

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Ciclos limites, paralelos e meridianos invariantes
para campos vetoriais polinomiais sobre
quádricas de revolução em \mathbb{R}^3**

Ana Elisa Vilasbôas Moreira

Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da
CAPES.

ITAJUBÁ, 4 DE MARÇO DE 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Ciclos limites, paralelos e meridianos invariantes
para campos vetoriais polinomiais sobre
quádricas de revolução \mathbb{R}^3**

Ana Elisa Vilasbôas Moreira

Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ – MG

4 DE MARÇO DE 2016

Dedico este trabalho em especial à minha mãezinha que muito rezou para que eu pudesse chegar até aqui.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, à minha família. Meu pai, meu irmão e, em especial, à minha mãe, que nunca perdeu a fé em mim e sempre esteve ao meu lado quando eu precisei. Mãe, eu te amo!

Agradeço a todos os amigos que fiz na graduação, em especial à Sueni, ao Willian, à Jerusa e à Carol. Além disso, tem aqueles amigos que não são da matemática, mas que pude conhecer através do curso, essa foi uma grande experiência e eu nunca vou me esquecer de vocês.

Agradeço aos colegas que participaram de minha formação.

Agradeço a todos os professores, ao coordenador do curso, Luis Fernando, ao meu orientador, Fábio, à professora Mariza pela sua disposição, e em especial ao professor Baêta, que não lecionou nenhuma matéria no mestrado, mas me apoiou muito na graduação e continua me dando sábios conselhos sempre que, eventualmente, nos encontramos. Pra todos vocês gostaria de deixar esta mensagem: “Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.” – Cora Coralina.

Agradeço também à todos os servidores da Unifei, o trabalho de todos é fundamental para que a instituição funcione.

E por fim, mas não menos importante, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

Ninguém nunca é um perdedor enquanto não para de tentar. - Mike Ditka.

Resumo

Neste trabalho estudamos as formas normais de campos vetoriais polinomiais de grau arbitrário em \mathbb{R}^3 tendo uma quádrlica não-degenerada, ou o toro, ou uma cúbica invariante pelo seu fluxo. Caracterizamos todas as possíveis configurações de meridianos e paralelos invariantes que esses campos vetoriais podem exibir. Além disso analisamos quando os meridianos ou os paralelos invariantes fechados podem ser ciclos limites.

Palavras-chave: Campo vetorial polinomial, superfície algébrica invariante, paralelo e meridiano invariante, ciclo limite.

Abstract

In this work we study normal forms for polynomial vector fields of arbitrary degree in \mathbb{R}^3 having a non-degenerated quadric, or the torus, or a cubic invariant by their flows. We characterize all the possible configurations of invariant meridians and parallels that these vector fields can exhibit. Furthermore we analyze when the invariant closed meridians or the invariant parallels can be limit cycles.

Keywords: Polynomial vector field, invariant algebraic surface, invariant meridian and parallel, limit cycle.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
1 Introdução	1
2 Preliminares	5
2.1 Sistemas diferenciais polinomiais em \mathbb{R}^3 e ciclos limites	5
2.2 Método da média	6
2.3 Curvas e superfícies algébricas invariantes	8
2.4 O polinômio extático	10
3 Campos vetoriais polinomiais em \mathbb{R}^3 sobre quádras	15
3.1 Formas normais para campos vetoriais polinomiais de grau m sobre \mathbb{Q}^2 . .	16
3.2 Configurações dos meridianos e paralelos invariantes	25
3.2.1 O polinômio extático e suas relações com meridianos e paralelos . .	25
3.2.2 Meridianos e paralelos invariantes	26
3.3 Realização dos paralelos invariantes como ciclos limites	35
4 Campos vetoriais polinomiais em \mathbb{R}^3 sobre o toro	44
4.1 Configuração dos meridianos e paralelos invariantes	45

4.2	Realização dos meridianos e paralelos invariantes como ciclos limites	48
5	Campos vetoriais polinomiais em \mathbb{R}^3 sobre uma superfície cúbica	53
5.1	Uma cúbica especial	53
5.2	Ciclos limites, meridianos e paralelos invariantes sobre \mathcal{C}_3	55
	Conclusões	61
	Bibliografia	62

Capítulo 1

Introdução

A Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias iniciou-se com H. Poincaré [10] em 1881. Nesta teoria, as pesquisas sobre ciclos limites, que são órbitas periódicas isoladas, constituem uma das partes mais difíceis e interessantes. A noção de ciclo limite para campos vetoriais planares também foi introduzida por H. Poincaré.

Em muitas aplicações o número e a localização de ciclos limites é importante para entender o comportamento dinâmico de um sistema. O problema mais famoso sobre ciclos limites foi proposto por Hilbert em 1900 no Congresso Internacional de Matemática de Paris. Hilbert [5] divulgou uma lista com 23 problemas, dentre eles, o 16º Problema, cuja sua segunda parte se refere à determinação do número máximo de ciclos limites de um sistema diferencial polinomial de grau n do tipo

$$\dot{x} = \sum_{i+j=0}^m a_{ij}x^i y^j \quad \dot{y} = \sum_{i+j=0}^k b_{ij}x^i y^j,$$

onde n é o máximo entre os graus m e k , em função de seu grau. Mais especificamente, “Qual é o número máximo de ciclos limites de um campo vetorial polinomial de grau n e quais são as suas posições relativas?” Esta conjectura parece ter sido demonstrada recentemente por J. Llibre e P. Pedregal ver [8] e [12].

Sistemas diferenciais polinomiais aparecem frequentemente na literatura devido a sua importância teórica, assim como seu uso em matemática aplicada, uma vez que sistemas polinomiais são frequentemente usados para modelar fenômenos naturais que surgem na

Física, Biologia, Química e outras ciências. Desta maneira muitos livros e centenas de artigos têm sido publicados visando descrever a dinâmica das soluções de sistemas diferenciais polinomiais. No entanto, esta dinâmica está longe de ser completamente entendida, mesmo no caso quadrático, i.e., quando o sistema tem grau $n = 2$. De fato, a dinâmica gerada pelo fluxo de um sistema com grau $n > 2$ é, em geral, muito complexa e difícil de ser estudada. Uma das ferramentas usadas para estudar a dinâmica de um sistema diferencial polinomial é a determinação de superfícies bidimensionais mergulhadas em \mathbb{R}^3 que são invariantes pelo fluxo desse sistema. A dinâmica de um sistema tridimensional é melhor entendida quando este possui uma superfície algébrica invariante.

Existe também um grande interesse no estudo das curvas algébricas invariantes de campos vetoriais polinomiais no plano, principalmente depois de 1878 quando Darboux [1] mostrou que um número suficiente dessas curvas força a existência de uma integral primeira. É claro que conhecendo uma integral primeira de um sistema diferencial bidimensional podemos descrever seu retrato de fase – o principal objetivo da teoria qualitativa de equações diferenciais.

Em [7], Llibre, Messias e Reinol encontraram as formas normais de todos os sistemas diferenciais polinomiais em \mathbb{R}^3 , os quais possuem uma quádrlica não-degenerada ou degenerada como superfície algébrica invariante. Uma quádrlica é uma superfície $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, y, z) = 0$ em \mathbb{R}^3 definida implicitamente por uma equação algébrica de grau 2. A quádrlica $\mathcal{G} = 0$ é *não-degenerada* se o polinômio \mathcal{G} é irredutível em $\mathbb{C}[x, y, z]$. As quádrlicas não-degeneradas são classificadas como: cone, cilindro elíptico, cilindro parabólico, cilindro hiperbólico, parabolóide elíptico, parabolóide hiperbólico, hiperboloide de uma folha, hiperboloide de duas folhas e elipsoide ou esfera. Uma *quádrlica degenerada* $\mathcal{G} = 0$ é uma quádrlica que não é não-degenerada. As quádrlicas degeneradas são classificadas como: dois planos reais paralelos, dois planos complexos paralelos, um plano real duplo, dois planos reais que se intersectam numa reta, dois planos complexos que se intersectam numa reta real e um ponto real. Ainda em [7], os autores caracterizaram entre esses sistemas aqueles que possuem um invariante de Darboux construído unicamente usando as quádrlicas invariantes, dando suas expressões de maneira explícita.

Em [2], Dias, Llibre e Mello, utilizando as formas normais encontradas em [7], caracterizaram todas as possíveis configurações de meridianos e paralelos invariantes de sistemas diferenciais polinomiais em \mathbb{R}^3 tendo uma quádrlica não-degenerada como superfície algébrica invariante, mais precisamente uma superfície de revolução. Ademais os autores também analisaram quando estes meridianos e paralelos invariantes fechados são ciclos limites.

Ainda nesta linha, em [6], Llibre e Medrado estudaram sistemas diferenciais polinomiais em \mathbb{R}^3 tendo o toro \mathbb{T}^2 como superfície algébrica invariante. Neste artigo os autores caracterizaram todas as possíveis configurações de meridianos e paralelos invariantes que estes sistemas podem ter e, além disto, também analisaram quando esses meridianos e paralelos invariantes fechados são ciclos limites.

O objetivo desta dissertação é o estudo dos trabalhos: [2], [6] e [7]. Para uma visão geral desta dissertação, os capítulos que seguem estão estruturados da seguinte maneira:

✓ CAPÍTULO 2: Neste capítulo introduzimos os pré-requisitos básicos para a leitura da dissertação e o entendimento da mesma.

✓ CAPÍTULO 3: Iniciamos este capítulo com o estudo das formas normais para campos vetoriais polinomiais em \mathbb{R}^3 tendo uma quádrlica não-degenerada como superfície algébrica invariante. Esta parte do trabalho foi baseada no artigo [7]. A seguir estudamos a existência de meridianos e paralelos invariantes e, por fim, analisamos quando estes meridianos e paralelos invariantes se realizam como ciclos limites. Esta parte do trabalho é baseada no artigo [2].

✓ CAPÍTULO 4: A estrutura deste capítulo é bem parecida com a do capítulo anterior, mas agora fazemos todo o estudo de ciclos limites, meridianos e paralelos invariantes para campos vetoriais polinomiais em \mathbb{R}^3 sobre o toro. Este capítulo é baseado no artigo [6].

✓ CAPÍTULO 5: O objetivo deste capítulo é estudar sistemas diferenciais polinomiais que têm uma cúbica de revolução, a saber $\mathcal{C}_3(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1 = 0$, como superfície algébrica invariante. Uma descrição completa de propriedades desta cúbica pode

ser encontrada em [9] e [13]. Não encontramos na literatura um estudo de meridianos e/ou paralelos invariantes para campos vetoriais polinomiais em \mathbb{R}^3 que tenham uma cúbica como superfície algébrica invariante. Neste capítulo encontramos uma forma normal para campos vetoriais polinomiais em \mathbb{R}^3 , os quais possuem a cúbica \mathcal{C}_3 como superfície algébrica invariante. Além disso, estudamos as possíveis configurações de ciclos limites, paralelos e meridianos invariantes sobre estes campos vetoriais. O estudo deste capítulo originou o trabalho [3].

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Sistemas diferenciais polinomiais em \mathbb{R}^3 e ciclos limites

Seja $\mathbb{K}[x, y, z]$ o anel dos polinômios nas variáveis x, y e z com coeficientes em \mathbb{K} , onde \mathbb{K} é \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Um *sistema diferencial polinomial em \mathbb{R}^3* é definido por

$$\dot{x} = P(x, y, z), \quad \dot{y} = Q(x, y, z), \quad \dot{z} = R(x, y, z), \quad (2.1)$$

onde $P, Q, R \in \mathbb{K}[x, y, z]$ são polinômios relativamente primos. O ponto denota a derivada com respeito a variável independente t usualmente chamada de *tempo*. No que segue escreveremos o sistema (2.1) simplesmente como

$$\dot{x} = P, \quad \dot{y} = Q, \quad \dot{z} = R.$$

Dizemos que $m = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q), \text{grau}(R)\}$ é o *grau* do sistema (2.1) e podemos associar a este sistema o *campo vetorial* $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.2)$$

Nesta seção introduzimos a definição de ciclo limite necessária para o estudo dos próximos capítulos.

Definição 2.1.1. *Se uma solução $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ do sistema (2.1) é uma função periódica não constante em t , ela é dita **periódica**.*

Definição 2.1.2. *Um **ciclo limite** do sistema (2.1) é uma solução periódica isolada no conjunto de todas as órbitas periódicas do sistema (2.1). Mais precisamente, γ é um ciclo limite quando existe uma vizinhança V de γ tal que, γ é a única órbita periódica em V do sistema (2.1).*

Definição 2.1.3. *Seja $X_p(t)$ uma solução do sistema (2.1) passando pelo ponto $p \in \mathbb{R}^3$, definida em seu intervalo máximo (α_p, ω_p) tal que $X_p(0) = p$. Se $\omega_p = \infty$ definimos o conjunto*

$$\omega(p) = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \text{existe } \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } X_p(t_n) \rightarrow q \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

De modo análogo, se $\alpha_p = -\infty$ definimos o conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \text{existe } \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } X_p(t_n) \rightarrow q \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são chamados conjuntos ω -limite e α -limite de p , respectivamente.

Definição 2.1.4. *Considere o caso planar, ou seja, $X = (P, Q)$. Dizemos que um ciclo limite γ do sistema (2.1) é um **ciclo limite estável** se existir um aberto $U_0 \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma \subset U_0$ e $\omega(p) = \gamma$ para cada $p \in U_0$. γ é um **ciclo limite instável** se existir um aberto $U_0 \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma \subset U_0$ e $\alpha(p) = \gamma$ para cada $p \in U_0$. γ é um **ciclo limite semi-estável** se existir um aberto $U_0 \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma \subset U_0$ e $\omega(p) = \gamma$ para cada $p \in U_0 \cap \text{ext}\gamma$ e $\alpha(p) = \gamma$, para cada $p \in U_0 \cap \text{int}\gamma$ ou então $\omega(p) = \gamma$, para cada $p \in U_0 \cap \text{int}\gamma$ e $\alpha(p) = \gamma$, para cada $p \in U_0 \cap \text{ext}\gamma$, onde $\alpha(p)$ e $\omega(p)$ são conjuntos limites.*

2.2 Método da média

Nos capítulos seguintes, para provar que alguns meridianos e paralelos são ciclos limites, usaremos o Teorema da média de primeira ordem. Em geral, o método da média nos dá uma relação entre as soluções de um sistema diferencial não-autônomo e as soluções de um sistema autônomo, a média do sistema diferencial. Para mais detalhes ver [11].

Teorema 2.2.1. Teorema da Média de Primeira Ordem

Considere o sistema

$$\dot{u}(t) = \varepsilon F(t, u(t)) + \varepsilon^2 R(t, u(t), \varepsilon) \quad (2.3)$$

e suponha que as funções F , R , $D_u F$, $D_u^2 F$ e $D_u R$ sejam contínuas e limitadas por uma constante M (independente de ε) em $[0, \infty) \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ com $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Além disso, suponha que F e R sejam T -periódicas em t , com T independente de ε .

(a) Se $a \in D$ é um ponto singular do sistema $\dot{u} = f(u)$, definido pela função média

$$f(u) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, u) ds, \quad (2.4)$$

tal que $\det(D_u f(a)) \neq 0$ então, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica $u_\varepsilon(t)$ do sistema (2.3) tal que $u_\varepsilon(0) \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

(b) Se o ponto singular $u = a$ do sistema $\dot{u} = f(u)$ é hiperbólico, então, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, a correspondente solução periódica $u_\varepsilon(t)$ do sistema (2.3) é única, hiperbólica e de estabilidade do mesmo tipo que a .

Exemplo 2.2.1. A equação de van der Pol

Considere a equação diferencial de van der Pol

$$\ddot{u} + u = \varepsilon(1 - u^2)\dot{u},$$

que pode ser escrita como o sistema diferencial

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= -u + \varepsilon(1 - u^2)v. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Em coordenadas polares (r, θ) , onde $u = r \cos \theta$ e $v = r \sin \theta$, este sistema fica

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} &= -1 + \varepsilon \cos \theta(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dr}{d\theta} = (-r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta) \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (2.6)$$

Note que o sistema diferencial (2.6) está na sua forma normal (2.3), pronto para aplicar o método da média descrito no Teorema 2.2.1 se tomarmos $u = r$, $t = \theta$, $T = 2\pi$ e $F(t, u) = -r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \operatorname{sen}^2 \theta$. De (2.4) temos que

$$f(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{8}r(r^2 - 4).$$

A única raiz positiva de f é $r = 2$. Como $(df/dr)(2) = 1$, pelo item (a) do Teorema 2.2.1 segue que o sistema (2.6) tem, para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno, um ciclo limite bifurcando de uma órbita periódica de raio 2 do sistema não perturbado (2.6) com $\varepsilon = 0$. Além disso, como $(df/dr)(2) = 1 > 0$, pelo item (b) do Teorema 2.2.1, esse ciclo limite é único e instável. Observe que $\theta' < 0$ para ε suficientemente pequeno, desta forma o sistema original (2.5) tem orientação inversa à orientação do sistema (2.6). Portanto, o ciclo limite é estável.

