



Ministério da Educação  
Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI  
Criada pela Lei nº 10.435, de 24 de abril de 2002

**Programa de Pós-Graduação em Física**

**WALISON YAN APARECIDO DA SILVA**

**ACOPLAMENTO PARA O CAMPO ESCALAR DO TIPO  
CORRENTE AO LONGO DE UMA FRONTEIRA**

**Itajubá-MG  
2023**





Ministério da Educação  
Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI  
Criada pela Lei nº 10.435, de 24 de abril de 2002

**Instituto de Física e Química - IFQ**

**WALISON YAN APARECIDO DA SILVA**

**ACOPLAMENTO PARA O CAMPO ESCALAR DO TIPO  
CORRENTE AO LONGO DE UMA FRONTEIRA**

**Dissertação de Mestrado**

**Orientador: Prof. Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel**

**Itajubá-MG  
2023**



## **Agradecimentos**

Agradeço ao professor Fabrício Augusto Barone Rangel, pela dedicação, competência e paciência no trabalho desenvolvido.

A minha Companheira Noemí Barbosa, pela motivação e ajuda neste processo.

A minha mãe, Maria Celi, pela motivação e investimento em toda a minha graduação, sem a qual seria impossível terminar essa etapa.

*“O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um vasto oceano. O arranjo maravilhoso e a harmonia do universo não poderiam senão sair de um ser onisciente e onipotente.”*

–Issac Newton

## Resumo

Nessa Dissertação fazemos inicialmente um breve estudo sobre o campo escalar complexo sob ação de um potencial externo do tipo delta de Dirac concentrado ao longo de um plano. Consideramos o campo complexo com massa e fazemos uma abordagem com o campo estruturado em sua forma matricial. Para esse caso, obtemos a função de Green e a interação entre o potencial e uma fonte para o campo, que faz o papel do que viria a ser uma carga no eletromagnetismo. Os resultados obtidos não são originais, mas servem para introduzir o leitor ao estudo de campos sob a ação de potenciais externos do tipo delta de Dirac (assunto principal da Dissertação) e a abordagem do campo escalar complexo na sua forma matricial. Tal abordagem é utilizada no restante do trabalho.

Posteriormente apresentamos um estudo sobre o campo escalar complexo interagindo com um potencial externo, em um acoplamento do tipo corrente. Estudamos a interação que surge entre o potencial e fontes estacionárias pontuais para o campo escalar. Esses são resultados originais, até onde sabemos, e apresentam características bem interessantes, ainda não observadas em nenhum outro modelo do tipo na literatura. Um dos motivos para isso decorre do fato de que o acoplamento considerado não é isotrópico, havendo distinção entre os dois lados do plano onde o potencial se concentra.

Além da descrição de sistemas de matéria condensada, onde modelos de campos escalares são frequentemente utilizados, acreditamos que os resultados obtidos também possam ser úteis no estudo de modelos tipo MIT para campos bosônicos, onde não o campo, mas sua corrente associada é confinada.

Alguns aspectos do modelo ainda devem ser explorados. Esperamos em breve obter resultados adicionais aqueles apresentados nesse texto e apresentar todos em forma de artigo científico a ser submetido para publicação.

**Palavra-Chave:** Campo escalar, potencial externo, acoplamento anisotrópico.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Campo de Klein-Gordon</b>	<b>4</b>
2.1	Campo de Klein-Gordon na presença de fontes externas . . . . .	4
2.2	Campo de Klein-Gordon na presença de um potencial externo . . . . .	7
2.3	Campo de Klein-Gordon na presença um potencial externo tipo delta de Dirac . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Campo de Klein-Gordon complexo</b>	<b>13</b>
3.1	Campo de Klein-Gordon complexo na forma matricial . . . . .	14
3.2	Campo de Klein-Gordon na Forma Matricial na presença de um potencial externo . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Acoplamento tipo corrente para o campo escalar com potencial externo espacialmente localizado</b>	<b>22</b>
4.1	Interação entre o potencial e fontes externas . . . . .	28
4.2	Sistema com duas cargas na presença do potencial . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Conclusões, perspectivas futuras e comentários finais</b>	<b>39</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Teorias de campos são as melhores ferramentas que dispomos até o momento para estabelecer uma descrição das partículas fundamentais e suas interações. Além disso, teorias de campos podem ser empregadas para descrever sistemas físicos de forma efetiva (não fundamental), inclusive aqueles onde ocorrem interações efetivas. Nesse cenário, podemos destacar os modelos efetivos para a dinâmica de campos eletromagnéticos no interior de meios materiais ou na presença de fronteiras materiais.

A descrição da dinâmica de campos na presença de fronteiras materiais encontra uma série de dificuldades, muitas das quais são superadas com o auxílio de modelos fenomenológicos. Dentre esses destacamos aqui aqueles onde se faz uso de potenciais externos espacialmente localizados (aqui nos referimos a potenciais externos como funções prescritas, ou seja, sem dinâmica, que se acoplam quadraticamente com o campo na lagrangeana). Esse tipo de potencial costuma ser estabelecido com o uso de distribuições, como a função delta de Dirac e a função degrau de Heaviside. Podemos citar inúmeros exemplos desse tipo de modelo, mas destacamos aqui um que descreve a presença de dielétricos uniaxiais e pode recuperar o caso de espelhos semi-transparentes para o campo eletromagnético [4, 5], um que descreve fronteiras materiais com propriedades magnetoelétricas [6], um estabelecido para o campo escalar, que recupera a condição de Dirichlet em certo limite [7, 8, 9, 10] e outro que recupera a condição de Neumann [11]. Há também estudos envolvendo acoplamentos de campos bosônicos com potenciais externos do tipo delta de Dirac em modelos com derivadas de ordens superiores [12]. Esses são apenas alguns exemplos sobre esse vasto assunto que ainda pode ser explorado sob diversos aspectos.

Os modelos citados acima envolvendo o campo escalar se caracterizam por aco-

plamentos de uma função delta de Dirac com o campo ou de uma delta de Dirac com a derivada direcional do campo. Em ambos os casos, a função delta é concentrada ao longo de uma superfície estacionária e o campo de Klein-Gordon é tomado como real. No contexto do campo escalar, podemos nos indagar se haveria algum tipo de acoplamento com potenciais externos que, não só envolvesse o campo de Klein-Gordon complexo, mas que fosse inerente a este, ou seja, que só pudesse ser estabelecido para o campo complexo. Ainda mais, é natural nos perguntarmos que tipo de interação seria estabelecida nesse caso e quais seriam os fenômenos físicos que se poderia obter de tal modelo.

Vale ressaltar que modelos de campo escalar são usados frequentemente para descrever sistemas de matéria condensada.

O acoplamento do tipo corrente para campos pode também vir a ser de alguma utilidade no contexto de uma física mais fundamental. Podemos citar, nesse sentido, o fato de que o modelo de sacola para os hádrons tem como o confinamento da corrente fermiônica (relacionada aos quarks) um dos seus principais elementos.

Nessa dissertação propomos um modelo onde o campo de Klein-Gordon complexo se acopla com um potencial externo tipo delta de Dirac concentrado ao longo de um plano infinito. O acoplamento se dá pela corrente do campo escalar complexo com o potencial. Por se tratar de um modelo quadrático, pudemos encontrar exatamente a função de Green do sistema, sem apelar para métodos perturbativos. Encontramos a energia de interação entre o potencial e fontes pontuais estacionárias para o campo escalar. As fontes empregadas fazem um papel para o campo escalar análogo ao que viriam a ser cargas pontuais estacionárias no eletromagnetismo. Consideramos dois tipos de *setups*: um com apenas uma única fonte e outro com duas fontes simultaneamente.

Os resultados obtidos são surpreendentes e bem peculiares ao modelo. Até onde sabemos, não encontramos resultados similares na literatura para nenhum modelo de campos interagindo com potenciais espacialmente localizados. Tais peculiaridades decorrem do fato de que o acoplamento não é isotrópico, fazendo distinção entre os dois lados do plano ao longo onde o potencial se concentra.

Fazemos um estudo baseado nos resultados originais apresentados nesse texto, mas alguns resultados ainda carecem de uma análise mais minuciosa. Deixamos essa tarefa como uma perspectiva futura a ser finalizada após a conclusão dessa Dissertação. Pretendemos submeter para publicação um trabalho científico expondo os resultados originais contidos nessa Dissertação.

Essa Dissertação está estruturada da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos

o tratamento do campo escalar real acoplado com um potencial delta de Dirac concentrado ao longo de um plano infinito com uma fonte pontual estacionária. No limite onde a constante de acoplamento entre o campo e o potencial diverge, o modelo recupera o caso em que o campo escalar está submetido às condições de Dirichlet ao longo do plano onde o potencial se concentra. No capítulo 3 consideramos o campo escalar complexo acoplado com o mesmo tipo de potencial estudado no capítulo 2, mas empregamos para isso um formalismo onde reescrevemos o campo em uma estrutura matricial. No capítulo 4 apresentamos os resultados originais referentes a um modelo onde o campo escalar complexo se acopla com um potencial delta de Dirac concentrado ao longo de um plano infinito. O acoplamento se dá com a corrente do campo escalar. Estudamos a energia de interação entre o potencial e uma fonte pontual estacionária. O capítulo 5 é dedicado às conclusões e perspectivas futuras.

# Capítulo 2

## Campo de Klein-Gordon

### 2.1 Campo de Klein-Gordon na presença de fontes externas

Neste capítulo realizamos, de forma breve, uma revisão sobre o campo escalar de Klein-Gordon. Iniciaremos nossa discussão com o campo de Klein-Gordon real, que é considerado um campo escalar quântico relativístico. Sendo assim, a função que descreve o campo depende do espaço ( $\mathbf{x}$ ) e do tempo ( $t$ ), assumindo valores escalares reais. Vamos denotar a função que descreve o campo por

$$\phi(t, \mathbf{x}) . \quad (2.1)$$

O campo Klein-Gordon [1] [2] [3], deve satisfazer a equação de Klein-Gordon descrita por,

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla \right] \phi(t, \mathbf{x}) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (2.2)$$

no qual,  $m > 0$  é a massa do campo.

Desse ponto em diante vamos considerar unidades naturais, nas quais  $\hbar = 1$  e  $c = 1$ . Dessa forma teremos que

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla \right] \phi(t, \mathbf{x}) + m^2 \phi(t, \mathbf{x}) = 0 . \quad (2.3)$$

Utilizando a definição do operador D'Alembertiano temos que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla = \partial_\mu \partial^\mu = \square . \quad (2.4)$$

Substituindo a equação (2.4) em (2.3), temos portanto a equação de Klein-Gordon,

$$(\square + m^2) \phi = 0 . \quad (2.5)$$

A equação de Klein-Gordon também pode ser encontrada por meio do princípio variacional Lagrangiano. Nesse caso, a densidade Lagrangiana correspondente é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 . \quad (2.6)$$

e a equação de Euler-Lagrange é

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 . \quad (2.7)$$

Substituindo (2.6) em (2.7), temos novamente a equação de Klein-Gordon (2.5).

