

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Variedades Secantes de Mergulhos de Segre-Veronese
de Produtos da Reta Projetiva**

Cleilson Costa Alves
Orientador: Prof. Dr. Rick Antônio Rischter

Itajubá - MG
31 de maio de 2023

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Variedades Secantes de Mergulhos de Segre-Veronese
de Produtos da Reta Projetiva**

Cleilson Costa Alves
Orientador: Prof. Dr. Rick Antônio Rischter

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UNIFEI, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Topologia e Geometria

Itajubá - MG
31 de maio de 2023

Dedico este trabalho a minha família, meus amigos e a meu único, eterno e verdadeiro amor: Lucas Mota.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por esta realização. Agradeço à minha família: minha, paim, In e Cau por todo apoio que me deram ao longo desses dois anos, agradeço também Vô Zé, Vó Ném e Padrim Geraldo bem como toda a minha comunidade Água Fria Fábrica e Santa Cruz. Agradeço ao meu orientador Rick Rischter por toda paciência e dedicação em me orientar, agradeço aos meus amigos do PMAT: Éric e Juan pelos bons momentos, em especial ao Vinícius, pela colaboração. Aos meus professores e a todos aqueles que me ajudaram a chegar até aqui.

Agradeço a SME/Itinga-MG na pessoa de Zan, por toda confiança e ajuda nos momentos que precisei. Agradeço a Rep. Mista Quente: Marcos, Salles, Phill, Mika e Hasmann pelas alegrias compartilhadas. Agradeço a Luciane Luz, dona da casa onde morei com os meninos, pela confiança e carinho. Agradeço a família Nossa Senhora da Agonia, pelos momentos de fortalecimento da fé. Agradeço a minha família do sul de Minas: Mãe Dorinha, Pai Zêu, Phill, Matheus e Rapha pelo acolhimento e por me deixar fazer parte do lar de vocês.

Por fim, não menos importante, agradeço a Bruno e Will, pelo incentivo e motivação e a Lucas Mota: meu Boyzinho, meu Anjo Bom, meu Príncipe, meu único, eterno e verdadeiro amor, amor este que foi força de motivação nos momentos que pensei em desistir.

Agradeço também à Capes por ter me proporcionado a bolsa de estudo que me permitiu ter dedicação exclusiva ao mestrado.

Resumo

O problema do defeito secante consiste em estudar a dimensão da variedade h -secante de uma variedade algébrica. Dizemos que uma variedade é h -defeituosa quando sua h -secante não possui a dimensão esperada. Nesse trabalho estudaremos os defeitos secantes das variedades de Segre-Veronese de produtos da reta projetiva.

Palavras-Chaves: Variedades de Segre-Veronese; Defeitos Secantes; Produtos da Reta Projetiva; Geometria Algébrica.

Abstract

The problem of secant defectivity consists in studying the dimension of the h -secant variety of an algebraic variety. We say that an algebraic variety is h -defective when its h -secant variety does not have the expected dimension. In this work we will study the secant defectivity of the Segre-Veronese varieties of the products of the projective line.

Keywords: Segre-Veronese Varieties, Secant Defectivity, Products of the Projective Line, Algebraic Geometry.

Sumário

1	Introdução	2
2	Conceitos Iniciais e Exemplos	4
2.1	Topologia	4
2.2	Álgebra Comutativa	10
2.3	O Espectro Primo de um Anel	27
3	Geometria Algébrica Clássica	31
3.1	Variedades Algébricas Afins	31
3.2	Variedades Algébricas Projetivas	36
4	Mergulhos de Veronese, Segre e Segre-Veronese	49
5	Espaços Lineares e Defeitos Secantes	54
5.1	Espaços Lineares	54
5.2	Defeitos Secantes	57
5.3	Lema de Terracini e Aplicações	61
6	Esquemas e Feixes	84
6.1	Pré-Feixes e Feixes	84
6.2	O Espectro de um Anel	87
6.3	Esquemas	92
7	Sistemas Lineares	110
8	Variedades Tóricas e Degeneração Tórica	125
8.1	Variedades Tóricas	125
8.2	Degeneração Tórica de $(\mathbb{P}^1)^r$	128
9	Degenerações do Sistema Linear	130
9.1	(k, n_2) -degeneração de \mathcal{L}	130
9.2	$(1, n_2, \beta)$ -degeneração de \mathcal{L}	131
9.3	Dimensão do Sistema Limite	131
9.4	Aplicando a Técnica da Dupla Degeneração	134
10	Teorema Principal	136
10.1	Sistemas Especiais	136
10.2	Sistemas Não Especiais	141

1 Introdução

Um dos objetos fundamentais de estudo em Geometria Algébrica são as variedades algébricas projetivas, estruturas essas que consistem do lugar geométrico dos zeros comuns de uma dada família de polinômios num espaço projetivo, denotado por \mathbb{P}^N . Tal caracterização das variedades projetivas nos permitem uma série de estudos sobre essas estruturas.

Um dos principais focos no estudo de tais variedades consiste em analisar os defeitos secantes, a fim de classificar se uma determinada variedade é ou não defeituosa. Dada uma variedade $X \subset \mathbb{P}^N$, definimos uma h -secante linear de X como sendo o espaço linear determinado pelos h pontos de X em posição geral e entendemos como variedade h -secante de X , o fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) da união de todas as h -secantes lineares, essa variedade será denotada por $Sec_h X$. Se X é uma variedade de dimensão n , prova-se que a dimensão da $Sec_h X$ é no máximo $\min\{N, (n+1)h-1\}$ e esta é a chamada dimensão esperada para $Sec_h X$. Quando a variedade h -secante de X não possui a dimensão esperada, dizemos que X é h -defeituosa e dizemos que X é defeituosa quando X é h -defeituosa para algum h .

Para este trabalho estamos interessados em estudar os defeitos secantes para a variedade de Segre-Veronese consistida do mergulho de r produtos da reta projetiva \mathbb{P}^1 com multigrado (d_1, \dots, d_r) . O problema de determinar defeitos secantes em variedades de Segre-Veronese ainda é um problema em aberto e vários esforços têm sido feitos até o momento e foi resolvido apenas para alguns casos particulares, como se pode notar em [1], [2], [3], [6], [7], [8], [9], [10].

Neste trabalho estudaremos os defeitos secantes das variedades de Segre-Veronese investigando a dimensão do sistema linear associado $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$, sistema este que consiste das hipersuperfícies de $(\mathbb{P}^1)^r$ de multigrado (d_1, \dots, d_r) através de n pontos duplos em posição geral. Via Lema de Terracini, resolver este problema, equivale a calcular a dimensão da variedade secante do mergulho de Segre-Veronese $(\mathbb{P}^1)^r \rightarrow \mathbb{P}^N$, definido pelo sistema linear completo $|\mathcal{O}(d_1, \dots, d_r)|$ de $(\mathbb{P}^1)^r$.

Nossa abordagem consistirá em degenerar $(\mathbb{P}^1)^r$ para uma união de duas variedades ambas isomorfas a $(\mathbb{P}^1)^r$, degenerando simultaneamente o sistema linear para um sistema linear obtido como o produto fibrado de sistemas lineares nas duas componentes sobre o sistema linear restrito em sua interseção. O sistema linear limite é um pouco mais fácil que o original, em particular, este argumento de degeneração permitirá usar a indução no multigrado e em r . Um importante passo básico para nosso argumento de indução está representado em [10], onde os autores mostram que se todos os d_i são iguais a 1, então $\mathcal{L}_{(1, \dots, 1)}(2^n)$ tem sempre a dimensão esperada, logo é classificado como não especial, exceto no caso em que $r = 4$.

Para um melhor entendimento dos resultados sobre variedades algébricas, primeiro faz-se necessário uma breve revisão dos principais conceitos e resultados inerentes a este estudo. Para isso, o Capítulo 2 deste trabalho é dedicado a introduzir os conceitos básicos de Topologia e Álgebra Comutativa. Na sequência, o Capítulo 3 traz os principais resultados e conceitos da Geometria Algébrica Clássica, como os conceitos de variedades algébricas afins e projetivas, variedades irredutíveis e fecho projetivo de uma variedade afim.

No Capítulo 4, definimos o objeto de estudo deste trabalho que é o mergulho de Segre-Veronese. No capítulo seguinte, o Capítulo 5, trazemos a definição de espaços lineares bem como alguns importantes resultados, além de definir o defeito secante de uma variedade e determinar alguns deles via Lema de Terracini. A seguir, no Capítulo 6, trazemos importantes conceitos e resultados sobre a teoria de esquemas e feixes.

No Capítulo 7, definimos e exemplificamos o conceito de sistema linear, além de esclarecer a relação entre o sistema ser especial (ou não) e a variedade de Segre-Veronese associada ser defeituosa (ou não). Na sequência, no Capítulo 8, abordamos de forma sucinta e objetiva, um pouco sobre variedades tóricas, a fim de termos o embasamento necessário para realizarmos a degeneração tórica de $(\mathbb{P}^1)^r$. Em seguida, no Capítulo 9 fixamos notações e apresentamos as técnicas de degenerações que serão utilizadas. Além disso, calculamos a dimensão do sistema limite (degenerado), analisando a dimensão dos sistemas restritos e aplicando a técnica da dupla degeneração.

Por fim, não menos importante, no Capítulo 10 apresentamos e provamos os casos base da indução e provamos a não especialidade dos demais casos, considerados não defeituosos, degenerando o sistema linear associado por meio das técnicas de degeneração apresentadas, e utilizando os casos base da indução. Além disso, trazemos também a prova dos casos considerados especiais (defeituosos).

Ressaltamos que grande parte desse trabalho foi desenvolvida de forma conjunta com MANFREDINI [24], que também desenvolveu sua dissertação sob a orientação do professor Rick Antônio Rischter. Dessa forma, a parte básica comum às duas dissertações, como muitos resultados das partes de Topologia, Álgebra Comutativa, Geometria Algébrica Clássica, Espaços Lineares e Defeitos Secantes, bem como da parte de Esquemas e Feixes se encontram idênticos em ambos os trabalhos. Apenas, a partir do Capítulo 7, que apesar de uma similaridade ou outra, por causa da particularidade de cada dissertação, os resultados começam a se diferir.

2 Conceitos Iniciais e Exemplos

2.1 Topologia

Nesta seção revisaremos conceitos básicos de topologia, exemplificando e trazendo resultados importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Ressaltamos que a demonstração de alguns resultados estão omitidas, mas podem ser consultadas nos livros-texto base: [26] e [14].

Espaços Topológicos

Definição 2.1 Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que τ é uma **topologia** em X se τ é uma coleção de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes propriedades:

- (a) $\emptyset, X \in \tau$;
- (b) A união arbitrária de conjuntos de τ está em τ ;
- (c) A interseção finita de conjuntos de τ está em τ .

O conjunto X com a topologia τ é chamado de **espaço topológico** e será denotado por (X, τ) . Os elementos da topologia τ são chamados de **abertos**. Um aberto contendo um ponto $x \in X$ é chamado **vizinhança** de x .

Exemplo 2.1 (Topologia Discreta e Topologia Trivial) Dado um conjunto X , se definirmos $\tau = \mathcal{P}(X)$, o conjunto das partes de X , então (X, τ) é um espaço topológico. Esta topologia é chamada de *topologia discreta*. A topologia $\tau = \{\emptyset, X\}$ é conhecida como *topologia trivial* ou *topologia caótica*.

Exemplo 2.2 Seja $X = \{a, b, c\}$ e considere as seguintes coleções de subconjuntos de X :

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\} \text{ e } \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}.$$

Observe que τ_1 é uma topologia, pois $\emptyset, X \in \tau_1$, a união arbitrária de elementos de τ_1 está em τ_1 e a interseção finita de elementos de τ_1 também está em τ_1 . Porém, τ_2 não é uma topologia, pois $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \tau_2$.

Exemplo 2.3 (Topologia Cofinita) Seja X um conjunto qualquer e considere

$$\tau = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ é finito ou é todo } X\}.$$

Então (X, τ) é um espaço topológico. De fato,

- (a) Note que $\emptyset \in \tau$, pois $X \setminus \emptyset = X$. Além disso, $X \in \tau$, pois $X \setminus X = \emptyset$, que é finito;
- (b) Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma coleção de elementos não vazia de τ . Temos que

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus U_\alpha).$$

Como $X \setminus U_\alpha$ é finito para todo $\alpha \in I$ ou é todo X , segue que $X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ é finito ou é todo X , pois é interseção de conjuntos finitos;

(c) Se U_1, U_2, \dots, U_n são abertos não vazios de τ , então

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus U_i)$$

pelo mesmo argumento de antes, temos que $X \setminus \bigcap_{i=1}^n U_i$ é finito, pois é união finita de conjuntos finitos e, portanto é finita e está em τ .

Portanto, (X, τ) é um espaço topológico e τ é chamada de *topologia cofinita*.

Definição 2.2 Seja X um espaço topológico. Dizemos que $F \subset X$ é **fechado** se $X \setminus F$ é aberto em X .

Exemplo 2.4 Os subconjuntos $[a, b]$ de \mathbb{R} são fechados com a topologia usual, pois $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ é aberto (união de abertos é um aberto) em \mathbb{R} . Na topologia cofinita num conjunto X qualquer, os fechados são: o próprio X e todos os subconjuntos finitos de X .

Proposição 2.1 Seja X um espaço topológico. Então valem as seguintes condições:

- (a) \emptyset e X são fechados;
- (b) União finita de fechados é fechado;
- (c) Interseção arbitrária de fechados é fechado.

Demonstração: Como \emptyset, X são abertos, então $\emptyset = X \setminus X$ e $X = X \setminus \emptyset$ são fechados. Se F_1, \dots, F_n são fechados, então $X \setminus F_i$ é aberto para cada $1 \leq i \leq n$. Logo,

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus F_i).$$

Dessa forma, como $\bigcap_{i=1}^n (X \setminus F_i)$ é aberto, então $\bigcup_{i=1}^n F_i$ é fechado. Por fim, dada uma família $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de fechados, temos que

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha).$$

Por argumento semelhante ao anterior, temos que $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ é fechado. ■

Podemos também definir uma topologia usando fechados ao invés de abertos, basta definir τ tomando como axiomas as propriedades provadas na proposição acima e chamar os elementos de τ de fechados. Neste caso, os abertos são definidos como o complementar dos fechados.

Base para uma Topologia

Definição 2.3 Seja X um conjunto qualquer, uma **base** para uma topologia em X é uma coleção \mathcal{B} de subconjuntos abertos de X satisfazendo as seguintes propriedades:

- (a) Para cada $x \in X$ existe pelo menos um elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;
- (b) Se $x \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$, então existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Os elementos B de uma base \mathcal{B} são chamamos de **elementos básicos**.

Se \mathcal{B} satisfaz as condições acima, definimos a topologia τ gerada por \mathcal{B} da seguinte forma: um subconjunto $U \subset X$ pertence a τ se, e somente se, é o conjunto vazio ou para cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Exemplo 2.5 O conjunto $[a, b)$ não é aberto nem fechado em \mathbb{R} com a topologia usual. De fato, para todo aberto básico com $a \in (c, d)$, temos que $c < a < d$. Logo, $(c, d) \not\subset [a, b)$ e portanto, $[a, b)$ não é aberto. Por outro lado, observe que $\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$, que não é aberto em \mathbb{R} com a topologia usual, pois todo aberto básico (c, d) contendo b não está contido em $(-\infty, a) \cup [b, \infty)$. Portanto, $[a, b)$ não é fechado.

Lema 2.1 Seja (X, τ) um espaço topológico. Suponha que \mathcal{B} é uma coleção de conjuntos abertos em X , tal que para cada subconjunto aberto $U \subset X$ e cada $x \in U$, existe um elemento $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subset U$. Então \mathcal{B} é base para a topologia τ em X .

Demonstração:

- (a) Como X é um aberto então para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset X$.
- (b) Se $x \in B_1 \cap B_2$, onde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Como B_1 e B_2 são abertos, então $B_1 \cap B_2$ é aberto. Logo, existe $B_3 \in \mathcal{B}$, tal que

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Portanto, \mathcal{B} é uma base para a topologia τ . ■

Observação 2.1 Pelo Lema acima, temos que: para todo aberto $U \subset X$, existe uma família $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de elementos básicos tal que

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

De fato, seja U um aberto qualquer de X . Como \mathcal{B} é uma base para τ , para todo $x \in U \subset X$, existe um aberto básico $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U$. Logo,

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Reciprocamente, se $U \subset X$ é uma união de elementos básicos de \mathcal{B} , cada um destes elementos está em τ . Como τ é uma topologia, a união deles também está em τ .

Exemplo 2.6 A topologia usual de \mathbb{R} é a topologia gerada por $\mathcal{B} = \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. A topologia usual de \mathbb{R}^n é a topologia gerada por $\mathcal{B} = \{B_d(x; r) \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ e } r > 0\}$, onde d é a distância euclidiana. A topologia usual de \mathbb{C} é a topologia usual de \mathbb{R}^2 .

Exemplo 2.7 Seja X um conjunto qualquer, então

$$\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$$

é uma base para topologia discreta em X . De fato,

- (a) Para todo $x \in X$, temos que $x \in \{x\}$, onde $\{x\} \in \mathcal{B}$;
- (b) Se $x \in \{x_1\} \cap \{x_2\}$, então

$$x \in \{x_1\} \text{ e } x \in \{x_2\} \Rightarrow x = x_1 \text{ e } x = x_2.$$

Portanto, $x \in \{x\} = \{x_1\} \cap \{x_2\}$.

Definição 2.4 Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que X é um espaço de **Hausdorff** se, dados $x, y \in X$ com $x \neq y$, então existem abertos $B_1, B_2 \in \tau$ tais que $x \in B_1$, $y \in B_2$ e $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Exemplo 2.8 (Espaços Métricos) Seja (X, d) um espaço métrico. Dados $x, y \in X$ com $x \neq y$, seja $\epsilon = d(x, y)$. Considere $B_1 = (x; \epsilon/2)$ e $B_2 = (y; \epsilon/2)$. Essas bolas são abertas e disjuntas e contém x e y , respectivamente. Logo, X é um espaço de Hausdorff.

Definição 2.5 Dado um subconjunto Y de um espaço topológico X , definimos o **fecho** de Y como sendo o menor fechado de X contendo Y e escrevemos \bar{Y} . Definimos também o **interior** de Y como sendo o maior aberto de X contido em Y e escrevemos $\text{int}(Y)$.

Exemplo 2.9 Seja A um conjunto aberto num espaço topológico X , então $\text{int}(A) = A$. Seja F um conjunto fechado num espaço topológico X , então $\bar{F} = F$. O fecho de $(a, b) \subset \mathbb{R}$ é $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e o interior de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Definição 2.6 O conjunto E_1 **intersecta** um conjunto E_2 , se $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$. Seja X um espaço topológico e $Y \subset X$. Dizemos que Y é **denso** em X se, para todo aberto $U \neq \emptyset$ de X , tem-se $U \cap Y \neq \emptyset$.

Exemplo 2.10 O conjunto dos números racionais \mathbb{Q} e o conjunto dos números irracionais $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos no conjunto dos números reais \mathbb{R} com a topologia usual. Em contrapartida, o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} não é denso em \mathbb{R} .

Proposição 2.2 Seja E um subconjunto de um espaço topológico X .

- (a) Então $x \in \bar{E}$ se, e somente se, toda vizinhança de x intersecta E ;
- (b) Suponha que a topologia em X é gerada por uma base, então $x \in \bar{E}$ se, e somente se, todo elemento básico B contendo x intersecta E .

Topologia do Subespaço e Topologia Produto

Definição 2.7 Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\emptyset \neq Y \subset X$. Dizemos que A é **aberto** em Y , se $A = Y \cap U$, com $U \neq \emptyset$ aberto em X . Sendo Y com a topologia $\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$, dizemos que Y é um **subespaço** de X .

Exemplo 2.11 Seja $Y = (0, 2] \subset \mathbb{R}$. Observe que $(0, 1)$ é aberto em Y , pois $(0, 1) = (0, 1) \cap (0, 2]$. Além disso, $(1, 2]$ é aberto em Y , pois $(1, 2] = (1, 3) \cap (0, 2]$.

Exemplo 2.12 Se A é aberto em $\emptyset \neq Y \subset X$ e Y é aberto em X , então A é aberto em X . Suponha que A é aberto em Y , então existe aberto não vazio U de X tal que $A = Y \cap U$. Como Y e U são abertos em X , então $Y \cap U$ também é um aberto em X , e portanto, A é aberto em X .

Exemplo 2.13 Seja $A \subset Y$ subespaço de X . Denote por \overline{A}^Y o fecho de A em Y . Provemos que $\overline{A}^Y = Y \cap \overline{A}$. Observe que $Y \cap \overline{A}$ é um fechado de Y que contém A . Como \overline{A}^Y é o menor fechado de Y contendo A , segue que $\overline{A}^Y \subset Y \cap \overline{A}$. Por outro lado, sabemos que \overline{A}^Y é um fechado em Y , então existe F fechado em X tal que $\overline{A}^Y = Y \cap F$. Dessa forma, F é um fechado de X que contém A . Como \overline{A} é o menor fechado de X contendo A , segue que $\overline{A} \subset F$. Logo, $Y \cap \overline{A} \subset Y \cap F = \overline{A}^Y$. Portanto, $\overline{A}^Y = Y \cap \overline{A}$.

Proposição 2.3 Se \mathcal{B} uma base na topologia de X e $\emptyset \neq Y \subset X$, então $\mathcal{C} = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ é uma base para a topologia de Y .

Demonstração: Seja A um aberto em Y . Então existe um aberto não vazio U de X tal que $A = Y \cap U$. Seja $x \in A$, então $x \in Y$ e $x \in U$. Logo, existe um aberto básico B de X tal que $x \in B \subset U$. Ou seja, $x \in Y \cap B \subset Y \cap U$. Portanto, \mathcal{C} é uma base para Y . ■

Proposição 2.4 G é um fechado em Y se, e somente se, $G = Y \cap F$ com F um fechado em X .

Definição 2.8 Sejam X e Y espaços topológicos. A topologia **produto** em $X \times Y$ é definida como a topologia gerada pela base $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \text{ é um aberto de } X \text{ e } V \text{ é um aberto de } Y\}$.

Exemplo 2.14 A topologia produto em $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é gerada pelos produtos $(a, b) \times (c, d)$ tais que $(a, b), (c, d) \subset \mathbb{R}$ são intervalos abertos.

Espaços Topológicos Irredutíveis

Definição 2.9 Seja X um espaço topológico e $\emptyset \neq Y \subset X$. Dizemos que Y é **irredutível**, se Y não pode ser escrito como a união $Y = Y_1 \cup Y_2$, com Y_1, Y_2 subconjuntos próprios de Y e Y_1, Y_2 fechados em Y . O conjunto vazio não é considerado irredutível.

Exemplo 2.15 Seja \mathbb{R} com a topologia cofinita, então \mathbb{R} é irredutível. De modo análogo, qualquer conjunto infinito com a topologia cofinita é irredutível. Seja X um espaço topológico irredutível, então todo aberto $\emptyset \neq A \subset X$ é irredutível e denso.

Exemplo 2.16 Seja X um espaço topológico com mais de um elemento com a topologia discreta. Tome $x \in X$ e escreva

$$X = \{x\} \cup \bigcup_{x \neq y \in X} \{y\}.$$

Dessa forma, temos que $\{x\}$ e $\bigcup_{x \neq y \in X} \{y\}$ são fechados próprios de X , logo X não é irredutível.

Proposição 2.5 Seja X um espaço topológico. Se Y é irredutível em X , então \overline{Y} também o é.

Demonstração: Suponha que \overline{Y} não seja irredutível. Assim, existem fechados $F_1, F_2 \subset X$ tais que $\overline{Y} = (F_1 \cap \overline{Y}) \cup (F_2 \cap \overline{Y})$ com $F_1 \cap \overline{Y} \subsetneq \overline{Y}$ e $F_2 \cap \overline{Y} \subsetneq \overline{Y}$. Daí,

$$Y = Y \cap \overline{Y} = Y \cap ((F_1 \cap \overline{Y}) \cup (F_2 \cap \overline{Y})) = ((F_1 \cap \overline{Y}) \cap Y) \cup ((F_2 \cap \overline{Y}) \cap Y)$$

Como $\overline{Y} \subset X$ é um fechado em X , então $F_1 \cap \overline{Y}, F_2 \cap \overline{Y}$ são fechados em X e assim, podemos escrever $Y = (G_1 \cap Y) \cup (G_2 \cap Y)$, onde $G_1 = F_1 \cap \overline{Y}$ e $G_2 = F_2 \cap \overline{Y}$. Suponha que $G_1 \cap Y = Y$. Então $Y \subset G_1 \subsetneq \overline{Y}$. Como \overline{Y} é o menor fechado que contém Y , isso é uma contradição. Analogamente, o mesmo ocorre para $G_2 \cap Y$. Logo, Y não é irredutível. ■

Funções Contínuas

Definição 2.10 Sejam X e Y espaços topológicos. A função $f : X \rightarrow Y$ é **contínua** se para todo subconjunto aberto V de Y , o conjunto $f^{-1}(V)$ é aberto em X .

Exemplo 2.17 Sejam X e Y espaços topológicos. As projeções $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ dadas por $\pi_1((x, y)) = x$ e $\pi_2((x, y)) = y$, respectivamente, são funções contínuas. De fato, seja U um aberto não vazio em X , observe que $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$, que é um aberto em $X \times Y$ com a topologia produto. Analogamente, π_2 também é contínua.

Exemplo 2.18 Seja X um espaço topológico e $\emptyset \neq Y \subset X$. A inclusão $i : Y \hookrightarrow X$ dada por $i(x) = x$ é uma função contínua. De fato, seja U um aberto não vazio de X , temos que $i^{-1}(U) = U \cap Y$, que é um aberto em Y na topologia do subespaço. Em particular, a aplicação identidade é uma função contínua.

Proposição 2.6 Sejam $f : X \rightarrow Y$ função, onde X, Y são espaços topológicos e \mathcal{B} uma base para a topologia em Y . Então f é contínua se $f^{-1}(B)$ é aberto em X para todo $B \in \mathcal{B}$.

Demonstração: Seja $V \subset Y$ um aberto. Então, existem $B_\alpha \in \mathcal{B}$, $\alpha \in I$, tal que

$$V = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

Logo,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha).$$

Como $f^{-1}(B_\alpha)$ é aberto em X para cada $\alpha \in I$, temos que $f^{-1}(V)$ é aberto em X . Portanto, f é contínua. ■

Proposição 2.7 Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ função. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) f é contínua;
- (b) Para todo subconjunto E de X , temos $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$;
- (c) Para todo subconjunto fechado F de Y , o conjunto $f^{-1}(F)$ é fechado em X ;
- (d) Para cada $x \in X$ e cada vizinhança V de $f(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subset V$.

Definição 2.11 Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção. Se f e $f^{-1} : Y \rightarrow X$ são contínuas, então chamaremos f de **homeomorfismo**.

Definição 2.12 (Semicontinuidade Superior) Sejam X um espaço topológico e $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$. Dizemos que f é **semicontínua superiormente** se para cada $x \in X$, existe uma vizinhança U de x tal que para cada $x' \in U$, $f(x') \leq f(x)$.

Exemplo 2.19 A função

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

é semicontínua superiormente, ao passo que

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto \begin{cases} -1, & \text{se } x \geq 0 \\ 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

não é semicontínua superiormente.

2.2 Álgebra Comutativa

Nesta seção revisaremos alguns conceitos de Álgebra imprescindíveis para o desenvolvimento do trabalho. Para isso, usamos como referência principal [5] e como referência auxiliar [23].

Anéis e Homomorfismos de Anéis

Definição 2.13 Um **anel** A é um conjunto com duas operações binárias (adição e multiplicação) tal que

- (1) A é um grupo abeliano com respeito à adição (isto é, A tem um elemento neutro, denotado por 0 , e cada $x \in A$ tem um inverso (aditivo), denotado por $-x$);
- (2) A multiplicação é associativa, isto é, $(xy)z = x(yz)$ e distributiva sobre a adição, ou seja $x(y + z) = xy + xz$ e $(y + z)x = yx + zx$;

Iremos considerar apenas os anéis que são comutativos:

(3) $xy = yx$ para todo $x, y \in A$;

E que tem um elemento unidade (denotado por 1):

(4) $\exists 1 \in A$ tal que $x1 = 1x = x$ para todo $x \in A$.

O elemento unidade é então unicamente determinado.

A partir de agora, sempre que aparecer a palavra “anel”, estaremos nos referindo a um anel comutativo com unidade, isto é, um anel satisfazendo os axiomas (1) ao (4) acima enumerados.

Observação 2.2 Não excluimos a possibilidade em (4) que 1 possa ser igual ao 0. Se isso acontecer, então para qualquer $x \in A$, temos

$$x = x1 = x0 = 0$$

e assim, A tem apenas um elemento, 0. Neste caso, A é o anel zero, denotado por 0, por um certo abuso de notação.

Definição 2.14 Um **homomorfismo de anéis** é uma aplicação f de A em B tal que

i) $f(x+y) = f(x)+f(y)$ (assim, f é um homomorfismo de grupos abelianos, e portanto, também $f(x-y) = f(x) - f(y)$, $f(-x) = -f(x)$ e $f(0) = 0$);

ii) $f(xy) = f(x)f(y)$;

iii) $f(1) = 1$.

Em outras palavras, f respeita a adição, a multiplicação e o elemento unidade.

Definição 2.15 Um subconjunto S de um anel A é um **subanel** de A se S é fechado sob adição e multiplicação e contém o elemento unidade de A .

A aplicação de inclusão de S em A é então um homomorfismo de anéis. Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ são homomorfismo de anéis, então $g \circ f : A \rightarrow C$ também é um homomorfismo de anéis.

Ideais e Anéis Quocientes

Definição 2.16 Um **ideal** I de um anel A é um subconjunto de A que é um subgrupo abeliano e é tal que $AI \subseteq I$ (isto é, dados $x \in A$ e $y \in I$ temos que $xy \in I$). O grupo quociente A/I herda unicamente uma multiplicação definida em A que o transforma em um anel, chamado o **anel quociente (ou anel das classes residuais)** A/I . Os elementos de A/I são classes de I em A , e a aplicação $\phi : A \rightarrow A/I$ que associa cada $x \in A$ à sua classe $x+I$ é um homomorfismo sobrejetor de anéis. De forma mais explícita,

$$A/I = \{\bar{x} = x + I \mid x \in A\}$$

onde $x+I = y+I \iff x-y \in I$, com a multiplicação herdada de A , ou seja, $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$. A aplicação

$$\begin{aligned} \phi : A &\rightarrow A/I \\ x &\mapsto \bar{x} = x + I, \text{ onde } x \in A \end{aligned}$$

é chamada de **projeção canônica** ou **homomorfismo canônico**.

Uma relação muito importante entre o anel A e o anel quociente A/I , é conhecida como o Teorema de Correspondência entre ideais, enunciado abaixo.

Teorema 2.1 (Teorema da Correspondência entre Ideais) Existe uma bijeção que preserva ordem entre os ideais J de A que contém I , e os ideais \bar{J} de A/I , dada por $J = \phi^{-1}(\bar{J})$.

Demonstração: Ver Proposição 1.1, Capítulo 1 de [5]. ■

Se $f : A \rightarrow B$ é qualquer homomorfismo de anéis, o **núcleo** de f ($= f^{-1}(0)$) é um ideal I de A , e a **imagem** de f ($= f(A)$) é um subanel C de B ; e f induz um isomorfismo (homomorfismo bijetor) de anéis $A/I \cong C$. Às vezes usaremos a notação $x \equiv y \pmod{I}$; isto significa que $x - y \in I$.

Divisores de Zero, Elementos Nilpotentes e Invertíveis

Definição 2.17 Um **divisor de zero** em um anel A é um elemento x que “divide 0”, isto é, para o qual existe $y \neq 0$ em A tal que $xy = 0$. Um anel que não tem divisores de zero distinto de 0 (e em que $1 \neq 0$) é chamado um **domínio integral ou domínio de integridade**. Por exemplo, o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} e o anel de polinômios $k[x_1, \dots, x_n]$ (k um corpo e x_i indeterminadas) são domínios integrais.

Definição 2.18 Um elemento $x \in A$ é **nilpotente** se $x^n = 0$ para algum $n > 0$.

Exemplo 2.20 Seja $A = \mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e $x = \bar{2}$. Temos que $\bar{2}^2 = \bar{2}^2 = \bar{4} = \bar{0}$ e portanto, $\bar{2}$ é um nilpotente e um divisor de zero em A .

Proposição 2.8 Seja A um anel. Todo nilpotente de A é um divisor de zero.

Demonstração: O caso $x = 0$ é trivial. Suponha, então, que $x \neq 0$ é nilpotente em A . Assim, existe $n > 1$ tal que $x^n = 0$. Considere $C = \{r \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid x^r = 0\}$. Observe inicialmente que $C \neq \emptyset$, pois $n \in C$. Além disso, C é limitado inferiormente por 2. Pelo Princípio da Boa Ordenação, C tem um elemento minimal. Seja $m \geq 2$ este elemento minimal. Temos que

$$0 = x^m = x^{m-1}x \text{ e } x^{m-1} \neq 0, \text{ uma vez que } m-1 \notin C.$$

A recíproca da Proposição 2.8 acima não é verdadeira como nos mostra o exemplo abaixo. ■

Exemplo 2.21 Considere A o anel das funções $f : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$. Provemos que A tem elementos divisores de zero que não são nilpotentes. Para tanto, sejam $f_1 : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2 : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = 1$, $f_2(0) = 1$ e $f_2(1) = 0$. Observe que $f_1 f_2 = 0$, com $f_1, f_2 \neq 0$. Porém, como $f_1^n = f_1$, temos que não existe nenhum n de tal modo que $f_1^n = 0$. Assim, f_1 é um divisor de zero, mas não é nilpotente.

Definição 2.19 Um **invertível** em A é um elemento x que “divide 1”, isto é, um elemento x tal que $xy = 1$ para algum $y \in A$. O elemento y é então unicamente determinado por x , e denotado por x^{-1} . Os invertíveis em A formam um grupo abeliano com respeito à multiplicação.

Definição 2.20 Os múltiplos ax de um elemento $x \in A$ formam um **ideal principal**, denotado por (x) ou Ax . Assim,

$$x \text{ é um invertível} \iff (x) = A = (1).$$

O ideal zero (0) é geralmente denotado por 0 .

Definição 2.21 Um ideal I de A é dito **principal** se ele é gerado por um único elemento $a \in A$, ou seja, $I = (a)$, isto significa que: se $a = xy$ então x ou y é um invertível em A . Dizemos que A é um **anel principal** se todo ideal de A é principal.

Definição 2.22 Um **corpo** é um anel A em que $1 \neq 0$ e cada elemento não nulo é um invertível. Assim, todo corpo é um domínio integral (mas não vale a recíproca: \mathbb{Z} é um domínio que não é um corpo, pois seus únicos invertíveis são 1 e -1).

Exemplo 2.22 Seja k um corpo algebricamente fechado, ou seja, todo polinômio em $k[x]$ de grau não nulo possui (pelo menos) uma raiz em k , onde $k[x]$ denota o anel de polinômios na variável x com coeficientes em k . O anel de polinômios em uma variável $A = k[x]$ é um anel principal. De fato, como k é algebricamente fechado, os únicos elementos irredutíveis de $k[x]$ são os polinômios de grau 1. Logo, considere um ideal $I = (f, g) \subset k[x]$ gerado por dois elementos irredutíveis $f = a_0 + a_1x$ e $g = b_0 + b_1x$, então temos que

$$\begin{aligned} b_1f - a_1g &= b_1(a_0 + a_1x) - a_1(b_0 + b_1x) \\ &= b_1a_0 + b_1a_1x - a_1b_0 - a_1b_1x \\ &= b_1a_0 - a_1b_0. \end{aligned}$$

Note que $b_1f - a_1g \in I$, mas $b_1f - a_1g = b_1a_0 - a_1b_0$ é uma constante. Como k é um corpo, existe $c \in k$ tal que $(b_1f - a_1g)c = 1$. Como $f, g \in I$, temos que $1 \in I$. Isso implica que $I = (1)$, logo $I = (1) = A = k[x]$ é principal. Portanto, $k[x]$ é um anel principal. Já no anel de polinômios em duas variáveis $k[x, y]$, o ideal $(x + 1, y - 1) \subset k[x, y]$ não é principal, pois não pode ser gerado por um único elemento.

Proposição 2.9 Seja A um anel não nulo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) A é um corpo.
- (b) os únicos ideais em A são 0 e $(1) = A$.
- (c) todo homomorfismo de A em B (um anel $\neq 0$) é injetor.

Demonstração: Ver Proposição 1.2, Capítulo 1 de [5]. ■

Ideais Primos e Ideais Maximais

Definição 2.23 Um ideal p em A é **primo** se $p \neq (1)$ e sempre que $xy \in p$ tivermos $x \in p$ ou $y \in p$. Um ideal m em A é **maximal** se $m \neq (1)$ e se não existe nenhum ideal I tal que $m \subsetneq I \subsetneq (1)$. Um anel A é dito um **anel local**, se A possui apenas um ideal maximal. O corpo $k = A/m$ é chamado o **corpo residual** de A . Um anel com apenas um número finito de ideais maximais é chamado **semi-local**.

Exemplo 2.23 Seja $A = \mathbb{Z}$, então todo ideal da forma (p) com $p \in \mathbb{Z}$, p um número primo, é primo e maximal. De fato, sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $ab \in (p)$. Assim, p divide ab . Como p é primo, então p divide a ou p divide b , noutras palavras, $a \in (p)$ ou $b \in (p)$. Portanto, (p) é um ideal primo. Para ver que (p) é também um ideal maximal, suponha que exista $d \in \mathbb{Z}$ tal que $(p) \subsetneq (d) \subset \mathbb{Z}$ e tome $x \in (d) \setminus (p)$. Dessa forma, p não divide x , em outras palavras, x não é um múltiplo de p . Porém, p é primo, assim $m.d.c.(p, x) = 1$. Isto significa que, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $\alpha p + \beta x = 1$. Como $(p) \subset (d)$ e $x \in (d)$, devemos ter $1 = \alpha p + \beta x \in (d)$, logo $(d) = \mathbb{Z}$. Portanto, (p) é um ideal maximal.

Exemplo 2.24 Seja $I = 6\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Observe que $2 \cdot 3 = 6 \in I$, mas $2, 3 \notin I$, isto implica que I não é primo. Note também que I não é maximal, pois $I \subsetneq 3\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$. Seja k um corpo, então os únicos ideais de k são (0) e k . Logo, (0) é ideal maximal de k e portanto, k é um anel local. Por fim, considere o anel de polinômios em uma variável $k[x]$. Nesse anel, os ideais (x) e $(x + 1)$ são maximais, logo $k[x]$ não é um anel local.

Exemplo 2.25 No anel de polinômios $A = k[x]$, um ideal é primo se, e somente se, ele é gerado por um elemento irredutível. Por exemplo, o ideal gerado por $(x^2 - 4)$ não é primo, pois $(x + 2), (x - 2) \notin (x^2 - 4)$ mas $(x + 2)(x - 2) \in (x^2 - 4)$.

Proposição 2.10 O ideal (0) é primo se, e somente se, A é um domínio integral.

Demonstração: De fato, se (0) é primo, então dados $a, b \in A$ tais que $ab = 0 \in (0)$ temos que $a \in (0)$ ou $b \in (0)$. Logo, $a = 0$ ou $b = 0$. Portanto, A é um domínio integral. Por outro lado, suponha que A seja um domínio integral e considere $a, b \in A$ tais que $ab \in (0)$. Assim, $ab = 0$. Como A é um domínio integral, devemos ter $a = 0 \in (0)$ ou $b = 0 \in (0)$. Portanto, (0) é um ideal primo. ■

Proposição 2.11 Seja A um anel. Todo ideal maximal de A é primo.

Demonstração: Seja m um ideal maximal de A e sejam $a, b \in A$ tais que $ab \in m$. Suponha que $a \notin m$ e provemos que $b \in m$. Considere o ideal $I = m + (a)$. Como $a \in I \setminus m$ e m é um ideal maximal, temos que $m + (a) = A$. Assim, existem $\alpha \in A$ e $\beta \in m$ tais que $1 = \beta + \alpha a$ e daí, multiplicando por b , obtemos que $b = \beta b + \alpha ab \in m$. Portanto, m é primo. ■

A recíproca da Proposição 2.11 acima não é válida como nos mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 2.26 Considere o ideal $(0) \subset \mathbb{Z}$. Como \mathbb{Z} é um domínio integral, temos que (0) é primo. Porém, observe que (0) não é maximal, pois $(0) \subsetneq 2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$.

Se $f : A \rightarrow B$ é um homomorfismo e q é um ideal primo em B , então $f^{-1}(q)$ é um ideal primo em A . De fato, sejam $a, b \in A$ tais que $ab \in f^{-1}(q)$. Daí, temos que $f(ab) \in q$. Como f é um homomorfismo, segue que $f(ab) = f(a)f(b)$. Logo, temos que $f(a)f(b) = f(ab) \in q$. Como q é um ideal primo, segue que $f(a) \in q$ ou $f(b) \in q$ e portanto, $a \in f^{-1}(q)$ ou $b \in f^{-1}(q)$. Além disso, poderíamos ter argumentado também que $A/f^{-1}(q)$ é isomorfo a um subanel de B/q e assim não tem divisores de zero não nulos.

Porém, se n é um ideal maximal de B , não é necessariamente verdade que $f^{-1}(n)$ é maximal em A . Por exemplo, seja $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ o homomorfismo “inclusão” de anéis. Como \mathbb{Q} é um corpo, o ideal (0) de \mathbb{Q} é maximal. Como f é injetor (porque é a inclusão), segue

que o ideal $f^{-1}(0) = \ker(f) = (0)$. Porém, (0) não é um ideal maximal em \mathbb{Z} , porque \mathbb{Z} não é um corpo. Por outro lado, como \mathbb{Z} é um domínio integral, então $(0) = f^{-1}(0)$ é um ideal primo em \mathbb{Z} .

Proposição 2.12 Seja A um anel. Temos que

- (a) A/p é um domínio integral se, e somente se, p é primo;
- (b) A/m é um corpo se, e somente se, m é maximal.

Demonstração:

- (a) Suponha que A/p seja um domínio integral e sejam $a, b \in A$ tais que $ab \in p$. Assim, $\overline{ab} = \overline{a} \overline{b} = \overline{0}$. Como A/p é um domínio integral, devemos ter $\overline{a} = \overline{0}$ ou $\overline{b} = \overline{0}$. Logo, $a \in p$ ou $b \in p$ e portanto, p é um ideal primo. Reciprocamente, suponha que p seja um ideal primo e tome $a, b \in A$ de modo que $\overline{ab} = \overline{0}$, logo $ab \in p$. Como p é primo, segue que $a \in p$ ou $b \in p$ e portanto, $\overline{a} = \overline{0}$ ou $\overline{b} = \overline{0}$ e assim, A/p é um domínio integral.
- (b) Suponha que A/m seja um corpo e suponha que $m \subsetneq I \subset A$. Tome $x \in I \setminus m$. Assim, $\overline{x} \neq \overline{0}$. Como A/m é corpo, existe $y \in A \setminus m$ tal que $\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{1}$. Com efeito, $1 - xy \in m \subset I$. Porém, $xy \in I$ implica que $1 \in I$ e assim, $I = A$. Portanto, m é maximal. Reciprocamente, suponha que m seja maximal e seja $x \in A$ tal que $\overline{x} \neq \overline{0}$. Assim, $x \notin m$ e daí, $m + (x) = A$, pois m é maximal. Dessa forma, existem $\alpha \in m$ e $\beta \in A \setminus m$ tais que $\alpha + \beta x = 1$. Passando para o quociente A/m , temos que

$$\overline{1} = \overline{\alpha + \beta x} = \overline{\alpha} + \overline{\beta x} = \overline{\beta x} = \overline{\beta} \cdot \overline{x}.$$

Portanto, A/m é um corpo. ■

Observação 2.3 Seja A um anel tal que para todo $x \in A$ existe $n > 1$ tal que $x^n = x$. Neste caso, todo ideal primo de A é maximal. De fato, seja $p \subset A$ um ideal primo. Pelo item (b) da Proposição 2.12 acima, é suficiente mostrar que A/p é um corpo, pois isto equivale a dizer que p é maximal. Seja $x \in A \setminus p$. Assim, existe $n > 1$ tal que $x^n = x$. Daí,

$$\overline{x} = \overline{x^n} = \overline{x \cdot x^{n-1}} = \overline{x} \cdot \overline{x^{n-1}} = \overline{x} \cdot \overline{x^{n-1}} \Rightarrow \overline{x}(\overline{1} - \overline{x^{n-1}}) = \overline{0}.$$

Como p é primo, pelo item (a) da Proposição 2.12 acima, temos que A/p é um domínio integral, como $\overline{x} \neq \overline{0}$, devemos ter $\overline{1} - \overline{x^{n-1}} = \overline{0}$, implicando que $\overline{1} = \overline{x^{n-1}}$. Portanto, $\overline{x^{n-2}} \cdot \overline{x} = \overline{1}$. Como $n \geq 2$, então $n - 2 \geq 0$ e daí \overline{x} é invertível, o que mostra que A/p é um corpo.

Exemplo 2.27 Considere o anel $A_1 = k[x, y]/(x, y^2)$. Observe que

$$A_1 = \{a + b\overline{y} \mid a, b \in k\} \cong k[y]/(y^2).$$

Agora, note que $y \notin (x, y^2)$, mas $y \cdot y = y^2 \in (x, y^2)$. Portanto, o ideal (x, y^2) não é primo e A_1 não é um domínio.

Exemplo 2.28 Considere $A_2 = k[x, y]/(x^2, y^2)$. Observe que o ideal (x^2, y^2) não é primo em $k[x, y]$, uma vez que $x \cdot x = x^2 \in (x^2, y^2)$ mas $x \notin (x^2, y^2)$, pois para todo polinômio não nulo $f \in (x^2, y^2)$ temos que $\deg f \geq 2$ e $\deg x = 1$. Assim, A_2 não é um domínio.

Os ideais primos são de suma importância em Álgebra Comutativa, o teorema a seguir garante a existência de ideais maximais (e portanto, primos).

Teorema 2.2 Todo anel não nulo A possui pelo menos um ideal maximal.

Demonstração: Ver Teorema 1.3, Capítulo 1 de [5]. ■

Corolário 2.1 Se $I \neq (1)$ é um ideal de A , então existe um ideal maximal J de A tal que $I \subset J$.

Demonstração: Ver Corolário 1.4, Capítulo 1 de [5]. ■

Corolário 2.2 Todo não invertível de A está contido em um ideal maximal.

Demonstração: Ver Corolário 1.5, Capítulo 1 de [5]. ■

Proposição 2.13

- (a) Sejam A um anel e $m \neq (1)$ um ideal de A tais que todo $x \in A \setminus m$ é um invertível em A . Então A é um anel local e m é seu ideal maximal.
- (b) Sejam A um anel e m um ideal maximal de A , tais que todo elemento de $1 + m$ (isto é, todo $1 + x$, onde $x \in m$) é um invertível em A . Então A é um anel local.

Demonstração: Ver Proposição 1.6, Capítulo 1 de [5]. ■

Nilradical e Radical de Jacobson de um Anel

Definição 2.24 O conjunto $N(A)$ de todos os elementos nilpotentes, ou seja, os elementos $x \in A$ tais que $x^n = 0$ para algum $n > 0$ em A é chamado o **nilradical** de A .

Proposição 2.14 O nilradical de A é um ideal de A e $A/N(A)$ não possui elemento nilpotente diferente $\neq 0$.

Demonstração: Ver Proposição 1.7, Capítulo 1 de [5]. ■

A proposição seguinte dá uma definição alternativa para o nilradical de um anel.

Proposição 2.15 O nilradical de A é a interseção de todos os ideais primos de A .

Demonstração: Ver Proposição 1.8, Capítulo 1 de [5]. ■

Observação 2.4 Se A é um domínio integral, então $N(A) = (0)$. De fato, se A é domínio integral, então (0) é um ideal primo de A . Daí

$$N(A) = \bigcap_{p \subset A \text{ ideal primo}} p = (0).$$

Exemplo 2.29 Considere os seguintes anéis:

$$A_3 = k[x, y]/(xy) \text{ e } A_4 = k[x, y]/(x^2).$$

Note que A_3 não é um domínio integral, pois xy não é irredutível e portanto (xy) não é primo. A_4 também não é domínio, pois x^2 não é irredutível e isso implica que o ideal (x^2) não é primo. Observe que \bar{x} é um nilpotente em A_4 , pois $\bar{x}^2 = \overline{x^2} = \bar{0}$. Além disso, A_3 não possui nilpotentes. De fato, seja $f \in k[x, y]$ tal que $\bar{f}^n = \overline{f^n} = \bar{0} \in A_1$. Assim, $f^n \in (xy)$. Daí, $f^n = (xy)g$ para algum $g \in k[x, y]$. Dessa forma, $x|f^n$ e $y|f^n$. Logo, $x|f$ e $y|f$. Com efeito, $xy|f$. Isto, por sua vez, implica que $\bar{f} = \bar{0} \in k[x, y]/(xy)$. Observe que $N(A_3) = (0)$ mas ele não é primo, uma vez que A_3 não é um domínio integral. Observe ainda que $N(A_4) = (\bar{x})$ é primo pela Proposição 2.12, pois $A_4/(\bar{x}) \cong k[y]$ que é um domínio integral.

Exemplo 2.30 Considere o anel $A_5 = k[x, y]/(x, y)$. Afirmamos que o ideal (x, y) é maximal em $k[x, y]$. De fato, suponha que (x, y) não seja maximal. Então existe um ideal $I \subset k[x, y]$ tal que $(x, y) \subsetneq I$. Observe que (x, y) contém todos os polinômios de $k[x, y]$ que não possuem o termo constante. Assim, existe $c \in I \cap k \setminus \{0\}$ e $c \notin (x, y)$. Mas, como c é invertível, então $I = k[x, y]$ e daí A_5 é um corpo. Outra forma, poderíamos argumentar que $k[x, y]/(x, y) \cong k$ e k é um corpo. Como A_5 é um corpo, então devemos ter $N(A_5) = (0)$ primo pela Proposição 2.12.

Definição 2.25 O radical de Jacobson $J(A)$ de A é definido como sendo a interseção de todos os ideais maximais de A , e pode ser caracterizado como segue.

Proposição 2.16 $x \in J(A) \iff 1 - xy$ é um invertível em A para todo $y \in A$.

Demonstração: Ver Proposição 1.9, Capítulo 1 de [5]. ■

Operações em Ideais

Se I e J são ideais em um anel A , sua soma $I + J$ é o conjunto de todos os $x + y$, onde $x \in I$ e $y \in J$. Este é o menor ideal contendo I e J . Mais geralmente, podemos definir a soma $\sum_{\alpha} I_{\alpha}$ de uma família qualquer de ideais I_{α} de A ; seus elementos são todas as somas $\sum_{\alpha} x_{\alpha}$, onde $x_{\alpha} \in I_{\alpha}$ para todo α e quase todos os x_{α} (isto é, exceto num conjunto finito) são zero. Este é o menor ideal de A que contém todos os ideais I_{α} .

A interseção de qualquer família (I_{α}) de ideais é um ideal. Portanto os ideais de A formam uma cadeia finita com respeito à inclusão.

O produto de dois ideais I e J em A é o ideal IJ gerado por todos os produtos xy , onde $x \in I$ e $y \in J$. Este é o conjunto de todas as somas finitas $\sum_{\alpha} x_{\alpha}y_{\alpha}$ onde cada $x_{\alpha} \in I$ e $y_{\alpha} \in J$. Similarmente, podemos definir o produto de qualquer família finita de ideais. Em particular, as potências I^n ($n > 0$) de um ideal I estão definidas. Por convenção, $I^0 = (1) = A$. Portanto, I^n ($n > 0$) é o ideal gerado por todos os produtos $x_1x_2 \cdots x_n$ onde cada fator x_i pertence à I .

Exemplo 2.31

- (a) Se $A = \mathbb{Z}$, $I = (m)$, $J = (n)$, então $I + J$ é o ideal gerado pelo máximo divisor comum de m e n ; $I \cap J$ é o ideal gerado pelo mínimo múltiplo comum de m e n ; e $IJ = (mn)$. Portanto, neste caso, $IJ = I \cap J \iff m, n$ são coprimos (isto é, $m.d.c.(m, n) = 1$).
- (b) Se $A = k[x_1, \dots, x_n]$, $I = (x_1, \dots, x_n)$ (o ideal gerado por x_1, \dots, x_n). Então I^m é o conjunto de todos os polinômios sem termos de grau menor que m .

As três operações até agora definidas (soma, interseção e produto) são todas comutativas e associativas. Também existe a Lei Distributiva: $I(J + L) = IJ + IL$. No anel \mathbb{Z} , \cap e $+$ são distributivas uma sobre a outra. Em geral, este não é o caso, e o melhor que temos nesta direção é a Lei Modular: $I \cap (J + L) = I \cap J + I \cap L$ se $I \supseteq J$ ou $I \supseteq L$. Novamente, em \mathbb{Z} , temos $(I + J)(I \cap J) = IJ$; mas em geral, temos apenas $(I + J)(I \cap J) \subseteq IJ$ (pois, $(I + J)(I \cap J) = I(I \cap J) + J(I \cap J) \subseteq IJ$). Claramente, $IJ \subseteq I \cap J$, assim $I \cap J = IJ$ (pois $I \cap J \subseteq IJ$) desde que $I + J = (1) = A$.

Definição 2.26 Dois ideais I e J são **coprimos (ou comaximais)** se $I + J = (1) = A$. Portanto, para ideais coprimos temos $I \cap J = IJ$. Certamente dois ideais, I e J são coprimos se, e somente se, existe $x \in I$ e $y \in J$ tais que $x + y = 1$.

Definição 2.27 Sejam A_1, \dots, A_n anéis. Definimos o **produto direto** $A = \prod_{i=1}^n A_i$ sendo o conjunto de todas as sequências $x = (x_1, \dots, x_n)$ tais que $x_i \in A_i$ ($1 \leq i \leq n$) e adição e multiplicação componente a componente. O anel A é um anel comutativo cuja unidade é o elemento $(1, \dots, 1)$. Temos projeções $p_i : A \rightarrow A_i$ definidas por $p_i(x) = x_i$ que são homomorfismos de anéis.

Definição 2.28 Seja A um anel e I_1, \dots, I_n ideais de A . Definimos um homomorfismo de anéis $\phi : A \rightarrow \prod_{i=1}^n (A/I_i)$ pela lei $\phi(x) = (x + I_1, \dots, x + I_n)$.

Proposição 2.17

- (a) Se I_i e I_j são coprimos sempre que $i \neq j$, então $\prod I_i = \bigcap I_i$.
- (b) ϕ é sobrejetiva $\iff I_i$ e I_j são coprimos sempre que $i \neq j$.
- (c) ϕ é injetiva $\iff \bigcap I_i = (0)$.

Demonstração: Ver Proposição 1.10, Capítulo 1 de [5]. ■

Proposição 2.18

- (a) Sejam p_1, \dots, p_n ideais primos e seja I um ideal contido em $\bigcup_{i=1}^n p_i$. Então, $I \subseteq p_i$ para algum i .
- (b) Sejam I_1, \dots, I_n ideais e seja p um ideal primo contendo $\bigcap_{i=1}^n I_i$. Então, $p \supseteq I_i$ para algum i . Se $p = \bigcap I_i$, então $p = I_i$ para algum i .

Demonstração: Ver Proposição 1.11, Capítulo 1 de [5]. ■

Se I e J são ideais em um anel A , definimos o quociente de ideais como sendo

$$(I : J) = \{x \in A \mid xJ \subseteq I\}$$

que também é um ideal de A . De modo particular, $(0 : J)$ é chamado o aniquilador de J e também é denotado por $\text{Ann}(J)$, este é o conjunto de todos os $x \in A$ tais que $xJ = 0$. Nesta notação, o conjunto de todos os divisores de zero em A é $D(A) = \bigcup_{x \neq 0} \text{Ann}(x)$. Se J é um ideal principal, digamos $J = (x)$, escrevemos muitas vezes $(I : x)$ em vez de $(I : (x))$.

Exemplo 2.32 Se $A = \mathbb{Z}$, $I = (m)$ e $J = (n)$, onde, digamos que $m = \prod_p \rho^{\mu_p}$ e $n = \prod_p \rho^{\nu_p}$, então $(I : J) = (q)$ onde $q = \prod_p \rho^{\gamma_p}$ e $\gamma_p = \max\{\mu_p - \nu_p, 0\} = \mu_p - \min\{\mu_p, \nu_p\}$. Assim, $q = m/(m, n)$, onde (m, n) é o máximo divisor comum de m e n .

Definição 2.29 Seja I um ideal de um anel A , definimos o **radical** de I , como sendo

$$r(I) = \{x \in A \mid x^n \in I \text{ para algum inteiro } n > 0\}.$$

Dizemos que um ideal I é **radical** quando $I = r(I)$. Se $\phi : A \rightarrow A/I$ é o homomorfismo canônico, então $r(I) = \phi^{-1}(N(A/I))$ e assim, $r(I)$ é um ideal.

Exemplo 2.33 Considere o ideal $(x^2) \subset k[x]$ e provemos que $r((x^2)) = (x)$ e portanto, (x^2) é um ideal que não é radical. De fato, dado $y \in (x)$, existe $\alpha \in k[x]$ tal que $y = \alpha x$ e portanto, $y^2 = (\alpha x)^2 = \alpha^2 x^2 \in (x^2)$. Por outro lado, se $y \in r((x^2))$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y^n \in (x^2) \subset (x)$. Como (x) é um ideal primo, segue que $y \in (x)$. Além disso, claramente $(x) \neq (x^2)$, uma vez que $x \in (x)$ e $x \notin (x^2)$.

Proposição 2.19 Seja A um anel. Se p é um ideal primo em A , então p é radical.

Demonstração: Claramente, temos que $p \subset r(p)$. Por outro lado, se $x \in r(p)$, então existe $n > 0$ inteiro tal que $x^n \in p$. Como p é um ideal primo, devemos ter $x \in p$. Portanto, $p = r(p)$ e p é um ideal radical. ■

Proposição 2.20 O radical de um ideal I é a interseção de todos os ideais primos que contém I .

Demonstração: Ver Proposição 1.14, Capítulo 1 de [5]. ■

Proposição 2.21 O conjunto dos divisores de zero de A , pode ser expresso como

$$D(A) = \bigcup_{x \neq 0} r(\text{Ann}(x)).$$

Demonstração: Ver Proposição 1.15, Capítulo 1 de [5]. ■

Proposição 2.22 Sejam I e J ideais em um anel A tais que $r(I)$ e $r(J)$ são coprimos. Então, I e J são coprimos.

Demonstração: Ver Proposição 1.15, Capítulo 1 de [5]. ■

Extensão e Contração

Seja $f : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Se I é um ideal em A , o conjunto $f(I)$ não é necessariamente um ideal em B (por exemplo, considere f o mergulho dos inteiros \mathbb{Z} em \mathbb{Q} , o corpo dos racionais, e tome qualquer ideal I não nulo em \mathbb{Z}). Definimos a extensão I^e como sendo o ideal gerado por $Bf(I)$, ou seja, o ideal gerado por $f(I)$ em B , explicitamente, I^e é o conjunto de todas as somas $\sum_{\alpha} y_{\alpha} f(x_{\alpha})$ onde $x_{\alpha} \in I$ e $y_{\alpha} \in B$.

Se J é um ideal de B , então $f^{-1}(J)$ é sempre um ideal em A , chamado a contração de J e denotado por J^c . Se J é um ideal primo, então J^c também é primo. Se I é primo, I^e não é necessariamente um ideal primo (por exemplo, $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, $I \neq (0)$, então $I^e = \mathbb{Q}$, que não é um ideal primo). Podemos fatorar f como segue:

$$A \xrightarrow{p} f(A) \xrightarrow{j} B$$

onde p é sobrejetiva e j é injetiva. Um exemplo clássico provém da teoria de números algébricos.

Exemplo 2.34 Considere $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[i]$, onde $i = \sqrt{-1}$. Um ideal primo p de \mathbb{Z} pode ou não ser primo quando estendido para $\mathbb{Z}[i]$. Na verdade, $\mathbb{Z}[i]$ é um domínio de ideais principais porque ele é um domínio euclidiano, isto é, um domínio de integridade onde o Algoritmo de Euclides é válido) e a situação é como segue:

- (a) $(2)^e = ((1+i)^2)$, o quadrado de um ideal primo em $\mathbb{Z}[i]$;
- (b) Se $p \equiv 1 \pmod{4}$, então p^e é o produto de dois ideais primos distintos (por exemplo, $(5)^e = (2+i)(2-i)$);
- (c) Se $p \equiv 3 \pmod{4}$, então p^e é primo em $\mathbb{Z}[i]$.

Destes, (b) não é um resultado trivial. Ele é efetivamente equivalente ao Teorema de Fermat que diz que um primo $p \equiv 1 \pmod{4}$ pode ser expresso, essencialmente unicamente como a soma de dois quadrados de inteiros (por exemplo, $5 = 2^2 + 1^2$, $97 = 9^2 + 4^2$, etc.).

Na verdade, o comportamento de ideais primos sob extensões desse tipo é um dos problemas centrais da teoria de números algébricos.

Proposição 2.23 Sejam $f : A \rightarrow B$, I e J como antes. Então

- (a) $I \subseteq I^{ec}$ e $J \supseteq J^{ce}$;
- (b) $J^c = J^{cec}$ e $I^e = I^{ece}$;
- (c) Se C é o conjunto dos ideais contrações em A e E é o conjunto dos ideais extensões em B , então $C = \{I \mid I^{ec} = I\}$ e $E = \{J \mid J^{ce} = J\}$. Além disso, $I \mapsto I^e$ é uma aplicação bijetiva de C em E , cuja inversa é $J \mapsto J^c$. Mais ainda, o conjunto dos ideais E é fechado sob soma e produto, e C é fechado sob as outras três operações.

Demonstração: Ver Proposição 1.17, Capítulo 1 de [5].

■

Módulos e Sequências Exatas

Definição 2.30 Seja A um anel. Um A -módulo é um par (M, μ) onde M é um grupo abeliano e $\mu : A \times M \rightarrow M$ é uma aplicação tal que $\mu(a, m) = am$ e, para todo $a, b \in A$ e $m, n \in M$ satisfaz:

- (a) $a(m + n) = am + an$;
- (b) $(a + b)m = am + bm$;
- (c) $(ab)m = a(bm)$;
- (d) $1m = m$.

