

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA**



**UMA NOVA ABORDAGEM PARA REPRESENTAÇÕES E
IDENTIFICAÇÕES DE CLASSES DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-
LINEARES**

Flávia Antunes

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Itajubá – MG.
2007**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

Flávia Antunes

**UMA NOVA ABORDAGEM PARA REPRESENTAÇÕES E
IDENTIFICAÇÕES DE CLASSES DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-
LINEARES**

**Dissertação submetida ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
como parte dos requisitos para obtenção
do Título de Mestre em Ciências em
Engenharia Elétrica.**

**Área de Concentração:
Automação e Sistemas Elétricos Industriais.**

**Orientador:
Prof. Dr. Carlos Alberto Murari Pinheiro.**

Maio de 2007

Itajubá – MG

*Aos meus amados pais,
Raimunda e João, meus
exemplos de vida, pela força e
presença em todos os momentos.*

*Aos meus irmãos, Karina e
Fábio, pelo amor e pela torcida.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por possibilitar a conclusão deste trabalho.

À minha família, pelo amor, apoio e incentivo.

Ao professor Carlos Alberto Murari Pinheiro, um agradecimento especial pela dedicada orientação, por toda colaboração, paciência e inúmeros ensinamentos.

A Nelson Ricardo Mio Saito, por todos esses anos e pelos valiosos conselhos.

A Bruno Sendim Manoel, um grande amigo que cruzou o meu caminho, por todo carinho e auxílio.

À amiga Marilena V. Maruya, pelo incentivo e energia positiva.

A Paulo Ovídio Soares, pelo carinho, apoio e pela torcida.

À Rubiane Heloisa Oliveira, pela amizade e incentivo.

SUMÁRIO

SUMÁRIO.....	i
LISTA DE FIGURAS	iii
LISTA DE TABELAS	iv
LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS.....	v
RESUMO.....	1
ABSTRACT	2
CAPÍTULO 1	3
INTRODUÇÃO.....	3
CAPÍTULO 2	5
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
CAPÍTULO 3	8
CONCEITOS BÁSICOS SOBRE MODELAGEM, IDENTIFICAÇÃO E ANÁLISE DE SISTEMAS DINÂMICOS	8
3.1 Introdução.....	8
3.2 Identificação de Sistemas Dinâmicos.....	9
3.3 Sistemas lineares e suas representações	12
3.3.1 Equação Diferencial	12
3.3.2 Função de Transferência.....	13
3.3.3 Representação no Espaço de Estados	14
3.3.4 Representações Discretas	16
3.4 Sistemas não-lineares e suas representações	20
3.4.1 Série de Volterra.....	23
3.4.2 NARX (Nonlinear autoregressive models with exogenous variables).....	23
3.4.3 NARMAX	24
3.4.4 Modelos de Hammerstein e Wiener	26
3.4.5 Funções Descritivas.....	27
3.4.6 Funções de Base	28
3.4.7 Outros tipos de Representações.....	29
3.5 Estimação de Parâmetros.....	29
3.5.1 Estimador de Mínimos Quadrados	29

CAPÍTULO 4	33
UMA PROPOSTA PARA REPRESENTAÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DE CLASSES DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES	33
CAPÍTULO 5	37
EXEMPLOS DE IDENTIFICAÇÃO DE CLASSE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES COM A PROPOSTA APRESENTADA	37
CAPÍTULO 6	53
CONCLUSÃO	53
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	55
ANEXOS	59
ANEXO A	59
ANEXO B	64
ANEXO C	66
ANEXO D	67

LISTA DE FIGURAS

Fig.3.1 - Procedimento de identificação de sistemas. _____	11
Fig.3.2 - Característica de um sistema linear. _____	12
Fig.3.3 - Não-linearidades do tipo saturação, zona morta e folga. _____	21
Fig.3.4 - Ressonância com saltos na resposta em frequência de um sistema não linear. __	22
Fig.3.5 - Modelo de Hammerstein. _____	26
Fig.3.6 - Modelo de Wiener. _____	26
Fig.3.7 - Modelo Hammerstein-Wiener. _____	26
Fig.3.8 – Diagrama de blocos de modelo FBO. _____	28
Fig.5.2 - Resposta em frequência do sistema com saturação. _____	39
Fig.5.3 - Sistema com zona morta. _____	42
Fig.5.4 - Resposta em frequência do sistema dado por (5.10). _____	44
Fig.5.5 - Resposta a uma entrada senoidal do sistema real e modelo identificado. _____	45
Fig.5.6 - Comparação com um modelo NARMAX. _____	46
Fig.5.7 - Resposta em frequência do sistema dado por (5.14). _____	47
Fig.5.8 - Comparação entre o modelo identificado e (5.14). _____	49
Fig.5.9 - Resposta em frequência do sistema expresso por (5.18). _____	50
Fig.5.10 - Comparação entre o modelo identificado e (5.18). _____	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Ilustração de parâmetros dependentes da entrada.	36
Tabela 5.1 - Valores obtidos da identificação do sistema com saturação.	40
Tabela 5.2 - Comparações de valores das funções (5.5) e (5.6).	41
Tabela 5.3 - Valores da estimação do sistema com zona morta.	42
Tabela 5.4 - Comparações de valores das funções (5.8) e (5.9).	43
Tabela 5.5 - Valores da estimação do sistema (5.10).	44
Tabela 5.6 - Valores da estimação do sistema (5.14).	48
Tabela 5.7 - Valores da estimação do sistema (5.18).	51

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

$u(t)$	Entrada de um sistema
$y(t)$	Saída de um sistema
\dot{x}	$\frac{dx}{dt}$ (derivada temporal)
E.D	Equação diferencial
F.T	Função de transferência
$G(s)$	$\frac{Y(s)}{U(s)}$ (função de transferência de um sistema no domínio s)
z	Operador z
ARX	Autoregressive with exogenous inputs
ARMAX	Autoregressive moving average with exogenous inputs
NARX	Nonlinear autoregressive model with exogenous variables
NARMAX	Nonlinear autoregressive moving average model with exogenous variables
O.E	Output error
FIR	Finite Impulse Response
FFT	Fast Fourier Transform
$N(X, W)$	Função descritiva
$K(u)$	Ganho de um sistema em função da entrada
$P(u)$	Pólo de um sistema em função da entrada
ap	Amplitude do sinal de entrada de um sistema
fr	Frequência do sinal de entrada de um sistema

RESUMO

Nos últimos anos, o interesse pelo estudo de sistemas dinâmicos não-lineares, incluindo sua modelagem e identificação, tem sido crescente. Embora as pesquisas nesse sentido tenham evoluído, existem tópicos relacionados aos sistemas não-lineares que merecem uma análise mais detalhada. Um deles inclui o estudo de modelos matemáticos que representem algumas classes de sistemas não-lineares, o que constitui um dos objetivos desta dissertação.

Este trabalho propõe uma representação nova para algumas classes de sistemas dinâmicos não-lineares. Ela utiliza uma combinação dos conceitos relacionados a modelos de blocos interconectados e a funções de base. A estimação de parâmetros dessa representação é efetuada por técnicas de resposta em frequência, baseando-se no conceito de balanço harmônico.

Com o objetivo de ilustrar e testar a representação proposta, sistemas que possuem parâmetros variáveis em função da amplitude do sinal de entrada são utilizados como exemplos numéricos. Os resultados obtidos são comparados com dados resultantes de outras técnicas conhecidas.

Neste trabalho, são apresentados também conceitos relacionados à modelagem e à identificação de sistemas dinâmicos lineares, não-lineares e estimação de parâmetros.

ABSTRACT

In the last few years, the growth of the academic production about non-linear dynamic systems was noticed. Although the researches evolved, there are still topics that deserve a close analysis. One of them includes the study of mathematical models which represents many non-linear systems and will be the focus of this study.

The purpose is to propose a new representation for non-linear dynamics system classes. It will combine models of interconnected blocks related concepts and base function. The parameters estimation for this model is done through frequency response techniques, based on harmonic balance concepts.

To show and test the proposed model, systems with variable parameterization related to input signal amplitude will be utilized with numeric examples.

In this work, it will be also presented concepts related to the modeling and linear and non-linear dynamic systems identification and parameters estimation.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A modelagem e a identificação de sistemas dinâmicos são campos de estudos com muitas aplicações em várias áreas científicas e tecnológicas, principalmente em análises de estabilidade de sistemas e sistemas de controle em geral. A finalidade principal em se modelar ou identificar um sistema dinâmico é de se obter um modelo matemático que represente as características essenciais do mesmo.

A vantagem de se ter um modelo matemático de um sistema dinâmico é a facilidade de estudar o mesmo sem a necessidade de acesso físico. O comportamento do sistema pode ser reproduzido, dentro de um determinado grau de precisão, por meio de métodos algébricos ou computacionais.

Existem vários modelos matemáticos para representações de sistemas dinâmicos em função de suas características e da qualidade das estimativas esperadas. Um sistema pode ser classificado como linear, não-linear, de parâmetros constantes ou com parâmetros variantes no tempo, etc.

Para sistemas lineares e com parâmetros fixos, existem vários modelos possíveis de serem utilizados e métodos consolidados para estimação de parâmetros de modelagem. Para sistemas não-lineares, os modelos são mais restritivos e dependem do tipo de aplicação, e os métodos de estimação nem sempre são triviais.

A proposta deste trabalho é desenvolver uma representação de modelo para uma classe de sistemas não-lineares que apresente um método de estimação de parâmetros eficaz e que tenha uma interpretação simples.

Esta dissertação está dividida nos capítulos descritos a seguir.

O capítulo 2 mostra uma revisão bibliográfica sobre modelagem e identificação de sistemas não-lineares, apresentando algumas características e aplicações das principais técnicas e modelos utilizados para representar este tipo de sistemas.

No capítulo 3 são apresentadas as representações matemáticas mais utilizadas para descrever sistemas lineares e não-lineares. Este capítulo também trata de identificação de sistemas e estimação de parâmetros.

O capítulo 4 apresenta a proposta para representação e identificação de classes de sistemas dinâmicos não-lineares que utiliza uma combinação de conceitos de modelos interconectados e de funções de base. O procedimento utilizado para a estimação de parâmetros da representação em questão também é apresentado.

No capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos com a aplicação da representação proposta no trabalho em exemplos de classes de sistemas não-lineares. Foram discutidos e comparados dados resultantes da aplicação com métodos conhecidos.

O capítulo 6 apresenta as conclusões e considerações finais.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo traz uma breve resenha bibliográfica sobre modelagem e identificação de sistemas não-lineares.

Os sistemas dinâmicos encontrados na prática são, em última análise, não-lineares [Aguirre (2000)]. Em muitas aplicações, a utilização de representações lineares na modelagem e identificação de tais sistemas apresenta resultados satisfatórios. No entanto, existem casos em que os modelos lineares devem ser substituídos por representações não-lineares, pois estas são capazes de reproduzir certos fenômenos e comportamentos mais complexos dos sistemas reais. Diante desse fato, observa-se, nas últimas décadas, um interesse crescente no desenvolvimento e utilização de modelos não-lineares para caracterizar sistemas dinâmicos.

Uma abordagem muito utilizada para descrever sistemas não-lineares é a série de Volterra [Trendafilova et al. (2000)]. Utilizada no domínio do tempo ou da frequência, a série de Volterra é um modelo interessante para a representação de sistemas não-lineares [Ralston e Zoubir (1995)]. A conceituação básica e aspectos fundamentais sobre esta técnica de modelagem é apresentada em detalhes em: Evans et al. (1996), Weiss et al. (1998) e Chiras et. al. (2002). Em Hassouna et al. (2001), utiliza-se a série básica truncada em seus primeiros termos com “kernels” expandidos em bases ortonormais multidimensionais, generalizadas para a identificação de sistemas não-lineares contínuos com função entrada-saída regular e homogênea.

Nos anos 50, o método no domínio da frequência para sistemas não-lineares baseado na série de Volterra foi inicialmente estabelecido [Lang e Billings (2000)]. Em Németh et al. (2002), um exemplo deste tipo de aplicação é apresentado e detalhado.

Embora amplamente aceita, a estrutura da série de Volterra possui limitações bem documentadas que incluem a incapacidade de modelar não-linearidades como: histerese, zona morta e backlash [Weiss et al. (1998)].

Para a representação de sistemas não-lineares, além da série de Volterra, pode-se destacar também os modelos de blocos interconectados. Estes modelos são compostos pela conexão entre dois blocos, sendo que um deles representa uma dinâmica linear e o outro uma não-linearidade estática [Coelho et al. (2002)]. A sequência em que os blocos estão conectados caracteriza o modelo como Hammerstein ou Wiener. Devido à simplicidade e também por possibilitarem a utilização de técnicas de identificação lineares já consolidadas, os modelos de blocos interconectados são utilizados em numerosas aplicações. Uma grande quantidade de publicações apresenta a utilização dos modelos Hammerstein e Wiener. Por exemplo, em Alonge (2003) é apresentado um método para identificação de um sistema não-linear em que o modelo Hammerstein é utilizado para representar a não-linearidade estática, seguido por um modelo ARX representando a parte linear. Greblick e Pawlack (1989) mostraram como identificar um modelo Hammerstein não-linear discreto no tempo. Em Er-Wei Bai (2003) foi proposta uma aproximação no domínio da frequência para modelos Hammerstein. Em Greblick (1992), utiliza-se identificação não-paramétrica para identificar a não-linearidade em modelos de Wiener. Em Vörös (2003a) realiza-se a modelagem e a identificação de parâmetros de modelos de Wiener com não-linearidades fortemente assimétricas.

Um outro modelo utilizado na representação de sistemas não-lineares é o NARMAX. Este modelo foi introduzido na década de 80 por Leontaritis e Billings (1985) como uma maneira de descrever a relação entrada-saída de um sistema não-linear [Chiras et al. (2002)]. A representação NARMAX descreve sistemas não-lineares em termos de equações a diferenças nos parâmetros, relacionando a saída atual por combinações (possivelmente não-lineares) de entradas e saídas prévias [Kukreja et al (2003)]. Os modelos baseados em equações a diferenças constituem uma das mais importantes classes de modelos matemáticos de sistemas lineares ou não-lineares [Coelho et al. (2002)].

O modelo NARMAX é capaz de representar uma classe ampla de sistemas não-lineares. Vários textos abordaram aplicações práticas com esta representação: Rahim et al. (2003) para modelagem de motores elétricos; Chau e Chan (1995) para sistemas eletrônicos de potência. Em Chiras et al. (2001), é apresentada a estimação de um modelo NARMAX de uma turbina a gás. Em Furtado et al. (2002), obteve-se um modelo contínuo no domínio do tempo na forma de equações diferenciais de um sistema não-linear a partir de modelos discretos polinomiais NARMAX.

Aspectos teóricos e outras aplicações de modelos NARMAX podem ser vistos em Kukreja (2003) e Iglesias et al. (2004).

Muitas técnicas de identificação de sistemas (no domínio do tempo ou da frequência) foram propostas nos últimos anos. Essas técnicas possuem vantagens e desvantagens e são complementares entre si em muitos aspectos.

A identificação no domínio da frequência apresenta uma série de vantagens se existe interesse em uma interpretação física do modelo, desde que um modelo no domínio “s” possa ser identificado e seus pólos e zeros possam ser relacionados aos parâmetros físicos do sistema. Além disso, no domínio da frequência, os efeitos das não-linearidades podem ser detectados pela presença de saídas harmônicas [Evans et al. (1994)]. A técnica de identificação no domínio da frequência apresenta também maior facilidade na redução do ruído no volume de dados processados [Ades et al. (2004)].

Um tópico importante quando se diz respeito à identificação no domínio da frequência é a chamada técnica dos multisenos, que consiste de uma coleção de senóides geradas simultaneamente, tipicamente com um intervalo de frequência de valores ímpares. Esses sinais podem ser utilizados no desenvolvimento de modelos e identificação de sistemas [Remley et al (2003)], principalmente quando o desempenho do sistema no domínio da frequência é objeto de estudo. Em Weiss et al. (1998), sinais multiseno periódicos são utilizados na identificação de sistemas não-lineares em cascata. Crama e Schoukens (2001) utilizam sinais multiseno de fase aleatória para estimação inicial de sistemas Wiener e Hammerstein. Evans e Rees (2000) examinam os efeitos de distorções não-lineares em funções de resposta em frequência utilizando sinais de teste multiseno.

