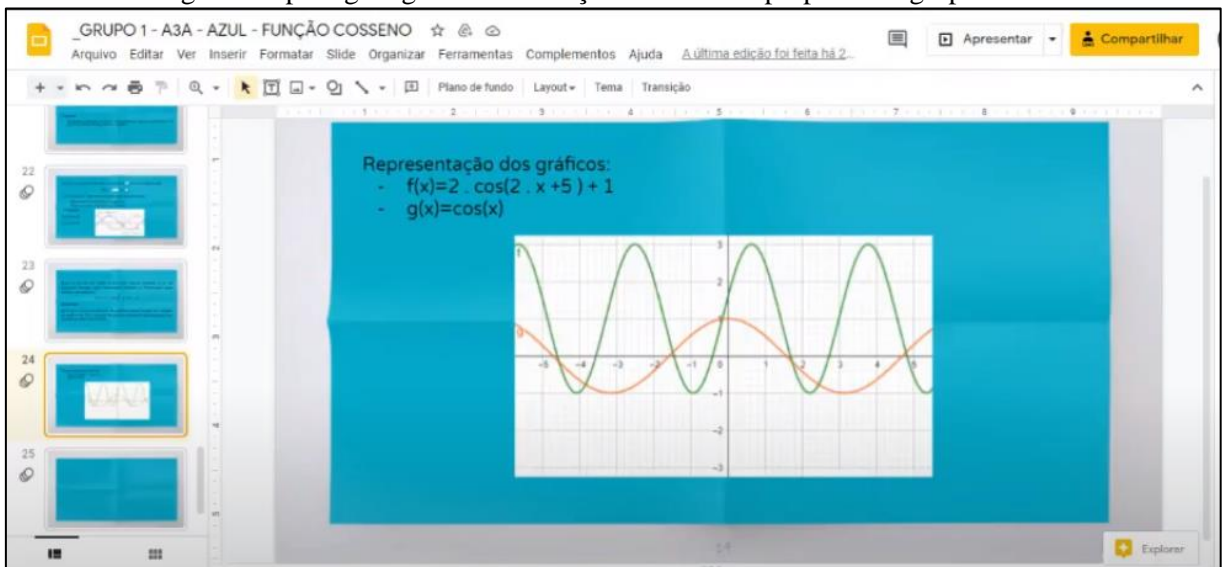


Fonte: acervo do autor

Como é apontado por Ponte, Brocardo, Oliveira (2013), o surgimento de conjecturas leva à necessidade de fazer testes, o que pode ser verificado a partir do contexto apresentado anteriormente. Esse teste de conjecturas é um aspecto do trabalho investigativo que os alunos entendem com certa facilidade, o que se une, muitas vezes, ao próprio processo intuitivo (PONTE, BROCARD; OLIVEIRA, 2013, p.33). Ressalta-se a presença do terceiro eixo de análise, ou seja, os alunos levantam hipóteses e eles mesmos testam sua validade utilizando o aplicativo.

Após um pequeno intervalo, a aluna coordenadora sugere que a equipe discuta a atividade que foi proposta como desafio, sendo que a mesma já havia se situado do que era questionado. A questão apresentava a função $f(x)=2.\cos(2x+5)+1$ e perguntava o que seria possível afirmar do seu gráfico em relação ao de $g(x)=\cos.x$, pedindo para que realizassem uma análise a partir de cada coeficiente. A aluna aponta aos colegas que havia feito a plotagem dos gráficos através do *GeoGebra*, visto que novamente não foi possível gerá-los a partir do *Photomath* (figura 18).

Figura 18: plotagem gráfica das funções do desafio proposto ao grupo G1-A.



Fonte: acervo do autor

Esse movimento reforça a importância da exploração de diferentes gráficos, visto que os alunos conseguem identificar características importantes através da visualização e comparação desses gráficos (ROMANELLO, 2016). Com isso, a coordenadora realizou várias indagações aos colegas, fazendo com que estes auxiliassem no entendimento das transformações em $g(x)=\cos x$, a partir de cada coeficiente, até que se obtivesse o gráfico da

primeira função. Apesar de não terem trabalhado com o coeficiente d , através de um exemplo apontado anteriormente pelo professor conseguiram concluir a influência deste nas transformações. Com isso, concluíram que os gráficos diferem-se no período, amplitude, imagem e deslocamento em relação aos eixos x e y , o que acontece devido aos coeficientes a , b , c e d . Além disso, destacam os valores dos coeficientes em cada função. Notou-se indícios do avanço do conhecimento matemático dos alunos, eixo 1 de análise, visto que utilizaram os conceitos das atividades da etapa 1 e 2 como forma de auxiliar nas conclusões do desafio proposto.

Encerrando as investigações do G1-A, percebe-se que, apesar da sugestão proposta inicialmente, as divisões entre os membros da equipe pareceram desiguais. Uma aluna acabou assumindo a função de coordenadora, redatora e técnica, precisando, muitas vezes, chamar os colegas para que participassem dos debates e reflexões. Dentre os oito membros, apenas quatro se mostraram presentes durante os momentos de aula. Percebe-se, novamente, que esta de ser considerada uma limitação imposta pelo ensino remoto, que após um tempo, apresenta uma grande defasagem de aprendizagem por parte dos estudantes. Apesar disso, a equipe conseguiu realizar reflexões importantes, buscando sempre testar e validar as hipóteses apresentadas, além de utilizar de outras ferramentas para um melhor entendimento das atividades.

Ainda neste dia, o grupo G2-I, sob supervisão do professor pesquisador, apontou já ter realizado a atividade extra, buscando entender características relacionadas ao coeficiente c na função $f(x) = \text{sen}(x+c)$. Porém, por conta de um descuido da equipe, a proposta correta era que investigassem o coeficiente d . Neste sentido, foi necessário que realizassem a atividade correta. Ao conversarem com o professor, o mesmo os instigou a pensarem sobre o que acontecia com o gráfico em relação a esse coeficiente e as mudanças caso aumentassem ou diminuíssem esse valor.

Em meio às discussões, os membros lembraram cada coeficiente, incluindo o c , que apontaram resultar em um “deslocamento lateral”. O aluno técnico (A5) escaneou todas as funções, deixando-as salvas no histórico do aplicativo, e perpassou pelos resultados de cada uma fazendo uma comparação e questionando a equipe sobre o que mudaria.

A5: *esse aqui deu diferente ó! Muda o mínimo e o máximo, muda a imagem também. - apontado para o gráfico de $f(x)=\text{sen}x +7$.*

A6: *será que vai ser sempre -2 a diferença deles?.*

A5: *a lá, deu 8 e 6 nesse aqui ó! Vamos ver na 1 lá.*

A6: *vê se vai dar -2.*
 A5: *na onde -2?*
 A6: *ai ó! é -2. – se referindo a diferença entre o valor máximo e mínimo da função $f(x)=\text{sen}x +1$.*
 A5: *como assim?*
 A6: *do máximo pro mínimo da -2.*
 [...]
 A5: *a imagem muda, o período não.*
 A8: *se é -2 em todos, a amplitude é a mesma. O período é semelhante e a amplitude também.*
 A5: *O domínio é igual.*

Ao verificar o andamento das atividades o professor levantou algumas indagações aos alunos, conforme o diálogo.

PP: *esse é o gráfico de seno de x né? O que acontece com o gráfico quando tiver $\text{sen}x+1$? – o aluno técnico passa para o gráfico plotado.*
 A6: *ele subiu, com base no eixo central.*
 PP: *e se eu colocar o $\text{sen}x-1$*
 A6: *ele desce*
 PP: *o que acontece então? Se eu colocar valores muito grandes o que vai acontecer? Façam teste pessoal.*

A partir disso o aluno técnico verificou vários gráficos, alterando o valor do coeficiente d. Com isso, concluíram sobre o papel do coeficiente em relação à função $f(x)=\text{sen}x$, apontando-o como aquele que faz com que a função “desloque verticalmente”, sendo que ela sobe quando d assume um valor positivo e desce quando d é negativo.

A exploração aliada às discussões entre os membros do grupo, assim como os questionamentos realizados pelo professor, permitiu que levantassem conclusões próprias, as quais ainda foram testadas e validadas antes de serem apontadas como teoria. Além disso, percebe-se o “potencial do aplicativo e das atividades no que diz respeito à promoção de um diálogo matemático envolvendo alunos e professor, no qual há indícios de que produziram conhecimento por meio da investigação” (ROMANELLO, 2016 p.76).

Os eixos de análise se fazem presentes nestes momentos, em que são perceptíveis a presença do pensamento matemático (eixo 1), o que faz com que os alunos busquem elaborar estratégias e verificar os resultados (eixo 3) além de estarem constantemente utilizando os recursos propiciados pelo aplicativo em conjunto com o ambiente do *Google Meet* (eixo2).

Ressalta-se também a importância da função histórico do aplicativo, visto que possibilitou aos alunos uma exploração das funções e gráficos de forma rápida. O que permitiu que pudessem testar suas conjecturas e fazer levantamentos que julgassem adequados em relação a cada coeficiente. Neste contexto, percebem-se indícios das possibilidades do aplicativo e do celular para a construção de conhecimentos por meio da exploração e o amadurecimento de ideias (ROMANELLO, 2016).

De modo geral o grupo soube se organizar. Apesar de nenhum aluno assumir a função de coordenador, souberam se dividir e, dentre os alunos que participaram dos momentos de aula, houve interação e participação durante as discussões. Além disso, demonstraram autonomia no uso do aplicativo e de suas funções para auxiliar no encontro dos dados de cada atividade, sendo que, além do aluno técnico, foi possível perceber que os demais membros estavam conectados e utilizando da apresentação para auxiliar nas discussões. Neste sentido destaca-se a importância de dar voz ao aluno no ambiente de aula, na qual há um ganho de ambas as partes, do aluno, que pode expor o modo como está entendendo o conteúdo, e do professor que pode compreender como seus alunos estão interpretando esses conceitos (ROMANELLO, 2016, p.81).

Já no grupo G3-I houve a presença de três membros, que foram questionados pelo professor sobre o andamento das atividades e apontaram terem realizado as atividades 1 e 2. Tais atividades foram discutidas durante as aulas e concluídas pelos colegas que não estavam participando das discussões. A atividade extra também havia sido realizada pelos colegas, portanto, utilizaram o momento de aula para compreensão e conclusão da mesma, em que se questionava sobre o coeficiente c relacionado à função seno.

Em certo momento os alunos debatem sobre uma informação enviada por uma colega que não estava presente, em relação a atividade 2, que trabalhava com o coeficiente b .

A10: *eu não entendi olha, vou mandar no grupo. – se referindo ao grupo da turma no WhatsApp. – na letra c , se b for negativo a função ira inverter em relação ao eixo OX . Só que dai ela colocou $b < 0$. $b < 0$ é o que?*

A12: *Se b for negativo b é menor que zero ué. To errado?*

[...]