Exemplo 2.35 Um ideal I de A é um A -módulo. Em particular, A é um A -módulo. Se $A = k$ é um corpo, então um A -módulo é um k -espaço vetorial. Se $A = \mathbb{Z}$ então um A -módulo é um grupo abeliano, onde definimos $nm = m + \dots + m$. Se $A = k[x]$ onde k é um corpo, então um A -módulo é um k -espaço vetorial com uma transformação linear.

Definição 2.31 Sejam M e N dois A -módulos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é um A -homomorfismo se, para todo $a \in A$ e $m_1, m_2 \in M$, tivermos:

- (a) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$;
- (b) $f(am_1) = af(m_1)$.

Dessa forma, f é um homomorfismo de grupos abelianos que comuta com a ação de cada $a \in A$. Além disso, a composição de A -homomorfismos de A -módulos é um A -homomorfismo.

Definição 2.32 Seja M um A -módulo. Um **submódulo** M' de M é um subgrupo de M que é fechado com relação a multiplicação por elementos de A . O grupo abeliano M/M' herda uma estrutura de A -módulo de M , definida por $a(m + M') = am + M'$. Logo, chamaremos M/M' de um **A -módulo quociente** de M por M' .

Pelo Teorema da Correspondência entre Ideais 2.1, uma vez que um ideal pode ser visto como um A -módulo, podemos afirmar que a projeção canônica $\pi : M \rightarrow M/M'$ é um A -homomorfismo que induz uma correspondência biunívoca que preserva ordem (no sentido da inclusão \subset), entre submódulos de M que contém M' e submódulos de M/M' .

Definição 2.33 Seja $f : M \rightarrow N$ é um A -homomorfismo, definimos o **núcleo** de f como sendo o conjunto $\ker(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ e a **imagem** de f como sendo o conjunto $Im(f) = f(M) = \{y \in N \mid y = f(x) \text{ para algum } x \in M\}$.

Observação 2.5 O $\ker(f)$ é um submódulo de M e $Im(f)$ é um submódulo de N .

Definição 2.34 O **conúcleo** de f é um módulo quociente de N definido como

$$\text{co ker}(f) := \frac{N}{Im(f)}.$$

Se m é um elemento de M , o conjunto de todos os múltiplos de m definido por $\{am \mid a \in A \text{ e } m \in M\}$, é um submódulo de M , denotado por Am ou (m) . Se um módulo $M = \sum_{i \in I} Am_i$ dizemos que os m_i 's formam um **conjunto de geradores** de M , isto significa que todo elemento de M pode ser expresso (não necessariamente de forma única) como uma combinação linear finita dos m_i 's com coeficientes em A . Um A -módulo é dito **finitamente gerado** se ele tem um conjunto finito de geradores.

Definição 2.35 Se $(M_i)_{i \in I}$ é uma família de A -módulos, podemos definir a **soma direta** $\bigoplus_{i \in I} M_i$, seus elementos são $(m_i)_{i \in I}$ tais que $m_i \in M_i$, para cada $i \in I$, e quase todos x_i são 0 (exeto uma quantidade finita).

Definição 2.36 Um anel A é dito um **anel graduado** com uma família $\{A_n\}_{n \geq 0}$ de subgrupos aditivos de A , se $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ e $A_m A_n \subset A_{m+n}$ para todo $m, n \geq 0$.

Definição 2.37 Um A -módulo **livre** é um A -módulo isomorfo a $\bigoplus_{i \in I} M_i$, onde cada M_i é isomorfo a A como um A -módulo. Um A -módulo **livre finitamente gerado** é isomorfo a $A^n = A \oplus \dots \oplus A$, para algum $n > 0$.

Definição 2.38 Uma sequência de A -módulos e A -homomorfismos

$$\dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \dots$$

é dita **exata** em M_i se $Im(f_i) = ker(f_{i+1})$. A sequência é exata se é exata em cada M_i .

Observação 2.6 Em particular:

- (a) $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ é exata $\Leftrightarrow f$ é injetora;
- (b) $M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ é exata $\Leftrightarrow g$ é sobrejetora;
- (c) $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ é exata $\Leftrightarrow f$ é injetora, g é sobrejetora e $Im(f) = ker(g)$.

Uma sequência do tipo (c) é chamada de **sequência exata curta**. Toda sequência exata longa pode ser dividida em sequências exatas curtas.

Exemplo 2.36 Considere a sequência de A -módulos

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A/I \longrightarrow 0$$

onde I é um ideal de A , f é a aplicação inclusão e g a projeção canônica. Dessa forma, essa sequência é exata.

Definição 2.39 Sejam M, N e P três A -módulos, Uma aplicação $f : M \times N \rightarrow P$ é chamada **A -bilinear** se, para todo $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $a \in A$, ela satisfaz:

- (a) $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$

- (b) $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$
(c) $f(am, n) = f(m, an) = af(m, n)$

Proposição 2.24 Sejam M e N A -módulos. Então existe um A -módulo T junto com uma aplicação A -bilinear $g : M \times N \rightarrow T$ com as seguintes propriedades:

- (a) Dados um A -módulo P e uma aplicação A -bilinear $f : M \times N \rightarrow P$, existe um único A -homomorfismo $f' : T \rightarrow P$ tal que $f = f' \circ g$.
(b) Se (T, g) e (T', g') são dois pares que satisfazem essa propriedade, então existe um único isomorfismo $j : T \rightarrow T'$ tal que $j \circ g = g'$.

Demonstração: Ver Proposição 2.12, Capítulo 2 de [5]. ■

O módulo T construído na proposição anterior é chamado de **produto tensorial** de M e N , e será denotado por $M \otimes_A N$. O produto tensorial $M \otimes_A N$ é gerado pelos elementos $m \otimes n$, onde $m \in M$ e $n \in N$, chamaremos um elemento deste tipo de **tensor elementar**. Se $(m_i)_{i \in I}$ e $(n_j)_{j \in J}$ são famílias de geradores de M e N , respectivamente, então os elementos $m_i \otimes n_j$ geram $M \otimes_A N$. Em particular, se M e N são finitamente gerados então $M \otimes_A N$ também é.

Proposição 2.25 Seja

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A -módulos e A -homomorfismo, e seja N um A -módulo qualquer. Então a sequência

$$M' \otimes N \xrightarrow{f} M \otimes N \xrightarrow{g} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração: Ver Proposição 2.18, Capítulo 2 de [5]. ■

O **funtor** $T_N : M \mapsto M \otimes_A N$ na categoria de A -módulos não é, em geral, exato. Se T_N é exato significa que o tensor com N transforma todas as sequências exatas em sequências exatas, então N é dito ser um **A -módulo plano**.

Proposição 2.26 Seja N um A -módulo, as afirmações a seguir são equivalentes:

- (a) N é plano.
(b) Se $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ uma sequência de A -módulos exata, então a sequência tensorizada

$$0 \rightarrow M' \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N \rightarrow 0$$

é exata.

- (c) Se $f : M' \rightarrow M$ é injetora, então $f \otimes 1 : M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$ é injetora.
(d) Se $f : M' \rightarrow M$ é injetora e M, M' são finitamente gerados, então $f \otimes 1 : M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$ é injetora.

Demonstração: Ver Proposição 2.19, Capítulo 2 de [5]. ■

Definição 2.40 Seja $f : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Se $a \in A$ e $b \in B$ definimos o produto $ab := f(a)b$. Logo, B tem estrutura de A -módulo e estrutura de anel. Chamamos o anel B equipado com sua estrutura de A -módulo de A -álgebra.

Anéis de Frações e Localização

Definição 2.41 Sejam A um anel e $S \subset A$ um subconjunto não vazio. Dizemos que S é um conjunto **multiplicativamente fechado** se:

- (a) $1 \in S$;
- (b) $st \in S$, para todo $s, t \in S$.

Definição 2.42 Sejam A um anel e S um subconjunto multiplicativamente fechado de A . Definimos a seguinte relação de equivalência em $A \times S$:

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow (as' - a's)u = 0$$

para algum $u \in S$.

Claramente esta relação é reflexiva e simétrica. Mostremos que é transitiva, suponha que $(a, s) \equiv (b, t)$ e $(b, t) \equiv (c, u)$. Então, existe $v, w \in S$ tais que

$$\begin{aligned} (at - bs)v &= 0 \text{ e } (bu - ct)w = 0 \\ \Rightarrow atv - bsv &= 0 \text{ e } buw - ctw = 0 \\ \Rightarrow atvw - bsvw &= 0 \text{ e } buwsv - ctwsv = 0 \\ \Rightarrow (au - cs)tvw &= 0. \end{aligned}$$

Como S é fechado para multiplicação, temos que $tvw \in S$. Portanto, $(a, s) \sim (c, u)$.

Denotamos por $\frac{a}{s} = \overline{(a, s)}$ a classe de equivalência de $(a, s) \in A \times S$ e o conjunto quociente é denotado por

$$S^{-1}A := \frac{A \times S}{\sim} = \{a/s \mid a \in A \text{ e } s \in S\}.$$

Definimos as seguintes operações em $S^{-1}A$:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st} \text{ e } \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}.$$

Com essas operações, temos que $S^{-1}A$ é um anel comutativo com unidade, onde $\frac{1}{1}$ é a unidade e $\frac{0}{1}$ é o elemento neutro da adição. Associado a $S^{-1}A$ temos um homomorfismo de anéis $\psi : A \rightarrow S^{-1}A$ dado por $\psi(a) = \frac{a}{1}$, chamado de **homomorfismo de localização**.

Exemplo 2.37 Se $A = \mathbb{C}[x, y]$ e $S = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ então $S^{-1}A = \{f(x, y)/x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Exemplo 2.38 Se A é um domínio integral e $S = A \setminus 0$, então $S^{-1}A$ é o **corpo de frações** de A . De fato, se $(a, s), (b, t) \in A \times S$ são de tal modo que $(a, s) \sim (b, t)$, então existe $u \in S$ tal que $(at - bs)u = 0$. Como A é um domínio integral e $u \in S = A \setminus 0$, então $at - bs = 0$, o que implica que $at = bs$.

Exemplo 2.39 Sejam $f \in A$ e $S = \{f^n\}_{n \geq 0}$. Observe que, para todo $n, m \geq 0$ temos que

$$1 = f^0 \in S \text{ e } f^n f^m = f^{n+m} \in S.$$

Logo, S é um conjunto multiplicativamente fechado de A . Neste caso, o anel $S^{-1}A$ será denotado por A_f .

Proposição 2.27 Seja p um ideal de A . Então, $S = A \setminus p$ é multiplicativamente fechado se, e somente se, p é primo.

Demonstração: De fato, suponha que S é multiplicativamente fechado e $ab \in p$. Suponha também, por absurdo, que a e b não pertence a p . Logo, $a, b \in S$ e, como S é multiplicativamente fechado, temos que $ab \in S$, contradição.

Por outro lado, se p é primo então $1 \in S$. Por fim, suponha que $a, b \in S$, assim, ab não pode pertencer a p (se $ab \in p$, então $a \in p$ ou $b \in p$, o que não ocorre), logo $ab \in S$. Portanto, S é multiplicativamente fechado. ■

Neste caso em que $S = A \setminus p$, onde p é um ideal primo, denotaremos $S^{-1}A$ por A_p e dizemos que A_p é a **localização** de A em p . Além disso, essa localização é um anel local, ou seja, A_p possui um único ideal maximal.

A construção do anel $S^{-1}A$ pode ser realizada com um A -módulo no lugar do anel A .

Definição 2.43 Seja M um A -módulo, definimos a seguinte relação de equivalência em $M \times S$:

$$(m, s) \equiv (m', s') \Leftrightarrow (ms' - m's)u = 0$$

para algum $u \in S$.

Seja $\mu : M \rightarrow N$ um A -homomorfismo. Então, temos um $S^{-1}A$ -homomorfismo de $S^{-1}A$ -módulos induzido

$$\begin{aligned} S^{-1}\mu : S^{-1}M &\rightarrow S^{-1}N \\ m/s &\mapsto \mu(m)/s \end{aligned}$$

para todo $m \in M$ e $s \in S$. Este homomorfismo satisfaz $S^{-1}(\nu \circ \mu) = (S^{-1}\nu) \circ (S^{-1}\mu)$.

Proposição 2.28 A operação S^{-1} é exata, isto é, se

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

é exata em M , então

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$$

é exata em $S^{-1}M$.

Demonstração: Ver Proposição 3.3, Capítulo 3 de [5]. ■

Proposição 2.29 Seja M um A -módulo. Então os $S^{-1}A$ -módulos $S^{-1}M$ e $S^{-1} \otimes_A M$ são isomorfos, mais precisamente, existe um único isomorfismo

$$f : S^{-1}A \otimes M \rightarrow S^{-1}M$$

onde

$$f\left(\frac{a}{s} \otimes m\right) = \frac{am}{s}, \forall a \in A, m \in M, s \in S.$$

Demonstração: Ver Proposição 3.5, Capítulo 3 de [5]. ■

Corolário 2.3 $S^{-1}A$ é um A -módulo plano.

Demonstração: Ver Corolário 3.6, Capítulo 3 de [5]. ■

Anéis Noetherianos

Definição 2.44 O anel A é chamado de **Noetheriano** se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

- (a) Todo conjunto não vazio de ideais de A tem um elemento maximal;
- (b) Toda cadeia ascendente de ideais de A é estacionária;
- (c) Todo ideal em A é finitamente gerado.

Exemplo 2.40 O anel \mathbb{Z} é Noetheriano. De fato, como \mathbb{Z} é um domínio de ideais principais, todos os ideais são da forma (n) , para algum $n \in \mathbb{Z}$. De modo geral, todo domínio principal é Noetheriano, pois todo ideal em um domínio principal é gerado por um único elemento, em particular, todo corpo é Noetheriano. Já, o anel de polinômios $k[x_1, x_2, \dots]$ em um número infinito de variáveis x_n não é Noetheriano, pois a cadeia de ideais ascendente $(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \dots$ é estritamente crescente.

Proposição 2.30 Seja

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência de A -módulos exata. Então, M é Noetheriano se, e somente se, M' e M'' são Noetherianos.

Demonstração: Ver Proposição 6.3, Capítulo 6 de [5]. ■

Corolário 2.4 Se A é Noetheriano, então A/I é Noetheriano para todo ideal I de A .

Demonstração: Ver Proposição 6.6, Capítulo 6 de [5]. ■

Exemplo 2.41 Como \mathbb{Z} é Noetheriano e a sequência

$$0 \longrightarrow n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n := \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

é exata, para todo $n > 0$. Então, pelo Corolário 2.4, o anel \mathbb{Z}_n é Noetheriano.

Proposição 2.31 Se A é Noetheriano e f é um homomorfismo sobrejetor de A para um anel B , então B é Noetheriano.

Demonstração: Ver Proposição 7.1, Capítulo 7 de [5]. ■

Proposição 2.32 Se A é Noetheriano e S um subconjunto multiplicativamente fechado de A , então $S^{-1}A$ é Noetheriano.

Demonstração: Ver Proposição 7.3, Capítulo 7 de [5]. ■

Corolário 2.5 Se A é Noetheriano e p é um ideal primo de A , então A_p é Noetheriano. Com efeito, se $f \in A$, então A_f é Noetheriano.

Demonstração: Ver Corolário 7.4, Capítulo 7 de [5]. ■

Teorema 2.3 (Teorema da Base de Hilbert) Se A Noetheriano, então o anel de polinômios $A[x]$ é Noetheriano.

Demonstração: Ver Teorema 7.5, Capítulo 7 de [5]. ■

Corolário 2.6 Se A é Noetheriano, então $A[x_1, \dots, x_n]$ é Noetheriano.

Demonstração: Ver Corolário 7.6, Capítulo 7 de [5]. ■

Proposição 2.33 Em um anel Noetheriano A , todo ideal I contém uma potência de seu radical.

Demonstração: Ver Proposição 7.14, Capítulo 7 de [5]. ■

Corolário 2.7 Em um anel Noetheriano o nilradical é nilpotente.

Demonstração: Ver Corolário 7.15, Capítulo 7 de [5]. ■

2.3 O Espectro Primo de um Anel

Nesta seção introduzimos um importante conceito: o espectro primo de um anel. A principal referência para essa parte é [5].

Definição 2.45 Seja A um anel. Definimos o **espectro** de A , denotado por $\text{Spec}(A)$ como sendo o conjunto de todos os ideais primos de A , isto é

$$\text{Spec}(A) = \{p \subset A \mid p \text{ é um ideal primo de } A\}.$$

Exemplo 2.42 Se $A = k$ é um corpo, então $\text{Spec}(A) = \{(0)\}$. Se $A = \mathbb{Z}$, então $\text{Spec}(A) = \{(p) \mid p \text{ é primo}\} \cup \{(0)\}$. Se $A = \mathbb{C}[x]$, então $\text{Spec}(A) = \{(x - x_0) \mid x_0 \in \mathbb{C}\} \cup \{(0)\}$.

Definição 2.46 Seja E um subconjunto de um anel A . Definimos a **variedade** de E como sendo o conjunto

$$V(E) = \{p \subset A \mid p \in \text{Spec}(A) \text{ e } E \subset p\}.$$

Exemplo 2.43 Seja $A = \mathbb{Z}$, então a variedade de $E = \{6\}$ é $V(E) = \{(2), (3)\}$.

Proposição 2.34 Seja E um subconjunto de um anel A . Então vale que:

- (a) Se I é o ideal gerado por E , então $V(E) = V(I) = V(r(I))$;
- (b) $V(\{0\}) = \text{Spec}(A)$ e $V(\{1\}) = \emptyset$;
- (c) Se $\{E_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é uma família qualquer de subconjuntos de A , então

$$V\left(\bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in J} V(E_\alpha);$$

- (d) $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$, para todos os ideias I_1, I_2 de A .

Demonstração:

- (a) (i) $V(E) = V(I)$: Se $p \in V(I)$, então $I \subset p$. Como I é gerado por E , temos que $E \subset I$. Logo, $E \subset p$ e, assim, $p \in V(E)$. Por outro lado, se $p \in V(E)$ significa que p contém todos os geradores de I , isto é, $I \subset p$ e $p \in V(I)$.
- (ii) $V(I) = V(r(I))$: Se $p \in V(r(I))$, então $r(I) \subset p$. Como $I \subset r(I)$, temos que $I \subset p$ e, assim, $p \in V(I)$. Por outro lado, seja $p \in V(I)$. Além disso, sabemos que $r(I)$ é a interseção de todos os ideias primos contendo I e, portanto, $p \in V(r(I))$.
- (b) Como $0 \in p$, para todo $p \in \text{Spec}(A)$, então $V(0) = \text{Spec}(A)$ e, como 1 não pertence a p , para todo $p \in \text{Spec}(A)$, então $V(1) = \emptyset$.
- (c) Sejam $\{E_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família de subconjuntos de A e $p \in \text{Spec}(A)$. Então, p contém $\bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha$ se, e somente se, p contém cada E_α . Logo,

$$V\left(\bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in J} V(E_\alpha).$$

- (d) Sejam I_1 e I_2 ideias de A .

- (i) $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 I_2)$: Temos que

$$V(I_1 I_2) = V(r(I_1 I_2)) = V(r(I_1 \cap I_2)) = V(I_1 \cap I_2).$$

- (ii) $V(I_1 I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$: Como $I_1 I_2$ está contido em I_1 e I_2 , então $V(I_1) \cup V(I_2) \subset V(I_1 I_2)$. Por outro lado, se p é um ideal primo contendo $I_1 I_2$, então p contém I_1 ou I_2 e, assim, $V(I_1 I_2) \subset V(I_1) \cup V(I_2)$.

Este resultado mostra que os conjuntos $V(E)$ satisfazem os axiomas de conjuntos fechados de um espaço topológico. Tal topologia é chamada de **topologia de Zariski** e o espaço topológico X é chamado o **espectro primo** de A , denotado por $\text{Spec}(A)$. ■

Observação 2.7 Os abertos $D(f) = \text{Spec}(A) \setminus V(f)$, onde $f \in A$, são chamados de **abertos principais** e formam uma **base da topologia de Zariski** em A . De fato,

(i) Dado $p \in \text{Spec}(A)$. Como

$$D(1) = \text{Spec}(A) \setminus V(1) = \text{Spec}(A) \setminus \emptyset$$

temos que $p \in D(1)$, ou seja, existe um aberto principal que contém p ;

(ii) Se $p \in \text{Spec}(A)$ e $p \in D(f) \cap D(g)$, onde $f, g \in A$, então

$$\begin{aligned} D(f) \cap D(g) &= (\text{Spec}(A) \setminus V(f)) \cap (\text{Spec}(A) \setminus V(g)) \\ &= \text{Spec}(A) \setminus (V(f) \cup V(g)) \\ &= \text{Spec}(A) \setminus V(fg) \\ &= D(fg). \end{aligned}$$

Logo, $p \in D(fg) = D(f) \cap D(g)$.

Proposição 2.35 Seja A um anel. Temos que $\text{Spec}(A)$ é irredutível se, e somente se, o nilradical $N(A)$ é primo.

Demonstração: Sejam $x, y \in A$ com $xy \in N(A)$. Então $xy \in p$ para todo ideal primo $p \subset A$, pois o nilradical é a interseção dos ideais primos de A . Assim, temos três casos:

- (1) $x \in p$ para todo $p \in \text{Spec}(A) \Rightarrow x \in N(A)$;
- (2) $y \in p$ para todo $p \in \text{Spec}(A) \Rightarrow y \in N(A)$;
- (3) $\text{Spec}(A) = V(\{x\}) \cup V(\{y\})$. Como $V(\{x\})$ e $V(\{y\})$ são fechados de $\text{Spec}(A)$ e $\text{Spec}(A)$ é irredutível, devemos ter $\text{Spec}(A) = V(\{x\})$ ou $\text{Spec}(A) = V(\{y\})$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\text{Spec}(A) = V(\{x\})$. Daí, $x \in p$ para todo ideal primo e portanto, $x \in N(A)$. Sendo assim, $N(A)$ é primo.

Reciprocamente, suponha que $\text{Spec}(A)$ não seja irredutível e mostremos que $N(A)$ não é primo. Portanto, existem $E, F \subset A$ tais que $V(E)$ e $V(F)$ são fechados próprios de $\text{Spec}(A)$ e assim, $\text{Spec}(A) = V(E) \cup V(F)$. Existem também $p \in V(E) \setminus V(F)$ e $(q) \in V(F) \setminus V(E)$, isto é, existe um ideal primo p que não contém F e um ideal primo (q) que não contém E . Tome $x \in F \setminus p$ e $y \in E \setminus (q)$. Mostremos que $xy \in N(A)$, mas $x, y \notin N(A)$. De fato, $x, y \notin N(A)$, pois $x \notin p$ e $y \notin (q)$. Por outro lado, $xy \in N(A)$, pois dado um ideal primo (p') de A , temos que $(p') \in \text{Spec}(A) = V(E) \cup V(F)$. Assim, $E \subset (p')$ ou $F \subset (p')$. Isto significa que $y \in (p')$ ou $x \in (p')$ e portanto, $xy \in (p')$. Com efeito, $xy \in \bigcap_{p \in \text{Spec}(A)} p = N(A)$, o que implica que $N(A)$ não é primo. ■

Definição 2.47 Seja $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Definimos a aplicação associada a φ :

$$\begin{aligned} \text{Spec}(\varphi) : \text{Spec}(B) &\rightarrow \text{Spec}(A) \\ p &\mapsto \varphi^{-1}(p). \end{aligned}$$

A aplicação $\text{Spec}(\varphi)$ está bem definida, pois $\varphi^{-1}(p)$ é um ideal primo de A , para todo ideal primo p de B .

Proposição 2.36 Seja $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então $\text{Spec}(\varphi)$ é uma aplicação contínua na topologia de Zariski.

Demonstração: Ver Exercício 29, Capítulo 3 do [5]. ■

Proposição 2.37 Seja $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo.

- (a) Se φ é sobrejetor, então $\text{Spec}(\varphi)$ é um homeomorfismo de $\text{Spec}(B)$ sobre $V(\ker(\varphi))$;
- (b) Se φ é injetora, então $\overline{\text{Spec}(\varphi)(\text{Spec}(B))} = \text{Spec}(A)$.

Demonstração: Ver Exercício 21, Capítulo 1 do [5]. ■

Como aplicação direta da Proposição 2.37 acima, obtemos os seguintes resultados abaixo enunciados como corolários e sem demonstrações.

Corolário 2.8 Sejam A um anel, I um ideal de A e $\pi : A \rightarrow A/I$ o homomorfismo canônico. Então

$$\text{Spec}(\pi) : \text{Spec}(A/I) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(A)$$

é um homeomorfismo de $\text{Spec}(A/I)$ sobre o fechado $V(I) \subset \text{Spec}(A)$.

Corolário 2.9 Sejam A um anel, S um conjunto multiplicativamente fechado de A e $\psi : A \rightarrow S^{-1}A$ a localização. Então

$$\text{Spec}(\psi) : \text{Spec}(S^{-1}A) \rightarrow \text{Spec}(A)$$

é um homeomorfismo de $\text{Spec}(S^{-1}A)$ sobre o conjunto

$$U_S = \{p \in \text{Spec}(A) \mid p \cap S = \emptyset\} \subset \text{Spec}(A).$$

Corolário 2.10 Sejam A um anel, $f \in A$ e $S = \{1, f, f^2, \dots\} \subset A$. Seja $\psi : A \rightarrow A_f$ a localização. Então

$$\text{Spec}(\psi) : \text{Spec}(A_f) \rightarrow \text{Spec}(A)$$

é um homeomorfismo de $\text{Spec}(A_f)$ sobre o aberto $D(f)$.

3 Geometria Algébrica Clássica

Neste capítulo estamos interessados em familiarizar o leitor com os conceitos básicos da Geometria Algébrica Clássica, apresentamos definições, exemplos e alguns importantes resultados. A referência utilizada para essa parte foi [11].

3.1 Variedades Algébricas Afins

Nessa seção definiremos o que se entende por variedade algébrica (afim), bem como exemplos e importantes resultados, resultados estes que estenderemos para a segunda parte, quando tratarmos de variedade algébrica (projetiva).

Definição 3.1 Seja k um corpo e n um inteiro positivo, definimos o **espaço afim** n -dimensional sobre k como sendo

$$k^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in k \text{ para } i = 1, \dots, n\}.$$

Definição 3.2 Seja k um corpo e S um subconjunto do anel de polinômios $k[x_1, \dots, x_n]$. Definimos a **variedade afim** de $S \subset k[x_1, \dots, x_n]$ como sendo

$$\mathbf{V}(S) = \{a \in k^n \mid f(a) = 0 \text{ para todo } f \in S\}$$

Proposição 3.1 Se I é o ideal gerado por $S \subset k[x_1, \dots, x_n]$, então $\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(I)$.

Demonstração: Sejam $a \in \mathbf{V}(I)$ e $F \in S$. Como $S \subset I$, temos que $F \in I$, logo $F(a) = 0$, e assim, $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{V}(S)$. Por outro lado, sejam $b \in \mathbf{V}(S)$ e $G \in I$. Como $G \in I$, temos $G = h_1 f_1 + \dots + h_s f_s$ para certos $f_1, \dots, f_s \in S$ e $h_1, \dots, h_s \in k[x_1, \dots, x_n]$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} G(b) &= h_1(b)f_1(b) + \dots + h_s(b)f_s(b) \\ &= h_1(b) \cdot 0 + \dots + h_s(b) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

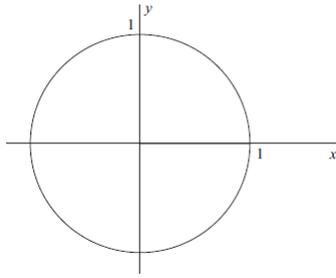
Desse modo, temos que $b \in \mathbf{V}(I)$, e assim, $\mathbf{V}(S) \subset \mathbf{V}(I)$. ■

A Proposição 3.1 nos revela que toda variedade afim é da forma $V = \mathbf{V}(I)$ para algum ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Esta afirmação associada ao Teorema da Base de Hilbert 2.3, permite-nos uma definição mais precisa para as variedades algébricas afins.

Definição 3.3 Seja k um corpo e $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ polinômios. Definimos a **variedade algébrica afim** definida por f_1, \dots, f_s como sendo

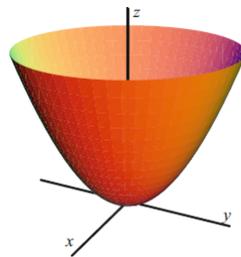
$$\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) = \{a \in k^n \mid f_i(a) = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, s\}.$$

Exemplo 3.1 Seja $k = \mathbb{R}$. A variedade afim $\mathbf{V}(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{R}^2$ é o círculo unitário centrado na origem, como mostrado abaixo.

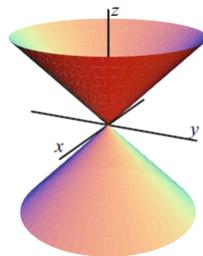


Analogamente, as elipses, parábolas e hipérbolas também são exemplos de variedades afins.

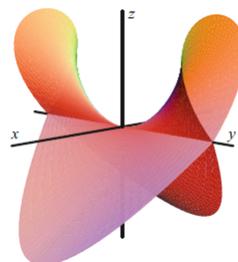
Exemplo 3.2 A variedade afim $\mathbf{V}(z - x^2 - y^2) \subset \mathbb{R}^3$ é o parabolóide de revolução, obtido pela rotação da parábola $z = x^2$ sobre o eixo z , dado abaixo.



Exemplo 3.3 Um caso também familiar é o cone, definido pela variedade afim $\mathbf{V}(z^2 - x^2 - y^2) \subset \mathbb{R}^3$, mostrado abaixo.



Exemplo 3.4 Um outro caso também simples e familiar é a reta, definida pela variedade afim $\mathbf{V}(ax + by + c) \subset \mathbb{R}^2$. Um caso um pouco mais complicado e pouco familiar é a superfície definida pela variedade afim $\mathbf{V}(x^2 - y^2z^2 + z^3) \subset \mathbb{R}^3$, mostrada abaixo.



Exemplo 3.5 Um exemplo interessante de uma curva em \mathbb{R}^3 é a cúbica torcida, definida pela variedade $\mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$, obtida da interseção das superfícies $y = x^2$ e $z = x^3$. De modo geral, gráficos de funções polinomiais são variedades afins, o gráfico de $y = f(x)$ é definido pela variedade afim $\mathbf{V}(y - f(x))$. Não tão óbvio assim, gráficos de funções racionais também definem variedades afins. Por exemplo, o gráfico de $y = (x^3 - 1)/x$ é dado pela variedade afim $\mathbf{V}(xy - x^3 + 1) \subset \mathbb{R}^2$.

Proposição 3.2 Se I e J são ideais em $k[x_1, \dots, x_n]$, então $\mathbf{V}(IJ) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$.

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(IJ) &= \mathbf{V}(\langle f_i g_j \mid \text{para } i = 1, \dots, s \text{ e } j = 1, \dots, r \rangle) \\ &= \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \cup \mathbf{V}(g_1, \dots, g_r) \\ &= \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) \end{aligned}$$

■

Definição 3.4 Definimos o **ideal de uma variedade afim** $V \subset k^n$ como sendo o conjunto

$$\mathbf{I}(V) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(a) = 0 \text{ para todo } a \in V\}.$$

O conjunto definido acima de fato é um ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$, pois o polinômio identicamente nulo está em $\mathbf{I}(V)$ e, dados $f, g \in \mathbf{I}(V)$ e $h \in k[x_1, \dots, x_n]$, temos que para todo $a \in V$:

- $(f + g)(a) = f(a) + g(a) = 0 + 0 = 0$;
- $(hf)(a) = h(a)f(a) = h(a) \cdot 0 = 0$.

Portanto, $\mathbf{I}(V)$ é um ideal.

Lema 3.1 Sejam k um corpo, I, J ideais de $k[x_1, \dots, x_n]$ e V, W variedades afins de k^n .

(a) Se $I \subset J$ então $\mathbf{V}(I) \supset \mathbf{V}(J)$.

(b) Se $V \subset W$ então $\mathbf{I}(V) \supset \mathbf{I}(W)$.

Demonstração:

(a) Sejam $a \in \mathbf{V}(J)$ e $f \in I$. Como $I \subset J$, temos que $f \in J$ e, assim, $f(a) = 0$. Com efeito, $a \in \mathbf{V}(I)$ e $\mathbf{V}(I) \supset \mathbf{V}(J)$;

(b) Sejam $g \in \mathbf{I}(W)$ e $b \in V$. Como $V \subset W$, temos que $b \in W$ e, assim, $g(b) = 0$. Com efeito, $g \in \mathbf{I}(W)$ e $\mathbf{I}(V) \supset \mathbf{I}(W)$.

■

Proposição 3.3 Seja k um corpo. Se I é um ideal em $k[x_1, \dots, x_n]$ e V é uma variedade afim em k^n , então

$$\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V \text{ e } \mathbf{V}(r(I)) = \mathbf{V}(I).$$

Demonstração: Pelas definições de \mathbf{V} e \mathbf{I} , claramente temos que $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$. Como $I \subset r(I)$, pelo Lema 3.1, temos que $\mathbf{V}(r(I)) \subset \mathbf{V}(I)$. Por outro lado, se $a \in \mathbf{V}(I)$ e $f \in r(I)$, então existe $m > 0$ tal que $f^m \in I$. Com efeito, $f^m(a) = 0$, o que implica que $f(a) = 0$. Com isso, temos que $a \in \mathbf{V}(r(I))$ e, $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{V}(r(I))$. Logo, $\mathbf{V}(r(I)) = \mathbf{V}(I)$. ■

Lema 3.2 Se V é uma variedade afim em k^n , então $\mathbf{I}(V)$ é um ideal radical.

Demonstração: De fato, se $f^m \in \mathbf{I}(V)$, então $f^m(a) = 0$. Isso implica que $f(a) = 0$ para todo $a \in V$. Portanto, $f \in \mathbf{I}(V)$ e assim, $\mathbf{I}(V)$ é radical. ■

Teorema 3.1 (Teorema dos Zeros de Hilbert (Afim)) Seja k um corpo algebricamente fechado.

- (a) Se um ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ satisfaz $\mathbf{V}(I) = \emptyset$, então $I = k[x_1, \dots, x_n]$.
- (b) Se $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$, então $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s))$ se, e somente se, $f^m \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ para algum inteiro $m \geq 1$.
- (c) Se I é um ideal em $k[x_1, \dots, x_n]$, então $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = r(I) = I$.

Demonstração:

- (a) Ver Teorema 1, Seção 1, Capítulo 4 de [11].
- (b) Ver Teorema 2, Seção 1, Capítulo 4 de [11].
- (c) Ver Teorema 6, Seção 2, Capítulo 4 de [11].

Teorema 3.2 (Correspondência Ideal - Variedade) Seja k um corpo algebricamente fechado. Existe uma bijeção, que reverte inclusão, entre as variedades afins de k^n e os ideais radicais em $k[x_1, \dots, x_n]$.

Demonstração: Sejam $\varphi : I \mapsto \mathbf{V}(I)$ e $\psi : V \mapsto \mathbf{I}(V)$ duas aplicações, onde I é um ideal radical em $k[x_1, \dots, x_n]$ e V é uma variedade afim de k^n . Verifiquemos que as aplicações são inversas uma da outra. Por um lado, temos que

$$(\varphi \circ \psi)(V) = \varphi(\psi(V)) = \varphi(\mathbf{I}(V)) = \mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V.$$

Por outro lado,

$$(\psi \circ \varphi)(I) = \psi(\varphi(I)) = \psi(\mathbf{V}(I)) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = r(I).$$

Portanto, φ e ψ são inversas uma da outra. ■

Definição 3.5 Uma variedade afim $V \subset k^n$ é **irredutível** se, sempre que V é escrita da forma $V = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são variedades afins, então $V = V_1$ ou $V = V_2$. Caso contrário, dizemos que a variedade afim $V \subset k^n$ é **redutível**.

Exemplo 3.6 A variedade afim dada por $\mathbf{V}(x^2 - y^2) \subset \mathbb{R}^2$ é a união de duas retas, respectivamente, $\mathbf{V}(x + y)$ e $\mathbf{V}(x - y)$, uma vez que $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

Proposição 3.4 Seja $V \subset k^n$ uma variedade afim. Então V é irredutível se, e somente se, $\mathbf{I}(V)$ é um ideal primo.

Demonstração: Ver Proposição 3, Seção 5, Capítulo 4 de [11]. ■

Corolário 3.1 Seja k um corpo algebricamente fechado. Existe uma bijeção, que reverte inclusão, entre variedades afins irredutíveis em k^n e os ideais primos em $k[x_1, \dots, x_n]$.

Exemplo 3.7 Seja k um corpo algebricamente fechado. Se $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ é irredutível, então $\mathbf{V}(f)$ é irredutível. De fato, tome $I = \langle f \rangle \subset k[x_1, \dots, x_n]$. Se $gh \in I$, então $gh = pf$ para algum $p \in k[x_1, \dots, x_n]$. Como f é irredutível, devemos ter que g ou h é divisível por f . Dessa forma, $g \in I$ ou $h \in I$, logo I é primo. Como k é algebricamente fechado, temos que $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(f)$ é irredutível.

Exemplo 3.8 A variedade afim da cúbica torcida, definida por $V = \mathbf{V}(y - x^2, z - x^3) \subset \mathbb{R}^3$, é irredutível. De fato, mostremos que $\mathbf{I}(V)$ é primo. Suponha que $fg \in \mathbf{I}(V)$. Como a curva pode ser parametrizada por (t, t^2, t^3) para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que

$$f(t, t^2, t^3)g(t, t^2, t^3) = 0 \Rightarrow f(t, t^2, t^3) = 0 \text{ ou } g(t, t^2, t^3) = 0.$$

Assim, f ou g se anula em toda a variedade afim V . Portanto, f ou g está em $\mathbf{I}(V)$, provando que $\mathbf{I}(V)$ é primo e, assim, V é irredutível.

Proposição 3.5 Se k é um corpo infinito e $V \subset k^n$ é uma variedade afim definida parametricamente por

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, \dots, t_m) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(t_1, \dots, t_m), \end{aligned}$$

onde f_1, \dots, f_n são polinômios em $k[t_1, \dots, t_m]$, então V é irredutível.

Demonstração: Ver Proposição 5, Seção 5, Capítulo 4 de [11]. ■

Proposição 3.6 Se $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$, então $\mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\}) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$.

Demonstração: De fato, como $x_i - a_i$ se anula em (a_1, \dots, a_n) para $i = 1, \dots, n$ temos que $x_i - a_i \in \mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\})$ para $i = 1, \dots, n$ e assim, $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \subset \mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\})$. Por outro lado, se $f \in \mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\})$, podemos escrever f da seguinte forma

$$f = g_1(x_1 - a_1) + \dots + g_n(x_n - a_n) + r,$$

onde $g_1, \dots, g_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ e $r \in k$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= f(a_1, \dots, a_n) \\ &= g_1(a_1, \dots, a_n) \cdot 0 + \dots + g_n(a_1, \dots, a_n) \cdot 0 + r \\ &= r. \end{aligned}$$

Logo, $f \in \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$, e $\mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\}) \subset \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$. ■

Teorema 3.3 Se k é um corpo algebricamente fechado, então todo ideal maximal de $k[x_1, \dots, x_n]$ é da forma $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ para algum $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$.

Demonstração: Seja $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal maximal. Como $I \neq k[x_1, \dots, x_n]$, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert 3.1, temos que $\mathbf{V}(I) \neq \emptyset$. Assim, existe um ponto $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I)$. Logo, todo $f \in I$ se anula em (a_1, \dots, a_n) e assim, $f \in \mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\})$, com efeito, $I \subset \mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\})$. Porém, como I é maximal e

$$\mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\}) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \text{ (pela Proposição 3.6),}$$

temos que

$$I = \mathbf{I}(\{a_1, \dots, a_n\}) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle. \quad \blacksquare$$

Corolário 3.2 Seja k um corpo algebricamente fechado. Existe uma bijeção, que reverte inclusão, entre os pontos em k^n e os ideais maximais em $k[x_1, \dots, x_n]$.

Proposição 3.7 Uma variedade afim $V \subset k^n$ é irredutível se, e somente se, para cada variedade $W \subsetneq V$, a diferença $V \setminus W$ é densa em V .

Demonstração: Ver Proposição 13, Seção 5, Capítulo 4 de [11]. \blacksquare

3.2 Variedades Algébricas Projetivas

Até agora, todas as variedades que estudamos foram subconjuntos de k^n (espaço afim). Nessa seção estenderemos k^n adicionando os “pontos no ∞ ” para criar o espaço projetivo sobre k , denotado por $\mathbb{P}^n(k)$. Então vamos definir as variedades projetivas e estabelecer a relação álgebra-geometria no caso projetivo.

O Espaço Projetivo - $\mathbb{P}^n(k)$

Definição 3.6 Dada uma $(n+1)$ -upla $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$, definimos uma relação de equivalência da seguinte forma:

$$(x'_0, \dots, x'_n) \sim (x_0, \dots, x_n) \iff (x'_0, \dots, x'_n) = \lambda(x_0, \dots, x_n)$$

para algum $0 \neq \lambda \in k$. Definimos o **espaço projetivo** n -dimensional sobre k , denotado por $\mathbb{P}^n(k)$, como sendo o conjunto das classes de equivalência de \sim em $k^{n+1} \setminus \{0\}$. Ou seja,

$$\mathbb{P}^n(k) = \frac{k^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}.$$

Assim, para cada $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ denotaremos sua classe de equivalência por $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ e dizemos que $(x_0 : \dots : x_n)$ são as **coordenadas homogêneas**.

Exemplo 3.9 O **plano projetivo real** é o conjunto das classes de equivalência de \sim em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, denotado por $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, é dado por

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}{\sim}.$$

Dada uma tripla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, sua classe de equivalência $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ será denotada por $p = (x : y : z)$, e dizemos que $(x : y : z)$ são as coordenadas homogêneas de p . Portanto,

$$(x_1 : y_1 : z_1) = (x_2 : y_2 : z_2) \iff (x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_2, y_2, z_2)$$

para algum $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

Geometricamente, o plano projetivo sobre \mathbb{R} , denotado por $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, é o conjunto

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \{\text{um ponto no } \infty \text{ para cada classe de equivalência de retas paralelas}\}$$

Assim, se $[L]_\infty$ denota os pontos comuns do ∞ de todas as retas paralelas a L , então chamamos o conjunto $\bar{L} = L \cup [L]_\infty \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ a **reta projetiva** correspondente a L . Nesse sentido, duas retas projetivas sempre se intersectam exatamente em um único ponto: se elas não são paralelas, elas se intersectam em um ponto de \mathbb{R}^2 ; se elas são paralelas, elas se intersectam no seu ponto comum no ∞ .

À primeira vista, pode-se esperar que uma reta no plano tenha dois pontos no ∞ , correspondentes aos dois caminhos que podemos percorrer ao longo da reta. No entanto, a razão pela qual isso não ocorre, está contida no parágrafo anterior: se houvesse dois pontos no ∞ , então as retas paralelas teriam dois pontos de interseção, e não apenas um, como definimos.

Além disso, duas retas projetivas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ determinam um único ponto e dois pontos distintos em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ determinam uma única reta projetiva. Dada essa noção intuitiva sobre a reta projetiva em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, definamo-la de maneira formal.

Definição 3.7 Dados números reais A, B e C , não todos nulos, o conjunto dado por

$$\bar{L} = \{p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid p = (x : y : z) \text{ com } Ax + By + Cz = 0\}$$

é chamado uma **reta projetiva** de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Note que uma reta projetiva em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ é um plano em \mathbb{R}^3 passando pela origem. Assim, dois planos passando pela origem tem uma reta (ponto projetivo de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$) em comum (ponto no infinito). Isso mostra intuitivamente que não há retas paralelas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Para relacionar nossas duas definições de plano projetivo (real), enunciamos a seguinte proposição.

Proposição 3.8 A aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \\ (x, y) &\mapsto (x : y : 1) \end{aligned}$$

é injetora e o complemento de sua imagem em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ é a reta projetiva H_∞ definida por $z = 0$, que chamamos de **reta no infinito**.

Demonstração: Sejam (x, y) e (x', y') tais que $\alpha(x, y) = \alpha(x', y')$. Assim, temos que $(x : y : 1) = (x' : y' : 1)$. Logo, $(x, y, 1) = \lambda(x', y', 1)$ para algum $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Com efeito, encontramos $\lambda = 1$ e isso implica que $(x, y) = (x', y')$. Portanto, a aplicação é injetora. Para a segunda parte da demonstração, considere $P = (x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Se $z = 0$, então P está na reta projetiva H_∞ . Caso contrário, se $z \neq 0$, então podemos multiplicar por $1/z$, isto é,

$$P = (x : y : z) = 1/z(x : y : z) = (x/z : y/z : 1).$$

Isso mostra que P está na imagem da aplicação α , pois basta considerar o ponto $(x/z, y/z) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, a imagem da aplicação α é o complemento da reta projetiva H_∞ . ■

Dessa forma, H_∞ consiste de um único ponto no ∞ para cada classe de equivalência de retas paralelas. Geralmente, costumamos identificar \mathbb{R}^2 com sua imagem em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, de modo que podemos escrever o plano projetivo real como uma união disjunta

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup H_\infty.$$

Geometricamente, seja $p = (x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Dessa forma, para qualquer outra coordenada homogênea de p , teremos que os pontos $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda(x, y, z)$ estarão todos na mesma reta através da origem em \mathbb{R}^3 , onde $\lambda \neq 0$. O requisito de ser $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ nos garante a obtenção de uma reta em \mathbb{R}^3 .

Por outro lado, dada qualquer reta L através da origem em \mathbb{R}^3 , um ponto $(x, y, z) \in L \setminus \{0\}$ fornece coordenadas homogêneas $(x : y : z)$ para um ponto determinado de maneira exclusiva em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, uma vez que qualquer outro ponto em $L \setminus \{0\}$ é um múltiplo não nulo de (x, y, z) . Isso mostra que temos uma bijeção entre $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e retas através da origem em \mathbb{R}^3 .

Por fim, uma outra informação bastante relevante, reside no fato de que a noção de distância euclidiana não desempenha um papel proeminente na geometria do espaço projetivo. Isso explica porque a geometria de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ é bem diferente da geometria euclidiana.

Como $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, cada ponto $p \in \mathbb{P}^n(k)$ tem muitos outros representantes em termos de coordenadas homogêneas. Por exemplo, $(0 : \sqrt{2} : 0 : i)$ e $(0 : 2i : 0 : -\sqrt{2})$ são os mesmos pontos em $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, pois $(0, 2i, 0, -\sqrt{2}) = i\sqrt{2}(0, \sqrt{2}, 0, i)$. Como antes, podemos pensar em $\mathbb{P}^n(k)$ de forma geométrica como o conjunto de retas através da origem em k^{n+1} e assim como o plano projetivo real contém o plano afim \mathbb{R}^2 como um subconjunto, isto é, contém uma identificação de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ por meio da associação de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ à $(x : y : 1) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ $\mathbb{P}^n(k)$ contém o espaço afim k^n .

Definição 3.8 Definimos uma **carta** do espaço projetivo $\mathbb{P}^n(k)$ como sendo o subconjunto $U_i \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ tal que

$$U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\}.$$

Proposição 3.9 Seja $U_0 = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_0 \neq 0\}$. A aplicação

$$\begin{aligned} \phi : k^n &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto (1 : a_1 : \dots : a_n) \end{aligned}$$

é uma bijeção entre k^n e $U_0 \subset \mathbb{P}^n(k)$.

Demonstração: Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : U_0 &\rightarrow k^n \\ (x_0 : \dots : x_n) &\mapsto (x_1/x_0, \dots, x_n/x_0). \end{aligned}$$

Mostremos que φ está bem definida e que, de fato, é a inversa de ϕ . Para ver que está bem definida, considere $(x_0 : \dots : x_n) = (x'_0 : \dots : x'_n) \in U_0$. Assim, existe $0 \neq \lambda \in k$ de

tal modo que $(x'_0, \dots, x'_n) = \lambda(x_0, \dots, x_n)$. Logo,

$$\begin{aligned}\varphi(x'_0 : \dots : x'_n) &= \left(\frac{x'_1}{x'_0}, \dots, \frac{x'_n}{x'_0} \right) \\ &= \left(\frac{\lambda x'_1}{\lambda x'_0}, \dots, \frac{\lambda x'_n}{\lambda x'_0} \right) \\ &= \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \\ &= \varphi(x_0 : \dots : x_n).\end{aligned}$$

Isso mostra que a aplicação φ está bem definida. Agora, resta mostrar que φ é a inversa de ϕ . Seja $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$. Temos que

$$(\varphi \circ \phi)(a_1, \dots, a_n) = \varphi(\phi(a_1, \dots, a_n)) = \varphi(1 : a_1 : \dots : a_n) = (a_1, \dots, a_n).$$

Por outro lado, dado $(a_0 : \dots : a_n) \in U_0$, temos que

$$\begin{aligned}(\phi \circ \varphi)(a_0 : \dots : a_n) &= \phi(\varphi(a_0 : \dots : a_n)) \\ &= \phi\left(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}\right) \\ &= \left(1 : \frac{a_1}{a_0} : \dots : \frac{a_n}{a_0}\right) \\ &= (a_0 : a_1 : \dots : a_n).\end{aligned}$$

■

Temos então, que $\mathbb{P}^n(k) = U_0 \cup H$, onde

$$H = \{P \in \mathbb{P}^n(k) \mid P = (0 : x_1 : \dots : x_n)\}.$$

Se identificarmos U_0 com o espaço afim k^n então podemos pensar em H como um **hiperplano no infinito** ($\mathbb{P}^{n-1}(k)$). Em outras palavras, H é uma “cópia” de $\mathbb{P}^{n-1}(k)$, o espaço projetivo de dimensão um a menos. Assim, identificando U_0 com k^n e H com $\mathbb{P}^{n-1}(k)$, podemos escrever

$$\mathbb{P}^n(k) = k^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(k).$$

Para ver o que $H = \mathbb{P}^{n-1}(k)$ significa geometricamente, observe que dado um ponto $p \in \mathbb{P}^{n-1}(k)$ obtemos uma reta $L \subseteq k^n$ passando pela origem. Com efeito, devemos pensar em p como representando a direção assintótica de todas as retas em k^n paralelas a L . Isso nos permite considerar p como um ponto no ∞ no sentido de antes, e assim, recuperamos a definição intuitiva de espaço projetivo dada.

Um caso especial digno de menção é a **reta projetiva** $\mathbb{P}^1(k)$. Como $\mathbb{P}^0(k)$ consiste de um único ponto (isso segue diretamente das observações acima), obtemos que

$$\mathbb{P}^1(k) = k^1 \cup \mathbb{P}^0(k) = k \cup \{\infty\},$$

onde ∞ representa o único ponto de $\mathbb{P}^0(k)$. A título de curiosidade, quando $k = \mathbb{C}$, costuma-se chamar $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a esfera de Riemann.

Vale mencionar que existem outras cópias de k^n em $\mathbb{P}^n(k)$ além de U_0 . De maneira geral, temos o que segue.

Corolário 3.3 Considere qualquer carta do espaço projetivo, isto é,

$$U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\}, \text{ para cada } i = 0, \dots, n.$$

Temos que:

- (a) os pontos de cada U_i estão em bijeção com os pontos de k^n .
- (b) o complemento $\mathbb{P}^n(k) \setminus U_i$ pode ser identificado com $\mathbb{P}^{n-1}(k)$.

(c)
$$\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i.$$

Demonstração: Ver Corolário 3, Seção 2, Capítulo 8 de [11]. ■

No que segue, estamos interessados em estender a definição de variedades no espaço afim para o espaço projetivo. Por exemplo, podemos perguntar se faz sentido considerar $\mathbf{V}(f)$ para um certo polinômio $f \in k[x_0, \dots, x_n]$. Um simples exemplo, nos mostra que alguns cuidados devem ser considerados. De fato, em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, o ponto $p = (1 : 4 : 2)$ deveria pertencer a $\mathbf{V}(x_1 - x_2^2)$, uma vez que as componentes de p satisfazem a equação $x_1 - x_2^2 = 0$. Contudo, surge um problema quando consideramos que o mesmo ponto p pode ser representado pelas coordenadas homogêneas $q = (2 : 8 : 4)$, uma vez que $(2, 8, 4) = \lambda(1, 4, 2)$ com $0 \neq \lambda = 2 \in \mathbb{R}$. Se substituirmos esses componentes em nosso polinômio, obtemos $8 - 4^2 = -8 \neq 0$. Assim, obtemos resultados diferentes dependendo de quais coordenadas homogêneas escolhemos.

Para evitar problemas da natureza apresentada acima, usamos polinômios homogêneos ao trabalhar em $\mathbb{P}^n(k)$.

Definição 3.9 Um polinômio $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ é dito ser **homogêneo** de grau total $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, se cada monômio $x_0^{d_0} \cdots x_n^{d_n}$ que aparece em f tem grau total exatamente

$$d = \sum_{i=0}^n d_i.$$

O polinômio $f = x_1 - x_2^2 \in k[x_0, \dots, x_n]$ no exemplo acima não é homogêneo, e foi isso que causou a inconsistência nos valores de f em diferentes coordenadas homogêneas representando o mesmo ponto. Para polinômios homogêneos isso não acontece.

Proposição 3.10 Seja $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ um polinômio homogêneo. Se f se anula em qualquer conjunto de coordenadas homogêneas para um ponto $p \in \mathbb{P}^n(k)$, então f se anula para todas as coordenadas homogêneas de p . Em particular $\mathbf{V}(f) = \{p \in \mathbb{P}^n(k) \mid f(p) = 0\}$ é um subconjunto bem definido de $\mathbb{P}^n(k)$.

Demonstração: Sejam $(a_0 : \dots : a_n) = (\lambda a_0 : \dots : \lambda a_n)$ coordenadas homogêneas para um ponto $p \in \mathbb{P}^n(k)$ e assumamos que $f(a_0, \dots, a_n) = 0$. Se f é homogêneo de grau total d , então todo termo em f tem a forma $c x_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n}$, onde $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = d$. Quando substituirmos $x_i = \lambda a_i$, este termo torna-se $c(\lambda a_0)^{\alpha_0} \cdots (\lambda a_n)^{\alpha_n} = \lambda^d c a_0^{\alpha_0} \cdots a_n^{\alpha_n}$. Somando os termos em f , encontramos um fator comum de λ^d e, assim

$$f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \dots, a_n) = 0.$$

■

Observe que, mesmo que f seja homogêneo, a equação $f = a$ não faz sentido em $\mathbb{P}^n(k)$ quando $0 \neq a \in k$. A equação $f = 0$ é especial por que nos fornece uma imagem bem definida de um subconjunto de $\mathbb{P}^n(k)$. Além disso, podemos considerar subconjuntos de $\mathbb{P}^n(k)$ definidos pelo anulamento de um sistema de polinômios homogêneos (possivelmente de graus totais distintos). Assim, temos a seguinte generalização.

Definição 3.10 Considere k um corpo e sejam $f_1, \dots, f_s \in k[x_0, \dots, x_n]$ polinômios homogêneos. Definimos o conjunto

$$\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) = \{a \in \mathbb{P}^n(k) \mid f_i(a) = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, s\}.$$

Chamamos $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ a **variedade projetiva** definida por f_1, \dots, f_s .

Por exemplo, em $\mathbb{P}^n(k)$, qualquer polinômio homogêneo não nulo de grau total um

$$l(x_0, \dots, x_n) = c_0x_0 + \dots + c_nx_n,$$

define uma variedade projetiva $\mathbf{V}(l)$ chamada um **hiperplano**. Um exemplo que vimos anteriormente foi o **hiperplano no infinito**, que foi definido como $H = \mathbf{V}(x_0)$. Quando $n = 2$, chamamos $\mathbf{V}(l)$ a **reta projetiva**, ou simplesmente uma reta em $\mathbb{P}^2(k)$. Quando $n = 3$, chamamos um hiperplano, apenas de um plano em $\mathbb{P}^3(k)$.

Definição 3.11 Variedades definidas por um ou mais polinômios lineares (polinômios homogêneos de grau total um) são chamadas **variedades lineares** em $\mathbb{P}^n(k)$.

Por exemplo, $\mathbf{V}(x_1, x_2) \subseteq \mathbb{P}^3(k)$ é uma variedade linear que é uma reta projetiva em $\mathbb{P}^3(k)$. As variedades projetivas $\mathbf{V}(f)$ definidas por uma equação homogênea diferente de zero são conhecidas como **hipersuperfícies**. Contudo, hipersuperfícies individuais são geralmente classificadas de acordo com o grau total da equação definidora. Portanto, se f tem grau total dois em $k[x_0, \dots, x_n]$ costumamos chamar $\mathbf{V}(f)$ uma hipersuperfície quádrlica ou **quádrlica** apenas. Por exemplo, $\mathbf{V}(-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ é uma quádrlica. Analogamente, hipersuperfície definida por equações de grau total três, quatro e cinco são conhecidas como cúbicas, quárticas e quánticas, respectivamente.

Como vimos, os subconjuntos $U_i \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ são cópias de k^n . Assim, podemos nos perguntar naturalmente como as variedades afins em $U_i \simeq k^n$ se relacionam com variedades projetivas em $\mathbb{P}^n(k)$. Primeiro, se pegarmos uma variedade projetiva V e a intersectarmos com uma das cartas U_i faz sentido se perguntar inicialmente se obteremos uma variedade afim. A resposta é sim e as equações definidoras da variedade $V \cap U_i$ podem ser obtidas por um processo chamado de **desomogeneização**.

Para ilustrar esse processo, consideramos o caso $V \cap U_0$. Sabemos que se $p \in U_0$, então p tem coordenadas homogêneas da forma $(1 : x_1 : \dots : x_n) = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$. Se $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ é uma das equações definidoras de V , então o polinômio $g(x_1, \dots, x_n) = f(1, x_1, \dots, x_n) \in k[x_0, \dots, x_n]$ se anula em cada ponto de $V \cap U_0$. Fazendo $x_0 = 1$ em f , obtemos um polinômio g que é a desomogeneização de f , que geralmente não é homogênea.

Proposição 3.11 Seja $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ uma variedade projetiva. Então $W = V \cap U_0$ pode ser identificado com a variedade afim $\mathbf{V}(g_1, \dots, g_s) \subseteq k^n$, onde $g_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(1, x_1, \dots, x_n)$ tal que $x_i = 1$ para cada $i = 1, \dots, s$.

Demonstração: Ver Proposição 6, Seção 2, Capítulo 8 de [11].

■

Exemplo 3.10 Considere a variedade projetiva $V = \mathbf{V}(x_1^2 - x_2x_0, x_1^3 - x_3x_0^2) \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Para intersectar V com a carta U_0 , por exemplo, desomogeneizamos as equações definidoras de V com relação à variável x_0 , obtendo a variedade afim $\mathbf{V}(x_1^2 - x_2, x_1^3 - x_3) \subseteq \mathbb{R}^3$ que é a cúbica torcida em \mathbb{R}^3 .

A desomogeneização também pode ser feita em relação a outras variáveis. A Proposição 3.11 acima, mostra que para qualquer variedade projetiva $V \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, a interseção $V \cap U_1$ pode ser identificada com uma variedade afim em \mathbb{R}^3 definida pelas equações dadas por $g_1(x_0, x_2, x_3) = f_1(x_0, 1, x_2, x_3)$. Quando fazemos isso com a variedade projetiva V dada no Exemplo 3.10, vemos que $V \cap U_1$ é a variedade afim $\mathbf{V}(1 - x_2x_0, 1 - x_3x_0^2)$.

Indo na direção oposta, podemos agora nos perguntar se uma variedade afim em U_i pode ser escrita como $V \cap U_i$ para alguma variedade projetiva V . A resposta novamente é sim, mas há mais de uma maneira de fazer isso, e os resultados podem ser um tanto quanto que inesperados. Uma ideia natural é reverter o processo de desomogeneização descrito anteriormente e agora **homogeneizar** as equações definidoras da variedade afim.

Exemplo 3.11 Considere a variedade afim $W = \mathbf{V}(x_2 - x_1^3 + x_1^2)$ em $U_0 = \mathbb{R}^2$. Como notamos, a equação definidora não é homogênea, então não obtemos uma variedade projetiva em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ diretamente desta equação. Mas podemos usar uma variável extra x_0 para tornar $f = x_2 - x_1^3 + x_1^2$ homogênea. Como f tem grau total três, modificamos f de modo que cada parcela tenha grau total três. Isto nos leva ao polinômio homogêneo

$$f^h = x_2x_0 - x_1^3 + x_1^2x_0.$$

Observe que a desomogeneização de f^h devolve o polinômio original f .

O padrão geral é o mesmo, como nos revela o resultado abaixo.

Proposição 3.12 Seja $g(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ um polinômio de grau total $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

- (a) Seja $g = \sum_{i=0}^d g_i$ a expansão de g como uma soma de suas componentes homogêneas, onde g_i tem grau total $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $i \leq d$. Então

$$\begin{aligned} g^h(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=0}^d g_i(x_1, \dots, x_n)x_0^{d-i} \\ &= g_d(x_1, \dots, x_n) + g_{d-1}(x_1, \dots, x_n)x_0 + \cdots + g_0(x_1, \dots, x_n)x_0^d \end{aligned}$$

é um polinômio homogêneo de grau total d em $k[x_0, \dots, x_n]$. Chamamos g^h a homogeneização de g .

- (b) A homogeneização de g pode ser calculada por meio da seguinte fórmula

$$g^h = x_0^d \cdot g\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

- (c) Desomogeneizando g^h em relação à x_0 , obtemos g , isto é, $g^h(1, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$.
- (d) Seja $F(x_0, \dots, x_n)$ um polinômio homogêneo e considere x_0^e como sendo a maior potência de x_0 que divide F . Se $f = F(1, x_1, \dots, x_n)$ é uma desomogeneização de F , então $F = x_0^e \cdot f^h$.

Demonstração: Ver Proposição 7, Seção 2, Capítulo 8 de [11]. ■

Disto segue que, dada qualquer variedade afim $W = \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s) \subseteq k^n$ podemos homogeneizar as equações definidoras de W para obter uma variedade projetiva $V = \mathbf{V}(g_1^h, \dots, g_s^h) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$. Além disso, pelo item (c) da Proposição 3.12 acima e pela Proposição 3.11 obtemos que $V \cap U_0 = W$. Assim, nossa variedade afim original W é a **porção afim** da variedade projetiva V na carta U_0 .

Dessa forma, se partirmos de uma variedade afim, homogeneizando as equações e considerando a variedade projetiva correspondente, pode-se obter um objeto geométrico mais complicado. Com efeito, não visualizamos completamente o objeto inteiro na porção afim original da variedade. Em geral, dada uma variedade projetiva $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, como $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i$, talvez seja necessário considerar $V \cap U_i$ para cada $i = 0, \dots, n$ para obter uma visualização completa do objeto geométrico em questão, isso quando possível, o que para $n \geq 4$, já é bem complexo.

