

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA - IFQ**

Modelos análogos para a propagação da luz
em teorias não lineares do eletromagnetismo

Thales Willian Cruz

Itajubá, 2024

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA - IFQ**

Thales Willian Cruz

Modelos análogos para a propagação da luz em teorias não lineares do eletromagnetismo

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física.

**Orientador: Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci
Coorientador: Prof. Dr. Caio Cesar Holanda Ribeiro**

**2024
Itajubá**

Thales Willian Cruz

Modelos análogos para a propagação da luz em teorias não lineares do eletromagnetismo/ Thales Willian Cruz. – Itajubá, 8 de março de 2024-
64 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI, 19 de março de 2024.

1. Propagação da luz em uma teoria não linear do eletromagnetismo. 2. Modelos análogos. 3. Métrica efetiva. 4. Teoria de Born-Infeld. I. Vitorio Alberto De Lorenci. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Instituto de Física e Química. IV. Modelos análogos para a propagação da luz em teorias não lineares do eletromagnetismo.

CDU 02:141:005.7

Thales Willian Cruz

Modelos análogos para a propagação da luz em teorias não lineares do eletromagnetismo

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física.

Itajubá, 8 de março de 2024

Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci
Orientador

Prof. Dr. Caio Cesar Holanda Ribeiro
Coorientador

**Prof. Dr. Eduardo Henrique Silva
Bittencourt**
Convidado 1

**Prof. Dr. Annibal Dias de Figueiredo
Neto**
Convidado 2

Agradecimentos

Àqueles que me ajudaram, de alguma forma, a completar este trabalho, meu muito obrigado. Agradeço em especial meu orientador, Prof. Vitorio De Lorenci, pela sua paciência e disponibilidade de sempre me ajudar no que é preciso e também aos meus amigos de mestrado, Maria e Ricardo, pelas alegrias e tristezas compartilhadas.

Agradeço também a CAPES pelo apoio financeiro.

"I demolish my bridges before me - then there is no choice but move forward."

Fridtjof Nansen

Resumo

Este trabalho visa um estudo de modelos análogos para a propagação da luz em teorias não lineares do eletromagnetismo. Para isto, primeiro calculamos as equações de movimento e o tensor momento-energia de uma teoria arbitrária dependente dos dois invariantes do eletromagnetismo, F e G , no formalismo tensorial e vetorial. Após, demonstramos, via dois métodos diferentes, como obter a relação de dispersão das ondas eletromagnéticas dessas teorias. Calculamos também a velocidade de fase, velocidade grupo e índice de refração para tais teorias. Aplicamos os resultados para as teorias de Born-Infeld e de Euler-Heisenberg. Encontramos também a velocidade de fase de uma onda em um meio material que apresenta os efeitos Pockels e Kerr. Propomos então uma analogia formal entre a métrica efetiva da teoria não linear e a métrica efetiva do meio material. Mostramos ainda que podemos obter o mesmo resultado análogo relacionando a mudança do valor do índice de refração pela presença dos campos eletromagnéticos em ambas as teorias não lineares com a mudança do índice de refração no meio material devido à presença dos campos eletromagnéticos. Finalizamos aplicando os resultados obtidos na confecção em modelos análogos baseados no Germânio e no Silício.

Palavras-chaves: Propagação de luz em uma teoria não linear do eletromagnetismo. Modelos análogos. Métrica efetiva, Teoria de Born-Infeld.

Abstract

This work aims at studying analogous models for the propagation of light in nonlinear theories of electromagnetism. To do this, we first calculate the equations of motion and the momentum-energy tensor of an arbitrary theory dependent on the two electromagnetism invariants, F and G , in both tensorial and vector formalisms. Then, we demonstrate, through two different methods, how to obtain the dispersion relation of electromagnetic waves for these theories. We also calculate the phase velocity, group velocity and refractive index for such theories. We apply the results to the Born-Infeld and Euler-Heisenberg theories. Additionally, we find the phase velocity of a wave in a material medium exhibiting Pockels and Kerr effects. We then propose a formal analogy between the effective metric of the nonlinear theory and the effective metric of the material medium. Furthermore, we show that we can obtain the same analogous result by relating the change in the value of the refractive index due to the presence of electromagnetic fields in both nonlinear theories with the change in the refractive index in the material medium due to the presence of electromagnetic fields. Finally, we apply the obtained results in the construction of analogous models based on Germanium and Silicon.

Key-words: Light Propagation in a nonlinear theory of electromagnetism. Analogous models. Effective metric, Born-Infeld Theory.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	TEORIA ELETROMAGNÉTICA NÃO LINEAR	14
2.1	As equações de movimento	14
2.2	O tensor momento-energia	16
2.3	Eletrodinâmica não linear no formalismo do cálculo vetorial	17
2.4	Teoria de Born-Infeld	20
3	A PROPAGAÇÃO DA LUZ EM TEORIAS NÃO LINEARES	26
3.1	Relação de dispersão	26
3.2	Relação de dispersão via cálculo do tensor de Fresnel	29
3.3	Velocidade de fase e velocidade de grupo	32
3.4	Os vetores de polarização	34
3.5	Propagação da luz na teoria de Born-Infeld	35
3.6	Propagação da luz na teoria de Euler-Heisenberg	38
4	ELETRODINÂMICA MAXWELLIANA EM MEIOS MATERIAIS	41
5	MODELO ANÁLOGO PARA TEORIAS NÃO LINEARES EM MEIO MATERIAL	45
5.1	Métrica efetiva	45
5.2	Analogia via associação da geometria efetiva	47
5.3	Analogia pelo índice de refração	48
5.4	Estimativas numéricas para o Ge e Si	49
6	CONCLUSÃO	51
	APÊNDICES	53
	APÊNDICE A – CÁLCULOS REALIZADOS NO SOFTWARE MATHEMATICA	54
	REFERÊNCIAS	62

1 Introdução

O trabalho de Maxwell sobre o eletromagnetismo está apresentado essencialmente em 3 artigos: “On Faraday’s Lines of Force” (1855), “On Physical Lines of Force” (1861), e “A Dynamical Theory of the Eletromagnetic Field” (1864). Eles também indicam uma evolução do pensamento de Maxwell sobre o tema [1]. No artigo de 1861, Maxwell apresenta sua correção à lei de Ampère, onde um novo termo contemplando a variação temporal do campo elétrico incorpora naturalmente a lei da conservação da carga. A então Lei de Ampère-Maxwell descreve como um campo elétrico variável no tempo induz a uma circulação de campo magnético. Em 1864, Maxwell então consegue criar uma teoria concisa para a eletricidade e para o magnetismo. É nesse artigo que o termo “Campo Eletromagnético” é introduzido [1].

A teoria de Maxwell pode ser sumarizada em suas quatro equações, que descrevem a dinâmica dos campos elétrico e magnético. Estas são,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{J}, \quad (1.4)$$

onde ρ é a densidade de carga total e \vec{J} é a densidade de corrente total do sistema. Quando trabalhamos em um meio material, se torna conveniente introduzirmos vetores auxiliares no problema. Definimos então os vetores \vec{D} e \vec{H} como,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}, \vec{B}), \quad (1.5)$$

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}(\vec{E}, \vec{B}), \quad (1.6)$$

onde \vec{P} e \vec{M} são chamados de polarização e magnetização, respectivamente, onde estes carregam as propriedades óticas do material. Estas são as relações constitutivas do meio material.

Podemos então reescrever as equações de Maxwell em termos dos vetores auxiliares. Esta então toma a forma,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho^{(l)}, \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad (1.9)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \partial_t \vec{D} + \vec{J}^{(l)}, \quad (1.10)$$

onde $\rho^{(l)} = \rho + \nabla \cdot \vec{P}$ é a densidade de cargas livres no material e $\vec{J}^{(l)} = \vec{J} - \partial_t \vec{P} - \nabla \times \vec{M}$ é a densidade de corrente livre.

Mesmo esta sendo uma teoria experimentalmente consolidada, com o passar do tempo, alguns problemas se apresentaram. Um deles é o problema da auto-energia de um elétron ser infinita. Outro era que, obviamente, a eletrodinâmica Maxwelliana não descrevia os efeitos quânticos e precisava de correção. Desta forma, novas teorias para o eletromagnetismo que visavam resolver tais problemas surgiram, como a teoria de Born-Infeld para a resolução do problema da auto-energia do elétron e a teoria de Euler-Heisenberg para os efeitos quânticos.

Dittrich e Gies [2] estudaram a propagação da luz para o caso da eletrodinâmica quântica utilizando a média sobre os estados de polarização da luz. Por causa do método utilizado por estes, os efeitos de birrefringência não são descritos neste trabalho. Este estudo foi posteriormente generalizado [3], onde se o fenômeno da birrefringência é investigado em detalhes. Citamos aqui alguns artigos que abordam o tema da propagação da luz em teorias não lineares: [4], onde se faz uma análise da equação de Fresnel e como, a partir desta, se determina a existência de birrefringência na teoria; [5], onde efeitos não lineares da teoria eletromagnética junto a efeitos gravitacionais são discutidos; [6], onde se estuda as propriedades do vácuo na teoria de Euler-Heisenberg na presença de um campo magnético constante e estático.

Apesar de muitas dessas teorias terem sido propostas já há muito tempo, algumas previsões feitas por estas continuam sem testes experimentais até os dias presentes, devido a necessidade de altíssimos valores para os campos eletromagnéticos.

Propostas de experimentação indireta para fenômenos que envolvem altas energias, como por exemplo: radiação Hawking; fenômenos eletromagnéticos em estrelas de neutrons; etc, são examinados através dos chamados modelos análogos. Apesar de já se falar em possíveis analogias desde a época de Einstein, quando o mesmo observou uma analogia entre os coeficientes ópticos de um meio material com a métrica do espaço-tempo [7], considera-se o seminal artigo de William Unruh [8], onde propõe-se uma possível mensuração da radiação Hawking em análogos na mecânica dos fluidos, como o ponto de partida para a criação de possíveis experimentos indiretos para diversos fenômenos físicos. Hoje, 42 anos depois, a aplicação de modelos análogos se estende para as mais diversas áreas da física [9] e é um tema de grande efervescência na comunidade científica.

Prestamo-nos neste trabalho então a criar um modelo análogo para a propagação da luz em teorias não lineares do eletromagnetismo. Iniciamos com um estudo de uma Lagrangiana que depende dos invariantes F e G , obtendo sua equação de movimento e tensor momento-energia no formalismo tensorial e vetorial. Passamos então para um breve estudo da teoria de Born-Infeld, sua motivação e primeiras consequências. Partimos então para o estudo da propagação da luz nesta teoria, onde mostramos duas formas distintas

de se obter a relação de dispersão. Calculamos também para esta a velocidade de fase, velocidade de grupo e índice de refração. Fazemos então a aplicação destes resultados a duas conhecidas teorias da literatura: Born-Infeld e Euler-Heisenberg. Em seguida, encontramos a velocidade de fase e o índice de refração para ondas propagando em meios materiais na teoria Maxwelliana. Finalizamos propondo uma analogia entre as métricas efetivas da teoria não linear e do meio material. Também propomos uma analogia entre os índices de refração, calculando os valores teóricos para o germânio e para o silício.

Utilizamos ao longo do texto as seguintes notações: a métrica de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$ com assinatura $(+, -, -, -)$; o tensor de Levi-Civita $\eta^{0123} = 1$; $\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$; o tensor dual de $F^{\mu\nu}$ como $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$; os invariantes F e G são dados por $F = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, $G = \tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$; denotamos por $A_{,\nu} = \partial A/\partial x^\nu$.

2 Fundamentos da eletrodinâmica não linear

A teoria eletromagnética de Maxwell pode ser derivada a partir do formalismo Lagrangiano, onde a Lagrangiana de Maxwell é $L = -F/4$. As resultantes equações de movimento são conhecidas como equações de Maxwell. Passemos então a um estudo mais geral, onde propomos uma Lagrangiana dependente dos dois únicos invariantes de Lorentz construídos a partir do tensor campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$, representados por F e G , que são dados por $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, respectivamente.