Consideremos agora uma campo escalar na presença de uma fonte externa. Neste trabalho nos referimos a fonte externa como uma função prescrita (sem dinâmica) que se acopla linearmente com o campo escalar  $\phi(t, \mathbf{x})$  na densidade lagrangiana. Utilizaremos o quadrivetor  $x = (t, \mathbf{x})$  por conveniência de notação. Sendo assim, podemos reescrever a densidade lagrangiana, como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \mathbf{J} \phi . \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) na equação de Euler-Lagrange (2.7) e realizando as derivadas teremos,

$$(\square + m^2) \phi(x) = \mathbf{J}(x) . \quad (2.9)$$

A equação de Klein-Gordon (2.9) para um campo escalar submetido na presença de uma fonte externa, não é uma equação homogênea e a sua solução geral é uma combinação da solução da equação de Klein-Gordon sem fonte externa (2.5), ou seja, da equação livre, e de uma solução particular não homogênea que irá depender da fonte  $\mathbf{J}$  e poderá ser encontrada com método da função de Green. A função de Green do operador diferencial (2.9) deve satisfazer a equação diferencial,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G_0(x, y) = \delta^4(x - y) . \quad (2.10)$$

Podemos mostrar que a solução particular da equação (2.9) é dada por,

$$\phi(x) = \int G_0(x, y) \mathbf{J}(y) dy \quad (2.11)$$

Para verificarmos que a equação (2.11) é solução particular de (2.9), substituímos a equação (2.11) em (2.9) e usamos a equação (2.10), dessa forma temos,

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \int G_0(x, y) J(y) dy &= J(x) \\ \int (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G_0(x, y) J(y) dy &= J(x) \\ \int \delta^4(x - y) J(y) dy &= J(x) \\ J(x) &= J(x) , \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Para encontrar a função de Green que satisfaz a equação (2.10), vamos utilizar a transformada de Fourier. Podemos então reescrever a função de Green (2.10) como uma integral de Fourier.

$$G_0(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}_0(p) e^{-ip(x-y)} \quad (2.12)$$

onde  $p$  é definido como  $p = (p^0, \mathbf{p})$  e  $\tilde{G}_0(p)$  é a transformada de  $G_0(x - y)$  a ser encontrada. Devemos ainda utilizar a integral de Fourier para a função delta de Dirac.

$$\delta^4(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \quad (2.13)$$

Substituindo as equações (2.13) e (2.12) em (2.10), temos

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}_0(p) e^{-ip(x-y)} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}_0(p) e^{-ip(x-y)} \\ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-p^2 + m^2) e^{-ip(x-y)} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} , \end{aligned}$$

Os integrandos acima devem ser iguais dos dois lados da equação, portanto,

$$\tilde{G}_0(p) = -\frac{1}{p^2 - m^2} . \quad (2.14)$$

Por fim, temos a função de Green dada pela integral de Fourier,

$$G_0(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ -\frac{1}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \right] , \quad (2.15)$$

Percebemos que a integral acima não está bem definida, pois temos um polo em

$p^2 - m^2 = 0$ . Dessa forma, precisamos realizar uma regularização. Vamos utilizar a chamada prescrição de Feynmann, que consiste em acrescentar um parte imaginária negativa na massa do campo,

$$G_0(x - y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ -\frac{1}{p^2 - (m - i\epsilon)^2} e^{-ip(x-y)} \right]. \quad (2.16)$$

## 2.2 Campo de Klein-Gordon na presença de um potencial externo

Entendemos como potencial externo uma função dependente do tempo e do espaço para a qual o campo se acopla quadraticamente na densidade lagrangiana. Temos portanto,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} [m^2 + V(x)] \phi^2 + J(x) \phi \quad (2.17)$$

onde  $V(x)$  é o potencial externo considerado, além da presença de uma fonte externa  $J(x)$ , denominada também por corrente externa.

Substituindo a equação(2.17) na equação de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (2.18)$$

encontramos a equação de Klein-Gordon com a presença de um potencial externo e da corrente

$$(\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + V(x)) \phi(x) = \mathbf{J}(x). \quad (2.19)$$

A equação de Klein-Gordon com a presença de um potencial externo e uma corrente não é homogênea, assim como no caso onde temos apenas uma fonte externa. Sendo assim, a função de Green deve satisfazer a equação,

$$[\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + V(x)] G(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (2.20)$$

Utilizando a função de Green livre (sem a presença do potencial), que deve satisfazer a equação

$$[\partial_\nu \partial^\nu + m^2] G_0(x, y) = \delta^4(x - y), \quad (2.21)$$

podemos relacionar as funções  $G(x, y)$  e  $G_0(x, y)$  da seguinte forma,

$$G(x, y) = G_0(x, y) - \int d^4z G(x, y)V(z)G_0(z, y) . \quad (2.22)$$

A equação (2.22) pode ser verificada diretamente, aplicando-se o operador diferencial presente na equação (2.20) em ambos os lados de (2.22), usando-se a equação (2.21) e as propriedades da função Delta de Dirac sob integrações. Dessa forma temos,

$$\begin{aligned} [\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + V(x)]G(x, y) &= [\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + V(x)]G_0(x, y) \\ &\quad - [\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + V(x)] \int d^4z G(x, z)V(z)G_0(z, y) \\ &= \delta^4(x - y) + V(x)G_0(x, y) - \int d^4z [\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + V(x)]G(x, z)V(z)G_0(z, y) \\ &= \delta^4(x - y) + V(x)G_0(x, y) - \int \delta^4(x - z)V(z)G_0(z, y) \\ &= \delta^4(x - y) + V(x)G_0(x, y) - V(x)G_0(x, y) \\ &= \delta^4(x - y) \end{aligned}$$

## 2.3 Campo de Klein-Gordon na presença um potencial externo tipo delta de Dirac

Nessa seção discutiremos um modelo para o campo escalar, na presença de um potencial externo dado por função da delta de Dirac concentrada ao longo de um plano,

$$V(x) = \mu \delta(x^3). \quad (2.23)$$

Os resultados aqui apresentados podem ser encontrado na referência [11].

O parâmetro  $\mu$  é uma constante de acoplamento entre a função delta e o potencial externo. Para evitar problemas introduzidos pelo decaimento do vácuo do campo, vamos simplificar nossa abordagem e considerar apenas o caso em que  $\mu > 0$ .

Podemos notar que o potencial externo se concentra no plano  $x^3 = 0$  e se caracteriza por ser estacionário (não depende do tempo). Para as discussões a seguir, vamos denotar as coordenadas de um vetor espacial paralelas ao plano onde o potencial se concentra como  $\mathbf{x}_{||} = (x^1, x^2, 0)$  e o quadrivetor correspondente como  $x_{||} = (t, x^1, x^2, 0)$ .



A densidade de lagrangiana do modelo é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}[m^2 + \mu\delta(x^3)]\phi^2 + \mathbf{J}\phi \quad (2.24)$$

e a função de Green correspondente deve satisfazer a equação diferencial,

$$[\partial_\nu\partial^\nu + m^2 + \mu\delta(x^3)]G(x, x') = \delta^4(x - x') . \quad (2.25)$$

Para encontrar a função de Green do modelo (2.24),  $G_0(x, y)$ , usaremos a função de Green para o campo escalar livre (2.15), ou seja, sem a presença do potencial externo, que pode ser escrita como uma integral de Fourier no espaço de momento,

$$\begin{aligned} G_0(x - y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[ -\frac{e^{-ip(x-y)}}{p^\mu p_\mu - m^2} \right] \\ &= - \int \frac{d^3p_{||}}{(2\pi^2)^3} \left[ \int \frac{dp^3}{(2\pi)} \frac{e^{-ip^3(x^3-y^3)}}{p^\mu p_\mu - m^2} \right] e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por conveniência, vamos definir a função,

$$\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) = - \int \frac{dp^3}{(2\pi)} \frac{e^{-ip^3(x^3-y^3)}}{p^\mu p_\mu - m^2} \quad (2.27)$$

o que nos permite reescrever a equação (2.26) como sendo,

$$G_0(x, y) = \int \frac{d^3p_{||}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})}. \quad (2.28)$$

O operador diferencial descrito na equação (2.25) possui simetria de translação temporal e também nas coordenadas paralelas  $(x^1, x^2)$ . O lado direito da equação também possui simetria da translação nas coordenadas  $(x^1, x^2$  e  $x^3)$  e no tempo. Dessa forma podemos reescrever a função de Green do operador, como uma integral de Fourier nas coordenadas em que há invariância de translação,

$$G(x, y) = \int \frac{d^3p_{||}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}(p_{||}; x^3, y^3) e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})}. \quad (2.29)$$

Substituindo (2.29), (2.28), (2.23) em (2.22), temos,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} \\
& - \int d^4 z \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, z^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-z_{\parallel})} \mu \delta(z^3) \int \frac{d^3 q_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_0(q_{\parallel}; z^3, y^3) e^{-iq_{\parallel}(z_{\parallel}-y_{\parallel})} \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Separando a integral em  $d^4 z$  nas coordenadas paralelas,  $d^3 z_{\parallel} = dz^0 dz^1 dz^2$  e na coordenada perpendicular  $dz^3$ , integrando em  $d^3 z_{\parallel}$ , utilizando a relação,

$$2\pi\delta(p-q) = \int dx e^{i(p-q)x} \quad (2.31)$$

integrando em  $d^3 q_{\parallel}$  e por fim em  $dz^3$ , termos,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} = \\
& = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \left[ \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, y^3) - \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, 0) \mu \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; 0, y^3) \right] e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})}. \quad (2.32)
\end{aligned}$$

A equação (2.32) implica na igualdade dos integrandos. Sendo assim, temos que,

$$\mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) = \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, y^3) - \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, 0) \mu \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; 0, y^3). \quad (2.33)$$

Tomamos agora  $y^3 = 0$  na equação acima, o que nos leva a

$$\begin{aligned}
& \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, 0) = \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, 0) - \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, 0) \mu \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; 0, 0) \\
& \Rightarrow \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, 0) (1 + \mu \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; 0, 0)) = \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, 0) \\
& \Rightarrow \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, 0) = \frac{\mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, 0)}{1 + \mu \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; 0, 0)}. \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.34) em (2.33) temos,

$$\mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) = \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, y^3) - \frac{\mu \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, 0) \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; 0, y^3)}{1 + \mu \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; 0, 0)}. \quad (2.35)$$

Falta apenas encontrar a função  $\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3)$ , que foi definida como,

$$\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) = - \int \frac{dp^3}{2\pi} \frac{e^{-ip^3(x^3-y^3)}}{p^\mu p_\mu - m^2}. \quad (2.36)$$

Para isso, com o intuito de simplificar os cálculos, vamos definir a seguinte grandeza,

$$\sigma = \sqrt{-p_{||}^2 + m^2}, \quad (2.37)$$

e reescrever a equação (2.36) na forma

$$\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) = - \int \frac{dp^3}{2\pi} \frac{e^{-ip^3(x^3-y^3)}}{(p^3)^2 + \sigma^2}. \quad (2.38)$$

Ao analisarmos a integral presente em (2.38), percebemos que ela exhibe polos em  $p^3 = \pm i\sigma$ . No caso em que  $x^3 \neq y^3$  e com  $\sigma$  real ( $m^2 > p_{||}^2$ ), a integral (2.38) pode ser calculada sem problemas utilizando-se o teorema de resíduos. No caso em que  $x^3 \neq y^3$  mas com  $\sigma$  sendo imaginário puro, ou seja,  $m^2 < p_{||}^2$ , os polos encontram-se no eixo  $p^3$  real e devem ser deslocados com a prescrição de Feynman, substituindo  $m \rightarrow m - i\epsilon$  e tomando o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . O resultado que teremos em todos os casos onde  $x^3 \neq y^3$  é

$$\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) = \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma}, \text{ para } x^3 \neq y^3. \quad (2.39)$$

O caso onde  $x^3 = y^3$  pode ser tratado com regularização dimensional ou simplesmente tomando-se o limite  $x^3 \rightarrow y^3$  na equação (2.39), o que fornece

$$\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) \Big|_{y^3=x^3} = \frac{1}{2\sigma}. \quad (2.40)$$

Por fim, podemos substituir os resultados das equações (2.40) e (2.39) em (2.35),

$$\mathcal{G}(p_{||}; x^3, y^3) = \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} - \frac{\mu}{4\sigma^2} \frac{e^{-\sigma(|x^3|+|y^3|)}}{1 + \frac{\mu}{2\sigma}} \quad (2.41)$$

Finalmente, substituindo (2.41) na integral (2.29) da função de Green para campo escalar na presença do potencial externo dado por (2.23), temos

$$G(x, y) = G_0(x, y) - \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} \frac{\mu}{4\sigma^2} \frac{e^{-\sigma(|x^3|+|y^3|)}}{1 + \frac{\mu}{2\sigma}} e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})} \quad (2.42)$$

onde  $G_0(x, y)$  é definida em (2.28).