Relação Álgebra-Geometria no Espaço Projetivo

Nessa seção estudaremos a relação álgebra-geometria para variedades projetivas. Para começar, notamos uma diferença entre os casos afim e projetivo no lado algébrico. Isto é, na Definição 3.10 da Seção 3.2, introduzimos variedades projetivas como os zeros comuns de um conjunto de polinômios homogêneos. Contudo, o fato de um polinômio ser homogêneo não é preservado sob a operação da soma em $k[x_0, \dots, x_n]$. Por exemplo, se somarmos dois polinômios homogêneos de graus totais distintos, a soma não será um polinômio homogêneo.

Dessa forma, se tomarmos o ideal $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ gerado por uma coleção de polinômios homogêneos, I irá conter muitos polinômios não homogêneos e estes não serão candidatos para as equações definidoras de uma variedade projetiva. No entanto, cada elemento de I se anula em todas as coordenadas homogêneas de cada ponto de $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$, isto segue porque cada $g \in I$ tem a forma

$$g = \sum_{j=1}^s A_j f_j, \text{ para algum } A_j \in k[x_0, \dots, x_n] \quad (3.1)$$

Substituindo qualquer coordenada homogênea de um ponto de V em g irá resultar em zero, pois cada f_i com $i = 1, \dots, s$ é zero lá.

Uma observação mais importante diz respeito às componentes homogêneas de g . Suponha expandirmos cada A_j como a soma de suas componentes homogêneas:

$$A_j = \sum_{i=1}^d A_{ji}$$

Substituindo essa notação na Equação (3.1) e coletando termos de mesmo grau total, obtemos que as componentes homogêneas de g também estão no ideal $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$.

Assim, embora I contenha elementos não homogêneos g , vemos que I contém também as componentes homogêneas de g . Essa constatação motiva a seguinte definição de uma classe especial de ideais em $k[x_0, \dots, x_n]$.

Definição 3.12 Um ideal I em $k[x_0, \dots, x_n]$ é dito ser **homogêneo** se para cada $f \in I$, as componentes homogêneas f_i de f também estão em I .

A maioria dos ideais não possuem essa propriedade como nos revela o exemplo abaixo.

Exemplo 3.12 Seja $I = \langle y - x^2 \rangle \subseteq k[x, y]$. As componentes homogêneas de $f = y - x^2$ são $f_1 = y$ e $f_2 = -x^2$, e nenhum desses polinômios estão em I , pois nenhum deles é um múltiplo de $y - x^2$. Dessa forma, I não é um ideal homogêneo.

No entanto, quando o ideal é homogêneo temos a seguinte caracterização útil.

Teorema 3.4 Seja $I \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ um ideal. São equivalentes:

- (a) I é um ideal homogêneo de $k[x_0, \dots, x_n]$.
- (b) $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, onde f_1, \dots, f_s são polinômios homogêneos.

Demonstração: Ver Teorema 2, Seção 3, Capítulo 8 de [11]. ■

Como resultado do Teorema 3.4 acima, para qualquer ideal homogêneo $I \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$, podemos definir

$$\mathbf{V}(I) = \{p \in \mathbb{P}^n(k) \mid f(p) = 0 \text{ para todo } f \in I\}$$

como no caso afim e temos o seguinte.

Proposição 3.13 Seja $I \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ um ideal homogêneo e suponha que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, onde f_1, \dots, f_s são homogêneos. Então $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$, de modo que $\mathbf{V}(I)$ é uma variedade projetiva.

Demonstração: Ver Proposição 3, Seção 3, Capítulo 8 de [11]. ■

Uma maneira de criar um ideal homogêneo é considerar o ideal gerado pelas equações definidoras de uma variedade projetiva. Mas há outra maneira pela qual uma variedade projetiva pode nos dar um ideal homogêneo, como enunciamos a seguir.

Proposição 3.14 Seja $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ uma variedade projetiva e considere

$$\mathbf{I}(V) = \{f \in k[x_0, \dots, x_n] \mid f(a) = 0 \text{ para todo } a \in V\}$$

Isso significa que f deve se anular para todas as coordenadas homogêneas de todos os pontos de V . Se k é infinito, então $\mathbf{I}(V)$ é um ideal homogêneo em $k[x_0, \dots, x_n]$.

Demonstração: Ver Proposição 4, Seção 3, Capítulo 8 de [11]. ■

Com os resultados acima enunciados, temos as informações necessárias e suficientes para estabelecermos a relação álgebra-geometria entre variedades projetivas em $\mathbb{P}^n(k)$ e ideais homogêneos em $k[x_0, \dots, x_n]$. O seguinte teorema é uma generalização do Teorema 3.2 da Seção 3.1.

Teorema 3.5 (Correspondência Ideal-Variedade) Seja k um corpo infinito. As aplicações

$$\{\text{variedades projetivas}\} \xrightarrow{\mathbf{I}} \{\text{ideais homogêneos}\}$$

e

$$\{\text{ideais homogêneos}\} \xrightarrow{\mathbf{V}} \{\text{variedades projetivas}\}$$

são funções que revertem inclusões. Além disso, para qualquer variedade projetiva V , temos que $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$, de modo que \mathbf{I} é sempre injetora e \mathbf{V} sobrejetora.

Demonstração: A demonstração é mesma que no caso afim. ■

Como resultado do Teorema 3.5 acima, toda variedade projetiva pode ser decomposta em componentes irredutíveis. Como no caso afim, uma variedade projetiva $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ é dita **irredutível** se não pode ser escrita como uma união de duas variedades projetivas estritamente “menores” (contidas).

Teorema 3.6 Seja k um corpo infinito.

(a) Dada uma cadeia descendente de variedades projetivas em $\mathbb{P}^n(k)$,

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots,$$

existe um inteiro N tal que $V_N = V_{N+1} = \dots$.

(b) Toda variedade projetiva $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ pode ser escrita unicamente como uma união finita de variedades projetivas irredutíveis

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_m, \text{ onde } V_i \not\subseteq V_j \text{ se } i \neq j.$$

Demonstração: Ver Teorema 6, Seção 3, Capítulo 8 de [11]. ■

A relação entre as operações de somas, produtos e interseções de ideais homogêneos e as operações correspondentes sobre variedades projetivas se preservam como no caso afim. Definimos o **radical** de um ideal homogêneo como antes

$$r(I) = \{f \in k[x_0, \dots, x_n] \mid f^m \in I \text{ para algum } m \geq 1\}$$

E como se pode imaginar, o radical de um ideal homogêneo é sempre um ideal homogêneo, como nos diz a proposição abaixo.

Proposição 3.15 Seja $I \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ um ideal homogêneo. Então $r(I)$ também é um ideal homogêneo em $k[x_0, \dots, x_n]$.

Demonstração: Ver Proposição 7, Seção 3, Capítulo 8 de [11]. ■

A parte final dessa seção diz respeito ao que acontece num corpo algebricamente fechado k . Aqui, esperamos uma relação especialmente estrita entre variedades projetivas e ideais homogêneos. No caso afim, isso foi fornecido pelo Teorema 3.1, que dizia que sobre um ideal $I \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$: $\mathbf{V}_a(I) = \emptyset$ em $k^n \iff I = k[x_0, \dots, x_n]$ e $r(I) = \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I))$ em $k[x_0, \dots, x_n]$. Nessa notação, usamos \mathbf{I}_a e \mathbf{V}_a para denotar as versões afins de \mathbf{I} e \mathbf{V} , respectivamente. Nesse sentido, parece natural perguntar-se, se esses resultados se estendem a variedades projetivas e ideais homogêneos. Contudo, a resposta neste caso, é surpreendentemente não.

Para ver como isso pode ocorrer, considere o ideal $I = \langle x_0, \dots, x_n \rangle \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Então $\mathbf{V}(I) \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ é definida pelas equações

$$x_0 = \dots = x_n = 0$$

que não tem soluções em $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, uma vez que não pode ocorrer de todas as coordenadas homogêneas serem iguais a zero simultaneamente. Disto segue que $\mathbf{V}(I) = \emptyset$, mas $I \neq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Felizmente, $I = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ é um dos poucos ideais para os quais $\mathbf{V}(I) = \emptyset$. A versão projetiva do Teorema 3.1 pode ser enunciada em duas partes. A parte abaixo descreve todos os ideais sem soluções projetivas.

Teorema 3.7 (Teorema dos Zeros de Hilbert (Projetivo)) Seja k um corpo algebricamente fechado e I um ideal homogêneo em $k[x_0, \dots, x_n]$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $\mathbf{V}(I) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ é vazia.
- (b) Para cada $0 \leq i \leq n$, existe um inteiro $m_i \geq 0$ tal que $x_i^{m_i} \in I$.
- (c) Existe algum $r \geq 1$ tal que $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subseteq I$.
- (d) $I : \langle x_0, \dots, x_n \rangle^\infty = k[x_1, \dots, x_n]$.

Demonstração: Ver Teorema 8, Seção 3, Capítulo 8 de [11]. ■

Além das condições listadas acima, existem outras equivalentes a $\mathbf{V}(I) = \emptyset$ em $\mathbb{P}^n(k)$. Uma vez descritos os ideais do Teorema 3.7 acima, obtemos a segunda parte do Teorema 3.1 para variedades projetivas.

Teorema 3.8 (Teorema dos Zeros de Hilbert (Projetivo)) Seja k um corpo algebricamente fechado e I um ideal homogêneo em $k[x_0, \dots, x_n]$. Se $V = \mathbf{V}(I)$ é uma variedade projetiva não vazia em $\mathbb{P}^n(k)$, então temos $\mathbf{I}(V) = r(I)$.

Demonstração: Ver Teorema 9, Seção 3, Capítulo 8 de [11]. ■

Agora, que temos a versão projetiva do Teorema dos Zeros de Hilbert, podemos completar a correspondência ideal-variedade (versão projetiva) iniciada no Teorema 3.5. Um ideal homogêneo radical em $k[x_0, \dots, x_n]$ é um ideal homogêneo que satisfaz $r(I) = I$. Como no caso afim, temos uma bijeção entre variedades projetivas e ideais homogêneos radicais, desde que excluamos os casos $r(I) = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ e $r(I) = \langle 1 \rangle$.

Teorema 3.9 (Correspondência Ideal-Variedade Projetivo) Seja k um corpo algebricamente fechado. Se restringirmos as correspondências do Teorema 3.5 para variedades projetivas não vazias e ideais homogêneos radicais propriamente contidos em $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$, então

$$\{\text{variedades projetivas não vazias}\} \xrightarrow{\mathbf{I}} \left\{ \begin{array}{l} \text{ideais homogêneos radicais} \\ \text{propriamente contidos em } \langle x_0, \dots, x_n \rangle \end{array} \right\}$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ideais homogêneos radicais} \\ \text{propriamente contidos em } \langle x_0, \dots, x_n \rangle \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathbf{V}} \{\text{variedades projetivas não vazias}\}$$

são bijeções que revertem inclusões e são inversas uma da outra.

Demonstração: Ver Teorema 10, Seção 3, Capítulo 8 de [11]. ■

Com efeito, temos também uma correspondência entre variedades projetivas irredutíveis e ideais primos homogêneos. [Exercício 11, item (c), Seção 3, Capítulo 8 de [11]].

Fecho Projetivo de uma Variedade Afim

Já vimos que qualquer variedade afim pode ser vista como a porção afim de uma variedade projetiva. Como isso pode ser feito de mais de uma maneira, gostaríamos de encontrar a menor variedade projetiva contendo uma dada variedade afim. Primeiro vejamos uma maneira de homogeneizar um ideal qualquer de $k[x_1, \dots, x_n]$.

Definição 3.13 Seja $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Definimos a homogeneização de I , o ideal

$$I^h = \langle f^h \mid f \in I \rangle \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$$

onde f^h é a homogeneização de f .

Naturalmente, da definição acima temos o seguinte resultado.

Proposição 3.16 Para qualquer ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$, a homogeneização I^h é um ideal homogêneo em $k[x_1, \dots, x_n]$.

Demonstração: Ver Proposição 2, Seção 4, Capítulo 8 de [11]. ■

Contudo, a Definição 3.13 acima não é completamente satisfatória, no sentido de que ela não nos dá um conjunto finito de geradores para o ideal I^h . Dado um determinado conjunto finito de geradores $\{f_1, \dots, f_s\}$ para $I^h \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$, é sempre verdade que $\langle f_1^h, \dots, f_s^h \rangle$ é um ideal homogêneo e está contido em I^h . No entanto, como mostra o exemplo a seguir, I^h pode conter estritamente $\langle f_1^h, \dots, f_s^h \rangle$.

Exemplo 3.13 Considere $I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3 \rangle$, o ideal da cúbica torcida afim em \mathbb{R}^3 . Se homogeneizarmos f_1, f_2 , então obtemos o ideal

$$J = \langle x_2x_0 - x_1^2, x_3x_0^2 - x_1^3 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2, x_3].$$

Agora, observe que $J \neq I^h$. De fato, considere o polinômio

$$f_3 = f_2 - x_1f_1 = x_3 - x_1^3 - x_1(x_2 - x_1^2) = x_3 - x_1x_2 \in I.$$

Então, $f_3^h = x_0x_3 - x_1x_2$ é um polinômio homogêneo de grau dois em I^h . Como os geradores de J também são homogêneos, de graus dois e três, respectivamente, se tivéssemos uma equação da forma $f_3^h = A_1f_1^h + A_2f_2^h$, então usando as expansões de A_1 e A_2 em suas componentes homogêneas, obteríamos que f_3^h seria um múltiplo constante de f_1^h , e como isso é falso, temos que $f_3^h \notin J$ e, portanto, $J \neq I^h$.

A partir de agora, focaremos nossa discussão acerca do significado geométrico da homogeneização de um ideal. Começamos, vendo o que acontece ao homogeneizarmos o ideal $\mathbf{I}_a(W)$ de todos os polinômios que se anulam numa variedade afim W . Isso nos leva à seguinte definição.

Definição 3.14 Dada uma variedade afim $W \subseteq k^n$, o **fecho projetivo** de W é a menor variedade projetiva que contém W , dada por $\overline{W} = \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, onde $\mathbf{I}_a(W)^h \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ é a homogeneização do ideal $\mathbf{I}_a(W) \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$.

O fecho projetivo de uma variedade afim tem as seguintes importantes propriedades.

Proposição 3.17 Seja $W \subseteq k^n$ uma variedade afim e $\overline{W} \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ seu fecho projetivo. Então

- (a) $\overline{W} \cap U_0 = \overline{W} \cap k^n = W$.
- (b) \overline{W} é a menor variedade projetiva em $\mathbb{P}^n(k)$ contendo W .
- (c) Se W é irredutível, então assim é \overline{W} .
- (d) Nenhuma componente irredutível de W está no hiperplano no infinito $\mathbf{V}(x_0) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$.

Demonstração: Ver Proposição 7, Seção 4, Capítulo 8 de [11]. ■

Exemplo 3.14 Considere a cúbica torcida afim $W \subseteq \mathbb{R}^3$. Já vimos no Exemplo 3.10 que $\mathbf{I}_a(W) = \langle x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3 \rangle$. Logo, temos que $\mathbf{I}_a(W)^h = \langle x_1^2 - x_0x_2, x_1x_2 - x_0x_3, x_1x_3 - x_2^2 \rangle$. Disto segue, que a variedade $V' = \mathbf{V}(x_1^2 - x_0x_2, x_1x_2 - x_0x_3, x_1x_3 - x_2^2) \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ é o fecho projetivo da cúbica torcida afim.

A principal desvantagem da Definição 3.14 de fecho projetivo apresentada, é o fato de que ela exige que tenhamos explicitamente $\mathbf{I}_a(W)$. Seria mais cômodo e conveniente se pudéssemos calcular o fecho projetivo diretamente de qualquer ideal definidor de W . Quando o corpo k é algebricamente fechado, isso é sempre possível.

Teorema 3.10 Seja k um corpo algebricamente fechado e $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Então $\mathbf{V}(I^h) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ é o fecho projetivo de $\mathbf{V}_a(I) \subseteq k^n$.

Demonstração: Ver Teorema 8, Seção 4, Capítulo 8 de [11]. ■

Infelizmente, o Teorema 3.10 pode falhar quando o corpo k não for algebricamente fechado, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 3.15 Considere $I = \langle x_1^2 + x_2^4 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x_1, x_2]$. Então, $W = \mathbf{V}_a(I)$ consiste de um único ponto $(0, 0)$ em \mathbb{R}^2 , e assim, o fecho projetivo é o único ponto $\overline{W} = \{(1 : 0 : 0)\} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, uma vez que, obviamente, essa é a menor variedade projetiva que contém W . Por outro lado, $I^h = \langle x_1^2x_0^2 + x_2^4 \rangle$ e temos que $\mathbf{V}(I^h) = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0)\} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Isso mostra que $\mathbf{V}(I^h)$ contém estritamente o fecho projetivo de $W = \mathbf{V}_a(I)$.

4 Mergulhos de Veronese, Segre e Segre-Veronese

Neste capítulo, trataremos de definir especificamente o objeto de estudo desse trabalho: o mergulho de Segre-Veronese. Por ser composição de um mergulho de Segre com um mergulho de Veronese, definamos antes estes dois mergulhos.

Mergulho de Veronese

Definição 4.1 Seja n e d inteiros positivos. Definimos a variedade de **Veronese** V_d^n como sendo a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} v_d^n : \mathbb{P}^n &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ (x_0 : x_1 : \dots : x_n) &\mapsto (M_0 : M_1 : \dots : M_N), \end{aligned}$$

em que $N = \binom{n+d}{d} - 1$ e M_0, \dots, M_N são todos os monômios de grau d nas variáveis x_0, \dots, x_n .

Exemplo 4.1 A variedade de Veronese V_2^1 é a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} v_2^1 : \mathbb{P}_x^1 &\rightarrow \mathbb{P}_z^2 \\ (x_0 : x_1) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2). \end{aligned}$$

Observe que $V_2^1 = \mathbf{V}(z_0z_2 - z_1^2)$ é uma **cônica** em \mathbb{P}^2 .

Exemplo 4.2 A variedade de Veronese V_3^1 é a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} v_3^1 : \mathbb{P}_x^1 &\rightarrow \mathbb{P}_z^3 \\ (x_0 : x_1) &\mapsto (x_0^3 : x_0^2x_1 : x_0x_1^2 : x_1^3). \end{aligned}$$

Neste caso, temos que $V_3^1 = \mathbf{V}(z_0z_3 - z_1z_2, z_1^2 - z_0z_3, z_2^2 - z_1z_3)$ é uma **cúbica torcida** em \mathbb{P}^3 .

Exemplo 4.3 A variedade de Veronese V_2^2 é a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} v_2^2 : \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^5 \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2). \end{aligned}$$

Neste caso, V_2^2 é chamada a **superfície de Veronese**.

Exemplo 4.4 A variedade de Veronese V_d^1 é a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} v_d^1 : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^d \\ (x_0 : x_1) &\mapsto (x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \dots : x_0x_1^{d-1} : x_1^d). \end{aligned}$$

Neste caso, $V_d^1 = \mathbf{V}(D_{ij}, 1 \leq i < j \leq d)$ é a **curva racional normal**, onde D_{ij} é o determinante 2×2 formado pelas colunas i e j da matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_d \end{pmatrix}$$

Exemplo 4.5 A variedade de Veronese V_2^n é a imagem da aplicação

$$v_2^n : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{\frac{(n+2)(n+1)}{2} - 1}$$

$$(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : \cdots : x_n^2).$$

Exemplo 4.6 Dada uma variedade de Veronese V_2^n podemos representá-la na forma matricial. Considere a variedade V_2^2 dada por

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2)$$

então a matriz simétrica P dada por

$$P = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix},$$

é a representação matricial de V_2^2 .

Proposição 4.1 Seja A uma matriz $m \times n$ não nula. Então o posto da matriz A é igual a 1 se, e somente se, existem vetores $x \in k^m$ e $y \in k^n$ não nulos tais que $A = x^T y$.

Demonstração: Suponha que o posto de A seja 1. Então todas as colunas de A são múltiplas de um vetor $v = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in k^m$. Daí,

$$A = [a_1 v^T | a_2 v^T | \cdots | a_n v^T].$$

Seja o vetor $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in k^n$, temos que

$$\begin{aligned} v^T a &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \\ &= \begin{bmatrix} v_1 a_1 & v_1 a_2 & \cdots & v_1 a_n \\ v_2 a_1 & v_2 a_2 & \cdots & v_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_m a_1 & v_m a_2 & \cdots & v_m a_n \end{bmatrix} \\ &= [a_1 v^T | a_2 v^T | \cdots | a_n v^T] := A. \end{aligned}$$

Basta então tomar $x = v$ e $y = a$. Por outro lado, suponha que $A = x^T y$, onde $x = (x_1, \dots, x_m)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$. Dessa forma,

$$A = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m y_1 & x_m y_2 & \cdots & x_m y_n \end{bmatrix} = [y_1 x^T | y_2 x^T | \cdots | y_n x^T]$$

Dessa forma, todas as colunas de A são múltiplas de x^T e portanto, o posto de A é igual a 1. ■

Corolário 4.1 Seja A uma matriz não nula quadrada de ordem n . Então A é uma matriz simétrica de posto 1 se, e somente se, existe um vetor $x \in k^n$ não nulo tal que $A = \alpha x^T x$.

Demonstração: Suponha que A seja uma matriz simétrica de posto 1. Como o posto de A é igual a 1, pela Proposição 4.1, existem $u, v \in k^n$ tais que $A = u^T v$. Sejam $x = \frac{u}{\|u\|}$ e $y = \frac{v}{\|v\|}$ e escreva $A = \beta x^T y$, onde $\beta = \|u\| \|v\|$. Como A é uma matriz simétrica, então

$$\beta y^T x = A^T = A = \beta x^T y \Rightarrow y^T x = x^T y.$$

Multiplicando ambos os lados por y à esquerda e por x^T à direita e lembrando que x e y são unitários, obtemos

$$\|y\|^2 \|x\|^2 = 1 = yy^T xx^T = yx^T yx^T = (yx^T)^2.$$

Sendo assim, os vetores x e y são linearmente dependentes. Como ambos são unitários, segue que $y = \pm x$ e portanto, $A = \pm \beta x^T x$. Por outro lado, se existe $x \in k^n$ tal que $A = \alpha x^T x$, então

$$A^T = (\alpha x^T x)^T = \alpha x^T x = A$$

e portanto, A é simétrica. Além disso, pela Proposição anterior, A tem posto 1. ■

Exemplo 4.7 A superfície de Veronese V_2^2 pode então ser identificada como o espaço das matrizes simétricas 3×3 de posto unitário. De fato, seja

$$p = (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2) \in V_2^2.$$

O ponto $(x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2) \in k^6$ é um representante de p e podemos escrever

$$(x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2) = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} := A$$

Pelo Corolário 4.1, temos que o posto de A é 1. Por outro lado, dada uma matriz B simétrica 3×3 de posto 1, pelo Corolário 4.1, temos que existe um vetor $x \in k^3$ tal que $B = \alpha x^T x$. Escreva $x = (x_0, x_1, x_2)$. Daí, temos que

$$B = \alpha \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \alpha(x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2).$$

E em coordenadas homogêneas, temos que

$$\alpha(x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2) \in (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2).$$

Mergulho de Segre

Definição 4.2 Seja $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$ uma r -upla de inteiros positivos. Definimos a variedade de **Segre** $S^{\mathbf{n}}$ como sendo a imagem da aplicação

$$s^{\mathbf{n}} : \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} \rightarrow \mathbb{P}^N$$

$$(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_{1i_1} x_{2i_2} \cdots x_{ri_r} \mid i_j = 0, \dots, n_j),$$

onde $x_k = (x_{k0} : \dots : x_{kn_k})$ e $N = \prod_{i=1}^r (n_i + 1) - 1$.

Exemplo 4.8 Tome $\mathbf{n} = (1, 1)$. Daí, $N = (1 + 1)(1 + 1) - 1 = 3$.

$$s^{(1,1)} : \mathbb{P}_x^1 \times \mathbb{P}_y^1 \rightarrow \mathbb{P}_z^3$$

$$((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) \mapsto (x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1).$$

Temos que a variedade de Segre é $S^{(1,1)} = \mathbf{V}(z_0 z_3 - z_1 z_2)$.

Exemplo 4.9 Tome $\mathbf{n} = (2, 1)$. Daí, $N = (2 + 1)(1 + 1) - 1 = 5$.

$$s^{(2,1)} : \mathbb{P}_x^2 \times \mathbb{P}_y^1 \rightarrow \mathbb{P}_z^5$$

$$((x_0 : x_1 : x_2), (y_0 : y_1)) \mapsto (x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_1 : x_2 y_0 : x_2 y_1).$$

Temos que a variedade de Segre é $S^{(2,1)} = \mathbf{V}(z_0 z_3 - z_1 z_2, z_3 z_4 - z_2 z_5)$.

Mergulho de Segre-Veronese

Definição 4.3 Sejam $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$ e $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$ duas r -uplas de inteiros positivos. Então a variedade de **Segre-Veronese** $SV_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}}$ é dada pela imagem da aplicação

$$sv_{\mathbf{d}}^{\mathbf{n}} : \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} \rightarrow \mathbb{P}^N$$

$$(x_1, \dots, x_r) \mapsto (M_0 : \dots : M_N),$$

onde $N = \prod_{i=1}^r \binom{n_i + d_i}{d_i} - 1$ e M_0, \dots, M_N são todas os monômios de grau d_i em relação às variáveis de \mathbb{P}^{n_i} para $i = 1, \dots, r$.

Exemplo 4.10 Quando $r \geq 1$ e $d_1 = \dots = d_r = 1$, temos a variedade de Segre, dada pela imagem da aplicação

$$sv_{(1, \dots, 1)}^{\mathbf{n}} : \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} \rightarrow \mathbb{P}^N$$

$$(x_1, \dots, x_r) \mapsto (M_0 : \dots : M_N),$$

onde M_j são todos os monômios de grau 1 nas variáveis de \mathbb{P}^{n_i} para cada $i = 1, \dots, r$ e

$$N = \prod_{i=1}^r \binom{n_i + 1}{1} - 1 = \prod_{i=1}^r (n_i + 1) - 1.$$

Exemplo 4.11 A variedade de Segre-Veronese $SV_{(1,1)}^{(1,1)}$ é dada pela imagem da aplicação

$$\begin{aligned} sv_{(1,1)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^3 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1). \end{aligned}$$

Exemplo 4.12 A variedade de Segre-Veronese $SV_{(1,1)}^{(1,2)}$ é dada pela imagem da aplicação

$$\begin{aligned} sv_{(1,1)}^{(1,2)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^5 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1 : y_2)) &\mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_0y_2 : x_1y_0 : x_1y_1 : x_1y_2). \end{aligned}$$

Exemplo 4.13 A variedade de Segre-Veronese $SV_{(1,2)}^{(1,1)}$ é dada pela imagem da aplicação

$$\begin{aligned} sv_{(1,2)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^5 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0y_0^2 : x_0y_0y_1 : x_0y_1^2 : x_1y_0^2 : x_1y_0y_1 : x_1y_1^2). \end{aligned}$$

Exemplo 4.14 A variedade de Segre-Veronese $SV_{(2,2)}^{(1,1)}$ é dada pela imagem da aplicação

$$\begin{aligned} sv_{(2,2)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^8 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0^2y_0^2 : x_0^2y_0y_1 : x_0^2y_1^2 : x_0x_1y_0^2 : x_0x_1y_0y_1 : x_0x_1y_1^2 : x_1^2y_0^2 : x_1^2y_0y_1 : x_1^2y_1^2). \end{aligned}$$

Exemplo 4.15 A variedade de Segre-Veronese $SV_{(1,2)}^{(2,1)}$ é dada pela imagem da aplicação

$$\begin{aligned} sv_{(1,2)}^{(2,1)} : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^8 \\ ((x_0 : x_1 : x_2), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0y_0^2 : x_0y_0y_1 : x_0y_1^2 : x_1y_0^2 : x_1y_0y_1 : x_1y_1^2 : x_2y_0^2 : x_2y_0y_1 : x_2y_1^2). \end{aligned}$$

Exemplo 4.16 A variedade de Segre-Veronese $SV_{(1,1,1)}^{(1,1,1)}$ é dada pela imagem da aplicação

$$\begin{aligned} sv_{(1,1,1)}^{(1,1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^7 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1), (z_0 : z_1)) &\mapsto (x_0y_0z_0 : x_0y_0z_1 : x_0y_1z_0 : x_0y_1z_1 : x_1y_0z_0 : x_1y_0z_1 : x_1y_1z_0 : \\ &\quad x_1y_1z_1). \end{aligned}$$

Exemplo 4.17 A variedade de Segre-Veronese $SV_{(d_1, d_2)}^{(1,1)}$ é dada pela imagem da aplicação

$$\begin{aligned} sv_{(d_1, d_2)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0^{d_1}y_0^{d_2} : x_0^{d_1}y_0^{d_2-1}y_1 : \cdots : x_0^{d_1}y_0y_1^{d_2-1} : x_0^{d_1}y_1^{d_2} : \\ &\quad x_0^{d_1-1}x_1y_0^{d_2} : x_0^{d_1-1}x_1y_0^{d_2-1}y_1 : \cdots : x_0^{d_1-1}x_1y_0y_1^{d_2-1} : x_0^{d_1-1}x_1y_1^{d_2} : \\ &\quad \cdots : x_1^{d_1}y_0^{d_2} : x_1^{d_1}y_0^{d_2-1}y_1 : \cdots : x_1^{d_1}y_0y_1^{d_2-1} : x_1^{d_1}y_1^{d_2}), \end{aligned}$$

onde $N = \prod_{i=1}^2 \binom{1+d_i}{d_i} - 1 = \binom{1+d_1}{d_1} \binom{1+d_2}{d_2} - 1$.

Observação 4.1 Veremos mais adiante, também como exemplos, aplicações particulares do Exemplo 4.17 acima. São eles os Exemplos 5.13, 5.14, 5.16, 5.17 e 5.18 com multigráu (d_1, d_2) igual a $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$ e $(2, 2)$, respectivamente. Os exemplos com multigráu (d_1, d_2) igual a $(1, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 2)$ também são abordados como sistemas lineares, nos Exemplos 7.1, 7.2 e 7.3, respectivamente. Além disso, os Exemplos 7.26 e 7.27, abordam a relação entre uma hipersuperfície S de $(\mathbb{P}^1)^r$ e uma seção hiperplana H de X , onde X denota a imagem do mergulho de Segre-Veronese.

5 Espaços Lineares e Defeitos Secantes

5.1 Espaços Lineares

Nessa seção iremos definir, exemplificar e provar algumas propriedades importantes sobre espaços lineares, uma importante classe de variedades algébricas projetivas. Como \mathbb{P}^n não possui uma estrutura de espaço vetorial, não podemos somar pontos em \mathbb{P}^n , para contornar esse problema, uma alternativa é “transferir” as propriedades dos espaços lineares no espaço afim k^{n+1} para o espaço projetivo \mathbb{P}^n , pela projetivização.

Definição 5.1 (Espaço Linear) Dados $n - r$ polinômios de grau 1 linearmente independentes f_1, \dots, f_{n-r} em $k[x_0, \dots, x_n]$, a variedade algébrica $V = V(f_1, \dots, f_{n-r}) \subset \mathbb{P}^n$ é chamada **espaço linear** de dimensão r , também dizemos que V é um **subespaço** de \mathbb{P}^n .

Observação 5.1 Na definição 5.1, se tivermos $r = -1$, então $V = \emptyset$. Se $r = n$, então $V = \mathbb{P}^n$. Se $r = n - 1$, então $V(f_1)$ é chamado um **hiperplano** em \mathbb{P}^n . Se porém, tivermos $r = 1$, então $V = V(f_1, \dots, f_{n-1})$ é chamada de **reta** em \mathbb{P}^n .

Exemplo 5.1 Por exemplo, a reta $l = V(ax + by + cz)$ com $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ é um hiperplano em \mathbb{P}^2 . Se $n = 3$ e $r = 2$, então $V(f_1)$ é um plano em \mathbb{P}^3 . Por exemplo, se $n = 2$ e $r = 1$, então $V(f_1)$ é uma reta em \mathbb{P}^2 .

Proposição 5.1 Todo conjunto unitário em \mathbb{P}^2 é um espaço linear.

Demonstração: De fato, dado $(a : b : c) \in \mathbb{P}^2$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $c \neq 0$. Dessa forma, $(a : b : c) = (\alpha : \beta : 1) \in \mathbb{P}^2$. Considere os polinômios lineares homogêneos $x - \alpha z, y - \beta z \in k[x, y, z]$. Afirmamos que

$$\{(\alpha : \beta : 1)\} = V(x - \alpha z, y - \beta z).$$

Com efeito, $(x_0 : y_0 : z_0) \in V(x - \alpha z, y - \beta z)$ se, e somente se, $x_0 = \alpha z_0$ e $y_0 = \beta z_0$. Isto, por sua vez, ocorre se, e somente se

$$(x_0 : y_0 : z_0) = (\alpha z_0 : \beta z_0 : z_0) = z_0(\alpha : \beta : 1) = (\alpha : \beta : 1).$$

Os outros dois casos (em que $a \neq 0$ e $b \neq 0$) seguem de forma análoga. ■

De forma parecida, também vale um resultado análogo para $n \geq 2$.

Proposição 5.2 Se X e Y são dois espaços lineares contidos em \mathbb{P}^n , então $X \cap Y$ também é um espaço linear contido em \mathbb{P}^n . Além disso, $\dim(X \cap Y) \leq \min\{\dim X, \dim Y\}$.

Demonstração: De fato, sejam $X = V(f_1, \dots, f_{n-r})$ e $Y = V(g_1, \dots, g_{n-s})$ dois espaços lineares em \mathbb{P}^n . Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} x \in X \cap Y &\iff f_1(x) = \dots = f_{n-r}(x) = g_1(x) = \dots = g_{n-s}(x) = 0 \\ &\iff x \in V(f_1, \dots, f_{n-r}, g_1, \dots, g_{n-s}) \end{aligned}$$

Escolhendo dentre os polinômios lineares $f_1, \dots, f_{n-r}, g_1, \dots, g_{n-s}$ aqueles que são linearmente independentes e denotando-os por h_1, \dots, h_{n-t} , temos que

$$X \cap Y = V(h_1, \dots, h_{n-t}).$$

O número mínimo de polinômios lineares linearmente independentes que podemos ter dentre os $f_1, \dots, f_{n-r}, g_1, \dots, g_{n-s}$ é $\min\{n-r, n-s\}$. Portanto,

$$\dim(X \cap Y) \geq \min\{r, s\}.$$

Além disso, como $X \cap Y \subset X$ e $X \cap Y \subset Y$, devemos ter

$$\dim(X \cap Y) \leq \min\{\dim X, \dim Y\}.$$

■

Definição 5.2 Seja E um espaço vetorial sobre um corpo k . Definimos em E , a seguinte relação de equivalência:

$$u \sim v \iff u = \lambda v, \text{ para algum } 0 \neq \lambda \in k.$$

Definimos também a **projetivização** de E , como sendo o conjunto das classes de equivalência dessa relação de equivalência, isto é,

$$\mathbb{P}(E) = \frac{E \setminus \{0\}}{\sim}.$$

Exemplo 5.2 Sejam $p_0, \dots, p_r \in \mathbb{P}^n$. Considere representantes $\widehat{p}_0, \dots, \widehat{p}_r \in k^{n+1}$ no espaço afim e seja $V = \langle \widehat{p}_0, \dots, \widehat{p}_r \rangle$ o espaço vetorial gerado por eles. Seja L a projetivização de V como subconjunto \mathbb{P}^n , escrevemos

$$L = \langle p_0, \dots, p_r \rangle$$

e dizemos que p_0, \dots, p_r geram L , ou que L é gerado pelos p_j 's.

Da construção acima, segue que L é um espaço linear. Reciprocamente, todo espaço linear dado por equações também pode ser escrito como espaço linear gerado por certos p_j 's. Isto segue diretamente do fato de que no espaço afim k^{n+1} é equivalente representar um espaço linear por geradores ou por equações.

Proposição 5.3 Existe uma bijeção entre o conjunto dos subespaços de \mathbb{P}^n de dimensão r e o conjunto dos subespaços de k^{n+1} de dimensão $r+1$.

Demonstração: De fato, seja $X = V(f_1, \dots, f_{n-r})$ um subespaço de \mathbb{P}^n de dimensão r , ou seja, os polinômios $f_i \in k[x_0, \dots, x_n]$ são lineares e linearmente independentes. O conjunto $V(f_1, \dots, f_{n-r}) \subset k^{n+1}$ define um subespaço em k^{n+1} de dimensão $r+1 = n+1 - (n-r)$. Por outro lado, se Y é um subespaço de k^{n+1} de dimensão $r+1$, então Y é o conjunto de soluções de um sistema linear homogêneo de $n-r = n+1 - (r+1)$ equações linearmente independentes. Sejam $f_i \in k[x_0, \dots, x_n]$ com $n-1, \dots, n-r$ os polinômios lineares que definem este sistema. Como o sistema é homogêneo e estes polinômios são lineares, temos que o conjunto $V(f_1, \dots, f_{n-r})$ define um subespaço em \mathbb{P}^n de dimensão $n-r$, uma vez que estes polinômios são linearmente independentes.

■

Definição 5.3 Dados r espaços lineares L_1, \dots, L_r em \mathbb{P}^n , dizemos que eles são **independentes** se os seus respectivos correspondentes V_1, \dots, V_r em k^{n+1} são linearmente independentes. Além disso, definimos o espaço gerado por L_1, \dots, L_r em \mathbb{P}^n como sendo a projetivização do espaço gerado por V_1, \dots, V_r em k^{n+1} .

Exemplo 5.3 Sejam $e_1 = (1 : 0 : 0 : 0)$, $e_2 = (0 : 1 : 0 : 0)$, $e_3 = (0 : 0 : 1 : 0)$ e $e_4 = (0 : 0 : 0 : 1)$ pontos em \mathbb{P}^3 . Considere os subespaços

$$L_{12} = \langle e_1, e_2 \rangle, L_{34} = \langle e_3, e_4 \rangle \text{ e } L_{23} = \langle e_2, e_3 \rangle.$$

Observe que L_{12} e L_{34} são independentes, pois os seus correspondentes em k^4

$$V_{12} = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle \text{ e } V_{34} = \langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$$

são linearmente independentes. Por outro lado, L_{34} e L_{23} não são independentes, uma vez que seus correspondentes em k^4

$$V_{34} = \langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle \text{ e } V_{23} = \langle (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle$$

não são linearmente independentes, já que possuem interseção não trivial dada por $\langle e_3 \rangle$.

Proposição 5.4 Se L_1, \dots, L_r são subespaços independentes de \mathbb{P}^n , então

$$\dim \langle L_1, \dots, L_r \rangle = (r - 1) + \dim L_1 + \dots + \dim L_r.$$

Demonstração: De fato, sejam V_1, \dots, V_r os correspondentes a L_1, \dots, L_r no espaço afim k^{n+1} . Assim, V_1, \dots, V_r são linearmente independentes e daí

$$\begin{aligned} \dim \langle L_1, \dots, L_r \rangle &= \dim \langle V_1, \dots, V_r \rangle - 1 \\ &= \dim V_1 + \dots + \dim V_r - 1 \\ &= (\dim L_1 + 1) + \dots + (\dim L_r + 1) - 1 \\ &= (r - 1) + \dim L_1 + \dots + \dim L_r. \end{aligned}$$

■

Proposição 5.5 A dimensão do espaço gerado por L_1, \dots, L_r em \mathbb{P}^n é máxima se, e somente se, esses espaços são independentes.

Demonstração: Sejam L_1, \dots, L_r espaços lineares independentes em \mathbb{P}^n . Sejam V_1, \dots, V_r os subespaços de k^{n+1} correspondentes. Como V_1, \dots, V_r são linearmente independentes, ou seja, seus geradores são linearmente independentes, então

$$\dim \langle V_1, \dots, V_r \rangle = \dim V_1 + \dots + \dim V_r,$$

que é a dimensão máxima possível para $\langle V_1, \dots, V_r \rangle$. Logo,

$$\dim \langle L_1, \dots, L_r \rangle = \dim \langle V_1, \dots, V_r \rangle - 1$$

é também máxima. Reciprocamente, suponha que $\dim \langle L_1, \dots, L_r \rangle$ é máxima. Como

$$\dim \langle V_1, \dots, V_r \rangle = \dim \langle L_1, \dots, L_r \rangle - 1,$$

temos que $\dim \langle V_1, \dots, V_r \rangle$ também é máxima e portanto, V_1, \dots, V_r são linearmente independentes e daí L_1, \dots, L_r são independentes.

■

Proposição 5.6 O fecho projetivo preserva a dimensão de um subespaço afim.

Demonstração: Seja L um subespaço de k^n tal que $\dim L = d$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que L é gerado pelos vetores e_1, \dots, e_d . Assim,

$$L = \langle e_1, \dots, e_d \rangle = V(y_{d+1}, \dots, y_n) \subset k^n \Rightarrow$$

$$\bar{L} = \overline{\langle e_1, \dots, e_d \rangle} = \overline{V(y_{d+1}, \dots, y_n)} = V(x_{d+1}, \dots, x_n) \subset \mathbb{P}^n,$$

onde y_i 's são as variáveis em k^n e x_i 's são as variáveis em \mathbb{P}^n para $i = d + 1, \dots, n$, o qual é descrito por $n - d$ equações linearmente independentes e portanto, tem dimensão $n - d$. ■

5.2 Defeitos Secantes

Nessa seção introduziremos a definição de variedade secante e defeito secante, principal assunto desse trabalho. Enunciaremos sem provar alguns resultados e exemplos, interessados devem consultar [29], nossa principal referência para essa parte.

Definição 5.4 Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade algébrica projetiva e h um inteiro positivo. Definimos a variedade h -secante de X ($Sec_h(X)$) como o fecho projetivo (fecho segundo a topologia de Zariski) da união de todos os espaços lineares gerados por h pontos de X :

$$Sec_h(X) := \overline{\bigcup_{p_1, \dots, p_h \in X} \langle p_1, \dots, p_h \rangle} \subset \mathbb{P}^N.$$

Observação 5.2 Como consequência da Definição 5.4 acima, dada uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ de dimensão n , temos que a $Sec_h(X)$ também é uma variedade projetiva em \mathbb{P}^N , para ver isso, o leitor poderá consultar a Seção 1.1 do Capítulo 1 de [29].

Definição 5.5 Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva de dimensão n . Chamaremos de **dimensão esperada** de $Sec_h(X)$, denotada por $\exp \dim Sec_h(X)$, a dimensão dada por $\exp \dim Sec_h(X) = \min\{h(n + 1) - 1, N\}$. Quando $\dim Sec_h(X) < \exp \dim Sec_h(X)$, dizemos que a variedade X é h -defeituosa.

Exemplo 5.4 Toda variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^N$ não é 1-defeituosa. De fato, se X é uma variedade projetiva de dimensão n , então

$$Sec_1(X) = \overline{\bigcup_{x_i \in X} \langle x_i \rangle} = \overline{\bigcup_{x_i \in X} x_i} = X.$$

A dimensão esperada de $Sec_1(X)$ é dada por $\exp \dim Sec_h(X) = \min\{1(n+1)-1, N\} = n$. Logo,

$$\dim Sec_1(X) = \dim X = n = \exp \dim Sec_1(X).$$

Portanto, a variedade projetiva X não é 1-defeituosa.

Exemplo 5.5 A $Sec_2(X) = \overline{\bigcup_{p_1, p_2 \in X} \langle p_1, p_2 \rangle}$ de uma variedade X é a secante usual de retas.

Proposição 5.7 Seja X uma variedade projetiva de \mathbb{P}^N de dimensão n . Se X é h -defeituosa, então X é k -defeituosa para todo $k \geq h$.

Demonstração: Provemos por indução, supondo que a variedade é h -defeituosa e mostrando que ela também é $h + 1$ -defeituosa. Como X é h -defeituosa, temos que

$$\dim \text{Sec}_h(X) < \exp \dim \text{Sec}_h(X) = \min\{h(n+1) - 1, N\}.$$

Pela Proposição 1.3.1 do Capítulo 1 de [29], temos que a dimensão de $\text{Sec}_{h+1}(X)$ é no máximo $\dim \text{Sec}_h(X) + (n+1)$. Assim,

$$\begin{aligned} \dim \text{Sec}_{h+1}(X) &\leq \dim \text{Sec}_h(X) + (n+1) \\ &< \exp \dim \text{Sec}_h(X) + (n+1) \\ &= \min\{(h+1)(n+1) - 1, N\} \\ &= \exp \dim \text{Sec}_{h+1}(X). \end{aligned}$$

Portanto, X é $h+1$ -defeituosa. ■

Exemplo 5.6 A superfície de Veronese V_2^2 é 2-defeituosa. De fato, considere a variedade V_2^2 como a imagem do morfismo

$$\begin{aligned} v_2^2 : \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^5 \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2) \end{aligned}$$

Agora considere um ponto $P = (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2) \in V_2^2$ o qual pode ser visto na sua forma matricial da seguinte maneira

$$P = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

tem posto 1 e a matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

possui posto entre 1 e 3, temos que $\text{posto}(P) \leq \min\{1, 3\}$, o que implica que

$$\text{posto}(P) = 1.$$

Ou seja, a matriz do ponto P é simétrica de posto 1. Portanto podemos considerar V_2^2 como um subconjunto das matrizes simétricas de posto 1, logo

$$\begin{aligned} \text{Sec}_2(V_2^2) &\subset \{\overline{M+N} \mid M, N \text{ matrizes } 3 \times 3 \text{ simétricas de posto } 1\} \\ &= \{\overline{M} \mid \text{matriz simétrica de posto } \leq 2\} \\ &= \{\overline{M} \mid M \text{ matriz simétrica não nula de determinante nulo}\} \\ &= \{(y_0 : \dots : y_5) \mid y_0y_3y_5 + y_1y_4y_2 + y_2y_1y_4 - y_2^2y_3 - y_1^2y_5 - y_0y_4^2 = 0\} \\ &= V(\det(M)) = V((y_0y_3y_5 + y_1y_4y_2 + y_2y_1y_4 - y_2^2y_3 - y_1^2y_5 - y_0y_4^2)). \end{aligned}$$

Dessa maneira $\text{Sec}_2(V_2^2)$ é uma hipersuperfície de grau 3 em \mathbb{P}^5 , logo a codimensão é 1 e a dimensão dela é 4, porém a dimensão esperada de $\text{Sec}_2(V_2^2)$ é $2(2+1) - 1 = 5$. Portanto V_2^2 é 2 defeituosa.

Exemplo 5.7 A variedade V_2^n é n -defeituosa para todo $n \geq 2$. No Exemplo 5.6 provamos para $n = 2$, agora usaremos a mesma estratégia para um n qualquer. Considere a variedade V_2^n como a imagem do morfismo

$$v_2^n : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N \\ (x = x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (x_0^2 : x_0x_1 \cdots : x_0x_n : x_1^2 : x_1x_2 : \cdots : x_1x_n : \cdots : x_n^2)$$

Agora considere um ponto $P = (x_0^2 : x_0x_1 \cdots : x_0x_n : x_1^2 : x_1x_2 : \cdots : x_1x_n : \cdots : x_n^2) \in V_2^n$ o qual pode ser visto na sua forma matricial da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & \cdots & x_0x_n \\ x_0x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0x_n & x_1x_n & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Como a matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

tem posto 1 e a matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

possui posto entre 1 e n , temos que $\text{posto}(P) \leq \min\{1, n\}$, o que implica que

$$\text{posto}(P) = 1.$$

Ou seja, a matriz do ponto P é simétrica de posto 1. Portanto podemos considerar V_2^n como um subconjunto das matrizes simétricas de posto 1, logo analogamente ao Exemplo 5.6, temos que V_2^n pode ser representado como o conjunto das matrizes $(n+1) \times (n+1)$ simétricas com posto 1. Portanto temos que

$$\begin{aligned} \text{Sec}_n(V_2^n) &= \overline{\{M_1 + \cdots + M_n \mid M_1, \dots, M_n \text{ matrizes } (n+1) \times (n+1) \text{ simétricas de posto } 1\}} \\ &= \overline{\{M \mid M \text{ matriz simétrica de posto } \leq n\}} \\ &= \overline{\{M \mid M \text{ matriz simétrica com determinante nulo}\}} \\ &= V(\det(M)). \end{aligned}$$

Como $M = (y_{ij})$ é uma matriz $(n+1) \times (n+1)$ temos que $\det(M)$ é dado por um polinômio homogêneo de grau $n+1$ nos seus coeficientes y_{ij} e temos que $\text{Sec}_n(V_2^n)$ é uma hipersuperfície em \mathbb{P}^N , porém a dimensão esperada de $\text{Sec}_n(V_2^n)$ é

$$\begin{aligned} \exp \dim(\text{Sec}_n(V_2^n)) &= \min\{N, n(n+1) - 1\} \\ &= \min\{N, n^2 + n - 1\} \\ &= N, \end{aligned}$$

pois como $N = \binom{n+2}{2} - 1 = \frac{n^2 + 3n}{2}$, temos

$$n^2 + n - 1 = \frac{2n^2 + 2n}{2} - 1 > \frac{n^2 + 3n}{2} - 1 = N - 1$$

para todo $n \geq 2$. Portanto

$$\dim(\text{Sec}_n(V_2^n)) = N - 1 < N = \exp \dim(\text{Sec}_n(V_2^n)),$$

ou seja, V_2^n é n defeituosa.

Note que um questionamento que surge naturalmente é quais variedades são h -defeituosas e quais não são. Vários esforços tem sido feitos nessa direção, contudo este ainda é um problema em aberto. Alguns estudos renderam resultados que classificam algumas dessas variedades, colocando uma ou outra particularidade. Um resultado bastante conhecido na literatura é o Teorema de Alexander e Hirschowitz, que diz quais variedades de Veronese são defeituosa. Este resultado pode ser encontrado em [4] e [28]. Além destes, o mesmo resultado pode ser encontrado com mais detalhes em [24].

Para este trabalho estamos interessados em estudar os defeitos secantes para a variedade de Segre-Veronese consistida do mergulho de r produtos da reta projetiva \mathbb{P}^1 com multigráu (d_1, \dots, d_r) . O problema de determinar defeitos secantes em variedades de Segre-Veronese ainda é um problema em aberto e vários esforços tem sido feitos até o momento e foi resolvido apenas para alguns casos particulares, como se pode notar em [1], [2], [3], [6], [7], [8], [9], [10].

Neste trabalho estudaremos os defeitos secantes das variedades de Segre-Veronese investigando a dimensão do sistema linear associado $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$, sistema este que consiste das hipersuperfícies de $(\mathbb{P}^1)^r$ de multigráu (d_1, \dots, d_r) através de n pontos duplos em posição geral. Provaremos o Teorema 3.1 de [22], artigo norteador de toda essa dissertação, provando a especialidade ou a não especialidade do sistema $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$, conforme o Teorema de Classificação dado abaixo.

Teorema 5.1 (Teorema de Classificação) O sistema linear $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$ de $(\mathbb{P}^1)^r$ é não especial, exceto nos seguintes casos

r	<i>gráu</i>	n
2	(2, 2a)	2a + 1
3	(1, 1, 2a)	2a + 1
	(2, 2, 2)	7
4	(1, 1, 1, 1)	3

Via Lema de Terracini (vide Lema 5.2 abaixo), resolver este problema, equivale a calcular a dimensão da variedade secante do mergulho de Segre-Veronese $(\mathbb{P}^1)^r \rightarrow \mathbb{P}^N$, definido pelo sistema linear completo $|\mathcal{O}(d_1, \dots, d_r)|$ de $(\mathbb{P}^1)^r$.

Nossa abordagem consistirá em degenerar $(\mathbb{P}^1)^r$ para uma união de duas variedades ambas isomorfas a $(\mathbb{P}^1)^r$, degenerando simultâneamente o sistema linear para um sistema linear obtido como o produto fibrado de sistemas lineares nas duas componentes sobre o sistema linear restrito em sua interseção. O sistema linear limite é um pouco mais fácil que o original, em particular, este argumento de degeneração permitirá usar a indução no multigráu e em r .

Um importante passo básico para nosso argumento de indução está representado em [10], onde os autores mostram que se todos os d_i são iguais a 1, então $\mathcal{L}_{(1,\dots,1)}(2^n)$ tem sempre a dimensão esperada, logo é classificado como não especial, exceto no caso em que $r = 4$.

5.3 Lema de Terracini e Aplicações

Nessa seção apresentamos uma importante ferramenta no estudo de defeito secante de uma dada variedade: o Lema de Terracini (vide Lema 5.2 abaixo). Apresentamos de forma concreta a aplicação deste importante resultado para determinar se a variedade de Segre-Veronese é ou não defeituosa.

Definição 5.6 Sejam $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ e $p \in k^n$. Definimos a **linearização** de f em $p = (p_1, \dots, p_n)$ como sendo

$$d_p(f) = f(p) + (x_1 - p_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_n - p_n) \frac{\partial f}{\partial x_n}(p),$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ indica a derivada parcial formal de f em relação à x_i , $d_p(f) \in k[x_1, \dots, x_n]$ e $\deg_{x_i}(d_p(f)) \leq 1$.

Exemplo 5.8 Seja $f = x^2 - zy^3 \in k[x, y, z]$. Assim, temos que a linearização de f no ponto $(0, 0, 0) \in k^3$ é 0 e a linearização de f no ponto $(1, 0, 0) \in k^3$ é $2x - 1$.

Definição 5.7 Seja $X = V(f_1, \dots, f_r) \subset k^n$. Definimos o **espaço tangente** a X em $p \in X$, como sendo

$$O_p X = V(d_p(f_1), \dots, d_p(f_r)).$$

Se $X \subset k^n$ é uma variedade afim parametrizada por

$$\begin{aligned} f : k^m &\rightarrow k^n \\ t &\mapsto f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)), \end{aligned}$$

onde $t = (t_1, \dots, t_m)$. Definimos o espaço tangente a X em $p = f(t_0) \in X$ como sendo

$$O_p X = p + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_1}(t_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial t_n}(t_0) \right\rangle,$$

onde $\frac{\partial f}{\partial t_i}(t_0)$ é um vetor (uma direção tangente) de k^m e $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_1}(t_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial t_n}(t_0) \right\rangle$ é o subespaço vetorial de k^n gerado por estes n vetores.

Definição 5.8 Seja $X' = V(f_1, \dots, f_r) \subset \mathbb{P}^n$. Identificando k^n por meio de uma carta, digamos $k^n \cong V(x_0) \subset \mathbb{P}^n$, tomando $X = k^n \cap X'$ e $p \in X'$, definimos o **espaço tangente** a X' em p , como sendo o fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim, ou seja,

$$T_p X' = \overline{O_p X},$$

onde $O_p X \subset k^n$ é o espaço tangente afim.

Lema 5.1 Se $X \subset \mathbb{P}^N$ é uma variedade projetiva não degenerada e $\dim Sec_h(X) = N-1$, então $\dim Sec_{h+1}X = N$.

Demonstração: Ver Proposição 1.2.2, Capítulo 1 de [29]. ■

Quando formos provar uma determinada propriedade, faremos a prova para pontos gerais e essa ideia será utilizada por diversas vezes no decorrer deste trabalho. Tendo em vista a topologia de Zariski, podemos definir os conceitos de ponto geral e pontos gerais como segue.

Definição 5.9 Uma propriedade P a respeito de uma variedade algébrica $X \subset \mathbb{P}^n$ é dita **geral**, se ela for satisfeita em um aberto não vazio. Dizemos que um **ponto é geral** para a propriedade P , se existe um aberto não vazio que contém este ponto satisfazendo a propriedade P . Dizemos também que os **pontos** $p_1, \dots, p_h \in X$ são **gerais**, para a propriedade P , se existe um aberto não vazio contendo estes pontos e satisfazendo a propriedade P .

Observação 5.3 Pela Definição 2.6, todo aberto não vazio de \mathbb{P}^n é denso (Zariski), então não há problema em aplicar seguidamente vários resultados que utilizam o conceito de propriedade geral. Isso vem do fato de que a interseção de abertos não vazios e densos é também um aberto não vazio e denso.

Exemplo 5.9 Mostremos que três pontos gerais de \mathbb{P}^2 não estão alinhados. Para isso, basta mostrarmos que

$$V = \{(p, q, r) \in \mathbb{P}_x^2 \times \mathbb{P}_y^2 \times \mathbb{P}_z^2 \mid p, q, r \text{ estão alinhados}\}$$

é um fechado de $\mathbb{P}_x^2 \times \mathbb{P}_y^2 \times \mathbb{P}_z^2$. De fato, sejam $p = (x_0 : x_1 : x_2), q = (y_0 : y_1 : y_2), r = (z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2$. Temos que p, q, r estão alinhados se, e somente se, posto $(P) \leq 2$, onde

$$P = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}.$$

Com efeito,

$$\text{posto}(P) \leq 2 \iff \det(P) = 0 \iff F = 0,$$

onde $F = x_0y_1z_2 + x_1y_2z_0 + x_2y_0z_1 - x_2y_1z_0 - x_0y_2z_1 - x_1y_0z_2$. Assim, F é um polinômio homogêneo de grau 1 em cada um dos conjuntos de variáveis $(x, y$ e $z)$, logo $V = \mathbf{V}(F) \subset \mathbb{P}_x^2 \times \mathbb{P}_y^2 \times \mathbb{P}_z^2$ e portanto, é um conjunto fechado.

Exemplo 5.10 Mostremos que se p e π são um ponto e um plano, respectivamente, gerais em \mathbb{P}^2 , então $p \notin \pi$. De fato, como π é um hiperplano em \mathbb{P}_x^2 , existe um polinômio $F = z_0x_0 + z_1x_1 + z_2x_2$ homogêneo de grau 1 em $k[x_0, x_1, x_2]$, de tal modo que $\pi = V(F)$. Se considerarmos o conjunto dos hiperplanos, temos que

$$\{z_0x_0 + z_1x_1 + z_2x_2 = 0 \mid (z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2\} \cong \mathbb{P}^2.$$

Assim, $p = (x_0 : x_1 : x_2) \in \pi$ se, e somente se, $F = 0$, onde $F = z_0y_0 + z_1y_1 + z_2y_2$ é um polinômio homogêneo de grau 1 em cada um dos conjuntos de variáveis $(y$ e $z)$, logo $V = \mathbf{V}(F) \subset \mathbb{P}_y^2 \times \mathbb{P}_z^2$ e portanto, é também um conjunto fechado.

Lema 5.2 (Lema de Terracini) Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade algébrica projetiva. Seja $p \in \text{Sec}_h(X)$ um ponto geral tal que $p \in \langle p_1, \dots, p_h \rangle$ e $p_1, \dots, p_h \in X$ pontos gerais. Então

$$T_p \text{Sec}_h(X) = \langle T_{p_1} X, \dots, T_{p_h} X \rangle.$$

Demonstração: Ver Teorema 1.3.1, Capítulo 1 de [29]. ■

Observação 5.4 Como $\dim T_p \text{Sec}_h(X) = \dim \text{Sec}_h(X)$, pelo Lema de Terracini 5.2 acima, temos que

$$\dim \text{Sec}_h(X) = \dim \langle T_{p_1} X, \dots, T_{p_h} X \rangle.$$

Dessa forma, se existirem p_1, \dots, p_h pontos gerais de uma variedade projetiva X de \mathbb{P}^N tais que $\dim \langle p_1, \dots, p_h \rangle = h - 1$ e $\dim \langle T_{p_1} X, \dots, T_{p_h} X \rangle = \exp \dim \text{Sec}_h(X)$, então X não é h -defeituosa.

Exemplo 5.11 Em particular, se $h = 2$ e $p \in \text{Sec}_2(X)$ é um ponto geral. Pelo Lema de Terracini 5.2 acima, temos que

$$\dim \text{Sec}_2(X) = \dim T_p \text{Sec}_2(X) = \dim \langle T_{p_1} X, T_{p_2} X \rangle = 2 \dim X - \dim T_{p_1} X \cap T_{p_2} X,$$

para todos $p_1, p_2 \in X$ pontos gerais e $p \in \langle p_1, p_2 \rangle$.

Observação 5.5 O Lema de Terracini 5.2 pode ser usado para classificar defeitos secantes, pois num ponto geral $\dim T_p \text{Sec}_h(X) = \dim \text{Sec}_h(X)$. Pela Proposição 5.5, a dimensão de $\langle T_{p_1} X, \dots, T_{p_h} X \rangle$ é máxima se, e somente se, os espaços $T_{p_1} X, \dots, T_{p_h} X$ são independentes. Logo, $\dim \text{Sec}_h(X)$ é a esperada (máxima) se, e somente se, os espaços lineares $T_{p_1} X, \dots, T_{p_h} X$ são independentes. Portanto, X não é h -defeituosa se, e somente se, $\langle T_{p_1} X, \dots, T_{p_h} X \rangle$ são independentes.

Lema 5.3 Sejam $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{P}^n$ pontos em posição geral. Então existe um isomorfismo projetivo linear $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi(p_0) &= e_0, \text{ onde } e_0 = (1 : 0 : 0 : \dots : 0 : 0), \\ \varphi(p_1) &= e_1, \text{ onde } e_1 = (0 : 1 : 0 : \dots : 0 : 0), \\ &\vdots \\ \varphi(p_n) &= e_n, \text{ onde } e_n = (0 : 0 : 0 : \dots : 0 : 1). \end{aligned}$$

Demonstração: De fato, sejam p_0, \dots, p_n pontos de \mathbb{P}^n em posição geral e tome v_0, \dots, v_n pontos em k^{n+1} tais que $p_j = [v_j]$ para todo $j = 0, \dots, n$, isto é, v_j é um representante da classe de equivalência p_j , para todo $j = 0, \dots, n$, conforme Definição 3.6. Assim sendo, v_0, \dots, v_n formam uma base para o espaço vetorial k^{n+1} e, dessa forma, como $\bar{e}_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $\bar{e}_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\bar{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ também formam uma base para o espaço vetorial k^{n+1} , temos que existe o seguinte isomorfismo linear $A : k^{n+1} \rightarrow k^{n+1}$ tal que $A(v_j) = \bar{e}_j$ para todo $j = 0, \dots, n$. Com efeito, A é o isomorfismo projetivo linear desejado, uma vez que \bar{e}_j é um representante da classe de equivalência e_j para todo $j = 0, \dots, n$. ■

Lema 5.4 Sejam $p_0, \dots, p_n, p_{n+1} \in \mathbb{P}^n$ pontos em posição geral. Então existe um isomorfismo projetivo linear $\psi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ tal que $\psi(p_j) = e_j$, para $j = 0, 1, \dots, n$, e $\psi(p_{n+1}) = (1 : \dots : 1)$.