2.1 As equações de movimento

Seja a ação dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L(F, G), \quad (2.1)$$

onde g é o determinante da métrica de fundo $g^{\mu\nu}$. Aplicando a variação com respeito ao potencial vetor e utilizando o princípio de mínima ação, obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta A_\mu} &= \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\delta L(F, G)}{\delta A_\mu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(L_F \frac{\delta F}{\delta A_\mu} + L_G \frac{\delta G}{\delta A_\mu} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde L_X é dado por $L_X = \partial L / \partial X$, onde X representa qualquer um dos invariantes. A variação de F é dada por,

$$\frac{\delta F}{\delta A_\mu} = \frac{\delta F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}}{\delta A_\mu} = F^{\alpha\beta} \frac{\delta F_{\alpha\beta}}{\delta A_\mu} + F_{\alpha\beta} \frac{\delta F^{\alpha\beta}}{\delta A_\mu} = 2F^{\alpha\beta} \frac{\delta F_{\alpha\beta}}{\delta A_\mu}. \quad (2.3)$$

Similarmente, para a variação de G ,

$$\frac{\delta G}{\delta A_\mu} = \tilde{F}^{\alpha\beta} \frac{\delta F_{\alpha\beta}}{\delta A_\mu} + F_{\alpha\beta} \frac{\delta \tilde{F}^{\alpha\beta}}{\delta A_\mu} = \tilde{F}^{\alpha\beta} \frac{\delta F_{\alpha\beta}}{\delta A_\mu} + F_{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta A_\mu} \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\sigma\tau} F_{\sigma\tau}.$$

Como $\eta^{\alpha\beta\sigma\tau} = \eta^{\sigma\tau\alpha\beta}$, temos,

$$\frac{\delta G}{\delta A_\mu} = \tilde{F}^{\alpha\beta} \frac{\delta F_{\alpha\beta}}{\delta A_\mu} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\sigma\tau} F_{\alpha\beta} \frac{\delta F_{\sigma\tau}}{\delta A_\mu} = \tilde{F}^{\alpha\beta} \frac{\delta F_{\alpha\beta}}{\delta A_\mu} + \tilde{F}^{\sigma\tau} \frac{\delta F_{\sigma\tau}}{\delta A_\mu}.$$

Renomeando os índices, encontramos,

$$\frac{\delta G}{\delta A_\mu} = 2\tilde{F}^{\alpha\beta} \frac{\delta F_{\alpha\beta}}{\delta A_\mu}. \quad (2.4)$$

Utilizando (2.3) e (2.4) em (2.2), obtemos,

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(2L_F F^{\alpha\beta} \frac{\delta F_{\alpha\beta}}{\delta A_\mu} + 2L_G \tilde{F}^{\alpha\beta} \frac{\delta F_{\alpha\beta}}{\delta A_\mu} \right).$$

Aplicando a definição $F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}$, e utilizando a regra de Leibniz, segue que,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta A_\mu} &= 4 \int d^4x \sqrt{-g} \left(L_F F^{\alpha\beta} \frac{\delta A_{\alpha,\beta}}{\delta A_\mu} + L_G \tilde{F}^{\alpha\beta} \frac{\delta A_{\alpha,\beta}}{\delta A_\mu} \right) \\ &= -4 \int d^4x \sqrt{-g} \left(L_F F^{\alpha\beta} \frac{\delta A_\alpha}{\delta A_\mu} + L_G \tilde{F}^{\alpha\beta} \frac{\delta A_\alpha}{\delta A_\mu} \right)_{,\beta} \\ &= -4 \int d^4x \sqrt{-g} \left(L_F F^{\mu\beta} + L_G \tilde{F}^{\mu\beta} \right)_{,\beta} = 0. \end{aligned}$$

Temos então a equação de movimento,

$$\left(L_F F^{\mu\beta} + L_G \tilde{F}^{\mu\beta} \right)_{,\beta} = 0. \quad (2.5)$$

Vejamos que, caso tomemos $L = -F/4$, recairemos nas equações de movimento da teoria linear de Maxwell.

Temos ainda uma segunda equação dada pelo fato do tensor $F^{\mu\nu}$ ser antissimétrico, chamada identidade de Bianchi,

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0. \quad (2.6)$$

Vejamos que esta é verdadeira. Da definição de $F_{\alpha\beta}$ e da comutatividade da derivada, segue que,

$$(A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta})_{,\gamma} + (A_{\gamma,\beta} - A_{\beta,\gamma})_{,\alpha} + (A_{\alpha,\gamma} - A_{\gamma,\alpha})_{,\beta} = 0,$$

que pode ser reescrita como,

$$\tilde{F}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0. \quad (2.7)$$

Vejamos, multiplicando a identidade (2.6) pelo fator 1/2 e pelo tensor de Levi-Civita $\eta^{\sigma\gamma\alpha\beta}$, obtemos,

$$\left(\frac{1}{2} \eta^{\sigma\gamma\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right)_{,\gamma} + \left(\frac{1}{2} \eta^{\sigma\gamma\alpha\beta} F_{\beta\gamma} \right)_{,\alpha} + \left(\frac{1}{2} \eta^{\sigma\gamma\alpha\beta} F_{\gamma\alpha} \right)_{,\beta} = 0.$$

Utilizando as propriedades de antissimetria do tensor de Levi-Civita e renomeando os índices, chegamos à (2.7).

Abrindo então a equação (2.5),

$$\left(L_F F^{\mu\nu} + L_G \tilde{F}^{\mu\nu} \right)_{,\nu} = L_{F,\nu} F^{\mu\nu} + L_F F^{\mu\nu}_{,\nu} + L_{G,\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + L_G \tilde{F}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0,$$

sendo,

$$L_{F,\nu} = L_{FF} F_{,\nu} + L_{FG} G_{,\nu},$$

$$L_{G,\nu} = L_{FG} F_{,\nu} + L_{GG} G_{,\nu},$$

onde,

$$F_{,\beta} = 2F^{\mu\nu} F_{\mu\nu,\beta},$$

$$G_{,\beta} = 2\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu,\beta}.$$

Finalmente, utilizando (2.6), temos então a equação de movimento da teoria não linear geral $L(F, G)$, escrita como [3],

$$2N^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta,\nu} + L_F F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad (2.8)$$

onde,

$$N^{\mu\nu\alpha\beta} = L_{FF}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} + L_{GG}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}^{\alpha\beta} + L_{FG}(F^{\mu\nu}\tilde{F}^{\alpha\beta} + \tilde{F}^{\mu\nu}F^{\alpha\beta})$$

Temos então que (2.7) e (2.8) são as equações de movimento que descrevem a dinâmica do campo eletromagnético em uma teoria eletromagnética não linear.

2.2 O tensor momento-energia

Calculamos agora o tensor momento-energia para uma teoria não linear do eletromagnetismo. O tensor momento-energia é dado, por definição, por [10],

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.9)$$

onde,

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}.$$

A variação da Lagrangiana com respeito a métrica é dada por,

$$\frac{\delta L(F, G)}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial F} \frac{\delta F}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial G} \frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}},$$

onde a variação de F com respeito a métrica é,

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\delta F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta(F_{\lambda\sigma} F_{\alpha\beta} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma})}{\delta g^{\mu\nu}} = F_{\alpha\beta} F_{\lambda\sigma} \left(g^{\alpha\lambda} \frac{\delta g^{\beta\sigma}}{\delta g^{\mu\nu}} + g^{\beta\sigma} \frac{\delta g^{\alpha\lambda}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \\ &= F_{\alpha\beta} F_{\lambda\sigma} (g^{\alpha\lambda} \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\sigma + g^{\beta\sigma} \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\lambda) = 2g^{\alpha\lambda} F_{\alpha\mu} F_{\lambda\nu}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por sua vez, a variação de G é dada por,

$$\begin{aligned} \frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\delta \tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta(\tilde{F}_{\lambda\sigma} F_{\alpha\beta} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma})}{\delta g^{\mu\nu}} = \tilde{F}_{\alpha\beta} F_{\lambda\sigma} \left(2g^{\alpha\lambda} \frac{\delta g^{\beta\sigma}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \\ &= 2g^{\alpha\lambda} \tilde{F}_{\alpha\mu} F_{\lambda\nu}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Desta forma, escrevemos $T_{\mu\nu}$ como,

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}Lg_{\mu\nu} + \sqrt{-g}(2L_F g^{\alpha\lambda} F_{\alpha\mu} F_{\lambda\nu} + 2L_G g^{\alpha\lambda} \tilde{F}_{\alpha\mu} F_{\lambda\nu}) \right] \\ &= -4L_F F_\mu{}^\lambda F_{\lambda\nu} + g_{\mu\nu}(L_G G - L). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Como a Lagrangiana não depende explicitamente de x^μ , temos que a quadridivergência de $T^{\mu\nu}$ é zero [10]. Logo, temos 10 constantes de movimento: o quadrivetor momento-energia p^μ e o tensor momento angular relativístico $M^{\mu\nu}$, dados por,

$$\begin{aligned} p^\mu &= \int d^3r T^{\mu 0}, \\ M^{\mu\nu} &= \int d^3r (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}). \end{aligned}$$

2.3 Eletrodinâmica não linear no formalismo do cálculo vetorial

Mostremos agora a formulação da teoria não linear da eletrodinâmica com o cálculo vetorial. Fazemos isto, pois esta foi utilizada em artigos históricos sobre o tema e ainda aparece em artigos atuais [11, 12, 13]. As vantagens físicas de uma análise no contexto do cálculo vetorial ficarão explícitas ao longo do capítulo.

Vejamos que, da equação (2.5), as equações de movimento da teoria não linear podem ser escritas como a quadridivergência de um tensor construído a partir das derivadas da Lagrangiana e os tensores $F^{\mu\nu}$ e seu dual,

$$Q^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad (2.13)$$

onde $Q^{\mu\nu} = L_F F^{\mu\nu} + L_G \tilde{F}^{\mu\nu}$. Assim como se faz na eletrodinâmica Maxwelliana, podemos abrir esta quadridivergência e verificar quais equações cada valor do índice μ representa. Então, para $\mu = 0$ temos,

$$(L_F F^{01} + L_G \tilde{F}^{01})_{,1} + (L_F F^{02} + L_G \tilde{F}^{02})_{,2} + (L_F F^{03} + L_G \tilde{F}^{03})_{,3} = 0,$$

$$(L_F E_x + L_G B_x)_{,x} + (L_F E_y + L_G B_y)_{,y} + (L_F E_z + L_G B_z)_{,z} = 0.$$

Definindo então o vetor auxiliar \vec{D} como,

$$\vec{D} \doteq \begin{pmatrix} L_F E_x + L_G B_x \\ L_F E_y + L_G B_y \\ L_F E_z + L_G B_z \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

temos a equação

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0. \quad (2.15)$$

Para os índices espaciais, temos: Para $\mu = 1$,

$$(L_F F^{10} + L_G \tilde{F}^{10})_{,0} + (L_F F^{12} + L_G \tilde{F}^{12})_{,2} + (L_F F^{13} + L_G \tilde{F}^{13})_{,3} = 0,$$

$$(L_F E_x + L_G B_x)_{,0} + (L_F(-B_z) + L_G E_z)_{,2} + (L_F B_y - L_G E_y)_{,3} = 0.$$

Para $\mu = 2$,

$$(L_F F^{20} + L_G \tilde{F}^{20})_{,0} + (L_F F^{21} + L_G \tilde{F}^{21})_{,1} + (L_F F^{23} + L_G \tilde{F}^{23})_{,3} = 0,$$

$$(L_F E_y + L_G B_y)_{,0} + (L_F B_z - L_G E_z)_{,1} + (L_F(-B_x) + L_G E_x)_{,3} = 0.$$

Para $\mu = 3$,

$$\partial_0(L_F F^{30} + L_G \tilde{F}^{30})_{,0} + \partial_1(L_F F^{31} + L_G \tilde{F}^{31})_{,1} + \partial_2(L_F F^{32} + L_G \tilde{F}^{32})_{,2} = 0,$$

$$(L_F E_z + L_G B_z)_{,0} + (L_F(-B_y) + L_G E_y)_{,1} + (L_F B_x - L_G E_x)_{,2} = 0.$$

Definindo agora o vetor auxiliar \vec{H} como,

$$\vec{H} \doteq \begin{pmatrix} L_F B_x - L_G E_x \\ L_F B_y - L_G E_y \\ L_F B_z - L_G E_z \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

temos,

$$\partial \vec{D} / \partial t = \nabla \times \vec{H}. \quad (2.17)$$

Assim, de (2.7) e (2.13), temos as 4 equações que regem o eletromagnetismo não linear no formalismo vetorial,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.18)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t, \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \partial \vec{D} / \partial t. \quad (2.21)$$

Se tomamos a Lagrangiana como sendo a Lagrangiana de Maxwell, $L = -F/4$, recuperamos as equações de Maxwell, como deve ser.