A função de Green (2.42) exibe uma propriedade interessante. No limite em que o parâmetro de acoplamento  $\mu$  diverge ( $\mu \rightarrow \infty$ ) temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\mu \rightarrow \infty} G(x, y) &= G_0(x, y) - \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sigma} e^{-\sigma(|x^3|+|y^3|)} e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})} \\
&= \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})} - \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sigma} e^{-\sigma(|x^3|+|y^3|)} e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})} \\
&= \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} \left[ \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} - \frac{1}{2\sigma} e^{-\sigma(|x^3|+|y^3|)} \right] e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})} , \tag{2.43}
\end{aligned}$$

que é exatamente a função de Green para o campo escalar submetido a condição de Dirichlet sob o plano onde o potencial se concentra. Isso pode ser constatado se avaliarmos a equação (2.43) em  $x^3 = 0$ , ou seja, sob o plano onde o potencial se concentra,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} G(x, y) \Big|_{x^3=0} = \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} \left[ \frac{e^{-\sigma|y^3|}}{2\sigma} - \frac{1}{2\sigma} e^{-\sigma|y^3|} \right] e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})} = 0 , \tag{2.44}$$

ou seja, a função de Green no limite  $\mu \rightarrow \infty$  satisfaz a condição de Dirichlet no plano  $x^3 = 0$ . Dessa forma, as soluções de campo satisfazem a mesma condição.

## Capítulo 3

# Campo de Klein-Gordon complexo

A equação que descreve o campo de Klein-Gordon complexo na presença de uma fonte externa (também complexa), pode ser encontrada utilizando-se o princípio variacional a partir da densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* - J \phi^* - J^* \phi \quad (3.1)$$

onde  $\phi$  e  $\phi^*$  representam o campo escalar e seu complexo conjugado, respectivamente e, da mesma forma,  $J$  e  $J^*$  designam a fonte externa e seu complexo conjugado.

Nessa abordagem, consideramos  $\phi$  e  $\phi^*$  como variáveis independentes.

Substituindo a densidade de lagrangiana (3.1) nas equações de Euler-Lagrange para  $\phi$  e para  $\phi^*$  temos, respectivamente [1],

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi^* &= J^* \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi &= J. \end{aligned} \quad (3.2)$$

A lagrangeana (3.1) pode ser reformulada em termos de novas variáveis dinâmicas, dadas por dois novos campos,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , dessa vez definidos como reais. Em termos dos novos campos,  $\phi$  e  $\phi^*$  são dados por

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\ \phi^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Devemos ainda escrever a fonte externa, e seu conjugado, em termos de fontes

reais,  $J_1$  e  $J_2$ , como segue

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 + iJ_2) \\ J^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 - iJ_2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dessa forma, a densidade de lagrangiana (3.1) se torna

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2) - \frac{1}{2}m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - (J_1\phi_1 + J_2\phi_2), \quad (3.5)$$

e as equações dinâmicas correspondentes são obtidas, novamente, aplicando-se a equação de Euler-Lagrange para cada uma das variáveis  $\phi_1$  e  $\phi_2$ ,

$$\begin{aligned} (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi_1 &= J_1 \\ (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi_2 &= J_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Os sistemas (3.2) e (3.6) são totalmente equivalentes, assim como as lagrangianas (3.1) (3.5). A lagrangiana (3.6) é simplesmente a soma de duas lagrangianas de Klein-Gordon, uma para o campo  $\phi_1$  e outra para o campo  $\phi_2$ , sem nenhuma interação entre esses campos.

### 3.1 Campo de Klein-Gordon complexo na forma matricial

Vimos que podemos formular a teoria do campo escalar complexo em termos de dois campos reais desacoplados. Nessa seção vamos mostrar uma terceira abordagem para esse tipo de sistema. Trata-se de um tratamento matricial para o campo e para a corrente externa.

O procedimento abordado será crucial no próximo capítulo, onde vamos apresentar novos resultados. Na presente seção, vamos apenas fazer uma exposição didática.

Iniciamos definindo o campo matricial de Klein-Gordon,  $\Phi$ , e seu transposto,  $\Phi^t$ ,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad \Phi^t = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Definimos também a fonte externa na forma matricial,  $\mathbb{J}$ ,

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Vamos ainda denotar a matriz identidade  $2 \times 2$  como

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Dessa forma, utilizando as definições (3.7), (3.8) e (3.9), podemos escrever a densidade de lagrangiana do campo de Klein-Gordon na forma matricial.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Phi^t (\partial_\nu \partial^\nu - m^2) \mathbb{I} \Phi - \mathbb{J} \Phi. \quad (3.10)$$

Na lagrangiana (3.10), devemos considerar as duas componentes de  $\Phi$  (ou de  $\Phi^t$ ) como variáveis dinâmicas independentes. De forma equivalente, podemos tomar a matriz  $\Phi$  como a própria variável dinâmica independente.

Aplicando a equação de Euler-Lagrange para  $\Phi$ ,

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0 \quad (3.11)$$

encontramos a equação dinâmica

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Phi = \mathbb{J} \quad (3.12)$$

que são equações matriciais. Vale ressaltar que a equação (3.12) é equivalente aos sistemas (3.2) e (3.6).

A função de Green corresponde à lagrangiana (3.10), que será denotada por  $\mathbb{G}_0(x, y)$ , tem estrutura de uma matriz quadrada  $2 \times 2$  e deve satisfazer a equação diferencial matricial,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \mathbb{G}_0(x - y) = \mathbb{I} \delta^4(x - y). \quad (3.13)$$

Por conveniência, vamos escrever a função de Green como uma integral de Fourier,

$$\mathbb{G}_0(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\mathbb{G}}_0(p) e^{-ip(x-y)} \quad (3.14)$$

onde  $\tilde{\mathbb{G}}_0(p)$  é a transformada de Fourier de  $\mathbb{G}_0(x, y)$  que apresenta também uma estrutura matricial  $2 \times 2$ .

Vamos ainda usar a representação de Fourier da função Delta de Dirac, na forma matricial.

$$\delta^4(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \quad (3.15)$$

Substituindo as equações (3.14) e (3.15) em (3.13) temos que,

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\mathbb{G}}_0(p) e^{-ip(x-y)} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathbb{I} e^{-ip(x-y)} \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-p^2 + m^2) \tilde{\mathbb{G}}_0(p) e^{-ip(x-y)} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathbb{I} e^{-ip(x-y)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para satisfazer (3.17) os integrandos em ambos os lados devem ser iguais um ao outro. Sendo assim, temos que,

$$\tilde{\mathbb{G}}_0(p) = -\mathbb{I} \frac{1}{p^2 - m^2}, \quad (3.17)$$

ou seja,

$$\tilde{\mathbb{G}}_0(p) = \mathbb{I} \tilde{G}_0(p), \quad (3.18)$$

onde utilizamos a definição (2.14).

## 3.2 Campo de Klein-Gordon na Forma Matricial na presença de um potencial externo

Consideremos agora um potencial externo de estrutura matricial, denotado aqui como  $\mathbb{V}(x)$ , dependente de  $x$ . Vamos nos restringir ao caso simples onde o potencial matricial é proporcional à matriz identidade, podendo ser descrito da seguinte forma,

$$\mathbb{V} = \mathbb{I} V(x). \quad (3.19)$$

sendo  $V(x)$  uma função prescrita.

A densidade lagrangiana que descreve esse sistema é dada por,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Phi^t (\partial_\nu \partial^\nu - m^2) \mathbb{I} \Phi - \frac{1}{2} \Phi^t (\mathbb{V}) \Phi + \mathbb{J} \phi. \quad (3.20)$$

Ao usarmos a equação de Euler-Lagrange na forma matricial para a lagrangiana



(3.20) temos

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \mathbb{V})\Phi = \mathbb{J}. \quad (3.21)$$

A função de Green do sistema deve satisfazer a equação (3.21) com uma fonte tipo delta de Dirac, ou seja

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \mathbb{V})\mathbb{G}(x, x') = \mathbb{I} \delta^4(x - x'). \quad (3.22)$$

A equação (3.21) não é homogênea, dada a presença do potencial. Para o caso homogêneo, temos a função de Green  $\mathbb{G}(x, x')$  que deve satisfazer a equação (3.13).

As funções de Green  $\mathbb{G}(x, y)$  e  $\mathbb{G}_0(x, y)$ , mesmo na forma matricial, podem ser relacionadas pela equação,

$$\mathbb{G}(x, y) = \mathbb{G}_0(x, y) - \int d^4z \mathbb{G}(x, z)\mathbb{V}(z)\mathbb{G}_0(z, y), \quad (3.23)$$

o que pode ser facilmente demonstrado aplicando-se o operador dado na equação (3.22) nos dois lados da equação (3.23), da seguinte forma,

$$\begin{aligned} [\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + \mathbb{V}(x)]\mathbb{G}(x, y) &= [\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + \mathbb{V}(x)]\mathbb{G}_0(x, y) \\ &\quad - [\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + \mathbb{V}(x)] \int d^4z \mathbb{G}(x, z)\mathbb{V}(z)\mathbb{G}_0(z, y) \\ &= \delta^4(x - y) + \mathbb{V}(x)\mathbb{G}_0(x, y) - \int d^4z [\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + \mathbb{V}(x)]\mathbb{G}(x, z)\mathbb{V}(z)\mathbb{G}_0(z, y) \\ &= \delta^4(x - y) + V(x)\mathbb{G}_0(x, y) - \int d^4z \delta^4(x - z)\mathbb{V}(z)\mathbb{G}_0(z, y) \\ &= \delta^4(x - y) + \mathbb{V}(x)\mathbb{G}_0(x, y) - \mathbb{V}(x)\mathbb{G}_0(x, y) \\ &= \delta^4(x - y). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Agora vamos considerar um exemplo específico de um potencial externo proporcional a função Delta de Dirac, na forma

$$\mathbb{V}(x) = \mathbb{I} \lambda \delta(x^3). \quad (3.25)$$

sendo  $\lambda$  uma constante de acoplamento entre a função delta e o campo matricial. Vamos nos limitar para este estudo ao caso onde  $\lambda > 0$ . O potencial que será

estudado, se concentra no plano  $x^3 = 0$  e é, portanto, estacionário.

Da mesma forma que denotamos as coordenadas na seção 2.3, definiremos também nessa seção o vetor paralelo ao plano onde o potencial se concentra como  $\mathbf{x}_{||} = (x^1, x^2, 0)$  e  $x_{||} = (t, x^1, x^2, 0)$ .