2.3 Curvas e superfícies algébricas invariantes

Existe um grande interesse no estudo das curvas algébricas invariantes sobre campos vetoriais polinomiais no plano, principalmente depois de 1878 quando Darboux mostrou que um número suficiente delas força a existência de uma integral primeira.

Definição 2.3.1. *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^3$ aberto. Se existe uma função analítica não-localmente constante $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ que é constante em todas as curvas soluções $(x(t), y(t), z(t))$ do sistema (2.1) contidas em U , então H é chamada uma **integral primeira** de X em U . Claramente H é uma integral primeira do sistema (2.1) se, e somente se, $X(H) \equiv 0$ em U , isto é,*

$$X(H) := \frac{\partial H}{\partial x}P + \frac{\partial H}{\partial y}Q + \frac{\partial H}{\partial z}R = \frac{dH}{dt} = 0$$

nas órbitas de X contidas em U .

Definição 2.3.2. *Seja $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$. A superfície $f(x, y, z) = 0$ é uma **superfície algébrica invariante** do sistema (2.1) se para algum polinômio $K \in \mathbb{C}[x, y, z]$ tivermos*

$$X(f) := P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \frac{\partial f}{\partial z} = Kf. \quad (2.7)$$

O polinômio K é chamado de **cofator** da superfície algébrica invariante $f = 0$.

Observação 2.3.1.

- (i) Quando $K = 0$, f é uma integral primeira polinomial.
- (ii) Seja m o grau do campo vetorial (2.2), então o grau de K é no máximo $(m - 1)$.
- (iii) Por (2.7) é fácil ver que nos pontos da superfície algébrica $\{f = 0\}$, o gradiente $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$ de f é ortogonal ao campo vetorial X . Portanto, para cada ponto no conjunto $\{f = 0\}$, o campo vetorial X é tangente à superfície $\{f = 0\}$. Assim a superfície $\{f = 0\}$ contém as trajetórias do campo X . Isto justifica o nome “superfície algébrica invariante”, uma vez que ela é invariante pelo fluxo definido por X .
- (iv) Note que na definição de superfície algébrica invariante $f = 0$ é sempre permitido que esta seja complexa, isto é, $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$, mesmo no caso de campos vetoriais polinomiais reais. Isto se dá pelo fato de que, as vezes, para campos vetoriais reais a existência de integrais primeiras pode ser forçada pela existência de superfícies algébricas invariantes complexas. Para mais detalhes recomendamos o Capítulo 8 do livro [4].

Para campos vetoriais planares, as superfícies algébricas invariantes são chamadas curvas algébricas invariantes. Mais especificamente, temos a seguinte definição.

Definição 2.3.3. *Seja $\tilde{f} \in \mathbb{C}[x, y]$, \tilde{f} não identicamente nula. A curva algébrica $\tilde{f}(x, y) = 0$ é uma **curva algébrica invariante** do sistema diferencial polinomial*

$$\dot{x} = \tilde{P}(x, y), \quad \dot{y} = \tilde{Q}(x, y), \quad (2.8)$$

$\tilde{P}, \tilde{Q} \in \mathbb{R}[x, y]$, se para algum polinômio $\tilde{K} \in \mathbb{C}[x, y]$ tivermos

$$\tilde{X}(\tilde{f}) := \tilde{P} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \tilde{Q} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = \tilde{K} \tilde{f},$$

onde \tilde{X} é o campo vetorial associado ao sistema (2.8).

Definição 2.3.4. *Uma superfície $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, y, z) = 0$ em \mathbb{R}^3 definida implicitamente por uma equação algébrica de grau 2 é chamada uma **quádrlica**. A quádrlica $\mathcal{G} = 0$ é dita ser*

não-degenerada se o polinômio \mathcal{G} é irredutível em $\mathbb{C}[x, y, z]$, caso contrário ela é dita ser **degenerada**.

Observação 2.3.2. *As quádricas não-degeneradas são classificadas como: cone, o qual denotaremos por (C), cilindro elíptico (EC), cilindro parabólico (PC), cilindro hiperbólico (HC), parabolóide elíptico (EP), parabolóide hiperbólico (HP), hiperboloide de uma folha (HOS), hiperboloide de duas folhas (HTS) e elipsoide ou esfera (S). As quádricas degeneradas são classificadas como: dois planos reais paralelas (RPP), dois planos complexos paralelos (CPP), um plano real duplo (DP), dois planos reais que se intersectam em uma reta (r), dois planos complexos que se intersectam em uma reta real (s), e um ponto real (P).*

Observação 2.3.3. *Nesta dissertação iremos trabalhar apenas com as quádricas não-degeneradas.*

2.4 O polinômio extático

Um conceito fundamental para o desenvolvimento deste trabalho é o de *polinômio extático*. Este polinômio nos permite detectar quando uma superfície algébrica é invariante pelo fluxo de um campo vetorial.

Definição 2.4.1. *Seja X o campo vetorial polinomial (2.2) e seja $W \subset \mathbb{R}[x, y, z]$ um subespaço \mathbb{R} -vetorial de dimensão finita $l > 1$. O **polinômio extático de X associado a W** é o polinômio $\mathcal{E}_W(X)$ dado pelo determinante da matriz*

$$\mathcal{E}_W(X) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_l \\ X(v_1) & X(v_2) & \cdots & X(v_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X^{l-1}(v_1) & X^{l-1}(v_2) & \cdots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix},$$

onde $\{v_1, \dots, v_l\}$ é uma base de W e $X^j(v_i) = X^{j-1}(X(v_i))$, onde

$$X(v_i) = P \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial v_i}{\partial y} + R \cdot \frac{\partial v_i}{\partial z}.$$

Observação 2.4.1. *A definição do polinômio extático $\mathcal{E}_W(X)$ independe da base escolhida para W no seguinte sentido. Sejam W e W' subespaços de dimensão finita $l > 1$ de $\mathbb{R}[x, y, z]$, com bases $V = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ e $V' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_l\}$ respectivamente. Então temos que*

$$\mathcal{E}_W(X) = |T_{WW'}| \mathcal{E}_{W'}(X),$$

onde $T_{WW'}$ é a matriz de mudança de base da base V para a base V' e $|T_{WW'}|$ é o determinante da matriz $T_{WW'}$.

Para ver isso, primeiramente, das propriedades do determinante temos que dada uma matriz T , $\det T = \det T^t$.

Agora, escrevemos cada elemento v_i da base V em termos dos elementos da base de V' , ou seja, $v_i = a_{i1}v'_1 + a_{i2}v'_2 + \dots + a_{il}v'_l$ para $i = 1, 2, \dots, l$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_W(X) &= \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_l \\ X(v_1) & X(v_2) & \cdots & X(v_l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X^{l-1}(v_1) & X^{l-1}(v_2) & \cdots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} v_1 & X(v_1) & \cdots & X^{l-1}(v_1) \\ v_2 & X(v_2) & \cdots & X^{l-1}(v_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_l & X(v_l) & \cdots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11}v'_1 + \dots + a_{1l}v'_l & \cdots & a_{11}X^{l-1}(v'_1) + \dots + a_{1l}X^{l-1}(v'_l) \\ a_{21}v'_1 + \dots + a_{2l}v'_l & \cdots & a_{21}X^{l-1}(v'_1) + \dots + a_{2l}X^{l-1}(v'_l) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1}v'_1 + \dots + a_{ll}v'_l & \cdots & a_{l1}X^{l-1}(v'_1) + \dots + a_{ll}X^{l-1}(v'_l) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ll} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} v'_1 & X(v'_1) & \cdots & X^{l-1}(v'_1) \\ v'_2 & X(v'_2) & \cdots & X^{l-1}(v'_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v'_l & X(v'_l) & \cdots & X^{l-1}(v'_l) \end{pmatrix} \\ &= |T_{WW'}| \cdot \mathcal{E}_{W'}(X), \end{aligned}$$

onde $|T_{WW}|$ é um número real não nulo.

Exemplo 2.4.1. Considere o campo vetorial polinomial em \mathbb{R}^3 dado por

$$X = (-2yD(x, y, z) + 2zE(x, y, z), 2xD(x, y, z) - 2zF(x, y, z), -2xE(x, y, z) + 2yF(x, y, z)),$$

onde D, E e F são polinômios arbitrários de $\mathbb{R}[x, y, z]$. Este campo será estudado no Capítulo 3. Considere os subespaços $W_1 = \{x, y\}$ e $W_2 = \{1, z\}$. Denotamos aqui as componentes de X por $P = -2yD + 2zE$, $Q = 2xD - 2zF$ e $R = -2xE + 2yF$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\{x, y\}}(X) &= \det \begin{pmatrix} x & y \\ X(x) & X(y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & y \\ P & Q \end{pmatrix} \\ &= xQ - yP = 2(x^2 + y^2)D - 2z(xF + yE) \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{E}_{\{1, z\}}(X) = \det \begin{pmatrix} 1 & z \\ X(1) & X(z) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & R \end{pmatrix} = R = 2(yF - xE).$$

Este exemplo será útil na demonstração de um dos itens do Teorema 3.2.1.

Aplicações do polinômio extático são dadas nas duas proposições que seguem.

Proposição 2.4.1. Seja X o campo vetorial (2.2) e seja W um subespaço \mathbb{R} -vetorial de $\mathbb{R}[x, y, z]$ de dimensão finita $l > 1$. Se $f \in W$ e $\{f = 0\}$ é uma superfície algébrica invariante de X , então f é um fator de $\mathcal{E}_W(X)$.

Demonstração. Se $f \in W$, segue da Observação 2.4.1 que f pode ser escolhido como o primeiro elemento da base de W . Se $\{f = 0\}$ é uma superfície algébrica invariante de X , então temos que

$$X(f) = P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \frac{\partial f}{\partial z} = Kf.$$

Agora, é fácil ver que $X^j(f) = K_j f$, onde $K_1 = K$ e $K_j = K(K_{j-1}) + X(K_{j-1})$ para

$j \geq 2$. De fato,

$$X(f) = K_1 f = K f.$$

$$\begin{aligned} X^2(f) &= X(X(f)) = X(K_1 f) = X(K_1) f + K_1 X(f) = X(K_1) f + K_1 K f \\ &= (X(K_1) + K K_1) f = K_2 f. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^3(f) &= X(X^2(f)) = X(K_2 f) = X(K_2) f + K_2 X(f) = X(K_2) f + K_2 K f \\ &= (X(K_2) + K K_2) f = K_3 f. \end{aligned}$$

Por indução em j , temos que se $X^j(f) = (X(K_{j-1}) + K K_{j-1}) f$, então

$$\begin{aligned} X^{j+1}(f) &= X(X^j(f)) = X(K_j f) = X(K_j) f + K_j X(f) = X(K_j) f + K_j K f \\ &= (X(K_j) + K K_j) f = K_{j+1} f. \end{aligned}$$

Isto juntamente com as propriedades de determinante implicam que f é um fator de $\mathcal{E}_W(X)$. \square

Observação 2.4.2. *Não é verdade, em geral, que a recíproca da Proposição 2.4.1 seja verdadeira, ou seja, um fator do polinômio extático $\mathcal{E}_W(X)$ nem sempre é uma superfície algébrica invariante. A proposição a seguir afirma que em casos especiais esta afirmação é verdadeira.*

Proposição 2.4.2. *Seja X o campo vetorial (2.2).*

(a) *Se $g(x, y, z) = z - z_0$ é um fator do polinômio extático $\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)$, então $g^{-1}(0)$ é um plano invariante de X .*

(b) *Se $h(x, y, z) = ax + by$ é um fator do polinômio extático $\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X)$, então $h^{-1}(0)$ é um plano invariante de X .*

Demonstração.

(a) De fato, se $g(x, y, z) = z - z_0$, então

$$X(g) = P g_x + Q g_y + R g_z = R.$$

Por outro lado,

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X) = \det \begin{pmatrix} 1 & z \\ X(1) & X(z) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & R \end{pmatrix} = R.$$

Portanto, se g é um fator de $\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X) = R$, então g satisfaz (2.7).

(b) Seja $h(x, y, z) = ax + by$. Como $\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) = xQ - yP = (ax + by)T$, onde T é um polinômio, segue que $xQ - yP = (ax + by)T$ pode ser escrito como $x(Q - aT) = y(bT + P)$. Como x e y não têm fator em comum, existe um polinômio S tal que $Q - aT = yS$ e $bT + P = xS$. Assim,

$$X(h) = Ph_x + Qh_y + Rh_z = aP + bQ = a(xS - bT) + b(yS + aT) = S(ax + by) = Sh.$$

Deste modo h satisfaz (2.7) e o resultado segue. □

Capítulo 3

Campos vetoriais polinomiais em \mathbb{R}^3 sobre quádricas

Neste capítulo estudaremos campos vetoriais polinomiais X de grau $m > 1$ em \mathbb{R}^3 tendo uma quádrica não-degenerada

$$\mathbb{Q}^2 = \mathcal{G}^{-1}(0)$$

como uma superfície algébrica invariante, isto é $X\mathcal{G} = K\mathcal{G}$, onde \mathcal{G} define uma das quádricas não-degeneradas, as quais depois de uma mudança de coordenadas afim podemos assumir da forma:

(C) Cone: $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$,

(EC) Cilindro elíptico: $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$,

(PC) Cilindro parabólico: $\mathcal{G}(x, y, z) = z^2 - x$,

(HC) Cilindro hiperbólico: $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1$,

(EP) Parabolóide elíptico: $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$,

(HP) Parabolóide hiperbólico: $\mathcal{G}(x, y, z) = y^2 - z^2 - x$,

(HOS) Hiperbolóide de uma folha: $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$,

(HTS) Hiperbolóide de duas folhas: $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 1$,

(S) Esfera ou elipsoide: $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$,

e K é um polinômio de grau no máximo $m - 1$. As superfícies estão ilustradas na tabela 3.1. Tais campos vetoriais serão chamados **campos vetoriais polinomiais sobre \mathbb{Q}^2 de grau m** .

Na Seção 3.1 caracterizaremos as formas normais de todos os sistemas diferenciais polinomiais em \mathbb{R}^3 tendo uma quádrlica não-degenerada como superfície algébrica invariante. Depois disto, na Seção 3.2 caracterizaremos todas as possíveis configurações de paralelos e meridianos invariantes que um campo vetorial polinomial sobre \mathbb{Q}^2 de grau $m > 1$ pode exibir. Finalizaremos esse capítulo com a Seção 3.3 onde consideramos a possibilidade desses meridianos e paralelos fechados serem ciclos limites.

A Seção 3.1 foi baseada no artigo [7] e as Seções 3.2 e 3.3 foram baseadas no preprint [2].

3.1 Formas normais para campos vetoriais polinomiais de grau m sobre \mathbb{Q}^2

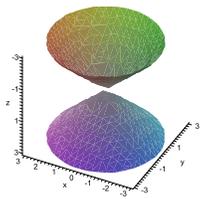
Como já dissemos, nessa seção caracterizaremos as formas normais de todos os sistemas diferenciais em \mathbb{R}^3 tendo uma quádrlica não-degenerada como superfície algébrica invariante.

Definição 3.1.1. *Sejam f_1, f_2 e f_3 funções reais definidas num subconjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^3$. A **matriz jacobiana** das funções f_1, f_2 e f_3 é definida por:*

$$J = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} & f_{1z} \\ f_{2x} & f_{2y} & f_{2z} \\ f_{3x} & f_{3y} & f_{3z} \end{pmatrix},$$

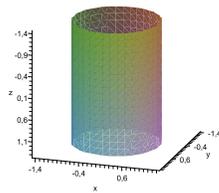
onde $f_{iv} = \partial f_i / \partial v$, com v percorrendo as variáveis x, y e z com $i = 1, 2, 3$. O **jacobiano** das funções f_1, f_2 e f_3 é o determinante da matriz J , e aqui será denotado por

$$\{f_1, f_2, f_3\} = \det(J).$$



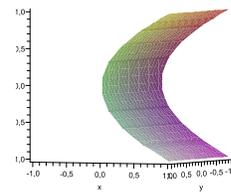
Cone (C)

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$



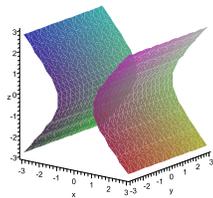
Cilindro Elíptico (EC)

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$



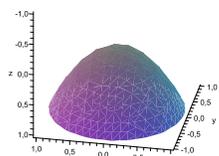
Cilindro Parabólico (PC)

$$z^2 - x = 0$$



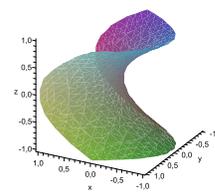
Cilindro Hiperbólico (HC)

$$x^2 - z^2 - 1 = 0$$



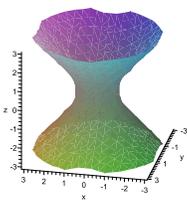
Parabolóide Elíptico (EP)

$$x^2 + y^2 - z = 0$$

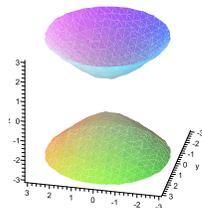


Parabolóide Hiperbólico (HP)

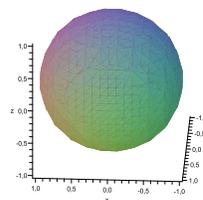
$$y^2 - z^2 - x = 0$$

Hiperbolóide de uma
folha (HOS)

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

Hiperbolóide de duas
folhas (HTS)

$$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$$



Esfera ou

Elipsoide (S)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Tabela 3.1: Quádricas não-degeneradas e suas formas normais.