Perceba que estas equações tem o mesmo formato das equações de Maxwell em um meio material, onde temos que as equações (2.18) e (2.19) sempre são válidas, pois são consequências da identidade de Bianchi (2.7); e (2.20) e (2.21) são as equações de Maxwell com os vetores auxiliares \vec{D} e \vec{H} , que possuem as informações do meio material. Este fato nos leva a concluir que, em uma eletrodinâmica não linear, a permissividade do vácuo não é mais uma constante, mas sim uma função dos campos \vec{E} e \vec{B} . Este resultado já havia sido percebido em artigos pioneiros do tema, como no clássico artigo de 1934 de Max Born e Leopold Infeld [12], que será apresentado em um capítulo posterior.

Vemos então que $Q^{\mu\nu}$ é escrito em componentes como,

$$Q^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Podemos escrever o tensor momento-energia em termos de $Q^{\mu\nu}$, onde $T^{\mu\nu}$ é dado por,

$$T^{\mu\nu} = -4F^\mu{}_\lambda Q^{\lambda\nu} - \eta^{\mu\nu} L. \quad (2.23)$$

Para demonstrarmos este fato, tomemos o tensor momento-energia (2.12) já encontrado anteriormente,

$$T^{\mu\nu} = -4L_F F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + g^{\mu\nu} (GL_G - L).$$

Utilizando a identidade $F^\mu{}_\lambda \tilde{F}^{\lambda\nu} = -\frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} G$ na equação anterior, obtemos,

$$T^{\mu\nu} = -4L_F F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} - 4L_G F^\mu{}_\lambda \tilde{F}^{\lambda\nu} - \eta^{\mu\nu} L.$$

Logo, temos a equação,

$$T^{\mu\nu} = -4F^\mu{}_\lambda(L_F F^{\lambda\nu} + L_G \tilde{F}^{\lambda\nu}) - \eta^{\mu\nu}L = -4F^\mu{}_\lambda Q^{\lambda\nu} - \eta^{\mu\nu}L.$$

Podemos então abrir as componentes do tensor momento-energia,

$$T^{00} = -4F^0{}_\lambda Q^{\lambda 0} - \eta^{00}L = -4\vec{E} \cdot \vec{D} - L, \quad (2.24)$$

$$T^{0i} = -4F^0{}_\lambda Q^{\lambda i} - \eta^{0i}L = -4(\vec{E} \times \vec{H})^i, \quad (2.25)$$

$$T^{i0} = -4F^i{}_\lambda Q^{\lambda 0} - \eta^{i0}L = -4(\vec{D} \times \vec{B})^i, \quad (2.26)$$

$$T^{ij} = -4F^i{}_\lambda Q^{\lambda j} - \eta^{ij}L = -4F^i{}_\lambda Q^{\lambda j} + \delta^{ij}L. \quad (2.27)$$

Para este último cálculo, vamos decompor $F^i{}_\lambda$ e $Q^{\lambda j}$ [14, 15, 16]. Definimos V^μ como o campo de velocidade de um observador. Ao longo deste trabalho, trabalharemos com um observador comóvel ao sistema, ou seja, $V^\mu = (1, \vec{0})$. Temos então,

$$F^i{}_\lambda Q^{\lambda j} = (E^i V_\lambda - E_\lambda V^i + \eta^i{}_\lambda{}^{\alpha\beta} V_\alpha B_\beta)(D^\lambda V^j - D^j V^\lambda + \eta^{\lambda j \tau \theta} V_\tau H_\theta).$$

Como $V^\mu = (1, \vec{0})$, $V^j = 0$. Temos então,

$$F^i{}_\lambda Q^{\lambda j} = -E^i D^j + \eta^i{}_\lambda{}^{\alpha\beta} \eta^{\lambda j \tau \theta} V_\alpha V_\tau B_\beta H_\theta.$$

Utilizando que o produto dos tensores de Levi-Civita é dado por [10],

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} \eta_{\sigma\rho\theta\tau} = \begin{vmatrix} \delta_\sigma^\alpha & \delta_\rho^\alpha & \delta_\theta^\alpha & \delta_\tau^\alpha \\ \delta_\sigma^\beta & \delta_\rho^\beta & \delta_\theta^\beta & \delta_\tau^\beta \\ \delta_\sigma^\gamma & \delta_\rho^\gamma & \delta_\theta^\gamma & \delta_\tau^\gamma \\ \delta_\sigma^\lambda & \delta_\rho^\lambda & \delta_\theta^\lambda & \delta_\tau^\lambda \end{vmatrix}, \quad (2.28)$$

temos,

$$\eta^i{}_\lambda{}^{\alpha\beta} \eta^{\lambda j \tau \theta} V_\alpha V_\tau B_\beta H_\theta = -H^i B^j + \delta^{ij}(\vec{B} \cdot \vec{H}).$$

Logo, temos que as componentes espaciais do tensor momento-energia são dadas por,

$$T^{ij} = 4E^i D^j + 4H^i B^j + \delta^{ij}(-4\vec{H} \cdot \vec{B} + L), \quad (2.29)$$

onde T^{00} é a densidade de energia, T^{0i} é o fluxo de energia e T^{ij} são as componentes do tensor tensão de Maxwell. Dado que o tensor momento-energia é simétrico, segue que $T^{0i} = T^{i0}$. Assim,

$$\vec{E} \times \vec{H} = \vec{D} \times \vec{B}. \quad (2.30)$$

Esta relação é válida para qualquer teoria não linear do eletromagnetismo.

Assim como na eletrodinâmica de Maxwell, as novas leis aqui deduzidas nos dizem quais são os campos que podem existir nas teorias não lineares, e a partir destas, nos ditam qual é sua dinâmica.

Passamos agora ao estudo de uma proposta de teoria não linear do eletromagnetismo, onde utilizaremos todos os resultados deduzidos até aqui.

2.4 Teoria de Born-Infeld

Proposta por Max Born e Leopold Infeld primeiro em 1933 [17] e generalizada em 1934 [12] pelos mesmos, esta teoria não linear do eletromagnetismo é proposta em um contexto onde se discutia a relação entre o campo eletromagnético e a matéria. A primeira, chamada de “unitária”, tratava como se somente o campo eletromagnético fosse uma entidade física, onde as partículas são singularidades dos campos e a massa um conceito derivado da energia do campo, levando ao conceito de “massa eletromagnética”. A segunda, chamada “dualística”, tomava os campos e partículas como objetos diferentes, onde as partículas produzem e sofrem forças dos campos, mas não são produtos destes. Sua propriedade intrínseca é o conceito de inércia, mais especificamente a massa inercial.

Diversos fatores levaram a maioria dos físicos (nas palavras de Born e de Infeld) a adotar a visão dualística, tais como: o triunfo da teoria da relatividade, onde se observa a dependência da massa com a velocidade; os problemas do desenvolvimento da teoria unitária que envolvia a criação de forças não eletromagnéticas; a necessidade da imposição de uma forma geométrica para o elétron; os problemas da teoria de Mie, que tentava contornar os outros problemas ao modificar as equações de Maxwell, ao depender do valor absoluto dos potenciais eletromagnéticos. Por último, a mecânica quântica que era fortemente baseada na visão dualística.

Apesar disso, outros problemas advindos da interpretação unitária persistiam, como o problema da auto-energia de uma carga pontual ser infinita. Também, haviam problemas na teoria quando os comprimentos de onda de ondas eletromagnéticas ou de de Broglie eram da ordem do “raio” do elétron. Este “raio” é deduzido puramente da teoria clássica Maxwelliana, onde se iguala a energia eletrostática de uma esfera à sua energia relativística em repouso, e com isso se identifica o raio da esfera com o raio do elétron [18].

$$r_e = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-15} \text{ m.} \quad (2.31)$$

Pelo fato de não aparecer a constante de Planck nesta expressão, Born e Infeld advogam pela modificação das equações de Maxwell e defendem que devemos então adaptar as leis quânticas para a nova teoria do eletromagnetismo. Apresentaremos agora as ideias e o processo da construção da nova teoria proposta.

Iniciemos com um postulado: A ação deve ser um invariante. Para isso, a Lagrangiana deve ser da forma,

$$L = \sqrt{|A_{\alpha\beta}|},$$

onde $|A_{\alpha\beta}|$ é o determinante de $A_{\alpha\beta}$. Desta forma,

$$S = \int \sqrt{|A_{\alpha\beta}|} d\tau,$$

onde $d\tau = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$. Não supomos nenhuma simetria sobre $A_{\alpha\beta}$, e sabemos que todo tensor pode ser separado na soma de um tensor simétrico, $g_{\alpha\beta}$ e um antissimétrico, $f_{\alpha\beta}$. Assim,

$$A_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}. \quad (2.32)$$

Aqui fazemos outra hipótese: identificaremos o tensor simétrico $g_{\alpha\beta}$ com o tensor métrico e o tensor antissimétrico $f_{\alpha\beta}$ com o tensor eletromagnético. Temos então 3 objetos que multiplicados por $d\tau$ são invariantes,

$$\sqrt{-|A_{\alpha\beta}|} = \sqrt{-|\eta_{\alpha\beta} + TF_{\alpha\beta}|}, \quad \sqrt{-|\eta_{\alpha\beta}|}, \quad \sqrt{|F_{\alpha\beta}|}, \quad (2.33)$$

onde T é uma constante a ser determinada, cuja unidade é inverso de campo. O sinal de negativo foi adicionado para que tenhamos valores positivos dentro das raízes. Podemos então construir uma Lagrangiana como uma função linear das expressões em (2.33). Assim,

$$L = a\sqrt{-|\eta_{\alpha\beta} + TF_{\alpha\beta}|} + b\sqrt{-|\eta_{\alpha\beta}|} + c\sqrt{|TF_{\alpha\beta}|}. \quad (2.34)$$

Perceba que o terceiro termo pode ser ignorado, pois $F_{\alpha\beta}$ é o rotacional de um quadri vetor potencial, logo sua integral ao longo do espaço-tempo pode ser transformada numa integral de superfície pelo teorema de Stokes, que não contribui para a ação. Tomemos então $c = 0$. Para determinarmos a e b , vamos impor que nossa teoria deve, no limite de campo fraco, recuperar as equações de Maxwell, ou seja, $L = -F/4$. Assim,

$$\begin{aligned} -|\eta_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}| &= 1 + T^2(F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{23}^2 - F_{01}^2 - F_{02}^2 - F_{03}^2) - T^4|F_{\alpha\beta}|, \\ &= 1 + T^2(B^2 - E^2) - T^4|F_{\alpha\beta}| = 1 + \frac{T^2F}{2} - T^4|F_{\alpha\beta}|, \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde $F = 2(B^2 - E^2)$. Perceba que os termos de $|F_{\alpha\beta}|$ levam campos na quarta potência, este então pode ser ignorado no limite de campo fraco. Como estamos no espaço-tempo de Minkowski, $|\eta_{\alpha\beta}| = -1$. Temos então a expressão,

$$L = b + a\sqrt{1 + \frac{T^2F}{2}}.$$

Expandindo em relação a F , obtemos,

$$L = (a + b) + \frac{aT^2F}{4} + \mathcal{O}(F^2).$$

Comparando com a Lagrangiana de Maxwell, chegamos a conclusão que $b = -a = 1/T^2 = \beta^2$. Reescrevemos as constantes como β^2 por conveniência da notação ser mais utilizada na literatura. Note que $|F_{\alpha\beta}| = (\vec{E} \cdot \vec{B})^2$, logo, podemos expressar a Lagrangiana em termos de F e G . Desta forma,

$$L = \beta^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F}{2\beta^2} - \frac{G^2}{16\beta^4}} \right). \quad (2.36)$$

