UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Funções e Polinômios sobre o Disco Unitário

ESTÊVÃO HENRIQUE REZENDE

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES.

UNIFEI - ITAJUBÁ
Março / 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ESTÊVÃO HENRIQUE REZENDE

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira

Funções e Polinômios sobre o Disco Unitário

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de **Mestre em Ciências em Matemática.**

Área de Concentração: Análise Matemática.

UNIFEI - ITAJUBÁ
Março / 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ESTÊVÃO HENRIQUE REZENDE

Funções e Polinômios sobre o Disco Unitário

Dissertação aprovada por banca examinadora em 03 de março de 2016, conferido ao autor o título de **Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.**

Banca examinadora:
Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira - Orientador
Prof. Dr. Sergio Antonio Tozoni - UNICAMP
Profa. Dra. Márcia Sayuri Kashimoto - UNIFEI
DEFESA: Dia 03 de Março de 2016 às 14 horas.
NOTA: 9,5.

UNIFEI - ITAJUBÁ
Março / 2016

Aos meus avós Geraldo e Maria, dedico.

Agradecimentos

A Jesus Cristo, por a mim ter se revelado e guiado a todo instante. Flamejo minha alma em virtude d'Ele que me ensina o fundamento da vida.

Ao meu orientador professor Claudemir Oliveira pelos ensinamentos e pela maneira primorosa com a qual conduziu a elaboração deste trabalho. A ele exponho meu respeito, admiração e gratidão. Certamente, ele será uma das minhas principais referências, em todos os aspectos.

Aos meus avós, Geraldo e Maria e, a minha mãe Hilza, por terem sido um espelho refletor da persistência, força, coragem e humildade em minha vida, sem os quais a minha existência seria fútil e a conclusão deste trabalho impraticável.

Aos meus amigos João, Neim e Tiago. Em primeira instância pela amizade, pelas sinceras e incessantes orações, seguramente atendidas, além das muitas e virtuosas lições.

Aos professores do Programa de Mestrado em Matemática da UNIFEI, em especial, ao professor e coordenador Luis Fernando e aos professores Fábio, Marisa, Bráulio, Denis e Márcia, pela formação acadêmica, apoio e forte dedicação.

Ao professor Luiz Antônio Souza, por ter-me despertado o encanto pelos números, sem o qual eu não seria hoje capaz de compreender a complexidade em que eles estão imersos. Ele constitui-se como um de meus espelhos.

Aos meus colegas de mestrado pela ajuda concedida, pela amizade compartilhada e pelos bons momentos proporcionados durante esse percurso.

Aos meus familiares e amigos pelos calorosos votos de incentivo, ajuda e incansável espírito de bondade para comigo, em especial, a tia Imaculada, que por estar do outro lado, certamente permanece ao meu lado.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que compartilharam comigo ajuda e solidariedade. Todos foram mais que amigos, companheiros, parentes. Cada é um pedaço do que hoje sou. Agradeço-lhes de coração e, espero que eu possa tê-los ao meu lado por muitos anos mais e, que a cada dia eu possa aperfeiçoar minha postura com o objetivo de merecer tudo o que recebi de vocês.

Obrigado!

Estêvão.

"Vigio dentre as sombras os focos de luz.
Haverá a certeza de não encontrar.
Mas não faço da certeza algo inflexível.
Faço das suspeitas as mudanças e das certezas minha fé."
Wendel Costa

Resumo

Neste trabalho, estudamos com o máximo de pormenores a respeito dos polinômios no disco unitário complexo. Naturalmente, os polinômios de Jacobi fazem parte desse detalhamento. A dissertação é completa no sentido que ela contém a prova da maioria dos resultados enunciados, incluindo aqueles do capítulo contendo resultados preliminares.

Palavras-chave e frases: Disco unitário - Função no disco- Polinômio de Jacobi - Série hipergeométrica

Abstract

In this work, we study in details the polynomials on the disk unit complex. Of course, Jacobi polynomials are part of this search. The dissertation is complete in the sense that it contains the proofs of the majority listed results, including those contained in the preliminary chapter.

Keywords and phrases: Disk function - Disk polynomial - Jacobi polynomial - Hipergeometric series - Unit disk

Símbolos e Notações

$\mathbb{C}$	Plano complexo ou plano de Argand Gauss
$D[1]$	Disco unitário fechado de $\mathbb{C}$
$D(1)$	Interior de $D[1]$
$\mathbb{C}^q$	Espaço vetorial complexo q-dimensional
$\Delta_{(2q)}$	Laplaciano complexo q-dimensional
Ω_{2q}	Esfera unitária centrada na origem de $\mathbb{C}^q$
S^{2q-1}	Esfera unitária em $\mathbb{R}^{2q}$
Ω_ω^η	Subesfera de Ω_{2q} de raio $(1-\|\eta\|^2)^{1/2}$ e pólo $\omega \in \Omega_{2q}$
Γ	Função gamma
B	Função beta
$d\sigma_q$	Elemento de superfície sobre Ω_{2q}
$d\sigma_\omega^\eta$	Elemento de superfície sobre Ω_ω^η
$\mathfrak{m}_\alpha$	Medida de probabilidade sobre $D[1]$
F	Função hipergeométrica de tipo ${}_2F_1$
A_k	O k-ésimo coeficientes da expansão analítica de F
$J_n^{(\alpha,\beta)}$	Polinômio de Jacobi de grau n associado aos parâmetros reais α e β
$J_n^{(\alpha,\alpha)}$	Polinômio de Gegembauer de grau n associado ao parâmetro real α
$J_n^{(0,0)}$	Polinômio de Legendre de grau n
$\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$	Conjunto de polinômio nas variáveis $z,\bar{z} \in \mathbb{C}^q$
$\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$	Conjunto dos polinômios bihomogêneos de grau m em z e de grau n em $\bar{z}$
$\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$	Conjunto dos elementos de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ que são harmônicos
$\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$	Conjunto dos elementos de $\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ restritos a Ω_{2q}
$R_{m,n}^\alpha$	Polinômio no disco associado a um parâmetro α, de grau m em z e de grau n em $\bar{z}$
$Re(z)$	Parte real do número complexo z
$(z)_k$	Símbolo Pochhammer aplicado em $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{Z}_+$	Conjunto dos inteiros não negativos
$\mathbb{Z}_-$	Conjunto dos inteiros não positivos
$N(m,n)$	Dimensão de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$
$\delta(q,m,n)$	Dimensão de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$

$m \wedge n$	Menor elemento do conjunto $\{m,n\}$
$m \vee n$	Maior elemento do conjunto $\{m,n\}$
$\mathbb{R}^q$	Espaço euclidiano real q-dimensional
$O(2q)$	Grupo dos operadores unitários de $\mathbb{C}^q$
$O_\omega(2q)$	Subgrupo de $O(2q)$ com operadores que fixam $\omega \in \Omega_{2q}$
ρ^*	Adjunto do operador $\rho \in O(2q)$
$\delta_{m,n}$	Função delta de Kronecker
Υ_q	Função indentificadora de $\mathbb{C}^q$ com $\mathbb{R}^{2q}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno usual em $\mathbb{C}^q$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,\alpha}$	Produto interno usual do espaço de Hilbert $L^2(D[1], d\mathfrak{m}_\alpha)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_2$	Produto interno usual em $L^2(\Omega_{2q}, d\sigma_q)$
$\star$	Produto interno usual em $\mathbb{R}^q$
$L^p(\Omega_{2q}, d\sigma_q)$	Conjunto das funções p-integráveis sobre Ω_{2q} em relação a $d\sigma_q$
$L^p(D[1], d\mathfrak{m}_\alpha)$	Conjunto das funções p-integráveis sobre $D[1]$ em relação a $d\mathfrak{m}_\alpha$
$G^\alpha_{m,n,k,l}$	Função generalizada no disco
ε_j	j-ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{C}^q$
$Y^i_{m,n}$	Um elemento da base de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$

Índice

Capítulo 1

Introdução

O objetivo principal deste capítulo é discorrer em linhas gerais, sem muita formalidade, sobre a motivação principal deste trabalho.

Inicialmente, destacamos que o tema principal referido no título da dissertação, localiza este estudo dentro da Análise Funcional Complexa. Mais especificamente, lidaremos com uma questão básica introdutória da análise sobre esferas complexas q-dimensionais.

Se Ω_{2q} denota a esfera unitária q-dimensional, então uma classe importante de funções sobre Ω_{2q} é aquela que pode ser descrita a partir dos polinômios harmônicos em q variáveis complexas. Dentre os harmônicos esféricos, destacamos a classe de polinômios que são também zonais ou que são constantes em subconjuntos de Ω_{2q} que mantém uma distância constante a partir de um ponto fixado de Ω_{2q}. Os polinômios harmônicos esféricos zonais por sua vez são caracterizados por uma classe especial de polinômios sobre o disco unitário complexo, os *polinômios no disco*. Os polinômios no disco estão estreitamente relacionados aos conhecidos polinômios de Jacobi sobre $[-1,1]$, uma vez que esses entram como ingrediente principal na definição daqueles. Por isso, nosso estudo inicia-se buscando conhecer mais profundamente os polinômios de Jacobi.

Nos tempos atuais, os polinômios no disco unitário ou/e os polinômios de Jacobi têm sido usados de maneira decisiva para abordar e resolver questões de interesse de muitos pesquisadores conforme ([5, 14, 15, 16]) e nas referências contidas nestas. Dentre tais questões destacamos as seguintes: caracterização de núcleos positivos definidos sobre a esfera, caracterização de núcleos estritamente positivos definidos sobre Ω_{2q}, a Fórmula de Funk-Hecke no contexto complexo, diferenciabilidade de núcleos sobre Ω_{2q} e o decaimento de autovalores para operadores integrais definidos por núcleos positivos definidos ([2, 9, 10, 11]).

Os polinômios no disco foram introduzidos em 1934 pelo holandês Fritz Zernike quando estudou aproximação de determinadas funções ([30]). Estes polinômios são definidos para parâmetros reais. Fritz definiu os polinômios no disco considerando o parâmetro $\alpha = 0$ aplicando-os em pesquisas relacionadas à microscopia e à óptica. Posteriormente, uma generalização conduziu aos atuais polinômios no disco que na atualidade são aplicados à óptica quântica ([28]).

A dissertação compõe-se de três capítulos. O capítulo seguinte é dedicado à abordagem dos conceitos preliminares. Portanto, aí estudaremos as séries hipergeométricas unidimensionais, as funções gama e beta e suas relações com o símbolo Pochhammer. Nesse capítulo, então, discorremos sobre a definição e propriedades dos polinômios de Jacobi. Fechamos o capítulo introduzindo algumas classes de polinômios sobre o espaço complexo q-dimensional, incluindo os harmônicos esféricos complexos.

O terceiro e último capítulo trata do objetivo principal do trabalho, estudar funções e polinômios sobre o disco unitário complexo. Nesta parte, veremos que muitas propriedades válidas para polinômios no disco, provém da analogia entre estes e os polinômios de Jacobi, incluindo uma Fórmula de Rodrigues para eles. Naturalmente, fazem parte deste capítulo os seguintes assuntos: equações diferenciais que tem como solução os polinômios no disco, funções zonais sobre Ω_{2q} e a Fórmula de Adição para polinômios no disco, a qual faz conexão entre estes polinômios e os harmônicos esféricos complexos.

O final da dissertação é dedicado ao estudo de funções generalizadas sobre o disco unitário complexo. Usamos a denominação 'generalizada', porque os polinômios no disco podem ser vistos como particulares destes. Em relação a esta classe de função abordaremos uma fórmula fechada e a estreita relação destas com os polinômios no disco.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais

O presente capítulo é dedicado à introdução de conceitos considerados preliminares para a dissertação, o que propicia o embasamento teórico ao decurso do capítulo principal. Muitas das propriedades aqui estudadas serão diretamente aplicadas na abordagem do assunto central da dissertação, enquanto outros são listados por questão de completitude.

Estudaremos as funções gama e beta, bem como suas relações com o símbolo Pochhammer. Estas funções conduzem ao estudo das séries hipergeométricas unidimensionais. Estas por sua vez são usadas para estudar a definição e algumas propriedades dos polinômios de Jacobi, usados no capítulo posterior, onde estudaremos os polinômios no disco. Como pretendemos estudar a conexão desses polinômios com os harmônicos esféricos complexos, a última seção deste capítulo discorrerá sobre harmônicos esféricos complexos.

A maioria das provas será desenvolvida integralmente ou será citada uma referência conveniente. A teoria aqui abordada pode ser encontrada com mais profundidade nas referências ([1, 6, 7, 8, 24, 27, 26, 31]).

2.1 A função gama

Em Análise, a função gama que é representada pela letra maiúscula grega Γ, é uma extensão da função fatorial ao conjunto dos números reais e até complexos. Assim, quando n é um inteiro positivo,

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Esta função pode ser definida por uma extensão analítica para números complexos.

Definição 2.1.1 *A função gama é definida para um número complexo z, cuja parte real é positiva, como sendo a função dada pela integral*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt. \tag{2.1}$$

É, portanto, uma consequência direta desta definição que $\Gamma(1) = 1$. De fato, a proposição abaixo revela que Γ generaliza o conceito de fatorial, usualmente válido para números inteiros não negativos.

Proposição 2.1.1 *Se z é um número complexo com parte real positiva, então $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.*

Demonstração: Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z) > 0$. Então, integração por partes mostra que

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Assim, a prova está concluída. ∎

O *símbolo Pochhammer*, introduzido por Leo August Pochhammer ([21]), permite uma notação simplificada para expressões matemáticas que dependem de um produto sequencial. Então, para todo z

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_k = z(z+1)(z+2)\cdots(z+k-1), \quad k = 1,2,\ldots.$$

Em particular, é imediato que

$$(-n)_k = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad k = n+1,\ldots. \tag{2.2}$$

Outras propriedades para $(z)_k$ que serão sistematicamente usadas estão na sequência.

Proposição 2.1.2 *Sejam $z \in \mathbb{C}$ e n um inteiro não negativo. Valem as propriedades:*
(1) $(z)_{k+l} = (z)_k (z+k)_l$, $k,l = 0,1,\ldots$;
(2) $(-z)_k = (-1)^k (z-k+1)_k$, $k = 0,1,\ldots$;
(3) $(z)_{n-k} = \frac{(z)_n}{(z+n-k)_k}$, $k = 0,1,\ldots,n$.

Demonstração: Sejam k,l inteiros não negativos. Então,

$$\begin{aligned} (z)_{k+l} &= [(z)(z+1)(z+2)\cdots(z+k-1)]\,[(z+k)(z+k+1)\cdots(z+k+l-1)] \\ &= (z)_k (z+k)_l, \end{aligned}$$

provando (1).
A prova de (2) segue das igualdades

$$\begin{aligned} (-z)_k &= (-1)^k z(z-1)(z-2)\cdots(z-k+1) \\ &= (-1)^k (z-k+1+k-1)(z-k+1+k-2)\cdots(z-k+2)(z-k+1) \\ &= (-1)^k (z-k+1)_k, \quad k = 0,1,\ldots. \end{aligned}$$

Para a afirmação (3), primeiro observamos que para $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}(z)_{n-k} &= z(z+1)\cdots(z+n-k-1) \\ &= \frac{z(z+1)\cdots(z+n-k-1)(z+n-k)(z+n-k+1)\cdots(z+n-1)}{(z+n-k)(z+n-k+1)\cdots(z+n-2)(z+n-1)}.\end{aligned}$$

A prova está terminada, porque a última expressão coincide com aquela do item (3). ■

A próxima proposição mostra conexão entre a função gama e o símbolo Pochhammer.

Proposição 2.1.3 *Se z é um número complexo com parte real positiva, então*

$$\Gamma(z+n) = (z)_n \Gamma(z), \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Demonstração: Suponha $z \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z) > 0$. Usando a Proposição 2.1.1, vemos que a igualdade sugerida pela proposição se verifica para $n = 0$ e $n = 1$. Procedendo por indução, assuma que para algum inteiro $k > 1$,

$$\Gamma(z+k) = (z)_k \Gamma(z).$$

Com esta hipótese, juntamente com a Proposição 2.1.1, novamente, chegamos as igualdades

$$\begin{aligned}\Gamma(z+k+1) &= (z+k)\Gamma(z+k) \\ &= (z+k)(z)_k\Gamma(z) \\ &= (z)_{k+1}\Gamma(z).\end{aligned}$$

Portanto, a prova está concluída. ■

O caso particular da proposição anterior mais conhecido na Matemática é

$$\Gamma(n+1) := n! = (1)_n, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Uma utilidade interessante do símbolo Pochhammer está no próximo resultado.

Proposição 2.1.4 *Seja α um número real. Se k é um inteiro não negativo tal que $\alpha \geq k$, então*

$$\frac{d^k}{dz^k}(z^\alpha) = (\alpha - k + 1)_k z^{\alpha - k}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração: Sejam $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\alpha \geq k$. Derivamos, diretamente, a potência z^α em relação a z para obter

$$\frac{d^k}{dz^k}(z^\alpha) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)z^{\alpha-k},$$

implicando na igualdade da afirmação da proposição. ■

2.2 A função beta

Assim como a função gama, a função beta ou integral de Euler de primeiro tipo também é uma ferramenta auxiliar quando lidamos com fatorial.

Definição 2.2.1 *A função beta é definida para números complexos z e w, cujas partes reais são positivas, como sendo a integral*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt.$$

É de decorrência imediata dessa definição que $B(z,w) = B(w,z)$. A conexão entre a função beta e a função gama está na proposição a seguir.

Proposição 2.2.1 *Se z e w são números complexos com partes reais positivas, então*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Demonstração: Sejam $z,w \in \mathbb{C}$ tais que $Re(z) > 0$ e $Re(w) > 0$. A mudança de coordenadas $t = \cos^2\theta$ na integral que define B produz as igualdades

$$B(z,w) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2z-2}\theta(1-\cos^2\theta)^{w-1}\cos\theta\,\text{sen}\theta\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2z-1}\theta\,\text{sen}^{2w-1}\theta\, d\theta.$$

Por outro lado, a mudança de coordenada $t = x^2$ na integral que define Γ revela que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \int_0^\infty e^{-x^2}(x^2)^{z-1}2xdx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2z-1}dx$$

e, consequentemente

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= 4\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2z-1}dx\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2w-1}dy\\ &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2z-1}y^{2w-1}dxdy.\end{aligned}$$

Então, adotando coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2z+2w-1}\cos^{2z-1}\theta\,\mathrm{sen}^{2w-1}\theta\, dr\, d\theta \\ &= \left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2z-1}\theta\,\mathrm{sen}^{2w-1}\theta\, d\theta\right)\left(2\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2z+2w-1} dr\right).\end{aligned}$$

Voltando à expressão de B obtida no início da prova, temos que

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= B(z,w)\left(2\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2z+2w-1} dr\right) \\ &= B(z,w)\left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2(z+w-1)} 2r dr\right) \\ &= B(z,w)\Gamma(z+w).\end{aligned}$$

Portanto, a prova da proposição está concluída. ■

Proposição 2.2.2 *Se z e w são números complexos com partes reais positivas, então*

$$\int_{-1}^{1} (1+u)^{z-1}(1-u)^{w-1} du = 2^{z+w-1}B(z,w).$$

Demonstração: Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ tais que $Re(z) > 0$ e $Re(w) > 0$. Adotamos a mudança de coordenadas $u = 2x-1$ para obter

$$\int_{-1}^{1} (1+u)^{z-1}(1-u)^{w-1} du = \int_0^1 (2x)^{z-1}[2(1-x)]^{w-1} 2dx = \int_0^1 2^{z+w-1}x^{z-1}(1-x)^{w-1} dx.$$

A prova segue da definição de B. ■

2.3 A função hipergeométrica

Polinômios ortogonais clássicos podem ser expressos como funções hipergeométricas. Um exemplo disso, conforme veremos, são os polinômios de Jacobi. As referências [24] e [31]) trazem um estudo completo a respeito dessa classe de funções.

Definição 2.3.1 *Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$ tal que $c \notin \mathbb{Z}_-$. A função hipergeométrica F depende de a, b, c e é dada pela série hipergeométrica*

$$F(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k (1)_k} z^k.$$

A restrição de que o parâmetro c não pode ser um inteiro não negativo nessa definição, é melhor compreendida pela observação (2.2). No entanto, notamos que quando a ou b é um inteiro não positivo, o escalar c também pode pertencer ao conjunto

$$\{m-1, m-2, \ldots\},$$

onde $m = \min\{a,b\}$. Investigamos a seguir o domínio da função hipergeométrica.