Começaremos pela densidade lagrangiana, dada na forma matricial como sendo,

$$L = \frac{1}{2} \Phi^t (\partial_\nu \partial^\nu - m^2) \mathbb{I} \Phi - \frac{1}{2} \Phi^t (\mathbb{I} \lambda \delta(x^3)) \Phi + \mathbb{J} \phi. \quad (3.26)$$

A correspondente função de Green deve satisfazer a equação diferencial,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \mathbb{I} \lambda \delta(x^3)) \mathbb{G}(x, x') = \mathbb{I} \delta^4(x - x'). \quad (3.27)$$

Para encontrar a função de Green que descreve o modelo (3.26), usamos as equações (3.14) e (3.17) para escrever a função de Green sem a presença do potencial como uma integral de Fourier,

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_0(x, y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \mathbb{I} \left[ -\frac{e^{-ip(x-y)}}{p^\mu p_\mu - m^2} \right] \\ &= - \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi^2)^3} \left[ \int \frac{dp^3}{(2\pi)} \mathbb{I} \frac{e^{-ip^3(x^3-y^3)}}{p^\mu p_\mu - m^2} \right] e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Por conveniência futura, definimos a função matricial

$$\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) = - \int \frac{dp^3}{(2\pi)} \mathbb{I} \frac{e^{-ip^3(x^3-y^3)}}{p^\mu p_\mu - m^2} \quad (3.29)$$

de modo a reescrever a equação (3.29) como,

$$\mathbb{G}_0(x, y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})}. \quad (3.30)$$

O operador diferencial no lado esquerdo da equação (3.27) apresenta simetria de translação na coordenada temporal e nas coordenadas espaciais paralelas ao plano onde o potencial se concentra ( $x^3 = 0$ ). O lado direito da mesma equação apresenta simetria de translação em todas as coordenadas. Isso nos faz concluir que a função de Green deva também apresentar simetria de translação no tempo e nas coordenadas espaciais excluindo-se a coordenada  $x^3$ . Sendo assim, podemos escrever a função de

Green como uma integral de Fourier nas coordenadas paralelas.

$$\mathbb{G}(x, y) = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})}, \quad (3.31)$$

onde a função matricial  $\mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3)$  deve ser encontrada.

Substituindo as equações (3.30), (3.31) e (3.25) em (3.23) temos,

$$\begin{aligned} \mathbb{G}(x, y) &= \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})} = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})} \\ &\quad - \int d^4 z \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, z^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - z_{\parallel})} \lambda \delta(z^3) \\ &\quad \times \int \frac{d^3 q_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_0(q_{\parallel}; z^3, y^3) e^{-iq_{\parallel}(z_{\parallel} - y_{\parallel})}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Levando em conta que  $d^4 z = d^3 z_{\parallel} dz^3$ , onde  $d^3 z_{\parallel} = dz^0 dz^1 dz^2$ , integrado primeiro em  $d^3 x_{\parallel}$ , utilizando a relação descrita na equação (2.31), integrando em  $d^3 q_{\parallel}$  e por fim em  $dz^3$ , temos,

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})} = \\ &= \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \left[ \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, y^3) - \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, 0) \lambda \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; 0, y^3) \right] e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Igualando os integrandos nos dois lados da equação acima obtemos

$$\mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) = \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, y^3) - \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, 0) \lambda \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; 0, y^3). \quad (3.34)$$

Tomando agora  $y^3 = 0$  podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, 0) &= \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, 0) - \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, 0) \lambda \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; 0, 0) \\ \Rightarrow \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, 0) \left( \mathbb{I} + \lambda \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; 0, 0) \right) &= \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, 0) \\ \Rightarrow \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, 0) &= \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, 0) \left( \mathbb{I} + \lambda \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; 0, 0) \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Substituindo (3.35) em (3.34) somos levados ao resultado

$$\mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) = \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, y^3) - \lambda \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, 0) \left( \mathbb{I} + \lambda \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; 0, 0) \right)^{-1} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; 0, y^3). \quad (3.36)$$

Ainda falta encontrar a função matricial  $\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3)$ , definida em (3.29). Para esse fim, usaremos a definição (2.37) para reescrever a equação (3.29) como sendo,

$$\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) = - \int \frac{dp^3}{2\pi} \mathbb{I} \frac{e^{-ip^3(x^3-y^3)}}{(p^3)^2 + \sigma^2}. \quad (3.37)$$

A integral presente acima é exatamente aquela encontrada na equação (2.38), cuja solução é apresentada em (2.39) e (2.40). Com isso, podemos escrever

$$\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) = \mathbb{I} \mathcal{G}(p_{||}; x^3, y^3) = \mathbb{I} \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} \quad (3.38)$$

Substituindo a equação (3.38) em (3.36), obtemos,

$$\mathcal{G}(p_{||}; x^3, y^3) = \mathbb{I} \left[ \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} - \frac{\lambda}{4\sigma^2} \frac{e^{-\sigma(|x^3|+|y^3|)}}{1 + \frac{\lambda}{2\sigma}} \right]. \quad (3.39)$$

Ao compararmos (3.39) e (2.41), nota-se que

$$\mathcal{G}(p_{||}; x^3, y^3) = \mathbb{I} \mathcal{G}(p_{||}; x^3, y^3). \quad (3.40)$$

Finalmente, substituindo a equação (3.39) na definição da função de Green matricial (3.23), temos que,

$$\mathbb{G}(x, y) = \mathbb{G}_0(x, y) - \int \frac{d^3p_{||}}{(2\pi)^3} \frac{\lambda}{4\sigma^2} \frac{e^{-\sigma(|x^3|+|y^3|)}}{1 + \frac{\lambda}{2\sigma}} e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})}. \quad (3.41)$$

Ao compararmos (3.41), (3.28) com (2.26), é imediato verificar que

$$\mathbb{G}(x, y) = \mathbb{I} G(x, y). \quad (3.42)$$

Percebemos então que a função de Green matricial nada mais é do que a função de Green no caso estudado na seção 2.3 (para o modelo de um único campo acoplado com o potencial delta) multiplicada pela matriz identidade. Esse fato é decorrente do modelo proposto em (3.26) não exibir acoplamento entre as funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Ou seja, temos de fato dois problemas do tipo abordado no capítulo 2 sem acoplamento algum entre  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

Note que no limite  $\lambda \rightarrow \infty$  a função de Green (3.41) se torna

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbb{G}(x, y) = \mathbb{G}_0(x, y) - \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-\sigma(|x^3|+|y^3|)}}{2\sigma} e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})} , \quad (3.43)$$

que é exatamente a função de Green do campo escalar complexo com massa submetido à condição de Dirichlet no plano  $x^3 = a$ . Isso pode ser constatado pois a função (3.43) se anula em  $x^3 = a$ , o que faz com que as soluções de campo também sejam nulas nesse plano.

Podemos nos indagar que tipo de efeito poderia ser obtido a partir de modelos onde temos acoplamento simultâneo com potenciais externos espacialmente localizados envolvendo ambos os campos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Essa discussão é o assunto principal do próximo capítulo.

## Capítulo 4

# Acoplamento tipo corrente para o campo escalar com potencial externo espacialmente localizado

Nessa seção apresentamos os resultados originais obtidos na execução desse trabalho. Tratamos um modelo de dois campos escalares com a presença de um potencial externo espacialmente localizado acoplado simultaneamente com os dois campos. O modelo pode ser escrito simplesmente em termos de dois campos escalares reais, de um único campo escalar complexo ou utilizando-se um único campo escalar de natureza matricial. Essa última abordagem é a mais adequada pois nos permite obter resultados exatos.

Iniciamos por considerar a corrente do campo de Klein-Gordon complexo

$$j^\mu = \frac{i}{2m}(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*), \quad (4.1)$$

que, com o uso das definições (3.3), pode ser reescrita como

$$j^\mu = \frac{1}{2m}(\phi_2 \partial^\mu \phi_1 - \phi_1 \partial^\mu \phi_2). \quad (4.2)$$

Vamos considerar um acoplamento da corrente (4.1) com um potencial tipo delta de Dirac concentrado no plano  $x^3 = a$ . O acoplamento será, de fato, entre a componente da corrente normal ao plano com a função delta. A lagrangeana do modelo é dada por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* - \lambda \delta(x^3 - a) n^\mu j_\mu(x) - J \phi^* - J^* \phi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2) - \frac{1}{2}m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - (J_1\phi_1 + J_2\phi_2) \\
&\quad - \frac{\lambda}{2m}\delta(x^3 - a)n_\mu(\phi_2\partial^\mu\phi_1 - \phi_1\partial^\mu\phi_2)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde  $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$  é um quadrivetor normal ao plano onde o potencial se concentra.

Vamos reescrever a lagrangiana (4.3) em uma estrutura matricial. Iniciamos com a corrente  $j^\mu$  dada em (4.2),

$$j^\mu = \frac{1}{2m}\Phi^t \begin{pmatrix} 0 & -\partial^\mu \\ \partial^\mu & 0 \end{pmatrix} \Phi \tag{4.4}$$

onde usamos as definições (3.7) dos campos matriciais.

Vamos definir ainda a seguinte matriz  $\mathbb{I}$ ,

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

de modo a reescrever a corrente (4.4) como

$$j^\mu = \frac{1}{2m}\Phi^t \partial^\mu \mathbb{I} \Phi. \tag{4.6}$$

O modelo (4.3) pode ser identificado com o campo matricial  $\Phi$  acoplado com um potencial operatorial externo também de natureza matricial, definido por

$$\mathbb{V} = \frac{\lambda}{2m} \delta(x^3 - a) \mathbb{I} \partial^\mu. \tag{4.7}$$

Dessa forma, reescrevemos a lagrangiana (4.3) como sendo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\Phi^t(\partial_\nu\partial^\nu - m^2)\mathbb{I}\Phi - \frac{\lambda}{2m}\delta(x^3 - a)\Phi^t\mathbb{I}n_\mu\partial^\mu\Phi + \mathbb{J}^t\Phi \\
&= -\frac{1}{2}\Phi^t\left[(\partial_\nu\partial^\nu - m^2)\mathbb{I} + \frac{\lambda}{m}\delta(x^3 - a)\mathbb{I}n_\mu\partial^\mu\right]\Phi + \mathbb{J}^t\Phi.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

É importante mencionar nesse caso que o termo de acoplamento com o potencial externo envolve tanto o campo como sua derivada primeira.

A partir de (4.8) podemos encontrar as equações dinâmicas para  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . De forma equivalente, também podemos encontrar a equação dinâmica para  $\Phi$  ou  $\Phi^t$ .

Todas as equações dinâmicas que se obtém nesse caso são equivalentes a

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbb{I}(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) + \frac{\lambda}{2m} \overset{\circ}{\mathbb{I}} \delta(x^3 - a) \partial_3 \right] \Phi + \frac{\lambda}{2m} \overset{\circ}{\mathbb{I}} \partial_3 [\delta(x^3 - a) \Phi] = \mathbb{J} \\ \Rightarrow & \left[ \mathbb{I}(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) + \frac{\lambda}{m} \overset{\circ}{\mathbb{I}} \delta(x^3 - a) \partial_3 + \frac{\lambda}{2m} \overset{\circ}{\mathbb{I}} [\partial_3 \delta(x^3 - a)] \right] \Phi = \mathbb{J}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Note que o operador diferencial presente na equação dinâmica do campo  $\Phi$ , na segunda linha de (4.9), é diferente daquele presente na lagrangeana (4.8). Até onde sabemos, essa característica do modelo é única em teorias quadráticas e tem implicações interessantes que serão expostas nesse capítulo.

