Universidade Federal de Itajubá
Instituto de Física e Química
Curso de Pós-graduação em Física

Mateus Henrique De Almeida

Mecânica Quântica com Comprimento Mínimo

Itajubá
2015

Mateus Henrique De Almeida

Mecânica Quântica com Comprimento Mínimo

Dissertação apresentada ao Curso de Física da UNIFEI, como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Física.

Orientador: Gabriel Hidalgo Flores.

Doutor em Física

Itajubá

2015

Almeida, Mateus

Mecânica Quântica com Comprimento Mínimo / Mateus Almeida - 2015

30.p

1.Mecânica Quântica 2.Mecânica Quântica com Comprimento Mínimo 3.Álgebra deformada de Heisenberg. . I.Título.

CDU

Mateus Henrique De Almeida

Mecânica Quântica com Comprimento Mínimo

Dissertação apresentada ao Curso de Física da UNIFEI, como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Física.

Aprovado em 1 de Dezembro de 2015

BANCA EXAMINADORA

Gabriel Hidalgo Flores.

Doutor em Física

Fabricio Augusto Barone Rangel

Doutor em Física

Victor José Vasquez Otoya.

Doutor em Física

Resumo

Supondo a existência de um comprimento mínimo para as medidas de posição. Definimos um novo operador de momento que leve em consideração a existência de tal comprimento mínimo. Calculamos seu comutador com o operador posição, obtendo uma álgebra deformada de Heisenberg, porem não a comumente utilizada na literatura, mas uma outra, deformada pelo operador de translação espacial. Contudo, o operador de evolução espacial não é único possibilitando o surgimento de novos modelos.

Palavras-chaves: Mêcanica quântica com comprimento mínimo, Algebra deformada de Heisenberg.

Abstract

Assuming the existence of a minimum length to position measurements, it is defined a new operator that take into account the existence of such a minimum length. Thus it is calculated its commutator with the position operator, obtaining a deformed Heisenberg algebra, though not the commonly used in literature, but another, deformed by the spatial translation operator. However, the spatial evolution operator is not unique, making possible the emergence of new models.

Keywords: Quantum mechanics with minimum length, Deformed Heisenberg algebra

Agradecimentos

A minha família e amigos, Gabriel Hidalgo, Maria Stella, Malú Maíra, Rabino e todos os meus parceiros de copo.

Sumário

1 Introdução

No século 5 antes de Cristo, Demócrito postulou que a matéria era constituída por entes indivisíveis, os átomos. Atualmente, sabemos que a matéria é constituída por átomos, porem estes quando observados mais de perto se subdividem em prótons e nêutrons que por sua vez se subdividem em quarks e glúons. Mas será que existe um limite além do qual não poderemos mais experimentar! E se existir, seria este limite um principio fundamental, ou uma limitação do próprio experimento?

Talvez a resposta desta pergunta esteja associada a própria estrutura do espaço, a existência de um “átomo“ de espaço, um comprimento mínimo para medidas de posição. Atualmente existem vários cenários onde se aplicam o conceito de comprimento mínimo, estes podem ser vistos em [6], [7].

Classicamente quando medimos de maneira simultânea a posição e a velocidade de um sistema determinamos completamente o seu estado de movimento. Portanto, a descrição completa de um sistema físico se dá medindo em um determinado instante de tempo, todas as suas coordenadas e velocidades, ou seja, determinando suas equações de movimento [1].

Porem, quanticamente temos que uma medida exerce uma ”ação” sobre o sistema submetido a medição, ”ação“ esta que não pode ser tomada o tão pequeno quanto se queira, pois, quanto mais precisa for a medição mais forte será a ”ação” por ela exercida, portanto somente em medidas com pouca precisão a “ação“ é baixa. [2].

Classicamente um sistema possui velocidade e posição bem definidas, porem quanticamente ocorre algo distinto, por exemplo, quando o resultado de uma medida determinar completamente a posição de uma partícula, a mesma não poderá dizer nada a respeito de sua velocidade; porem se a medida determinar completamente a velocidade de uma partícula, a mesma não dirá nada a respeito de sua posição. [2].

Contudo, esta ”imprecisão” na determinação instantânea de posição e velocidade forma o alicerce da Mecânica Quântica .

Quanticamente um estado físico é representado por um vetor de estado que é definido num espaço de Hilbert, vamos chamar de kets $|a\rangle$ tais vetores, e como postulado, vamos considerar que os vetores de estado contenham toda informação a respeito do estado físico

do sistema, ou seja, ele é capaz de predizer qualquer questão a respeito do estado do sistema físico. Analogamente ao espaço dos kets podemos construir um espaço vetorial dual, que denotaremos por espaço dos bras, dados por vetores do tipo $\langle a|$, que a grosso modo podem ser entendidos como uma especie de imagem espectral do espaço dos kets [3].
Dizemos que observáveis, tais como posição ou momento podem ser representados por um operador do tipo $\hat{A}$, que atua tanto sobre um bra quanto num ket

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$$

$$\langle a|\hat{A} = \langle a|a$$

O ket $|a\rangle$ é autovetor do operador $\hat{A}$ com autovalor "a", onde o conjunto de todos os autovalores forma o que chamamos de espectro [3].
Formalmente temos que qualquer autovetor $|\alpha\rangle$ pode ser expandido em termos de autovetores de um conjunto de observáveis

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} da|a\rangle\langle a|\alpha\rangle \tag{1.1}$$

pois, os autovetores $|a\rangle$ do observável $\hat{A}$, correspondentes aos diferentes autovalores a, são todos ortogonais. Portanto, os autovetores de $\hat{A}$ podem ser usados como kets de base semelhantemente como os vetores unitários ortogonais são utilizados no espaço Euclideano. [3].
Atualmente o desenvolvimento teórico abordado pela comunidade cientifica sobre a mecânica quântica com comprimento mínimo impõe uma relação de comutação do tipo

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\left(1 + \beta\hat{p}^2\right) \tag{1.2}$$

conforme pode ser visto em [4], [5],[6],[7]. Porem existem outras propostas para a mecânica quântica com comprimento mínimo.
Neste trabalho vamos apresentar uma nova porposta para tal mecânica quântica, guiados principalmente pela referencia [4].