Denotamos o *disco complexo fechado* unitário e centro $0 \in \mathbb{C}$ como $D[1]$ - Isto é,

$$D[1] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

Neste caso, o interior de $D[1]$ será representado pelo conjunto $D(1)$.

Proposição 2.3.1 *Sejam $a,b,c \in \mathbb{C}$ tal que $c \notin \mathbb{Z}_-$. Então:*
(1) *A série hipergeométrica converge absolutamente em $D(1)$.*
(2) *Se $a \in \mathbb{Z}_-$ ou $b \in \mathbb{Z}_-$, então a série hipergeométrica converge absolutamente em $\mathbb{C}$. Em particular,*

$$F(-n,b;c;z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (b)_k}{(c)_k (1)_k} z^k, \quad z \in \mathbb{C},\ n = 0,1,\ldots.$$

Demonstração: Seja A_k o k-ésimo coeficiente da série hipergeométrica - Isto é,

$$A_k := \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k (1)_k}, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{2.3}$$

Então,

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)(1+k)}, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{2.4}$$

Consequentemente, a série converge absolutamente em $D(1)$, provando (1).
Para a prova do item (2), assuma que $a \in \mathbb{Z}_-$ ou $b \in \mathbb{Z}_-$. Logo, pela observação (2.2), a série hipergeométrica torna-se um polinômio de grau $\min\{-a,-b\}$ em z e, portanto converge absolutamente em $\mathbb{C}$. A última afirmação da proposição segue, então, da Proposição 2.1.2 com auxílio de (2.2). ■

A forma integral de Gauss para as funções hipergeométricas é como segue.

Teorema 2.3.1 *Sejam $a,b,c \in \mathbb{C}$ tal que $c \notin \mathbb{Z}_-$. Se $0 < Re(b) < Re(c)$, então a forma integral de Gauss de F é*

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt, \quad z \in D(1).$$

Demonstração: Primeiramente, expandimos a potência $(1-zt)^{-a}$ em Série de Mac-Laurin para obter a soma ([24, p. 47])

$$(1-zt)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(1)_k}(zt)^k, \quad z \in D(1),\ 0 \le t \le 1.$$

Segue que

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(1)_k} z^k \int_0^1 t^{k+b-1}(1-t)^{c-b-1}dt.$$

Se $0 < Re(b) < Re(c)$, então pela Proposição 2.2.1, a integral à direita da igualdade acima toma a forma

$$\int_0^1 t^{k+b-1}(1-t)^{c-b-1}dt = \frac{\Gamma(k+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(k+c)}, \quad k = 0,1,\ldots.$$

A Proposição 2.1.3 dá o valor final da integral acima como sendo

$$\int_0^1 t^{k+b-1}(1-t)^{c-b-1}dt = \frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} \frac{(b)_k}{(c)_k}, \quad k = 0,1,\ldots$$

e, consequentemente

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt \ = \ \frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k(1)_k} z^k \quad z \in D(1).$$

Assim, a Definição 2.3.1 implica no término da prova. ∎

Geralmente o teorema precedente é usado para encontrar uma fórmula fechada para a *constante de Gauss* definida por $F(a,b;c;1)$, em função de seus parâmetros. O valor dessa constante ocupa um fundamental papel em muitos resultados da análise matemática. Porém, dependendo do contexto, as restrições impostas pelo Teorema 2.3.1 dificulta sua aplicação do mesmo. Na literatura em geral, quando restrições não são impostas aos parâmetros a, b e c, o recurso da continuidade analítica é utilizado ([24, 27]). No entanto, não encontramos uma referência, onde esta ferramenta é desenvolvida satisfatoriamente. Uma solução para esse problema e, surpreendentemente simples é o Teorema de Chu-Vandermonde ([7, p. 4]). Por questão de completitude, incluiremos a prova do teorema.

Teorema 2.3.2 *Se $b, c \in \mathbb{C}$, então*

$$F(-n,b;c;1) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}, \quad n = 0,1,\ldots.$$

Demonstração: Primeiramente, assuma que z e b são números complexos. Expandimos as potências $(1-x)^{-z}$ e $(1-x)^{-b}$ em série de Mac-Lauren obtendo o produto

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-z}(1-x)^{-b} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z)_k}{(1)_k}x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(b)_l}{(1)_l}x^l\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(z)_k(b)_l}{(1)_k(1)_l}x^{k+l}.
\end{aligned}$$

Então, adotando $k+l=n$ e reordenando as potências de x chegamos à soma

$$(1-x)^{-z}(1-x)^{-b} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{(z)_{n-l}(b)_l}{(1)_{n-l}(1)_l}x^n.$$

Por outro lado, comparando a última expansão com

$$(1-x)^{-(z+b)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+b)_n}{(1)_n}x^n,$$

chegamos a identidade

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(z)_{n-k}(b)_k}{(1)_{n-k}(1)_k} = \frac{(z+b)_n}{(1)_n}, \quad n=0,1,\ldots.$$

Por meio de manipulação algébrica simples com auxílio das propriedades listadas na Proposição 2.1.2, justificamos a igualdade

$$\frac{(z)_{n-k}}{(1)_{n-k}} = \frac{(z)_n}{(1)_n}\frac{(-n)_k}{(1-n-z)_k}, \quad k=0,1,\ldots,n.$$

Logo,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(b)_k}{(1-n-z)_k(1)_k} = \frac{(z+b)_n}{(z)_n}, \quad n=0,1,\ldots.$$

Em particular, recordando a Proposição 2.3.1, quando $z=1-n-c$, $c\in\mathbb{C}$,

$$\frac{(1-n-c+b)_n}{(1-n-c)_n} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(b)_k}{(c)_k(1)_k} = F(-n,b;c;1), \quad n=0,1,\ldots.$$

Por fim, usamos novamente a Proposição 2.1.2 para justificar que

$$\frac{(1-n-c+b)_n}{(1-n-c)_n} = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}.$$

Portanto, o teorema está provado. ∎

O resultado seguinte traz uma transformação simples para F que às vezes ocorre.

Proposição 2.3.2 *Sejam $a,b,c \in \mathbb{C}$ tal que $c \notin \mathbb{Z}_-$. Se $0 < Re(b) < Re(c)$, então*

$$F(a,b;c;z) = \frac{1}{(1-z)^a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right), \quad Re(z) < 1/2,\ z \in D(1).$$

Demonstração: Suponha que $0 < Re(b) < Re(c)$, $Re(z) < 1/2$ e $z \in D(1)$. Iniciamos a prova fazendo $t = 1-u$ na representação de F do Teorema 2.3.1 para encontrar

$$\begin{aligned} F(a,b;c;z) &= \frac{1}{(1-z)^a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 (1-u)^{b-1} u^{c-b-1} \left(1 - \frac{z}{z-1}u\right)^{-a} du \\ &= \frac{1}{(1-z)^a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right). \end{aligned}$$

Portanto a proposição está provada. ■

O teorema seguinte é a versão melhorada da proposição acima. A ausência de restrições sobre os parâmetros é consequência ao Teorema de Chu-Vandermonde.

Teorema 2.3.3 *Sejam $a,b,c \in \mathbb{C}$ tal que $c \notin \mathbb{Z}_-$. Se $Re(z) < 1/2$, $z \in D(1)$, então*

$$F(a,b;c;z) = \frac{1}{(1-z)^a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right).$$

Demonstração: Suponha que $Re(z) < 1/2$, $z \in D(1)$. Isso implica que, de fato,

$$\frac{z}{z-1} \in D(1).$$

Considere, então, o produto

$$\frac{1}{(1-z)^a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(a)_k (c-b)_k}{(c)_k (1)_k} \frac{z^k}{(1-z)^{k+a}}.$$

Usando expansão de Mac-Laurin, escrevemos

$$\frac{1}{(1-z)^{a+k}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a+k)_l}{(1)_l} z^l$$

e, consequentemente

$$\frac{1}{(1-z)^a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(a)_k (a+k)_l (c-b)_k}{(c)_k (1)_k (1)_l} z^{k+l}.$$

Empregando a identidade $(a)_k (a+k)_l = (a)_{k+l}$ da Proposição 2.1.2, obtemos

$$\frac{1}{(1-z)^a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(a)_{k+l} (c-b)_k}{(c)_k (1)_k (1)_l} z^{k+l}.$$

Adotando $k+l=n$ e reordenando as potências de z chegamos à soma

$$\frac{1}{(1-z)^a}F\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(a)_n(c-b)_k}{(1)_{n-k}(c)_k(1)_k}z^n.$$

Novamente pela Proposição 2.1.2,

$$\frac{(-1)^k}{(1)_{n-k}}=\frac{(-n)_k}{(1)_n},$$

implicando em

$$\frac{1}{(1-z)^a}F\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(c-b)_k}{(c)_k(1)_k}\right]\frac{(a)_n}{(1)_n}z^n.$$

Da Proposição 2.3.1,

$$\frac{1}{(1-z)^a}F\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}F(-n,c-b;c;1)\frac{(a)_n}{(1)_n}z^n.$$

Finalmente, usamos a constante de Gauss do Teorema 2.3.2 para concluir que

$$\frac{1}{(1-z)^a}F\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}z^n, \quad z\in D(1),\ Re(z)<1/2,$$

finalizando a prova. ■

Adaptamos a prova anterior para a seguinte versão do Teorema 2.3.3.

Teorema 2.3.4 *Sejam $b,c\in\mathbb{C}$ tal que $c\notin\mathbb{Z}_-$. Se n é um inteiro não negativo, então*

$$F(-n,b;c;z)=(1-z)^nF\left(-n,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right), \quad z\neq 1.$$

Demonstração: Como $(-n)_k=0$, $k=n+1,\ldots$,

$$\frac{1}{(1-z)^{-n}}F\left(-n,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(-n)_k(c-b)_k}{(c)_k(1)_k}\frac{z^k}{(1-z)^{k-n}},$$

onde

$$\frac{1}{(1-z)^{k-n}}=\sum_{l=0}^{n-k}\frac{(k-n)_l}{(1)_l}z^l.$$

Logo,

$$\frac{1}{(1-z)^{-n}}F\left(-n,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^k\frac{(-n)_{k+l}(c-b)_k}{(c)_k(1)_k(1)_l}z^{k+l}.$$

Reordenando as parcelas de acordo com as potências da variável com ajuda da Proposição 2.1.2, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^{-n}}F\left(-n,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right) &= \sum_{\mu=0}^{n}\left[\sum_{\nu=0}^{\mu}(-1)^{\nu}\frac{(c-b)_{\nu}}{(c)_{\nu}(1)_{\nu}(1)_{\mu-\nu}}\right](-n)_{\mu}z^{\mu}\\ &= \sum_{\mu=0}^{n}\left[\sum_{\nu=0}^{\mu}\frac{(-\mu)_{\nu}(c-b)_{\nu}}{(c)_{\nu}(1)_{\nu}}\right]\frac{(-n)_{\mu}}{(1)_{\mu}}z^{\mu}.\end{aligned}$$

Da Proposição 2.3.1,

$$\frac{1}{(1-z)^{-n}}F\left(-n,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right) = \sum_{\mu=0}^{n}F(-\mu,c-b;c;1)\frac{(-n)_{\mu}}{(1)_{\mu}}z^{\mu}.$$

Uma aplicação direta do Teorema 2.3.2, agora, finaliza a prova. ■

Uma identidade que ocorre no estudo de polinômios de Jacobi vem do teorema acima quando $b=\alpha+\beta+n+1$ e $c=\alpha+1$ - Ou seja,

$$F(-n,\alpha+\beta+n+1;\alpha+1;z)=(1-z)^{n}F\left(-n,-\beta-n;\alpha+1;\frac{z}{z-1}\right),\quad z\neq 1.$$

Em particular, fazendo $2z=u-1$, $u\neq -1$,

$$F\left(-n,\alpha+\beta+n+1;\alpha+1;\frac{1-u}{2}\right)=\left(\frac{u+1}{2}\right)^{n}F\left(-n,-\beta-n;\alpha+1;\frac{u-1}{u+1}\right). \tag{2.5}$$

Nos dois resultados finais desta seção, investigamos as derivadas até a segunda ordem das funções hipergeométricas.

Proposição 2.3.3 *Sejam $a,b,c\in\mathbb{C}$ tal que $c\notin\mathbb{Z}_{-}$. Então,*

$$\frac{d}{dz}F(a,b;c;z)=\frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;z),\quad z\in D(1).$$

Demonstração: Derivando diretamente, temos

$$\frac{d}{dz}F(a,b;c;z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k(1)_{k-1}}z^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1}}{(c)_{k+1}(1)_k}z^{k},\quad z\in D(1).$$

Agora, o item (1) da Proposição 2.1.2 completa a prova. ■

O Teorema 2.3.5 fornece a equação diferencial que tem, a menos de constante, $F(a,b;c,\cdot)$ como única solução analítica na vizinhança da origem de $\mathbb{C}$.

Teorema 2.3.5 *Sejam $a,b,c \in \mathbb{C}$ tal que $c \notin \mathbb{Z}_-$. Então, a menos de múltiplo escalar, a função hypergeométrica $F(a,b;c,\cdot)$ é a única solução analítica de*

$$z(1-z)w'' + [c-(a+b+1)z]w' - abw = 0, \quad z \in D(1), Z \neq 0. \tag{2.6}$$

Demonstração: Para $z \neq 0$, defina, então, o operador diferencial

$$\mathcal{D} := \left(a + z\frac{d}{dz}\right)\left(b + z\frac{d}{dz}\right) - \left(c + z\frac{d}{dz}\right)\left(1 + z\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{z}.$$

Assuma que a função analítica tendo a forma

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^k, \quad B_k \in \mathbb{C}, z \in D(1)$$

é tal que $\mathcal{D}(G)(z) = 0$. Para calcular $\mathcal{D}(G)$, notamos inicialmente que

$$\left(a + z\frac{d}{dz}\right)\left(b + z\frac{d}{dz}\right)z^k = (a+k)(b+k)z^k, \quad k = 0,1,\dots$$

e

$$\left(c + z\frac{d}{dz}\right)\left(1 + z\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{z}(z^k) = (c+k-1)(1+k-1)z^{k-1}, \quad k = 0,1,\dots.$$

Em consequência,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(G)(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[(a+k)(b+k)B_k z^k - (c+k-1)(1+k-1)B_k z^{k-1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[(a+k)(b+k)B_k z^k - (c+k)(1+k)B_{k+1} z^k\right], \quad z \in D(1). \end{aligned}$$

A hipótese sobre c e a condição $\mathcal{D}(G)(z) = 0$, $z \in D(1)$, resulta que

$$\frac{B_{k+1}}{B_k} = \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)(1+k)}, \quad k = 0,1,\dots. \tag{2.7}$$

Usando os coeficientes A_k de F como definidos em (2.3), por indução sobre k, concluímos que

$$B_k = A_k B_0, \quad k = 0,1,\dots.$$

Logo, a função G é um múltiplo de F da forma $G = B_0 F$. Em adição, por (2.3) e (2.7), vemos que

$$\frac{B_{k+1}}{B_k} = \frac{A_{k+1}}{A_k}, \quad k = 0,1,\dots.$$

Uma vez que o raciocínio acima a partir de (2.6) pode ser revertido, essa igualdade de quocientes revela que $\mathcal{D}(F)(z)=0$, $z\in D(1)$, $z\neq 0$. Para terminar, suponha que w é uma função na variável z tal que $\mathcal{D}(w)=0$. Então, através de manipulação algébrica empregando regras de derivação chegamos a identidade

$$-\mathcal{D}(w) = -abw - azw' - bzw' + cw' - zw' - z^2w'' + zw'' = 0,$$

que é a equação diferencial de segundo grau do enunciado do teorema. ■

2.4 Identidades envolvendo funções hipergeométricas

A função hipergeométrica satisfaz certas igualdades, conforme destacamos nesta seção.

Proposição 2.4.1 *Se $a,b,c\in\mathbb{C}$ e $c\notin\mathbb{Z}_-$, então*

$$(a-b)F(a,b;c;z) = aF(a+1,b;c;z) - bF(a,b+1;c;z), \quad z\in D[1].$$

Demonstração: Sejam $a,b,c\in\mathbb{C}$ tal que $c\notin\mathbb{Z}_-$. Como $a(a+1)_k=(a+k)(a)_k$, $k=0,1,\ldots$,

$$aF(a+1,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+k)(a)_k(b)_k}{(c)_k(1)_k}z^k = \left(z\frac{d}{dz}+a\right)F.$$

Similarmente,

$$bF(a,b+1;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b+k)(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}z^k = \left(z\frac{d}{dz}+b\right)F$$

A identidade do enunciada vem subtraindo-se a última da penúltima igualdade acima. ■

Observamos que trocando a por $a-1$ na penúltima igualdade da prova acima, obtemos

$$z\frac{d}{dz}F(a-1,b;c;z) = (a-1)F(a,b;c;z) - (a-1)F(a-1,b;c;z). \tag{2.8}$$

Essa identidade será usada na prova da proposição abaixo.

Proposição 2.4.2 *Se $a,b,c\in\mathbb{C}$ e $c\notin\mathbb{Z}_-$, então*

$$(1-z)F(a,b;c;z) = F(a-1,b;c;z) - \frac{c-b}{c}zF(a,b,c+1;z), \quad z\in D[1].$$

Demonstração: Assuma que $a,b,c\in\mathbb{C}$ tal que $c\notin\mathbb{Z}_-$ e fixe $z\in D[1]$. Recorremos à Proposição 2.1.2 para justificar que

$$z\frac{d}{dz}F(a-1,b;c;z) = (a-1)z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b+k}{c+k}A_kz^k,$$

onde A_k está definido em (2.3). Usando a igualdade

$$\frac{b+k}{c+k} = 1 - \frac{c-b}{c+k}, \quad k = 0,1,\ldots,$$

vemos, então, que

$$\begin{aligned} z\frac{d}{dz}F(a-1,b;c;z) &= (a-1)z\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k - \frac{(a-1)(c-b)}{c} z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c}{c+k} A_k z^k \\ &= (a-1)zF(a,b;c;z) - \frac{(a-1)(c-b)}{c} zF(a,b,c+1,z). \end{aligned}$$

Para terminar a prova, basta notar que o lado esquerdo das igualdades acima se expressa como na equação (2.8). ■

Imitando a prova acima com as devidas adaptações chegamos a igualdade

$$(1-z)F(a,b;c;z) = F(a,b-1;c;z) - \frac{c-a}{c} zF(a,b,c+1;z), \quad z \in D[1]. \tag{2.9}$$

Teorema 2.4.1 *Se $a,b,c \in \mathbb{C}$ e $c \notin \mathbb{Z}_-$, então*

$$F(a,b;c;z) = F(a-1,b+1;c;z) + \frac{b-a+1}{c} zF(a,b+1;c+1;z), \quad z \in D[1].$$

Demonstração: Assuma que $a,b,c \in \mathbb{C}$ tal que $c \notin \mathbb{Z}_-$ e fixe $z \in D[1]$. Da Proposição 2.4.2, segue que

$$F(a,b;c;z) = (1-z)F(a,b+1;c;z) + \frac{c-a}{c} zF(a,b+1,c+1;z).$$

Substituindo a primeira parcela à direita da última igualdade por

$$(1-z)F(a,b+1;c;z) = F(a-1,b+1;c;z) - \frac{c-b-1}{c} zF(a,b+1,c+1;z),$$

do final da prova anterior, concluímos a prova do teorema. ■

2.5 Polinômios de Jacobi

Dedicamos esta seção para estudar os conhecidos *Polinômios de Jacobi*, objeto principal na definição dos polinômios no disco. Para um entendimento melhor da definição abaixo convém recorrer à Proposição 2.3.1.

Durante esta seção, os parâmetros α e β são números reais maiores que -1.