Podemos entender qual é o significado de β . Tomemos por exemplo que $\vec{B} = 0$. Do termo dentro da raiz, obtemos,

$$1 - \frac{E^2}{\beta^2}.$$

Como o termo dentro da raiz deve ser maior ou igual a zero, vemos então que, para um sistema que possui somente campo elétrico, β é um valor máximo que E pode assumir. No artigo original de Born e Infeld, estes introduzem a constante β de uma maneira diferente. Eles postulam a existência de um sistema de unidade absoluto para os campos, e que podemos transformar esta unidade para uma unidade convencional por meio da constante β . A ideia segue a mesma lógica de escrevermos a velocidade como u , tal que $u = v/c$, onde u é a velocidade em um sistema absoluto ponderado pela velocidade limite c e v é a velocidade no sistema convencional. Vejamos agora caso o sistema admita campo magnético. Temos então que o campo elétrico crítico é dado quando o fator dentro da raiz é nulo.

$$1 + \frac{B^2 - E_{crit}^2}{\beta^2} - \frac{B^2 E_{crit}^2 \cos^2(\phi)}{\beta^4} = 0,$$

onde ϕ é o ângulo entre o campo elétrico e o campo magnético. Com algumas manipulações algébricas simples, encontramos o valor de campo elétrico crítico,

$$E_{crit} = \beta \sqrt{\frac{\beta^2 + B^2}{\beta^2 + B^2 \cos^2(\phi)}}, \quad (2.37)$$

Note que o campo elétrico crítico agora depende da magnitude do campo magnético e o ângulo entre eles, ϕ .

Vamos agora analisar algumas consequências desta teoria. Analisemos agora o caso de um campo eletrostático, ou seja, $\vec{B} = \vec{H} = 0$. Temos então, das equações (2.19) e (2.20) e assumindo simetria esférica,

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 = \frac{d}{dr}(r^2 D_r) = 0,$$

$$\vec{D} = \frac{c}{r^2} \hat{r}, \quad (2.38)$$

onde c é a constante de integração. Vejamos que podemos determinar quem é c pelo limite Maxwelliano. Sendo, em nosso caso, $\vec{D} = L_F \vec{E}$, e $L_F = -1/4$ na Lagrangiana Maxwelliana, temos,

$$-\frac{1}{4} \vec{E} = \frac{c}{r^2} \hat{r},$$

$$\vec{E} = -\frac{4c}{r^2} \hat{r}.$$

Agora, comparando ao resultado Maxwelliano para o campo de uma partícula pontual,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r},$$

e, como estamos interessados em determinar a auto-energia do elétron, comparamos então a constante c com o campo de um elétron. Chegamos então a conclusão que $c = q_e/16\pi$, onde q_e é a carga do elétron. Temos então,

$$\vec{D} = \frac{q_e}{16\pi r^2} \hat{r}. \quad (2.39)$$

Destá, utilizamos agora que $\vec{D} = L_F \vec{E}$ para encontrar \vec{E} , onde agora utilizamos a Lagrangiana de Born-Infeld (2.36), onde L_F é,

$$L_F = -\frac{1}{4\sqrt{1 - \frac{E^2}{\beta^2}}}.$$

Temos então,

$$\vec{E} = -\frac{q_e}{4\pi r_0^2 \sqrt{1 + \frac{r^4}{r_0^4}}} \hat{r}, \quad (2.40)$$

onde r_0 é definido como,

$$r_0 \doteq \sqrt{\frac{q_e}{4\pi\beta}}. \quad (2.41)$$

Veja que, se tomamos o limite de r_0 indo a zero, recuperamos o resultado Maxwelliano. A diferença entre o comportamento do campo previsto por Maxwell e por Born-Infeld está ilustrada na figura 1.

Do fato do rotacional de \vec{E} ser nulo, podemos definir um potencial escalar para este, ou seja,

$$\vec{E} = -\nabla\phi,$$

ou,

$$\phi(a) - \phi(b) = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

Assim,

$$\phi(x) = -\frac{q_e}{4\pi r_0} \int_x^\infty \frac{dy}{\sqrt{1 + y^4}}, \quad (2.42)$$

onde $x = r/r_0$.

Perceba que, tanto o campo eletrostático, quanto o potencial, não divergem quando nos aproximamos da origem, mesmo que \vec{E} esteja mal definido na origem pela escolha do sistema de coordenadas. A diferença entre o potencial eletrostático Maxwelliano e o dado pela teoria de Born-Infeld está ilustrada na figura 2. Temos para o potencial na origem,

$$\phi(0) = -\frac{1.85407 q_e}{4\pi r_0}$$

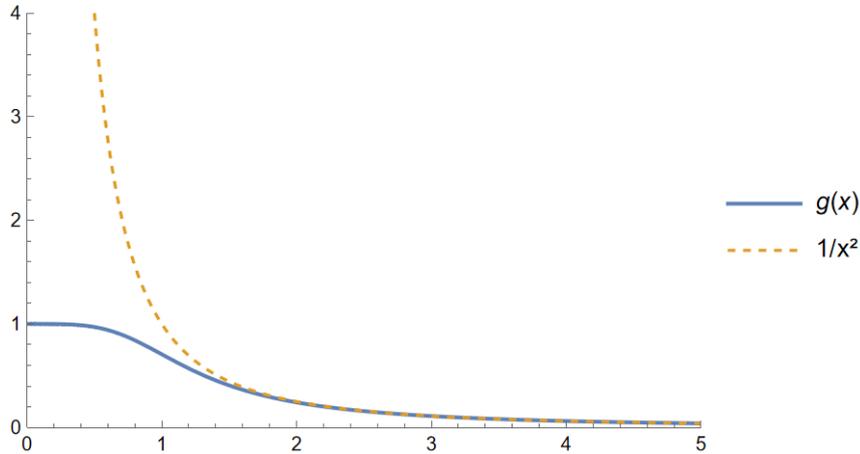


Figura 1: Decaimento do campo eletrostático da teoria de Born-Infeld comparado ao Maxwelliano. $g(x) = 1/\sqrt{1+x^4}$

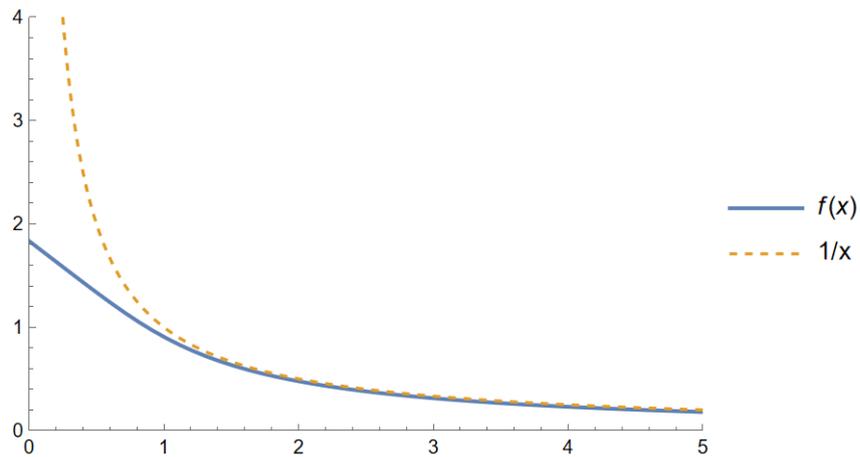


Figura 2: Decaimento do potencial eletrostático da teoria de Born-Infeld comparado ao Maxwelliano. $f(x) = \int_x^\infty dy/\sqrt{1+y^4}$

Como o campo eletrostático não possui divergência nula, podemos então associar o valor da divergência com uma distribuição de cargas livres, ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho,$$

que resulta,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \rho,$$

Temos então,

$$\rho = -\frac{2q_e}{r_0^2 r \left(1 + \frac{r^4}{r_0^4}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.43)$$

A integral em todo o espaço de ρ nos dá, como esperado,

$$\int \rho dv = -q_e.$$

Também poderíamos obter ρ da definição de \vec{D} ,

$$\rho = -\frac{(\nabla L_F) \cdot \vec{E}}{L_F}.$$

Veja que a densidade de carga (2.43) decai com r^7 se $r \gg r_0$ e r quando $r < r_0$.

A teoria de Born-Infeld então engloba as duas possibilidades para a interpretação do elétron. Partícula pontual ou uma distribuição espacial de carga, são completamente equivalentes. Podemos então interpretar o elétron como uma partícula pontual que é a fonte do campo \vec{D} , ou de uma distribuição espacial de cargas que gera o campo \vec{E} . Nas palavras de Born e de Infeld: “A questão de qual das duas interpretações do elétron está correta não tem sentido”[12].

Mostremos agora como a teoria de Born-Infeld resolve o problema da auto-energia do elétron. A densidade de energia é dada pela equação (2.24), onde temos,

$$T^{00} = U = -4\vec{E} \cdot \vec{D} - L.$$

Então,

$$E = \int U dv = \int \left(\frac{q^2 \left[r^2 \left(\sqrt{\frac{r^4}{r_0^4}} - \sqrt{\frac{r^4}{r_0^4} + 1} \right) + r_0^2 \right]}{16\pi^2 r^2 r_0^4 \sqrt{\frac{r^4}{r_0^4} + 1}} \right) dv = 0.098361 \frac{q_e^2}{r_0}. \quad (2.44)$$

Assim, provamos que, na teoria de Born-Infeld, a auto-energia de um elétron é finita. Para calcularmos o valor de r_0 em unidades internacionais, recuperemos as unidades físicas na expressão (2.44). Perceba que devemos então introduzir a constante ϵ_0 no denominador. Igualemos então a expressão à energia relativística do elétron em repouso. Encontramos então,

$$r_0 = 1.23604 \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 3.4857 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (2.45)$$

Assim, calculando também o valor de β no SI, temos,

$$\beta = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 c r_0^2} = 3.955 \times 10^{11} \text{ T}. \quad (2.46)$$

Interpretamos então r_0 como o novo “raio” do elétron, perceba que nosso valor é apenas uma pequena correção do valor obtido pela teoria Maxwelliana. Veja que, a menos de campos de ordem β , ou se estivermos muito próximo a r_0 , as equações de Born-Infeld são basicamente as mesmas de Maxwell, justificando assim a dificuldade de verificação experimental da nova teoria.

Terminamos aqui nosso breve estudo sobre a teoria de Born-Infeld. Existem diversos outros resultados desta teoria aqui não mostrados, como a quantização dessa teoria (feita também por Born e Infeld [19, 20]), o trabalho de 1962 de Dirac [21], os avanços de Białyński-Birula [11], e os atuais interesses da teoria-M na eletrodinâmica de Born-Infeld [22, 23]. Passaremos agora ao estudo da propagação da luz nas teorias não lineares, e com os resultados, estudaremos posteriormente a propagação da luz nesta teoria.