Por conveniência, definimos o operador diferencial presente em (4.9) como

$$\mathbb{O}(x) = \frac{\lambda}{m} \overset{\circ}{\mathbb{I}} \delta(x^3 - a) \partial_3 + \frac{\lambda}{2m} \overset{\circ}{\mathbb{I}} [\partial_3 \delta(x^3 - a)]. \quad (4.10)$$

A função de Green correspondente do sistema está associada com a equação dinâmica do campo, deve exibir uma estrutura matricial e deve satisfazer a equação diferencial

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbb{I}(\partial_\mu \partial^\mu + m^3) + \frac{\lambda}{m} \overset{\circ}{\mathbb{I}} \delta(x^3 - a) \partial_3 + \frac{\lambda}{2m} \overset{\circ}{\mathbb{I}} [\partial_3 \delta(x^3 - a)] \right] \mathbb{G}(x, y) = \mathbb{I} \delta^4(x - y) \\ \Rightarrow & \left[ \mathbb{I}(\partial_\mu \partial^\mu + m^3) + \mathbb{O}(x) \right] \mathbb{G}(x, y) = \mathbb{I} \delta^4(x - y) \end{aligned} \quad (4.11)$$

A função de Green deve satisfazer a equação integral

$$\mathbb{G}(x, y) = \mathbb{G}_0(x, y) - \int d^4 z \mathbb{G}(x, z) \mathbb{O}(z) \mathbb{G}_0(z, y). \quad (4.12)$$

onde  $\mathbb{G}_0(x, y)$  é definida em (3.28) e se trata da função de Green do campo livre, ou seja, na ausência de qualquer potencial.

A relação (4.12) pode ser demonstrada de forma imediata ao aplicarmos em ambos os seus lados o operador presente em (4.11), como segue

$$\begin{aligned} & \left[ (\partial_\mu \partial^\mu + m^3) \mathbb{I} + \mathbb{O}(x) \right] \mathbb{G}(x, y) = \\ = & \left[ (\partial_\mu \partial^\mu + m^3) \mathbb{I} \right] \mathbb{G}_0(x, y) + \mathbb{O}(x) \mathbb{G}_0(x, y) \\ & - \int d^4 z \left[ (\partial_\mu \partial^\mu + m^3) \mathbb{I} + \mathbb{O}(x) \right] \mathbb{G}(x, z) \mathbb{O}(z) \mathbb{G}_0(z, y) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \mathbb{I}\delta^4(x-y) + \mathbb{O}(x)\mathbb{G}_0(x,y) - \int d^4z \delta^4(x-z)\mathbb{I}\mathbb{O}(z)\mathbb{G}_0(z,y) \\
&= \mathbb{I}\delta^4(x-y) + \mathbb{O}(x)\mathbb{G}_0(x,y) - \mathbb{O}(x)\mathbb{G}_0(x,y) \\
&= \mathbb{I}\delta^4(x-y)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Para encontrarmos a função de Green  $\mathbb{G}(x,y)$  é necessário escrevê-la como uma integral de Fourier nas coordenadas paralelas ao plano onde o potencial de concentra, da mesma forma como fizemos no capítulo anterior,

$$\mathbb{G}(x,y) = \int \frac{d^3p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathfrak{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} \tag{4.14}$$

sendo  $\mathfrak{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3)$  uma função a ser determinada.

Substituindo (4.14) e (3.30) em (4.12) obtemos

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^3p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathfrak{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} = \int \frac{d^3p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathfrak{G}_0(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} \\
&- \int d^4z \int \frac{d^3p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathfrak{G}(p_{\parallel}; x^3, z^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-z_{\parallel})} \mathbb{O}(z) \int \frac{d^3q_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathfrak{G}_0(q_{\parallel}; z^3, y^3) e^{-iq_{\parallel}(z_{\parallel}-y_{\parallel})}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

De forma semelhante que fizemos na seção 3.2 desse trabalho, iniciamos integrando o lado esquerdo da equação acima nas coordenadas paralelas,  $d^3z_{\parallel} = dz^0 dz^1 dz^2$  e  $dz^3$ . Posteriormente integramos em  $d^3q_{\parallel}$  e utilizamos a relação descrita na equação (2.31). Em seguida, usamos a definição (4.10) e por fim, integramos em  $dz^3$ . Com isso chegamos a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) &= \mathbb{I}\mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, y^3) - \frac{\lambda}{2m} \mathfrak{G}(p_{\parallel}; x^3, a) \mathbb{I} \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; a, y^3)}{\partial a} \\
&+ \frac{\lambda}{2m} \frac{\partial \mathfrak{G}(p_{\parallel}; x^3, a)}{\partial a} \mathbb{I} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; a, y^3) ,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

onde efetuamos uma integração por partes e usamos a definição (3.38).

Tomamos agora  $y^3 = a$  na equação (4.16),

$$\mathfrak{G}(p_{\parallel}; x^3, a) = \mathbb{I}\mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, a) - \frac{\lambda}{2m} \left[ \mathfrak{G}(p_{\parallel}; x^3, a) \mathbb{I} \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; a, b)}{\partial a} \Big|_{b=a} \right]$$

$$\left. -\frac{\partial \mathcal{G}(p_{||}; x^3, a)}{\partial a} \overset{\circ}{\mathbb{I}} \mathcal{G}_0(p_{||}; a, a) \right]. \quad (4.17)$$

Derivando a equação (4.16) em relação a  $y^3$  e avaliando em  $y^3 = a$  temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}(p_{||}; x^3, a)}{\partial a} &= \mathbb{I} \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3)}{\partial a} - \frac{\lambda}{2m} \left[ \mathcal{G}(p_{||}; x^3, a) \overset{\circ}{\mathbb{I}} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_0(p_{||}; a, y^3)}{\partial a \partial b} \Big|_{b=a} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathcal{G}(p_{||}; x^3, a)}{\partial a} \overset{\circ}{\mathbb{I}} \frac{\mathcal{G}_0(p_{||}; a, b)}{\partial b} \Big|_{b=a} \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Com os resultados (2.39) e (2.40), podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) &= \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} \\ \mathcal{G}_0(p_{||}; a^3, a^3) &= \frac{1}{2\sigma} \\ \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{||}; a, b)}{\partial a} \Big|_{b=a} &= \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{||}; a, b)}{\partial b} \Big|_{b=a} = 0 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{G}_0(p_{||}; a, b)}{\partial a \partial b} \Big|_{b=a} &= -\frac{\sigma}{2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Substituindo então as três últimas equações (4.19) em (4.17) e (4.18) encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(p_{||}; x^3, a) &= \mathbb{I} \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, a) + \frac{\lambda}{4m} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \mathcal{G}(p_{||}; x^3, a)}{\partial a} \overset{\circ}{\mathbb{I}} \\ \frac{\partial \mathcal{G}(p_{||}; x^3, a)}{\partial a} &= \mathbb{I} \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3)}{\partial a} + \frac{\lambda}{4m} \sigma \mathcal{G}(p_{||}; x^3, a) \overset{\circ}{\mathbb{I}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Substituindo a segunda equação (4.20) na primeira, usando o fato de que  $\overset{\circ}{\mathbb{I}} = -\mathbb{I}$  temos que

$$\mathcal{G}(p_{||}; x^3, a) = \mathbb{I} \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, a) + \frac{\lambda}{4m} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, a)}{\partial a} \overset{\circ}{\mathbb{I}} + \frac{\lambda^2}{16m^2} \mathcal{G}(p_{||}; x^3, a), \quad (4.21)$$

o que nos permite escrever

$$\mathcal{G}(p_{||}; x^3, a) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2}{16m^2}} \left[ \mathbb{I} \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, a) + \frac{\lambda}{4m} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, a)}{\partial a} \overset{\circ}{\mathbb{I}} \right]. \quad (4.22)$$

De forma semelhante, substituímos a primeira equação (4.20) na segunda, de

modo a escrever

$$\frac{\partial \mathcal{G}(p_{||}; x^3, a)}{\partial a} = \mathbb{I} \frac{\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, a)}{\partial a} + \frac{\lambda}{4m} \frac{\sigma}{2} \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, a) \mathring{\mathbb{I}} - \frac{\lambda^2}{16m^2} \frac{\mathcal{G}(p_{||}; x^3, a)}{\partial a}, \quad (4.23)$$

o que nos leva a

$$\frac{\partial \mathcal{G}(p_{||}; x^3, a)}{\partial a} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2}{16m^2}} \left[ \mathbb{I} \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, a)}{\partial a} + \frac{\lambda}{4m} \sigma \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, a) \mathring{\mathbb{I}} \right]. \quad (4.24)$$

Substituindo (4.22) e (4.24) em (4.16) e efetuado algumas manipulações simples, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(p_{||}; x^3, y^3) &= \mathbb{I} \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) \\ &- \frac{\frac{\lambda}{2m}}{1 + \frac{\lambda^2}{16m^2}} \left[ \mathbb{I} \frac{\lambda}{4m} \left( \sigma \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, a) \mathcal{G}_0(p_{||}; a, y^3) - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, a)}{\partial a} \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{||}; a, y^3)}{\partial a} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathring{\mathbb{I}} \left( \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, a) \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{||}; a, y^3)}{\partial a} - \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, a)}{\partial a} \mathcal{G}_0(p_{||}; a, y^3) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

Note que a expressão acima só envolve a transformada de Fourier da função de Green livre (sem o potencial externo) nas coordenadas paralelas,  $\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, a)$ , e suas derivadas. Com o auxílio de (2.39) e (2.40), podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) &= \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} \\ \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3)}{\partial y^3} &= -\text{sgn}(y^3 - x^3) \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2} \\ \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3)}{\partial x^3} &= -\text{sgn}(x^3 - y^3) \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

que levadas em (4.25) fornecem

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(p_{||}; x^3, y^3) &= \mathbb{I} \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} \\ &- \mathbb{I} \frac{e^{-\sigma(|x^3-a|+|y^3-a|)}}{2\sigma} \frac{\frac{\lambda^2}{16m^2}}{1 + \frac{\lambda^2}{16m^2}} \left[ 1 - \text{sgn}(a - x^3) \text{sgn}(a - y^3) \right] \\ &+ \mathring{\mathbb{I}} \frac{e^{-\sigma(|x^3-a|+|y^3-a|)}}{2\sigma} \frac{\frac{\lambda}{4m}}{1 + \frac{\lambda^2}{16m^2}} \left[ \text{sgn}(a - y^3) - \text{sgn}(a - x^3) \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

sendo  $\text{sgn}(X)$  a função sinal definida por

$$\begin{aligned} \text{sgn}(x) &= 1, \quad x > 0 \\ \text{sgn}(x) &= 0, \quad x = 0 \\ \text{sgn}(x) &= -1, \quad x < 0. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Lembramos nesse ponto que a função de Green do modelo é dada pela integral de Fourier de (4.27)

$$\mathbb{G}(x, y) = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathfrak{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})} \tag{4.29}$$

e a definição

$$\sigma = \sqrt{m^2 - p_{\parallel}^2}. \tag{4.30}$$

## 4.1 Interação entre o potencial e fontes externas

Nessa seção vamos considerar a forma geral que nos fornece a energia de interação entre o potencial e uma fonte externa estacionária arbitrária. Iniciamos pela hamiltoniana associada com a lagrangiana (4.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= (\partial_0 \phi_1) \partial_0 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_1)} \right) + (\partial_0 \phi_2) \partial_0 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_2)} \right) - \mathcal{L} \\ &= -\Phi^t \partial_0^2 \Phi - \mathbb{J}^t \Phi \\ &+ \frac{1}{2} \Phi^t \left[ \partial_{\mu} \partial^{\mu} + m^2 + \frac{\lambda^2}{m} \delta(x^3 - a) \overset{\circ}{\mathbb{I}} n_{\mu} \partial^{\mu} \right] \Phi \end{aligned} \tag{4.31}$$