O teorema que segue, bem como sua demonstração, será uma ferramenta fundamental ao longo do trabalho.

Teorema 3.1.1. *Seja f_1 um polinômio em $\mathbb{R}[x, y, z]$. Então qualquer sistema diferencial polinomial em \mathbb{R}^3 tendo $f_1 = 0$ como superfície algébrica invariante é da forma:*

$$\dot{v} = \lambda_1\{v, f_2, f_3\} + \lambda_2\{f_1, v, f_3\} + \lambda_3\{f_1, f_2, v\}, \quad (3.1)$$

onde v percorre as variáveis x, y e z , $\lambda_1 = \varphi f_1$, enquanto φ, λ_2 e λ_3 são funções racionais e f_2 e f_3 são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$ que devem ser escolhidos de maneira que o jacobiano $\{f_1, f_2, f_3\} \neq 0$.

Demonstração. Defina o campo vetorial

$$\{*, f_2, f_3\} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial *}{\partial x} & \frac{\partial *}{\partial y} & \frac{\partial *}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix},$$

onde $*$ percorre as variáveis x, y e z . Da mesma maneira defina os campos vetoriais $\{f_1, *, f_3\}$ e $\{f_1, f_2, *\}$.

Considere o campo vetorial polinomial X associado ao sistema (3.1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1\{x, f_2, f_3\} + \lambda_2\{f_1, x, f_3\} + \lambda_3\{f_1, f_2, x\}, \\ \dot{y} &= \lambda_1\{y, f_2, f_3\} + \lambda_2\{f_1, y, f_3\} + \lambda_3\{f_1, f_2, y\}, \\ \dot{z} &= \lambda_1\{z, f_2, f_3\} + \lambda_2\{f_1, z, f_3\} + \lambda_3\{f_1, f_2, z\}. \end{aligned}$$

Defina

$$\hat{X}(*) = \lambda_1\{*, f_2, f_3\} + \lambda_2\{f_1, *, f_3\} + \lambda_3\{f_1, f_2, *\}.$$

Veremos que $\hat{X}(g) = X(g)$, para qualquer $g \in \mathbb{C}[x, y, z]$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\hat{X}(g) &= \lambda_1\{g, f_2, f_3\} + \lambda_2\{f_1, g, f_3\} + \lambda_3\{f_1, f_2, g\} = \\
&= \lambda_1(g_x(f_{2y}f_{3z} - f_{3y}f_{2z}) + g_y(f_{3x}f_{2z} - f_{2x}f_{3z}) + g_z(f_{2x}f_{3y} - f_{3x}f_{2y})) + \\
&+ \lambda_2(g_x(f_{3y}f_{1z} - f_{1y}f_{3z}) + g_y(f_{1x}f_{3z} - f_{3x}f_{1z}) + g_z(f_{3x}f_{1y} - f_{1x}f_{3y})) + \\
&+ \lambda_3(g_x(f_{1y}f_{2z} - f_{2y}f_{1z}) + g_y(f_{2x}f_{1z} - f_{1x}f_{2z}) + g_z(f_{1x}f_{2y} - f_{2x}f_{1y})) = \\
&= \lambda_1(g_x\{x, f_2, f_3\} + g_y\{y, f_2, f_3\} + g_z\{z, f_2, f_3\}) + \lambda_2(g_x\{f_1, x, f_3\} + g_y\{f_1, y, f_3\} + \\
&+ g_z\{f_1, z, f_3\}) + \lambda_3(g_x\{f_1, f_2, x\} + g_y\{f_1, f_2, y\} + g_z\{f_1, f_2, z\}) = \\
&= g_x(\lambda_1\{x, f_2, f_3\} + \lambda_2\{f_1, x, f_3\} + \lambda_3\{f_1, f_2, x\}) + g_y(\lambda_1\{y, f_2, f_3\} + \lambda_2\{f_1, y, f_3\} + \\
&+ \lambda_3\{f_1, f_2, y\}) + g_z(\lambda_1\{x, f_2, f_3\} + \lambda_2\{f_1, z, f_3\} + \lambda_3\{f_1, f_2, z\}) = X(g).
\end{aligned}$$

Assim podemos considerar o campo vetorial polinomial associado ao sistema diferencial polinomial (3.1) do enunciado do teorema escrito na forma

$$X(*) = \hat{X}(*) = \lambda_1\{*, f_2, f_3\} + \lambda_2\{f_1, *, f_3\} + \lambda_3\{f_1, f_2, *\}. \quad (3.2)$$

Usando esta representação, temos que

$$\begin{aligned}
X(f_1) = \hat{X}(f_1) &= \lambda_1\{f_1, f_2, f_3\} + \lambda_2\{f_1, f_1, f_3\} + \lambda_3\{f_1, f_2, f_1\} \\
&= \lambda_1\{f_1, f_2, f_3\} = \varphi f_1\{f_1, f_2, f_3\} = (\varphi\{f_1, f_2, f_3\})f_1 = Kf_1.
\end{aligned}$$

Portanto, $f_1 = 0$ é uma superfície algébrica invariante do campo vetorial X com cofator $K = \varphi\{f_1, f_2, f_3\}$.

Agora devemos provar que o campo vetorial X é o campo vetorial polinomial mais geral possível que admite $f_1 = 0$ como superfície algébrica invariante. De fato, seja

$$Y = (Y_1(x, y, z), Y_2(x, y, z), Y_3(x, y, z))$$

um campo vetorial polinomial tendo $f_1 = 0$ como uma superfície algébrica invariante.

Então, tomando

$$\lambda_j = \frac{Y(f_j)}{\{f_1, f_2, f_3\}}, \quad j = 1, 2, 3,$$

e substituindo esses lambdas na equação (3.2) do campo vetorial polinomial X temos para um polinômio arbitrário F que

$$X(F) = Y(f_1) \frac{\{F, f_2, f_3\}}{\{f_1, f_2, f_3\}} + Y(f_2) \frac{\{f_1, F, f_3\}}{\{f_1, f_2, f_3\}} + Y(f_3) \frac{\{f_1, f_2, F\}}{\{f_1, f_2, f_3\}}.$$

Substituindo

$$Y(f_j) = Y_1 \frac{\partial f_j}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial f_j}{\partial y} + Y_3 \frac{\partial f_j}{\partial z}$$

em $X(F)$ obtemos, depois de vários cálculos, que $X(F) = Y(F)$. Como F foi tomado arbitrário o teorema está demonstrado. \square

No teorema seguinte, o qual é o mais importante desta seção, damos as formas normais de todos os sistemas diferenciais polinomiais em \mathbb{R}^3 tendo uma das quádricas não-degeneradas introduzidas no início deste capítulo como superfície algébrica invariante.

Teorema 3.1.2. *Suponha que uma quádrica não-degenerada $\mathcal{G} = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema diferencial polinomial (2.1). Então após uma mudança de coordenadas afim o sistema (2.1) e a quádrica $\mathcal{G} = 0$ podem ser escritos em uma das seguintes formas normais, onde A, B, C, D, E, F, G e T são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$.*

(i) *Se \mathcal{G} é do tipo (C), então o sistema (2.1) pode ser escrito como*

$$\dot{x} = \mathcal{G}A - 2yD - 2zE + xG, \quad \dot{y} = \mathcal{G}B + 2xD + 2zF + yG, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C - 2xE + 2yF + zG,$$

$$\text{com } \mathcal{G} = x^2 + y^2 - z^2.$$

(ii) *Se \mathcal{G} é do tipo (EC), então o sistema (2.1) pode ser escrito como*

$$\dot{x} = \mathcal{G}A + 2yE, \quad \dot{y} = \mathcal{G}B - 2xE, \quad \dot{z} = T,$$

$$\text{com } \mathcal{G} = x^2 + y^2 - 1.$$

(iii) *Se \mathcal{G} é do tipo (PC), então o sistema (2.1) pode ser escrito como*

$$\dot{x} = \mathcal{G}A + 2zE, \quad \dot{y} = T, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C + E,$$

$$\text{com } \mathcal{G} = z^2 - x.$$

(iv) Se \mathcal{G} é do tipo (HC), então o sistema (2.1) pode ser escrito como

$$\dot{x} = \mathcal{G}A - 2zE, \quad \dot{y} = T, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C - 2xE,$$

$$\text{com } \mathcal{G} = x^2 - z^2 - 1.$$

(v) Se \mathcal{G} é do tipo (EP), então o sistema (2.1) pode ser escrito como

$$\dot{x} = \mathcal{G}C + 2yF + E, \quad \dot{y} = \mathcal{G}B - 2xF - D, \quad \dot{z} = \mathcal{G}A - 2yD + 2xE,$$

$$\text{com } \mathcal{G} = x^2 + y^2 - z.$$

(vi) Se \mathcal{G} é do tipo (HP), então o sistema (2.1) pode ser escrito como

$$\dot{x} = \mathcal{G}A - 2yD - 2zE, \quad \dot{y} = \mathcal{G}B + 2zF - D, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C + 2yF + E,$$

$$\text{com } \mathcal{G} = y^2 - z^2 - x.$$

(vii) Se \mathcal{G} é do tipo (HOS), então o sistema (2.1) pode ser escrito como

$$\dot{x} = \mathcal{G}A - 2yD - 2zE, \quad \dot{y} = \mathcal{G}B + 2xD + 2zF, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C - 2xE + 2yF,$$

$$\text{com } \mathcal{G} = x^2 + y^2 - z^2 - 1.$$

(viii) Se \mathcal{G} é do tipo (HTS), então o sistema (2.1) pode ser escrito como o mesmo sistema do enunciado de (HOS), com $\mathcal{G} = x^2 + y^2 - z^2 + 1$.

(ix) Se \mathcal{G} é do tipo (S), então o sistema (2.1) pode ser escrito como

$$\dot{x} = \mathcal{G}A - 2yD + 2zE, \quad \dot{y} = \mathcal{G}B + 2xD - 2zF, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C - 2xE + 2yF,$$

$$\text{com } \mathcal{G} = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.1, qualquer sistema diferencial polinomial tendo uma superfície algébrica invariante $f_1 = \mathcal{G} = 0$ pode ser escrito como o sistema (3.1), ou seja, é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varphi f_1(f_{2y}f_{3z} - f_{3y}f_{2z}) + \lambda_2(f_{3y}f_{1z} - f_{1y}f_{3z}) + \lambda_3(f_{1y}f_{2z} - f_{2y}f_{1z}), \\ \dot{y} &= \varphi f_1(f_{3x}f_{2z} - f_{2x}f_{3z}) + \lambda_2(f_{1x}f_{3z} - f_{3x}f_{1z}) + \lambda_3(f_{2x}f_{1z} - f_{1x}f_{2z}), \\ \dot{z} &= \varphi f_1(f_{2x}f_{3y} - f_{3x}f_{2y}) + \lambda_2(f_{3x}f_{1y} - f_{1x}f_{3y}) + \lambda_3(f_{1x}f_{2y} - f_{2x}f_{1y}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $f_{iv} = \partial f_i / \partial v$, com v percorrendo as variáveis x , y e z , para $i = 1, 2, 3$, enquanto φ , λ_2 , λ_3 são funções racionais e $f_1 = \mathcal{G}$, f_2 e f_3 são polinômios em $\mathbb{R}[x, y, z]$, satisfazendo a condição $\{f_1, f_2, f_3\} \neq 0$. Usando a notação,

$$\begin{aligned} J_1 &= f_{2y}f_{3z} - f_{3y}f_{2z}, \\ J_2 &= f_{3x}f_{2z} - f_{2x}f_{3z}, \\ J_3 &= f_{2x}f_{3y} - f_{3x}f_{2y}, \end{aligned}$$

podemos reescrever o sistema (3.3) como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varphi f_1 J_1 + \lambda_2 (f_{3y}f_{1z} - f_{1y}f_{3z}) + \lambda_3 (f_{1y}f_{3z} - f_{3y}f_{1z}), \\ \dot{y} &= \varphi f_1 J_2 + \lambda_2 (f_{1x}f_{3z} - f_{3x}f_{1z}) + \lambda_3 (f_{2x}f_{1z} - f_{1x}f_{2z}), \\ \dot{z} &= \varphi f_1 J_3 + \lambda_2 (f_{3x}f_{1y} - f_{1x}f_{3y}) + \lambda_3 (f_{1x}f_{2y} - f_{2x}f_{1y}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Desta forma, se estamos no caso

(i) onde f_1 é o cone (C), tomando

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{xA + yB - zC + G}{xJ_1 + yJ_2 - zJ_3}, \\ \lambda_2 &= \frac{f_{2x}(f_1A - 2yD - 2zE + xG) + f_{2y}(f_1B + 2xD + 2zF + yG)}{2(xJ_1 + yJ_2 - zJ_3)} + \\ &+ \frac{f_{2z}(f_1C - 2xE + 2yF + zG)}{2(xJ_1 + yJ_2 - zJ_3)}, \\ \lambda_3 &= \frac{f_{3x}(f_1A - 2yD - 2zE + xG) + f_{3y}(f_1B + 2xD + 2zF + yG)}{2(xJ_1 + yJ_2 - zJ_3)} + \\ &+ \frac{f_{3z}(f_1C - 2xE + 2yF + zG)}{2(xJ_1 + yJ_2 - zJ_3)}, \end{aligned}$$

no sistema (3.4), onde A, B, C, D, E, F e G são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$, obtemos o sistema do item (i) do Teorema 3.1.2, que tem $x^2 + y^2 - z^2$ como superfície algébrica

invariante com cofator $K = 2(xA + yB - zC + G)$. De fato, temos

$$\begin{aligned}
X(\mathcal{G}) &= 2xP + 2yQ - 2zR \\
&= 2x(\mathcal{G}A - 2yD - 2zE + xG) + 2y(\mathcal{G}B + 2xD + 2zF + yG) - \\
&\quad - 2z(\mathcal{G}C - 2xE + 2yF + zG) \\
&= 2x\mathcal{G}A + 2x^2G + 2y\mathcal{G}B + 2y^2G - 2z\mathcal{G}C - 2z^2G \\
&= 2(xA + yB - zC)\mathcal{G} + 2G(x^2 + y^2 - z^2) = 2(xA + yB - zC)\mathcal{G} + 2G\mathcal{G} \\
&= 2(xA + yB - zC + G)\mathcal{G}.
\end{aligned}$$

(ii) onde f_1 é o cilindro elíptico (EC), tomando

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{xA + yB}{xJ_1 + yJ_2}, \\
\lambda_2 &= \frac{f_{2x}(f_1A + 2yE) + f_{2y}(f_1B - 2xE) + f_{2z}T}{2(xJ_1 + yJ_2)}, \\
\lambda_3 &= \frac{f_{3x}(f_1A + 2yE) + f_{3y}(f_1B - 2xE) + f_{3z}T}{2(xJ_1 + yJ_2)},
\end{aligned}$$

no sistema (3.4), onde A, B, C, D, E e F são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$, obtemos o sistema do item (ii) do Teorema 3.1.2, que tem $f_1 = \mathcal{G} = x^2 + y^2 - 1$ como superfície algébrica invariante com cofator $K = 2(xA + yB)$. De fato, temos

$$\begin{aligned}
X(\mathcal{G}) &= 2xP + 2yQ + 0R \\
&= 2x(\mathcal{G}A + 2yE) + 2y(\mathcal{G}B - 2xE) + 0(T) \\
&= 2x\mathcal{G}A + 2y\mathcal{G}B = 2(xA + yB)\mathcal{G}.
\end{aligned}$$

Nos demais casos o procedimento é análogo, bastando tomar φ , λ_2 e λ_3 como seguem:

(iii) onde f_1 é o cilindro parabólico (PC),

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{A - 2zC}{-J_1 + 2zJ_3}, \\
\lambda_2 &= \frac{f_{2x}(f_1A + 2zE) + f_{2y}T + f_{2z}(f_1C + E)}{-J_1 + 2zJ_3}, \\
\lambda_3 &= \frac{f_{3x}(f_1A + 2zE) + f_{3y}T + f_{3z}(f_1C + E)}{-J_1 + 2zJ_3};
\end{aligned}$$

(iv) onde f_1 é o cilindro hiperbólico (HC),

$$\varphi = \frac{xA - zC}{xJ_1 - zJ_3},$$

$$\lambda_2 = \frac{f_{2x}(f_1A - 2zE) + f_{2y}T + f_{2z}(f_1C - 2xE)}{2(xJ_1 - zJ_3)},$$

$$\lambda_3 = \frac{f_{3x}(f_1A - 2zE) + f_{3y}T + f_{3z}(f_1C - 2xE)}{2(xJ_1 - zJ_3)};$$

(v) onde f_1 é o parabolóide elíptico (EP),

$$\varphi = \frac{-A + 2yB + 2xC}{2(xJ_1 + yJ_2) - J_3},$$

$$\lambda_2 = \frac{f_{2x}(f_1C + 2yF + E) + f_{2y}(f_1B - 2xF - D) + f_{2z}(f_1A - 2yD + 2xE)}{2(xJ_1 + yJ_2) - J_3},$$

$$\lambda_3 = \frac{f_{3x}(f_1C + 2yF + E) + f_{3y}(f_1B - 2xF - D) + f_{3z}(f_1A - 2yD + 2xE)}{2(xJ_1 + yJ_2) - J_3};$$

(vi) onde f_1 é o parabolóide hiperbólico (HP),

$$\varphi = \frac{-A + 2yB - 2zC}{-J_1 + 2(yJ_2 - zJ_3)},$$

$$\lambda_2 = \frac{f_{2x}(f_1A - 2yD - 2zE) + f_{2y}(f_1B + 2zF - D) + f_{2z}(f_1C + 2yF + E)}{-J_1 + 2(yJ_2 - zJ_3)},$$

$$\lambda_3 = \frac{f_{3x}(f_1A - 2yD - 2zE) + f_{3y}(f_1B + 2zF - D) + f_{3z}(f_1C + 2yF + E)}{-J_1 + 2(yJ_2 - zJ_3)};$$

(vii) ou (viii) onde f_1 é o hiperbolóide de uma folha (HOS) ou o hiperbolóide de duas folhas (HTS),

$$\varphi = \frac{xA + yB - zC}{xJ_1 + yJ_2 - zJ_3},$$

$$\lambda_2 = \frac{f_{2x}(f_1A - 2yD - 2zE) + f_{2y}(f_1B + 2xD + 2zF) + f_{2z}(f_1C - 2xE + 2yF)}{2(xJ_1 + yJ_2 - zJ_3)},$$

$$\lambda_3 = \frac{f_{3x}(f_1A - 2yD - 2zE) + f_{3y}(f_1B + 2xD + 2zF) + f_{3z}(f_1C - 2xE + 2yF)}{2(xJ_1 + yJ_2 - zJ_3)};$$

(ix) onde f_1 é a esfera (S),

$$\varphi = \frac{xA + yB + zC}{xJ_1 + yJ_2 + zJ_3},$$

$$\lambda_2 = \frac{f_{2x}(f_1A - 2yD + 2zE) + f_{2y}(f_1B + 2xD - 2zF) + f_{2z}(f_1C - 2xE + 2yF)}{2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)},$$

$$\lambda_3 = \frac{f_{3x}(f_1A - 2yD + 2zE) + f_{3y}(f_1B + 2xD - 2zF) + f_{3z}(f_1C - 2xE + 2yF)}{2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)}.$$

Finalizando assim a prova do teorema. □

3.2 Configurações dos meridianos e paralelos invariantes

Nesta seção caracterizaremos todas as possíveis configurações de meridianos e paralelos invariantes que um campo vetorial polinomial de grau $m > 1$ sobre \mathbb{Q}^2 pode exibir.

3.2.1 O polinômio extático e suas relações com meridianos e paralelos

Dentre as quádricas não-degeneradas citadas na Observação 2.3.2 destacamos aqui as quádricas não-degeneradas que são superfícies de revolução, a saber: cone, cilindro (elíptico), parabolóide (elíptico), hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas e esfera. Daqui em diante denotaremos por $\mathbb{Q}^2 = \mathcal{G}^{-1}(0)$, onde \mathcal{G} define uma das quádricas não-degeneradas de revolução.

Sobre \mathbb{Q}^2 podemos definir meridianos e paralelos da seguinte forma.

Definição 3.2.1. *Numa superfície de revolução \mathbb{Q}^2 definimos **meridianos** e **paralelos** como as curvas obtidas pela intersecção da superfície com os planos contendo o eixo z e os planos ortogonais ao eixo z , respectivamente. Mais precisamente, os meridianos são obtidos intersectando os planos $ax + by = 0$ (onde $a, b \in \mathbb{R}$) com a superfície e os paralelos são obtidos intersectando os planos $z = k$ (para valores apropriados de $k \in \mathbb{R}$) com a superfície.*

Definição 3.2.2. *Dizemos que um **meridiano** $ax + by = 0$ é **invariante** pelo fluxo de um campo vetorial polinomial X sobre \mathbb{Q}^2 se $X(ax + by) = K_{a,b}(ax + by)$, para algum $K_{a,b} \in \mathbb{R}[x, y, z]$. De maneira similar dizemos que um **paralelo** $z - z_0 = 0$ é **invariante***

pelo fluxo de um campo vetorial polinomial X sobre \mathbb{Q}^2 se $X(z - z_0) = K_{z_0}(z - z_0)$, para algum $K_{z_0} \in \mathbb{R}[x, y, z]$.

Para determinar os **meridianos invariantes** de um campo vetorial X sobre \mathbb{Q}^2 temos que encontrar as curvas obtidas pela intersecção de \mathbb{Q}^2 com os planos da forma $ax + by = 0$ que são invariantes pelo fluxo de X . Pela Proposição 2.4.1 é necessário que $g(x, y, z) = ax + by$ seja um fator do polinômio extático $\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X)$, que pode ser escrito como

$$\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) = \det \begin{pmatrix} x & y \\ X(x) & X(y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & y \\ P & Q \end{pmatrix} = xQ - yP.$$

Para estudar os **paralelos invariantes** devemos considerar a intersecção dos planos $z - z_0 = 0$ (para valores adequados de z_0) com \mathbb{Q}^2 que são invariantes pelo fluxo de X . Pela Proposição 2.4.1 é necessário que $h(x, y, z) = z - z_0$ seja um fator do polinômio extático $\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)$, que pode ser escrito como

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X) = \det \begin{pmatrix} 1 & z \\ X(1) & X(z) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & R \end{pmatrix} = R.$$

Observação 3.2.1. *Veremos que as Proposições 2.4.1 e 2.4.2 transformam o estudo de meridianos e paralelos invariantes de um campo vetorial polinomial $X = (P, Q, R)$ de grau $m > 1$ sobre \mathbb{Q}^2 no estudo de fatores da forma $g(x, y, z) = ax + by$ e $h(x, y, z) = z - z_0$ dos polinômios extáticos $\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) = xQ - yP$ e $\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X) = R$, respectivamente.*

3.2.2 Meridianos e paralelos invariantes

No que segue, precisaremos convencionar como será feita a contagem dos meridianos e paralelos de um campo vetorial X sobre uma quádrlica de revolução \mathbb{Q}^2 .

As intersecções de um plano $ax + by = 0$ com \mathbb{Q}^2 nos fornecem:

1. Dois meridianos que são retas concorrentes se \mathbb{Q}^2 é o cone;
2. Dois meridianos que são retas paralelas se \mathbb{Q}^2 é o cilindro elíptico;
3. Dois meridianos que são os ramos de uma hipérbole se \mathbb{Q}^2 é o hiperboloide de uma folha ou o hiperboloide de duas folhas;

4. Um meridiano que é uma parábola se \mathbb{Q}^2 é o parabolóide elíptico;
5. Um meridiano que é um círculo se \mathbb{Q}^2 é a esfera.

As intersecções de um plano $z = k$, $k \in \mathbb{R}$ com \mathbb{Q}^2 nos fornecem sempre uma circunferência, pois estamos lidando com superfícies de revolução. Portanto teremos sempre um paralelo.

O próximo teorema fornece uma cota superior para o número de meridianos e paralelos invariantes de um campo vetorial X sobre \mathbb{Q}^2 .

Teorema 3.2.1. *Seja X um campo vetorial polinomial de grau $m > 1$ sobre \mathbb{Q}^2 . Suponha que X tenha um número finito de meridianos e paralelos invariantes. Desta forma, seguem as seguintes afirmações.*

(i) *Se \mathbb{Q}^2 é do tipo (C), então:*

(a) *O número de meridianos invariantes de X é no máximo $2(m - 1)$.*

(b) *O número de paralelos invariantes de X é no máximo $m - 1$.*

(ii) *Se \mathbb{Q}^2 é do tipo (EC), então:*

(a) *O número de meridianos invariantes de X é no máximo $2(m - 1)$.*

(b) *O número de paralelos invariantes de X é no máximo m .*

(iii) *Se \mathbb{Q}^2 é do tipo (EP), então:*

(a) *O número de meridianos invariantes de X é no máximo $m - 1$.*

(b) *O número de paralelos invariantes de X é no máximo $m - 1$.*

(c) *Não existe campo vetorial polinomial de grau $m > 1$ sobre o parabolóide tendo exatamente $m - 1$ meridianos invariantes e $m - 1$ paralelos invariantes.*

(iv) *Se \mathbb{Q}^2 é do tipo (HOS), então:*

(a) *O número de meridianos invariantes de X é no máximo $2(m - 1)$.*

(b) *O número de paralelos invariantes de X é no máximo $m - 1$.*

(c) Não existe campo vetorial polinomial de grau $m > 1$ sobre o hiperboloide de uma folha tendo exatamente $2(m-1)$ meridianos invariantes e $m-1$ paralelos invariantes.

(v) Se \mathbb{Q}^2 é do tipo (HTS), então:

(a) O número de meridianos invariantes de X é no máximo $2(m-1)$.

(b) O número de paralelos invariantes de X é no máximo $m-1$.

(c) Não existe campo vetorial polinomial de grau $m > 1$ sobre o hiperboloide de duas folhas tendo exatamente $2(m-1)$ meridianos invariantes e $m-1$ paralelos invariantes.

(vi) Se \mathbb{Q}^2 é do tipo (S), então:

(a) O número de meridianos invariantes de X é no máximo $m-1$.

(b) O número de paralelos invariantes de X é no máximo $m-1$.

(c) Não existe campo vetorial polinomial de grau $m > 1$ sobre a esfera tendo exatamente $m-1$ meridianos invariantes e $m-1$ paralelos invariantes.

Demonstração. Primeiramente, usando coordenadas esféricas ou coordenadas cilíndricas podemos mostrar o item (a) de todos os casos.

Em coordenadas esféricas $(x, y, z) = (\rho \sen \phi \cos \theta, \rho \sen \phi \sen \theta, \rho \cos \phi)$ o sistema (2.1) se escreve como

$$\begin{aligned}\rho' &= P \sen \phi \cos \theta + Q \sen \phi \sen \theta + R \cos \phi, \\ \theta' &= \frac{1}{\rho \sen \phi} (-P \sen \theta + Q \cos \theta), \\ \phi' &= \frac{1}{\rho} (P \cos \phi \cos \theta + Q \cos \phi \sen \theta - R \sen \phi),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}P &= P(\rho \sen \phi \cos \theta, \rho \sen \phi \sen \theta, \rho \cos \phi), \\ Q &= Q(\rho \sen \phi \cos \theta, \rho \sen \phi \sen \theta, \rho \cos \phi), \\ R &= R(\rho \sen \phi \cos \theta, \rho \sen \phi \sen \theta, \rho \cos \phi).\end{aligned}$$

Em coordenadas cilíndricas $(x, y, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$ o sistema (2.1) se escreve como

$$\begin{aligned} r' &= P(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \cos \theta + Q(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \sin \theta, \\ \theta' &= \frac{1}{\rho} (-P(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \sin \theta + Q(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \cos \theta), \\ z' &= R(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z). \end{aligned}$$

Um meridiano invariante do campo vetorial $X = (P, Q, R)$ é dado pela intersecção de um plano $ax + by = 0$ com \mathbb{Q}^2 . Neste caso o polinômio $ax + by$ deve ser um fator do polinômio extático, que em coordenadas esféricas é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) = xQ - yP &= \rho \sin \phi \cos \theta Q - \rho \sin \phi \sin \theta P \\ &= \rho \sin \phi \underbrace{(\cos \theta Q - \sin \theta P)}_{\rho \theta' \sin \phi} \\ &= \rho^2 \theta' \sin^2 \phi, \end{aligned}$$

onde $\rho^2 \sin^2 \phi = \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta = x^2 + y^2$ em coordenadas esféricas. Desta forma, $\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) = (x^2 + y^2)\theta'$.

Em coordenadas cilíndricas o polinômio extático é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) = xQ - yP &= \rho \cos \theta Q - \rho \sin \theta P \\ &= \rho \underbrace{(\cos \theta Q - \sin \theta P)}_{\rho \theta'} \\ &= \rho^2 \theta', \end{aligned}$$

onde $\rho^2 = \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta = x^2 + y^2$ em coordenadas cilíndricas. Deste modo temos que, em qualquer caso,

$$\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) = xQ - yP = (x^2 + y^2) \theta'.$$

Como o polinômio $xQ - yP$ tem grau no máximo $m + 1$, a equação $(x^2 + y^2)\theta'$ também tem grau no máximo $m + 1$ e, portanto, θ' tem grau no máximo $m - 1$. Logo o campo vetorial X tem no máximo $m - 1$ planos invariantes da forma $ax + by = 0$. Assim X tem no máximo $m - 1$ meridianos invariantes nos casos onde \mathbb{Q}^2 é ou o parabolóide ou a esfera e no máximo $2(m - 1)$ meridianos invariantes nos casos onde \mathbb{Q}^2 é ou o cone, ou o

cilindro, ou o hiperboloide de uma folha, ou o hiperboloide de duas folhas. Isto decorre diretamente das Proposições 2.4.1 e 2.4.2, e da nossa definição do número de meridianos. Assim, fica provado o item (a) de todos os casos.

O item (b) de todos os casos pode ser demonstrado da seguinte forma. Para determinar os paralelos invariantes devemos considerar a intersecção dos planos $z = k$, $k \in \mathbb{R}$ com \mathbb{Q}^2 . Pela Proposição 2.4.1 é necessário que $g(x, y, z) = z - k$ seja um fator do polinômio extático $\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X) = R$. Desta forma, para cada quádrlica de revolução temos o seguinte:

- (i) $R(x, y, z) = -2xE(x, y, z) + 2yF(x, y, z) + zG(x, y, z)$, se \mathbb{Q}^2 é o cone,
- (ii) $R(x, y, z) = T(x, y, z)$, se \mathbb{Q}^2 é o cilindro elíptico,
- (iii) $R(x, y, z) = -2yD(x, y, z) + 2xE(x, y, z)$, se \mathbb{Q}^2 é o parabolóide elíptico,
- (iv) $R(x, y, z) = -2xE(x, y, z) + 2yF(x, y, z)$, se \mathbb{Q}^2 é o hiperboloide de uma folha,
- (v) $R(x, y, z) = -2xE(x, y, z) + 2yF(x, y, z)$, se \mathbb{Q}^2 é o hiperboloide de duas folhas,
- (vi) $R(x, y, z) = -2xE(x, y, z) + 2yF(x, y, z)$, se \mathbb{Q}^2 é a esfera.

Note que aqui estamos tomando, sem perda de generalidade, os polinômios A, B e C nas formas normais de cada quádrlica como sendo os polinômios identicamente nulos.

Como o campo X tem grau m , no caso do cilindro temos no máximo m fatores da forma $z - k$, pois o polinômio extático é dado pela componente $R(x, y, z) = T(x, y, z)$ e temos a liberdade de tomar $T(x, y, z) = \prod_{i=1}^m (z - z_i)$, com $z_i \in \mathbb{R}$. Em todos os outros casos, como o grau do campo X é m , temos que o grau dos polinômios D, E e F deve ser no máximo $m - 1$. Assim, com escolhas apropriadas de D, E e F , temos no máximo $m - 1$ fatores da forma $z - k$. Isto prova o item (b) de todos os casos.