3 A propagação da luz em teorias não lineares

3.1 Relação de dispersão

Vamos agora investigar a propagação da luz em teorias não lineares. Em nossa análise, separamos o campo elétrico total como a soma de um campo de fundo que varia lentamente, \vec{E}_0 , e um campo fraco se comparado a E_0 , mas que varia rapidamente no tempo, \vec{E}_ω . Isso quer dizer que $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_\omega \approx \vec{E}_0$, mas $\partial_\mu \vec{E} \approx \partial_\mu \vec{E}_\omega$. Vamos tomar o campo \vec{E}_ω como sendo uma onda plana monocromática, isto é, $\vec{E}_\omega = \vec{e} \exp[i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{x})]$, onde \vec{e} é o vetor de polarização, ω é a frequência angular e \vec{q} o vetor de onda. Fazemos o mesmo para \vec{B} , com $\vec{B}_\omega = \vec{b} \exp[i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{x})]$. Seja $k^\mu = (\omega, \vec{q})$, assim temos que $\omega t - \vec{q} \cdot \vec{x} = k^\mu x_\mu = \Sigma$ é a hipersuperfície de fase das ondas planas, onde k_μ é o vetor gradiente de Σ . Para evitar uma notação carregada, abandonaremos os índices 0 e ω nos campos, que ficarão subentendidos no contexto. Como consequência de nossas aproximações, teremos que a equação de onda volta a ser linear, ou seja, do formato $\gamma \partial_t^2 \phi - \nabla^2 \phi = 0$, onde o fator γ possui as informações sobre a não linearidade da teoria eletromagnética, assim como é feito para a propagação de ondas num meio material polarizado por um campo externo [24]. Ou seja, estamos trabalhando com óptica linear num contexto de eletrodinâmica não linear.

Para analisar a propagação da luz nas teorias não lineares, utilizaremos aqui o método de Hadamard [14, 15, 25]. Neste método, estudamos a propagação pela evolução das frentes de onda, onde o campo é contínuo mas suas derivadas não. Definimos a operação de descontinuidade de Hadamard como segue.

Seja Σ a superfície definida por $z(x^\mu) = 0$. Se Σ é uma superfície global, ela delimita duas regiões distintas U^- e U^+ , que correspondem a $z < 0$ e $z > 0$ respectivamente. Dada uma função arbitrária das coordenadas $g(x^\mu)$, definimos a operação $[\]_\Sigma$ sobre um campo de $g(x^\alpha)$ por

$$[g(x^\alpha)]_\Sigma = \lim_{P^\pm \rightarrow P} [g(P^+) - g(P^-)],$$

onde P^+ , P^- e P pertencem a U^+ , U^- e Σ respectivamente. Podemos entender a “descontinuidade” como a diferença do valor do campo no limite de coincidência dos pontos, assim tendo a ideia de gradiente. O método de Hadamard aplicado para o eletromagnetismo é equivalente a aproximação eikonal [15].

Da aplicação da descontinuidade de Hadamard no tensor eletromagnético e em suas derivadas,

$$[F_{\alpha\beta}]_\Sigma = 0,$$

$$[F_{\alpha\beta,\lambda}]_{\Sigma} = f_{\alpha\beta}k_{\lambda}.$$

Aplicando-a na identidade de Bianchi (2.6),

$$f_{\alpha\beta}k_{\lambda} + f_{\beta\lambda}k_{\alpha} + f_{\lambda\alpha}k_{\beta} = 0.$$

Contraindo este resultado com $F^{\alpha\beta}k^{\lambda}$ e com $\tilde{F}^{\alpha\beta}k^{\lambda}$, teremos,

$$F^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}k^{\lambda}k_{\lambda} + F^{\alpha\beta}f_{\beta\lambda}k^{\lambda}k_{\alpha} + F^{\alpha\beta}f_{\lambda\alpha}k^{\lambda}k_{\beta} = 0,$$

$$\tilde{F}^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}k^{\lambda}k_{\lambda} + \tilde{F}^{\alpha\beta}f_{\beta\lambda}k^{\lambda}k_{\alpha} + \tilde{F}^{\alpha\beta}f_{\lambda\alpha}k^{\lambda}k_{\beta} = 0.$$

Definindo $\zeta = F^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}$, ${}^*\zeta = \tilde{F}^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}$ e, pela antissimetria dos tensores, temos,

$$\zeta k^2 = -2F^{\alpha\beta}f_{\beta\lambda}k^{\lambda}k_{\alpha}, \quad (3.1)$$

$${}^*\zeta k^2 = -2\tilde{F}^{\alpha\beta}f_{\beta\lambda}k^{\lambda}k_{\alpha}. \quad (3.2)$$

onde $k^2 = k^{\lambda}k_{\lambda} = \eta^{\alpha\lambda}k_{\alpha}k_{\lambda}$.

Agora, aplicando a descontinuidade de Hadamard na equação de movimento (2.8), temos,

$$2N^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\alpha\beta}k_{\nu} + L_F f^{\mu\nu}k_{\nu} = 0,$$

ou,

$$f_{\mu\nu}k^{\nu} = -\frac{2}{L_F}N_{\mu}{}^{\nu\alpha\beta}f_{\alpha\beta}k_{\nu}. \quad (3.3)$$

Utilizando as seguintes identidades

$$\tilde{F}_{\mu\alpha}F^{\alpha}{}_{\nu} = -\frac{1}{4}G\eta_{\mu\nu},$$

$$F_{\mu\alpha}F^{\nu\alpha} - \tilde{F}_{\mu\alpha}\tilde{F}^{\nu\alpha} = \frac{1}{2}F\delta_{\mu}{}^{\nu}.$$

e introduzindo (3.3) em (3.1), obtemos,

$$\begin{aligned} \zeta k^2 &= -2F^{\alpha\beta}k_{\alpha} \left(-\frac{2}{L_F}f_{\nu\rho}k_{\mu}[L_{FF}F_{\beta}{}^{\mu}F^{\nu\rho} + L_{GG}\tilde{F}_{\beta}{}^{\mu}\tilde{F}^{\nu\rho} + L_{FG}(F_{\beta}{}^{\mu}\tilde{F}^{\nu\rho} + \tilde{F}_{\beta}{}^{\mu}F^{\nu\rho})] \right) \\ &= \frac{4}{L_F}f_{\nu\rho}k_{\alpha}k_{\mu}[L_{FF}F^{\alpha\beta}F_{\beta}{}^{\mu}F^{\nu\rho} + L_{GG}F^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\beta}{}^{\mu}\tilde{F}^{\nu\rho} + L_{FG}(F^{\alpha\beta}F_{\beta}{}^{\mu}\tilde{F}^{\nu\rho} + F^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\beta}{}^{\mu}F^{\nu\rho})] \\ &= \frac{4}{L_F}f_{\nu\rho}k_{\alpha}k_{\mu}[F^{\alpha\beta}F_{\beta}{}^{\mu}(L_{FF}F^{\nu\rho} + L_{FG}\tilde{F}^{\nu\rho}) - \frac{1}{4}G\eta^{\alpha\mu}(L_{GG}\tilde{F}^{\nu\rho} + L_{FG}F^{\nu\rho})] \\ &= \frac{4}{L_F}F^{\alpha\beta}F_{\beta}{}^{\mu}k_{\alpha}k_{\mu}(L_{FF}\zeta + L_{FG}{}^*\zeta) - \frac{G}{L_F}k^2(L_{GG}{}^*\zeta + L_{FG}\zeta). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Utilizando agora em (3.2),

$$\begin{aligned} {}^*\zeta k^2 &= -2\tilde{F}^{\alpha\beta}k_{\alpha} \left(-\frac{2}{L_F}f_{\nu\rho}k_{\mu}[L_{FF}F_{\beta}{}^{\mu}F^{\nu\rho} + L_{GG}\tilde{F}_{\beta}{}^{\mu}\tilde{F}^{\nu\rho} + L_{FG}(F_{\beta}{}^{\mu}\tilde{F}^{\nu\rho} + \tilde{F}_{\beta}{}^{\mu}F^{\nu\rho})] \right) \\ &= \frac{4}{L_F}k_{\alpha}k_{\mu}[\tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\beta}{}^{\mu}(L_{FF}\zeta + L_{FG}{}^*\zeta) + \tilde{F}^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\beta}{}^{\mu}(L_{FG}\zeta + L_{GG}{}^*\zeta)] \\ &= \frac{4}{L_F}F^{\alpha\beta}F_{\beta}{}^{\mu}k_{\alpha}k_{\mu}(L_{GG}{}^*\zeta + L_{FG}\zeta) - \frac{G}{L_F}k^2(L_{FF}\zeta + L_{FG}{}^*\zeta) + \frac{2F}{L_F}k^2(L_{GG}{}^*\zeta + L_{FG}\zeta). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Devemos agora encontrar uma equação que possa nos dar a condição de independência dos termos ζ e ${}^*\zeta$, Para isso, vamos isolar o termo $\frac{4}{L_F}F^{\alpha\beta}F_{\beta\mu}k_{\alpha}k_{\mu}$ em (3.4) e (3.5) e tomar a diferença entre elas. Temos então,

$$\frac{\zeta k^2}{L_{FF}\zeta + L_{FG}{}^*\zeta} - \frac{{}^*\zeta k^2}{L_{FG}\zeta + L_{GG}{}^*\zeta} = -\frac{2Fk^2}{L_F} - \frac{Gk^2}{L_F} \left(\frac{L_{FG}\zeta + L_{GG}{}^*\zeta}{L_{FF}\zeta + L_{FG}{}^*\zeta} - \frac{L_{FF}\zeta + L_{FG}{}^*\zeta}{L_{FG}\zeta + L_{GG}{}^*\zeta} \right).$$

Multiplicando ambos os lados por $(L_{FG}\zeta + L_{GG}{}^*\zeta)(L_{FF}\zeta + L_{FG}{}^*\zeta)$, chegamos em,

$$\begin{aligned} & {}^*\zeta\zeta k^2(L_{GG} - L_{FF}) + \frac{2Fk^2}{L_F}(\zeta^2 L_{FF}L_{FG} + {}^*\zeta\zeta L_{FF}L_{GG} + {}^*\zeta\zeta L_{FG}^2 + \zeta^2 L_{FG}L_{GG}) \\ & + \frac{Gk^2}{L_F}(\zeta^2 L_{FG}^2 + {}^*\zeta^2 L_{GG}^2 + 2{}^*\zeta\zeta L_{FG}L_{GG} - \zeta^2 L_{FF}^2 - {}^*\zeta^2 L_{FG}^2 - 2{}^*\zeta\zeta L_{FF}L_{FG}) \\ & + \zeta^2 k^2 L_{FG} - {}^*\zeta^2 k^2 L_{FG} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assumindo que $k^2 \neq 0$, podemos reescrever (3.6) como

$$\Omega_1 {}^*\zeta^2 + \Omega_2 {}^*\zeta\zeta + \Omega_3 \zeta^2 = 0, \quad (3.7)$$

onde,

$$\begin{aligned} \Omega_1 & \doteq -L_{FG} + \frac{2F}{L_F}L_{FG}L_{GG} + \frac{G}{L_F}(L_{GG}^2 - L_{FG}^2), \\ \Omega_2 & \doteq L_{GG} - L_{FF} + \frac{2F}{L_F}(L_{FF}L_{GG} + L_{FG}^2) + \frac{2G}{L_F}L_{FG}(L_{GG} - L_{FF}), \\ \Omega_3 & \doteq L_{FG} + \frac{2F}{L_F}L_{FF}L_{FG} + \frac{G}{L_F}(L_{FG}^2 - L_{FF}^2). \end{aligned}$$

Resolvendo (3.7) com ${}^*\zeta = \Omega_{\pm}\zeta$, obtemos,

$$\Omega_{\pm} = \frac{-\Omega_2 \pm \sqrt{\Omega_2^2 - 4\Omega_1\Omega_3}}{2\Omega_1}. \quad (3.8)$$

Aplicando então a solução (3.8) em (3.4),

$$[L_F + G(L_{FG} + \Omega_{\pm}L_{GG})]k^2 - 4(L_{FF} + \Omega_{\pm}L_{FG})F^{\alpha\beta}F^{\tau}{}_{\alpha}k_{\beta}k_{\tau} = 0.$$

Isolando k^2 , temos finalmente,

$$k^2 = -4 \frac{L_{FF} + \Omega_{\pm}L_{FG}}{L_F + G(L_{FG} + \Omega_{\pm}L_{GG})} F^{\alpha\mu}F_{\alpha\nu}k_{\mu}k^{\nu}, \quad (3.9)$$

que é a relação de dispersão, que nos dá a relação entre a frequência angular e o vetor de onda. Perceba que, pela presença de Ω_{\pm} , temos duas soluções possíveis para k^2 . Isto antecipa o fenômeno da birrefringência em teorias não lineares, onde raios luminosos com diferentes polarizações podem apresentar diferentes velocidades em uma mesma direção espacial. Ao longo do texto, utilizaremos frequentemente a equação (3.9) como

$$k^2 = \xi F^{\alpha\mu}F_{\alpha\nu}k_{\mu}k^{\nu}, \quad (3.10)$$

onde ξ é definido como

$$\xi \doteq -4 \frac{L_{FF} + \Omega_{\pm} L_{FG}}{L_F + G(L_{FG} + \Omega_{\pm} L_{GG})}. \quad (3.11)$$

Este resultado pode ser obtido, equivalentemente, pela equação (3.5).