Demonstração: De fato, sejam p_0, \dots, p_n, p_{n+1} pontos de \mathbb{P}^n em posição geral e tome v_0, \dots, v_n, v_{n+1} pontos em k^{n+1} tais que $p_j = [v_j]$ para todo $j = 0, \dots, n+1$, isto é, v_j é um representante da classe de equivalência p_j , conforme Definição 3.6. Como v_0, \dots, v_n formam uma base para o espaço vetorial k^{n+1} , então $v_{n+1} = a_0v_0 + \dots + a_nv_n$, onde $a_0, \dots, a_n \in k$. Observe ainda que, como $p_j = [v_j]$ para todo $j = 0, \dots, n+1$, temos em particular que $p_j = [v_j]$ para todo $j = 0, \dots, n$ e assim, segue que $p_j = [a_jv_j]$, pois $[v_j] = [a_jv_j]$, uma vez que estamos em \mathbb{P}^n . Além disso, como $\bar{e}_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $\bar{e}_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\bar{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ também formam uma base para o espaço vetorial k^{n+1} , temos que existe o seguinte isomorfismo linear $A : k^{n+1} \rightarrow k^{n+1}$ tal que $A(a_jv_j) = \bar{e}_j$ para todo $j = 0, \dots, n$. Com efeito,

$$\begin{aligned} A(p_{n+1}) &= A([v_{n+1}]) = [A(v_{n+1})] \\ &= [A(a_0v_0 + \dots + a_nv_n)] \\ &= [A(a_0v_0) + \dots + A(a_nv_n)] \\ &= [\bar{e}_0 + \dots + \bar{e}_n] \\ &= [(1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, 1)] \\ &= [(1, \dots, 1)]. \end{aligned}$$

Dessa forma, A é o isomorfismo projetivo linear desejado, uma vez que \bar{e}_j é um representante da classe de equivalência e_j para todo $j = 0, \dots, n$ e $(1, \dots, 1)$ é um representante da classe de equivalência $(1 : \dots : 1)$. ■

Exemplo 5.12 A superfície de Veronese V_2^2 é 2-defeituosa. De fato, sejam p e q pontos gerais de \mathbb{P}^2 . Podemos supor, sem perda de generalidade, que os pontos são $p = (1 : 0 : 0)$ e $q = (0 : 1 : 0)$. Sejam $P = v(p)$ e $Q = v(q)$ as imagens de p e q , respectivamente, pelo mergulho de Veronese $v_2^2 : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$, dado no Exemplo 5.6. Considere l a reta em \mathbb{P}^2 conectando estes dois pontos e $L = v(l)$, isto é, L é a imagem de l pelo mergulho de Veronese. Mostremos que L é uma cônica contida em um plano π em \mathbb{P}^5 . Temos que, a reta l é dada por:

$$\begin{aligned} l = \overline{pq} &= \overline{\{\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) \mid (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1\}} \\ &= \overline{\{(\alpha, 0, 0) + (0, \beta, 0) \mid (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1\}} \\ &= \overline{\{(\alpha, \beta, 0) \mid (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1\}} \\ &= \{(\alpha : \beta : 0) \mid (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1\}. \end{aligned}$$

Com efeito, segue que

$$L = \{(\alpha^2 : \alpha\beta : 0 : \beta^2 : 0 : 0) \mid (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1\} = V(y_1^2 - y_0y_3, y_2, y_4, y_5),$$

que é uma cônica. Além disso, observe que

$$L \subset \{(x : y : 0 : z : 0 : 0) \mid (x : y : z) \in \mathbb{P}^2\} = \pi \cong \mathbb{P}^2.$$

Como L é uma cônica, o espaço tangente a ela em qualquer ponto é uma reta. Considere então $T_P L$ e $T_Q L$ os espaços tangentes a L nos pontos P e Q , respectivamente. Observe que $T_P L \cap T_Q L \neq \emptyset$, uma vez que duas retas no plano $\pi \cong \mathbb{P}^2$ sempre se intersectam em um único ponto. Assim, existe $R \in \mathbb{P}^5$ tal que $T_P L \cap T_Q L = \{R\}$. Porém, como $L \subset V_2^2$, devemos ter $T_P L \subset T_P V_2^2$ e $T_Q L \subset T_Q V_2^2$. Assim,

$$\{R\} \subset T_P V_2^2 \cap T_Q V_2^2.$$

Sendo assim, $\dim \langle T_P V_2^2, T_Q V_2^2 \rangle \geq 0$. Pelo Lema de Terracini 5.2,

$$\dim \text{Sec}_2(V_2^2) = 2 \dim V_2^2 - \dim T_P V_2^2 \cap T_Q V_2^2 \leq 2 \cdot 2 - 0 = 4.$$

Porém, $\exp \dim \text{Sec}_2(V_2^2) = 5$. Portanto, V_2^2 é 2-defeituosa.

Exemplo 5.13 Considere $X = SV_{(1,1)}^{(1,1)}$ a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} sv_{(1,1)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^3 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1). \end{aligned}$$

Como X é imagem de um mergulho, temos que $\dim X = 2$. Com efeito, segue que

$$\exp \dim \text{Sec}_2 X = \min\{3, 2 \cdot (2 + 1) - 1\} = \min\{3, 5\} = 3.$$

Sejam p' e q' pontos gerais de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Pelo Lema 5.3, podemos supor, sem perda de generalidade que $p' = ((1 : 0), (1 : 0))$ e $q' = ((0 : 1), (0 : 1))$. Agora, considere $p = e_0 = (1 : 0 : 0 : 0)$ e $q = e_4 = (0 : 0 : 0 : 1)$ de \mathbb{P}^3 que são imagens dos pontos p' e q' pela aplicação acima. Noutras palavras,

$$\begin{aligned} sv_{(1,1)}^{(1,1)}(p') &= sv_{(1,1)}^{(1,1)}((1 : 0), (1 : 0)) = (1 : 0 : 0 : 0) = e_0 = p \in \mathbb{P}^3 \\ sv_{(1,1)}^{(1,1)}(q') &= sv_{(1,1)}^{(1,1)}((0 : 1), (0 : 1)) = (0 : 0 : 0 : 1) = e_4 = q \in \mathbb{P}^3 \end{aligned}$$

Para o ponto $p \in \mathbb{P}^3$, considere a parametrização dada por $x_0 = y_0 = 1$ no aberto U_0 por meio de uma carta

$$\begin{aligned} \varphi : U_0 &\rightarrow V_0 \subset k^3 \\ (x_1, y_1) &\mapsto (y_1, x_1, x_1 y_1). \end{aligned}$$

Assim, temos que $\varphi_{x_1} = (0, 1, y_1)$ e $\varphi_{y_1} = (1, 0, x_1)$. Seja $0 = (x_1, y_1) = (0, 0) \in U_0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= (0, 0, 0) = \hat{e}_0 = \hat{p} \in k^3 \\ \varphi_{x_1}(0) &= (0, 1, 0) = \hat{e}_2 \in k^3 \\ \varphi_{y_1}(0) &= (1, 0, 0) = \hat{e}_1 \in k^3. \end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\hat{p} \in k^3$ é dado por $O_{\hat{p}} X = \langle \hat{e}_1, \hat{e}_2 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $p \in \mathbb{P}^3$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\hat{p} \in k^3$, é dado por

$$T_p X = \langle (1 : 0 : 0 : 0), (1 : 0 : 1 : 0), (1 : 1 : 0 : 0) \rangle = \langle e_0, e_1, e_2 \rangle.$$

Para o ponto $q \in \mathbb{P}^3$, considere a parametrização dada por $x_1 = y_1 = 1$ no aberto U_1 por meio de uma carta

$$\begin{aligned} \alpha : U_1 &\rightarrow V_1 \subset k^3 \\ (x_0, y_0) &\mapsto (x_0 y_0, x_0, y_0). \end{aligned}$$

Assim, temos que $\alpha_{x_0} = (y_0, 1, 0)$ e $\alpha_{y_0} = (x_0, 0, 1)$. Seja $0 = (x_0, y_0) = (0, 0) \in U_1$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= (0, 0, 0) = \bar{e}_0 = \bar{q} \in k^3 \\ \alpha_{x_0}(0) &= (0, 1, 0) = \bar{e}_1 \in k^3 \\ \alpha_{y_0}(0) &= (0, 0, 1) = \bar{e}_2 \in k^3.\end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\bar{q} \in k^3$ é dado por $O_{\bar{q}}X = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $q \in \mathbb{P}^3$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\bar{q} \in k^3$, é dado por

$$T_qX = \langle (0 : 1 : 0 : 1), (0 : 0 : 1 : 1), (0 : 0 : 0 : 1) \rangle = \langle e_1, e_2, e_4 \rangle.$$

Daí,

$$\langle T_pX, T_qX \rangle = \langle e_0, e_1, e_2, e_4 \rangle \Rightarrow \dim \langle T_pX, T_qX \rangle = 3 = \exp \dim Sec_2X.$$

Portanto, pelo Lema de Terracini 5.2, X não é 2-defeituosa e cobre tudo, logo não é defeituosa.

Exemplo 5.14 Considere $X = SV_{(1,2)}^{(1,1)}$ a imagem da aplicação

$$\begin{aligned}sv_{(1,2)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^5 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0y_0^2 : x_0y_0y_1 : x_0y_1^2 : x_1y_0^2 : x_1y_0y_1 : x_1y_1^2).\end{aligned}$$

Como X é imagem de um mergulho, temos que $\dim X = 2$. Com efeito, segue que

$$\exp \dim Sec_2X = \min\{5, 2 \cdot (2 + 1) - 1\} = \min\{5, 5\} = 5.$$

Sejam p' e q' pontos gerais de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Pelo Lema 5.3, podemos supor, sem perda de generalidade que $p' = ((1 : 0), (1 : 0))$ e $q' = ((0 : 1), (0 : 1))$. Agora, considere $p = e_0 = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$ e $q = e_5 = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ de \mathbb{P}^5 que são imagens dos pontos p' e q' pela aplicação acima. Noutras palavras,

$$\begin{aligned}sv_{(1,2)}^{(1,1)}(p') &= sv_{(1,2)}^{(1,1)}((1 : 0), (1 : 0)) = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) = e_0 = p \in \mathbb{P}^5 \\ sv_{(1,2)}^{(1,1)}(q') &= sv_{(1,2)}^{(1,1)}((0 : 1), (0 : 1)) = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) = e_5 = q \in \mathbb{P}^5\end{aligned}$$

Para o ponto $p \in \mathbb{P}^5$, considere a parametrização dada por $x_0 = y_0 = 1$ no aberto U_0 por meio de uma carta

$$\begin{aligned}\varphi : U_0 &\rightarrow V_0 \subset k^5 \\ (x_1, y_1) &\mapsto (y_1, y_1^2, x_1, x_1y_1, x_1y_1^2).\end{aligned}$$

Assim, temos que $\varphi_{x_1} = (0, 0, 1, y_1, y_1^2)$ e $\varphi_{y_1} = (1, 2y_1, 0, x_1, 2x_1y_1)$. Seja $0 = (x_1, y_1) = (0, 0) \in U_0$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= (0, 0, 0, 0, 0) = \hat{e}_0 = \hat{p} \in k^5 \\ \varphi_{x_1}(0) &= (0, 0, 1, 0, 0) = \hat{e}_3 \in k^5 \\ \varphi_{y_1}(0) &= (1, 0, 0, 0, 0) = \hat{e}_1 \in k^5.\end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\hat{p} \in k^5$ é dado por $O_{\hat{p}}X = \langle \hat{e}_1, \hat{e}_3 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $p \in \mathbb{P}^5$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\hat{p} \in k^5$, é dado por

$$T_p X = \langle (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0), (1 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0), (1 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0) \rangle = \langle e_0, e_1, e_3 \rangle.$$

Para o ponto $q \in \mathbb{P}^5$, considere a parametrização dada por $x_1 = y_1 = 1$ no aberto U_1 por meio de uma carta

$$\begin{aligned} \alpha : U_1 &\rightarrow V_1 \subset k^3 \\ (x_0, y_0) &\mapsto (x_0 y_0^2, x_0 y_0, x_0, y_0^2, y_0). \end{aligned}$$

Assim, temos que $\alpha_{x_0} = (y_0^2, y_0, 1, 0, 0)$ e $\alpha_{y_0} = (2x_0 y_0, x_0, 0, 2y_0, 1)$. Seja $0 = (x_0, y_0) = (0, 0) \in U_1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= (0, 0, 0, 0, 0) = \bar{e}_0 = \bar{q} \in k^5 \\ \alpha_{x_0}(0) &= (0, 0, 1, 0, 0) = \bar{e}_2 \in k^5 \\ \alpha_{y_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 1) = \bar{e}_4 \in k^5. \end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\bar{q} \in k^5$ é dado por $O_{\bar{q}} X = \langle \bar{e}_2, \bar{e}_4 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $q \in \mathbb{P}^5$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\bar{q} \in k^5$, é dado por

$$T_q X = \langle (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 1), (0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1), (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \rangle = \langle e_2, e_4, e_5 \rangle.$$

Daí,

$$\langle T_p X, T_q X \rangle = \langle e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle \Rightarrow \dim \langle T_p X, T_q X \rangle = 5 = \exp \dim Sec_2 X.$$

Portanto, pelo Lema de Terracini 5.2, X não é 2-defeituosa e cobre tudo, logo não é defeituosa.

Exemplo 5.15 Considere $X = SV_{(1,1)}^{(1,2)}$ a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} sv_{(1,1)}^{(1,2)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^5 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1 : y_2)) &\mapsto (x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_0 y_2 : x_1 y_0 : x_1 y_1 : x_1 y_2). \end{aligned}$$

Como X é imagem de um mergulho, temos que $\dim X = 3$. Com efeito, segue que

$$\exp \dim Sec_2 X = \min\{3, 2 \cdot (3 + 1) - 1\} = \min\{5, 7\} = 5.$$

Sejam p' e q' pontos gerais de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$. Pelo Lema 5.3, podemos supor, sem perda de generalidade que $p' = ((1 : 0), (1 : 0 : 0))$ e $q' = ((0 : 1), (0 : 0 : 1))$. Agora, considere $p = e_0 = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$ e $q = e_5 = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ de \mathbb{P}^5 que são imagens dos pontos p' e q' pela aplicação acima. Noutras palavras,

$$\begin{aligned} sv_{(1,1)}^{(1,2)}(p') &= sv_{(1,1)}^{(1,2)}((1 : 0), (1 : 0 : 0)) = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) = e_0 = p \in \mathbb{P}^5 \\ sv_{(1,1)}^{(1,1)}(q') &= sv_{(1,1)}^{(1,2)}((0 : 1), (0 : 0 : 1)) = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) = e_5 = q \in \mathbb{P}^5 \end{aligned}$$

Para o ponto $p \in \mathbb{P}^5$, considere a parametrização dada por $x_0 = y_0 = 1$ no aberto U_0 por meio de uma carta

$$\begin{aligned} \varphi : U_0 &\rightarrow V_0 \subset k^5 \\ (x_1, y_1, y_2) &\mapsto (y_1, y_2, x_1, x_1 y_1, x_1 y_2). \end{aligned}$$

Assim, temos que $\varphi_{x_1} = (0, 0, 1, y_1, y_2)$, $\varphi_{y_1} = (1, 0, 0, x_1, 0)$ e $\varphi_{y_2} = (0, 1, 0, 0, x_1)$. Seja $0 = (x_1, y_1, y_2) = (0, 0, 0) \in U_0$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= (0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_0 = \widehat{p} \in k^5 \\ \varphi_{x_1}(0) &= (0, 0, 1, 0, 0) = \widehat{e}_3 \in k^5 \\ \varphi_{y_1}(0) &= (1, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_1 \in k^5 \\ \varphi_{y_2}(0) &= (0, 1, 0, 0, 0) = \widehat{e}_2 \in k^5\end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\widehat{p} \in k^5$ é dado por $O_{\widehat{p}}X = \langle \widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{e}_3 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $p \in \mathbb{P}^5$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\widehat{p} \in k^5$, é dado por

$$T_pX = \langle e_0, e_1, e_2, e_3 \rangle.$$

Para o ponto $q \in \mathbb{P}^5$, considere a parametrização dada por $x_1 = y_2 = 1$ no aberto U_1 por meio de uma carta

$$\begin{aligned}\alpha : U_1 &\rightarrow V_1 \subset k^5 \\ (x_0, y_0, y_1) &\mapsto (x_0y_0, x_0y_1, x_0, y_0, y_1).\end{aligned}$$

Assim, temos que $\alpha_{x_0} = (y_0, y_1, 1, 0, 0)$ e $\alpha_{y_0} = (x_0, 0, 0, 1, 0)$ e $\alpha_{y_1} = (0, x_0, 0, 0, 1)$. Seja $0 = (x_0, y_0, y_1) = (0, 0, 0) \in U_1$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= (0, 0, 0, 0, 0) = \overline{e}_0 = \overline{q} \in k^5 \\ \alpha_{x_0}(0) &= (0, 0, 1, 0, 0) = \overline{e}_2 \in k^5 \\ \alpha_{y_0}(0) &= (0, 0, 0, 1, 0) = \overline{e}_3 \in k^5 \\ \alpha_{y_1}(0) &= (0, 0, 0, 0, 1) = \overline{e}_4 \in k^5\end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\overline{q} \in k^5$ é dado por $O_{\overline{q}}X = \langle \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $q \in \mathbb{P}^5$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\overline{q} \in k^5$, é dado por

$$T_qX = \langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle.$$

Daí,

$$\langle T_pX, T_qX \rangle = \langle e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle \Rightarrow \dim \langle T_pX, T_qX \rangle = 5 = \exp \dim Sec_2X.$$

Portanto, pelo Lema de Terracini 5.2, X não é 2-defeituosa e cobre tudo, logo não é defeituosa.

Exemplo 5.16 Considere $X = SV_{(1,3)}^{(1,1)}$ a imagem da aplicação

$$\begin{aligned}sv_{(1,3)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^7 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0y_0^3 : x_0y_0^2y_1 : x_0y_0y_1^2 : x_0y_1^3 : x_1y_0^3 : x_1y_0^2y_1 : x_1y_0y_1^2 : x_1y_1^3).\end{aligned}$$

Como X é imagem de um mergulho, temos que $\dim X = 2$. Com efeito, segue que

$$\exp \dim Sec_2X = \min\{7, 2 \cdot (2 + 1) - 1\} = \min\{7, 5\} = 5.$$

Sejam p' e q' pontos gerais de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Pelo Lema 5.3, podemos supor, sem perda de generalidade que $p' = ((1 : 0), (1 : 0))$ e $q' = ((0 : 1), (0 : 1))$. Agora, considere $p = e_0 = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$ e $q = e_7 = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ de \mathbb{P}^7 que são imagens dos pontos p' e q' pela aplicação acima. Noutras palavras,

$$\begin{aligned} sv_{(1,3)}^{(1,1)}(p') &= sv_{(1,3)}^{(1,1)}((1 : 0), (1 : 0)) = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) = e_0 = p \in \mathbb{P}^7 \\ sv_{(1,3)}^{(1,1)}(q') &= sv_{(1,3)}^{(1,1)}((0 : 1), (0 : 1)) = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) = e_7 = q \in \mathbb{P}^7 \end{aligned}$$

Para o ponto $p \in \mathbb{P}^7$, considere a parametrização dada por $x_0 = y_0 = 1$ no aberto U_0 por meio de uma carta

$$\begin{aligned} \varphi : U_0 &\rightarrow V_0 \subset k^7 \\ (x_1, y_1) &\mapsto (y_1, y_1^2, y_1^3, x_1, x_1 y_1, x_1 y_1^2, x_1 y_1^3). \end{aligned}$$

Assim, temos que $\varphi_{x_1} = (0, 0, 0, 1, y_1, y_1^2, y_1^3)$ e $\varphi_{y_1} = (1, 2y_1, 3y_1^2, 0, x_1, 2x_1 y_1, 3x_1 y_1^2)$. Seja $0 = (x_1, y_1) = (0, 0) \in U_0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_0 = \widehat{p} \in k^7 \\ \varphi_{x_1}(0) &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) = \widehat{e}_4 \in k^7 \\ \varphi_{y_1}(0) &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_1 \in k^7. \end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\widehat{p} \in k^7$ é dado por $O_{\widehat{p}}X = \langle \widehat{e}_1, \widehat{e}_4 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $p \in \mathbb{P}^7$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\widehat{p} \in k^7$, é dado por

$$T_p X = \langle e_0, e_1, e_4 \rangle.$$

Para o ponto $q \in \mathbb{P}^7$, considere a parametrização dada por $x_1 = y_1 = 1$ no aberto U_1 por meio de uma carta

$$\begin{aligned} \alpha : U_1 &\rightarrow V_1 \subset k^7 \\ (x_0, y_0) &\mapsto (x_0 y_0^3, x_0 y_0^2, x_0 y_0, x_0, y_0^3, y_0^2, y_0). \end{aligned}$$

Assim, temos que $\alpha_{x_0} = (y_0^3, y_0^2, y_0, 1, 0, 0, 0)$ e $\alpha_{y_0} = (3x_0 y_0^2, 2x_0 y_0, x_0, 0, 3y_0^3, 2y_0, 1)$. Seja $0 = (x_0, y_0) = (0, 0) \in U_1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \overline{e}_0 = \overline{q} \in k^7 \\ \alpha_{x_0}(0) &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) = \overline{e}_3 \in k^7 \\ \alpha_{y_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) = \overline{e}_6 \in k^7. \end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\overline{q} \in k^7$ é dado por $O_{\overline{q}}X = \langle \overline{e}_3, \overline{e}_6 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $q \in \mathbb{P}^7$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\overline{q} \in k^7$, é dado por

$$T_q X = \langle e_3, e_6, e_7 \rangle.$$

Daí,

$$\langle T_p X, T_q X \rangle = \langle e_0, e_1, e_3, e_4, e_6, e_7 \rangle \Rightarrow \dim \langle T_p X, T_q X \rangle = 5 = \exp \dim Sec_2 X.$$

Portanto, pelo Lema de Terracini 5.2, X não é 2-defeituosa, mas não cobre tudo. Consideremos então, pelo Lema 5.4, um terceiro ponto em posição geral $r = (1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1) \in X$. Para a $Sec_3 X$, temos que

$$\exp \dim Sec_3 X = \min\{7, 3 \cdot (2 + 1) - 1\} = \min\{7, 8\} = 7.$$

Observe que $\widehat{r} = \varphi((1 : 1), (1 : 1)) = \alpha((1 : 1), (1 : 1)) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Trabalhando com φ como antes e definindo $((1 : 1), (1 : 1)) := (1, 1)$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi(1, 1) &= \widehat{r} \in k^7 \\ \varphi_{x_1}(1, 1) &= (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1) = u \in k^7 \\ \varphi_{y_1}(1, 1) &= (1, 2, 3, 0, 1, 2, 3) = v \in k^7.\end{aligned}$$

Assim, $O_{\widehat{r}}X = \langle u, v \rangle$ e, com efeito,

$$T_r X = \langle (1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1), (1 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1), (1 : 1 : 2 : 3 : 0 : 1 : 2 : 3) \rangle = \langle r, r_1, r_2 \rangle.$$

Pelo Lema de Terracini 5.2, temos que

$$\begin{aligned}\langle T_p X, T_q X, T_r X \rangle &= \langle e_0, e_1, e_3, e_4, e_6, e_7, r, r_1, r_2 \rangle \\ &= \langle e_0, e_1, e_3, e_4, e_6, e_7, (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0), (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0), \\ &\quad (0 : 0 : 2 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0) \rangle \\ &= \langle e_0, e_1, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0), \\ &\quad (0 : 0 : 2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) \rangle \\ &= \langle e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle.\end{aligned}$$

Daí, $\dim \langle T_p X, T_q X, T_r X \rangle = 7 = \exp \dim Sec_3 X$. Portanto, X não é 3-defeituosa e cobre tudo, logo não é defeituosa.

Exemplo 5.17 Considere $X = SV_{(1,4)}^{(1,1)}$ a imagem da aplicação

$$\begin{aligned}sv_{(1,4)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^9 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0 y_0^4 : x_0 y_0^3 y_1 : x_0 y_0^2 y_1^2 : x_0 y_0 y_1^3 : x_0 y_1^4 : x_1 y_0^4 : x_1 y_0^3 y_1 : x_1 y_0^2 y_1^2 : x_1 y_0 y_1^3 : \\ &\quad x_1 y_1^4)\end{aligned}$$

Como X é imagem de um mergulho, temos que $\dim X = 2$. Com efeito, segue que

$$\exp \dim Sec_2 X = \min\{9, 2 \cdot (2 + 1) - 1\} = \min\{9, 5\} = 5.$$

Sejam p' e q' pontos gerais de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Pelo Lema 5.3, podemos supor, sem perda de generalidade que $p' = ((1 : 0), (1 : 0))$ e $q' = ((0 : 1), (0 : 1))$. Agora, considere $p = e_0 = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$ e $q = e_9 = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ de \mathbb{P}^9 que são imagens dos pontos p' e q' pela aplicação acima. Noutras palavras,

$$\begin{aligned}sv_{(1,4)}^{(1,1)}(p') &= sv_{(1,4)}^{(1,1)}((1 : 0), (1 : 0)) = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) = e_0 = p \in \mathbb{P}^9 \\ sv_{(1,4)}^{(1,1)}(q') &= sv_{(1,4)}^{(1,1)}((0 : 1), (0 : 1)) = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) = e_9 = q \in \mathbb{P}^9\end{aligned}$$

Para o ponto $p \in \mathbb{P}^9$, considere a parametrização dada por $x_0 = y_0 = 1$ no aberto U_0 por meio de uma carta

$$\begin{aligned}\varphi : U_0 &\rightarrow V_0 \subset k^9 \\ (x_1, y_1) &\mapsto (y_1, y_1^2, y_1^3, y_1^4, x_1, x_1 y_1, x_1 y_1^2, x_1 y_1^3, x_1 y_1^4).\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\varphi_{x_1} = (0, 0, 0, 0, 1, y_1, y_1^2, y_1^3, y_1^4) \text{ e } \varphi_{y_1} = (1, 2y_1, 3y_1^2, 4y_1^3, 0, x_1, 2x_1y_1, 3x_1y_1^2, 4x_1y_1^3).$$

Seja $0 = (x_1, y_1) = (0, 0) \in U_0$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_0 = \widehat{p} \in k^9 \\ \varphi_{x_1}(0) &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_5 \in k^9 \\ \varphi_{y_1}(0) &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_1 \in k^9.\end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\widehat{p} \in k^9$ é dado por $O_{\widehat{p}}X = \langle \widehat{e}_1, \widehat{e}_5 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $p \in \mathbb{P}^9$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\widehat{p} \in k^9$, é dado por

$$T_pX = \langle e_0, e_1, e_5 \rangle.$$

Para o ponto $q \in \mathbb{P}^9$, considere a parametrização dada por $x_1 = y_1 = 1$ no aberto U_1 por meio de uma carta

$$\begin{aligned}\alpha : U_1 &\rightarrow V_1 \subset k^9 \\ (x_0, y_0) &\mapsto (x_0y_0^4, x_0y_0^3, x_0y_0^2, x_0y_0, x_0, y_0^4, y_0^3, y_0^2, y_0).\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\alpha_{x_0} = (y_0^4, y_0^3, y_0^2, y_0, 1, 0, 0, 0, 0) \text{ e } \alpha_{y_0} = (4x_0y_0^3, 3x_0y_0^2, 2x_0y_0, x_0, 0, 4y_0^3, 3y_0^2, 2y_0, 1).$$

Seja $0 = (x_0, y_0) = (0, 0) \in U_1$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \overline{e}_0 = \overline{q} \in k^9 \\ \alpha_{x_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) = \overline{e}_4 \in k^9 \\ \alpha_{y_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) = \overline{e}_8 \in k^9.\end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\overline{q} \in k^9$ é dado por $O_{\overline{q}}X = \langle \overline{e}_4, \overline{e}_8 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $q \in \mathbb{P}^9$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\overline{q} \in k^9$, é dado por

$$T_qX = \langle e_4, e_8, e_9 \rangle.$$

Daí,

$$\langle T_pX, T_qX \rangle = \langle e_1, e_2, e_4, e_8, e_9 \rangle \Rightarrow \dim \langle T_pX, T_qX \rangle = 5 = \exp \dim Sec_2X.$$

Portanto, pelo Lema de Terracini 5.2, X não é 2-defeituosa, porém não cobre tudo. Consideremos então, pelo Lema 5.4, um terceiro ponto em posição geral $r = (1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1) \in X$. Para a Sec_3X , temos que

$$\exp \dim Sec_3X = \min\{9, 3 \cdot (2 + 1) - 1\} = \min\{9, 8\} = 8.$$

Observe que $\widehat{r} = \varphi((1 : 1), (1 : 1)) = \alpha((1 : 1), (1 : 1)) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Trabalhando com φ como antes e definindo $((1 : 1), (1 : 1)) := (1, 1)$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi(1, 1) &= \widehat{r} \in k^9 \\ \varphi_{x_1}(1, 1) &= (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1) = u \in k^9 \\ \varphi_{y_1}(1, 1) &= (1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4) = v \in k^9.\end{aligned}$$

Assim, $O_{\hat{r}}X = \langle u, v \rangle$ e, com efeito,

$$\begin{aligned} T_r X &= \langle (1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1), (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1) \\ &\quad (1 : 1 : 2 : 3 : 4 : 0 : 1 : 2 : 3 : 4) \rangle \\ &= \langle r, r_1, r_2 \rangle \end{aligned}$$

Pelo Lema de Terracini 5.2, temos que

$$\begin{aligned} \langle T_p X, T_q X, T_r X \rangle &= \langle e_0, e_1, e_4, e_5, e_8, e_9, r, r_1, r_2 \rangle \\ &= \langle e_0, e_1, e_4, e_5, e_8, e_9, (0 : 0 : 1 : 1 : 0 : 0 : 1 : 1 : 0 : 0), \\ &\quad (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 0 : 0), (0 : 0 : 2 : 3 : 0 : 0 : 1 : 2 : 0 : 0) \rangle \end{aligned}$$

Daí, $\dim \langle T_p X, T_q X, T_r X \rangle = 8 = \exp \dim \text{Sec}_3 X$. Portanto, X não é 3-defeituosa. Pelo Lema 5.1, X também não será 4-defeituosa e na próxima secante cobrirá tudo, logo não será defeituosa.

Exemplo 5.18 Considere $X = SV_{(2,2)}^{(1,1)}$ a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} sv_{(2,2)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^8 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0^2 y_0^2 : x_0^2 y_0 y_1 : x_0^2 y_1^2 : x_0 x_1 y_0^2 : x_0 x_1 y_0 y_1 : x_0 x_1 y_1^2 : x_1^2 y_0^2 : x_1^2 y_0 y_1 : x_1^2 y_1^2). \end{aligned}$$

Como X é imagem de um mergulho, temos que $\dim X = 2$. Com efeito, segue que

$$\exp \dim \text{Sec}_2 X = \min\{8, 2 \cdot (2 + 1) - 1\} = \min\{8, 5\} = 5.$$

Sejam p' e q' pontos gerais de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Pelo Lema 5.3, podemos supor, sem perda de generalidade que $p' = ((1 : 0), (1 : 0))$ e $q' = ((0 : 1), (0 : 1))$. Agora, considere $p = e_0 = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$ e $q = e_8 = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ de \mathbb{P}^8 que são imagens dos pontos p' e q' pela aplicação acima. Noutras palavras,

$$\begin{aligned} sv_{(2,2)}^{(1,1)}(p') &= sv_{(2,2)}^{(1,1)}((1 : 0), (1 : 0)) = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) = e_0 = p \in \mathbb{P}^8 \\ sv_{(2,2)}^{(1,1)}(q') &= sv_{(2,2)}^{(1,1)}((0 : 1), (0 : 1)) = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) = e_8 = q \in \mathbb{P}^8 \end{aligned}$$

Para o ponto $p \in \mathbb{P}^8$, considere a parametrização dada por $x_0 = y_0 = 1$ no aberto U_0 por meio de uma carta

$$\begin{aligned} \varphi : U_0 &\rightarrow V_0 \subset k^8 \\ (x_1, y_1) &\mapsto (y_1, y_1^2, x_1, x_1 y_1, x_1 y_1^2, x_1^2, x_1^2 y_1, x_1^2 y_1^2). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\varphi_{x_1} = (0, 0, 1, y_1, y_1^2, 2x_1, 2x_1 y_1, 2x_1 y_1^2) \text{ e } \varphi_{y_1} = (1, 2y_1, 0, x_1, 2x_1 y_1, 0, x_1^2, 2x_1^2 y_1).$$

Seja $0 = (x_1, y_1) = (0, 0) \in U_0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \hat{e}_0 = \hat{p} \in k^8 \\ \varphi_{x_1}(0) &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) = \hat{e}_3 \in k^8 \\ \varphi_{y_1}(0) &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \hat{e}_1 \in k^8. \end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\hat{p} \in k^8$ é dado por $O_{\hat{p}}X = \langle \hat{e}_1, \hat{e}_3 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $p \in \mathbb{P}^8$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\hat{p} \in k^8$, é dado por

$$T_p X = \langle e_0, e_1, e_3 \rangle.$$

Para o ponto $q \in \mathbb{P}^8$, considere a parametrização dada por $x_1 = y_1 = 1$ no aberto U_1 por meio de uma carta

$$\begin{aligned} \alpha : U_1 &\rightarrow V_1 \subset k^8 \\ (x_0, y_0) &\mapsto (x_0^2 y_0^2, x_0^2 y_0, x_0^2, x_0 y_0^2, x_0 y_0, x_0, y_0^2, y_0). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\alpha_{x_0} = (2x_0 y_0^2, 2x_0 y_0, 2x_0, y_0^2, y_0, 1, 0, 0) \text{ e } \alpha_{y_0} = (2x_0^2 y_0, x_0^2, 0, 2x_0 y_0, x_0, 0, 2y_0, 1).$$

Seja $0 = (x_0, y_0) = (0, 0) \in U_1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \bar{e}_0 = \bar{q} \in k^8 \\ \alpha_{x_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) = \bar{e}_5 \in k^8 \\ \alpha_{y_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) = \bar{e}_7 \in k^8. \end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\bar{q} \in k^8$ é dado por $O_{\bar{q}} X = \langle \bar{e}_5, \bar{e}_7 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $q \in \mathbb{P}^8$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\bar{q} \in k^8$, é dado por

$$T_q X = \langle e_5, e_7, e_8 \rangle.$$

Daí,

$$\langle T_p X, T_q X \rangle = \langle e_0, e_1, e_3, e_5, e_7, e_8 \rangle \Rightarrow \dim \langle T_p X, T_q X \rangle = 5 = \exp \dim Sec_2 X.$$

Portanto, pelo Lema de Terracini 5.2, X não é 2-defeituosa, porém não cobre tudo. Consideremos então, pelo Lema 5.4, um terceiro ponto em posição geral $r = (1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1) \in X$. Para a $Sec_3 X$, temos que

$$\exp \dim Sec_3 X = \min\{8, 3 \cdot (2 + 1) - 1\} = \min\{8, 8\} = 8.$$

Observe que $\hat{r} = \varphi((1 : 1), (1 : 1)) = \alpha((1 : 1), (1 : 1)) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Trabalhando com φ como antes e definindo $((1 : 1), (1 : 1)) := (1, 1)$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi(1, 1) &= \hat{r} \in k^8 \\ \varphi_{x_1}(1, 1) &= (0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2) = u \in k^8 \\ \varphi_{y_1}(1, 1) &= (1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2) = v \in k^8. \end{aligned}$$

Assim, $O_{\hat{r}} X = \langle u, v \rangle$ e, com efeito,

$$\begin{aligned} T_r X &= \langle (1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1), (1 : 0 : 0 : 1 : 1 : 1 : 2 : 2 : 2), \\ &\quad (1 : 1 : 2 : 0 : 1 : 2 : 0 : 1 : 2) \rangle \\ &= \langle r, r_1, r_2 \rangle \end{aligned}$$

Pelo Lema de Terracini 5.2, temos que

$$\begin{aligned} \langle T_p X, T_q X, T_r X \rangle &= \langle e_0, e_1, e_3, e_5, e_7, e_8, r, r_1, r_2 \rangle \\ &= \langle e_0, e_1, e_3, e_5, e_7, e_8, (0 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0 : 0), \\ &\quad (0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 2 : 0 : 0), (0 : 0 : 2 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0) \rangle \end{aligned}$$

Daí, $\dim \langle T_p X, T_q X, T_r X \rangle = 7 < \exp \dim Sec_3 X$, pois posto $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$. Portanto,

X é 3-defeituosa, logo é defeituosa.

Exemplo 5.19 Considere $X = SV_{(1,1,1)}^{(1,1,1)}$ a imagem da aplicação

$$sv_{(1,1,1)}^{(1,1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^7$$

$$((x_0 : x_1), (y_0 : y_1), (z_0 : z_1)) \mapsto (x_0y_0z_0 : x_0y_0z_1 : x_0y_1z_0 : x_0y_1z_1 : x_1y_0z_0 : x_1y_0z_1 : x_1y_1z_0 : x_1y_1z_1).$$

Como X é imagem de um mergulho, temos que $\dim X = 3$. Com efeito, segue que

$$\exp \dim Sec_2 X = \min\{7, 2 \cdot (3 + 1) - 1\} = \min\{7, 7\} = 7.$$

Sejam p' e q' pontos gerais de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Pelo Lema 5.3, podemos supor, sem perda de generalidade que $p' = ((1 : 0), (1 : 0), (1 : 0))$ e $q' = ((0 : 1), (0 : 1), (0 : 1))$. Agora, considere $p = e_0 = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$ e $q = e_7 = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ de \mathbb{P}^7 que são imagens dos pontos p' e q' pela aplicação acima. Noutras palavras,

$$sv_{(1,1,1)}^{(1,1,1)}(p') = sv_{(1,1,1)}^{(1,1,1)}((1 : 0), (1 : 0), (1 : 0)) = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) = e_0 = p \in \mathbb{P}^7$$

$$sv_{(1,1,1)}^{(1,1,1)}(q') = sv_{(1,1,1)}^{(1,1,1)}((0 : 1), (0 : 1), (0 : 1)) = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) = e_7 = q \in \mathbb{P}^7$$

Para o ponto $p \in \mathbb{P}^7$, considere a parametrização dada por $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ no aberto U_0 por meio de uma carta

$$\varphi : U_0 \rightarrow V_0 \subset k^7$$

$$(x_1, y_1, z_1) \mapsto (z_1, y_1, y_1z_1, x_1, x_1z_1, x_1y_1, x_1y_1z_1).$$

Assim, temos que

$$\varphi_{x_1} = (0, 0, 0, 1, z_1, y_1, y_1z_1),$$

$$\varphi_{y_1} = (0, 1, z_1, 0, 0, x_1, x_1z_1) \text{ e}$$

$$\varphi_{z_1} = (1, 0, y_1, 0, x_1, 0, x_1y_1).$$

Seja $0 = (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0) \in U_0$. Com efeito,

$$\varphi(0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_0 = \widehat{p} \in k^7$$

$$\varphi_{x_1}(0) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) = \widehat{e}_4 \in k^7$$

$$\varphi_{y_1}(0) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_2 \in k^7$$

$$\varphi_{z_1}(0) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_1 \in k^7$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\widehat{p} \in k^7$ é dado por $O_{\widehat{p}}X = \langle \widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{e}_4 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $p \in \mathbb{P}^8$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\widehat{p} \in k^7$, é dado por

$$T_pX = \langle e_0, e_1, e_2, e_4 \rangle.$$

Para o ponto $q \in \mathbb{P}^7$, considere a parametrização dada por $x_1 = y_1 = z_1 = 1$ no aberto U_1 por meio de uma carta

$$\alpha : U_1 \rightarrow V_1 \subset k^7$$

$$(x_0, y_0, z_0) \mapsto (x_0y_0z_0, x_0y_0, x_0z_0, x_0, y_0z_0, y_0, z_0).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\alpha_{x_0} &= (y_0 z_0, y_0, z_0, 1, 0, 0, 0), \\ \alpha_{y_0} &= (x_0 z_0, x_0, 0, 0, z_0, 1, 0) \text{ e} \\ \alpha_{z_0} &= (x_0 y_0, 0, x_0, 0, y_0, 0, 1).\end{aligned}$$

Seja $0 = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \in U_1$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \bar{e}_0 = \bar{q} \in k^7 \\ \alpha_{x_0}(0) &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) = \bar{e}_3 \in k^7 \\ \alpha_{y_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) = \bar{e}_5 \in k^7 \\ \alpha_{z_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) = \bar{e}_6 \in k^7\end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\bar{q} \in k^7$ é dado por $O_{\bar{q}}X = \langle \bar{e}_3, \bar{e}_5, \bar{e}_6 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $q \in \mathbb{P}^8$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\bar{q} \in k^7$, é dado por

$$T_q X = \langle e_3, e_5, e_6, e_7 \rangle.$$

Daí,

$$\langle T_p X, T_q X \rangle = \langle e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle \Rightarrow \dim \langle T_p X, T_q X \rangle = 7 = \exp \dim \text{Sec}_2 X.$$

Portanto, pelo Lema de Terracini 5.2, X não é 2-defeituosa e cobre tudo, logo não é defeituosa.

Exemplo 5.20 Considere $X = SV_{(1,1,2)}^{(1,1,1)}$ a imagem da aplicação

$$\begin{aligned}sv_{(1,1,2)}^{(1,1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^{11} \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1), (z_0 : z_1)) &\mapsto (x_0 y_0 z_0^2 : x_0 y_0 z_0 z_1 : x_0 y_0 z_1^2 : x_0 y_1 z_0^2 : x_0 y_1 z_0 z_1 : x_0 y_1 z_1^2 : \\ &\quad x_1 y_0 z_0^2 : x_1 y_0 z_0 z_1 : x_1 y_0 z_1^2 : x_1 y_1 z_0^2 : x_1 y_1 z_0 z_1 : x_1 y_1 z_1^2).\end{aligned}$$

Como X é imagem de um mergulho, temos que $\dim X = 3$. Com efeito, segue que

$$\exp \dim \text{Sec}_2 X = \min\{11, 2 \cdot (3 + 1) - 1\} = \min\{11, 7\} = 7.$$

Sejam p' e q' pontos gerais de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Pelo Lema 5.3, podemos supor, sem perda de generalidade que $p' = ((1 : 0), (1 : 0), (1 : 0))$ e $q' = ((0 : 1), (0 : 1), (0 : 1))$. Agora, considere $p = e_0 = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$ e $q = e_{11} = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ de \mathbb{P}^{11} que são imagens dos pontos p' e q' pela aplicação acima. Noutras palavras,

$$\begin{aligned}sv_{(1,1,2)}^{(1,1,1)}(p') &= sv_{(1,1,2)}^{(1,1,1)}((1 : 0), (1 : 0), (1 : 0)) = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) = e_0 = \\ &\quad p \in \mathbb{P}^{11} \\ sv_{(1,1,2)}^{(1,1,1)}(q') &= sv_{(1,1,2)}^{(1,1,1)}((0 : 1), (0 : 1), (0 : 1)) = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) = e_{11} = \\ &\quad q \in \mathbb{P}^{11}\end{aligned}$$

Para o ponto $p \in \mathbb{P}^{11}$, considere a parametrização dada por $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ no aberto U_0 por meio de uma carta

$$\begin{aligned}\varphi : U_0 &\rightarrow V_0 \subset k^{11} \\ (x_1, y_1, z_1) &\mapsto (z_1, z_1^2, y_1, y_1 z_1, y_1 z_1^2, x_1, x_1 z_1, x_1 z_1^2, x_1 y_1, x_1 y_1 z_1, x_1 y_1 z_1^2).\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{x_1} &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, z_1, z_1^2, y_1, y_1 z_1, y_1 z_1^2), \\ \varphi_{y_1} &= (0, 0, 1, z_1, z_1^2, 0, 0, 0, x_1, x_1 z_1, x_1 z_1^2) \text{ e} \\ \varphi_{z_1} &= (1, 2z_1, 0, y_1, 2y_1 z_1, 0, x_1, 2x_1 z_1, 0, x_1 y_1, 2x_1 y_1 z_1).\end{aligned}$$

Seja $0 = (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0) \in U_0$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_0 = \widehat{p} \in k^{11} \\ \varphi_{x_1}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_6 \in k^{11} \\ \varphi_{y_1}(0) &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_3 \in k^{11} \\ \varphi_{z_1}(0) &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_1 \in k^{11}\end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\widehat{p} \in k^{11}$ é dado por $O_{\widehat{p}}X = \langle \widehat{e}_1, \widehat{e}_3, \widehat{e}_6 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $p \in \mathbb{P}^{11}$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\widehat{p} \in k^{11}$, é dado por

$$T_p X = \langle e_0, e_1, e_3, e_6 \rangle.$$

Para o ponto $q \in \mathbb{P}^{11}$, considere a parametrização dada por $x_1 = y_1 = z_1 = 1$ no aberto U_1 por meio de uma carta

$$\begin{aligned}\alpha : U_1 &\rightarrow V_1 \subset k^{11} \\ (x_0, y_0, z_0) &\mapsto (x_0 y_0 z_0^2, x_0 y_0 z_0, x_0 y_0, x_0 z_0^2, x_0 z_0, x_0, y_0 z_0^2, y_0 z_0, y_0, z_0^2, z_0).\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\alpha_{x_0} &= (y_0 z_0^2, y_0 z_0, y_0, z_0^2, z_0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \alpha_{y_0} &= (x_0 z_0^2, x_0 z_0, x_0, 0, 0, 0, z_0^2, z_0, 1, 0, 0) \text{ e} \\ \alpha_{z_0} &= (2x_0 y_0 z_0, x_0 y_0, 0, 2x_0 z_0, x_0, 0, 2y_0 z_0, y_0, 0, 2z_0, 1).\end{aligned}$$

Seja $0 = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \in U_1$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \overline{e}_0 = \overline{q} \in k^{11} \\ \alpha_{x_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) = \overline{e}_5 \in k^{11} \\ \alpha_{y_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) = \overline{e}_8 \in k^{11} \\ \alpha_{z_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) = \overline{e}_{10} \in k^{11}\end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\overline{q} \in k^{11}$ é dado por $O_{\overline{q}}X = \langle \overline{e}_5, \overline{e}_8, \overline{e}_{10} \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $q \in \mathbb{P}^{11}$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\overline{q} \in k^{11}$, é dado por

$$T_q X = \langle e_5, e_8, e_{10}, e_{11} \rangle.$$

Daí,

$$\langle T_p X, T_q X \rangle = \langle e_0, e_1, e_3, e_5, e_6, e_8, e_{10}, e_{11} \rangle \Rightarrow \dim \langle T_p X, T_q X \rangle = 7 = \exp \dim \text{Sec}_2 X.$$

Portanto, pelo Lema de Terracini 5.2, X não é 2-defeituosa, mas não cobre tudo. Consideremos então, pelo Lema 5.4, um terceiro ponto em posição geral $r = (1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1) \in X$. Para a $\text{Sec}_3 X$, temos que

$$\exp \dim \text{Sec}_3 X = \min\{11, 3 \cdot (3 + 1) - 1\} = \min\{11, 11\} = 11.$$

Observe que

$$\widehat{r} = \varphi((1 : 1), (1 : 1), (1 : 1)) = \alpha((1 : 1), (1 : 1), (1 : 1)) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Trabalhando com φ como antes e definindo $((1 : 1), (1 : 1), (1 : 1)) := (1, 1, 1)$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi(1, 1, 1) &= \widehat{r} \in k^{11} \\ \varphi_{x_1}(1, 1, 1) &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = u \in k^{11} \\ \varphi_{y_1}(1, 1, 1) &= (0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1) = v \in k^{11} \\ \varphi_{z_1}(1, 1, 1) &= (1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2) = w \in k^{11}\end{aligned}$$

Assim, $O_{\widehat{r}}X = \langle u, v, w \rangle$ e, com efeito,

$$\begin{aligned}T_rX &= \langle (1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1), (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1), \\ &\quad (1 : 0 : 0 : 1 : 1 : 1 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 1), (1 : 1 : 2 : 0 : 1 : 2 : 0 : 1 : 2 : 0 : 1 : 2) \rangle \\ &= \langle r, r_1, r_2, r_3 \rangle\end{aligned}$$

Pelo Lema de Terracini 5.2, temos que

$$\begin{aligned}\langle T_pX, T_qX, T_rX \rangle &= \langle e_0, e_1, e_3, e_5, e_6, e_8, e_{10}, e_{11}, r, r_1, r_2, r_3 \rangle \\ &= \langle e_0, e_1, e_3, e_5, e_6, e_8, e_{10}, e_{11}, (0 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0 : 0), \\ &\quad (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0 : 0), \\ &\quad (0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0), \\ &\quad (0 : 0 : 2 : 0 : 1 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0) \rangle\end{aligned}$$

$$\text{Daí, } \dim \langle T_pX, T_qX, T_rX \rangle = 10 < \exp \dim Sec_3X, \text{ pois posto } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Portanto, X é 3-defeituosa, logo é defeituosa.

Exemplo 5.21 Considere $X = SV_{(1,1,1,1)}^{(1,1,1,1)}$ a imagem da aplicação

$$\begin{aligned}sv_{(1,1,1,1)}^{(1,1,1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^{15} \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1), (z_0 : z_1), (w_0 : w_1)) &\mapsto (x_0y_0z_0w_0 : x_0y_0z_0w_1 : x_0y_0z_1w_0 : x_0y_0z_1w_1 : \\ &\quad x_0y_1z_0w_0 : x_0y_1z_0w_1 : x_0y_1z_1w_0 : x_0y_1z_1w_1 : \\ &\quad x_1y_0z_0w_0 : x_1y_0z_0w_1 : x_1y_0z_1w_0 : x_1y_0z_1w_1 : \\ &\quad x_1y_1z_0w_0 : x_1y_1z_0w_1 : x_1y_1z_1w_0 : x_1y_1z_1w_1).\end{aligned}$$

Como X é imagem de um mergulho, temos que $\dim X = 4$. Com efeito, segue que

$$\exp \dim Sec_2X = \min\{15, 2 \cdot (4 + 1) - 1\} = \min\{15, 9\} = 9.$$

Sejam p' e q' pontos gerais de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Pelo Lema 5.3, podemos supor, sem perda de generalidade que $p' = ((1 : 0), (1 : 0), (1 : 0), (1 : 0))$ e $q' = ((0 : 1), (0 : 1), (0 : 1), (0 : 1))$. Agora, considere $p = e_0 = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$

e $q = e_{15} = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ de \mathbb{P}^{15} que são imagens dos pontos p' e q' pela aplicação acima. Noutras palavras,

$$\begin{aligned} sv_{(1,1,1,1)}^{(1,1,1,1)}(p') &= sv_{(1,1,1,1)}^{(1,1,1,1)}((1 : 0), (1 : 0), (1 : 0), (1 : 0)) \\ &= (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) = e_0 = p \in \mathbb{P}^{15} \\ sv_{(1,1,1,1)}^{(1,1,1,1)}(q') &= sv_{(1,1,1,1)}^{(1,1,1,1)}((0 : 1), (0 : 1), (0 : 1), (0 : 1)) \\ &= (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) = e_{15} = q \in \mathbb{P}^{15} \end{aligned}$$

Para o ponto $p \in \mathbb{P}^{15}$, considere a parametrização dada por $x_0 = y_0 = z_0 = w_0 = 1$ no aberto U_0 por meio de uma carta

$$\begin{aligned} \varphi : U_0 &\rightarrow V_0 \subset k^{15} \\ (x_1, y_1, z_1, w_1) &\mapsto (w_1, z_1, w_1 z_1, y_1, y_1 w_1, y_1 z_1, y_1 z_1 w_1, x_1, x_1 w_1, x_1 z_1, x_1 z_1 w_1, x_1 y_1, x_1 y_1 w_1, \\ &\quad x_1 y_1 z_1, x_1 y_1 z_1 w_1). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{x_1} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, w_1, z_1, z_1 w_1, y_1, y_1 w_1, y_1 z_1, y_1 z_1 w_1), \\ \varphi_{y_1} &= (0, 0, 0, 1, w_1, z_1, z_1 w_1, 0, 0, 0, 0, x_1, x_1 w_1, x_1 z_1, x_1 z_1 w_1), \\ \varphi_{z_1} &= (0, 1, w_1, 0, 0, y_1, y_1 w_1, 0, 0, x_1, x_1 w_1, 0, 0, x_1 y_1, x_1 y_1 w_1) \text{ e} \\ \varphi_{w_1} &= (1, 0, z_1, 0, y_1, 0, y_1 z_1, 0, x_1, 0, x_1 z_1, 0, x_1 y_1, 0, x_1 y_1 z_1). \end{aligned}$$

Seja $0 = (x_1, y_1, z_1, w_1) = (0, 0, 0, 0) \in U_0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_0 = \widehat{p} \in k^{15} \\ \varphi_{x_1}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_8 \in k^{15} \\ \varphi_{y_1}(0) &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_4 \in k^{15} \\ \varphi_{z_1}(0) &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_2 \in k^{15} \\ \varphi_{w_1}(0) &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \widehat{e}_1 \in k^{15} \end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\widehat{p} \in k^{15}$ é dado por $O_{\widehat{p}}X = \langle \widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{e}_4, \widehat{e}_8 \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $p \in \mathbb{P}^{15}$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\widehat{p} \in k^{15}$, é dado por

$$T_p X = \langle e_0, e_1, e_2, e_4, e_8 \rangle.$$

Para o ponto $q \in \mathbb{P}^{15}$, considere a parametrização dada por $x_1 = y_1 = z_1 = w_1 = 1$ no aberto U_1 por meio de uma carta

$$\begin{aligned} \alpha : U_1 &\rightarrow V_1 \subset k^{15} \\ (x_0, y_0, z_0, w_0) &\mapsto (x_0 y_0 z_0 w_0, x_0 y_0 z_0, x_0 y_0 w_0, x_0 y_0, x_0 z_0 w_0, x_0 z_0, x_0 w_0, x_0, y_0 z_0 w_0, y_0 z_0, y_0 w_0, \\ &\quad y_0, z_0 w_0, z_0, w_0). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \alpha_{x_0} &= (y_0 z_0 w_0, y_0 z_0, y_0 w_0, y_0, z_0 w_0, z_0, w_0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \alpha_{y_0} &= (x_0 z_0 w_0, x_0 z_0, x_0 w_0, x_0, 0, 0, 0, 0, z_0 w_0, z_0, w_0, 1, 0, 0, 0), \\ \alpha_{z_0} &= (x_0 y_0 w_0, x_0 y_0, 0, 0, x_0 w_0, x_0, 0, 0, y_0 w_0, y_0, 0, 0, w_0, 1, 0) \text{ e} \\ \alpha_{w_0} &= (x_0 y_0 z_0, 0, x_0 y_0, 0, x_0 z_0, 0, x_0, 0, y_0 z_0, 0, y_0, 0, z_0, 0, 1). \end{aligned}$$

Seja $0 = (x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 0, 0, 0) \in U_1$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \overline{e_0} = \overline{q} \in k^{15} \\ \alpha_{x_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \overline{e_7} \in k^{15} \\ \alpha_{y_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) = \overline{e_{11}} \in k^{15} \\ \alpha_{z_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) = \overline{e_{13}} \in k^{15} \\ \alpha_{w_0}(0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) = \overline{e_{14}} \in k^{15}\end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço tangente afim a X no ponto $\overline{q} \in k^{15}$ é dado por $O_{\overline{q}}X = \langle \overline{e_7}, \overline{e_{11}}, \overline{e_{13}}, \overline{e_{14}} \rangle$. E assim, o espaço tangente a X no ponto $q \in \mathbb{P}^{15}$, definido como fecho projetivo (segundo a topologia de Zariski) do espaço tangente afim a X no ponto $\overline{q} \in k^{15}$, é dado por

$$T_qX = \langle e_7, e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{14}, e_{15} \rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\langle T_pX, T_qX \rangle &= \langle e_0, e_1, e_2, e_4, e_7, e_8, e_{11}, e_{13}, e_{14}, e_{15} \rangle \\ &\Rightarrow \dim \langle T_pX, T_qX \rangle = 9 = \exp \dim Sec_2X.\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema de Terracini 5.2, X não é 2-defeituosa, mas não cobre tudo. Consideremos então, pelo Lema 5.4, um terceiro ponto em posição geral

$$r = (1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1) \in X.$$

Para a Sec_3X , temos que

$$\exp \dim Sec_3X = \min\{15, 3 \cdot (4 + 1) - 1\} = \min\{15, 14\} = 14.$$

Observe que

$$\begin{aligned}\widehat{r} = \varphi((1 : 1), (1 : 1), (1 : 1), (1 : 1)) &= \alpha((1 : 1), (1 : 1), (1 : 1), (1 : 1)) = \\ &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).\end{aligned}$$

Trabalhando com φ como antes e definindo $((1 : 1), (1 : 1), (1 : 1), (1 : 1)) := (1, 1, 1, 1)$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi(1, 1, 1, 1) &= \widehat{r} \in k^{15} \\ \varphi_{x_1}(1, 1, 1, 1) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = u \in k^{15} \\ \varphi_{y_1}(1, 1, 1, 1) &= (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1) = v \in k^{15} \\ \varphi_{z_1}(1, 1, 1, 1) &= (0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1) = a \in k^{15} \\ \varphi_{w_1}(1, 1, 1, 1) &= (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1) = b \in k^{15}\end{aligned}$$

Assim, $O_{\widehat{r}}X = \langle u, v, a, b \rangle$ e, com efeito,

$$\begin{aligned}T_rX &= \langle (1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1), \\ &\quad (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1), \\ &\quad (1 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 1 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 1), \\ &\quad (1 : 0 : 1 : 1 : 0 : 0 : 1 : 1 : 0 : 0 : 1 : 1 : 0 : 0 : 1), \\ &\quad (1 : 1 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0) \rangle \\ &= \langle r, r_1, r_2, r_3, r_4 \rangle\end{aligned}$$

Pelo Lema de Terracini 5.2, temos que

$$\begin{aligned} \langle T_p X, T_q X, T_r X \rangle &= \langle e_0, e_1, e_3, e_5, e_6, e_8, e_{10}, e_{11}, r, r_1, r_2, r_3 \rangle \\ &= \langle e_0, e_1, e_2, e_4, e_7, e_8, e_{11}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, \\ &\quad (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 1 : 1 : 0 : 0 : 1 : 1 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0), \\ &\quad (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0), \\ &\quad (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0), \\ &\quad (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0), \\ &\quad (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Daí, } \dim \langle T_p X, T_q X, T_r X \rangle = 13 < \exp \dim \text{Sec}_3 X, \text{ pois posto } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4.$$

Portanto, X é 3-defeituosa, logo é defeituosa.

Exemplo 5.22 Seja $X = SV_{(1,1)}^{(n,m)}$ (suponha, sem perda, que $n \geq m$) a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} sv_{(1,1)}^{(n,m)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^{nm+n+m} \\ ((x_0 : \dots : x_n), (y_0 : \dots : y_m)) &\mapsto (x_0 y_0 : \dots : x_0 y_m : \dots : x_n y_0 : \dots : x_n y_m). \end{aligned}$$

Como X é imagem de um mergulho, temos que $\dim X = n + m$. Com efeito, segue que

$$\begin{aligned} \exp \dim \text{Sec}_2 X &= \min\{nm + n + m, 2 \cdot (n + m + 1) - 1\} \\ &= \min\{nm + n + m, 2(n + m) + 1\} \end{aligned}$$

Seja p' um ponto em posição geral de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Pelo Lema 5.3, podemos supor, sem perda de generalidade, que $p' = ((1 : \underbrace{0 : \dots : 0}_{n \text{ vezes}}), (1 : \underbrace{0 : \dots : 0}_{m \text{ vezes}}))$. Agora, considere $p = sv_{(1,1)}^{(n,m)}(p')$ um ponto em posição geral, onde $p' = (e_0, e_0) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Considere a parametrização $x_0 = y_0 = 1$, dada por

$$\begin{aligned} \varphi : U_0 &\rightarrow V_0 \\ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &\mapsto (\underbrace{y_1, \dots, y_m}_{m+1}, \underbrace{x_1 y_1, \dots, x_1 y_m}_m, \underbrace{x_2 y_1, \dots, x_2 y_m}_m, \dots, x_n, \\ &\quad \underbrace{x_n y_1, \dots, x_n y_m}_m). \end{aligned}$$

Com efeito, temos que

$$\begin{aligned}
\varphi_{y_1} &= (1, 0, \dots, 0, x_1, 0, \dots, 0, x_2, 0, \dots, 0, x_n, 0, \dots, 0) \\
&\Rightarrow \varphi_{y_1}(0) = (1, 0, \dots, 0) = \widehat{e}_1 \\
&\quad \vdots \\
\varphi_{y_n} &= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, x_1, 0, \dots, 0, x_2, 0, \dots, 0, x_n) \\
&\Rightarrow \varphi_{y_n}(0) = \widehat{e}_m \\
\varphi_{x_1} &= (0, \dots, 0, 1, y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0) \\
&\Rightarrow \varphi_{x_1}(0) = \widehat{e}_{m+1} \\
&\quad \vdots \\
\varphi_{x_n} &= (0, \dots, 0, 1, y_1, \dots, y_m) \\
&\Rightarrow \varphi_{x_n}(0) = \widehat{e}_{n(m+1)}
\end{aligned}$$

Daí,

$$T_p X = \langle \overbrace{e_0, e_1, \dots, e_m}^{m+1}, \overbrace{e_{m+1}, e_{2(m+1)}, \dots, e_{n(m+1)}}^n \rangle \Rightarrow \dim T_p X = n + m.$$

Seja q' um ponto em posição geral de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Pelo Lema 5.3, podemos supor, sem perda de generalidade, que $q' = ((\underbrace{0 : \dots : 0 : 1}_{n \text{ vezes}}), (\underbrace{0 : \dots : 0 : 1}_{m \text{ vezes}}))$. Agora, considere $q = sv_{(1,1)}^{(n,m)}(q')$

um ponto em posição geral, onde $q' = (e_1, e_1) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Considere a parametrização $x_1 = y_1 = 1$ dada por

$$\begin{aligned}
\alpha : U_1 &\rightarrow V \\
(x_0, x_2, x_3, \dots, x_n, y_0, y_2, y_3, \dots, y_m) &\mapsto \left(\overbrace{x_0 y_0, x_0, x_0 y_2, \dots, x_0 y_m, y_0}^{m+2}, \overbrace{y_0, y_2, y_3, \dots, y_m}^{m+1}, \right. \\
&\quad \left. \overbrace{x_2 y_0, x_2, x_2 y_2, \dots, x_2 y_m}^{m+1}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \overbrace{x_n y_0, x_n, x_n y_2, \dots, x_n y_m}^{m+1} \right)
\end{aligned}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\alpha_{x_0} &= (y_0, 1, y_2, \dots, y_m, 0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha_{x_0}(0) = \bar{e}_1 \\
\alpha_{x_2} &= (0, \dots, 0, y_0, 1, y_2, \dots, y_m, 0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha_{x_2}(0) = \bar{e}_{2m+3} \\
\alpha_{x_3} &= (0, \dots, 0, y_0, 1, y_2, \dots, y_m, 0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha_{x_3}(0) = \bar{e}_{3m+4} \\
\alpha_{x_4} &= (0, \dots, 0, y_0, 1, y_2, \dots, y_m, 0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha_{x_4}(0) = \bar{e}_{4m+5} \\
&\quad \vdots \\
\alpha_{x_n} &= (0, \dots, 0, y_0, 1, y_2, \dots, y_m) \Rightarrow \alpha_{x_n}(0) = \bar{e}_{nm+(n+1)} \\
\alpha_{y_0} &= (x_0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, x_2, 0, \dots, 0, x_n, 0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha_{y_0}(0) = \bar{e}_{m+1} \\
\alpha_{y_2} &= (0, 0, x_0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, x_2, 0, \dots, 0, x_n, 0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha_{y_2}(0) = \bar{e}_{m+3=m+(2+1)} \\
\alpha_{y_3} &= (0, 0, 0, x_0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, x_2, 0, \dots, 0, x_n, 0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha_{y_3}(0) = \bar{e}_{m+4=m+(3+1)} \\
&\quad \vdots \\
\alpha_{y_m} &= (0, \dots, 0, x_0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, x_2, 0, \dots, 0, x_n) \Rightarrow \alpha_{y_m}(0) = \bar{e}_{2m+1=m+(m+1)}
\end{aligned}$$

Daí,

$$T_q X = \langle e_1, e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_{2m+1}, e_{2m+3}, e_{3m+4}, \dots, e_{nm+(n+1)} \rangle \Rightarrow \dim T_q X = n + m.$$

Observe que $T_p X \cap T_q X = \{e_{m+1}\}$. Fixado $m = 1$, temos que

$$\exp \dim \text{Sec}_2 X = \min\{2n + 1, 2(n + 1 + 1) - 1\} = \min\{2n + 1, 2n + 3\} = 2n + 1.$$

Isso mostra que se $m = 1$ então X não é 2-defeituosa. Se, porém, $N \geq 2m + 1 > m + 1$, então X é 2-defeituosa.

