

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós-Graduação em Matemática

ÍNDICE DE CAMPOS DE VETORES COM APLICAÇÕES À
CONJECTURA DE CARATHÉODORY

Filipe Mendonça Lopes

Itajubá-MG, 8 de Maio de 2014

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Filipe Mendonça Lopes

ÍNDICE DE CAMPOS DE VETORES COM APLICAÇÕES À
CONJECTURA DE CARATHÉODORY

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias.

Orientador: Luis Fernando Mello.

Abril de 2014

Itajubá

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Filipe Mendonça Lopes

ÍNDICE DE CAMPOS DE VETORES COM APLICAÇÕES À
CONJECTURA DE CARATHÉODORY

Dissertação aprova por banca examinadora em 30 de
abril de 2014, conferindo ao autor o título de **Mestre
em Ciências em Matemática.**

Banca Examinadora:

Prof. Luis Fernando Mello (Orientador)

Prof. Claudio Aguinaldo Buzzi

Prof. Fábio Scalco Dias

Itajubá

2014

Resumo

O objetivo desta dissertação é o estudo sobre o índice de um ponto de equilíbrio isolado em um campo de vetores planar de classe C^1 e o estudo do campo vetorial de Loewner. Dentre os resultados principais provaremos o Teorema de Índice de Bendixson. Em campos vetoriais polinomiais estudaremos a compactificação de Poincaré em \mathbb{S}^2 e apresentaremos uma prova do Teorema de Poincaré-Hopf na esfera. Os resultados obtidos da Teoria de Índice serão aplicados no estudo de pontos críticos para polinômios reais em duas variáveis e na Conjectura de Carathéodory sobre pontos umbílicos.

Palavras-chave: Índice de equilíbrios isolados, Teorema de Índice de Bendixson, Campo vetorial de Loewner, Teorema de Poincaré-Hopf, Pontos Umbílicos, Conjectura de Carathéodory.

Abstract

The aim of this dissertation is the study of the index of an isolated equilibrium point of C^1 planar vector fields and the study of the Loewner vector field. Among the main results we prove the Bendixson Index Theorem. In polynomial vector fields we study the Poincaré compactification in \mathbb{S}^2 and we exhibit a proof of Poincaré-Hopf Theorem in the sphere. The results in Index Theory will be applied in the study of critical points of real polynomials in two variables and the Carathéodory Conjecture on umbilic points.

Keywords: Index of isolated equilibrium points, Index Bendixson Theorem, Loewner vector field, Poincaré-Hopf Theorem, Umbilic points, Carathéodory Conjecture.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	O índice de um equilíbrio planar	4
2.1	Estrutura local de um ponto de equilíbrio	5
2.2	Número de rotação de um campo vetorial contínuo	10
2.3	O índice de um ponto de equilíbrio	16
2.4	Índice de Cauchy	21
2.5	Cálculo do índice em campos vetoriais analíticos	28
2.6	Cálculo do índice em campos vetoriais polinomiais	30
2.7	Teorema de Índice de Bendixson	38
3	Uma cota superior para o índice de um equilíbrio no plano	42
3.1	Uma decomposição de um campo vetorial planar	43
3.2	Dinâmica em $\Lambda(f, g)$	45
3.2.1	O conjunto Π	46
3.2.2	Propriedades básicas	48
3.2.3	Resultados principais	50
3.3	Exemplos	53
4	Campos vetoriais polinomiais	57
4.1	Compactificação de Poincaré	58
4.2	O Teorema de Poincaré-Hopf na esfera S^2	62
4.3	Campos vetoriais limitados	64
4.4	Pontos críticos	66
4.5	Curva de tangências	72

5	Conjectura de Carathéodory	77
5.1	Pontos umbílicos	78
5.2	Coordenadas de Ribaucour	81
5.3	Desigualdade de Lojasiewicz	86
6	Conclusão	91
	Bibliografia	93

Lista de Figuras

2.1	Setor Parabólico Atrator.	7
2.2	Setor Parabólico Repulsor.	7
2.3	Setor Hiperbólico.	8
2.4	Setor Elíptico.	9
2.5	Retrato de fase do campo $(x, -y)$	9
2.6	Orientação positiva da fronteira em uma região multiplamente conexa.	13
2.7	Curva \mathcal{L} em cada setor angular da origem.	40
3.1	Um ramo duplo.	47
3.2	Figura ilustrativa relativa à demonstração da Proposição 3.2.2.	49
3.3	Fluxo ilustrativo do campo hamiltoniano em um setor angular.	52
3.4	Retrato de fase do campo $(-y + x^3 - x^2y + 8xy^2, x - x^3/3 + 8x^2y + y^3)$	54
3.5	Retrato de fase do campo $(xy, -e^x - y^2 + 1)$	56
4.1	Retrato de fase no disco de Poincaré do campo $(x, -y)$	62
4.2	Teorema Poincaré-Hopf	64
4.3	Gráfico de $f(x, y) = x^2y^3 + y^5 - y$	71
4.4	Curvas de nível e de tangência de $f(x, y) = y(xy - 1)$	75
4.5	Retrato de fase sobre o disco de Poincaré referente ao Exemplo 4.5.1.	76

Capítulo 1

Introdução

O índice de um equilíbrio isolado em um campo vetorial planar é um número inteiro que nos proporciona um modo de compreender o comportamento do fluxo deste campo numa vizinhança acerca do ponto em questão. Pelo fato do equilíbrio ser isolado, consideramos uma pequena circunferência centrada neste ponto e aplicamos o campo vetorial restrito à esta pequena circunferência numa circunferência unitária. O índice é definido pelo grau topológico desta aplicação.

Cálculos algébricos para obtenção do índice são complicados. Em campos vetoriais polinomiais homogêneos o índice é bem conhecido e relativamente simples para realização de cálculos. Em 1962, Wei-xin desenvolveu um procedimento efetivo para o cálculo do índice em campos vetoriais polinomiais, utilizando o índice de Cauchy e cálculos racionais com os coeficientes das equações diferenciais. No caso de campos vetoriais analíticos há resultados apenas sob condições apropriadas.

Um dos principais resultados na Teoria de Índice é Teorema de Índice de Bendixson. Este teorema relaciona o índice com a quantidade de setores elípticos e hiperbólicos do fluxo do campo de vetores numa vizinhança suficientemente pequena do equilíbrio. No Capítulo 2 apresentaremos mais detalhadamente esses resultados.

Outro modo de obter informações sobre o índice em um campo vetorial polinomial é compactificá-lo numa esfera em \mathbb{R}^3 . Isto, também, nos permite estudar o comportamento fora das partes compactas do plano, ou seja, no infinito. Poincaré provou que a soma dos índices de todas as singularidades isoladas numa esfera é igual à 2. Tal resultado, foi generalizado por Hopf [10] em 1979 para campos de direções em superfícies compactas.

No Capítulo 4 discutiremos este assunto com mais profundidade e aplicaremos alguns resultados no estudo de polinômios reais de duas variáveis.

Dentre uma das potencialidades da Teoria de Índice, destaca-se um possível ataque à Conjectura de Carathéodory. Segundo Ovsienko e Tabachnikov [15], por volta de 1920, Carathéodory que estava em busca de uma versão para o Teorema de Quatro Vértices em \mathbb{R}^3 conjecturou que *uma superfície suave convexa e compacta em \mathbb{R}^3 , isto é um ovalóide, tem pelo menos dois pontos umbílicos*. Tal conjectura possuiu uma história curiosa e um pouco controversa.

Para uma compreensão preliminar, considere S uma superfície suave em \mathbb{R}^3 . Em cada ponto de S duas curvaturas principais podem ser definidas. Um ponto umbílico de S ocorre quando as curvaturas principais coincidem, nos demais pontos de S temos duas direções principais ortogonais. Uma linha de curvatura é uma curva regular sobre a superfície que em cada ponto o vetor tangente está contido numa das direções principais. Uma linha de curvatura tem uma expressão diferencial. Pontos umbílicos são as singularidades do campo de direções principais.

Desde então, vários matemáticos afirmam terem dado uma resposta positiva a Conjectura de Carathéodory, porém recentemente ainda é um motivo para discussões. Em 1940, Hamburger apresentou a primeira prova para a Conjectura de Carathéodory, para superfícies analíticas, em um longo artigo, publicado em três partes. Três anos após, Bol apresentou uma prova mais curta e simplificada. Em 1959, Klotz encontrou erros e apresentou uma correção na prova de Bol, contudo a clareza destas provas foram questionadas pela comunidade matemática.

Bol tentou dar uma prova mais simples para este teorema. Klotz percebeu que havia uma lacuna na prova de Bol de modo que o caso geral não estava coberto. Ela forneceu argumentos adicionais para uma prova completa, mas descobriu-se que ela não teve sucesso completo. (Scherbel [16], 1993).

Após a tentativa de Klotz, Titus em 1973 apresentou sua prova para superfícies analíticas que também foi motivo de questionamentos. A abordagem utilizada nessas provas foram locais. Seja $x \in S$ um ponto umbílico isolado. Cada um dos campos de direções principais tem uma singularidade isolada no ponto x , implicando que este tem um índice. Como uma curva integral de um campo de direção principal é uma curva sem orientação,

o índice de um ponto umbílico é da forma $n/2$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Pelo Teorema de Poincaré-Hopf a soma dos índices sobre os pontos umbílicos é igual a característica de Euler do ovalóide, que é igual à 2. Consequentemente, a conjectura estará provada se mostrarmos que o índice em cada umbílico isolado é menor ou igual a um. Esta por sua vez, se relaciona com a Conjectura de Loewner.

De acordo com Titus (apud Llibre e Martínez-Alfaro [13]) em 1950 Loewner conjecturou: *seja f é uma função analítica real sobre um disco unitário em \mathbb{R}^2 , se o campo vetorial $\partial^n f / \partial \bar{z}^n$ tem um equilíbrio isolado na origem, então o índice não é maior que n .*

Em particular, o caso $n = 2$ para umbílicos na Conjectura de Loewner, afirma que o índice de um ponto umbílico sobre uma superfície em \mathbb{R}^3 é menor ou igual a um. Portanto, uma resposta afirmativa para o caso particular da Conjectura de Loewner implica numa resposta afirmativa para a de Carathéodory.

Alguns anos atrás, em 1999, os autores Sotomayor e Mello (em [18]) publicaram o seguinte resultado: *se a Conjectura de Loewner é válida para superfícies analíticas, então o caso quando uma superfície suficientemente suave tem um umbílico satisfazendo a condição de Lojasiewicz também é.* Este trabalho será descrito detalhadamente no Capítulo 5. Logo, após em 2002, Ivanov apresentou sua prova com a seguinte declaração:

Primeiro, considerando superfícies analíticas, nós afirmamos com total responsabilidade que Carathéodory estava correto. Segundo, nós sabemos como prová-la rigorosamente. Terceiro, temos a intenção de exibir aqui uma prova, a qual em nossa opinião, convencerá todos os leitores realmente prontos a empreender uma viagem longa e cansativa conosco. (Ivanov [11], 2002).

Segundo Mello, a prova de Ivanov para a Conjectura de Carathéodory em superfícies analíticas não foi questionada, até o presente momento, pela comunidade matemática.

Neste trabalho vamos obter propriedades sobre o índice em pontos de equilíbrio de um campo vetorial suave tendo como norte o campo vetorial de Loewner. Pela complexidade de formas efetivas para o cálculo do índice, a obtenção de cotas superiores é uma ferramenta importante. Em particular, no Capítulo 3 descreveremos com detalhes o trabalho de Llibre e Martínez-Alfaro em [13], obtendo uma cota superior para o índice de um equilíbrio isolado de um campo vetorial planar C^1 , utilizando uma decomposição do campo em componentes gradiente e hamiltoniana relacionada com o campo de Loewner.

Capítulo 2

O índice de um equilíbrio planar

O índice de um ponto de equilíbrio de um campo vetorial no plano é um inteiro o qual nos proporciona informações sobre a estrutura topológica deste equilíbrio, mais especificamente, informações relevantes sobre a estrutura do fluxo do campo vetorial numa vizinhança próxima a este equilíbrio. Um dos principais resultados é o Teorema de Índice de Bendixson. Este capítulo é baseado em um capítulo do livro [19]. Como bibliografia auxiliar foram utilizados os livros [3] e [12].

Na Seção 2.1 mostraremos alguns resultados sobre a estrutura local de um ponto de equilíbrio no plano. Na Seção 2.2 descreveremos o número de rotação de um campo vetorial contínuo, suas propriedades e a definição de homotopia entre dois campos de vetores em uma curva fechada. Na Seção 2.3 definiremos o índice de um ponto de equilíbrio de um campo vetorial contínuo utilizando o número de rotação deste campo sobre a fronteira de uma vizinhança do equilíbrio, apresentaremos algumas propriedades e exemplos simples. Nas Seções 2.4-2.6 mostraremos técnicas para cálculo do índice em um campo vetorial analítico, mais especificamente, o índice de um ponto de equilíbrio isolado num campo analítico, em determinados casos, é igual ao índice na origem de seu campo de equações principais. Este, por sua vez, pode ser obtido utilizando resultados sobre o Índice de Cauchy e a técnica de cálculo racional de coeficientes de equações diferenciais baseado no trabalho de Gao Wein-xin em 1962. Finalmente, na Seção 2.7 enunciaremos e provaremos o Teorema de Índice de Bendixson.

2.1 Estrutura local de um ponto de equilíbrio

Neste capítulo apresentaremos alguns aspectos sobre a estrutura local de um ponto de equilíbrio isolado de um campo de vetores de classe C^1 no plano. Consideremos $v : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 , em que $U \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto e não vazio. A trajetória do campo vetorial v passando pelo ponto (x_0, y_0) será denotada por $\gamma_v(x_0, y_0)$ e o fluxo associado ao campo v será denotado por φ_v .

Um ponto $(x, y) \in U$ é chamado de um **equilíbrio do campo** v quando $v(x, y) = 0$, caso contrário, dizemos que (x, y) é um **ponto regular de** v . Considere $v_1, v_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ as funções coordenadas de v , ou seja, $v(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$, para todo $(x, y) \in U$ e seja $M_0 \in U$ é um ponto de equilíbrio do campo v . A matriz Jacobiana do campo v no ponto M_0 é dada por

$$J_v(M_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x}(M_0) & \frac{\partial v_1}{\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x}(M_0) & \frac{\partial v_2}{\partial y}(M_0) \end{pmatrix}$$

e é chamada **parte linear do campo vetorial** v calculada em M_0 . O equilíbrio M_0 é chamado de **hiperbólico** se cada um dos autovalores de $J_v(M_0)$ tem parte real não nula. Caso contrário, dizemos que M_0 é **não-hiperbólico**. O equilíbrio M_0 é chamado **não-degenerado** quando 0 não é um autovalor de $J_v(M_0)$.

Uma **separatriz** do campo vetorial v , referente ao equilíbrio M_0 , é uma órbita γ do campo v tendendo para o equilíbrio M_0 possuindo uma tangência bem definida, com isso queremos dizer que, $\gamma(t) \rightarrow M_0$ quando $t \rightarrow \infty$ (ou $t \rightarrow -\infty$) e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t) - M_0}{\|\gamma(t) - M_0\|} \quad \left(\text{respectivamente, } \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\gamma(t) - M_0}{\|\gamma(t) - M_0\|} \right)$$

existe.

Dizemos que o conjunto $J \subset \mathbb{R}^2$ é uma **curva de Jordan** quando existir uma aplicação contínua $y : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow J$, em que $y(b) = y(a)$ e $y(s) \neq y(t)$, para todo $a \leq s < t < b$.

Considere $K \subset U$ uma vizinhança compacta de M_0 , suficientemente pequena, tal que ∂K é uma curva regular de Jordan. Em outras palavras, existe uma aplicação diferenciável

$\chi : I \rightarrow \partial K$, em que I um intervalo fechado da reta real \mathbb{R} , satisfazendo as condições de uma curva de Jordan no plano e suas funções coordenadas tem derivadas não nulas para todo $t \in I$. Para cada $t \in I$ definiremos os vetores

$$T(t) := \frac{\chi'(t)}{\|\chi'(t)\|} \quad \text{e} \quad N(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T(t),$$

denominados vetores **tangente** e **normal à curva ∂K no ponto $t \in I$** , respectivamente.

A partir das definições acima, para cada $(x, y) \in \partial K$, existe um ponto $t \in I$ tal que $\chi(t) = (x, y)$. Dizemos que o vetor $v(x, y) = v(\chi(t))$ **aponta para fora de K** quando $v(x, y) \cdot N(t) > 0$; **aponta para dentro de K** quando $v(x, y) \cdot N(t) < 0$ e é **tangente à curva ∂K** quando $v(x, y) \cdot N(t) = 0$. O símbolo \cdot representa o produto interno entre os vetores.

Definiremos, a seguir, os setores do fluxo de um campo vetorial numa vizinhança de um equilíbrio isolado.

Definição 2.1.1. *Sejam $v : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 e $M_0 \in U$ um equilíbrio isolado de v . Se existir uma vizinhança compacta $K \subset U$ de M_0 tal que ∂K é uma curva regular de Jordan e o fluxo do campo v restrito ao compacto K corresponder um dos seguintes casos:*

- (i) *um **centro**, se todas as órbitas em $K \setminus \{M_0\}$ são fechadas;*
- (ii) *um **foco** ou **nó atrator**, se em todos os pontos de ∂K o campo v aponta para dentro de K e para todo $(x, y) \in K \setminus \{M_0\}$ temos que $\omega(x, y) = M_0$ e $\gamma_v(x, y) \cap \partial K \neq \emptyset$;*
- (iii) *um **foco** ou **nó repulsor**, se em todos os pontos de ∂K o campo v aponta para fora de K e para todo $(x, y) \in K \setminus \{M_0\}$ temos que $\alpha(x, y) = M_0$ e $\gamma_v(x, y) \cap \partial K \neq \emptyset$.*

Então, dizemos que o campo de vetores v restrito ao compacto K possui uma **decomposição setorial trivial**. Dizemos que v , restrito à K , possui uma **decomposição setorial não-trivial finita** quando o campo vetorial v não possuir uma decomposição setorial trivial, referente ao equilíbrio M_0 e existir um número finito de separatrizes, denotadas por L_0, \dots, L_{n-1} , cada uma interceptando ∂K transversalmente num ponto P_i e com a propriedade que entre L_i e L_{i+1} (com $L_0 = L_n$), temos uma das seguintes situações referente ao setor Σ_i definido pela região compacta compreendida por $L_i, L_{i+1}, \partial K$ e M_0 :

- (i) **Setor parabólico atrator:** neste setor temos que o campo vetorial v aponta para dentro sobre a curva $\widetilde{P_i P_{i+1}} \subset \partial K$ e para todo $(x, y) \in \Sigma_i \setminus \{M_0\}$ temos que $\omega(x, y) = M_0$ e $\gamma_v(x, y) \cap \partial K \neq \emptyset$. Veja ilustração na Figura 2.1;

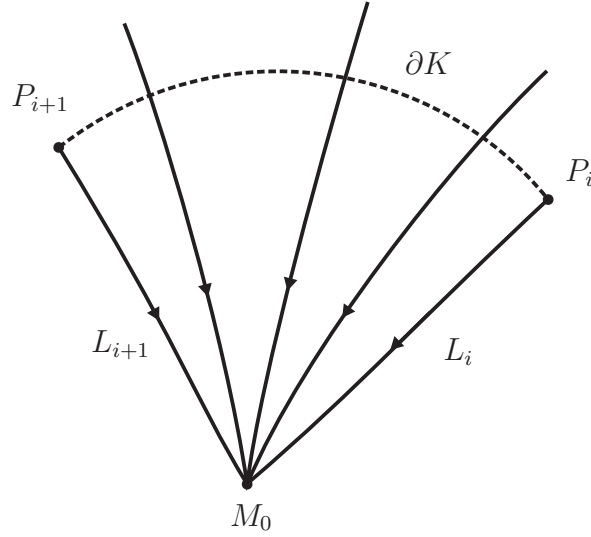


Figura 2.1: Setor Parabólico Atrator.

- (ii) **Setor parabólico repulsor:** neste setor temos que o campo vetorial v aponta para fora sobre a curva $\widetilde{P_i P_{i+1}} \subset \partial K$ e para todo $(x, y) \in \Sigma_i \setminus \{M_0\}$ temos que $\alpha(x, y) = M_0$ e $\gamma_v(x, y) \cap \partial K \neq \emptyset$. Veja ilustração na Figura 2.2;

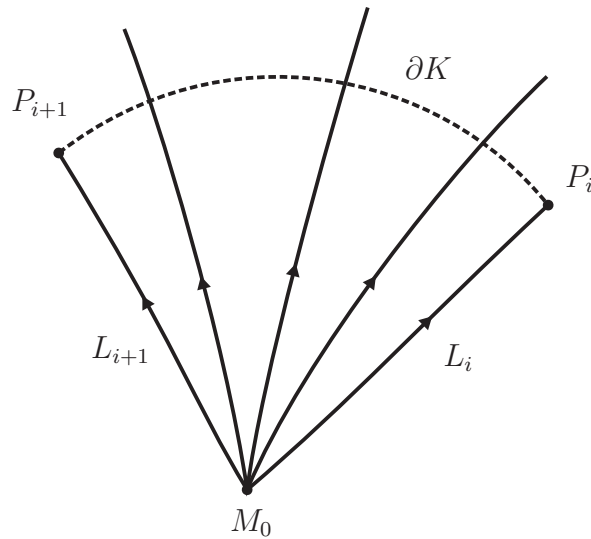


Figura 2.2: Setor Parabólico Repulsor.

(iii) **Setor hiperbólico:** neste setor existe um ponto $Q_i \in \widetilde{P_i P_{i+1}} \subset \partial K$ tal que sobre a curva $\widetilde{P_i Q_i} \subset \partial K$ o campo aponta para dentro deste setor e sobre a curva $\widetilde{Q_i P_{i+1}} \subset \partial K$ o campo vetorial aponta para fora deste setor. Sobre o ponto Q_i o campo vetorial possui uma tangência externa à ∂K , com isso queremos dizermos que $\gamma_v(Q_i)$ não entra na região Σ_i . Além disso, para todo $(x, y) \in \Sigma_i \setminus \{L_i \cup L_{i+1} \cup Q_i\}$ temos que $\gamma_v(x, y)$ e ∂K possui dois pontos de interseção. Veja a ilustração na Figura 2.3;

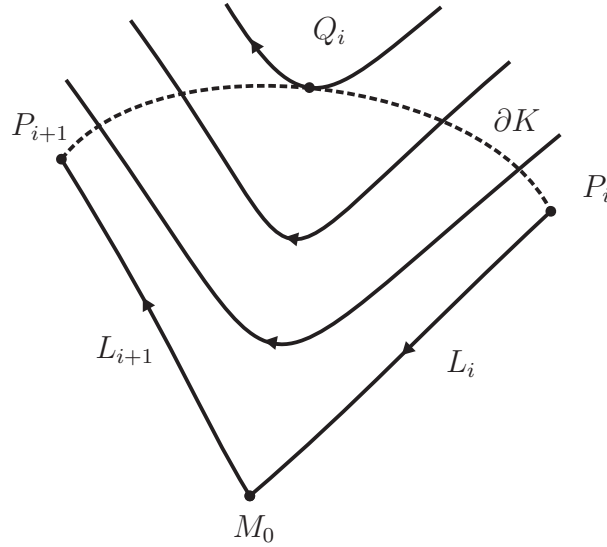


Figura 2.3: Setor Hiperbólico.

(iv) **Setor elíptico:** neste setor existe um ponto $Q_i \in \widetilde{P_i P_{i+1}} \subset \partial K$ tal que $\gamma_v(Q_i) \subset K$ com $\alpha(Q_i) = M_0 = \omega(Q_i)$. Para todo ponto $(x, y) \in \widetilde{P_i Q_i} \subset \partial K$ o campo vetorial aponta para dentro e $\omega(x, y) = M_0$, para todo $(x, y) \in \widetilde{Q_i P_{i+1}} \subset \partial K$ o campo vetorial aponta para fora deste setor e $\alpha(x, y) = M_0$. Nos demais pontos (x, y) deste setor temos que $\gamma_v(x, y) \subset K$ com $\alpha(x, y) = M_0 = \omega(x, y)$. Veja a ilustração na Figura 2.4.

Quando um campo vetorial admitir uma decomposição setorial não-trivial finita em um ponto de equilíbrio isolado, denotaremos por e , h e p o número de setores elípticos, hiperbólicos e parabólicos com respeito à este equilíbrio. No caso de uma decomposição setorial trivial não existem setores de um equilíbrio isolado, desta maneira, consideremos $e = h = 0$.

Exemplo 2.1.1. Considere o campo vetorial $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $v(x, y) = (x, -y)$. A origem é um equilíbrio isolado deste campo de vetores. Seja K a região compacta definida

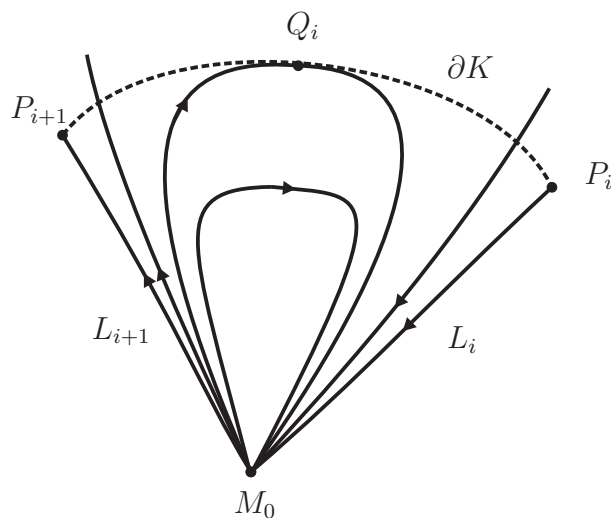


Figura 2.4: Setor Elíptico.

pela circunferência unitária centrada na origem de \mathbb{R}^2 . Existem quatro separatrizes em K , sendo duas repulsores localizadas na reta $y = 0$ e duas atratoras localizadas na reta $x = 0$. Logo, este equilíbrio de v possui quatro setores e observe que o comportamento em cada setor é hiperbólico. Ou seja, temos $e = 0$, $h = 4$ e $p = 0$. A Figura 2.5 representa o retrato de fase deste campo vetorial.

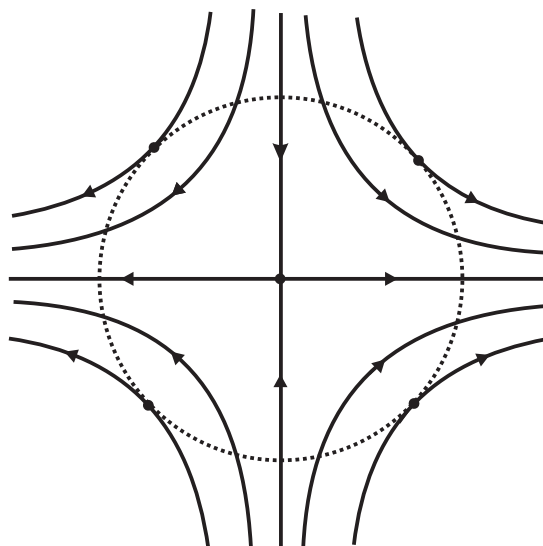


Figura 2.5: Retrato de fase do campo $(x, -y)$.