Conforme citado anteriormente, as pesquisas relacionadas à modelagem e identificação de sistemas não-lineares têm evoluído bastante. No entanto, os sistemas não-lineares, diferentemente dos lineares, não apresentam um modelo matemático geral e sistemático que possa representar várias classes de problemas. Esse fato surge como uma das motivações do desenvolvimento desta dissertação.

CAPÍTULO 3

CONCEITOS BÁSICOS SOBRE MODELAGEM E IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

3.1 Introdução

Este capítulo aborda conceitos básicos referentes à modelagem matemática e identificação de sistemas dinâmicos lineares e não-lineares. As representações matemáticas mais utilizadas serão apresentadas.

Um sistema pode ser entendido como uma combinação de componentes (físicos, biológicos, econômicos, entre outros) que interagem e desempenham uma determinada função [Ogata, 1998; D'azzo & Houpis, 1978]. Aqueles que são constituídos por variáveis dependentes do tempo são chamados de sistemas dinâmicos.

Geralmente, a primeira etapa da análise de um sistema dinâmico consiste na sua modelagem matemática. Modelar matematicamente um sistema significa obter uma representação análoga matemática que descreva as características e propriedades principais observadas no sistema. A representação matemática de um sistema é muito útil, pois a partir dela pode-se utilizar ferramentas computacionais para a realização de estudos sobre características dinâmicas, estabilidade, desempenho, estratégias de controle, etc. sem a necessidade de acessá-lo diretamente.

A determinação dos aspectos do sistema que serão reproduzidos em um modelo depende, principalmente, da finalidade para a qual o mesmo é requerido. Para tanto, pode-se empregar vários tipos de modelos. Os mais comuns são: modelos estáticos e dinâmicos; discretos e contínuos; autônomos e não-autônomos; monovariáveis e multivariáveis; determinísticos e estocásticos; paramétricos e não-paramétricos. Por exemplo, quando um sistema possui uma dinâmica muito rápida com relação à escala de tempo de interesse, pode-se preferir representá-lo por um modelo estático ao invés de dinâmico.

Como o modelo matemático é uma representação aproximada de um sistema, geralmente, pode-se ter uma “família” de modelos e não uma única representação que reproduza tal sistema. Desse modo, torna-se necessária a escolha de um modelo para a representação mais adequada para uma determinada aplicação. Pode-se afirmar que, a obtenção de um modelo matemático satisfatório para as especificações e objetivos desejados é a parte mais importante na modelagem e identificação de sistemas.

Para a construção de um modelo matemático pode-se utilizar diversas técnicas. Uma delas é a modelagem chamada “caixa branca”, também conhecida como modelagem fenomenológica ou conceitual. Esse tipo de modelagem se baseia nas propriedades e leis físicas que regem os fenômenos observados no sistema. Para utilizar essa técnica deve-se conhecer bem as características do sistema a ser modelado. Por exemplo, a modelagem matemática de um circuito elétrico analógico pode ser baseada nas leis de Kirchhoff, um sistema mecânico pode ser modelado baseando-se nas leis de Newton.

Quando o acesso à composição física do sistema é difícil, ou este é complexo, a modelagem caixa branca pode se tornar trabalhosa, demorada e, portanto, inviável. Sendo assim, torna-se necessária a utilização de técnicas alternativas que requeiram pouco ou nenhum conhecimento prévio do sistema para a obtenção do modelo. Esse tipo de modelagem é conhecido como modelagem empírica ou “caixa preta”. A área do conhecimento que estuda esse tipo de técnicas de modelagem é conhecida como identificação de sistemas.

3.2 Identificação de Sistemas Dinâmicos

A identificação de sistemas consiste de um conjunto de procedimentos visando gerar modelos matemáticos de sistemas dinâmicos através de seus dados de entrada e saída. Basicamente a identificação tenta responder à questão: que modelo ao ser excitado por uma entrada u resulta na saída y ? [Aguirre, 2000]

O processo de identificação de sistemas é constituído por algumas etapas:

- 1. Coleta de dados** – Consiste da geração/obtenção dos dados de entrada e saída do sistema que serão utilizados para a construção do modelo. Os passos importantes dessa etapa são: a realização de experimentos para a coleta de dados; a escolha adequada dos sinais de excitação e do tempo de amostragem. Condições experimentais bem projetadas são fundamentais para a qualidade final dos dados adquiridos.

- 2. Escolha da representação do modelo** – Observando as características do sistema a ser modelado (por exemplo, se ele é linear ou não-linear), pode-se obter, dentre as diversas possibilidades, uma determinada representação que seja a mais adequada para modelar esse sistema. Como exemplos de representações, pode-se citar: equações diferenciais, funções de transferência, modelos ARX, ARMAX, NARX, NARMAX, etc.
- 3. Escolha da estrutura do modelo** – Após a escolha da representação do modelo, determina-se como será a estrutura dessa representação. Isso corresponde a escolher, por exemplo, a dimensão do modelo. Isto em uma representação contínua, no número de pólos e zeros em uma função de transferência, ou número de termos em uma representação do tipo NARMAX, ou quantidade de neurônios em uma rede neural, etc. Essa etapa, juntamente com a anterior (escolha da representação do modelo), é fundamental no processo de identificação de um sistema;
- 4. Estimação de parâmetros** – Essa etapa tem a função de determinar valores adequados para os parâmetros que compõem o modelo, com base nas informações resultantes das etapas anteriores. Sendo assim, nessa fase, ocorre a escolha e a utilização de algoritmos para realizar a estimação desses parâmetros. A maior parte dos algoritmos utilizados para esse fim é baseada no método clássico dos mínimos quadrados e suas variantes. A etapa de estimação de parâmetros resulta, então, na determinação de um modelo (dentro de um conjunto de candidatos) que represente adequadamente o sistema em questão;
- 5. Validação do modelo** – Com a obtenção de um determinado modelo para o sistema, torna-se necessário verificar se o mesmo é válido. Isto é, se o modelo incorpora as características de interesse do sistema original. O resultado da validação depende da aplicação pretendida para o modelo e da quantidade de informação que se tem do sistema original. Uma maneira comum de se validar modelos é a comparação da simulação do modelo obtido com os dados reais do sistema. Para uma melhor avaliação da qualidade do modelo, utiliza-se conjuntos de dados diferentes para a sua construção e para a sua validação.

Pode-se dizer que, de maneira geral, o processo de identificação de sistemas, envolve os seguintes fatores: um sistema, uma condição experimental, uma estrutura de modelo, um método de identificação e um critério de validação.

Um esquema representando as etapas da identificação de sistemas está ilustrado na Figura 3.1[Ljung, 1999]:

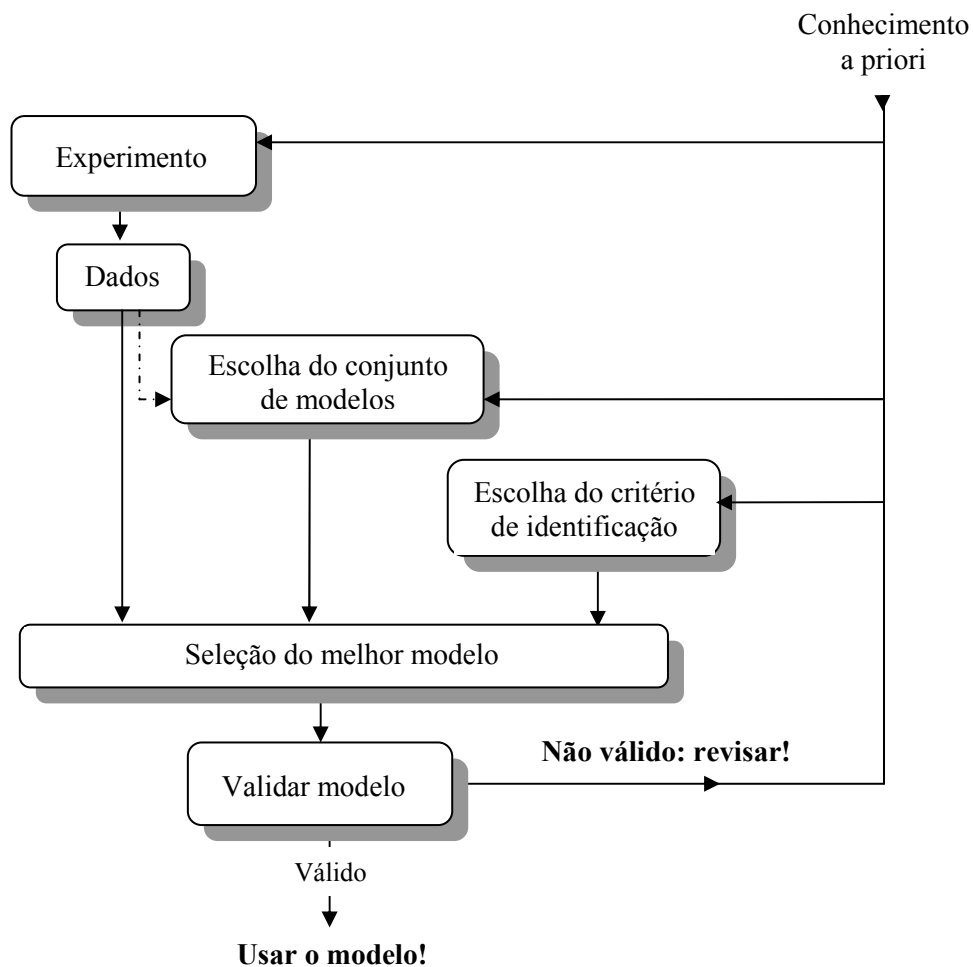


Fig.3.1 - Procedimento de identificação de sistemas.

Conforme a Figura 3.1, o processo de identificação pode ser descrito resumidamente da seguinte maneira: realiza-se um experimento para a coleta de dados do sistema; com base nos dados, escolhe-se um conjunto de modelos candidatos para a representação do sistema; determina-se qual é o melhor modelo dentro desse conjunto de acordo com as especificações desejadas e realiza-se testes de validação do modelo. Se ele não for satisfatório, deve-se revisar os passos envolvidos na sua obtenção.

3.3 Sistemas lineares e suas representações

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados em dois grupos básicos: sistemas lineares e sistemas não-lineares. Um sistema é considerado linear quando se aplica o princípio da superposição, ou seja, a resposta de um sistema linear ao ser excitado simultaneamente por diferentes entradas é igual à soma das respostas desse sistema para cada entrada considerada individualmente [Ogata, 1998; Aguirre, 2000]. Essa característica dos sistemas lineares está ilustrada na Fig 3.2 [Coelho, 1999]:

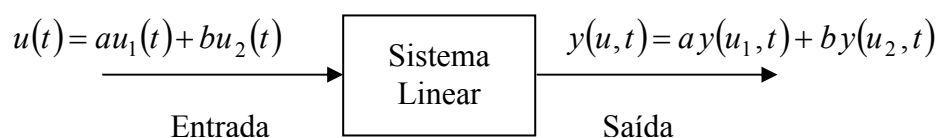


Fig.3.2 - Característica de um sistema linear.

Um sistema linear pode ser expresso de diversas maneiras. Dependendo do sistema em questão e das características de interesse, uma representação pode ser mais adequada do que outra. A seguir, são apresentadas as representações mais comuns para sistemas lineares.

3.3.1 Equação Diferencial

O comportamento dinâmico de um sistema contínuo no tempo pode ser expresso por equações diferenciais. A equação diferencial (E.D) de um sistema dinâmico é normalmente obtida considerando-se as leis físicas que regem tal sistema.

Um sistema linear invariante no tempo é aquele em que um deslocamento temporal ao sinal de entrada causa o mesmo deslocamento temporal no sinal de saída (sua estrutura e parâmetros não se alteram com o tempo) e pode ser representado pela seguinte equação diferencial:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x \quad (n \geq m) \quad (3.1)$$

- y é a saída do sistema e x é a entrada;
- os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ e $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m$ são constantes dadas por combinações dos parâmetros dos componentes do sistema.

Diferentemente dos sistemas invariantes, os sistemas variantes no tempo possuem alteração em seus parâmetros e estrutura ao longo do tempo. As equações diferenciais que podem representá-los possuem coeficientes que são funções do tempo.

3.3.2 Função de Transferência

A função de transferência (F.T) é uma das representações mais utilizadas e mais importantes na modelagem de sistemas lineares. Ela descreve a relação dinâmica de causa e efeito entre uma entrada e uma saída de um determinado sistema [Aguirre, 2000].

A F.T de um sistema é obtida aplicando-se a transformada de Laplace (L) à equação diferencial que descreve tal sistema, considerando-se condições iniciais nulas. A aplicação do conceito de função de transferência se restringe a sistemas lineares invariantes no tempo.

Utilizando-se a equação diferencial (3.1) e aplicando a transformada de Laplace a ambos os seus membros, obtém-se:

$$FT = G(S) = \frac{L[Saída]}{L[Entrada]} \Big|_{\text{condições iniciais}=0} = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{b_0 S^m + b_1 S^{m-1} + K + b_{m-1} S + b_m}{a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + K + a_{n-1} S + a_n} \quad (3.2)$$

A expressão (3.2) corresponde à função de transferência do sistema, dada pela relação entre a transformada de Laplace das funções da entrada e da saída. As raízes do numerador são chamadas de zeros e as raízes do denominador de pólos da F.T. A ordem da F.T é dada pelo valor do maior expoente do denominador, ou seja, do número de pólos (n).

A função de transferência de um sistema também pode ser definida como a transformada de Laplace de sua resposta ao impulso com condições iniciais nulas [Ogata, 1998; Aguirre, 2000]. Sabe-se que a transformada de Laplace de um impulso ideal tem valor unitário, $X(s) = 1$. Dessa forma, a transformada da resposta de um sistema excitado por um impulso unitário é dada por:

$$G(S) = \frac{L[Saída]}{L[Entrada]} \Big|_{\text{condições iniciais}=0} = Y(S) \quad (3.3)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace em (3.3), obtém-se a resposta do sistema ao impulso unitário aplicado, ou seja, a resposta impulsional do sistema:

$$L^{-1}[G(S)] = g(t) \quad (3.4)$$

Se a transformada for aplicada a $[g(t)]$ em (3.4), isso resultará na função de transferência do sistema. Com isso, pode-se observar que para um sistema linear e invariante no tempo, a resposta ao impulso e a F.T possuem a mesma informação sobre as propriedades dinâmicas do sistema. Sendo assim, idealmente, excitando um sistema com um impulso unitário e medindo a sua resposta, pode-se obter informação completa a respeito de suas características.

3.3.3 Representação no Espaço de Estados

Conforme visto anteriormente, uma função de transferência descreve relações de entrada-saída de um sistema, não fornecendo informações mais detalhadas a respeito do que ocorre no interior do sistema (entre os pontos de entrada e os pontos de saída).

A representação no espaço de estados (diferentemente da F.T) fornece tais informações, pois modela também relações entre as variáveis internas ao sistema. A seguir, são apresentadas algumas definições relacionadas a esse tipo de representação:

- **Estado** – O estado de um sistema é uma estrutura matemática constituída por um conjunto de n variáveis: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots, x_n(t)$, chamadas variáveis de estado, tal que com os valores iniciais $x_i(t_0)$ deste conjunto, as excitações do sistema $u_j(t)$ e as equações que descrevem sua dinâmica, é possível conhecer os estados futuros e a saída futura do sistema [D'azzo & Houpis, 1982; Dorf & Bishop, 2001]
- **Variáveis de estado** – são as grandezas cujo conjunto de valores determina o estado do sistema [Ogata, 1998]. Não é necessário que tais grandezas sejam fisicamente mensuráveis ou observáveis, elas podem ser grandezas puramente matemáticas;
- **Vetor de estado** – É um vetor n -dimensional $x(t)$ cujos componentes são as n variáveis de estado necessárias para descrever o comportamento do sistema;
- **Espaço de estado** – É o espaço n -dimensional cujos eixos de seu sistema de coordenadas são representados pelas componentes do vetor de estado;
- **Equações de estado** – Conjunto de n equações diferenciais de 1ª ordem, sendo n o número de variáveis de estado independentes;

A análise em espaço de estados envolve três tipos de variáveis na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado. Deve-se observar que a representação em espaço de estados de um sistema não é única, ou seja, pode-se ter mais de um modelo em espaço de estados para o mesmo sistema. Uma representação linear matricial típica em espaço de estados tem a seguinte estrutura:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{[equação de estado]} \quad (3.5)$$

$$y = Cx + Du \quad \text{[equação de saída]} \quad (3.6)$$

Os componentes das equações (3.5) e (3.6) são dados por:

- x – vetor de estado n-dimensional, com $x \in \mathfrak{R}^n$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \equiv x$$

- \dot{x} - derivada temporal ($\dot{x} = dx/dt$)
- $u(t) \in \mathfrak{R}^r$ é o vetor de entradas formado por r funções temporais

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

- $y(t) \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor m-dimensional de saídas medidas

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

- A - matriz de estado ($n \times n$)
- B – matriz de entrada ($n \times r$)
- C – matriz de saída ($m \times n$)
- D – matriz de transmissão direta ($m \times r$)

O sistema representado por (3.5) e (3.6) será multivariável se $r > 1$ e/ou $m > 1$ e monovariável, caso $r = 1$ e $m = 1$.