Definição 2.5.1 *Os polinômios de Jacobi são polinômios de grau n na variável u e dependem* *de parâmetros* $\alpha,\beta \in (-1,\infty)$ *e são definidos como*

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(u) := \frac{(\alpha+1)_n}{(1)_n} F\left(-n, \alpha+\beta+n+1; \alpha+1; \frac{1-u}{2}\right), \quad u \in [-1,1].$$

É, portanto, de verificação imediata a normalização

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(\alpha+1)_n}{(1)_n} \tag{2.10}$$

e a relação de simetria

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(-u) = (-1)^n J_n^{(\beta,\alpha)}(u), \quad u \in [-1,1]. \tag{2.11}$$

Assim,

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \frac{(\beta+1)_n}{(1)_n}. \tag{2.12}$$

A menos de normalização, o polinômio de Jacobi da forma $J_n^{(\alpha,\alpha)}$ é chamado *polinômio de Gegembauer*. Em particular, $J_n^{(0,0)}$ é o *polinômio de Legendre* de grau n.

Na sequência está uma expressão explícita para esses polinômios, onde o Símbolo Pochhammer é empregado.

Teorema 2.5.1 *Se* $u \in [-1,1]$, *então*

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{(\beta+1)_n}{(1)_n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+n} \frac{(n-k+1)_k(\alpha+\beta+n+1)_k}{(1)_k(\beta+1)_k} \left(\frac{u+1}{2}\right)^k.$$

Demonstração: Usando a relação de simetria que mencionamos acima junto com a Definição 2.5.1, chegamos a expressão

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{(-1)^n(\beta+1)_n}{(1)_n} F\left(-n, \alpha+\beta+n+1; \beta+1; \frac{u+1}{2}\right). \tag{2.13}$$

Consequentemente, uma aplicação direta da Proposição 2.3.1, termina a prova. ∎

Note que as parcelas da soma do teorema, reescritas na ordem inversa conduzem a igualdade

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{(\beta+1)_n}{(1)_n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(k+1)_{n-k}(\alpha+\beta+n+1)_{n-k}}{(\beta+1)_{n-k}(1)_{n-k}} \left(\frac{u+1}{2}\right)^{n-k}, \quad u \in [-1,1].$$

Agora, usamos a Proposição 2.1.2 para simplificar os coeficientes dessa soma originando o corolário abaixo.

Corolário 2.5.1 *Se* $u \in [-1,1]$, *então*

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{(\alpha+\beta+n+1)_n}{[(1)_n]^2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(k+1)_n(n-k+1)_k(\beta+n-k+1)_k}{(n+1)_k(\alpha+\beta+2n-k+1)_k} \left(\frac{u+1}{2}\right)^{n-k}.$$

Mediante uma mudança de variáveis, o polinômio $J_n^{(\alpha,\beta)}$ toma a forma da expressão do teorema abaixo.

Teorema 2.5.2 *Se* $-1 < u \leq 1$, *então*

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{(\alpha+1)_n}{(1)_n} \left(\frac{u+1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k+1)_k(\beta+n-k+1)_k}{(\alpha+1)_k(1)_k} \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^k.$$

Demonstração: Assuma que $-1 < u \leq 1$. Logo, podemos recorrer ao Teorema 2.3.4 para ver que

$$\begin{aligned} J_n^{(\alpha,\beta)}(u) &= \frac{(\alpha+1)_n}{(1)_n} F\left(-n, \alpha+\beta+n+1; \alpha+1; \frac{1-u}{2}\right) \\ &= \frac{(\alpha+1)_n}{(1)_n} \left(\frac{u+1}{2}\right)^n F\left(-n, -\beta-n; \alpha+1; \frac{u-1}{u+1}\right). \end{aligned}$$

Com auxílio da Proposição 2.1.2, efetuamos simplificações algébricas como na prova do teorema anterior para obter

$$\begin{aligned} F\left(-n, -\beta-n; \alpha+1; \frac{u-1}{u+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(-\beta-n)_k}{(\alpha+1)_k(1)_k} \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k+1)_k(\beta+n-k+1)_k}{(\alpha+1)_k(1)_k} \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^k. \end{aligned}$$

Assim, a prova está concluída. ■

Introduzindo a notação fatorial generalizada para números reais como sendo

$$(x+1)_k = \frac{(x+k)!}{x!}, \quad x \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \ldots, \tag{2.14}$$

as somas de $J_n^{(\alpha,\beta)}$ conseguidas anteriomente estão resumidas nas expressões abaixo, ratificando (2.5).

Teorema 2.5.3 *Se* $u \in (-1,1]$, *então*

$$\begin{aligned}
J_n^{(\alpha,\beta)}(u) &= \frac{(-1)^n(\beta+1)_n}{(1)_n} F\left(-n, \alpha+\beta+n+1; \beta+1; \frac{u+1}{2}\right) \\
&= \frac{(\beta+n)!}{(\alpha+\beta+n)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+n} \frac{(\alpha+\beta+n+k)!}{k!(n-k)!(\beta+k)!} \left(\frac{u+1}{2}\right)^k \\
&= \frac{(\beta+n)!}{(\alpha+\beta+n)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{(\alpha+\beta+2n-k)!}{k!(n-k)!(\beta+n-k)!} \left(\frac{u+1}{2}\right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{u+1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha+n)!(\beta+n)!}{k!(n-k)!(\beta+n-k)!(\alpha+k)!} \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^k \\
&= \frac{(\alpha+1)_n}{(1)_n} \left(\frac{u+1}{2}\right)^n F\left(-n, -\beta-n; \alpha+1; \frac{u-1}{u+1}\right).
\end{aligned}$$

A seguir explicitamos uma expansão dos polinômios de Jacobi, distinta daquelas citadas acima, onde os coeficientes são expressos em termos da função gama.

Teorema 2.5.4 *Se* $u \in [-1,1]$, *então*

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+k+1)}{k!(n-k)!\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{u-1}{2}\right)^k.$$

Demonstração: Seja $u \in [-1,1]$. A prova começa observando-se que a expansão oferecida pelo Teorema anterior associada à relação de simetria em (2.11) mostram que

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{(\alpha+n)!}{(\alpha+\beta+n)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+n} \frac{(\alpha+\beta+2n-k)!}{k!(n-k)!(\alpha+n-k)!} \left(\frac{1-u}{2}\right)^{n-k}.$$

Escrevemos as parcelas desta expressão na ordem reversa, para obter

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{(\alpha+n)!}{(\alpha+\beta+n)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha+\beta+n+k)!}{k!(n-k)!(\alpha+k)!} \left(\frac{u-1}{2}\right)^k.$$

Finalmente, como $\alpha > -1$ e $\alpha+\beta > -1$,

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+k+1)}{k!(n-k)!\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{u-1}{2}\right)^k,$$

provando o teorema. ■

2.6 Identidades envolvendo polinômios de Jacobi

Novamente, nesta seção, fixamos α e β como parâmetros reais maiores que -1. Aqui, o objetivo é estudar relações de recorrência envolvendo derivadas de ordens 0 ou 1 para os polinômios de Jacobi e iniciamos com a derivada de ordem 1.

Proposição 2.6.1 *Se $u \in [-1,1]$, então*

$$\frac{d}{du}J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+n+1)J_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(u).$$

Demonstração: Seja $u \in [-1,1]$. Recordando a definição de $J_n^{(\alpha,\beta)}$ e usando a Proposição 2.3.3, vemos que

$$\frac{d}{du}J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{n(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+1)_n}{2(1)_n(\alpha+1)}F\left(-n+1,\alpha+\beta+n+2;\alpha+2,\frac{1-u}{2}\right).$$

Então, usando a Proposição 2.1.2 para simplificar o coeficiente de F, segue que

$$\frac{(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+2)_{n-1}}{2(n-1)!}F\left(-(n-1),(\alpha+1)+(\beta+1)+(n-1)+1;(\alpha+1)+1,\frac{1-u}{2}\right).$$

Tendo em vista a Definição 2.5.1, a proposição está provada. ■

Na sequência, apresentamos duas relações de recorrência para polinômios de Jacobi.

Proposição 2.6.2 *Se $u \in [-1,1)$, então*

$$(\alpha+\beta+2n+2)(1-u)J_n^{(\alpha+1,\beta)}(u) = 2(\alpha+n+1)\,J_n^{(\alpha,\beta)}(u) - 2(n+1)\,J_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(u).$$

Demonstração: Considere $u \in [-1,1)$. Partindo da definição de polinômio de Jacobi, seguido do Teorema 2.4.1, obtemos

$$\begin{aligned} J_n^{(\alpha,\beta)}(u) &= \frac{(\alpha+1)_n}{(1)_n}F\left(-n,\alpha+\beta+n+1;\alpha+1;\frac{1-u}{2}\right) \\ &= \frac{(\alpha+1)_n}{(1)_n}F\left(-n-1,\alpha+\beta+n+2;\alpha+1;\frac{1-u}{2}\right) \\ &+ \frac{(\alpha+1)_n}{(1)_n}\frac{\alpha+\beta+2n+2}{\alpha+1}\frac{1-u}{2}F\left(-n,\alpha+\beta+n+2;\alpha+1;\frac{1-u}{2}\right). \end{aligned}$$

Com o auxílio da Proposição 2.1.2, vemos que

$$(\alpha+n+1)\frac{(\alpha+1)_n}{(1)_n} = (n+1)\frac{(\alpha+1)_{n+1}}{(1)_{n+1}}, \quad \frac{(\alpha+n+1)(\alpha+1)_n}{\alpha+1} = (\alpha+2)_n,$$

implicando que

$$\begin{aligned}(\alpha+n+1)J_n^{(\alpha,\beta)}(u) &= (n+1)\frac{(\alpha+1)_{n+1}}{(1)_{n+1}}F\left(-n-1,\alpha+\beta+n+2;\alpha+1;\frac{1-u}{2}\right)\\ &+ (\alpha+\beta+2n+2)\frac{1-u}{2}\frac{(\alpha+2)_n}{(1)_n}F\left(-n,\alpha+\beta+n+2;\alpha+1;\frac{1-u}{2}\right).\end{aligned}$$

A expressão anterior equivale, então, a

$$(\alpha+n+1)J_n^{(\alpha,\beta)}(u)=(n+1)J_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(u)+(\alpha+\beta+2n+2)\frac{1-u}{2}J_n^{(\alpha+1,\beta)}(u),$$

provando a igualdade da proposição. ■

Proposição 2.6.3 *Se $u\in[-1,1]$, então*

$$(\alpha+\beta+2n)J_n^{(\alpha,\beta-1)}(u)=(\alpha+\beta+n)J_n^{(\alpha,\beta)}(u)+(\alpha+n)J_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(u).$$

Demonstração: Assuma que $u\in[-1,1]$. Vimos na Proposição 2.4.1 que para $a,b,c\in\mathbb{C}$, $c\notin\mathbb{Z}_-$, vale a relação

$$(a-b)F(a,b;c;z)=aF(a+1,b;c;z)-bF(a,b+1;c;z),\quad z\in D[1].$$

Considerando na equação acima os parâmetros

$$a=-n,\, b=\alpha+\beta-1+n+1,\, c=\alpha+1,\, z=\frac{1-u}{2}$$

e manipulando algebricamente a equação correspondente obtemos a relação desejada. ■

2.7 Fórmula de Rodrigues para Jacobi

Os polinômios de Jacobi satisfazem a Fórmula de Rodrigues apresentada na proposição abaixo. A fórmula em questão é devido a Rodrigues que a introduziu em 1815 quando estudou certos polinômios ortogonais ([25]).

A regra de Leibniz para derivada de produto de funções será necessária ([22, p. 318]).

Lema 2.7.1 *Se $f,g:D(1)\to\mathbb{C}$ são funções n vezes deriváveis, então a n-ésima derivada do produto de f com g em $D(1)$ é*

$$\frac{d^n}{dz^n}[f(z)g(z)]=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{d^k}{dz^k}f(z)\frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}}g(z).$$

Como nas duas seções anteriores, no restante desta seção fixamos α e β como parâmetros reais maiores que -1.

Proposição 2.7.1 *Se $u \in (-1,1)$, então*

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{(u-1)^{-\alpha}(u+1)^{-\beta}}{2^n n!}\frac{d^n}{du^n}\left[(u-1)^{\alpha+n}(u+1)^{\beta+n}\right].$$

Demonstração: Fixemos $u \in [-1,1]$. Pelo Teorema 2.5.3, o polinômio $J_n^{(\alpha,\beta)}$ tem a expansão

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha+n)!(\beta+n)!}{2^n k!(n-k)!(\alpha+k)!(\beta+n-k)!}(u-1)^k(u+1)^{n-k}.$$

Pela Proposição 2.1.4 e a propriedade (2.14), temos que

$$\frac{d^{n-k}}{du^{n-k}}(u-1)^{\alpha+n} = \frac{(\alpha+n)!}{(\alpha+k)!}(u-1)^{\alpha+k}$$

e

$$\frac{d^k}{du^k}(u+1)^{\beta+n} = \frac{(\beta+n)!}{(\beta+n-k)!}(u+1)^{\beta+n-k}.$$

Em consequência, o polinômio de Jacobi equivale a

$$\frac{1}{2^n n!(u-1)^{\alpha}(u+1)^{\beta}}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left[\frac{d^k}{du^k}(u+1)^{\beta+n}\right]\left[\frac{d^{n-k}}{du^{n-k}}(u-1)^{\alpha+n}\right].$$

Então, do lema precedente, o último somatório identifica-se com

$$\frac{d^n}{du^n}\left[(u+1)^{\beta+n}(u-1)^{\alpha+n}\right].$$

Assim,

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{(u-1)^{-\alpha}(u+1)^{-\beta}}{2^n n!}\frac{d^n}{du^n}\left[(u-1)^{\alpha+n}(u+1)^{\beta+n}\right],$$

que é a expressão do enunciado do teorema. ■

A proposição abaixo dá o valor da constante que coincide com a n-ésima derivada de $J_n^{(\alpha,\beta)}$.

Proposição 2.7.2 *Se $u \in (-1,1)$, então*

$$\frac{d^n}{du^n}J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{(\alpha+\beta+n+1)_n}{2^n}.$$

Demonstração: Seja u um elemento de $(-1,1)$. Pela primeira igualdade do Teorema 2.5.3,

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{(-1)^n(\beta+1)_n}{(1)_n}F\left(-n,\alpha+\beta+n+1;\beta+1;\frac{u+1}{2}\right).$$

Pela Proposição 2.3.3, a n-ésima derivada da função hipergeométrica acima é

$$\frac{(-1)^n(-n)_n(\alpha+\beta+n+1)_n}{2^n(\beta+1)_n}F\left(0,\alpha+\beta+2n+1;\beta+n+1;\frac{u+1}{2}\right).$$

Efetuando simplificações, chegamos à constante do enunciado da proposição. ■

Proposição 2.7.3 *Se α e β são números reais tais que $\alpha+\beta>-1$ e $\alpha,\beta>-1$, então*

$$\int_{-1}^{1} J_m^{(\alpha,\beta)}(u)J_n^{(\alpha,\beta)}(u)(1-u)^\alpha(1+u)^\beta du = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+2n+1)}\frac{(\alpha+n)!(\beta+n)!}{n!(\alpha+\beta+n)!}\delta_{m,n},$$

onde $\delta_{m,n}$ é a função delta de Kronecker.

Demonstração: Sejam α e β números reais como na hipótese. Então, usando a Fórmula de Rodrigues para polinômios de Jacobi da Proposição 2.7.1 a integral da proposição torna-se

$$\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} J_m^{(\alpha,\beta)}(u)\frac{d^n}{du^n}\left[(1-u)^{\alpha+n}(1+u)^{\beta+n}\right]du.$$

Integrando por partes n vezes, a última integral pode ser reescrita como

$$\frac{(-1)^{2n}}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\left[(1-u)^{\alpha+n}(1+u)^{\beta+n}\right]\frac{d^n}{du^n}J_m^{(\alpha,\beta)}(u)du. \tag{2.15}$$

Agora, se $m<n$, então

$$\int_{-1}^{1} J_m^{(\alpha,\beta)}(u)J_n^{(\alpha,\beta)}(u)(1-u)^\alpha(1+u)^\beta du = 0.$$

De modo análogo, provamos que a integral da proposição é nula quando $n<m$. Resta, então, analisar o caso em que $m=n$. Nesse caso, a integral em (2.15) toma a forma

$$\int_{-1}^{1}\left[J_n^{(\alpha,\beta)}(u)\right]^2(1-u)^\alpha(1+u)^\beta du = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\left[(1-u)^{\alpha+n}(u+1)^{\beta+n}\right]\frac{d^n}{du^n}J_n^{(\alpha,\beta)}(u)du.$$

Da Proposição 2.7.2, obtemos

$$\int_{-1}^{1}(1-u)^\alpha(1+u)^\beta\left[J_n^{(\alpha,\beta)}(u)\right]^2du = \frac{(\alpha+\beta+n+1)_n}{4^n n!}\int_{-1}^{1}(1-u)^{\alpha+n}(1+u)^{\beta+n}du.$$

Como $\beta+1>0$ e $\alpha+1>0$, a Proposição 2.2.2 pode ser usada para concluir que

$$\int_{-1}^{1}(1-u)^\alpha(1+u)^\beta\left[J_m^{(\alpha,\beta)}(u)\right]^2du = \frac{2^{\alpha+\beta+1}(\alpha+\beta+n+1)_n}{n!}B(\alpha+n+1,\beta+n+1).$$

Pela Proposição 2.2.1,

$$B(\alpha+n+1,\beta+n+1)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}=\frac{(\alpha+n)!(\beta+n)!}{(\alpha+\beta+2n+1)!}$$

e, consequentemente

$$\frac{2^{\alpha+\beta+1}(\alpha+\beta+n+1)_n}{n!}B(\alpha+n+1,\beta+n+1)=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+2n+1)}\frac{(\alpha+n)!(\beta+n)!}{n!(\alpha+\beta+n)!}.$$

Portanto, a proposição está provada. ■

Terminamos esta seção provando uma equação diferencial geradora dos Polinômios de Jacobi.

Teorema 2.7.1 *Se $u\in(-1,1)$, então $J_n^{(\alpha,\beta)}$ satisfaz a equação diferencial*

$$(1-u^2)y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)u]y'+n(\alpha+\beta+n+1)y=0.$$

Demonstração: Seja u um elemento de $(-1,1)$. Da equação (2.13), o polinômio $J_n^{(\alpha,\beta)}(u)$ é um múltiplo escalar da função

$$w=F\left(-n,\alpha+\beta+n+1;\beta+1;\frac{u+1}{2}\right).$$

Então, derivamos w em relação a u e substituímos na equação diferencial sugerida pelo teorema para obter

$$\frac{(1+u)}{2}\frac{(1-u)}{2}w''+\frac{1}{2}[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)u]w'+n(\alpha+\beta+n+1)w. \tag{2.16}$$

Por outro lado, usando as mudanças de variáveis

$$z=\frac{u+1}{2},\quad a=-n,\quad b=\alpha+\beta+n+1,\quad c=\beta+1,\quad u\in[-1,1]$$

chegamos às igualdades

$$\frac{(1+u)}{2}\frac{(1-u)}{2}=z(1-z),\quad \frac{1}{2}[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)u]=[c-(a+b+1)z],$$

$$n(\alpha+\beta+n+1)=-ab.$$

Com auxílio da equação diferencial (2.6), esses valores substituídos em (2.16), implica que

$$z(1-z)w''+[c-(a+b+1)z]w'-abw=0.$$

Portanto, o polinômio $J_n^{(\alpha,\beta)}$ também é solução da equação do enunciado do teorema, concluindo a prova. ■

2.8 Polinômio bihomogêneo

Consideramos inicialmente o espaço vetorial complexo q-dimensional denotado como $\mathbb{C}^q$. Os elementos z deste espaço são q-uplas de complexos que usualmente são denotados na forma $z = (z_1, z_2, \ldots, z_q)$, $z_1, \ldots, z_q \in \mathbb{C}$. Assim, se $w = (w_1, w_2, \ldots, w_q)$ também é um elemento de $\mathbb{C}^q$, então a forma

$$\langle z, w\rangle := z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2 + \cdots + z_q\overline{w}_q \tag{2.17}$$

define o produto interno usual de $\mathbb{C}^q$. Usamos o símbolo Ω_{2q} para denotar a esfera unitária de $\mathbb{C}^q$ - Ou seja,

$$\Omega_{2q} := \{z \in \mathbb{C}^q : \langle z, z\rangle = 1\}.$$

Aproveitamos o contexto para definir o que vem a ser uma subesfera de Ω_{2q}. Seja $\omega \in \Omega_{2q}$ e considere $\eta \in D[1]$. A subesfera Ω_ω^η com raio $(1 - |\eta|^2)^{1/2}$ e pólo ω é a intersecção de Ω_{2q} com o hiperplano $\langle \xi, \omega\rangle = \eta$, $\xi \in \Omega_{2q}$ - Isto é,

$$\Omega_\omega^\eta := \{\xi \in \Omega_{2q} : \langle \xi, \omega\rangle = \eta\}. \tag{2.18}$$

Pretendendo uma descrição mais simples de certas fórmulas, adotamos a notação multi-índice. Um *multi-índice* μ é definido como sendo uma q-upla de números inteiros não negativos da forma

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_q), \quad \mu_1, \ldots, \mu_q \in \mathbb{Z}_+.$$

A *norma do multi-índice* μ é definida como

$$|\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_q.$$

Aproveitamos essa notação para definir, a seguir, o que vem a ser um monômio a várias variáveis $z \in \mathbb{C}^q$. O monômio complexo z^μ, nas variáveis $z_1, \ldots, z_q$ e de grau $|\mu|$ é definido como

$$z^\mu = z_1^{\mu_1} z_2^{\mu_2} \cdots z_q^{\mu_q}.$$

Segue que a soma

$$\sum_{|\mu|=0}^{m} a_\mu z^\mu, \quad a_\mu \in \mathbb{C}$$

é um polinômio de grau m em q variáveis complexas com coeficientes a_μ. Por outro lado, a soma

$$\sum_{|\mu|=0}^{m}\sum_{|\nu|=0}^{n} a_{\mu,\nu} z^{\mu}\bar{z}^{\nu}, \quad a_{\mu,\nu} \in \mathbb{C} \tag{2.19}$$

é um *polinômio de bigrau* (m,n) - Isto é, este polinômio é de grau m na variável z e de grau n na variável $\bar{z}$. Denotamos o espaço vetorial dos polinômios da forma (2.19) por $\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$.