2 Mecânica Quântica com Comprimento Mínimo

Considere que exista um comprimento mínimo para medidas de posição, de modo que as derivadas espaciais devem ser ligeiramente modificadas. Por definição, a derivada de $\Psi(x)$ em relação a x vem dada por

$$\frac{d\Psi(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Psi(x+\Delta x) - \Psi(x)}{\Delta x} \tag{2.1}$$

porem estamos supondo que existe um comprimento mínimo, ou seja, o valor de Δx não pode ser arbitrariamente pequeno, mas tendendo a um valor finito, que denotaremos por q

$$\lim_{\Delta x \to q} \frac{\Psi(x+\Delta x) - \Psi(x)}{\Delta x} = \frac{\Psi(x+q) - \Psi(x)}{q}$$

vamos definir um operador de momento modificado $\hat{\wp}$, tal que

$$\hat{\wp} = -i.\hat{\Xi}_q \tag{2.2}$$

onde $\hat{\Xi}_q$ é o operador de diferenças mínimas, dado por

$$\hat{\Xi}_q \Psi(x) = \frac{\Psi(x+q) - \Psi(x)}{q} \tag{2.3}$$

assim o comutador de $\hat{x}$ com $\hat{\wp}$ fica

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = \hat{x}.\hat{\wp} - \hat{\wp}.\hat{x}$$

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = -i(\hat{x}.\hat{\Xi}_q - \hat{\Xi}_q.\hat{x})$$

aplicando a uma função de onda $\Psi(x)$ arbitrária, temos

$$[\hat{x}, \hat{\wp}]\Psi(x) = -i(\hat{x}.\hat{\Xi}_q - \hat{\Xi}_q.\hat{x})\Psi(x)$$

$$[\hat{x}, \hat{\wp}]\Psi(x) = -i\{\hat{x}.(\hat{\Xi}_q\Psi(x)) - \hat{\Xi}_q.(\hat{x}\Psi(x))\}$$

$$[\hat{x}, \hat{\wp}]\Psi(x) = -i\left\{\hat{x}\frac{\Psi(x+q) - \Psi(x)}{q} - \frac{(\hat{x}+q).\Psi(x+q) - \hat{x}\Psi(x)}{q}\right\}$$

$$[\hat{x}, \hat{\wp}]\Psi(x) = i\frac{q\Psi(x+q)}{q}$$

portanto

$$[\hat{x}, \hat{\wp}]\Psi(x) = i\Psi(x+q) \tag{2.4}$$

note que em (2.4) aparece o operador de translação espacial

$$\hat{\zeta}\Psi(x) = \Psi(x+q) \tag{2.5}$$

substituindo a equação (2.5) em (2.4) vemos que

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hat{\zeta} \tag{2.6}$$

Note que a mecânica quântica é recuperada quando consideramos que medidas na posição podem ser feitas arbitrariamente pequenas, pois neste regime temos

$$\lim_{q\to 0} \zeta = 1 \tag{2.7}$$

$$\lim_{q\to 0} \hat{\wp}(q) = \hat{p} \tag{2.8}$$

e a equação (2.6) fica dada por

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \tag{2.9}$$

conforme o esperado. Para uma melhor compreensão da equação (2.6) devemos buscar uma função que represente o operador de translação espacial ζ. Suponha que temos um estado bem localizado em torno de uma posição x, considere agora um operador $\hat{\zeta}$ que mude este estado para um outro estado bem localizado em torno de um outro ponto, por exemplo $x + dx$, sem que isso modifique qualquer outra propriedade do sistema (que não a posição). O operador que executa este trabalho é chamado operador de translação infinitesimal [3]

$$\hat{\zeta}(dx)|x\rangle = |x + dx\rangle \tag{2.10}$$

observe que $|x\rangle$ não é autovetor de $\hat{\zeta}(dx)$.

Devemos impor que o operador de translação $\hat{\zeta}(dx)$ seja unitário, devido a conservação da probabilidade

$$\hat{\zeta}^{\dagger}(dx).\hat{\zeta}(dx) = \hat{1} \tag{2.11}$$

também exigiremos que duas translações sucessivas sejam igual a uma única translação, cujo valor seja a superposição das ultimas duas

$$\hat{\zeta}(dx).\hat{\zeta}(dy) = \hat{\zeta}(dx + dy) \tag{2.12}$$

esperamos também que uma translação no sentido oposto seja o mesmo que o inverso da translação original

$$\hat{\zeta}(-dx) = \hat{\zeta}^{\dagger}(dx) \tag{2.13}$$

e é plausível acreditarmos que, quando $dx \longrightarrow 0$ a translação se reduza ao operador identidade

$$\lim_{dx\to 0} \hat{\zeta}(dx) = \hat{1} \tag{2.14}$$

e por fim gostaríamos que a diferença entre o operador $\hat{\zeta}(dx)$ e o operador identidade $\hat{1}$ fosse de primeira ordem em dx. Tomando como ansatz, o operador translação $\hat{\zeta}(dx)$ como sendo

$$\hat{\zeta}(dx, \hat{K}) = 1 - i\hat{K}.dx \tag{2.15}$$

onde $\hat{K}$ é um operador hermitiano, vemos facilmente que todas exigências acima são satisfeitas. Aceitando a equação (2.15) para $\hat{\zeta}(dx, \hat{K})$ ficamos em posição de deduzir uma relação fundamental entre $\hat{K}$ e $\hat{x}$. notando que

$$\hat{\zeta}(dx, \hat{K})\hat{x}|x\rangle = x\hat{\zeta}(dx, \hat{K})|x\rangle = x|x + dx\rangle \tag{2.16}$$

$$\hat{x}\hat{\zeta}(dx, \hat{K})|x\rangle = \hat{x}|x + dx\rangle = (x + dx)|x + dx\rangle \tag{2.17}$$