Através da representação em espaço de estados, é possível obter a função de transferência de um sistema (e vice-versa). Lembrando que a F.T relaciona as transformadas de Laplace da saída e da entrada, que aplicada nas equações (3.5) e (3.6), para condições iniciais nulas, vem:

$$sX(s) - AX(s) = BX(s) \quad (3.7)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (3.8)$$

Manipulando-se a equação (3.7) e colocando o resultado na (3.8), tem-se:

$$(Is - A)X(s) = BU(s) \quad (3.9)$$

$$X(s) = (Is - A)^{-1} BU(s) \quad (3.10)$$

$$Y(s) = C(Is - A)^{-1} BU(s) + DU(s) \quad (3.11)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(Is - A)^{-1} B + D \quad (3.12)$$

A expressão (3.12) é a função de transferência dada por A, B, C e D. O sistema considerado para a obtenção de (3.12) é monovariável. No caso de sistemas multivariáveis, a relação $Y(s)/U(s)$ não será apenas a razão entre dois polinômios em s , mas poderá ser representada como a razão entre polinômios de matrizes em s [Aguirre, 2000]. Em geral, a representação em espaço de estados é mais conveniente para representar sistemas multivariáveis do que a função ou matriz de transferência.

3.3.4 Representações Discretas

As representações apresentadas nas seções (3.3.1), (3.3.2) e (3.3.3) são utilizadas para sistemas contínuos no tempo (sistemas cujas variáveis apresentam variações contínuas ou são observadas continuamente no tempo).

Os sistemas cuja informação existe apenas em instantes discretos ou amostrados no tempo são chamados de sistemas com modelos discretos. Esses modelos são, geralmente, representados por equações a diferenças (3.13a), ou por funções de transferência com o

operador z (3.13b) ou por variáveis de estado discretas. A variável T é o tempo de amostragem e pode ser omitido nas representações matemáticas.

$$y(kT) = a_1 y((k-1)T) + K + a_n y((k-n)T) + b_1 u((k-1)T) + K + b_n u((k-n)T) \quad (3.13a)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} K + b_{n-1} z + b_n}{1 - a_1 z^{n-1} - a_2 z^{n-2} K - a_{n-1} z - a_n} \quad (3.13b)$$

Um modelo genérico para representar sistemas dinâmicos adequadamente para identificação de sistemas é dado por:

$$A(q)y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}v(k) \quad (3.14)$$

- $u(k)$ e $y(k)$ representam as entradas e saídas dos sistemas, respectivamente;
- q representa o operador z (atraso de transporte devido à amostragem dos sinais);
- $v(k)$ representa uma variável aleatória que modela ruídos, erros ou incertezas nas medições do sistema.

Os termos denotados por $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$, $F(q)$ são definidos por:

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + K + a_{ny} q^{-ny}; \quad (3.14a)$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + K + b_{nu} q^{-nu}; \quad (3.14b)$$

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + K + c_{nc} q^{-nc}; \quad (3.14c)$$

$$D(q) = 1 + d_1 q^{-1} + K + d_{nd} q^{-nd}; \quad (3.14d)$$

$$F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + K + f_{nf} q^{-nf}; \quad (3.14e)$$

Dependendo de quais dos termos apresentados acima são utilizados, diversos modelos podem ser definidos. Esses modelos são apresentados a seguir.

3.3.4.1 Modelo de resposta ao impulso finita

Também conhecido como FIR (Finite impulse response), este modelo utiliza a resposta ao impulso $h(\cdot)$ de um sistema através de um número finito de coeficientes. Esta expressão é a representação de um somatório de convolução discreto.

$$y(k) = \sum_{j=0}^M h(j)u(k-j) + e(k) \quad (3.15)$$

- $y(k)$ é a saída do sistema; $u(\cdot)$ a entrada do mesmo.
- $h(j)$ são os coeficientes da resposta impulsiva;
- M é o número de termos tal que $h(j)=0, \forall j > M$;
- $e(k)$ consiste no ruído ou incertezas nas medições do sistema.

O modelo FIR pode ser obtido a partir do modelo geral (3.15), com $A(q) = C(q) = D(q) = F(q) = 1$ e $B(q)$ um polinômio arbitrário de ordem M , ou seja, $n_u=M$.

Sendo assim, a expressão deste modelo fica:

$$y(k) = B(q)u(k) + e(k) \quad (3.16)$$

Como $C(q)/D(q) = 1$, o ruído $e(k)$ é branco (sinal puramente aleatório), pois de (3.15), $e(k) = v(k)$.

3.3.4.2 ARX (Autoregressive with exogenous inputs)

O ARX, também conhecido como modelo auto-regressivo com entradas externas, é expresso da seguinte maneira:

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + v(k) \quad (3.17)$$

A expressão (3.17) é resultante do modelo geral (3.15), tomando-se $C(q) = D(q) = F(q) = 1$ e $A(q)$ e $B(q)$ polinômios arbitrários.

Pode-se representar a equação (3.17) explicitando as funções de transferência do sistema $B(q)/A(q)$ e do ruído $1/A(q)$:

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{1}{A(q)}v(k) \quad (3.18)$$

O ARX pertence à classe de modelos de erro na equação, pois o ruído $v(k)$ aparece diretamente na equação (3.18). Esse ruído não é branco, ele é modelado como ruído branco filtrado por um filtro auto-regressivo.

A representação do ARX em equação a diferenças tem a seguinte forma:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_{ny} u(k-ny) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_{nu} u(k-nu) + e(k) \quad (3.19)$$

3.3.4.3 ARMAX (Autoregressive moving average with exogenous inputs)

O modelo auto-regressivo com média móvel e entradas exógenas, conhecido como ARMAX, possui a seguinte representação:

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)v(k) \quad (3.20)$$

A equação (3.20) é obtida do modelo geral (3.15), considerando-se $D(q) = F(q) = 1$ e $A(q)$, $B(q)$ e $C(q)$ polinômios arbitrários. Outras maneiras de se representar a equação (3.20) são as seguintes:

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{A(q)}v(k) \quad (3.21)$$

$$y(k) = H(q)u(k) + e(k) \quad (3.22)$$

No ARMAX, o erro da equação é modelado como um processo de média móvel e o ruído adicionado à saída, $e(k)$ é modelado como ruído branco filtrado por um filtro ARMA. O ARMAX também faz parte do grupo de modelos de erro na equação.

A representação do ARMAX em equação a diferenças é dada por:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_{ny} u(k-ny) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_{nu} u(k-nu) + e(k) + c_1 e(k-1) + c_2 e(k-2) + \dots + c_{nc} e(k-nc) \quad (3.23)$$

Por exemplo, a equação a diferenças de um modelo com um termo de saída e um termo de entrada das amostras anteriores e, desprezando-se erros, ruídos e incertezas nas medidas é dada por:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) \quad (3.24)$$

3.3.4.4 Modelo de erro na saída (OE – Output error)

A expressão desse modelo resulta do modelo geral (3.15), com $A(q) = C(q) = D(q) = 1$ e $B(q)$ e $F(q)$ polinômios arbitrários. Sendo assim, tem-se:

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)} u(k) + v(k) \quad (3.25)$$

Em (3.25), ruído branco $v(k)$ é adicionado diretamente à saída do sistema, o que justifica o nome dessa classe de modelos.

3.3.4.5 Modelo Box-Jenkins

Este modelo foi proposto por Box e Jenkins em 1970 e é também considerado um modelo do tipo erro na saída. O modelo Box-Jenkins pode ser obtido a partir do modelo geral (3.15), com $A(q) = 1$ e os demais polinômios arbitrários. A expressão deste modelo é dada por:

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)} u(k) + \frac{C(q)}{D(q)} v(k) \quad (3.26)$$

As funções de transferência do sistema $B(q)/F(q)$ e do ruído $C(q)/D(q)$ neste modelo, assim como nos modelos de erro na saída, são independentemente parametrizadas, isto é, não possuem parâmetros comuns.

3.4 Sistemas não-lineares e suas representações

Um sistema é considerado não-linear quando o princípio da superposição não é aplicável ao mesmo [Ogata, 1982; Phillips & Harbor, 1996; Aguirre, 2000].

Os sistemas não-lineares contêm não-linearidades que podem ser inerentes ou intencionais. As inerentes são aquelas não-linearidades inevitáveis nos sistemas. Como exemplo de não-linearidades pode-se citar:

- Saturação
- Zona morta
- Histerese
- Folga (backlash)
- Etc.

A Fig 3.3 ilustra graficamente algumas destas não-linearidades.

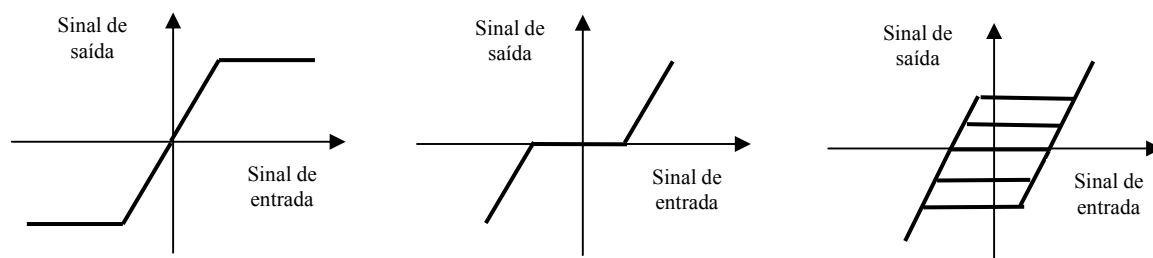


Fig.3.3 - Não-linearidades do tipo saturação, zona morta e folga.

As não-linearidades intencionais são aquelas inseridas propositalmente em um sistema com o objetivo de alterar suas características dinâmicas, ou então para efeito de modelagem sua representação, ou nas duas situações.

Uma das principais características de sistemas não-lineares é que o comportamento de sua resposta é dependente da amplitude de entrada. Por exemplo, um sistema não-linear pode ter comportamentos distintos para o mesmo tipo de entrada com amplitudes diferentes, ou ser estável para um tipo de entrada e instável para outro.

Outras características que podem ser encontradas em sistemas não-lineares são apresentadas a seguir [Phillips & Harbor, 1996]:

- **Ciclo-limite** (oscilação auto-excitada) – É uma oscilação periódica. Essa oscilação é independente das condições iniciais. Pode-se encontrar dois tipos de ciclo-limite em um sistema não-linear: o ciclo-limite estável e o instável. O ciclo-limite estável é aquele que retorna ao seu estado original de equilíbrio. Por outro lado, se a amplitude ou a frequência da oscilação aumentar ou diminuir até que outro estado de equilíbrio seja alcançado, o ciclo-limite é chamado de instável;
- **Resposta harmônica e sub-harmônica a uma entrada periódica** – Um sistema não-linear, submetido a uma entrada periódica, pode apresentar uma resposta também periódica cuja frequência é uma sub-harmônica ou uma harmônica da frequência de entrada. Por exemplo, uma entrada com uma frequência de 20 Hz pode resultar em uma resposta de 10 Hz (sub-harmônica) ou de 40 Hz (harmônica);
- **Ressonância com saltos** – Considere um sistema não-linear excitado por uma senóide de amplitude constante. Quando a frequência desse sinal é aumentada, observa-se que ocorre uma descontinuidade na amplitude da resposta do sistema. Quando a frequência é diminuída, ocorre, novamente, uma descontinuidade

(salto), mas em uma frequência diferente. Esse fenômeno é chamado de ressonância com saltos e está ilustrado na Fig 3.4;

- **Múltiplos estados de equilíbrio** – Em um sistema linear estável, os estados tendem a zero (a origem dos espaços) com o passar do tempo e com as entrada nulas no sistema. Para um sistema não-linear estável, pode haver um número de estados diferentes, exceto para $x = 0$, para o qual o sistema se aproxima considerando-se as mesmas condições. Esses estados são chamados de estados de equilíbrio e o estado para o qual o sistema irá se aproximar é determinado pelas condições iniciais.

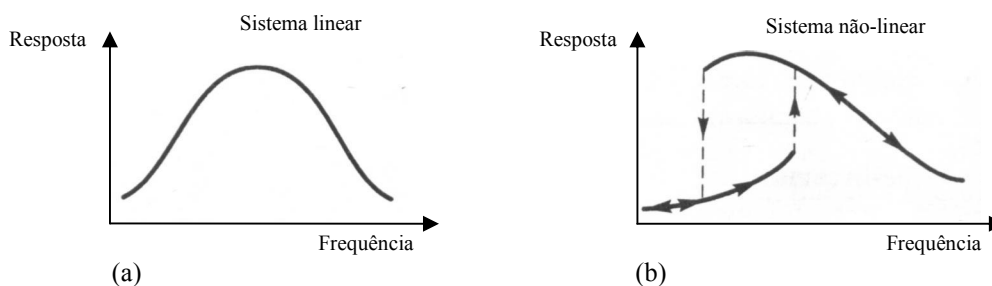


Fig.3.4 - Ressonância com saltos na resposta em frequência de um sistema não linear.

Ciclo-limite e múltiplos estados de equilíbrio são características não-lineares complexas e o estudo das mesmas não é escopo deste trabalho.

Os sistemas dinâmicos reais são, em sua grande maioria, não-lineares. Os sistemas não-lineares são freqüentemente representados por aproximações lineares em pontos determinados de operação, devido à simplicidade do modelo resultante. A utilização de aproximações lineares é muitas vezes satisfatória. No entanto, existem certos regimes dinâmicos apresentados pelos sistemas não-lineares que os modelos lineares não conseguem representar. Sendo assim, mesmo com um aumento na complexidade matemática dos modelos e dos algoritmos utilizados, deve-se optar pelas representações não-lineares.

As representações não-lineares mais comuns são descritas a seguir.

3.4.1 Série de Volterra

Uma classe ampla de sistemas não-lineares pode ser representada pela série de Volterra. Para um sistema com saída $y(t)$ e entrada $u(t)$, essa representação é dada por:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) d\tau_i \quad (3.27)$$

- $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ é conhecido como kernel Volterra n -dimensional. As funções h_n são generalizações não-lineares da resposta ao impulso. Para um sistema linear, $n=1$ e a equação (3.27) se reduz à integral de convolução.

A representação Volterra no domínio s é obtida aplicando-se a transformada multidimensional de Laplace em (3.27):

$$H(s_1, \dots, s_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \cdot e^{-(s_1\tau_1 + \dots + s_n\tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (3.28)$$

A representação utilizando séries de Volterra é apropriada apenas para sistemas não-lineares de ordem reduzida, pois a quantidade de cálculos e parâmetros a determinar é muito grande em sistemas de ordem superior. Isso acontece porque a série de Volterra expressa a saída de um sistema apenas em função da sua entrada. Além disso, em sistemas fortemente não-lineares, as séries podem divergir [Schoukens & Van der Eijnde, 1989]. Outro aspecto relacionado à representação através de série de Volterra é que esta não é capaz de modelar alguns comportamentos não-lineares, tais como histerese, zona morta, backlash, etc.