Nesse contexto, um *polinômio bihomogêneo de bigrau* $(|\mu|,|\nu|)$ é aquele em que cada monômio z^{μ} tem grau $|\mu|$ e os monômios $\bar{z}^{\nu}$ tem grau $|\nu|$. Assim, a representação geral de um polinômio bihomogêneo de bigrau (m,n) é da forma

$$\sum_{|\mu|=m}\sum_{|\nu|=n} a_{\mu,\nu} z^{\mu}\bar{z}^{\nu}, \quad a_{\mu,\nu} \in \mathbb{C}.$$

Segue que se $P_{m,n}$ é um polinômio bihomogêneo de bigrau (m,n), então

$$P_{m,n}(\lambda z, \bar{\lambda}\bar{z}) = \lambda^m \bar{\lambda}^n P_{m,n}(z,\bar{z}), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.20}$$

Portanto, os polinômios bihomogêneos de bigrau (m,n) formam um subconjunto de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$ que denotamos por $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$. Consequentemente, todo elemento de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$ pode ser expresso como combinação linear de polinômios bihomogêneos. Segue de (2.20) que um polinômio P pertence a $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ se e somente se seu conjugado complexo $\bar{P}$ pertence a $\mathbb{P}_{n,m}(\mathbb{C}^q)$. Adicionalmente, se consideramos que o polinômio nulo também é um elemento de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$, estes tornam-se subespaços de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$ tais que

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}^q) = \bigoplus_{m,n=0}^{\infty} \mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q).$$

Obviamente, o espaço $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ tem dimensão finita dada por ([12, p. 6])

$$\delta(q,m,n) := \binom{m+q-1}{q-1}\binom{n+q-1}{q-1}.$$

2.9 Harmônico esférico complexo

Reservamos esta seção para estudar a classe de polinômios que surge naturalmente quando atuamos em problemas que envolvem a esfera unitária complexa. Iniciamos com a definição de função harmônica nesse contexto.

Definição 2.9.1 *Uma função $f : \mathbb{C}^q \mapsto \mathbb{C}$ é chamada harmônica quando pertence ao núcleo do laplaciano complexo*

$$\Delta_{(2q)} := 4\sum_{k=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k}.$$

Denotamos por $\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ o conjunto dos elementos de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ que são harmônicos. Apresentamos, na sequência, dois exemplos de polinômios harmônicos.

Exemplo 2.9.1 *Se $a_1,\dots,a_q,b_1,\dots,b_q \in \mathbb{C}^q$ são tais que $\sum_{j=1}^q a_j b_j = 0$, então*

$$P(z,\bar{z}) = \left(\sum_{j=1}^q a_j z_j\right)^m \left(\sum_{j=1}^q b_j \bar{z}_j\right)^n$$

é um elemento de $\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$.

Verificação: Sejam $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $i = 1,\dots,q$. Claramente, o polinômio P é bihomogêneo de bigrau (m,n). Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} P(z,\bar{z}) = \left(\sum_{j=1}^q a_j z_j\right)^m n b_i \left(\sum_{j=1}^q b_j \bar{z}_j\right)^{n-1}, \quad i = 1,\dots,q$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} P(z,\bar{z}) = mna_i b_i \left(\sum_{j=1}^q a_j z_j\right)^{m-1} \left(\sum_{j=1}^q b_j \bar{z}_j\right)^{n-1}, \quad i = 1,2,\dots,q.$$

Segue que, se $\sum_{j=1}^q a_j b_j = 0$, então

$$\sum_{i=1}^q \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} P(z,\bar{z}) = mn \left(\sum_{j=1}^q a_j z_j\right)^{m-1} \left(\sum_{j=1}^q b_j \bar{z}_j\right)^{n-1} \sum_{i=i}^q a_i b_i = 0,$$

concluindo a verificação. ■

Exemplo 2.9.2 *Seja q um inteiro maior que 1 e considere $q_1 \in \{1,\dots,q-1\}$. Sejam os subconjuntos de Ω_{2q} dados por*

$$V^{q_1} = \left\{v \in \Omega_{2q} : v_{q_1+1} = \cdots = v_q = 0\right\}, \quad W^{q-q_1} = \left\{w \in \Omega_{2q} : w_1 = \cdots = w_{q_1} = 0\right\}.$$

Se $v \in V^{q_1}$ e $w \in W^{q-q_1}$, então

$$z \in \mathbb{C}^q \mapsto \langle z, w+v\rangle^m \langle w-v, z\rangle^n \tag{2.21}$$

é um elemento de $\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$.

Verificação: Encaixar esse exemplo no anterior Sejam $v \in V^{q_1}$, $w \in W^{q-q_1}$ e $z \in \mathbb{C}^q$. Claramente a função (2.21) define um polinômio bihomogêneo de bigrau (m,n) em $\mathbb{C}^q$. Usando o produto interno (2.17), vemos que

$$\langle z, w+v\rangle^m \langle w-v, z\rangle^n = \left(\sum_{k=1}^{q} z_k(\overline{v_k+w_k})\right)^m \left(\sum_{k=1}^{q} (w_k-v_k)\overline{z}_k\right)^n.$$

Agora um cálculo direto revela que

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z}_i}\langle z, w+v\rangle^m \langle w-v, z\rangle^n = mn(w_i-v_i)(\overline{v_i+w_i})\left(\sum_{k=1}^{q} \overline{(v_k+w_k)z_k}\right)^{m-1} \left(\sum_{k=1}^{q} (w_k-v_k)\overline{z}_k\right)^{n-1}.$$

Notando que $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle = 0$,

$$\sum_{i=1}^{q}(w_i-v_i)(\overline{v_i+w_i}) = \sum_{i=1}^{q} w_i\overline{v_i} + \sum_{i=1}^{q} w_i\overline{w_i} - \sum_{i=1}^{q} v_i\overline{v_i} - \sum_{i=1}^{q} v_i\overline{w_i} = \langle w, v\rangle - \langle v, w\rangle = 0,$$

concluindo a verificação. ■

O conjunto constituído pelos elementos de $\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ em que as variáveis são restritas ao domínio Ω_{2q}, denotamos por $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. Os elementos de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ são chamados de *harmônicos esféricos complexos*. A definição acima conduz ao seguinte isomorfismo entre espaços vetoriais

$$F \in \mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q) \longmapsto F|\,\Omega_{2q} := f \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}). \tag{2.22}$$

A dimensão do espaço $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ também é finita e dada explicitamente por ([3])

$$N(q;m,n) := \delta(q,m,n) - \delta(q,m-1,n-1), \quad m,n \neq 0$$

$$N(q;m,0) := \delta(q,m,0) \quad \text{e} \quad N(q,0,n) := \delta(q,0,n).$$

Denotaremos por $O(2q)$ o grupo dos operadores lineares unitários sobre $\mathbb{C}^q$ - Isto é,

$$O(2q) := \{\rho : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^q : \rho \textit{ é linear} \text{ e } \rho\rho^* = I\},$$

onde I representa o operador identidade sobre $\mathbb{C}^q$ e ρ^* denota o operador adjunto de ρ. O subgrupo de $O(2q)$ constituído por operadores que fixam um elemento ω de Ω_{2q} será denotado por $O_\omega(2q)$ - isto é,

$$O_\omega(2q) := \{\rho \in O(2q) : \rho\omega = \omega\}.$$

Seguindo, o símbolo S^{2q-1} denota a esfera unitária de $\mathbb{R}^{2q}$ definida por

$$S^{2q-1} = \{x \in \mathbb{R}^{2q} : x \star x = 1\},$$

onde $\star$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^{2q}$.

Consideramos, ainda, a bijeção usual $\Upsilon_q : \mathbb{C}^q \longmapsto \mathbb{R}^{2q}$, onde

$$\Upsilon_q(z_1, z_2, \ldots, z_q) = (x_1, y_1, \ldots, x_q, y_q), \quad z_k = x_k + iy_k, \quad k = 1, 2, \ldots, q. \tag{2.23}$$

Como $S^{2q-1} = \Upsilon_q(\Omega_{2q})$, podemos definir o elemento de superfície $d\sigma_q$ sobre Ω_{2q} pela fórmula

$$d\sigma_q(z) = d\tau_{2q}(\Upsilon_q(z)), \quad z \in \Omega_{2q}, \tag{2.24}$$

onde τ_{2q} é o elemento de superfície sobre S^{2q-1}.

Encerramos a seção provando resultados técnicos para uso posterior. O primeiro deles mostra que $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ é $O(2q)$-invariante.

Proposição 2.9.1 *Se $f \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ e $\rho \in O(2q)$, então $f \circ \rho \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$.*

Demonstração: Assuma que $\rho \in O(2q)$ tem a representação matricial (ρ_{ij}), $i, j = 1, 2, \ldots, q$, em relação à base canônica de $\mathbb{C}^q$. Então,

$$u := \rho(z) = \left(\sum_{j=1}^{q} \rho_{1j} z_j, \sum_{j=1}^{q} \rho_{2j} z_j, \cdots, \sum_{j=1}^{q} \rho_{qj} z_j \right).$$

Se $f \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$, não é difícil ver que $F \circ \rho \in \mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$, onde F é a extensão de f dada pelo isomorfismo (2.22). Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} F \circ \rho &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} F \left(\sum_{j=1}^{q} \rho_{1j} z_j, \sum_{j=1}^{q} \rho_{2j} z_j, \ldots, \sum_{j=1}^{q} \rho_{qj} z_j, \sum_{j=1}^{q} \overline{\rho_{1j}}\, \bar{z}_j, \sum_{j=1}^{q} \overline{\rho_{2j}}\, \bar{z}_j, \ldots, \sum_{j=1}^{q} \overline{\rho_{qj}}\, \bar{z}_j \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1} (F \circ \rho)(z)\, \overline{\rho_{1i}} + \frac{\partial}{\partial \bar{u}_2} (F \circ \rho)(z)\, \overline{\rho_{2i}} + \ldots + \frac{\partial}{\partial \bar{u}_q} (F \circ \rho)(z)\, \overline{\rho_{qi}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} (F \circ \rho)(z) &= \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial \bar{u}_1} (F \circ \rho)(z) \overline{\rho_{1i}} \rho_{ji} + \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial \bar{u}_2} (F \circ \rho)(z) \overline{\rho_{2i}} \rho_{ji} + \ldots \\ &+ \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial \bar{u}_q} (F \circ \rho)(z) \overline{\rho_{qi}} \rho_{ji}, \quad z \in \mathbb{C}^q. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{k=1}^{q} \overline{\rho_{jk}} \rho_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad i \neq j \\ 1, & \text{se} \quad i = j, \end{cases}$$

$$\frac{\Delta_{2q}}{4} (F \circ \rho)(z) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial \bar{u}_i} F(u) = 0.$$

Assim, $f \circ \rho \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ e, portanto, a proposição está provada. ∎

Observamos que todo elemento de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ pode ser identificado com um harmônico esférico de grau $m+n$ sobre S^{2q-1} ([23, p. 5]).

O assunto do próximo lema trata da ortogonalidade dos harmônicos esféricos em relação a forma

$$\langle f,g\rangle_2 = \int_{\Omega_{2q}} f(z)\overline{g(z)}d\sigma_q(z).$$

Lema 2.9.1 *Se m,n,k e l são inteiros não negativos e $(m,n)\neq(k,l)$, então*

$$\int_{\Omega_{2q}} f(z)\overline{g(z)}d\sigma_q(z) = 0, \quad f\in\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}), \quad g\in\mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q}).$$

Demonstração: Sejam $f\in\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ e $g\in\mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q})$. Então, $f\circ\Upsilon_q^{-1}$ e $g\circ\Upsilon_q^{-1}$ são, respectivamente, harmônicos esféricos de graus $m+n$ e $k+l$ sobre S^{2q-1}. Usando mudança de variáveis, a relação (2.24), bem como a conhecida ortogonalidade destes harmônicos esféricos quando $m+n\neq k+l$ ([17, p. 21]), concluímos que

$$\int_{\Omega_{2q}} f(z)\overline{g(z)}d\sigma_q(z) = \int_{S^{2q-1}} f(\Upsilon_q^{-1}(x))\overline{g(\Upsilon_q^{-1}(x))}d\tau_{2q}(x) = 0.$$

Para o restante da prova, assumamos que $m+n=k+l$. Essa condição, associada à hipótese, garante que $m-n\neq k-l$. Logo podemos escolher um número $\theta\in\mathbb{R}$ tal que $\theta(m-n+l-k)/2\pi$ não seja um inteiro. Daí, se f e g são como na primeira parte da prova, então

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{2q}} f(z)\overline{g(z)}d\sigma_q(z) &= \int_{\Omega_{2q}} f(z)\overline{g(z)}d\sigma_q(e^{-i\theta}z)\\ &= \int_{\Omega_{2q}} f(e^{i\theta}z)\overline{g(e^{i\theta}z)}d\sigma_q(z)\\ &= e^{i(m-n+l-k)\theta}\int_{\Omega_{2q}} f(z)\overline{g(z)}d\sigma_q(z),\end{aligned}$$

onde a primeira igualdade vem da invariância de $d\sigma_q$ por rotações e a última é justificada pela relação (2.20). Como a exponencial não é igual a 1, o lema está provado. ■

O último lema desta seção é essencialmente técnico ([18]). Ele mostra que a esfera Ω_{2q} pode ser parametrizada de um modo peculiar.

Lema 2.9.2 *Seja ω um elemento de Ω_{2q} e $\eta\in D(1)$. Então, o elemento ξ pertence a Ω_{2q} se e somente se existe $te^{i\varphi}\in D[1]$ e $\xi'\in\Omega_\omega^\eta$ tal que*

$$\xi = \left(te^{i\varphi} - \eta\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-|\eta|^2}}\right)\omega + \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-|\eta|^2}}\xi'. \tag{2.25}$$

Demonstração: Seja $\xi\in\Omega_{2q}$. Se $\xi=\pm\omega$, então (2.25) vale para $te^{i\varphi}=\pm1$ e para ξ' como sendo um elemento arbitrário em Ω_ω^η. Para o caso em que $\xi\in\Omega_\omega^\eta$ ou $\xi\in\Omega_{-\omega}^\eta$ é suficiente considerar $\xi' = \xi$ e $te^{i\varphi} = \eta$ ou $te^{i\varphi} = -\eta$. Agora, assuma que ξ é diferente de $\pm\omega$ e não está em Ω_ω^η. Então a projeção esférica de ξ dá origem a um vetor $\omega' \in \Omega_\omega^0$ tal que

$$\xi = \langle \xi, \omega \rangle \omega + \langle \xi, \omega' \rangle \omega'.$$

Então, existem $t, t' \in [0,1]$ e $\varphi, \varphi' \in [0, 2\pi)$ tais que $\langle \xi, \omega \rangle = te^{i\varphi}$ e $\langle \xi, \omega' \rangle = t'e^{i\varphi'}$. Agora, as igualdades $\langle \omega', \omega \rangle = 0$ e $\langle \xi, \xi \rangle = 1$ justificam a decomposição

$$\xi = te^{i\varphi}\omega + \sqrt{1-t^2}e^{i\varphi'}\omega'. \tag{2.26}$$

Considerando o elemento

$$\xi' = \eta\omega + \sqrt{1-|\eta|^2}e^{i\varphi'}\omega' \tag{2.27}$$

de Ω_ω^η, eliminação de $e^{i\varphi'}\omega'$ em (2.26) e em (2.27) nos leva à representação dada em (2.25). Reciprocamente, cálculo direto mostra que todo elemento representado como em (2.25) pertence a Ω_{2q}, completando a prova. ■

Observamos que tomando $\eta = 0$ na representação do lema anterior, então para $\xi \in \Omega_{2q}$, temos

$$\xi = te^{i\varphi}\omega + \sqrt{1-t^2}\xi', \quad \omega \in \Omega_{2q}, \tag{2.28}$$

ou equivalentemente,

$$\xi = \cos\theta e^{i\varphi}\omega + \operatorname{sen}\theta\xi', \quad \omega \in \Omega_{2q}, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi/2]. \tag{2.29}$$

Finalizamos, observando que os elementos de superfície $d\sigma_q$ e $d\sigma_{2q-2}$ estão relacionados pela igualdade

$$d\sigma_q(\xi) = \cos\theta \operatorname{sen}^{2q-3}\theta \, d\theta d\varphi d\sigma_{q-1}(\xi'), \tag{2.30}$$

onde ξ é decomposto como em (2.29).

Capítulo 3

Funções sobre o Disco Unitário

Neste capítulo estudaremos os polinômios no disco unitário complexo, se bem que generalizações destes que denominamos de funções generalizadas sobre o disco.

Como no segundo capítulo, a maior parte das provas será exibida. As referências, comumente mencionadas na literatura como básicas para o estudo dos polinômios no disco são ([3, 4, 12, 13, 29]). Destas, extraímos boa parte das resultados aqui estudados.

3.1 Polinômio no disco

Nesta seção, usaremos a teoria desenvolvida no capítulo precedente para estudar os polinômios no disco, uma vez que estes são os análogos bidimensionais dos polinômios de Jacobi. Uma generalização e propriedades destes polinômios serão apresentadas na última seção do capítulo.

A menos de especificação em contrário, em toda essa seção, as variáveis z e $\overline{z}$ são elementos de $D[1]$.

Definição 3.1.1 *Sejam m e n inteiros não negativos. O polinômio no disco associado a um parâmetro* $\alpha > -1$*, de grau m em z e de grau n em* $\overline{z}$ *é o polinômio*

$$R^{\alpha}_{m,n}(z) = \frac{(1)_{m\wedge n}}{(\alpha+1)_{m\wedge n}} r^{|m-n|} e^{i(m-n)\theta} J^{(\alpha,|m-n|)}_{m\wedge n}(2r^2-1),$$

onde $m \wedge n := \min\{m,n\}$ *e* $z = re^{i\theta}$*,* $\theta \in \mathbb{R}$*,* $0 \leq r \leq 1$*.*

Observamos que a notação em coordenadas polares da variável z na definição anterior pode ser evitada expressando-se

$$R_{m,n}^{\alpha}(z) = \begin{cases} \dfrac{(1)_n}{(\alpha+1)_n} z^{m-n} J_n^{(\alpha,m-n)}(2z\bar{z}-1), & m \wedge n = n, \\ \\ \dfrac{(1)_m}{(\alpha+1)_m} \bar{z}^{n-m} J_m^{(\alpha,n-m)}(2z\bar{z}-1), & m \wedge n = m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Provamos a primeira fórmula fechada para os polinômios no disco.