Subtraindo a equação (2.16) da equação (2.17), vemos que

$$[\hat{x}, \hat{\zeta}(dx, \hat{K})]|x\rangle = dx|x + dx\rangle \approx dx|x\rangle \tag{2.18}$$

onde o erro cometido na ultima aproximação da equação (2.18) é de segunda ordem em dx . Como $|x\rangle$ pode ser qualquer ket de posição e considerando que eles formam uma base completa no espaço, podemos ver na equação (2.18) que

$$[\hat{x}, \hat{\zeta}(dx, \hat{K})] = dx \tag{2.19}$$

substituindo a equação (2.15) na equação (2.19) vemos que

$$[\hat{x}, 1 - i\hat{K}.dx] = dx$$

$$-idx(\hat{x}\hat{K} - \hat{k}\hat{x}) = dx$$

$$[\hat{x}, \hat{K}] = i \tag{2.20}$$

onde o lado direito da equação (2.20) deve ser entendido como i multiplicado pelo operador identidade $\hat{1}$. Então temos o operador de deslocamento infinitesimal dado por

$$\hat{\zeta}(dx, \hat{p}) = 1 - i\hat{K}.dx \tag{2.21}$$

mas podemos pensar numa translação finita, com um deslocamento q,

$$\hat{\zeta}(q, \hat{K})|x\rangle = |x + q\rangle \tag{2.22}$$

sendo formado por uma sucessão de N deslocamentos de comprimento q/N, com N tendendo ao infinito

$$\hat{\zeta}(q, \hat{p}) = \lim_{N\to\infty} \left\{1 - i\hat{K}.q\right\}^N \tag{2.23}$$

ou seja,

$$\hat{\zeta}(q, \hat{p}) = e^{-i\hat{K}.q} \tag{2.24}$$

que é o operador de translação para um deslocamento finito de comprimento q [3]. Vamos buscar uma representação para o operador $\hat{K}$. Supondo que $\hat{K} = \hat{K}(\hat{\wp})$

$$\hat{K}(\hat{\wp}) = \sum_n \gamma_n \hat{\wp}^n \tag{2.25}$$

portanto

$$[\hat{x}, \sum_n \gamma_n \hat{\wp}^n] = \sum_n \gamma_n [\hat{x}, \hat{\wp}^n] \tag{2.26}$$

mas, note que

$$\begin{aligned}
[\hat{x}, \hat{\wp}^n] &= [\hat{x}, \hat{\wp}.\hat{\wp}^{n-1}] \\
&= \hat{\wp}[\hat{x}, \hat{\wp}^{n-1}] + [\hat{x}, \hat{\wp}]\hat{\wp}^{n-1} \\
&= [\hat{x}, \hat{\wp}]\hat{\wp}^{n-1} + \hat{\wp}[\hat{x}, \hat{\wp}.\hat{\wp}^{n-2}] \\
&= [\hat{x}, \hat{\wp}]\hat{\wp}^{n-1} + [\hat{x}, \hat{\wp}]\hat{\wp}^{n-1} + \hat{\wp}^2[\hat{x}, \hat{\wp}^{n-2}] \\
&\vdots \\
&= n[\hat{x}, \hat{\wp}]\hat{\wp}^{n-1}
\end{aligned}$$

considerando a equação (2.6)

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hat{\zeta}(q, \hat{\wp})$$

temos

$$[\hat{x}, \hat{\wp}^n] = i\hat{\zeta}(q, \hat{\wp}) n \hat{\wp}^{n-1} \tag{2.27}$$

substituindo (2.27) em (2.26), obtemos

$$[\hat{x}, \hat{K}(\hat{\wp})] = i\hat{\zeta}(q, \hat{\wp}) \frac{\partial \hat{K}(\hat{\wp})}{\partial \hat{\wp}} \tag{2.28}$$

mas,

$$[\hat{x}, \hat{K}] = i,$$

ou seja

$$1 = \hat{\zeta}(q) \frac{\partial \hat{K}(\hat{\wp})}{\partial \hat{\wp}}$$

$$\frac{\partial \hat{K}(\hat{\wp})}{\partial \hat{\wp}} = \frac{1}{\hat{\zeta}(q, \hat{\wp})}$$

Como q na equação acima é finito temos o operador de translação dado por $\hat{\zeta}(q, \hat{\wp}) = e^{-i\hat{K}.q}$ que pode ser substituindo na equação anterior,

$$e^{-i\hat{K}.q} \frac{\partial \hat{K}}{\partial \hat{\wp}} = 1 \tag{2.29}$$

podemos integrar (2.29)

$$\hat{\wp} = \int e^{-i\hat{K}.q} \, d\hat{K} \tag{2.30}$$

$$\hat{\wp} = \frac{1}{-iq} \left(e^{-i\hat{K}.q} + C \right) \tag{2.31}$$

fixando a constante em um ($C = 1$). Resolvemos a equação para $\hat{K}$

$$\hat{K} = \frac{i}{q} \ln\left(1 - iq\hat{\wp}\right) \tag{2.32}$$

lembrando que o operador de translação, vem dado por

$$\hat{\zeta}(q, \hat{\wp}) = e^{-i\hat{K}.q}$$

então

$$\hat{\zeta}(q, \hat{\wp}) = 1 - iq\hat{\wp} \tag{2.33}$$

podemos substituir a equação (2.33) na relação de comutação de $\hat{x}$ com $\hat{\wp}$, equação (2.6),

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\left(1 - iq\hat{\wp}\right) \tag{2.34}$$

onde vemos que no $\lim q \to 0$, a equação (2.34) vem dada por

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i$$

conforme previsto pela Mêcanica Quântica.

Buscaremos agora uma representação no espaço dos momentos $\hat{\wp}$, apartir do resultado (2.34)

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\left(1 - iq\hat{\wp}\right)$$

afim de descrever um sistema físico.

2.1 Representação no espaço $\hat{\wp}$

Vamos construir esta representação baseados nos resultados da mecânica quântica convencional, temos que

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \tag{2.35}$$

onde $\hat{x}$ pode ser escrito como

$$\hat{x} = i\bigtriangledown_p \tag{2.36}$$

e $\bigtriangledown_p$ é o gradiente em relação ao momento. Substituindo (2.36) em (2.35) obtemos

$$[\bigtriangledown_p, \hat{p}] = \hat{1} \tag{2.37}$$

vamos forçar que exista a mesma relação para o novo momento $\hat{\wp}$. Note que se tomarmos $\hat{x}$ como sendo

$$\hat{x} = i\hat{\zeta}(q, \hat{\wp})\bigtriangledown_\wp \tag{2.38}$$

então

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = \hat{x}\hat{\wp} - \hat{\wp}\hat{x}$$

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hat{\zeta}(q, \hat{\wp})(\bigtriangledown_\wp\hat{\wp} - \hat{\wp}\bigtriangledown_\wp)$$