3.4.2 NARX (Nonlinear autoregressive models with exogenous variables)

Diferentemente da série de Volterra, para a determinação da saída do sistema os modelos NARX utilizam valores prévios da entrada e também valores prévios da própria saída (recorrência ou auto-regressão da saída). Com isso, o número de parâmetros a determinar é reduzido.

A modelagem NARX é um modelo discreto no tempo e possui a seguinte representação:

$$y(k) = F[y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-d), \dots, u(k-n_u)] \quad (3.29)$$

- $y(k)$ e $u(k)$ são a saída e a entrada do sistema, respectivamente;
- n_y , n_u e d são os maiores atrasos em y e em u , respectivamente;
- F é uma função não-linear.

A forma (3.29) é uma expressão geral. Uma outra representação possível é o modelo NARX polinomial dado por:

$$y(k) = \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^m \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_1, K, n_m) \prod_{i=1}^p y(k - n_i) \prod_{i=p+1}^m u(k - n_i), \quad (3.30)$$

sendo que:

- $\sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} \equiv \sum_{n_2=1}^{n_y} K \sum_{n_m=1}^{n_u}$
- l é o grau de não-linearidade da função F ;
- m é a ordem da representação, tal que $(0 \leq m \leq l)$;
- p representa o número de termos multiplicativos $y(k-i)$;
- $(m-p)$ representa o número de termos multiplicativos $u(k-i)$;
- $c_{p, m-p}(n_1, \dots, n_m)$ são os parâmetros a serem estimados. com (n_1, \dots, n_m) que são os respectivos atrasos nos termos;
- n_u se refere a fatores do tipo $u(k-n_i)$;
- n_y se refere a fatores do tipo $y(k-n_i)$.

3.4.3 NARMAX

O modelo NARMAX (Nonlinear autoregressive moving average model with exogenous variables) é o modelo NARX com termos de ruído incluídos. A sua representação inclui termos que combinam entradas, saídas e o erro do sistema modelado, conforme a equação (3.31):

$$y(k) = F[y(k-1), K, y(k-n_y), u(k-\tau_d), K, u(k-n_u), e(k), e(k-1), K, e(k-n_e)] \quad (3.31)$$

- $y(k)$, $u(k)$ e $e(k)$ são a saída, a entrada e o ruído, respectivamente;

- n_y , n_u e τ_d são os maiores atrasos em y e em u , respectivamente;
- n_e é o maior atraso no modelo de ruído;
- F é uma função não-linear.

No modelo NARMAX (assim como no NARX), a função F pode ser modelada por um modelo polinomial dado por:

$$y(k) = \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^m \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_1, K, n_m) \prod_{i=1}^p y(k - n_i) \prod_{i=p+1}^m u(k - n_i) \prod_{q=1}^{n_e} e(k - q) \quad (3.32)$$

onde:

- $\sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} \equiv \sum_{n_2=1}^{n_y} K \sum_{n_m=1}^{n_u}$
- l é o grau de não-linearidade da função F ;
- m é a ordem da representação, tal que $(0 \leq m \leq l)$;
- p representa o número de termos multiplicativos $y(k-i)$;
- $(m-p)$ representa o número de termos multiplicativos $u(k-i)$;
- $c_{p, m-p}(n_1, \dots, n_m)$ são os parâmetros a serem estimados com (n_1, \dots, n_m) que são os respectivos atrasos nos termos;
- n_u se refere a fatores do tipo $u(k-n_i)$;
- n_y se refere a fatores do tipo $y(k-n_i)$;

Embora seja um modelo não linear na relação entrada-saída, o modelo NARMAX polinomial é linear nos parâmetros. Por exemplo, para um modelo com $l=3$, $n_y=3$ e $n_u=3$, a equação a diferenças é dada por:

$$y(k) = \theta_1 y(k-1) + \theta_2 y(k-2) + \theta_3 u(k-2) + \theta_4 u(k-1) + \theta_5 y(k-1)^2 u(k-1) + \\ + \theta_6 u(k-1)^2 u(k-3) + \theta_7 y(k-3)^3 + \theta_8 y(k-2) u(k-2) + \theta_9 y(k-3)^2 u(k-3) \quad (3.33)$$

Onde θ_i são os parâmetros a serem estimados. Um modelo NARMAX é apropriado para representar componentes determinísticas e estocásticas de um sistema e pode expressar uma ampla variedade de sistemas não-lineares [Kukreja et al., 2003].

3.4.4 Modelos de Hammerstein e Wiener

Os modelos de Hammerstein e Wiener são modelos de blocos interconectados, sendo que um bloco corresponde a uma não-linearidade estática e o outro corresponde a um modelo dinâmico linear. No modelo de Hammerstein, o bloco contendo a não-linearidade estática precede aquele que contém o modelo dinâmico linear, conforme ilustrado na Fig 3.5.



Fig.3.5 - Modelo de Hammerstein.

Por outro lado, no modelo de Wiener, o bloco do modelo dinâmico linear precede o bloco da não-linearidade estática, conforme a Fig 3.6:



Fig.3.6 - Modelo de Wiener.

A escolha do modelo a ser utilizado depende da aplicação. Em determinados casos, pode-se optar por uma combinação dos dois modelos, conforme Fig 3.7:

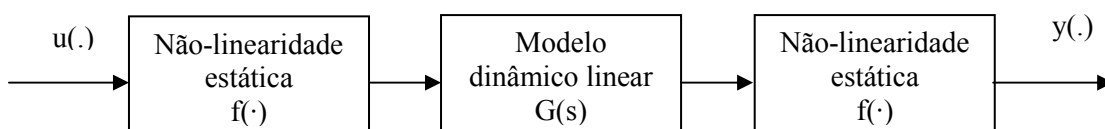


Fig.3.7 - Modelo Hammerstein-Wiener.

Os blocos dinâmicos lineares dos modelos de Wiener e Hammerstein são tipicamente descritos, na forma paramétrica, por funções de transferência ou, em alguns casos, por modelos FIR. As características dos blocos não-lineares são frequentemente aproximadas por polinômios [Greblicki, 1992; Vörös, 2003b].

Embora apresentem uma estrutura simples, os modelos de Hammerstein e Wiener podem descrever eficientemente a não-linearidade de um sistema, seja de forma contínua ou descontínua [Guo, 2004]. Tais modelos podem ser usados, por exemplo, para representar saturação em sensores, em válvulas de controle, etc.

O modelo de Hammerstein será utilizado neste trabalho na representação proposta para classes de sistemas não-lineares que será abordada no próximo capítulo.

3.4.5 Funções Descritivas

O conceito de função descritiva é simples. Seja um sistema não-linear representado por (3.34). Se o mesmo for excitado por uma entrada definida por (3.35), a saída do sistema pode ser representado por uma série de Fourier (3.36) ou pela função discreta de Fourier (3.37). Utilizando apenas a componente fundamental da série tem-se a aproximação (3.38) conhecida como balanço harmônico. Esta aproximação geralmente é válida, pois as componentes harmônicas têm amplitudes decrescentes com a frequência, e os sistemas físicos em geral apresentam características passa-baixas que atenuam ainda mais essas componentes. A função resultante (3.39) é chamada de função descritiva e pode ser obtida por métodos analíticos (para sistemas mais simples), ou através da transformada discreta de Fourier ou por meio de uma versão computacional eficiente, a transformada rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform). A notação $N(X,W)$ simboliza que os valores desta função variam tanto com a frequência (W) de excitação, como com a intensidade (X) da entrada do sistema.

$$y(.) = N(.)u(.) \quad (3.34)$$

$$u(t) = X.\sin(Wt) \quad (3.35)$$

$$y(t) = Y_o + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(W_n t + \varphi_n) \quad (3.36)$$

$$F(w) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j2\pi w \frac{k}{N}} \quad (3.37)$$

$$y(t) \cong Y_1 \sin(W_1 t + \varphi_1) \quad (3.38)$$

$$N(X, W) = \frac{Y_1}{X} \angle \varphi_1 \quad (3.39)$$

3.4.6 Funções de Base

Neste tipo de representação as funções mais utilizadas são as de bases ortonormais ou radiais. A expressão (3.40) representa uma série de funções ortonormais. Φ_i é uma base de funções ortonormais e c_i são os coeficientes associados ao desenvolvimento em série da resposta ao impulso $h(k)$ através dessa base. A chamada base de Laguerre é caracterizada pela utilização de funções de transferência com apenas um pólo real, como a expressa por (3.41) onde p é pólo que parametriza as funções ortonormais e q^{-1} é o operador atraso de tempo. Já as funções de Kautz são parametrizadas por pares de pólos complexos conjugados [Wahlberg, 1994]. A Fig 3.8 ilustra em diagramas de blocos a representação de modelos com funções de bases ortonormais (FBO) de sistemas dinâmicos, onde H simboliza um mapeamento estático.

$$h(k) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \Phi_i(k) \quad (3.40)$$

$$\Phi_i(q^{-1}) = \sqrt{1-p^2} \frac{q^{-1}(q^{-1}-p)^{i-1}}{(1-pq^{-1})^i} \quad (3.41)$$

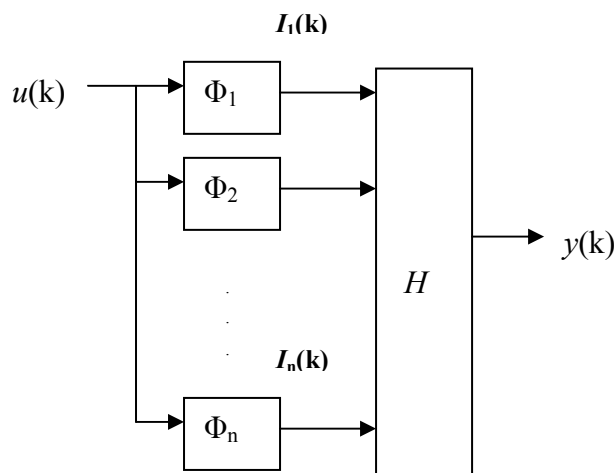


Fig.3.8 - Diagrama de blocos de modelo FBO.

3.4.7 Outros tipos de Representações

Existem outros tipos de representações que não serão abordadas neste texto. Entre elas é possível citar as que empregam técnicas de inteligência artificial como as redes neurais artificiais, ou os modelos fuzzy que utilizam conjuntos nebulosos nas suas representações [Ljung, 1999].

3.5 Estimação de Parâmetros

Na identificação de sistemas, após as escolhas da representação do modelo (que pode estar entre as diversas representações apresentadas) e da estrutura do modelo, é realizada a etapa de estimação de parâmetros. Nessa etapa é determinado os valores adequados para os parâmetros do modelo através de um conjunto de dados experimentais de entrada e saída do sistema a ser modelado, de uma estrutura e de um método de identificação [Paiva, 1999; Aguirre, 2000]. Um dos métodos mais utilizados é o Método dos Mínimos Quadrados

3.5.1 Estimador de Mínimos Quadrados

A equação (3.42) representa um modelo de regressão, em que, X são conjuntos de amostras das informações das entradas e saídas anteriores de um sistema (T denota matriz transposta), $\hat{\theta}$ (“^” simboliza valores a serem estimados) são os coeficientes da equação do modelo e ξ são as incertezas ou erros associados as medidas realizadas no sistema.

$$y = X^T \hat{\theta} + \xi \quad (3.42)$$

No método dos mínimos quadrados usa-se um critério de medida do valor do erro e avalia-se o modelo de acordo com esse critério. Procura-se estimar os parâmetros de modo que o erro seja o menor possível. O critério utilizado estabelece uma função de custo (3.43) que é definida como o somatório do quadrado dos erros entre as observações experimentais e os valores calculados pelo estimador.

$$J = \sum_{i=1}^N \xi(i)^2 = \xi^T \xi \quad (3.43)$$

Dado que $\xi = y - X^T \theta$ vem:

$$J = (y - X\hat{\theta})^T (y - X\hat{\theta}) \quad (3.44)$$

Desenvolvendo tem-se:

$$J = y^T y - y^T X \hat{\theta} - \hat{\theta}^T X^T y + \hat{\theta}^T X^T X \hat{\theta} \quad (3.45)$$

Para que a expressão (3.45) seja minimizada com respeito a $\hat{\theta}$, deve-se derivar J em relação a $\hat{\theta}$ e igualar a expressão resultante a zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} &= -(y^T X)^T - X^T y + (X^T X + X^T X) \hat{\theta} = -X^T y - X^T y + 2X^T X \hat{\theta}, \\ &- 2X^T y + 2X^T X \hat{\theta} = 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Assim obtém-se:

$$\hat{\theta} = [X^T X]^{-1} X^T y. \quad (3.47)$$

Para o modelo ARMAX representado pela equação (3.23), o vetor de regressores e o vetor de saída são dados por:

$$X = \begin{bmatrix} y(0) & u(0) \\ y(1) & u(1) \\ y(2) & u(2) \\ \text{M} & \text{M} \\ y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \text{M} \\ y(k) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Para o modelo NARMAX representado pela equação (3.33), o vetor de regressores e o vetor de saída, respectivamente, são:

$$X = \begin{bmatrix} y(3) & y(2) & u(2) & u(3) & y^2(3)u(3) & u^2(3)u(1) & y^3(1) & y(2)u(2) & y^2(1)u(1) \\ y(4) & y(3) & u(3) & y(4) & y^2(4)u(4) & u^2(4)u(2) & y^3(2) & y(3)u(3) & y^2(2)u(2) \\ y(5) & y(4) & u(4) & y(5) & y^2(5)u(5) & u^2(5)u(3) & y^3(3) & y(4)u(4) & y^2(3)u(3) \\ M & M & M & M & M & M & M & M & M \\ y(k-1) & y(k-2) & u(k-2) & u(k-1) & y(k-3)^2u(k-3) & u(k-1)^2u(k-3) & y(k-3)^3 & y(k-2)u(k-2) & y(k-3)^2u(k-3) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y(4) \\ y(5) \\ y(6) \\ M \\ y(k) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Em aplicações de tempo real são necessários estimadores recursivos, e em alguns modelos deve-se utilizar métodos de otimização não-linear. Nestes casos, para a obtenção de soluções adequadas é necessário utilizar adaptações e generalizações da versão original do método dos mínimos quadrados.

O conceito do método dos mínimos quadrados também pode ser aplicado a informações no domínio da frequência. A diferença é que os dados no lugar de serem amostras no tempo são amostras na frequência. Para a função de transferência (3.2), sua representação no domínio da frequência é dada pela função (3.52), onde j simboliza números complexos e W significa valores de frequência. A função $G(jW)$ apresenta valores reais $R(\cdot)$ e imaginários $I(\cdot)$ em função dos valores amostrados da frequência (W), assim com estas informações é possível estimar os coeficientes ($a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$) do modelo. Existem alguns métodos específicos para estimação de parâmetros no domínio da frequência, como o método de Levy [Aguirre, 2000] e outros [Ljung, 1999].

$$G(jW) = \frac{Y(jW)}{X(jW)} = R(W) + jI(W) = \frac{b_0(jW)^m + b_1(jW)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(jW) + b_m}{a_0(jW)^n + a_1(jW)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(jW) + a_n} \quad (3.52)$$

Conforme apresentado neste capítulo, a modelagem e a identificação são etapas muito importantes no estudo de sistemas dinâmicos.

Existem diversas maneiras de se representar sistemas lineares e não-lineares. A escolha da representação a ser utilizada depende da aplicação e de suas especificações. A realização de um processo de identificação bem projetado contribui bastante para a obtenção de modelos que representem adequadamente e de maneira satisfatória os sistemas desejados.

CAPÍTULO 4

UMA PROPOSTA PARA REPRESENTAÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DE CLASSES DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

Neste capítulo será apresentada uma proposta para representação e identificação de classes de sistemas dinâmicos não-lineares. A fundamentação desta proposta será embasada em conceitos bem estabelecidos em áreas relacionadas ao estudo de sistemas não-lineares, identificações de sistemas e outras.