Proposição 3.1.1 *Se α é um parâmetro real maior que -1, então*

$$R_{m,n}^{\alpha}(z) = \frac{(\alpha+m+1)_n}{(\alpha+1)_n(1)_n} \sum_{k=0}^{m\wedge n} (-1)^k \frac{(k+1)_n(n-k+1)_k(m-k+1)_k}{(n+1)_k(\alpha+m+n-k+1)_k} z^{m-k}\bar{z}^{n-k}.$$

Demonstração: Seja $\alpha > -1$ e considere que $m \wedge n = n$. Então, usando Corolário 2.5.1, vemos que

$$J_n^{(\alpha,m-n)}(2z\bar{z}-1) = \frac{(\alpha+m+1)_n}{[(1)_n]^2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(k+1)_n(n-k+1)_k(m-k+1)_k}{(n+1)_k(\alpha+m+n-k+1)_k} (z\bar{z})^{n-k}.$$

A substituição de $J_n^{(\alpha,m-n)}$ na expressão de $R_{m,n}^{\alpha}$ como em (3.1) nos leva ao resultado desejado se $m \wedge n = n$. A verificação quando $m \wedge n = m$ é análoga levando a mesma expressão obtida quando $m \wedge n = n$. Assim, a prova está terminada. ■

A última proposição, quando vinculada às relações que associam o símbolo Pochhammer, a notação fatorial e a função gama, sugere as seguintes representações para polinômios no disco.

Proposição 3.1.2 *Se α é um parâmetro real maior que -1, então*

$$\begin{aligned} R_{m,n}^{\alpha}(z) &= \frac{m!n!\alpha!}{(\alpha+m)!(\alpha+n)!} \sum_{k=0}^{m\wedge n} (-1)^k \frac{(m+n+\alpha-k)!}{k!(m-k)!(n-k)!} z^{m-k}\bar{z}^{n-k} \\ &= \frac{m!n!\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)\Gamma(\alpha+n+1)} \sum_{k=0}^{m\wedge n} (-1)^k \frac{\Gamma(m+n+\alpha-k+1)}{k!(m-k)(n-k)!} z^{m-k}\bar{z}^{n-k} \end{aligned}$$

Na sequência, cotamos outra representação para $R_{m,n}^{\alpha}$.

Proposição 3.1.3 *Se α é um parâmetro real maior que -1, então*

$$R_{m,n}^{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{m\wedge n} (-1)^k \frac{(m-k+1)_k(n-k+1)_k}{(\alpha+1)_k(1)_k} (1-z\bar{z})^k z^{m-k}\bar{z}^{n-k}. \tag{3.2}$$

Demonstração: Seja α um escalar real maior que -1 e considere $m \wedge n = n$. Logo, a expansão do Teorema 2.5.2 quando substituída na primeira expressão de (3.1) nos conduz à soma

$$R_{m,n}^{\alpha}(z) = z^m \bar{z}^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(m-k+1)_k (n-k+1)_k}{(\alpha+1)_k (1)_k} \left(\frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}} \right)^k.$$

Consequentemente, a expressão (3.2) ocorre quando $m \wedge n = n$. O caso $m \wedge n = m$ é análogo ao anterior. Devido a simetria dos coeficientes da soma anterior em relação a m e n, essa mesma soma também ocorre quando $m \wedge n = m$. Portanto, a prova está concluída. ■

Com auxílio de (2.14), obtemos notações opcionais para os coeficientes da soma da proposição anterior. Por exemplo,

$$R_{m,n}^{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{m\wedge n} (-1)^k \frac{m!n!\alpha!}{k!(m-k)!(n-k)!(\alpha+k)!} (1-z\bar{z})^k z^{m-k} \bar{z}^{n-k} \tag{3.3}$$

e, em termos da função gama

$$R_{m,n}^{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{m\wedge n} (-1)^k \frac{m!n!\Gamma(\alpha+1)}{k!(m-k)!(n-k)!\Gamma(\alpha+k+1)} (1-z\bar{z})^k z^{m-k} \bar{z}^{n-k}, \quad z \in D[1]. \tag{3.4}$$

Mostramos na próxima proposição que, tal como os polinômios de Jacobi, os polinômios no disco podem ser representados através de uma função hipergeométrica. Para tal, convém introduzir a notação $m \vee n := \max\{m,n\}$.

Proposição 3.1.4 *Se α é um parâmetro real maior que -1, então*

$$R_{m,n}^{\alpha}(z) = z^m \bar{z}^n F\left(-(m\wedge n), -(m\vee n); \alpha+1; 1-\frac{1}{z\bar{z}} \right), \quad z \neq 0. \tag{3.5}$$

Demonstração: Seja α um escalar maior que -1 e considere que $m \wedge n = n$. Logo, a primeira expressão de (3.1) e a última igualdade do Teorema 2.5.3 revelam que

$$R_{m,n}^{\alpha}(z) = \frac{(1)_n}{(\alpha+1)_n} z^{m-n} J_n^{(\alpha,m-n)}(2z\bar{z}-1) = z^m \bar{z}^n F\left(-n, -m; \alpha+1; 1-\frac{1}{z\bar{z}} \right), \quad z \neq 0.$$

De modo análogo quando $m \wedge n = m$, mostramos que

$$R_{m,n}^{\alpha}(z) = z^m \bar{z}^n F\left(-m, -n; \alpha+1; 1-\frac{1}{z\bar{z}} \right), \quad z \neq 0.$$

Portanto, a identidade (3.5) está provada. ■

Observamos que adotando $J_n^{(\alpha,\beta)}$ como na primeira expressão do Teorema 2.5.3, obtemos uma versão melhorada da proposição anterior dada por

$$R^{\alpha}_{m,n}(z) = \frac{(-m)_n}{(\alpha+1)_n} z^{m-n} F\left(-n, \alpha+m+1; m-n+1; z\bar{z}\right), \quad z \in D[1].$$

A Fórmula de Rodrigues para polinômios no disco é como segue.

Proposição 3.1.5 *Se α é um parâmetro real maior que -1, então*

$$R^{\alpha}_{m,n}(z) = \frac{(-1)^{m+n}}{(\alpha+1)_{m+n}} \frac{1}{(1-z\bar{z})^{\alpha}} \frac{\partial^{m+n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^m} (1-z\bar{z})^{\alpha+m+n}.$$

Demonstração: Assuma que $\alpha > -1$ e considere $m \wedge n = n$. Inicialmente, usamos a Proposição 2.1.4 para justificar que

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^m} (1-z\bar{z})^{\alpha+m+n} = (-1)^m (\alpha+n+1)_m \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(z^m (1-z\bar{z})^{\alpha+n}\right).$$

Então, usando a Regra de Leibnitz vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^m} (1-z\bar{z})^{\alpha+m+n} &= (-1)^m (\alpha+n+1)_m \sum_{k=0}^{n} \frac{(1)_n (m-k+1)_k}{(1)_{n-k}(1)_k} z^{m-k} \frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}} (1-z\bar{z})^{\alpha+n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{m+n-k}(1)_n (m-k+1)_k (\alpha+n+1)_m (\alpha+k+1)_{n-k}}{(1)_{n-k}(1)_k} \\ &\times \; z^{m-k} \bar{z}^{n-k} (1-z\bar{z})^{\alpha+k}. \end{aligned}$$

Com auxílio da Proposição 2.1.2 e cálculo direto, justificamos a igualdade

$$\frac{(-1)^{m+n-k}(1)_n (m-k+1)_k (\alpha+n+1)_m (\alpha+k+1)_{n-k}}{(1)_{n-k}(1)_k} = \frac{(\alpha+1)_{m+n}}{(-1)^{m+n-k}} \frac{(m-k+1)_k (n-k+1)_k}{(\alpha+1)_k (1)_k}.$$

Portanto, pela Proposição 3.1.3,

$$\frac{(-1)^{m+n}}{(\alpha+1)_{m+n}} \frac{1}{(1-z\bar{z})^{\alpha}} \frac{\partial^{m+n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^m} (1-z\bar{z})^{\alpha+m+n} = R^{\alpha}_{m,n}(z).$$

A prova para o caso $m \wedge n = m$ é análoga e, portanto, a proposição está provada. ■

A seguir cotamos algumas propriedades básicas e quase que imediatas dos polinômios no disco.

Proposição 3.1.6 *Seja α um parâmetro real maior que -1. Valem as seguintes propriedades:*

(1) $R^{\alpha}_{m,n}(-z) = (-1)^{m+n} R^{\alpha}_{m,n}(z)$;

(2) $\overline{R^{\alpha}_{m,n}(z)} = R^{\alpha}_{m,n}(\bar{z}) = R^{\alpha}_{n,m}(z)$;

(3) $R^{\alpha}_{m,n}(1) = 1$;
(4) $(\alpha+1)_n R^{\alpha}_{m,n}(0) = (-1)^n (1)_n \delta_{m,n}$.

Demonstração: Os itens (1) e (2) são consequências diretas das expressões em (3.1), observando-se que $(-1)^{|m-n|} = (-1)^{m+n}$.
Usamos a normalização dos polinômios de Jacobi como em (2.10) para ver que

$$R^{\alpha}_{m,n}(1) = \frac{(1)_{m\wedge n}}{(\alpha+1)_{m\wedge n}} J^{(\alpha,|m-n|)}_{m\wedge n}(1) = 1,$$

o que prova o item (3).
No último item, voltamos à Definição 3.1.1 para concluir que $R^{\alpha}_{m,n}(0) = 0$ sempre que $m \neq n$, enquanto que de (2.12),

$$R^{\alpha}_{m,m}(0) = \frac{(1)_n}{(\alpha+1)_n} J^{(\alpha,0)}_n(-1) = (-1)^n \frac{(1)_n}{(\alpha+1)_n}.$$

Portanto, a proposição está provada. ■

A próxima proposição mostra o comportamento dos polinômios no disco quando seu argumento é rotacionado por um ângulo fixado. Em particular, os valores dos polinômios no disco sobre a fronteira de $D[1]$ independem de α.

Proposição 3.1.7 *Sejam α um parâmetro real maior que -1 e $\phi \in \mathbb{R}$. As seguintes propriedades valem:*
(1) $R^{\alpha}_{m,n}(e^{i\phi} z) = e^{i(m-n)\phi} R^{\alpha}_{m,n}(z)$;
(2) $R^{\alpha}_{m,n}(e^{i\phi}) = e^{i(m-n)\phi}$.

Demonstração: Como $R^{\alpha}_{m,n}(1) = 1$, (2) é consequência de (1), enquanto que (1) é consequência da Definição 3.1.1. ■

3.2 Ortogonalidade dos polinômios no disco

Assim como os polinômios de Jacobi são ortogonais em relação à medida

$$(1-u)^{\alpha}(1+u)^{\beta} du,$$

os polinômios no disco são ortogonais em relação à medida

$$d\mathfrak{m}_{\alpha}(z) := \frac{\alpha+1}{\pi}(1-z\bar{z})^{\alpha} dz, \quad z \in D[1]. \tag{3.6}$$

Na seção presente, estudamos esta e outras propriedades envolvendo espaços de funções integráveis sobre o disco unitário.

A prova da Proposição 3.2.1 segue adotando uma mudança em coordenadas polares para a variável z, para ver que $\mathfrak{m}_\alpha$ é uma medida de probabilidade sobre $D[1]$.

Proposição 3.2.1 *Se α é um parâmetro real maior que -1, então*

$$\int_{D[1]} d\mathfrak{m}_\alpha(z) = 1.$$

Seja $p \geq 1$. Denotamos por $L^p(D[1], d\mathfrak{m}_\alpha)$, o conjunto das funções p-integráveis sobre $D[1]$ em relação à medida $\mathfrak{m}_\alpha$. Como é bem conhecido, este conjunto é um espaço de Banach relativo a norma

$$\|f\|_p = \left(\int_{D[1]} |f(z,\bar{z})|^p d\mathfrak{m}_\alpha(z) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em símbolos,

$$L^p\left(D[1], d\mathfrak{m}_\alpha\right) := \left\{ z \in D[1] \mapsto f(z) \in \mathbb{C} : f \text{ é função e } \|f\|_p < \infty \right\}.$$

Denotamos o produto interno usual do espaço de Hilbert $L^2(D[1], d\mathfrak{m}_\alpha)$ como

$$\langle f, g \rangle_{2,\alpha} = \int_{D[1]} f(z)\overline{g(z)} d\mathfrak{m}_\alpha(z), \quad f, g \in L^2(D[1], d\mathfrak{m}_\alpha). \tag{3.7}$$

Tendo introduzido tais conceitos, o teorema abaixo mostra que os polinômios no disco constituem um sistema ortogonal em $L^2(D[1], d\mathfrak{m}_\alpha)$.

Teorema 3.2.1 *Se α é um parâmetro real maior que -1, então*

$$\langle R^\alpha_{k,l}, R^\alpha_{m,n} \rangle_{2,\alpha} = C(m,n,\alpha)\delta_{k,m}\delta_{l,n},$$

onde

$$C(m,n,\alpha) := \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+m+1)} \frac{m!n!}{(\alpha+m+n+1)}.$$

Demonstração: Seja α um parâmetro real maior que -1. Pela propriedade de conjugação complexa da Proposição 3.1.6, vemos que

$$\langle R^\alpha_{k,l}, R^\alpha_{m,n} \rangle_{2,\alpha} = \int_{D[1]} R^\alpha_{k,l}(z) R^\alpha_{n,m}(z) d\mathfrak{m}_\alpha(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 R^\alpha_{k,l}(re^{i\theta}) R^\alpha_{n,m}(re^{i\theta})(1-r^2)^\alpha r dr d\theta.$$

Logo, com auxílio da Proposição 3.1.7, segue que

$$\langle R^\alpha_{k,l}, R^\alpha_{m,n} \rangle_{2,\alpha} \;=\; \frac{\alpha+1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i(k-l+n-m)\theta} R^\alpha_{k,l}(r) R^\alpha_{n,m}(r)(1-r^2)^\alpha r dr d\theta.$$

Assim, se $k+n \neq l+m$, então $\langle R^\alpha_{k,l}, R^\alpha_{m,n}\rangle_{2,\alpha} = 0$. Assumimos, então, que $k+n = l+m$ para escrever

$$\langle R^\alpha_{k,l}, R^\alpha_{m,n}\rangle_{2,\alpha} = 2(\alpha+1)\int_0^1 R^\alpha_{k,l}(r) R^\alpha_{l-k+m,m}(r)(1-r^2)^\alpha r dr.$$

Então, quando $k \wedge l = k$, a definição de polinômios no disco mostra que o produto interno acima equivale a

$$2(\alpha+1)\frac{(1)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{(1)_m}{(\alpha+1)_m}\int_0^1 J_k^{(\alpha,l-k)}(2r^2-1)J_m^{(\alpha,l-k)}(2r^2-1)r^{2(l-k)}(1-r^2)^\alpha r dr.$$

A integral da expressão acima, mediante a mudança de variável $u = 2r^2-1$, é assim reescrita

$$\frac{1}{4}\int_{-1}^1 J_k^{(\alpha,l-k)}(u)J_m^{(\alpha,l-k)}(u)\left(\frac{1-u}{2}\right)^\alpha\left(\frac{u+1}{2}\right)^{l-k}du.$$

Logo, pela Proposição 2.7.3,

$$\begin{aligned}\langle R^\alpha_{k,l}, R^\alpha_{m,n}\rangle_{2,\alpha} &= \frac{(1)_k(1)_m(\alpha+1)2^{-\alpha-l+k-1}}{(\alpha+1)_k(\alpha+1)_m}\int_{-1}^1 J_k^{(\alpha,l-k)}(u)J_m^{(\alpha,l-k)}(u)(1-u)^\alpha(1+u)^{l-k}du\\ &= \frac{(1)_k(1)_m(\alpha+1)}{(\alpha+1)_k(\alpha+1)_m(\alpha+l+k+1)}\frac{l!(\alpha+k)!}{k!(\alpha+l)!}\delta_{k,m}.\end{aligned}$$

Então, efetuando simplificações, obtemos

$$\langle R^\alpha_{k,l}, R^\alpha_{m,n}\rangle_{2,\alpha} = \frac{\alpha!(\alpha+1)!}{(\alpha+m)!(\alpha+l)!}\frac{m!l!}{(\alpha+k+l+1)}\delta_{l,n} = \frac{\alpha!(\alpha+1)!}{(\alpha+m)!(\alpha+n)!}\frac{m!n!}{(\alpha+k+n+1)}\delta_{l,n}.$$

Em resumo, o produto interno de $R^\alpha_{k,l}$ com $R^\alpha_{m,n}$ é não nulo se e somente se $k+n = l+m$ e $l = n$. De onde segue a igualdade

$$\langle R^\alpha_{k,l}, R^\alpha_{m,n}\rangle_{2,\alpha} = \frac{\alpha!(\alpha+1)!}{(\alpha+m)!(\alpha+n)!}\frac{m!n!}{(\alpha+m+n+1)}\delta_{k,m}\delta_{l,n}.$$

Como a prova para o caso $k \wedge l = l$ é análoga, o teorema está provado. ■

Na verdade, o conjunto $\{R^\alpha_{k,l} : k,l = 0,1,\ldots\}$ constitui um sistema ortogonal completo em $L^2(D[1], dm_\alpha)$ ([3, p. 21]).

3.3 Coordenadas polares e polinômios no disco

A menos de especificação em contrário, nesta seção α será um número real maior que -1 e os índices m e n são inteiros não negativos.

Iniciamos a seção recordando as igualdades bem conhecidas relacionando a variável complexa z e suas coordenadas polares (r,θ). Desse modo, se $z = re^{i\theta}$, $r \in [0,1]$ e $\theta \in [0,2\pi)$, então

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{e^{-i\theta}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{e^{i\theta}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \tag{3.8}$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}=z\frac{\partial}{\partial z}+\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}},\quad \frac{\partial}{\partial\theta}=i\left(z\frac{\partial}{\partial z}-\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right). \tag{3.9}$$

E como consequência destas, valem as seguintes representações para o Laplaciano bidimensional

$$\Delta_2:=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}=\frac{1}{r^2}\left\{\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}.$$

Consequentemente, usando a Definição 3.1.1, vemos que

$$\frac{\partial}{\partial\theta}R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta})=i(m-n)R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta}). \tag{3.10}$$

Com o auxílio da última igualdade de (3.9), a equação anterior pode ser reescrita como

$$\left(z\frac{\partial z}{\partial z}-\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)R^{\alpha}_{m,n}(z)=(m-n)R^{\alpha}_{m,n}(z)$$

O teorema a seguir revela que os polinômios no disco estão no núcleo de certo operador diferencial de segunda ordem. Embora essa equação seja conhecida, sendo citada, por exemplo, em ([4, 29]), não encontramos na literatura uma demonstração para ela, o que nos motivou a prová-la completamente.