A10: *pera, então se o b for negativo o gráfico fica virado?*

A12: *pelo que entendi ele inverte. Não é? Coloca no gráfico ai.*

Após o debate e discussão, a aluna técnica verificou a situação no aplicativo e com isso concordou com o que foi apontado pelo colega, porém o momento não é compartilhado

no *Google Meet*. Na sequência, com a presença do professor, a equipe o questiona sobre a atividade extra, sendo que o mesmo os incentiva com questionamentos, fazendo com que percebam que, apesar do gráfico parecer visualmente igual, existe um deslocamento do mesmo.

A partir disso os alunos concordaram com o que foi apresentado pela colega, apontando que a amplitude e período não mudam, justificando que uma função do tipo $f(x)=\text{sen}(x+c)$ será transladado horizontalmente para a direita quando c for negativo e para a esquerda caso c seja positivo. Apesar de entender que os alunos haviam apresentado o que se esperava da questão, o professor levanta questionamentos para verificar se os mesmos haviam realmente entendido o que era apresentado.

PP: *Vocês colocaram que o gráfico esta transladado para a direita quando $c < 0$. O que quer dizer $c < 0$? – neste momento a aluna técnica chama por um dos colegas.*

A12: *é quando o c é negativo professor. Ai o gráfico tá mais na direita.*

PP: *Vocês testaram isso?*

A10: *a gente olhou pelos gráficos professor. Ai quando o c for negativo é o contrário.*

PP: *Vocês fizeram testes o suficiente para comprovar isso?*

A10: *não muitos.*

Apesar de apresentar características de uma atividade investigativa, percebe-se que os alunos aceitam as conjecturas após terem verificado um pequeno número de casos. Embora estejam corretos, cabe ao professor instigá-los a realizarem novos testes imaginando que possam haver contraexemplos (PONTE; BROCARDI e OLIVEIRA, 2013).

Com o encerramento das investigações, percebe-se que o grupo não teve um aluno que assumisse a função de coordenador, faltando organização com o planejamento e a divisão de tarefas entre os colegas. Além disso, foram poucos os alunos que participaram efetivamente das discussões, os quais, muitas vezes, não apresentaram uma progressão nos resultados das atividades, uma vez que a maior parte destes resultados foi obtida de maneira off-line, ou seja, fora dos momentos de aula. Apesar de estarem corretos e serem validados durante as discussões, foram poucas as reflexões e debates entre os alunos para que se tivesse efetivamente uma investigação.

Além disso, por mais que houvesse a presença do professor pesquisador e da professora assistente, percebe-se que houve momentos nos quais estes fizeram falta para que as discussões pudessem ser melhor encaminhadas. Com isso, muitas vezes os alunos se viram dispersos, conversando sobre os mais variados assuntos. Apesar de poder destacar a interação

através do *Google Meet* como um potencial, deixou-se de aproveitar muito tempo que poderia ter sido dedicado a discussões mais pertinentes.

5.5. Socialização e discussão dos resultados encontrados pelos alunos

O momento de apresentação e discussão entre os grupos foi readaptado devido às mudanças do planejamento inicial. Nesse sentido, apresentam-se as observações e reflexões em relação às socializações das etapas 1 e da atividade extra, a qual abordou pontos referentes ao que seria a etapa 2 inicialmente. Embora os grupos tenham realizado a investigação a partir das funções seno e cosseno, as discussões foram feitas levantando pontos de semelhança e diferença entre ambas as funções.

Optou-se por apresentar as observações e reflexões da socialização das etapas 1 e da atividade extra de maneira separada, em ordem cronológica dos acontecimentos. Já a discussão final é apresentada de maneira única, ressaltando pontos importantes do debate com cada turma.

Administração

Ao iniciar as apresentações o professor pesquisador combinou com as equipes de intercalar os grupos de modo que, enquanto um apresenta suas considerações a respeito de uma questão, o grupo seguinte faria comentários a fim de se levantar um debate a respeito de pontos interessantes. Nesse sentido, a atividade 1 ficou sob responsabilidade do grupo G2-A.

Figura 19: Atividade 1.

Atividade 1 - Utilizando a calculadora do *Photomath* ou escrevendo e fotografando as funções abaixo, visualize e registre o gráfico de cada uma delas na apresentação do grupo.

A) $f(x) = \text{sen}.x$	C) $f(x) = -4.\text{sen}(x)$	E) $f(x) = 0,2 . \text{sen}(x)$
B) $f(x) = 12.\text{sen}(x)$	D) $f(x) = 10.\text{sen}(x)$	F) $f(x) = 0,01 . \text{sen}(x)$

a) Após explorar as funções, o que vocês podem dizer sobre diferenças e semelhanças entre os gráficos analisados?

a) Vocês conseguem apontar o domínio, imagem e período das funções analisadas? Busquem explorar o aplicativo.

a) O que é possível afirmar sobre o coeficiente “a” em uma função do tipo:

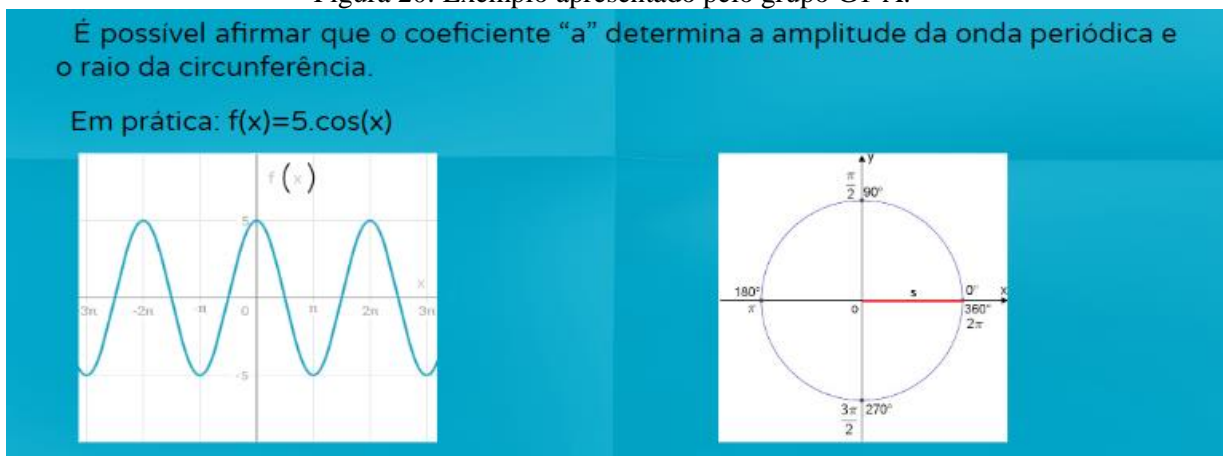
$$f(x) = a . \text{sen}(x)$$

Fonte: elaborado pelo autor.

Durante a apresentação foi necessária a intervenção do professor pesquisador, visto que o aluno relator iniciou a conclusão de outra atividade, a qual havia sido trabalhada com a equipe na aula anterior, além de realizar uma apresentação de maneira superficial, não destacando pontos importantes que haviam descoberto durante os momentos de investigação que haviam debatido entre os colegas. Nesse sentido, foi necessário que o professor levantasse questionamentos de modo a direcionar para que os mesmos fossem apontando pontos relevantes de suas conclusões.

Finalizada a apresentação, questionou-se o outro grupo da turma, G1-A, em relação a percepções diferentes. Os mesmos relacionaram o coeficiente **a** ao conceito de amplitude, ou seja, apontaram que o valor da constante **a** alterava a amplitude do gráfico. Além disso, destacaram que esse valor da amplitude poderia estar relacionado ao raio de uma circunferência à qual a função estaria associada, apresentando uma imagem como exemplo, figura 20.

Figura 20: Exemplo apresentado pelo grupo G1-A.



Fonte: acervo do autor

Apesar das várias descobertas, ambos os grupos não apontaram para o valor negativo da constante **a**. Nesse sentido, o professor pesquisador levantou alguns questionamentos de modo a fazer com que os mesmos refletissem sobre o que aconteceria. Como forma de auxiliar nessa discussão, utilizou-se do *GeoGebra Online*, ambiente em que o professor pesquisador inseriu um parâmetro em uma função do tipo $f(x) = a \cdot \text{sen}(x)$ e foi questionando os alunos em relação ao que percebiam até chegarem em um consenso.

Evidencia-se neste contexto a necessidade do uso do *GeoGebra Online* como forma de instigar os alunos, visto sua dinamicidade na apresentação dos gráficos das funções, além de permitir a variação do parâmetro de forma rápida. Nesse sentido, pontua-se uma das limitações do aplicativo *Photomath*, ele não é totalmente dinâmico. Apesar de apresentar a

forma gráfica das funções, é preciso realizar a mudança do parâmetro para cada visualização, ou ainda escanear novamente, o que demanda um tempo maior. Entende-se que esse aspecto prejudicou as discussões durante os momentos de intervenção, não permitindo que os alunos explorassem amplamente o papel dos coeficientes. Visto que, segundo Lopes (2013), a principal característica de um *software* dinâmico

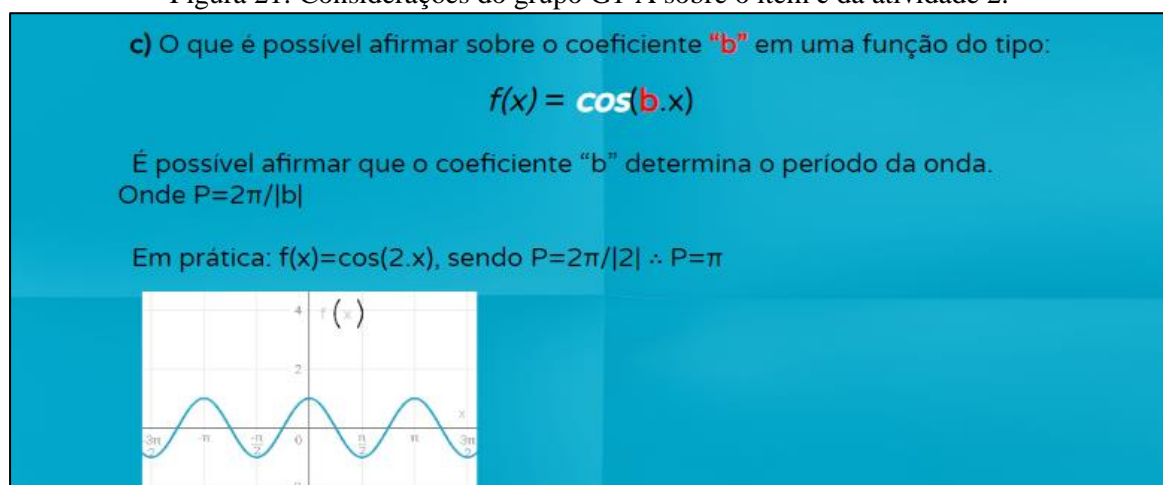
é a possibilidade de movimentar os objetos na tela sem alterar as propriedades da construção inicial, com isso, tem-se a possibilidade de, numa atividade desenvolvida com os recursos de um software com essas características, se fazer investigações, descobertas, confirmar resultados e fazer simulações, permitindo, inclusive, levantar questões relacionadas com a sua aplicação prática (LOPES, 2013, p.635).