Conforme visto no capítulo anterior, existem várias representações para sistemas dinâmicos dependendo do tipo do processo (linear, não-linear, de parâmetros constantes no tempo, etc.). Seja o modelo Hammerstein (descrito na pág 26) expresso por (4.1) e o modelo de função de base representado por (4.2). Um modelo de Hammerstein é constituído por uma função linear $G(\cdot)$ e uma função não-linear estática $f(u(\cdot))$ dependente da intensidade da informação de entrada $u(\cdot)$ do sistema, que pode ser expressa por uma interpolação polinomial. A identificação dos parâmetros deste modelo depende da estimação da parte linear do sistema, e dos coeficientes da parte não linear que representa um “ganho” não-linear em função do nível da grandeza de entrada da planta. O modelo de função de base é constituído por um conjunto de funções com pólos distintos para cada função constituinte do modelo. A expressão (4.2) representa o modelo discreto em espaço de estados deste tipo de modelagem.

$$y(s) = G(s)u^*(s); \quad u^*(s) = f(u(s)); \quad f(u(\cdot)) = \alpha_1 u(\cdot) + \alpha_2 u^2(\cdot) + \dots + \alpha_m u^m(\cdot). \quad (4.1)$$

$$y(k) = C_f(A_f I(k) + B_f u(k)) \quad (4.2)$$

Sabe-se que as respostas de sistemas não-lineares dependem da intensidade das grandezas de entrada dos mesmos. Diferentemente dos sistemas lineares, não existe proporcionalidade entre as informações das entradas e saídas. Ou seja, um incremento na entrada de um sistema não-linear não é acompanhado por um incremento proporcional na sua saída.

A proposta deste trabalho é representar sistemas dinâmicos não-lineares por meio de uma combinação dos conceitos das duas representações citadas. A idéia é usar uma representação que tenha, se necessário, uma função não-linear estática representando um ganho variável, e funções com pólos fixos e também com pólos variáveis que dependam da intensidade de entrada do sistema. A idéia inicial da representação proposta neste trabalho surgiu dos resultados obtidos em [Pinheiro, 2000].

A função (4.3) expressa a representação proposta com os respectivos parâmetros variáveis (4.4) que são dados por interpolações polinomiais. Para a estimação dos parâmetros do modelo, a idéia é utilizar um método eficaz e que seja de fácil interpretação.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = K(u(.)) \frac{(s + z_1) \dots (s + z_m)}{s^n (s + p_1) \dots (s + p_m) \dots (s + p_r(u(.))) \dots (s + p_v(u(.)))} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} K(u(.)) &= \alpha_1 u(.) + \alpha_2 u^2(.) + \dots + \alpha_m u^m(.), \\ p_s(u(.)) &= \beta_1 u(.) + \beta_2 u^2(.) + \dots + \beta_m u^m(.). \end{aligned} \quad (4.4)$$

A estimação dos parâmetros do modelo proposto pode ser efetuada por técnicas de resposta em frequência (eficazes e de fácil interpretação), baseando-se no conceito de balanço harmônico citado no capítulo anterior.

Neste trabalho será empregado um algoritmo numérico para estimar os valores da função descritiva, visando a etapa posterior de estimação dos parâmetros do modelo. O procedimento é expresso pelos passos descritos a seguir.

[Passo 1]

As faixas de interesse de frequência (W) e amplitude (X) são definidas.

[Passo 2]

Sinais do tipo $u(kT) = X \cdot \sin(W \cdot kT)$ são gerados em alguns períodos de W , tendo A amostras por período com a taxa de amostragem $T = 2\pi / WA$, e com valores específicos de X e W .

[Passo 3]

Informações $y(kT)$ são simuladas, calculadas, ou medidas durante alguns períodos de ocorrência.

[Passo 4]

Um ciclo de $y(kT)$ em regime permanente é armazenado. Se existirem variações de *offset* nas informações, se corrige as mesmas para valores constantes, ou então é executada uma filtragem passa-faixa com ganho unitário e sem defasagem na banda passante.

[Passo 5]

Com este ciclo de $y(kT)$, processar um algoritmo de FFT. Para as componentes espectrais W_n obtidas, armazenar os valores de amplitude e fase da componente fundamental W . Se necessário converter o valor da fase ao quadrante adequado.

[Passo 6]

Para outros valores na faixa de interesse de X e W , repetir os passos 2 até 5.

[Passo 7]

Com os valores das amplitudes e fases armazenadas, imprimir os valores da função descritiva, ou gerar gráficos de resposta em frequência correspondentes.

A precisão dos processamentos descritos dependerá do algoritmo de FFT utilizado, do número de amostras e da periodicidade dos sinais. Como a maioria dos sistemas práticos apresenta comportamentos aproximadamente periódicos no tempo, o uso da FFT (definida para funções periódicas) é adequado. Para sistemas não periódicos é possível usar a transformada Wavelet [Chui, 1992] em vez da FFT.

O gráfico de resposta em frequência relativo aos dados da função descritiva, é conhecido como modelo não-paramétrico. Obtida a função descritiva $N(X,W)$ correspondente, ou os valores numéricos da função $G(X,jW) = R(W) + jI(W)$ relativa à mesma, pode-se utilizar então um método baseado nos mínimos quadrados para estimar os parâmetros do modelo. Para os parâmetros que apresentarem variações (ver Tabela 4.1 de ilustração) em função da amplitude (X) de entrada $u(\cdot)$ do sistema, são empregadas técnicas de interpolações polinomiais conhecidas para obter as relações expressas por (4.4), e assim caracterizar o modelo resultante.

Tabela 4.1 - Ilustração de parâmetros dependentes da entrada.

u	$K(u)$	$p_s(u)$
X_1	K_1	p_1
X_2	K_2	p_2
X_3	K_3	p_3
...
X_N	K_N	p_N

O próximo capítulo mostrará alguns exemplos numéricos que ilustrarão a proposta do trabalho. Os resultados obtidos serão confrontados com dados resultantes da aplicação de métodos conhecidos para efeito de comparações.

CAPÍTULO 5

EXEMPLOS DE IDENTIFICAÇÃO DE CLASSE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES COM A PROPOSTA APRESENTADA

Este capítulo consta de exemplos de classes de sistemas não-lineares que servirão de ilustração para a aplicação da proposta apresentada no Capítulo 4. Os resultados obtidos serão comparados com dados resultantes da aplicação de métodos conhecidos.

Exemplo 1

Este exemplo utilizará como ilustração um sistema representado por uma função de transferência de primeira ordem em série com uma não-linearidade do tipo saturação, como mostrado na Figura 5.1. Esta representação é comum a muitos processos elétricos, mecânicos, térmicos e outros encontrados na prática. A parte linear simboliza a dinâmica de um determinado sistema. A saturação representa limites de atuação de dispositivos de comando do processo em questão, tais como válvulas proporcionais, amplificadores eletrônicos, etc. A função de saturação u_{sat} pode ser definida por (5.1), onde a é a inclinação da parte linear da função estática e M é o valor da intensidade de u onde inicia a saturação.

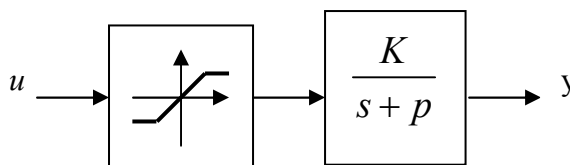


Fig.5.1 - Sistema com saturação.

$$u_{sat} = \begin{cases} a.u & \text{p/ } -M \leq u \leq +M; \\ a.M & \text{p/ } u < -M \text{ ou } u > +M. \end{cases} \quad (5.1)$$

Para exemplificação, seja um sistema com os parâmetros $K = 1$, $p = 1$ e uma saturação de entrada definida com $a = 1$ e $M = 1$. Muitas vezes na prática os valores destes parâmetros não são conhecidos a priori. Assim, são realizadas medidas na entrada e saída do sistema, cujos dados coletados servirão para estimar os parâmetros do sistema. Neste exemplo essas medidas foram simuladas a partir do sistema conhecido e as informações obtidas foram utilizadas para a obtenção do modelo.

Uma modelagem possível para este sistema é dada por um modelo de Hammerstein, onde a parte linear identificada tem um pólo $p \approx 1$. Já o ganho do modelo será dependente da amplitude do sinal de entrada $u(\cdot)$. Assim, a função de transferência resultante pode ser expressa por (5.2) e (5.3).

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = K(u) \frac{1}{s+1} \quad (5.2)$$

$$f(u(\cdot)) = K(u) = \begin{cases} 1 & p/1 \leq u \leq 1; \\ -0.4252u^4 + 2.7087u^3 - 6.2423u^2 + 5.7482u - 0.7891 & p/1 < u \leq 2. \end{cases} \quad (5.3)$$

Utilizando agora o método proposto, estima-se a função descritiva correspondente do processo por meio do algoritmo mostrado no Capítulo 4. Tem-se na Fig 5.2 a resposta em frequência do sistema para alguns valores de amplitude (ap) de entrada.

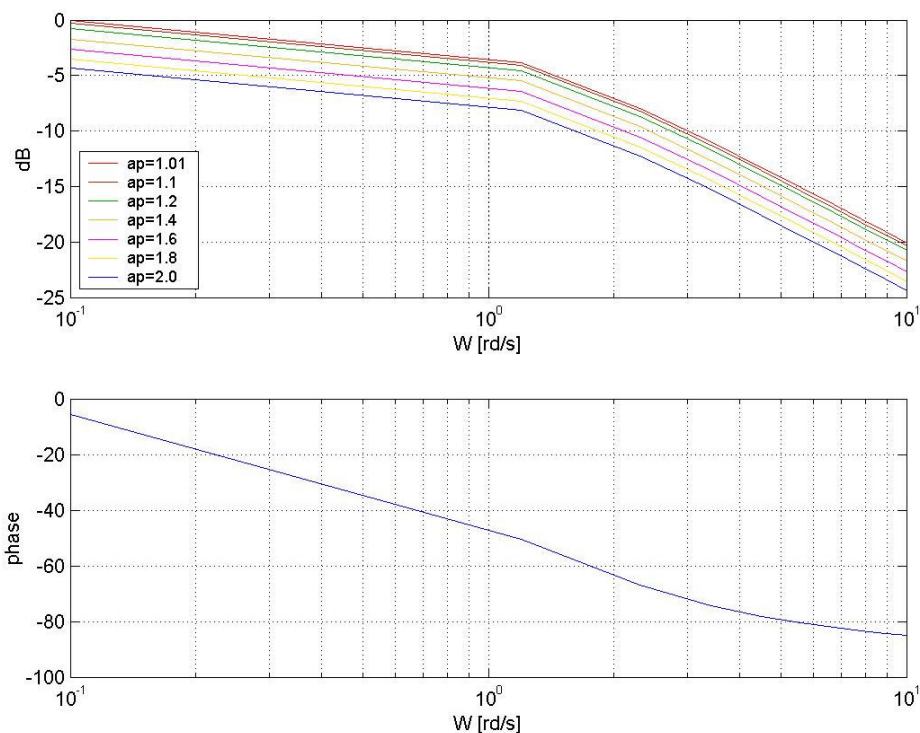


Fig.5.2 - Resposta em frequência do sistema com saturação.

Os dados dos gráficos das respostas em frequência obtidos correspondem às informações dos valores (5.4) das partes reais e imaginárias relativas à função de transferência do sistema. Esses dados são constituídos pelos valores de módulo (*Mod*) em vezes ou em decibéis (dB) e a fase (*phase*), ambos em função da frequência (*W*). Como pode-se observar, os valores do módulo variam em função da amplitude de entrada, enquanto que os valores de fase não apresentam variação.

Utilizando um método de estimação de mínimos quadrados para estas informações, é fácil obter os parâmetros da função de transferência correspondente do sistema no domínio da frequência. A Listagem 5.1 mostra um comando (*invfreqs*) do software Matlab que realiza este processamento. A Tabela 5.1 mostra os parâmetros estimados do sistema para alguns valores de intensidade de entrada.

$$G(jW) = \frac{Y(jW)}{X(jW)} = R(W) + jI(W) = Mod * \cos(phase) + jMod * \sin(phase) \quad (5.4)$$

Listagem 5.1 - Comando do Matlab para estimação de parâmetros.

$$G_w = R(W) - j \cdot I(W);$$

$$G_w = G_w';$$

$$[N_s, D_s] = \text{invfreqs}(G_w, W, 1, 1)$$

Tabela 5.1 - Valores obtidos da identificação do sistema com saturação.

u (entrada)	K (ganho)	P (polo)
1.01	0.9971	0.9910
1.10	0.9659	0.9910
1.20	0.9188	0.9910
1.40	0.8232	0.9909
1.60	0.7390	0.9909
1.80	0.6678	0.9908
2.00	0.6078	0.9908

Da tabela verifica-se que o pólo do sistema praticamente não se altera com a intensidade da informação de entrada do sistema, mantendo-se em $p \approx 1$. Porém, o ganho K modifica-se com a amplitude de entrada. Com os dados da tabela 5.1 é fácil obter por técnicas de interpolação conhecidas um polinômio que represente a relação $K(u)$, dada por (5.5), resultando em praticamente no mesmo polinômio da função estática (5.3) do modelo de Hammerstein. No Anexo A tem-se o programa que implementa a estimação da função descritiva e dos parâmetros deste sistema.

$$K(u) = \begin{cases} 1 & \text{p/ } 0 \leq u \leq 1; \\ -0.4251u^4 + 2.7088u^3 - 6.2421u^2 + 5.7484u - 0.7890 & \text{p/ } 1 < u \leq 2. \end{cases} \quad (5.5).$$

Para efeito de verificação, alguns valores estimados pela função (5.5) obtida pelo método proposto neste trabalho, serão comparados com valores dados pela expressão (5.6) conhecida, que representa a equação analítica da função descritiva de uma saturação definida por (5.1). A Tabela 5.2 mostra alguns valores para efeito de comparação. Nota-se que os resultados estão bem próximos.

$$N(X, W) = \begin{cases} a \cdot X & \text{p/ } -M \leq X \leq +M; \\ a \frac{2}{\pi} \left(\sin^{-1} \frac{M}{X} + \frac{M}{X} \cos(\sin^{-1} \frac{M}{X}) \right) & \text{p/ } X < -M \text{ ou } X > +M. \end{cases} \quad (5.6)$$

Tabela 5.2 - Comparações de valores das funções (5.5) e (5.6).

$u = X$	(5.5)	(5.6)
1.05	0.9840	0.9876
1.20	0.9198	0.9204
1.35	0.8478	0.8478
1.55	0.7579	0.7602
1.60	0.7380	0.7404
1.85	0.6536	0.6531
2.00	0.6082	0.6090

Sendo assim, através dos valores contidos na Tabela 5.2 pode-se observar que os resultados obtidos com o modelo proposto por este trabalho foram satisfatórios. Diante disso, conclui-se que esse modelo é válido para representar sistemas que possuem variação do ganho com a amplitude.

Exemplo 2

Este exemplo empregará um sistema representado por uma função de transferência de primeira ordem em série com uma não-linearidade do tipo zona morta, como ilustrado na Figura 5.3. Esta representação é comum a muitos processos mecânicos e outros encontrados na prática. A parte linear simboliza a dinâmica de um determinado sistema. A zona morta representa limiares de atuação de dispositivos tais como engrenagens, polias, válvulas proporcionais e outros, devido a folgas mecânicas, correntes mínimas de atuação, etc. A função de saturação u_{zm} pode ser definida por (5.7), onde a é a inclinação da parte linear da função estática e M é o valor da intensidade de u onde termina a zona morta.

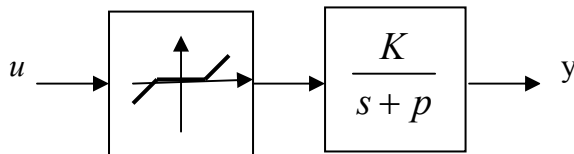


Fig.5.3 - Sistema com zona morta.

$$u_{zm} = \begin{cases} 0 & p/ -M \leq u \leq +M; \\ a(u - M) & p/ u < -M \text{ ou } u > +M. \end{cases} \quad (5.7)$$

Para um sistema com $K = 1$, $p = 1$, $a = 1,3$ e $M = 0,5$ foi empregado o mesmo procedimento descrito no exemplo anterior, obtendo-se um modelo similar ao dado por (5.2). A Tabela 5.3 ilustra o parâmetro que depende da intensidade do valor de entrada do sistema.

Tabela 5.3 - Valores da estimação do sistema com zona morta.