Exemplo 5.23 Considere a mesma variedade X definida no exemplo anterior, o Exemplo 5.22, só que vista em sua forma matricial, isto é

$$sv_{(1,1)}^{(n,m)} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^{nm+n+m} = \{M \mid M \in \mathbb{M}_{(n+1) \times (m+1)}\} / \sim$$

$$((x_0 : \dots : x_n), (y_0 : \dots : y_m)) \mapsto \begin{pmatrix} x_0 y_0 & \dots & x_0 y_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_0 & \dots & x_n y_m \end{pmatrix}$$

Mostremos inicialmente que $X = \{M \in \mathbb{M}_{(n+1) \times (m+1)} \mid M \text{ tem posto } 1\}$. Para isso, considere os conjuntos

$$A = \{(x_i y_j)_{ij} \mid x \neq 0 \neq y\} \subset \mathbb{M}_{(n+1) \times (m+1)} \text{ e } B = \{M \in \mathbb{M}_{(n+1) \times (m+1)} \mid M \text{ tem posto } 1\}$$

Para mostrar que $A \subset B$, observe que

$$\text{Im}(M) = \langle \text{vetores coluna de } M \rangle = \langle y_0 x, y_1 x, \dots, y_m x \rangle = \langle x \rangle$$

pois $y \neq 0$. Isto implica que $\text{posto}(M) = \dim \text{Im}(M) = 1$, pois $x \neq 0$. Por outro lado, para ver que $B \subset A$, observe que $\text{Im}(M)$ tem dimensão 1. Daí, $\text{Im}(M) = \langle x \rangle$ para algum $x \neq 0$. Como

$$\langle x \rangle = \text{Im}(M) = \langle \text{vetores coluna de } M \rangle,$$

temos que, para cada $j = 0, \dots, m$ existe y_j tal que j -ésima coluna de M é igual a $y_j x$. Além disso, $y = (y_0, \dots, y_m) \neq 0$ pois $M \neq 0$, uma vez que $\dim \text{Im}(M) \neq 0$.

Agora, mostremos que $\text{Sec}_h SV_{(1,1)}^{(n,m)}$, pode ser identificada com o conjunto das matrizes de posto $\leq h$. Para isto, considere os seguintes subconjuntos de $k^{nm+n+m+1}$: $X = [\text{Sec}_h SV_{(1,1)}^{(n,m)}]$, $Y = \{M \in \mathbb{M}_{(n+1) \times (m+1)} \mid \text{posto}(M) \leq h\}$ e $Z = \{M_1 + \dots + M_h \mid M_j \in B = A\}$. Queremos mostrar que $X = Y = Z$. Para ver que $Z \subset Y$, basta observar que

$$\text{Im}(M_1 + \dots + M_h) \subset \text{Im}(M_1) + \dots + \text{Im}(M_h),$$

o que implica que

$$\text{posto}(M_1 + \dots + M_h) \leq \sum_{j=1}^h \text{posto } \text{Im}(M_j) = \sum_{j=1}^h 1 = h.$$

Para ver que $Y \subset Z$, considere $M \in Y$. Daí, $\text{Im}(M) = \langle x^1, \dots, x^h \rangle$ para certos $x^j \in k^{n+1}$. Com efeito,

$$M = \begin{pmatrix} \underbrace{\sum_{j=1}^h y_0^j x^j}_{\text{coluna } 0} & \underbrace{\sum_{j=1}^h y_1^j x^j \dots \sum_{j=1}^h y_m^j x^j}_{\text{coluna } 1} & \dots & \underbrace{\sum_{j=1}^h y_m^j x^j}_{\text{coluna } m} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^h (y_0^j x^j \quad y_1^j x^j \dots y_m^j x^j) = \sum_{j=1}^h \underbrace{M_j}_{\text{posto} \leq 1} \in Z.$$

Mostremos agora que $X = Z$. De fato,

$$\begin{aligned}
[Sec_h SV_{(1,1)}^{(n,m)}] &= \left[\overline{\bigcup_{p_1, \dots, p_h \in SV} \langle p_1, \dots, p_h \rangle} \right] = \overline{\bigcup_{p_1, \dots, p_h \in [SV]} \{\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_h p_h \mid \lambda \in k^h\}} \\
&= \overline{\bigcup_{p_1, \dots, p_h \in [SV]} \{p_1 + \dots + p_h\}} = \bar{Z} = \bar{Y} = Y
\end{aligned}$$

Note que Y é fechado, pois

$$Y = \mathbf{V}(\det(N) \mid N \text{ varre todas as submatrizes } (h+1) \times (h+1)).$$

Isso decorre de uma aplicação direta, que faremos abaixo, do Teorema 19.9 do livro [15], adaptado ao que desejamos e enunciado como segue:

“*O posto de uma matriz $M \in \mathbb{M}_{(n+1) \times (m+1)}$ é o maior número $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que M possui uma submatriz $N \in \mathbb{M}_{h \times h}$ com $\det N \neq 0$.*”

Seja $M \in \mathbb{M}_{(n+1) \times (m+1)}$ uma matriz e mostremos que $\text{posto}(M) \leq h$ se, e somente se, todos os menores de tamanho $h+1$ de M são zero. Com efeito, temos pelo Teorema enunciado acima que $\text{posto}(M) \leq h$ se, e somente se, $\det(N) \neq 0$ para toda submatriz $N \in \mathbb{M}_{h \times h}$, o que por definição de determinante ocorre se, e somente se, todos os menores de tamanho $h+1$ de M forem nulos e, pelo Teorema de Laplace, ocorre se, e somente se, todos os menores de tamanho $\geq h+1$ de M forem zero.

De fato, suponha que todos os menores de tamanho $\geq h+1$ de M são zero. Pelo Teorema enunciado acima, segue que $\text{posto}(M) < h+1$, logo $\text{posto}(M) \leq h$. Reciprocamente, suponha agora que $\text{posto}(M) = s \leq h$ e considere $B \in \mathbb{M}_{t \times t}$ uma submatriz com $t \geq h+1$. Observe que $t \geq h+1 > h$. Pela parte de maximalidade do número $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ do Teorema acima enunciado, devemos ter $\det B = 0$.

Portanto, fica provado que, de fato,

$$Y = \mathbf{V}(\det(N) \mid N \text{ varre todas as submatrizes } (h+1) \times (h+1)).$$

Dessa forma, supondo $1 < m \leq n$, sem perda de generalidade, temos que $\exp \dim Sec_2 SV_{(1,1)}^{(n,m)} = 2(n+m) + 1$ ao passo que $\dim Sec_2 SV_{(1,1)}^{(n,m)} = 2(n+m) - 1$.

Por fim, mostremos que $\dim Z = 2(n+m)$ (afim). Para isso, basta considerar uma sobrejeção afim de Z . Seja

$$\begin{aligned}
\varphi : k^{2n} \times k^{2m} &\rightarrow Z \\
((x^1, x^2), (y^1, y^2)) &\mapsto \underbrace{(y_0^1 x^1 + y_0^2 x^2 \cdots y_m^1 x^1 + y_m^2 x^2)}_{\text{coluna } 0}
\end{aligned}$$

Daí, $\dim Z \leq \dim \text{Dom}(\varphi) = \dim k^{2n} \times k^{2m} = 2(n+m)$.

Como o leitor pode notar dos exemplos vistos, o Lema de Terracini 5.2 apesar de eficaz, se mostra inviável, a menos de poucas exceções como fizemos. A inviabilidade se apresenta pela necessidade em explicitar o cálculo da $Sec_h X$, que para $h \geq 3$ se mostra um tanto quanto que trabalhoso. Contudo, o método usual é por meio do cálculo dos espaços tangentes e Terracini.

6 Esquemas e Feixes

Neste capítulo definiremos, apresentaremos alguns exemplos e enunciaremos alguns resultados, em sua grande maioria sem provar. Contudo, o leitor interessado poderá consultar a referência dada, sobre importantes objetos de estudo em Geometria Algébrica: esquemas e feixes. A principal referência para essa parte são os Capítulos II e III do livro [19].

Na primeira seção apresentamos o conceito, exemplos e propriedades inerentes à estrutura de pré-feixes e feixes. Na sequência, tratamos do espectro primo de um anel, como um conjunto, como um espaço topológico e por fim como um feixe, a fim de obtermos um espaço que seja localmente anelado, ou seja, cada talo seja um anel local (isto é, possua um único ideal maximal). A necessidade em se obter esse espaço localmente anelado reside no fato de precisarmos disso para definirmos esquemas.

Os esquemas serão tratados na terceira e última seção deste capítulo. Nesta parte definiremos um morfismo de feixes e veremos como os esquemas funcionam na prática. Assim, nesta última seção usaremos de todo arcabouço de ferramentas obtidas nas seções anteriores, para vermos o espaço projetivo e as variedades projetivas, sob a ótica de esquemas.

6.1 Pré-Feixes e Feixes

Definição 6.1 Seja X um espaço topológico. Um **pré-feixe** \mathcal{F} de conjuntos em X é definido como segue:

- (a) para cada aberto $U \subseteq X$, um conjunto $\mathcal{F}(U)$;
- (b) para cada inclusão $V \subseteq U$ de abertos de X , uma função $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ sujeita às seguintes restrições:
 - (1) $\mathcal{F}(\emptyset)$ consiste de um único ponto;
 - (2) $\rho_{UU} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$;
 - (3) Se $W \subseteq V \subseteq U$ são abertos, então $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$, onde as ρ_{UV} são chamadas de **restrições**. Com isso, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}} & \mathcal{F}(V) \\
 & \searrow \rho_{UW} & \downarrow \rho_{VW} \\
 & & \mathcal{F}(W)
 \end{array}$$

Definição 6.2 Os elementos $s \in \mathcal{F}(U)$ são chamados de **seções** de \mathcal{F} sobre U . Os elementos de $\mathcal{F}(X) := \Gamma(\mathcal{F}, X)$ são chamados **seções globais** de \mathcal{F} . Usamos a notação $s \in \mathcal{F}(U)$ e $\rho_{UV}(s) =: s|_V$.

Exemplo 6.1 Sejam X e Y espaços topológicos, defina para cada aberto não vazio $U \subseteq X$,

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow Y \text{ contínua}\}$$

e para cada inclusão de abertos $V \subseteq U$,

$$\begin{aligned} \rho_{UV} : \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}(V) \\ f &\mapsto f|_V \end{aligned}$$

Então \mathcal{F} é um pré-feixe de espaços topológicos sobre X .

Exemplo 6.2 Sejam X uma variedade diferenciável e defina para todo aberto não vazio $U \subseteq X$,

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciável}\}$$

e para cada inclusão de abertos $V \subseteq U$,

$$\begin{aligned} \rho_{UV} : \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}(V) \\ f &\mapsto f|_V \end{aligned}$$

Então \mathcal{F} é um pré-feixe, chamado o **pré-feixe de funções diferenciáveis**.

Definição 6.3 Seja \mathcal{F} um pré-feixe sobre um espaço topológico X . Dizemos que \mathcal{F} é um **feixe** quando vale a seguinte propriedade: dada uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de um aberto $U \subseteq X$ e seções $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ compatíveis nas interseções, isto é,

$$s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta},$$

existe uma única seção $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ para todo α . Dizemos que as s_α podem ser “coladas” para obter uma s , e de modo único.

Exemplo 6.3 Os exemplos 6.1 e 6.2 dados acima são exemplos de pré-feixes que são feixes. Vejamos a seguir, um exemplo de um pré-feixe que não é um feixe.

Exemplo 6.4 Sejam X um espaço topológico e Y um conjunto. Defina para todo aberto não vazio $U \subseteq X$,

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow Y \text{ constante}\}$$

e para cada inclusão de abertos $V \subseteq U$,

$$\begin{aligned} \rho_{UV} : \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}(V) \\ f &\mapsto f|_V \end{aligned}$$

Então \mathcal{F} é um pré-feixe que não é um feixe. De fato, suponha que existam abertos $U_1, U_2 \subset U$ com $U = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_1 \neq \emptyset \neq U_2$. Sejam $y_1 \neq y_2 \in Y$ e $s_1 \in \mathcal{F}(U_1)$, $s_2 \in \mathcal{F}(U_2)$, onde

$$\begin{array}{ccc} s_1 : U_1 \rightarrow Y & \text{e} & s_2 : U_2 \rightarrow Y \\ x \mapsto y_1 & & x \mapsto y_2 \end{array}$$

Então,

$$s_1|_{U_1 \cap U_2} = s_2|_{U_1 \cap U_2} = *, \text{ onde } \mathcal{F}(\emptyset) = \{*\}, \text{ pois } U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Contudo, não existe $s \in \mathcal{F}(U_1 \cap U_2)$ tal que $s|_{U_1} = s_1$ e $s|_{U_2} = s_2$.

Definição 6.4 Seja \mathcal{F} um pré-feixe num espaço topológico X e seja $U \subseteq X$ um aberto não vazio. Definimos \mathcal{F} **restrito a** U , e denotamos por $\mathcal{F}|_U$, como sendo

$$\mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V), \text{ para todo aberto } V \subseteq U$$

e $\sigma_{VW} = \rho_{VW}$ para toda inclusão de abertos $W \subseteq V \subseteq U$. Neste caso, $\mathcal{F}|_U$ juntamente com as restrições σ_{VW} é um feixe sobre o aberto U .

Definição 6.5 Uma variedade **quase-afim** $Y \subseteq k^n$ é um aberto de uma variedade afim $V(I) \subseteq k^n$, onde $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Uma variedade **quase-projetiva** $X \subseteq \mathbb{P}^n$ é um aberto de uma variedade projetiva $V(J) \subseteq \mathbb{P}^n$ onde $J \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ é um ideal homogêneo. Uma **variedade** é qualquer variedade afim, quase-afim, projetiva ou quase-projetiva.

Definição 6.6 Seja $Y \subseteq k^n$ uma variedade quase-afim. Uma função $f : Y \rightarrow k$ é **regular** em $p \in Y$, se existe uma vizinhança $U \subseteq Y$ de p e polinômios $g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$ tais que $0 \notin h(U)$ ($h(x) \neq 0$ para todo $x \in U$) e $f = g/h$ em U . Dizemos que f é regular, se f é regular em p para todo $p \in Y$. Por outro lado, se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma variedade quase-projetiva, então uma função $f : X \rightarrow k$ é **regular** em $p \in X$, se existe uma vizinhança $U \subseteq X$ de p e polinômios homogêneos de mesmo grau, $g, h \in k[x_0, \dots, x_n]$ tais que $h(Q) \neq 0$ para todo $Q \in U$ e $f = g/h$ em U .

Exemplo 6.5 Seja X uma variedade sobre um corpo k . Defina para todo aberto não vazio $U \subseteq X$,

$$\mathcal{O}(U) := \{f : U \rightarrow k \text{ regular}\}$$

e para cada inclusão de abertos $V \subseteq U$,

$$\begin{aligned} \rho_{UV} : \mathcal{O}(U) &\rightarrow \mathcal{O}(V) \\ f &\mapsto f|_V \end{aligned}$$

Chamamos \mathcal{O} de **feixe de funções regulares**. Além disso, \mathcal{O} é um feixe de anéis.

Definição 6.7 Seja \mathcal{F} um pré-feixe sobre um espaço topológico X . Definimos o **talo** \mathcal{F}_p de \mathcal{F} em $p \in X$, como sendo o limite direto dos grupos $\mathcal{F}(U)$ para toda vizinhança $U \subseteq X$ de p , em notação

$$\mathcal{F}_p := \varinjlim \mathcal{F}(U)$$

Um elemento de \mathcal{F}_p é representado por um par $\langle U, s \rangle$ com U vizinhança de p e $s \in \mathcal{F}(U)$. Dois pares $\langle U, s \rangle$ e $\langle V, t \rangle$ representam o mesmo elemento de \mathcal{F}_p , quando existe um aberto W tal que $p \in W \subseteq U \cap V$ e $s|_W = t|_W$. Os elementos de \mathcal{F}_p são chamados **germes** de seções.

Exemplo 6.6 Seja A um grupo abeliano, X um espaço topológico e $p \in X$. Defina para todo aberto não vazio $U \subseteq X$:

$$i_p(A)(U) = \begin{cases} A, & \text{se } p \in U \\ \{0\}, & \text{se } p \notin U \end{cases}$$

e para toda inclusão de abertos $V \subseteq U$,

$$\rho_{UV} = \begin{cases} \text{id}_A, & \text{se } p \in V \\ \{0\} \mapsto \{0\}, & \text{se } p \notin U \\ A \mapsto \{0\}, & \text{se } p \in U \setminus V \end{cases}$$

Chamamos $i_p(A)$ de **feixe skyscraper**. Além disso, os talos de $i_p(A)$ são dados por

$$(i_p(A))_Q = \begin{cases} A, & \text{se } Q \in \overline{\{p\}} \\ \{0\}, & \text{se } Q \notin \overline{\{p\}} \end{cases}$$

6.2 O Espectro de um Anel

Parte Zero - Motivação

Note inicialmente que temos uma bijeção entre os ideais radicais de $k[x_1, \dots, x_n]$ e as variedades afins sobre k , além disso, temos também uma bijeção entre as variedades afins sobre k e as k -álgebras finitamente geradas (f.g.) sem elementos nilpotentes. Desta forma, temos a seguinte relação entre a álgebra e a geometria

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \text{ideais radicais de} \\ k[x_1, \dots, x_n] \end{array} \right\}}_{\text{GEOMETRIA}} \xleftrightarrow{\Phi} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \text{variedades afins} \\ \text{sobre } k \end{array} \right\}}_{\text{GEOMETRIA}} \xleftrightarrow{\Psi} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} k\text{-álgebras f.g.} \\ \text{sem nilpotentes} \end{array} \right\}}_{\text{ÁLGEBRA}}$$

Onde cada ideal radical I de $k[x_1, \dots, x_n]$ tem uma variedade afim sobre k associada $V(I)$, e cada variedade afim X sobre k tem um ideal radical associado $I(X)$ e uma k -álgebra finitamente gerada sem nilpotente, dada pelo anel de coordenadas $k[X] = k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$.

Também podemos estabelecer uma relação entre esquemas afins, variedades afins sobre k , anéis e k -álgebras finitamente geradas sem elementos nilpotentes, através do espectro de um dado anel. Dado um anel A e associado à ele seu espectro $\text{Spec}(A)$, temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \{\text{esquemas afins}\} & \xleftrightarrow{\tilde{\Psi}} & \{\text{anéis}\} \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{variedades afins} \\ \text{sobre } k \end{array} \right\} & \xleftrightarrow{\Psi} & \left\{ \begin{array}{c} k\text{-álgebras f.g.} \\ \text{sem nilpotentes} \end{array} \right\} \end{array}$$

onde i é a inclusão.

Parte Um - O Espectro como um Conjunto

Definição 6.8 Seja A um anel. Definimos o conjunto

$$\text{Spec}(A) := \{p \subseteq A \mid p \text{ é um ideal primo de } A\}.$$

Proposição 6.1 $\text{Spec}(A) = \emptyset \iff A = \{0\}$.

Observação 6.1 Se $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$ é o anel de coordenadas $k[X]$ de uma variedade afim $X = V(I) \subseteq k^n$, então $\text{Spec}(A)$ tem um elemento para cada subvariedade irredutível de X . Num certo sentido, existe a seguinte bijeção

$$\text{Spec}(A) = \{p \subseteq A \text{ primo}\} \longleftrightarrow \{Y \subseteq X \text{ irredutível}\},$$

onde para cada ideal primo p de A , temos uma variedade irredutível $V(p+I)$ e para cada subvariedade irredutível Y de X , temos um ideal primo $\overline{I(Y)}$, onde $\overline{I(Y)}$ é a imagem de $I(Y) \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ em A pela projeção canônica $\pi : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A$.

Exemplo 6.7 Sejam $A = k[x]/(x(x-1))$ e $X = V(x(x-1)) = \{0, 1\} \subseteq k$, assim X tem dois pontos. Logo

$$\{Y \subseteq X \text{ irredutível}\} = \{\{0\}, \{1\}\} \longleftrightarrow \text{Spec}(A).$$

Assim, $\text{Spec}(A)$ tem dois pontos: $p_0 = (\bar{x}) \subseteq A$ e $p_1 = (\overline{x-1}) \subseteq A$. Portanto, $\text{Spec}(A) = \{p_0, p_1\}$.

Exemplo 6.8 Sejam $A = k[x, y]$ e $X = V(0) = k^2$. Assim, X é o plano afim e $\text{Spec}(A)$ tem um ponto para cada ponto de X , ou seja,

$$\begin{aligned} X &\hookrightarrow \text{Spec}(A) \\ (x_0, y_0) &\mapsto (x - x_0, y - y_0) \end{aligned}$$

Além disso, $\text{Spec}(A)$ tem um ponto para cada polinômio irredutível mônico

$$\begin{aligned} \{f \in k[x, y] \text{ irredutível mônico}\} &\hookrightarrow \text{Spec}(A) \\ f &\mapsto (f) \end{aligned}$$

e um ponto, o ideal nulo, correspondente a k^2 . Assim, $\text{Spec}(A) = \{(x - x_0, y - y_0)\} \cup \{(f)\} \cup \{(0)\}$ está em bijeção com $k^2 \cup \{\text{curvas irredutíveis}\} \cup \{k^2\}$.

Funções no Espectro

Definição 6.9 Sejam A um anel e $f \in A$. Para cada $p \in \text{Spec}(A)$, faça o quociente A/p de A pelo ideal p e em seguida o corpo de frações $k(p)$ do domínio A/p . Compondo

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A/p \rightarrow k(p) \text{ (corpo residual de } p) \\ f &\mapsto \bar{f} \mapsto \bar{f}/\bar{1} \end{aligned}$$

Construímos assim uma função (que também denotamos por f)

$$\begin{aligned} f : \text{Spec}(A) &\rightarrow \bigsqcup_{p \in \text{Spec}(A)} k(p) \\ p &\mapsto \bar{f}/\bar{1} \end{aligned}$$

Observe que não faz sentido comparar $f(p) \in k(p)$ e $f(q) \in k(q)$, pois estão em corpos residuais diferentes. Contudo, faz sentido a condição $f(p) = 0$ para todo $p \in V$, onde $V \subseteq \text{Spec}(A)$ é um subconjunto de $\text{Spec}(A)$ no caso $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$ temos $k(p) = k$ para todo ideal maximal p e $f(p)$ é o valor usual de $f \in A$ em $p \in X = V(I) \subseteq k^n$.

Exemplo 6.9 Sejam $A = k[x]/(x^2)$ e $f = \bar{x} \in A$. Temos então que $f(p) = 0$ para todo $p \in \text{Spec}(A)$, mas $f \neq 0$.

Parte Dois - O Espectro como um Espaço Topológico

Definição 6.10 Seja A um anel e para cada $S \subseteq A$, defina

$$\begin{aligned} V(S) &:= \{p \in \text{Spec}(A) \mid f(p) = 0 \forall f \in S\} \\ &= \{p \in \text{Spec}(A) \mid p \supseteq S\} \end{aligned}$$

Observação 6.2 Já vimos que $\text{Spec}(A)$ é um espaço topológico com fechados $V(S)$ pela Proposição 2.34. Mais precisamente,

- (a) $\bigcap_{\alpha} V(S_{\alpha}) = V\left(\bigcup_{\alpha} S_{\alpha}\right)$;
- (b) $V(S) \cup V(S') = V(\langle S \rangle \cap \langle S' \rangle) = V(\langle S \rangle \langle S' \rangle)$;
- (c) $V(\{0\}) = A$;
- (d) $V(\{1\}) = \emptyset$.

A topologia de $\text{Spec}(A)$ é chamada **Topologia de Zariski**.

Como a operação

$$\begin{aligned} \text{Spec}(A) &\rightarrow \{\text{fechados de } \text{Spec}(A)\} \\ p &\mapsto V(p) \end{aligned}$$

reverte inclusão, temos então que ideais maximais de A são levados em fechados minimais.

Observação 6.3

- (a) $S \subseteq T \Rightarrow V(T) \subseteq V(S)$;
- (b) $V(S) = V(\langle S \rangle)$;
- (c) $p, q \in \text{Spec}(A), p \subseteq q \Rightarrow V(q) \subseteq V(p)$;
- (d) $V(p) = \bar{p}$ é o fecho de $\{p\} \subseteq \text{Spec}(A)$ na topologia de $\text{Spec}(A)$.

Exemplo 6.10 Voltando ao Exemplo 6.8, $A = k[x, y]$

$$\begin{aligned} \text{Spec}(A) &= \\ &\underbrace{\{(x - x_0, y - y_0) \mid (x_0, y_0) \in k^2\}}_A \cup \underbrace{\{(f) \mid f \in k[x, y] \text{ irredutível}\}}_B \cup \underbrace{\{(0)\}}_{\text{ponto denso}} \end{aligned}$$

Como $\{0\} \subseteq p$ (como ideais) para todo $p \in \text{Spec}(A)$, temos então $\overline{\{0\}} \supseteq \overline{\{p\}} \ni p$ para todo $p \in \text{Spec}(A)$. Portanto, $\{0\}$ é denso em $\text{Spec}(A)$. Por outro lado, $\{p\} = \overline{\{p\}}$ para todo ideal maximal p . Assim, $\{p\}$ é um ponto fechado para todo ideal maximal p . Finalmente, dado $q = (f) \in \text{Spec}(A)$, se $C = V(f) \subseteq k^2$, então

$$\overline{\{p\}} = \underbrace{\{q\}}_{\subseteq B} \cup \underbrace{\{(x - x_0, y - y_0) \mid (x_0, y_0) \in V(f) \subseteq k^2\}}_{\subseteq A}$$

Dizemos que $q = \eta_C$ é o **ponto genérico** de C . Desse modo, $\text{Spec}(A)$ é formado pelos pontos $p \in \text{Spec}(A)$, $0 \in \text{Spec}(A)$ e $\eta_C \in \text{Spec}(A)$, cujos fechados são $\overline{\{p\}} = \{p\}$ e $\overline{\{0\}} = \text{Spec}(A)$.

Funções Contínuas no Espectro

Definição 6.11 Seja $\varphi : A \rightarrow B$ um morfismo de anéis. Definimos uma aplicação associada a φ :

$$\begin{aligned} \text{Spec}(\varphi) : \text{Spec}(B) &\rightarrow \text{Spec}(A) \\ p &\mapsto \varphi^{-1}(p) \end{aligned}$$

Outras notações para $\text{Spec}(\varphi)$ são $(\varphi) = \varphi^\# = a_\varphi$.

Proposição 6.2 $\text{Spec}(\varphi)$ é uma função contínua.

Demonstração:

De fato, basta observar que $\text{Spec}(\varphi)^{-1}(V(q)) = V(\varphi^{-1}(q))$ para todo q ideal de A e portanto, a pré-imagem de fechados é fechada. ■

Proposição 6.3 Se φ é sobrejetor, então $\text{Spec}(\varphi)$ é um homeomorfismo de $\text{Spec}(B)$ sobre $V(\ker \varphi)$. Se φ é injetor, então $\text{Spec}(\varphi)(\text{Spec}(B)) = \text{Spec}(A)$.

Corolário 6.1 Sejam A um anel, I um ideal de A e $\pi : A \rightarrow A/I$ o morfismo canônico. Então $\text{Spec}(\pi) : \text{Spec}(A/I) \rightarrow \text{Spec}(A)$ é um homeomorfismo de $\text{Spec}(A/I)$ sobre o fechado $V(I) \subseteq \text{Spec}(A)$.

Proposição 6.4 Sejam A um anel, $S \subseteq A$ um subconjunto multiplicativamente fechado e $\psi : A \rightarrow A_S$ a localização. Então $\text{Spec}(\psi) : \text{Spec}(A_S) \rightarrow \text{Spec}(A)$ é um homeomorfismo de $\text{Spec}(A_S)$ sobre o conjunto

$$U_S = \{p \in \text{Spec}(A) \mid p \cap S = \emptyset\} \subseteq \text{Spec}(A).$$

Proposição 6.5 Sejam A um anel, $f \in A$ e $S = \{1, f, f^2, \dots\} \subseteq A$. Seja $\psi : A \rightarrow A_f$ a localização. Então $\text{Spec}(\psi) : \text{Spec}(A_f) \rightarrow \text{Spec}(A)$ é um homeomorfismo de $\text{Spec}(A_f)$ sobre o aberto $D(f) = \text{Spec}(A) \setminus V(f)$.

Observação 6.4 Os abertos $D(f)$ com $f \in A$ são chamados **abertos principais** e formam uma base da topologia $\text{Spec}(A)$.

Proposição 6.6 $\text{Spec}(A)$ é compacto, ou seja, toda cobertura por abertos admite subcobertura finita.

Exemplo 6.11 Para todos $n > m \geq 1$, os espaços $\text{Spec}(k[x]/(x^n))$ e $\text{Spec}(k[x]/(x^m))$ são homeomorfos.

Exemplo 6.12 Seja $A = k[x, y]$, $X = \text{Spec}(A)$ e $f \in A$ irredutível. Temos o seguinte

$$\begin{aligned} A_f &\xleftarrow{\psi} A \xrightarrow{\pi} A/(f) \Rightarrow \text{Spec}(A_f) \xrightarrow{\text{Spec}(\psi)} \text{Spec}(A) \xleftarrow{\text{Spec}(\pi)} \text{Spec}(A/(f)) \\ &\Rightarrow \text{Spec}(A/(f)) \underbrace{\xrightarrow{\text{Spec}(\pi)}}_{\cong \text{homeo}} V(f) \text{ e } \text{Spec}(A_f) \underbrace{\xrightarrow{\text{Spec}(\psi)}}_{\cong} D(f) \Rightarrow \text{Spec}(A) = V(f) \sqcup D(f) \end{aligned}$$

Parte Três - O Espectro como um Feixe

Definição 6.12 Seja \mathcal{O} um feixe sobre X . Dizemos que (X, \mathcal{O}) é um **espaço anelado**, quando \mathcal{O} é um feixe de anéis sobre X . Dizemos que o espaço anelado (X, \mathcal{O}) é **localmente anelado**, se cada talo \mathcal{O}_p é um anel local, ou seja, possui um único ideal maximal.

O que queremos agora, é definir sobre $\text{Spec}(A)$ um feixe $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ de modo que $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ seja um espaço localmente anelado. Para isso, vamos usar (sem provar nem formalizar) o fato de que para definir um feixe sobre um espaço topológico basta definir um feixe nos abertos de uma base da topologia.

Definição 6.13 Seja A um anel. Defina

- (a) para cada $f \in A$, $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(D(f)) = A_f$;
- (b) para cada par $f, g \in A$ com $D(f) \subseteq D(g)$

$$\begin{aligned} \rho_{D(f)}^{D(g)} : A_g &\rightarrow A_f \\ \frac{a}{g^k} &\mapsto \frac{au^k}{f^{nk}}, \end{aligned}$$

onde $f^n = gu$ em A para algum $u \in A$ e $n \geq 0$.

Observação 6.5 Se $D(f) \subseteq D(g)$, então $V(g) \subseteq V(f)$, ou seja,

$$p \in \text{Spec}(A), p \ni g \Rightarrow p \ni f.$$

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : A &\rightarrow A/(g) \\ f &\mapsto \bar{f} \end{aligned}$$

e lembre que há uma bijeção

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ideais primos de } A \\ \text{que contêm } g \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ideais primos de} \\ A/(g) \end{array} \right\}$$

Desse modo, cada ideal primo I de $A/(g)$ é levado em um ideal primo de A que contém g , tomando a pré-imagem de I pela projeção canônica, $I \mapsto \pi^{-1}(I)$. Do mesmo modo, cada ideal primo J de A que contenha g é levado em um ideal primo de $A/(g)$ tomando a imagem de J pela projeção canônica, ou seja, considerando sua classe residual em $A/(g)$, $J \mapsto \pi(J) = J + (g)$.

Observação 6.6 $\bar{f} \in I$ para todo $I \in \text{Spec}(A/(g))$. De fato, seja $I \in \text{Spec}(A/(g))$. Pelo exposto acima, $(g) \in \pi^{-1}(I) \subseteq \text{Spec}(A)$. Pela observação anterior, $f \in \pi^{-1}(I)$. Desse modo, $\bar{f} \in \pi(\pi^{-1}(I)) = I$. Com efeito,

$$\bar{f} \in \bigcap_{I \in \text{Spec}(A/(g))} I = N(A/(g)) \Rightarrow \bar{f}^n = 0 \in A/(g) \Rightarrow f^n \in (g) \Rightarrow f^n = ug$$

para algum $u \in A$ e para algum $n \geq 0$.

Observação 6.7

- (1) A aplicação $\rho_{D(f)}^{D(g)}$ é simplesmente a localização $A_g \rightarrow (A_g)_f = A_f$;
- (2) A ideia da aplicação $\rho_{D(f)}^{D(g)}$ é que os elementos de A_g são do tipo a/g^k e queremos restringir uma para A_f . Porém, em A_f , os elementos são da forma b/f^l , então queremos escrever o g em termos de potências de f . Convenientemente, como $f^n \in (g)$, para algum $n \geq 0$, isso é possível.

Teorema 6.1 Sejam A um anel e $X = \text{Spec}(A)$ um espaço topológico. Dessa forma, (X, \mathcal{O}_X) ganha uma estrutura de um espaço localmente anelado. Além disso, $\mathcal{O}_X(X) = A$ e o talo de \mathcal{O}_X em cada $p \in X$ é $\mathcal{O}_{X,p} = A_p$, a localização do anel A no ideal primo p .

Chamamos \mathcal{O}_X de **feixe estrutural** de X , ou **feixe de funções regulares** de X .

No que segue, vejamos em alguns exemplos como o espectro dá informação geométrica. Do teorema acima, o que devemos lembrar é, dado um anel A temos

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{GEOMETRIA} \\ \text{Spec}(A) = X \text{ conjunto} \\ X \text{ espaço topológico} \\ \mathcal{O}_X \text{ feixe} \end{array} \right\}} \longrightarrow \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{ÁLGEBRA} \\ \mathcal{O}_X(X) = \Gamma(\mathcal{O}_X, X) = A \text{ seções globais} \\ \mathcal{O}_X(U) \text{ seções sobre } U \\ \mathcal{O}_{X,p} = A_p \text{ talos} \\ \mathcal{O}_X(D(f)) = A_f \end{array} \right\}}$$

Exemplo 6.13 Considere os anéis: $A = k[x]/(x)$, $B = k[x]/(x^2)$ e $C = k[x]/(x^3)$. Nos três casos, o espectro tem um único elemento correspondente à (\bar{x}) . Sejam $X = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(B)$ e $Z = \text{Spec}(C)$. Como só há uma topologia em um conjunto unitário, os três espaços são homeomorfos. Contudo, \mathcal{O}_X , \mathcal{O}_Y e \mathcal{O}_Z são essencialmente distintos, pois os anéis $\mathcal{O}_X(X) = A$, $\mathcal{O}_Y(Y) = B$ e $\mathcal{O}_Z(Z) = C$ não são isomorfos.

Exemplo 6.14 Considere os anéis: $A = k[x, y]/(x, y)$, $B = k[x, y]/(x, y)^2$ e $C = k[x, y]/(x, y)^3$. Com isso, temos $X = \text{Spec}(A) = \{p\}$, $Y = \text{Spec}(B) = \{q\}$ e $Z = \text{Spec}(C) = \{r\}$. Pelo mesmo argumento do exemplo anterior, X , Y e Z são homeomorfos. Mas (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) e (Z, \mathcal{O}_Z) não são “iguais”, pois os anéis $\mathcal{O}_{X,p}(X) = A$, $\mathcal{O}_{Y,q}(Y) = B$ e $\mathcal{O}_{Z,r}(Z) = C$ não são isomorfos.

Como talos, temos: $A \cong k$, $B \cong k \oplus kx \oplus ky$ e $C \cong kx \oplus ky \oplus kx^2 \oplus kxy \oplus ky^2$. Geometricamente, podemos interpretar A como um ponto, B como um ponto duplo e C como um ponto triplo. Como k -espaços vetoriais, temos $\dim_k A = 1$, $\dim_k B = 3$ e $\dim_k C = 6$. Podemos interpretar essas dimensões como sendo o valor de uma função em p e também o valor de suas derivadas parciais primeiras e segundas.

6.3 Esquemas

Morfismos de Feixes

Definição 6.14 Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} pré-feixes em um espaço topológico X . Um **morfismo de feixes** $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é uma coleção de aplicações $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ para cada aberto $U \subseteq X$ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\
\downarrow \rho_{UV} & & \downarrow \rho'_{UV} \\
\mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V)
\end{array}$$

comuta para todos abertos $V \subseteq U \subseteq X$. Se \mathcal{F} e \mathcal{G} são pré-feixes, exigimos que os $\varphi(U)$ sejam morfismos. Quando \mathcal{F} e \mathcal{G} são feixes, dizemos que φ é um **morfismo de feixes**.

Definição 6.15 Dados morfismos de pré-feixes $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ e $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, definimos a composta $\psi \circ \varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ por

$$(\psi \circ \varphi)(U) := \psi(U) \circ \varphi(U), \text{ para todo aberto não vazio } U \subseteq X.$$

Dizemos que φ é um **isomorfismo de feixes** quando possui inversa bilateral.

Observação 6.8 O morfismo de pré-feixes $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induz um morfismo em cada talo $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ do seguinte modo: seja $p \in X$ e $\emptyset \neq U \subseteq X$ uma vizinhança de p , definimos $\varphi_p(s_p) := (\varphi(U)(s))_p$, de modo que o diagrama abaixo comute.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{F}_p & \xrightarrow{\varphi_p} & \mathcal{G}_p
\end{array}$$

onde $\mathcal{F}(U) \ni s \mapsto \bar{s} = s_p = \langle s, U \rangle \in \mathcal{F}_p$ e $\mathcal{G}(U) \ni \varphi(U)(s) \mapsto \langle \varphi(U)(s), \varphi(U) \rangle$.

Teorema 6.2 Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes. Então φ é um isomorfismo se, e somente se, φ_p é um isomorfismo para cada $p \in X$.

Demonstração: Ver Proposição 1.1, Seção 1, Capítulo 2 de [19].

■

Observação 6.9 O teorema acima é falso se trocarmos feixe por pré-feixe.

Definição 6.16 Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de pré-feixes de grupos abelianos. Definimos três pré-feixes, colocando para cada aberto não vazio $U \subseteq X$

- (a) **pré-feixe núcleo** de $\varphi : U \rightarrow \ker(\varphi(U))$;
- (b) **pré-feixe imagem** de $\varphi : U \rightarrow \text{Im}(\varphi(U))$;
- (c) **pré-feixe conúcleo** de $\varphi : U \rightarrow \text{co ker}(\varphi(U)) = \mathcal{G}(U)/\text{Im}(\varphi(U))$.

Observação 6.10 O pré-feixe núcleo é um feixe, ao passo que os pré-feixes imagem e conúcleo nem sempre são feixes, mesmo se \mathcal{F} e \mathcal{G} forem.

Exemplo 6.15 Considere o espaço topológico $X = \mathbb{C}$, \mathcal{O} o feixe das funções holomorfas $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, \mathcal{O}^* o feixe das funções holomorfas não nulas $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, ou seja, $f(z) \neq 0$ para todo z . Por exemplo, $g = \text{id}_{\mathbb{C}} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{O}^*(\mathbb{C})$. Sejam $U_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $U_1 = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ e $U_2 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Seja também

$$\begin{aligned} h : U_0 &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z \end{aligned}$$

Note que $h \in \mathcal{O}^*(U_0)$, pois $\rho_{\mathbb{C}, U_0}(g) = g|_{U_0} = h \in \mathcal{O}(U_0)$. Seja $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$, definida por

$$\begin{aligned} \varphi(U) : \mathcal{O}(U) &\rightarrow \mathcal{O}^*(U) \\ f &\mapsto e^f \end{aligned}$$

Com efeito, temos que $h \notin \text{Im}(\varphi(U_0))$, daí $[h] \neq [0]$ em $\text{co ker}(\varphi(U_0)) = \mathcal{O}^*(U_0)/\text{Im}(\varphi(U_0))$. Além disso, $\varphi(U_1)$ e $\varphi(U_2)$ são bi-holomorfas, em particular,

$$\text{co ker} \varphi(U_1) = \text{co ker} \varphi(U_2) = \{0\}.$$

Assim, $[h]$ e $[0]$ são dois elementos distintos de $\text{coker} \varphi(U_0)$ com a mesma restrição a U_1 e U_2 . Ou seja, as seções: $s_1 = 0 \in \text{co ker} U_1$ e $s_2 = 0 \in \text{co ker} U_2$ colam de duas maneiras diferentes em U . Assim, o pré-feixe conúcleo não é um feixe.

Para corrigir o problema da imagem não ser um feixe, usamos a **feixificação**.

Proposição 6.7 Dado um pré-feixe \mathcal{F} , existe um feixe \mathcal{F}^+ e um morfismo $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$, com a propriedade que para qualquer feixe \mathcal{G} , e qualquer morfismo $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, existe um único morfismo $\psi : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\varphi = \psi \circ \theta$. O feixe \mathcal{F}^+ é chamado o **feixe associado** ao pré-feixe \mathcal{F} .

Demonstração: Ver Proposição-Definição 1.2, Seção 1, Capítulo 2 de [19]. ■

Definição 6.17 Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes de grupos abelianos. Definimos o **feixe**:

- (a) **núcleo** como o pré-feixe núcleo;
- (b) **imagem** $\text{Im} \varphi$ como a feixificação do pré-feixe imagem;
- (c) **conúcleo** $\text{co ker} \varphi$ como a feixificação do pré-feixe conúcleo.

Definição 6.18 Dados feixes de grupos abelianos \mathcal{F} e \mathcal{G} , definimos

- (a) o **feixe soma direta** $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ como o feixe com seções

$$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) := \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U).$$

- (b) o **feixe produto tensorial** $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ como a feixificação do pré-feixe com seções

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{G}(U)$$

Definição 6.19 Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes de grupos abelianos. Dizemos que φ é **injetor** se $\ker \varphi = 0$. Dizemos que φ é **sobrejetor** se $\text{Im } \varphi = \mathcal{G}$. Dizemos que a sequência de morfismos de feixes de grupos abelianos

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}^{i+1} \longrightarrow \dots \quad (6.1)$$

é exata, se $\ker \varphi^i = \text{Im } \varphi^{i-1}$ para cada i .

Proposição 6.8

(a) A sequência dada em (6.1) é exata se, e somente se,

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}_p^{i-1} \xrightarrow{\varphi_p^{i-1}} \mathcal{F}_p^i \xrightarrow{\varphi_p^i} \mathcal{F}_p^{i+1} \longrightarrow \dots \quad (6.2)$$

é exata para todo $p \in X$. Para a volta, temos que

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}^{i-1}(U) \xrightarrow{\varphi^{i-1}(U)} \mathcal{F}^i(U) \xrightarrow{\varphi^i(U)} \mathcal{F}^{i+1}(U) \longrightarrow \dots \quad (6.3)$$

é exata para cada aberto não vazio $U \subseteq X$;

(b) $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é injetor $\iff \varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ é injetor para todo $p \in X \iff \varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ é injetor para todo aberto não vazio $U \subseteq X$;

(c) $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é sobrejetor $\iff \varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ é sobrejetor para todo $p \in X$. Para a volta, temos que $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ é sobrejetor para todo aberto não vazio $U \subseteq X$.

Demonstração: Ver Corolário 1.2.1, Seção 1, Capítulo 2 de [19]. ■

Exemplo 6.16 Sejam $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = X$ (topologia de Análise Complexa) a esfera de Riemann e considere os feixes em X dados por $\mathcal{G}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfa}\}$, $\mathcal{F}_1(U) = \{f \in \mathcal{G}(U) \mid f(0) = 0\}$ e $\mathcal{F}_2(U) = \{f \in \mathcal{G}(U) \mid f(\infty) = 0\}$ e defina $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$. Considere $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ definido pela adição

$$\begin{aligned} \varphi(U) : \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{G}(U) \\ (f, g) &\mapsto f + g \end{aligned}$$

Temos que φ é um morfismo sobrejetor, mas $\varphi(X) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ não é sobrejetor.

O fato da sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0 \quad (6.4)$$

ser exata, implica que

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X) \longrightarrow 0 \quad (6.5)$$

é exata.

Observação 6.11 Seja (6.4) uma sequência exata de morfismos de feixes de grupos abelianos, então existe uma sequência exata longa de cohomologia

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\alpha} H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}) \rightarrow \dots$$

de grupos abelianos, onde $H^0(X, \mathcal{L}) := \Gamma(\mathcal{L}, X) = \mathcal{L}(X)$ para qualquer feixe \mathcal{L} sobre X . Usamos a notação $h^j(X, \mathcal{L}) := \dim H^j(X, \mathcal{L})$, onde a dimensão é como espaço vetorial. Além disso, $\alpha = 0 \iff \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ é sobrejetor.

Agora, vejamos como levar um feixe de um espaço topológico para outro, por meio de uma função contínua $f : X \rightarrow Y$.

Definição 6.20 Sejam $F : X \rightarrow Y$ uma função contínua, \mathcal{F} um feixe sobre X e \mathcal{G} um feixe sobre Y .

- (a) Definimos a **imagem direta** (ou *pushforward*) $f_*\mathcal{F}$ de \mathcal{F} por f , como o feixe em Y dado por $(f_*\mathcal{F}(V)) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ para todo aberto não vazio $V \subseteq Y$ e $\rho_W^{f_*\mathcal{F}} = \rho_{f^{-1}(V)f^{-1}(W)}$ para toda inclusão de abertos não vazios $V \subseteq W \subseteq Y$.
- (b) Definimos a **imagem inversa** $f^{-1}\mathcal{G}$ de \mathcal{G} por f , como o feixe em X associado ao pré-feixe dado por

$$U \mapsto \lim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V), \text{ para todo aberto não vazio } U \subseteq X.$$

Exemplo 6.17 Sejam $X = k_{\mathbb{C}}^1$ e $Y = \{0\} \subseteq X$. Então $X = \text{Spec}(\mathbb{C}[x])$ e podemos “empurrar” o feixe estrutural \mathcal{O}_Y de Y para X por meio da inclusão $i : Y \hookrightarrow X$ e $i_*\mathcal{O}_Y$ é um feixe sobre X . Temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow I_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\psi} i_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

em que $\mathcal{O}_X \ni f \mapsto f|_Y \in i_*\mathcal{O}_Y$ onde $I_Y = \ker \psi$ é dado por

$$I_Y(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f|_Y = 0\}$$

I_Y é chamado de **feixe de ideais de Y** . Muitas vezes, escrevemos \mathcal{O}_Y no lugar de $i_*\mathcal{O}_Y$.

Agora, estamos em condições de definir o que é um esquema, lembrando da definição de um espaço localmente anelado da seção anterior e que $\text{Spec}(A)$ é um espaço localmente anelado. Um esquema é essencialmente uma estrutura que, localmente, é um $\text{Spec}(A)$.

Definição 6.21 Um **morfismo de espaços anelados** (X, \mathcal{O}_X) e (Y, \mathcal{O}_Y) é um par $(f, f^\#)$, onde $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua e $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ é um morfismo de feixes de anéis.

Definição 6.22 Sejam A e B anéis locais. Dizemos que o morfismo de anéis $\varphi : A \rightarrow B$ é **local**, quando $\varphi^{-1}(m_B) = m_A$. Um morfismo de espaços localmente anelados (X, \mathcal{O}_X) e (Y, \mathcal{O}_Y) é **morfismo de espaços anelados** $(f, f^\#)$ tal que para cada $p \in X$, o morfismo induzido $f_p^\# : \mathcal{O}_{Y, f(p)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, p}$ é um morfismo local de anéis locais.

Definição 6.23 Um **isomorfismo de espaços localmente anelados** é um morfismo com inversa bilateral. Um **esquema afim** é um espaço localmente anelado (X, \mathcal{O}_X) que é isomorfo como espaço localmente anelado a $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ para a algum anel A .

Definição 6.24 Um **esquema** é um espaço localmente anelado (X, \mathcal{O}_X) tal que para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U de X tal que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ é um esquema afim.

Proposição 6.9

- (a) Se A é um anel, então $(\text{Spec}(A), \mathcal{O})$ é um espaço localmente anelado.
- (b) Se φ é um morfismo de anéis, então φ induz um morfismo de espaços localmente anelados

$$(f = \text{Spec } \varphi, f^\#) : (\text{Spec}(B), \mathcal{O}_{\text{Spec}(B)}) \rightarrow (\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}).$$

- (c) Se A e B são anéis, então qualquer morfismo de espaços localmente anelados de $(\text{Spec}(B), \mathcal{O}_{\text{Spec}(B)})$ para $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ é induzido por algum morfismo $\varphi : A \rightarrow B$ como no item (b).

Demonstração: Ver Proposição 2.3, Seção 2, Capítulo 2 de [19].

■

Esquemas na Prática

Esta seção terá duas partes. Na primeira, definiremos o que se entende como variedades em Geometria Algébrica. Na segunda parte, daremos exemplos concretos de sequências exatas de morfismos de esquemas que aparecem na prática, dentre outras coisas.

Definição 6.25 Seja (X, \mathcal{O}_X) um esquema. Dizemos que X é **irredutível** se ele o é como espaço topológico. Dizemos que X é **reduzido** se $\mathcal{O}_X(U)$ não tem nilpotentes para todo aberto não vazio $U \subseteq X$. Equivalentemente, X é reduzido se, e somente se, os anéis locais \mathcal{O}_x , para todo $x \in X$, não tem elementos nilpotentes.

Definição 6.26 Um esquema X é **integral** se para todo aberto não vazio $U \subseteq X$, o anel $\mathcal{O}_X(U)$ é um domínio integral.

Proposição 6.10 Um esquema é integral se, e somente se, ele é reduzido e irredutível.

Demonstração: Ver Proposição 3.1, Seção 3, Capítulo 2 de [19].

■

Exemplo 6.18 (Pontos Múltiplos) $\text{Spec}(\mathbb{C}[x]/(x^n))$ com $n > 1$ não são reduzidos mas são irredutíveis. Mesma coisa com a reta dupla $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/(x^2))$.

Exemplo 6.19 O par de retas concorrentes $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/(xy))$ é reduzido mas não é irredutível.

Exemplo 6.20 O esquema $X = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/(x^2y))$ pode ser interpretado como a união da reta dupla $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/(x^2))$ com a reta simples $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/(y))$. Assim, X não é nem reduzido nem irredutível.

Exemplo 6.21 Esquemas não irredutíveis e não reduzidos aparecem naturalmente ao fazermos “interseções” de esquemas integrais.

A cada esquema X podemos associar um esquema reduzido X_{Red} com o mesmo espaço topológico e que é obtido grosso modo assim:

$$\text{Spec}(A) = U \subseteq X \longrightarrow U_{\text{Red}} = \text{Spec}(A/N(A))$$

Em Geometria Algébrica, quase sempre começamos com um esquema X reduzido, mesmo que ao longo do caminho apareçam esquemas não reduzidos. Uma das hipóteses essenciais para um esquema ser uma variedade é ser reduzido.

Na definição de variedade podemos colocar ou não a hipótese de irredutibilidade, não há consenso com relação à essa discussão. O segundo ingrediente na definição de variedade é a finitude.

Definição 6.27 Seja X um esquema e A um anel. Dizemos que X é um **esquema sobre** A , quando existe um morfismo de esquemas $X \rightarrow \text{Spec}(A)$. Isto equivale a requerer que \mathcal{O}_X seja um feixe de álgebras. Um morfismo de A -esquemas é um diagrama comutativo de morfismos de esquemas.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \text{Spec}(A) \end{array}$$

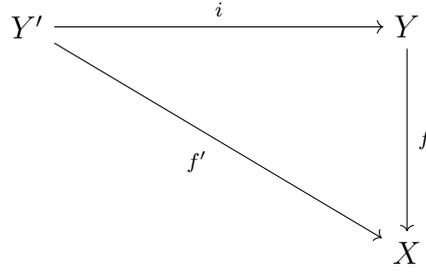
O caso mais comum é $A = k$ corpo. Daí, cada $\mathcal{O}_X(U)$ é uma k -álgebra.

Definição 6.28 Sejam k um corpo e X um k -esquema. Dizemos que X é de **tipo finito** sobre k quando $X = \bigcup_{i=1}^n \text{Spec}(A_i)$, onde cada A_i é uma k -álgebra finitamente gerada.

Há muitas noções de finitude: Noetheriano, finito, localmente de tipo finito, dentre outros. Para nós, de tipo finito será a mais conveniente. Todo esquema X se escreve como $X = \bigcup_{i \in I} \text{Spec}(A_i)$. O primeiro ingrediente (reduzido/irredutível) nos diz que tipos de anéis A_i podemos usar. O segundo ingrediente, da definição de variedade (de tipo finito sobre k), nos diz que $\#I < \infty$ e cada A_i é uma k -álgebra finitamente gerada. O terceiro e último ingrediente nos dirá como podemos colar os $\text{Spec}(A_i)$.

Definição 6.29 Um **subesquema aberto** de um esquema X é um esquema $U \subseteq X$, onde U é um aberto não vazio de X , tal que \mathcal{O}_U é isomorfo a $\mathcal{O}_X|_U$. Uma **imersão aberta** é um morfismo $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ que induz um isomorfismo de X com um subesquema aberto de Y .

Definição 6.30 Uma **imersão fechada** é um morfismo $(f, f^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ tal que $f : Y \rightarrow f(Y)$ é um homeomorfismo, $f(Y)$ é fechado em X e $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ é sobrejetor. Um **subesquema fechado** de X é uma classe de equivalência de imersões fechadas, onde $f : Y \rightarrow X$ e $f' : Y' \rightarrow X$ são equivalentes se existe um isomorfismo $i : Y' \rightarrow Y$ tal que $f' = f \circ i$.



Observação 6.12 É importante notar que dado um aberto não vazio $U \subseteq X$, existe uma única estrutura de esquema para U . Mas se $Y \subseteq X$ é um fechado, então há diversas estruturas de esquemas possíveis para Y , dentre essas, existe uma mais simples: Y_{Red} .

Definição 6.31 Sejam X, Y e Z k -variedades. Definimos o **produto fibrado** $X \times_Y Z$ de X e Z sobre Y , mas usaremos isso apenas no caso particular em que X e Z são espaços projetivos e $Y = Spec(k)$ é o corpo base. Nesse caso, dados $S = k[x_0, \dots, x_n] = \sum_{d \geq 0} S_d$,

$X = \mathbb{P}^n = Proj S$; $T = k[y_0, \dots, y_m] = \sum_{d \geq 0} T_d$, $Z = \mathbb{P}^m = Proj T$. Temos então

$$X \times_Y Z = X \times Z = \mathbb{P}^n \times_k \mathbb{P}^m = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m = Proj(S \times_k T)$$

onde $S \times_k T$ é o seguinte anel graduado (ver Definição 6.35)

$$S \times_k T = \sum_{d \geq 0} (S_d \otimes_k T_d) \left(\neq \sum_{d \geq 0} \left(\sum_{j=0}^d S_j \otimes_k T_{d-j} \right) = S \otimes_k T \right).$$

Definição 6.32 Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de esquemas. O **morfismo diagonal** é o único morfismo $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ cuja composição com ambas as aplicações de projeção $\pi_1, \pi_2 : X \times_Y X \rightarrow X$ é a aplicação identidade de $X \rightarrow X$.

Definição 6.33 Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de esquemas. Dizemos que o morfismo f é **separado** se o morfismo diagonal Δ é uma imersão fechada. Neste caso, dizemos também que X é separado sobre Y . Um esquema X é separado, se ele é separado sobre $Spec(\mathbb{Z})$.

Definição 6.34 Uma k -**variedade** é um esquema reduzido, separado e de tipo finito sobre k .

Exemplo 6.22 O esquema afim $Spec(A)$ é de tipo finito e separado. Além disso, é reduzido se, e somente se, $N(A) = \{0\}$.

Agora, que temos a definição de variedade em mãos, precisamos de exemplos de variedades que não sejam afins. O jeito mais simples de conseguir isso é com a construção $Proj$ que é similar à construção $Spec$ e que nos dará \mathbb{P}^n e $\mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r}$ bem como todas as variedades quase-projetivas. Para fazer o $Proj$ precisamos de um anel graduado.

Definição 6.35 Um **anel** S é dito **graduado**, quando existe uma escrita $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$, onde cada S_d é um grupo abeliano com a soma de S e temos $S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e}$ com a multiplicação de S . Dizemos que um **elemento** $f \in S$ é **homogêneo** de grau $d \geq 0$

quando $f \in S_d$. Um **ideal** $I \subseteq S_d$ é dito **homogêneo** quando $I = \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap S_d)$. Chamamos

$S_+ = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ de **ideal irrelevante**.

Exemplo 6.23 Considere $S = k[x_0, \dots, x_n]$. Temos então $S_d := \{f \in S \text{ homogêneo} \mid \deg f = d\}$ e $S_+ = (x_0, \dots, x_n)$. Seja $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$.

Como conjunto,

$$\text{Proj } S := \{p \subseteq S \text{ ideal primo homogêneo} \mid S_+ \not\subseteq p\}.$$

A topologia de $\text{Proj } S$ é a herdada de $\text{Spec}(S)$. Em particular, os fechados são os conjuntos

$$V(I) = \{p \in \text{Proj } S \mid I \subseteq p\}, \text{ onde } I \subseteq S \text{ é um ideal homogêneo.}$$

Como esquema: dado $f \in S_d$ com $d > 0$, seja S_f a localização de S em f e

$$S_f = \left\{ \frac{g}{f^k} \in S_f \mid g \in S_{dk} \right\} \subseteq S_f.$$

Chamamos $D_+(f) = D(f) \cap \text{Proj } S = (V(f)^c) \cap \text{Proj } S$ de **aberto principal**. Considere

$$\Psi_f : D_+(f) \xrightarrow{i} D(f) \xrightarrow{\cong} \text{Spec}(S_f) \xrightarrow{\text{Spec}(i)} \text{Spec}(S_{(f)}),$$

onde $S_{(f)} \subseteq S_f$ e $i : S_{(f)} \rightarrow S_f$ é a inclusão. Definimos seções para um feixe \mathcal{O}_X , onde $X = \text{Proj } S$:

$$\mathcal{O}_X(D_+(f)) := S_{(f)}$$

e usamos os Ψ_f para definir as restrições, usando as restrições de $\text{Spec}(S_{(f)})$.

Teorema 6.3 Seja S um anel graduado e $X = \text{Proj } S$.

- (a) (X, \mathcal{O}_X) definido acima é um esquema separado;
- (b) Se $S_+ \subseteq \sqrt{(f_0, \dots, f_n)}$ então $\text{Proj } S = D_+(f_0) \cup \dots \cup D_+(f_n)$;
- (c) Se S é uma álgebra sobre um anel A e $A \cdot S_d \subseteq S_d$ para todo $d \geq 0$, então X é um A -esquema;
- (d) Sejam k um corpo e $S = k[x_0, \dots, x_n]$ com a graduação usual. Então $\text{Proj } S$ é uma k -variedade irredutível e $S = U_0 \cup \dots \cup U_n$, onde

$$U_r = \text{Spec} \left(k \left[\frac{x_0}{x_r}, \frac{x_1}{x_r}, \dots, \frac{x_n}{x_r} \right] \right) \cong k^n$$

Chamamos X do **n -espaço projetivo sobre k** e escrevemos $S = \mathbb{P}^n(k)$ ou $S = \mathbb{P}^n$.

O \mathbb{P}^n do item (d) no teorema anterior é essencialmente o mesmo da Geometria Algébrica Clássica. As variedades quase-projetivas serão abertos de fechados de \mathbb{P}^n e também são variedades no sentido de esquemas. Se $I \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ é um ideal homogêneo, então $\text{Proj}(S/I)$ é essencialmente $V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ do mesmo modo que no Spec .

Exemplo 6.24 Sejam k um corpo, $A = k[x, y]$ e $X = \text{Spec}(A)$. Então $I = (x^2)$ e $J = (x^2, xy)$ ambos definem estruturas de subesquemas fechados (que será definido mais a frente) em X , como conjunto

$$\underbrace{V(I)}_{\text{eixo duplo}} = \underbrace{V(J)}_{\text{eixo } y \text{ + origem}} = \text{eixo } Y$$

Para J , a origem é um ponto “mergulhado”.