Para provar o item (c) de cada caso, precisamos estudar fatores das formas $g(x, y, z) = ax + by$ e $h(x, y, z) = z - z_0$ nos polinômios extáticos

$$\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) = xQ - yP \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_{\{1,z\}} = R.$$

Sem perda de generalidade, consideremos $A = B = C = 0$ nas formas normais de todos os campos para facilitar os cálculos. Neste caso, os polinômios extáticos em cada caso são dados por:

$$(S) \quad \mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) = 2D(x^2 + y^2) - 2z(xF + yE) \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_{\{1,z\}}(X) = -2xE + 2yF.$$

$$(EP) \quad \mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) = -2F(x^2 + y^2) - xD - yE \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_{\{1,z\}}(X) = -2yD + 2xE.$$

$$(HOS) \text{ e } (HTS) \quad \mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) = 2D(x^2 + y^2) + 2z(xF + yE) \text{ e } \mathcal{E}_{\{1,z\}}(X) = -2xE + 2yF.$$

Analisemos somente o caso (S), os demais casos seguem o mesmo raciocínio e omitiremos a prova. Suponha que um campo sobre a esfera tenha $m - 1$ meridianos invariantes e $m - 1$ paralelos invariantes. Segue das Proposições 2.4.1 e 2.4.2 que

$$\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) = K_1(x, y, z) \prod_{i=1}^{m-1} (a_i x + b_i y)$$

e

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X) = K_2(x, y, z) \prod_{i=1}^{m-1} (z - z_i),$$

onde $K_1(x, y, z)$ e $K_2(x, y, z)$ são polinômios. Da segunda igualdade temos

$$E = \prod_{i=1}^{m-1} (z - z_i), \quad F = \alpha E, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Substituindo E e F na primeira igualdade, obtemos

$$\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) = 2(x^2 + y^2)D - 2z(\alpha x + y) \prod_{i=1}^{m-1} (z - z_i).$$

Como D tem grau no máximo $m - 1$ não é possível obter um fator da forma

$$\prod_{i=1}^{m-1} (a_i x + b_i y)$$

no polinômio extático $\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X)$. Fica assim provado o item (c) de todos os casos. \square

Embora não consigamos exibir, em alguns casos, todos os paralelos e meridianos possíveis, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.2. *Considere um campo vetorial polinomial X de grau m sobre \mathbb{Q}^2 .*

(i) *Se \mathbb{Q}^2 é o cone (C) , então o campo*

$$X(x, y, z) = (-2yF_1(x, y) + xF_2(z), 2xF_1(x, y) + yF_2(z), zF_2(z)), \quad (3.5)$$

onde

$$F_1(x, y) = \prod_{i=1}^{m-1} (a_i x + b_i y), \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a_i^2 + b_i^2 \neq 0, \quad (a_i, b_i) \neq (a_j, b_j), \quad i \neq j,$$

$$F_2(z) = \prod_{i=1}^{m-1} (z - z_i), \quad z_i \neq z_j, \quad i \neq j, \quad z_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

tem exatamente $2(m-1)$ meridianos invariantes e $m-1$ paralelos invariantes.

(ii) Se \mathbb{Q}^2 é o cilindro (EC), então o campo

$$X(x, y, z) = (2yF_1(x, y), -2xF_1(x, y), F_3(z)), \quad (3.6)$$

onde F_1 é dada em (3.5) e

$$F_3(z) = \prod_{i=1}^m (z - z_i), \quad z_i \neq z_j, \quad i \neq j, \quad z_i \in \mathbb{R},$$

tem exatamente $2(m-1)$ meridianos invariantes e m paralelos invariantes.

(iii) Se \mathbb{Q}^2 é o parabolóide (EP), então o campo

$$X(x, y, z) = (2yF_1(x, y) + xF_4(z), -2xF_1(x, y) + yF_4(z), 2(x^2 + y^2)F_4(z)), \quad (3.7)$$

onde F_1 é dada em (3.5) e

$$F_4(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 2, \\ \prod_{i=1}^{m-2} (z - z_i), & z_i \neq z_j, \quad i \neq j, \quad z_i > 0, \quad \text{se } m > 2, \end{cases}$$

tem exatamente $m-1$ meridianos invariantes e $m-2$ paralelos invariantes.

(iv) Se \mathbb{Q}^2 é o hiperbolóide de uma folha (HOS), então o campo

$$X(x, y, z) = (-2yF_1(x, y) + 2xzF_5(z), 2xF_1(x, y) + 2yzF_5(z), 2(x^2 + y^2)F_5(z)), \quad (3.8)$$

onde F_1 é dada em (3.5) e

$$F_5(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 2, \\ \prod_{i=1}^{m-2} (z - z_i), & z_i \neq z_j, \quad i \neq j, \quad z_i \in \mathbb{R}, \quad \text{se } m > 2, \end{cases}$$

tem exatamente $2(m-1)$ meridianos invariantes e $m-2$ paralelos invariantes.

(v) Se \mathbb{Q}^2 é o hiperboloide de duas folhas (HTS), então o campo

$$X(x, y, z) = (-2yF_1(x, y) + 2xzF_6(z), 2xF_1(x, y) + 2yzF_6(z), 2(x^2 + y^2)F_6(z)), \quad (3.9)$$

onde F_1 é dada em (3.5) e

$$F_6(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 2, \\ \prod_{i=1}^{m-2} (z - z_i), & z_i \neq z_j, i \neq j, \quad |z_i| > 1, \text{ se } m > 2, \end{cases}$$

tem exatamente $2(m - 1)$ meridianos invariantes e $m - 2$ paralelos invariantes.

(vi) Se \mathbb{Q}^2 é a esfera (S), então o campo

$$X(x, y, z) = (-yF_1(x, y) + xzF_7(z), xF_1(x, y) + yzF_7(z), -(x^2 + y^2)F_7(z)), \quad (3.10)$$

onde F_1 é dada em (3.5) e

$$F_7(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 2, \\ \prod_{i=1}^{m-2} (z - z_i), & z_i \neq z_j, i \neq j, \quad |z_i| < 1, \text{ se } m > 2, \end{cases}$$

tem exatamente $m - 1$ meridianos invariantes e $m - 2$ paralelos invariantes.

Demonstração.

(i) Considere X o campo vetorial polinomial (3.5). É fácil ver que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\{x,y\}}(X)(x, y, z) &= xQ(x, y, z) - yP(x, y, z) = 2(x^2 + y^2)F_1(x, y) \\ &= 2(x^2 + y^2) \prod_{i=1}^{m-1} (a_i x + b_i y), \end{aligned}$$

onde

$$a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a_i^2 + b_i^2 \neq 0, \quad (a_i, b_i) \neq (a_j, b_j), \quad i \neq j,$$

e

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)(x, y, z) = R(x, y, z) = zF_2(z) = z \prod_{i=1}^{m-1} (z - z_i),$$

onde

$$z_i \neq z_j, \quad i \neq j, \quad z_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Então um polinômio da forma $ax + by$ somente divide $F_1(x, y)$ em $\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X)(x, y, z)$. Logo, X tem $2(m - 1)$ meridianos invariantes. Um polinômio $z - z_i$ somente divide $F_2(z)$ em $\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)(x, y, z)$, donde X tem $m - 1$ paralelos invariantes.

(ii) Considere X o campo vetorial polinomial (3.6). É fácil ver que, neste caso,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X)(x, y, z) &= xQ(x, y, z) - yP(x, y, z) = -2(x^2 + y^2)F_1(x, y) \\ &= -2(x^2 + y^2) \prod_{i=1}^{m-1} (a_i x + b_i y),\end{aligned}$$

onde

$$a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a_i^2 + b_i^2 \neq 0, \quad (a_i, b_i) \neq (a_j, b_j), \quad i \neq j,$$

e

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)(x, y, z) = R(x, y, z) = F_3(z) = \prod_{i=1}^m (z - z_i),$$

onde

$$z_i \neq z_j, \quad i \neq j, \quad z_i \in \mathbb{R}.$$

Portanto o campo vetorial X tem exatamente $2(m - 1)$ meridianos invariantes e m paralelos invariantes.

(iii) Considere X o campo vetorial polinomial (3.7). É fácil ver que, neste caso,

$$\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X)(x, y, z) = -2(x^2 + y^2)F_1(x, y) = -2(x^2 + y^2) \prod_{i=1}^{m-1} (a_i x + b_i y),$$

onde

$$a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a_i^2 + b_i^2 \neq 0, \quad (a_i, b_i) \neq (a_j, b_j), \quad i \neq j,$$

e

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)(x, y, z) = R(x, y, z) = 2(x^2 + y^2)F_4(z),$$

isto é,

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)(x, y, z) = \begin{cases} 2(x^2 + y^2), & \text{se } m = 2, \\ 2(x^2 + y^2) \prod_{i=1}^{m-2} (z - z_i), & z_i \neq z_j, \quad i \neq j, \quad z_i > 0, \quad \text{se } m > 2. \end{cases}$$

Portanto o campo vetorial X tem exatamente $m - 1$ meridianos invariantes e $m - 2$ paralelos invariantes.

(iv) Considere X o campo vetorial polinomial (3.8). Novamente, é fácil ver que, neste caso,

$$\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X)(x, y, z) = 2(x^2 + y^2) F_1(x, y) = 2(x^2 + y^2) \prod_{i=1}^{m-1} (a_i x + b_i y),$$

onde

$$a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a_i^2 + b_i^2 \neq 0, \quad (a_i, b_i) \neq (a_j, b_j), \quad i \neq j,$$

e

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)(x, y, z) = R(x, y, z) = 2(x^2 + y^2) F_5(z),$$

isto é,

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)(x, y, z) = \begin{cases} 2(x^2 + y^2), & \text{se } m = 2, \\ 2(x^2 + y^2) \prod_{i=1}^{m-2} (z - z_i), & z_i \neq z_j, \quad i \neq j, \quad z_i \in \mathbb{R}, \quad \text{se } m > 2. \end{cases}$$

Portanto o campo vetorial X tem exatamente $2(m - 1)$ meridianos invariantes e $m - 2$ paralelos invariantes.

As provas dos itens (v) e (vi) seguem de forma análoga às provas dos itens anteriores e, por isso, iremos omiti-las. \square

3.3 Realização dos paralelos invariantes como ciclos limites

Na seção anterior encontramos o número máximo de meridianos e paralelos invariantes que podem existir em um campo vetorial polinomial sobre as quádras de revolução \mathbb{Q}^2 . Nesta seção estudaremos quando os paralelos invariantes se realizam como ciclos limites.

Teorema 3.3.1. *Fixe $1 \leq k \leq m - 1$ e considere o campo vetorial polinomial X de grau m sobre o cone (C)*

$$X(x, y, z) = (-2y + xF_8(z), 2x + yF_8(z), zF_8(z)), \quad (3.11)$$

onde

$$F_8(z) = z^{m-k-1} \prod_{i=1}^k (z - z_i), \quad z_i \neq z_j, \quad i \neq j, \quad z_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Então X tem exatamente k paralelos invariantes que são ciclos limites. Estes ciclos limites são, em cada folha do cone, estáveis ou instáveis alternadamente.

Demonstração. O campo vetorial polinomial (3.11) tem um ponto singular no vértice do cone e não possui pontos de equilíbrio sobre o cone. Por um simples cálculo, temos

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)(x, y, z) = R(x, y, z) = zF_8(z) = z^{m-k} \prod_{i=1}^k (z - z_i),$$

onde

$$z_i \neq z_j, \quad i \neq j, \quad z_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Portanto, fixado $1 \leq k \leq m-1$, os k paralelos $z = z_i$, $z_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ são ciclos limites. Estes ciclos limites são estáveis ou instáveis alternadamente pois, entre dois paralelos invariantes consecutivos, o sinal de R é fixo. \square

Teorema 3.3.2. *Fixe $1 \leq k \leq m$ e considere o campo vetorial polinomial X de grau m sobre o cilindro (EC)*

$$X(x, y, z) = (2y, -2x, F_9(z)), \quad (3.12)$$

onde

$$F_9(z) = \begin{cases} z^m, & \text{se } k = 1, \\ z^{m-k+1} \prod_{i=1}^{k-1} (z - z_i), & z_i \neq z_j, \quad i \neq j, \quad z_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \text{se } k > 1. \end{cases}$$

Então X tem exatamente k paralelos invariantes que são ciclos limites. Estes ciclos limites são estáveis ou instáveis alternadamente, exceto o ciclo limite determinado por $z = 0$ que pode ser semi-estável.

Demonstração. O campo vetorial polinomial (3.12) não possui pontos de equilíbrio. Por um cálculo direto temos

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)(x, y, z) = R(x, y, z) = F_9(z),$$

onde

$$F_9(z) = \begin{cases} z^m, & \text{se } k = 1, \\ z^{m-k+1} \prod_{i=1}^{k-1} (z - z_i), & z_i \neq z_j, i \neq j, z_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ se } k > 1. \end{cases}$$

Portanto, fixado $1 \leq k \leq m$, os k paralelos invariantes são ciclos limites. Estes ciclos limites são estáveis ou instáveis alternadamente, exceto o ciclo limite determinado por $z = 0$ que pode ser semi-estável se m é par e $k = 1$ ou se $m - k + 1$ é par e $k > 1$. \square

Teorema 3.3.3. *Fixe $1 \leq k \leq m - 1$ e considere o campo vetorial X de grau m sobre o parabolóide (EP)*

$$X(x, y, z) = (2y(x - 2k) + F_{10}(z), -2x(x - 2k), 2xF_{10}(z)), \quad (3.13)$$

onde

$$F_{10}(z) = \varepsilon z^{m-k-1} \prod_{i=1}^k (z - i), \quad \varepsilon > 0 \text{ pequeno.}$$

Então X tem exatamente k paralelos invariantes que são ciclos limites. Estes ciclos limites são estáveis ou instáveis alternadamente.

Demonstração. Considere o campo vetorial polinomial (3.13). Por um cálculo direto temos

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)(x, y, z) = R(x, y, z) = 2xF_{10}(z) = 2\varepsilon x z^{m-k-1} \prod_{i=1}^k (z - i).$$

Portanto, fixado $1 \leq k \leq m - 1$, o campo vetorial (3.13) tem exatamente k paralelos invariantes dados por $z = i$, $i = 1, \dots, k$. É fácil ver que esse campo vetorial não possui pontos de equilíbrio sobre os paralelos invariantes. Para completar a prova, precisamos mostrar que esses paralelos invariantes são ciclos limites. Note que o parabolóide $x^2 + y^2 - z = 0$ pode ser escrito na forma explícita $z = x^2 + y^2$. Nas coordenadas (x, y) o campo vetorial (3.13) tem a forma

$$X^*(x, y) = (2y(x - 2k) + F_{10}^*(x^2 + y^2), -2x(x - 2k))$$

com

$$F_{10}^*(x^2 + y^2) = \varepsilon (x^2 + y^2)^{m-k-1} \prod_{i=1}^k (x^2 + y^2 - i), \quad \varepsilon > 0 \text{ pequeno.}$$

Em coordenadas polares $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ o campo vetorial acima é equivalente a

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r^{2(m-k-1)} \prod_{i=1}^k (r^2 - i) \cos \theta}{-2(r \cos \theta - 2k) - \varepsilon r^{2(m-k-1)-1} \prod_{i=1}^k (r^2 - i) \sin \theta}.$$

Expandindo $dr/d\theta$ em série de Taylor com respeito a ε em $\varepsilon = 0$ temos

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^{2(m-k-1)-1} \prod_{i=1}^k (r^2 - i) \cos \theta}{-2(r \cos \theta - 2k)} \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (3.14)$$

A equação (3.14) satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2.1. A função média (2.4) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^{2(m-k-1)-1} \prod_{i=1}^k (r^2 - i) \cos \theta}{-2(r \cos \theta - 2k)} \right) d\theta \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(r^{2(m-k-1)-1} \prod_{i=1}^k (r^2 - i) \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{(r \cos \theta - 2k)} d\theta \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(r^{2(m-k-1)-1} \prod_{i=1}^k (r^2 - i) \right) g(r), \end{aligned}$$

onde

$$g(r) = 2\pi \left(\frac{\sqrt{4k^2 - r^2} - 2k}{r\sqrt{4k^2 - r^2}} \right).$$

É fácil ver que $g(r) < 0$ para $0 < r < k$. Assim, para $0 < r < k$, os zeros simples de f são dados por $r = \sqrt{i}$, para $i = 1, \dots, k$, que correspondem aos k ciclos limites de X^* . A estabilidade de cada ciclo limite é facilmente determinada pelo sinal da derivada de f em cada zero simples. \square

Teorema 3.3.4. *Fixe $1 \leq k \leq m - 1$ e considere o campo vetorial X de grau m sobre o hiperboloide de uma folha (HOS)*

$$X(x, y, z) = (-2y(x - 2k) + 2zF_{11}(z), 2x(x - 2k), 2xF_{11}(z)), \quad (3.15)$$

onde

$$F_{11}(z) = \begin{cases} \varepsilon z^{m-1}, & \text{se } k = 1, \\ \varepsilon z^{m-k} \prod_{i=1}^{k-1} (z - i), & \text{se } k > 1, \end{cases}$$

e $\varepsilon > 0$ pequeno. Então X tem exatamente k paralelos invariantes que são ciclos limites. Estes ciclos limites são estáveis ou instáveis alternadamente, exceto o ciclo limite determinado por $z = 0$ que pode ser semi-estável.