Além disso, um *software* dinâmico permite:

a possibilidade de movimentação dos objetos e, a partir desses movimentos, o aluno investigar o que acontece com a sua construção, levantando hipóteses como: a construção permanece com as mesmas características? Um simples movimento muda todas as características originais? Entre várias hipóteses que são possíveis levantar diante das próprias tomadas de decisão, percebendo assim as suas regularidades (LOPES, 2013, p.635).

Na sequência, o segundo grupo da turma apresentou os resultados da atividade 2. Em suas conclusões os relatores apontaram que o coeficiente **b** estava associado ao período da função $f(x)=\cos(b.x)$, destacando inclusive a fórmula para se calcular esse período, conforme é apresentado na figura 21. Porém, ao serem questionados pelo professor como haviam chegado nessa fórmula, afirmaram que realizaram buscas na internet para poderem realizar esta conclusão. Nesse sentido, visto que a equipe se mostrou disposta, o professor instigou os alunos a apontarem o período de cada função a partir de sua lei de formação, os quais foram apontando os cálculos através da fórmula apresentada e chegando nos valores.

Figura 21: Considerações do grupo G1-A sobre o item c da atividade 2.



Fonte: acervo do autor

O questionamento sobre quando o coeficiente b assume o valor 0, havia gerado dúvidas nos momentos de discussões entre os grupos, isto porque o aplicativo *Photomath* não apresentava a forma gráfica das funções $f(x) = \text{sen}(0.x)$ e $f(x) = \text{cos}(0.x)$. Com isso, houve a necessidade de utilizar novamente o *GeoGebra* para uma melhor visualização. Ao serem questionados, os próprios alunos puderam concluir que quando o coeficiente b assume o valor zero em uma função seno, o gráfico é uma linha horizontal em $y=0$, já na função cosseno assume uma linha horizontal em $y=1$. O diálogo abaixo apresenta as considerações da aluna A1, coordenadora do grupo G1-A.

PP: *Alguém sabe explicar porque temos essas linhas horizontais nesses casos?*

A1: *Olha, acho que é porque quando o b assume 0 seja qual for o x ali sempre o seno vai ser 0. Porque o seno de 0 é 0. A mesma coisa no cosseno né? Mas cosseno de 0 é 1, ai fica lá no 1.*

É perceptível a manifestação do conhecimento matemático nesse diálogo, destacando o eixo 1 de análise, sendo que a aluna A1 recorreu a conhecimentos anteriores para justificar sua consideração. Além disso, destaca-se a mediação e os questionamentos apresentados pelo professor, o qual busca instigar os alunos com objetivo de que estes apresentem as conclusões as justificando matematicamente.

Novamente, percebe-se que apesar das diversas funcionalidades proporcionadas pelo aplicativo *Photomath*, outra de suas limitações está na apresentação gráfica. O aplicativo muitas vezes deixa de registrar o gráfico de determinadas funções, limitando seu uso.

No momento seguinte os grupos apresentaram as atividades extras que envolviam os coeficientes c e d de maneira tranquila, sendo que, ao final de cada apresentação foram levantados questionamentos pelo professor pesquisador sobre novas percepções em relação a cada coeficiente. Destaca-se à utilização do *GeoGebra* por parte do grupo G1-A, os quais apontaram que o *Photomath* apresentou as funções mais simples, sendo necessário recorrerem ao *GeoGebra* para auxiliar nas conclusões referentes a algumas das atividades.

Ressalta-se que apesar do foco de estudo desta investigação ser o aplicativo *Photomath*, as investigações não foram limitadas apenas ao seu uso, ou seja, não houve um acordo de proibição de outros softwares ou meios para a realização das atividades. Percebe-se que após o professor fazer uso do *Geogebra* em alguns momentos, os próprios alunos perceberam algumas vantagens em relação ao seu uso e buscaram o mesmo para auxiliar em

suas discussões. Buscando entender a dinamicidade deste software, Lopes (2013) aponta que o GeoGebra

[...] permite mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (pontos, gráficos de funções), algebricamente (coordenadas de pontos, equações) e nas células da folha de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em quaisquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente construídos (Lopes, 2013, p.636).

Na sequência são apresentados os momentos de socialização e discussão com a turma de informática.

Informática

Iniciou-se a apresentação com o grupo G4-I apontando suas considerações em relação à atividade 1, relacionada ao coeficiente **a**. Novamente, foi necessário que o professor questionasse os alunos buscando extrair o máximo de informações. O grupo relacionou o coeficiente **a** com a amplitude, havendo apenas um mal entendido em relação ao seu valor, os quais apontaram como sendo a distância entre os pontos da imagem. Ao serem questionados pelo professor conseguiram perceber o equívoco e entender que a amplitude estaria relacionada a distância entre o eixo x e o ponto de máximo ou mínimo da função.

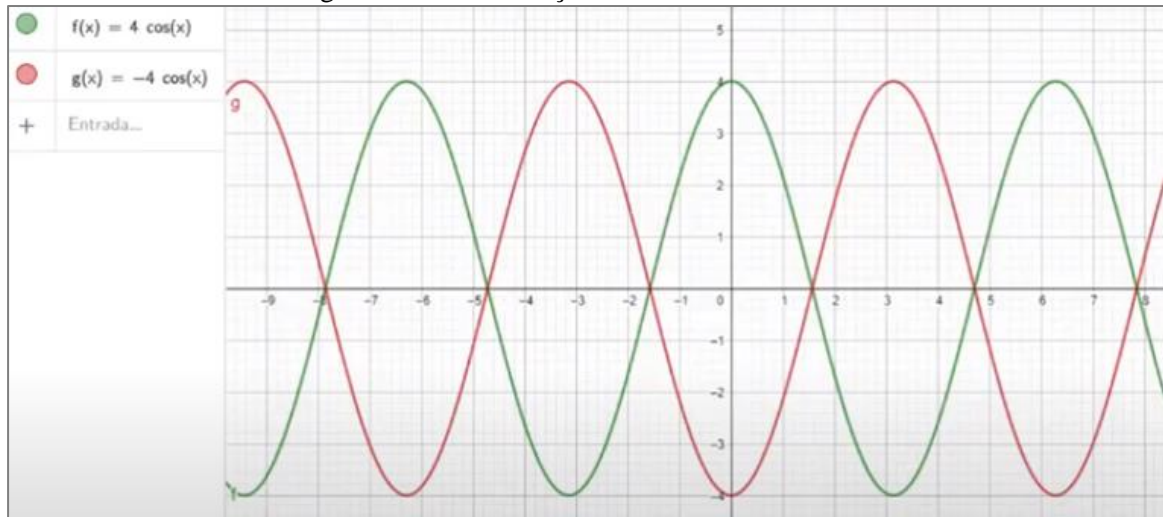
Na sequência, indagou-se o grupo 5 (G5-I), que também havia trabalhado com a função cosseno, os quais apenas concordaram com as considerações. Ao serem questionados pelo professor, um dos membros respondeu pelo chat, sem abrir o microfone. Visto isso, questionou-se também o grupo (G3-I) que havia realizado a mesma questão, porém, utilizando a função cosseno, os quais relataram conclusões semelhantes.

Apesar do esforço do professor durante as etapas de investigação, buscando incentivar e chamando os alunos para participarem das investigações, o grupo G5-I não realizou nenhuma discussão anteriormente pelo *Google Meet*. Apesar de entregarem as atividades por meio da apresentação do *Apresentações Google*, além de estarem nas subsalas durante os momentos de aula, não realizaram os debates como havia sido proposto e não conversaram em nenhum momento. Nesse sentido, entende-se que estes não aceitaram o convite ao cenário investigativo (SKOVSMOSE, 2000), preferindo realizar as tarefas investigativas como se fosse uma atividade avaliativa, apenas.

Visto que, assim como na turma de Administração, nenhum dos grupos apontou sobre o sinal do coeficiente **a**, foi necessário que o professor instigasse os alunos de modo a

refletirem sobre essa possibilidade. Para isso utilizou-se de duas funções no *GeoGebra* como forma de ilustrar a demonstração e instigar os alunos, figura 22.

Figura 22: Demonstração realizada no GeoGebra.



Fonte: Acervo do autor.

Após serem questionados, alguns alunos tentaram apresentar soluções, o professor buscou verificar junto aos mesmos através do *GeoGebra*, sempre respondendo os questionamentos com outras indagações. O diálogo em destaque se deu logo após o professor inserir as funções $f(x)=4\cos x$ e $g(x)=-4\cos x$.

PP.: *olha, o que acontece se colocarmos o valor do coeficiente a negativo? O que aconteceu com o gráfico?*
 A1: *ele vai “startar” só que oposto.*
 PP.: *como assim “startar”?*
 A1: *ele tá “startando” só que no -4.*
 PP.: *Tá. E o que dá pra falar desses dois gráficos? Eles são o que um do outro?*
 A2: *opostos?*
 PP.: *Essa ideia esta correta, só tem uma palavrinha que é melhor.*
 A2: *Eles são decrescentes e crescentes?*
 PP.: *pensem um pouco melhor, pensem na ideia do espelho.*

Entende-se que a ideia do “startar” proposta pelo aluno A1 seria que o gráfico esta começando de maneira oposta ao primeiro. A partir das indagações realizadas surge a palavra “reflexão”, a qual é utilizada por um aluno para concluir uma consideração em relação ao coeficiente a quando negativo, ou seja, “quando o coeficiente a é negativo, ocorre uma reflexão em relação ao eixo x ”. Além disso, destaca-se uma consideração apresentada pelo aluno A8 do grupo G2-I, o qual apontou que o gráfico da função cosseno estaria atrasado em

relação ao da função seno, porém, por conta de um problema com a conexão do professor pesquisador, foi combinado que voltariam a essa consideração durante a discussão final, visto também que estaria relacionada a outro coeficiente.

A partir do diálogo apresentado, das reflexões e considerações apresentadas pelos alunos percebe-se a manifestação do pensamento matemático em vários momentos, ressaltando o primeiro eixo de análise. Além disso, os alunos buscam elaborar hipóteses e, com o auxílio do professor, realizam testes e buscam apresentar suas considerações, o que caracteriza o terceiro eixo de análise.

Na aula seguinte, o grupo G3-I iniciou as conclusões em relação à atividade 2. Inicialmente apresentaram cada um dos gráficos construídos e apontaram como semelhança a imagem e domínio. Ressaltaram a dificuldade para encontrar o período, o que não conseguiram através do aplicativo, na sequência a aluna A3 relatou como prosseguiram.

A3: O período começa aqui no zero, aí ele vem e começa a repetir em um valor que a gente não sabe. Aí a gente foi vendo até ele chegar em um valor que a gente sabia, que nesse caso é o $\frac{2\pi}{4}$. Aí a gente contou quantas voltinhas deu até chegar no $\frac{2\pi}{4}$ e dividiu por 3, que é a quantidade de voltinhas que deu. Aí o período deu $\frac{\pi}{6}$.