e a correspondente energia

$$\begin{aligned} E &= \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{H} \\ &= \int d^3 \mathbf{x} \frac{1}{2} \Phi^t \left[ \partial_{\mu} \partial^{\mu} + m^2 + \frac{\lambda^2}{m} \delta(x^3 - a) \overset{\circ}{\mathbb{I}} n_{\mu} \partial^{\mu} \right] \Phi \\ &- \int d^3 \mathbf{x} \Phi^t \partial_0^2 \Phi - \int d^3 \mathbf{x} \mathbb{J}^t \Phi. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Usamos agora o fato de que

$$\Phi(x) = \int d^4y \mathbb{G}(x, y) \mathbb{J}(y) \quad (4.33)$$

e a sua versão transposta

$$\begin{aligned} \Phi^t(x) &= \int d^4y \mathbb{J}^t(z) \mathbb{G}^t(x, z) \\ &= \int d^4y \mathbb{J}^t(z) \mathbb{G}(z, x) \end{aligned} \quad (4.34)$$

pois vale a propriedade  $\mathbb{G}^t(x, z) = \mathbb{G}(z, x)$ , o que pode ser constatado a partir de (4.27) e do fato de que  $\overset{\circ}{\mathbb{I}}^t = -\overset{\circ}{\mathbb{I}}$ . Com isso, temos que

$$\int d^3\mathbf{x} - \mathbb{J}^t(x) \Phi(x) = - \int d^3\mathbf{x} \int d^4y \mathbb{J}^t(x) \mathbb{G}(x, y) \mathbb{J}(y) \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} &\int d^3\mathbf{x} \Phi^t \left[ \partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \frac{\lambda^2}{m} \delta(x^3 - a) \overset{\circ}{\mathbb{I}} n_\mu \partial^\mu \right] \Phi = \\ &= \int d^3\mathbf{x} \int d^4y \int d^4z \mathbb{J}^t(z) \mathbb{G}(z, x) \left[ \partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2}{m} \delta(x^3 - a) \overset{\circ}{\mathbb{I}} n_\mu \partial^\mu \right] \mathbb{G}(x, y) \mathbb{J}(y) . \end{aligned} \quad (4.36)$$

Tendo em vista a primeira equação (4.11) e o fato de que  $n_\mu = (0, 0, 0, -1)$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} &\left[ \partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \frac{\lambda^2}{m} \delta(x^3 - a) \overset{\circ}{\mathbb{I}} n_\mu \partial^\mu \right] \mathbb{G}(x, y) = \\ &= \mathbb{I} \delta^4(x, y) - \frac{\lambda}{2m} n_\mu \left( \partial^\mu \delta(x^3 - a) \right) \overset{\circ}{\mathbb{I}} \mathbb{G}(x, y) . \end{aligned} \quad (4.37)$$

que levado em (4.36) fornece, após algumas manipulações

$$\begin{aligned} &\int d^3\mathbf{x} \Phi^t \left[ \partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \frac{\lambda^2}{m} \delta(x^3 - a) \overset{\circ}{\mathbb{I}} n_\mu \partial^\mu \right] \Phi = \\ &= \int d^3\mathbf{x} \int d^4y \mathbb{J}^t(y) \mathbb{G}(y, x) \mathbb{J}(x) \\ &- \frac{\lambda}{2m} \int d^3\mathbf{x} \int d^4y \int d^4z \mathbb{J}^t(z) \mathbb{G}(z, x) \delta(x^3 - a) \overset{\circ}{\mathbb{I}} \left( n_\mu \partial^\mu \delta(x^3 - a) \right) \mathbb{G}(x, y) \mathbb{J}(y) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Substituindo (4.35) e (4.38) em (4.32) temos a expressão para a energia

$$\begin{aligned}
E &= - \int d^3\mathbf{x} \Phi^t \partial_0^2 \Phi \\
&- \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \int d^4y \mathbb{J}^t(y) \mathbb{G}(y, x) \mathbb{J}(x) \\
&- \frac{\lambda}{4m} \int d^3\mathbf{x} \int d^4y \int d^4z \mathbb{J}^t(z) \mathbb{G}(z, x) \delta(x^3 - a) \overset{\circ}{\mathbb{I}} \left( n_\mu \partial^\mu \delta(x^3 - a) \right) \mathbb{G}(x, y) \mathbb{J}(y)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Desse ponto em diante, vamos nos restringir apenas a fontes estacionárias, ou seja,

$$\mathbb{J}(x) = \mathbb{J}(\mathbf{x}) . \tag{4.40}$$

Isso faz com que a solução de campo  $\Phi$  também seja estacionária,  $\Phi(\mathbf{x})$ , o que anula a primeira contribuição no lado direito da equação (4.39), ou seja

$$\begin{aligned}
E &= -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \int d^4y \mathbb{J}^t(\mathbf{y}) \mathbb{G}(y, x) \mathbb{J}(\mathbf{x}) \\
&- \frac{\lambda}{4m} \int d^3\mathbf{x} \int d^4y \int d^4z \mathbb{J}^t(\mathbf{z}) \mathbb{G}(z, x) \delta(x^3 - a) \overset{\circ}{\mathbb{I}} \left( n_\mu \partial^\mu \delta(x^3 - a) \right) \mathbb{G}(x, y) \mathbb{J}(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Seguindo um procedimento semelhante aquele apresentado no capítulo anterior, substituímos (4.29) em (4.41), efetuamos as integrais em uma das coordenadas temporais em cada termo, posteriormente integramos em todas as componentes temporais dos momentos. Além disso no segundo termo no lado direito, também usamos as propriedades da função delta de Dirac e de sua derivada. Com isso temos que

$$\begin{aligned}
E &= -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} \int \frac{d^2\mathbf{p}_\parallel}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p}_\parallel(\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{y}_\parallel)} \mathbb{J}^t(\mathbf{x}) \mathcal{G}(p^0 = 0, \mathbf{p}_\parallel; x^3, y^3) \mathbb{J}(\mathbf{y}) \\
&\quad \frac{\lambda}{4m} \int d^3\mathbf{y} \int d^2\mathbf{z} \int \frac{d^2\mathbf{p}_\parallel}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p}_\parallel(\mathbf{z}_\parallel - \mathbf{y}_\parallel)} \mathbb{J}^t(\mathbf{z}) \\
&\quad \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{G}(p^0 = 0, \mathbf{p}_\parallel; z^3, x^3)}{\partial x^3} \right) \overset{\circ}{\mathbb{I}} \mathcal{G}(p^0 = 0, \mathbf{p}_\parallel; x^3, y^3) \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{G}(p^0 = 0, \mathbf{p}_\parallel; z^3, x^3) \overset{\circ}{\mathbb{I}} \left( \frac{\partial \mathcal{G}(p^0 = 0, \mathbf{p}_\parallel; z^3, x^3)}{\partial x^3} \right) \right] \Big|_{x^3=a} \mathbb{J}(\mathbf{y}) . \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Com o resultado (4.27) e a definição (4.44), após algumas manipulações simples, a energia (4.42) se torna

$$\begin{aligned}
E = \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y} \int \frac{d^2\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p}_{\parallel}(\mathbf{x}_{\parallel}-\mathbf{y}_{\parallel})} \mathbb{J}^t(\mathbf{x}) \left[ -\frac{e^{-\sqrt{m^2+\mathbf{p}_{\parallel}}|x^3-y^3|}}{4\sqrt{m^2+\mathbf{p}_{\parallel}}} \mathbb{I} \right. \\
+ \frac{e^{-\sqrt{m^2+\mathbf{p}_{\parallel}}(|x^3-a|+|y^3-a|)}}{4\sqrt{m^2+\mathbf{p}_{\parallel}}} \left( \mathbb{I} \frac{\frac{\lambda^2}{16m^2}}{1+\frac{\lambda^2}{16m^2}} \left( 1 - \text{sgn}(a-x^3)\text{sgn}(a-y^3) \right) \right. \\
- \mathbb{I} \frac{\frac{\lambda}{4m}}{1+\frac{\lambda^2}{16m^2}} \left( \text{sgn}(a-y^3) - \text{sgn}(a-x^3) \right) \\
\left. \left. - \mathbb{I} \frac{\frac{\lambda}{4m}}{1+\frac{\lambda^2}{16m^2}} \left( \text{sgn}(a-y^3) + \text{sgn}(a-x^3) \right) \right) \right] \mathbb{J}(\mathbf{y}) \quad (4.43)
\end{aligned}$$

A expressão (4.43) fornece a energia do sistema na presença de fontes externas e do potencial. Vamos considerá-la agora em casos específicos de maior interesse, de modo a investigar que tipo de interação podemos obter no modelo (4.3) e comparar os resultados obtidos com modelos já existentes na literatura.

Vamos iniciar pelo estudo da interação entre o potencial externo e uma fonte pontual estacionária do campo escalar, similar ao que viria a ser uma carga pontual estacionária para o campo de Maxwell. A corrente que simula tal fonte no modelo (4.3) é dada por

$$\mathbb{J} = \mathbb{Q} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{A}) \quad (4.44)$$

sendo  $\mathbb{Q}$  uma matriz coluna e  $\mathbf{A}$  a posição onde a fonte se localiza. Vamos escrever a matriz  $\mathbb{Q}$  na forma

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Sem perda de generalidade, desse ponto em diante vamos tomar o vetor  $\mathbf{A}$  como tendo apenas componente não nula perpendicular ao plano onde o potencial se concentra, ou seja,  $\mathbf{A} = (0, 0, A)$ . Nesse caso, o primeiro termo no lado direito da equação (4.43) vai fornecer uma contribuição divergente correspondendo à auto energia da fonte. Esse termo já estaria presente mesmo na ausência do potencial externo e não depende da distância entre o plano onde o potencial se concentra e a fonte.

A contribuição de interação entre o potencial e a fonte é dada pelos termos presentes na segunda, terceira e quarta linhas da equação (4.43). A contribuição dada pela segunda linha é nula, pois, por conta da função delta de Dirac, ela será proporcional ao fator  $1 - \text{sgn}(a - A)\text{sgn}(a - A) = 0$ . De forma semelhante, a

contribuição da terceira linha também é nula, sendo proporcional a  $\text{sgn}(a - A) - \text{sgn}(a - A) = 0$ . Resta apenas a contribuição da quarta linha, que será proporcional ao fator

$$(q_1 \ q_2) \overset{\circ}{\mathbb{I}} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.46)$$

que também se anula.

Sendo assim, não há interação entre o potencial e a fonte estacionária no modelo proposto. Até onde sabemos, esse é o primeiro modelo de campo interagindo com potencial externo espacialmente localizado onde não há interação entre o potencial e uma fonte estacionária do tipo carga.

## 4.2 Sistema com duas cargas na presença do potencial

Nessa seção consideramos um sistema composto pelo potencial dado no modelo (4.3) e duas fontes pontuais estacionárias, como aquelas da equação (4.44). A corrente total nesse caso será a soma de duas contribuições, uma de cada carga pontual

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}_B + \mathbb{J}_C = \mathbb{Q}_B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{B}) + \mathbb{Q}_C \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{C}), \quad (4.47)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_B(x) &= \mathbb{Q}_B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{B}) \\ \mathbb{J}_C(x) &= \mathbb{Q}_C \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{C}) \end{aligned} \quad (4.48)$$

como sendo as correntes para cada uma das cargas em questão, localizadas nas posições  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ .

Ao substituirmos a corrente total (4.47) em (4.43) vamos ter os chamados termos diretos e termos de troca. Os termos diretos contêm apenas contribuições exclusivas de  $\mathbb{J}_B$  e termos com contribuições exclusivas de  $\mathbb{J}_C$  (e do potencial, naturalmente). Esses termos fornecem as auto energias da carga  $B$  e da carga  $C$ , além da energia de interação do potencial com a carga  $B$ , exclusivamente, e a energia de interação do potencial com a carga  $C$ , exclusivamente. Os termos de auto energia são desconsiderados, pois não contribuem para a dinâmica do sistema. Os termos de interação



entre cada carga, exclusivamente, e o plano são nulos, como demonstrado no final da seção anterior. Sendo assim, os termos diretos não trazem contribuição alguma para a energia total de interação do sistema.