U	K
0.55	0.0909
0.60	0.1667
0.80	0.3750
1.00	0.5000
1.20	0.5833
1.40	0.6429
1.60	0.6875

Com técnicas de interpolação obteve-se o polinômio (5.8). Para verificação, alguns valores estimados pela função (5.8) obtida pelo método proposto, serão comparados com valores dados pela expressão (5.9) conhecida que representa a equação analítica da função descritiva de uma zona morta. A Tabela 5.4 mostra alguns valores para efeito de comparação, nota-se que os resultados estão próximos. Para valores de entrada menos intensos, os resultados das funções apresentam certa defasagem. Para intensidades de entrada maiores, os resultados das funções estão mais próximos.

$$K(u) = \begin{cases} 0 & \text{p/ } 0 \leq u \leq 0.5; \\ -0.1906u^6 + 1.6864u^5 - 6.2152u^4 + 12.3386u^3 - 14.2163u^2 + 9.4866u - 2.3897 & \text{p/ } 0.5 < u < 1.6. \end{cases} \quad (5.8)$$

$$N(X, W) = \begin{cases} 0 & \text{p/ } -0.5 \leq X \leq +0.5; \\ a(1 - \frac{2}{\pi}(\sin^{-1} \frac{M}{X} + \frac{M}{X} \cos(\sin^{-1} \frac{M}{X}))) & \text{p/ } X < -0.5 \text{ ou } X > +0.5. \end{cases} \quad (5.9)$$

Tabela 5.4 - Comparações de valores das funções (5.8) e (5.9).

$u = X$	(5.8)	(5.9)
0.65	0.2305	0.1450
0.75	0.3337	0.2475
0.85	0.4121	0.3352
1.10	0.5451	0.4991
1.25	0.6000	0.5700
1.40	0.6431	0.6270
1.60	0.6876	0.6875

Assim como para a não-linearidade do tipo saturação, o modelo proposto se mostrou satisfatório também para a zona morta e, portanto, válido para não-linearidades que produzem variação no ganho do sistema com a amplitude do sinal de entrada.

Exemplo 3

Neste exemplo será utilizado um sistema não-linear representado pela equação (5.10), com $\tau = 0,95$ e $K = 1,2$. A Figura 5.4 ilustra a resposta em frequência do sistema para alguns valores de amplitude (ap) de entrada. A Tabela 5.5 mostra o parâmetro identificado dependente da amplitude de entrada do sistema.

$$\tau \ddot{y} + y \cdot \cos(y(t)) = K \cdot u(t) \quad (5.10)$$

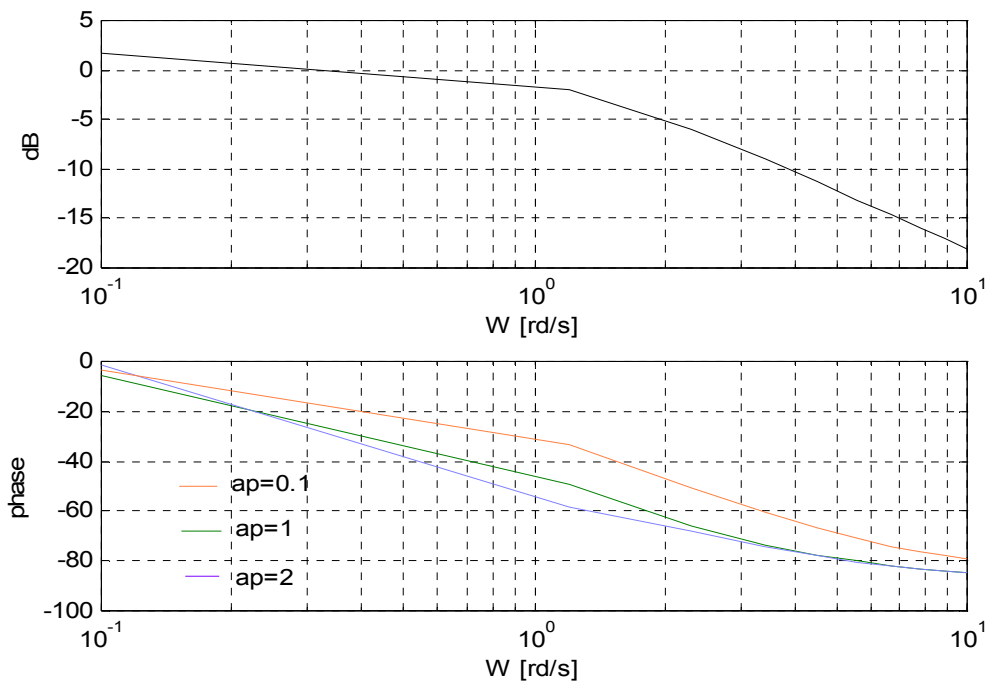


Fig.5.4 - Resposta em frequência do sistema dado por (5.10).

Da Fig 5.4, nota-se que o sistema apresenta variação na fase de acordo com a amplitude do sinal de entrada.

Tabela 5.5 - Valores da estimação do sistema (5.10).

u	p
0.1	0.9996
0.5	0.9896
1.0	0.9578
1.5	0.9026
2.0	0.8200
2.5	0.7026
3.0	0.5326

O ganho K ficou constante em torno de 1,2, enquanto que o pólo apresentou uma variação, conforme ilustrado na Tabela 5.5. Assim, com a proposta deste trabalho o modelo correspondente é dado por (5.11), com o polinômio relativo à $p(u)$ expresso por (5.12).

A Fig 5.5 ilustra a resposta do modelo proposto junto com a simulação da equação (5.10) original do sistema não-linear. A excitação de entrada é senoidal com uma frequência de 0,4 [Hz] e uma amplitude de 0,3. Verifica-se que as respostas estão bem próximas.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1.2}{s + p(u)} \quad (5.11)$$

$$p(u) = -0.0012u^5 + 0.0558u^4 - 0.0131u^3 + 0.0297u^2 - 0.004u + 1.0003 \quad (5.12)$$

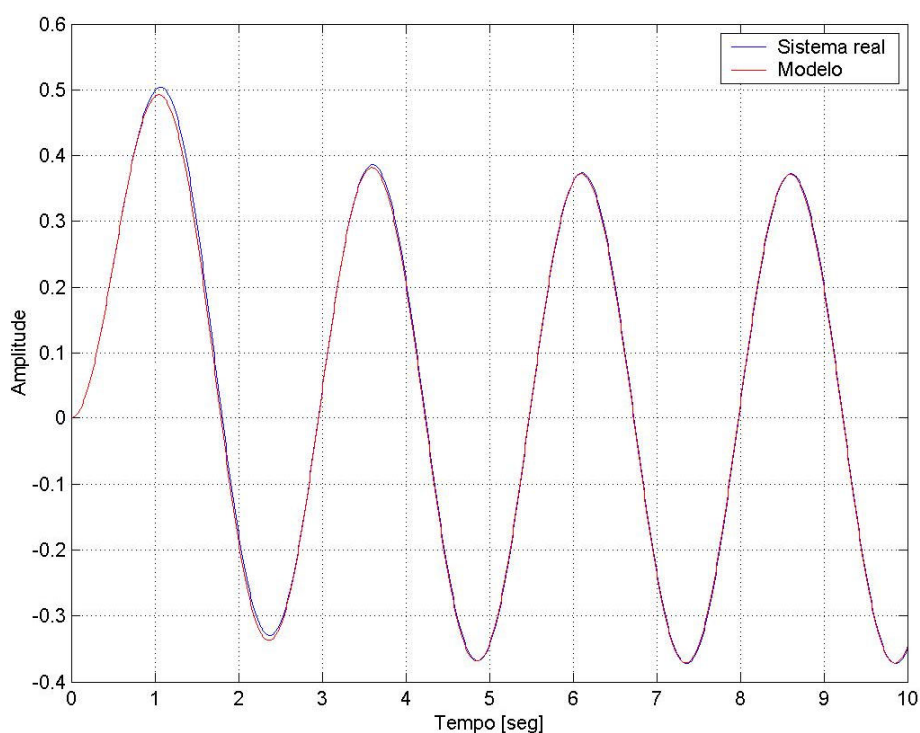


Fig.5.5 - Resposta a uma entrada senoidal do sistema real e modelo identificado.

Pode-se observar da Fig 5.5 que os sinais correspondentes ao sistema original e ao modelo proposto estão praticamente sobrepostos. Isso mostra que os resultados obtidos com o modelo foram satisfatórios, pois o mesmo conseguiu representar adequadamente o sistema original.

Uma outra comparação foi realizada. Com os dados simulados da equação (5.10) foi obtido um modelo NARMAX expresso por (5.13). O programa de estimação do mesmo encontra-se no Anexo B. Este modelo foi simulado juntamente com o modelo dado por (5.11), com entrada de excitação em valores aleatórios. A Figura 5.6 mostra as informações processadas. O fator de correlação obtido nas comparações foi de 96,77%.

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 1,7644 \cdot y(k-1) - 0,76699 \cdot y(k-2) - 8,8262 \times 10^{-3} \cdot u(k-2) + 1,1068 \times 10^{-2} \cdot u(k-1) + \\
 & + 1,74471 \times 10^{-4} \cdot y(k-1)^2 \cdot u(k-1) - 2,6168 \times 10^{-7} \cdot u(k-1)^2 \cdot u(k-3) + \\
 & + 9,3684 \times 10^{-4} \cdot y(k-3)^3 + 6,7204 \times 10^{-9} \cdot y(k-2) \cdot u(k-2) + \\
 & + 1,1551 \times 10^{-5} \cdot y(k-3)^2 \cdot u(k-3)
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

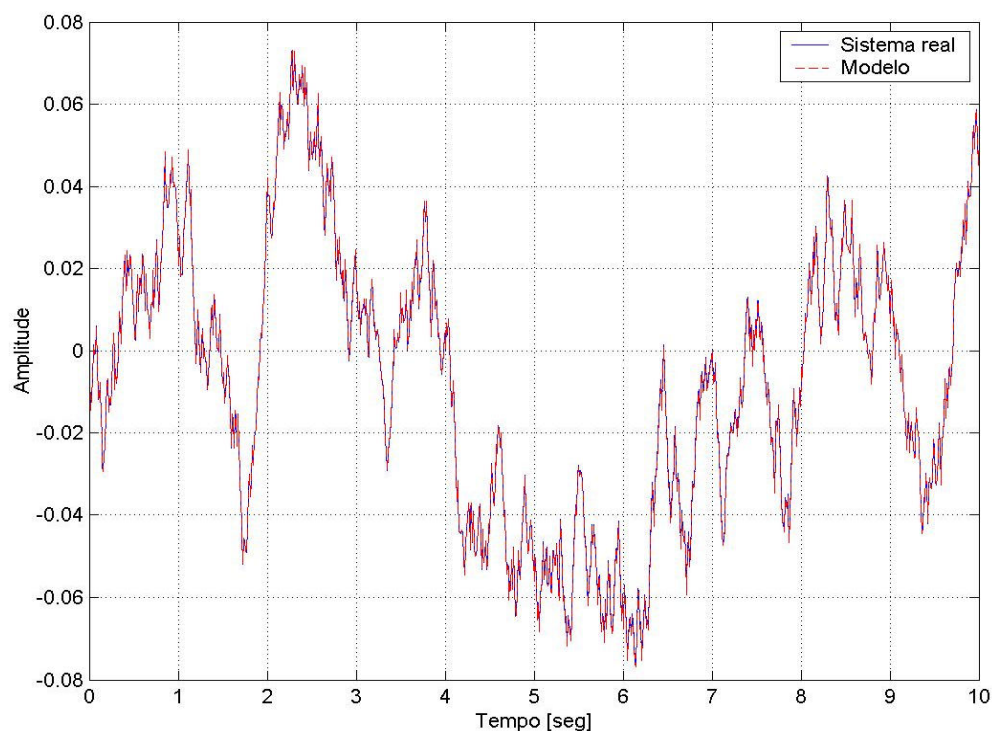


Fig.5.6 - Comparação com um modelo NARMAX.

A obtenção de um fator de correlação próximo de 100% quando comparou-se o modelo proposto com o NARMAX, indica que o modelo é realmente válido e adequado para representar sistemas que possuem variação na fase com a amplitude do sinal de entrada.

Exemplo 4

Este exemplo utiliza um sistema não-linear representado pela equação (5.14). A Fig 5.7 ilustra a resposta em frequência do sistema para alguns valores de amplitude (ap) de entrada. A Tabela 5.6 mostra os parâmetros identificados dependentes da amplitude de entrada do sistema. Nos Anexos C e D encontram-se o programas de simulação deste exemplo.

$$\dot{y} = -y(t) + \text{sen}^2 \sqrt{|y(t)|} + u(t) \quad (5.14)$$

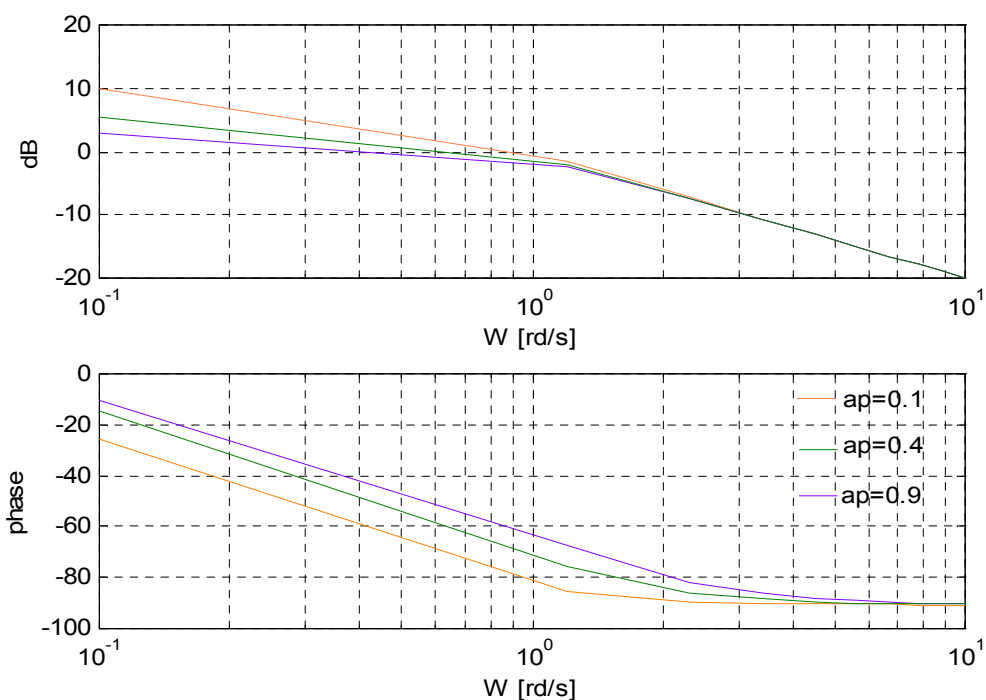


Fig.5.7 - Resposta em frequência do sistema dado por (5.14).

Da Fig 5.7, nota-se que o sistema representado pro (5.14) possui variação no módulo (ganho) e na fase de acordo com a amplitude de entrada.

Tabela 5.6 - Valores da estimação do sistema (5.14).

u	K	P
0.1	0.9898	0.2638
0.2	0.9903	0.3562
0.3	0.9905	0.4200
0.4	0.9908	0.4703
0.5	0.9911	0.5124
0.6	0.9915	0.5489
0.7	0.9918	0.5813
0.8	0.9922	0.6104
0.9	0.9926	0.6369

Utilizando um comando de interpolação (*polyfit*) do software Matlab é fácil obter os polinômios referentes aos parâmetros do modelo, como (5.15) e (5.16). Nos testes de validação do modelo encontrou-se um desvio nos valores testados do mesmo, no qual foi corrigido com um ajuste na expressão do ganho do modelo de um fator igual a 1,35.