Indagando as demais equipes sobre novas descobertas, estas apontaram formas diferentes de se encontrar o período. Sendo que alguns alunos utilizaram o próprio gráfico no *Photomath* (clitando sobre o gráfico e vendo o ponto de intersecção com o eixo x) e outros utilizaram o comando “*determinar período trigonométrico*”, também disponível no aplicativo. Apesar da dificuldade relatada pelo grupo G1-A, percebe-se a interação de outros grupos com o aplicativo, os quais utilizaram de formas variadas para determinar o que havia sido proposto, o que destaca o segundo eixo de análise.

Visto a facilidade de alguns alunos ao utilizarem o aplicativo, entende-se que “o uso do celular no processo ensino aprendizagem de Matemática permite a interação virtual e possibilita o estímulo dos alunos por ser um recurso presente no cotidiano e através da interlocução virtual, cria-se espaços de problematização dos conceitos” (SCHMITZ, 2016, p.67). Além disso,

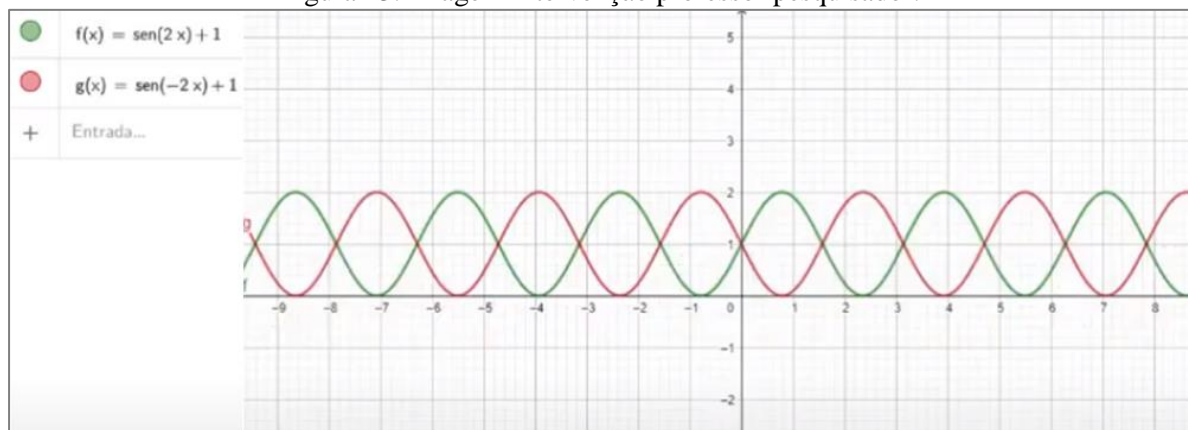
O uso do *Smartphone* nas atividades extraclasse possibilita amenizar a distancia que separa o mundo escolar da realidade dos alunos e torna-se um estímulo ao uso das tecnologias de informação e comunicação para a produção de conhecimentos, pois ao vivenciar novas experiências, há a valorização do aluno em suas singularidades possibilitando a aquisição de novos saberes, estimulando o potencial de aprendizagem dos alunos e

pesquisa sobre o conteúdo. (SCHMITZ, 2016, p.68)

Como forma de instigar a discussão, o professor questionou o grupo 4 (G4-I), que havia trabalhado com a função cosseno, sobre novas percepções. Os mesmos destacaram terem sentido dificuldade em relação à questão que questionava a constante assumir o valor zero. Novamente, percebeu-se que o *Photomath* apontava apenas o valor de seno ou cosseno de 0, mas não apresentava um gráfico, o que fez necessário a utilização do *GeoGebra* para ilustrar essa situação, o que ocorreu de forma semelhante a turma de administração.

Dando sequência, aproveitou-se o momento para discutir a ideia de reflexão, a qual já havia sido comentada pelo grupo 1 (G1-A) anteriormente, porém, foi necessário que o professor instigasse os alunos em relação a qual dos eixos (x ou y) seria o eixo de reflexão neste caso. Visto a dificuldade de conseguirem perceber o eixo de reflexão, o professor pesquisador acrescentou o valor do coeficiente **d**, figura 23, e instigou os alunos de modo que pudessem concluir que neste caso o eixo de reflexão seria o eixo y.

Figura 23: Imagem intervenção professor pesquisador.



Fonte: Acervo do autor.

Destaca-se neste contexto o papel do professor em perceber a dificuldade dos alunos e recorrer a uma solução que julgou adequada e que auxiliou na visualização e entendimento dos mesmos. Além disso, percebe-se que o caráter dinâmico do *GeoGebra* nesse processo, o que, apesar de possível, seria mais complexo quando realizado no *Photomath*.

O grupo 2 (G2-I) apresentou suas conclusões em relação à situação extra proposta para a equipe, a qual estava relacionada ao coeficiente **d**. Ressaltaram que realizaram a atividade para o coeficiente **c** sem querer e com isso perceberam que ambos “fazem praticamente a mesma coisa”, diferenciando-se apenas o eixo que cada um está relacionado. Destaca-se a apresentação do relator da equipe, o qual demonstrou domínio sobre os conceitos estudados e

constantemente era interrompido pelos colegas de equipe para confirmarem ou acrescentarem alguma informação.

A4: *Quando a gente fez o c foi percebendo que o c foi fazendo aquela coisa que o c faz né, que alguém vai apresentar outro dia então não vou falar né. Mas a gente percebeu que o d faz basicamente a mesma coisa, mas ele desloca no eixo y. Se você coloca ele com +4, por exemplo, ele vai subir até o 4. [...] Ele vai sempre ficar deslocando no eixo y. Ele vai ficar flutuando no gráfico basicamente.*

Os relatores explicaram, inclusive, a forma para se encontrar a imagem da função olhando apenas para sua lei. Instigados pelo professor, foram questionados se saberiam dizer a imagem caso a função tivesse uma amplitude diferente de 1. O diálogo em destaque, se refere a reflexão a partir da função $f(x) = \text{sen}x + 7$.

PP.: *o que acontece caso a amplitude seja 1?*
 A4: *somaria 1 e subtrairia 1, né?.*
 PP.: *e caso a amplitude dessa função fosse 2? – referindo-se a $f(x) = 2.\text{sen}x + 7$.*
 A5: *daria 9 e 5?*

Os eixos de análise se fazem presentes nestes momentos, nos quais são perceptíveis a presença do pensamento matemático (eixo 1), o que faz com que os alunos busquem elaborar estratégias e verificar os resultados (eixo 3) a partir da interação com o aplicativo (eixo 2), além de estarem em constante debate (eixo1). Além disso, percebe-se que à medida que o aluno encontra um espaço propício para desenvolver seu pensamento, ele descobre que não está limitado a apenas o que não sabe, aprendendo que pode construir seu próprio conhecimento. (MACEDO, PETTY e PASSOS, 2000, p. 27).

Apesar de surgirem limitações, entende-se que a utilização do aplicativo aliado as tarefas investigativas foi uma opção na qual pode-se modificar o ambiente da aula, fazendo com que os alunos pudessem exercer um papel de exploradores realmente, como enfatizam Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), o

[...] suporte tecnológico permite o desenho, a manipulação e a construção de objetos geométricos, facilita a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal. Vários estudos empíricos destacam também que, na realização de investigações, a utilização dessas ferramentas facilita a recolha de dados e o teste de conjecturas, apoiando, desse modo, explorações mais organizadas e completas e permitindo que os alunos se concentrem nas decisões em termos do processo. (PONTE, BROCARD E OLIVEIRA, 2013, p.83)

Nesse sentido, o *Photomath* pode auxiliar os alunos dentro do cenário investigativo, os

quais puderam explorar o aplicativo, elaborar hipóteses, levantar questionamentos, procurar respostas, testando-as e validando sua veracidade.

5.6. Discussão final

Após realizar as socializações, discussões e formalização de alguns conceitos a partir das respostas apresentadas pelos grupos, houve um momento final de discussão com cada turma, na qual foram apresentadas aos alunos algumas situações acerca dos conceitos envolvidos na investigação e um debate acerca das possíveis soluções e considerações. Optou-se por apresentar os momentos de discussão de ambas às turmas de maneira única, trazendo considerações pertinentes quando necessário, visto semelhanças durante as discussões nos dois contextos.

A situação 1, quadro 12, pedia que os alunos escrevessem a lei de uma função seno, dadas algumas informações sobre o gráfico dessa função em relação ao gráfico de $f(x)=\text{sen}x$.

Quadro 12: Situação 1.

Qual seria a lei de uma função seno, $h(x)$, sabendo que seu gráfico, comparado com o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$, representa uma curva deslocada 3 unidades para a esquerda, possui domínio \mathbb{R} , amplitude 3, período 2π e um deslocamento vertical de 4 unidades para cima.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em ambas as turmas, o debate ocorreu com o professor instigando os alunos quanto a qual coeficiente seria alterado a partir de cada informação, sendo que muitas vezes o mesmo direcionou os questionamentos às equipes responsáveis pelo coeficiente durante o momento de socialização.

Mediante as discussões os alunos concordaram que a lei da função seria $h(x)=3.\text{sen}(x+3)+4$, porém um aluno do grupo G4-I questionou sobre o valor da amplitude, ressaltando que e mesma poderia assumir um valor negativo ou positivo, já que é dada em módulo. Nesse sentido, a questão assumiria duas respostas, sendo $h(x)'=3.\text{sen}(x+3)+4$ e $h(x)''=-3.\text{sen}(x+3)+4$. Percebendo a interação dos alunos em ambas as turmas, além da percepção apresentada sobre as duas possibilidades de resposta, destaca-se a presença do pensamento matemático, eixo 1 de análise, além das reflexões, levantamento de conjecturas e validação entre os próprios colegas, o que traz características do eixo 3.

A situação 2 apresentava uma semirrealidade, na qual sugeria-se para o aluno a escrita da função cosseno utilizando a função seno, conforme enunciado.

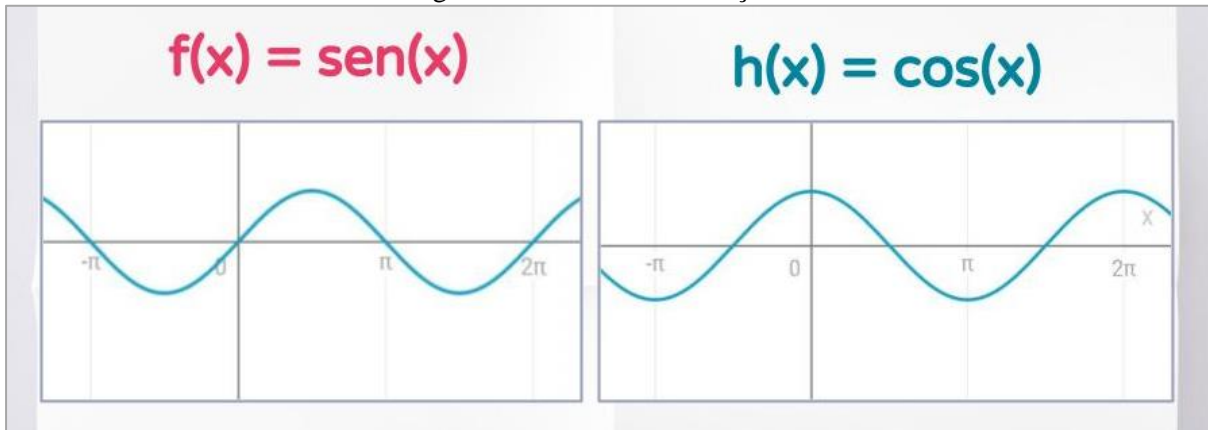
Quadro 13: Situação 2.