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hat{\zeta}(q, \hat{\wp})[\bigtriangledown_\wp, \hat{\wp}] \tag{2.39}$$

porem $[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hat{\zeta}(q, \hat{\wp})$, portanto

$$[\bigtriangledown_\wp, \hat{\wp}] = 1 \tag{2.40}$$

conforme o esperado. Assim, podemos escrever

$$\hat{x}\langle\Psi|\wp\rangle = i\hat{\zeta}(q, \hat{\wp})\,\bigtriangledown_\wp\,\langle\Psi|\wp\rangle \tag{2.41}$$

e por definição

$$\hat{\wp}\langle\Psi|\wp\rangle = \wp\langle\Psi|\wp\rangle \tag{2.42}$$

Contudo queremos manter $\hat{x}$ hermitiano, ou seja

$$\langle\Psi|\hat{x}|\Phi\rangle = \langle\Phi|\hat{x}|\Psi\rangle^\star \tag{2.43}$$

para isso, vamos supor que o valor de q é muito pequeno de modo que exista o elemento infinitesimal $d\wp$, tal que

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp|\wp\rangle\langle\wp|F(\wp) \tag{2.44}$$

e buscar um $F(\wp)$ que satisfaça (2.43), temos

$$\langle\Phi|\hat{x}|\Psi\rangle^\star = \langle\Phi|\hat{x}\hat{1}|\Psi\rangle^\star = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} d\wp\langle\Phi|\wp\rangle\langle\wp|F(\wp)\hat{x}|\Psi\rangle\right\}^\star \tag{2.45}$$

mas $\hat{x} = i\hat{\zeta}(q,\wp)\bigtriangledown_\wp$, então

$$\langle\Phi|\hat{x}|\Psi\rangle^\star = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} d\wp F(\wp) i\hat{\zeta}(q,\wp)\langle\Phi|\wp\rangle\langle\wp|\bigtriangledown_\wp|\Psi\rangle\right\}^\star$$

integrando por partes,

$$\langle\Phi|\hat{x}|\Psi\rangle^\star = \left\{i\int_{-\infty}^{\infty} d\wp\bigtriangledown_\wp\left[F(\wp)\hat{\zeta}(q,\wp)\langle\Phi|\wp\rangle\langle\wp|\Psi\rangle\right]\right\}^\star - \left\{i\int_{-\infty}^{\infty} d\wp\langle\wp|\Psi\rangle\bigtriangledown_\wp\left[\langle\Phi|\wp\rangle F(\wp)\hat{\zeta}(q,\wp)\right]\right\}^\star \tag{2.46}$$

podemos supor que as funções de onda vão a zero quando $\hat{\wp}$ vai a mais ou menos infinito, portanto

$$\langle\Phi|\hat{x}|\Psi\rangle^\star = -\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} d\wp\langle\wp|\Psi\rangle\bigtriangledown_\wp\left[\langle\Phi|\wp\rangle F(\wp)\hat{\zeta}(q,\wp)\right]\right\}^\star \tag{2.47}$$

$$\langle\Phi|\hat{x}|\Psi\rangle^\star = i\int_{-\infty}^{\infty} d\wp\langle\Psi|\wp\rangle\bigtriangledown_\wp\left[\langle\wp|\Phi\rangle F(\wp)^\star\hat{\zeta}(q,\wp)\right]^\star \tag{2.48}$$

mas note que

$$\langle\Psi|\hat{x}|\Phi\rangle = \langle\Psi|\hat{x}\hat{1}|\Phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp\langle\Psi|\wp\rangle\langle\wp|F(\wp)\hat{x}|\Phi\rangle \tag{2.49}$$

$$\langle\Psi|\hat{x}|\Phi\rangle = i\int_{-\infty}^{\infty} d\wp\langle\Psi|\wp\rangle F(\wp)\hat{\zeta}(q,\wp)\bigtriangledown_\wp\left[\langle\wp|\Phi\rangle\right] \tag{2.50}$$

portanto, igualando (2.50) com (2.48), ou seja

$$\hat{x} = \hat{x}^\dagger$$

obtemos

$$F(\wp)\hat{\zeta}(q,\wp)\bigtriangledown_\wp\left[\langle\wp|\Phi\rangle\right] = \bigtriangledown_\wp[\langle\wp|\Phi\rangle F(\wp)^\star\hat{\zeta}(q,\wp)^\star] \tag{2.51}$$

portanto, utilizando a regra da cadeia e unindo os termos semenhantes

$$\{F(\wp)\hat{\zeta}(q,\wp) - F(\wp)^\star\hat{\zeta}(q,\wp)^\star\}\bigtriangledown_\wp\langle\wp|\Phi\rangle = \langle\wp|\Phi\rangle\ \bigtriangledown_\wp\{F(\wp)^\star\hat{\zeta}(q,\wp)^\star\} \tag{2.52}$$

mas, note que

$$F(\wp) = \hat{\zeta}(q,\wp)^{-1} \tag{2.53}$$

e

$$F(\wp)^\star = \{\hat{\zeta}(q,\wp)^\star\}^{-1} \tag{2.54}$$

satisfazem a equação (2.52), portanto

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp|\wp\rangle\langle\wp|F(\wp) = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp\frac{|\wp\rangle\langle\wp|}{\hat{\zeta}(q,\wp)} \tag{2.55}$$

que implica em

$$\langle \hat{\wp}'|\alpha\rangle = \langle \hat{\wp}'|\hat{1}|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp \langle \hat{\wp}'|\frac{|\wp\rangle\langle\wp|}{\hat{\zeta}(q,\wp)}|\alpha\rangle \tag{2.56}$$

que só é verdade se

$$\langle \wp'|\wp\rangle = \hat{\zeta}(q,\wp)\delta(\wp - \wp') \tag{2.57}$$

que é a condição de ortogonalidade para a base $|\wp\rangle$, analogo ao encontrado em [4]. Com estes resuldaos é possível escrever uma função de onda na representação $\wp$.