Definição 6.36 Um k -esquema X é dito **projetivo** ou k -**projetivo** se é isomorfo a um subesquema fechado de \mathbb{P}_k^n . Um **esquema k -quase projetivo** é um subesquema aberto de um esquema k -projetivo.

Definição 6.37 Seja \mathbb{Z} um subesquema finito de \mathbb{P}^n . (fechado e 0-dimensional \iff finito). Definimos o **comprimento** (*length*) de $\mathbb{Z}_h = \{p_1, \dots, p_h\}$ por

$$\text{length}(\mathbb{Z}) = \dim_k \underbrace{H^0(\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\mathbb{Z}})}_{\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})} = \sum_{k=1}^h \dim_k (\mathcal{O}_{\mathbb{Z}, p_i})$$

Na prática $\text{length}(\mathbb{Z})$ é a soma do comprimento de cada ponto.

Observação 6.13 Um ponto de multiplicidade m em \mathbb{P}^n tem comprimento $\binom{m+n-1}{n}$.

Exemplo 6.25 Um ponto de multiplicidade 1 em \mathbb{P}^n , também chamado de ponto simples, tem comprimento

$$\begin{aligned} \text{length}(\underbrace{1P_0}_{\text{ponto simples}}) &= \binom{1+n-1}{n} \\ &= \binom{n}{n} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, um ponto simples em \mathbb{P}^n , tem comprimento igual a um.

Exemplo 6.26 O comprimento dado por um ponto duplo e um ponto quintúplo em \mathbb{P}^n é

$$\begin{aligned} \text{length}(\underbrace{2P_1}_{\text{ponto duplo}} + \underbrace{5P_2}_{\text{ponto quintúplo}}) &= \binom{2+n-1}{n} + \binom{5+n-1}{n} \\ &= n+1 + \binom{n+4}{n}. \end{aligned}$$

Exemplo 6.27 O comprimento de $\text{Spec}(k[x, y]/(x, y^2))$ é

$$\begin{aligned} \text{length}(\text{Spec}(k[x, y]/(x, y^2))) &= \dim_k k[x, y]/(x, y^2) \\ &= \dim_k (k \oplus k\bar{y}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Como $\text{length}(\text{Spec}(k[x, y]/(x, y^2))) = 2$, temos que $\text{Spec}(k[x, y]/(x, y^2))$ não é nem um ponto simples (senão o comprimento seria um) e nem um ponto duplo (senão o comprimento seria três), logo é algo entre os dois.

Agora, vejamos como se define um morfismo de uma variedade X para \mathbb{P}^n . Um feixe de \mathcal{O}_X -módulos é um feixe \mathcal{F} sobre X tal que $\mathcal{F}(U)$ é um $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo para cada aberto não vazio $U \subseteq X$. Um feixe de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos \mathcal{F} é localmente livre quando existe uma cobertura de X por abertos U tal que $\mathcal{F}|_U$ é um $\mathcal{O}_X|_U$ -livre.

Nesse caso o posto de \mathcal{F} é o número de cópias de \mathcal{O}_X necessárias. Um **feixe invertível** é um feixe localmente livre de posto um, ou seja, é um feixe \mathcal{L} tal que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ e para cada inclusão de abertos $U \subseteq U_i$, existe $s \in \mathcal{L}(U)$ tal que $\mathcal{L}(U)$ é isomorfo a $s \cdot \mathcal{O}_X(U)$ como \mathcal{O}_X -módulo. Feixes invertíveis são essenciais em Geometria Algébrica.

Dar um morfismo $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ é equivalente a dar um feixe invertível \mathcal{L} sobre X e seções globais $s_0, \dots, s_n \in \mathcal{L}(X)$ tais que para todo $p \in X$ existe i tal que $s_i(p) \neq 0$. Grosso modo

$$\begin{aligned} \varphi : X &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ p &\mapsto (s_0(p) : \dots : s_n(p)) \end{aligned}$$

onde $s_j(p) = (s_j)|_p \in k$. Agora, que já sabemos como fazer um morfismo $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ de um esquema X para \mathbb{P}^n , precisamos de exemplos de feixes invertíveis.

Exemplo 6.28 (Feixe de Torção de Serre) Para cada $d \in \mathbb{Z}$, definimos um feixe invertível $\mathcal{O}(d)$ (ou $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d)$ ou $\mathcal{L}_{r,d}$) em \mathbb{P}^r . Lembre que para definir um feixe em \mathbb{P}^r basta o definir na base de abertos $D(f)$. Defina

$$\mathcal{O}(d)(D(f)) = \left\{ \frac{g}{f^m} \mid n \geq 0; f, g \text{ polinômios homogêneos com } \deg g - m \cdot \deg f = d \right\}$$

Uma maneira simples de lembrar é $\mathcal{O}(d) = \{h \text{ função racional, } \deg h = d\}$. Por exemplo, $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)(D(x))$ e $\frac{x^3 - yz^2}{(y-z)^{10}} \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-7)(D(y-z))$. Note que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(0) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$ é o feixe estrutural de \mathbb{P}^r . O feixe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ é chamado **feixe de torção de Serre**.

Proposição 6.11

- (a) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d)$ é um feixe invertível;
- (b) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(e) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d+e)$

Demonstração: Ver Proposição 5.12, Seção 5, Capítulo 2 de [19]. ■

Exemplo 6.29 Seja $A = k[x_0, \dots, x_n]$, $m_1 = x_j^d$ e $m_2 = x_j^e$. Defina $M_1 = m_1 A$ e $M_2 = m_2 A$. Temos então

$$M_1 \otimes M_2 = m_1 A \otimes m_2 A = (m_1 m_2) \underbrace{(A \otimes_A A)}_A$$

Mais geralmente, se X é um esquema, então \otimes nos dá uma operação no conjunto de feixes invertíveis de X . Com esta operação, o conjunto dos feixes invertíveis módulo isomorfismo é um grupo abeliano com elemento neutro \mathcal{O}_X . Este grupo é chamado **grupo de Picard** de X :

$$Pic(X) = \left\{ \frac{\{\text{feixes invertíveis } \mathcal{L} \text{ em } X\}}{\text{isomorfismo de feixes}}, \otimes \right\}$$

Proposição 6.12 O grupo $Pic(\mathbb{P}^n)$ é isomorfo à \mathbb{Z} , mais precisamente, $Pic(\mathbb{P}^n) = \{\mathcal{O}(d) \mid d \in \mathbb{Z}\}$, onde $\mathcal{O}(0)$ é o elemento neutro e $\mathcal{O}(1)$ é um gerador.

Demonstração: Ver Corolário 6.17, Seção 6, Capítulo 2 de [19]. ■

Desse modo, temos uma descrição completa dos feixes invertíveis em \mathbb{P}^n e com isso já podemos construir alguns morfismos do tipo $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$.

Observação 6.14 Na operação \otimes o inverso de um feixe invertível \mathcal{L} é denotado por \mathcal{L}^* (o dual de \mathcal{L}). Assim, em particular: $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^* = \mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}(3)^* = \mathcal{O}(-3)$.

Exemplo 6.30 Considere $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$. Sabemos que $\mathcal{L}(\mathbb{P}^2) = k[x, y, z]_2 = W$ é gerado por seis seções globais: $x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2$. Tomando todas elas, temos um morfismo

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{L}} = \Phi : \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^5 \\ (x : y : z) &\mapsto (x^2 : xy : xz : y^2 : yz : z^2) \end{aligned}$$

cuja imagem é a Veronese V_2^2 . Em geral, $\Phi_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d)} = V_d^r$. Podemos escolher também apenas cinco seções: xy, xz, y^2, yz, z^2 (que é o mesmo que escolher o subespaço vetorial $V = \langle xy, xz, y^2, yz, z^2 \rangle$ de W).

$$\begin{aligned} \Phi_V = \psi : \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^4 \\ (x : y : z) &\mapsto (xy : xz : y^2 : yz : z^2) \end{aligned}$$

Mas neste caso, temos apenas uma aplicação racional ψ definida em $\mathbb{P}^2 \setminus \{(1 : 0 : 0)\}$ pois $f(1, 0, 0) = 0$ para todo $f \in V$. Dizemos, neste caso, que $P = (1 : 0 : 0)$ é o **lugar de base** de V (*base locus*). Para um subespaço U de W definir um morfismo é necessário e suficiente que seu lugar de base seja vazio. O lugar de base é sempre fechado, mas pode ter dimensão positiva, ser desconexo, não ser reduzido, dentre outras coisas.

Agora, que já vimos como são os feixes invertíveis em \mathbb{P}^n , é hora de ver como são os feixes invertíveis em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Para isto, dadas variedades X e Y e feixes \mathcal{F} em X e \mathcal{G} em Y , definimos o **produto fibrado** de \mathcal{F} e \mathcal{G} como sendo

$$\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} := \pi_1^* \mathcal{F} \otimes \pi_2^* \mathcal{G}$$

onde π_1 e π_2 são as projeções do produto fibrado

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi_1} & Y \\ \downarrow \pi_2 & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\quad} & k \end{array}$$

Definimos então $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(d_1, d_2) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(d_2)$.

Observação 6.15 Pela Proposição 6.12, $Pic(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cong \mathbb{Z}^2$ (ver Exercício II.6.1 de [19]), onde $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(0, 0) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}$ é o elemento neutro, os feixes invertíveis $\mathcal{O}(1, 0)$ e $\mathcal{O}(0, 1)$ são geradores e, pela Proposição 6.11, temos que

$$\mathcal{O}(d_1, d_2) \otimes \mathcal{O}(e_1, e_2) = \mathcal{O}(d_1 + e_1, d_2 + e_2).$$

Exemplo 6.31 Seja $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(2, 3)$, daí

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{L}} &= SV_{(2,3)}^{(1,1)} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^{11} \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0^2 y_0^3 : x_0^2 y_0 y_1 : \dots : x_1^2 y_1^3) \end{aligned}$$

Mais geralmente, $\Phi_{\mathcal{L}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(d,e)} = \Psi$ é chamado o mergulho de Segre-Veronese de $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ com bigrau (d, e) , e a imagem de Ψ em \mathbb{P}^N com $N = \binom{n+d}{n} \binom{m+e}{m} - 1$ é a variedade $Y = SV_{(d,e)}^{(n,m)}$. Mostra-se que Ψ é um isomorfismo entre a variedade abstrata X e a variedade mergulhada $Y \subseteq \mathbb{P}^N$. Em particular, Ψ é uma imersão fechada.

Seja X uma variedade e Z um subesquema fechado. Se $i : Z \rightarrow X$ é uma imersão fechada, definimos o feixe de ideais de Z como $\ker(i^\#) = \mathcal{I}_Z$ onde $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_Z$ é induzida pela inclusão $i : Z \rightarrow X$. Se Z é reduzido podemos pensar $\mathcal{I}_Z = \{f \in \mathcal{O}_X \mid f|_Z = 0\}$ no sentido informal e $\mathcal{I}_Z(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f|_Z = 0\}$ no sentido usual.

Exemplo 6.32 Seja $X = \mathbb{P}_k^1$, $Z = 2P$ (o ponto P com multiplicidade 2) onde $P = (0 : 1) \in X$, onde $X = D(x) \cup D(y)$ e $\mathcal{O}_X(X) = k$. Temos que

$$\mathcal{O}_X(D(x)) = \left\{ \frac{f}{x^n} \mid \deg f = n \right\} \text{ e } \mathcal{O}_X(D(y)) = \left\{ \frac{f}{y^n} \mid \deg f = n \right\}$$

Dessa forma, temos $\mathcal{I}_Z(D(x)) = \mathcal{O}_X(D(x))$, pois $P \notin D(x)$, e

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_Z(D(y)) &= \left\{ \frac{f}{y^n} \mid \deg f = n \text{ e } \text{mult}_P f \geq 2 \right\} \\ &= \left\{ \frac{x^2 g}{y^n} \mid \deg g = n - 2 \right\} \\ &= \frac{x^2}{y^2} \left\{ \frac{g}{y^{n-2}} \mid \deg g = n - 2 \right\} \\ &= \left(\frac{x}{y} \right)^2 \cdot \mathcal{O}_X(D(y)). \end{aligned}$$

Com a notação de antes, temos uma sequência exata de feixes em X :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_* \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0 \quad (6.6)$$

pois $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_Z$ é sobrejetor pela definição de imersão fechada. Muitas vezes, escrevemos $\mathcal{O}_X|_Z$ ou \mathcal{O}_Z no lugar de $i_* \mathcal{O}_Z$. Mais geralmente, se \mathcal{F} é um feixe invertível, podemos tensorizar a Equação (6.6) por \mathcal{F} e obter uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow (i_* \mathcal{O}_Z) \otimes \mathcal{F} \longrightarrow 0 \quad (6.7)$$

que também se escreve como

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}|_Z \longrightarrow 0 \quad (6.8)$$

onde essencialmente $\mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{F} = \{f \in \mathcal{F} \mid f|_Z = 0\}$ e $\mathcal{F}|_Z = \{f|_Z \mid f \in \mathcal{F}\}$, α é a inclusão e $\beta(f) = f|_Z$.

Definição 6.38 Seja X uma variedade não-singular (lisa) e $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ um feixe invertível. Definimos o **sistema linear completo** associado a \mathcal{L} :

$$|\mathcal{L}| = L = \mathbb{P}(\mathcal{L}(X)) = \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{L})) \cong \mathbb{P}^n$$

onde $\dim_k H^0(X, \mathcal{L}) = h^0(X, \mathcal{L}) = n + 1$. Um sistema linear S é um subespaço linear de L .

Observação 6.16 Um sistema linear S corresponde a um subespaço vetorial do espaço vetorial $\mathcal{L}(X)$. Tipicamente, se define um sistema linear S começando com um sistema linear completo $\mathcal{O}(d)$ ou $\mathcal{O}(d_1, \dots, d_r)$ e impondo condições geométricas, como por exemplo

- $\{F \in \mathcal{O}(d) \mid F \text{ passa por } P\} = \{F \mid F(p) = 0\}$;
- $\{F \in \mathcal{O}(d) \mid F \text{ contém } l\}$, onde $l \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma reta;
- $\{F \in \mathcal{O}(d) \mid F \text{ é singular em } P\} = \{F \mid \text{mult}_P F \geq 2\}$
 $= \{F \mid F(P) = 0 \text{ e } \nabla F(P) = 0\}$;

Prova-se que tais condições são de fato lineares.

Definição 6.39 Seja S um sistema linear em uma variedade X . Definimos o lugar de base de S : $B_S(F) = \{P \in X \mid F(P) = 0 \text{ para todo } F \in S\}$.

Exemplo 6.33 $|\mathcal{O}(d)|$ é livre de lugar de base (ou seja, o lugar de base é vazio) para todo $d > 0$. De fato, se $p = (p_0 : \dots : p_n) \in \mathbb{P}^n$ então $p_j \neq 0$ para algum j . Como $x_j^d \in |\mathcal{O}(d)|$ e $x_j^d(p) = p_j^d \neq 0$ então $p \notin B_S(|\mathcal{O}(d)|)$.

Exemplo 6.34 Sejam $p, q \in \mathbb{P}^3$ e considere o sistema linear das quádricas que passam em p e são singulares em q . Usamos a notação $S = |\mathbb{O}_{\mathbb{P}^3}(2; p, 2q)|$. Como $F \in S$ é singular em q , então F é um cone com vértice em q e que passa por p . Movendo p para $p = (0 : 1 : 0 : 0)$ e $q = (1 : 0 : 0 : 0)$, temos

$$F = \underbrace{ax^2 + bxy + cxz + dxw}_{=0} + \underbrace{ey^2}_{=0} + fyz + gyw + hz^2 + izw + kw^2$$

Como $ax^2 + bxy + cxz + dxw = 0$ (pois $\text{mult}_p \geq 2$) e $ey^2 = 0$ (pois $F(p) = 0$), temos que

$$F = fyz + fyw + hz^2 + izw + kw^2$$

é um cone com vértice q e geratriz um cônica que passa em p . Logo, S é um \mathbb{P}^4 .

Alguns Resultados de Cohomologia

Para essa parte enunciamos alguns resultados sem demonstração do Capítulo III do [19]. O Teorema do Anulamento 6.4 e o Teorema da Cohomologia do Espaço Projetivo 6.5, enunciados abaixo, serão imprescindíveis para provarmos o Teorema 7.1, uma importante ferramenta que utilizaremos para analisarmos a dimensão dos sistemas lineares, objeto que passaremos a estudar a partir do próximo capítulo.

Teorema 6.4 (Anulamento) Seja X uma variedade de dimensão n e \mathcal{F} um feixe em X . Então

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i > n.$$

Demonstração: Ver Teorema 2.7, Seção 2, Capítulo 3 de [19]. ■

Teorema 6.5 (Cohomologia do Espaço Projetivo)

- (a) $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 0$ para $0 < i < n$ para todo $d \in \mathbb{Z}$;
 (b) $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) = k$.

Demonstração: Ver Teorema 5.1, Seção 5, Capítulo 3 de [19]. ■

Proposição 6.13 (Cohomologia em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong Q \subseteq \mathbb{P}^3$)

- (a) Se $|a \cdot b| \leq 1$ então $H^1(Q, \mathcal{O}(a, b)) = 0$;
 (b) Se $ab < 0$ então $H^1(Q, \mathcal{O}(a, b)) = 0$;
 (c) Se $a \leq -2$ então $H^1(Q, \mathcal{O}(a, b)) \neq 0$.

Demonstração: Ver Exercício 5.6, Seção 5, Capítulo 3 de [19]. ■

Teorema 6.6 (Teorema de Künneth) Sejam \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 feixes quase coerentes em variedades separadas X_1 e X_2 . Então,

$$H^k(X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) = \bigoplus_{i+j=k} (H^i(X_1, \mathcal{F}_1) \otimes H^j(X_2, \mathcal{F}_2)).$$

Demonstração: Ver Proposição 9.2.3, Seção 2, Capítulo 9 de [20]. ■

Como resultado do teorema acima, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 6.2 Sejam $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$ feixes quase coerentes em variedades separadas X_1, \dots, X_r . Então,

$$H^k(X_1 \times \dots \times X_r, \mathcal{F}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{F}_r) = \bigoplus_{j_1 + \dots + j_r = k} \left(\bigotimes_{i=1}^r H^{j_i}(X_i, \mathcal{F}_i) \right).$$

Lema 6.1 A cohomologia $h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ é igual a zero para $d \geq 0$.

Demonstração: Dividimos a prova em dois casos:

- CASO 01: Considere o caso em que $n = 1$. Neste caso, provamos por indução no grau d . Se $d = 0$, temos que $h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(0)) = 0$ pelo Exercício 2, Capítulo III, Seção 2 do [19]. Agora, considere o esquema Z dado por um ponto simples. Dessa forma, temos a seguinte sequência exata de restrição

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)|_Z,$$

e assim, temos a seguinte sequência exata de cohomologia associada

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) \longrightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)|_Z) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1)) \longrightarrow \dots$$

Pelo Teorema do Anulamento 6.4, segue que $H^1(Z, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)|_Z) = 0$, pois $\dim Z = 0$. Como Z é um esquema dado por um ponto simples, pelo Exemplo 6.25, temos que $\text{length}(Z) = 1$, o que será usado na conta abaixo. Logo, podemos considerar a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)|_Z) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1)) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) \longrightarrow 0.$$

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\begin{aligned} h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) &= h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1)) - h^0(Z, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)|_Z) + h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) \\ &\quad - h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1)) \\ &= h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1)) - 1 + (d+1) - d \\ &= h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1)). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, $h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1)) = 0$ e, assim, $h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) = 0$.

- CASO 02: Considere o caso $n > 1$. Neste caso, segue direto do Teorema da Cohomologia do Espaço Projetivo 6.5. ■

Com o importante resultado do Lema 6.1 acima, obtemos que $h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 0$ e, como aplicação do mesmo, podemos estender esse resultado como segue.

Lema 6.2 A cohomologia $h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbf{d}))$ é igual a zero para todo $d_j \geq 1 \forall j$, onde $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$ e $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$.

Demonstração: Façamos a demonstração, para um caso base inicial, onde $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ e $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$. Nesse caso, teríamos que

$$h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbf{d})) = h^1(\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2}, \mathcal{O}(d_1, d_2)), \text{ onde } \mathcal{O}(d_1, d_2) = \mathcal{O}(d_1) \boxtimes \mathcal{O}(d_2).$$

Pelo Teorema de Künneth 6.6, segue que

$$\begin{aligned} h^1(\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2}, \mathcal{O}(d_1, d_2)) &= h^0(\mathbb{P}^{n_1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_1}}(d_1)) \cdot h^1(\mathbb{P}^{n_2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_2}}(d_2)) \\ &\quad + h^1(\mathbb{P}^{n_1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_1}}(d_1)) \cdot h^0(\mathbb{P}^{n_2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_2}}(d_2)) \\ &= \binom{n_1 + d_1}{d_1} \cdot 0 + 0 \cdot \binom{n_2 + d_2}{d_2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observe que usamos na segunda igualdade o fato de que $h^1(\mathbb{P}^{n_2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_2}}(d_2))$ e $h^1(\mathbb{P}^{n_1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_1}}(d_1))$ são iguais a zero, resultado este fornecido pelo Lema 6.1. Portanto, para $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ e $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$, temos que $h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbf{d})) = 0$. Para o caso geral, ou seja, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$

e $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$, temos que

$$\begin{aligned}
h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbf{d})) &= \sum_{j=1}^r h^1(\mathbb{P}^{n_j}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_j}}(d_j)) \cdot \prod_{i \neq j} h^0(\mathbb{P}^{n_i}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_i}}(d_i)) \\
&= \sum_{j=1}^r 0 \cdot \prod_{i \neq j} h^0(\mathbb{P}^{n_i}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_i}}(d_i)) \\
&= 0 \cdot \prod_{i \neq j} h^0(\mathbb{P}^{n_i}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_i}}(d_i)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Onde usamos novamente o Lema 6.1, para afirmar que $h^1(\mathbb{P}^{n_j}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_j}}(d_j)) = 0$. ■

Teorema 6.7 (Teorema de Bezout) Sejam Y e Z curvas planas, ou seja, variedades irredutíveis de dimensão um, distintas em \mathbb{P}^2 , de graus d e e . Então

$$Y \cap Z = \{m_1 p_1, \dots, m_s p_s\}$$

onde $m_1 + \dots + m_s = d \cdot e$ e $m_j p_j$ é o ponto $p_j \in \mathbb{P}^2$ com multiplicidade m_j .

Demonstração: Ver Teorema 7, Seção 7, Capítulo 8 de [11]. ■

Definição 6.40 Seja X uma variedade e $f : X \rightarrow k^1$ um morfismo. Suponha que cada fibra $X_t := f^{-1}(t)$ é um esquema separado de tipo finito sobre k e que X_t é uma variedade irredutível para todo $t \neq 0$. Dizemos que X_t são as **deformações** de X_0 .

Tipicamente X_t são todas isomorfas para $t \neq 0$ e muitas vezes não singulares (lisas) ou seja, o mais bem comportadas possíveis. Tipicamente X_0 “é mais degenerada” sendo singular, não irredutível ou até não reduzida.

Exemplo 6.35 Seja $X_t = V(ty - x^2) \subseteq k^3$ e

$$\begin{aligned}
f : X &\rightarrow k^1 \\
(x, y, t) &\mapsto t
\end{aligned}$$

Então X_0 é uma reta dupla e X_t é uma curva cônica não singular para todo $t \neq 0$.

Exemplo 6.36 Seja $X = V(xy - t) \subseteq k^3$ e

$$\begin{aligned}
f : X &\rightarrow k^1 \\
(x, y, t) &\mapsto t
\end{aligned}$$

Então X_0 é a união de dois planos, enquanto X_t é uma cônica não singular para todo $t \neq 0$.

Divisores e Feixes Invertíveis

Existe ainda, uma outra classe de objetos em esquemas que são muito importantes em Geometria Algébrica: os divisores. Existem dois tipos: divisores de Weil e divisores de Cartier. Não trataremos deles aqui, para um aprofundamento maior sobre o assunto, o leitor interessado poderá consultar a Seção II.6 do livro do [19]. Exibiremos aqui, apenas um minidicionário de como passar de divisores de Weil para feixes invertíveis e vice-versa, uma vez que para variedades irredutíveis existe um isomorfismo entre esses dois conceitos.

Feixe Invertível	Divisor
$\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(dH)$	dH
$\mathcal{O}(2)^* = \mathcal{O}(-2)$	$-(2H) = (-2)H$
$\mathcal{O}(1)$ (Feixe de Torção de Serre)	H seção hiperplana
$F \in \mathcal{O}(d) $	$F \in H $
$\mathcal{L}(D)$	D

Como estaremos interessados em estudar a dimensão de um dado sistema linear, a fim de investigar a sua especialidade, precisaremos caracterizar a função dimensão como uma função semicontínua superiormente. Para isso, usaremos os conceito de feixes e esquemas, como mostram os seguintes teoremas.

Teorema 6.8 Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo projetivo de esquemas Noetherianos e seja \mathcal{F} um feixe em X sobre Y . Então, para cada $i \geq 0$, a função

$$h^i(y, \mathcal{F}) = \dim_{k(y)} H^i(X_y, \mathcal{F}_y)$$

é uma função semicontínua superiormente em Y .

Demonstração: Ver Teorema III.12.8 do [19]. ■

Adaptando o Teorema 6.8 acima ao nosso contexto, podemos enunciar o que segue.

Teorema 6.9 Seja X uma variedade projetiva. Seja $f : X \rightarrow k$ um morfismo projetivo. Seja \mathcal{F} um feixe invertível em X sobre k . Então, para cada $i \geq 0$, a função $0 \leq h^i(\mathcal{F}_y)$ é uma função semicontínua superiormente em k .

Nas condições do Teorema 6.9 acima, podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 6.3 Nas condições do Teorema 6.9 acima,

$$h^i(\mathcal{F}_0) = 0 \Rightarrow h^i(\mathcal{F}_y) = 0 \text{ para todo } y \text{ próximo de } 0.$$

Dessa forma, o Teorema 6.9 e seu corolário, nos mostram que a dimensão do sistema linear \mathcal{L} é semicontínua superiormente na posição dos pontos em $(\mathbb{P}^1)^r$ e atinge seu valor mínimo quando eles estão em posição geral.

7 Sistemas Lineares

Nesta parte do trabalho iremos definir o que é um sistema linear e apresentar alguns exemplos, estabelecer a relação entre sistema linear e variedade, bem como a relação entre o defeito secante e a especialidade do sistema.

Definições e Exemplos

Definição 7.1 Denotaremos por $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$ o sistema linear formado pelas hipersuperfícies de $(\mathbb{P}^1)^r$ de multigrado (d_1, \dots, d_r) que tem n pontos duplos em posição geral.

Observação 7.1 Nos exemplos a seguir, a fim de elucidar como são os elementos de um sistema linear, sempre que mencionarmos “ponto em posição geral”, estamos nos valendo do Lema 5.3, que nos permite mover pontos em posição geral para pontos canônicos de \mathbb{P}^n .

Exemplo 7.1 Considere o sistema linear $\mathcal{L}_{(1,1)}(2)$, isto equivale ao conjunto das hipersuperfícies de $(\mathbb{P}^1)^2$ com grau $(1, 1)$ com um ponto duplo em posição geral. Assim, uma hipersuperfície qualquer em $\mathcal{L}_{(1,1)}$ é da forma

$$F = ax_0y_0 + bx_0y_1 + cx_1y_0 + dx_1y_1,$$

onde pelo menos um dos coeficientes é diferente de zero.

Seja $p = sv((1 : 0), (1 : 0)) = (1 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^3$ um ponto em posição geral. Ao impormos o ponto p com multiplicidade dois, exigimos que $F(p) = 0$ e $\nabla F(p) = 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} F(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) = 0 \Rightarrow c = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y_0}(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial y_1}(p) = 0 \Rightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Com isso, o sistema $\mathcal{L}_{(1,1)}$ com um ponto duplo em posição geral é da forma

$$\mathcal{L}_{(1,1)}(2) = \{F = dx_1y_1 \mid (d) \in \mathbb{P}^0\} \cong \mathbb{P}^0.$$

Note que ao impormos o ponto p , impomos $1 \cdot (2 + 1)$ condições aos coeficientes. Isso mostra que $\dim \mathcal{L}_{(1,1)}(2) = 0$.

Exemplo 7.2 Considere o sistema linear $\mathcal{L}_{(1,2)}(2^2)$. Uma hipersuperfície qualquer em $\mathcal{L}_{(1,2)}$ é da forma

$$F = ax_0y_0^2 + bx_0y_0y_1 + cx_0y_1^2 + dx_1y_0^2 + ex_1y_0y_1 + fx_1y_1^2,$$

onde pelo menos um dos coeficientes é diferente de zero.

Seja $p = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^5$ um ponto em posição geral. Ao impormos o ponto p

com multiplicidade dois, exigimos que

$$\begin{aligned} F(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) = 0 \Rightarrow d = 0; \\ & \quad \frac{\partial F}{\partial y_0}(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial y_1}(p) = 0 \Rightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Com isso, o sistema $\mathcal{L}_{(1,2)}$ com um ponto duplo é da forma

$$\mathcal{L}_{(1,2)}(2) = \{F = cx_0y_1^2 + ex_1y_0y_1 + fx_1y_1^2 \mid (c : e : f) \in \mathbb{P}^2\} \cong \mathbb{P}^2.$$

Note que ao impormos o ponto p , impomos $1 \cdot (2 + 1)$ condições aos coeficientes. Seja $q = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^5$ um ponto em posição geral. Ao impormos o ponto q com multiplicidade dois, exigimos que

$$\begin{aligned} F(q) = 0 \Rightarrow f = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(q) = 0 \Rightarrow c = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(q) = 0 \Rightarrow f = 0; \\ & \quad \frac{\partial F}{\partial y_0}(q) = 0 \Rightarrow e = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial y_1}(q) = 0 \Rightarrow f = 0. \end{aligned}$$

Note que ao impormos o ponto q , impomos também $1 \cdot (2 + 1)$ condições aos coeficientes do sistema, e distintas das anteriores. Logo, os dois pontos duplos, impõem um total de $2 \cdot (2 + 1)$ condições aos coeficientes. Assim, todos os coeficientes se anularão, isso mostra que $\dim \mathcal{L}_{(1,2)}(2^2) = -1$, ou seja, o sistema é vazio.

Exemplo 7.3 Considere o sistema linear $\mathcal{L}_{(2,2)}(2^3)$. Uma hipersuperfície qualquer em $\mathcal{L}_{(2,2)}$ é da forma

$$F = ax_0^2y_0^2 + bx_0^2y_0y_1 + cx_0^2y_1^2 + dx_0x_1y_0^2 + ex_0x_1y_0y_1 + fx_0x_1y_1^2 + gx_1^2y_0^2 + hx_1^2y_0y_1 + ix_1^2y_1^2,$$

onde pelo menos um dos coeficientes é diferente de zero.

Seja $p = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^8$ um ponto em posição geral. Ao impormos o ponto p com multiplicidade dois, exigimos que

$$\begin{aligned} F(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) = 0 \Rightarrow d = 0; \\ & \quad \frac{\partial F}{\partial y_0}(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial y_1}(p) = 0 \Rightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Com isso, o sistema linear $\mathcal{L}_{(2,2)}$ com um ponto duplo em posição geral é da forma

$$\mathcal{L}_{(2,2)}(2) = \{F = cx_0^2y_1^2 + ex_0x_1y_0y_1 + fx_0x_1y_1^2 + gx_1^2y_0^2 + hx_1^2y_0y_1 + ix_1^2y_1^2 \mid (c : e : f : g : h : i) \in \mathbb{P}^5\} \cong \mathbb{P}^5.$$

Note que ao impormos o ponto p , impomos $1 \cdot (2 + 1)$ condições aos coeficientes. Seja $q = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^8$ um ponto em posição geral. Ao impormos o ponto q com multiplicidade dois, exigimos que

$$\begin{aligned} F(q) = 0 \Rightarrow i = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(q) = 0 \Rightarrow f = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(q) = 0 \Rightarrow i = 0; \\ & \quad \frac{\partial F}{\partial y_0}(q) = 0 \Rightarrow h = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial y_1}(q) = 0 \Rightarrow i = 0. \end{aligned}$$

Com isso, o sistema $\mathcal{L}_{(2,2)}$ com dois pontos duplos em posição geral é da forma

$$\mathcal{L}_{(2,2)}(2^2) = \{F = cx_0^2y_1^2 + ex_0x_1y_0y_1 + gx_1^2y_0^2 \mid (c : e : g) \in \mathbb{P}^2\} \cong \mathbb{P}^2.$$

Note que ao impormos o ponto q , impomos também $1 \cdot (2 + 1)$ condições aos coeficientes do sistema, e distintas das anteriores. Logo, os dois pontos duplos, impõem um total de $2 \cdot (2 + 1)$ condições aos coeficientes.

Para inserirmos um terceiro ponto $r = (1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1) \in \mathbb{P}^8$ em posição geral, usamos o Lema 5.4. Ao impormos o ponto duplo r , exigimos que

$$\begin{aligned} F(r) = 0 &\Rightarrow c + e + g = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_0}(r) = 0 &\Rightarrow 2c + e = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_1}(r) = 0 &\Rightarrow e + 2g = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y_0}(r) = 0 &\Rightarrow e + 2g = 0; & \frac{\partial F}{\partial y_1}(r) = 0 &\Rightarrow 2c + e = 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, a matriz dos coeficientes do sistema formado por essas equações terá posto

$$\text{posto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Isto evidencia que as linhas que compõem a matriz não são linearmente independentes. Como o posto não é máximo, significa que ao impormos o ponto r com multiplicidade dois, não impomos tantas condições quanto deveríamos impor aos coeficientes, ou seja, pelo menos uma das condições impostas será repetida.

De fato, como $2c + e = 0$, temos que $e = -2c$. Substituindo na equação $2g + e = 0$, obtemos $g = c$. Logo, o sistema linear $\mathcal{L}_{(2,2)}$ com três pontos duplos é da forma

$$\mathcal{L}_{(2,2)}(2^3) = \{F = cx_0^2y_1^2 - 2cx_0x_1y_0y_1 + cx_1^2y_0^2 \mid (c) \in \mathbb{P}^0\} \cong \mathbb{P}^0.$$

Isso mostra que $\dim \mathcal{L}_{(2,2)}(2^3) = 0$.

Exemplo 7.4 Considere o sistema linear $\mathcal{L}_{(1,1,1)}(2^2)$. Uma hipersuperfície qualquer em $\mathcal{L}_{(1,1,1)}$ é da forma

$$F = ax_0y_0z_0 + bx_0y_0z_1 + cx_0y_1z_0 + dx_0y_1z_1 + ex_1y_0z_0 + fx_1y_0z_1 + gx_1y_1z_0 + hx_1y_1z_1,$$

onde pelo menos um dos coeficientes é diferente de zero.

Seja $p = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^7$ um ponto em posição geral. Ao impormos o ponto p com multiplicidade dois, exigimos que

$$\begin{aligned} F(p) = 0 &\Rightarrow a = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) = 0 &\Rightarrow a = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) = 0 &\Rightarrow e = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y_0}(p) = 0 &\Rightarrow a = 0; & \frac{\partial F}{\partial y_1}(p) = 0 &\Rightarrow c = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial z_0}(p) = 0 &\Rightarrow a = 0; & \frac{\partial F}{\partial z_1}(p) = 0 &\Rightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Com isso, o sistema $\mathcal{L}_{(1,1,1)}$ com um ponto duplo em posição geral é da forma

$$\mathcal{L}_{(1,1,1)}(2) = \{F = dx_0y_1z_1 + fx_1y_0z_1 + gx_1y_1z_0 + hx_1y_1z_1 \mid (d : f : g : h) \in \mathbb{P}^3\} \cong \mathbb{P}^3.$$

Note que ao impormos o ponto p , impomos $1 \cdot (3 + 1)$ condições aos coeficientes. Seja $q = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^7$ um ponto em posição geral. Ao impormos o ponto q com multiplicidade dois, exigimos que

$$\begin{aligned} F(q) = 0 \Rightarrow h = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(q) = 0 \Rightarrow d = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(q) = 0 \Rightarrow h = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y_0}(q) = 0 \Rightarrow f = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial y_1}(q) = 0 \Rightarrow h = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial z_0}(q) = 0 \Rightarrow g = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial z_1}(q) = 0 \Rightarrow h = 0. \end{aligned}$$

Note que ao impormos o ponto q , impomos também $1 \cdot (3 + 1)$ condições aos coeficientes do sistema, e distintas das anteriores. Logo, os dois pontos duplos, impõem um total de $2 \cdot (3 + 1)$ condições aos coeficientes. Assim, todos os coeficientes se anulam, isso mostra que $\dim \mathcal{L}_{(1,1,1)}(2^2) = -1$, ou seja, o sistema é vazio.

Exemplo 7.5 Considere o sistema linear $\mathcal{L}_{(1,1,2)}(2^2)$. Uma hipersuperfície qualquer em $\mathcal{L}_{(1,1,2)}$ é da forma

$$F = ax_0y_0z_0^2 + bx_0y_0z_0z_1 + cx_0y_0z_1^2 + dx_0y_1z_0^2 + ex_0y_1z_0z_1 + fx_0y_1z_1^2 + gx_1y_0z_0^2 + hx_1y_0z_0z_1 + ix_1y_0z_1^2 + jx_1y_1z_0^2 + kx_1y_1z_0z_1 + lx_1y_1z_1^2,$$

onde pelo menos um dos coeficientes é diferente de zero.

Seja $p = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^{11}$ um ponto em posição geral. Ao impormos o ponto p com multiplicidade dois, exigimos que

$$\begin{aligned} F(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) = 0 \Rightarrow g = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y_0}(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial y_1}(p) = 0 \Rightarrow d = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial z_0}(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial z_1}(p) = 0 \Rightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Com isso, o sistema $\mathcal{L}_{(1,1,2)}$ com um ponto duplo em posição geral é da forma

$$\mathcal{L}_{(1,1,2)}(2) = \{F = cx_0y_0z_1^2 + ex_0y_1z_0z_1 + fx_0y_1z_1^2 + hx_1y_0z_0z_1 + ix_1y_0z_1^2 + jx_1y_1z_0^2 + kx_1y_1z_0z_1 + lx_1y_1z_1^2 \mid (c : e : f : h : i : j : k : l) \in \mathbb{P}^7\} \cong \mathbb{P}^7.$$

Note que ao impormos o ponto p , impomos $1 \cdot (3 + 1)$ condições aos coeficientes. Seja $q = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^{11}$ um ponto em posição geral. Ao impormos o ponto q com multiplicidade dois, exigimos que

$$\begin{aligned} F(q) = 0 \Rightarrow l = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(q) = 0 \Rightarrow f = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(q) = 0 \Rightarrow l = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y_0}(q) = 0 \Rightarrow i = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial y_1}(q) = 0 \Rightarrow l = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial z_0}(q) = 0 \Rightarrow k = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial z_1}(q) = 0 \Rightarrow l = 0. \end{aligned}$$

Com isso, o sistema $\mathcal{L}_{(1,1,2)}$ com dois pontos duplos em posição geral é da forma

$$\mathcal{L}_{(1,1,2)}(2^2) = \{F = cx_0y_0z_1^2 + ex_0y_1z_0z_1 + hx_1y_0z_0z_1 + jx_1y_1z_0^2 \mid (c : e : h : j) \in \mathbb{P}^3\} \cong \mathbb{P}^3.$$

Note que ao impormos o ponto q , impomos também $1 \cdot (3 + 1)$ condições aos coeficientes do sistema, e distintas das anteriores. Logo, os dois pontos duplos, impõem um total de $2 \cdot (3 + 1)$ condições aos coeficientes.

Para inserirmos um terceiro ponto $r = (1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1) \in \mathbb{P}^{11}$ em posição geral, usamos o Lema 5.4. Ao impormos o ponto duplo r , exigimos que

$$\begin{aligned} F(r) = 0 &\Rightarrow c + e + h + j = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_0}(r) = 0 &\Rightarrow c + e = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_1}(r) = 0 &\Rightarrow h + j = 0; \\ & & \frac{\partial F}{\partial y_0}(r) = 0 &\Rightarrow c + h = 0; & \frac{\partial F}{\partial y_1}(r) = 0 &\Rightarrow e + j = 0; \\ & & \frac{\partial F}{\partial z_0}(r) = 0 &\Rightarrow e + h + 2j = 0; & \frac{\partial F}{\partial z_1}(r) = 0 &\Rightarrow 2c + e + h = 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, a matriz dos coeficientes do sistema formado por essas equações terá posto

$$\text{posto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Isto evidencia que as linhas que compõem a matriz não são linearmente independentes. Como o posto não é máximo, significa que ao impormos o ponto r com multiplicidade dois, não impomos tantas condições quanto deveríamos impor aos coeficientes, ou seja, pelo menos uma das condições será repetida.

De fato, como $c + e = 0$ e $h + j = 0$, temos que $e = -c$ e $h = -j$, respectivamente. Além disso, de $c + h = 0$ e $e + j = 0$, obtemos que $h = -c$ e $e = -j$, respectivamente. Agora, como $e = -c$, $h = -j$, $h = -c$ e $e = -j$, devemos ter $j = c$. Logo, o sistema linear $\mathcal{L}_{(1,1,2)}$ com três pontos duplos é da forma

$$\mathcal{L}_{(1,1,2)}(2^3) = \{F = cx_0y_0z_1^2 - cx_0y_1z_0z_1 - cx_1y_0z_0z_1 + cx_1y_1z_0^2 \mid (c) \in \mathbb{P}^0\} \cong \mathbb{P}^0.$$

Isso mostra que $\dim \mathcal{L}_{(1,1,2)}(2^3) = 0$.

Exemplo 7.6 Considere o sistema linear $\mathcal{L}_{(1,1,1,1)}(2^2)$. Uma hipersuperfície qualquer em $\mathcal{L}_{(1,1,1,1)}$ é da forma

$$\begin{aligned} F = ax_0y_0z_0w_0 + bx_0y_0z_0w_1 + cx_0y_0z_1w_0 + dx_0y_0z_1w_1 + ex_0y_1z_0w_0 + fx_0y_1z_0w_1 + \\ gx_0y_1z_1w_0 + hx_0y_1z_1w_1 + ix_1y_0z_0w_0 + jx_1y_0z_0w_1 + kx_1y_0z_1w_0 + lx_1y_0z_1w_1 + mx_1y_1z_0w_0 + \\ nx_1y_1z_0w_1 + ox_1y_1z_1w_0 + px_1y_1z_1w_1, \end{aligned}$$

onde pelo menos um dos coeficientes é diferente de zero.

Seja $p = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^{15}$ um ponto em posição

geral. Ao impormos o ponto p com multiplicidade dois, exigimos que

$$\begin{aligned}
F(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) = 0 \Rightarrow i = 0; \\
\frac{\partial F}{\partial y_0}(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & & \quad \frac{\partial F}{\partial y_1}(p) = 0 \Rightarrow e = 0; \\
\frac{\partial F}{\partial z_0}(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & & \quad \frac{\partial F}{\partial z_1}(p) = 0 \Rightarrow c = 0; \\
\frac{\partial F}{\partial w_0}(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & & \quad \frac{\partial F}{\partial w_1}(p) = 0 \Rightarrow b = 0.
\end{aligned}$$

Com isso, o sistema $\mathcal{L}_{(1,1,1,1)}$ com um ponto duplo em posição geral é da forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(1,1,1,1)}(2) = \{F = dx_0y_0z_1w_1 + fx_0y_1z_0w_1 + gx_0y_1z_1w_0 + hx_0y_1z_1w_1 + jx_1y_0z_0w_1 + \\
kx_1y_0z_1w_0 + lx_1y_0z_1w_1 + mx_1y_1z_0w_0 + nx_1y_1z_0w_1 + ox_1y_1z_1w_0 + \\
px_1y_1z_1w_1 \mid (d : f : g : h : j : k : l : m : n : o : p) \in \mathbb{P}^{10}\} \cong \mathbb{P}^{10}.
\end{aligned}$$

Note que ao impormos o ponto p , impomos $1 \cdot (4 + 1)$ condições aos coeficientes.

Seja $q = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^{15}$ um ponto em posição geral. Ao impormos o ponto q com multiplicidade dois, exigimos que

$$\begin{aligned}
F(q) = 0 \Rightarrow p = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(q) = 0 \Rightarrow h = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(q) = 0 \Rightarrow p = 0; \\
\frac{\partial F}{\partial y_0}(q) = 0 \Rightarrow l = 0; & & \quad \frac{\partial F}{\partial y_1}(q) = 0 \Rightarrow p = 0; \\
\frac{\partial F}{\partial z_0}(q) = 0 \Rightarrow n = 0; & & \quad \frac{\partial F}{\partial z_1}(q) = 0 \Rightarrow p = 0; \\
\frac{\partial F}{\partial w_0}(q) = 0 \Rightarrow o = 0; & & \quad \frac{\partial F}{\partial w_1}(q) = 0 \Rightarrow p = 0.
\end{aligned}$$

Com isso, o sistema $\mathcal{L}_{(1,1,1,1)}$ com dois pontos duplos em posição geral é da forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(1,1,1,1)}(2^2) = \{F = dx_0y_0z_1w_1 + fx_0y_1z_0w_1 + gx_0y_1z_1w_0 + jx_1y_0z_0w_1 + kx_1y_0z_1w_0 + \\
mx_1y_1z_0w_0 \mid (d : f : g : j : k : m) \in \mathbb{P}^5\} \cong \mathbb{P}^5.
\end{aligned}$$

Note que ao impormos o ponto q , impomos também $1 \cdot (4 + 1)$ condições aos coeficientes do sistema, e distintas das anteriores. Logo, os dois pontos duplos, impõem um total de $2 \cdot (4 + 1)$ condições aos coeficientes.

Para inserirmos um terceiro ponto $r = (1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1) \in \mathbb{P}^{15}$ em posição geral, usamos o Lema 5.4. Ao impormos o ponto duplo r , exigimos que $F(r) = 0$ ou seja, que $d + f + g + j + k + m = 0$. Além disso, exigimos também que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_0}(r) = 0 \Rightarrow d + f + g = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(r) = 0 \Rightarrow j + k + m = 0; \\
\frac{\partial F}{\partial y_0}(r) = 0 \Rightarrow d + j + k = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial y_1}(r) = 0 \Rightarrow f + g + m = 0; \\
\frac{\partial F}{\partial z_0}(r) = 0 \Rightarrow f + j + m = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial z_1}(r) = 0 \Rightarrow d + g + k = 0; \\
\frac{\partial F}{\partial w_0}(r) = 0 \Rightarrow g + k + m = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial w_1}(r) = 0 \Rightarrow d + f + j = 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, a matriz dos coeficientes do sistema formado por essas equações terá posto

$$\text{posto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4.$$

Isto evidencia que as linhas que compõem a matriz não são linearmente independentes. Como o posto não é máximo, significa que ao impormos o ponto r com multiplicidade dois, não impomos tantas condições quanto deveríamos impor aos coeficientes, ou seja, pelo menos uma das condições será repetida.

De fato, como $d + j + k = 0$, temos que $d = -j - k$. Por outro lado, como $j + k + m = 0$, temos que $-d + m = 0$, logo $d = m$. Como $f + g + m = 0$ e $f + j + m = 0$, devemos ter $g = j$. Como $d + j + k = 0$ e $d = m$, concluímos que $j = -k - m$. Por fim, como $f + g + m = 0$ e $g = j = -k - m$, devemos ter $f = k$. Logo, o sistema linear $\mathcal{L}_{(1,1,1,1)}$ com três pontos duplos é da forma

$$\mathcal{L}_{(1,1,2)}(2^3) = \{F = mx_0y_0z_1w_1 + kx_0y_1z_0w_1 - (k+m)x_0y_1z_1w_0 - (k+m)x_1y_0z_0w_1 + kx_1y_0z_1w_0 + mx_1y_1z_0w_0 \mid (k : m) \in \mathbb{P}^1\} \cong \mathbb{P}^1.$$

Isso mostra que $\dim \mathcal{L}_{(1,1,1,1)}(2^3) = 1$.

Observação 7.2 Os polinômios homogêneos de multigrado (d_1, \dots, d_r) , pelo mergulho de Segre-Veronese, como na Definição 4.3, formam um espaço projetivo cuja dimensão é dada por

$$N := \prod_{i=1}^r \binom{n_i + d_i}{n_i} - 1.$$

Como estamos em $(\mathbb{P}^1)^r$, temos que $n_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, r$. Dessa forma,

$$N := \prod_{i=1}^r \binom{n_i + d_i}{n_i} - 1 = \prod_{i=1}^r \binom{1 + d_i}{1} - 1 = \prod_{i=1}^r (d_i + 1) - 1.$$

Além disso, para um polinômio ter multiplicidade pelo menos m em um ponto $p \in \mathbb{P}^r$ ele precisa impor

$$\binom{r + (m - 1)}{r}$$

condições lineares aos coeficientes. Logo, n pontos duplos impõem

$$\underbrace{\binom{r + (2 - 1)}{r} + \dots + \binom{r + (2 - 1)}{r}}_{n \text{ vezes}} = \sum_{j=1}^n \binom{r + 1}{r} = \sum_{j=1}^n (r + 1) = n \cdot (r + 1)$$

condições ao sistema \mathcal{L} . Diante disso, podemos estabelecer uma definição plausível para a dimensão de um sistema linear.

Definição 7.2 A **dimensão virtual** do sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$ é definida como

$$v(\mathcal{L}) := \prod_{i=1}^r (d_i + 1) - 1 - (r + 1)n. \quad (7.1)$$

Isto equivale à dimensão do sistema linear completo $|\mathcal{O}(d_1, \dots, d_r)|$ das hipersuperfícies de $(\mathbb{P}^1)^r$ de multigrado (d_1, \dots, d_r) subtraído o número de condições impostas pelos n pontos duplos.

Exemplo 7.7 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1)}(2)$ do Exemplo 7.1. Sua dimensão virtual é dada por

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}) &= \prod_{i=1}^r (d_i + 1) - 1 - (r + 1)n \\ &= \prod_{i=1}^2 (d_i + 1) - 1 - (2 + 1) \cdot 1 \\ &= (1 + 1)(1 + 1) - 1 - 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 7.8 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,2)}(2^2)$ do Exemplo 7.2. Sua dimensão virtual é dada por

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}) &= \prod_{i=1}^r (d_i + 1) - 1 - (r + 1)n \\ &= \prod_{i=1}^2 (d_i + 1) - 1 - (2 + 1) \cdot 2 \\ &= (1 + 1)(2 + 1) - 1 - 6 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Exemplo 7.9 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(2,2)}(2^3)$ do Exemplo 7.3. Sua dimensão virtual é dada por

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}) &= \prod_{i=1}^r (d_i + 1) - 1 - (r + 1)n \\ &= \prod_{i=1}^2 (d_i + 1) - 1 - (2 + 1) \cdot 3 \\ &= (2 + 1)(2 + 1) - 1 - 9 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Exemplo 7.10 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1,1)}(2^2)$ do Exemplo 7.4. Sua dimen-

são virtual é dada por

$$\begin{aligned}
v(\mathcal{L}) &= \prod_{i=1}^r (d_i + 1) - 1 - (r + 1)n \\
&= \prod_{i=1}^3 (d_i + 1) - 1 - (3 + 1) \cdot 2 \\
&= (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) - 1 - 8 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Exemplo 7.11 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1,2)}(2^3)$ do Exemplo 7.5. Sua dimensão virtual é dada por

$$\begin{aligned}
v(\mathcal{L}) &= \prod_{i=1}^r (d_i + 1) - 1 - (r + 1)n \\
&= \prod_{i=1}^3 (d_i + 1) - 1 - (3 + 1) \cdot 3 \\
&= (1 + 1)(1 + 1)(2 + 1) - 1 - 12 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Exemplo 7.12 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1,1,1)}(2^3)$ do Exemplo 7.6. Sua dimensão virtual é dada por

$$\begin{aligned}
v(\mathcal{L}) &= \prod_{i=1}^r (d_i + 1) - 1 - (r + 1)n \\
&= \prod_{i=1}^4 (d_i + 1) - 1 - (4 + 1) \cdot 3 \\
&= (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) - 1 - 15 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Geometricamente não faz sentido a dimensão virtual de um sistema linear ser menor que -1 , uma vez que a dimensão de um sistema linear ser -1 significa que o sistema é vazio, ou seja que as seções globais são iguais a zero, como nos mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 7.13 Considere três pontos não alinhados p, q, r em \mathbb{P}^2 e $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{2,1}(1^3)$. Neste caso, $\mathcal{L} = \emptyset$ significa que $\mathcal{L}(\mathbb{P}^2) = \{0\}$, ao passo que $\mathcal{L}(\mathbb{P}^2 \setminus \{r\}) = l\mathbb{C} \cong \mathbb{C}$, onde $l = \overline{pq}$ é a reta que liga os pontos p e q .

Como a dimensão de \mathcal{L} não pode ser menor que -1 , uma vez que estamos no espaço projetivo, podemos definir a dimensão esperada de um sistema linear como segue.

Definição 7.3 A **dimensão esperada** de um sistema linear \mathcal{L} é definida como

$$e(\mathcal{L}) := \max\{v(\mathcal{L}), -1\}. \quad (7.2)$$

Exemplo 7.14 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1)}(2)$. Vimos no Exemplo 7.7 que $v(\mathcal{L}) = 0$. Assim, sua dimensão esperada será dada por

$$e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\} = \max\{0, -1\} = 0.$$

Exemplo 7.15 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,2)}(2^2)$. Vimos no Exemplo 7.8 que $v(\mathcal{L}) = -1$. Assim, sua dimensão esperada será dada por

$$e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\} = \max\{-1, -1\} = -1.$$

Exemplo 7.16 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(2,2)}(2^3)$. Vimos no Exemplo 7.9 que $v(\mathcal{L}) = -1$. Assim, sua dimensão esperada será dada por

$$e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\} = \max\{-1, -1\} = -1.$$

Exemplo 7.17 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1,1)}(2^2)$. Vimos no Exemplo 7.10 que $v(\mathcal{L}) = -1$. Assim, sua dimensão esperada será dada por

$$e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\} = \max\{-1, -1\} = -1.$$

Exemplo 7.18 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1,2)}(2^3)$. Vimos no Exemplo 7.11 que $v(\mathcal{L}) = -1$. Assim, sua dimensão esperada será dada por

$$e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\} = \max\{-1, -1\} = -1.$$

Exemplo 7.19 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1,1,1)}(2^3)$. Vimos no Exemplo 7.12 que $v(\mathcal{L}) = 0$. Assim, sua dimensão esperada será dada por

$$e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\} = \max\{0, -1\} = 0.$$

Definição 7.4 Se as condições impostas pelos pontos não forem linearmente independentes, a dimensão de \mathcal{L} é maior que a esperada e neste caso dizemos que \mathcal{L} é **especial**. Se porém, a dimensão de \mathcal{L} coincidir com a dimensão esperada, dizemos que \mathcal{L} é **não especial**.

Exemplo 7.20 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1)}(2)$. Vimos no Exemplo 7.1 que $\dim \mathcal{L} = 0$. No Exemplo 7.14, vimos que $e(\mathcal{L}) = 0$. Como $\dim \mathcal{L} = e(\mathcal{L})$, temos que \mathcal{L} é não especial. Essa não especialidade também foi notada no Exemplo 5.13, quando vimos que a variedade associada era não defeituosa.

Exemplo 7.21 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,2)}(2^2)$. Vimos no Exemplo 7.2 que $\dim \mathcal{L} = -1$. No Exemplo 7.15, vimos que $e(\mathcal{L}) = -1$. Como $\dim \mathcal{L} = e(\mathcal{L})$, temos que \mathcal{L} é não especial. Essa não especialidade também foi notada no Exemplo 5.14, quando vimos que a variedade associada era não defeituosa.

Exemplo 7.22 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(2,2)}(2^3)$. Vimos no Exemplo 7.3 que $\dim \mathcal{L} = 0$. No Exemplo 7.16, vimos que $e(\mathcal{L}) = -1$. Como $\dim \mathcal{L} > e(\mathcal{L})$, temos que \mathcal{L} é especial. Essa especialidade também foi notada no Exemplo 5.18, quando vimos que a variedade associada era 3-defeituosa e portanto, era defeituosa.

Exemplo 7.23 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1,1)}(2^2)$. Vimos no Exemplo 7.4 que $\dim \mathcal{L} = -1$. No Exemplo 7.17, vimos que $e(\mathcal{L}) = -1$. Como $\dim \mathcal{L} = e(\mathcal{L})$, temos que \mathcal{L} é não especial. Essa não especialidade também foi notada no Exemplo 5.19, quando vimos que a variedade associada era não defeituosa.

Exemplo 7.24 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1,2)}(2^3)$. Vimos no Exemplo 7.5 que $\dim \mathcal{L} = 0$. No Exemplo 7.18, vimos que $e(\mathcal{L}) = -1$. Como $\dim \mathcal{L} > e(\mathcal{L})$, temos que \mathcal{L} é especial. Essa especialidade também foi notada no Exemplo 5.20, quando vimos que a variedade associada era 3-defeituosa e portanto, era defeituosa.

Exemplo 7.25 Considere o sistema linear $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1,1,1)}(2^3)$. Vimos no Exemplo 7.6 que $\dim \mathcal{L} = 1$. No Exemplo 7.19, vimos que $e(\mathcal{L}) = 0$. Como $\dim \mathcal{L} > e(\mathcal{L})$, temos que \mathcal{L} é especial. Essa especialidade também foi notada no Exemplo 5.21, quando vimos que a variedade associada era 3-defeituosa e portanto, era defeituosa.

O nosso interesse reside em investigar se um dado sistema linear \mathcal{L} é ou não especial, ou seja, se os n pontos duplos impõe ou não condições independentes ao sistema. Para tanto, focaremos nosso estudo na dimensão do sistema linear.

Seja Z o esquema 0-dimensional de comprimento $(r+1)n$ dado por n pontos duplos. Por um abuso de notação, a fim de simplificar a escrita, usaremos frequentemente o mesmo símbolo $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$ ou simplesmente \mathcal{L} para denotar o sistema linear e o feixe $\mathcal{O}(d_1, \dots, d_r) \otimes \mathcal{I}_Z$. Dito isto, considere a seguinte sequência exata de restrição

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)} \longrightarrow \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}|_Z \longrightarrow 0. \quad (7.3)$$

Tomando a sequência de cohomologia associada, temos que

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}|_Z) \longrightarrow H^1(\mathcal{L}) \longrightarrow \dots \quad (7.4)$$

Sendo $h^1((\mathbb{P}^1)^r, \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}) = 0$ (pelo Lema 6.1), obtemos a seguinte caracterização cohomológica para a especialidade do sistema linear. O sistema linear \mathcal{L} é não especial se, e somente se,

$$h^0((\mathbb{P}^1)^r, \mathcal{L}) \cdot h^1((\mathbb{P}^1)^r, \mathcal{L}) = 0. \quad (7.5)$$

Esse resultado será enunciado e provado mais a frente no Teorema 7.1. Antes porém, provemos o seguinte lema técnico.

Lema 7.1 Sejam $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ e \mathcal{L}_3 sistemas lineares tais que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_3 \longrightarrow 0 \quad (7.6)$$

é exata. Se $h^1(\mathcal{L}_1) = 0$ ou $h^0(\mathcal{L}_3) = 0$, então $\dim(\mathcal{L}_2) = \dim(\mathcal{L}_1) + \dim(\mathcal{L}_3) + 1$.

Demonstração: De fato, tomando a sequência de cohomologia associada à sequência exata dada pela Equação (7.6), obtemos

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_1) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_2) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_3) \longrightarrow H^1(\mathcal{L}_1) \longrightarrow \dots \quad (7.7)$$

Se $h^1(\mathcal{L}_1) = 0$, temos que $H^1(\mathcal{L}_1) = \{0\}$ e assim,

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_1) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_2) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_3) \longrightarrow 0. \quad (7.8)$$

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, teremos que

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{L}_2) &= h^0(\mathcal{L}_1) + h^0(\mathcal{L}_3) \Rightarrow \\ h^0(\mathcal{L}_2) - 1 &= h^0(\mathcal{L}_1) + h^0(\mathcal{L}_3) - 1 \Rightarrow \\ h^0(\mathcal{L}_2) - 1 &= h^0(\mathcal{L}_1) - 1 + h^0(\mathcal{L}_3) - 1 + 1 \Rightarrow \\ \dim(\mathcal{L}_2) &= \dim(\mathcal{L}_1) + \dim(\mathcal{L}_3) + 1. \end{aligned}$$

Se for $h^0(\mathcal{L}_3) = 0$, temos que $H^0(\mathcal{L}_3) = \{0\}$ e assim,

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_1) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_2) \longrightarrow 0. \quad (7.9)$$

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, teremos que

$$h^0(\mathcal{L}_2) = h^0(\mathcal{L}_1) \Rightarrow h^0(\mathcal{L}_2) - 1 = h^0(\mathcal{L}_1) - 1 \Rightarrow \dim(\mathcal{L}_2) = \dim(\mathcal{L}_1).$$

Como $h^0(\mathcal{L}_3) = 0$, temos que $\dim(\mathcal{L}_3) = h^0(\mathcal{L}_3) - 1 = 0 - 1 = -1$. Assim,

$$\dim(\mathcal{L}_2) = \dim(\mathcal{L}_1) \Rightarrow \dim(\mathcal{L}_2) = \dim(\mathcal{L}_1) + \dim(\mathcal{L}_3) + 1.$$

■

Teorema 7.1 O sistema linear \mathcal{L} é não especial se, e somente se, $h^0(\mathcal{L})h^1(\mathcal{L}) = 0$.