Os conceitos abordados nesta seção podem ser encontrados com mais detalhes em [3] e [9].

2.2 Número de rotação de um campo vetorial contínuo

Seja $X = (X_1, X_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 e $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan tal que os pontos de \mathcal{L} não são equilíbrios de X . Definiremos a orientação positiva de \mathcal{L} pelo sentido anti-horário. Dado p um ponto de \mathcal{L} , consideremos o vetor $X(p)$. Quando o ponto p percorrer a curva \mathcal{L} no sentido positivo a direção do vetor $X(p)$ irá mudando continuamente.

Considere a função contínua $T : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por

$$T(x, y) = \frac{(X_1(x, y), X_2(x, y))}{\|(X_1(x, y), X_2(x, y))\|}, \quad (x, y) \in \mathcal{L}.$$

Quando o ponto p percorre uma volta completa, no sentido anti-horário, em \mathcal{L} , o vetor $T(p)$ percorrerá um número inteiro de voltas em \mathbb{S}^1 , tal número é chamado de **grau da aplicação** T . Definiremos o **número de rotação** do campo de vetores X sobre a curva \mathcal{L} como sendo o grau da aplicação T e denotaremos por $\rho(X, \mathcal{L})$ ou $\rho((X_1, X_2), \mathcal{L})$.

Exemplo 2.2.1. *Considere o campo de vetores $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $X(x, y) = (-x, y)$. Seja $\mathcal{L} : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$ uma curva fechada e suave em \mathbb{R}^2 . Vamos calcular $\rho(X, \mathcal{L})$, para tal, defina $b_0 = (1, 0)$, $b_1 = (0, 1)$, $b_2 = (-1, 0)$ e $b_3 = (0, -1)$ pontos na curva \mathcal{L} . Consequentemente,*

$$T(b_1) = T(1, 0) = (-1, 0),$$

$$T(b_2) = T(0, 1) = (0, 1),$$

$$T(b_3) = T(-1, 0) = (1, 0),$$

$$T(b_4) = T(0, -1) = (0, -1).$$

Intuitivamente, quando um ponto p percorre uma volta completa em \mathcal{L} no sentido anti-horário, obtemos que o vetor $T(p)$ percorre uma única volta completa em \mathbb{S}^1 no sentido horário, isto implica que, $\rho((-x, y), \mathcal{L}) = -1$.

Proposição 2.2.1. *O número de rotação de um campo vetorial contínuo, sobre uma curva fechada e suave por partes, muda de sinal com uma transformação de reflexão $(x, y) \rightarrow (-x, y)$ ou $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ do campo de vetores.*

Demonstração: Sejam $X = (X_1, X_2)$ um campo vetorial contínuo em \mathbb{R}^2 e \mathcal{L} uma curva fechada e suave por partes. Defina o campo $Y = (-X_1, X_2)$ e as aplicações $T_X, T_Y : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dadas por

$$T_X(x, y) = \frac{(X_1(x, y), X_2(x, y))}{\|(X_1(x, y), X_2(x, y))\|}, \quad T_Y(x, y) = \frac{(-X_1(x, y), X_2(x, y))}{\|(-X_1(x, y), X_2(x, y))\|}, \quad (x, y) \in \mathcal{L}.$$

Considere p um ponto sobre a curva \mathcal{L} , então o vetor $T_Y(p) \in \mathbb{S}^1$ é uma reflexão sobre o eixo y do vetor $T_X(p)$. Quando o ponto p percorre uma volta completa sobre a curva \mathcal{L} , no sentido anti-horário, temos que $T_X(p)$ e $T_Y(p)$ percorrerão um mesmo número inteiro de voltas em \mathbb{S}^1 , porém em sentido contrário. Isto implica que grau da aplicação T_X é igual ao grau da aplicação T_Y multiplicado por -1 . Portanto,

$$\rho((X_1, X_2), \mathcal{L}) = -\rho((-X_1, X_2), \mathcal{L}),$$

demonstrando o resultado. O caso $Z = (X_1, -X_2)$ é análogo. ■

Observe que a imagem da aplicação T pode ser vista como um caminho fechado em \mathbb{S}^1 , definida no intervalo $[t_1, t_2]$. Uma **função ângulo** para o caminho T é uma função $\hat{a} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a igualdade $T(t) = e^{i\hat{a}(t)}$, para $t \in [t_1, t_2]$. Tal função é determinada no seguinte sentido: se \hat{b} é outra função ângulo para o caminho T então existe um inteiro n tal que $\hat{a}(t) = \hat{b}(t) + 2n\pi$, para todo $t \in [t_1, t_2]$.

Como T é um caminho fechado, temos que $T(t_1) = T(t_2)$. Então,

$$e^{i\hat{a}(t_1)} = T(t_1) = T(t_2) = e^{i\hat{a}(t_2)},$$

isto implica que $\hat{a}(t_2) - \hat{a}(t_1)$ é um múltiplo inteiro de 2π e não depende da escolha da função ângulo. O número de voltas que o caminho T dá em volta da origem, ou seja, o grau da aplicação T , é o número inteiro $\frac{\hat{a}(t_2) - \hat{a}(t_1)}{2\pi}$. Segue, portanto que

$$\rho(X, \mathcal{L}) = \frac{\hat{a}(t_2) - \hat{a}(t_1)}{2\pi}. \quad (2.1)$$

Esta igualdade nos auxiliará na demonstração do seguinte resultado:

Proposição 2.2.2. *Seja $X = (X_1, X_2)$ um campo vetorial de classe C^1 . Então,*

$$\rho(X, \mathcal{L}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{L}} d \arctan \left(\frac{X_2}{X_1} \right).$$

Demonstração: Seja $\theta : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ângulo para T . Pela definição da aplicação T , podemos escrever $T(t) = (x(t), y(t))$, em que

$$x(t) = \frac{X_1(t)}{\sqrt{X_1^2(t) + X_2^2(t)}} \quad \text{e} \quad y(t) = \frac{X_2(t)}{\sqrt{X_1^2(t) + X_2^2(t)}}, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Como o campo X não se anula sobre a curva \mathcal{L} , segue que $X_1^2(t) + X_2^2(t) \neq 0$, para todo $t \in [t_1, t_2]$. Isto mostra que as funções x, y estão bem definidas e são de classe C^1 , pois X_1, X_2 também são.

Escrevendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, em que $r^2 = x^2 + y^2$, obtemos, as seguintes relações, ao derivar x e y em função de t :

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos \theta - r \theta' \sin \theta, \\ y' &= r' \sin \theta + r \theta' \cos \theta \end{aligned}$$

Logo, utilizando a construção acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{L}} d \arctan \left(\frac{X_2}{X_1} \right) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{L}} d \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} \theta'(t) dt \\ &= \frac{\theta(t_2) - \theta(t_1)}{2\pi}, \end{aligned}$$

e o resultado segue por (2.1). ■

A seguir, enunciaremos algumas proposições a respeito do número de rotação do campo X sobre ∂D , em que D é a região que será descrita no parágrafo seguinte. Tais proposições serão muito úteis na seção seguinte para demonstrarmos propriedades interessantes à respeito do índice de um ponto de equilíbrio do campo vetorial X .

Definição 2.2.1. *Uma região limitada $A \subset \mathbb{R}^n$ é **simplesmente conexa** quando A for*

conexo por caminhos e o grupo fundamental de A é o trivial. Uma região limitada que não é simplesmente conexa é chamada **multiplamente conexa**.

Consideremos $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região fechada simplesmente conexa ou multiplamente conexa tal que X não tenha pontos de equilíbrio em ∂D e ∂D é composta por número finito n de curvas de Jordan de classe C^1 ($\partial D = \bigcup_{i=1}^n \partial D_i$). A orientação positiva de ∂D_i é definida de modo que em cada ponto de ∂D_i os vetores tangente e normais à esta curva formam uma base positiva para \mathbb{R}^2 e o vetor normal aponte sempre para dentro da região D . Veja a ilustração na Figura 2.6. Desta maneira, vamos definir o número de rotação do campo vetorial X sobre ∂D como sendo

$$\rho(X, \partial D) = \sum_{i=1}^n \rho(X, \partial D_i). \quad (2.2)$$

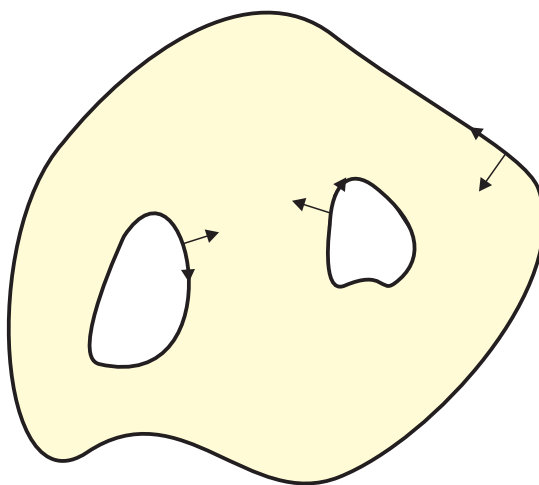


Figura 2.6: Orientação positiva da fronteira em uma região multiplamente conexa.

Proposição 2.2.3. *Sejam $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores contínuo. Se $D = D_1 \cup D_2$ em que D_1, D_2 são conjuntos fechados e conexos de \mathbb{R}^2 tais que $\text{int } D_1 \cap \text{int } D_2 = \emptyset$, então*

$$\rho(X, \partial D) = \rho(X, \partial D_1) + \rho(X, \partial D_2).$$

Demonstração: No caso em que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, o resultado segue diretamente de (2.2). Caso contrário, basta observar que na região de fronteira em comum a orientação dessas curvas são opostas, assim via aplicação T , o número de rotação do campo X sobre ∂D_1 e

∂D_2 anula-se, na fronteira em comum, ao somarmos $\rho(X, \partial D_1) + \rho(X, \partial D_2)$. ■

Proposição 2.2.4. *Sejam D um conjunto compacto de \mathbb{R}^2 e $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo. Se X não possuir pontos de equilíbrio em D , então $\rho(X, \partial D) = 0$.*

Demonstração: Suponhamos que D seja simplesmente conexo. Como D é fechado e limitado e X é um campo contínuo, não contendo pontos de equilíbrio em D , então, existe um aberto U contendo D tal que X não possui equilíbrios em U .

Seja $p \in D$. Pela continuidade do campo X , existe $\delta_p > 0$ tal que $B(p, \delta_p) \subset U$ tal que dado $q \in S(p, \delta_p)$ obtemos

$$\frac{X(q)}{\|X(q)\|} \neq -\frac{X(r)}{\|X(r)\|},$$

para todo $r \in \partial S(p, \delta_p)$. Segue, portanto que $\rho(X, \partial D) = 0$.

Para cada ponto $p \in D$ considere $B(p, \delta_p)$ com a propriedade acima. Logo, a união das bolas $B(p, \delta_p)$ é uma cobertura aberta de D , como D é compacto, existem pontos p_i , tais que a união das bolas $B(p_i, \delta_{p_i})$, $i = 1, \dots, n$ formam uma cobertura aberta para D . Por uniões e interseções dessas bolas, é possível encontrar conjuntos, A_1, \dots, A_s tais que

$$D = \bigcup_{j=1}^s \overline{A_j} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

$$\rho(X, \partial A_j) = 0, \quad j = 1, \dots, s.$$

O resultado segue pela Propriedade 2.2.3. No caso, em que D é multiplamente conexo, basta dividir a região em uma quantidade finita de sub-regiões simplesmente conexas, usar a primeira parte dessa demonstração e em seguida a Proposição 2.2.3. ■

Definição 2.2.2. *Sejam $X, Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ campos vetoriais contínuos e $D \subset \mathbb{R}^2$ compacto tais que X e Y não possuam equilíbrios em ∂D . Uma **deformação contínua** do campo X para o campo Y sobre ∂D é uma família $\{Z_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ de campos vetoriais contínuos em \mathbb{R}^2 que variam continuamente com respeito ao parâmetro λ tais que*

$$Z_0(x, y) = X(x, y) \quad e \quad Z_1(x, y) = Y(x, y), \quad (x, y) \in \partial D.$$

Se para cada $0 \leq \lambda \leq 1$, o campo de vetores Z_λ não tem pontos de equilíbrio em ∂D , dizemos que os campos vetoriais X e Y são **homotópicos** em ∂D .

Proposição 2.2.5. *Sejam $X, Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ campos vetoriais contínuos e $D \subset \mathbb{R}^2$ compacto. Se X, Y são homotópicos sobre ∂D , então $\rho(X, \partial D) = \rho(Y, \partial D)$.*

Demonstração: Seja Z_λ a homotopia entre os campos de vetores X e Y sobre ∂D . Como o número de rotação de um campo vetorial contínuo sobre ∂D é um inteiro e Z_λ varia continuamente com relação à λ , o número de rotação permanece constante durante a homotopia. Portanto,

$$\rho(X, \partial D) = \rho(Z_0, \partial D) = \rho(Z_1, \partial D) = \rho(Y, \partial D),$$

concluindo a prova. ■

A seguir, apresentaremos uma consequência importante da Proposição 2.2.5.

Proposição 2.2.6. *Sejam $X, Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ campos vetoriais contínuos e $D \subset \mathbb{R}^2$ compacto. Se X, Y não possuem equilíbrios sobre ∂D e são tais que*

$$\frac{X(x, y)}{\|X(x, y)\|} \neq -\frac{Y(x, y)}{\|Y(x, y)\|}, \quad (x, y) \in \partial D,$$

então $\rho(X, \partial D) = \rho(Y, \partial D)$.

Demonstração: Podemos construir uma deformação contínua entre X e Y em ∂D , dada por

$$Z_\lambda(x, y) = (1 - \lambda)X(x, y) + \lambda Y(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A família $\{Z_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$, construída acima, é mais do que uma deformação contínua é uma homotopia ente X e Y na fronteira de D . De fato, suponha que existam $0 < \lambda < 1$ e $(x, y) \in \partial D$ tais que $0 = Z_\lambda(x, y) = (1 - \lambda)X(x, y) + \lambda Y(x, y)$. Isto implica que

$$\frac{X(x, y)}{\|X(x, y)\|} = \frac{(1 - \lambda)X(x, y)}{(1 - \lambda)\|X(x, y)\|} = \frac{-\lambda Y(x, y)}{\lambda\|Y(x, y)\|} = -\frac{Y(x, y)}{\|Y(x, y)\|},$$

qual é uma contradição. Nos casos, $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ o campo Z_λ é os campos X e Y , respectivamente, e por hipótese não possuem equilíbrios na fronteira de D . Portanto, utilizando a Proposição 2.2.5, o resultado segue. ■

2.3 O índice de um ponto de equilíbrio

Seja $X = (X_1, X_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo com um equilíbrio isolado no ponto $M_0 = (x_0, y_0)$. Então existe $r > 0$ tal que o campo X não tem outros pontos de equilíbrios, a não ser M_0 , no fecho do conjunto $B(M_0, r)$. Consideremos $0 < \delta_1 < \delta_2 < r$ quaisquer e os conjuntos $B(M_0, \delta_1)$ e $B(M_0, \delta_2)$. Então, utilizando a Proposição 2.2.3, temos que

$$\rho(X, \partial B(M_0, \delta_2)) = \rho(X, \partial(B(M_0, \delta_2) \setminus B(M_0, \delta_1))) + \rho(X, \partial B(M_0, \delta_1)).$$

Como o campo X não possui pontos de equilíbrios na região $B(M_0, \delta_2) \setminus B(M_0, \delta_1)$, segue pela Propriedade 2.2.4 que $\rho(X, \partial(B(M_0, \delta_2) \setminus B(M_0, \delta_1))) = 0$. Portanto,

$$\rho(X, \partial B(M_0, \delta_2)) = \rho(X, \partial B(M_0, \delta_1)).$$

Isto nos mostra que o número de rotação do campo X , sobre a circunferência $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \delta^2$, é independente da escolha de δ , $0 < \delta < r$.

Definição 2.3.1. *Seja $X = (X_1, X_2)$ um campo de vetores de classe C^1 definido no plano \mathbb{R}^2 com um ponto de equilíbrio isolado em $M_0 \in \mathbb{R}^2$. Então, existe $r > 0$ tal que, para todo $0 < \delta < r$, o número de rotação $\rho(X, \partial B(M_0, \delta))$ é constante. Este inteiro, $\rho(X, \partial B(M_0, \delta))$, será chamado **índice** do equilíbrio M_0 do campo X e o denotaremos por $i_X(M_0)$ ou $i_{(X_1, X_2)}(M_0)$.*

Enunciaremos, a seguir, alguns resultados interessantes sobre o índice do equilíbrio $M_0 = (x_0, y_0)$ do campo vetorial X . Um resultado interessante é o Teorema de Poincaré-Bendixson, a demonstração que iremos apresentar para este resultado utilizando a teoria de índice é bem mais simples do que a utilizada usualmente em livros de equações diferenciais.

Proposição 2.3.1. *Sejam $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 e $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região limitada simplesmente ou multiplamente conexa com fronteira composta por um número finito de curvas de Jordan de classe C^1 . Se no interior de D existem uma quantidade finita de pontos de equilíbrio, digamos M_1, \dots, M_n e sobre a fronteira ∂D não*

há pontos de equilíbrios de X , então

$$\rho(X, \partial D) = \sum_{j=1}^n \mathbf{i}_X(M_j).$$

Demonstração: Como cada equilíbrio M_j do campo X na região D é isolado, existe δ_j tal que a bola $B_j := B(M_j, \delta_j) \subset D$ não contém outros pontos de equilíbrio de X , a não ser o próprio M_j e $B_j \cap B_k = \emptyset$, para $j \neq k$. Logo, pelas Proposições 2.2.3 e 2.2.4 e pela definição de índice, obtemos

$$\begin{aligned} \rho(X, \partial D) &= \rho\left(X, \partial\left(D \setminus \bigcup_{j=1}^n B_j\right)\right) + \rho\left(X, \partial\left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \rho(X, \partial B_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbf{i}_X(M_j). \end{aligned}$$

Portanto, o resultado está demonstrado. ■

Vamos supor que o campo vetorial X tenha uma órbita fechada, digamos γ . Este fato, nos implica que, em cada ponto de γ o campo vetorial é tangente a esta órbita. Logo o número de rotação do campo X sobre a órbita fechada é 1. Então, definindo como U a região aberta no interior de γ e supondo que em U há uma quantidade finita de pontos de equilíbrio, digamos M_1, \dots, M_n segue diretamente da Proposição 2.3.1 que

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{i}_X(M_j) = 1.$$

Como consequência, o índice de um equilíbrio do tipo centro é 1. Além disso, este resultado nos mostra que em U sempre há um equilíbrio do campo, pois caso não haja, teríamos pela Proposição 2.2.4 que o número de rotação sobre a órbita fechada seria zero, o que é um absurdo. Portanto, demonstramos o seguinte resultado:

Teorema 2.3.1 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Se X tem uma órbita fechada γ , então em U há pelo menos um ponto de equilíbrio do campo X , em que, U é a região aberta limitada por γ .* ■

Exemplo 2.3.1. Considere o campo de vetores $X_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $X_1(x, y) = (-y, x)$. Este campo tem a origem O como o único ponto de equilíbrio e este é do tipo centro. Portanto, $i_{X_1}(O) = 1$.

Nos resultados a seguir, será útil definirmos a função $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ 1, & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

conhecida como a função **sinial**. As propriedades que serão enunciadas a seguir, irão nos auxiliar no cálculo do índice de equilíbrio de alguns campos vetoriais planares. Consideremos $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 e M_0 um equilíbrio isolado de X .

Propriedade 2.3.1. $i_{(aX_1, X_2)}(M_0) = \text{sgn}(a)i_{(X_1, X_2)}(M_0)$, para todo $a \neq 0$.

Demonstração: Defina o campo de vetores $Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $Y = (|a|X_1, X_2)$. Observando que $a \neq 0$ obtemos que M_0 também é um ponto de equilíbrio isolado para Y . Logo, existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que M_0 é o único ponto de equilíbrio para os campos X e Y no fecho do conjunto $B(M_0, \delta)$. Sobre $S(M_0, \delta)$ vamos construir uma deformação contínua entre os campos X e Y dada por

$$Z_\lambda(x, y) = ((1 - \lambda(1 - |a|))X_1, X_2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Uma conta simples mostra que a deformação Z_λ não possui pontos de equilíbrio sobre $S(M_0, \delta)$ para todo $0 \leq \lambda \leq 1$. Isto implica que os campos X e Y são homotópicos sobre $S(M_0, \delta)$. Pela Proposição 2.2.5 obtemos

$$i_{(X_1, X_2)}(M_0) = i_{(|a|X_1, X_2)}(M_0).$$

A demonstração estará concluída, utilizando a Proposição 2.2.1. ■

Propriedade 2.3.2. $i_{(X_1, X_2)}(M_0) = -i_{(X_2, X_1)}(M_0)$.

Demonstração: Considere o campo vetorial $Y = (-X_2, X_1)$ definido em \mathbb{R}^2 . O ponto M_0 também é um equilíbrio isolado para Y . Então, existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno

tal que M_0 é o único ponto de equilíbrio para os campos X e Y no fecho do conjunto $B(0, \delta)$. Suponhamos que exista um ponto $(x, y) \in S(M_0, \delta)$ tal que

$$\frac{(X_1(x, y), X_2(x, y))}{\|(X_1(x, y), X_2(x, y))\|} = \frac{(-X_2(x, y), X_1(x, y))}{\|(-X_2(x, y), X_1(x, y))\|}.$$

Isto nos implica que $X_1(x, y) = -X_2(x, y)$ e $X_2(x, y) = X_1(x, y)$ e assim obtemos que $X_1(x, y) = X_2(x, y) = 0$, isto é, (x, y) é um equilíbrio para os campos X e Y , o que um absurdo. Logo, pela Proposição 2.2.6, segue que

$$\mathbf{i}_{(X_1, X_2)}(M_0) = \mathbf{i}_{(-X_2, X_1)}(M_0).$$

O resultado segue utilizando a Propriedade 2.3.1. ■

Propriedade 2.3.3. $\mathbf{i}_{(X_1, X_2)}(M_0) = \mathbf{i}_{(X_1+X_2, X_2)}(M_0)$.

Demonstração: Como M_0 é um equilíbrio isolado do campo $X = (X_1, X_2)$ temos que M_0 também é um equilíbrio isolado do campo $Y = (X_1 + X_2, X_2)$. Assim, existe $r > 0$ tais que X e Y não possuem outros pontos de equilíbrio no fecho do conjunto $B(M_0, r)$, a não ser M_0 . Sobre $S(M_0, r)$ considere a deformação contínua de X para Y dada por:

$$Z_\lambda(x, y) = (X_1(x, y) + \lambda X_2(x, y), X_2(x, y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Observe que esta deformação é uma homotopia. Logo, via Propriedade 2.3.1 o resultado é válido. ■

Vamos calcular o índice de alguns campos vetoriais lineares planares, utilizando as propriedades mostradas acima.

Exemplo 2.3.2. *Considere o campo de vetores $X_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $X_2(x, y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y)$, para $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Este campo tem a origem O como único ponto de equilíbrio. Observe que se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, O é do tipo sela, e se $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, a origem é do tipo nó. Vamos*

calcular o índice desse campo utilizando as propriedades acima e o Exemplo 2.3.1.

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_{X_2}(O) &= \mathbf{i}_{(\lambda_1 x, \lambda_2 y)}(O) = \operatorname{sgn}(\lambda_1) \mathbf{i}_{(x, \lambda_2 y)}(O) \\
&= -\operatorname{sgn}(\lambda_1) \mathbf{i}_{(\lambda_2 y, x)}(O) \\
&= -\operatorname{sgn}(\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{i}_{(y, x)}(O) \\
&= \operatorname{sgn}(\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{i}_{(-y, x)}(O) \\
&= \operatorname{sgn}(\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{i}_{X_1}(O) = \operatorname{sgn}(\lambda_1 \lambda_2).
\end{aligned}$$

Logo, no caso em que O é uma sela, o índice é igual à -1 e no caso em que O é um nó, o índice é igual à 1 .

Exemplo 2.3.3. Seja $X_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial dado por $X_3(x, y) = (\mu_1 x - \mu_2 y, \mu_2 x + \mu_1 y)$, para $\mu_1 \mu_2 \neq 0$. Observe que a origem O é o único ponto de equilíbrio deste campo e é do tipo foco. Como no exemplo anterior, vamos calcular o índice desse campo utilizando as propriedades de índice e o Exemplo 2.3.1.

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_{X_3}(O) &= \mathbf{i}_{(\mu_1 x - \mu_2 y, \mu_2 x + \mu_1 y)}(O) \\
&= \mathbf{i}_{\left(\frac{\mu_1^2 x - \mu_1 \mu_2 y}{\mu_1}, \frac{\mu_2^2 x + \mu_1 \mu_2 y}{\mu_2}\right)}(O) \\
&= \operatorname{sgn}(\mu_1 \mu_2) \mathbf{i}_{(\mu_1^2 x - \mu_1 \mu_2 y, \mu_2^2 x + \mu_1 \mu_2 y)}(O) \\
&= -\operatorname{sgn}(\mu_1 \mu_2) \mathbf{i}_{(-\mu_1^2 x - \mu_2^2 x + \mu_2^2 x + \mu_1 \mu_2 y, \mu_2^2 x + \mu_1 \mu_2 y)}(O) \\
&= \operatorname{sgn}(\mu_1 \mu_2) \mathbf{i}_{(x, \mu_2^2 x + \mu_1 \mu_2 y)}(O) \\
&= -\operatorname{sgn}(\mu_1 \mu_2) \mathbf{i}_{(\mu_2^2 x + \mu_1 \mu_2 y, \mu_2^2 x)}(O) \\
&= -\operatorname{sgn}(\mu_1 \mu_2) \mathbf{i}_{(\mu_1 \mu_2 y, \mu_2^2 x)}(O) \\
&= \mathbf{i}_{(-y, \mu_2^2 x)}(O) = \mathbf{i}_{(-y, x)}(O) = \mathbf{i}_{X_1}(O) = 1.
\end{aligned}$$

Portanto, o índice deste foco é 1 .

Na Seção 2.6 mostraremos algumas técnicas para o cálculo do índice de pontos equilíbrio isolados em campos vetoriais analíticos. Para tal, utilizaremos o índice de Cauchy, o qual iremos trabalhar na Seção 2.4.

2.4 Índice de Cauchy

Sejam $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinômios reais dados por

$$p(t) = \sum_{i=1}^{k-1} a_i t^{k-i}, \quad q(t) = \sum_{j=1}^{l-1} b_j t^{l-j}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

tais que a_0 e b_0 são não nulos. Dizemos que t_0 é um ponto **singular de mudança de sinal** para a função racional q/p quando umas das seguintes situações acontecem:

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{q(t)}{p(t)} = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{q(t)}{p(t)} = \infty,$$

ou

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{q(t)}{p(t)} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{q(t)}{p(t)} = -\infty.$$

Sejam t_i , para $i = 1, \dots, \eta_1$ e s_j , para $j = 1, \dots, \eta_2$ os pontos singulares de mudança de sinal de q/p tais que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_i^-} \frac{q(t)}{p(t)} = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_i^+} \frac{q(t)}{p(t)} = \infty, \quad i = 1, \dots, \eta_1; \\ \lim_{t \rightarrow s_j^-} \frac{q(t)}{p(t)} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow s_j^+} \frac{q(t)}{p(t)} = -\infty, \quad j = 1, \dots, \eta_2. \end{aligned}$$

O número inteiro $\eta_1 - \eta_2$ será denominado **índice de Cauchy** para a função q/p e será denotado por $N(p, q)$.