Podemos reescrever a relação de dispersão em função do tensor momento-energia. Para isto, isolamos o termo $4F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu}$ de (2.12) e substituímos este resultado na expressão (3.9),

$$\frac{-T^{\mu\nu} - (L - GL_G)g^{\mu\nu}}{L_F} = 4F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu}.$$

Temos então,

$$k^2 = \frac{-T^{\mu\nu}(L_{FF} + \Omega_{\pm}L_{FG})k_{\mu}k_{\nu}}{L_F^2 + GL_F(L_{FG} + \Omega_{\pm}L_{GG})} - \frac{(L - GL_G)(L_{FF} + \Omega_{\pm}L_{FG})}{L_F^2 + GL_F(L_{FG} + \Omega_{\pm}L_{GG})}k^2.$$

Isolando k^2 , temos

$$\begin{aligned} k^2 &= -\frac{L_{FF} + \Omega_{\pm}L_{FG}}{L_F^2 + GL_F(L_{FG} + \Omega_{\pm}L_{GG}) + (L - GL_G)(L_{FF} + \Omega_{\pm}L_{FG})}T^{\mu\nu}k_{\mu}k_{\nu} \\ &= -Q_{\pm}T^{\mu\nu}k_{\mu}k_{\nu}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde Q_{\pm} é

$$Q_{\pm} = \frac{L_{FF} + \Omega_{\pm}L_{FG}}{L_F^2 + GL_F(L_{FG} + \Omega_{\pm}L_{GG}) + (L - GL_G)(L_{FF} + \Omega_{\pm}L_{FG})}. \quad (3.13)$$

Os resultados aqui desenvolvidos já são conhecidos da literatura [3]. A seguir, vamos analisar um outro método que pode ser aplicado para obtenção da relação de dispersão.

3.2 Relação de dispersão via cálculo do tensor de Fresnel

Vamos agora apresentar um método alternativo para derivar os mesmos resultados da propagação dos raios luminosos. Neste, não tentamos eliminar os tensores descontinuidades de Hadamard por manipulações algébricas, mas construímos uma equação de autovalores que, a partir de seu polinômio característico biquadrático, nos dá as possíveis soluções de k^2 . Para tal, definamos os quadrivetores E^{μ} e B^{μ} como [14, 15, 16],

$$E^{\mu} = F^{\mu\nu}V_{\nu}, \quad (3.14)$$

$$B^{\mu} = \tilde{F}^{\mu\nu}V_{\nu}. \quad (3.15)$$

Assim, em compontens, temos que $E^{\mu} = (0, \vec{E})$ e $B^{\mu} = (0, \vec{B})$. Destes, podemos decompor os tensores $F^{\mu\nu}$ e seu dual como,

$$F^{\mu\nu} = E^{\mu}V^{\nu} - E^{\nu}V^{\mu} + \eta^{\mu\nu\alpha\beta}V_{\alpha}B_{\beta}, \quad (3.16)$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = B^\mu V^\nu - B^\nu V^\mu - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha E_\beta, \quad (3.17)$$

Reescrevemos então a equação de movimento (2.8) como,

$$2N^{\mu\nu\alpha\beta}(V_\beta E_{\alpha,\nu} - V_\alpha E_{\beta,\nu} + \eta_{\alpha\beta}{}^{\sigma\tau} V_\sigma B_{\tau,\nu}) + L_F(V^\nu E^\mu{}_{,\nu} - V^\mu E^\nu{}_{,\nu} + \eta^{\mu\nu\sigma\tau} V_\sigma B_{\tau,\nu}) = 0. \quad (3.18)$$

Para a identidade de Bianchi (2.7), temos,

$$V^\nu B^\mu{}_{,\nu} - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha E_{\beta,\nu} = 0. \quad (3.19)$$

Veja que, mesmo na teoria não linear, ainda possuímos a lei que $B^\mu{}_{,\mu} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$, pois esta lei se deriva da identidade de Bianchi, válida tanto na teoria de Maxwell quanto em qualquer teoria não linear.

As descontinuidade de Hadamard para (3.14) e (3.15) são dadas por,

$$[E^\mu]_\Sigma = [B^\mu]_\Sigma = 0, \quad (3.20)$$

$$[E^\mu{}_{,\nu}]_\Sigma = e^\mu k_\nu, \quad (3.21)$$

$$[B^\mu{}_{,\nu}]_\Sigma = b^\mu k_\nu. \quad (3.22)$$

Aplicando as descontinuidades em (3.18) e em (3.19), temos, respectivamente,

$$2N^{\mu\nu\alpha\beta}(V_\beta e_\alpha k_\nu - V_\alpha e_\beta k_\nu + \eta_{\alpha\beta}{}^{\sigma\tau} V_\sigma b_\tau k_\nu) + L_F(V^\nu e^\mu k_\nu - V^\mu e^\nu k_\nu + \eta^{\mu\nu\sigma\tau} V_\sigma b_\tau k_\nu) = 0, \quad (3.23)$$

$$b^\tau = \frac{1}{\omega} n^{\tau\lambda\rho\theta} V_\rho k_\lambda e_\theta. \quad (3.24)$$

Podemos então substituir (3.24) em (3.23) e teremos,

$$2N^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \left(V^\beta e^\alpha k_\nu - V^\alpha e^\beta k_\nu + \frac{1}{\omega} \eta^{\alpha\beta\sigma\tau} \eta_\tau{}^{\lambda\rho\theta} V_\sigma V_\rho k_\nu k_\lambda e_\theta \right) + L_F \left(\eta^{\mu\nu\sigma\tau} \eta_\tau{}^{\lambda\rho\theta} V_\sigma V_\rho k_\nu k_\lambda e_\theta \right) = 0 \quad (3.25)$$

Então, utilizando a identidade dos produtos de Levi-Civita (2.28) em (3.25), encontramos,

$$2N^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \left[V^\beta e^\alpha k_\nu - V^\alpha e^\beta k_\nu + \frac{1}{\omega} (k^\beta k_\nu e^\alpha - k^\alpha k_\nu e^\beta + \omega V^\alpha k_\nu e^\beta - \omega V^\beta k_\nu e^\alpha) \right] + L_F \left[\omega e^\mu - V^\mu k_\nu e^\nu + \frac{1}{\omega} (k^2 e^\mu - k^\mu k_\theta e^\theta + \omega V^\mu k_\theta e^\theta - \omega^2 e^\mu) \right] = 0.$$

Renomeando os índices, simplificando e deixando e^μ em evidência, temos,

$$[4N^{\mu\nu}{}_{\theta\beta} k^\beta k_\nu + L_F(k^2 \delta_\theta^\mu - k^\mu k_\theta)] e^\theta = 0, \quad (3.26)$$

ou ainda,

$$Z^\mu e^\theta = 0, \quad (3.27)$$

onde

$$Z^\mu{}_\theta = 4N^{\mu\nu}{}_{\theta\beta} k^\beta k_\nu + L_F(k^2 \delta_\theta^\mu - k^\mu k_\theta), \quad (3.28)$$

que é chamado de tensor de Fresnel.

Perceba que (3.27) é uma equação de autovalores com autovalores nulos, o que nos permite resolver o problema para k^2 a partir de $\det(Z) = 0$. Para isso, utilizaremos um corolário do teorema de Cayley-Hamilton, onde o determinante de $Z^\mu{}_\nu$ quadridimensional é dado por [26]

$$\det(Z) = \frac{1}{24}(Z_1)^4 - \frac{1}{4}(Z_1)^2(Z_2) + \frac{1}{3}(Z_1)(Z_3) + \frac{1}{8}(Z_2)^2 - \frac{1}{4}(Z_4),$$

onde Z_n é o n -ésimo traço de $Z^\mu{}_\nu$,

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z^\mu{}_\mu, \\ Z_2 &= Z^\mu{}_\nu Z^\nu{}_\mu, \\ Z_3 &= Z^\mu{}_\nu Z^\nu{}_\tau Z^\tau{}_\mu, \\ Z_4 &= Z^\mu{}_\nu Z^\nu{}_\tau Z^\tau{}_\rho Z^\rho{}_\mu. \end{aligned}$$

Os cálculos dos traços são longos, e estão apresentados no apêndice.

Ao calcularmos o determinante, encontramos que todos os coeficientes das potências de k^2 são nulos, resultando na identidade $0 = 0$, e portanto, não nos conduzindo. Isso acontece pois, na verdade, $Z^\mu{}_\nu$ é um objeto intrinsecamente tridimensional. Note que o tensor $Z^\mu{}_\nu$ é ortogonal a k^μ , e portanto, está restrito a uma hipersuperfície tridimensional ortogonal a k^μ . Devemos então calcular o determinante para o caso tridimensional, que é dado por,

$$\det(Z) = -\frac{1}{6}(Z_1)^3 + \frac{1}{2}(Z_1)(Z_2) - \frac{1}{3}(Z_3).$$

Calculando este determinante e impondo a condição $\det(Z) = 0$, temos o seguinte polinômio biquadrático para k ,

$$\begin{aligned} &-96(kf)^2 L_F(L_{FG}^2 - L_{FF}L_{GG}) + 24k^2(kf)L_F[L_F(L_{FF} + L_{GG}) + 2F(L_{FG}^2 - L_{FF}L_{GG})] \\ &+ 6k^4 L_F[L_F^2 + 2L_F(GL_{FG} - FL_{GG}) + G^2(L_{FG}^2 - L_{FF}L_{GG})] = 0, \end{aligned}$$

onde $(kf) \doteq F^{\alpha\mu}F_{\alpha\nu}k^\nu k_\mu$. Tomando as soluções biquadráticas em k^2 , temos então,

$$k^2 = \xi F^{\alpha\mu}F_{\alpha\nu}k_\mu k^\nu,$$

onde agora ξ corresponde a,

$$\xi = \frac{2(-L_F L_{FF} - 2FL_{FG}^2 - L_F L_{GG} + 2FL_{FF}L_{GG} \pm \Phi)}{L_F^2 + 2L_F(GL_{FG} - FL_{GG}) + G^2(L_{FG}^2 - L_{FF}L_{GG})}, \quad (3.29)$$

e Φ é dado por,

$$\begin{aligned} \Phi &= \left[4 \left(L_{FG}^2 - L_{FF}L_{GG} \right) \left(2L_F(GL_{FG} - FL_{GG}) + G^2 \left(L_{FG}^2 - L_{FF}L_{GG} \right) + L_F^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(2F \left(L_{FG}^2 - L_{FF}L_{GG} \right) + L_F(L_{FF} + L_{GG}) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ambos ξ encontrados pelos diferentes métodos, (3.11) e (3.29), são algebricamente idênticos.

3.3 Velocidade de fase e velocidade de grupo

Definimos a velocidade de fase como

$$v = \frac{\omega}{q},$$

onde ω é a frequência angular e q é o módulo do vetor de onda. Esta é a velocidade com a qual um ponto qualquer da onda se desloca.