Demonstração. Considere X o campo vetorial polinomial (3.15). Por um cálculo direto temos

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)(x, y, z) = R(x, y, z) = 2xF_{11}(z) = \begin{cases} 2\varepsilon xz^{m-1}, & \text{se } k = 1, \\ 2\varepsilon xz^{m-k} \prod_{i=1}^{k-1} (z - i), & \text{se } k > 1, \end{cases}$$

onde $\varepsilon > 0$ pequeno. Portanto, fixado $1 \leq k \leq m - 1$, o campo vetorial (3.15) tem exatamente k paralelos invariantes em $z = i$, para $i = 0, \dots, k - 1$. Esse campo vetorial não possui pontos de equilíbrio nos paralelos invariantes. Para provar que esses k paralelos invariantes são ciclos limites tomamos o hiperboloide de uma folha como o gráfico $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ onde $x^2 + y^2 \geq 1$.

O hiperboloide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ para $z \geq 0$ pode ser escrito na forma explícita $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ onde $x^2 + y^2 \geq 1$. Nas coordenadas (x, y) o campo vetorial (3.15) tem a forma

$$X^*(x, y) = \left(-2y(x - 2k) + 2\sqrt{x^2 + y^2 - 1} F_{11}^* \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \right), 2x(x - 2k) \right)$$

onde

$$F_{11}^* \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \right) = \begin{cases} \varepsilon \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \right)^{m-1}, & \text{se } k = 1, \\ \varepsilon \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \right)^{m-k} \prod_{i=1}^{k-1} \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 1} - i \right), & \text{se } k > 1, \end{cases}$$

e $\varepsilon > 0$ pequeno. Em coordenadas polares $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ o campo vetorial acima é equivalente a

$$\frac{dr}{d\theta} = \begin{cases} -\frac{\varepsilon (r^2 - 1)^{m/2} r \cos \theta}{\varepsilon (r^2 - 1)^{m/2} \sin \theta - r^2 \cos \theta + 2r}, & \text{se } k = 1, \\ \frac{\varepsilon (r^2 - 1)^{(m-k+1)/2} r \prod_{i=1}^{k-1} (\sqrt{r^2 - 1} - i) \cos \theta}{r^2 \cos \theta - 2rk - \varepsilon \sin \theta (r^2 - 1)^{(m-k+1)/2} \prod_{i=1}^{k-1} (\sqrt{r^2 - 1} - i)}, & \text{se } k > 1. \end{cases}$$

Expandindo $dr/d\theta$ em série de Taylor com respeito a ε em $\varepsilon = 0$ temos

$$\frac{dr}{d\theta} = \begin{cases} \frac{\cos \theta (r^2 - 1)^{m/2}}{r \cos \theta - 2} \varepsilon + O(\varepsilon^2), & \text{se } k = 1, \\ \frac{\cos \theta (r^2 - 1)^{(m-k+1)/2} \prod_{i=1}^{k-1} (\sqrt{r^2 - 1} - i)}{r \cos \theta - 2k} \varepsilon + O(\varepsilon^2), & \text{se } k > 1. \end{cases} \quad (3.16)$$

A equação (3.16) satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2.1. Neste caso, a função média (2.4) é dada por

$$f(r) = \begin{cases} (r^2 - 1)^{m/2} g_1(r), & \text{se } k = 1, \\ (r^2 - 1)^{(m-k+1)/2} \prod_{i=1}^{k-1} (\sqrt{r^2 - 1} - i) g_2(r), & \text{se } k > 1, \end{cases}$$

onde

$$g_1(r) = \frac{\sqrt{4 - r^2} - 2}{r\sqrt{4 - r^2}}, \quad g_2(r) = \frac{\sqrt{4k^2 - r^2} - 2k}{r\sqrt{4k^2 - r^2}}.$$

O hiperboloide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ para $z \leq 0$ pode ser escrito na forma explícita $z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ onde $x^2 + y^2 \geq 1$. Repetindo os cálculos acima para este caso, obtemos a função média (2.4)

$$f(r) = \begin{cases} (-1)^m (r^2 - 1)^{m/2} g_1(r), & \text{se } k = 1, \\ (-1)^{m-k} (r^2 - 1)^{(m-k+1)/2} \prod_{i=1}^{k-1} (-\sqrt{r^2 - 1} - i) g_2(r), & \text{se } k > 1, \end{cases}$$

onde g_1 e g_2 são as mesmas funções do caso anterior.

É fácil ver que $g_1(r) < 0$ para $1 \leq r < 2$ e $g_2(r) < 0$ para $1 \leq r < 2k$. Então os zeros simples de f são dados por $r = 1$ quando $k = 1$ e por $r = 1$ e $r = \sqrt{i^2 + 1}$ para $i = 1, \dots, k - 1$ quando $k > 1$, que corresponde aos k ciclos limites de X^* . A estabilidade de um ciclo limite em $r = \sqrt{i^2 + 1}$, para $i = 1, \dots, k - 1$ quando $k > 1$ é facilmente determinada. Por outro lado, a estabilidade do ciclo limite em $r = 1$ é a seguinte:

- (i) Quando $k = 1$: o ciclo limite é estável se m é par e semi-estável se m é ímpar;
- (ii) Quando $k > 1$: o ciclo limite é estável se m e k são ímpares, instável se m e k são pares e semi-estável se m é ímpar e k é par, ou se m é par e k é ímpar.

E assim terminamos a prova do teorema. □

Teorema 3.3.5. *Fixe $1 \leq k \leq m - 1$ e considere o campo vetorial X de grau m sobre o hiperboloide de duas folhas (HTS)*

$$X(x, y, z) = (-2y(x - 2k) + 2zF_{12}(z), 2x(x - 2k), 2xF_{12}(z)), \quad (3.17)$$

onde

$$F_{12}(z) = \varepsilon z^{m-k-1} \prod_{i=1}^k (z - 2i), \quad \varepsilon > 0 \text{ pequeno.}$$

Então X tem exatamente k paralelos invariantes que são ciclos limites. Esses ciclos limites são estáveis ou instáveis alternadamente.

Observação 3.3.1. A prova do Teorema 3.3.5 é similar à do Teorema 3.3.4 e, por isso, iremos omiti-la.

Teorema 3.3.6. Existem campos vetoriais polinomiais X de grau m sobre a esfera (S) tendo exatamente

- (a) ou 1 meridiano invariante que é um ciclo limite;
- (b) ou k paralelos invariantes que são ciclos limites para $k = 1, 2, \dots, m - 1$.

Demonstração.

(a) A prova deste item será dividida em dois casos:

Caso 1: Considere X o campo vetorial quadrático sobre a esfera

$$X(x, y, z) = (2\varepsilon xy, -2\varepsilon x^2 - 2z(y + 2), 2y(y + 2)), \quad (3.18)$$

com $\varepsilon > 0$ pequeno. Para este campo X temos

$$\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X)(x, y, z) = -2x (\varepsilon(x^2 + y^2) + z(y + 2)) = -2x (\varepsilon(1 - z^2) + z(y + 2)).$$

Como $\varepsilon(1 - z^2) + z(y + 2)$ não possui fatores da forma $(ax + by)$, temos que X tem $x = 0$ como o único meridiano invariantes sobre a esfera. É fácil ver que esse campo vetorial não possui nenhum ponto de equilíbrio sobre o meridiano invariante $x = 0$. Para completar a prova, precisamos mostrar que esse meridiano é um ciclo limite.

Note que a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ pode ser escrita nas formas explícitas $x = \pm\sqrt{1 - y^2 - z^2}$ com $y^2 + z^2 \leq 1$. Nas coordenadas (y, z) o campo vetorial (3.18) tem a forma

$$X^*(y, z) = (-2\varepsilon(1 - y^2 - z^2) - 2z(y + 2), 2y(y + 2)).$$

Em coordenadas polares $y = r \cos \theta$ e $z = r \sin \theta$ o campo vetorial acima é equivalente a

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r(r^2 - 1) \cos \theta}{\varepsilon \sin \theta(1 - r^2) + r(2 + r \cos \theta)}.$$

Expandindo $dr/d\theta$ em série de Taylor com respeito a ε em $\varepsilon = 0$ temos

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{(r^2 - 1) \cos \theta}{2 + r \cos \theta} \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (3.19)$$

A equação (3.19) satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2.1 e a correspondente função média é dada por

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - 1) \cos \theta}{2 + r \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{(r^2 - 1)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{2 + r \cos \theta} d\theta = (r^2 - 1)g(r), \end{aligned}$$

onde

$$g(r) = \frac{\sqrt{4 - r^2} - 2}{r\sqrt{4 - r^2}}.$$

É fácil ver que $g(r) < 0$ para $0 < r \leq 1$. Assim, o único zero simples de f é dado por $r = 1$, que é um ciclo limite estável de X^* .

Caso 2: Considere agora o campo vetorial polinomial X de grau $m > 2$ sobre a esfera

$$X(x, y, z) = (-2y(xy^{m-2} + z) + 2z, 2(x^2 + z^2)y^{m-2}, -2x + 2y(x - y^{m-2}z)).$$

Para esse campo vetorial X , temos

$$\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X)(x, y, z) = y(2x(x^2 + y^2)y^{m-3} + 2y(xy^{m-2} + z) - 2z).$$

É fácil ver que y é o único fator da forma $ax + by$ no polinômio extático acima. Então $y = 0$ é o único meridiano invariante sobre a esfera. Os pontos de equilíbrio de X são $P_{\pm} = (0, \pm 1, 0)$ e a segunda componente de X é $Q(x, y, z) = 2(x^2 + z^2)y^{m-2}$ cujo sinal depende apenas da variável y e da potência $m - 2$. Assim, $y = 0$ é um ciclo limite e sua estabilidade depende do grau m do campo vetorial. Isto completa a prova do item (a).

(b) Fixado $1 \leq k \leq m - 1$, considere o campo vetorial polinomial X de grau m sobre a esfera

$$X(x, y, z) = (-2y(x - 2) + 2zF_{13}(z), 2x(x - 2) - 2zF_{13}(z), 2(y - x)F_{13}(z)),$$

onde

$$F_{13}(z) = \begin{cases} \varepsilon z^{m-1}, & \text{se } k = 1, \\ \varepsilon z^{m-k} \prod_{i=1}^{k-1} (z - z_i), & z_i \in (-1, 1), \quad z_i \neq 0, \text{ se } k > 1, \end{cases}$$

com $\varepsilon > 0$ pequeno. Por um cálculo direto, temos

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)(x, y, z) = 2(y - x)F_{13}(z).$$

Portanto, fixado $1 \leq k \leq m - 1$, esse campo vetorial tem exatamente k paralelos invariantes dados por $z = 0$ se $k = 1$ e $z = z_i$ e $z = 0$ se $k > 1$. É fácil ver que o campo vetorial não possui pontos de equilíbrio sobre os paralelos invariantes. Similarmente à prova do Teorema 3.3.4 temos que os k paralelos invariantes são ciclos limites. O ciclo limite em $z = 0$ pode ser estável, instável ou semi-estável, dependendo das escolhas de m , k e $z_i \in (-1, 1)$, $z_i \neq 0$. Por exemplo, se $k = 1$ então o ciclo limite em $z = 0$ é estável se m é par e é semi-estável se m é ímpar. Isto prova o item (b). \square

Nas Figuras 3.1 e 3.2 abaixo damos dois exemplos de campos vetoriais polinomiais sobre a esfera, o primeiro tendo exatamente 1 meridiano invariante como ciclo limite e o segundo tendo 3 paralelos invariantes como ciclos limites.

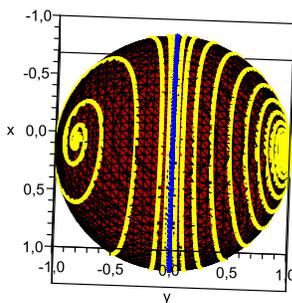


Figura 3.1: Campo sobre a esfera com 1 meridiano invariante como ciclo limite dado por $y = 0$.

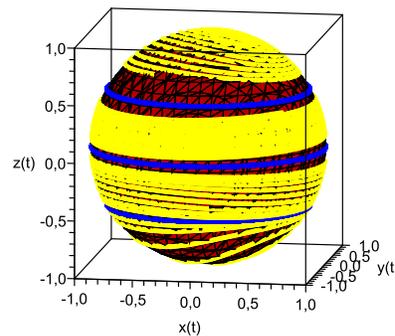


Figura 3.2: Campo sobre a esfera com 3 paralelos invariantes como ciclos limites dados por $z = 0$, $z = 1/2$ e $z = -1/2$.

Capítulo 4

Campos vetoriais polinomiais em \mathbb{R}^3 sobre o toro

Considere o toro bidimensional

$$\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 - r^2)^2 + z^2 = 1\}, \quad r > 1.$$

Note que \mathbb{T}^2 em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) é dado por:

$$(\rho^2 - r^2)^2 + z^2 = 1, \tag{4.1}$$

onde $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Neste capítulo estudaremos campos vetoriais polinomiais de grau $m \geq 2$ em \mathbb{R}^3 tendo o toro \mathbb{T}^2 invariante pelo seu fluxo. De forma análoga ao que foi feito no Capítulo 3 caracterizaremos todas as possíveis configurações de meridianos e paralelos invariantes que esses campos vetoriais podem exibir. Além disso, consideraremos quando esses meridianos e paralelos podem ser ciclos limites. Esse estudo é baseado no artigo [6].

Observação 4.0.1. *Para não carregar a notação, no que segue usaremos*

$$\mathcal{T} := \mathbb{T}^2 = (x^2 + y^2 - r^2)^2 + z^2 - 1.$$

4.1 Configuração dos meridianos e paralelos invariantes

Nesta seção caracterizaremos todas as possíveis configurações de meridianos e paralelos invariantes que um campo vetorial polinomial de grau $m \geq 2$ sobre \mathbb{T}^2 pode exibir. Antes disto, precisamos, assim como foi feito na Subseção 3.2.2, definir os meridianos e paralelos invariantes de um campo sobre o toro.

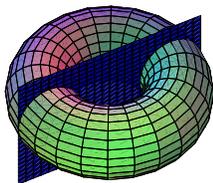
Definição 4.1.1. Em \mathbb{T}^2 definimos os **meridianos** α como a intersecção dos planos $ax + by = 0$ (onde $a, b \in \mathbb{R}$) com \mathbb{T}^2 , ou simplesmente por $\alpha = \{ax + by = 0\} \cap \mathbb{T}^2$. Definimos os **paralelos** β como a intersecção dos planos $z = k$ (onde $k \in [-1, 1]$) com \mathbb{T}^2 , ou simplesmente por $\beta = \{z = k\} \cap \mathbb{T}^2$.

Observação 4.1.1.

(i) Segue da Definição 4.1.1 que os meridianos aparecem sempre aos pares. Ver Figura 4.1.

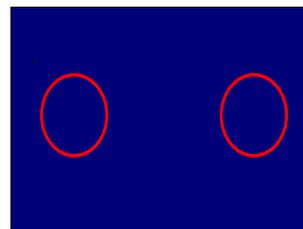
(ii) Também da Definição 4.1.1 segue que, se $k \neq \pm 1$, então X tem dois paralelos, caso contrário tem apenas um paralelo. Ver Figura 4.2.

Definição 4.1.2. Dizemos que um **meridiano** $\alpha = \{ax + by = 0\} \cap \mathbb{T}^2$ é **invariante** pelo fluxo de um campo vetorial polinomial X sobre \mathbb{T}^2 se $X(ax + by) = K_\alpha(ax + by)$, para algum $K_\alpha \in \mathbb{R}[x, y, z]$. De maneira similar dizemos que um **paralelo** $\beta = \{z = z_0\} \cap \mathbb{T}^2$ é **invariante** pelo fluxo de um campo vetorial polinomial X sobre \mathbb{T}^2 se $X(z - z_0) = K_\beta(z - z_0)$, para algum $K_\beta \in \mathbb{R}[x, y, z]$.



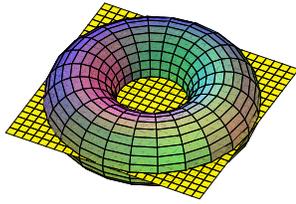
Intersecção do toro

com o plano $ax + by = 0$.