Suponhamos que os polinômios p e q definidos acima não tenham zeros reais em comum. Uma condição necessária e suficiente para t_0 ser um ponto singular de mudança de sinal para a função q/p é t_0 ser um zero simples ou múltiplo ímpar do polinômio p . De fato, suponha que t_0 é um zero de multiplicidade ímpar de p , como t_0 não é um zero para o polinômio q , obtemos que $q(t_0) < 0$ ou $q(t_0) > 0$. Suponhamos que $q(t_0) < 0$, então

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{q(t)}{p(t)} = \pm\infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{q(t)}{p(t)} = \mp\infty.$$

Logo, t_0 é um ponto singular de mudança de sinal para a função q/p , o outro caso é

análogo. Reciprocamente, suponha que t_0 seja um ponto singular de mudança de sinal para a função q/p e não seja um zero de multiplicidade ímpar para o polinômio p . Então, t_0 não é um zero ou é um zero de multiplicidade par de p . Mas em qualquer um desses casos t_0 não será um ponto singular de mudança de sinal para q/p . Mas, isto é um absurdo e, portanto, o resultado segue.

A seguir, enunciaremos alguns resultados sobre o índice de Cauchy. Tais resultados serão úteis nas seções seguintes, em que buscaremos encontrar uma fórmula para o índice de equilíbrio de certos campos vetoriais utilizando o índice de Cauchy.

Proposição 2.4.1. *Sejam $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinômios de graus k e l , respectivamente. Se p e q não possuem zeros reais em comum, então $N(p, q) - k$ é um inteiro par.*

Demonstração: Suponhamos que k seja ímpar. Considere d como sendo a quantidade de zeros de multiplicidade ímpar do polinômio p . Como k é ímpar, obtemos que d é ímpar. Como p e q não tem zeros em comum, obtemos pela afirmação acima, que a função q/p possui d pontos singulares de mudança de sinal. Mas, $d = \eta_1 + \eta_2$ é ímpar, logo $N(p, q) = d - 2\eta_2$ é um número ímpar. De forma análoga, pode se mostrar este resultado para k sendo um inteiro par. ■

Proposição 2.4.2. *Sejam $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinômios de graus k e l , respectivamente. Sejam a_0, b_0 os coeficientes dos termos de maior grau de p e q , respectivamente. Então,*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arctan \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_0 b_0) - N(p, q), & \text{se } l - k > 0 \text{ inteiro ímpar.} \\ -N(p, q), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração: Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ os pontos singulares de mudança de sinal da função q/p . Defina

$$\varepsilon_i^- = \begin{cases} -1, & \text{se } \lim_{t \rightarrow \lambda_i^-} \frac{q(t)}{p(t)} = -\infty \\ 1, & \text{se } \lim_{t \rightarrow \lambda_i^-} \frac{q(t)}{p(t)} = \infty, \end{cases}$$

$$\varepsilon_i^+ = \begin{cases} -1, & \text{se } \lim_{t \rightarrow \lambda_i^+} \frac{q(t)}{p(t)} = -\infty \\ 1, & \text{se } \lim_{t \rightarrow \lambda_i^+} \frac{q(t)}{p(t)} = \infty, \end{cases}$$

$$\varepsilon^- = \begin{cases} -1, & \text{se } \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{q(t)}{p(t)} = -\infty \\ 1, & \text{se } \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{q(t)}{p(t)} = \infty, \end{cases}$$

$$\varepsilon^+ = \begin{cases} -1, & \text{se } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{q(t)}{p(t)} = -\infty \\ 1, & \text{se } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{q(t)}{p(t)} = \infty. \end{cases}$$

Quando t varia entre λ_i e λ_{i+1} , a tangente $\tan(q(t)/p(t))$ varia entre $(\varepsilon_i^+ \pi/2, \varepsilon_{i+1}^- \pi/2)$. Este fato implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} d \arctan \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \varepsilon_{i+1}^- - \frac{\pi}{2} \varepsilon_i^+ \right) \\ &= \frac{\varepsilon_{i+1}^- - \varepsilon_i^+}{2}, \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_s} d \arctan \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s (\varepsilon_{i+1}^- - \varepsilon_i^+).$$

Caso, $l - k \leq 0$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{q(t)}{p(t)}$$

é finito. Definindo $\theta = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \arctan(q(t)/p(t))$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arctan \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right) &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\lambda_1} + \int_{\lambda_s}^{\infty} \right) d \arctan \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s (\varepsilon_{i+1}^- - \varepsilon_i^+) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \varepsilon_1^- - \theta + \theta - \frac{\pi}{2} \varepsilon_s^+ \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s (\varepsilon_{i+1}^- - \varepsilon_i^+) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_1^- - \varepsilon_s^+) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s (\varepsilon_{i+1}^- - \varepsilon_i^+) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \varepsilon_i^- - \varepsilon_i^+ = -N(q, p). \end{aligned}$$

Quando $l - k$ é um inteiro positivo par, então $\varepsilon^- = \varepsilon^+$ e o resultado segue de forma análoga ao caso anterior somando as integrais. Quando $l - k$ é um inteiro ímpar positivo, então

$\varepsilon^- = -\operatorname{sgn}(a_0b_0)$ e $\varepsilon^+ = \operatorname{sgn}(a_0b_0)$. Neste caso, obtemos que

$$\operatorname{sgn}(a_0b_0) = \frac{1}{2}(\varepsilon^+ - \varepsilon^-).$$

Segue que

$$\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\lambda_1} + \int_{\lambda_s}^{\infty} \right) d \arctan \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right) = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^- - \varepsilon_s^+) + \operatorname{sgn}(a_0b_0).$$

E o resultado segue somando as integrais. ■

Proposição 2.4.3. *Sejam $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinômios de graus k e l , respectivamente. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) $N(p, q) + N(q, p) = \frac{1 - (-1)^{l-k}}{2} \operatorname{sgn}(a_0b_0);$

ii) $|N(p, q)| \leq \min\{k, l + 1\}.$

Demonstração: i) Da Proposição 2.4.2 obtemos que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arctan \left(\frac{p(t)}{q(t)} \right) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_0b_0) - N(q, p), & \text{se } k - l > 0 \text{ inteiro ímpar.} \\ -N(q, p), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(d \arctan \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right) + d \arctan \left(\frac{p(t)}{q(t)} \right) \right) = \\ = & \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_0b_0) - N(q, p) - N(p, q), & \text{se } l - k > 0 \text{ inteiro ímpar;} \\ -N(q, p) - N(p, q), & \text{se } l - k > 0 \text{ inteiro par;} \\ -N(q, p) - N(p, q), & \text{se } l - k < 0 \text{ inteiro par;} \\ \operatorname{sgn}(a_0b_0) - N(q, p) - N(p, q), & \text{se } l - k < 0 \text{ inteiro ímpar.} \end{cases} \\ = & \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_0b_0) - N(q, p) - N(p, q), & \text{se } l - k \text{ inteiro ímpar;} \\ -N(q, p) - N(p, q), & \text{se } l - k \text{ inteiro par;} \end{cases} \\ = & \operatorname{sgn}((1 - (-1)^{l-k})a_0b_0) - N(p, q) - N(q, p). \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que o lado esquerdo da equação acima é zero. Por propriedades

trigonométricas, obtemos que

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\pi/2, & x < 0 \\ \pi/2, & x > 0 \end{cases},$$

isto implica que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(d \arctan\left(\frac{q(t)}{p(t)}\right) + d \arctan\left(\frac{p(t)}{q(t)}\right) \right) = 0,$$

e o resultado segue.

ii) Por um lado, os pontos singulares de mudança de sinal da função p/q são, necessariamente, zeros do polinômio p . Isto implica que $|N(p, q)| = |\eta_1 - \eta_2| \leq |\eta_1 + \eta_2| \leq k$. Por outro lado, usando o item (i) desta proposição, obtemos

$$\begin{aligned} |N(p, q)| &\leq |N(q, p)| + |\operatorname{sgn}(a_0 b_0)| \\ &\leq l + 1. \end{aligned}$$

Portanto, $|N(p, q)| = \min\{k, l + 1\}$. ■

Proposição 2.4.4. *Sejam $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinômios de graus k e l , respectivamente. Suponha que os polinômios p e q não possuem zeros reais em comum e todos os zeros de p sejam simples, digamos, t_1, \dots, t_s . Então,*

$$N(p, q) = \sum_{i=1}^s \operatorname{sgn}(p'(t_i)q(t_i)).$$

Demonstração: Por hipótese, cada t_i é um ponto singular de mudança de sinal para q/p . Defina $\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+$ como no Teorema 2.4.2. Vamos provar que

$$\operatorname{sgn}(p'(t_i)q(t_i)) = \frac{1}{2}(\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^-), \quad i = 1, \dots, s.$$

Considere t_i de forma que

$$\lim_{t \rightarrow t_i^-} \frac{q(t)}{p(t)} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_i^+} \frac{q(t)}{p(t)} = \infty.$$

Neste caso, $\varepsilon_i^- = -1$ e $\varepsilon_i^+ = 1$, ou seja, temos que mostrar que $\text{sgn}(p'(t_i)q(t_i)) = 1$, ou equivalentemente, $p'(t_i)q(t_i) > 0$. Suponha, por absurdo, que $p'(t_i) > 0$ e $q(t_i) < 0$. Então, existe $\delta > 0$, suficientemente pequeno tal que p é crescente e q não tenha zeros em $(t_i - \delta, t_i + \delta)$. Além disso, $q(t)/p(t) < 0$ em $(t_i - \delta, t_i)$ e $q(t)/p(t) > 0$ em $(t_i, t_i + \delta)$. Então, no intervalo $(t_i - \delta, t_i)$ obtemos que $q(t) < 0$, implicando que $p(t) > 0$, neste intervalo. Por outro lado, em $(t_i, t_i + \delta)$ obtemos que $q(t) < 0$ e isto implica que $p(t) < 0$, neste intervalo. Resumindo, mostramos que $p(t)$ é decrescente em $(t_i - \delta, t_i + \delta)$, um absurdo. De forma análoga, obtemos contradições nos demais casos, validando o resultado. ■

Vamos realizar uma divisão de polinômios da seguinte forma:

$$\begin{aligned} q &= pw_0 - u_1 \\ p &= u_1w_1 - u_2 \\ u_1 &= u_2w_2 - u_3 \\ &\vdots \\ u_j &= u_{j+1}w_{j+1} - u_{j+2}, \quad j = 1, \dots, r \\ &\vdots \\ u_{r+1} &= 0. \end{aligned}$$

Observe que esta construção é finita, ou seja, existe um inteiro positivo r tal que $u_{r+1} = 0$. Nesta construção, considere $\alpha_j t^{m_j}$ como sendo o termo líder do polinômio w_j , para todo $j = 1, \dots, r$.

Proposição 2.4.5. *Considere a divisão de polinômios acima, então*

$$N(p, q) = \sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{m_j} - 1}{2} \text{sgn}(\alpha_j).$$

Demonstração: Por construção, obtemos que

$$\frac{q(t)}{p(t)} = w_0(t) - \frac{u_1(t)}{p(t)},$$

implicando que $N(p, q) = -N(p, u_1)$. Observe que o quociente p/u_1 tem como termo líder

$\alpha_1 t^{m_1}$. Pela Proposição 2.4.3, obtemos que

$$N(p, u_1) + N(u_1, p) = \frac{1 - (-1)^{m_1}}{2} \operatorname{sgn} \alpha_1.$$

Logo, obtemos

$$N(p, q) - N(u_1, p) = \frac{(-1)^{m_1} - 1}{2} \operatorname{sgn} \alpha_1.$$

Seguindo, fazendo o quociente do polinômio p pelo polinômio u_1 , obtemos

$$\frac{p(t)}{u_1(t)} = w_1(t) - \frac{u_2(t)}{u_1(t)},$$

implicando que $N(u_1, p) = -N(u_1, u_2)$. Como o quociente u_1/u_2 tem como termo líder $\alpha_2 t^{m_2}$, segue pela Proposição 2.4.3 que

$$N(u_1, u_2) + N(u_2, u_1) = \frac{1 - (-1)^{m_2}}{2} \operatorname{sgn} \alpha_2,$$

consequentemente,

$$N(u_1, p) - N(u_2, u_1) = \frac{(-1)^{m_2} - 1}{2} \operatorname{sgn} \alpha_2.$$

Por um processo de indução, obtemos

$$N(u_j, u_{j-1}) - N(u_{j+1}, u_j) = \frac{(-1)^{m_{j+1}} - 1}{2} \operatorname{sgn} \alpha_{m_{j+1}}, \quad j = 2, 3, \dots, r-1.$$

Mas, por construção da divisão de polinômios acima, temos que $u_{r-1} = u_r(t)w_r$. Então, o quociente $u_{r-1}/u_r = w_r$, implicando que $N(u_r, u_{r-1}) = 0$. Portanto, segue que

$$\begin{aligned} N(p, q) &= \frac{(-1)^{m_1} - 1}{2} \operatorname{sgn} \alpha_1 + N(u_1, p) \\ &= \frac{(-1)^{m_1} - 1}{2} \operatorname{sgn} \alpha_1 + \frac{(-1)^{m_2} - 1}{2} \operatorname{sgn} \alpha_2 + N(u_2, u_1) \\ &\vdots \\ &= \sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{m_j} - 1}{2} \operatorname{sgn} \alpha_j + N(u_r, u_{r-1}) \\ &= \sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{m_j} - 1}{2} \operatorname{sgn} \alpha_j. \end{aligned}$$

Como desejávamos, o resultado segue. ■

2.5 Cálculo do índice em campos vetoriais analíticos

Dizemos que o campo de vetores $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\Phi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ é **analítico** quando f, g forem funções analíticas nas variáveis x, y . Seja $\Phi = (f, g)$ um campo vetorial analítico e $M_0 = (x_0, y_0)$ um ponto de equilíbrio isolado de Φ . Expandindo f, g em série de Taylor ao redor do ponto M_0 obtemos:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= P_m(x - x_0, y - y_0) + \tilde{f}(x - x_0, y - y_0) \\ g(x, y) &= Q_n(x - x_0, y - y_0) + \tilde{g}(x - x_0, y - y_0), \end{aligned}$$

em que P_m, Q_n são os termos de ordem m, n respectivamente, na série de Taylor de f e g , e m, n são determinados como os menores graus com coeficientes não nulos na expansão para f e g . Em outras palavras, P_m é o menor polinômio homogêneo com coeficientes não nulos, na expansão em série de Taylor de f no ponto M_0 e Q_n é o menor polinômio homogêneo com coeficientes não nulos, na expansão em série de Taylor de g no ponto M_0 . Assim, \tilde{f} e \tilde{g} são os termos de ordem superior, nas expansões de f e g .

O campo vetorial $\mathcal{V}(x, y) = (P_m(x - x_0, y - y_0), Q_n(x - x_0, y - y_0))$ é chamado **campo de vetores de equações principais** para o campo Φ referente ao equilíbrio $M_0 = (x_0, y_0)$. Observe que a origem O é um ponto de equilíbrio do campo \mathcal{V} relacionado com o equilíbrio M_0 do campo Φ .

Teorema 2.5.1. *Seja $\Phi = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial analítico e $M_0 = (x_0, y_0)$ um equilíbrio de Φ . Se a origem é um equilíbrio isolado para o campo vetorial \mathcal{V} de equações principais do campo Φ relacionado com M_0 , então M_0 é um equilíbrio isolado para o campo Φ . Além disso,*

$$i_{\Phi}(M_0) = i_{(P_m, Q_n)}(O).$$

Demonstração: Vamos construir uma deformação contínua do campo \mathcal{V} para o campo Φ definida por $Z_{\lambda}(x, y) = (f_{\lambda}(x, y), g_{\lambda}(x, y))$, em que

$$\begin{aligned} f_\lambda(x, y) &= P_m(x - x_0, y - y_0) + \lambda \tilde{f}(x - x_0, y - y_0) \\ g_\lambda(x, y) &= Q_n(x - x_0, y - y_0) + \lambda \tilde{g}(x - x_0, y - y_0), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que existe $r > 0$ tal que a deformação Z_λ não se anule no disco fechado $B[M_0, r]$, exceto em M_0 . Vamos provar este fato, por contradição. Suponhamos que existam uma sequência $\{(x_k, y_k)\}$ tendendo para a origem e uma sequência $\{\lambda_k\}$, com $0 \leq \lambda \leq 1$, em que

$$Z_{\lambda_k}(x_k, y_k) = 0. \quad (2.3)$$

Escrevendo,

$$\begin{aligned} x_k - x_0 &= \sigma_k \cos \theta_k \\ y_k - y_0 &= \sigma_k \sin \theta_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

obtemos $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = 0$. Substituindo, essa escrita na equação (2.3) encontramos

$$\begin{aligned} 0 = f_{\lambda_k}(x_k, y_k) &= P_m(x_k - x_0, y_k - y_0) + \lambda_k \tilde{f}(x_k - x_0, y_k - y_0) \\ &= P_m(\sigma_k \cos \theta_k, \sigma_k \sin \theta_k) + \lambda_k \tilde{f}(\sigma_k \cos \theta_k, \sigma_k \sin \theta_k) \\ &= \sigma_k^m P_m(\cos \theta_k, \sin \theta_k) + \lambda_k \tilde{f}(\sigma_k \cos \theta_k, \sigma_k \sin \theta_k) \\ &= P_m(\cos \theta_k, \sin \theta_k) + \frac{\lambda_k}{\sigma_k^m} \tilde{f}(\sigma_k \cos \theta_k, \sigma_k \sin \theta_k) \\ 0 = g_{\lambda_k}(x_k, y_k) &= Q_n(\cos \theta_k, \sin \theta_k) + \frac{\lambda_k}{\sigma_k^n} \tilde{g}(\sigma_k \cos \theta_k, \sigma_k \sin \theta_k) \end{aligned}$$

Na sequência $\{(\cos \theta_k, \sin \theta_k)\}$, existe uma subsequência convergente, convergindo para $(\cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta})$ e na sequência $\{\lambda_k\}$, também existe uma subsequência convergente, que converge para $\bar{\lambda}$, em que $0 \leq \bar{\lambda} \leq 1$. Passando o limite, nas equações acima, obtemos

$$P_m(\cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}) = 0 = Q_n(\cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}).$$

Consequentemente, todos os pontos sobre a linha $y/\sin \bar{\theta} = x/\cos \bar{\theta}$ são equilíbrios do campo vetorial \mathcal{V} , contradizendo o fato que O é um equilíbrio isolado de \mathcal{V} . Isto prova que

a deformação contínua Z_λ não se anula em $B[M_0, r]$, exceto em M_0 e é uma homotopia entre os campos vetoriais \mathcal{V} e Φ sobre a curva $S(M_0, r)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{\Phi(x,y)}(M_0) &= \mathbf{i}_{(P_m(x-x_0, y-y_0), Q_n(x-x_0, y-y_0))}(O) \\ &= \mathbf{i}_{(P_m(x,y), Q_n(x,y))}(O). \end{aligned}$$

A última igualdade, da equação acima, é válida, pois o número de rotação de um campo vetorial contínuo é invariante a uma translação de eixos. ■

O Teorema 2.5.1 nos será muito útil, para determinar o índice em campos vetoriais analíticos. Na seção seguinte, veremos como calcular o índice de pontos de equilíbrio isolados de campos vetoriais polinomiais, em especial polinômios homogêneos.

2.6 Cálculo do índice em campos vetoriais polinomiais

Nesta seção, vamos obter informações sobre o índice de um equilíbrio em um campo vetorial polinomial.

Proposição 2.6.1. *Seja $(P_m, Q_n) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial em que P_m e Q_n são polinômios homogêneos de graus m e n , respectivamente. Se a origem O de \mathbb{R}^2 é um equilíbrio isolado de (P_m, Q_n) . Então, P_m e Q_n não tem fatores em comum e $P_m(1, 0)$ e $Q_n(1, 0)$ não podem se anular simultaneamente.*

Demonstração: Como os polinômios P_m e Q_n são homogêneos podemos escrevê-los da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_m(x, y) &= \sum_{i=0}^m a_{m-i} x^i y^{m-i} \\ Q_n(x, y) &= \sum_{j=0}^n b_{n-j} x^j y^{n-j}. \end{aligned}$$

Suponhamos que P_m e Q_n tenham um fator em comum, digamos $x^k y^l$, para $k \geq 0$, $l \geq 0$ e k, l não se anulando simultaneamente. Então,

$$\begin{aligned} P_m(x, y) &= x^k y^l \tilde{P}(x, y) \\ Q_n(x, y) &= x^k y^l \tilde{Q}(x, y), \end{aligned}$$

mostrando que a reta $x = 0$ ou a reta $y = 0$ anulam os polinômios P_m e Q_n . Logo, a origem não é um equilíbrio isolado do campo (P_m, Q_n) , um absurdo. Vamos agora provar a segunda parte desta proposição. Suponha que $P_m(1, 0) = 0 = Q_n(1, 0)$. Segue então que, $a_{0m} = 0 = b_{0n}$. Logo, o termo y é um fator em comum para os polinômios P_m e Q_n , pela primeira parte desta proposição temos um absurdo. ■

Proposição 2.6.2. *Seja $(P_m, Q_n) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial em que P_m e Q_n são polinômios homogêneos de graus m e n respectivamente, e a origem O de \mathbb{R}^2 um ponto de equilíbrio isolado de (P_m, Q_n) . Neste caso, a origem é o único ponto de equilíbrio do campo de vetores (P_m, Q_n) .*

Demonstração: Suponhamos que (c, d) é outro equilíbrio do campo (P_m, Q_n) além da origem. Então, (tc, td) , para $t \in \mathbb{R}$, é um equilíbrio de (P_m, Q_n) . Logo, a origem O não é um equilíbrio isolado de (P_m, Q_n) , um absurdo! ■

Teorema 2.6.1. *Seja $(P_m, Q_n) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial em que P_m e Q_n são polinômios homogêneos de graus m e n respectivamente, e a origem O de \mathbb{R}^2 um ponto de equilíbrio isolado de (P_m, Q_n) . Se a origem O é um equilíbrio isolado do campo (P_m, Q_n) , então*

$$i_{(P_m, Q_n)}(O) = \begin{cases} 0, & \text{se } m + n \text{ é ímpar;} \\ N(P_m(t, 1), Q_n(t, 1)), & \text{se } m + n \text{ é par e } P_m(1, 0) \neq 0; \\ -N(Q_n(t, 1), P_m(t, 1)), & \text{se } m + n \text{ é par e } Q_n(1, 0) \neq 0. \end{cases}$$

Demonstração: O índice do ponto de equilíbrio O é o número de rotação do campo (P_m, Q_n) sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, já que no interior e sobre a circunferência não existem outros pontos de equilíbrios, exceto O . Pela Proposição 2.2.2, temos que

$$\begin{aligned} i_{(P_m, Q_n)}(O) &= \frac{1}{2\pi} \int_{x^2+y^2=1} d \arctan \left(\frac{Q_n(x, y)}{P_m(x, y)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d \arctan \left(\frac{Q_n(\cos \theta, \sen \theta)}{P_m(\cos \theta, \sen \theta)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} \right) d \arctan \left(\frac{Q_n(\cos \theta, \sen \theta)}{P_m(\cos \theta, \sen \theta)} \right), \end{aligned}$$

em que na segunda igualdade da equação acima, realizamos uma mudança de coordenadas, $x = \cos \theta$ e $y = \sen \theta$ com $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Realizando uma mudança de variável na primeira

integral, tomando $\varphi = \theta + \pi$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 d \arctan \left(\frac{Q_n(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)}{P_m(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)} \right) &= \int_0^{\pi} d \arctan \left(\frac{Q_n(\cos \varphi - \pi, \operatorname{sen} \varphi - \pi)}{P_m(\cos \varphi - \pi, \operatorname{sen} \varphi - \pi)} \right) \\ &= \int_0^{\pi} d \arctan \left(\frac{Q_n(-\cos \varphi, -\operatorname{sen} \varphi)}{P_m(-\cos \varphi, -\operatorname{sen} \varphi)} \right). \end{aligned}$$

Caso $m + n$ seja um inteiro ímpar, vamos assumir que m é ímpar e n é par (outro caso é análogo). Como P_m e Q_n são polinômios homogêneos temos que

$$\begin{aligned} P_m(-x, -y) &= -P_m(x, y) \\ Q_n(-x, -y) &= Q_n(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{(P_m, Q_n)}(O) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} d \arctan \left(\frac{Q_n(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)}{P_m(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)} \right) + \int_0^{\pi} d \arctan \left(\frac{Q_n(-\cos \varphi, -\operatorname{sen} \varphi)}{P_m(-\cos \varphi, -\operatorname{sen} \varphi)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} d \arctan \left(\frac{Q_n(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)}{P_m(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)} \right) + \int_0^{\pi} d \arctan \left(-\frac{Q_n(\cos \varphi, \operatorname{sen} \varphi)}{P_m(\cos \varphi, \operatorname{sen} \varphi)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} d \arctan \left(\frac{Q_n(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)}{P_m(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)} \right) - \int_0^{\pi} d \arctan \left(\frac{Q_n(\cos \varphi, \operatorname{sen} \varphi)}{P_m(\cos \varphi, \operatorname{sen} \varphi)} \right) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Caso $m + n$ seja um inteiro par, a primeira integral fica idêntica a segunda integral depois da substituição $\varphi = \theta + \pi$. Por isso,

$$\mathbf{i}_{(P_m, Q_n)}(O) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d \arctan \left(\frac{Q_n(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)}{P_m(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)} \right).$$

Defina o inteiro $b = (m - n)/2$ e a mudança de variável $t = \cos \theta / \operatorname{sen} \theta$. Então, obtemos

$$\begin{aligned} P_m(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) &= \operatorname{sen}^m \theta P_m(t, 1) \\ Q_n(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) &= \operatorname{sen}^n \theta Q_n(t, 1). \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{(P_m, Q_n)}(O) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arctan \left(\frac{\operatorname{sen}^{n-m}(\theta) Q_n(\cos\theta / \operatorname{sen} \theta, 1)}{P_m(\cos\theta / \operatorname{sen} \theta, 1)} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arctan \left((t^2 + 1)^b \frac{Q_n(t, 1)}{P_m(t, 1)} \right). \end{aligned}$$

Se $P_m(1, 0) \neq 0$, grau do polinômio $P_m(t, 1)$ é m . Quando $b > 0$, temos que grau do polinômio $(t^2 + 1)^b Q_n(t, 1)$ é sempre menor ou igual à $2b + n = m - n + n = m$. Segue então que,

$$\text{grau} \left((t^2 + 1)^b Q_n(t, 1) \right) \leq \text{grau} (P_m(t, 1)).$$

Pela Propriedade 2.4.2 obtemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{(P_m, Q_n)}(O) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arctan \left((t^2 + 1)^b \frac{Q_n(t, 1)}{P_m(t, 1)} \right) \\ &= N(P_m(t, 1), (t^2 + 1)^b Q_n(t, 1)). \end{aligned}$$

Cancelando o fator $(t^2 + 1)^b$, que não influencia no cálculo do índice de Cauchy, encontramos

$$\mathbf{i}_{(P_m, Q_n)}(O) = N(P_m(t, 1), Q_n(t, 1)), \quad P_m(1, 0) \neq 0.$$

Similarmente, encontramos este resultado, quando $b < 0$. No caso $Q_n(1, 0) \neq 0$, observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{(P_m, Q_n)}(O) &= -\mathbf{i}_{(Q_n, P_m)}(O) \\ &= -N(Q_n(t, 1), P_m(t, 1)), \quad Q_n(1, 0) \neq 0, \end{aligned}$$

provando o resultado. ■

Em resumo, se o índice do equilíbrio isolado M_0 do campo vetorial analítico Φ admitir um equilíbrio isolado na origem do campo vetorial de equações principais referente ao equilíbrio $M_0 = (x_0, y_0)$ para o campo vetorial Φ , o cálculo do índice em M_0 fica totalmente determinado pelos Teoremas 2.5.1 e 2.6.1.