A Fig 5.8 traz uma comparação entre valores (Y_e) estimados do modelo identificado com os da equação (5.14). Os resultados estão bem próximos e foi realizado o cálculo do erro médio absoluto (5.17) entre os mesmos, resultando em um valor igual a 0,025.

$$K(u) = 0.0034u + 0.9895 \quad (5.15)$$

$$p(u) = 1.5641u^5 - 4.8051u^4 + 5.9163u^3 - 3.8653u^2 + 1.733u + 0.1238 \quad (5.16)$$

$$ema = \int |Y(t) - Y_e(t)| dt \quad (5.17)$$

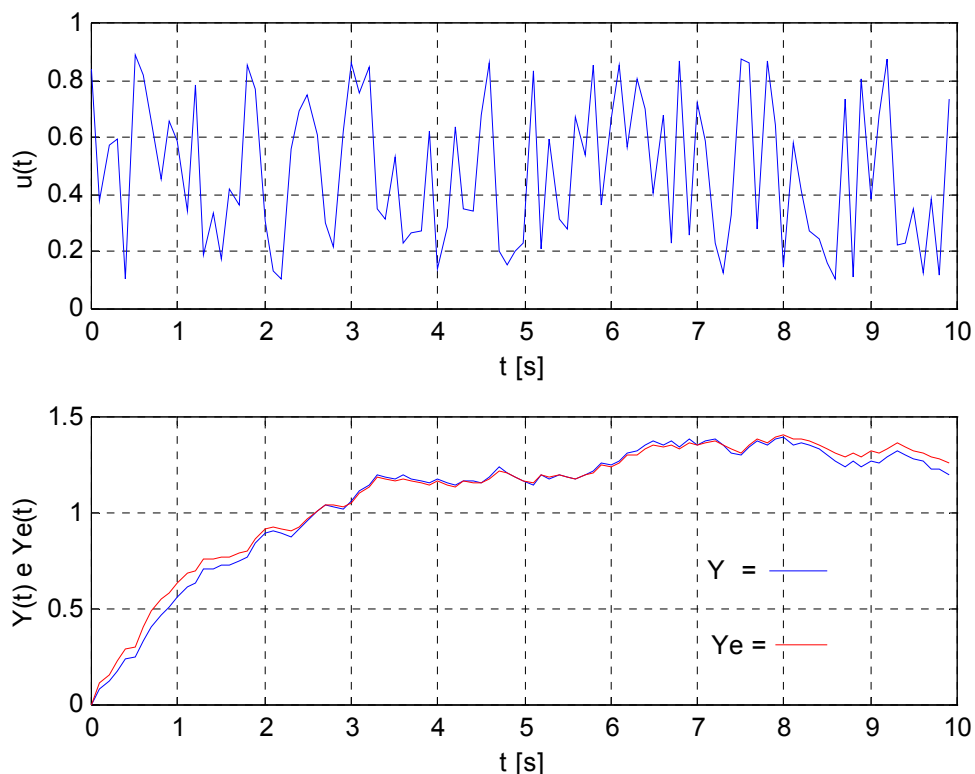


Fig.5.8 - Comparação entre o modelo identificado e (5.14).

Os resultados obtidos com o modelo proposto foram considerados satisfatórios para o sistema em questão. Isso pode ser observado na comparação entre a resposta do modelo e a do sistema original apresentada na Fig 5.8. Sendo assim, conclui-se que o modelo proposto no trabalho é válido para representar sistemas com variação no ganho e na fase em função da amplitude do sinal de entrada.

Exemplo 5

Este exemplo emprega uma equação diferencial não-linear (5.18) que representa alguns sistemas de suspensão práticos. A Fig 5.9 ilustra a resposta em frequência do sistema para extremos de valores de amplitude de entrada. A Tabela 5.7 mostra os parâmetros identificados em função da amplitude de entrada do sistema. Os polinômios referentes aos parâmetros do modelo estão indicados em (5.19), (5.20) e (5.21). Para a função $K(u)$ foi utilizado um ajuste de 2,15 vezes. A Figura 5.10 traz uma comparação entre valores (Y_e) estimados do modelo identificado com os da equação (5.18). Os resultados estão próximos e o erro médio absoluto calculado foi de 0,06.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y^3(t) = 20u(t) \quad (5.18)$$

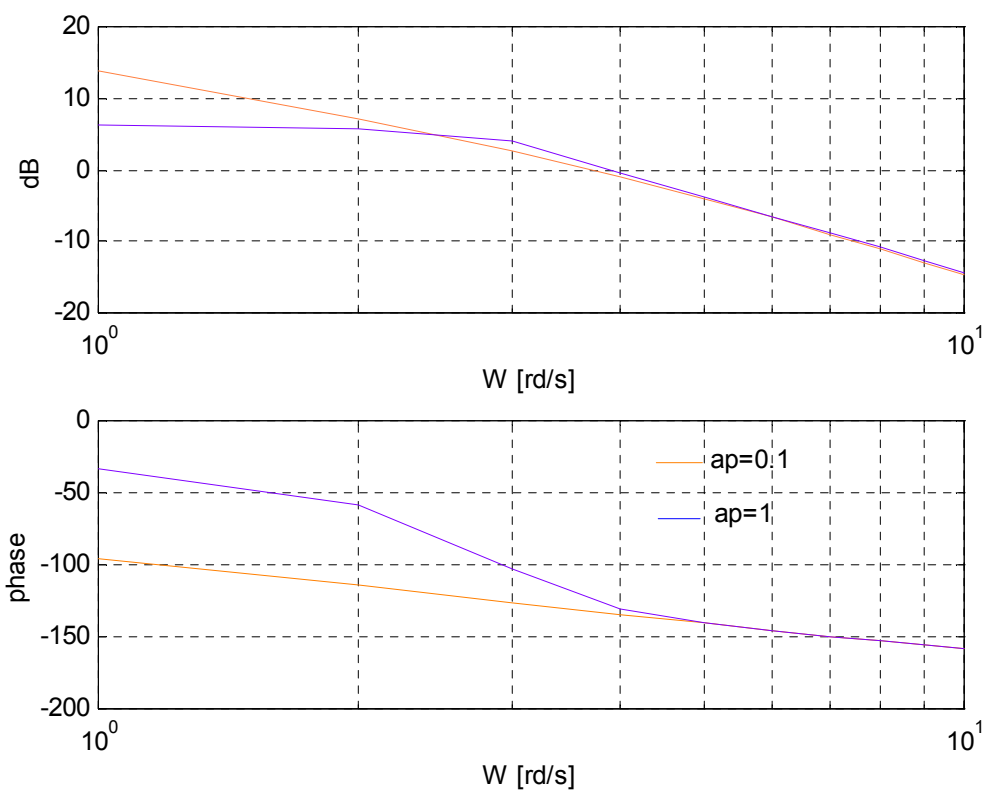


Fig.5.9 - Resposta em frequência do sistema expresso por (5.18).

Da Fig 5.9, pode-se observar que o sistema dado por (5.18) possui variação no ganho (módulo) e na fase com a relação à amplitude de entrada.

Tabela 5.7 - Valores da estimação do sistema (5.18).

u	K	p_1	p_2
0.1	19.48	3.90	0.58
0.2	17.10	3.44	1.75
0.3	15.50	3.16	2.60
0.4	14.78	3.04	3.24
0.5	14.42	3.00	3.89
0.6	14.06	2.94	4.54
0.7	13.66	2.89	5.13
0.8	13.38	2.86	5.68
0.9	13.29	2.85	6.24
1.0	13.28	2.84	6.84

$$K(u) = -5.8974u^5 + 57.1562u^4 - 124.6049u^3 + 114,3473u^2 - 51.313u + 23.6093 \quad (5.19)$$

$$p_1(u) = -4.359u^5 + 20.0291u^4 - 33.6993u^3 + 26.8925u^2 - 10.7745u + 4.744 \quad (5.20)$$

$$p_2(u) = 31.6667u^5 - 96.014u^4 + 112.2838u^3 - 64.3613u^2 + 24.6085u - 1.342 \quad (5.21)$$

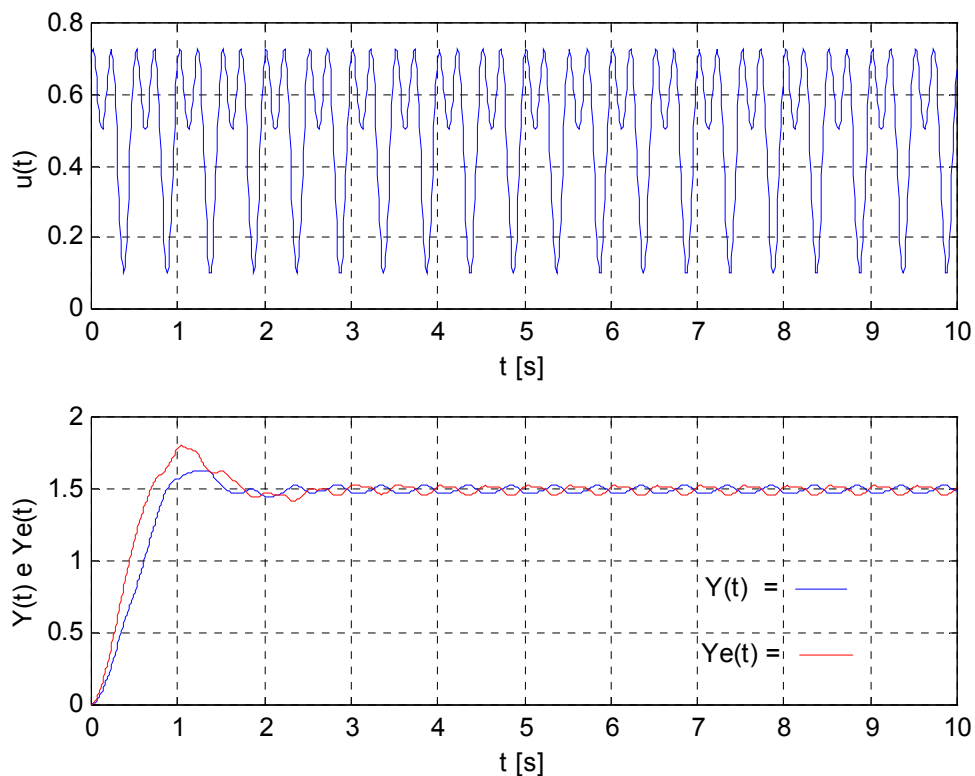


Fig.5.10 - Comparação entre o modelo identificado e (5.18).

A Fig 5.10 mostra que a resposta do modelo proposto a uma entrada modulada se aproxima da resposta do sistema original para a mesma entrada. Diante disso, observa-se que o modelo obtido com os polinômios representando a variação dos pólos e do ganho representa de maneira adequada o sistema original.

Sendo assim, conclui-se que o modelo proposto pelo trabalho é válido para representar sistemas não-lineares de segunda ordem com ganho e pólos variáveis com a amplitude do sinal de entrada.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposta uma forma de representação e estimação de parâmetros de uma classe de sistemas não-lineares. O objetivo foi desenvolver um método de estimação de parâmetros eficaz e que tivesse uma interpretação simples.

Para testar a proposta do trabalho, foram utilizados alguns sistemas não-lineares típicos encontrados em artigos e textos correlacionados. Utilizou-se sistemas com variação no ganho, na fase e em ambos, em função da amplitude do sinal de entrada. Para este último grupo, utilizou-se também um sistema de segunda ordem.

Para os sistemas com variação somente no ganho, representados pela saturação e zona morta, os valores obtidos com a representação proposta ficaram bem próximos daqueles obtidos com os respectivos sistemas reais.

Para o sistema com variação somente na fase, ou seja, no pólo, os resultados obtidos com o modelo proposto foram bastante satisfatórios. As respostas a uma entrada senoidal do sistema real e do modelo ficaram praticamente sobrepostas.

Para os sistemas com variação no ganho e na fase, a representação proposta no trabalho também se apresentou válida. A precisão do modelo em relação aos sistemas originais foi próxima de 100%.

Os resultados obtidos com a representação proposta foram comparados com alguns obtidos por representações conhecidas, tais como NARMAX e funções descritivas. Os mesmos apresentaram uma precisão considerada razoável e, neste sentido, observa-se que a proposta desta dissertação foi alcançada.

Não há pretensão de que a abordagem apresentada neste trabalho seja solução plena para modelagem de sistemas não-lineares em geral. Mas, para certas classes de problemas, essa abordagem pode ser uma alternativa interessante.

Há outros estudos que devem ser realizados para aprimorar a abordagem apresentada. Como sugestão para trabalhos futuros pode-se citar:

- A aplicação do método em sistemas práticos, com dados resultantes de medidas em sistemas reais;

- Testes com outros sistemas não-lineares de maiores dimensões e complexidade;

- Utilização de métodos alternativos de resposta em frequência como a transformada Wavelet ou técnicas de multisenos;

- O desenvolvimento de um pacote computacional que permita realizar a aplicação da abordagem de forma integrada e do modo mais automático possível.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Aguirre, L. A. Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais. Belo Horizonte: UFMG, 2000. 554 p.
- [2] Alonge, F., D'Ippolito, F. Raimondi, F.M, Tumminaro, S., Identification of Nonlinear Systems described by Hammerstein Models, Proceedings of the 42nd IEEE, Conference on Decision and Control, p. 3990-3995, 2003.
- [3] Bai, Wei-Er, Frequency Domain Identification of Hammerstein Models, IEEE Trans. On Automatic Control, vol. 48, p. 530-542, 2003.
- [4] Chau, K.T., Chan, C.C., Nonlinear Identification of Power Electronic Systems, IEEE Catalogue, n. 95TH8025, p. 329-334, 1995.
- [5] Chiras, N., Evans, C, Rees, D, Nonlinear Gas Turbine Modeling using NARMAX Structures, IEEE Trans. On Instrumentation and Measurement, vol. 50, n.4, p. 893-898, 2001.
- [6] Chiras, N., Evans C., Rees, D., Solomou, M. Nonlinear System Modelling: How to Estimate the Highest Significant Order, IEEE Instrumentation and Measurement Techonology Conference, p. 353-358, 2002.
- [7] Chui, C. K. An introduction to Wavelets. Academic Press, 1992.
- [8] Coelho, C.A.D. Controle e reguladores automáticos analógicos. Itajubá, 1999. 169 p. Apostila.
- [9] Coelho, M.C.S., Aguirre, L.A., Corrêa, M.V., Metodologia para Representação de Modelos NARX Polinomiais na Forma de Hammerstein e Wiener, Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, 3, n.1, p. 71-80, 2002.
- [10] Crama, P, Schoukens, J, Initial Estimates of Wiener and Hammerstein System using Multisine Excitation, IEEE Trans. On Instrumentation and Measurement, vol. 50, p. 1791-1795, 2001.

- [11] D'azzo, J.J; Houpis, C.H. Análise e projeto de sistemas de controle lineares. Guanabara Dois, 1982.
- [12] Dorf, R. C; Bishop, R.H. Sistemas de controle moderno. LTC, 2001.
- [13] Evans, C., Rees, D., Jones, D. L., Identifying Linear Models of Systems suffering Nonlinear Distortions, Control, Conference Publication, n. 389, IEE, p. 288-296, 1994.
- [14] Evans, C., Rees, D., Jones, L., Weiss, M., Periodic Signals for Measuring Nonlinear Volterra Kernels, IEEE Trans. On Instrumentation and Measurement, vol. 45, n. 2, p. 362-371, 1996.
- [15] Evans, C, Rees, D., Nonlinear Distortions and Multisine Signals – Part II: Minimizing the Distortion, IEEE Trans. On Instrumentation and Measurement, vol. 49, n. 3, p. 610-616, 2000.
- [16] Furtado, E. C., Mendes, E. M. A. M., Nepomuceno, E. G., Silva, V. V. R, Identificação de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares Contínuos utilizando Modelos NARMAX: Estudo de Caso de um Forno a Arco Elétrico, XIV Congresso Brasileiro de Automática, p. 2150-2155, 2002.
- [17] Gelb, A; Velde, W.E.V. Multiple –input describing functions and nonlinear system design. Mc Graw-Hill, 1968.
- [18] Greblicki, W., Pawlak, M., Nonparametric Identification of Hammerstein Systems, IEEE Trans. On Information Theory, vol. 35, n.2, p. 409-418, 1989.
- [19] Greblicki, W., Nonparametric Identification of Wiener Systems, IEEE Trans. On Information Theory, vol. 38, n.5, p. 1487-1493, 1992.
- [20] Guo, F. A new identification method for Wiener and Hammerstein systems, 2004. Universität Karlsruhe. Disponível em: <http://www.google.com.br>. Palavra-chave: Hammerstein. Acesso em março de 2005.
- [21] Hassouna, S., Coirault, R. Ouvrard, R., Continuous Nonlinear System Identification using Volterra Series Expansion, Proceedings of the American Control Conference, p. 4874-4879, 2001.