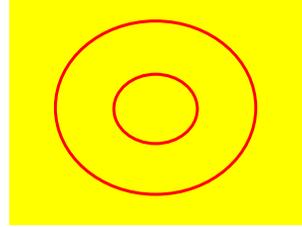


Meridianos obtidos.

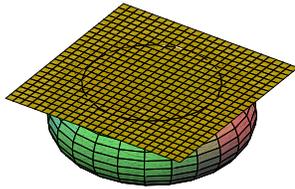
Figura 4.1: Meridianos sobre o toro.



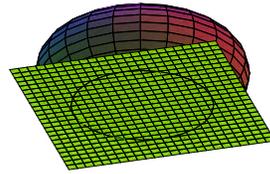
Intersecção do toro
com o plano $z = k, k \in [-1, 1]$.



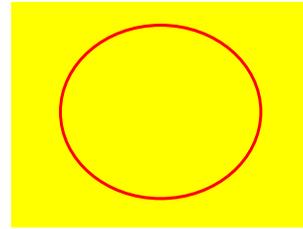
Se $z \neq \pm 1$,
então obtemos dois paralelos.



Intersecção do toro
com o plano $z = 1$.



Intersecção do toro
com o plano $z = -1$.



Paralelo obtido.

Figura 4.2: Paralelos sobre o toro.

Teorema 4.1.1. *Seja X um campo vetorial polinomial de grau $m \geq 2$ sobre \mathbb{T}^2 . Suponha que X tenha um número finito de meridianos e paralelos invariantes. Então seguem as seguintes afirmações:*

- (a) *O número de meridianos invariantes de X é no máximo $2(m - 1)$.*
- (b) *O número de paralelos invariantes de X é no máximo $2(m - 2)$.*

Demonstração.

(a) Este item segue de forma análoga ao que foi feito no caso (a) de todos os itens do Teorema 3.2.1.

(b) Para determinar os paralelos invariantes devemos considerar a intersecção dos planos $z = k, k \in [-1, 1]$, com o toro \mathbb{T}^2 . O campo vetorial $X = (P, Q, R)$ deve satisfazer

$X\mathcal{T} = K\mathcal{T}$. Logo, segue que,

$$\begin{aligned} 4x(x^2 + y^2 - r^2)P + 4y(x^2 + y^2 - r^2)Q + 2zR &= K(x, y, z)((x^2 + y^2 - r^2)^2 + z^2 - 1) \\ 4(x^2 + y^2 - r^2)(xP + yQ) + 2zR &= K(x, y, z)((x^2 + y^2 - r^2)^2 + z^2 - 1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\mathcal{E}_{\{1, z\}}(X) = R = h(x, y, z) \prod_{i=1}^l (z - z_i).$$

Como (4.2) vale para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, em particular vale para $x = y = 0$. Deste modo,

$$2zh(0, 0, z) \prod_{i=1}^l (z - z_i) = \left(\prod_{i=0}^{m-1} k_i z^i \right) (r^4 + z^2 - 1),$$

onde $h(0, 0, z) = \prod_{i=0}^{m-1} k_i z^i$. Desta última equação segue que $k_0 = 0$ e, conseqüentemente,

$$2zh(0, 0, z) \prod_{i=1}^l (z - z_i) = z \left(\prod_{i=0}^{m-2} \tilde{k}_i z^i \right) (r^4 + z^2 - 1).$$

Como $(r^4 + z^2 - 1)$ não pode ser fatorado por polinômios reais e $h(x, y, z)$ não tem fatores da forma $z - z_0$, temos que $l \leq m - 2$. Assim, $\mathcal{E}_{\{1, z\}}(X)$ tem no máximo $m - 2$ fatores da forma $z = k$. Logo, X tem no máximo $m - 2$ planos invariantes da forma $z = k$, e, conseqüentemente, no máximo $2(m - 2)$ paralelos invariantes. \square

Teorema 4.1.2. *Fixe $0 \leq k \leq m - 1$ e $0 \leq l \leq m - 2$ e considere o seguinte campo vetorial polinomial X de grau m sobre \mathbb{T}^2 associado ao sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xzF_{15}(z) - yz^{m-k-1}F_{14}(x, y), \\ \dot{y} &= yzF_{15}(z) + xz^{m-k-1}F_{14}(x, y), \\ \dot{z} &= 2(r^2(r^2 - x^2 - y^2) + z^2 - 1)F_{15}(z), \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde

$$F_{14}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ \prod_{i=1}^k (a_i x + b_i y), & a_i, b_i \in \mathbb{R}, \text{ se } k > 0, \end{cases}$$

e

$$F_{15}(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } l = 0, \\ \prod_{i=1}^l (z - z_i), & z_i \in [-1, 1], \text{ se } l > 0. \end{cases}$$

Então X tem exatamente $2k$ meridianos invariantes e l paralelos invariantes.

Demonstração. Calculando os polinômios extáticos $\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X)$ e $\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) &= xQ - yP \\ &= (xyzF_{15}(z) + x^2z^{m-k-1}F_{14}(x,y)) - (yxzF_{15}(z) - y^2z^{m-k-1}F_{14}(x,y)) \\ &= (x^2 + y^2)z^{m-k-1}F_{14}(x,y), \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X) = R = 2(r^2(r^2 - x^2 - y^2) + z^2 - 1)F_{15}(z).$$

Logo, um polinômio da forma $ax + by$ só divide $F_{14}(x, y)$ em $\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X)$, e para cada plano $\{ax + by = 0\} \cap \mathbb{T}^2$, X tem dois meridianos invariantes em \mathbb{T}^2 . Um polinômio $z - z_i$ só divide $F_{15}(z)$ em $\mathcal{E}_{\{1,z\}}(X)$, e se $z_i \in (-1, 1)$, para $i = 1, \dots, l$, então X tem exatamente $2l$ paralelos invariantes, se $z_1 = -1$ ou $z_l = 1$, então X tem $2l - 1$ paralelos invariantes. Finalmente, se $z_1 = -1$ e $z_l = 1$, então X tem $2(l - 1)$ paralelos invariantes. \square

4.2 Realização dos meridianos e paralelos invariantes como ciclos limites

Nesta seção estudaremos quando os meridianos e paralelos invariantes sobre o toro se realizam como ciclos limites.

Teorema 4.2.1. *Existem campos vetoriais polinomiais X de grau m sobre \mathbb{T}^2 tendo exatamente:*

- (a) *ou $2k$ meridianos invariantes que são ciclos limites para $k = 1, 2, \dots, m - 1$;*
- (b) *ou l paralelos invariantes que são ciclos limites para $l = 1, 2, \dots, 2(m - 2)$.*

Além disso, esses ciclos limites são estáveis ou instáveis alternadamente.

Demonstração.

(a) Considere o campo vetorial X de grau m sobre \mathbb{T}^2 associado ao sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xz - y(z + z_0)^{m-k-1}F_{14}(x, y), \\ \dot{y} &= yz + x(z + z_0)^{m-k-1}F_{14}(x, y), \\ \dot{z} &= 2(r^2(r^2 - x^2 - y^2) + z^2 - 1),\end{aligned}\tag{4.4}$$

onde $z_0 \geq 1$, $1 \leq k \leq m - 1$ e F_{14} é dada no Teorema 4.1.2.

Temos que X satisfaz (4.2) com $K(x, y, z) = 4z$, e

$$\mathcal{E}_{\{x,y\}}(X) = xQ - yP = (x^2 + y^2)(z - z_0)^{m-k-1}F_{14}(x, y).$$

Note que X não possui paralelos invariantes pois $z - z_0$ não é um fator de \dot{z} para nenhum z_0 . Logo, X tem $2k$ meridianos invariantes. Em coordenadas cilíndricas X é dado por

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho z, \\ \dot{\theta} &= (z + z_0)^{m-k-1}F_{14}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \\ \dot{z} &= 2(r^2(r^2 - \rho^2) + z^2 - 1).\end{aligned}$$

Se (ρ^*, θ^*, z^*) é um ponto singular de \mathbb{T}^2 , então da igualdade $\dot{\rho} = \rho z = 0$ temos que $z^* = 0$, pois $\rho^* > 0$. Para $z^* = 0$, temos de (4.1) que $(\rho^*)^2 - r^2 = \pm 1$. Assim, $\dot{z} = 2(\pm r^2 - 1) = 0$. Como $r > 1$, então $\dot{z} \neq 0$. Portanto X não tem pontos singulares, e conseqüentemente as órbitas nos meridianos invariantes são órbitas periódicas.

Entre dois meridianos consecutivos o sinal de θ' é dado pelo sinal da expressão $F_{14}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ e ele se altera quando cruzamos um meridiano. Desta forma, as órbitas periódicas nos meridianos invariantes são ciclos limites estáveis ou instáveis alternadamente.

(b) Considere o campo vetorial X de grau m sobre \mathbb{T}^2 associado ao sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y(z - z_0)^{m-1} + xzF_{15}(z), \\ \dot{y} &= x(z - z_0)^{m-1} + yzF_{15}(z), \\ \dot{z} &= 2(r^2(r^2 - x^2 - y^2) + z^2 - 1)F_{15}(z),\end{aligned}\tag{4.5}$$

onde $1 \leq l \leq m - 2$, $z_0 \notin \{0, z_1, \dots, z_l\}$ e $F_{15}(z)$ é dada no Teorema 4.1.2.

Temos que X satisfaz (4.2) para $K(x, y, z) = 4zF_{15}(z)$. Em coordenadas cilíndricas X é dado por

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho z F_{15}(z), \\ \dot{\theta} &= (z - z_0)^{m-1}, \\ \dot{z} &= 2(r^2(r^2 - \rho^2) + z^2 - 1)F_{15}(z).\end{aligned}$$

Suponha que $(\rho^*, \theta^*, z^*) \in \mathbb{T}^2$ é um ponto singular de X , então como $\dot{\rho} = \rho z F_{15}(z)$ temos que $z^* \in \{0, z_1, \dots, z_l\}$ pois $\rho^* > 0$, mas como $\dot{\theta} \neq 0$ em (ρ^*, θ^*, z^*) segue que não existem pontos singulares de X sobre \mathbb{T}^2 . Logo as órbitas sobre os paralelos invariantes $\{z = z_i\} \cap \mathbb{T}^2$ são periódicas. Como $r^2(r^2 - \rho^2) + z^2 - 1 \neq 0$ para $-1 < z < 1$, as órbitas periódicas nos paralelos invariantes são ciclos limites estáveis ou instáveis de acordo com o sinal \dot{z} , ou seja, de acordo com o sinal de $F_{15}(z)$. Portanto, exceto sobre os paralelos invariantes, todas as órbitas são não periódicas. Assim, o número de paralelos invariantes de X que são ciclos limites é $2l$ se $z_i \in (-1, 1)$ para $i = 1, 2, \dots, l$; ou $2l - 1$ se $x_1 = -1$ ou $x_l = 1$; ou $2(l - 1)$ se $x_1 = -1$ e $x_l = 1$. Além disso, eles são estáveis ou instáveis alternadamente. \square

A observação seguinte é acerca da forma normal de um campo vetorial polinomial invariante sobre o toro.

Observação 4.2.1. *Pelo Teorema 3.1.1 temos que qualquer sistema diferencial polinomial em \mathbb{R}^3 que admite \mathcal{T} como superfície algébrica invariante é da forma:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A\mathcal{T} - 4y(x^2 + y^2 - r^2)D + 2zE, \\ \dot{y} &= B\mathcal{T} + 4x(x^2 + y^2 - r^2)D - 2zF, \\ \dot{z} &= C\mathcal{T} - 4x(x^2 + y^2 - r^2)E + 4y(x^2 + y^2 - r^2)F,\end{aligned}\tag{4.6}$$

onde A, B, C, D, E e F são polinômios arbitrários em \mathbb{R}^3 . Nos Teoremas 4.1.2 e 4.2.1 (a)

e (b), podemos ver que os sistemas (4.3), (4.4) e (4.5) têm a forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xzH(z) - yG(x, y, z), \\ \dot{y} &= yzH(z) + xG(x, y, z), \\ \dot{z} &= 2(r^2(r^2 - x^2 - y^2) + z^2 - 1)H(z),\end{aligned}$$

onde $H(z) \in \mathbb{R}[z]$ e $G(x, y, z) \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Estes sistemas podem ser obtidos da forma (4.6) da seguinte forma. Tomando $A = B = C \equiv 0$,

$$D(x, y, z) = \frac{1}{4}G(x, y, z),$$

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2}x(x^2 + y^2 - r^2)H(z),$$

e

$$F(x, y, z) = -\frac{1}{2}y(x^2 + y^2 - r^2)H(z),$$

o sistema (4.6) agora tem a forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y(x^2 + y^2 - r^2)G + xz(x^2 + y^2 - r^2)H, \\ \dot{y} &= x(x^2 + y^2 - r^2)G + yz(x^2 + y^2 - r^2)H, \\ \dot{z} &= -2(x^2 + y^2 - r^2)^2(x^2 + y^2)H.\end{aligned}$$

Como $x^2 + y^2 - r^2 \neq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, podemos multiplicar o sistema anterior por este fator não nulo. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xzH - yG, \\ \dot{y} &= yzH + xG, \\ \dot{z} &= -2(x^2 + y^2 - r^2)(x^2 + y^2)H.\end{aligned}$$

Agora, observando que $(x^2 + y^2 - r^2)^2 = 1 - z^2$, segue que

$$\begin{aligned}r^2(r^2 - x^2 - y^2) + z^2 - 1 &= r^2(r^2 - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2 - r^2) \\ &= (x^2 + y^2 - r^2)(-r^2 - (x^2 + y^2 - r^2)) \\ &= -(x^2 + y^2 - r^2)(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos o sistema procurado

$$\dot{x} = xzH - yG,$$

$$\dot{y} = yzH + xG,$$

$$\dot{z} = 2(r^2(r^2 - x^2 - y^2) + z^2 - 1)H.$$

Capítulo 5

Campos vetoriais polinomiais em \mathbb{R}^3 sobre uma superfície cúbica

Neste capítulo, estudaremos ciclos limites, meridianos e paralelos invariantes sobre campos vetoriais polinomiais em \mathbb{R}^3 que têm uma superfície cúbica de revolução como superfície algébrica invariante. O estudo desenvolvido neste capítulo gerou o preprint [3].

5.1 Uma cúbica especial

MacHale [9] e Villarino [13] estudaram várias propriedades geométricas interessantes acerca do polinômio cúbico

$$C_r(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - rxyz - 1, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Em particular, em [13] foi provado que $\mathcal{C}_r = C_r^{-1}(0)$ é uma superfície de revolução somente quando $r = 3$. Neste caso, o eixo de revolução \mathcal{L} tem a direção dada pelo vetor $(1, 1, 1)$ e passa pela origem. Além disso, a superfície cúbica de revolução \mathcal{C}_3 é regular e é assintótica ao plano $x + y + z = 0$.

O próximo teorema é essencial para a prova do Teorema 5.2.1.

Teorema 5.1.1. *Considere a aplicação linear invertível $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por*

$$\mathcal{T}(x, y, z) = \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{\sqrt{27}} + z, -\frac{x}{3} + \frac{y}{\sqrt{27}} + z, -\frac{2y}{\sqrt{27}} + z \right).$$

Então a superfície cúbica de revolução \mathcal{C}_3 é aplicada por \mathcal{T}^{-1} na superfície cúbica de revolução $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1}(0)$, onde

$$C(x, y, z) = z(x^2 + y^2) - 1,$$

cujó eixo de revolução é o eixo z .

Demonstração. Por um cálculo simples, temos que

$$\begin{aligned} C_3(\mathcal{T}(x, y, z)) &= C_3\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{\sqrt{27}} + z, -\frac{x}{3} + \frac{y}{\sqrt{27}} + z, -\frac{2y}{\sqrt{27}} + z\right) \\ &= z(x^2 + y^2) - 1 = C(x, y, z). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\mathcal{T}(1, 0, 0) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{T}(0, 1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{2}{\sqrt{27}}\right)$$

são vetores linearmente independentes que pertencem ao plano $X+Y+Z=0$ assintótico à superfície cúbica de revolução \mathcal{C}_3 . Para completar a prova note que, $\mathcal{T}(0, 0, z) = (z, z, z) = z(1, 1, 1) \in \mathcal{L}$, para todo $z \in \mathbb{R}$. Observe que a superfície cúbica de revolução \mathcal{C} é regular e é assintótica ao plano $z=0$. Ver Figura 5.1. \square

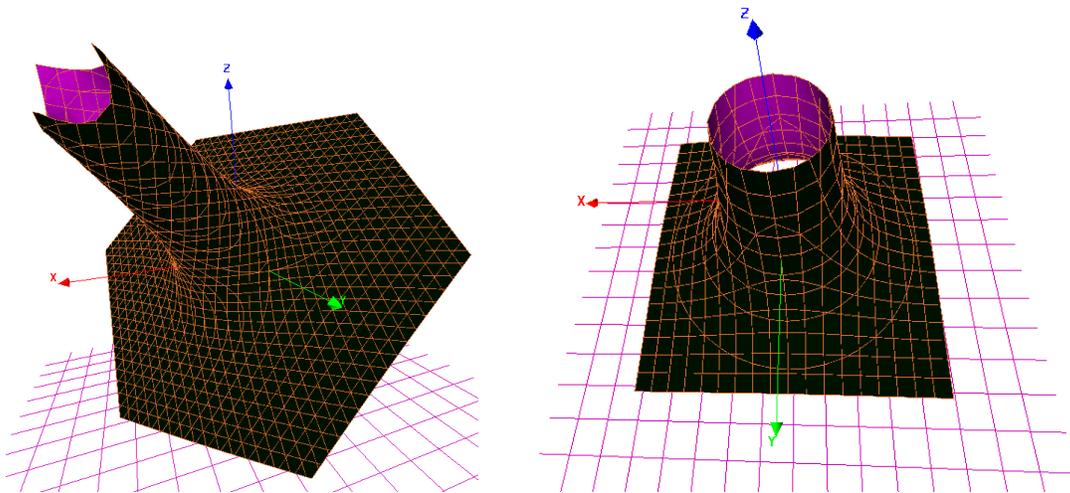


Figura 5.1: As cúbicas \mathcal{C}_3 e \mathcal{C} respectivamente.