Teorema 2.6.2. *Suponha que O é um equilíbrio isolado para (P_m, Q_n) e $m + n$ é um inteiro par. Então, o índice $\mathbf{i}_{(P_m, Q_n)}(O)$ tem a mesma paridade dos inteiros m e n e vale*

que

$$|\mathbf{i}_{(P_m, Q_n)}(O)| \leq \min\{m, n\}.$$

Demonstração: Quando $P_m(1, 0) \neq 0$, temos que grau do polinômio $P_m(t, 1)$ é m e o Teorema 2.6.1 afirma que

$$\mathbf{i}_{(P_m, Q_n)}(O) = N(P_m(t, 1), Q_n(t, 1)).$$

Pela Propriedade 2.4.1 temos que $\mathbf{i}_O(P_m, Q_n)$ possui a mesma paridade dos inteiros m e n . Pela Propriedade 2.4.3 temos que

$$|\mathbf{i}_{(P_m, Q_n)}(O)| \leq \min\{m, n + 1\}.$$

Se $Q_n(1, 0) = 0$, então o polinômio $Q_n(t, 1)$ tem grau menor ou igual à $n - 1$, implicando que $\mathbf{i}_{(P_m, Q_n)}(O) \neq n$. Caso $Q_n(1, 0) \neq 0$, temos que $\mathbf{i}_{(P_m, Q_n)}(O) = -N(Q_n(t, 1), P_m(t, 1))$, implicando que $|\mathbf{i}_{(P_m, Q_n)}(O)| \leq \min\{n, m + 1\}$. Portanto,

$$|\mathbf{i}_O(P_m, Q_n)| \leq \min\{n, m\},$$

o que termina a demonstração deste teorema. ■

Há casos em que o equilíbrio na origem do campo de equações principais não é isolado. Nestes casos, o Teorema 2.6.1 não se aplica. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 2.6.1. Considere o campo de vetores $((x - 1)(y - 1), (y - 1)^2 - (x - 1)^4)$. O campo de vetores de equações principais, neste caso, referente ao equilíbrio $M_0 = (1, 1)$ é $(P_2(x, y), Q_2(x, y))$ em que

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= xy \\ Q_2(x, y) &= y^2, \end{aligned}$$

que não tem um equilíbrio isolado na origem.

Um método para calcular o índice de pontos de equilíbrio em casos como no Exemplo 2.6.1, será realizado, utilizando o método desenvolvido por Gao Wein-xin em 1962,

conhecido como cálculo racional.

Sejam $P_i, Q_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ polinômios homogêneos de grau i e j , respectivamente, para $i = m, \dots, N_1$ e $j = n, \dots, N_2$ e defina

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{i=m}^{N_1} P_i(x, y) \\ Q(x, y) &= \sum_{j=n}^{N_2} Q_j(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Suponha que o campo vetorial (P, Q) não tenha qualquer ponto de equilíbrio sobre a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$ e todos seus pontos de equilíbrio em $x^2 + y^2 < r^2$ são isolados. Observe que $P(0, r)$ e $Q(0, r)$ não podem ser zeros simultaneamente, sem perda de generalidade, vamos assumir que $P(0, r) \neq 0$.

Teorema 2.6.3. *Considere o campo vetorial (P, Q) definido acima. A soma dos índices de todos pontos os equilíbrio do campo (P, Q) em $x^2 + y^2 < r^2$ é dada por*

$$-\frac{1}{2}N \left[\sum_{i=m}^{N_1} r^i (t^2 + 1)^{N_1-i} P_i(2t, t^2 - 1), \sum_{j=n}^{N_2} r^j (t^2 + 1)^{N_2-j} Q_j(2t, t^2 - 1) \right]$$

Demonstração: Seja I a soma de todos os índices de pontos de equilíbrios do campo (P, Q) em $x^2 + y^2 < r^2$, isto é, I é o número de rotação do campo (P, Q) sobre a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, orientada no sentido positivo.

Sobre a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, considere $x = r \sin \theta$ e $y = -r \cos \theta$ com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Definindo, $t = \tan(\theta/2)$ obtemos

$$\frac{2tr}{t^2 + 1} = \frac{2r \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1} = \frac{2r \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = r \sin \theta,$$

$$\frac{(t^2 - 1)r}{t^2 + 1} = \frac{r \left(\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)}{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{r \left(\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = -r \cos \theta.$$

Segue então

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi} \oint_{x^2+y^2=r^2} d \arctan \left(\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d \arctan \left(\frac{Q(r \operatorname{sen} \theta, -r \operatorname{cos} \theta)}{P(r \operatorname{sen} \theta, -r \operatorname{cos} \theta)} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arctan \left(\frac{Q \left(\frac{2tr}{t^2+1}, \frac{(t^2-1)r}{t^2+1} \right)}{P \left(\frac{2tr}{t^2+1}, \frac{(t^2-1)r}{t^2+1} \right)} \right).
\end{aligned}$$

Como $P(0, r) \neq 0$ temos que o polinômio P tem um termo com y apenas, sem x . Ou seja, $P \left(\frac{2tr}{t^2+1}, \frac{(t^2-1)r}{t^2+1} \right)$ contém algum termo da forma

$$\frac{(t^2-1)}{(t^2+1)} r^i, \quad m \leq i \leq N_1.$$

Definindo,

$$\begin{aligned}
u(t) &= (t^2+1)^{N_1+N_2} P \left(\frac{2tr}{t^2+1}, \frac{(t^2-1)r}{t^2+1} \right), \\
v(t) &= (t^2+1)^{N_1+N_2} Q \left(\frac{2tr}{t^2+1}, \frac{(t^2-1)r}{t^2+1} \right),
\end{aligned}$$

temos que grau do polinômio u é igual à $2(N_1 + N_2 - i) + 2i = 2(N_1 + N_2)$. De modo análogo, o polinômio v tem grau menor ou igual à $2(N_1 + N_2)$, com igualdade somente se $Q(0, r) \neq 0$. Ou seja, mostramos que grau $v \leq$ grau u . Pela Propriedade 2.4.2, obtemos

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arctan \left(\frac{(t^2+1)^{N_1+N_2} Q \left(\frac{2tr}{t^2+1}, \frac{(t^2-1)r}{t^2+1} \right)}{(t^2+1)^{N_1+N_2} P \left(\frac{2tr}{t^2+1}, \frac{(t^2-1)r}{t^2+1} \right)} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arctan \left(\frac{v(t)}{u(t)} \right) \\
&= -\frac{1}{2} N(u, v) \\
&= -\frac{1}{2} N \left[(t^2+1)^{N_1+N_2} P \left(\frac{2tr}{t^2+1}, \frac{(t^2-1)r}{t^2+1} \right), (t^2+1)^{N_1+N_2} Q \left(\frac{2tr}{t^2+1}, \frac{(t^2-1)r}{t^2+1} \right) \right].
\end{aligned}$$

No índice de Cauchy acima, podemos cancelar os fatores $(t^2 + 1)^{N_2}$ e $(t^2 + 1)^{N_1}$. Então,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}N \left[(t^2 + 1)^{N_1} P \left(\frac{2tr}{t^2 + 1}, \frac{(t^2 - 1)r}{t^2 + 1} \right), (t^2 + 1)^{N_2} Q \left(\frac{2tr}{t^2 + 1}, \frac{(t^2 - 1)r}{t^2 + 1} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2}N \left[\sum_{i=m}^{N_1} r^i (t^2 + 1)^{N_1-i} P_i(2t, t^2 - 1), \sum_{j=n}^{N_2} r^j (t^2 + 1)^{N_2-j} Q_j(2t, t^2 - 1) \right]. \end{aligned}$$

Portanto, o teorema está provado. ■

Teorema 2.6.4. *Considere o campo (P, Q) definido anteriormente. Se a origem é um equilíbrio isolado do campo de vetores (P_{N_1}, Q_{N_2}) e todos os equilíbrios de (P, Q) também sejam isolados, então a soma dos índices de todos os equilíbrios de (P, Q) é dada por*

$$I = \mathbf{i}_{(P_{N_1}, Q_{N_2})}(O).$$

Demonstração: Como a origem O é um equilíbrio isolado para o campo (P_{N_1}, Q_{N_2}) e P_{N_1}, Q_{N_2} são polinômios homogêneos de grau N_1 e N_2 , respectivamente, temos que não há outros equilíbrios para este campo vetorial.

Por hipótese, temos também que o campo vetorial (P, Q) tem um número finito de equilíbrios, digamos M_k , para $k = 1, \dots, s$. Logo, existe $r > 0$, suficientemente grande, tal que todos equilíbrios M_k de (P, Q) estejam contidos em $x^2 + y^2 < r^2$.

Vamos construir uma deformação contínua de (P_{N_1}, Q_{N_2}) para (P, Q) dada por

$$\left(P_{N_1} + \lambda \sum_{i=m}^{N_1-1} P_i, Q_{N_2} + \lambda \sum_{j=n}^{N_2-1} Q_j \right), \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

sobre a curva $x^2 + y^2 = r^2$. Observe que,

$$\left(P_{N_1}(x, y) + \lambda \sum_{i=m}^{N_1-1} P_i(x, y) \right)^2 + \left(Q_{N_2}(x, y) + \lambda \sum_{j=n}^{N_2-1} Q_j(x, y) \right)^2 \neq 0,$$

para todo $(x, y) \in \{(u, v) : u^2 + v^2 = r^2\}$ e todo $0 \leq \lambda \leq 1$. Logo, (P_{N_1}, Q_{N_2}) é homotópico à (P, Q) e portanto o resultado está validado. ■

Exemplo 2.6.2. Considere o campo vetorial (P, Q) , definido em todo \mathbb{R}^2 , dado por

$$\begin{aligned} P(x, y) &= xy \\ Q(x, y) &= y^2 - x^4. \end{aligned}$$

Vamos calcular o índice deste campo na origem. Similar ao demonstrado no Exemplo 2.6.1 o campo de equações principais referente ao equilíbrio O do campo (P, Q) não possui um equilíbrio isolado na origem. Assim, vamos calcular o índice usando o Teorema 2.6.3.

Observe que o campo (P, Q) não possui outros equilíbrios a não ser a origem, implicando que o índice deste equilíbrio é o número de rotação do campo (P, Q) sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Observe também que $Q(0, 1) \neq 0$. O Teorema 2.6.3 implica que

$$\begin{aligned} i_{(P,Q)}(O) &= \frac{1}{2}N \left[\sum_{j=2}^4 (t^2 + 1)^{4-j} Q_j(2t, t^2 - 1), P_2(2t, t^2 - 1) \right] \\ &= \frac{1}{2}N \left((t^2 + 1)^2 Q_2(2t, t^2 - 1) + Q_4(2t, t^2 - 1), P_2(2t, t^2 - 1) \right) \\ &= \frac{1}{2}N \left((t^2 + 1)^2 (t^2 - 1)^2 - (2t)^4, 2t(t^2 - 1) \right) \\ &= \frac{1}{2}N (t^8 - 18t^4 + 1, 2t^3 - 2t) = 2. \end{aligned}$$

2.7 Teorema de Índice de Bendixson

Teorema 2.7.1 (Teorema de Índice de Bendixson). *Seja X um campo vetorial planar de classe C^1 tendo a origem O como um equilíbrio isolado. Então,*

$$i_X(O) = 1 + \frac{e - h}{2},$$

em que e , h e p são o número de setores elípticos, hiperbólicos e parabólicos, respectivamente, do fluxo do campo vetorial X numa vizinhança suficientemente pequena de O .

Demonstração: Suponha que o fluxo do campo X numa vizinhança de O tenha uma decomposição setorial trivial, ou seja, o equilíbrio O de X é do tipo centro, foco ou nó. Caso O seja um centro, então existe uma órbita fechada de X numa vizinhança suficientemente próxima de O . Logo, $i_X(O) = 1$ e o resultado segue.

Nos demais casos, sejam \mathcal{E}_O um disco aberto, suficientemente pequeno, centrado na origem tal que a fronteira de \mathcal{E}_O é uma curva de Jordan de classe C^1 .

Suponha que O é um equilíbrio do tipo foco atrator, então O é um ponto ω -limite da trajetória $\gamma_X(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathcal{E}_O \setminus \{O\}$. Sobre $\partial\mathcal{E}_O$ construa uma homotopia do campo X para um campo Y tal que o campo vetorial Y não é tangente à $\partial\mathcal{E}_O$. Logo, $1 = i_Y(O) = i_X(O)$. Podemos proceder de forma análoga, nos casos em que o fluxo do campo X em \mathcal{E}_O é do tipo foco repulsor, nó atrator ou nó repulsor.

Vamos supor que o fluxo de X numa vizinhança O tenha uma decomposição setorial não-trivial. Como \mathcal{E}_O é uma curva de Jordan, X é um campo vetorial de classe C^1 e a origem é um equilíbrio isolado de X , existem um número finito de setores do fluxo do campo X em \mathcal{E}_O , uma prova desta afirmação pode ser encontrada em [9].

A prova deste resultado será feita supondo que o fluxo do campo vetorial X numa vizinhança da origem possui pelo menos um setor elíptico, um hiperbólico e um parabólico. Caso não exista algum destes tipos de setores na decomposição do fluxo, basta desconsiderar a parte construída, nesta demonstração, envolvendo-o.

Sejam L_1, \dots, L_n , as separatrizes do campo X em \mathcal{E}_O , sendo denotadas no sentido anti-horário. Para cada $r = 1, \dots, n$, considere o ponto $p_r \in L_r$ definido da seguinte forma: se L_r é uma semi-órbita atratora em \mathcal{E}_O , definimos p_r como sendo o último ponto de L_r que intercepta $\partial\mathcal{E}_O$, isto é, todos os pontos de L_r depois de p_r quando t cresce ficam contidos no interior de \mathcal{E}_O . Analogamente, se L_r é uma semi-órbita repulsora em \mathcal{E}_O , definimos p_r o primeiro ponto de interseção de L_r com $\partial\mathcal{E}_O$. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que o campo vetorial X nunca tangencia a curva formada por $\partial\mathcal{E}_O \cap B(p_r, \epsilon)$, em que $B(p_r, \epsilon)$ é o disco aberto centrado em p_r com raio ϵ .

Vamos definir \widehat{ab} o arco circular indo do ponto a para o ponto b , em que $a, b \in \partial\mathcal{E}_O$.

Para cada $k = 1, \dots, p$, vamos definir Σ_k^P o setor parabólico do campo X contido em \mathcal{E}_O , definido pelas separatrizes L_k e L_{k+1} . Neste setor parabólico considere $\widehat{p_k p_{k+1}}$ o arco circular indo de p_k para p_{k+1} e escolha os pontos $\overline{p_k} \in \partial\mathcal{E}_O \cap B(p_k, \epsilon)$ e $\overline{p_{k+1}} \in \partial\mathcal{E}_O \cap B(p_{k+1}, \epsilon)$. Para cada $i = 1, \dots, h$, vamos definir Σ_i^H o setor hiperbólico do campo X contido em \mathcal{E}_O , definido pelas separatrizes L_i e L_{i+1} . Escolha $p_i'' \in \partial\mathcal{E}_O \cap B(p_i, \epsilon)$ e $p_{i+1}'' \in \partial\mathcal{E}_O \cap B(p_{i+1}, \epsilon)$ tal que exista uma órbita γ do campo X passando pelos pontos p_i'', p_{i+1}'' . Defina a curva C_i iniciando no ponto p_i'' que coincide com a órbita γ até o ponto p_{i+1}'' . Considere, também,

os arcos circulares $\widehat{p_i p''_i}$ e $\widehat{p''_{i+1} p_{i+1}}$.

Para cada $j = 1, \dots, e$, vamos definir Σ_j^E o setor elíptico do campo X contido em \mathcal{E}_O , definido pelas separatrizes L_j e L_{j+1} . Escolha $p'_j \in \partial\mathcal{E}_O \cap B(p_j, \epsilon)$ e $p'_{j+1} \in \partial\mathcal{E}_O \cap B(p_{j+1}, \epsilon)$ tal que exista uma órbita γ do campo X passando pelos pontos p'_j, p'_{j+1} . Defina a curva D_j iniciando no ponto p'_j que coincide com a órbita γ até o ponto p'_{j+1} . Considere, também, os arcos circulares $\widehat{p_j p'_j}$ e $\widehat{p'_{j+1} p_{j+1}}$.

Vamos definir uma curva \mathcal{L} da seguinte maneira:

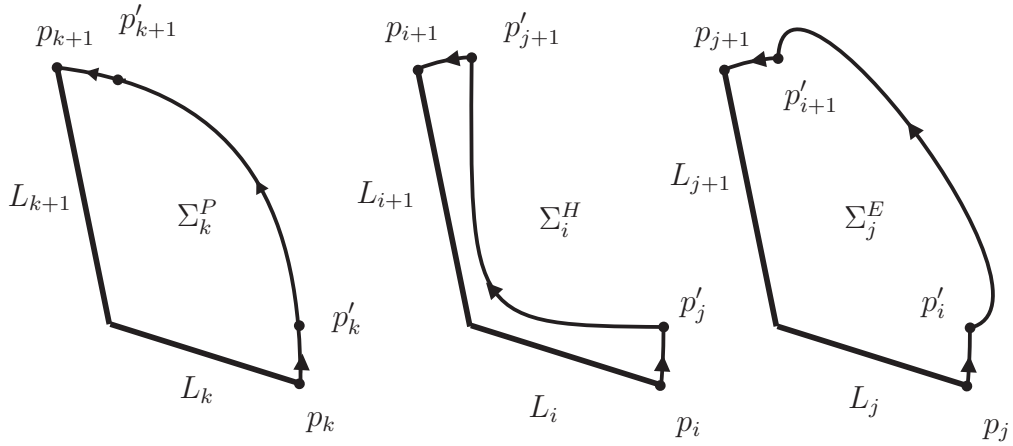


Figura 2.7: Curva \mathcal{L} em cada setor angular da origem.

$$\mathcal{L} = \left(\bigcup_{k=1}^p \widehat{p_k p_{k+1}} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^h \widehat{p_i p''_i} \cup C_i \cup \widehat{p''_{i+1} p_{i+1}} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^e \widehat{p_j p'_j} \cup D_j \cup \widehat{p'_{j+1} p_{j+1}} \right)$$

Observe que \mathcal{L} é uma curva fechada, orientada no sentido anti-horário que não possui pontos de equilíbrio em sua fronteira. Logo, $\mathbf{i}_X(O) = \rho(X, \mathcal{L})$. Sobre a curva \mathcal{L} vamos construir uma deformação contínua do campo X tal que:

- (i) a deformação não se altera nos pontos $\overline{p_k}, \overline{p_{k+1}}, p''_i, p''_{i+1}, p'_j$ e p'_{j+1} ;
- (ii) a deformação continua não tangencial nos arcos circulares $\widehat{p_k p_{k+1}}, \widehat{p_{k+1} p_{k+1}}, \widehat{p_i p''_i}, \widehat{p''_{i+1} p_{i+1}}, \widehat{p_j p'_j}$ e $\widehat{p'_{j+1} p_{j+1}}$;
- (iii) o vetor unitário da deformação deve coincidir com o vetor normal à $\partial\mathcal{E}_O$ nos pontos $p_k, p_{k+1}, p_i, p_{i+1}, p_j$ e p_{j+1} ;
- (iv) a deformação não se altera no restante da curva \mathcal{L} .

Defina esta deformação por Y . Observe que

$$\frac{Y(x, y)}{\|Y(x, y)\|} \neq -\frac{X(x, y)}{\|X(x, y)\|}, \quad (x, y) \in \mathcal{L}.$$

Pela Proposição 2.2.6, obtemos que $\rho(X, \mathcal{L}) = \rho(Y, \mathcal{L})$. Vamos calcular, agora, o número de rotação do campo Y sobre a curva \mathcal{L} .

Em um setor parabólico \sum_k^P , considere θ_k o ângulo na origem formado pelas retas geradas pelos vetores normais nos pontos p_k e p_{k+1} . Logo, o ângulo de rotação do campo Y sobre a curva $\widehat{p_k p_{k+1}}$ é θ_k .

Em um setor hiperbólico \sum_i^H , considere α_i o ângulo na origem formado pelas retas geradas pelos vetores normais nos pontos p_i e p_{i+1} . O ângulo de rotação do campo Y sobre a curva $\widehat{p_i p_i''} \cup C_i \cup \widehat{p_{i+1}'' p_{i+1}}$ é $\alpha_i - \pi$.

Em um setor elíptico \sum_j^E , considere β_j o o ângulo na origem formado pelas retas geradas pelos vetores normais nos pontos p_j e p_{j+1} . O ângulo de rotação do campo Y sobre a curva $\widehat{p_j p_j'} \cup D_j \cup \widehat{p_{j+1}' p_{j+1}}$ é $\beta_j + \pi$.

Portanto, obtemos que

$$\begin{aligned} i_Y(O) = \rho(Y, \mathcal{L}) &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^p \theta_k + \sum_{i=1}^h \alpha_i - \pi + \sum_{j=1}^e \beta_j + \pi \right) \\ &= 1 + \frac{e - h}{2}, \end{aligned}$$

já que $\sum_{k=1}^p \theta_k + \sum_{i=1}^h \alpha_i + \sum_{j=1}^e \beta_j = 2\pi$. ■

Capítulo 3

Uma cota superior para o índice de um equilíbrio no plano

Neste capítulo, vamos apresentar uma cota superior para o índice de um ponto de equilíbrio isolado em um campo vetorial de classe C^1 . As ideias abordadas são provenientes do artigo [13]. Vamos mostrar que todo campo vetorial $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 pode ser decomposto numa diferença entre componentes gradiente e hamiltoniano, numa vizinhança \mathcal{E}_O , suficientemente pequena, do ponto de equilíbrio. A esta decomposição vamos definir o conjunto dos pontos $\Pi \subset \mathcal{E}_O$ em que as componentes gradiente e hamiltoniana são linearmente dependentes. O número de ramos de Π nos dará uma cota superior para o índice deste equilíbrio.

Na seção 3.1 iremos apresentar propriedades sobre o comportamento de campos gradiente e hamiltoniano. Em seguida, mostraremos que é possível decompor um campo vetorial planar v de classe C^1 , numa vizinhança de um equilíbrio isolado, em componentes gradiente e hamiltoniana. Tal decomposição está relacionada com o campo vetorial de Loewner. Na seção 3.2 apresentaremos propriedades do conjunto Π e de seus ramos, caso existam. Mostraremos certas propriedades sobre o comportamento das trajetórias de v através das trajetórias do campo hamiltoniano. A partir de tais informações, obteremos resultados sobre o índice do equilíbrio. Na seção 3.3 apresentaremos alguns exemplos dos resultados obtidos.

3.1 Uma decomposição de um campo vetorial planar

Considere $\nabla f = (f_x, f_y)$ o campo gradiente associado à função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . A função f é estritamente crescente sobre as trajetórias de ∇f que não são pontos de equilíbrio. De fato, seja $(x(t), y(t))$ uma trajetória de ∇f , então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) &= \frac{\partial}{\partial x}f \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}f \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Em particular, $\frac{d}{dt}f(x, y) = 0$ se, e somente se, (x, y) for um equilíbrio de ∇f .

Suponha que M_0 é um equilíbrio isolado do campo ∇f , possuindo um setor elíptico na decomposição setorial de seu fluxo, numa vizinhança suficientemente pequena de M_0 . Deste modo, M_0 é um ponto α - e ω -limite para as trajetórias de ∇f contidas nesse setor elíptico. Como f é estritamente crescente sobre as trajetórias que não são equilíbrios, temos que as trajetórias que iniciam em M_0 não podem mais voltar para M_0 . Isto contradiz o fato de M_0 ter um setor elítico. Portanto, os equilíbrios de um campo gradiente não possuem setores elípticos. Pela Fórmula de Bendixson,

$$i_{M_0}(\nabla f) = 1 - \frac{h}{2} \leq 1.$$

Considere $\nabla_\omega h = (h_y, -h_x)$ o campo hamiltoniano associado à função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . A divergência de um campo hamiltoniano é nula, pois

$$\operatorname{div}(\nabla_\omega h) = \frac{\partial}{\partial x}h_y + \frac{\partial}{\partial y}(-h_x) = 0.$$

Pelo Teorema de Liouville, o fluxo de $\nabla_\omega h$ preserva área, implicando que $\nabla_\omega h$ não pode possuir equilíbrios do tipo foco ou nó e nem possuir setores parabólicos ou elípticos. Seus equilíbrios isolados são do tipo centro ou são formados por uma quantidade finita de setores hiperbólicos. Pela Fórmula de Bendixson,

$$i_{M_0}(\nabla_\omega h) = 1 - \frac{h}{2} \leq 1.$$

Vamos provar, a seguir, que todo campo de classe C^1 pode ser localmente decomposto

em componentes gradiente e hamiltoniana.