Vamos então nos concentrar nos termos de troca, ou seja, aqueles que envolvem simultaneamente  $\mathbb{J}_B$  e  $\mathbb{J}_C$ .

A contribuição da primeira linha da equação (4.43), considerando-se apenas os termos de troca, é dada pela integral

$$\begin{aligned}
E_{0,INT} = & - \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} \int \frac{d^2\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p}_{\parallel}(\mathbf{x}_{\parallel}-\mathbf{y}_{\parallel})} \frac{e^{-\sqrt{m^2+\mathbf{p}_{\parallel}}|x^3-y^3|}}{4\sqrt{m^2+\mathbf{p}_{\parallel}}} \\
& \left[ (q_{1B} \ q_{2B})\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{B}) \begin{pmatrix} q_{1C} \\ q_{2C} \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{C}) \right. \\
& \left. + (q_{1C} \ q_{2C})\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{C}) \begin{pmatrix} q_{1B} \\ q_{2B} \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{B}) \right]. \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Integrando em  $d^3\mathbf{x}$  e  $d^3\mathbf{y}$ , definindo os vetores paralelos ao plano onde o potencial se concentra  $\mathbf{A}_{\parallel} = (A^1, A^2, 0)$  e  $\mathbf{B}_{\parallel} = (B^1, B^2, 0)$ , usando coordenadas polares para  $\mathbf{p}_{\parallel}$ , com  $r$  sendo a coordenada radial e  $\phi$ , a angular, e efetuando algumas manipulações simples, podemos escrever

$$\begin{aligned}
E_{0,INT} = & -(q_{1B}q_{1C} + q_{2B}q_{2C}) \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dr \ r \frac{e^{-\sqrt{m^2+r}|B^3-C^3|}}{\sqrt{m^2+r}} \\
& \int_0^{2\pi} d\phi e^{ir|\mathbf{B}_{\parallel}-\mathbf{C}_{\parallel}|\cos(\phi)}. \quad (4.50)
\end{aligned}$$

A integral em  $d\phi$  em (4.50) é uma representação da função de Bessel  $J_0$ , pois

$$J_0(x) = 2\pi \int_0^{2\pi} d\phi e^{ix\cos(\phi)}, \quad (4.51)$$

sendo assim

$$\begin{aligned}
E_{0,INT} = & -(q_{1B}q_{1C} + q_{2B}q_{2C}) \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} dr \ r \frac{e^{-\sqrt{m^2+r}|B^3-C^3|}}{\sqrt{m^2+r}} \int_0^{2\pi} J_0(r|\mathbf{B}_{\parallel}-\mathbf{C}_{\parallel}|) \\
= & -(q_{1B}q_{1C} + q_{2B}q_{2C}) \frac{m}{4\pi} \int_1^{\infty} du \ e^{-um|B^3-C^3|} J_0(m\sqrt{u^2-1}|\mathbf{B}_{\parallel}-\mathbf{C}_{\parallel}|) \quad (4.52)
\end{aligned}$$

onde efetuamos a transformação de variável  $u = \sqrt{1 + \frac{r^2}{m^2}}$ .

A integração acima fornece a função de Bessel  $K_{1/2}$  de acordo com a página 709, fórmula M0179a da referência [13],

$$E_{0,INT} = -(q_{1B}q_{1C} + q_{2B}q_{2C}) \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( m^2 |B^3 - C^3|^2 + m^2 |\mathbf{B}_{\parallel} - \mathbf{C}_{\parallel}|^2 \right)^{-1/4} K_{1/2} \left( \sqrt{m^2 |B^3 - C^3|^2 + m^2 |\mathbf{B}_{\parallel} - \mathbf{C}_{\parallel}|^2} \right). \quad (4.53)$$

Usando o fato de que

$$K_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{x^{1/2}} \quad (4.54)$$

e  $m^2 |B^3 - C^3|^2 + m^2 |\mathbf{B}_{\parallel} - \mathbf{C}_{\parallel}|^2 = m^2 |\mathbf{B} - \mathbf{C}|^2$ , após algumas manipulações simples, podemos obtemos a primeira contribuição para a energia de interação do sistema composto pelo potencial e as duas fontes

$$E_{0,INT} = -(q_{1B}q_{1C} + q_{2B}q_{2C}) \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{B}-\mathbf{C}|}}{|\mathbf{B} - \mathbf{C}|}. \quad (4.55)$$

Note que a expressão (4.55) nada mais é do que o potencial de Yukawa entre as das cargas. Isso é esperado, pois essa contribuição é obtida pela função de Green livre (na ausência do potencial) que está relacionada com o campo escalar complexo com massa.

A próxima contribuição para a energia de interação vem da segunda linha da equação (4.43),

$$E_{1,INT} = \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} \int \frac{d^2\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p}_{\parallel}(\mathbf{x}_{\parallel}-\mathbf{y}_{\parallel})} \frac{e^{-\sqrt{m^2+\mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^3-a|+|y^3-a|)}}{4\sqrt{m^2+\mathbf{p}_{\parallel}^2}} \frac{\frac{\lambda^2}{16m^2}}{1+\frac{\lambda^2}{16m^2}} \left( 1 - \text{sgn}(a-x^3)\text{sgn}(a-y^3) \right) \left[ (q_{1B} \ q_{2B})\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{B}) \begin{pmatrix} q_{1C} \\ q_{2C} \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{C}) + (q_{1C} \ q_{2C})\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{C}) \begin{pmatrix} q_{1B} \\ q_{2B} \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{B}) \right]. \quad (4.56)$$

Procedemos agora de forma totalmente similar ao que fizemos para chegar ao resultado (4.55). Integrando em  $d^3\mathbf{x}$  e  $d^3\mathbf{y}$ , usando coordenadas polares para  $d^2\mathbf{p}_{\parallel}$  e a representação da função de Bessel  $J_0$  (4.51), efetuando a transformação de variável

$u = \sqrt{1 + \frac{r^2}{m^2}}$ , usando a fórmula fórmula M0179a da referência [13] e efetuando algumas manipulações simples, obtemos que

$$E_{1,INT} = (q_{1B}q_{1C} + q_{2B}q_{2C}) \frac{1}{4\pi} \frac{\frac{\lambda^2}{16m^2}}{1 + \frac{\lambda^2}{16m^2}} \left(1 - \text{sgn}(a - B^3)\text{sgn}(a - C^3)\right) \frac{e^{-m\sqrt{(|B^3-a|+|C^3-a|)^2+|\mathbf{B}_{\parallel}-\mathbf{C}_{\parallel}|^2}}}{\sqrt{(|B^3-a|+|C^3-a|)^2+|\mathbf{B}_{\parallel}-\mathbf{C}_{\parallel}|^2}}. \quad (4.57)$$

A contribuição (4.57) leva em conta a presença tanto do potencial como das duas cargas simultaneamente. Ele se anula quando ambas as cargas estão do mesmo lado do plano onde o potencial se concentra, dado o fator  $(1 - \text{sgn}(a - B^3)\text{sgn}(a - C^3))$ . Ele também se anula quando  $\lambda = 0$ , o que já é esperado, pois nesse caso não há acoplamento entre o potencial e o campo.

Vamos para as últimas contribuições para a energia de interação, dadas pela linha três e quatro da equação (4.43), denotadas respectivamente por  $E_{+,INT}$  e  $E_{-,INT}$ . Ambas podem ser tratadas simultaneamente e são dadas pelas integrais

$$E_{\pm,INT} = - \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y} \int \frac{d^2\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p}_{\parallel}(\mathbf{x}_{\parallel}-\mathbf{y}_{\parallel})} \frac{e^{-\sqrt{m^2+\mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^3-a|+|y^3-a|)}}{4\sqrt{m^2+\mathbf{p}_{\parallel}^2}} \frac{\frac{\lambda}{4m}}{1 + \frac{\lambda^2}{16m^2}} \left( \text{sgn}(a - y^3) \pm \text{sgn}(a - x^3) \right) \left[ (q_{1B} \ q_{2B}) \overset{\circ}{\mathbb{I}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{B}) \begin{pmatrix} q_{1C} \\ q_{2C} \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{C}) + (q_{1C} \ q_{2C}) \overset{\circ}{\mathbb{I}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{C}) \begin{pmatrix} q_{1B} \\ q_{2B} \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{B}) \right] \quad (4.58)$$

Integrando em  $d^3\mathbf{x}$  e  $d^3\mathbf{y}$  e tomando os produtos matriciais chegamos ao resultado

$$E_{\pm,INT} = - \int \frac{d^2\mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{\frac{\lambda}{4m}}{1 + \frac{\lambda^2}{16m^2}} (-q_{1B}q_{2C} + q_{2B}q_{1C}) \frac{e^{-\sqrt{m^2+\mathbf{p}_{\parallel}^2}(|x^3-a|+|y^3-a|)}}{4\sqrt{m^2+\mathbf{p}_{\parallel}^2}} \left[ \left( \text{sgn}(a - C^3) \pm \text{sgn}(a - B^3) \right) - \left( \text{sgn}(a - C^3) \pm \text{sgn}(a - B^3) \right) \right] = 0, \quad (4.59)$$

ou seja, as contribuições  $E_{\pm,INT}$  são nulas.

A energia de interação total é dada pela soma de (4.55), (4.57) e (4.59),

$$\begin{aligned}
E_{INT} &= E_{0,INT} + E_{1,INT} + E_{+,INT} + E_{-,INT} \\
&= (q_{1B}q_{1C} + q_{2B}q_{2C}) \frac{1}{4\pi} \left[ - \frac{e^{-m|\mathbf{B}-\mathbf{C}|}}{|\mathbf{B}-\mathbf{C}|} \right. \\
&\quad + \frac{\frac{\lambda^2}{16m^2}}{1 + \frac{\lambda^2}{16m^2}} \left( 1 - \text{sgn}(a - B^3) \text{sgn}(a - C^3) \right) \\
&\quad \left. \times \frac{e^{-m\sqrt{(|B^3-a|+|C^3-a|)^2+|\mathbf{B}_{\parallel}-\mathbf{C}_{\parallel}|^2}}}{\sqrt{(|B^3-a|+|C^3-a|)^2+|\mathbf{B}_{\parallel}-\mathbf{C}_{\parallel}|^2}} \right]. \tag{4.60}
\end{aligned}$$

A dependência no parâmetro de acoplamento  $\lambda$  é dada somente pelo fator multiplicativo

$$\frac{\frac{\lambda^2}{16m^2}}{1 + \frac{\lambda^2}{16m^2}} \tag{4.61}$$

e seu comportamento pode ser observado na figura (4.2).

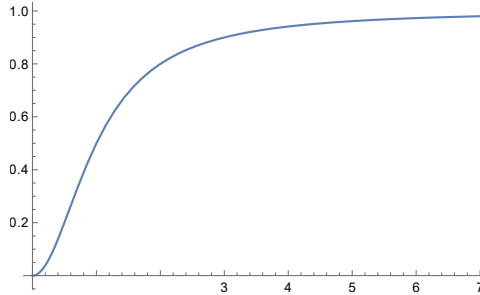


Figura 4.1: O eixo vertical indica o valor do fator (4.61) que modula a dependência em  $\lambda$  da energia (4.60). O eixo horizontal designa  $\lambda/(4m)$ .