5.2 Ciclos limites, meridianos e paralelos invariantes sobre \mathcal{C}_3

Antes de mais nada, assim como foi feito nos capítulos anteriores, precisamos convencionar a contagem dos meridianos e paralelos sobre a superfície cúbica \mathcal{C}_3 .

Definição 5.2.1. *Em \mathcal{C}_3 definimos meridianos e paralelos como as curvas obtidas pela interseção de \mathcal{C}_3 com os planos contendo o eixo de revolução \mathcal{L} e os planos ortogonais ao eixo \mathcal{L} , respectivamente, de acordo com a seguinte convenção: as interseções de um plano contendo o eixo \mathcal{L} com \mathcal{C}_3 nos fornecem dois meridianos e as interseções de um plano ortogonal ao eixo \mathcal{L} com \mathcal{C}_3 nos fornecem um paralelo.*

Usando o Teorema 3.1.1 obtemos a seguinte forma normal para campos vetoriais polinomiais em \mathbb{R}^3 tendo a cúbica \mathcal{C} como uma superfície algébrica invariante.

Proposição 5.2.1. *Suponha que um sistema diferencial polinomial X tenha a cúbica \mathcal{C} como uma superfície algébrica invariante. Então o sistema X pode ser escrito como*

$$\begin{aligned} x' &= C(x, y, z)A(x, y, z) + (x^2 + y^2)E(x, y, z) - 2yzD(x, y, z), \\ y' &= C(x, y, z)B(x, y, z) - (x^2 + y^2)F(x, y, z) + 2xzD(x, y, z), \\ z' &= C(x, y, z)G(x, y, z) + 2yzF(x, y, z) - 2xzE(x, y, z), \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $C(x, y, z) = z(x^2 + y^2) - 1$, A , B , D , E , F e G são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.1 qualquer sistema diferencial polinomial tendo $\mathcal{C} = f_1 = 0$, $f_1 \in \mathbb{R}[x, y, z]$, como uma superfície algébrica invariante pode ser escrito como o sistema (3.1), que é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varphi f_1(f_{2y}f_{3z} - f_{3y}f_{2z}) + \lambda_2(f_{3y}f_{1z} - f_{1y}f_{3z}) + \lambda_3(f_{1y}f_{2z} - f_{2y}f_{1z}), \\ \dot{y} &= \varphi f_1(f_{3x}f_{2z} - f_{2x}f_{3z}) + \lambda_2(f_{1x}f_{3z} - f_{3x}f_{1z}) + \lambda_3(f_{2x}f_{1z} - f_{1x}f_{2z}), \\ \dot{z} &= \varphi f_1(f_{2x}f_{3y} - f_{3x}f_{2y}) + \lambda_2(f_{3x}f_{1y} - f_{1x}f_{3y}) + \lambda_3(f_{1x}f_{2y} - f_{2x}f_{1y}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde $f_{iv} = \partial f_i / \partial v$, com v percorrendo as variáveis x , y e z , para $i = 1, 2, 3$, enquanto φ , λ_2 , λ_3 são funções racionais e $f_2, f_3 \in \mathbb{R}[x, y, z]$ satisfazem a condição $\{f_1, f_2, f_3\} \neq 0$.

Usando a notação

$$J_1 = f_{2y}f_{3z} - f_{3y}f_{2z}, \quad J_2 = f_{3x}f_{2z} - f_{2x}f_{3z}, \quad J_3 = f_{2x}f_{3y} - f_{3x}f_{2y},$$

$$N_{\lambda_2} = f_{2x}(f_1A + (x^2 + y^2)E - 2yzD) + \\ f_{2y}(f_1B - (x^2 + y^2)F + 2xD) + f_{2z}(f_1G - 2xzE + 2yzF),$$

$$N_{\lambda_3} = f_{3x}(f_1A + (x^2 + y^2)E - 2yzD) + \\ f_{3y}(f_1B - (x^2 + y^2)F + 2xD) + f_{3z}(f_1G - 2xzE + 2yzF),$$

e tomando $f_1(x, y, z) = C(x, y, z) = z(x^2 + y^2) - 1$,

$$\varphi = \frac{2xzA + 2yzB + (x^2 + y^2)G}{2xzJ_1 + 2yzJ_2 + (x^2 + y^2)J_3},$$

$$\lambda_2 = \frac{N_{\lambda_2}}{2xzJ_1 + 2yzJ_2 + (x^2 + y^2)J_3},$$

$$\lambda_3 = \frac{N_{\lambda_3}}{2xzJ_1 + 2yzJ_2 + (x^2 + y^2)J_3},$$

no sistema (5.2), onde A, B, D, E, F e G são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$, obtemos o sistema (5.1) que tem $f_1 = 0$ como uma superfície algébrica invariante com cofator

$$K(x, y, z) = 2(xzA(x, y, z) + yzB(x, y, z) + (x^2 + y^2)G(x, y, z)).$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} XC &= 2xz(C(x, y, z)A(x, y, z) + (x^2 + y^2)E(x, y, z) - 2yzD(x, y, z)) \\ &+ 2yz(C(x, y, z)B(x, y, z) - (x^2 + y^2)F(x, y, z) + 2xzD(x, y, z)) \\ &+ (x^2 + y^2)(C(x, y, z)G(x, y, z) + 2yzF(x, y, z) - 2xzE(x, y, z)) \\ &= 2(xzA(x, y, z) + yzB(x, y, z) + (x^2 + y^2)G(x, y, z))C(x, y, z) \\ &= KC. \end{aligned}$$

Finalizando, assim, a prova da proposição. □

Observação 5.2.1. No sistema (5.1) tomando os polinômios $A = B = G \equiv 0$, $D(x, y, z) = -(x^2 + y^2)\tilde{D}(x, y, z)$, $E(x, y, z) = -xz\tilde{E}(x, y, z)$ e $F(x, y, z) = yz\tilde{E}(x, y, z)$ obtemos um sistema da forma

$$\begin{aligned}x' &= -x\tilde{E}(x, y, z) + 2y\tilde{D}(x, y, z), \\y' &= -y\tilde{E}(x, y, z) - 2x\tilde{D}(x, y, z), \\z' &= 2z\tilde{E}(x, y, z),\end{aligned}\tag{5.3}$$

onde \tilde{D} e \tilde{E} são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$. No entanto, o sistema (5.1) com as escolhas acima para D , E e F é um sistema diferencial polinomial de grau maior do que m , e quando restrito à cúbica \mathcal{C} continua com grau m . Além disso, o sistema (5.3) tem a cúbica \mathcal{C} como uma superfície algébrica invariante.

O teorema que segue é o principal resultado deste capítulo.

Teorema 5.2.1. *Seja X um campo vetorial polinomial de grau $m \geq 1$ sobre \mathcal{C}_3 . Suponha que X tenha um número finito de meridianos e paralelos invariantes. Desta forma, seguem as seguintes afirmações.*

- (a) *O número de meridianos invariantes de X é no máximo $2(m - 1)$.*
- (b) *O número de paralelos invariantes de X é no máximo $m - 1$.*
- (c) *Existem campos vetoriais polinomiais de grau $m \geq 1$ sobre \mathcal{C}_3 tendo exatamente $2(m - 1)$ meridianos invariantes e $m - 1$ paralelos invariantes.*
- (d) *Existem campos vetoriais polinomiais de grau $m \geq 1$ sobre \mathcal{C}_3 tendo exatamente k paralelos invariantes que são ciclos limites para cada $k = 1, 2, \dots, m - 1$. Estes ciclos limites são estáveis ou instáveis alternadamente.*

Demonstração.

(a) A prova deste item é análoga às dos itens (a) de todos os casos do Teorema 3.2.1. Desta forma, iremos omiti-la.

(b) Primeiramente, mostraremos que não existe campo vetorial polinomial X de grau $m \geq 1$ sobre \mathcal{C} com m paralelos invariantes. Suponha que um campo vetorial polinomial

$X = (P, Q, R)$ de grau $m \geq 1$ sobre \mathcal{C} tenha m paralelos invariantes. O campo vetorial deve satisfazer $X\mathcal{C} = K\mathcal{C}$. Então, temos que

$$2xzP(x, y, z) + 2yzQ(x, y, z) + (x^2 + y^2)R(x, y, z) = K(x, y, z)(z(x^2 + y^2) - 1). \quad (5.4)$$

Provaremos por indução que, para todo $k \in \mathbb{N}$, vale a seguinte afirmação:

$\mathcal{P}(k)$: Se o grau de um campo vetorial polinomial X sobre \mathcal{C} é k , então $K \equiv 0$.

Para $k = 1$ é fácil ver que $K \equiv 0$. Logo, $\mathcal{P}(1)$ é verdadeiro.

Suponha que $\mathcal{P}(k)$ seja válido, isto é, se o grau do campo vetorial polinomial X sobre \mathcal{C} é k , então $K \equiv 0$. Mostraremos que $\mathcal{P}(k+1)$ é também verdadeiro, isto é, se o grau do campo vetorial polinomial X sobre \mathcal{C} é $(k+1)$, então $K \equiv 0$.

Da equação (5.4) e da hipótese de indução, podemos assumir que os polinômios P, Q e R são polinômios homogêneos de grau $(k+1)$. Como o lado esquerdo da equação (5.4) é um polinômio homogêneo de grau $(k+3)$ e o cofator K tem grau no máximo k , isto implica que $K \equiv 0$. Portanto, $\mathcal{P}(k)$ é válido para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora a equação (5.4) fica

$$2z(xP(x, y, z) + yQ(x, y, z)) + (x^2 + y^2)R(x, y, z) = 0.$$

Como por hipótese o campo vetorial tem um número finito de paralelos invariantes segue que R não pode ser identicamente nulo. Assim sendo, temos que

$$R(x, y, z) = z\tilde{R}(x, y, z),$$

onde \tilde{R} é um polinômio de grau no máximo $m-1$. Assim, o campo vetorial polinomial X não pode ter m paralelos invariantes, provando o item (b).

As provas dos itens (c) e (d) serão feitas usando a superfície cúbica de revolução \mathcal{C} dada no Teorema 5.1.1. É claro que os resultados obtidos podem ser aplicados à superfície cúbica de revolução \mathcal{C}_3 através do difeomorfismo \mathcal{T} , dado no Teorema 5.1.1.

(c) Para provar este item, exibiremos um campo vetorial polinomial de grau m sobre \mathcal{C} com $2(m-1)$ meridianos invariantes e $m-1$ paralelos invariantes.

Considere o campo vetorial polinomial X de grau m sobre \mathcal{C} associado ao sistema

$$\begin{aligned}x' &= -x\tilde{E}(z) + 2y\tilde{D}(x, y), \\y' &= -y\tilde{E}(z) - 2x\tilde{D}(x, y), \\z' &= 2z\tilde{E}(z),\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{D}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 1, \\ \prod_{i=1}^{m-1}(a_i x + b_i y), & \text{se } m > 1, \end{cases}$$

com $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$, $(a_i, b_i) \neq (a_j, b_j)$, $i \neq j$ e

$$\tilde{E}(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 1, \\ \prod_{i=1}^{m-1}(z - z_i), & z_i \neq z_j, i \neq j, z_i > 0, \text{ se } m > 1. \end{cases}$$

É fácil ver que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\{x,y\}}(\mathcal{X})(x, y, z) &= xQ(x, y, z) - yP(x, y, z) = -2(x^2 + y^2)\tilde{D}(x, y) \\ &= \begin{cases} -2(x^2 + y^2), & \text{se } m = 1, \\ -2(x^2 + y^2)\prod_{i=1}^{m-1}(a_i x + b_i y), & \text{se } m > 1, \end{cases}\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{E}_{\{1,z\}}(\mathcal{X})(x, y, z) = R(x, y, z) = 2z\tilde{E}(z) = \begin{cases} 2z, & \text{se } m = 1, \\ 2z\prod_{i=1}^{m-1}(z - z_i), & \text{se } m > 1. \end{cases}$$

Portanto, o campo vetorial X tem exatamente $2(m-1)$ meridianos invariantes e $m-1$ paralelos invariantes. E assim fica provado o item (c).

(d) Fixe $1 \leq k \leq m-1$ e considere o campo vetorial polinomial X de grau m sobre \mathcal{C}

$$X(x, y, z) = (-x\tilde{E}(z) + 2y, -y\tilde{E}(z) - 2x, 2z\tilde{E}(z)), \quad (5.5)$$

onde

$$\tilde{E}(z) = z^{m-k-1} \prod_{i=1}^k (z - z_i), \quad z_i \neq z_j, i \neq j, z_i > 0.$$

Portanto, fixado $1 \leq k \leq m-1$, o campo vetorial (5.5) tem exatamente k paralelos invariantes dados por $z = z_i, i = 1, \dots, k$. É fácil ver que este campo vetorial não possui pontos

de equilíbrio sobre os paralelos invariantes. Entre dois paralelos invariantes consecutivos o sinal de R é fixo e se alterna quando cruzamos um paralelo. Assim as órbitas periódicas sobre os paralelos invariantes são ciclos limites estáveis e instáveis alternadamente. Isto prova o item (d), finalizando a prova do teorema. \square

Conclusões

Neste trabalho estudamos campos vetoriais polinomiais de grau arbitrário em \mathbb{R}^3 tendo como superfícies algébricas invariantes as seguintes superfícies: quádricas não-degeneradas, toro, e uma cúbica. Em todos estes casos, caracterizamos todas as possíveis configurações de meridianos e paralelos invariantes que esses campos vetoriais podem exibir. Além disso analisamos quando os meridianos ou os paralelos invariantes fechados podem ser ciclos limites. Não encontramos na literatura um estudo de meridianos e/ou paralelos invariantes para campos vetoriais polinomiais em \mathbb{R}^3 que tenham uma cúbica como superfície algébrica invariante. Neste sentido o estudo realizado no Capítulo 5 é original e originou o preprint [3].

Referências Bibliográficas

- [1] G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré*, Bull. Sci. Math., **2**, 60–96, (1878).
- [2] F. S. Dias, J. Llibre, L. F. Mello, *Invariant parallels and meridians for polynomial vector fields on quadrics of revolution in \mathbb{R}^3* , Preprint (2016).
- [3] F. S. Dias, L. F. Mello, A. E. Moreira, *Polynomial vector fields on a cubic surface of revolution*, Preprint (2016).
- [4] F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer–Verlag, New York, (2006).
- [5] D. Hilbert, *Mathematical problems*, Reprinted from Bull. Amer. Math. Soc., **8**, 473–479, (1902).
- [6] J. Llibre, J. C. Medrado, *Limit cycles, invariant meridians and parallels for polynomial vector fields on the torus*, Bull. Sci. Math., **135**, 1–9, (2011).
- [7] J. Llibre, M. Messias, A. C. Reinol, *Normal forms for polynomial differential systems in \mathbb{R}^3 having an invariant quadric and a Darboux invariant*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **25**, 1550015, (2015), (16 pages).
- [8] J. Llibre, P. Pedregal, ArXiv: <http://arxiv.org/abs/1411.6814>, (2014).
- [9] D. MacHale, *My favorite polynomial*, Math. Gaz., **75**, 157–165, (1991).
- [10] H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, J. Math. Pures Appl., **7**, 375–422, (1881).

- [11] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Springer–Verlag, Berlin, (1990).
- [12] Vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=NhWv8hkilTs>.
- [13] M. B. Villarino, *A cubic surface of revolution*, Math. Gaz., **98**, 281–290, (2014).