Você precisa visualizar o gráfico da função $h(x) = \cos(x)$, mas ocorreu um problema com o *Photomath* e só a função seno está funcionando. Discutam e apresentem uma solução para se construir o gráfico de $h(x) = \cos(x)$ utilizando a função seno, $f(x) = \sin(x)$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nessa situação o professor apresentou ambos os gráficos da função seno e cosseno, o qual foi construído a partir do aplicativo *Photomath*, figura 24.

Figura 24: Gráficos da situação 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Buscando incentivar os alunos, alguns questionamentos foram levantados pelo professor pesquisador. O diálogo em destaque refere-se ao momento de discussão junto à turma de Administração.

PP.: *pessoal, o que acontece na função cosseno em relação a seno? Se for pensar no trabalho dessa semana, estaríamos mexendo em qual parâmetro?*
 A5: *parâmetro c?*
 PP.: *e o que ele faz?*
 A6: *ele desloca o gráfico né.*
 PP.: *e seria um deslocamento em qual sentido?*
 A7: *horizontal*
 PP.: *mas, e que sinal vamos utilizar?*
 A7: *menos?*
 PP.: *lembra que no deslocamento horizontal o deslocamento tem algumas diferenças?*
 A8: *por ai, parece que é metade do π .*

Apesar da discussão em destaque, os alunos não conseguiram apontar um valor para o deslocamento, sendo que alguns levantaram ainda a possibilidade do deslocamento poder ser realizado para a esquerda ou direita. Na turma de informática o professor lembrou da consideração do aluno A8, o qual havia apontado anteriormente que o gráfico da função cosseno estaria atrasado em relação ao da função seno, conforme o diálogo.

PP.: *o que quer dizer estar atrasado?*
 A8: *que ele começa antes né?*
 PP.: *mas e como conseguimos escrever uma função que represente o cosseno?*
 A8: *desloca pra trás, então vai colocar algum valor no coeficiente c.*
 PP.: *Ta ok. Mas que valor seria esse?*
 A8: *horizontal*
 PP.: *mas, e que sinal vamos utilizar?*
 A7: *menos?*
 PP.: *lembra que no deslocamento horizontal o deslocamento tem algumas diferenças?*
 A7: *então seria mais?*

Apesar das discussões em destaque, percebeu-se que vários alunos não haviam entendido a ideia do deslocamento, assim como o valor do coeficiente a ser acrescentado na função. Nesse sentido, como forma de dinamizar as visualizações, o professor utilizou novamente o *GeoGebra Online* para ilustrar e verificar essas possibilidades. A partir das indagações e com a ampliação e redução dos gráficos, alguns alunos apontara para a soma de $\frac{\pi}{2}$, ou seja $h(x)=\cos(x)$ pode ser representado também como $h(x)=\sin(x) + \frac{\pi}{2}$. Porém, quando questionados pelo professor se o gráfico não poderia estar adiantado, conseguiram compreender que a solução $h(x)=\sin(x) + \frac{3\pi}{2}$ também seria possível. Com isso, percebe-se que o professor levantou vários questionamentos junto com toda a turma, buscando demonstrar o desenvolvimento de um raciocínio matemático como forma de desenvolver a argumentação (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA 2013), características que entrelaçam os eixos 1 e 3 de análise.

Para encerrar a discussão, voltou-se à questão apresentada aos alunos como ponto de partida, a qual envolve um exercício da semirrealidade utilizando o contexto de uma roda gigante.

Quadro 14: Situação 3 apresentada aos alunos.

Carol e Cláudio, passeando em um parque de diversões, resolvem andar na roda-gigante. Segundo informações que leram, a altura em que estariam em relação ao solo pode ser aproximadamente descrita pela função, em que t é dado em segundos e h em metros:

$$h(t) = 19 \cdot \sin(\pi/24 \cdot t + \pi) + 20$$

- a) Qual é o raio da roda-gigante?
 b) Qual é o tempo necessário para eles darem uma volta completa na roda-gigante?

Fonte: DANTE, 2012, p. 280.

Em ambas as turmas, apresentou-se a situação e questionou-se sobre como poderiam responder às questões propostas, visto a realização das investigações anteriores. Apesar de alguns alunos lembrarem o coeficiente relacionado, foi necessário que o professor pesquisador levantasse questionamentos. O diálogo apresentado na sequência é referente à turma A3A, sendo que os alunos que mostraram maior envolvimento pertenciam à equipe G1-A, os quais relacionaram o coeficiente a com a ideia do raio de uma circunferência durante a socialização.

PP: *Alguém consegue dizer o valor do raio da roda gigante a partir da função apresentada?*

A3: *é o 20.*

PP: *Você lembra qual parâmetro o 20 representa?*

A3: *o d não?*

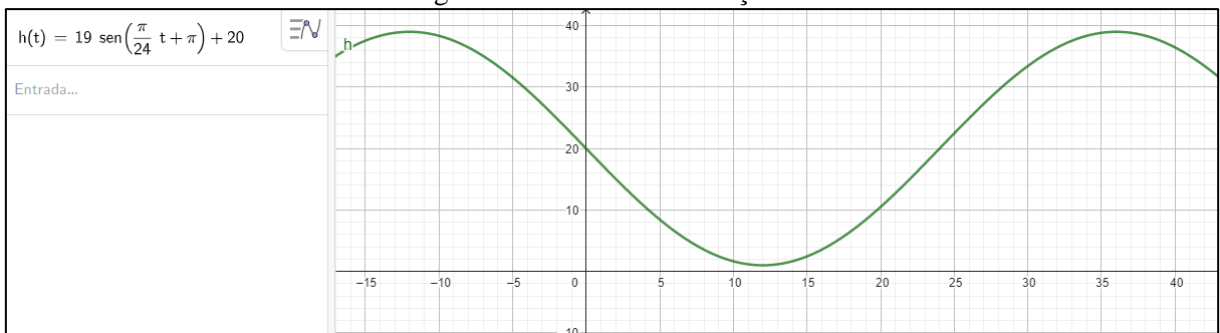
PP: *Isso, lembra que uma equipe apresentou a ideia do raio quando discutiu um dos parâmetros?*

A3: *foi a gente?*

A1: *fomos nós mesmos, então o raio é 19?*

Buscando instigar ainda mais os alunos, o professor questionou em relação à imagem do gráfico gerado pela função apresentada. Apesar de alguns alunos associarem amplitude e imagem, foi necessária a construção do gráfico no *GeoGebra Online* para que pudessem visualizar e, com isso, conseguirem apontar o intervalo da imagem, figura 25.

Figura 25: Gráficos da situação 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, o professor continuou questionando os alunos sobre como poderiam apresentar essa imagem olhando apenas para a lei de formação, conforme o diálogo.

PP: *Pessoal, pelo gráfico da pra perceber a imagem né? Mas como que da pra achar o intervalo pela lei da função?*

A3: *A imagem vai de 0 a 40?*

PP: *Será que toca o 40? – ampliando o gráfico.*

A3: *Não, ela começa em 1 e termina no 39 ali.*

PP: *Isso, pensando na lei de formação, como que da pra chegar nesses valores?*

A1: *Pega o d menos o c .*

PP: *Como assim?*

A1: *O coeficiente d faz o gráfico subir né? Ai é só tirar e colocar o valor da amplitude.*

A partir desse contexto, fica evidenciado o avanço no pensamento matemático entre os alunos, eixo 1 de análise, os quais utilizam dos conceitos trabalhados anteriormente afim de construir novas percepções. Nesse sentido, percebe-se que

há diferentes aspectos envolvidos no processo de mudança do paradigma de exercícios para os cenários para investigação. Os padrões de comunicação podem mudar e abrir-se para novos tipos de cooperação e para novas formas de aprendizagem. [...] Tanto o professor quanto os alunos podem ser acometidos por dúvidas quando chegam para trabalhar num cenário de investigação, sem a proteção de “regras” de funcionamento bem conhecidas do paradigma do exercício. Assim, deixar o paradigma do exercício significa também deixar uma zona de conforto e entrar numa zona de risco (ALRØ E SKOVSMOSE, 2010, p. 58).

O movimento junto a turma de informática foi semelhante, destacando-se a participação do grupo G2-I. Na segunda questão, indagava-se sobre o tempo para se dar uma volta completa na roda gigante. Foi necessário levantar questionamentos para que os alunos conseguissem realizar a associação de período e tempo. Destaca-se um diálogo junto a turma de informática, na qual os alunos do grupo G2-I se mostraram mais participativos.

PP: *Alguém consegue identificar qual parâmetro está associado aos ciclos da volta da roda gigante?*

A6: *seria o $\frac{\pi}{24}$?*

PP: *$\frac{\pi}{24}$ seria o que?*

A6: *o período?*

PP: *Ele é o período?*

A5: *da pra calcular com ele né?*

PP: *Lembram que vocês apresentaram uma formulazinha para calcular ele?*

A8: *a gente pegava o 2π e dividíamos pelo b positivo.*

Visto a discussão de como se encontrar o período, realizaram-se os cálculos de forma a entender que uma volta completa em torno da roda gigante levaria 48 segundos, conforme é apresentado na figura 26.

Figura 26: Resolução segunda parte da Situação 3.

O tempo necessário para a roda-gigante dar uma volta completa é dado pelo **período** da função.

Logo,

$$P = 2\pi/|b|$$

$$P = 2\pi/|\pi/24|$$

$$P = 2\pi \cdot 24/\pi$$

$$P = 48$$

Assim, a roda gigante dá uma volta completa em 48 segundos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste contexto, percebe-se que os alunos buscaram entender as questões propostas, retomando conceitos trabalhados anteriormente e buscando apresentar uma solução. Além disso, houve facilidade de socialização das ideias com os colegas e o desenvolvimento de senso crítico e do pensamento matemático ao serem confrontados pelo professor e pelos colegas, necessitando reavaliar hipóteses e trabalhar na argumentação matemática, ressaltando características dos eixos 1 e 3 de análise.