Teorema 3.3.1 *Se $z=re^{i\theta}\in D[1]$, então*

$$\left[(1-r^2)\Delta_2-2(1+\alpha)r\frac{\partial}{\partial r}+4mn+2(1+\alpha)(m+n)\right]\left(R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta})\right)=0.$$

Demonstração: Sejam $r\in[0,1]$, $\theta\in[0,2\pi)$ e assuma que $m\wedge n=n$. Então, usando a Definição 3.1.1 segue que

$$R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta})=\mathcal{A}\,r^{m-n}J_n^{(\alpha,m-n)}(2r^2-1), \tag{3.11}$$

onde

$$\mathcal{A}:=\frac{\alpha!n!}{(\alpha+n)!}e^{i(m-n)\theta}.$$

Agora, adotamos $u=2r^2-1$ e derivamos em relação a r, ambos os membros (3.11) para ver que

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta})=\mathcal{A}(m-n)r^{m-n-2}J_n^{(\alpha,m-n)}(u)+4\mathcal{A}r^{m-n}\frac{\partial}{\partial u}J_n^{(\alpha,m-n)}(u).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2}R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta}) &= 16\mathcal{A}\,r^{m-n+2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}J_n^{(\alpha,m-n)}(u)+4\mathcal{A}(2m-2n+1)r^{m-n}\frac{\partial}{\partial u}J_n^{(\alpha,m-n)}(u)\\ &+ \mathcal{A}(m-n)(m-n-1)r^{m-n-2}J_n^{(\alpha,m-n)}(u).\end{aligned}$$

Na sequência, derivação direta de ambos os membros de (3.11) em relação a θ mostra que

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta}) = -(m-n)^2\mathcal{A}\,r^{m-n-2}J_n^{(\alpha,m-n)}(2r^2-1).$$

A soma, membro a membro, das três equações obtidas acima implicam no operador Laplaciano bidimensional

$$\Delta_2(R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta})) = 4\mathcal{A}\,r^{m-n}\left[2(1+u)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+2(m-n+1)\frac{\partial}{\partial r}\right]\left(J_n^{(\alpha,m-n)}(2r^2-1)\right).$$

Na sequência da prova, definimos

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{m,n} := (1-r^2)\Delta_2 - 2(1+\alpha)r\frac{\partial}{\partial r}+4c,$$

onde c é uma constante dependente de m,n e α, sujeita a nossa escolha. Cálculo direto, seguido de manipulação algébrica, mostra que $\mathcal{D}^{\alpha}_{m,n}$ aplicado em $R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta})$ resulta no operador

$$4\mathcal{A}\,r^{m-n}\left[(1-u^2)\frac{\partial^2}{\partial u^2}+[(m-n-\alpha)-(m-n+2+\alpha)u]\frac{\partial}{\partial u}+\left(c-\frac{(1+\alpha)(m-n)}{2}\right)\right]$$

aplicado em $J_n^{(\alpha,m-n)}(u)$. Se $2c = 2mn+(1+\alpha)(m+n)$, então $\mathcal{D}^{\alpha}_{m,n}(R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta}))$ torna-se

$$4\mathcal{A}\,r^{m-n}\left[(1-u^2)\frac{\partial^2}{\partial u^2}+[(m-n-\alpha)-(m-n+2+\alpha)u]\frac{\partial}{\partial u}+n(m+\alpha+1)\right]\left(J_n^{(\alpha,m-n)}(u)\right),$$

que é nula devido ao Teorema 2.7.1. Assim,

$$0=\mathcal{D}^{\alpha}_{m,n}(R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta})) = \left((1-r^2)\Delta_2-2(1+\alpha)r\frac{\partial}{\partial r}+4mn+2(1+\alpha)(m+n)\right)\left(R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta})\right).$$

Como a prova para o caso $m\wedge n = m$ é análoga, o teorema está provado. ∎

Finalizamos a seção cotando a equação do teorema anterior nas variáveis z e $\bar{z}$.

Corolário 3.3.1 *Se $z\in D[1]$, então*

$$\left[(1-z\bar{z})\Delta_2-(1+\alpha)\left(2z\frac{\partial}{\partial z}+2\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)+4mn+2(1+\alpha)(m+n)\right]\left(R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta})\right)=0.$$

Demonstração: A prova é consequência direta das equações (3.8) e (3.9). ■

3.4 Identidades com derivadas de polinômios no disco

Nesta seção, estudamos relações de recorrência envolvendo derivadas de polinômios no disco. Tais equações são deduzidas partindo das fórmulas fechadas para $R^{\alpha}_{m,n}$ da Seção 3.1. Como na seção precedente, a menos de especificação em contrário, o escalar α será um número real maior que -1 e os índices m, n, k e l são inteiros não negativos.

Proposição 3.4.1 *Se m e n são inteiros maiores que* 1*, então*

$$(m-n)R^{\alpha}_{m,n}(z) = mzR^{\alpha}_{m-1,n}(z) - n\bar{z}R^{\alpha}_{m,n-1}(z), \quad z \in D[1].$$

Demonstração: Recordando a propriedade de conjugação da Proposição 3.1.6, notamos que a identidade da proposição é válida quando $m = n$. Assumimos, então, que $m \neq n$ tal que $m \wedge n = n$. Então, pela expressão (3.3)

$$mzR^{\alpha}_{m-1,n}(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (m-k) m! n! \alpha!}{k!(m-k)!(n-k)!(\alpha+k)!}(1-z\bar{z})^k z^{m-k}\bar{z}^{n-k}, \quad z \in D[1]$$

e

$$n\bar{z}R^{\alpha}_{m,n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k) m! n! \alpha!}{k!(m-k)!(n-k)!(\alpha+k)!}(1-z\bar{z})^k z^{m-k}\bar{z}^{n-k}, \quad z \in D[1].$$

A relação do enunciado agora segue das duas equações acima. A prova para $m \wedge n = m$ é análoga e pode ser omitida. Portanto, a proposição está provada. ■

Na próxima proposição, provamos outra relação de recorrência para $R^{\alpha}_{m,n}$.

Proposição 3.4.2 *Se n é um inteiro positivo, então*

$$(\alpha+m+n+1)\, zR^{\alpha}_{m,n}(z) = (\alpha+m+1)\, R^{\alpha}_{m+1,n}(z) + n\, R^{\alpha}_{m,n-1}(z), \quad z \in D[1].$$

Demonstração: Seja n um inteiro maior ou igual a 1 tal que $m \wedge n = n$. Então, pela primeira expressão de (3.1)

$$(\alpha+m+1)\, R^{\alpha}_{m+1,n}(z) \;=\; (\alpha+m+1)\frac{\alpha! n!}{(\alpha+n)!} z z^{m-n} J_n^{(\alpha,m+1-n)}(2z\bar{z}-1)$$

e

$$n R^{\alpha}_{m,n-1}(z) \;=\; \frac{(\alpha+n)\alpha! n!}{(\alpha+n)!} z z^{m-n} J_{n-1}^{(\alpha,m+1-n)}(2z\bar{z}-1).$$

Somamos, membro a membro, as suas últimas igualdades para ver que

$$(\alpha+m+1)\,R^{\alpha}_{m+1,n}(z)+n\,R^{\alpha}_{m,n-1}(z)$$

identifica-se com

$$\frac{\alpha!n!}{(\alpha+n)!}zz^{m-n}\left[(\alpha+m+1)J_n^{(\alpha,m-n+1)}(2z\bar{z}-1)+(\alpha+n)J_{n-1}^{(\alpha,m-n+1)}(2z\bar{z}-1)\right].$$

Por sua vez, esta expressão, de acordo com a Proposição 2.6.3, é igual a

$$(\alpha+m+1)R^{\alpha}_{m+1,n}(z)+n\,R^{\alpha}_{m,n-1}(z)=(\alpha+m+n+1)\frac{\alpha!n!}{(\alpha+n)!}zz^{m-n}J_n^{(\alpha,m-n)}(2z\bar{z}-1).$$

Então, a igualdade da proposição segue de (3.1). O caso $m\wedge n=m$ é análogo ao precedente. ■

É importante mencionar que associando-se a proposição anterior com a propriedade de conjugação complexa da Proposição 3.1.6, obtemos uma outra relação de recorrência para $R^{\alpha}_{m,n}$, registrada a seguir

$$(\alpha+m+n+1)\,\bar{z}R^{\alpha}_{m,n}(z)=(\alpha+n+1)\,R^{\alpha}_{m,n+1}(z)+mR^{\alpha}_{m-1,n}(z),\quad m\geq 1,\quad z\in D[1].$$

Relações de diferenciação para $R^{\alpha}_{m,n}$ são provadas nas duas próximas proposições.

Proposição 3.4.3 *Se m é um inteiro positivo, então*

$$\frac{\partial}{\partial z}R^{\alpha}_{m,n}(z)=\frac{m(\alpha+n+1)}{\alpha+1}R^{\alpha+1}_{m-1,n}(z),\quad z\in D[1]. \tag{3.12}$$

Demonstração: Assuma que m é um inteiro positivo tal que $m\wedge n=n$ e fixe $z\in D[1]$. Pela Proposição 3.1.2

$$\frac{m(\alpha+n+1)}{\alpha+1}R^{\alpha+1}_{m-1,n}(z) \;=\; \frac{m!n!\alpha!}{(\alpha+m)!(\alpha+n)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(m+n+\alpha-k)!}{k!(m-k-1)!(n-k)!}z^{m-k-1}\bar{z}^{n-k}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z}R^{\alpha}_{m,n}(z) \;=\; \frac{m!n!\alpha!}{(\alpha+m)!(\alpha+n)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(m-k)(m+n+\alpha-k)!}{k!(m-k)!(n-k)!}z^{m-k-1}\bar{z}^{n-k}.$$

A afirmação da proposição segue, uma vez que as duas expansões acima são iguais. A prova quando $m\wedge n=m$ é análoga. ■

Usando (3.8) e a Proposição 3.1.6, vemos que (3.12) implica em

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} R^{\alpha}_{m,n}(z) = \frac{n(\alpha+m+1)}{\alpha+1} R^{\alpha+1}_{m,n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad z \in D[1].$$

Proposição 3.4.4 *Se m é um inteiro positivo, então*

$$(1-z\overline{z})\frac{\partial}{\partial z} R^{\alpha}_{m,n}(z) = \frac{m(\alpha+n+1)}{(\alpha+m+n+1)} \left[R^{\alpha}_{m-1,n}(z) - R^{\alpha}_{m,n+1}(z)\right], \quad z \in D[1]. \tag{3.13}$$

Demonstração: Seja m um inteiro positivo tal que $m \wedge n = m$ e fixe $z \in D[1]$. Derivação direta da segunda expressão de (3.1) mostra que

$$\frac{\partial}{\partial z} R^{\alpha}_{m,n}(z) = \frac{\alpha! m!}{(\alpha+m)!} 2\overline{z}^{n-m+1} \frac{\partial}{\partial z} J_m^{(\alpha,n-m)}(2z\overline{z}-1).$$

Devido à relação de diferenciação para polinômios de Jacobi da Proposição 2.6.1, temos

$$\frac{\partial}{\partial z} R^{\alpha}_{m,n}(z) = \frac{\alpha! m!}{(\alpha+m)!} \overline{z}^{n-m+1} (\alpha+n+1) J_{m-1}^{(\alpha+1,n-m+1)}(2z\overline{z}-1).$$

Por outro lado, a relação de recorrência mostrada na Proposição 2.6.2 revela que

$$J_{m-1}^{(\alpha+1,n-m+1)}(2z\overline{z}-1) = \left[\frac{(\alpha+m) J_{m-1}^{(\alpha,n-m+1)}(2z\overline{z}-1) - m J_m^{(\alpha,n-m+1)}(2z\overline{z}-1)}{(1-z\overline{z})(\alpha+n+m+1)}\right].$$

Manipulação algébrica das duas últimas equações nos fornece a seguinte expressão para $(1 - z\overline{z})\frac{\partial}{\partial z} R^{\alpha}_{m,n}(z)$

$$\frac{m(\alpha+n+1)}{(\alpha+n+m+1)} \left[\overline{z}^{n-m+1} \left(\frac{\alpha!(m-1)!}{(\alpha+m-1)!} J_{m-1}^{(\alpha,n-m+1)}(2z\overline{z}-1) - \frac{\alpha! m!}{(\alpha+m)!} J_m^{(\alpha,n-m+1)}(2z\overline{z}-1)\right)\right],$$

que é a expressão do enunciado da proposição. A prova quando $m \wedge n = n$ é análoga. ■

Como na observação antes da Proposição 3.4.4, a conjugação de (3.13) produz a igualdade

$$(1-z\overline{z})\frac{\partial}{\partial \overline{z}} R^{\alpha}_{m,n}(z) = \frac{n(\alpha+m+1)}{(\alpha+m+n+1)} \left[R^{\alpha}_{m,n-1}(z) - R^{\alpha}_{m+1,n}(z)\right], \quad n \geq 1, \quad z \in D[1].$$

3.5 Fórmula da Adição

Estudamos aqui a Fórmula de Adição para polinômios no disco que, na verdade, ela expressa a conexão entre estes polinômios com os harmônicos esféricos. Toda teoria desta seção é embasada em ([12, 19, 23]).

Em toda seção a letra q sempre denotará um inteiro maior que 1.

Seja $p \geq 1$. Denotaremos por $L^p(\Omega_{2q}, d\sigma_q)$ o conjunto das funções p-integráveis sobre Ω_{2q}, onde $d\sigma_q$ foi definida em (2.24). Neste contexto, uma função σ_q-mensurável f é p-integrável em Ω_{2q} quando

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega_{2q}} |f(z,\bar{z})|^p d\sigma_q(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Se $p = 2$, então $L^2(\Omega_{2q}, d\sigma_q)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{\Omega_{2q}} f(z)\overline{g(z)} d\sigma_q(z), \quad f, g \in L^2(\Omega_{2q}, d\sigma_q). \tag{3.14}$$

Recordamos que $d\sigma_q$ é invariante por elementos de $O(2q)$ ([19, p. 9]) - Isto é,

$$d\sigma_q(\rho z) = d\sigma_q(z), \quad \rho \in O(2q), \quad z \in \Omega_{2q}. \tag{3.15}$$

Adicionalmente, a área total de Ω_{2q} é dada por ([19])

$$\int_{\Omega_{2q}} d\sigma_q = \frac{2\pi^q}{(q-1)!}.$$

Como $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}) \subset L^2(\Omega_{2q}, d\sigma_q)$ e tem dimensão $N(m,n)$, daqui por diante, o conjunto

$$B := \left\{ Y_{m,n}^j : j = 1, \ldots, N(m,n) \right\} \tag{3.16}$$

é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ em relação ao produto interno (3.14).

A prova da Fórmula da Adição dependerá do conceito de funções esféricas zonais. Fixado $\omega \in \Omega_{2q}$, dizemos que uma aplicação $f : \Omega_{2q} \to \mathbb{C}$ é uma *função ω-zonal* quando

$$f(\rho\xi) = f(\xi), \quad \rho \in O_\omega(2q), \quad \xi \in \Omega_{2q}.$$

Aproveitamos o contexto para citar um resultado independente e interessante sobre funções zonais.

Proposição 3.5.1 *Sejam f um elemento de $L^2(\Omega_{2q}, d\sigma_q)$ e $\omega \in \Omega_{2q}$. São equivalentes:*
1. $f(\zeta) = f(\zeta')$, $\quad \zeta, \zeta' \in \Omega_\omega^\eta$, $\ \eta \in D[1]$;
2. *f é ω-zonal;*
3. *Existe uma função $g : D[1] \to \mathbb{C}$ tal que $f(\zeta) = g(\langle \zeta, \omega \rangle)$, $\zeta \in \Omega_{2q}$.*

Demonstração: Para provar que (1) implica em (2), fixemos $z \in \Omega_{2q}$. Então, $z \in \Omega_\omega^\eta$, onde $\eta = \langle z, \omega \rangle \in D[1]$. Além disso, $\rho z \in \Omega_\omega^\eta$ para $\rho \in O_\omega(2q)$. De fato, se $\rho \in O_\omega(2q)$, então $\rho\omega = \omega$, $\omega \in \Omega_{2q}$. Logo,

$$\langle \rho z, \omega \rangle = \langle \rho z, \rho\omega \rangle = \langle z, \rho^* \rho\omega \rangle = \langle z, \omega \rangle = \eta.$$

Como $z, \rho z \in \Omega_\omega^\eta$, segue da hipótese que $f(z) = f(\rho z)$. Como z foi arbitrariamente escolhido, o resultado segue.
Para a implicação de (2) para (3), suponhamos que f é ω-zonal. Fixemos $\xi, \zeta \in \Omega_{2q}$ tais que $\xi, \zeta \in \Omega_\omega^\eta$, $\eta \in D[1]$ e mostremos que $f(\xi) = f(\zeta)$. Para tal, observamos que, devido ao Lema 2.9.2, ξ e ζ podem ser representados na forma

$$\xi = \eta\omega + \sqrt{1-|\eta|^2}\,\xi', \quad \zeta = \eta\omega + \sqrt{1-|\eta|^2}\,\zeta', \quad \xi', \zeta' \in \Omega_\omega^0. \tag{3.17}$$

Considerando $\rho \in O_\omega(2q)$ tal que $\rho\xi' = \zeta'$, segue da hipótese que

$$f(\xi) = f(\eta\omega + \sqrt{1-|\eta|^2}\,\xi') = f(\rho(\eta\omega + \sqrt{1-|\eta|^2}\,\xi')) = f(\zeta).$$

Portanto, a função f independe de ξ e ζ, mas somente de $\langle z, \omega\rangle$, $z \in \Omega_\omega^\eta$.
Finalmente, provemos que (3) implica em (1) supondo que existe uma função $g : D[1] \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = g(\langle z, \omega\rangle)$, $z \in \Omega_{2q}$. Então, para $\eta \in D[1]$, segue que

$$f(z') = g(\langle z', \omega\rangle) = g(\eta) = g(\langle z'', \omega\rangle) = f(z''), \quad z', z'' \in \Omega_\omega^\eta.$$

Portanto, a proposição está provada. ∎

Entre outras propriedades, a proposição anterior assegura a existência de funções zonais não nulas em $L^2(\Omega_{2q}, d\sigma_q)$. O lema a seguir exibe exemplos de elementos não nulos que também são zonais em cada $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$.

Lema 3.5.1 *Seja $\omega \in \Omega_{2q}$. Existe um elemento não nulo em $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ que é ω-zonal.*

Demonstração: Para provar o lema, considere

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{N(m,n)} Y_{m,n}^j(z)\overline{Y_{m,n}^j(\omega)}, \quad z \in \Omega_{2q},$$

onde $Y_{m,n}^j$, $j = 1, \ldots, N(m,n)$ são os elementos da base B de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ como definida em (3.16). Logo, o polinômio Φ é um elemento de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. Além disso, como $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ é $O(2q)$-invariante, cada $Y_{m,n}^k \circ \rho \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ e existe uma matriz hermitiana $(u_{jk}(\rho))$ de ordem $N(m,n)$ tal que

$$Y_{m,n}^k \circ \rho = \sum_{j=1}^{N(m,n)} u_{jk}(\rho) Y_{m,n}^j, \quad k = 1, \ldots, N(m,n). \tag{3.18}$$

Devido a ortonormalidade dos elementos de B e a $O(2q)$-invariância de $d\sigma_q$, segue que

$$\int_{\Omega_{2q}} Y_{m,n}^i(\rho\xi)\overline{Y_{m,n}^j(\rho\xi)}\, d\sigma_q(\xi) = \int_{\Omega_{2q}} Y_{m,n}^i(\xi)\overline{Y_{m,n}^j(\xi)}\, d\sigma_q(\xi) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, \ldots, N(m,n).$$

Equivalentemente, o conjunto $\{Y^j_{m,n}\circ\rho : j=1,\ldots,N(m,n)\}$ é outra base ortonormal de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. Finalmente, como a matriz $(u_{jk}(\rho))$ é hermitiana, para todo z em Ω_{2q},

$$\sum_{j=1}^{N(m,n)} Y^j_{m,n}(\rho(z))\overline{Y^j_{m,n}(\rho(\omega))} = \sum_{j=1}^{N(m,n)}\sum_{i=1}^{N(m,n)}\sum_{k=1}^{N(m,n)} u(\rho)_{ij}\overline{u(\rho)}_{kj}Y^i_{m,n}(z)\overline{Y^k_{m,n}(\omega)} = \Phi(z).$$

Então, o polinômio Φ é também ω-zonal. ■

A próxima proposição é um resultado técnico fundamental na prova do teorema principal desta seção. Para tanto, recordamos que se $\xi\in\Omega_{2q}$, então pelo Lema 2.9.2, a variável ξ se expressa como

$$\xi = \cos\theta\, e^{i\varphi}\omega + \operatorname{sen}\theta\,\xi', \quad \xi'\in\Omega_{2q-2},\ \varphi\in[0,2\pi),\ \theta\in[0,\pi/2]. \tag{3.19}$$

Proposição 3.5.2 *Sejam $\omega\in\Omega_{2q}$ e f é um elemento de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. São equivalentes:*

1. *O polinômio f é ω-zonal;*

2. *Existe um polinômio P de grau no máximo $m\wedge n$ tais que*

$$f(\xi) = \frac{e^{i(m-n)\varphi}}{2^{m\wedge n}}\cos^{|m-n|}\theta P(\cos 2\theta), \quad \xi\in\Omega_{2q};$$

3. *Existe uma constante M tal que*

$$f(\xi) = Me^{i(m-n)\varphi}\cos^{|m-n|}\theta J^{(q-2,|m-n|)}_{m\wedge n}(\cos 2\theta), \quad \xi\in\Omega_{2q}; \tag{3.20}$$