Demonstração:

(\Rightarrow): Suponha que \mathcal{L} é não especial. Logo, $\dim(\mathcal{L}) = e(\mathcal{L})$. Como $\dim(\mathcal{L}) = h^0(\mathcal{L}) - 1$, obtemos que $h^0(\mathcal{L}) - 1 = e(\mathcal{L})$ e assim, vem que $h^0(\mathcal{L}) = e(\mathcal{L}) + 1$. Como $e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\}$, temos dois casos a analisar:

- CASO 01: $e(\mathcal{L}) = -1$. Nesse caso, segue que $h^0(\mathcal{L}) = -1 + 1 = 0$ e portanto, $h^0(\mathcal{L})h^1(\mathcal{L}) = 0$.
- CASO 02: $e(\mathcal{L}) = v(\mathcal{L})$. Nesse caso, segue que $h^0(\mathcal{L}) = v(\mathcal{L}) + 1$. Pelo Lema 6.2, temos que $h^1(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}) = 0$, logo $H^1(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}) = \{0\}$ e a sequência dada pela Equação (7.4), fica da seguinte forma

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}|_Z) \longrightarrow H^1(\mathcal{L}) \longrightarrow 0. \quad (7.10)$$

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, teremos que

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{L}) &= h^0(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}) - (h^0(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}|_Z) - h^1(\mathcal{L})) \\ &= h^0(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}) - h^0(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}|_Z) + h^1(\mathcal{L}) \\ &= \prod_{i=1}^r (d_i + 1) - \text{length}(Z) + h^1(\mathcal{L}) \\ &= \prod_{i=1}^r (d_i + 1) - (r + 1)n + h^1(\mathcal{L}) \\ &= v(\mathcal{L}) + 1 + h^1(\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Dessa forma, $h^1(\mathcal{L}) = h^0(\mathcal{L}) - v(\mathcal{L}) - 1$. Como $e(\mathcal{L}) = v(\mathcal{L})$ e $h^0(\mathcal{L}) = e(\mathcal{L}) + 1$, vem que

$$h^1(\mathcal{L}) = h^0(\mathcal{L}) - v(\mathcal{L}) - 1 = e(\mathcal{L}) + 1 - e(\mathcal{L}) - 1 = 0.$$

E, portanto $h^0(\mathcal{L})h^1(\mathcal{L}) = 0$.

(\Leftarrow): Suponha que $h^0(\mathcal{L})h^1(\mathcal{L}) = 0$ e mostremos que \mathcal{L} é não especial. Se $h^0(\mathcal{L})h^1(\mathcal{L}) = 0$ então $h^0(\mathcal{L}) = 0$ ou $h^1(\mathcal{L}) = 0$. Novamente, analisemos cada caso separadamente.

- CASO 01: $h^0(\mathcal{L}) = 0$. Temos que $\dim(\mathcal{L}) = h^0(\mathcal{L}) - 1$. Como $h^0(\mathcal{L}) = 0$, segue que

$$\dim(\mathcal{L}) = 0 - 1 = -1 \leq e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\}.$$

Por outro lado, temos também que $\dim(\mathcal{L}) \geq e(\mathcal{L})$. Logo, $\dim(\mathcal{L}) = e(\mathcal{L})$ e o sistema \mathcal{L} não é especial.

- CASO 02: $h^1(\mathcal{L}) = 0$. Considerando $\mathcal{L}_1 := \mathcal{L}$, $\mathcal{L}_2 := \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}$ e $\mathcal{L}_3 := \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}|_Z$ nas hipóteses do Lema 7.1, como $h^1(\mathcal{L}) = 0$, temos que

$$\dim(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}) = \dim(\mathcal{L}) + \dim(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}|_Z) + 1.$$

Isto implica que,

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{L}) &= \dim(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}) - \dim(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}|_Z) - 1 \\ &= \dim(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}) - (\text{length}(Z) - 1) - 1 \\ &= \prod_{i=1}^r (d_i + 1) - 1 - \text{length}(Z) + 1 - 1 \\ &= \prod_{i=1}^r (d_i + 1) - 1 - (r + 1)n \\ &= v(\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Como $\dim(\mathcal{L}) \geq -1$ e $\dim(\mathcal{L}) = v(\mathcal{L})$, temos que $v(\mathcal{L}) \geq -1$. Assim,

$$e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\} = v(\mathcal{L}).$$

Com efeito,

$$\dim(\mathcal{L}) = v(\mathcal{L}) = e(\mathcal{L}).$$

Portanto, o sistema \mathcal{L} não é especial. ■

Relação entre Sistema Linear e Segre-Veronese

Nessa seção, estabeleceremos a relação entre as variedades de Segre-Veronese e os sistemas lineares, bem como a relação entre o defeito secante de uma Segre-Veronese e a especialidade de um sistema linear. Dito isto, vejamos dois exemplos para termos uma ideia de como os hiperplanos de uma Segre-Veronese $SV_{\mathbf{d}}^n$ correspondem às hipersuperfícies do sistema linear $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}$ por meio do mergulho de Segre-Veronese $sv_{\mathbf{d}}^n$.

Exemplo 7.26 Uma hipersuperfície S de $\mathcal{L}_{(1,1)}$ corresponde a uma seção hiperplana H de $SV_{(1,1)}^{(1,1)}$. De fato, tome o mergulho de Segre-Veronese

$$\begin{aligned} sv_{(1,1)}^{(1,1)} : \mathbb{P}_x^1 \times \mathbb{P}_y^1 &\rightarrow \mathbb{P}_z^3 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\mapsto (x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1). \end{aligned}$$

Agora, fixados p_1, \dots, p_n pontos gerais em $(\mathbb{P}^1)^r$ e considerando o sistema linear $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$ formado pelas hipersuperfícies de $(\mathbb{P}^1)^r$ de multigrado (d_1, \dots, d_r) singulares em p_1, \dots, p_n , temos uma correspondência, via mergulho de Segre-Veronese, ao conjunto dos hiperplanos H em \mathbb{P}^N tangentes a X em $sv(p_1), \dots, sv(p_n)$, onde X denota a imagem do mergulho. Ou seja, o sistema linear tem como lugar de base, o espaço tangente geral a $Sec_n X$.

Neste trabalho estudaremos os defeitos secantes das variedades de Segre-Veronese investigando a dimensão do sistema linear associado $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$, sistema este que consiste das hipersuperfícies de $(\mathbb{P}^1)^r$ de multigrado (d_1, \dots, d_r) através de n pontos duplos em posição geral.

Provaremos o Teorema 3.1 de [22], artigo que norteia essa dissertação, provando a especialidade ou a não especialidade do sistema $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$, conforme o Teorema de Classificação (Teorema 10.1).

Via Lema de Terracini 5.2, resolver este problema, equivale a calcular a dimensão da variedade secante do mergulho de Segre-Veronese $(\mathbb{P}^1)^r \rightarrow \mathbb{P}^N$, definido pelo sistema linear completo $|\mathcal{O}(d_1, \dots, d_r)|$ de $(\mathbb{P}^1)^r$. Ou seja, pelo Lema de Terracini 5.2, mostrar o Teorema de Classificação, é equivalente a mostrar que a variedade n -secante de $X \subset \mathbb{P}^N$ dada pelo mergulho de Segre-Veronese é não defeituosa, exceto nos casos dados pelo mesmo.

Nossa abordagem consistirá em degenerar $(\mathbb{P}^1)^r$ para uma união de duas variedades ambas isomorfas a $(\mathbb{P}^1)^r$, degenerando simultaneamente o sistema linear para um sistema linear obtido como o produto fibrado de sistemas lineares nas duas componentes sobre o sistema linear restrito em sua interseção. O sistema linear limite é um pouco mais fácil que o original, em particular, este argumento de degeneração permitirá usar a indução no multigrado e em r .

Reiteramos que um importante passo básico para nosso argumento de indução está representado em [10], onde os autores mostram que se todos os d_i são iguais a 1, então $\mathcal{L}_{(1, \dots, 1)}(2^n)$ tem sempre a dimensão esperada, logo é classificado como não especial, exceto no caso em que $r = 4$.

Um resultado muito importante também, nos diz que um sistema formado por pontos simples em posição geral é sempre não especial, conforme enunciado abaixo.

Teorema 7.2 (Teorema da Multiplicidade Um) Se n pontos simples estão em posição geral em \mathbb{P}^N , então o sistema $\mathcal{L}_d(1^n)$ é não especial.

Demonstração: Provemos por indução sobre o número n de pontos simples. Se $n = 1$, existe uma hipersuperfície de \mathbb{P}^N de grau d que não passa por um ponto em posição geral. Para o passo indutivo, temos que provar que um ponto em posição geral impõe, sobre um sistema linear não vazio, uma condição linear independente das já existentes, ou de forma equivalente, que um ponto em posição geral, não está em todas as hipersuperfícies do sistema e isso é sempre verdade quando o ponto está em posição geral. ■

Analogamente, podemos enunciar o Teorema 7.2 acima, para um produto cartesiano de \mathbb{P}^n .

Teorema 7.3 (Teorema da Multiplicidade Um) Se n pontos simples estão em posição geral em \mathbb{P}^n , então o sistema $\mathcal{L}_{\mathbf{d}}(1^n)$ é não especial, onde $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$ e $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$.

Demonstração: Análoga à demonstração do Teorema 7.2. ■

8 Variedades Tóricas e Degeneração Tórica

Neste capítulo iremos construir uma degeneração tórica da variedade X como uma união de duas variedades X_1 e X_2 ambas isomorfas a X . Para isso, trazemos algumas definições e exemplos, bem como alguns resultados colocados como observações. O leitor interessado poderá consultar a referência [12].

8.1 Variedades Tóricas

Nesta seção trazemos a definição do toro e do que se entende por variedade tórica em Geometria Algébrica, além de outras importantes definições para a seção subsequente.

Definição 8.1 O toro complexo n -dimensional é dado por $\underbrace{\mathbb{C}^* \times \cdots \times \mathbb{C}^*}_{n \text{ vezes}} = (\mathbb{C}^*)^n$, onde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Observação 8.1 Observe que $(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^n$ é uma variedade afim, uma vez que a aplicação $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n, 1/t_1 \cdots t_n)$ nos fornece o isomorfismo

$$(\mathbb{C}^*)^n \cong \mathbf{V}(x_1 x_2 \cdots x_{n+1} - 1) \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

Observe também que $(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^n$ é um aberto (Zariski), pois $(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}^n \setminus \mathbf{V}(x_1 \cdots x_n)$.

Definição 8.2 Uma **variedade tórica** é uma variedade irredutível V tal que

- (a) $(\mathbb{C}^*)^n$ é um subconjunto aberto (Zariski) de V ;
- (b) uma ação de $(\mathbb{C}^*)^n$ em si mesmo se estende para uma ação de $(\mathbb{C}^*)^n$ em V .

Exemplo 8.1 $(\mathbb{C}^*)^n$ e \mathbb{C}^n são os exemplos triviais de variedades tóricas. Quanto a \mathbb{P}^n , suponha que x_0, \dots, x_n são coordenadas homogêneas em \mathbb{P}^n . O mapa $(\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ definido por $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (1, t_1, \dots, t_n)$ permite-nos identificar $(\mathbb{C}^*)^n$ com o subconjunto aberto (Zariski) $\mathbb{P}^n \setminus \mathbf{V}(x_0 x_1 \cdots x_n)$. Então definindo $(t_1, \dots, t_n) \cdot (a_0, a_1, \dots, a_n) = (a_0, t_1 a_1, \dots, t_n a_n)$, obtemos que \mathbb{P}^n é uma variedade tórica.

Exemplo 8.2 A curva plana $C = \mathbf{V}(x^3 - y^2) \subset \mathbb{C}^2$ tem uma cúspide na origem e é uma variedade tórica afim com toro

$$C \setminus \{0\} = C \cap (\mathbb{C}^*)^2 = \{(t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{C}^*\} \cong \mathbb{C}^*,$$

onde o isomorfismo é $t \mapsto (t^2, t^3)$, e \mathbb{C}^* age em C via $t \cdot (u, v) = (t^2 u, t^3 v)$.

Exemplo 8.3 A variedade $V = \mathbf{V}(xy - zw) \subset \mathbb{C}^4$ é uma variedade tórica com toro

$$V \cap (\mathbb{C}^*)^4 = \{(t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1}) \mid t_i \in \mathbb{C}^*\} \cong (\mathbb{C}^*)^3,$$

onde o isomorfismo é $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1})$.

Exemplo 8.4 Se V e W são variedades tóricas, então $V \times W$ é uma variedade tórica. Isso mostra, por exemplo, que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ é uma variedade tórica e, conseqüentemente, $(\mathbb{P}^1)^r$ é uma variedade tórica.

Observação 8.2 No estudo de variedades tóricas, os pontos $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ desempenham dois importantes papéis. Primeiro, defina o monômio $\mathbf{t}^{\mathbf{a}} := t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$. Observe que $\mathbf{t}^{\mathbf{a}}$ fornece uma função $(\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^*$. O \mathbb{C} -espaço linear de todos esses monômios é o anel de polinômios dado por $\mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}]$. Segundo, podemos definir $\lambda^{\mathbf{a}} : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$ por $\lambda^{\mathbf{a}}(t) = (t^{a_1}, \dots, t^{a_n})$.

Em geral, uma variedade tórica V consiste de $(\mathbb{C}^*)^n$ mais “algo extra”. Quando V é afim, vemos que o “algo extra” é determinado, uma vez que os monômios $\mathbf{t}^{\mathbf{a}}$ são definidos em V , como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 8.5 Considere a variedade tórica \mathbb{C}^n . O monômio $\mathbf{t}^{\mathbf{a}} = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$ determinado por $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ se estende para a função $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ se, e somente se, $a_i \geq 0$ para todo i .

Definição 8.3 Um cone poliédrico convexo em \mathbb{R}^n é um subconjunto da forma

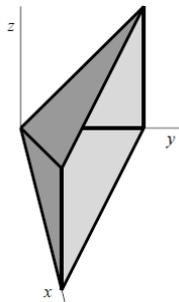
$$\sigma = \text{Cone}(S) = \left\{ \sum_{v \in S} \lambda_v v \mid \lambda_v \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n,$$

onde $S \subset \mathbb{R}^n$ é finito. Dizemos que σ é o cone gerado por S .

Observação 8.3 Observe que σ é convexo, significando que $x, y \in \sigma \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in \sigma$ para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ e é um cone, significando que $x \in \sigma \Rightarrow \lambda x \in \sigma$ para todo $\lambda \geq 0$.

Exemplo 8.6 Exemplos de cones poliédricos convexos incluem o primeiro quadrante em \mathbb{R}^2 ou o primeiro octante em \mathbb{R}^3 . O maior cone poliédrico convexo possível é \mathbb{R}^n enquanto o menor é o cone trivial $\{0\}$ gerado por $S = \emptyset$. Aqui está um exemplo menos trivial.

Exemplo 8.7 O cone em \mathbb{R}^3 gerado por $e_1, e_2, e_1 + e_3$ e $e_2 + e_3$ é ilustrado na figura abaixo.



Observação 8.4 Também é possível ter um cone que contenha retas inteiras. Por exemplo, $e_1, -e_1$ geram um cone em \mathbb{R}^2 que é apenas o eixo- x , enquanto $e_1, -e_1, e_2$ geram o semi-plano superior fechado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

Além disso, também podemos criar cones usando polítopos, que são definidos como segue.

Definição 8.4 Um **polítopo** em \mathbb{R}^n é um subconjunto da forma

$$P = \text{Conv}(S) = \left\{ \sum_{v \in S} \lambda_v v \mid \lambda_v \geq 0 \text{ e } \sum_{v \in S} \lambda_v = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n,$$

onde $S \subset \mathbb{R}^n$ é finito. Dizemos que P é o **envoltório convexo** de S .

Exemplo 8.8 Seja $P = \text{Conv}(S)$ um polítopo em \mathbb{R}^n e considere \mathbb{R}^n como o hiperplano $x_{n+1} = 1$ em \mathbb{R}^{n+1} . Então $\sigma = \{\lambda \cdot (v, 1) \mid v \in P, \lambda \geq 0\}$ é um cone poliédrico convexo gerado por $S \times \{1\}$ onde $S \subset \mathbb{R}^n$ é finito.

Definição 8.5 A **dimensão** de um cone poliédrico convexo σ , denotada por $\dim \sigma$, é definida como sendo a dimensão do menor subespaço $\mathbb{R}\sigma$ contendo σ . Chamamos $\mathbb{R}\sigma$ o *span* de σ . Observe que $\dim \sigma = \dim \mathbb{R}\sigma$.

Observação 8.5 A dimensão de um polítopo $P \subset \mathbb{R}^n$ é a dimensão do menor espaço afim contendo P . Seja $\sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o cone determinado por P como no Exemplo 8.8. Assim, $\dim \sigma = \dim P + 1$.

Definição 8.6 Um **polítopo reticulado** em \mathbb{R}^n é a envoltória convexa de um subconjunto finito de \mathbb{Z}^n e é denotado por Δ .

Observação 8.6 Um polítopo reticulado n -dimensional determina uma variedade tórica projetiva X_Δ de dimensão n . Para ver isso, primeiro representamos Δ como uma interseção de semi-espacos. Para cada face τ de Δ existe um vetor normal primitivo interno $\mathbf{n}_\tau \in \mathbb{Z}^n$ e um inteiro a_τ tal que

$$\Delta = \bigcap_{\tau \text{ é uma faceta}} \{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{m}, \mathbf{n}_\tau \rangle \geq -a_\tau\}.$$

Dada qualquer face τ_i de Δ , seja σ_{τ_i} o cone gerado por \mathbf{n}_τ para todas as faces τ contendo τ_i . Assim,

$$\Sigma_\Delta = \{\sigma_{\tau_i} \mid \tau_i \text{ é uma face de } \Delta\},$$

Isto dá uma variedade tórica denotada por X_Δ , onde Σ é uma coleção finita de cones em \mathbb{R}^n com as seguintes propriedades:

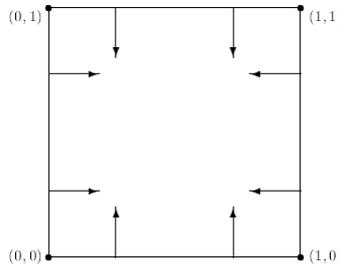
- Cada $\sigma \in \Sigma$ é um cone poliédrico convexo.
- Se $\sigma \in \Sigma$ e τ é uma face de σ , então $\tau \in \Sigma$.
- Se $\sigma, \tau \in \Sigma$, então $\sigma \cap \tau$ é uma face de cada.

Observe que cada $\sigma \in \Sigma$ fornece uma variedade tórica afim U_σ , e se τ é uma face de σ , então U_τ pode ser considerada como um subconjunto aberto (Zariski) de U_σ .

Exemplo 8.9 O quadrado unitário \square com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ pode ser representado por

$$\begin{aligned} \square &= \{a \geq 0\} \cap \{a \leq 1\} \cap \{b \geq 0\} \cap \{b \leq 1\} \\ &= \{a \geq 0\} \cap \{-a \geq -1\} \cap \{b \geq 0\} \cap \{-b \geq -1\}. \end{aligned}$$

Disto, segue que os normais internos são $\pm e_1$ e $\pm e_2$ em \mathbb{Z}^2 . Isto pode ser representado como segue



Cada normal interno aparece duas vezes, mostrando que cada vértice dá um cone 2-dimensional. Por exemplo, o vértice $(1, 1)$ dá o cone 2-dimensional



Os outros vértices são tratados de forma semelhante. Assim, $X_{\square} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Observação 8.7 Sejam $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_l$ pontos de Δ , de modo que $l = |\Delta \cap \mathbb{Z}^n|$. Então, a aplicação

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = (\mathbf{t}^{\mathbf{m}_1}(t_1, \dots, t_n), \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{m}_l}(t_1, \dots, t_n))$$

de $(\mathbb{C}^*)^n$ para \mathbb{P}^{l-1} se estende para o mapa $X_{\Delta} \rightarrow \mathbb{P}^{l-1}$. Definimos X_{Δ} como o fecho de Zariski da imagem de φ_v , onde $\varphi_v : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{P}^{l_v-1}$ é definida pelos pontos de $v\Delta$, de modo que $l_v = |v\Delta \cap \mathbb{Z}^n|$ para $v > 0$.

Exemplo 8.10 Dado um toro $(\mathbb{C}^*)^n$ e um conjunto $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$, temos que $\chi^{m_i} : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}$. Assim, considerando o mapa $\Phi_{\mathcal{A}} : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^s$, definido por $\Phi_{\mathcal{A}}(t) = (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t))$. Nesse caso, a variedade tórica $Y_{\mathcal{A}}$ é definida como sendo o fecho de Zariski da imagem do mapa $\Phi_{\mathcal{A}}$.

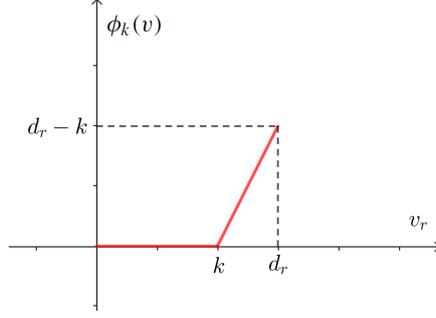
8.2 Degeneração Tórica de $(\mathbb{P}^1)^r$

Uma vez familiarizados com os conceitos apresentados na seção anterior, temos condições de realizarmos uma degeneração tórica de $(\mathbb{P}^1)^r$ como segue.

Seja $P = P_{(d_1, \dots, d_r)}$ o polítopo $[0, d_1] \times \dots \times [0, d_r] \subseteq \mathbb{R}^r$. Assuma, sem perda de generalidade, que $1 \leq d_1 \leq \dots \leq d_r$. Assuma também que $d_r \geq 2$. Seus pontos inteiros definem o mapa tórico dado pelo mergulho de Segre-Veronese $(\mathbb{P}^1)^r \rightarrow \mathbb{P}^N$ definido pelo feixe $\mathcal{O}(d_1, \dots, d_r)$. Como antes, denote por X a imagem deste mergulho. Para qualquer inteiro k tal que $1 \leq k \leq d_r - 1$, considere a função $\phi_k : P \cap \mathbb{Z}^r \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$\phi_k(v) = \begin{cases} 0, & \text{se } v_r \leq k \\ v_r - k, & \text{se } v_r > k. \end{cases} \quad (8.1)$$

Cujo gráfico está representado abaixo



Considere a envoltória convexa das semirretas $\{(v, t) \in P \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mid t \geq \phi_k(v)\}$. Isto é um poliedro limitado com duas faces inferiores. Projetando essas faces em P obtemos uma subdivisão de P dada por

$$\mathcal{T} = \{P_{(d_1, \dots, d_{r-1}, d_r - k)}, P_{(d_1, \dots, d_{r-1}, k)}\}, \quad (8.2)$$

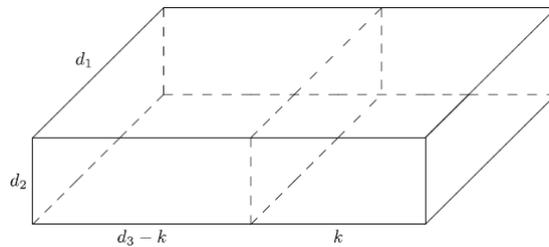
com $P_{(d_1, \dots, d_{r-1}, d_r - k)} \cup P_{(d_1, \dots, d_{r-1}, k)} = P$ e $P_{(d_1, \dots, d_{r-1}, d_r - k)} \cap P_{(d_1, \dots, d_{r-1}, k)} = P_{(d_1, \dots, d_{r-1})}$, onde $P_{(d_1, \dots, d_{r-1})} = [0, d_1] \times \dots \times [0, d_{r-1}]$.

Seja \mathcal{X} a subvariedade tórica de $\mathbb{P}^N \times k^1$ imagem do morfismo tórico dado por

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^*)^r \times \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{P}^N \times k^1 \\ (x, t) &\mapsto (\{t^{\phi_k(v)} x^v \mid v \in P \cap \mathbb{Z}^r\}, t). \end{aligned}$$

Assim, \mathcal{X} admite dois morfismos, induzidos pelas projeções, sobre \mathbb{P}^N e k^1 . Denote por $\pi : \mathcal{X} \rightarrow k^1$ o segundo morfismo. A fibra X_t de π sobre t é isomorfa a X se t é não nulo e isomorfa a união $X_1 \cup X_2$ se $t = 0$. Ambas as X_i 's são isomorfas a $(\mathbb{P}^1)^r$ e sua interseção R é isomorfa a $(\mathbb{P}^1)^{r-1}$.

Mais precisamente, X_1 é o mergulho de Segre-Veronese de $(\mathbb{P}^1)^r$ definido pelo sistema linear completo $|\mathcal{O}(d_1, \dots, d_{r-1}, d_r - k)|$, enquanto X_2 é o mergulho de Segre-Veronese de $(\mathbb{P}^1)^r$ definido pelo sistema linear completo $|\mathcal{O}(d_1, \dots, d_{r-1}, k)|$. A interseção R é o mergulho de Segre-Veronese de $(\mathbb{P}^1)^{r-1}$ definido pelo sistema $|\mathcal{O}(d_1, \dots, d_{r-1})|$. Na figura abaixo representamos a configuração desta degeneração tórica para o caso $r = 3$.



9 Degenerações do Sistema Linear

Neste capítulo, iremos apresentar as duas formas de degenerações que utilizaremos no sistema linear inicial $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$, obtendo sistemas mais simples para investigarmos a dimensão e a especialidade dos mesmos.

9.1 (k, n_2) -degeneração de \mathcal{L}

Pela degeneração tórica de $(\mathbb{P}^1)^r$, como vimos na Seção 8.2, um feixe em X_0 corresponde a dois feixes, respectivamente em X_1 e em X_2 que coincidem na interseção R . Ou seja, dado \mathcal{F} um feixe em X_0 , este corresponde a dois feixes, respectivamente, \mathcal{F}_1 em X_1 e \mathcal{F}_2 em X_2 que são compatíveis na interseção.

Consideremos o sistema linear $\mathcal{L}_t := \mathcal{L}$ de hipersuperfícies de multigrau (d_1, \dots, d_r) de X com n pontos gerais atribuídos $p_{1,t}, \dots, p_{n,t}$ de multiplicidade 2.

Para este tipo de degeneração, fixamos um inteiro não-negativo $n_1 \leq n$ e especializamos n_1 pontos gerais em X_1 e outros $n_2 = n - n_1$ pontos gerais em X_2 , isto significa que tomamos uma família $\{p_{1,t}, \dots, p_{n,t}\}_{t \in k^1}$ tal que $p_{1,0}, \dots, p_{n_1,0} \in X_1$ e $p_{n_1+1,0}, \dots, p_{n,0} \in X_2$.

O sistema linear limite \mathcal{L}_0 em X_0 é formado pelos elementos do limite do feixe $\mathcal{O}(d_1, \dots, d_r)$ na fibra geral X_t , singular em $p_{1,0}, \dots, p_{n,0}$. Em particular $p_1, \dots, p_n \notin R$, onde $R := X_1 \cap X_2$ denota a interseção de X_1 e X_2 .

Considere os seguintes sistemas lineares:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1}, d_r - k)}(2^{n_1}) & \mathcal{L}_2 &:= \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1}, k)}(2^{n_2}) \\ \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1}, d_r - k - 1)}(2^{n_1}) & \widehat{\mathcal{L}}_2 &:= \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1}, k - 1)}(2^{n_2}). \end{aligned} \tag{9.1}$$

Nos sistemas dados pela Equação (9.1), \mathcal{L}_i e $\widehat{\mathcal{L}}_i$ estão definidos em X_i e $\widehat{\mathcal{L}}_i$ é o núcleo da restrição de \mathcal{L}_i a R , para $i = 1, 2$, isto é, dado pela seguinte seqüência exata curta:

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{L}}_i \longrightarrow \mathcal{L}_i \longrightarrow \mathcal{L}_i|_R =: \mathcal{R}_i \longrightarrow 0 \quad \forall i = 1, 2. \tag{9.2}$$

O núcleo $\widehat{\mathcal{L}}_i$ consiste daqueles elementos de \mathcal{L}_i que se anulam identicamente em R , isto é, os elementos em \mathcal{L}_i contendo R como componente.

Um elemento de \mathcal{L}_0 consiste: ou de um elemento em X_1 e um elemento em X_2 , ambos não vazios, satisfazendo as condições impostas pelos pontos múltiplos, que são restritos ao mesmo elemento em R ; ou ele é um elemento correspondendo a uma seção do feixe que é identicamente nula em X_1 (ou em X_2) e que dá um elemento geral em \mathcal{L}_2 (ou em \mathcal{L}_1 , respectivamente) contendo R como uma componente.

Como $X_0 = X_1 \cup X_2$, uma seção em $H^0(X_0, \mathcal{L}_0)$ é obtida pegando um elemento em $H^0(R, \mathcal{R})$ e escolhendo a pré-imagem de tal modo que temos o seguinte diagrama

comutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 & H^0(X_1, \mathcal{L}_0) & \\
 \beta_1 \swarrow & & \searrow \alpha_1 \\
 H^0(R, \mathcal{L}_0) & & H^0(X_0, \mathcal{L}_0) \\
 \beta_2 \swarrow & & \searrow \alpha_2 \\
 & H^0(X_2, \mathcal{L}_0) &
 \end{array}
 , \tag{9.3}$$

Como $\mathcal{L}_0|_{X_1} = \mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_0|_{X_2} = \mathcal{L}_2$, temos que $H^0(X_1, \mathcal{L}_0) = H^0(X_1, \mathcal{L}_1)$ e $H^0(X_2, \mathcal{L}_0) = H^0(X_2, \mathcal{L}_2)$, respectivamente. Além disso, $\mathcal{L}_0|_R = \mathcal{R}$, onde $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, sendo $\mathcal{R}_1 = \mathcal{L}_1|_R$ e $\mathcal{R}_2 = \mathcal{L}_2|_R$ com $R = X_1 \cap X_2$. Assim, temos que $H^0(R, \mathcal{L}_0) = H^0(R, \mathcal{R})$.

Neste caso, dizemos que \mathcal{L}_0 é obtido de \mathcal{L} por uma (k, n_2) -degeneração e temos o seguinte lema.

Lema 9.1 Se $\dim(\mathcal{L}_0) = e(\mathcal{L})$, então o sistema linear \mathcal{L} tem a dimensão esperada, isto é, é não especial.

Demonstração: Pela semicontinuidade superior (ver Teorema 6.9), temos que $\dim(\mathcal{L}) \leq \dim(\mathcal{L}_0) = e(\mathcal{L})$. Por outro lado, $\dim(\mathcal{L}) \geq e(\mathcal{L})$. Logo, $\dim(\mathcal{L}) = e(\mathcal{L})$ e o sistema \mathcal{L} é não especial. ■

9.2 $(1, n_2, \beta)$ -degeneração de \mathcal{L}

Para este tipo de degeneração, fixamos um inteiro não-negativo $\beta < \min\{r, n_2\}$.

Suponha já termos realizado uma $(1, n_2)$ -degeneração de \mathcal{L} , ou seja, uma (k, n_2) -degeneração de \mathcal{L} com $k = 1$, conforme visto na Seção 9.1.

Fazemos uma nova degeneração do sistema linear \mathcal{L}_0 . Obtendo assim, uma dupla degeneração do sistema \mathcal{L} . Realizamos essa nova degeneração do sistema \mathcal{L}_0 na fibra central pelo envio de β pontos entre os n_2 pontos duplos de X_2 para a interseção R de X_1 e X_2 . Assim, $p_1, \dots, p_\beta \in R$, $p_{\beta+1}, \dots, p_{n_2} \in X_2$ e $p_{n_2+1}, \dots, p_n \in X_1$.

Como resultado, obtemos os seguintes sistemas lineares:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1}, d_r-k)}(2^{n_1}) & \mathcal{L}_2 &:= \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1}, k)}(2^{n_2}) \\
 \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1}, d_r-k-1)}(2^{n_1}) & \widehat{\mathcal{L}}_2 &:= \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1}, k-1)}(2^{n_2-\beta}, 1^\beta).
 \end{aligned}
 \tag{9.4}$$

Na interseção R temos $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(2^\beta)$. Observe também que estamos abusando da notação original para \mathcal{L}_2 e $\widehat{\mathcal{L}}_2$, pois os n_2 pontos duplos em X_2 não estão mais na posição geral. Neste caso, dizemos que \mathcal{L}_0 é obtido de \mathcal{L} por uma $(1, n_2, \beta)$ -degeneração, implicando que se $\beta > 0$ realizamos a dupla degeneração, enquanto que se $\beta = 0$ não precisamos realizá-la.

9.3 Dimensão do Sistema Limite

O nosso objetivo após a degeneração passa a ser determinar a dimensão do sistema limite (degenerado) \mathcal{L}_0 , dimensão esta que será determinada de forma recursiva.

Quando os elementos em \mathcal{L}_0 provêm de uma seção em X_1 e uma seção em X_2 , ambas não vazias e que são compatíveis na interseção, a dimensão de \mathcal{L}_0 depende da dimensão da interseção $\mathcal{R} := \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ dos sistemas restritos, e temos o seguinte lema.

Lema 9.2 A dimensão do sistema limite (degenerado) \mathcal{L}_0 , no caso em que os elementos em \mathcal{L}_0 provêm de uma seção em X_1 e uma seção em X_2 , ambas não vazias e compatíveis na interseção, é dada por

$$\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\mathcal{R}) + \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1) + \dim(\widehat{\mathcal{L}}_2) + 2,$$

onde $\mathcal{R} := \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ denota a interseção dos sistemas restritos $\mathcal{R}_1 := \mathcal{L}_1|_R$ e $\mathcal{R}_2 := \mathcal{L}_2|_R$ com $R = X_1 \cap X_2$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0|_{X_1}$ e $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_0|_{X_2}$, e $\widehat{\mathcal{L}}_1$ e $\widehat{\mathcal{L}}_2$ são como na Equação (9.1), no caso de uma (k, n_2) -degeneração como visto na Seção 9.1, ou são como na Equação (9.4), no caso de uma $(1, n_2, \beta)$ -degeneração como visto na Seção 9.2.

Demonstração: Suponha agora que \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 são ambos não vazios, considere o diagrama comutativo dado na Equação (9.3) e considere a sequência exata de sistemas lineares como dada na Equação (9.2). Para o caso $i = 1$, temos

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{L}}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_1|_R \longrightarrow 0,$$

onde $\widehat{\mathcal{L}}_1 = \ker(\mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_1|_R) = \ker(\beta_1)$. Para o caso $i = 2$, temos

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{L}}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2|_R \longrightarrow 0,$$

onde $\widehat{\mathcal{L}}_2 = \ker(\mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2|_R) = \ker(\beta_2)$. Como os elementos em \mathcal{L}_0 provêm de uma seção em X_1 e uma seção em X_2 , ambas não vazias e que são compatíveis na interseção, definamos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : \widehat{\mathcal{L}}_1(X_1) \times \widehat{\mathcal{L}}_2(X_2) &\longrightarrow \mathcal{L}_0(X_0) \\ (F_1, F_2) &\mapsto F, \text{ onde } F|_{X_i} = F_i \text{ para } i = 1, 2. \end{aligned}$$

Observe que $\widehat{\mathcal{L}}_1(X_1) \subset \mathcal{L}_0(X_1)$ e $\widehat{\mathcal{L}}_2(X_2) \subset \mathcal{L}_0(X_2)$. Além disso, Ψ é uma transformação linear injetiva bem definida com imagem $\widehat{\mathcal{L}}_R(X)$, isto é, $Im(\Psi) = \{F \in \mathcal{L}_0(X_0) \mid F|_R = 0\}$. De fato,

- Ψ é uma transformação linear injetiva:
 - Se $\Psi(F_1, F_2) = 0$, então $F_1|_R = 0$ e $F_2|_R = 0$, ou seja, $\ker(\Psi) = \{0\}$. Portanto, Ψ é injetiva.
 - Dados $F_1, F'_1 \in \widehat{\mathcal{L}}_1(X_1)$ e $F_2, F'_2 \in \widehat{\mathcal{L}}_2(X_2)$, existe $F \in \mathcal{L}_0(X_0)$ tal que $\Psi(F_1 + F'_1, F_2 + F'_2) = F$. Por outro lado, existem $G, G' \in \mathcal{L}_0(X_0)$ tais que $\Psi(F_1, F_2) = G$ e $\Psi(F'_1, F'_2) = G'$. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} F|_{X_1} &= F_1 + F'_1 = G|_{X_1} + G'|_{X_1} = (G + G')|_{X_1} \\ F|_{X_2} &= F_2 + F'_2 = G|_{X_2} + G'|_{X_2} = (G + G')|_{X_2}. \end{aligned}$$

Como Ψ é injetiva, temos que $F = G + G'$ e, assim,

$$\Psi(F_1 + F'_1, F_2 + F'_2) = \Psi(F_1, F_2) + \Psi(F'_1, F'_2).$$

Portanto, Ψ é uma transformação linear.

- $Im(\Psi) = \{F \in \mathcal{L}_0(X_0) \mid F|_R = 0\}$: De fato, por um lado sabemos que $Im(\Psi) \subset \{F \in \mathcal{L}_0(X_0) \mid F|_R = 0\}$. Por outro lado, se $(F|_{X_1})|_{X_2} = (F|_{X_2})|_{X_1} = F|_R = 0$, então $F|_{X_1} \in \widehat{\mathcal{L}}_2(X_2)$ e $F|_{X_2} \in \widehat{\mathcal{L}}_1(X_1)$, logo $\Psi(F|_{X_2}, F|_{X_1}) = F$, mostrando que $\{F \in \mathcal{L}_0(X_0) \mid F|_R = 0\} \subset Im(\Psi)$.
- Ψ está bem definida: Como $F_1 \in \ker(\beta_1)$, temos que $F_1|_R = 0$ e, como $F_2 \in \ker(\beta_2)$, temos que $F_2|_R = 0$, onde $R = X_1 \cap X_2$. Como as seções são compatíveis na interseção, devemos ter $F_1|_R = F_2|_R$ e pela Definição 6.3, existe uma única $F \in \mathcal{L}_0(X_0)$ tal que $F|_{X_1} = F_1$ e $F|_{X_2} = F_2$.

Neste caso, a dimensão de \mathcal{L}_0 depende da dimensão da interseção $\mathcal{R} := \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ dos sistemas restritos. Assim, uma seção de $H^0(X_0, \mathcal{L}_0)$ é obtida pegando um elemento em $H^0(R, \mathcal{R})$ e tomando pré-imagens de tal elemento, de modo que, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que $h^0(X_1, \widehat{\mathcal{L}}_1) + h^0(X_2, \widehat{\mathcal{L}}_2) = h^0(X_0, \mathcal{L}_0) - h^0(R, \mathcal{R})$, o que implica que

$$\begin{aligned} h^0(X_0, \mathcal{L}_0) &= h^0(R, \mathcal{R}) + h^0(X_1, \widehat{\mathcal{L}}_1) + h^0(X_2, \widehat{\mathcal{L}}_2) \Rightarrow \\ h^0(X_0, \mathcal{L}_0) - 1 &= h^0(R, \mathcal{R}) + h^0(X_1, \widehat{\mathcal{L}}_1) + h^0(X_2, \widehat{\mathcal{L}}_2) - 1 \Rightarrow \\ \dim(\mathcal{L}_0) &= h^0(R, \mathcal{R}) - 1 + h^0(X_1, \widehat{\mathcal{L}}_1) - 1 + h^0(X_2, \widehat{\mathcal{L}}_2) - 1 + 2 \\ &= \dim(\mathcal{R}) + \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1) + \dim(\widehat{\mathcal{L}}_2) + 2. \end{aligned}$$

■

Os casos mais simples ocorrem quando todos os elementos em \mathcal{L}_0 provêm de uma seção que é identicamente nula em uma das duas componentes, ou seja, um elemento de \mathcal{L}_0 é um elemento correspondendo a uma seção do feixe que é identicamente nula em X_1 (ou em X_2) e que dá um elemento geral em \mathcal{L}_2 (ou em \mathcal{L}_1 , respectivamente) contendo R como uma componente.

Neste caso, temos que as seções correspondentes de um sistema estão no núcleo da aplicação de restrição do outro, ou seja: as seções correspondentes de \mathcal{L}_1 estão no núcleo da aplicação de restrição de \mathcal{L}_2 quando os elementos de \mathcal{L}_0 provêm de uma seção que é identicamente nula em X_1 ; e quando os elementos de \mathcal{L}_0 provêm de uma seção que é identicamente nula em X_2 , então as seções correspondentes de \mathcal{L}_2 estão no núcleo da aplicação de restrição de \mathcal{L}_1 .

Para esse caso, com a mesma notação de antes temos o seguinte lema.

Lema 9.3 Se \mathcal{L}_1 ou \mathcal{L}_2 é vazio, isto é, $h^0(\mathcal{L}_1) = 0$ ou $h^0(\mathcal{L}_2) = 0$, respectivamente, então $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_2)$ ou $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$, respectivamente.

Demonstração: Fazemos a prova para o caso em que \mathcal{L}_1 é vazio, isto é, $h^0(\mathcal{L}_1) = 0$. Para o caso considerando \mathcal{L}_2 vazio, ou seja, $h^0(\mathcal{L}_2) = 0$, a prova segue de maneira análoga. Como \mathcal{L}_1 é vazio, isto é, $h^0(\mathcal{L}_1) = 0$, temos que a interseção \mathcal{R} dos sistemas restritos também é vazia, logo $h^0(\mathcal{R}) = 0$. Pelo Lema 9.2, temos que

$$\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\mathcal{R}) + \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1) + \dim(\widehat{\mathcal{L}}_2) + 2.$$

Como $h^0(\mathcal{L}_1) = 0$, temos que $h^0(\widehat{\mathcal{L}}_1) = 0$, disto segue que $\dim(\widehat{\mathcal{L}}_1) = -1$. Analogamente, como $h^0(\mathcal{R}) = 0$, segue que $\dim(\mathcal{R}) = -1$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{L}_0) &= \dim(\mathcal{R}) + \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1) + \dim(\widehat{\mathcal{L}}_2) + 2 \\ &= -1 - 1 + \dim(\widehat{\mathcal{L}}_2) + 2 \\ &= \dim(\widehat{\mathcal{L}}_2).\end{aligned}$$

■

9.4 Aplicando a Técnica da Dupla Degeneração

No que segue, iremos fazer uso apenas dos dois tipos de degenerações apresentadas anteriormente, nesse sentido passemos a considerá-las em detalhes agora. Escolhemos

$$k = r \quad \text{e} \quad n_2 = \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1). \quad (9.5)$$

Neste caso, temos que

$$v(\mathcal{L}_2) = \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1)(r + 1) - 1 - (r + 1) \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) = -1.$$

Dessa forma, o problema de estudar \mathcal{L} é transladado recursivamente para o problema de estudar o sistema linear de grau menor $\widehat{\mathcal{L}}_1 = \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1}, d_{r-r-1})}(2^{n_1})$ que tem a mesma dimensão virtual. Este método será útil para se analisar alguns casos particulares de r e aplicar a indução no multigrado (d_1, \dots, d_r) , uma vez provado os casos base da indução, isto é, casos quaisquer de (d_1, \dots, d_r) com $d_1 \leq \dots \leq d_r \leq r + 1$ são previamente analisados.

Contudo, nosso objetivo se concentra em cobrir todos os casos de sistemas lineares das hipersuperfícies de qualquer multigrado $(\mathbb{P}^1)^r$, para qualquer r . Para isso, queremos explorar a indução não somente no multigrado, mas também em r . Isto pode ser feito aplicando a dupla degeneração como descrita na Seção 9.2. Este argumento consiste em uma adaptação da técnica de degeneração encontrada em [28] para provar a não especialidade de sistemas lineares das hipersuperfícies de grau d em \mathbb{P}^r com uma coleção geral de pontos duplos.

Escolhemos k, n_2, β inteiros como segue

$$k = 1 \quad \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) = r(n_2 - \beta) + \beta, \quad \beta \in \{0, \dots, r - 1\} \quad (9.6)$$

e realizamos uma dupla degeneração de $X(\mathcal{L})$ como descrito acima, na Seção 9.2. Vale notar que os elementos de $\widehat{\mathcal{L}}_2$ estão em bijeção com os elementos de $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(2^{n_2 - \beta}, 1^\beta)$, que é o sistema linear das hipersuperfícies de $|\mathcal{O}(d_1, \dots, d_{r-1})|$ em $(\mathbb{P}^1)^{r-1}$ singulares em $n_2 - \beta$ pontos e passando através de β pontos simples, todos em posição geral. Assim, temos que

$$\widehat{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1}, 0)}(2^{n_2 - \beta}, 1^\beta) \cong \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(2^{n_2 - \beta}, 1^\beta).$$

Pela definição de como os inteiros n_2 e β são escolhidos, dados na Equação (9.6), temos que

$$\begin{aligned}
v(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(2^{n_2-\beta}, 1^\beta)) &= \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) - 1 - ((r-1) + 1)(n_2 - \beta) - \beta \\
&= \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) - 1 - (r(n_2 - \beta) + \beta) \\
&= \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) - 1 - \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Considere $\pi_r : (\mathbb{P}^1)^r \rightarrow (\mathbb{P}^1)^{r-1}$ a projeção nos primeiros $r-1$ fatores. Como os elementos de \mathcal{L}_2 contém as retas $\pi_r^{-1}(p_i)$ através de cada um dos n_2 pontos duplos p_i de X_2 , temos que

$$\mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(1^{n_2-\beta}, 2^\beta).$$

Lema 9.4 Seja \mathcal{R}_2 como acima. Se $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(2^{n_2})$ é não especial, então \mathcal{R}_2 é não especial.

Demonstração: Como $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(2^{n_2})$ é não especial, então $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(2^{n_2}, 1^\beta)$ também é não especial, devido ao fato de que os β pontos simples estão em posição geral (ver Teorema 7.2). Considere a seguinte sequência exata de sistemas lineares:

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{L}}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{R}_2 \longrightarrow 0.$$

Como $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(2^{n_2}, 1^\beta)$ é não especial de dimensão virtual -1 , ele é vazio. Portanto, $\widehat{\mathcal{L}}_2$ é vazio, de modo que \mathcal{R}_2 é o sistema linear completo $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(1^{n_2-\beta}, 2^\beta)$ obtido pela restrição de \mathcal{L}_2 em R , onde R denota a interseção. Como $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(2^{n_2}, 1^\beta)$ é não especial, temos que $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(1^{n_2-\beta}, 2^\beta)$ também é não especial. Dessa forma, como $\mathcal{R}_2 = \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(1^{n_2-\beta}, 2^\beta)$, segue que \mathcal{R}_2 é não especial. ■

Lema 9.5 Na mesma notação de antes, se o sistema linear $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-k})}(2^{n_1+\beta})$ é não especial para $n_1 + \beta$ pontos duplos em posição geral, então

$$\dim(\mathcal{R}) = \max\{\dim(\mathcal{R}_1) - (n_2 - \beta) - r\beta, -1\}.$$

Demonstração: Ver Lema 5.4 de [22]. ■

10 Teorema Principal

Neste capítulo, provaremos o Teorema 3.1 de [22], artigo norteador de todo esse trabalho, provando a não especialidade ou a especialidade do sistema $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$, conforme o Teorema de Classificação dado abaixo.

Teorema 10.1 (Teorema de Classificação) O sistema linear $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$ de $(\mathbb{P}^1)^r$ é não especial exceto nos seguintes casos

r	<i>grau</i>	n	$v(\mathcal{L})$	$\dim(\mathcal{L})$
2	$(2, 2a)$	$2a + 1$	-1	0
3	$(1, 1, 2a)$	$2a + 1$	-1	0
	$(2, 2, 2)$	7	-2	0
4	$(1, 1, 1, 1)$	3	0	1

10.1 Sistemas Especiais

Nesta seção estamos interessados em estudar a especialidade dos sistemas descritos nas excessões do Teorema de Classificação 10.1, investigando a dimensão dos mesmos. No que segue, faremos uso da seguinte equação, provada em [7]

$$\dim \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n) = \dim \mathcal{L}_d(d - d_1, \dots, d - d_r, 2^n), \quad (10.1)$$

onde $d = d_1 + \dots + d_r$ e os elementos do sistema do lado direito da igualdade são hiper-superfícies de \mathbb{P}^r com r pontos de multiplicidade $d - d_1, \dots, d - d_r$ respectivamente e n pontos duplos, todos em posição geral.

A dimensão de cada um dos sistemas especiais pode ser encontrada pelo uso repetido da Equação (10.1). Além disso, usaremos também o seguinte fato provado em [21]:

$$\dim \mathcal{L}_d(m_1, \dots, m_{r+1}, m_{r+2}, \dots, m_n) = \dim \mathcal{L}_{d+k}(m_1 + k, \dots, m_{r+1} + k, m_{r+2}, \dots, m_n), \quad (10.2)$$

onde $k = (r - 1)d - m_1 - \dots - m_{r+1}$ e $d = d_1 + \dots + d_r$.

Caso 2-dimensional

Aplicando as Equações (10.1) e (10.2) ao sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(2,2a)}(2^{2a+1})$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \dim \mathcal{L}_{(2,2a)}(2^{2a+1}) &\stackrel{(10.1)}{=} \dim \mathcal{L}_{2a+2}(2a, 2, 2^{2a+1}) \\
 &= \dim \mathcal{L}_{2a+2}(2a, 2^{2a+2}) \\
 &\stackrel{(10.2)}{=} \dim \mathcal{L}_{2a}(2a-2, 2^{2a}) \\
 &= \dim \mathcal{L}_{2a}(2(a-1), 2^{2a}) \\
 &\stackrel{(10.2)}{=} \dim \mathcal{L}_{2a-2}(2(a-2), 2^{2(a-1)}) \\
 &\quad \vdots \\
 &\stackrel{(10.2)}{=} \dim \mathcal{L}_2(2^2) = 0.
 \end{aligned}$$

Expliquemos a última igualdade. O espaço das quádricas em \mathbb{P}^2 tem dimensão $\binom{2+2}{2} - 1 = 5$. Logo, podemos considerar

$$F = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_0x_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2,$$

onde $(a : b : c : d : e : f) \in \mathbb{P}^5$. Sejam $p = (1 : 0 : 0)$ e $q = (0 : 0 : 1)$ pontos gerais de \mathbb{P}^2 . Ao adicionarmos o ponto p com multiplicidade dois, exigimos que $F(p) = 0$ e $\nabla F(p) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
 F(p) = 0 &\Rightarrow a = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) = 0 &\Rightarrow a = 0; \\
 \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) = 0 &\Rightarrow b = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_2}(p) = 0 &\Rightarrow c = 0.
 \end{aligned}$$

Com isso, o sistema linear com um ponto duplo é da forma

$$\mathcal{L}_2(2) = \{F = dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2 \mid (d : e : f) \in \mathbb{P}^2\} \cong \mathbb{P}^2.$$

Agora, ao impormos o ponto q , também com multiplicidade dois, exigimos que $F(q) = 0$ e $\nabla F(q) = 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 F(q) = 0 &\Rightarrow d = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_0}(q) = 0 &\Rightarrow b = 0; \\
 \frac{\partial F}{\partial x_1}(q) = 0 &\Rightarrow d = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_2}(q) = 0 &\Rightarrow e = 0.
 \end{aligned}$$

Com isso, o sistema linear com dois pontos duplos é da forma

$$\mathcal{L}(2^2) = \{F = fx_2^2 \mid (f) \in \mathbb{P}^0\} \cong \mathbb{P}^0.$$

Geometricamente, temos uma reta conectando os dois pontos p e q . Portanto, ao adicionarmos dois pontos duplos, impomos $2 \cdot (2 + 1) - 1 = 5$ condições independentes ao sistema, e a dimensão fica $\dim \mathcal{L} = 5 - 5 = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}
 v(\mathcal{L}) &= (2 + 1)(2a + 1) - 1 - (2 + 1)(2a + 1) \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

Como a dimensão virtual do sistema \mathcal{L} é igual a -1 , temos que a dimensão esperada do sistema dada por $e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\}$ é -1 . Como $\dim \mathcal{L} = 0$, temos que $\dim \mathcal{L} > e(\mathcal{L})$, logo o sistema é especial. Isso mostra a especialidade do sistema $\mathcal{L}_{(2,2a)}(2^{2a+1})$.

Caso 3-dimensional

Caso $(d_1, d_2, d_3) = (1, 1, 2a)$

Aplicando as Equações (10.1) e (10.2) ao sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1,2a)}(2^{2a+1})$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \dim \mathcal{L}_{(1,1,2a)}(2^{2a+1}) &\stackrel{(10.1)}{=} \dim \mathcal{L}_{2a+2}(2a+1, 2a+1, 2, 2^{2a+1}) \\
 &= \dim \mathcal{L}_{2a+2}((2a+1)^2, 2^{2(a+1)}) \\
 &\stackrel{(10.2)}{=} \dim \mathcal{L}_{2a}((2a-1)^2, 2^{2a}) \\
 &\stackrel{(10.2)}{=} \dim \mathcal{L}_{2a-2}((2a-3)^2, 2^{2(a-1)}) \\
 &\quad \vdots \\
 &\stackrel{(10.2)}{=} \dim \mathcal{L}_2(1^2, 2^2) = 0.
 \end{aligned}$$

Expliquemos a última igualdade. O espaço das quádricas em \mathbb{P}^3 tem dimensão $\binom{3+2}{2} - 1 = 9$. Logo, podemos considerar

$$F = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_0x_2 + dx_0x_3 + ex_1^2 + fx_1x_2 + gx_1x_3 + hx_2^2 + ix_2x_3 + jx_3^2,$$

onde $(a : b : c : d : e : f : g : h : i : j) \in \mathbb{P}^9$. Sejam $p = (1 : 0 : 0 : 0)$ e $q = (0 : 0 : 0 : 1)$ pontos gerais de \mathbb{P}^3 . Ao adicionarmos o ponto p com multiplicidade dois, exigimos que $F(p) = 0$ e $\nabla F(p) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
 F(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) = 0 \Rightarrow a = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) = 0 \Rightarrow b = 0; \\
 \frac{\partial F}{\partial x_2}(p) = 0 \Rightarrow c = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_3}(p) = 0 \Rightarrow d = 0.
 \end{aligned}$$

Com isso, o sistema linear com um ponto duplo é da forma

$$\mathcal{L}_2(2) = \{F = ex_1^2 + fx_1x_2 + gx_1x_3 + hx_2^2 + ix_2x_3 + jx_3^2 \mid (e : f : g : h : i : j) \in \mathbb{P}^5\} \cong \mathbb{P}^5.$$

Agora, ao impormos o ponto q , também com multiplicidade dois, exigimos que $F(q) = 0$ e $\nabla F(q) = 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 F(q) = 0 \Rightarrow j = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(q) = 0 \Rightarrow d = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(q) = 0 \Rightarrow g = 0; \\
 \frac{\partial F}{\partial x_2}(q) = 0 \Rightarrow i = 0; & \quad \frac{\partial F}{\partial x_3}(q) = 0 \Rightarrow j = 0.
 \end{aligned}$$

Com isso, o sistema linear com dois pontos duplos é da forma

$$\mathcal{L}(2^2) = \{F = ex_1^2 + fx_1x_2 + hx_2^2 \mid (e : f : h) \in \mathbb{P}^2\} \cong \mathbb{P}^2.$$

Geometricamente, temos uma reta conectando os dois pontos p e q , reta esta que é a interseção de dois planos π_1 e π_2 . Portanto, ao adicionarmos dois pontos duplos, impomos $2 \cdot (3+1) - 1 = 7$ condições independentes ao sistema, e a dimensão fica $\dim \mathcal{L} = 9 - 7 = 2$. Ao adicionarmos os dois pontos simples, exigimos apenas que F se anule nesses pontos,

e impomos $2 \cdot 1 = 2$ condições independentes adicionais ao sistema, e a dimensão fica $\dim \mathcal{L} = 2 - 2 = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}) &= (1+1)(1+1)(2a+1) - 1 - (3+1)(2a+1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Como a dimensão virtual do sistema \mathcal{L} é igual a -1 , temos que a dimensão esperada do sistema dada por $e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\}$ é -1 . Como $\dim \mathcal{L} = 0$, temos que $\dim \mathcal{L} > e(\mathcal{L})$, logo o sistema é especial. Isso mostra a especialidade do sistema $\mathcal{L}_{(1,1,2a)}(2^{2a+1})$.

Caso $(d_1, d_2, d_3) = (2, 2, 2)$

Aplicando as Equações (10.1) e (10.2) ao sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(2,2,2)}(2^7)$, obtemos

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}_{(2,2,2)}(2^7) &\stackrel{(10.1)}{=} \dim \mathcal{L}_6(4, 4, 4, 2^7) \\ &= \dim \mathcal{L}_6(4^3, 2^7) \\ &\stackrel{(10.2)}{=} \dim \mathcal{L}_4(2^3, 2^6) \\ &= \dim \mathcal{L}_4(2^9) = 0. \end{aligned}$$

Explicamos a última igualdade. O espaço das quádricas em \mathbb{P}^3 tem dimensão $\binom{3+2}{2} - 1 = 9$. Pelo Teorema 7.2, o sistema linear $\mathcal{L}_2(1^9)$ é não especial em \mathbb{P}^3 . Como os 9 pontos simples estão em posição geral, eles impõe $\binom{3+2}{2} - 1$ condições lineares independentes ao sistema, de modo que

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_2(1^9)) &= \binom{3+2}{2} - 1 - \left(\binom{3+2}{2} - 1 \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}_2(1^9)$ é não especial, temos que $\dim(\mathcal{L}_2(1^9)) = e(\mathcal{L}_2(1^9))$. Como $e(\mathcal{L}_2(1^9)) = \max\{v(\mathcal{L}_2(1^9)), -1\}$ e $v(\mathcal{L}_2(1^9)) = 0$, obtemos que

$$\dim(\mathcal{L}_2(1^9)) = e(\mathcal{L}_2(1^9)) = \max\{v(\mathcal{L}_2(1^9)), -1\} = \max\{0, -1\} = 0.$$

Como $\dim(\mathcal{L}_2(1^9)) = 0$, temos que $\mathcal{L}_2(1^9)$ é não vazio, assim existe $F \in \mathcal{L}_2(1^9)$. Com efeito, obteremos que $F^2 \in \mathcal{L}_4(2^9)$ e assim, $\dim(\mathcal{L}_4(2^9)) \geq 0$, ou seja, $\mathcal{L}_4(2^9)$ é não vazio. Além disso,

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}) &= (2+1)(2+1)(2+1) - 1 - (3+1) \cdot 7 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Como a dimensão virtual do sistema \mathcal{L} é igual a -2 , temos que a dimensão esperada do sistema dada por $e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\}$ é -1 , ou seja, era esperado que o sistema fosse vazio, o que não ocorre. Como $\dim \mathcal{L} \geq 0$, temos que $\dim \mathcal{L} > e(\mathcal{L})$, logo o sistema é especial. Isso mostra a especialidade do sistema $\mathcal{L}_{(2,2,2)}(2^7)$. Esse sistema é conhecido de [28] e [4], onde os autores mostram a especialidade do mesmo. Além disso, [24] também apresenta uma prova mais detalhada da especialidade do sistema $\mathcal{L}_4(2^9)$.

Caso 4-dimensional

Aplicando as Equações (10.1) e (10.2) ao sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1,1,1)}(2^3)$, obtemos

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}_{(1,1,1,1)}(2^3) &\stackrel{(10.1)}{=} \dim \mathcal{L}_4(3, 3, 3, 3, 2^3) \\ &= \dim \mathcal{L}_4(3^4, 2^3) \\ &\stackrel{(10.2)}{=} \dim \mathcal{L}_2(1^4, 2^2) = 1. \end{aligned}$$

Expliquemos a última igualdade. O espaço das quádricas em \mathbb{P}^4 tem dimensão $\binom{4+2}{2} - 1 = 14$. Logo, podemos considerar $F = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_0x_2 + dx_0x_3 + ex_0x_4 + fx_1^2 + gx_1x_2 + hx_1x_3 + ix_1x_4 + jx_2^2 + kx_2x_3 + lx_2x_4 + mx_3^2 + nx_3x_4 + ox_4^2$, onde $(a : b : c : d : e : f : g : h : i : j : k : l : m : n : o) \in \mathbb{P}^{14}$. Sejam $p = (1 : 0 : 0 : 0 : 0)$ e $q = (0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ pontos gerais de \mathbb{P}^4 . Ao adicionarmos o ponto p com multiplicidade dois exigimos que $F(p) = 0$ e $\nabla F(p) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} F(p) = 0 &\Rightarrow a = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) = 0 &\Rightarrow a = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) = 0 &\Rightarrow b = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(p) = 0 &\Rightarrow c = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_3}(p) = 0 &\Rightarrow d = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_4}(p) = 0 &\Rightarrow e = 0. \end{aligned}$$

Com isso, o sistema linear com um ponto duplo é da forma

$$\mathcal{L}_2(2) = \{F = fx_1^2 + gx_1x_2 + hx_1x_3 + ix_1x_4 + jx_2^2 + kx_2x_3 + lx_2x_4 + mx_3^2 + nx_3x_4 + ox_4^2 \mid (f : g : h : i : j : k : l : m : n : o) \in \mathbb{P}^9\} \cong \mathbb{P}^9.$$

Agora, ao impormos o ponto q , também com multiplicidade dois, exigimos que $F(q) = 0$ e $\nabla F(q) = 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} F(q) = 0 &\Rightarrow o = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_0}(q) = 0 &\Rightarrow e = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_1}(q) = 0 &\Rightarrow i = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(q) = 0 &\Rightarrow l = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_3}(q) = 0 &\Rightarrow n = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_4}(q) = 0 &\Rightarrow o = 0. \end{aligned}$$

Com isso, o sistema linear com dois pontos duplos é da forma

$$\mathcal{L}_2(2^2) = \{F = fx_1^2 + gx_1x_2 + hx_1x_3 + jx_2^2 + kx_2x_3 + mx_3^2 \mid (f : g : h : j : k : m) \in \mathbb{P}^5\} \cong \mathbb{P}^5.$$

Portanto, ao adicionarmos dois pontos duplos, impomos $2 \cdot (4 + 1) - 1 = 9$ condições independentes ao sistema, e a dimensão fica $\dim \mathcal{L} = 14 - 9 = 5$. Ao adicionarmos os quatro pontos simples, exigimos apenas que F se anule nesses pontos, e impomos $4 \cdot 1 = 4$ condições independentes adicionais ao sistema, e a dimensão fica $\dim \mathcal{L} = 5 - 4 = 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}) &= (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) - 1 - (4 + 1) \cdot 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como a dimensão virtual do sistema \mathcal{L} é igual a 0, temos que a dimensão esperada do sistema dada por $e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\}$ é 0. Como $\dim \mathcal{L} = 1$, temos que $\dim \mathcal{L} > e(\mathcal{L})$, logo o sistema é especial. Isso mostra a especialidade do sistema $\mathcal{L}_{(1,1,1,1)}(2^3)$. Essa especialidade também pode ser notada no Exemplo 5.21, onde vimos que $SV_{(1,1,1,1)}^{(1,1,1,1)}$ é 3-defeituosa e, portanto é defeituosa.

10.2 Sistemas Não Especiais

Nesta seção estamos interessados em provar a não especialidade dos sistemas descritos no Teorema 10.1 investigando a dimensão dos mesmos. Para estudarmos a não especialidade dos sistemas faremos indução no multigrau e na dimensão r da variedade. Para isso, defina os inteiros

$$n^- := \left\lfloor \frac{1}{r+1} \prod_{i=1}^r (d_i + 1) \right\rfloor \quad \text{e} \quad n^+ := \left\lceil \frac{1}{r+1} \prod_{i=1}^r (d_i + 1) \right\rceil. \quad (10.3)$$

Lembrando das definições de teto e piso, temos que $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x e $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x , podemos enunciar o seguinte resultado.