Encerrando-se os questionamentos, abriu-se a palavra para que os alunos se manifestassem sobre considerações e dúvidas relacionadas aos momentos de intervenção. Alguns elogiaram a dinâmica das atividades, ressaltando a diferença em relação às aulas que estavam acostumados. Outros apontaram que apesar de terem gostado do formato que as aulas aconteceram, sentiram dificuldade por conta de não dominarem conhecimentos matemáticos necessários, apontando que essa carência foi suprida pelo trabalho em grupo.

Por fim, houve um agradecimento do professor pelo empenho e dedicação por parte de todas as equipes, ressaltando que o objetivo das atividades era fazer com que participassem e buscassem refletir e levantar hipóteses sobre as situações apresentadas, o que seria a principal característica de uma atividade investigativa.

Além disso, foi explicado que a formalização dos conceitos, momento importante em investigação matemática, aconteceria a partir do PET, na dinâmica das aulas seguintes, buscando-se aproveitar das descobertas para dar sequência ao conteúdo.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nestas considerações, busca-se resgatar alguns pontos da revisão de literatura, com ênfase na importância do celular inteligente e os aplicativos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Além disso, destacam-se as principais conclusões a partir da análise feita após a aplicação das tarefas investigativas com as duas turmas de Ensino Médio, buscando apontar as possibilidades e limitações do uso do aplicativo *Photomath* para a apreensão do comportamento gráfico de funções trigonométricas.

O levantamento bibliográfico possibilitou uma visão mais ampla sobre o uso do celular e dos aplicativos no contexto de sala de aula, evidenciando algumas de suas potencialidades e limites. Através do estudo das pesquisas percebe-se que fatores como a formação do profissional envolvido, o planejamento e a infraestrutura são pontos importantes ao trabalhar com a tecnologia. Além disso, apresentaram caminhos, bem e malsucedidos, que auxiliaram durante o planejamento das intervenções e das tarefas investigativas. Isso não impediu que algumas falhas fossem cometidas durante o desenvolvimento das atividades, mas mostrou a importância de entendê-las buscando uma reflexão, o que destaca o caminho para melhorar a própria prática.

É importante destacar ainda que as pesquisas apontam para a necessidade da valorização das atividades com as tecnologias, o que se destaca quanto ao uso do celular e aplicativos, devendo ser aprofundadas por estudos que associem a teoria à prática. Nesse sentido, entende-se que o uso do celular em atividades de sala de aula possibilita diminuir a distância entre o ambiente escolar e a realidade dos alunos, sendo uma maneira de estimular o uso das tecnologias digitais como forma de produzir novos conhecimentos. Permitindo aos alunos experiências inovadoras e que podem auxiliar no processo de aprendizagem, visto que apresenta uma mobilidade e uma infinidade de possibilidades de compreender e visualizar um determinado conteúdo.

Durante a realização das intervenções com os alunos, pode-se confirmar a importância de um planejamento inicial de cada ação, além de uma organização prévia e reavaliação constante, tendo em mente que existe a possibilidade de situações imprevistas que podem decorrer de diversos fatores, fazendo com que o tempo seja um inimigo. Além disso, o professor deve ter consciência de que o uso da tecnologia possibilita atender diferentes perfis de alunos, mas que este é apenas um dos recursos que podem ser utilizados durante as aulas.

O processo de intervenção do professor, apesar de parecer invasivo algumas vezes, se

mostrou importante no direcionamento e na construção de estratégias e sistematização dos conceitos trabalhados pelos alunos nas atividades propostas. Nos momentos de discussão com o professor e entre os próprios alunos, pode-se observar que o uso de conceitos já construídos, durante as próprias discussões e em outros momentos de escolaridade foram sendo resgatados e utilizados nas situações apresentadas.

Buscando compreender o que as lentes da pesquisa conseguiram captar, a partir das análises, destacam-se aspectos relacionados aos três eixos emergentes durante esse estudo. Foi possível envolver os alunos com as TD e instigar a participação durante os momentos de intervenção. Nesse processo, alguns grupos demonstraram maior autonomia em relação ao uso do *Photomath*, assim como outras mídias, descobrindo e utilizando várias funções do aplicativo, além das discussões entre os membros. Destaca-se a utilização das ferramentas e opções apresentadas pelo aplicativo, o que auxiliou para dinamizar as discussões além de apresentar resultados de maneira prática. Porém, houve situações nas quais foi necessária uma maior mediação para que os alunos se mostrassem mais participativos.

Nesse envolvimento com o aplicativo os alunos elaboraram estratégias, criaram hipóteses e trabalharam em testes das conjecturas. Houve discussões interessantes, como uma equipe que trabalhou na descoberta do período analisando apenas os gráficos das funções, assim como outra equipe que relacionou o conceito de amplitude com o raio da circunferência trigonométrica correspondente. Apesar disso, percebeu-se dificuldade por algumas equipes durante esse processo de exploração, sendo que os próprios alunos argumentaram que a carência em conceitos matemáticos básicos havia feito com que não conseguissem contribuir de maneira mais ativa com os colegas.

Foi perceptível um avanço no conhecimento matemático, sendo que os alunos buscaram utilizar conceitos trabalhados anteriormente, os quais, a partir da exploração dos gráficos, discussão, levantamento de hipóteses, testes e apresentação de propriedades, contribuiu para a construção de novas percepções. Destaca-se também a criticidade dos alunos em relação a algumas situações, nas quais eles próprios buscaram debater até chegarem às conclusões.

Durante os momentos de intervenção alguns alunos pareciam ter descoberto um mundo novo, conseguindo trabalhar conceitos matemáticos por uma nova perspectiva, a partir disso foi possível perceber o desenvolvimento de habilidades como a elaboração de regras, o levantamento e teste de hipóteses e a argumentação oral, as quais auxiliaram na formulação de possíveis respostas para as situações propostas. Além disso, destaca-se o desenvolvimento do

espírito investigativo e do trabalho colaborativo entre os próprios alunos, não previsto nos eixos, mas evidente nas análises.

Outro aspecto que se destacou durante o processo de análise foi o papel do professor. O qual é importante no processo de condução da intervenção, buscando indagar e instigar os alunos de modo a fazer com que se sintam motivados a exploração, discussão e formulação das suas conclusões. É preciso que o professor entenda que está sujeito a situações imprevisíveis, como resoluções variadas, problemas técnicos, questionamentos não previstos, entre muitas outras. Porém, é preciso saber lidar com essas situações no lugar de não abandonar a ideia da tarefa investigativa.

Quanto as possibilidades do uso do celular, tendo como auxílio às tarefas investigativas, destaca-se que o aplicativo motivou e estimulou os alunos, os quais mostraram maior interesse durante os momentos de intervenção. Permitiu também maior autonomia durante o desenvolvimento das tarefas investigativas, nas quais os alunos puderam explorar propriedades, levantar conjecturas e realizar diversas descobertas. O fácil manuseio das ferramentas do aplicativo permite que os alunos sejam dinâmicos durante as buscas e descobertas, possibilitando que explorem suas funcionalidades movidos pela curiosidade. A partir disso, passam a estar à frente do processo de construção do próprio conhecimento, conseguindo compreender e argumentar sobre conceitos diversos. Entende-se que o aplicativo *Photomath* se mostrou como um meio que despertou o interesse dos alunos e a mudança na rotina fez com que ressignificassem o conteúdo de uma maneira diferenciada, possibilitando um novo olhar sobre os conceitos matemáticos apresentados.

Além disso, ao lidarem com o aplicativo numa perspectiva investigativa, os alunos puderam atribuir significado às respostas apresentadas pelo *Photomath*, em vez de apenas copiarem soluções com pouco sentido. Entende-se que o professor que insistir na aula tradicional, corre o risco de tornar os alunos meros reprodutores de respostas apresentadas por softwares disponíveis e cada vez mais aprimorados. Ou seja, não adianta negá-los, é preciso problematizá-los.

Entretanto, houve limitações relacionadas ao celular e ao desenvolvimento das tarefas investigativas. Algumas dificuldades de dimensão prática, as quais podem ser atribuídas ao ensino remoto, como um problema envolvendo o áudio nas salas simultâneas do *Google Meet*, assim como a falta de conexão do professor em alguns momentos. Também uma dificuldade relacionada aos conteúdos envolvidos, visto uma defasagem de conceitos básicos que seriam necessários para um melhor encaminhamento da intervenção e das discussões. Em relação ao

Photomath, percebeu-se que apesar do aplicativo ser uma excelente calculadora algébrica, houve limitações em relação às representações gráficas, assim como a dinamicidade do aplicativo. O que fez necessário a utilização de múltiplas plataformas, como o *WhatsApp*, buscas na internet, o *Geogebra Online*, entre outros. O que evidenciou uma carência quanto às discussões anteriores realizadas pelos próprios alunos.

É importante destacar a relevância dos espaços colaborativos, visto às possibilidades de aprendizagens, desenvolvimento profissional e pessoal, assim como, de maneira coletiva, a reflexão e estudo sobre dilemas e preocupações do contexto de sala de aula. Destaca-se o Grupo de Estudos Interdisciplinares e Formação de Professores (Geifop), em especial o subgrupo da Matemática, espaço que possibilitou o estudo e reflexão sobre a investigação matemática e auxiliou durante o planejamento, validação e estudo das tarefas investigativas deste estudo.

Com esta pesquisa pode-se verificar que ensinar com o auxílio das TD é uma maneira de tornar o ambiente mais acolhedor, fazendo com que a aula se torne mais interessante, descontraída e dinâmica, permitindo uma melhor comunicação entre o professor e os alunos e uma socialização entre eles próprios. O uso do celular desperta no aluno à vontade e um senso de curiosidade, que pode levá-lo a buscar mais conhecimento, promovendo uma autonomia na resolução de problemas, sejam matemáticos ou de outras naturezas.

Acredita-se que se tenha alcançado o objetivo dessa pesquisa, ao refletir sobre as possibilidades e limitações do uso do aplicativo *Photomath* por meio de tarefas investigativa, como forma de auxiliar na apreensão de conceitos relacionados ao comportamento gráfico de funções trigonométricas. Resultando em uma experiência que pode servir como motivação e incentivo para a utilização do celular, assim como das tarefas investigativas no ambiente de sala de aula.

7. REFERÊNCIAS

- ALRØ, H. E SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Tradução de Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.
- AMIM JUNIOR, J. E. **Tomada de decisões e o aprendizado de matemática financeira: uma experiência com aplicativos para smartphone**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Goiás, 2018.
- ANDRADE, M. J. P.; ALENCAR, A. F.; COUTINHO, C. P. **O TPACK e a taxonomia dos tipos de atividades de aprendizagem: frameworks para integração da tecnologia na educação**. Revista Educação e Cultura Contemporânea, v. 16, n. 43, p. 169-189, 2019.
- ALMEIDA, A. M. F. B. **Registros de Representações Semióticas no estudo de polinômios usando aplicativos em tablets**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. 2015.
- ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. p.31-51.
- BARRETO. L. S. F. **Aplicativos gratuitos como ferramenta tecnológica no desenvolvimento do cálculo mental**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. 2017.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.
- BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.
- BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2006. v. 2.
- BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretária da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental; Matemática**. Brasília, MEC/SEB, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília, MEC/SEB, 2018.
- CAMPEÃO, V. **Pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental: uma proposta de aplicativo**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Londrina. 2020.
- CONCEIÇÃO, D. L. **Aplicativos educacionais no ensino da Matemática: potencialidades de uso em concepções e práticas docentes**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pelotas. 2018.
- COSTA, W. O.; OLIVEIRA, A. M. P. **A participação de professores na elaboração de**

tarefas matemáticas em um trabalho colaborativo. Revemop, v. 1, n. 1, p. 105 - 125, 2019.