Teorema 3.1.1. *Seja $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Então, existem uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^2$ da origem e funções $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente suaves tais que*

$$v(x, y) = \nabla f(x, y) - \nabla_{\omega} g(x, y), \quad (x, y) \in U.$$

Demonstração: Podemos obter uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^2$ contendo a origem e a função $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , para algum $r > 2$, de modo que estes satisfaçam a seguinte equação de Poisson

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} = (v_2)_x - (v_1)_y.$$

Podemos, então, estabelecer $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 a partir das equações $f_x = v_1 + g_y$ e $f_y = v_2 - g_x$. De fato, como consequência da equação $f_x = v_1 + g_y$, obtemos

$$f(x, y) = \int v_1(x, y) + g_y(x, y) dx + F(y),$$

em que F é uma função real definida na reta real e podemos determiná-la tomando $f_y = v_2 - g_x$. Portanto,

$$\nabla f - \nabla_{\omega} g = (f_x - g_y, f_y + g_x) = (v_1 + g_y - g_y, v_2 - g_x + g_x) = (v_1, v_2) = v,$$

como gostaríamos. ■

A decomposição de um campo vetorial planar, descrita no Teorema 3.1.1, está relacionada com o campo vetorial de Loewner, no seguinte senso. Considere o operador de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Seja $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^r com $r \geq 3$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 . Para cada $1 \leq n \leq r$, o **campo vetorial de Loewner** $L_n(h) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ **associado à função**

h de ordem n é dado por

$$L_n(h)(x, y) = 2^n \left(\operatorname{Re} \frac{\partial^n h}{\partial \bar{z}^n}(x, y), \operatorname{Im} \frac{\partial^n h}{\partial \bar{z}^n}(x, y) \right), \quad (x, y) \in U.$$

Definindo $V^r(\mathbb{R}^2)$ o conjunto dos campos vetoriais planares de classe C^r , para $r \geq 1$, vamos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \Lambda : V^r(\mathbb{R}^2) &\rightarrow V^{r-1}(\mathbb{R}^2) \\ (f, g) &\mapsto \nabla f - \nabla_\omega g, \end{aligned}$$

conhecida como **aplicação de Loewner**. Esta aplicação generaliza o campo $L_n(h)$ no seguinte sentido:

$$L_{n+1}(h) = \Lambda(L_n(h)).$$

A demonstração dessa afirmação é simples e segue por cálculo direto. Em particular, estaremos interessados em informações sobre o campo vetorial de Loewner de ordem 2. Observe que podemos escrevê-lo do seguinte modo

$$\Lambda(\Lambda(h, 0)) = (h_{xx} - h_{yy}, 2h_{xy}) = L_2(h).$$

Neste capítulo, procuraremos obter informações sobre o índice em um equilíbrio isolado de um campo vetorial planar de classe C^1 , utilizando a decomposição do Teorema 3.1.1, com o intuito de obtermos informações acerca do índice para o campo vetorial de Loewner de ordem 2.

3.2 Dinâmica em $\Lambda(f, g)$

Seja $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 . Em toda esta seção vamos assumir que a origem O é um equilíbrio isolado para v . Pelo Teorema 3.1.1, existem um disco \mathcal{E}_O centrado na origem de \mathbb{R}^2 com raio suficientemente pequeno e funções $f, g : \mathcal{E}_O \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $v(x, y) = \Lambda(f(x, y), g(x, y))$, para $x, y \in \mathcal{E}_O$.

3.2.1 O conjunto Π

Definimos Π o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathcal{E}_O$ tais que $\nabla f(x, y)$ e $\nabla_\omega g(x, y)$ são vetores linearmente dependentes. Por uma conta simples, mostra-se que o conjunto Π pode ser escrito como os zeros da função $P : \mathcal{E}_O \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$P(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \nabla g(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{E}_O.$$

Em outras palavras, $(x, y) \in \Pi$ se, e somente se, $P(x, y) = 0$. Observe que o equilíbrio O do campo vetorial v é um elemento de Π .

Dizemos que uma curva é **invariante** pelo campo vetorial se ela é composta por curvas soluções deste campo de vetores. Se uma curva algébrica contida em \mathcal{E}_O é invariante por v e por ∇f ou $\nabla_\omega g$, então esta curva pertence à Π . De fato, seja $C = 0$ uma curva algébrica em \mathcal{E}_O invariante pelos campos v e ∇f . Supondo que (x, y) é um ponto desta curva, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla C(x, y) \cdot v(x, y) &= 0 \\ \nabla C(x, y) \cdot \nabla f(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Deste modo, os vetores $v(x, y)$ e $\nabla f(x, y)$ são ambos ortogonais à um mesmo vetor $\nabla C(x, y)$, implicando que $v(x, y)$ e $\nabla f(x, y)$ são paralelos. Como $v = \Lambda(f, g)$ em \mathcal{E}_O segue que $\nabla f(x, y)$ e $\nabla_\omega g(x, y)$ são linearmente dependentes e como (x, y) é um ponto qualquer da curva algébrica $C = 0$, esta pertence à Π .

Definição 3.2.1. *Dada uma função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $h(0, 0) = 0$, um **ramo** de h é qualquer componente conexa de dimensão 1 de $h^{-1}(k) \setminus \{O\}$, para algum $k \in \mathbb{R}$, restrito à um pequeno disco centrado na origem, com uma tangente bem definida na origem.*

O conjunto Π pode ser escrito pelos zeros da função $P = \nabla f \cdot \nabla g$. Conseqüentemente, podemos considerar os ramos de Π em \mathcal{E}_O . Como a estrutura de Π em relação aos seus ramos pode ser muito complicado, vamos trabalhar com três casos mais simples. Estes são:

a) O é um ponto isolado de Π ;

- b) O não é um ponto isolado de Π e existe uma quantidade finita de ramos de Π iniciando em O . Neste caso, dizemos que a origem O é um **ponto de ramificação de Π** ;
- c) $P(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in \Pi$.

Neste capítulo, vamos obter estimativas sobre o equilíbrio O do campo v , considerando os três casos citados acima na estrutura do conjunto Π . Para não gerar confusão, realizaremos algumas convenções. No caso de existir um ramo de Π em \mathcal{E}_O , não iniciando na origem, vamos restringir \mathcal{E}_O à um disco centrado na origem de raio menor de forma com que nenhum ponto deste ramo esteja contido neste novo disco, que também denotaremos por \mathcal{E}_O . Outro caso a ser considerado é a existência de um ramo r de Π totalmente contido em \mathcal{E}_O , iniciando e terminando na origem. Neste caso, restringimos \mathcal{E}_O à um disco centrado na origem com raio menor que o anterior, de forma que, este ramo, se transforme em 2 ramos, r_1 e r_2 como ilustrado na Figura 3.1.

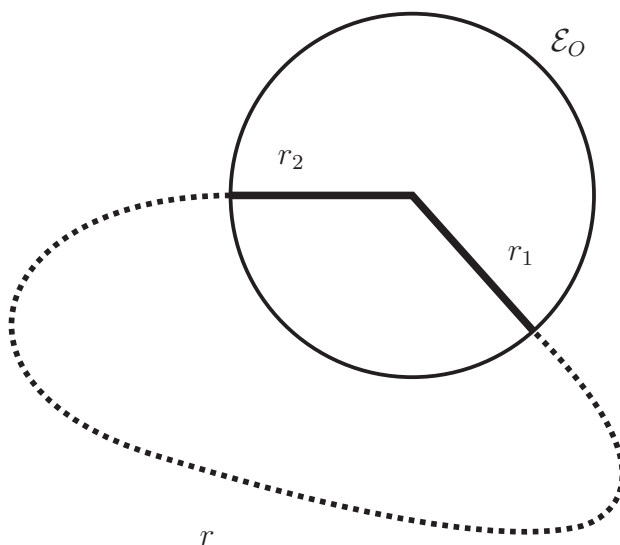


Figura 3.1: Um ramo duplo.

Realizadas estas convenções obtemos que no caso **a)**, a origem O é o único ponto de Π em \mathcal{E}_O . No caso **b)** podemos considerar que em \mathcal{E}_O há apenas k setores iniciando na origem. Assim, podemos dividir \mathcal{E}_O em k setores, chamados de **setores angulares** e denotá-los por $S\Pi_i$, $i = 1, \dots, k$. No caso **c)**, obtemos que o campo v pode ser um campo hamiltoniano e um campo gradiente. Logo, o índice na origem é menor que 1, como demonstrado na Seção 3.1. O caso **c)** não será considerado novamente.

3.2.2 Propriedades básicas

Para apresentarmos resultados sobre o índice para o equilíbrio O do campo v , precisaremos provar alguns resultados preliminares. Vamos definir $I_h(x, y)$ a curva de nível da função h no ponto (x, y) , ou seja, $I_h(x, y) = h^{-1}(x, y)$.

Proposição 3.2.1. *Sobre $\mathcal{E}_O \setminus \Pi$ as trajetórias de $\gamma_v(x, y)$ interceptam transversalmente $I_g(a)$, para todo $a \in g(\mathcal{E}_O)$.*

Demonstração: Como $\nabla_\omega g$ é um campo hamiltoniano, suas trajetórias estão contidas nas curvas de nível da função g . Por este fato, basta mostrarmos que o campo v não é paralelo à $\nabla_\omega g(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathcal{E}_O \setminus \Pi$. Suponha que exista $(x, y) \in \mathcal{E}_O \setminus \Pi$ tal que $v(x, y)$ é paralelo à $\nabla_\omega g(x, y)$. Como $v = \Lambda(f, g)$ em \mathcal{E}_O , existe $k \neq 0$ real tal que $\nabla f(x, y) = k \nabla_\omega g(x, y)$, o que implica que $(x, y) \in \Pi$, um absurdo. ■

Proposição 3.2.2. *Um arco da trajetória de $\gamma_{\nabla_\omega g}(x, y)$, contido no interior de um setor angular $S\Pi_i$ de $\mathcal{E}_O \setminus \Pi$, não pode ser interceptado em dois pontos por um pedaço conexo da órbita de $\gamma_v(x, y)$, completamente contido em $S\Pi_i$.*

Demonstração: Suponha que esta proposição não seja verdadeira. Seja a um ponto tal que $\gamma_v(a)$ intercepta $\gamma_{\nabla_\omega g}(a)$ no ponto a e em outros pontos. Pela condição de transversalidade, a interseção desta curvas ocorre de maneira transversal. Então, podemos definir b o próximo ponto de interseção desta curvas, isto é, definindo o arco $\widehat{ab} \subset \gamma_{\nabla_\omega g}(a)$ partindo do ponto a para o ponto b , temos que não existem outros pontos de interseção do arco \widehat{ab} com a órbita $\gamma_v(a)$, além dos pontos finais.

Vamos definir um homeomorfismo $h : \widehat{ab} \rightarrow \widehat{ab}$ da seguinte maneira. Seja $p \in \widehat{ab}$ e considere $\gamma_v(p)$. Defina a região compacta G definida pelas curvas \widehat{ab} e o arco da trajetória de $\gamma_v(a)$ do ponto a para o ponto b . Pela condição de transversalidade, $\gamma_v(p)$ intercepta o arco \widehat{ab} transversalmente entrando na região compacta G . Como O é um equilíbrio isolado de v , a trajetória $\gamma_v(p)$ não pode permanecer em G e nem cruzar a trajetória $\gamma_v(a)$. Logo, $\gamma_v(p)$ deve ter outro ponto de interseção com o arco \widehat{ab} , digamos q . Defina $h(p) = q$. Assim, h está bem definido e inverte a orientação do arco \widehat{ab} . Portanto, h tem um ponto fixo, mas neste ponto fixo, v e $\nabla_\omega g$ são paralelos, contradizendo a condição de transversalidade. Veja a ilustração na Figura 3.2.2. ■

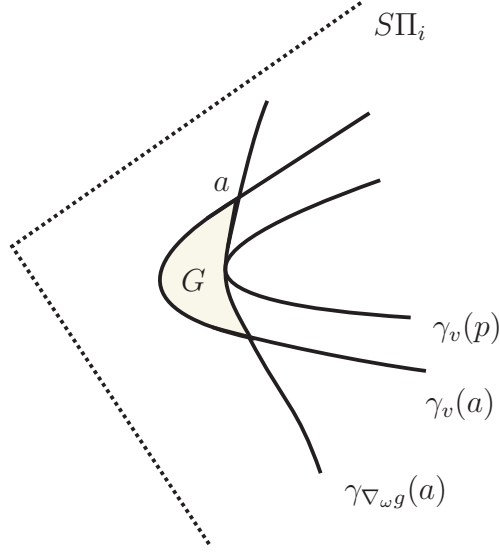


Figura 3.2: Figura ilustrativa relativa à demonstração da Proposição 3.2.2.

Proposição 3.2.3. *Seja p um equilíbrio de $\nabla_{\omega}g$ em \mathcal{E}_O e considere Σ um setor hiperbólico de p contido no interior de um setor angular $S\Pi_i$ do campo vetorial v . Sejam s_1, s_2 as separatrizes de Σ contidas em $S\Pi_i$. Se s_1, s_2 não são invariantes por v , então*

- a) *Para todo $(x, y) \in S\Pi_i \setminus \{s_1 \cup s_2\}$ a trajetória de $\gamma_v(x, y)$ cruza $s_1 \cup s_2$ transversalmente.*
- b) *Um arco de $\gamma_v(x, y)$ contido em $S\Pi_i$ não intercepta s_1 e s_2 .*

Demonstração: Seja $q \in s_1$ e considere $\gamma_v(q)$. Como s_1 não é invariante por v , temos que $\gamma_v(q)$ intercepta s_1 transversalmente. Se $q' \in \Sigma$ está perto o suficiente de q , por continuidade, obtemos que $\gamma_v(q')$ intercepta $\gamma_{\nabla_{\omega}g}(q')$ de forma transversal. Como $\gamma_{\nabla_{\omega}g}(q')$ está perto o suficiente de $s_1 \cup s_2$, segue pela Proposição 3.2.2, que $\gamma_v(q)$ não pode interceptar novamente $\gamma_{\nabla_{\omega}g}(q')$. Logo, $\gamma_v(q)$ não pode interceptar $s_1 \cup s_2$ novamente. De modo análogo, mostra-se o resultado para $q \in s_2$. ■

Proposição 3.2.4. *Sejam O um equilíbrio de $\nabla_{\omega}g$ e Σ_1, Σ_2 dois setores hiperbólicos adjacentes do equilíbrio O de $\nabla_{\omega}g$, contidos em um mesmo setor angular $S\Pi_i$ do campo v em \mathcal{E}_O . Defina s_1, s_2 as separatrizes de Σ_1 e s_2, s_3 as separatrizes de Σ_2 . Se s_2 não é invariante por v , então existe um setor hiperbólico do equilíbrio O de v contido em $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.*

Demonstração: Como s_2 não é invariante por v , temos que as trajetórias de v interceptam s_2 de forma transversal, no mesmo senso da Proposição 3.2.3. Pela Proposição

3.2.2 as trajetórias de v que cruzam s_2 não podem tender para a origem e nem interceptar s_1 ou s_3 . Isto define um setor hiperbólico para o equilíbrio O de v . ■

Proposição 3.2.5. *Se O um equilíbrio de $\nabla_\omega g$ e Σ um setor hiperbólico do equilíbrio O de $\nabla_\omega g$ contido em um setor angular $S\Pi_i$ do campo v . Então, em Σ podemos ter apenas setores parabólicos ou hiperbólicos para o campo v .*

Demonstração: Suponha que na região Σ exista um setor elíptico, então teremos uma contradição com a Proposição 3.2.2. ■

3.2.3 Resultados principais

Teorema 3.2.1. *Seja O um ponto isolado de Π .*

- a) *Se O não é um equilíbrio de $\nabla_\omega g$, então o equilíbrio O de v tem dois setores hiperbólicos e no máximo dois setores parabólicos. Logo, $i_O(v) = 0$.*
- b) *Se O é um equilíbrio de $\nabla_\omega g$, então todos os setores do equilíbrio O de v são hiperbólicos e parabólicos. Além disso, $i_O(v) \leq i_O(\nabla_\omega g) \leq 1$.*

Demonstração: a) Suponha que a origem O não é um equilíbrio de $\nabla_\omega g$. Como $\mathcal{E}_O \cap \Pi = \{O\}$ segue que o campo de vetores hamiltoniano $\nabla_\omega g$ não possui pontos de equilíbrio em \mathcal{E}_O . Logo, a folheação $\mathcal{F}_{\nabla_\omega g}(\mathcal{E}_O)$ é uma caixa de fluxo.

Considere $c = g(O)$ e considere $I_g(c)$ a curva de nível da função g passando pela origem restrita à \mathcal{E}_O . Como $\nabla_\omega g$ é um campo hamiltoniano suas soluções estão contidas nas curvas de nível da função g . Defina \widehat{aOb} um arco da trajetória de $\nabla_\omega g$ contido em $I_g(c)$ em \mathcal{E}_O , iniciando num ponto a , passando pela origem e terminando num ponto b . Considere \widehat{aO} o sub-arco de \widehat{aOb} , iniciando em a e aberto à direita de O , e considere \widehat{Ob} o sub-arco contido em \widehat{aOb} aberto à esquerda da origem e terminado em b , isto é, $\widehat{aO} \cup \widehat{Ob} = \widehat{aOb} \setminus \{O\}$.

Pela condição de transversalidade, as trajetórias de v são transversais à $\mathcal{F}_{\nabla_\omega g}(\mathcal{E}_O \setminus \{O\})$. Com isso, está bem definida a aplicação $\xi_+ : \widehat{aO} \cup \widehat{Ob} \rightarrow \Upsilon_+$, em que Υ_+ é um arco da trajetória de $\nabla_\omega g$, perto o suficiente de \widehat{aOb} , definida da seguinte maneira: para $q \in \widehat{aO} \cup \widehat{Ob}$ considere $\xi_+(q) = q_+ = \varphi_v(q, \epsilon) = \gamma_v(q) \cap \Upsilon_+$, para um único $\epsilon > 0$.

Para não contradizer nenhuma proposição da Subseção 3.2.2, observe que deve existir um ponto ou um sub-arco aberto e conexo de Υ_+ , tais que, as trajetórias do campo vetorial

v tendem para a origem em algum sentido no tempo. Implicando que estes pontos de Υ_+ não pertencem à imagem da aplicação ξ_+ . Estes pontos definem uma separatriz ou um setor parabólico do campo v na origem.

De forma análoga, podemos definir a aplicação $\xi_- : \widehat{aO} \cup \widehat{Ob} \rightarrow \Upsilon_-$, em que Υ_- é definido da mesma forma que Υ_+ , mas com o tempo no sentido contrário. Portanto, definimos outro setor parabólico ou uma separatriz para o campo v na origem. Por construção, \mathcal{E}_O menos dois setores parabólicos ou separatrizes, obtemos dois setores hiperbólicos. Logo, pelo Teorema de Bendixson, obtemos:

$$i_O(v) = 1 + \frac{-2}{2} = 0.$$

b) Suponha que O é um equilíbrio de $\nabla_\omega g$. Então O é um equilíbrio de $\nabla_\omega g$ do tipo centro ou tem um número finito de setores hiperbólicos em \mathcal{E}_O . Se O é um equilíbrio de $\nabla_\omega g$ do tipo centro, então, pela condição de transversalidade, O é um equilíbrio para o campo v do tipo atrator ou repulsor. Logo, pelo Teorema de Bendixson, obtemos:

$$i_O(v) = 1 = i_O(\nabla_\omega g).$$

Suponhamos que o retrato de fase local do equilíbrio O de $\nabla_\omega g$ possui um número finito de setores hiperbólicos. Pela Proposição 3.2.4 obtemos que o campo vetorial v em O tem pelo menos tantos setores hiperbólicos quanto $\nabla_\omega g$. Pela Proposição 3.2.5 segue que o campo v não possui setores elípticos em relação a O . Portanto, pela Fórmula de Bendixson, obtemos que $i_O(v) \leq i_O(\nabla_\omega g)$. ■

Vamos agora estudar o caso em que a origem é um ponto de ramificação de Π . Considere o fluxo do campo hamiltoniano em um setor angular $S\Pi_i$ do campo v em \mathcal{E}_O , conforme a figura 3.3.

Proposição 3.2.6. *Se O é um equilíbrio isolado do campo hamiltoniano, o fluxo de $\nabla_\omega g$, em cada setor angular $S\Pi_i$ do campo v em \mathcal{E}_O é do tipo C_a ou C_b ou uma combinação finita de C_c e C_d .*

Demonstração: Se O é um equilíbrio do campo hamiltoniano do tipo centro, então, $S\Pi_i$ é do tipo C_b . Caso contrário, O é um equilíbrio tendo uma quantidade finita de setores hiperbólicos em \mathcal{E}_O . Caso um desses setores coincida com $S\Pi_i$ temos o caso C_a .

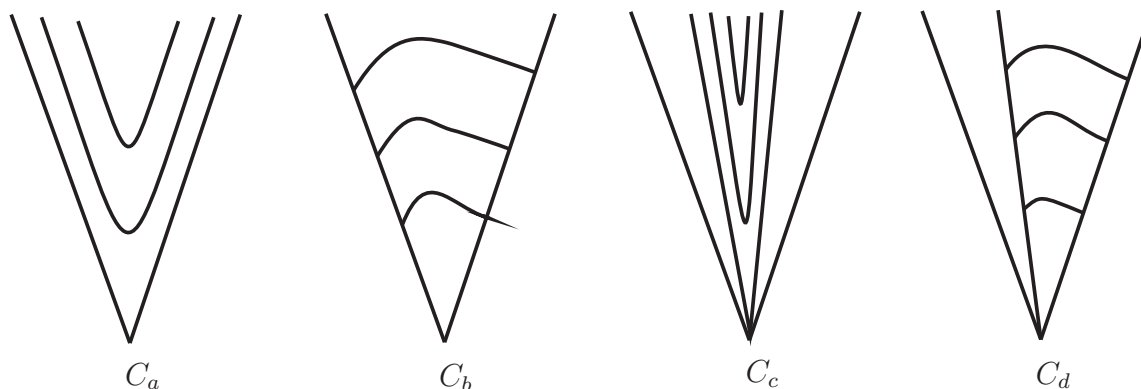


Figura 3.3: Fluxo ilustrativo do campo hamiltoniano em um setor angular.

Se $S\Pi_i$ está contido em um setor hiperbólico de $\nabla_{\omega}g$ temos o tipo C_b . Se o setor angular e hiperbólico coincidem, porém um não está contido no outro, temos o tipo C_c , em que o espaço vazio é preenchido com outros setores hiperbólicos do campo hamiltoniano. Se o setor angular contém um setor hiperbólico, $S\Pi_i$ é do tipo C_d . Caso $S\Pi_i$ contém vários setores hiperbólicos do campo hamiltoniano, obtemos uma combinação finita entre C_c e C_d . ■

Observe que se O é um ponto regular do campo $\nabla_{\omega}g$, então o fluxo do campo hamiltoniano em $S\Pi_i$ é do tipo C_b ou C_c .

Teorema 3.2.2. *Assuma que em \mathcal{E}_O contém k ramos iniciando em O e que se O é um equilíbrio de $\nabla_{\omega}g$, este seja isolado. Então, o número máximo de setores elípticos do equilíbrio O de v em \mathcal{E}_O é k e*

$$i_O(v) \leq 1 + \frac{k}{2}.$$

Demonstração: Considere $S\Pi_i$ do tipo C_a ou C_b . Se $\gamma_v(p)$ é uma trajetória do campo v contida em $S\Pi_i$ tendo O como um conjunto α -limite, então para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $\varphi_v(p, \epsilon)$ cruza uma órbita γ de $\nabla_{\omega}g$ contida em $S\Pi_i$, suficientemente próximo à origem, de forma transversal. Pela Proposição 3.2.2, $\gamma_v(p)$ não pode interceptar novamente γ . Segue então que, $\gamma_v(p)$ não pode voltar para a origem. Portanto, nestes casos, não podemos ter um setor elíptico do campo v completamente contido em $S\Pi_i$.

Assuma que $S\Pi_i$ é do tipo C_c ou C_d ou uma combinação finita desses casos. Então, contida em $S\Pi_i$ há ao menos uma separatriz do campo hamiltoniano. Como essa separatriz não é invariante por v , obtemos pela Proposição 3.2.3 que está bem definido um setor hiperbólico de v ou um subconjunto deste em $S\Pi_i$. Além disso, todas as outras órbitas de v definem

setores parabólicos ou permanecem no setor angular. Logo, não pode haver um setor elíptico do campo v completamente contido em $S\Pi_i$, nestes casos.

Portanto, para existir um setor elíptico do campo v na origem, este deve estar contido, ao menos, em dois setores angulares de v . Isto implica que o número de setores elípticos de v , não excede o número de ramos de Π . Pela Fórmula de Bendixson,

$$i_O(v) = 1 + \frac{e-h}{2} \leq 1 + \frac{e}{2} \leq 1 + \frac{k}{2}$$

e o resultado segue. ■

3.3 Exemplos

Exemplo 3.3.1. *Considere o campo vetorial $v = (v_1, v_2)$ definido em todo plano dado por*

$$\begin{aligned} v_1(x, y) &= -y + x^3 - x^2y + 8xy^2 \\ v_2(x, y) &= x - \frac{x^3}{3} + 8x^2y + y^3, \end{aligned}$$

que possui a origem com um equilíbrio isolado. A decomposição do campo $v = \nabla f - \nabla_\omega g$ é dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{12} (3x^4 - 4x^3y + 48x^2y^2 + 3y^4) \\ g(x, y) &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto Π é definido pela equação

$$\begin{aligned} 0 = P(x, y) &= x^4 - \frac{4}{3}x^3y + 16x^2y^2 + y^4 \\ &= x^2(x^2 - \frac{4}{3}xy + 16y^2) + y^2. \end{aligned}$$

Observando que $P(x, y) - P(0, 0) > 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ obtemos que O é um ponto de mínimo isolado da aplicação P e, portanto, um ponto isolado de Π .

O campo hamiltoniano é dado por $\nabla_\omega g = (-2y, 2x)$. Logo a origem é um equilíbrio

isolado $\nabla_{\omega}g$ e é do tipo centro. Pela prova no Teorema 3.2.1, item b), obtemos que

$$i_v(O) = 1.$$

Na Figura 3.4 ilustramos o retrato de fase local, numa vizinhança da origem, do campo de vetores $v = (-y + x^3 - x^2y + 8xy^2, x - x^3/3 + 8x^2y + y^3)$

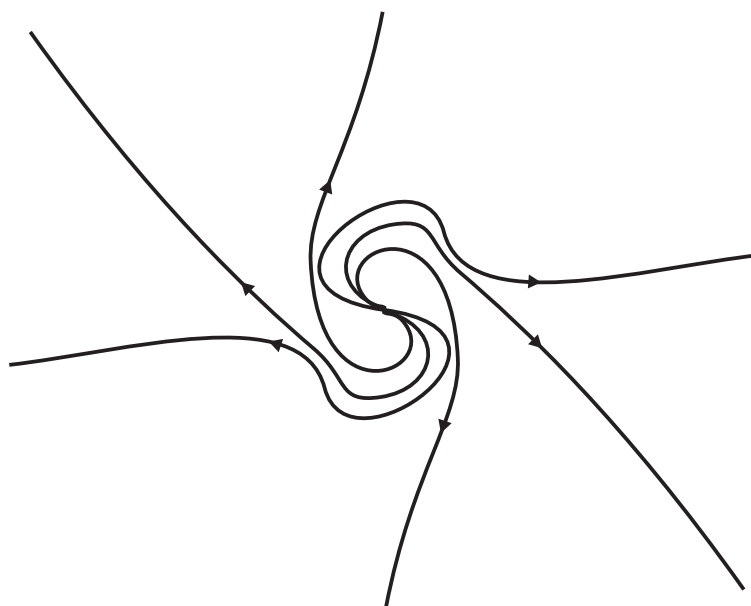


Figura 3.4: Retrato de fase do campo $(-y + x^3 - x^2y + 8xy^2, x - x^3/3 + 8x^2y + y^3)$.

Observe que o índice do campo de vetores dado, no Exemplo 3.3.1, pode ser facilmente encontrado utilizando o Teorema 2.5.1. Apresentaremos no Exemplo 3.3.2 um campo de vetores com um equilíbrio isolado na origem, cujo o índice não pode ser calculado e nem podemos obter uma cota superior utilizando os resultados conhecidos no Capítulo 2.