Lema 10.1 Se $x \in \mathbb{R}$, então vale que

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

onde $\lfloor x \rfloor$ denota o piso de x e $\lceil x \rceil$ denota o teto de x .

Demonstração: As relações $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$ seguem da definição de teto e piso. Mostremos que $\lceil x \rceil < x + 1$. Suponha, por absurdo, que $\lceil x \rceil \geq x + 1$. Observe inicialmente que,

$$\lceil x \rceil + 1 = \lceil x + 1 \rceil \geq x + 1.$$

Assim, segue que

$$\lceil x \rceil + 1 - \lceil x \rceil \leq x + 1 - (x + 1) \Rightarrow 1 \leq 0. \text{ Absurdo!}$$

Portanto, devemos ter $\lceil x \rceil < x + 1$. De maneira análoga, mostra-se que $x - 1 < \lfloor x \rfloor$. ■

Observe que, se a não especialidade valer para uma coleção de n^- pontos duplos, então vale para um número menor de pontos duplos. Por outro lado, se não houver hipersuperfícies de multigrau (d_1, \dots, d_r) com n^+ pontos duplos gerais, o mesmo vale adicionando mais pontos duplos. Logo, é suficiente analisar os casos $n^- \leq n \leq n^+$. Note que isso é só um (se $n^- = n^+$) ou dois (se $n^- = n^+ - 1$) casos.

Casos Base da Indução

Para provarmos o Teorema 10.1, consideremos os seguintes sistemas, que usaremos como casos base para a indução, dados com multigrau (d_1, \dots, d_r) como segue:

Tabela 10.1: Casos Base de Indução

r	$grau$	
2	$(d_1, d_2) \neq (2, 2a)$	$1 \leq d_1 \leq d_2 \leq 6$
3	$(d_1, d_2, d_3) \neq (1, 1, 2a); (2, 2, 2)$	$1 \leq d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq 5$
4	$(d_1, d_2, d_3, d_4) \neq (1, 1, 1, 1)$	$1 \leq d_1 \leq \dots \leq d_4 \leq 2$
4	$(1, 1, d_3, d_4)$	$1 \leq d_3 \leq d_4 \leq 5$
4	$(2, 2, 2, d_4)$	$1 \leq d_4 \leq 5$
5	$(1, 1, 1, 1, d_5)$	$1 \leq d_5 \leq 6$

Proposição 10.1 Sejam d_1, \dots, d_r inteiros positivos dados como na Tabela 10.1 acima. Então $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$ é não especial para qualquer valor de n .

Demonstração: Note que há um número finito de casos listados, portanto podemos checar computacionalmente. Usando o programa do *software Mathematica* dado por [25] disponível em https://github.com/Vinicius22111997/Politopo_Simplexo_Algoritmo.git, exaurimos todas as possibilidades da tabela concluindo que os sistemas dados são não especiais com as respectivas excessões. Abaixo, apresentamos o comando, a saída e o tempo de computação para cada caso da tabela. A saída garante a não especialidade do sistema, porque o programa retorna quais variedades de Segre-Veronese não são defeituosas. Por exemplo, a saída dada por $\{\{\{1, 1\}, \{1, 2\}\}\}$ significa que a Segre-Veronese dada pelo mergulho de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ com bigrau $(d_1, d_2) = (1, 2)$ não é defeituosa. Assim, o sistema $\mathcal{L}_{(1,2)}^{(2^n)}$ é não especial no caso em que $r = 2$.

- CASO $r = 2$

Para o caso $(d_1, d_2) \neq (2, 2a)$ com $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq 6$, temos

```
QNDefeituosas[Flatten[Table[Table[{{1,1}, {d1,d2}}, {d2,d1,6}], {d1,1,6}], 1], 5]
Saída:
{{{1,1},{1,1}}, {{1,1},{1,2}}, {{1,1},{1,3}}, {{1,1},{1,4}}, {{1,1},{1,5}},
{{1,1},{1,6}}, {{1,1},{2,3}}, {{1,1},{2,5}}, {{1,1}, {3,3}}, {{1,1},{3,4}},
{{1,1},{3,5}}, {{1,1},{3,6}}, {{1,1},{4,4}}, {{1,1},{4,5}}, {{1,1},{4,6}},
{{1,1},{5,5}}, {{1,1},{5,6}}, {{1,1},{6,6}}
Time: 7.2187 segundos
```

- CASO $r = 3$

Para o caso $(d_1, d_2, d_3) \neq (1, 1, 2a), (2, 2, 2)$ com $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq 5$, temos

```
QNDefeituosas[Flatten[Table[Flatten[Table[Table[{{1,1,1}, {d1,d2,d3}}, {d3,d2,5}],
{d2,d1,5}], 1], {d1,1,5}], 1], 5]
Saída:
{{{1,1,1},{1,1,1}}, {{1,1,1},{1,1,3}}, {{1,1,1},{1,1,5}}, {{1,1,1},{1,2,2}},
{{1,1,1},{1,2,3}}, {{1,1,1},{1,2,4}}, {{1,1,1},{1,2,5}}, {{1,1,1},{1,3,3}},
{{1,1,1},{1,3,4}}, {{1,1,1},{1,3,5}}, {{1,1,1},{1,4,4}}, {{1,1,1},{1,4,5}},
{{1,1,1},{1,5,5}}, {{1,1,1},{2,2,3}}, {{1,1,1},{2,2,4}}, {{1,1,1},{2,2,5}},
{{1,1,1},{2,3,3}}, {{1,1,1},{2,3,4}}, {{1,1,1},{2,3,5}}, {{1,1,1},{2,4,4}},
{{1,1,1},{2,4,5}}, {{1,1,1},{2,5,5}}, {{1,1,1},{3,3,3}}, {{1,1,1},{3,3,4}},
{{1,1,1},{3,3,5}}, {{1,1,1},{3,4,4}}, {{1,1,1},{3,4,5}}, {{1,1,1},{3,5,5}},
{{1,1,1},{4,4,4}}, {{1,1,1},{4,4,5}}, {{1,1,1},{4,5,5}}, {{1,1,1},{5,5,5}}
Time: 278.7190 segundos
```

- CASO $r = 4$

Para o caso $(d_1, d_2, d_3, d_4) \neq (1, 1, 1, 1)$ com $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4 \leq 2$, temos

```
QNDefeituosas[Flatten[Table[Flatten[Table[Flatten[Table[Table[{{1,1,1,1},
{d1,d2,d3,d4}}, {d4,d3,2}], {d3,d2,2}], 1], {d2,d1,2}], 1], {d1,1,2}], 1], 5]
Saída:
{{{1,1,1,1},{1,1,1,2}}, {{1,1,1,1},{1,1,2,2}}, {{1,1,1,1},{1,2,2,2}},
{{1,1,1,1},{2,2,2,2}}
Time: 7.9844 segundos
```

- CASO $r = 4$

Para o caso $(1, 1, d_3, d_4)$ com $1 \leq d_3 \leq d_4 \leq 5$, temos

```
QNDefeituosas[Flatten[Table[Table[{{1,1,1,1}, {1,1,d3,d4}}, {d4,d3,5}],
{d3,1,5}], 1], 5]
```

Saída:

```
{{{1,1,1,1},{1,1,1,2}}, {{1,1,1,1},{1,1,1,3}}, {{1,1,1,1},{1,1,1,4}},
{{1,1,1,1},{1,1,1,5}}, {{1,1,1,1},{1,1,2,2}}, {{1,1,1,1},{1,1,2,3}},
{{1,1,1,1},{1,1,2,4}}, {{1,1,1,1},{1,1,2,5}}, {{1,1,1,1},{1,1,3,3}},
{{1,1,1,1},{1,1,3,4}}, {{1,1,1,1},{1,1,3,5}}, {{1,1,1,1},{1,1,4,4}},
{{1,1,1,1},{1,1,4,5}}, {{1,1,1,1},{1,1,5,5}}}
```

Time: 158.8130 segundos

- CASO $r = 4$

Para o caso $(2, 2, 2, d_4)$ com $1 \leq d_4 \leq 5$, temos

```
QNDefeituosas[Table[{{1,1,1,1}, {2,2,2,d4}}, {d4,1,5}], 5]
```

Saída:

```
{{{1,1,1,1},{2,2,2,1}}, {{1,1,1,1},{2,2,2,2}}, {{1,1,1,1},{2,2,2,3}},
{{1,1,1,1},{2,2,2,4}}, {{1,1,1,1},{2,2,2,5}}}
```

Time: 215.1410 segundos

- CASO $r = 5$

Para o caso $(1, 1, 1, 1, d_5)$ com $1 \leq d_5 \leq 6$, temos

```
QNDefeituosas[Table[{{1,1,1,1,1}, {1,1,1,1,d5}}, {d5,1,6}], 5]
```

Saída:

```
{{{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1}}, {{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,2}},
{{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,3}}, {{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,4}},
{{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,5}}, {{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,6}}}
```

Time: 150.0630 segundos

■

No que segue, passaremos a provar a não especialidade dos sistemas considerando suas respectivas excessões. Para simplificar a escrita dos argumentos por indução, em alguns casos não usamos a convenção de que $d_1 \leq \dots \leq d_r$, visto que $d_1 \leq d_2$ não implica que $d_1 \leq d_2 - 1$ em geral, isso para o caso 2-dimensional. Antes porém, façamos a prova dos seguintes lemas técnicos auxiliares que serão usados frequentemente nas demonstrações que seguem.

Lema 10.2 Se $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial, $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$ e $v(\mathcal{L}) = v(\widehat{\mathcal{L}}_1)$, então \mathcal{L} é não especial.

Demonstração: Se $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial, então $\dim(\widehat{\mathcal{L}}_1) = e(\widehat{\mathcal{L}}_1) = \max\{v(\widehat{\mathcal{L}}_1), -1\}$. Assim, temos dois casos a analisar:

- CASO 01: $e(\widehat{\mathcal{L}}_1) = -1$. Se $e(\widehat{\mathcal{L}}_1) = -1$, então $\dim(\widehat{\mathcal{L}}_1) = -1$. Como $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$, segue que $\dim(\mathcal{L}_0) = -1$. Pela semicontinuidade superior, temos que $\dim(\mathcal{L}_0) \geq \dim(\mathcal{L})$. Como $\dim(\mathcal{L}_0) = -1$, segue que $\dim(\mathcal{L}) \leq -1$. Por outro lado, temos também que $\dim(\mathcal{L}) \geq -1$. Assim, concluímos que $\dim(\mathcal{L}) = -1$, logo o sistema é vazio, ou seja $h^0(\mathcal{L}) = 0$ e, pelo Teorema 7.1, segue que \mathcal{L} é não especial.
- CASO 02: $e(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Se $e(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\widehat{\mathcal{L}}_1)$, então $\dim(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Como $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$, $\dim(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\widehat{\mathcal{L}}_1)$ e $v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L})$, segue que

$$\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L}).$$

Como $\dim(\mathcal{L}_0) \geq -1$ e $\dim(\mathcal{L}_0) = v(\mathcal{L})$, segue que $v(\mathcal{L}) \geq -1$. Assim,

$$e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\} = v(\mathcal{L}).$$

Logo,

$$\dim(\mathcal{L}_0) = v(\mathcal{L}) = e(\mathcal{L}).$$

Portanto, pelo Lema 9.1, temos que \mathcal{L} é não especial. ■

Lema 10.3 Se \mathcal{L} é não especial e $v(\mathcal{L}) = -1$, então \mathcal{L} é vazio.

Demonstração: De fato, se \mathcal{L} é não especial, então $\dim(\mathcal{L}) = e(\mathcal{L})$. Como $e(\mathcal{L}) = \max\{v(\mathcal{L}), -1\}$, segue que $\dim(\mathcal{L}) = -1$. Assim, $h^0(\mathcal{L}) = \dim(\mathcal{L}) + 1 = -1 + 1 = 0$. Logo, \mathcal{L} é vazio. ■

Caso 2-dimensional

Seja $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(d_1, d_2)}(2^n)$. Mostremos que \mathcal{L} é não especial, exceto no caso em que $(d_1, d_2) = (2, 2a)$.

Proposição 10.2 O sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1, d)}(2^n)$ é não especial para qualquer $d \geq 1$.

Demonstração: Se $d = 1$, $d = 2$ ou $d = 3$ então \mathcal{L} é não especial, como vimos nos Exemplos 5.13, 5.14 e 5.16, respectivamente. Suponha então $d \geq 4$. Fazendo uma $(2, 2)$ -degeneração de \mathcal{L} , obtemos os sistemas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(1, d-2)}(2^{n-2}) & \text{e} & & \mathcal{L}_2 &:= \mathcal{L}_{(1, 2)}(2^2) \\ \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(1, d-3)}(2^{n-2}) & \text{e} & & \widehat{\mathcal{L}}_2 &:= \mathcal{L}_{(1, 1)}(2^2). \end{aligned}$$

Pela Equação (7.1), encontramos que

$$\bullet \quad v(\mathcal{L}_2) = (1+1)(2+1) - 1 - (2+1) \cdot 2 = -1.$$

Além disso, também pela Equação (7.1), temos que

$$\begin{aligned} v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (1+1)[(d-3)+1] - 1 - (2+1) \cdot (n-2) \\ &= (1+1)(d+1) - 1 - (2+1)n \\ &= v(\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Assim, temos que $v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L})$. Note que \mathcal{L}_2 é não especial pois é um dos casos base da indução da Proposição 10.1. Pelo Lema 10.3, \mathcal{L}_2 é vazio. Assim, pelo Lema 9.3, $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Portanto, pelo Lema 10.2, temos que \mathcal{L} é não especial. ■

Proposição 10.3 O sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(2, d)}(2^n)$ é não especial se, e somente se, $d \geq 1$ é ímpar.

Demonstração: Se $d = 1$, então \mathcal{L} é não especial, pela Proposição 10.2. Suponha então $d \geq 3$ ímpar. Fazendo uma $(1, 2)$ -degeneração de \mathcal{L} , obtemos os sistemas

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(2,d-1)}(2^{n-2}) & \text{e} & & \mathcal{L}_2 &:= \mathcal{L}_{(2,1)}(2^2) \\ \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(2,d-2)}(2^{n-2}) & \text{e} & & \widehat{\mathcal{L}}_2 &:= \mathcal{L}_{(2,0)}(2^2).\end{aligned}$$

Pela Equação (7.1), encontramos que

$$\bullet v(\mathcal{L}_2) = (2+1)(1+1) - 1 - (2+1) \cdot 2 = -1.$$

Além disso, também pela Equação (7.1), temos que

$$\begin{aligned}v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (2+1)[(d-2)+1] - 1 - (2+1) \cdot (n-2) \\ &= (2+1)(d+1) - 1 - (2+1)n \\ &= v(\mathcal{L}).\end{aligned}$$

Assim, temos que $v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L})$. Note que \mathcal{L}_2 é não especial pois é um dos casos base da indução da Proposição 10.1. Pelo Lema 10.3, \mathcal{L}_2 é vazio. Assim, pelo Lema 9.3, $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Portanto, pelo Lema 10.2, temos que \mathcal{L} é não especial. ■

Proposição 10.4 O sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(3,d)}(2^n)$ é não especial para qualquer $d \geq 1$.

Demonstração: Se $1 \leq d \leq 6$, então \mathcal{L} é não especial, porque é um dos casos base da Proposição 10.1. Assumamos então $d \geq 7$. Fazendo uma (2, 4)-degeneração de \mathcal{L} , obtemos os sistemas

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(3,d-2)}(2^{n-4}) & \text{e} & & \mathcal{L}_2 &:= \mathcal{L}_{(3,2)}(2^4) \\ \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(3,d-3)}(2^{n-4}) & \text{e} & & \widehat{\mathcal{L}}_2 &:= \mathcal{L}_{(3,1)}(2^4).\end{aligned}$$

Pela Equação (7.1), encontramos que

$$\bullet v(\mathcal{L}_2) = (3+1)(2+1) - 1 - (2+1) \cdot 4 = -1.$$

Além disso, também pela Equação (7.1), temos que

$$\begin{aligned}v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (3+1)[(d-3)+1] - 1 - (2+1) \cdot (n-4) \\ &= (3+1)(d+1) - 1 - (2+1)n \\ &= v(\mathcal{L}).\end{aligned}$$

Assim, temos que $v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L})$. Note que \mathcal{L}_2 é não especial, porque é um dos casos base da Proposição 10.1. Pelo Lema 10.3, \mathcal{L}_2 é vazio. Assim, pelo Lema 9.3, $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Portanto, pelo Lema 10.2, temos que \mathcal{L} é não especial. ■

Proposição 10.5 O sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(5,d)}(2^n)$ é não especial para qualquer $d \geq 1$.

Demonstração: Se $d = 1$, $d = 2$ ou $d = 3$ então \mathcal{L} é não especial, porque é um dos casos base da Proposição 10.1. Suponha então $d \geq 4$. Fazendo uma (2, 6)-degeneração de \mathcal{L} , obtemos os sistemas

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(5,d-2)}(2^{n-6}) & \text{e} & & \mathcal{L}_2 &:= \mathcal{L}_{(5,2)}(2^6) \\ \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(5,d-3)}(2^{n-6}) & \text{e} & & \widehat{\mathcal{L}}_2 &:= \mathcal{L}_{(5,1)}(2^6).\end{aligned}$$

Pela Equação (7.1), encontramos que

$$\bullet v(\mathcal{L}_2) = (5+1)(2+1) - 1 - (2+1) \cdot 6 = -1.$$

Além disso, também pela Equação (7.1), temos que

$$\begin{aligned}v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (5+1)[(d-3)+1] - 1 - (2+1) \cdot (n-6) \\ &= (5+1)(d+1) - 1 - (2+1)n \\ &= v(\mathcal{L}).\end{aligned}$$

Assim, temos que $v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L})$. Note que \mathcal{L}_2 é não especial pela Proposição 10.3. Pelo Lema 10.3, \mathcal{L}_2 é vazio. Assim, pelo Lema 9.3, $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Portanto, pelo Lema 10.2, temos que \mathcal{L} é não especial. ■

Proposição 10.6 O sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(d_1,d_2)}(2^n)$ é não especial para $d_1 \geq 1$ ímpar e $d_2 \geq 1$ qualquer.

Demonstração: Se $d_1 = 1$ ou $d_2 = 1$, \mathcal{L} é não especial pela Proposição 10.2. Se $d_1 \geq 3$ e $d_2 = 2$, então \mathcal{L} é não especial pela Proposição 10.3. Se $d_1 \geq 3$ e $d_2 = 3$, então \mathcal{L} é não especial pela Proposição 10.4. Suponha então $d_2 \geq 4$. Fazendo uma $(2, (d_1+1))$ -degeneração de \mathcal{L} , obtemos os sistemas

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(d_1,d_2-2)}(2^{n-(d_1+1)}) & \text{e} & & \mathcal{L}_2 &:= \mathcal{L}_{(d_1,2)}(2^{d_1+1}) \\ \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(d_1,d_2-3)}(2^{n-(d_1+1)}) & \text{e} & & \widehat{\mathcal{L}}_2 &:= \mathcal{L}_{(d_1,1)}(2^{d_1+1}).\end{aligned}$$

Pela Equação (7.1), encontramos que

$$\bullet v(\mathcal{L}_2) = (d_1+1)(2+1) - 1 - (2+1)(d_1+1) = -1.$$

Além disso, também pela Equação (7.1), temos que

$$\begin{aligned}v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (d_1+1)[(d_2-3)+1] - 1 - (2+1)[n - (d_1+1)] \\ &= (d_1+1)(d_2+1) - 1 - (2+1)n \\ &= v(\mathcal{L}).\end{aligned}$$

Assim, temos que $v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L})$. Note que \mathcal{L}_2 é não especial pela Proposição 10.3. Pelo Lema 10.3, \mathcal{L}_2 é vazio. Assim, pelo Lema 9.3, $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Portanto, pelo Lema 10.2, temos que \mathcal{L} é não especial. ■

Proposição 10.7 O sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(d_1,d_2)}(2^n)$ é não especial para $d_1 \geq 4$ par e $d_2 \geq 7$ qualquer.

Demonstração: Fazendo uma $(5, 2(d_1+1))$ -degeneração de \mathcal{L} , obtemos os sistemas

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(d_1, d_2-5)}(2^{n-2(d_1+1)}) & \text{e} & \quad \mathcal{L}_2 := \mathcal{L}_{(d_1, 5)}(2^{2(d_1+1)}) \\ \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(d_1, d_2-6)}(2^{n-2(d_1+1)}) & \text{e} & \quad \widehat{\mathcal{L}}_2 := \mathcal{L}_{(d_1, 4)}(2^{2(d_1+1)}).\end{aligned}$$

Pela Equação (7.1), encontramos que

$$\bullet \ v(\mathcal{L}_2) = (d_1 + 1)(5 + 1) - 1 - (2 + 1)[2(d_1 + 1)] = -1.$$

Além disso, também pela Equação (7.1), temos que

$$\begin{aligned}v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (d_1 + 1)[(d_2 - 6) + 1] - 1 - (2 + 1)[n - 2(d_1 + 1)] \\ &= (d_1 + 1)(d_2 + 1) - 1 - (2 + 1)n \\ &= v(\mathcal{L}).\end{aligned}$$

Assim, temos que $v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L})$. Note que \mathcal{L}_2 é não especial pela Proposição 10.5. Pelo Lema 10.3, \mathcal{L}_2 é vazio. Assim, pelo Lema 9.3, $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Portanto, pelo Lema 10.2, temos que \mathcal{L} é não especial. ■

Até agora, para o caso bidimensional, isto é, o caso com dois fatores, ou seja, o caso em que $r = 2$, temos que $\mathcal{L}_{(d_1, d_2)}(2^n)$ é não especial, para $(2a, 2) \neq (d_1, d_2) \neq (2, 2a)$, conforme os seguintes casos:

$d_1, d_2 \in \{1, \dots, 6\}$	Casos Base da Proposição 10.1
$d_1 = 1$ e d_2 qualquer	Proposição 10.2
$d_1 = 2$ e d_2 ímpar	Proposição 10.3
$d_1 = 3$ e d_2 qualquer	Proposição 10.4
$d_1 = 5$ e d_2 qualquer	Proposição 10.5
d_1 ímpar e d_2 qualquer	Proposição 10.6
$d_1 \geq 4$ par e $d_2 \geq 7$ qualquer	Proposição 10.7

Observe que a Proposição 10.6 é uma generalização das Proposições 10.2, 10.4 e 10.5. Esse é o caso mais fácil, uma vez que um dos graus fixados é ímpar. Quando um dos graus fixados é par, aí devemos proceder nossa análise com mais cautela, pois devemos ter o bigrau diferente de $(2, 2a)$, equivalentemente, diferente de $(2a, 2)$. Isto quer dizer que, se fixarmos um dos graus igual a 2, o outro deve ser ímpar e, se fixarmos um dos graus par ≥ 4 então o outro tem que ser diferente de 2.

Para o caso geral, com d_1, d_2 inteiros positivos quaisquer, o sistema $\mathcal{L}_{(d_1, d_2)}(2^n)$ é sempre não especial quando $(2a, 2) \neq (d_1, d_2) \neq (2, 2a)$, como nos diz o seguinte teorema.

Teorema 10.2 Sejam d_1, d_2 inteiros positivos quaisquer. Então $\mathcal{L}_{(d_1, d_2)}(2^n)$ é especial apenas no caso em que $(d_1, d_2) = (2, 2a)$ ou, equivalentemente, o caso em que $(d_1, d_2) = (2a, 2)$.

Demonstração: Se d_1 é ímpar e d_2 qualquer, então o sistema é não especial pela Proposição 10.6. Se d_1 for par, temos:

- CASO $d_1 = 2$: Como $(d_1, d_2) \neq (2, 2a)$ e $d_1 = 2$, devemos ter $d_2 \neq 2a$, ou seja, d_2 deve ser ímpar. Neste caso, \mathcal{L} é não especial pela Proposição 10.3.

- CASO $d_1 = 4$ OU $d_1 = 6$: Se d_2 for ímpar, então \mathcal{L} é não especial pela Proposição 10.6. Se d_2 for par, devemos ter $d_2 \neq 2$, uma vez que $d_1 = 4$ ou $d_1 = 6$, pois $(d_1, d_2) \neq (2, 2a)$ (assim, precisamos também que $(d_1, d_2) \neq (2a, 2)$). Dessa forma, se $d_2 = 4$ ou $d_2 = 6$, então \mathcal{L} é não especial, pois é um dos casos base da Proposição 10.1. Se $d_2 \geq 8$ par, então \mathcal{L} é não especial, pela Proposição 10.7.
- CASO $d_1 \geq 8$: Se d_2 for ímpar, então \mathcal{L} é não especial, pela Proposição 10.6. Se d_2 for par, novamente devemos ter $d_2 \neq 2$, uma vez que $d_1 \geq 8$ é par, pois $(d_1, d_2) \neq (2, 2a)$ (assim, precisamos também que $(d_1, d_2) \neq (2a, 2)$). Dessa forma, se $d_2 \geq 4$ é par, então \mathcal{L} é não especial, pela Proposição 10.7. ■

Caso 3-dimensional

Seja $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(d_1, d_2, d_3)}(2^n)$. Mostremos que \mathcal{L} é não especial, exceto no caso em que $(d_1, d_2, d_3) = (2, 2, 2)$ ou $(d_1, d_2, d_3) = (1, 1, 2a)$. Mostremos inicialmente que $\mathcal{L}_{(3,3,d_1)}(2^n)$ é não especial para qualquer d_1 .

Proposição 10.8 Seja d_1 um inteiro positivo. O sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(3,3,d_1)}(2^n)$ é não especial para qualquer $d_1 \geq 1$.

Demonstração: Se $d_1 \leq 4$ então é um dos casos base da Proposição 10.1. Assuma então que $d_1 \geq 5$. Aplicando uma $(3, 16)$ -degeneração ao sistema $\mathcal{L}_{(3,3,d_1)}(2^n)$, obtemos um sistema \mathcal{L}_0 que restrito às suas componentes fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(3,3,d_1-3)}(2^{n-16}) & \text{e} & & \mathcal{L}_2 &:= \mathcal{L}_{(3,3,3)}(2^{16}) \\ \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(3,3,d_1-4)}(2^{n-16}) & \text{e} & & \widehat{\mathcal{L}}_2 &:= \mathcal{L}_{(3,3,2)}(2^{16}). \end{aligned}$$

Pela Equação (7.1), encontramos que

$$\bullet v(\mathcal{L}_2) = (3+1) \cdot (3+1) \cdot (3+1) - 1 - (3+1) \cdot 16 = -1.$$

Além disso, também pela Equação (7.1), temos que

$$\begin{aligned} v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (3+1)(3+1)[(d_1-4)+1] - 1 - (3+1) \cdot [n-16] \\ &= (3+1) \cdot (3+1) \cdot (d_1+1) - 1 - (3+1)n \\ &= v(\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Assim, temos que $v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L})$. Note que \mathcal{L}_2 é não especial pois é um dos casos base da indução pela Proposição 10.1. Pelo Lema 10.3, \mathcal{L}_2 é vazio. Assim, pelo Lema 9.3, $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Portanto, pelo Lema 10.2, temos que \mathcal{L} é não especial. ■

Agora, mostremos que $\mathcal{L}_{(3,d_1,d_2)}$ também é não especial para quaisquer $d_1, d_2 \geq 1$.

Proposição 10.9 Sejam d_1, d_2 inteiros positivos. O sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(3,d_1,d_2)}(2^n)$ é não especial para quaisquer $d_1, d_2 \geq 1$.

Demonstração: Se $d_1, d_2 \leq 4$ então é um dos casos base da Proposição 10.1. Assuma então que $d_2 \geq 5$. Aplicando uma $(3, 4(d_1+1))$ -degeneração ao sistema $\mathcal{L}_{(3,d_1,d_2)}(2^n)$, obtemos um sistema \mathcal{L}_0 que restrito às suas componentes fica

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(3,d_1,d_2-3)}(2^{n-4(d_1+1)}) & \text{e} & \quad \mathcal{L}_2 := \mathcal{L}_{(3,d_1,3)}(2^{4(d_1+1)}) \\ \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(3,d_1,d_2-4)}(2^{n-4(d_1+1)}) & \text{e} & \quad \widehat{\mathcal{L}}_2 := \mathcal{L}_{(3,d_1,2)}(2^{4(d_1+1)}).\end{aligned}$$

Pela Equação (7.1), encontramos que

$$\bullet v(\mathcal{L}_2) = (3+1) \cdot (d_1+1) \cdot (3+1) - 1 - (3+1) \cdot 4(d_1+1) = -1.$$

Além disso, também pela Equação (7.1), temos que

$$\begin{aligned}v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (3+1)(d_1+1)[(d_2-4)+1] - 1 - (3+1) \cdot [n-4(d_1+1)] \\ &= (3+1)(d_1+1)(d_2+1) - 1 - (3+1)n \\ &= v(\mathcal{L}).\end{aligned}$$

Assim, temos que $v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L})$. Note que \mathcal{L}_2 é não especial pela Proposição 10.8. Pelo Lema 10.3, \mathcal{L}_2 é vazio. Assim, pelo Lema 9.3, $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Portanto, pelo Lema 10.2, temos que \mathcal{L} é não especial. ■

Teorema 10.3 Sejam d_1, d_2, d_3 inteiros positivos quaisquer. Então $\mathcal{L}_{(d_1,d_2,d_3)}(2^n)$ é especial apenas nos casos em que $(d_1, d_2, d_3) = \{(2, 2, 2), (1, 1, 2a)\}$ com $d_1 \leq d_2 \leq d_3$.

Demonstração: Pela Proposição 10.1, é suficiente mostrar o caso $d_3 \geq 5$. Degenerando o sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(d_1,d_2,d_3)}(2^n)$ por meio de uma $(3, n_2)$ -degeneração com $n_2 := (d_1+1)(d_2+1)$, obtemos um sistema \mathcal{L}_0 . Restringindo esse sistema às suas componentes, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(d_1,d_2,d_3-3)}(2^{n-(d_1+1)(d_2+1)}) & \text{e} & \quad \mathcal{L}_2 := \mathcal{L}_{(d_1,d_2,3)}(2^{(d_1+1)(d_2+1)}) \\ \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(d_1,d_2,d_3-4)}(2^{n-(d_1+1)(d_2+1)}) & \text{e} & \quad \widehat{\mathcal{L}}_2 := \mathcal{L}_{(d_1,d_2,2)}(2^{(d_1+1)(d_2+1)}).\end{aligned}$$

Pela Equação (7.1), encontramos que

$$\bullet v(\mathcal{L}_2) = (d_1+1)(d_2+1) \cdot (3+1) - 1 - (3+1) \cdot (d_1+1)(d_2+1) = -1.$$

Além disso, também pela Equação (7.1), temos que

$$\begin{aligned}v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (d_1+1)(d_2+1)[(d_3-4)+1] - 1 - (3+1) \cdot [n-(d_1+1)(d_2+1)] \\ &= (d_1+1)(d_2+1)(d_3+1) - 1 - (3+1)n \\ &= v(\mathcal{L}).\end{aligned}$$

Assim, temos que $v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L})$. Note que \mathcal{L}_2 é não especial pela Proposição 10.9. Pelo Lema 10.3, \mathcal{L}_2 é vazio. Assim, pelo Lema 9.3, $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Portanto, pelo Lema 10.2, temos que \mathcal{L} é não especial. ■

Caso 4-dimensional

Seja $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(d_1,\dots,d_4)}(2^n)$. Mostremos que \mathcal{L} é não especial, exceto no caso em que $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (1, 1, 1, 1)$. Iniciemos por analisar três casos distintos, divididos em três proposições como segue.

Proposição 10.10 Seja d_4 um inteiro positivo. Então o sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1,4,d_4)}(2^n)$ é não especial para qualquer $d_4 \geq 1$.

Demonstração: Se $d_4 \leq 5$, então \mathcal{L} é não especial porque é um dos casos base da tabela pela Proposição 10.1 e não há nada a provar. Suponha então que $d_4 \geq 6$. Neste caso, usamos uma $(4, 20)$ -degeneração e obtemos os sistemas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(1,1,4,d_4-4)}(2^{n-20}) & \text{e} & & \mathcal{L}_2 &:= \mathcal{L}_{(1,1,4,4)}(2^{20}) \\ \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(1,1,4,d_4-5)}(2^{n-20}) & \text{e} & & \widehat{\mathcal{L}}_2 &:= \mathcal{L}_{(1,1,4,3)}(2^{20}). \end{aligned}$$

Pela Equação (7.1), encontramos que

$$\bullet v(\mathcal{L}_2) = (1+1)(1+1)(4+1)(4+1) - 1 - 20(4+1) = -1.$$

Além disso, também pela Equação (7.1), temos que

$$\begin{aligned} v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (1+1)(1+1)(4+1)[(d_4-5)+1] - 1 - (4+1) \cdot (n-20) \\ &= (1+1)(1+1)(4+1)(d_4+1) - 1 - (4+1)n \\ &= v(\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Assim, temos que $v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L})$. Note que \mathcal{L}_2 é não especial porque é um dos casos base da tabela pela Proposição 10.1. Pelo Lema 10.3, \mathcal{L}_2 é vazio. Assim, pelo Lema 9.3, $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Portanto, pelo Lema 10.2, temos que \mathcal{L} é não especial. ■

Proposição 10.11 Sejam d_3, d_4 inteiros positivos. Então o sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1,d_3,d_4)}(2^n)$ é não especial para quaisquer d_3, d_4 , com $d_3 \leq d_4$ e $d_4 \geq 6$.

Demonstração: Se $d_3 \leq d_4 \leq 5$ e $(d_3, d_4) \neq (1, 1)$, então \mathcal{L} é não especial porque é um dos casos base da tabela pela Proposição 10.1 e não há nada a provar. Suponha então que $d_4 \geq 6$. Neste caso, usamos uma $(4, 4(d_3+1))$ -degeneração e obtemos os sistemas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(1,1,d_3,d_4-4)}(2^{n-4(d_3+1)}) & \text{e} & & \mathcal{L}_2 &:= \mathcal{L}_{(1,1,d_3,4)}(2^{4(d_3+1)}) \\ \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(1,1,d_3,d_4-5)}(2^{n-4(d_3+1)}) & \text{e} & & \widehat{\mathcal{L}}_2 &:= \mathcal{L}_{(1,1,d_3,3)}(2^{4(d_3+1)}). \end{aligned}$$

Pela Equação (7.1), encontramos que

$$\bullet v(\mathcal{L}_2) = (1+1)(1+1)(d_3+1)(4+1) - 1 - 4(d_3+1)(4+1) = -1.$$

Além disso, também pela Equação (7.1), temos que

$$\begin{aligned} v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (1+1)(1+1)(d_3+1)[(d_4-5)+1] - 1 - (4+1) \cdot [n - 4(d_3+1)] \\ &= (1+1)(1+1)(d_3+1)(d_4+1) - 1 - (4+1)n \\ &= v(\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Assim, temos que $v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L})$. Note que \mathcal{L}_2 é não especial pela Proposição 10.10. Pelo Lema 10.3, \mathcal{L}_2 é vazio. Assim, pelo Lema 9.3, $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Portanto, pelo Lema 10.2, temos que \mathcal{L} é não especial. ■

Proposição 10.12 Seja d_4 um inteiro positivo. Então o sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(2,2,2,d_4)}(2^n)$ é não especial para qualquer $d_4 \geq 1$.

Demonstração: Se $d_4 \leq 5$, então \mathcal{L} é não especial porque é um dos casos base da tabela pela Proposição 10.1 e não há nada a provar. Suponha então que $d_4 \geq 6$. Neste caso, usamos uma $(4, 27)$ -degeneração e obtemos os sistemas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(2,2,2,d_4-4)}(2^{n-27}) & \text{e} & & \mathcal{L}_2 &:= \mathcal{L}_{(2,2,2,4)}(2^{27}) \\ \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(2,2,2,d_4-5)}(2^{n-27}) & \text{e} & & \widehat{\mathcal{L}}_2 &:= \mathcal{L}_{(2,2,2,3)}(2^{27}). \end{aligned}$$

Pela Equação (7.1), encontramos que

$$\bullet \quad v(\mathcal{L}_2) = (2+1)(2+1)(2+1)(4+1) - 1 - 27(4+1) = -1.$$

Além disso, também pela Equação (7.1), temos que

$$\begin{aligned} v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (2+1)(2+1)(2+1)[(d_4-5)+1] - 1 - (4+1) \cdot (n-27) \\ &= (2+1)(2+1)(2+1)(d_4+1) - 1 - (4+1)n \\ &= v(\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Assim, temos que $v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L})$. Note que \mathcal{L}_2 é não especial porque é um dos casos base da tabela pela Proposição 10.1. Pelo Lema 10.3, \mathcal{L}_2 é vazio. Assim, pelo Lema 9.3, $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Portanto, pelo Lema 10.2, temos que \mathcal{L} é não especial. ■

Teorema 10.4 Sejam d_1, \dots, d_4 inteiros positivos com $d_1 \leq \dots \leq d_4$. Então o sistema $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_4)}(2^n)$ é especial apenas no caso em que $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (1, 1, 1, 1)$.

Demonstração: Se $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (1, 1, d_3, d_4)$, então o sistema é não especial pela Proposição 10.11. Se $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (2, 2, 2, d_4)$, então o sistema é não especial pela Proposição 10.12. Por fim, suponha então agora que (d_1, d_2, d_3, d_4) é distinto de $(1, 1, 1, d_4)$, $(2, 2, 2, d_4)$ e $(1, 1, 2a, d_4)$. Se $d_4 \leq 2$, então o sistema é não especial porque é um dos casos base da Proposição 10.1. Assumimos então que $d_4 \geq 3$. Neste caso, realizamos uma $(1, n_2, \beta)$ -degeneração, como n_2 e β definidos como na Equação (9.6), ou seja,

$$k = 1 \quad \prod_{i=1}^3 (d_i + 1) = 4(n_2 - \beta) + \beta, \quad \beta \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (10.4)$$

E obtemos os sistemas

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{(d_1, d_2, d_3, d_4-1)}(2^{n_1}) \text{ e } \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{(d_1, d_2, d_3, 1)}(2^{n_2}).$$

Relembrando que exatamente β dos n_2 pontos duplos de X_2 são enviados para R , temos que os núcleos são, portanto:

$$\widehat{\mathcal{L}}_1 = \mathcal{L}_{(d_1, d_2, d_3, d_4-2)}(2^{n_1}) \text{ e } \widehat{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L}_{(d_1, d_2, d_3, 0)}(2^{n_2-\beta}, 1^\beta).$$

Agora, observe que $\widehat{\mathcal{L}}_2 \cong \mathcal{L}_{(d_1, d_2, d_3)}(2^{n_2-\beta}, 1^\beta)$. Além disso, pela definição de n_2 e β dados pela Equação (10.4), temos que

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{(d_1, d_2, d_3)}(2^{n_2-\beta}, 1^\beta)) &= (d_1+1)(d_2+1)(d_3+1) - (3+1)(n_2-\beta) - \beta \\ &= 4(n_2-\beta) + \beta - 1 - 4(n_2-\beta) - \beta \\ &= -1. \end{aligned}$$

Uma vez que sua dimensão virtual é -1 , segue que $\mathcal{L}_{(d_1, d_2, d_3)}(2^{n_2 - \beta}, 1^\beta)$ é vazio, pois ele é não especial pelo Teorema 10.3, uma vez que $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ e $(d_1, d_2, d_3) \neq (2, 2, 2), (1, 1, 2a)$. Como $\widehat{\mathcal{L}}_2 \cong \mathcal{L}_{(d_1, d_2, d_3)}(2^{n_2 - \beta}, 1^\beta)$, temos que $\widehat{\mathcal{L}}_2$ é vazio. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Além disso, sua dimensão virtual dada por

$$\begin{aligned} v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (d_1 + 1)(d_2 + 1)(d_3 + 1)[(d_4 - 2) + 1] - 1 - (4 + 1)n_1 \\ &= \prod_{i=1}^3 (d_i + 1)(d_4 - 1) - 1 - 5n_1. \end{aligned}$$

Como $n_1 + n_2 = n$, temos que $n_1 = n - n_2$, onde $n = \frac{1}{4+1} \prod_{i=1}^4 (d_i + 1)$. Da Equação

(10.4), obtemos que $n_2 = \frac{1}{4} \left(\prod_{i=1}^3 (d_i + 1) + 3\beta \right)$ com $\beta \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= \prod_{i=1}^3 (d_i + 1)(d_4 - 1) - 1 - 5n_1 \\ &= \prod_{i=1}^3 (d_i + 1)(d_4 - 1) - 1 - 5(n - n_2) \\ &= \prod_{i=1}^3 (d_i + 1)(d_4 - 1) - 1 - 5n + 5n_2 \\ &= \prod_{i=1}^3 (d_i + 1)(d_4 - 1) - 1 + 5(-n) + 5n_2 \\ &= \prod_{i=1}^3 (d_i + 1)(d_4 - 1) - 1 + 5 \left(-\frac{1}{4+1} \prod_{i=1}^4 (d_i + 1) \right) + 5 \left[\frac{1}{4} \left(\prod_{i=1}^3 (d_i + 1) + 3\beta \right) \right] \\ &= \prod_{i=1}^3 (d_i + 1)(d_4 - 1) - 1 - \prod_{i=1}^4 (d_i + 1) + \frac{5}{4} \prod_{i=1}^3 (d_i + 1) + \frac{15}{4}\beta \\ &= \prod_{i=1}^3 (d_i + 1) [(d_4 - 1) - (d_4 + 1)] + \frac{5}{4} \prod_{i=1}^3 (d_i + 1) + \frac{15}{4}\beta - 1 \\ &= -2 \prod_{i=1}^3 (d_i + 1) + \frac{5}{4} \prod_{i=1}^3 (d_i + 1) + \frac{15}{4}\beta - 1 \\ &= \prod_{i=1}^3 (d_i + 1) \left[-2 + \frac{5}{4} \right] + \frac{15}{4}\beta - 1 \\ &= -\frac{3}{4} \prod_{i=1}^3 (d_i + 1) + \frac{15}{4}\beta - 1 \\ &\leq -\frac{3}{4}(1+1)(2+1)(2+1) + \frac{15}{4} \cdot 3 - 1 < 0. \end{aligned}$$

Como $v(\widehat{\mathcal{L}}_1)$ é negativa, temos que $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é vazio. Portanto, pela hipótese feita nos d_i e pelos Lemas 9.2 e 9.5, concluímos que \mathcal{L} é não especial. ■

Caso 5-dimensional

Seja $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_5)}(2^n)$. Mostremos que \mathcal{L} é sempre não especial. Iniciemos por analisar um caso particular, o caso em que $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = (1, 1, 1, 1, d_5)$.

Proposição 10.13 Seja d_5 um inteiro positivo. Então o sistema $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(1,1,1,1,d_5)}(2^n)$ é não especial para qualquer $d_5 \geq 1$.

Demonstração: Se $d_5 \leq 6$, então \mathcal{L} é não especial porque é um dos casos base da tabela pela Proposição 10.1 e não há nada a provar. Suponha então que $d_5 \geq 7$. Neste caso, usamos uma $(5, 16)$ -degeneração e obtemos os sistemas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &:= \mathcal{L}_{(1,1,1,1,d_5-5)}(2^{n-16}) & \text{e} & & \mathcal{L}_2 &:= \mathcal{L}_{(1,1,1,1,5)}(2^{16}) \\ \widehat{\mathcal{L}}_1 &:= \mathcal{L}_{(1,1,1,1,d_5-6)}(2^{n-16}) & \text{e} & & \widehat{\mathcal{L}}_2 &:= \mathcal{L}_{(1,1,1,1,4)}(2^{16}). \end{aligned}$$

Pela Equação (7.1), encontramos que

$$\bullet \quad v(\mathcal{L}_2) = (1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(5+1) - 1 - 16(5+1) = -1.$$

Além disso, também pela Equação (7.1), temos que

$$\begin{aligned} v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (1+1)(1+1)(1+1)(1+1)[(d_5-6)+1] - 1 - (5+1) \cdot (n-16) \\ &= (1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(d_5+1) - 1 - (5+1)n \\ &= v(\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Assim, temos que $v(\widehat{\mathcal{L}}_1) = v(\mathcal{L})$. Note que \mathcal{L}_2 é não especial porque é um dos casos base da tabela pela Proposição 10.1. Pelo Lema 10.3, \mathcal{L}_2 é vazio. Assim, pelo Lema 9.3, $\dim(\mathcal{L}_0) = \dim(\widehat{\mathcal{L}}_1)$. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Portanto, pelo Lema 10.2, temos que \mathcal{L} é não especial. ■

Teorema 10.5 Sejam d_1, \dots, d_5 inteiros positivos. Então o sistema $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_5)}(2^n)$ é não especial.

Demonstração: Se $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = (1, 1, 1, 1, d_5)$, então o sistema é não especial pela Proposição 10.13. Suponha então que $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ é distinto de $(1, 1, 1, 1, d_5)$. Se $d_5 \leq 2$ então o sistema é não especial porque é um dos casos base da Proposição 10.1. Assumimos então que $d_5 \geq 3$. Neste caso, realizamos uma $(1, n_2, \beta)$ -degeneração, como n_2 e β definidos como na Equação (9.6), ou seja,

$$k = 1 \quad \prod_{i=1}^4 (d_i + 1) = 5(n_2 - \beta) + \beta, \quad \beta \in \{0, 1, 2, 3, 4\}. \quad (10.5)$$

E obtemos os sistemas

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_5-1)}(2^{n_1}) \text{ e } \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_4, 1)}(2^{n_2}).$$

Relembrando que exatamente β dos n_2 pontos duplos de X_2 são enviados para R , temos que os núcleos são, portanto:

$$\widehat{\mathcal{L}}_1 = \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_5-2)}(2^{n_1}) \text{ e } \widehat{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_4, 0)}(2^{n_2-\beta}, 1^\beta).$$

Agora, observe que $\widehat{\mathcal{L}}_2 \cong \mathcal{L}_{(d_1, d_2, d_3, d_4)}(2^{n_2 - \beta}, 1^\beta)$. Além disso, pela definição de n_2 e β dados pela Equação (10.5), temos que

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{(d_1, d_2, d_3, d_4)}(2^{n_2 - \beta}, 1^\beta)) &= (d_1 + 1)(d_2 + 1)(d_3 + 1)(d_4 + 1) - (4 + 1)(n_2 - \beta) - \beta \\ &= 5(n_2 - \beta) + \beta - 1 - 5(n_2 - \beta) - \beta \\ &= -1. \end{aligned}$$

Uma vez que sua dimensão virtual é -1 , segue que $\mathcal{L}_{(d_1, d_2, d_3, d_4)}(2^{n_2 - \beta}, 1^\beta)$ é vazio, pois ele é não especial pelo Teorema 10.4, com $(d_1, d_2, d_3, d_4) \neq (1, 1, 1, 1)$. Como $\widehat{\mathcal{L}}_2 \cong \mathcal{L}_{(d_1, d_2, d_3, d_4)}(2^{n_2 - \beta}, 1^\beta)$, temos que $\widehat{\mathcal{L}}_2$ é vazio. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Além disso, sua dimensão virtual dada por

$$\begin{aligned} v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (d_1 + 1)(d_2 + 1)(d_3 + 1)(d_4 + 1)[(d_5 - 2) + 1] - 1 - (5 + 1)n_1 \\ &= \prod_{i=1}^4 (d_i + 1)(d_5 - 1) - 1 - 6n_1. \end{aligned}$$

Como $n_1 + n_2 = n$, temos que $n_1 = n - n_2$, onde $n = \frac{1}{5 + 1} \prod_{i=1}^5 (d_i + 1)$. Da Equação (10.5),

obtemos que $n_2 = \frac{1}{5} \left(\prod_{i=1}^4 (d_i + 1) + 4\beta \right)$ com $\beta \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= \prod_{i=1}^4 (d_i + 1)(d_5 - 1) - 1 - 6n_1 \\ &= \prod_{i=1}^4 (d_i + 1)(d_5 - 1) - 1 - 6(n - n_2) \\ &= \prod_{i=1}^4 (d_i + 1)(d_5 - 1) - 1 - 6n + n_2 \\ &= \prod_{i=1}^4 (d_i + 1)(d_5 - 1) - 1 + 6(-n) + 6n_2 \\ &= \prod_{i=1}^4 (d_i + 1)(d_5 - 1) - 1 + 6 \left(-\frac{1}{5 + 1} \prod_{i=1}^5 (d_i + 1) \right) + 6 \left[\frac{1}{5} \left(\prod_{i=1}^4 (d_i + 1) + 4\beta \right) \right] \\ &= \prod_{i=1}^4 (d_i + 1)(d_5 - 1) - 1 - \prod_{i=1}^5 (d_i + 1) + \frac{6}{5} \prod_{i=1}^4 (d_i + 1) + \frac{24}{5}\beta \\ &= \prod_{i=1}^4 (d_i + 1) [(d_5 - 1) - (d_5 + 1)] + \frac{6}{5} \prod_{i=1}^4 (d_i + 1) + \frac{24}{5}\beta - 1 \\ &= -2 \prod_{i=1}^4 (d_i + 1) + \frac{6}{5} \prod_{i=1}^4 (d_i + 1) + \frac{24}{5}\beta - 1 = \prod_{i=1}^4 (d_i + 1) \left[-2 + \frac{6}{5} \right] + \frac{24}{5}\beta - 1 \\ &= -\frac{4}{5} \prod_{i=1}^4 (d_i + 1) + \frac{24}{5}\beta - 1 \leq -\frac{4}{5}(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(2 + 1) + \frac{24}{5} \cdot 4 - 1 < 0. \end{aligned}$$

Como $v(\widehat{\mathcal{L}}_1)$ é negativa, temos que $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é vazio. Portanto, pela hipótese feita nos d_i e pelos Lemas 9.2 e 9.5, concluímos que \mathcal{L} é não especial. \blacksquare

Caso r -dimensional para $r \geq 6$

Teorema 10.6 Sejam d_1, \dots, d_r inteiros positivos com $d_1 \leq \dots \leq d_r$ para $r \geq 6$. Então o sistema $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$ é não especial.

Demonstração: Procedemos por indução em $d := d_1 + \dots + d_r$. Se $d = r$, então $d_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, r$ e este caso é não especial, como provado em [10]. Podemos assumir então que $d_r > 1$. Neste caso, realizamos uma $(1, n_2, \beta)$ -degeneração com n_2 e β como definidos na Equação (9.6), ou seja,

$$k = 1 \quad \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) = r(n_2 - \beta) + \beta, \quad \beta \in \{0, \dots, r-1\}. \quad (10.6)$$

E obtemos os sistemas

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1}, d_r-1)}(2^{n_1}) \text{ e } \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1}, 1)}(2^{n_2}).$$

Relembrando que exatamente β dos n_2 pontos duplos de X_2 são enviados para R , temos que os núcleos são, portanto:

$$\widehat{\mathcal{L}}_1 = \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1}, d_r-2)}(2^{n_1}) \text{ e } \widehat{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1}, 0)}(2^{n_2-\beta}, 1^\beta).$$

Agora, observe que $\widehat{\mathcal{L}}_2 \cong \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(2^{n_2-\beta}, 1^\beta)$. Além disso, pela definição de n_2 e β dados pela Equação (10.6), temos que

$$\begin{aligned} v(\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(2^{n_2-\beta}, 1^\beta)) &= (d_1 + 1) \cdots (d_{r-1} + 1) - [(r-1) + 1](n_2 - \beta) - \beta \\ &= r(n_2 - \beta) + \beta - 1 - r(n_2 - \beta) - \beta \\ &= -1. \end{aligned}$$

Uma vez que sua dimensão virtual é -1 , segue que $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(2^{n_2-\beta}, 1^\beta)$ é vazio, pois ele é não especial por indução. Como $\widehat{\mathcal{L}}_2 \cong \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_{r-1})}(2^{n_2-\beta}, 1^\beta)$, temos que $\widehat{\mathcal{L}}_2$ é vazio. Por indução, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é não especial. Além disso, sua dimensão virtual dada por

$$\begin{aligned} v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= (d_1 + 1) \cdots (d_{r-1} + 1)[(d_r - 2) + 1] - 1 - (r+1)n_1 \\ &= \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1)(d_r - 1) - 1 - (r+1)n_1. \end{aligned}$$

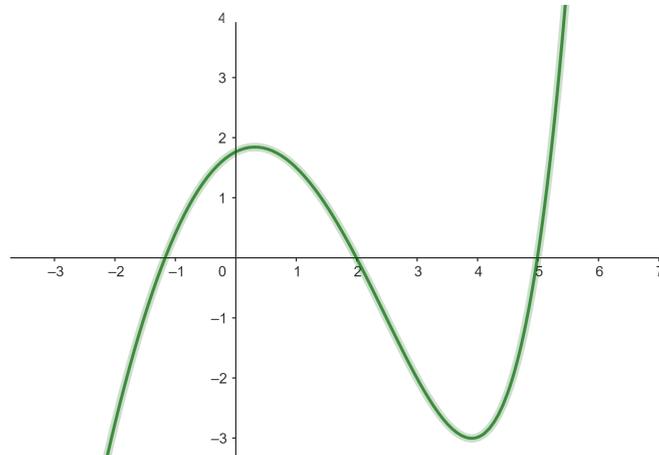
Como $n_1 + n_2 = n$, temos que $n_1 = n - n_2$, onde $n = \frac{1}{r+1} \prod_{i=1}^r (d_i + 1)$. Da Equação (10.6),

obtemos que $n_2 = \frac{1}{r} \left(\prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) + (r-1)\beta \right)$ com $\beta \in \{0, \dots, r-1\}$. Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} v(\widehat{\mathcal{L}}_1) &= \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1)(d_r - 1) - 1 - (r+1)n_1 \\ &= \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1)(d_r - 1) - 1 - (r+1)(n - n_2) \\ &= \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1)(d_r - 1) - 1 - (r+1)n + (r+1)n_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^{r+1} (d_i + 1)(d_r - 1) - 1 + (r + 1) \left(-\frac{1}{r + 1} \prod_{i=1}^r (d_i + 1) \right) + (r + 1) \left[\frac{1}{r} \left(\prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) + (r - 1)\beta \right) \right] \\
&= \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1)(d_r - 1) - 1 - \prod_{i=1}^r (d_i + 1) + \frac{r + 1}{r} \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) + \frac{(r + 1)(r - 1)}{r} \beta \\
&= \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) [(d_r - 1) - (d_r + 1)] + \frac{r + 1}{r} \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) + \frac{(r + 1)(r - 1)}{r} \beta - 1 \\
&= -2 \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) + \frac{r + 1}{r} \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) + \frac{(r + 1)(r - 1)}{r} \beta - 1 \\
&= \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) \left[-2 + \frac{r + 1}{r} \right] + \frac{(r + 1)(r - 1)}{r} \beta - 1 \\
&= \frac{1 - r}{r} \prod_{i=1}^{r-1} (d_i + 1) + \frac{(r + 1)(r - 1)}{r} \beta - 1 \\
&\leq \frac{1 - r}{r} \prod_{i=1}^{r-2} (1 + 1)(2 + 1) + \frac{(r + 1)(r - 1)}{r} \cdot (r - 1) - 1 \\
&= \frac{1 - r}{r} \underbrace{(1 + 1) \cdots (1 + 1)}_{r-2 \text{ vezes}} (2 + 1) + \frac{(r + 1)(r - 1)}{r} \cdot [-(1 - r)] - 1 \\
&= \frac{1 - r}{r} \cdot 2^{r-2} \cdot 3 - \frac{(1 - r)(r + 1)(r - 1)}{r} - 1 \\
&= \frac{1 - r}{r} \cdot [3 \cdot 2^{r-2} - (r + 1)(r - 1)] - 1 \\
&= \frac{1 - r}{r} \cdot [3 \cdot 2^{r-2} - r^2 + 1] - 1 < 0.
\end{aligned}$$

A última igualdade decorre do fato de que, como $r \geq 6$, temos que $1 - r < 0$, com efeito, segue que $\frac{1 - r}{r} < 0$. Analisando a expressão $3 \cdot 2^{r-2} - r^2 + 1$, obtemos por análise gráfica (enxergando a expressão como uma função na variável r), que é positiva para todo $r \geq 6$, conforme ilustrado na figura abaixo:



Dessa forma, $\frac{1-r}{r} \cdot [3 \cdot 2^{r-2} - r^2 + 1] < 0$, pois é um produto em que um dos fatores é negativo e o outro é positivo, e assim, obtemos o desejado. Como $v(\widehat{\mathcal{L}}_1)$ é negativa, temos que $\widehat{\mathcal{L}}_1$ é vazio. Além disso, a dimensão do sistema limite é igual a dimensão da interseção $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ pelo Lema 9.2. Assim, temos pelo Lema 9.5 que

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{L}_0) &= \dim(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) = \max\{\dim(\mathcal{R}_1) - (n_2 - \beta) - r\beta, -1\} \\ &= \max\left\{\prod_{i=1}^r (d_i + 1) - 1 - (r+1)n, -1\right\} \\ &= \max\{v(\mathcal{L}), -1\} \\ &= e(\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Portanto, o sistema $\mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_r)}(2^n)$ é não especial. ■

Considerações Finais

O problema de determinar quais variedades de Segre-Veronese são defeituosas ainda é um problema em aberto. Como o leitor constatou com a leitura deste, determinar se uma Segre-Veronese é defeituosa por meio do estudo de defeito secante é uma tarefa árdua e requer muitas vezes ferramentas sofisticadas, que demandam conhecimento empírico e técnico muito preciso.

Neste trabalho, fizemos a abordagem por meio de sistemas lineares, através da técnica da degeneração, para obter informações no sistema degenerado e assim, poder transladar essas informações ao sistema original. Dessa forma, fez-se necessário um entendimento maior de tal técnica, para consolidarmos os resultados. Para isto, tivemos que buscar um conhecimento mais sofisticado na teoria de esquemas e feixes, bem como de variedades tóricas.

Este trabalho apresenta-se como um importante objeto de apoio a estudos futuros em determinar defeitos secantes em variedades de Segre-Veronese. Ressaltamos a especificidade de que trata este trabalho, tratamos apenas do mergulho de Segre-Veronese de um produto finito de retas projetivas. Nota-se assim, o quão abrangente é essa área de estudo.

Referências Bibliográficas

- [1] ABO. H, BRAMBILLA M.C., *On the dimension of secant varieties of Segre-Veronese varieties*, 2009.
- [2] ABO. H, BRAMBILLA M.C., *New examples of defective secant varieties of Segre-Veronese varieties*, *Collectanea Mathematica*. 63(3), 287-297, 2012.
- [3] ABRESCIA, S., *About defectivity of certain Segre-Veronese varieties*, *Can. J. Math.* 60, 961-964, 2008.
- [4] ALEXANDER, J., HIRSCHOWITZ, A., *Polynomial interpolation in several variables*, *J. Algebraic Geom.* 4(2), 201-222, 1995.
- [5] ATIYAH, M. , MACDONALD, I., *Introduction to Commutative Algebra*, Universidade de Oxford, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [6] BALLICO, E., *On the non-defectivity and non weak-defectivity of Segre-Veronese embeddings of products of projective spaces*, *Port.Math.* 63, 101-111, 2006.
- [7] CATALISANO, M.V., GERAMITA, A.V., GIMIGLIANO, A., *Higher secant varieties of Segre-Veronese varieties, projective varieties with unexpected properties*, 81-107, 2005.
- [8] CATALISANO, M.V., GERAMITA, A.V., GIMIGLIANO, A., *Segre-Veronese embeddings of $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ and their secant varieties*, *Collect. Math.* 58(1), 1-24, 2007.
- [9] CATALISANO, M.V., GERAMITA, A.V., GIMIGLIANO, A., *On the ideals of secant varieties to certain rational varieties*, *J. Algebraic Geom.* 319(5), 1913-1931, 2008.
- [10] CATALISANO, M.V., GERAMITA, A.V., GIMIGLIANO, A., *Segre-Veronese embeddings of $\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1$ (n -times) are not defective for $n \geq 5$* , *J. Algebraic Geom.* 20, 295-327, 2011.
- [11] COX, D. A., LITTLE, J., O'SHEA, D., *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2015.
- [12] COX, D., LITTLE, J., SCHENCK H., *Toric Varieties*, 2009.
- [13] EISENBUD, D., HARRIS, J., *The Geometry of Schemes*, Springer, 2000.
- [14] LIMA, E. L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, 2017.
- [15] LIMA, E. L., *Álgebra Linear*, IMPA, Rio de Janeiro, 2020.
- [16] LIMA, E., *Cálculo Tensorial*, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.
- [17] FULTON, W., *Algebraic Curves: An introduction to Algebraic Geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, 2008.

- [18] HARRIS, J., *Algebraic Geometry: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1992.
- [19] HARTSHORNE, R., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1997.
- [20] KEMPF, G.R., *Algebraic Varieties*. Cambridge University Press, 1993.
- [21] LAFACE, A., UGAGLIA, L., *Standard classes on the blow-up of \mathbb{P}^n at points in very general position*, Comm. Algebra. 40(6), 2115-2129, 2012.
- [22] LAFACE, A., POSTINGHEL, E., *Secant Varieties of Segre-Veronese embeddings of $(\mathbb{P}^1)^r$* , Mathematische Annalen, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.
- [23] LANG, S., *Undergraduate Algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2004.
- [24] MANFREDINI, V.M., *Defeitos Secantes e o Teorema de Alexander e Hirschowitz*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática e Computação, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2023.
- [25] MANFREDINI, V.M., *Algoritmo: Polítopos, Simplexos e Algoritmos*, 2023, Disponível em https://github.com/Vinicius22111997/Politopo_Simplexo_Algoritmo.git.
- [26] MUNKRES, J. R., *Topology*, Pearson, 2000.
- [27] PLÍNIO, J., MELLO, M. P., MURARI, I., *Introdução à Análise Combinatória*, Ciência Moderna, 2007.
- [28] POSTINGHEL, E., *A new proof of the Alexander-Hirschowitz interpolation theorem*, Ann. Math. Pura Appl. (4) 191(1), 77-94, 2012.
- [29] RUSSO, F., *Tangents and Secants of Algebraic Varieties*, Monographs in Mathematics, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2003.
- [30] SHAFAREVICH, I., *Basic Algebraic Geometry*, Vol. 1 e 2, Springer-Verlag, 2013.
- [31] VAINSENER, I., *Introdução às Curvas Algébricas Planas*, IMPA, Rio de Janeiro, 2017.