2.2 Função de Onda no Espaço $\wp$

Para escrevermos a função de onda no espaço $\wp$ devemos lembrar que

$$\hat{\wp}\langle\wp|\Psi\rangle = \wp\langle\wp|\mathit{\Psi}\rangle \tag{2.58}$$

$$\hat{x}\langle\wp|\Psi\rangle = i\left(1 - iq\hat{\wp}\right)\bigtriangledown_{\wp}\langle\wp|\mathit{\Psi}\rangle \tag{2.59}$$

podemos resolver a equação (2.59) para um determinado autovalor λ, ou seja

$$\hat{x}\langle\wp|\Psi\rangle\lambda\langle\wp|\Psi\rangle_{\lambda} = i\left(1 - iq\hat{\wp}\right)\bigtriangledown_{\wp}\langle\wp|\mathit{\Psi}\rangle_{\lambda} \tag{2.60}$$

separando as variaveis e integrando, temos

$$\frac{\lambda}{i}\int\frac{d\wp}{(1 - iq\hat{\wp})} = \int\frac{d\langle\wp|\Psi\rangle_{\lambda}}{\langle\wp|\Psi\rangle_{\lambda}} \tag{2.61}$$

$$ln\langle\wp|\Psi\rangle_{\lambda} = \frac{c\lambda}{q}ln\left(1 - iq\hat{\wp}\right) \tag{2.62}$$

tomando exponencial em ambos os lados

$$\langle\wp|\Psi\rangle_{\lambda} = \left(1 - iq\hat{\wp}\right)^{\frac{c\lambda}{q}} \tag{2.63}$$

mas

$$K = \frac{i}{q}ln\left(1 - iq\wp\right) \tag{2.64}$$

ou seja

$$(1 - iq\hat{\wp}) = e^{\frac{q}{i}K} \tag{2.65}$$

voltando relação (2.65) na equação (2.63), obtemos

$$\langle\wp|\Psi\rangle_{\lambda} = c'e^{-i\lambda K(\wp)} \tag{2.66}$$

onde c' é uma constante a se determinar, podemos obte-la normalizando a equação (2.66), considere

$$_{\lambda}\langle\Psi|\Psi\rangle_{\lambda'} = {_{\lambda}\langle\Psi|\hat{1}|\Psi\rangle_{\lambda'}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp_{\lambda}\langle\Psi|\frac{|\wp\rangle\langle\wp|}{\hat{\zeta}(q,\wp)}|\Psi\rangle_{\lambda'} \tag{2.67}$$

mas

$$\hat{\zeta}(q,\wp) = e^{-iqK(\wp)} \tag{2.68}$$

então, lembrado que $\hat{\zeta}(q,\wp) = (1 - iq\wp)$, temos

$$(1 - iq\wp) = e^{-iqK(\wp)} \tag{2.69}$$

tomando o diferencial de (2.69)

$$d\wp = e^{-iqK(\wp)} dK \tag{2.70}$$

podemos substituir (2.66), (2.68) e (2.70) na equação (2.67), obtendo

$$_{\lambda}\langle\Psi|\Psi\rangle_{\lambda'} = |c'|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dK e^{-ik(\lambda-\lambda')} \tag{2.71}$$

portanto

$$_{\lambda}\langle\Psi|\Psi\rangle_{\lambda'} = 2\pi|c'|^2\delta(\lambda-\lambda') \tag{2.72}$$

$$|c'| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.73}$$

enfim, a função de onda fica dada por

$$\langle\wp|\Psi\rangle_{\lambda} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-i\lambda K} \tag{2.74}$$

que pode ser escrita em função de $\wp$ como

$$\langle\wp|\Psi\rangle_{\lambda} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{\lambda}{q} ln(1-iq\wp)} \tag{2.75}$$

note que no limite para q indo a zero, temos

$$\lim_{q\to\infty} \langle\wp|\Psi\rangle_{\lambda} = \langle p|\Psi\rangle_{\lambda} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-ip\lambda} \tag{2.76}$$

ou seja, recuperamos a mecânica quântica habitual. Podemos desenvolver uma teoria quântica a partir destes resultados, porem a sociedade cientifica trabalha com outra hipótese a respeito da mecânica quântica com comprimento mínimo, conforme pode ser visto em [4], [5], [6], [7], [8], [9]. Portanto, vamos tentar buscar uma conexão entre a teoria até aqui apresentada e a teoria abordada por tais referências.

3 Conexão com Outras Teorias

3.1 A Hermiticidade de $\hat{K}$

Por construção esperamos que $\hat{K}$ seja hermitiano ($\hat{K} = \hat{K}^{\dagger}$). Então considere o operador de translação espacial dado por

$$\hat{\zeta}(q, \hat{\wp}) = 1 - iq\hat{\wp}$$

note que podemos escrevê-lo na forma polar

$$\zeta(q, \hat{\wp}) = \|\zeta\|.e^{-i \arctan q\hat{\wp}} \tag{3.1}$$

tomando o logaritmo natural na equação (3.1), temos

$$\ln \zeta(q, \hat{\wp}) = \ln\|\zeta\| - i \arctan q\hat{\wp} \tag{3.2}$$

mas por definição $\|\zeta\| = 1$, portanto

$$\ln \zeta(q, \hat{\wp}) = -i \arctan q\hat{\wp} \tag{3.3}$$

lembrando que

$$\hat{K} = \frac{i}{q} \ln (1 - iq\hat{\wp}) = \frac{i}{q} \ln \zeta(q, \hat{\wp}) \tag{3.4}$$

substituindo a equação (3.3) em (3.4), obtemos

$$\hat{K} = \frac{1}{q} \arctan q\hat{\wp} \tag{3.5}$$

que é real portanto hermitiano. Vamos lembrar agora uma relação que foi deduzida anteriormente

$$[\hat{x}, \hat{K}(\hat{\wp})] = i\hbar\hat{\zeta}(q, \hat{\wp})\frac{\partial \hat{K}(\hat{\wp})}{\partial \hat{\wp}} \tag{3.6}$$

mas

$$[\hat{x}, \hat{K}] = i \tag{3.7}$$

comparando (3.6) com (3.7)

$$\frac{\partial \hat{K}(\hat{\wp})}{\partial \hat{\wp}} = \frac{1}{\hat{\zeta}(q, \hat{\wp})} \tag{3.8}$$

mas

$$\hat{K} = \frac{1}{q}\arctan q\wp$$

então, voltando na equação (3.8), temos

$$\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial\hat{\wp}}\arctan q\hat{\wp} = \frac{1}{\hat{\zeta}(q,\hat{\wp})} \tag{3.9}$$

contudo, a derivada do arco tangente vem dada por

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\wp}}\arctan q\hat{\wp} = \frac{q}{1+q^2\hat{\wp}^2}$$

portanto, retornando em (3.9) temos

$$\hat{\zeta}(q,\hat{\wp}) = 1 + q^2\hat{\wp}^2 \tag{3.10}$$

substituindo a equação (3.10) na relação de comutação de $\hat{x}$ com $\hat{\wp}$,

$$[\hat{x},\hat{\wp}] = i(1 + q^2\hat{\wp}^2) \tag{3.11}$$

onde vemos que no $\lim q \to 0$, a equação (3.11) fica dada por

$$[\hat{x},\hat{p}] = i$$

ou seja, recuperamos a Mêcanica Quântica. E a relação (3.11) é exatamente a abordada pelas referencias [4], [5], [6], [7], [8].