- [22] Iglesias, R., Kyriacou, T., Nehmzow, U., Billings, S., Task Identification and Characterisation in MÓbile Robotics, 2004.
- [23] Kukreja, S.L; Galiana, H.L; Kearney, R.E. NARMAX representation and identification of ankle dynamics. IEEE Trans. On biomedical engineering, v.50, n.1, p. 70-81, 2003.
- [24] Lang, Zi-Qiang, Billings, S.A., Evaluation of Output Frequency Responses of Nonlinear Systems under Multiple Inputs, IEEE Trans. On Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, vol. 47, n.1, p. 28-38, 2000.
- [25] Leontaritis, I.J; Billings, S.A; Input-output parametric models for nonlinear systems, Int. J. Contr., vol. 41, no.2, pp. 311-341, 1985.
- [26] Ljung, L. System identification : Theory for the User. 2. ed. Prentice Hall PTR, 1999.
- [27] Németh, J.G., Kollár, I., Schoukens, J., Identification of Volterra Kernels using Interpolation, IEEE Trans. On Instrumentation and Measurement, vol.51, n.4, 770-775, 2202.
- [28] Ogata, K. Engenharia de Controle Moderno. Prentice/Hall do Brasil Ltda, 1982.
- [29] Ogata, K. Engenharia de Controle Moderno. 3. ed. LTC, 1998.
- [30] Paiva, R.P.P De Carvalho E. Identificação Neuro-difusa: aspectos de interpretabilidade, 1999. 163 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Informática) – Universidade de Coimbra, Coimbra - Portugal. Disponível em: <http://www.google.com.br/>. Palavra-chave: identificação. Acesso em:05 mar. 2005.
- [31] Pinheiro, C. A. M. Análise e Projeto de Sistemas de Controle Fuzzy: Uma Abordagem no Domínio da Freqüência. Teste de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, 2000.
- [32] Phillips, C.L.; Harbor, R. Feedback control systems. Prentice Hall, 1996.
- [33] Ralston, J.C., Zoubir, A. M. Identification of Time-varying Hammerstein Systems, IEEE, p. 1685-1688, 1995.

- [34] Rahim, N. A., Taib, M.N., Yusof, M. I., Nonlinear System Identification for a Dc Motor using NARMAX Approach, *SENSOR*, p. 305-311, 2003.
- [35] Remley, K. A., Williams, D. F., Schreus, D. M. M-P., Loglio, Giovanni, Cidronali, Alessandro, 2003.
- [36] Siljak, D.D. Nonlinear systems: the parameter analysis and design. Jonh Wiley & Sons, 1969.
- [37] Schoukens, J.; Van Den Eijnde, E. A recursive solution for strongly nonlinear systems by combining Volterra principles with the harmonic balance technique. *ISCAS '89 IEEE*, p.2159-2164, 1989.
- [38] Trendafilova, I., Leanerts, V., Kerschen, G., Golinval, J-C., Van Brussel, H., Heylen, W. Detection, Localisation and Identification of Nonlinearities in Structural Dynamics, 2000.
- [39] Vörös, J., Recursive Identification of Hammerstein Systems with Discontinuous Nonlinearities containing Dead-Zones, *IEEE Trans. On Automatic Control*, vol. 48, n.12, p. 2203-2206, 2003a.
- [40] Vörös, J., Modeling and Identification of Wiener System with Two-segment Nonlinearities, *IEEE Trans On Control Systems Technology*, vol 11, n. 2, 2003b.
- [41] Wahlberg, B. System identification using Kautz models. *IEEE Transc. on Automatic Control*, v. 39, n. 6, p.1276-1282, 1994.
- [42] Weiss, M., Evans, C., Rees, D., Identification of Nonlinear Cascade Systems using Paired Multisine Signals, *IEEE Trans. On Instrumentation and Measurement*, vol. 47, n. 1, p. 332-336, 1998.

ANEXOS

ANEXO A

O programa listado a seguir realiza a estimação da resposta em frequência do exemplo do sistema com saturação. O mesmo utiliza conceitos de balanço harmônico e efetua os cálculos que servem para estimar os parâmetros do modelo a partir das informações obtidas no domínio da frequência.

```
% Programa referente ao Exemplo 1.

clear all; %Zera variáveis.

cor='b'; %Dado para seleção de cor nos gráficos.

%Nível de saturação da entrada do sistema.
st = input('Nível de Saturação = ');

ap1 = input('Amplitude do sinal de entrada = ');

wi=1; wf=10; %Frequências de análise.
fi = wi / ( 2 * pi );
ff = wf / ( 2 * pi );

np=10; %Número de pontos dos gráficos.

N = 256; %Número de amostras dos processamentos.
M = 4; %Número de ciclos dos sinais a serem processados.
M = M * N;

fat = 1; %Fator de discretização.
dt = fat / ( N * fi ); %Tempo de amostragem.

tp=0; %Condições iniciais.
y=0;
for i=1:1:M %Loop de cálculo.
    t1(i) = tp; %Armazenamento de valores.
    e1(i) = ap1 * sin( 2 * pi * fi * tp );
    s1(i) = y;

    u = e1(i);

    % Rotina de correspondente a saturação.
    Us = u;
    if u < -st
        Us = -st;
    end
    if u > st
        Us = st;
    end

    % Equações numéricas do sistema.
```

```

    dly = -y + Us;
    y = y + dly * dt;

    tp = tp + dt; %Valor atual do tempo de processamento.
end

plot(t1,e1,'y',t1,s1,'r'); grid; tit = input('Titulo ( entre aspas) = ');

ti = t1(M/2+1); tf = t1(M/2+1+N); %Rotina de ajuste de offset.
ai = s1(M/2+1); af = s1(M/2+1+N);
apc = (af - ai) / (tf - ti);

tp = 0;
for i=1:M
    s2(i) = s1(i) - apc * tp;
    tp = tp + dt;
end

plot(t1,e1,t1,s2); grid; %Gráfico de visualização dos sinais no tempo.

jj=1;
for i=(M/2+1):1:(M/2+1)+N
    ta(jj) = t1(i); %Armazenamento dos valores ajustados.
    e(jj) = e1(i);
    s(jj) = s2(i);
    jj = jj + 1;
end

tit = input('Titulo ( entre aspas) = ');
plot(ta,e,cor,ta,s,cor); grid; %Gráfico de visualização.

%----- Teste de distorção -----
Im = fft(s,N); %Função FFT para processamento dos dados.

Md = abs(Im) / (N/2);
Fs = 360 * angle(Im) / (2*pi) - 270;

if Fs(2) < -360,
    Fs(2) = Fs(2) + 360;
end

fprintf('\n\n Harmonicas \n\n'); %Verificação das harmônicas obtidas.
for jj=2:1:16
    fprintf('N. Harm. = %d Wn = %f Amp. = %f Fase = %f \n', (jj-1),
(2*pi*(jj-1)/(N*dt)), Md(jj), Fs(jj));
end
tit = input('Titulo ( entre aspas) = ');
%-----

%Repetição dos calculus anteriores para a frequência maior.
dt = fat / ( N * ff );

tp=0;
y=0;
for i=1:1:M
    t1(i) = tp;
    e1(i) = ap1 * sin( 2 * pi * ff * tp );
    s1(i) = y;

    u = e1(i);

```

```

% Rotina de correspondente a saturação.
Us = u;
if u < -st
    Us = -st;
end
if u > st
    Us = st;
end

% Equações numéricas do sistema.
dly = -y + Us;
y = y + dly * dt;

tp = tp + dt;
end

plot(t1,e1,'y',t1,s1,'r'); grid; tit = input('Titulo ( entre aspas) = ');

ti = t1(M/2+1); tf = t1(M/2+1+N);
ai = s1(M/2+1); af = s1(M/2+1+N);
apc = (af - ai) / (tf - ti);

tp = 0;
for i=1:M
    s2(i) = s1(i) - apc * tp;
    tp = tp + dt;
end

plot(t1,e1,t1,s2); grid; tit = input('Titulo ( entre aspas) = ');

jj=1;
for i=(M/2+1):1:(M/2+1)+N
    ta(jj) = t1(i);
    e(jj) = e1(i);
    s(jj) = s2(i);
    jj = jj + 1;
end

plot(ta,e,ta,s); grid;

%----- Teste de distorcao -----
Im = fft(s,N);

Md = abs(Im) / (N/2);
Fs = 360 * angle(Im) / (2*pi) - 270;

if Fs(2) < -360,
    Fs(2) = Fs(2) + 360;
end

fprintf('\n\n Harmonicas \n\n');
for jj=2:1:16
    fprintf('N. Harm. = %d Wn = %f Amp. = %f Fase = %f \n', (jj-1),
(2*pi*(jj-1)/(N*dt)), Md(jj), Fs(jj));
end
tit = input('Titulo ( entre aspas) = ');
%-----

%Processamento da faixa de freqüências estabelecidas.
w=linspace(wi,wf,np);

```

```

for l=1:1:np

wa = w(l);
fi = wa / ( 2 * pi );
dt = fat / ( N * fi );

tp=0;
y=0;
for i=1:1:M
    t1(i) = tp;
    e1(i) = ap1 * sin( 2 * pi * fi * tp );
    s1(i) = y;

    u = e1(i);

    % Rotina de correspondente a saturação.
    Us = u;
    if u < -st
        Us = -st;
    end
    if u > st
        Us = st;
    end

    % Equações numéricas do sistema.
    dly = -y + Us;
    y = y + dly * dt;

    tp = tp + dt;
end

ti = t1(M/2+1); tf = t1(M/2+1+N);
ai = s1(M/2+1); af = s1(M/2+1+N);
apc = (af - ai) / (tf - ti);

tp = 0;
for i=1:M
    s2(i) = s1(i) - apc * tp;
    tp = tp + dt;
end

jj=1;
for i=(M/2+1):1:(M/2+1)+N
    s(jj) = s2(i);
    jj = jj + 1;
end

Im = fft(s,N); %Algoritmo de FFT.

Md = abs(Im) / (N/2); %Cálculo do módulo da função do sistema.

Fs = 360 * angle(Im) / (2*pi) - 270; %Cálculo da fase.

if Fs(2) < -360, %Ajuste de quadrante da fase.
    Fs(2) = Fs(2) + 360;
end

Al(1) = Md(1+fat); %Armazenamentos das informações da 1ª harmônica
Fl(1) = Fs(1+fat);

end

```

```
tit = input('Titulo[entre aspas] do diagrama de Bode ( open ) : ');
subplot(211); semilogx(w,20*log10(A1/ap1),cor); grid;
xlabel('W [rd/s]'); ylabel('dB'); title(tit);
subplot(212); semilogx(w,Fl,cor); grid;
xlabel('W [rd/s]'); ylabel('phase'); %Impressão da resposta.

Al=Al/ap1;

hre=Al.*cos(pi*Fl/180);
him=Al.*sin(pi*Fl/180);
hcp=hre-j.*him;
hcp=hcp';
[Ns,Ds]=invfreqs(hcp,w,1,1) %Função para estimação dos parâmetros.
```


ANEXO B

O programa listado a seguir realiza a estimação do modelo NARMAX mostrado no Exemplo 3.

```
% Estimação do modelo NARMAX do Exemplo 3.

n=1497; %Número de amostras.
m=n+3;

%Dados para Identificação
in=ScopeData(1:m,2); %entrada
out=ScopeData(1:m,3); %saida

%Regressores
F(1:n,1)=out(3:n+2); %y(k-1)
F(1:n,2)=out(2:n+1); %y(k-2)
F(1:n,3)=in(2:n+1); %u(k-2)
F(1:n,4)=in(3:n+2); %u(k-1)
for i=1:n
    F(i,5)=out(i+2)^2 * in(i+2); %y(k-1)^2*u(k-1)
    F(i,6)=in(i+2)^2 * in(i); %u(k-1)^2*u(k-3)
end
F(1:n,7)=out(1:n).^3; %y(k-3)^3
for j=1:n
    F(j,8)=out(j+1)*in(j+1); %y(k-2)*u(k-2)
    F(j,9)=out(j)^2*in(j); %y(k-3)^2*u(k-3)
end
Y=out(4:n+3); %y(k)

%Estimação de Parâmetros por Mínimos Quadrados.
P=inv(F'*F);
Q=F'*Y;
T=P*Q; %Vetor de Parametros Estimados
'Vetor de Parametros Estimados'
format short g
T

%Dados para teste de validação
iv=ScopeData1(1:m,2); %entrada
ov=ScopeData1(1:m,3); %saida

%Simulação do modelo.
S1(1)=0; S1(2)=0; S1(3)=0;
for k=4:m
    S1(k)=T(1)*S1(k-1) + T(2)*S1(k-2) + T(3)*iv(k-2) + T(4)*iv(k-1) +
    T(5)*(S1(k-1)^2)*iv(k-1) + T(6)*(iv(k-1)^2)*iv(k-3) + T(7)*S1(k-3)^3 +
    T(8)*S1(k-2)*iv(k-2) + T(9)*(S1(k-3)^2)*iv(k-3);
end
S1=S1'; %Dados de saída simulados.
plot(1:m,S1,'b',1:m,ov,'k'); grid; xlabel('Numero de Amostras');
legend('Modelo NARMAX','Sistema Medido');

%Autocorrelação do sinal simulado com as medidas de saída.
rr=xcorr(S1,ov); %AutoCorrelação dos dados simulados e medidas.
Crr=corrcoef(S1,ov);
```

```
crr=Crr(1,2)*100; %Coeficiente de correlação.  
'Coeficiente de Correlação do Modelo NARMAX'  
crr  
figure;  
plot(-1499:1499,rr);grid;xlabel('Amostras');  
ylabel('AutoCorrelação do sinal medido com modelo NARMAX');  
title('Gráfico da autocorrelação');
```

ANEXO C

Parte do código abaixo serve para processar os dados do Exemplo 4. O programa é basicamente o mesmo do Exemplo 1, que efetua os cálculos que servem para estimar os parâmetros do modelo a partir das informações obtidas no domínio da frequência. As modificações necessárias referem-se apenas a substituição dos trechos de rotinas referentes a saturação e as equações numéricas do sistema. E de forma similar para os outros exemplos do trabalho. No Exemplo 5, para a função `invfreqs` deve-se mudar as opções `(_,_,1,1)` para `(_,_,2,2)`.

```
% Programa referente ao Exemplo 4.  
  
% Equações numéricas do sistema.  
dly = -Ily + (sin(sqrt(abs(Ily))))^2 + u;  
y = y + dly * dt;
```

ANEXO D

O programa a seguir realiza a simulação do Exemplo 4, comparando os resultados obtidos pelo modelo proposto e com os dados resultantes do sistema não-linear.

```
% Simulação do Exemplo 4.

clear all; %Zerar variáveis.

dt = 0.1; %Tempo de amostragem.
np = 100; %Número de amostras.

caj = 1.35; %Fator de ajuste.

tp=0; ema=0; %Condições iniciais.
Y=0; Ya=0;

for i=1:np %Laço de repetição.

    %Geração da excitação do sistema.
    u = 0.1 + 0.8*rand;

    t1(i) = tp; %Armazenamento de dados.
    e1(i) = u;
    s1(i) = Y;
    s2(i) = Ya;

    % Equações numéricas do sistema.
    Yp = u - Y + (sin(sqrt(abs(Y))))^2;
    Y = Y + Yp * dt;

    ku = 0.0034*u+0.9895; %Polinômio K(u).

    %Polinômio p(u).
    pu = 1.5641*u^5-4.8051*u^4+5.9163*u^3-3.8653*u^2+1.733*u+0.1238;

    Yap = caj*ku*u - pu*Ya; %Simulação do modelo proposto.
    Ya = Ya + Yap * dt;

    err = abs(Y - Ya); %Totalização do erro absoluto.
    ema = ema + err;

    tp = tp + dt;

end

ema = ema/np %Cálculo do erro médio absoluto.

% Gráficos dos resultados.
subplot(211);
plot(t1,e1,'b'); grid;
xlabel('t [s]'); ylabel('u(t)');
subplot(212);
plot(t1,s1,'b',t1,s2,'r'); grid;
xlabel('t [s]'); ylabel('Y(t) e Ye(t)');
```