O quadrivetor de onda k^μ , definido como o gradiente da eikonal, tem componentes dadas por $k^\mu = (\omega, \vec{q})$ e, portanto, k^2 é dado por $k^2 = \omega^2 - q^2$. Logo, a velocidade de fase é dada por,

$$\begin{aligned} k^2 &= \omega^2 - q^2 = q^2(v^2 - 1) = \xi F^{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} k_\mu k^\nu, \\ v^2 &= 1 + \xi F^{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} n_\mu n^\nu, \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde $n_\nu = k_\nu/q$. Vemos então que, por ξ poder assumir dois valores distintos, podem existir duas distintas velocidades como solução para a propagação dos raios luminosos em uma mesma direção.

Calculemos agora a velocidade de grupo para teorias não lineares. Por definição, a velocidade de grupo é dada por

$$\vec{u} \doteq \frac{\partial \omega}{\partial \vec{q}},$$

onde \vec{q} é o vetor de onda tridimensional. O significado da velocidade de grupo segue da ideia de se lançar um pacote de ondas com diferentes vetores de onda q , formando assim um pulso. Neste, as cristas não possuem mais a mesma amplitude, e a velocidade medida como um todo, a velocidade de grupo, é a velocidade com qual o envelopamento deste pulso caminha. Estamos trabalhando com o formalismo quadrivetorial, então, definamos o projetor espacial $h^{\mu\nu}$ como,

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - V^\mu V^\nu. \quad (3.31)$$

Veja que $h^{\mu\nu}$ é ortogonal a V^μ , significando que qualquer quadrivetor A^μ contraído com $h^{\mu\nu}$ é projetado na hipersuperfície tridimensional ortogonal a V^μ . Desta forma, decompos o quadrivetor k^μ como

$$k^\mu = \omega V^\mu + q^\mu, \quad (3.32)$$

onde definimos

$$q^\mu \doteq h^{\mu\nu} k_\nu.$$

Veja que, em termos de componentes, $q^\mu = (0, \vec{q})$.

Com auxílio de $h^{\mu\nu}$, podemos representar a velocidade de grupo através do quadrivetor u_τ definido por

$$u_\tau = \frac{\partial \omega}{\partial k^\beta} h_\tau^\beta. \quad (3.33)$$

Note que a componente $u^0 = 0$, uma vez que $h^{\alpha\beta}$ é diagonal e $h^{00} = 0$. Logo, u^τ é um quadrivetor tipo espaço. Temos então que as componentes da velocidade de grupo são dadas por

$$u_j = h_j^i \frac{\partial \omega}{\partial k^i} = h_j^i \frac{\partial \omega}{\partial q^i}.$$

Sendo $\omega = \sqrt{q^2 + k^2}$, segue,

$$u_j = h_j^i \frac{\partial \sqrt{q^2 + k^2}}{\partial q^i} = \frac{1}{2\omega} \left(-2q_i \frac{\partial q^i}{\partial q^j} + 2\xi F^{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} k_\mu \frac{\partial k^\nu}{\partial q^j} \right).$$

Para simplificar nosso problema, consideraremos o campo magnético do sistema como sendo nulo, assim, podemos decompor $F^{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} k_\mu$ como,

$$\begin{aligned} F^{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} k_\mu &= (E^\alpha V^\mu - E^\mu V^\alpha)(E_\alpha V_\nu - E_\nu V_\alpha)(\omega V_\mu + q_\mu) = (-E^2 V^\mu V_\nu + E^\mu E_\nu)(\omega V_\mu + q_\mu) \\ &= -\omega E^2 V_\nu - (\vec{q} \cdot \vec{E}) E_\nu, \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde $E^\mu q_\mu = -(\vec{q} \cdot \vec{E})$. Desta forma,

$$u_j = \frac{1}{\omega} \left(-q_i - \xi(\omega E^2 V_\nu + (\vec{q} \cdot \vec{E}) E_\nu) \frac{\partial k^\nu}{\partial q^j} \right) = \frac{1}{\omega} \left(-q_i - \xi\omega E^2 u_j - \xi(\vec{q} \cdot \vec{E}) E_i \frac{\partial q^i}{\partial q^j} \right),$$

ou ainda,

$$(1 + \xi E^2) u_j = -\frac{n_j}{v} - \frac{\xi}{v} (\vec{n} \cdot \vec{E}) E_j.$$

Temos então que o quadrivetor velocidade de grupo é dado por,

$$u_j = -\frac{1}{v(1 + \xi E^2)} (n_j + \xi(\vec{n} \cdot \vec{E}) E_j). \quad (3.35)$$

Podemos calcular o módulo deste. Sendo $u^2 = -u^j u_j$, segue que,

$$\begin{aligned} u^2 &= -\frac{1}{v^2(1 + \xi E^2)^2} (n_j + \xi(\vec{n} \cdot \vec{E}) E_j)(n^j + \xi(\vec{n} \cdot \vec{E}) E^j) \\ &= \frac{1}{v^2(1 + \xi E^2)^2} (1 + 2\xi(\vec{n} \cdot \vec{E})^2 + \xi^2(\vec{n} \cdot \vec{E})^2 E^2). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Mostremos agora um outro resultado, que a velocidade de grupo e a velocidade de fase de qualquer teoria não linear, num sistema onde não há campo magnético, são iguais em primeira aproximação de ξ . Tomemos a velocidade de fase dada pela equação (3.30) e decomposmos ela em componentes, como feito antes, supondo somente a existência do campo elétrico. De (3.34), segue que,

$$F^{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} k_\mu k^\nu = (-\omega E^2 V_\nu - (\vec{q} \cdot \vec{E}) E_\nu)(\omega V^\nu + q^\nu) = (\vec{q} \cdot \vec{E})^2 - \omega^2 E^2. \quad (3.37)$$

Utilizando esta em (3.30),

$$v^2 = 1 + \frac{\xi}{q^2} F^{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} k^\nu k_\mu = 1 + \frac{\xi}{q^2} [(\vec{q} \cdot \vec{E})^2 - \omega^2 E^2] = 1 + \xi[(\vec{n} \cdot \vec{E})^2 - v^2 E^2].$$

Isolando v^2 , obtemos,

$$v^2 = \frac{1 + \xi(\vec{n} \cdot \vec{E})^2}{1 + \xi E^2} = \frac{1 + \xi E^2 \cos^2(\theta)}{1 + \xi E^2}, \quad (3.38)$$

onde θ é o ângulo entre \vec{E} e \vec{q} , ou seja, entre o campo elétrico de fundo e o vetor de onda do campo de onda plana. Expandindo ξ em primeira ordem em (3.36) e (3.38), obtemos,

$$u = v = 1 - \frac{\xi E^2}{2} \sin^2 \theta. \quad (3.39)$$

Confirmamos então a afirmação que, em primeira aproximação de ξ , a velocidade de grupo e de fase são iguais. Outro resultado que podemos ver é que, se θ for igual a 0 ou $\pi/2$, no caso onde só há campo elétrico, a velocidade de fase e grupo são iguais, em qualquer aproximação.

3.4 Os vetores de polarização

Podemos calcular os vetores de polarização da propagação da luz para as teorias não lineares. Da equação de Fresnel, escolhemos uma base qualquer com 4 quadrivetores linearmente independentes para e^ν e impomos a condição de que cada componente do quadrivetor resultante da contração do quadrivetor polarização com o tensor de Fresnel é nulo. Seja então e^ν dado por,

$$e^\nu = aA^\nu + bB^\nu + cC^\nu + dD^\nu,$$

onde,

$$\begin{aligned} A^\nu &= F^{\nu\tau} k_\tau, \\ B^\nu &= \tilde{F}^{\nu\tau} k_\tau, \\ C^\nu &= F^{\nu\tau} F_{\sigma\tau} k^\sigma, \\ D^\nu &= k^\nu, \end{aligned}$$

e a , b , c e d são constantes. Abrindo então a equação de Fresnel, temos,

$$Z_\nu^\mu e^\nu = [4N^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta} k_\alpha k^\beta + L_F(k^2 \delta_\nu^\mu - k^\mu k_\nu)](aA^\nu + bB^\nu + cC^\nu + dD^\nu).$$

Sendo $N^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta} = L_{FF} F^{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + L_{GG} \tilde{F}^{\mu\alpha} \tilde{F}_{\nu\beta} + L_{FG}(\tilde{F}^{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + F^{\mu\alpha} \tilde{F}_{\nu\beta})$, podemos reescrever $N^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta} k^\beta k_\alpha$ como,

$$N^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta} k^\beta k_\alpha = L_{FF} A^\mu A_\nu + L_{GG} B^\mu B_\nu + L_{FG}(B^\mu A_\nu + A^\mu B_\nu).$$

Como já vimos, o tensor de Fresnel é ortogonal a k^μ , então o termo k^μ não contribui e pode ser descartado. Assim,

$$\begin{aligned} &4aN^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta} k_\alpha k^\beta A^\nu + aL_F(k^2 \delta_\nu^\mu - k^\mu k_\nu)A^\nu + 4bN^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta} k_\alpha k^\beta B^\nu \\ &+ bL_F(k^2 \delta_\nu^\mu - k^\mu k_\nu)B^\nu + 4cN^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta} k_\alpha k^\beta C^\nu + cL_F(k^2 \delta_\nu^\mu - k^\mu k_\nu)C^\nu = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Veamos que: $A^\nu k_\nu = 0$, $B^\nu k_\nu = 0$, $A^\nu C_\nu = 0$ e $k_\nu C^\nu = A^\nu A_\nu = A^2$. Estes resultados serão importantes na simplificação do problema,

$$\begin{aligned} A^\nu k_\nu &= F^{\nu\alpha} k_\nu k_\alpha = 0, \\ B^\nu k_\nu &= \tilde{F}^{\nu\alpha} k_\nu k_\alpha = 0, \\ A^\nu C_\nu &= F^{\nu\alpha} F_{\nu\tau} F^{\sigma\tau} k_\sigma k_\alpha = -A^\nu A^\tau F_{\nu\tau} = 0, \\ k_\nu C^\nu &= k_\nu F^{\nu\tau} F_{\sigma\tau} k^\sigma = A^\tau A_\tau = A^2. \end{aligned}$$

Utilizando estes resultados em (3.40), resulta,

$$\begin{aligned} &4a(L_{FF}A^2A^\mu + L_{GG}B_\nu A^\nu B^\mu + L_{FG}A^2B^\mu + L_{FG}B_\nu A^\nu A^\mu) + aL_F k^2 A^\mu \\ &+ 4b(L_{FF}B_\nu A^\nu A^\mu + L_{GG}B^2B^\mu + L_{FG}B_\nu A^\nu B^\mu + L_{FG}B^2A^\mu) + bL_F k^2 B^\mu \\ &- 4c(L_{GG}B_\nu C^\nu B^\mu + L_{FG}B_\nu C^\nu A^\mu) + cL_F k^2 C^\mu - cL_F k_\nu C^\nu k^\mu \\ &= [4a(L_{FF}A^2 + L_{FG}B_\nu A^\nu) + aL_F k^2 + 4b(L_{FF}B_\nu A^\nu + L_{FG}B^2) - 4cL_{FG}B_\nu C^\nu]A^\mu \\ &+ [4a(L_{GG}B_\nu A^\nu + L_{FG}A^2) + 4b(L_{GG}B^2 + L_{FG}B_\nu A^\nu) + bL_F k^2 - 4cL_{GG}B_\nu C^\nu]B^\mu \\ &+ (ck^2 L_F)C^\mu + (cL_F k_\nu C^\nu)k^\mu = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Como os vetores da base são linearmente independentes, temos que cada componente de (3.41) deve se anular. Ou seja,

$$a(L_{FF}A^2 + L_{FG}B_\nu A^\nu) + \frac{a}{4}L_F k^2 + b(L_{FF}B_\nu A^\nu + L_{FG}B^2) - 4cL_{FG}B_\nu C^\nu = 0, \quad (3.42)$$

$$a(L_{GG}B_\nu A^\nu + L_{FG}A^2) + b(L_{GG}B^2 + L_{FG}B_\nu A^\nu) + \frac{b}{4}L_F k^2 - 4cL_{GG}B_\nu C^\nu = 0, \quad (3.43)$$

$$ck^2 L_F = 0, \quad (3.44)$$

$$cL_F k_\nu C^\nu = 0. \quad (3.45)$$

De (3.45), vemos que $c = 0$ sempre. Temos então as relações para o quadrivetor polarização de uma teoria não linear do eletromagnetismo,

$$a(L_{FF}A^2 + L_{FG}B_\nu A^\nu) + \frac{a}{4}L_F k^2 + b(L_{FF}B_\nu A^\nu + L_{FG}B^2) = 0, \quad (3.46)$$

$$a(L_{GG}B_\nu A^\nu + L_{FG}A^2) + b(L_{GG}B^2 + L_{FG}B_\nu A^\nu) + \frac{b}{4}L_F k^2 = 0. \quad (3.47)$$

Passaremos agora ao estudo da propagação da luz em algumas teorias não lineares específicas, onde utilizaremos os resultados aqui obtidos.