É importante que exista consistência entre nossas hipótese de comprimento mínimo e os resultados obtidos ate então, portanto buscar qual é o comprimento mínimo por traz da equação (3.11) e ver se este é compatível com nosso comprimento q. Mas antes é importante compreender o principio de incerteza.

3.2 O Principio da Incerteza

Sejam dois observáveis quaisquer $\hat{A}$ e $\hat{B}$, então para um estado arbitrário $|\Psi\rangle$ a desigualdade abaixo é valida

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle.\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|^2 \tag{3.12}$$

onde $\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = \langle\hat{A}\rangle$

Para demonstramos a relação de incerteza (3.12) primeiramente devemos definir o operador desvio Δ como sendo

$$\Delta\hat{O} = \hat{O} - \langle\hat{O}\rangle \tag{3.13}$$

onde $\hat{O}$ é um operador, cujo valor esperado é tomado sobre um determinado estado físico $|\Psi\rangle$ arbitrário. Conside os seguintes lemas

Lema 1: A desigualdade de Schwarz $\langle a|a\rangle.\langle b|b\rangle \geq |\langle a|b\rangle|^2$

Lema 2: O valor esperado de um operador hermitiano é real puro

Lema 3: O valor esperado de um operador anti hermitiano é imaginário puro

De posse destes lemas juntamente com o operador de desvio, é possíel mostrar a relação de incerteza (3.12). Considere dois kets quaisquer $|a\rangle$ e $|b\rangle$, que podem ser expressos como

$$|a\rangle = \Delta\hat{A}|\Psi\rangle$$

$$|b\rangle = \Delta\hat{B}|\Psi\rangle$$

onde $|\Psi\rangle$ é um estado arbitrário. Então pelo lema 1

$$\begin{aligned} \langle a|a\rangle.\langle b|b\rangle &= \langle(\Delta\hat{A})^2\rangle.\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \\ &\geq |\langle\Delta A.\Delta B\rangle|^2 \\ \langle(\Delta\hat{A})^2\rangle.\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle &\geq |\langle\Delta A.\Delta B\rangle|^2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

agora, note que

$$\Delta\hat{A}.\Delta\hat{B} = \frac{1}{2}[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] + \frac{1}{2}\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}$$

porem o comutador é anti-hermitiano enquanto o anti-comutador é hermitiano, portanto pelo lema 2 e lema 3 seus valores esperados são

$$\langle\Delta\hat{A}.\Delta\hat{B}\rangle = \frac{1}{2}\langle[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]\rangle + \frac{1}{2}\langle\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}\rangle$$

respectivamente, imaginário puro $\langle[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]\rangle$ e real puro $\langle\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}\rangle$, portanto retornando para equação (3.14), notando que $[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}]$, temos

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle.\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle^2 + \frac{1}{4}\langle\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}\rangle^2$$

Contudo, podemos omitir o segundo termo $\langle\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}\rangle$, que só deixa a desigualdade mais forte.

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle.\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|^2$$

Assim como queriamos demonstrar [3]. A partir da equação (3.12) podemos buscar uma incerteza mínima para medidas de posição conforme [4].

3.3 Relação de incerteza e o Comprimento Mínimo

Lembrando que a relação de incerteza vem dada por

$$\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle.\langle(\Delta\hat{\wp})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{x},\hat{\wp}]\rangle|^2 \tag{3.15}$$

substituindo a equação (3.11) na equação (3.15)

$$\langle(\Delta\hat{x})\rangle.\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle \geq \frac{1}{2}|\langle i(1+q^2\hat{\wp}^2)\rangle|$$

$$\langle(\Delta\hat{x})\rangle.\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle \geq \frac{1}{2}\left(1+q^2\langle\hat{\wp}^2\rangle\right) \tag{3.16}$$

que pode ser resolvida para $\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle$, lembrado que

$$\langle(\hat{\wp})^2\rangle = \langle(\Delta\hat{\wp})^2\rangle + \langle(\hat{\wp})\rangle^2 \tag{3.17}$$

retornando (3.17) em (3.16) e unindo os termos semelhantes, temos

$$0 \geq \frac{q^2}{2}\langle(\hat{\Delta\wp}^2)\rangle - \langle(\Delta\hat{x})\rangle.\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle + \frac{1}{2}(1+q^2\langle\wp\rangle^2) \tag{3.18}$$

podemos igualar a zero a equação (3.18) afim de obter uma solução para $\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle$

$$\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle = \frac{\langle(\Delta\hat{x})\rangle}{q^2} \pm \frac{1}{q^2}\left[\langle(\Delta\hat{x})\rangle^2 - 4\left(\frac{q^2}{2}\right)\frac{1}{2}(1+q^2\langle\wp\rangle^2)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.19}$$

$$\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle = \frac{\langle(\Delta\hat{x})\rangle}{q^2} \pm \left[\frac{\langle(\Delta\hat{x})\rangle^2}{q^4} - \frac{1}{q^2} - \langle\wp\rangle^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.20}$$

onde a incerteza mínima para posição se da quando

$$\frac{\langle(\Delta\hat{x})\rangle^2}{q^4} - \frac{1}{q^2} - \langle\wp\rangle^2 = 0 \tag{3.21}$$

$$\frac{\langle(\Delta\hat{x})\rangle^2}{q^4} = \frac{1}{q^2} + \langle\wp\rangle^2 \tag{3.22}$$

$$\langle(\Delta\hat{x})\rangle^2 = q^2\left(1+q^2\langle\wp\rangle^2\right) \tag{3.23}$$

e a incerteza mínima na posição é quando $\langle\wp\rangle = 0$, portanto

$$\langle(\Delta\hat{x})\rangle = q \tag{3.24}$$

analogo ao encontrado na referencia [4], conforme o esperado. Note que tomado $\lim q \to 0$ na equação (3.18), obtemos

$$\langle(\Delta\hat{x})\rangle.\langle(\Delta\hat{p})\rangle \geq \frac{1}{2}$$

conforme a Mêcnica Quântica prevê. A forma

$$[\hat{x},\hat{\wp}] = i(1+q^2\hat{\wp}^2) \tag{3.25}$$

é amplamente estudada na comunidade cientifica conforme pode ser visto em [4],[6],[7],[8],[9]. Agora buscaremos conforme [5] uma formulação através da integral de caminho.