Exemplo 3.3.2. Considere o campo vetorial $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\begin{aligned} v_1(x, y) &= xy \\ v_2(x, y) &= -e^x - y^2 + 1. \end{aligned}$$

Este campo possui um equilíbrio isolado na origem. Considere as funções $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

definidas por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{3}y^3 + y \\ g(x, y) &= -e^x - \frac{x^3}{2}. \end{aligned}$$

Então, uma conta simples mostra que $v = \nabla f - \nabla_\omega g$. O campo hamiltoniano é dado por $\nabla_\omega g(x, y) = (0, -e^x - \frac{1}{2}x^2)$. Logo, a origem não é um equilíbrio de ∇_ω . O conjunto Π é dado pelos zeros da função P , então

$$\begin{aligned} 0 = P(x, y) &= f_x(x, y)g_x(x, y) + f_y(x, y)g_y(x, y) \\ &= -\frac{1}{2}xy(x^2 + 2e^x). \end{aligned}$$

Logo, Π é formado por 4 ramos, dois localizados no eixo x e dois localizados no eixo y . Pelo Teorema 3.2.2 obtemos que

$$\mathbf{i}_v(O) \leq 1 + \frac{4}{2} = 3.$$

Como v é um campo vetorial analítico, o campo vetorial de equações principais associado ao equilíbrio O de v é dado por $(xy, -x)$. Assim, não podemos aplicar o Teorema 2.6.3. Utilizando um recurso computacional para plotar o retrato de fase do campo v , ilustrado na Figura 3.5, segue pelo Fórmula de Bendixson que $\mathbf{i}_v(O) = -1$.

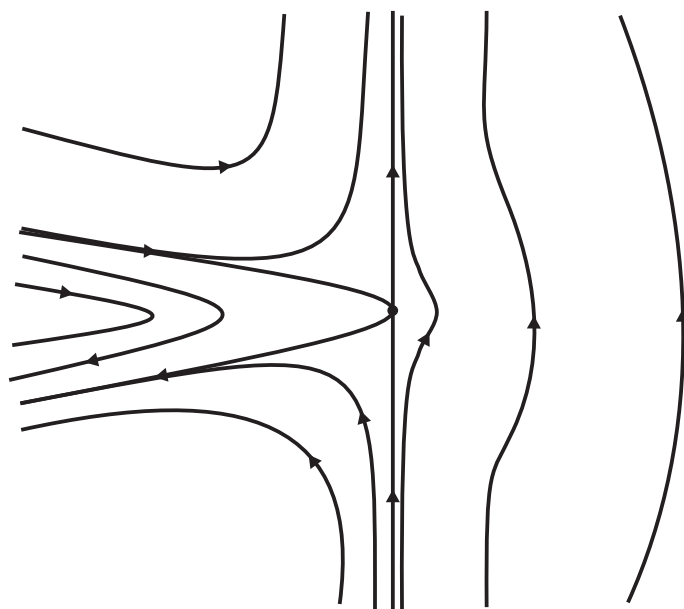


Figura 3.5: Retrato de fase do campo $(xy, -e^x - y^2 + 1)$.

Capítulo 4

Campos vetoriais polinomiais

Um campo vetorial polinomial planar pode ser estudado em esferas no \mathbb{R}^3 a partir de uma compactificação do plano. A compactificação nos permite estudar o comportamento das trajetórias fora de regiões compactas do plano, ou seja, no infinito. Uma das vantagens em estudar um campo compactificado é o Teorema de Poincaré-Hopf, o qual sob certas hipóteses garante que a soma dos equilíbrios em \mathbb{S}^2 é igual a dois. Estes assuntos serão abordados nas Seções 4.1 e 4.2.

Em seguida, na Seção 4.3, apresentaremos uma pequena introdução do artigo de Cima e Llibre [2] referente ao estudo de campos vetoriais limitados. Neste trabalho os autores descrevem o comportamento das trajetórias próximas à equilíbrios no infinito de campo vetoriais polinomiais limitados planares e resultados de índice utilizando as compactificações de Poincaré e estereográfica. Contudo, utilizaremos apenas alguns dos resultados obtidos pelos autores para uso em nas seções seguintes.

Finalizaremos este capítulo com o estudo sobre pontos críticos de polinômios reais em duas variáveis. Por resultados algébricos mostraremos que há uma quantidade finita de pontos críticos dependendo do grau do polinômio. Para cada ponto crítico iremos associá-lo a um equilíbrio do campo gradiente relacionado ao polinômio, deste modo, o índice está bem definido por ser isolado. O índice de um polinômio é definido como a soma dos equilíbrios do campo gradiente e está relacionado com a geometria das curvas de nível e do comportamento do campo gradiente no infinito. Os resultados abordados nestas seções foram fundamentados em [4] e [5].

4.1 Compactificação de Poincaré

Nesta seção descreveremos a **Compactificação de Poincaré**. Isto nos permitirá obter informações do comportamento de um campo vetorial polinomial fora das partes compactas do plano, ou seja, no infinito.

Consideremos $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial de grau d , isto é, $d = \max\{\text{grau } P, \text{grau } Q\}$, dado por $X(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$. Consideraremos, também, \mathbb{R}^2 o plano tangente à esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$$

no ponto $(0, 0, 1)$. Considere o **equador** de \mathbb{S}^2 o conjunto $\mathbb{S}^1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$. Vamos definir para $\delta = \{-, +\}$ os conjuntos

$$H^\delta = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : \delta y_3 > 0\}.$$

Os conjuntos H^- , H^+ são chamados o **hemisfério sul** e o **hemisfério norte** de \mathbb{S}^2 , respectivamente. A cada ponto $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ podemos considerar a projeção de (x_1, x_2) sobre H^δ dadas pelas funções

$$\begin{aligned} f^\delta : \mathbb{R}^2 &\rightarrow H^\delta \\ (x_1, x_2) &\mapsto f^\delta(x_1, x_2) = \left(\frac{\delta x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}}, \frac{\delta x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}}, \frac{\delta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} \right). \end{aligned}$$

As funções f^δ são difeomorfismos. Geometricamente, a imagem da aplicação f^δ no ponto (x_1, x_2) é o ponto de interseção da reta r com H^δ , em que, a reta r é determinada pelos pontos $(x_1, x_2, 1)$ e $(0, 0, 0)$ de \mathbb{R}^3 . Observe que cada ponto de (x_1, x_2) em \mathbb{R}^2 está se relacionando bijectivamente com um ponto em H^δ .

A partir das derivadas de f^δ podemos induzir um campo de vetores sobre $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$. Consideremos

$$\bar{X}(y) = D_{f^\delta}(x)X(x), \quad y = f^\delta(x),$$

com $x = (x_1, x_2)$. Então, \bar{X} é um campo de vetores em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ o qual é, em toda parte, tangente à \mathbb{S}^2 . Em cada hemisfério H^δ o campo vetorial induzido é uma cópia do

campo X . Note que os pontos do infinito de \mathbb{R}^2 , dois pontos para cada direção, estão em correspondência bijetiva com os pontos de \mathbb{S}^1 . Vamos agora estender campo vetorial \overline{X} de $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ para \mathbb{S}^2 . Para tal, vamos cobrir a esfera \mathbb{S}^2 com 6 cartas locais, dadas por

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\} \quad \text{e} \quad V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\},$$

e as correspondentes aplicações $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$, para $k = 1, 2, 3$, dadas por

$$\phi_k(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right) = -\psi_k(y_1, y_2, y_3),$$

em que $m < n$ e $m, n \neq k$. Vamos denotar por (u, v) os pontos $\phi_k(y)$ ou $\psi_k(y)$ para $k = 1, 2$. Nestas cartas, os pontos de \mathbb{S}^1 são dados por $v = 0$. Vamos realizar os cálculos sobre a carta local U_1 referente à H^+ . Considere o campo de vetores $\overline{X}|_{U_1}$ definido por $D_{\phi_1}(y)\overline{X}(y)$, $y = f^+(x)$. Então

$$\begin{aligned} D_{\phi_1}(y)\overline{X}(y) &= D_{\phi_1}(y)(D_{f^+}(x)X(x)) \\ &= D_{\phi_1 \circ f^+}(x)X(x), \quad y = f^+(x). \end{aligned}$$

Como $\phi_1 \circ f^+(x) = (x_2/x_1, 1/x_1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{X}|_{U_1}(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} \frac{-x^2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2}P(x_1, x_2) + \frac{1}{x_1}Q(x_1, x_2) \\ \frac{-1}{x_1^2}P(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Realizando a mudança de coordenadas $u = x_2/x_1$ e $v = 1/x_1$, obtemos

$$\bar{X}|_{U_1}(u, v) = \begin{pmatrix} -uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \\ -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \end{pmatrix}.$$

Multiplicando o campo $\bar{X}|_{U_1}$ pelo fator positivo

$$\rho(y) = y_3^{d-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} \right)^{d-1} = v^{d-1}m(u, v),$$

em que $m(u, v) = (1 + u^2 + v^2)^{1-d/2}$, segue

$$\rho\bar{X}|_{U_1}(u, v) = v^d m(u, v) \begin{pmatrix} -uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \\ -vP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \end{pmatrix}.$$

Deste modo, a extensão do campo \bar{X} sobre à esfera \mathbb{S}^2 é possível, já que, o campo $\rho\bar{X}$ está bem definido em $v = 0$. Procedimento semelhante pode ser aplicado às demais cartas locais. Para simplificar o campo $\rho\bar{X}$ podemos eliminar o fator $m(u, v)$.

O campo vetorial $\rho\bar{X}$ induzido e estendido sobre \mathbb{S}^2 é chamado a **compactificação de Poincaré** de X e será denotado por $p(X)$. O campo $p(X)$, referente à carta local (U_1, ϕ_1) , é dado por

$$p(X)(u, v) = \left(-uv^d P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + v^d Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^{d+1} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).$$

O campo $p(X)$, referente à carta local (U_2, ϕ_2) , é dado por

$$p(X)(u, v) = \left(v^d P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uv^d Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right), -v^{d+1} Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right).$$

O campo $p(X)$, referente à carta local (U_3, ϕ_3) , é dado por

$$p(X)(u, v) = (P(u, v), Q(u, v)).$$

A expressão de $p(X)$ nas cartas locais (V_k, ψ_k) é a mesma de (U_k, ϕ_k) multiplicada por $(-1)^{d-1}$, para $k = 1, 2, 3$.

Vamos mostrar que equador é um conjunto invariante pelo fluxo de $p(X)$. De fato, considere y um ponto qualquer em \mathbb{S}^1 , então $y_3 = 0$. Como $v = y_3/y_i$, para $i = 1, 2$, obtemos que $v = 0$. Olhando a expressão de $p(X)$ referentes às cartas locais U_i e V_i para $i = 1, 2$ temos que a segunda componente do vetor tangente em y sempre é nula. Logo, \mathbb{S}^1 é invariante.

Observe que não precisamos trabalhar com toda esfera para estudar o comportamento nas partes finitas e infinitas do campo vetorial X , é claramente suficiente trabalharmos sobre $H^+ \cup \mathbb{S}^1$, que é conhecido como **disco de Poincaré**. Em [3] encontra-se uma descrição das ferramentas do software P4. Com este programa computacional pode-se obter o retrato de fase de campos polinomiais completos utilizando a compactificação de Poincaré.

Os equilíbrios de $p(X)$ localizados em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ são chamados pontos de equilíbrio **finitos** de X . Os pontos de equilíbrios de $p(X)$ localizados em \mathbb{S}^1 serão chamados de **infinitos**. Por construção se $y \in \mathbb{S}^1$ é um ponto de equilíbrio infinito de X então $-y$ também é.

Vamos estudar o retrato de fase local de pontos de equilíbrio infinitos. Considere $(u, 0)$ um equilíbrio de $p(X)$ em \mathbb{S}^1 . Considere P_i e Q_i os termos homogêneos de grau i em P e Q , respectivamente, para $i = 1, \dots, d$. Então, $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ é um equilíbrio infinito de X se, e somente se,

$$F(u) := Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0.$$

Similarmente, $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ é um equilíbrio infinito de X se, e somente se,

$$G(u) := P_d(u, 1) - uQ_d(u, 1) = 0.$$

Tais resultados são facilmente encontrados utilizando a expressão de $p(X)$ em cada carta local.

Exemplo 4.1.1. *Vamos esboçar o retrato de fase do campo vetorial polinomial $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $X(x, y) = (x, -y)$, de grau 1, sobre o disco de Poincaré. Este campo tem um único ponto de equilíbrio finito, localizado na origem, e do tipo sela, conforme o Exemplo*

2.1.1. Considere $P(x, y) = x$ e $Q(x, y) = -y$. A expressão de $p(X)(u, v)$, referente à carta local (U_1, ϕ_1) é dada por

$$\left(-uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right) = (-2u, -v).$$

Logo, $u = 0, v = 0$ é o único ponto de equilíbrio em U_1 e este é um nó estável no infinito. Como o grau de X é ímpar temos que a origem em V_1 é, também, um nó estável.

A expressão para $p(X)(u, v)$, sobre a carta local é $(U_2, \phi_2) = (2u, v)$. Então, a origem de U_2 e de V_2 são nós instáveis. Veja ilustração da compactificação de Poincaré do campo X na Figura 4.1.

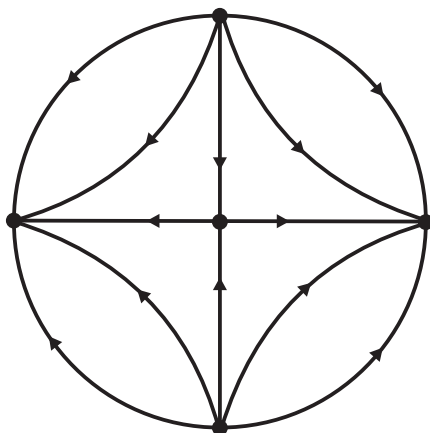


Figura 4.1: Retrato de fase no disco de Poincaré do campo $(x, -y)$.

4.2 O Teorema de Poincaré-Hopf na esfera \mathbb{S}^2

Nesta seção, vamos apresentar alguns resultados sobre o índice de pontos de equilíbrios em campos vetoriais polinomiais tangentes à esfera $\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$. O Teorema de Poincaré-Hopf para a esfera, enunciado a seguir, nos informa uma propriedade sobre a soma dos índices dos equilíbrios de campos vetoriais tangentes à \mathbb{S}^2 . O Teorema de Poincaré-Hopf é válido em casos mais gerais. Veja, por exemplo, [10].

Teorema 4.2.1 (Teorema de Poincaré-Hopf em \mathbb{S}^2). *Todo campo de vetores contínuo tangente à esfera \mathbb{S}^2 possuindo uma quantidade finita de pontos de equilíbrio tem a soma dos índices dos pontos de equilíbrio igual à 2.*

Demonstração: Seja $X : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial tangente à \mathbb{S}^2 tendo um número finito de pontos de equilíbrio. Podemos encontrar uma circunferência unitária contida em \mathbb{S}^2 que não possua equilíbrios, denote esta circunferência por \mathbb{S}^1 . Considere $E^2 \subset \mathbb{R}^3$ o plano contendo \mathbb{S}^1 , este plano divide \mathbb{S}^2 em duas metades e contém a origem de \mathbb{R}^3 . Considere N o vetor normal à E^2 na origem e a reta $r \subset \mathbb{R}^3$ definida por N . O hemisfério norte (sul) de \mathbb{S}^2 é a semi-esfera originada por E^2 , como descrito acima, cuja direção do vetor normal N de \mathbb{S}^2 é positiva (negativa). O polo norte (sul) é o ponto de interseção da reta r com o hemisfério norte (sul).

Projetando o campo X estereograficamente restrito ao hemisfério norte de \mathbb{S}^2 a partir do polo norte obtemos um campo vetorial projetado X' em E^2 . Projetando o campo X estereograficamente restrito ao hemisfério sul de \mathbb{S}^2 a partir do polo sul obtemos outro campo vetorial projetado X'' sobre E^2 .

Sejam q_1, \dots, q_n pontos de equilíbrio do campo X no hemisfério norte com índices, respectivamente, iguais à i_1, \dots, i_n . Sejam q'_1, \dots, q'_m pontos de equilíbrio do campo X no hemisfério sul com índices, respectivamente, iguais à i'_1, \dots, i'_m . Vamos definir $I_{X'}$ e $I_{X''}$ como sendo a soma de todos os índices dos pontos de equilíbrio dos campos X' e X'' , respectivamente, em E^2 . Então, obtemos $I_{X'} = i_1 + \dots + i_n$ e $I_{X''} = i'_1 + \dots + i'_m$.

Seja $C \subset E^2$ uma circunferência suficientemente grande contendo todos os equilíbrios de X' e X'' . Considere as aplicações $T_{X'} : C \rightarrow \mathbb{S}^1$ e $T_{X''} : C \rightarrow \mathbb{S}^1$ dadas por

$$T_{X'}(x, y) = \frac{X'(x, y)}{\|X'(x, y)\|}, \quad T_{X''}(x, y) = \frac{X''(x, y)}{\|X''(x, y)\|} \quad (x, y) \in \mathbb{S}^1.$$

Sejam $\varphi', \varphi'' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções ângulo, para os campos X' e X'' , respectivamente, sobre os pontos de \mathbb{S}^1 . Seja $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ uma parametrização de \mathbb{S}^1 . Para cada $a(t)$ em \mathbb{S}^1 obtemos, pela construção dos campos X' e X'' , que X' e X'' são simétricos em relação à reta tangente à \mathbb{S}^1 no ponto $a(t)$. Veja a ilustração na Figura 4.2. Obtemos então que

$$\frac{\varphi'(t) + \varphi''(t)}{2} = 2\pi t + \frac{\pi}{2}.$$

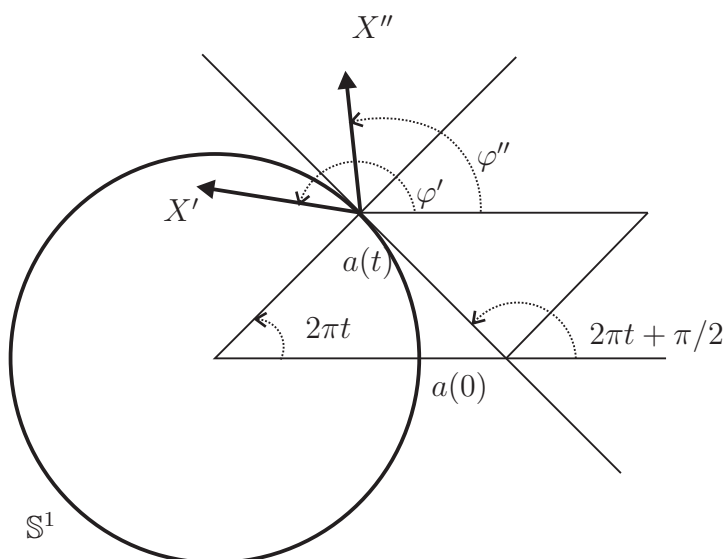


Figura 4.2: Teorema Poincaré-Hopf

Utilizando a equação 2.1, obtemos que

$$\begin{aligned}
 i(X') + i(X'') &= \frac{\varphi'(1) - \varphi'(0) + \varphi''(1) - \varphi''(0)}{2\pi} \\
 &= \frac{\varphi'(1) + \varphi''(1) - \varphi'(0) - \varphi''(0)}{2\pi} \\
 &= \frac{5\pi - \pi}{2\pi} = 2,
 \end{aligned}$$

provando o resultado. ■

Para obter informações sobre o índice de pontos de equilíbrio isolados no infinito de \mathbb{S}^2 para campos polinomiais, podemos utilizar a Compactificação de Poincaré apresentada na Seção 4.1.

4.3 Campos vetoriais limitados

Descreveremos, nesta seção, alguns resultados preliminares sobre o estudo de campos vetoriais polinomiais limitados. Não iremos nos aprofundar na teoria, pois os resultados apresentados serão utilizados apenas para alguns resultados em seções seguintes. O leitor que esteja interessado em obter mais detalhes veja o artigo [2]. Neste trabalho, os autores Cima e Llibre descrevem o comportamento local dos equilíbrios isolados no infinito para campos vetoriais polinomiais limitados e, conseqüentemente, o índice destes equilíbrios.

Inicialmente, vamos descrever outra maneira de se obter uma compactificação de um campo vetorial polinomial denominada de **Compactificação Estereográfica**.

Seja $X = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial de grau d . Vamos definir a esfera \mathbb{S}_s^2 como sendo o conjunto $\{y \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + (y_3 - 1/2)^2 = 1/4\}$. Considere o plano \mathbb{R}^2 como sendo o plano tangente à \mathbb{S}_s^2 no ponto $(0, 0, 0)$ e seja $p_N = (0, 0, 1)$ o **polo norte** de \mathbb{S}_s^2 . Identifique o plano \mathbb{R}^2 com a esfera $\mathbb{S}_s^2 \setminus \{p_N\}$. Esta identificação é realizada através da projeção estereográfica de \mathbb{S}_s^2 a partir do polo norte no plano \mathbb{R}^2 . Esta projeção relaciona cada ponto $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ com o ponto $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}_s^2 \setminus \{p_N\}$ através das seguintes relações

$$x_1 = \frac{y_1}{1 - y_3}, \quad x_2 = \frac{y_2}{1 - y_3}.$$

Seja $\tilde{X} = (F_1, F_2, F_3)$ o campo vetorial induzido em $\mathbb{S}^2 \setminus \{p_N\}$. Através das relações acima, obtemos que as funções coordenadas F_i são dadas por

$$\begin{aligned} F_1(y_1, y_2, y_3) &= \left(1 - y_3 - y_1^2, P\left(\frac{y_1}{1 - y_3}, \frac{y_2}{1 - y_3}\right) - y_1 y_2, Q\left(\frac{y_1}{1 - y_3}, \frac{y_2}{1 - y_3}\right) \right), \\ F_2(y_1, y_2, y_3) &= \left(-y_1 y_2, P\left(\frac{y_1}{1 - y_3}, \frac{y_2}{1 - y_3}\right) + 1 - y_3 - y_2^2, Q\left(\frac{y_1}{1 - y_3}, \frac{y_2}{1 - y_3}\right) \right), \\ F_3(y_1, y_2, y_3) &= \left(y_1(1 - y_3), P\left(\frac{y_1}{1 - y_3}, \frac{y_2}{1 - y_3}\right) + y_2(1 - y_3), Q\left(\frac{y_1}{1 - y_3}, \frac{y_2}{1 - y_3}\right) \right). \end{aligned}$$

Este campo não está definido no ponto p_N mas podemos estendê-lo para toda esfera. Para tal, basta realizar uma mudança de variável e considerar o campo

$$S(X)(y_1, y_2, y_3) = (1 - y_3)^n (F_1(y_1, y_2, y_3), F_2(y_1, y_2, y_3), F_3(y_1, y_2, y_3)).$$

O campo $s(X)$ definido acima é chamado de **Compactificação Estereográfica** do campo X . Observe que p_N é um ponto de equilíbrio de $s(X)$.

Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial C^1 . Seja $p \in \mathbb{R}^2$ e $\gamma_X : I_p \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma órbita de X tal que $\gamma_X(0) = p$, definida no intervalo maximal I_p contendo a origem. Dizemos que X é um campo vetorial limitado se para todo $p \in \mathbb{R}^2$, existir um compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma_X(t) \in K$, para cada $t \in I_p \cap (0, +\infty)$.

Proposição 4.3.1. *Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial limitado. Se os equilíbrios de X são finitos, então a soma de seus índices é igual à 1.*

Demonstração: Considere $s(X)$ a compactificação estereográfica de X . Como X é um campo vetorial limitado, não existem órbitas de $s(X)$ tendo o polo norte (p_n) como conjunto ω -limite. Portanto, temos que não existem setores elípticos, hiperbólicos e nem parabólicos em relação ao equilíbrio p_n do campo $s(X)$. Pela Fórmula de Índice de Bendixon, obtemos que

$$i_{s(X)}(p_n) = 1.$$

Como todos os equilíbrios de $s(X)$ são finitos, obtemos pelo Teorema de Poincaré-Hopf que a soma dos índices dos equilíbrios em $s(X)$ é igual à 2. Portanto, de $i_{s(X)}(p_n) = 1$, obtemos que a soma dos equilíbrios de X é igual à 1. ■

4.4 Pontos críticos

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio real de grau d . Dizemos que (x_0, y_0) é um **ponto crítico** de f quando $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, em que f_x, f_y são as derivadas parciais de f com relação à x e y , respectivamente. Seja (x_0, y_0) um ponto crítico de f , dizemos que (x_0, y_0) é **degenerado** quando

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = 0.$$

Caso contrário, dizemos que o ponto crítico (x_0, y_0) é **não-degenerado**. Um ponto crítico não-degenerado é sempre isolado e é do tipo máximo ou mínimo local ou sela. Vamos considerar

$$\begin{aligned} m &= \text{número de máximos locais de } f, \\ n &= \text{número de mínimos locais de } f, \\ s &= \text{número de selas de } f. \end{aligned}$$

Uma **curva algébrica real plana**, ou simplesmente, uma **curva algébrica** é o nível zero de algum polinômio real em definido no plano. Definimos o grau de uma curva

algébrica plana real, pelo grau do polinômio de menor grau que a define.

Exemplo 4.4.1. *Considere a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$. Esta curva é uma curva algébrica de grau 2 no plano real, por ser o nível zero do polinômio $f(x, y) = x^2 + y^2 - a^2$.*

Teorema 4.4.1 (Teorema de Bezout). *Sejam A e B duas curvas algébricas no plano real. Se A e B não possuem componentes em comum, então estas curvas se interceptam no máximo ab vezes, em que a e b são os graus das curvas A e B , respectivamente. ■*

Uma prova para o Teorema de Bezout pode ser encontrada em [6]. Como consequência deste teorema, obtemos que o polinômio real $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de grau d com pontos críticos isolados possui no máximo $(d - 1)^2$ pontos críticos, contando as multiplicidades. De fato, um ponto crítico de f pode ser visto como um ponto de interseção das curvas algébricas $f_x = 0$ e $f_y = 0$, de graus $(d - 1)$. Estas curvas não possuem uma componente em comum, pois isto implicaria que a componente seria formada inteiramente por pontos críticos de f e estes não seriam isolados. Logo, aplicando o Teorema de Bezout, obtemos que existem no máximo $(d - 1)^2$ pontos de críticos de f .

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio real de grau d com pontos críticos isolados. Seja $\nabla f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o campo gradiente referente ao polinômio f . Um ponto crítico de f é um ponto de equilíbrio do campo gradiente. Como a quantidade de pontos críticos de f é finita, o campo ∇f tem uma quantidade finita de pontos de equilíbrios. Então, existe uma circunferência C centrada na origem de raio suficientemente grande de modo que todos os pontos críticos de f estejam contidos no interior da região limitada por C . Consideremos I o número de rotação do campo gradiente em torno de C e M_0, \dots, M_s os pontos críticos de f . Deste modo, obtemos

$$I = \sum_{k=1}^s i_{\nabla f}(M_k).$$

Definimos o **índice do polinômio** f como sendo o valor I . Caso os pontos críticos de f sejam todos não-degenerados obtemos que

$$I = m + n - s, \tag{4.1}$$

pois, o índice do campo gradiente num extremo local é igual à 1 e numa sela é -1.