Como já mencionado anteriormente, a primeira contribuição para a energia (4.60) é a interação direta entre as duas cargas e está presente mesmo na ausência do potencial, quando  $\lambda = 0$ . A segunda contribuição é induzida pela presença do potencial e só não se anula quando as cargas estão em lados opostos ao plano onde o potencial se concentra. Quando  $\lambda = 0$ , o segundo fator em (4.60) se anula. Quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , a energia (4.60) se trona

$$E_{INT}|_{\lambda \rightarrow \infty} = (q_{1B}q_{1C} + q_{2B}q_{2C}) \frac{1}{4\pi} \left[ - \frac{e^{-m|\mathbf{B}-\mathbf{C}|}}{|\mathbf{B}-\mathbf{C}|} \right]$$

$$+ \left( 1 - \text{sgn}(a - B^3) \text{sgn}(a - C^3) \right) \frac{e^{-m \sqrt{(|B^3 - a| + |C^3 - a|)^2 + |\mathbf{B}_{||} - \mathbf{C}_{||}|^2}}}{\sqrt{(|B^3 - a| + |C^3 - a|)^2 + |\mathbf{B}_{||} - \mathbf{C}_{||}|^2}} \Big]. \quad (4.62)$$

A massa do campo faz com que a energia de interação caia exponencialmente. Além disso, para a contribuição oriunda do potencial, ainda temos um decaimento devido ao fator (4.61), o que pode ser constatado na figura (4.2)

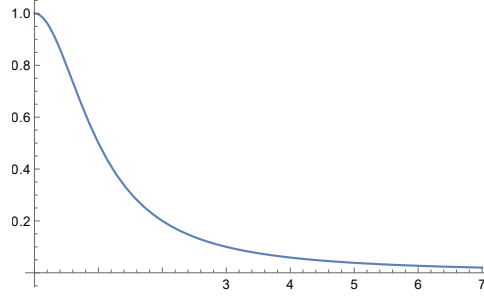


Figura 4.2: O eixo vertical indica o valor do fator (4.61) e o eixo horizontal designa  $4m/\lambda$ .

No caso de massa zero,  $m = 0$ , a expressão (4.60) se reduz a

$$E_{INT}|_{m=0} = (q_{1B}q_{1C} + q_{2B}q_{2C}) \frac{1}{4\pi} \left[ - \frac{1}{|\mathbf{B} - \mathbf{C}|} + \left( 1 - \text{sgn}(a - B^3) \text{sgn}(a - C^3) \right) \frac{1}{\sqrt{(|B^3 - a| + |C^3 - a|)^2 + |\mathbf{B}_{||} - \mathbf{C}_{||}|^2}} \right]. \quad (4.63)$$

As expressões acima exibem dependência em diversas variáveis e sua análise deve demandar um estudo minucioso da sua dependência em todas elas. Nesse trabalho vamos nos restringir ao caso específico do campo sem massa (4.63). Vamos ainda tomar o potencial concentrado no plano  $x^3 = 0$ , o que implica em tomar  $a = 0$ , e considerar as cargas dispostas em uma linha perpendicular ao plano  $x^3 = 0$  e equidistantes a esse plano. Sem perda de generalidade, podemos tomar para esse *setup*,  $\mathbf{B} = (0, 0, R)$  e  $\mathbf{C} = (0, 0, -R)$ , com  $R > 0$ . Com isso, energia (4.63) se torna

$$\begin{aligned} E_{INT}|_{m=0} &= (q_{1B}q_{1C} + q_{2B}q_{2C}) \frac{1}{4\pi} \left[ - \frac{1}{2R} + 2 \frac{1}{2R} \right] \\ &= (q_{1B}q_{1C} + q_{2B}q_{2C}) \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2R} \end{aligned} \quad (4.64)$$

É interessante comparar o resultado (4.64) com a mesma situação na ausência do potencial (quando  $\lambda = 0$ ), onde teríamos

$$E_{INT}|_{m=0,\lambda=0} = -(q_{1B}q_{1C} + q_{2B}q_{2C}) \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2R}. \quad (4.65)$$

Com (4.64) e (4.65) podemos ver que a presença do potencial na distância média entre as cargas muda o sinal da energia de interação entre essas. Isso faz mudar também o sinal e a natureza da força entre as cargas.

Outra curiosidade muito peculiar do modelo é o fato de que a energia de interação entre duas cargas e o potencial é finita, mesmo quando consideramos uma das cargas no plano onde o potencial se concentra. Para ilustrar isso, vamos tomar novamente um *setup* com as cargas dispostas em uma linha perpendicular ao plano  $x^3 = 0$  e considerar esse como o plano onde o potencial se concentra, o que implica em  $a = 0$ . Sem perda de generalidade, vamos adotar um sistema de coordenadas onde  $\mathbf{B} = (0, 0, R)$  (com  $R > 0$ ) e  $\mathbf{C} = (0, 0, 0)$ . Dado o fato de que  $\text{sgn}(a - C^3) = \text{sgn}(0) = 0$ , a expressão (4.63) fornece

$$E_{INT}|_{m=0} = (q_{1B}q_{1C} + q_{2B}q_{2C}) \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{1}{R} + (1 - 0) \frac{1}{R} \right] = 0. \quad (4.66)$$

Usualmente, em modelos onde campos se acoplam com potenciais tipo delta, as interações envolvendo fontes de campo pontuais estacionárias divergem quando as fontes estão nas regiões onde os potenciais se concentram.

## Capítulo 5

# Conclusões, perspectivas futuras e comentários finais

Nessa dissertação fizemos uma breve revisão do modelo de um campo escalar interagindo com um potencial tipo delta de Dirac concentrado ao longo de um plano. Abordamos o campo escalar complexo e com massa. Anteriormente, até onde sabemos, problemas desse tipo só levavam em conta o campo real. A utilização do campo complexo não traz grandes novidades, uma vez que o modelo pode ser decomposto em dois campos reais. No entanto, essa exposição deve servir para introduzir leitores não especialistas no assunto, principalmente estudantes. Ainda mais, nossa abordagem foi feita com o campo estruturado em uma forma matricial, algo importante para o restante do trabalho, onde apresentamos resultados originais.

Posteriormente propomos um modelo onde o campo escalar complexo com massa se acopla com um potencial externo de caráter operatorial e localizado ao longo de um plano. O potencial é do tipo Delta de Dirac, mas o acoplamento com o campo se dá por meio da corrente de Klein-Gordon. Esse tipo de acoplamento distingue os dois lados do plano, pois a corrente tem uma estrutura vetorial.

O modelo exhibe diversas peculiaridades, ainda não observadas em nenhum modelo considerado na literatura até o momento (até onde sabemos). Por exibir tanto o próprio campo como sua derivada primeira, o termo lagrangiano de acoplamento leva a uma equação de movimento não simétrica entre o campo e seu complexo conjugado. Além disso, em uma abordagem matricial, a função de Green correspondente é a inversa de um operador diferencial diferente daquele que observamos na lagrangiana quando essa é escrita em termos de operadores de segunda ordem. Esse fato peculiar faz com que a energia de interação entre o potencial e fontes ex-

ternas não possa ser calculada de forma trivial, como ocorre comumente em teorias quadráticas.

Mostramos ser nula a energia de interação entre o potencial e uma fonte análoga ao que viria a ser uma carga pontual estacionária para o campo eletromagnético. Esse é um resultado surpreendente, pois até onde conhecemos, nenhum modelo desse tipo exhibe essa característica.

Estudamos a energia de interação obtida com a presença do potencial e de duas cargas escalares simultaneamente. Nesse caso há uma interação entre os três agentes envolvidos (duas fontes e o potencial). O resultado obtido tem uma estrutura com diversos parâmetros e sua análise requer um estudo mais minucioso.

Vale mencionar que todos os resultados apresentados são exatos, não sendo necessário se apelar para métodos perturbativos para obtê-los.

Quando ambas as cargas escalares se encontram do mesmo lado do plano onde o potencial se concentra, então não tem influência alguma na interação das cargas. No caso contrário, quando as cargas estão em lados opostos do potencial, temos uma contribuição para a energia de interação entre estas que depende de suas posições e também da posição do potencial.

No caso bem específico do campo sem massa, quando as cargas estão em lados opostos do potencial, equidistantes deste e localizadas em uma linha perpendicular ao potencial, mostramos que a interação entre as cargas é o inverso daquela que seria obtida sem a presença do potencial. Ou seja, o potencial pode inverter o sinal da interação entre as cargas quando colocado de forma equidistante a elas.

Quando a constante de acoplamento entre o potencial e o campo se anula, a interação entre duas cargas escalares é simplesmente a de Yukawa, como já era de se esperar. À medida que a constante de acoplamento aumenta, a contribuição introduzida pelo potencial também aumenta, atingindo seu máximo quando essa constante vai a infinito. Mesmo nesse caso extremo, a energia não diverge e tende a uma expressão finita.

Pretendemos estudar a energia de interação entre as duas cargas escalares na presença do potencial em diversas outras situações. Acreditamos que vamos obter vários resultados ainda não observados em nenhum outro modelo tratado até o momento na literatura.

Devemos estudar a própria corrente de Klein-Gordon gerada por cargas escalares. Resultados preliminares indicam que a corrente gerada por uma única carga pontual estacionária é nula.

Pretendemos calcular a solução de campo gerada por uma carga escalar pontual



e estacionária.

Será fundamental considerar *setups* envolvendo o potencial e duas cargas, quando as cargas não estão dispostas em uma linha perpendicular ao plano onde o potencial se concentra. Acreditamos que vamos obter um torque induzido no sistema nesse caso. Também é imprescindível fazer um estudo da força atuante nos três elementos desse tipo de configuração e buscar por situações em que ocorram pontos de equilíbrio.

# Bibliografia

- [1] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory*, World Scientific (2008).
- [2] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer (1993).
- [3] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*, 3<sup>a</sup> ed., Springer (1987).
- [4] F.A. Barone and F.E. Barone, *Field theoretic description of partially reflective surfaces*, Phys. Rev. D **89**, 065020 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevD.89.065020.
- [5] F.A. Barone and F.E. Barone, *Field theoretic description of electromagnetic boundaries*, Eur. Phys. J. C, **74**, 3113 (2014). DOI: 10.1140/epjc/s10052-014-3113-y.
- [6] H.L. Oliveira, , L.H.C. Borges, F.E. Barone and F.A. Barone, *Magnetoelectric boundary simulated by a Chern Simons like model*, Eur. Phys. J. C **81**, 558 (2021). DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09356-6.
- [7] R.M. Cavalcanti, *Casimir force between partially transparent plane mirrors*, (2002) [arxiv: hep-th/0201150].
- [8] M. Bordag, D. Hennig and D. Robaschik, *Vacuum energy in quantum field theory with external potentials concentrated on planes*, Journal of Physics A: Mathematical and General, **25**, 4483 (1992). DOI: 10.1088/0305-4470/25/16/023.
- [9] G.T. Camilo, F.A. Barone and F.E. Barone, *Interactions between delta-like sources and potentials*, Phys. Rev. D **87**, 025011 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevD.87.025011.
- [10] Kimball A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero Point Energy*, World Scientific (2001).

- [11] João Cláudio Fernandes da Silva, *Condições de Neumann generalizadas*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajuba (2018). <https://repositorio.unifei.edu.br/jspui/handle/123456789/1197>.
- [12] Everson Henrique Rodrigues, *Campo de Lee-Wick na presença de fronteiras semi-transparentes*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajuba (2020). <https://repositorio.unifei.edu.br/jspui/handle/123456789/2145>.
- [13] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7<sup>a</sup>ed., Elsevier (2007).