CRISTOVÃO, E. M. **Tecnologias a serviço da construção de uma abordagem Exploratório-Investigativa na sala de aula.** In: IV Jornada Nacional de Educação Matemática - XVII Jornada Regional de Educação Matemática, 2012.

CRISTOVÃO, E. M.; SILVA, J. R. N. ; BORTOLUZZI, M. B. **Formação contínua de professores num grupo de estudos interdisciplinares com perspectiva colaborativa de trabalho.** In: IV Congresso Nacional de Formação de professores, 2018, Aguas de Lindoia. Anais do IV Simpósio. Rio Claro: Unesp, 2018. v. 1. p. 1-1.

CUNHA, H., OLIVEIRA, H., PONTE, J. P. **Investigações matemáticas na sala de aula.** In A. Pinheiro, A. P. Canavarro (Eds.), Actas do ProfMat 95 (pp. 161-168). Lisboa: APM, 1995.

FIORENTINI, D. e LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP. Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A. Uma Reflexão sobre o Uso de Materiais Concretos e Jogos no Ensino da Matemática. **Boletim SBEM-SP.** São Paulo, ano 4, n.7, p. 5-10. 1990.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais.** 8ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

LIMA, C. N.M.F; NACARATO, A. M. **A investigação da própria prática: mobilização e apropriação de saberes profissionais em Matemática.** Educação em Revista, Belo Horizonte, v.25, n.02, p.241-266, 2009.

LOPES, M. M.. **Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra.** Bolema, v. 27, p. 631-644, 2013.

LORENZATO, Sérgio (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006. Coleção Formação de Professores.

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C.. **Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar.** Porto Alegre: Artmed, 2005.

MADURO, R. M. R. **O uso do celular em sala de aula: atividades de Matemática para o Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Oeste Do Pará. 2016.

MALTEMPI, M. V.; MENDES, R. O. **Tecnologias Digitais na Sala de Aula: Por que não?** In: IV CONGRESSO INTERNACIONAL DE TIC NA EDUCAÇÃO, 2016, Lisboa/Portugal. Anais. Lisboa/Portugal, 2016. p. 86-96.

MINAS GERAIS. **Currículo Referência de Minas Gerais.** Minas Gerais, 2018.

MORGADO, L.; SPILKER, M. J.; SILVA P. **Novos Ambientes de Aprendizagem PLE, MOOC, Mobile Learning.** In: 2º Encontro de Bibliotecas do Ensino Superior, Aveiro, 2013.

- NEIVA, R. S. **Ensino da Matemática e as Novas Tecnologias Digitais: A Aprendizagem das Funções Trigonométricas com o Auxílio do Aplicativo Photomath.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. 2019.
- NOGUEIRA, E. L. P. **O uso da calculadora gráfica Geogebra no Smartphone como ferramenta para o ensino das funções exponencial e logarítmica.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 2018.
- PEDROSO, G. C. **Um Estudo sobre Cônicas e Curvas Cúbicas no Plano, e o Aplicativo EasyMath.** Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas. 2015.
- PONTE, J. P. **Investigar a nossa própria prática.** In GTI (Org.) Refletir e investigar a prática profissional (PP.5-28). Lisboa: APM, 2002.
- PONTE, J. P. BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.
- PONTE, J. P. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal.** Investigar em Educação, 2, p. 93-169, 2003.
- PONTE, J. P. **O conceito de função no currículo de Matemática.** Revista Educação e Matemática, n. 15, p. 3-9, 1990.
- RIBAS, A. S.; SILVA, S. C. R.; GALVÃO, J. R. **Telefone celular como recurso didático no ensino de Física.** Curitiba: UTFPR, 2015.
- ROMANELLO, L. A. **Potencialidades do uso do celular em sala de aula: Atividades investigativas para o ensino de função.** Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro, 2016.
- ROMANELLO, L. A. **O celular como recurso didático nas aulas de Matemática: a visão do professor.** Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação Matemática, v.20, 2016.
- SANTOS, A. R. **Maxima on Android: uma ferramenta tecnológica na construção do gráfico de funções de variável real.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. 2015.
- SCHMITZ N. **O uso do telefone celular com o aplicativo WhatsApp como ferramenta de ensino de Matemática.** Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. 2016.
- SILVA, L. P. **Celular como ferramenta de Ensino e Aprendizagem de Matemática.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Rondônia. 2018.
- SILVA, P. C. A. **Geometria espacial: uso do aplicativo GeoGebra em smartphones.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Goiás, 2018.
- SIMÃO, R. L. **Um aplicativo em teoria dos números e sua utilização como recurso didático.** Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. 2018.
- SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação.** Bolema, 14, 66-91, 2000.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

8. APÊNDICES

APÊNDICE A – Tarefa investigativa

Introdução às Funções Trigonômétricas

1. Conteúdo e Série

O conteúdo deste plano de aula será uma revisão às funções *seno* e *coseno* para uma turma de alunos do 3º ano do Ensino Médio. Em particular, trabalharemos com o aplicativo *Photomath* para celulares inteligentes, mediado por atividades investigativas, a fim de se trabalhar na compreensão de alguns conceitos relacionados aos parâmetros na lei de formação de funções trigonométricas.

2. Objetivos

2.1. Objetivo Geral

Refletir e compreender sobre a relação de cada coeficiente na lei de formação de uma função trigonométrica e a forma gráfica cartesiana das funções *seno* e *coseno*.

2.2. Objetivos Específicos

- Estreitar a relação entre a teoria e a prática no que diz respeito aos arcos notáveis e a determinação dos valores de seus respectivos senos e cossenos;
- Visualizar a relação entre os coeficientes na lei de formação de uma função trigonométrica e o que ele gera no gráfico da respectiva função;
- Entender e resolver situações e problemas que levantam questionamentos sobre a lei de formação de uma função trigonométrica.

3. Problemática

Está cada vez mais difícil prender a atenção dos alunos nas aulas, principalmente nas aulas de matemática. Contudo, a inserção de novos recursos didáticos pode ajudar a refletir positivamente no processo de ensino e aprendizagem. Outros problemas encontrados são a dificuldade que os alunos têm em esboçar gráficos de funções e a grande quantidade de tempo demandada para que o professor consiga fazer diversas construções junto com a turma. Trazemos nesta atividade uma proposta investigativa apoiando-se na utilização do aplicativo *Photomath*.

4. Recursos Necessários

Os recursos necessários para um bom desenvolvimento da aula serão:

- Aplicativo *Photomath* instalado;
- Sala principal no *Google Meet* e sub salas de cada grupo;
- Material online com as atividades a serem realizadas; e

- Template do *Google Apresentações* para a escrita e socialização.

O USO DO APLICATIVO PHOTOMATH COMO AUXÍLIO PARA O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	
GRUPO	Turma:
Professor/Pesquisador:	Patrick Eduardo da Conceição

Tarefa: analisar o papel dos coeficientes no comportamento de funções trigonométricas utilizando o aplicativo Photomath.

Orientações iniciais:

- Vocês terão 60 minutos para cada uma das etapas, 20 minutos para organizar a apresentação e 5 minutos para cada equipe apresentar seus resultados e em seguida, teremos 15 minutos para discussão dos resultados obtidos pelos diferentes grupos.
- Lembrem-se que as funções podem ser inseridas no aplicativo de duas maneiras, escrevendo em uma folha e fotografando, ou utilizando a calculadora e as inserindo manualmente.

Para começar, definam as funções de cada um. Escolham, de acordo com o número de integrantes do grupo (não esquecendo que todos deverão participar das etapas de produção):

- **Técnico:** apresentar a tela do celular no *Google Meet* e realizar a plotagem dos gráficos no *Photomath*. (Fotografando as funções no caderno ou utilizando a calculadora do aplicativo)
- **Redator:** redação final do registro a ser apresentado no *Google Apresentações*.
- **Relatores:** apresentação dos resultados encontrados pela equipe.
- **Coordenador:** organização e pela resolução de possíveis conflitos;

O grupo de vocês vai analisar graficamente a função trigonométrica seno buscando perceber a relação entre os comportamentos desses gráficos e a variação dos coeficientes da função seno. Durante a realização da tarefa, procurem analisar as regularidades encontradas e realizar, ao mesmo tempo, as seguintes etapas:

- (1) levantar, testar e validar conjecturas;
- (2) registrar e relatar de forma adequada o processo vivido e as descobertas do grupo; e
- (3) Organizar uma apresentação de slides para socializar os resultados obtidos.

Para que vocês analisem os gráficos posteriormente e respondam às questões propostas, será importante que registrem os gráficos e os coloquem junto a apresentação no *Google Apresentações*.

Problema Inicial

(DANTE, 2012, p. 280) Carol e Cláudio, passeando em um parque de diversões, resolvem andar na roda-gigante. Segundo informações que leram, a altura em que estariam em relação ao solo pode ser aproximadamente descrita pela função, em que t é dado em segundos e h em metros:

$$h(t) = 19 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{24} t + \pi \right) + 20$$

- a) Qual é o raio da roda-gigante?
 b) Qual é o tempo necessário para eles darem uma volta completa na roda-gigante?

Para tentarmos responder a esse problema, vamos inicialmente investigar cada um dos coeficientes em uma função do tipo:

$$f(x) = a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d \quad \text{ou} \quad f(x) = a \cdot \text{cos}(b \cdot x + c) + d$$

ETAPA 1

Atividade 1 - Utilizando a calculadora do *Photomath* ou escrevendo e fotografando as funções abaixo, visualize e registre o gráfico de cada uma delas na apresentação do grupo.

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

$$f(x) = -4 \cdot \text{sen}(x)$$

$$f(x) = 0,2 \cdot \text{sen}(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(x)$$

$$f(x) = 10 \cdot \text{sen}(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot \text{sen}(x)$$

Questões para debate:

- a) Após explorar as funções, o que vocês podem dizer sobre as diferenças e semelhanças entre os gráficos analisados?
 b) Vocês conseguem apontar o domínio, imagem e período das funções analisadas? Busquem explorar o aplicativo.
 c) O que é possível afirmar sobre o coeficiente “a” em uma função do tipo:

$$f(x) = a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d$$

Atividade 2 - Utilizando a calculadora do *Photomath* ou escrevendo e fotografando as funções abaixo, visualize e registre o gráfico de cada uma delas na apresentação do grupo.