Proposição 4.4.1. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de grau d . Se os pontos críticos de f são isolados e não degenerados, então*

$$|I| \leq d - 1.$$

Demonstração: O campo gradiente ∇f associado ao polinômio f é horizontal sobre a curva

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_y(x, y) = 0\}.$$

Os pontos sobre a circunferência C em que o campo gradiente é horizontal são os pontos pertencentes à $C \cap D$. Caso C seja uma componente de D , obtemos que $I = 0$, já que o campo gradiente é contínuo. Caso contrário, as curvas C e D se interceptam em um número finito de vezes, digamos j . Pelo Teorema de Bezout, obtemos

$$j \leq 2(d - 1).$$

Em cada um dos j pontos de $C \cap D$ o campo gradiente é horizontal e aponta para o interior da circunferência C ou para direção oposta. Como não há equilíbrios de ∇f sobre a curva C e pela continuidade do campo gradiente, a cada dois pontos de $C \cap D$ cujo o campo gradiente aponta para o interior de C deve existir um ponto de $C \cap D$ apontando para o exterior de C , entre eles. Portanto, obtemos

$$2|I| \leq j \leq 2(d - 1).$$

Isto prova o resultado. ■

A seguir, encontra-se um exemplo de um polinômio real de grau d satisfazendo a cota inferior da Proposição 4.4.1, ou seja, com $I = 1 - d$.

Exemplo 4.4.2. *Considere o polinômio real no plano dado por*

$$f(x, y) = (y - a_1x - b_1)(y - a_2x - b_2) \cdots (y - a_dx - b_d),$$

com $a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}$. As retas $l_k = (y - a_kx - b_k)$, para $k = 1, \dots, d$ são, tais que, quaisquer duas tem um ponto de interseção e não há três ou mais retas se interceptando

em um mesmo ponto. As retas se interceptam em

$$(d-1)(d-2)\dots 1 = \frac{d(d-1)}{2}.$$

Cada reta é interceptada em $d-1$ pontos, isto implica que existem d segmentos em cada reta. Logo, o plano é dividido em d^2 segmentos limitados ou ilimitados. Pelo Teorema de Euler (faces - arestas + vértices = 1) obtemos que há $(d^2 + d + 2)/2$ regiões limitadas ou ilimitadas. Observamos que existem $2d$ regiões ilimitadas e então temos

$$\frac{d^2 - 3d + 2}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

regiões limitadas. Pode-se mostrar que cada interseção das retas l_k é um ponto crítico de f do tipo sela. Então, existem no mínimo $d(d-1)/2$ pontos de sela.

Seja D uma região aberta limitada no plano pelas retas l_k . Sobre cada reta l_k a função f se anula e não há outros zeros, pela construção de f . Observe que \overline{D} é um conjunto compacto, pela continuidade de f deve existir um extremo local de f em D . Mas, em D a função f não muda de sinal, então existe em D pelo menos um ponto crítico de f . Como existem $(d-1)(d-2)/2$ regiões há pelos menos outros $(d-1)(d-2)/2$ pontos críticos de f , além dos pontos de sela, descritos acima. Então,

$$\begin{aligned} \frac{d(d-1)}{2} + \frac{(d-1)(d-2)}{2} &= \frac{d-1}{2} (d+d-2) \\ &= \frac{d-1}{2} (2d-2) \\ &= (d-1)^2, \end{aligned}$$

que é o número máximo de pontos críticos que um polinômio de grau d pode ter. Obtemos, então, que $s = d(d-1)/2$ e $m+n = (d-1)(d-2)/2$. Portanto,

$$\begin{aligned} I &= m+n-s \\ &= \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} \\ &= \frac{d-1}{2} (-2) \\ &= 1-d. \end{aligned}$$

Isto mostra que o índice I do polinômio f é $1 - d$.

Um exemplo de um polinômio real com $I > 1$ não é trivial. O polinômio apresentado no Exemplo 4.4.3 possui dois extremos locais e nenhum outro ponto crítico, conseqüentemente, este polinômio tem índice igual a dois.

Exemplo 4.4.3. *Considere o polinômio*

$$f(x, y) = x^2y^3 + y^5 - y.$$

As derivadas parciais de f são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 + 5y^4 - 1.$$

Os únicos pontos críticos reais de f são $P_1 = (0, -5^{-1/4})$ e $P_2 = (0, 5^{-1/4})$. Vamos agora tentar determinar o tipo de cada ponto crítico P_1 e P_2 . As derivadas parciais de segunda ordem do polinômio f são

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6x^2y + 20y^3.$$

Logo, a aplicação Hessiana é dada por $H(x, y) = 2y^3(6x^2y + 20y^3) - 36x^2y^4$, implicando que $H(P_1) = (8/5)\sqrt{5} = H(P_2)$. Isto mostra que P_1 e P_2 são extremos locais de f e não existe outro ponto crítico. Além disso, P_1 é máximo local e P_2 é mínimo local de f .

Teorema 4.4.2. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio real com pontos críticos isolados. Se as curvas de nível de f são todas compactas, então $I = 1$, em que I é a soma de todos os índices do campo ∇f .*

Demonstração: Suponha que as curvas de nível de f sejam todas compactas, então o campo hamiltoniano $\nabla_{\omega} f$ associado a função hamiltoniana f é um campo de vetores limitado em \mathbb{R}^2 . Portanto, do Teorema 4.3.1 obtemos que a soma dos índices dos equilíbrios do campo hamiltoniano, associado a f é igual à 1. Pela Propriedade 2.3.2 obtemos que a soma dos índices dos equilíbrios do campo gradiente de f é igual à 1, isto é, $I = 1$. ■

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio real de grau d com pontos críticos isolados. Considere ∇f o campo gradiente de f o qual possui grau $d - 1$. Seja $f_x = P_m + \dots + P_{N_1}$ e

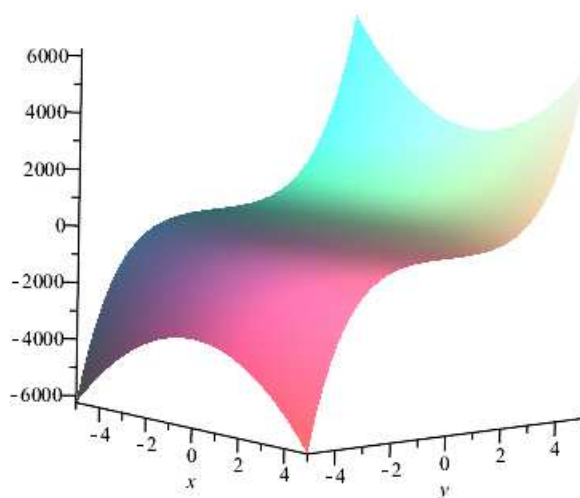


Figura 4.3: Gráfico de $f(x, y) = x^2y^3 + y^5 - y$.

$f_y = Q_n + \dots + Q_{N_2}$, em que P_i e Q_j são polinômios homogêneos de grau i e j , das derivadas parciais de f , respectivamente, para $i = m, \dots, N_1$ e $j = n, \dots, N_2$. Observe que $N_1, N_2 \leq d - 1$ e $N_1 = d - 1$ ou $N_2 = d - 1$.

Proposição 4.4.2. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio real com pontos críticos isolados de grau d . Se o campo vetorial (P_{N_1}, Q_{N_2}) possuir um equilíbrio isolado na origem, então*

$$I \leq \max\{1, d - 3\}.$$

Demonstração: Suponhamos que o campo vetorial (P_{N_1}, Q_{N_2}) tem um equilíbrio isolado na origem. Segue do Teorema 2.6.4 que

$$I = \mathbf{i}_{(P_{N_1}, Q_{N_2})}(O).$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $N_1 = d - 1$. Considerando $N_2 < N_1$ com $N_1 + N_2$ é um inteiro ímpar, segue do Teorema 2.6.1 que $\mathbf{i}_{(P_{N_1}, Q_{N_2})}(O) = 0$. Portanto, $I = 0$ e o resultado segue. Considerando $N_2 < N_1$ com $N_1 + N_2$ um inteiro par, segue do Teorema que $\mathbf{i}_{(P_{N_1}, Q_{N_2})}(O) \leq \min\{N_1, N_2\} = N_2$. Se N_1 é um inteiro par, então N_2 é um inteiro par e menor que $N - 1$. Consequentemente, $N_2 \leq N_1 - 2 \leq d - 3$. Logo, $I \leq d - 3$. O mesmo acontece se N_1 é um inteiro ímpar.

Consideremos, agora, $N_1 = N_2$. Neste caso, temos

$$P_{N_1} = \frac{\partial f_d}{\partial x}, \quad Q_{N_2} = \frac{\partial f_d}{\partial y}.$$

Logo, (P_{N_1}, Q_{N_2}) é um campo gradiente e consequentemente $I = i_{(P_{N_1}, Q_{N_2})}(O) \leq 1$. ■

O resultado da Proposição 4.4.2 é válido em geral. Uma prova para este resultado pode ser encontrada em [4]. Em resumo, se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio de grau d com pontos críticos isolados, então

$$1 - d \leq I \leq \max\{1, d - 3\}.$$

4.5 Curva de tangências

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio com pontos críticos isolados e considere o campo hamiltoniano $\nabla_\omega f = (f_y, -f_x)$ associado à função f . Defina a aplicação $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$S(x, y) = -x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto crítico ou um ponto de tangência de uma curva de nível de f com uma circunferência centrada na origem se, e somente se $S(x, y) = 0$. De fato, seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e considere C uma circunferência centrada na origem tal que $(x, y) \in C$. O vetor $\nabla_\omega f(x, y)$ é tangente à C se, e somente se, $S(x, y) = 0$. Como as trajetórias do campo hamiltoniano estão contidas nas curvas de nível de f , o resultado segue. A curva algébrica $S = 0$ é chamada **curva de tangências** de f .

Vamos escolher a circunferência C suficientemente grande de modo a conter as componentes compactas e pontos isolados de $S = 0$. No exterior de C a curva de tangências de f é a união de componentes conexas, onde cada componente conexa é um arco suave tendendo para o infinito. Vamos denominar cada uma dessas componentes de um **fim** da curva de tangências de f . O conjunto dos fins de $S = 0$ será denotado por $E_f(S)$.

Vamos denotar por $N_e(N_h)$ o conjunto dos pontos $p_i \in C$ tal que existe uma órbita do campo hamiltoniano $\nabla_\omega f$, tangenciando internamente (externamente) a curva C em p_i . Como as trajetórias do campo hamiltoniano estão contidas nas curvas de nível de f , podemos considerar $N_e(N_h)$ o conjunto dos pontos $p_i \in C$ tal que existe uma curva

de nível de f , tangenciando internamente (externamente) C no ponto p_i . Sejam n_e e n_h as cardinalidades de N_e e N_h respectivamente. Em [9] mostra-se que n_e, n_h são inteiros finitos. Por uma prova análoga, dada na Fórmula de Bendixson, obtemos

$$I = 1 + \frac{n_e - n_h}{2}. \quad (4.2)$$

Proposição 4.5.1. *Podemos escolher a circunferência C suficientemente grande de modo que seja válido a seguinte propriedade: seja $\beta \in E_f(S)$ e p o ponto da interseção entre as curvas C e β , então:*

- a) *Se $p \in N_e$, então, para todo ponto $q \in \beta$ existe uma circunferência C' centrada na origem, contendo o ponto q , de modo que existe uma curva de nível de f , tangenciando C' internamente no ponto q , isto é, $q \in N_e$.*
- b) *Se $p \in N_h$, então, para todo ponto $q \in \beta$ existe uma circunferência C' centrada na origem, contendo o ponto q , de modo que existe uma curva de nível de f , tangenciando C' externamente no ponto q , isto é, $q \in N_e$.*
- c) *Se $p \notin N_e \cup N_h$, então, para todo ponto $q \in \beta$ existe uma circunferência C' centrada na origem, contendo o ponto q , de modo que existe uma curva de nível de f , tangenciando C' no ponto q tal que $q \notin N_e \cup N_h$. ■*

Uma prova para a proposição acima pode ser encontrada em [4].

Considere a circunferência C suficientemente grande, de modo que satisfaça a Proposição 4.5.1. Para cada $\beta \in E_f(S)$, seja p_β o ponto de interseção de β com a circunferência C . Definimos o **índice do fim β da curva de tangências de f** , denotado por $i_f(\beta)$, como sendo

$$i_f(\beta) = \begin{cases} -1, & \text{se } p_\beta \in N_h \\ 0, & \text{se } p_\beta \notin N_e \cup N_h \\ 1, & \text{se } p_\beta \in N_e. \end{cases}$$

Considere $p(\nabla f)$ a compactificação de Poincaré de ∇f . Suponhamos que os equilíbrios no infinito de $p(\nabla f)$ sejam todos isolados e considere I_∞ a soma dos índices de todos os equilíbrios no infinito do campo $p(\nabla f)$. Pelo Teorema de Poincaré-Hopf na esfera \mathbb{S}^2 e

pela Equação 4.2, obtemos

$$I_\infty = 2 - 2I = n_h - n_e.$$

A partir do Exemplo 4.5.1 e de outros exemplos, fizemos algumas considerações intrigantes sobre a relação entre a curva de tangências e o comportamento no infinito do campo gradiente. Iremos enunciar, a seguir, tais questionamentos.

Seja $\beta \in E_f(S)$ a qual é uma curva suave em \mathbb{R}^2 . Considere $\Gamma_\beta \in \mathbb{S}^2$ a curva correspondente à β através da projeção de \mathbb{R}^2 no hemisfério norte H^+ de \mathbb{S}^2 realizada na compactificação de Poincaré.

Problema 4.5.1. *Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio com pontos críticos isolados e $E_f(S)$ o conjunto dos fins da curva de tangência de f . Então:*

- a) *A quantidade de equilíbrios no infinito do campo $p(\nabla f)$ pode estar relacionada com a cardinalidade do conjunto $E_f(S)$?*
- b) *Seja $\beta \in E_f(S)$ e considere Γ_β a correspondente curva sobre \mathbb{S}^2 . Um ponto limite em \mathbb{S}^1 da curva Γ_β no equador de \mathbb{S}^2 é um equilíbrio no infinito de $p(\nabla f)$?*
- c) *Seja p um equilíbrio no infinito de $p(\nabla f)$, existe uma curva $\beta \in E_f(S)$ tal que p seja um ponto limite da curva Γ_β no equador de \mathbb{S}^2 . Além disso, podemos obter alguma relação entre o índice de um equilíbrio no infinito com o índice da curva β ?*

Espera-se que, sob boas hipóteses, tais questionamentos sejam verdadeiros. Exporemos estas questões em prática, no exemplo a seguir, utilizando recursos dos softwares *P4* e *Maple*.

Exemplo 4.5.1. *Seja o polinômio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x, y) = y(xy - 1)$. Então,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy - 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A partir das derivadas parciais de f obtemos que f não possui pontos críticos. Logo, o campo gradiente não possui equilíbrios finitos, implicando que $I = 0$. Pelo Teorema de Poincaré-Hopf, obtemos que $I_\infty = 2$.

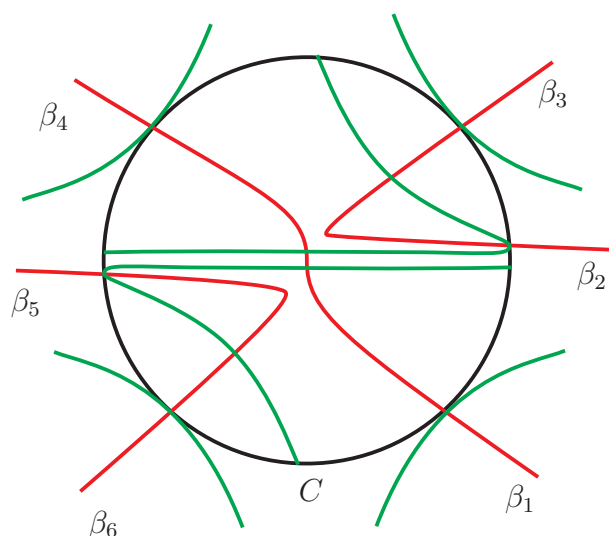


Figura 4.4: Curvas de nível e de tangência de $f(x, y) = y(xy - 1)$

A curva de tangências de f é dada pelo nível zero da função $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $S(x, y) = -2x^2y + x + y^3$.

Na Figura 4.4 ilustramos as curvas de tangência e de nível de f e os fins da curva de tangência em \mathbb{R}^2 . As curvas de nível de f estão representadas pela cor verde e a curva de tangência de f , pela cor vermelha. Existem 6 fins da curva de tangências denotadas por β_j , para $j = 1, \dots, 6$. Seja p_j o ponto de interseção entre a curva β_j e a circunferência C . Pelo comportamento das curvas de nível de f , obtemos que $p_1, p_3, p_4, p_6 \in N_h$ e $p_2, p_5 \in N_e$. Então, segue que

$$i_f(\beta_j) = \begin{cases} -1, & \text{para } j = 1, 3, 4, 6; \\ 1, & \text{para } j = 2, 5. \end{cases}$$

Considere $p(\nabla f)$ a compactificação de Poincaré do campo de vetores polinomial ∇f . Os equilíbrios no infinito de $p(\nabla f)$, referente as cartas locais U_1 e V_1 , são dadas pelos zeros da aplicação $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e referente as cartas locais U_2 e V_2 são zeros da aplicação $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$\begin{aligned} F(u) &= 2u - u^3 = u(-u^2 + 2), \\ G(u) &= -2u^2 + 1. \end{aligned}$$

Como $G(0) \neq 0$, existem 6 equilíbrios no infinito do campo $p(\nabla f)$. Com auxílio do software P4 vamos esboçar, na Figura 4.5, o retrato de fase sobre o disco de Poincaré do campo

$p(\nabla f)$.

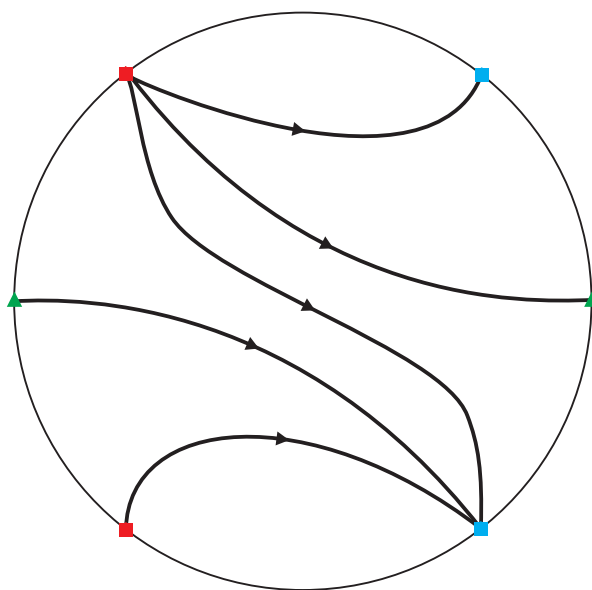


Figura 4.5: Retrato de fase sobre o disco de Poincaré referente ao Exemplo 4.5.1.

Observe que a matriz jacobiana do campo $p(\nabla f)$, em termos de u , referente a carta local U_1 é dada por

$$\begin{bmatrix} -3u^2 + 2 & 0 \\ 0 & -u^2 \end{bmatrix}.$$

Referente à carta local U_1 , quando $u = \pm\sqrt{2}$ temos que o equilíbrio é do tipo nó estável e quando $u = 0$ o equilíbrio é semi-hiperbólico. Como o grau do campo ∇f é 2, segue que o comportamento no infinito do campo $p(\nabla f)$, referente à carta local V_1 , é o mesmo que em U_1 multiplicado por -1 . Logo, referente à carta V_1 , $u = \pm\sqrt{2}$ é nó instável e em $u = 0$ temos um equilíbrio semi-hiperbólico. Como $I_\infty = 2$ e existem 4 nós, temos que os equilíbrios no infinito, em $u = 0$ tem índices iguais a -1 . Com auxílio computacional, obtemos que estes equilíbrios são do tipo sela. Na Figura 4.5 os quadrados azuis e vermelhos são referentes, respectivamente, aos equilíbrios não-degenerados do tipo nó estável e instável, enquanto que, o triângulo verde se refere à um equilíbrio semi-hiperbólico do tipo sela.

Capítulo 5

Conjectura de Carathéodory

Em superfícies regulares no espaço \mathbb{R}^3 definimos em cada um de seus pontos uma curvatura normal associada a cada direção do plano tangente no ponto fixado. Tal curvatura normal é um número real e assume valores máximos e mínimos os quais denominamos curvaturas principais. Em pontos umbílicos as curvaturas principais coincidem, ou seja, a curvatura normal é a mesma em todas as direções. Pontos umbílicos podem ser analisados como singularidades dos campos de direções principais e conseqüentemente em umbílicos isolados podemos trabalhar com índices.

Um ovalóide é uma superfície regular suave compacta e convexa que é difeomorfa à esfera \mathbb{S}^2 . O teorema de Poincaré-Hopf afirma que a soma dos índices em um ovalóide é igual a dois, que é a característica de Poincaré-Euler desta superfície. Para mais detalhes veja [10].

A Conjectura de Carathéodory afirma que em todo ovalóide de classe C^r , com $r \geq 3$, há no mínimo dois pontos umbílicos. A Conjectura de Loewner afirma que o índice em um umbílico isolado de um ovalóide é menor ou igual a um. Portanto, uma comprovação da Conjectura de Loewner implica na validade da Conjectura de Carathéodory.

Assumindo a validade da Conjectura de Loewner para superfícies analíticas vamos, nesta seção, provar que a Conjectura de Carathéodory é válida para um ovalóide de classe C^r , $r \geq 3$, sobre pontos umbílicos do tipo Lojasiewicz. Este resultado foi provado em [18] por Sotomayor e Mello no ano de 1999.

5.1 Pontos umbílicos

Para caracterizarmos pontos umbílicos em superfícies regulares orientadas no espaço \mathbb{R}^3 é necessário e útil um estudo das linhas de curvaturas em cada ponto desta superfície, em particular vamos definir as curvaturas principais desta superfície. Existem algumas formas equivalentes de definir as curvaturas principais em cada ponto da superfície, a seguir, descreveremos dois métodos. No primeiro, iremos recorrer a propriedades de curvas planares, enquanto que no segundo modo, utilizaremos as formas fundamentais da superfície.

Seja $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^2 . Definimos os **vetores tangente e normal da curva** c , respectivamente, por

$$T(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}, \quad N(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T(t), \quad t \in I.$$

A **curvatura** K_c da curva c em cada ponto $t \in I$ é definida pela equação $T'(t) = K_c(t)N(t)$.

Em toda nossa discussão nesta seção, consideremos $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada e $p \in S$. Seja $X = X(u, v)$ uma parametrização local de S em p tal que $p = X(0, 0)$.

Definição 5.1.1. *Para cada ponto p contido na superfície S podemos escolher um vetor $N_p \in \mathbb{R}^3$ normal ao plano tangente $T_p S$. Seja $v \in T_p S$ um vetor com norma unitária, consequentemente os vetores v e N_p definem um plano, tal plano intercepta a superfície S numa curva C . Localmente, C é uma curva planar e pode ser parametrizada por uma aplicação $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C$ tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = v$. A **curvatura normal da superfície S na direção de v em p** , é definida por*

$$K_v(p) := K_c(0)$$

A curvatura normal não depende da orientação da curva que a define, mas sim da orientação da superfície. Denote

$$k_1 := \max_{\|v\|=1} K_v(p) \quad \text{e} \quad k_2 := \min_{\|v\|=1} K_v(p).$$

As curvaturas normais máxima k_1 e mínima k_2 , respectivamente, em um ponto $p \in S$ são chamadas de **curvaturas principais da superfície S em p** . Em breve, justificaremos o fato de k_1 e k_2 estarem bem definidas. As **direções principais em $p \in S$** são definidas pelas direções, sem considerarmos a orientação, dos vetores $v \in T_p S$ que definem as curvaturas principais da superfície em $p \in S$.

Definição 5.1.2. *Se C é uma curva regular sobre a superfície S de modo que em cada ponto $p \in C$ a tangente à C em p está contida em uma das direções principais da superfície então dizemos que C é uma **linha de curvatura** de S .*

A **primeira forma fundamental de S em p** é a aplicação $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p S,$$

em que $T_p S$ é o plano tangente à S em p . Os coeficientes da primeira forma fundamental são definidos por

$$E = I_p(X_u(0, 0), X_u(0, 0)),$$

$$F = I_p(X_u(0, 0), X_v(0, 0)),$$

$$G = I_p(X_v(0, 0), X_v(0, 0)).$$

Seja $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ a aplicação de Gauss e denote $N_p = N(p)$. A **segunda forma fundamental de S em p** é dada pela aplicação $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$II_p(w_1, w_2) = -\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p S,$$

em que, a diferencial da aplicação de Gauss $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ é uma transformação linear auto-adjunta, a qual podemos representá-la pela matriz

$$(dN) = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

onde e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental definidos por

$$\begin{aligned} e &= II_p(X_u(0,0), X_u(0,0)), \\ f &= II_p(X_u(0,0), X_v(0,0)), \\ g &= II_p(X_v(0,0), X_v(0,0)). \end{aligned}$$

Em [1] mostra-se que os autovalores $k_1 \geq k_2$ do operador dN_p são exatamente as curvaturas principais de S em p e os vetores $v_1, v_2 \in T_p S$ que definem k_1 e k_2 são autovetores associados aos autovalores k_1 e k_2 , respectivamente. O fato de dN_p ser auto-adjunto, justifica o fato de k_1 e k_2 estarem bem definidos e implica que v_1 e v_2 são ortogonais quando $k_1 > k_2$.

A **curvatura de Gauss** de S em p é $K_p = \det dN_p = k_1 k_2$ e a **curvatura média** de S em p é $H_p = -\text{tr } dN_p / 2 = (k_1 + k_2) / 2$. Observe que podemos escrever estas curvaturas em função dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais da superfície S no ponto p .

Um ponto $p \in S$ é chamado de **umbílico** quando suas curvaturas principais são iguais, ou seja, $k_1 = k_2$. Isto implica que num ponto umbílico a curvatura normal é a mesma em todas as direções e por este fato, as direções principais são indeterminadas.

Proposição 5.1.1. *Uma curva regular C contida na superfície S é uma linha de curvatura de S se, e somente se, existir uma parametrização $Y = Y(t)$ de C tal que*

$$N'(t) = \lambda(t)Y'(t),$$

em que $\lambda = \lambda(t)$ é uma função real. ■

Uma prova para este resultado pode ser encontrada em [1]. Como consequência da Proposição 5.1.1 podemos obter as linhas de curvatura sobre a superfície S referente a parametrização local $X = X(u, v)$ no ponto $p \in S$ por equações diferenciais. Os pontos umbílicos são singularidades dos campos de direções principais. Para uma discussão aprofundada sobre pontos umbílicos e linhas de curvatura veja [8].