4 A Integral de Caminho

4.1 O Propagador com Comprímento Mínimo

Antes de construir o propagador, vamos obter uma representação para $\langle x|\wp\rangle$, supondo

$$\langle x|\wp\rangle = Ne^{-i\wp xF(\wp)} \tag{4.1}$$

e lembrando que

$$\hat{x}\langle x|\wp\rangle = i\hat{\zeta}(q,\hat{\wp})\bigtriangledown_{\wp}\langle x|\wp\rangle \tag{4.2}$$

note

$$\bigtriangledown_{\wp}\langle x|\wp\rangle = \bigtriangledown_{\wp}\{Ne^{-i\wp xF(\wp)}\} \tag{4.3}$$

$$\bigtriangledown_{\wp}\langle x|\wp\rangle = -ix\langle x|\wp\rangle\{F(\wp) + \wp\bigtriangledown_{\wp}F(\wp)\} \tag{4.4}$$

voltando o resultado (4.4) na equação (4.2) e unindo os termos semelhantementes, temos

$$1 = \hat{\zeta}(q,\hat{\wp})\{F(\wp) + \wp\bigtriangledown_{\wp}F(\wp)\} \tag{4.5}$$

$$1 = \hat{\zeta}(q,\hat{\wp})\bigtriangledown_{\wp}\{\wp F(\wp)\} \tag{4.6}$$

$$\bigtriangledown_{\wp}\{\wp F(\wp)\} = (1 - iq\hat{\wp})^{-1} \tag{4.7}$$

integrando a equação (4.7), obtemos

$$\wp F(\wp) = \int d\wp\,(1 - iq\hat{\wp})^{-1} \tag{4.8}$$

$$F(\wp) = \frac{i}{\wp q} ln\,(1 - iq\hat{\wp}) \tag{4.9}$$

$$F(\wp) = \frac{K}{\wp} \tag{4.10}$$

portanto

$$\langle x|\wp\rangle = Ne^{-ixK} \tag{4.11}$$

agora vamos normalizar a equação (4.11), considere

$$\langle x|x'\rangle = \langle x|\hat{1}|x'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp\langle x|\frac{|\wp\rangle\langle\wp|}{\hat{\zeta}(q,\wp)}|x'\rangle \tag{4.12}$$

mas, lembrando que

$$\hat{\zeta}(q,\wp) = e^{-iqK(\wp)} \tag{4.13}$$

então

$$(1 - iq\wp) = e^{-iqK(\wp)} \tag{4.14}$$

tomando o diferencial

$$d\wp = e^{-iqK(\wp)} dK \tag{4.15}$$

voltando os resultados (4.14) e (4.15) na equação (4.12), obtemos

$$\langle x|x'\rangle = |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dK e^{-ik(x-x')} \tag{4.16}$$

portanto

$$\langle x|x'\rangle = 2\pi |N|^2 \delta(x - x') \tag{4.17}$$

$$|N| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \tag{4.18}$$

enfim

$$\langle x|\wp\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-ixK} \tag{4.19}$$

que pode ser escrita em função de $\wp$, como

$$\langle x|\wp\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{x}{q} ln(1-iq\wp)} \tag{4.20}$$

note que no limite para q indo a zero, temos

$$\lim_{q\to\infty} \langle x|\wp\rangle = \langle x|p\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-ipx} \tag{4.21}$$

ou seja, recuperamos a mecânica quântica.

Agora estamos em condições de obter o propagador, considere a seguinte operação

$$A = \langle \wp_f| \left(e^{-i\hat{H}T}\right) |\wp_i\rangle \tag{4.22}$$

onde $\hat{H}$ é a Hamiltoniana do sistema, dada por

$$H = \frac{\wp^2}{2m} + V \tag{4.23}$$

perceba que podemos escrever

$$A = \langle \wp_f| \left(e^{\frac{-i\hat{H}T}{N}}\right)^N |\wp_i\rangle \tag{4.24}$$

lembrando que

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp \frac{|\wp\rangle\langle\wp|}{\hat{\zeta}(q,\wp)} \tag{4.25}$$

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle\langle x| \tag{4.26}$$

podemos completar a equação (4.24) com $N-1$ relações (4.25), ou seja

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d\wp_k}{\zeta(q,\wp_k)} \prod_{k=1}^{N} \langle \wp_k | e^{-i\hat{\epsilon}H} | \wp_{k-1} \rangle \tag{4.27}$$

onde $\wp_0 = \wp_i$, $\wp_N = \wp_f$ e $T = N\epsilon$.

Completando agora N vezes a equação (4.27) com (4.26), temos

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d\wp_k}{\zeta(q,\wp_k)} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{N} dx_k \prod_{k=1}^{N} \langle \wp_k | x_k \rangle \langle x_k | \wp_{k-1} \rangle e^{-i\hat{\epsilon}H} \tag{4.28}$$

considere agora apenas a expressão

$$\langle \wp_k | x_k \rangle \langle x_k | \wp_{k-1} \rangle e^{-i\hat{\epsilon}H}$$

lembrando que

$$\langle x | \wp \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{x}{q} ln\zeta(q,\wp)}$$

temos

$$\langle \wp_k | x_k \rangle \langle x_k | \wp_{k-1} \rangle e^{-i\hat{\epsilon}H} = \frac{1}{(2\pi)} e^{-i\hat{\epsilon}H} e^{\frac{\epsilon x_k}{q} \left(\frac{1}{\epsilon} ln\zeta(q,\wp_k) + \frac{1}{\epsilon} ln\hat{\zeta}(q,\wp_{k-1})^{\star} \right)} \tag{4.29}$$