4. *O polinômio f decompõe-se na forma*

$$f(\xi) = f(\omega)R^{q-2}_{m,n}(\langle\xi,\omega\rangle), \quad \xi\in\Omega_{2q}. \tag{3.21}$$

Demonstração: Assuma que f é ω-zonal. Agora, para cada $\vartheta\in[0,2\pi)$, existe $\rho\in O_\omega(2q)$ tal que $\rho(e^{-i\varphi}\xi') = e^{i\vartheta}\zeta$, $\zeta\in\Omega_{2q-2}$. Como f é também ω-zonal,

$$f(\xi) = f(\rho\xi) = e^{i(m-n)\varphi}f\left(\cos\theta\,\omega + \operatorname{sen}\theta\,\rho(e^{-i\varphi}\xi')\right) = e^{i(m-n)\varphi}f\left(\cos\theta\,\omega + \operatorname{sen}\theta\, e^{i\vartheta}\zeta\right).$$

Adicionalmente, existe um operador linear T sobre $\mathbb{C}^q$ tal que $T(\varepsilon_1)=\omega$ e $T(e^{i\vartheta}\varepsilon_2) = e^{i\vartheta}\zeta$. Então,

$$f(\xi) = e^{i(m-n)\varphi}(f\circ T)\left(\cos\theta\,\varepsilon_1 + \operatorname{sen}\theta\, e^{i\vartheta}\varepsilon_2\right), \quad \vartheta\in[0,2\pi).$$

Integrando membro a membro a última expressão em relação a ϑ, vemos que

$$2\pi f(\xi) = e^{i(m-n)\varphi}\int_0^{2\pi}(f\circ T)\left(\cos\theta\,\varepsilon_1 + \operatorname{sen}\theta\, e^{i\vartheta}\varepsilon_2\right)d\vartheta.$$

A bihomogeneidade de $f\circ T$ juntamente com (2.19), justifica a expansão

$$(f\circ T)\left(\cos\theta\,\varepsilon_1+\operatorname{sen}\theta\, e^{i\vartheta}\varepsilon_2\right) \;=\; \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{k,l}\cos^{m-k}\theta\,\operatorname{sen}^{k}\theta\, e^{ik\vartheta}\cos^{n-l}\theta\,\operatorname{sen}^{l}\theta\, e^{-il\vartheta},$$

onde $a_{k,l}\in\mathbb{C}$. Segue que,

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{e^{i(m-n)\varphi}}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{k,l}\cos^{m+n-k-l}\theta\,\operatorname{sen}^{k+l}\theta\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)\vartheta}d\vartheta \\ &= e^{i(m-n)\varphi}\sum_{k=0}^{m\wedge n} a_{k,k}\cos^{m+n-k-l}\theta\,\operatorname{sen}^{2k}\theta, \quad a_{k,k}\in\mathbb{C}. \end{aligned}$$

Finalmente, a notação $m\wedge n$ permite reescrever a última soma como

$$f(\xi)=e^{i(m-n)\varphi}\cos^{|m-n|}\theta\sum_{k=0}^{m\wedge n} a_{k,k}\cos^{2(m\wedge n-k)}\theta\,\operatorname{sen}^{2k}\theta, \quad a_{k,k}\in\mathbb{C}.$$

Como $2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$ e $2\operatorname{sen}^2\theta=1-\cos 2\theta$,

$$f(\xi)=\frac{e^{i(m-n)\varphi}}{2^{m\wedge n}}\cos^{|m-n|}\theta\, P(\cos 2\theta), \quad \xi\in\Omega_{2q},$$

onde P é um polinômio de grau no máximo $m\wedge n$, provando a implicação de (1) para (2).
A implicação de (2) para (3) é óbvia quando f é nula. Assuma, então, que f é não nula e que m e n são inteiros não negativos. Então, existem inteiros não negativos m' e n' tais que $m'-n'=m-n$ e $k:=m'\wedge n'\in\{0,1,\ldots\}$. Pelo Lema 3.5.1, para cada par (m',n'), existe um elemento não nulo e ω-zonal g_k em $\mathcal{H}_{m',n'}(\Omega_{2q})$. Pela parte anterior desta prova, para cada k, existe um polinômio não nulo Q_k de grau no máximo k tal que

$$g_k(\xi)=\frac{e^{i(m-n)\varphi}}{2^k}\cos^{|m-n|}\theta\, Q_k(\cos 2\theta), \quad \xi\in\Omega_{2q}.$$

Pelo Lema 2.9.1,

$$0=\int_{\Omega_{2q}} g_k(\xi)\overline{g_l(\xi)}d\sigma_q(\xi)=\frac{1}{2^{k+l}}\int_{\Omega_{2q}}\cos^{2|m-n|}\theta\, Q_k(\cos 2\theta)\overline{Q_l(\cos 2\theta)}d\sigma_q(\xi), \quad k\neq l.$$

Como $d\sigma_q(\xi)=\cos\theta\,\operatorname{sen}^{2q-3}\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\sigma_{2q-2}(\xi')$, $\xi\in\Omega_{2q}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_{2q-2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_k(\cos 2\theta)\overline{Q_l(\cos 2\theta)}\cos^{2|m-n|+1}\theta\,\operatorname{sen}^{2q-3}\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\sigma_{2q-2}(\xi') \\ &= \frac{4\pi^q}{(q-2)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_k(\cos 2\theta)\overline{Q_l(\cos 2\theta)}\cos^{2|m-n|+1}\theta\,\operatorname{sen}^{2q-3}\theta\, d\theta, \quad k\neq l. \end{aligned}$$

Então, fazendo $x = \cos 2\theta$, chegamos a igualdade

$$0 = \int_{-1}^{1} Q_k(x)\,\overline{Q_l(x)}(1-x)^{q-2}(1+x)^{|m-n|}dx, \quad k \neq l.$$

Em particular, o polinômio P é não nulo e

$$0 = \int_{-1}^{1} Q_k(x)\,\overline{P(x)}(1-x)^{q-2}(1+x)^{|m-n|}dx, \quad k \neq m \wedge n.$$

Pela Proposição 2.7.3, o polinômio P é um múltiplo de $J_{m\wedge n}^{(q-2,|m-n|)}$ e, consequentemente, existe uma constante M tal que

$$f(\xi) = Me^{i(m-n)\varphi}\cos^{|m-n|}\theta\, J_{m\wedge n}^{(q-2,|m-n|)}(\cos 2\theta).$$

Portanto, o item (3) vale.
A prova de (3) para (4) começa usando novamente a decomposição de $\xi \in \Omega_{2q}$ como em (3.19). Então,

$$R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi, \omega \rangle) = R_{m,n}^{q-2}(\cos\theta\, e^{i\varphi}) = e^{i(m-n)\varphi}\cos^{|m-n|}\theta\, J_{m\wedge n}^{(q-2,|m-n|)}(\cos 2\theta).$$

Devido a hipótese, temos, então que

$$f(\xi) = MR_{m,n}^{q-2}(\langle \xi, \omega \rangle).$$

Em particular,

$$f(\omega) = MR_{m,n}^{q-2}(\langle \omega, \omega \rangle) = MR_{m,n}^{q-2}(1) = M.$$

Portanto, o item (4) está provado.
Finalmente, assuma que $f(\xi) = f(\omega)R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi, \omega \rangle)$, $\xi \in \Omega_{2q}$. Então,

$$f(\rho\xi) = f(\omega)\,R_{m,n}^{q-2}(\langle \rho\xi, \omega \rangle) = f(\omega)\,R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi, \rho^*\omega \rangle) = f(\xi), \quad \xi \in \Omega_{2q},\, \rho \in O_\omega(2q).$$

Assim, o polinômio f é ω-zonal. ∎

Para inteiros não negativos m e n fixados, observamos que o último item da proposição acima é uma caracterização dos harmônicos esféricos zonais como elementos únicos em $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$.

A seguir enunciamos e provamos a Fórmula da Adição.

Teorema 3.5.1 (Fórmula da Adição) *Seja q um inteiro maior que* 1. *Se B é a base* (3.16)*, então*

$$R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi, \omega \rangle) = \frac{2\pi^q}{N(m,n)(q-1)!}\sum_{k=1}^{N(m,n)} Y_{m,n}^k(\xi)\overline{Y_{m,n}^k(\omega)}, \quad \xi, \omega \in \Omega_{2q}.$$

Demonstração: Seja $\rho \in O(2q)$ e considere a base $B = \left\{Y_{m,n}^1, \ldots, Y_{m,n}^{N(m,n)}\right\}$ de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. Agora, definamos a função $K : \Omega_{2q} \times \Omega_{2q} \to \mathbb{C}$, onde

$$K(\xi,\omega) = \sum_{j=1}^{N(m,n)} Y_{m,n}^j(\xi)\overline{Y_{m,n}^j(\omega)}, \quad \xi,\omega \in \Omega_{2q}. \tag{3.22}$$

Como no final da prova do Lema 3.5.1, concluimos que

$$K(\rho\xi,\rho\omega) = K(\xi,\omega), \quad \xi \in \Omega_{2q}.$$

Em particular, as funções $\xi \in \Omega_{2q} : \overline{K(.,\omega)} \mapsto \overline{K(\xi,\omega)} \in \mathbb{C}$ e $w \in \Omega_{2q} : K(\xi,\cdot) \mapsto K(\xi,w) \in \mathbb{C}$ são ω-zonal e ξ-zonal, respectivamente. Como $\overline{K(\cdot,\omega)} \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$, pela Proposição 3.5.2,

$$K(\xi,\omega) = K(\omega,\omega)\overline{R_{m,n}^{q-2}(\langle\xi,\omega\rangle)}, \quad \xi \in \Omega_{2q}. \tag{3.23}$$

Similarmente,

$$K(\xi,\omega) = K(\xi,\xi)\overline{R_{m,n}^{q-2}(\langle\xi,\omega\rangle)}, \quad \xi \in \Omega_{2q}.$$

Logo, $K(\omega,\omega) = K(\xi,\xi)$, implicando que K é constante sobre a diagonal de Ω_{2q}^2. Como B é base ortonormal,

$$K(\omega,\omega)\frac{2\pi^q}{(q-1)!} = \int_{\Omega_{2q}} \sum_{j=1}^{N(m,n)} Y_{m,n}^j(\omega)\overline{Y_{m,n}^j(\omega)}d\sigma_q(\omega) = N(m,n). \tag{3.24}$$

Finalmente, a fórmula em questão resulta das equações (3.22), (3.23) e (3.24), terminando a prova do teorema. ∎

3.6 Uma aplicação da Fórmula de Adição

Nesta seção, estudaremos uma aplicação simples, porém interessante para a Fórmula da Adição. As notações e resultados das seções anteriores serão novamente utilizados.

Seja $\omega \in \Omega_{2q}$ e considere o funcional linear limitado $f \in L^2(\Omega_{2q}, d\sigma_q) \mapsto f(\omega) \in \mathbb{C}$. Como a expressão

$$\langle f,g\rangle_2 = \int_{\Omega_{2q}} f(z)\overline{g(z)}d\sigma_q(z)$$

é um produto interno sobre $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $Z_{m,n}^{\omega} \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ tal que

$$Y(\omega) = \int_{\Omega_{2q}} Y(z)\overline{Z_{m,n}^{\omega}(z)}d\sigma_q(z). \tag{3.25}$$

Destacamos na proposição a seguir duas propriedades de $Z^{\omega}_{m,n}$.

Proposição 3.6.1 *Seja* ω *um elemento de* Ω_{2q}. *Então:*
1. $Z^{\omega}_{m,n}(z) = Z^{\omega}_{m,n}(\omega)R^{q-2}_{m,n}(\langle z,\omega\rangle)$, $z \in \Omega_{2q}$;
2. $Z^{\rho\omega}_{m,n}(\rho z) = Z^{\omega}_{m,n}(z)$, $z \in \Omega_{2q}$, $\rho \in O(2q)$. *Em particular, o polinômio* $Z^{\omega}_{m,n}$ *é* ω*-zonal.*

Demonstração: Para provar (1), primeiro usamos Álgebra Linear para escrever

$$Z^{\omega}_{m,n}(z) = \sum_{j=1}^{N(m,n)} \langle Z^{\omega}_{m,n}, Y^{j}_{m,n}\rangle Y^{j}_{m,n}(z) = \sum_{j=1}^{N(m,n)} Y^{j}_{m,n}(z)\overline{Y^{j}_{m,n}(\omega)}, \quad z \in \Omega_{2q}.$$

Consequentemente, do Teorema da Adição, seguem as igualdades abaixo

$$Z^{\omega}_{m,n}(\omega) = \frac{N(m,n)(q-1)!}{2\pi^q}R^{q-2}_{m,n}(\langle \omega,\omega\rangle) = \frac{N(m,n)(q-1)!}{2\pi^q},$$

implicando que

$$Z^{\omega}_{m,n}(z) = \frac{N(m,n)(q-1)!}{2\pi^q}R^{q-2}_{m,n}(\langle z,\omega\rangle) = Z^{\omega}_{m,n}(\omega)R^{q-2}_{m,n}(\langle z,\omega\rangle), \quad z \in \Omega_{2q},$$

finalizando a primeira parte da prova.
Para provar (2) suponhamos que $Y \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. Pela Proposição 2.9.1, para cada $\rho \in O(2q)$, $Y \circ \rho \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. Por (3.25),

$$\int_{\Omega_{2q}} Y(z)\overline{Z^{\rho\omega}_{m,n}(z)}d\sigma_q(z) = (Y \circ \rho)(\omega) = \int_{\Omega_{2q}} Y(\rho z)\overline{Z^{\omega}_{m,n}(z)}d\sigma_q(z),\ \rho \in O(2q).$$

Agora, devido à invariância da medida $d\sigma_q$ por elementos de $O(2q)$ a última integral torna-se

$$\int_{\Omega_{2q}} Y(z)\overline{Z^{\omega}_{m,n}(\rho^{-1}z)}d\sigma_q(z).$$

Assim,

$$\int_{\Omega_{2q}} Y(z)\overline{Z^{\rho\omega}_{m,n}(z)}d\sigma_q(z) = \int_{\Omega_{2q}} Y(z)\overline{Z^{\omega}_{m,n}(\rho^{-1}z)}d\sigma_q(z).$$

Como $Z^{\omega}_{m,n}$ é único satisfazendo a equação anterior,

$$Z^{\rho\omega}_{m,n}(z) = Z^{\omega}_{m,n}(\rho^{-1}z), \quad z \in \Omega_{2q}, \quad \rho \in O(2q),$$

o que conclui a prova da proposição. ■

Encerramos esta seção mostrando que os harmônicos esféricos ω-zonais também são múltiplos de $Z^{\omega}_{m,n}$.

Proposição 3.6.2 *Seja* ω *um elemento de* Ω_{2q}. *Então, o polinômio* $Y \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ *é* ω*-zonal* *se e somente se* $Y = c_{m,n}(\omega)Z^{\omega}_{m,n}$*, para alguma constante* $c_{m,n}(\omega)$.

Demonstração: Suponhamos que Y é um harmônico esférico ω-zonal de bigrau (m,n). Pela Proposição 3.5.1, existe uma função $g : D[1] \mapsto \mathbb{C}$ tal que $Y(z) = g(\langle z,\omega\rangle)$, $z \in \Omega_{2q}$. Então, pela Proposição 3.6.1,

$$\int_{\Omega_{2q}} Y(z)\overline{Z^{\omega}_{k,l}(z)}\,d\sigma_q(z) \quad = \quad \int_{\Omega_{2q}} g(\langle z,\omega\rangle)Z^{\omega}_{k,l}(\omega)\overline{R^{q-2}_{k,l}(\langle z,\omega\rangle)}d\sigma_q(z).$$

A decomposição do elemento de superfície $d\sigma_q$ como em (2.30) implica que a integral à direita da igualdade acima equivale a

$$\frac{2\pi^{q-1}}{(q-2)!}Z^{\omega}_{k,l}(\omega)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} g(\cos\theta\, e^{i\varphi})\overline{R^{q-2}_{k,l}(\cos\theta e^{i\varphi})}\cos\theta\,\mathrm{sen}^{2q-3}\theta d\theta d\varphi.$$

Recordando o elemento de superfície sobre $D[1]$ como em (3.6), vemos que a mudança de variáveis $r = \cos\theta$ transforma a última integral em

$$\frac{2\pi^{q}}{(q-1)!}Z^{\omega}_{k,l}(\omega)\int_{D[1]} g(\eta)\overline{R^{q-2}_{k,l}(\eta)}d\mathfrak{m}_{q-2}(\eta).$$

Então,

$$\int_{\Omega_{2q}} Y(z)\overline{Z^{\omega}_{k,l}(z)}\,d\sigma_q(z) = \frac{2\pi^{q}}{(q-1)!}Z^{\omega}_{k,l}(\omega)\int_{D[1]} g(\eta)\overline{R^{q-2}_{k,l}(\eta)}d\mathfrak{m}_{q-2}(\eta) = 0, \quad (k,l) \neq (m,n).$$

Devido a completitude de $\{R^{q-2}_{k,l} : k,l = 0,1,\ldots\}$ em $L^2(D[1], d\mathfrak{m}_{q-2})$, segue que $g = g(1)R^{q-2}_{m,n}$. Então, a igualdade do enunciado da proposição vale para $c_{m,n}(\omega)$ definido por

$$Z_{m,n}(\omega)c_{m,n}(\omega) = g(1) = Y(\omega).$$

A recíproca é consequência direta da proposição anterior. ∎

3.7 Funções generalizadas sobre o disco

Nesta seção, estudamos uma classe de funções no disco representadas por um integral de Laplace que denominamos aqui de funções generalizadas pelo fato dos polinômios no disco surgirem como casos particulares destas.

Os conceitos e resultados abordados nesta parte tem como base o artigo ([20]). A menos de especificação em contrário, nesta seção α é um número real positivo, m, n, k e l são inteiros não negativos.

O primeiro lema desta seção pode ser encarado como uma espécie de inversão da primeira igualdade da Proposição 3.1.2 ([3]).

Lema 3.7.1 *Se μ e ν são inteiros não negativos, então*

$$\eta^{\mu}\overline{\eta}^{\nu} = \sum_{j=0}^{\mu\wedge\nu} c(\mu,\nu,j,\alpha) R^{\alpha-1}_{\mu-j,\nu-j}(\eta), \quad \eta \in D[1],$$

onde

$$c(\mu,\nu,j,\alpha) = \frac{\mu!\nu!\Gamma(\alpha+\mu-j)\Gamma(\alpha+\nu-j)(\alpha+\mu+\nu-2j)}{j!(\mu-j)!(\nu-j)!\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\mu+\nu-j+1)}.$$

O lema anterior é a principal ferramenta para a prova do teorema abaixo que é uma integral de Laplace para polinômios no disco.

Teorema 3.7.1 *Se α é um parâmetro positivo, então*

$$R^{\alpha}_{m,n}(z) = \int_{D[1]} \left(z + \sqrt{1-|z|^2}\,\eta\right)^m \left(\overline{z} - \sqrt{1-|z|^2}\,\overline{\eta}\right)^n d\mathfrak{m}_{\alpha-1}(\eta). \tag{3.26}$$

Demonstração: Usando expansão binomial, o integrando da equação (3.26) torna-se

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} \binom{m}{\mu}\binom{n}{\nu}(-1)^{\nu} z^{m-\mu}\overline{z}^{n-\nu}(1-|z|^2)^{(\mu+\nu)/2}\eta^{\mu}\overline{\eta}^{\nu}. \tag{3.27}$$

Substituímos $\eta^{\mu}\overline{\eta}^{\nu}$ pela expressão dada no Lema 3.7.1 e, em seguida, integramos a expressão obtida sobre $D[1]$ em relação ao elemento $d\mathfrak{m}_{\alpha-1}$. Então, a ortogonalidade entre $R^{\alpha-1}_{\mu-j,\nu-j}$ e $R^{\alpha-1}_{0,0} = 1$, conforme o Teorema 3.2.1, mostra que a integral à direita de (3.26) é

$$\sum_{k=0}^{m\wedge n} \frac{(-1)^k m!n!c(k,k,k,\alpha)C(0,0,\alpha-1)}{(m-k)!(n-k)!k!k!} z^{m-k}\overline{z}^{n-k}(1-|z|^2)^k,\ z \in D[1].$$

Finalmente, simplificamos os coeficientes da soma anterior para obter a expansão de $R^{\alpha}_{m,n}$ como em (3.4). Assim, o teorema está provado. ■

O teorema precedente motiva a seguinte definição de uma classe de funções no disco.