5.2 Coordenadas de Ribaucour

Vamos considerar $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada de classe C^r com $r \geq 2$ contendo a origem $p = (0, 0, 0)$. Sejam $X = X(u, v)$ uma parametrização local de S em p e $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ a aplicação de Gauss tais que $X(0, 0) = p$ e $N(p) = -\bar{N}$, em que $\bar{N} = (0, 0, 1)$. Isto implica que o plano tangente à superfície S em p , denotado por $T_p S$, é o plano gerado pelos vetores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ em \mathbb{R}^3 .

Proposição 5.2.1. *Seja S uma superfície regular de classe C^r , como a descrita acima. Existem uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^2$ de $(0, 0)$ e funções $Y : U \rightarrow T_p S$ e $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$X(u, v) + \rho(u, v)N(u, v) = Y(u, v) + \bar{N}\rho(u, v), \quad (u, v) \in U. \quad (5.1)$$

Além disso, $dY(0, 0)$ tem posto 2.

Demonstração: Por hipótese, temos que $\langle N((0, 0), \bar{N}) \rangle = N_3(0, 0) = -1$. Como N é uma aplicação contínua, podemos considerar U uma vizinhança suficientemente pequena do ponto $(0, 0)$ em \mathbb{R}^2 de forma que $\langle N(u, v), \bar{N} \rangle \neq 1$, para todo $(u, v) \in U$. Defina $Y : U \rightarrow T_p S$ e $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$\begin{aligned} \rho(u, v) &= \frac{\langle X(u, v), \bar{N} \rangle}{1 - \langle N(u, v), \bar{N} \rangle}, \\ Y(u, v) &= X(u, v) + \rho(u, v)(N(u, v) - \bar{N}), \quad (u, v) \in U. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que as funções acima estão bem definidas. Para tal, $Y(u, v) \in T_p S$ para todo $(u, v) \in U$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle Y(u, v), \bar{N} \rangle &= \langle X(u, v) + \rho(u, v)(N(u, v) - \bar{N}), \bar{N} \rangle \\ &= \langle X(u, v), \bar{N} \rangle + \rho(u, v) \langle N(u, v) - \bar{N}, \bar{N} \rangle \\ &= \langle X(u, v), \bar{N} \rangle + (\langle N(u, v), \bar{N} \rangle - 1) \frac{\langle X(u, v), \bar{N} \rangle}{1 - \langle N(u, v), \bar{N} \rangle} \\ &= \langle X(u, v), \bar{N} \rangle - \langle X(u, v), \bar{N} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Obviamente, as aplicações Y e ρ satisfazem a equação 5.1. Como $\rho(0, 0) = 0$ e $d\rho(0, 0) = 0$,

segue que

$$\begin{aligned} dY(0,0) &= dX(0,0) + d\rho(0,0)(N(0,0) - \bar{N}) + dN(0,0)\rho(0,0) \\ &= dX(0,0) \end{aligned}$$

Como $dX(0,0)$ tem posto 2 então $dY(0,0)$ também tem. ■

A função $Y : U \rightarrow T_p S$ descrita na Proposição 5.2.1, pode ser escrita na forma $Y(u, v) = (x(u, v), y(u, v), 0)$ de forma a obter que Y é um difeomorfismo local com um aberto U contendo a origem $(0, 0)$. As coordenadas (x, y) são chamadas de **coordenadas de Ribaucour**. A função $f = f(x, y) = \rho(Y^{-1}(x, y))$ é chamada **função de Ribaucour** associada à superfície S numa vizinhança de p referente à parametrização X .

Proposição 5.2.2. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular de classe C^r com $r \geq 2$ e $p \in S$, como descrita anteriormente. A função de Ribaucour $f = f(x, y)$ associada à S é de classe C^r e a equação diferencial das linhas de curvatura é dada por*

$$f_{xy}(x, y)(dx^2 - dy^2) + (f_{yy}(x, y) - f_{xx}(x, y))dxdy = 0. \quad (5.2)$$

Demonstração: Denote a aplicação normal de Gauss por meio de suas funções coordenadas $N = (N_1, N_2, N_3)$. Escrevendo a função Y em coordenadas de Ribaucour obtemos

$$\begin{aligned} (x, y, 0) &= Y(x, y) \\ &= X(x, y) + f(x, y)(N(x, y) - \bar{N}). \end{aligned}$$

Por um lado, obtemos $\langle Y_x(x, y), N(x, y) \rangle = N_1(x, y)$ e por outro,

$$\begin{aligned} \langle Y_x(x, y), N(x, y) \rangle &= \langle X_x(x, y) + f_x(x, y)(N(x, y) - \bar{N}) + f(x, y)N_x(x, y), N(x, y) \rangle \\ &= f_x(x, y) (\|N(x, y)\|^2 - N_3(x, y)) \\ &= f_x(x, y) (1 - N_3(x, y)). \end{aligned}$$

As equações acima implicam que podemos expressar as derivadas da função de Ribaucour

por meio das funções coordenadas da aplicação de Gauss, da seguinte forma

$$f_x(x, y) = \frac{N_1(x, y)}{1 - N_3(x, y)} \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = \frac{N_2(x, y)}{1 - N_3(x, y)}.$$

Como a função N é de classe C^{r-1} segue que as derivadas parciais de f são de classe C^{r-1} e, portanto, f é de classe C^r . Vamos agora mostrar que as linhas de curvaturas podem ser expressas pela equação (5.2).

Note que as derivadas parciais de f , dadas acima, são equivalentes a afirmação que (f_x, f_y) é a projeção estereográfica de N a partir do polo norte. Então, podemos escrever N a partir de f_x e f_y usando a inversa da projeção estereográfica, isto é,

$$N(x, y) = N = \frac{1}{1 + f_x^2 + f_y^2} (2f_x, 2f_y, f_x^2 + f_y^2 - 1). \quad (5.3)$$

Tomando $\alpha = 2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{-1}$ obtemos que $N = \alpha(f_x, f_y, (f_x^2 - f_y^2 - 1)/2)$. Este fato implica na seguinte igualdade

$$dN = N \frac{d\alpha}{\alpha} + \alpha(df_x, df_y, f_x df_x + f_y df_y). \quad (5.4)$$

Em coordenadas de Ribaucour podemos expressar $X = Y - f(N - \bar{N})$, isto implica

$$dX = dY + \bar{N}df - d(fN).$$

Como dX e dN estão contidos no $T_p S$ segue pela Proposição 5.1.1 que a equação diferencial das linhas de curvatura pode ser representada pela equação

$$\begin{aligned} 0 = W &= \det(N, dX, dN) \\ &= \det \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ dX_1 & dX_2 & dX_3 \\ dN_1 & dN_2 & dN_3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ dx - N_1 df - f dN_1 & dy - N_2 df - f dN_2 & df - N_3 df - f dN_3 \\ dN_1 & dN_2 & dN_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Multiplique a primeira linha da matriz anterior por $-df$ e some com a segunda linha, depois multiplique a última linha por $-f$ e some com a segunda linha. Assim, obtemos

$$0 = W = \det \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ dx & dy & df \\ dN_1 & dN_2 & dN_3 \end{pmatrix}.$$

Utilizando a equação (5.4) obtemos

$$\begin{aligned} 0 = W &= \det \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ dx & dy & df \\ N_1 \frac{d\alpha}{\alpha} + \alpha df_x & N_2 \frac{d\alpha}{\alpha} + \alpha df_y & N_3 \frac{d\alpha}{\alpha} + \alpha(f_x df_x + f_y df_y) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \det \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ dx & dy & df \\ df_x & df_y & f_x df_x + f_y df_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pelas fórmulas na equação (5.3), obtemos que $N_3 - f_x N_1 - f_y N_2 = -1$. Por isso,

$$0 = W = \alpha \det \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & -1 \\ dx & dy & 0 \\ df_x & df_y & 0 \end{pmatrix} = -\alpha \det \begin{pmatrix} dx & dy \\ df_x & df_y \end{pmatrix} = \alpha(df_x dy - df_y dx).$$

Portanto, como $df_x = f_{xx}dx + f_{xy}dy$ e $df_y = f_{yx}dx + f_{yy}dy$, obtemos

$$0 = W = f_{xy}(x, y)(dx^2 - dy^2) + (f_{yy}(x, y) - f_{xx}(x, y))dxdy,$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 5.2.3. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^r com $r \geq 2$. Se $f(0, 0) = 0$ e $df(0, 0) = 0$, então existe uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^2$ de $(0, 0)$ tal que $f|_U$ é a função de Ribaucour de uma superfície regular orientada $S \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^r .*

Demonstração: Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , $r \geq 2$, tal que $f(0, 0) = 0$ e

$df(0,0) = 0$. Defina as funções $Y, X, N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\begin{aligned} Y(x, y) &= (x, y, 0), \\ N(x, y) &= \frac{1}{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} (2f_x(x, y), 2f_y(x, y), f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) - 1), \\ X(x, y) &= Y(x, y) - f(x, y)(N(x, y) - \bar{N}), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

em que $\bar{N} = (0, 0, 1)$. Então,

$$1 - N_3 = \frac{2}{f_x^2 + f_y^2 + 1}, \quad N_1 = (1 - N_3)f_x, \quad N_2 = (1 - N_3)f_y.$$

Como $dY(0,0) = dX(0,0)$ tem posto 2, existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^2$ de $(0,0)$ tal que $X|_U$ é uma parametrização de classe C^{r-1} de $S = X(U)$. Vamos mostrar que $N|_U$ é um campo vetorial normal unitário sobre S e $f|_U$ é a função de Ribaucour de S . Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{\langle X(x, y), \bar{N} \rangle}{1 - \langle N(x, y), \bar{N} \rangle} &= \frac{\langle Y(x, y) - f(x, y)(N(x, y) - \bar{N}), \bar{N} \rangle}{1 - \langle N(x, y), \bar{N} \rangle} \\ &= \frac{\langle Y(x, y), \bar{N} \rangle - f(x, y)\langle N(x, y) - \bar{N}, \bar{N} \rangle}{1 - \langle N(x, y), \bar{N} \rangle} \\ &= f(x, y), \quad (x, y) \in U. \end{aligned}$$

Logo, mostramos que f é uma função de Ribaucour para S . Vamos agora mostrar a seguir que N é um vetor unitário normal à superfície S .

$$\begin{aligned} \langle X_x(x, y), N(x, y) \rangle &= \langle Y_x(x, y) - f_x(x, y)(N(x, y) - \bar{N}) - f(x, y)N_x(x, y), N(x, y) \rangle \\ &= N_1(x, y) - f_x(x, y)(1 - N_3(x, y)) - f(x, y)\langle N_x(x, y), N(x, y) \rangle \\ &= N_1(x, y) - N_1(x, y) = 0; \\ \langle X_y(x, y), N(x, y) \rangle &= N_2(x, y) - f_y(x, y)(1 - N_3(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in U. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que S é de classe C^r , para tal, defina a aplicação $\Phi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\Phi(x, y, t) = X(x, y) + tN(x, y)$, para $(x, y) \in U$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Como a matriz jacobiana de Φ no ponto $(0, 0, 0)$ é invertível, existe uma vizinhança $V \subset U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ de $(0, 0, 0)$ tal que $\Phi|_V$ é um difeomorfismo de classe C^{r-1} sobre um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$ contendo o ponto $\Phi(0, 0, 0) = X(0, 0) = Y(0, 0) = (0, 0, 0)$.

Fazendo $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ suficientemente pequeno e $V = \Phi(U \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ segue que Φ é um difeomorfismo entre $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ e V de classe C^{r-1} . Uma conta simples, mostra que $d\Phi(0, 0, 1) = (N_1, N_2, N_3)$.

Considere a aplicação $\pi_3 : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\pi_3(x, y, t) = t$, para $(x, y) \in U$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e defina

$$h = \pi_3 \circ \Phi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Assim, $h^{-1}(0) = (\pi_3 \circ \Phi^{-1})^{-1}(0) = \{\Phi(x, y, 0) : (x, y) \in U\} = S$. Como $(d\Phi^{-1})(\nabla h) = (0, 0, 1)$ segue que $(\nabla h)|_S = N|_S$. Isto no implica que ∇h é de classe C^{r-1} e portanto h é de classe C^r . ■

5.3 Desigualdade de Lojasiewicz

Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^r , $r \geq 1$, em que $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma vizinhança aberta da origem $(0, 0)$. Dizemos que o campo X satisfaz a **desigualdade de Lojasiewicz** (ou simplesmente **L -desigualdade**) de ordem k em $(0, 0)$, quando existir uma vizinhança $V \subset U$ de $(0, 0)$, um número real $\delta > 0$ e um número natural $k \neq 0$ tais que

$$\|X(x, y)\| \geq \delta \|(x, y)\|^k, \quad (x, y) \in V.$$

Considere X um campo de vetores planares satisfazendo a L -desigualdade com um equilíbrio $(0, 0)$. Então este é um equilíbrio isolado. A recíproca deste resultado é válida se supormos que o campo X é analítico. Uma demonstração pode ser encontrada em [14].

Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientada de classe C^r , com $r \geq 3$ e $p \in S$ um ponto umbílico isolado. Vamos dizer que p é um **ponto umbílico do tipo Lojasiewicz** (ou simplesmente um **L -umbílico**) de ordem k com $1 \leq k \leq r - 3$, quando a função de Ribaucour $f = f(x, y)$ associada à superfície S é tal que o campo vetorial de Loewner relacionado à função f de ordem 2

$$L_2(f)(x, y) = (f_{xx}(x, y) - f_{yy}(x, y), 2f_{xy}(x, y))$$

satisfaz a L -desigualdade de ordem k em $(0, 0)$.

Proposição 5.3.1. *A definição de um ponto L -umbílico não depende da escolha da função de Ribaucour associada à superfície S escolhida.*

Demonstração: Seja $f = f(x, y)$ uma função de Ribaucour associada à superfície S definida numa vizinhança U da origem. Basta mostrar que a definição de um ponto L -umbílico dada acima é invariante por uma rotação do sistema de coordenadas. Defina,

$$\bar{x} = x \cos \theta - y \sin \theta \quad \text{e} \quad \bar{y} = x \sin \theta + y \cos \theta.$$

Isto nos implica

$$\begin{aligned} \bar{x} \cos \theta + \bar{y} \sin \theta &= (x \cos \theta - y \sin \theta) \cos \theta + (x \sin \theta + y \cos \theta) \sin \theta \\ &= x \cos^2 \theta - y \sin \theta \cos \theta + x \sin^2 \theta + y \cos \theta \sin \theta \\ &= x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta &= -(x \cos \theta - y \sin \theta) \sin \theta + (x \sin \theta + y \cos \theta) \cos \theta \\ &= -x \cos \theta \sin \theta + y \sin^2 \theta + x \sin \theta \cos \theta + y \cos^2 \theta \\ &= y. \end{aligned}$$

As igualdades acima implicam nas seguintes

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} &= \cos \theta, & \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} &= \sin \theta, \\ -\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} &= \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} &= \cos \theta. \end{aligned}$$

Então, no sistema de coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) o campo vetorial de Loewner de ordem dois associada com a função f é dado por

$$L_2(f)(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} f_{\bar{x}\bar{x}} - f_{\bar{y}\bar{y}} \\ 2f_{\bar{x}\bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} L_2(f)(x, y).$$

Denote por A a matriz na equação acima. Suponhamos que $L_2(f)$ satisfaça a L -inequação de ordem k em $(0, 0)$ nas coordenadas (x, y) . Então, existe uma vizinhança V de $(0, 0)$

contida em U e $\delta > 0$ tal que

$$\|L_2(f)(x, y)\| \geq \delta \|(x, y)\|^k.$$

Seja W uma vinhança suficiente pequena da origem contida em U tal que $(\bar{x}, \bar{y}) \in W$, para todo $(x, y) \in V$. Como $\|A\| > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \|L_2(f)(\bar{x}, \bar{y})\| &= \|A\| \|L_2(f)(x, y)\| \\ &\geq \delta \|A\| \|(x, y)\|^k \\ &= \delta \|A\| \|(\bar{x} \cos \theta + \bar{y} \sin \theta, -\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta)\|^k \\ &= \delta \|A\| \left(\sqrt{(\bar{x} \cos \theta + \bar{y} \sin \theta)^2 + (-\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta)^2} \right)^k \\ &= \delta \|A\| \|(\bar{x}, \bar{y})\|^k, \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in W. \end{aligned}$$

Mostrando que $L_2(f)$ satisfaz a L -desigualdade de ordem k numa vizinhança de $(0, 0)$ nas coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) . Com raciocínio análogo, obtemos que a recíproca também é válida. ■

Se supormos que $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície analítica e $p \in S$ um ponto umbílico isolado, então, segue pela Proposição 5.2.3 que a função f de Ribaucour associada à S também é analítica. Como a equação diferencial das linhas de curvatura em coordenadas de Ribaucour pode ser expressa pela equação (5.2), obtemos que o campo vetorial de Loewner de ordem 2 associada à função f é um campo analítico com um equilíbrio isolado na origem $(0, 0)$. Logo, $(0, 0)$ satisfaz a L -desigualdade de ordem k , para algum $k > 0$ e, conseqüentemente, p é um ponto L -umbílico de S .

Lema 5.3.1. *Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ser uma campo vetorial de classe C^r , com $r \geq 1$ e U uma vizinhança de $(0, 0)$, suficientemente pequena, em \mathbb{R}^2 . Se $(0, 0)$ é um equilíbrio isolado de X satisfazendo a L -desigualdade de ordem k em $(0, 0)$, para algum $1 \leq k \leq r$, então o polinômio de Taylor de ordem k em $(0, 0)$, denotado por ψ_k , satisfaz a L -desigualdade em $(0, 0)$ e*

$$\mathbf{i}_\psi(0, 0) = \mathbf{i}_{\psi_k}(0, 0).$$

Demonstração: Seja $1 \leq k \leq r$. Escreva

$$\psi(x, y) = \psi_k(x, y) + \xi(x, y), \quad (x, y) \in U.$$

em que ξ é resto de Taylor de ordem k de ψ . Como ψ satisfaz a L -desigualdade de ordem k em $(0, 0)$, existe uma vizinhança $V \subset U$ de $(0, 0)$ e $\delta > 0$ tais que

$$\|\psi(x, y)\| \geq \delta\|(x, y)\|^k, \quad (x, y) \in V.$$

Como ψ é uma aplicação de classe C^r , para todo $0 < \varepsilon < \delta/4$ dado, existe uma vizinhança $W \subset U$ de $(0, 0)$ tal que

$$\|\xi(x, y)\| \leq \varepsilon\|(x, y)\|^k, \quad (x, y) \in W.$$

Pelas desigualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned} \delta\|(x, y)\|^k &\leq \|\psi(x, y)\| \\ &\leq \|\psi_k(x, y)\| + \|\xi(x, y)\| \\ &\leq \|\psi_k(x, y)\| + \varepsilon\|(x, y)\|^k \quad (x, y) \in W \cap V. \end{aligned}$$

Para todo $(x, y) \in W \cap V$, segue então que $\|\psi_k(x, y)\| \geq (\delta - \varepsilon)\|(x, y)\|^k$, ou seja, ψ_k satisfaz a L -desigualdade em $(0, 0)$. Portanto, a origem é um equilíbrio isolado dos campos ψ e ψ_k . Vamos agora mostrar que o índice é o mesmo nestes dois campos vetoriais, e para tal, utilizaremos homotopias.

Sejam $B_n \subset W \cap V$ uma bola aberta de raio $n > 0$, suficientemente pequeno, centrada na origem e S_n a fronteira de B_n . Defina a família de campos vetoriais $\varphi_\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, para $0 \leq \lambda \leq 1$ dada por

$$\varphi_\lambda(x, y) = \psi_k(x, y) + \lambda\xi(x, y), \quad (x, y) \in S_n.$$

Por construção, φ_λ é uma deformação contínua entre ψ_k e ψ em S_n . Vamos mostrar que esta deformação é de fato uma homotopia. Suponha que existam $(x, y) \in S_n$ e $0 \leq \lambda \leq 1$ tais que $\varphi_\lambda(x, y) = 0$. Isto implica que,

$$\varepsilon\lambda\|(x, y)\|^k \geq \lambda\|\xi(x, y)\| = \|\psi_k(x, y)\| \geq (\delta - \varepsilon)\|(x, y)\|^k.$$

Consequentemente, $\varepsilon\lambda \geq \delta - \varepsilon$ implicando que $\varepsilon(1 + \lambda) \geq \delta$. Isto é um absurdo! Portanto,

a deformação φ_λ é uma homotopia entre ψ_k e ψ em S_r e via Proposição 2.2.5 o índice na origem destes campos são iguais. ■

Teorema 5.3.1. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ ser uma superfície de classe C^r com $r \geq 3$. Se $p \in S$ é um L -umbílico de ordem k , em que $1 \leq k \leq r - 2$. Então existe uma superfície analítica $S' \subset \mathbb{R}^3$ tal que p é um ponto umbílico isolado de S' tendo, em ambas superfícies, o mesmo índice.*

Demonstração: Seja $1 \leq k \leq r - 2$. Vamos assumir que o vetor normal unitário à S em p é $(0, 0, -1)$. Seja $f = f(x, y)$ a função de Ribaucour de classe C^r associada à S numa vizinhança do ponto p . Como o ponto p é um L -umbílico de ordem k , segue que a origem do campo vetorial de Loewner de ordem 2 associada à função f ,

$$L_2(f)(x, y) = (f_{xx}(x, y) - f_{yy}(x, y), 2f_{xy}(x, y))$$

satisfaz a L -desigualdade de ordem k em $(0, 0)$. Seja $\Psi = \Psi(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem $k + 2$ de f em $(0, 0)$. Por construção, Ψ é uma função analítica e pela Proposição 5.2.3 existe uma superfície analítica S' tendo Ψ como sua função de Ribaucour. Seja $L_2(\Psi)$ o campo vetorial de Loewner de ordem 2 associada a função de Ψ .

Com esta construção obtemos que $L_2(\Psi)$ e o polinômio de Taylor de ordem k de f coincidem. Pelo Lema 5.3.1, $L_2(\Psi)$ tem um equilíbrio isolado na origem e o índice na origem $L_2(f)$ e $L_2(\Psi)$ coincidem. Além disso, pela Proposição 5.2.2 e pelo resultado acima obtemos que p é um umbílico isolado de S' . ■

Via Teorema 5.3.1 obtemos o seguinte corolário, no qual resulta numa resposta afirmativa para a Conjectura de Carathéodory para pontos L -umbílicos.

Corolário 5.3.1. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ um ovalóide de classe C^r com $r \geq 3$ e $p \in S$ um L -umbílico. Se a Conjectura de Loewner é válida para superfícies analíticas então, S possui outro ponto umbílico.* ■

Capítulo 6

Conclusão

O propósito desta dissertação foi apresentar resultados que possam ser aplicados no estudo da Conjectura de Carathéodory, tendo como norteador o campo vetorial de Loewner. Iniciamos apresentando e discutindo resultados sobre o índice de um ponto de equilíbrio isolado, em particular, provamos o Teorema de Índice de Bendixson utilizando homotopias entre campos vetoriais e demonstramos formas de obter cálculos algébricos acerca do índice em casos particulares. Em seguida, expomos como é possível obter uma cota superior para o índice na origem do campo vetorial de Loewner utilizando uma decomposição deste campo em componentes hamiltoniana e gradiente. O próximo passo foi estudar o comportamento de campos vetoriais em \mathbb{R}^3 . Utilizando compactificações do plano passamos a estudar campos de vetores polinomiais na esfera \mathbb{S}^2 , em particular utilizamos a Compactificação de Poincaré. Demonstramos o Teorema de Poincaré-Hopf em \mathbb{S}^2 e estudamos resultados curiosos sobre pontos críticos de polinômios reais em duas variáveis. Por fim, utilizamos coordenadas e funções de Ribaucour de uma superfície regular, suficientemente suave, contida em \mathbb{R}^3 para descrever a equação diferencial das linhas de curvaturas com pontos L -umbílicos. Concluimos que se a Conjectura de Loewner é válida sobre superfícies analíticas, com tais condições acima, a de Carathéodory também será válida em superfícies suaves.

Existem vários trabalhos interessantes acerca do assunto estudado nesta dissertação. Destacamos, como exemplo o trabalho de Garcia e Gutierrez ([7] em 2000) realizando uma extensão da Conjectura de Carathéodory em um caso especial para superfícies suaves em \mathbb{R}^3 . Sendo um pouco pretensioso, para trabalhos futuros, um estudo aprofundado do

trabalho de Ivanov [11].

O Problema 4.5.1 foi colocado a partir de observações de vários exemplos utilizando recursos computacionais como os softwares P4 e Maple. Ainda não se sabe se existem respostas na bibliografia para os casos expostos, contudo acreditamos que sob boas hipóteses podemos obter respostas afirmativas.

Bibliografia

- [1] CARMO, M. *Geometria Diferencial Local*. IV Colóquio Brasileiro de Matemática, 1963.
- [2] CIMA, A.; LLIBRE, J. *Bounded polynomial vector field*. Transactions of the American Mathematical Society. v. 318, n. 2, 1990, p. 557-579.
- [3] DUMORTIER, F.; LLIBRE J.; ÁRTES J. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Universitext. Springer, 2006.
- [4] DURFEE, A. *The index of $\text{grad}f(x, y)$* . Topology. An International Journal of Mathematics. v. 37, 1998, p. 1339-1361.
- [5] DURFEE, A.; KRONENFELD, N; MUNSUN H.; ROY, J.; WESTBY, I. *Counting critical points of real polynomials in two variables*. American Mathematical Monthly. v. 100, 1993, p. 225-271.
- [6] FULTON; W. *Algebraic Curves: an Introduction to Algebraic Geometry*. Third edition, Benjamin, New York, 2008.
- [7] GARCIA, R.; GUTIERREZ, C. *Ovaloids of \mathbb{R}^3 and their umbilics: a differential equation approach*. Journal of Differential Equations, v. 168, 2000, p. 200-211.
- [8] GARCIA R.; SOTOMAYOR J. *Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory*. XXVII Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [9] HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons, Inc. 1964.
- [10] HOPF, H. *Differential Geometry in the Large*. v. 1000. Lectures Notes in Math. Springer Verlag, 1979.

- [11] IVANOV, V. *The analitic Carathéodory Conjecture*. Siberian Mathematical Journal. v. 43, n. 2, 2002, p. 251-322.
- [12] LIMA, E. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [13] LLIBRE, J.; MARTÍNEZ-ALFARO, J. *An upper bound of the index of an equilibrium point in the plane*. Journal of Differential Equations. v. 235, 2012, p. 2460-2473.
- [14] LOJASIEWICZ, S. *Ensembles Semi-Analytiques*. Institut des Hautes Etudes Scientifiques Bures-sur-Yvette France, 1965.
- [15] OVISIENKO V.; TABACHNIKOV S. *Projective Differential Geometry Old and New*. Cambridge University Press, 2005.
- [16] SCHERBEL, H. *A new proof of Hamburger's Index Theorem on umbilical points*. Tese ETH, Zurich. 1993.
- [17] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- [18] SOTOMAYOR J.; MELLO, L. *A note on some developments on Carathéodory Conjecture on umbilic points*. Expositiones Mathematicae, v. 17, 1999, p. 49-58.
- [19] ZHI-FEN, Z.; TONG-REN D.; WEN-ZAO, H.; ZHEN-XI, D. *Qualitative Theory of Differential Equations*. Translations of mathematical monographs. Peking Univesity, 1991.