tomando o limite de ϵ tendendo a zero na equação (4.29), obtemos

$$\langle \wp_k | x_k \rangle \langle x_k | \wp_{k-1} \rangle e^{-i\hat{\epsilon}H} = \frac{1}{(2\pi)} e^{-i\hat{\epsilon}H} e^{\frac{\epsilon x_k}{q} \frac{\partial}{\partial t} ln\zeta(q,\wp_k)} \tag{4.30}$$

mas

$$\frac{\partial}{\partial t} ln\zeta(q,\wp_k) = \frac{1}{\zeta(q,\wp_k)} \frac{\partial}{\partial t} \zeta(q,\wp_k) = \frac{1}{\zeta(q,\wp_k)} \frac{\partial}{\partial t} (1 - iq\wp_k) = -iq \frac{\dot{\wp}_k}{\zeta(q,\wp_k)} \tag{4.31}$$

retornando os resuldaos (4.30) e (4.31) na equação (4.28), temos que

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} D\wp Dx \prod_{k=1}^{N} e^{-i\epsilon \left(\frac{\dot{\wp}_k}{\zeta(q,\wp_k)} x_k + H \right)} \tag{4.32}$$

onde

$$Dx = \prod_{k=1}^{N} dx_k \tag{4.33}$$

$$D\wp = \prod_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \frac{d\wp_n}{\zeta(q,\wp_k)} \tag{4.34}$$

mas note que podemos escrever

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} D\wp Dx e^{\sum_{k=1}^{N} -iN\epsilon \left(\frac{\dot{\wp}_k}{\zeta(q,\wp_k)} x_k + H \right)} \tag{4.35}$$

e tomando os limites de ϵ muito pequeno e N muito grande, obtemos

$$Nd\epsilon = dT \tag{4.36}$$

assim, escrevemos a equação (4.35) na forma

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} D\wp Dx e^{-i\int_0^T dt\left(\frac{\dot{\wp}_k}{\zeta(q,\wp_k)}x_k + H\right)} \tag{4.37}$$

que é o propagador de Feynman para mecânica quântica com comprimento mínimo, lembrando que

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} D\wp Dx e^{\frac{-i}{\hbar}S[x,\wp]} \tag{4.38}$$

portanto a ação fica dada por

$$S[x,\wp] = \int_0^T dt\left(\frac{\dot{\wp}_k}{\zeta(q,\wp_k)}x_k + H\right) \tag{4.39}$$

mas

$$S[x,\wp] = \int_0^T dtL \tag{4.40}$$

portanto temos

$$L = \frac{\dot{\wp}_k}{\zeta(q,\wp_k)}x_k + H \tag{4.41}$$

que é a equação de Lagrange, analoga a encontrado em [5] onde

$$H = \frac{\wp^2}{2m} + V$$

Portanto vemos que existe uma certa compatibilidade entre as álgebras deformadas, muitos outros resultados podem ser obtidos no contexto de mecânica quântica com comprimento mínimo dentre eles é importante ressaltar o oscilador harmônico, que pode ser visto em [4], [5], [11], uma aplicação ao potencial de Poschl-Teller [12], a relação entre comprimento mínimo e máxima velocidade [13], gravidade quântica [7], [9], entre outras.

5 Considerações Finais

Supondo a existência de um comprimento mínimo para as medidas de posição, definimos um novo operador de momento $\hat{\wp}$, que leve em consideração tal comprimento, e calculamos seu comutador com o operador posição $\hat{x}$, obtendo uma álgebra deformada pelo operador de translação espacial.

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hat{\zeta} \tag{5.1}$$

porem, o desenvolvimento teórico atualmente abordado pela comunidade cientifica sobre a mecânica quântica com comprimento mínimo impõe uma mudança do tipo

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\left(1 + \beta\hat{p}^2\right) \tag{5.2}$$

conforme pode ser visto em [4], [5], mas note que a forma do operador de translação em (5.1) não é única, portanto outras álgebras deformadas podem ser obtidas a partir de (5.1) inclusive (5.2).

A introdução de um comprimento mínimo em sistemas quânticos dá origem a importantes consequências que ainda estão sendo exploradas. Dentre eles é importante resaltar que o comprimento mínimo ganha cada vez mais espaço no contexto da gravidade quântica [7], [9] e teoria de cordas [8].

Contudo, este trabalho teve como principal objetivo apresentar uma forma original de se obter a mecânica quântica com comprimento mínimo.

Referências Bibliográficas

[1] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Mechanics. Vol. 1*, Pergamon Press, 1960. .

[2] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory. Vol. 3*, Pergamon Press, 1958.

[3] J. J. Sakurai, San Fu Tuan, *Modern Quantum Mechanics*, Revised Edition. Pearson Education, 1994.

[4] A. Kempf, G. Mangano and R. B. Mann, Phys. Rev. D 52 (1995) 1108

[5] P. Valtancoli, *Path integral and noncommutative poisson brackets*, arXiv:1502.01711 [hep-th].

[6] P. A. Tawfik and A. Diab, *Review on Generalized Uncertainty Principle to appear in Reports on Progress in Physics*, arXiv:1509.02436 [physics.gen-ph].

[7] S. Hossenfelder, *Minimal length scale scenarios for quantum gravity*, Living Rev. Rel. 16, 2 (2013)1203.6191[gr-qc]

[8] D.J. Gross,P.f. Mende, *String theory beyond the Planck scale*, Nuclear Phys. B 303 (1988), 407-454.

[9] L.J. Garay, *Quantum Gravity and minimum length, Internat*, J. Modern Phys. A 10 (1995), 145?165, gr-qc/9403008.

[10] C.J. Isham, *Prima Facie Questions in Quantum Gravity*, arXiv:gr-qc/9310031.

[11] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi, *Exact Solution of the Harmonic Oscillator in Arbitrary Dimensions with Minimal Length Uncertainty Relations*, Phys.Rev. D65 (2002) 125027.

[12] C. Quesne,*Comment on Application of nonlinear deformation algebra to a physical system with Poschl-Teller potential*, J. Phys. A 32 (1999) 6705-6710.

[13] B. Panes, *Minimum Length - Maximum Velocity*, Eur. Phys. J. C (2012) 72:1930.