Definição 3.7.1 *A função generalizada no disco associada ao parâmetro real positivo α e aos inteiros não negativos m,n,k,l é dada por*

$$G^{\alpha}_{m,n,k,l}(z) := \int_{D[1]} \left(z + \sqrt{1-|z|^2}\,\eta\right)^m \left(\overline{z} - \sqrt{1-|z|^2}\,\overline{\eta}\right)^n \overline{R^{\alpha-1}_{k,l}(\eta)}\, d\mathfrak{m}_{\alpha-1}(\eta), \quad z \in D[1].$$

Na proposição a seguir, cotamos algumas propriedades para $G^{\alpha}_{m,n,k,l}$. Em especial, mostramos que $G^{\alpha}_{m,n,k,l}$, em certos casos, se reduz a um polinômio no disco.

Proposição 3.7.1 *São válidas as seguintes afirmações:*

1. $G^{\alpha}_{m,n,0,0} = R^{\alpha}_{m,n}$;

2. *Se* $\theta \in [0,2\pi)$, *então* $G^{\alpha}_{m,n,k,l}(e^{i\theta}z) = e^{i(m-k-n+l)\theta}G^{\alpha}_{m,n,k,l}(z)$, $z \in D[1]$;

3. *Se* $(k,l) \neq (0,0)$, *então* $G^{\alpha}_{m,n,k,l}(z) = 0$, $z \in \Omega_2$.

Demonstração: O item (1) é consequência direta do Teorema 3.7.1.

Para provar (2), seja $\theta \in [0,2\pi)$. Notamos que

$$G^{\alpha}_{m,n,k,l}(e^{i\theta}z) = \int_{D[1]} e^{i(m-n)\theta}\left(z+\sqrt{1-|z|^2}e^{-i\theta}\eta\right)^m\left(\overline{z}-\sqrt{1-|z|^2}\,\overline{e^{-i\theta}\eta}\right)^n\overline{R^{\alpha-1}_{k,l}(\eta)}\,d\mathfrak{m}_{\alpha-1}(\eta).$$

Como $d\mathfrak{m}_{\alpha}$ é invariante por rotação e $R^{\alpha-1}_{k,l}(e^{i\theta}\eta) = e^{i(k-l)\theta}R^{\alpha-1}_{k,l}(\eta)$, a afirmação (1) está provada.

Quando $z \in \Omega_2$, a ortogonalidade dos polinômios no disco mostra que

$$G^{\alpha}_{m,n,k,l}(z) = z^m\overline{z}^n\int_{D[1]}\overline{R^{\alpha-1}_{k,l}(\eta)}\,d\mathfrak{m}_{\alpha-1}(\eta) = 0, \quad (k,l) \neq (0,0),$$

verificando (3). ∎

Mostramos a seguir que fixado (m,n), a função $G^{\alpha}_{m,n,k,l}$ é nula para infinitos pares (k,l).

Proposição 3.7.2 *Se* $k > m$ *e* $l > n$, *então* $G^{\alpha}_{m,n,k,l}(z) = 0$, $z \in D[1]$.

Demonstração: Assuma que k e l são inteiros positivos tais que $k > m$ e $l > n$. Por (3.27),

$$G^{\alpha}_{m,n,k,l}(z) = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{m}{\mu}\binom{n}{\nu}(1-|z|^2)^{(\mu+\nu)/2}z^{m-\mu}\overline{z}^{n-\nu}G^{\alpha}_{\mu,\nu,k,l}(0), \tag{3.28}$$

onde

$$G^{\alpha}_{\mu,\nu,k,l}(0) = (-1)^{\nu}\int_{D[1]}\eta^{\mu}\overline{\eta}^{\nu}\overline{R^{\alpha-1}_{k,l}(\eta)}d\mathfrak{m}_{\alpha-1}(\eta), \quad (\mu,\nu) \in \{0,\dots,m\}\times\{0,\dots,n\}.$$

Usando o Lema 3.7.1 e o Teorema 3.2.1 vemos, então, que

$$G^{\alpha}_{\mu,\nu,k,l}(0) = (-1)^{\nu}C(k,l,\alpha-1)\sum_{j=0}^{\mu\wedge\nu}c(\mu,\nu,j,\alpha)\delta_{\mu-j,k}\delta_{\nu-j,l}, \tag{3.29}$$

onde $C(k,l,\alpha-1)$ foi definida naquele teorema. Assim, se $\mu < k$ ou $\nu < l$, então $G^{\alpha}_{\mu,\nu,k,l}(0) = 0$, provando a proposição. ∎

Na sequência, introduzimos, a partir das constantes $C(k,l,\alpha-1)$ e $c(\mu,\nu,j,\alpha)$, a constante

$$D(m,n,k,l,\mu,\nu,j,\alpha) := \frac{(-1)^{\nu}m!n!c(\mu,\nu,j,\alpha)C(k,l,\alpha-1)}{\mu!\nu!(m-\mu)!(n-\nu)!}.$$

No teorema abaixo, principal resultado desta seção, mostramos que $G^{\alpha}_{m,n,k,l}$ é o produto de $(1-|z|^2)^{(k+l)/2}$ por $R^{\alpha+k+l}_{m-k,n-l}$.

Teorema 3.7.2 *Se* $(k,l) \in \{0,1,\ldots,m\} \times \{0,1,\ldots,n\}$, *então*

$$d(m,n,k,l,\alpha)G^{\alpha}_{m,n,k,l}(z) = (1-|z|^2)^{(k+l)/2}R^{\alpha+k+l}_{m-k,n-l}(z), \quad z \in D[1], \tag{3.30}$$

onde

$$d(m,n,k,l,\alpha) := \frac{(-1)^l(m-k)!(n-l)!}{m!n!}\frac{\Gamma(\alpha+k+l+1)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Demonstração: Assuma que $z \in D[1]$. A constante $G^{\alpha}_{\mu,\nu,k,l}(0)$ como em (3.29), substituída em (3.28), implica na seguinte expressão para $G^{\alpha}_{m,n,k,l}(z)$,

$$G^{\alpha}_{m,n,k,l}(z) = \sum_{\mu=k}^{m}\sum_{\nu=l}^{n}\sum_{j=0}^{\mu\wedge\nu} D(m,n,k,l,\mu,\nu,j,\alpha)\,\delta_{\mu-j,k}\,\delta_{\nu-j,l}(1-|z|^2)^{(\mu+\nu)/2}z^{m-\mu}\bar{z}^{n-\nu}.$$

Usando a definição da função delta de Kronecker,

$$G^{\alpha}_{m,n,k,l}(z) = (1-|z|^2)^{(k+l)/2}\sum_{j=0}^{(m-k)\wedge(n-l)} D(m,n,k,l,k+j,l+j,j,\alpha)(1-|z|^2)^j z^{m-k-j}\bar{z}^{n-l-j}.$$

Em particular, com auxílio da Proposição 3.7.1, temos que

$$R^{\alpha+k+l}_{m-k,n-l}(z) = \sum_{j=0}^{(m-k)\wedge(n-l)} D(m-k,n-l,0,0,j,j,j,\alpha+k+l)z^{m-k-j}\bar{z}^{n-l-j}(1-|z|^2)^j.$$

Uma vez que os coeficientes da soma acima satisfazem a equação

$$d(m,n,k,l,\alpha)D(m,n,k,l,k+j,l+j,j,\alpha) = D(m-k,n-l,0,0,j,j,j,\alpha+k+l),$$

concluímos que

$$R^{\alpha+k+l}_{m-k,n-l}(z) = d(m,n,k,l,\alpha)\sum_{j=0}^{(m-k)\wedge(n-l)} D(m,n,k,l,k+j,l+j,j,\alpha)z^{m-k-j}\bar{z}^{n-l-j}(1-|z|^2)^j,$$

provando o teorema. ∎

O corolário abaixo exibe propriedades de conjugação complexa e paridade para $G^{\alpha}_{m,n,k,l}$.

Corolário 3.7.1 *Se* $z \in D[1]$, *então valem as seguintes afirmações:*
(1) $\overline{G^{\alpha}_{m,n,k,l}(z)} = (-1)^{k+l}G^{\alpha}_{n,m,l,k}(z)$;
(2) $G^{\alpha}_{m,n,k,l}(-z) = (-1)^{m+n-k-l}G^{\alpha}_{m,n,k,l}(z)$;
(3) $G^{\alpha}_{m,n,k,l}(0) = \frac{(-1)^n m!n!\Gamma(\alpha+1)}{(m-k)!\Gamma(\alpha+k+n+1)}\delta_{m-k,n-l}$.

Demonstração: A prova é imediata a partir da associação entre a Proposição 3.1.6 e a equação (3.30). ■

Assim como $R^{\alpha}_{m,n}$, as funções $G^{\alpha}_{m,n,k,l}$ são expressas em termos de monômios, conforme a proposição a seguir.

Proposição 3.7.3 *Se* $(k,l) \in \{0,1,\ldots,m\} \times \{0,1,\ldots,n\}$, *então*

$$G^{\alpha}_{m,n,k,l}(z) = (1-z\bar{z})^{(k+l)/2} \sum_{j=0}^{(m-k)\wedge(n-l)} a(m,n,k,l,j,\alpha) z^{m-k-j}\bar{z}^{n-l-j},$$

onde

$$a(m,n,k,l,j,\alpha) := \frac{(-1)^{j+l} m! n!}{j!(m-k-j)!(n-l-j)!} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+m+n+1-j)}{\Gamma(\alpha+l+m+1)\Gamma(\alpha+k+n+1)}.$$

Demonstração: A prova começa usando a Proposição 3.1.2 para encontrar a seguinte expansão para $R^{\alpha+k+l}_{m-k,n-l}(z)$

$$\frac{(m-k)!(n-l)!\Gamma(\alpha+k+l+1)}{\Gamma(\alpha+l+m+1)\Gamma(\alpha+k+n+1)} \sum_{j=0}^{(m-k)\wedge(n-l)} (-1)^j \frac{\Gamma(m+n+\alpha+1-j)}{j!(m-k-j)!(n-l-j)!} z^{m-k-j}\bar{z}^{n-l-j}.$$

Agora, cálculo direto mostra que

$$\frac{(m-k)!(n-l)!\Gamma(\alpha+k+l+1)}{\Gamma(\alpha+l+m+1)\Gamma(\alpha+k+n+1)} \frac{(-1)^j\Gamma(m+n+\alpha+1-j)}{j!(m-k-j)!(n-l-j)!} \frac{1}{d(m,n,k,l,\alpha)} = a(m,n,k,l,j,\alpha).$$

Logo, a igualdade do enunciado segue da equação (3.30). ■

Apresentamos na proposição a seguir uma fórmula de adição para funções generalizadas.

Proposição 3.7.4 *(***Fórmula de Adição Generalizada***)* *Se* $(k,l) \in \{0,1,\ldots m\} \times \{0,1,\ldots,n\}$ *e* $\alpha = q-2-k-l$, *então*

$$G^{\alpha}_{m,n,k,l}(\langle\xi,\zeta\rangle) = \frac{2\pi^q (1-|\langle\xi,\zeta\rangle|^2)^{(k+l)/2}}{(q-1)!N(q;m-k,n-l)d(m,n,k,l,\alpha)} \sum_{j=1}^{N(q;m-k,n-l)} Y^j_{m-k,n-l}(\xi)\overline{Y^j_{m-k,n-l}(\zeta)}, \ \xi,\zeta \in \Omega_{2q}.$$

Demonstração: Suponhamos $\alpha = q-2-k-l$. Então, pelo Teorema 3.5.1, segue que

$$R^{\alpha+k+l}_{m-k,n-l}(\langle\xi,\zeta\rangle) = \frac{2\pi^q}{(q-1)!N(q;m-k,n-l)} \sum_{j=1}^{N(q;m-k,n-l)} Y^j_{m-k,n-l}(\xi)\overline{Y^j_{m-k,n-l}(\zeta)}, \quad \xi,\zeta \in \Omega_{2q}.$$

Agora a equação (3.30) completa a prova. ■

Finalizamos a dissertação, usando as expansões da Proposição 3.1.2 e a equação (3.30) para encontrar expressões específicas de $G^{\alpha}_{m,n,k,l}$ e $R^{k+l+1}_{m,n}$ quando os parâmetros associados assumem certos valores. Na tabela abaixo estão exemplos destes polinômios para dois conjuntos de parâmetros: $\{\alpha = 1, m = 2, n = 3\}$ e $\{\alpha = 1, m = 1, n = 2\}$.

(k,l)	$R^{k+l+1}_{2-k,3-l}$	$G^{1}_{2,3,k,l}$	$R^{k+l+1}_{1-k,2-l}$	$G^{1}_{1,2,k,l}$
$(0,0)$	$5z^2\bar{z}^3 - 5z\bar{z}^2 + \bar{z}$	$5z^2\bar{z}^3 - 5z\bar{z}^2 + \bar{z}$	$2z\bar{z}^2 - \bar{z}$	$2z\bar{z}^2 - \bar{z}$
$(0,1)$	$\frac{5}{2}z^2\bar{z}^2 - \frac{5}{3}z\bar{z} + \frac{1}{6}$	$(1-z\bar{z})^{1/2}\left(-\frac{15}{4}z^2\bar{z}^2 + \frac{5}{2}z\bar{z} - \frac{1}{4}\right)$	$1 - \frac{4}{3}z\bar{z}$	$(1-z\bar{z})^{1/2}(1 - \frac{4}{3}z\bar{z})$
$(0,2)$	$\frac{3}{2}z^2\bar{z} - \frac{1}{2}z$	$2z^2\bar{z} - \frac{3}{2}z^3\bar{z}^2 - \frac{z}{2}$	z	$\frac{1}{3}\left(z - z^2\bar{z}\right)$
$(0,3)$	z^2	$-\frac{z^2}{4}(1-z\bar{z})^{3/2}$		
$(1,0)$	$2z\bar{z}^3 - \bar{z}^2$	$(1-z\bar{z})^{1/2}(2z\bar{z}^3 - \bar{z}^2)$	$\bar{z}^2$	$\frac{1}{2}\bar{z}^2(1-z\bar{z})^{1/2}$
$(1,1)$	$-\frac{3}{2}z\bar{z}^2 + \frac{1}{2}\bar{z}$	$-\frac{3}{2}z^2\bar{z}^3 + \frac{1}{2}z\bar{z}^2 + \frac{3}{2}z\bar{z} + \frac{\bar{z}}{2}$	$\bar{z}$	$\frac{1}{3}\left(z\bar{z}^2 - \bar{z}\right)$
$(1,2)$	$\frac{6}{5}z\bar{z} - \frac{1}{5}$	$(1-z\bar{z})^{3/2}(\frac{3}{5}z\bar{z} - \frac{1}{10})$	1	$\frac{1}{12}(1-z\bar{z})^{3/2}$
$(1,3)$	z	$\frac{1}{5}z^2\bar{z} - \frac{1}{10}z^3\bar{z}^2 - \frac{z}{10}$		
$(2,0)$	$\bar{z}^3$	$\frac{1}{3}\bar{z}^3 - \frac{1}{3}z\bar{z}^4$		
$(2,1)$	$\bar{z}^2$	$\frac{-1}{4}(1-z\bar{z})^{3/2}\bar{z}^2$		
$(2,2)$	$\bar{z}$	$\frac{1}{10}z^2\bar{z}^3 - \frac{1}{5}z\bar{z}^2 + \frac{1}{10}\bar{z}$		
$(2,3)$	1	$-\frac{1}{60}(1-z\bar{z})^{5/2}$		

O leitor interessado no estudo de propriedades adicionais de $G^{\alpha}_{m,n,k,l}$ tais como ortogonalidade e relações de recorrência, recomendamos a referência ([20]).

Bibliografia

[1] Andrews, G.E., Askey R., Roy R. Special Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] Azevedo, D., Menegatto, V.A. *Eigenvalue decay of integral operators generated by power series-like kernels*, Math. Inequal. Appl., 17(2), 693-705, 2014.

[3] Boyd, J.N. Orthogonal polynomials on the disc, Thesis, University of Virginia, 1972.

[4] Boyd, J.N., Raychowdhury P.N. *Zonal harmonic functions from two-dimensional analogs of Jacobi polynomials,* Applic. Anal. 16(3), 243-259, 1983.

[5] Chen, D., Menegatto, V.A., Sun, X. *A necessary and sufficient condition for strictly positive definite functions on spheres*. Proc. Amer. Math. Soc. 131(9), 2733-2740, 2003.

[6] Chihara, T.S. An Introduction to Orthogonal Polynomials. Serie Mathematics and its Applications, v. 13, Gordon and Breach, New York, 1978.

[7] Dunkl, C.F., Xu, Y. Orthogonal Polynomials of Several Variables, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[8] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F.G. Higher Transcendental Functions, v. II. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953.

[9] Ferreira, J.C. Decaimento dos autovalores de operadores integrais gerados por núcleos positivos definidos, Dissertação de Mestrado em Matemática, ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

[10] Ha, C.W. *Eigenvalues of differentiable positive definite kernels*, SIAM J. Math. Anal. 17(2), 415-419, 1996.

[11] Jordão, T., Menegatto, V.A. *Jackson kernels: a tool for analyzing the decay of eigenvalue sequences of integral operators on the sphere*, Math. Ineq. Appl. 18(4), 1483-1500, 2015.

[12] Koornwinder, T.H. *The addition formula for Jacobi Polynomials, II. The Laplace type integral representation and the product formula*, Math. Centrum Amsterdam, Report TW133, 1972.

[13] Koornwinder, T.H. *The addition formula for Jacobi Polynomials, III*, Completion of the proof, Math. Centrum Amsterdam, Report TW135, 1972.

[14] Menegatto, V.A., Oliveira, C.P. *Orthogonal basis for spaces of complex spherical harmonics*, Appl. Anal., 31(1), 113-132, 2005.

[15] Menegatto, V.A., Peron, A.P. *Positive definite kernels on complex spheres*, J. Math. Anal. Appl., 254(1), 219-232, 2001.

[16] Menegatto, V.A. *Differentiability of bizonal positive definite kernels on complex spheres*, J. Math. Anal. Appl., 412(1), 189-199, 2014.

[17] Müller, C. Analysis of spherical symmetries in Euclidian spaces. Applied Mathematical Science, 129, Springer-Verlag, New York, 1998.

[18] Oliveira, C.P., Buescu, J. *Mixed integral identities involving unit spheres and balls in complex context*, Internat. J. Math., 26(14)(11 pages), 2015.

[19] Oliveira, C.P. Aproximação na esfera unitária de $\mathbb{C}^q$, $q \geq 2$. Tese de doutorado em Matemática, ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

[20] Oliveira, C.P. *Generalized disk polynomial via Laplace integral representation*, Integral Transforms Spec. Funct., 26(1), 2015.

[21] Oliveira, E.C. Funções especiais com aplicações, 2 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.

[22] Olver, P.J. Applications of Lie Groups to Differential eqnarrays, 2 ed. Springer, London, 1994.

[23] Peron, A.P. Funções positivas definidas para interpolação em esferas complexas. Tese de doutorado em Matemática, ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

[24] Rainville, E.D. Special Functions. The Macmillan Co., New York, 1960.

[25] Rodrigues, B.O. *De l'attraction des sphéroïdes*, Correspondence sur l'École Impériale Polytechnique 3(3): p. 361-385, 1816.

[26] Souza, M.A.D. Analogia entre propriedades de alguns polinômios ortogonais em uma e em várias variáveis. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2014.

[27] Szegö, G. Orthogonal polynomials. v. 23, 4th ed. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence, RI, 1975.

[28] Torre, A. *Generalized Zernike or disc polynomials: An application in quantum optics*, J. Comput. Appl. Math. 222, 622-644, 2008.

[29] Wünsche, A. *Generalized Zernike or disc polynomials*, J. Comput. Appl. Math. 174, 135-163, 2005.

[30] Zernike, F. Physica 1, 689, 1934.

[31] Yoshida, M. Hypergeometric Functions. My Love, Springer Fachmedien Wiesbaden, 1997.

Índice