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

$$f(x) = \text{sen}(-4 \cdot x)$$

$$f(x) = \text{sen}(0,2 \cdot x)$$

$$f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$$

$$f(x) = \text{sen}(10 \cdot x)$$

$$f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{10} \cdot x\right)$$

Questões para debate:

- a) Após explorar as funções, o que vocês podem dizer sobre as diferenças e semelhanças entre os gráficos analisados?
- b) Vocês conseguem apontar o domínio, imagem e período das funções analisadas?
- c) O que é possível afirmar sobre o coeficiente “b” em uma função do tipo:

$$f(x) = a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d$$

- d) O que aconteceria em uma função do tipo $f(x) = a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d$ caso o coeficiente **b** fosse zero?

ETAPA 2

Atividade 1 - Utilizando a calculadora do *Photomath* ou escrevendo e fotografando as funções abaixo, visualize e registre o gráfico de cada uma delas na apresentação do grupo.

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

$$f(x) = \text{sen}(x + 7)$$

$$f(x) = \text{sen}(x - 10)$$

$$f(x) = \text{sen}(x + 1)$$

$$f(x) = \text{sen}(x + 10)$$

$$f(x) = \text{sen}(x - 3)$$

Questões:

- a) Após explorar as funções, o que vocês podem dizer sobre as diferenças e semelhanças entre os gráficos.
- b) O que é possível afirmar sobre o coeficiente “c” em uma função do tipo:

$$f(x) = a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d$$

Atividade 2 - Utilizando a calculadora do *Photomath* ou escrevendo e fotografando as funções abaixo, visualize e registre o gráfico de cada uma delas colando uma foto na apresentação.

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

$$f(x) = \text{sen}(x) + 7$$

$$f(x) = \text{sen}(x) - \pi$$

$$f(x) = \text{sen}(x) + 1$$

$$f(x) = \text{sen}(x) + \pi$$

$$f(x) = \text{sen}(x) - 3$$

Questões:

a) Após explorar as funções, o que vocês podem dizer sobre as diferenças e semelhanças entre os gráficos.

b) O que é possível afirmar sobre o coeficiente “**d**” em uma função do tipo:

$$f(x) = a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d$$

Questões da discussão final

Questão 1 – Qual seria a lei de uma função seno, $h(x)$, sabendo que seu gráfico, comparado com o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$, representa uma curva deslocada 3 unidades para a esquerda, possui domínio \mathbb{R} , amplitude 3, período 2π e um deslocamento vertical de 4 unidades para cima.

Questão 2 - Você precisa visualizar o gráfico da função $f(x) = \cos(x)$, mas ocorreu um problema com o *Photomath* e só a função *seno* está funcionando. Discutam e apresentem uma solução para se construir o gráfico de $f(x) = \cos(x)$ utilizando a função seno, $f(x) = \text{sen}(x)$. **Dica:** aproveitem o *Photomath* para testar e tentar chegar a solução.

DESAFIO – Vamos voltar e tentar o problema inicial.

(DANTE, 2012, p. 280) Carol e Cláudio, passeando em um parque de diversões, resolvem andar na roda-gigante. Segundo informações que leram, a altura em que estariam em relação ao solo pode ser aproximadamente descrita pela função, em que t é dado em segundos e h em metros:

$$h(t) = 19 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{24}t + \pi\right) + 20$$

a) Qual é o raio da roda-gigante?

b) Qual é o tempo necessário para eles darem uma volta completa na roda-gigante?

APÊNDICE B – Atividade diagnóstica

Atividade diagnóstica: Funções Trigonométricas

Prezado (a),

Esta atividade tem o intuito apenas de identificar os conhecimentos que você já possui, nesse sentido não é necessário que você pesquise os conteúdos de cada questão, mas sim que responda com aquilo que você se lembrar.

Questões

As funções são um conceito importante dentro da Matemática, além de poderem ser utilizadas em várias outras áreas.

Você já estudou alguns tipos de funções, no entanto, nessa atividade, o foco de estudo serão as funções trigonométricas seno e cosseno. As quais são dadas pelas leis de formação:

$$f(x) = a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d \quad \text{e} \quad f(x) = a \cdot \text{cos}(b \cdot x + c) + d \quad .$$

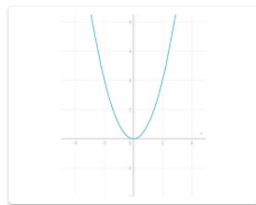
AVISO IMPORTANTE: É possível que você não saiba responder alguma questão. Entretanto, esse teste tem o objetivo apenas de identificar seus conhecimentos acerca do assunto abordado. Nesse sentido, responda com aquilo que você se lembrar.

Questão 1 – As funções seno e cosseno tem algumas características que as diferem de outras funções já estudadas, busque apontar pelo menos uma dessas características?

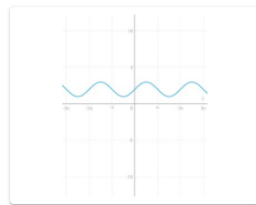
Questão 2 – Como se chama uma função não constante cujos valores “se repetem” a intervalos regulares?

- a) Afim. b) Limitada. c) Periódica. d) Real.

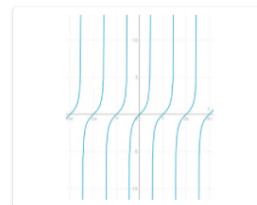
Questão 3 - Dentre os gráficos abaixo, qual pode ser associado a uma função seno:



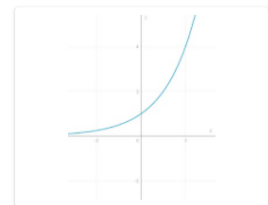
(A) I



(B) II



(C) III



(D) IV

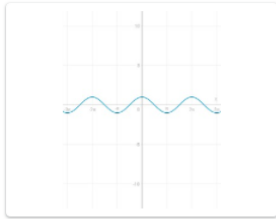
Questão 4 - Observe as funções abaixo. Pensando no gráfico dessas funções, o que é possível afirmar sobre os valores 18 e 1/4 ? Se possível justifique.

$$f(x) = 18 \cdot \text{Sen}(x) \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{1}{4} \cdot \text{Sen}(x).$$

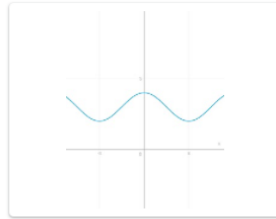
Questão 5 - Observe as funções abaixo. Pensando no gráfico dessas funções, o que é possível afirmar sobre os valores 2 e 1/4 ? Se possível justifique.

$$f(x) = \text{Cos}(2.x) \text{ e } f(x) = \text{Cos}\left(\frac{1}{4}.x\right).$$

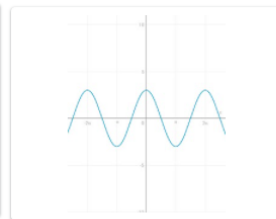
Questão 6 – Qual dos gráficos representa a função $f(x) = \text{Cos}(x) + 3$.



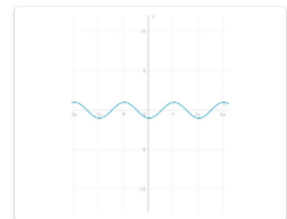
(A) I



(B) II



(C) III



(D) IV

Questão 7 – Considerando $f(x) = -4 \cdot \text{Sen}(x + 3) + 1$ aponte qual o PERÍODO e a AMPLITUDE dessa função.

Questão 8 - Leia o problema e tente responder os questionamentos:

(DANTE, 2012, p. 280) Carol e Cláudio, passeando em um parque de diversões, resolvem andar na roda-gigante. Segundo informações que leram, a altura em que estariam em relação ao solo pode ser aproximadamente descrita pela função, em que t é dado em segundos e h em metros:

$$h(t) = 19 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{24}t + \pi\right) + 20$$

a) Qual é o raio da roda-gigante?

b) Qual é o tempo necessário para eles darem uma volta completa na roda-gigante?

APÊNDICE C – Questionário

Questionário - O uso do celular e/ou aplicativos como ferramenta para a aprendizagem Matemática

Esse questionário busca entender suas percepções em relação a intervenção realizada com o aplicativo Photomath, mediado pelas atividades investigativas.

Informações: As respostas a este questionário são livres. Entretanto, objetiva-se entender a sua relação com o uso do celular e o que a intervenção realizada despertou em relação à aprendizagem Matemática.

Questão 1 – Em seu dia a dia, em média, quanto tempo você imagina usar o aparelho celular? Tente nomear os aplicativos que você utiliza com mais frequência.

Questão 2 – Você utiliza o celular como auxílio para atividades escolares? Como? Quais ferramentas normalmente utiliza?

Questão 3 – Como você entende a proibição do celular em sala de aula?

Questão 4 – O aplicativo Photomath auxiliou na intervenção realizada? De que maneira?

Questão 5 – Além do aplicativo Photomath quais recursos foram utilizados para a realização das atividades?

Questão 6 – Houve dificuldade ao utilizar o Photomath? Percebeu alguma limitação do aplicativo durante as atividades?

Questão 7 – Como foi a experiência de trabalhar matemática atrelada ao uso do smartphone como recurso didático? O que mais chamou a atenção?

Questão 8 – Como você avalia a sua participação e a dos colegas?

Questão 9 – Ao realizar as etapas da intervenção, você sentiu que estava realizando uma “investigação”? Por quê?

Questão 10 – Aponte sugestões e críticas que julgue importantes em relação a intervenção realizada?

APÊNDICE D – Entrevista

ROTEIRO ENTREVISTA PROFESSORA

1. Nome/ idade/ formação/ experiências.
2. Comente sobre sua relação com a matemática e com a docência.
3. Durante sua formação inicial houve contato com a abordagem investigativa e o uso das tecnologias?
4. Pensando na experiência vivenciada junto aos alunos, as atividades atenderam suas expectativas? Como você avalia as atividades aplicadas e a participação dos alunos?
5. Houve dificuldade de adaptação ao contexto remoto?
6. O aplicativo Photomath permitiu a exploração dos conceitos de função trigonométrica? Fique a vontade para destacar pontos favoráveis e/ou negativos.
7. O que despertou sua atenção ao longo das aulas? Houve algum episódio que te marcou com os alunos.
8. Houveram dificuldades ao longo da intervenção em relação a abordagem investigativa, ao uso das tecnologias, contato com os alunos, o conteúdo a ser trabalhado?
9. Skovsmose (2000) aponta que quando os alunos se envolvem e apresentam engajamento ativo nas atividades propostas é sinal de que aceitaram o convite ao cenário investigativo, o que pode depender de como estão intencionados naquele momento, da natureza das atividades e/ou de como foi feita a abordagem pelo professor. Nesse sentido, os grupos auxiliados demonstraram ter aceitado o convite ao cenário de investigação?
10. Comente o que sentiu em relação à mudança e adaptação do planejamento durante as intervenções.
11. Tem sugestões, críticas ou observações?
12. Após esta experiência, qual sua visão sobre a utilização da abordagem investigativa e uso da tecnologia em intervenções em sala de aula? (Potencialidades, Dificuldades, Vantagens, Desvantagens)