3.5 Propagação da luz na teoria de Born-Infeld

Veamos como se dá a propagação de ondas na teoria de Born-Infeld. Calculando o fator ξ para a Born-Infeld, obtemos,

$$\xi_{BI} = \frac{2}{F + 2\beta^2}. \quad (3.48)$$

Desta, obtemos a relação de dispersão da teoria,

$$k_{BI}^2 = \frac{2}{F + 2\beta^2} F^{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} k_\mu k^\nu. \quad (3.49)$$

Perceba que o fator Φ em nossa teoria é zero. A teoria de Born-Infeld é a única teoria não-linear do eletromagnetismo que não produz birrefringência no vácuo [11].

Usemos agora as fórmulas para a velocidade de fase e velocidade de grupo derivadas, (3.38) e (3.36), respectivamente. De nossa simplificação que $\vec{B} = 0$, ξ_{BI} se reduz a $\xi_{BI} = 1/(\beta^2 - E^2)$, então, temos que a velocidade de fase é dada por,

$$v_{BI}^2 = 1 - \frac{E^2 \sin^2 \theta}{\beta^2}. \quad (3.50)$$

Veja que, se o campo elétrico for nulo, recuperamos o caso da eletrodinâmica Maxwelliana, com $v^2 = 1$. Perceba também que, no ângulo de $\pi/2$, quando o campo se aproxima de β , a velocidade da luz tende a zero, isso implica que na teoria de Born-Infeld, temos o efeito de luz lenta para campos muito próximos a β . A figura 3 mostra os valores para a velocidade de fase em função do campo E e do ângulo θ .

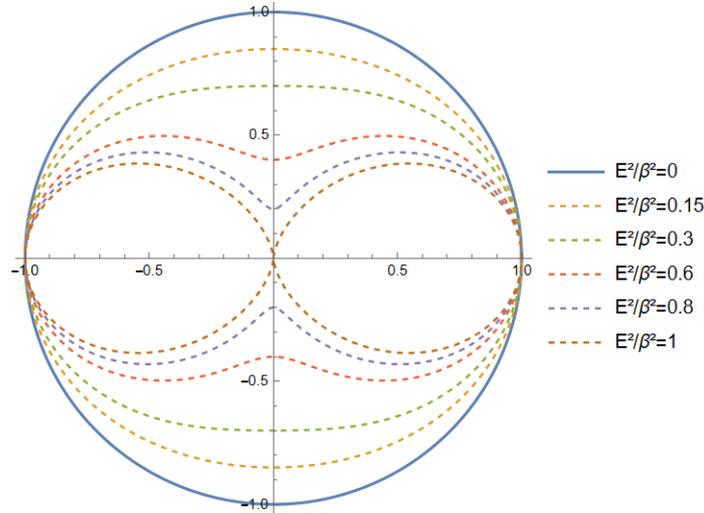


Figura 3: Gráfico polar com os valores de v^2 para os diferentes valores de campo elétrico, onde a circunferência de raio 1 representa o caso Maxwelliano.

Podemos reescrever a equação (3.51) na forma de projetores de n^j . Vejamos,

$$\begin{aligned} v_{BI}^2 &= 1 - \frac{E^2 \sin^2 \theta}{\beta^2} = 1 - \frac{E^2(1 - \cos^2 \theta)}{\beta^2} = 1 - \frac{E^2 - E^2 \cos^2 \theta}{\beta^2} \\ &= 1 - \frac{-\eta^{ij} E_i E_j - n^i n^j E_i E_j}{\beta^2} = 1 + \frac{1}{\beta^2} (n^i n^j + \eta^{ij}) E_i E_j. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Note que o termo entre parênteses é um projetor de n^j , mas não de n^α . De (3.51) podemos ver que, em nossa consideração de campo magnético nulo, o vácuo de Born-Infeld se comporta como um meio material com efeito Kerr, ou seja, o valor da velocidade de fase varia

com o quadrado do campo elétrico, onde $(n^i n^j + \eta^{ij})/\beta^2$ faz o papel da susceptibilidade de terceira ordem. Guardemos este resultado, ele será útil mais tarde durante a construção do modelo análogo.

Calculemos agora os valores para a velocidade de grupo da teoria de Born-Infeld. De (3.36) e (3.49), temos,

$$u_{BI}^2 = \frac{(E^2 - \beta^2)^2 - E^2(E^2 - 2\beta^2) \cos^2 \theta}{\beta^2(-E^2 + \beta^2 + E^2 \cos^2 \theta)}. \quad (3.52)$$

Novamente, temos o limite Maxwelliano se tomamos $E = 0$. A figura 4 mostra os valores para a velocidade de grupo em função do campo E e do ângulo θ .

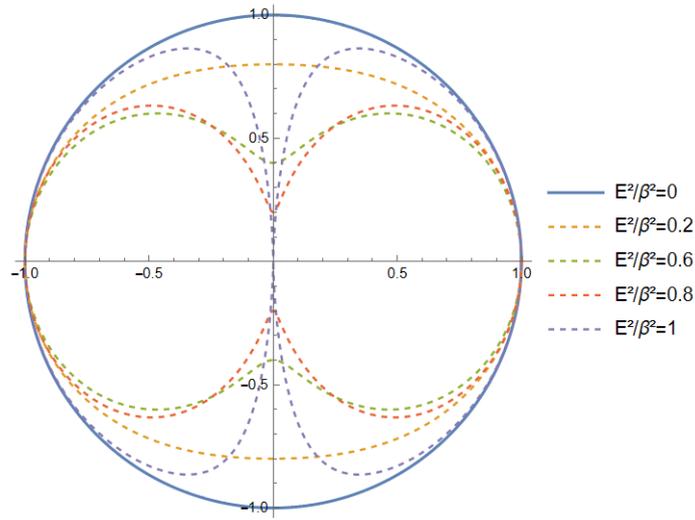


Figura 4: Gráfico polar com os valores de u^2 para os diferentes valores de campo elétrico, onde a circunferência de raio 1 representa o caso Maxwelliano.

Podemos definir então o índice de refração do vácuo na teoria de Born-Infeld. Temos,

$$\eta_{BI} = \frac{1}{v_{BI}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{\beta^2} \sin^2 \theta}}. \quad (3.53)$$

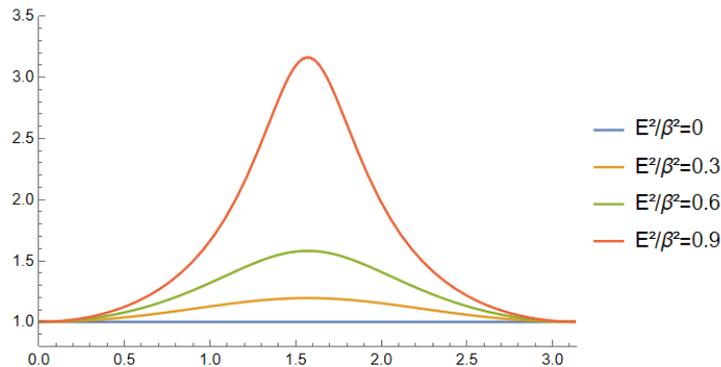


Figura 5: Gráfico com os valores de η para os diferentes valores de campo elétrico, onde o eixo horizontal azul são os valores de θ de 0 a π . A reta horizontal representa o caso Maxwelliano.

A figura 5 mostra os diferentes valores para o índice de refração em função do campo E e do ângulo θ .

Utilizando (3.46) e (3.47) para calcularmos as componentes do vetor de polarização na teoria, encontramos que e^μ é uma soma de A^μ com B^μ , ou seja, (3.46) e (3.47) se anulam identicamente.

Passemos agora para o estudo da teoria de Euler-Heisenberg.

3.6 Propagação da luz na teoria de Euler-Heisenberg

Proposta em 1936 no artigo “Consequências da teoria dos pósitrons de Dirac” [27], a teoria de Euler-Heisenberg descreve os efeitos de polarização do vácuo da eletrodinâmica quântica [22]. Sua ação efetiva em primeira aproximação é dada por [3],

$$S = \int d\tau \left[-\frac{F}{4} + \frac{\mu}{4} \left(F^2 + \frac{7}{4} G^2 \right) \right], \quad (3.54)$$

onde μ é uma constante dada por (no SI),

$$\mu \doteq \frac{2\hbar^3 \alpha^2}{45\mu_0 m_e^4 c^5} = 1.32 \times 10^{-24} \frac{1}{\text{T}^2}. \quad (3.55)$$

Calculamos então o fator ξ da teoria,

$$\xi_{EH} = 8\mu, \quad (3.56)$$

$$\xi_{EH} = 14\mu. \quad (3.57)$$

Os dois valores distintos caracterizam o efeito de birrefringência no vácuo, onde os possíveis valores são dados pelos vetores de polarização. Vamos utilizar então que $\xi_{EH} = \alpha\mu$, onde α pode valer 8 ou 14. De (3.38), obtemos a velocidade de fase,

$$v_{EH}^2 = \frac{1 + \alpha\mu E^2 \cos^2 \theta}{1 + \alpha\mu E^2}. \quad (3.58)$$

Notemos que, aqui, não podemos tomar a veracidade deste resultado para campos próximos de $1/\sqrt{\mu}$, pois a ação é uma aproximação em primeira ordem de μ , ou seja, para campos de ordem menores que μ . A figura 6 mostra os diferentes valores para a velocidade de fase em função do campo E e do ângulo θ .

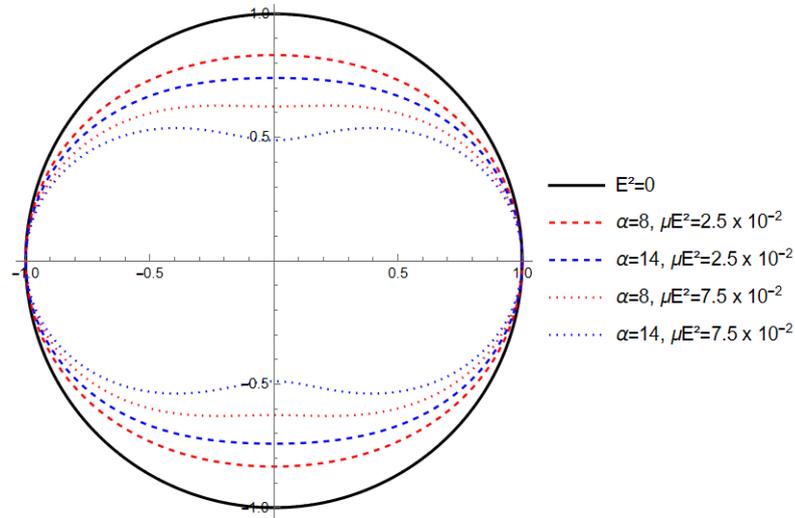


Figura 6: Gráfico polar com os valores de v_{EH}^2 para os diferentes valores de campo elétrico, onde a circunferência de raio 1 representa o caso Maxwelliano. As curvas com mesmo estilo de traço representam o mesmo valor de campo para os diferentes α .

A velocidade de grupo, dada por (3.36), é então,

$$u_{EH}^2 = \frac{1 + 2\alpha\mu E^2 \cos^2 \theta + \alpha^2 \mu^2 E^2 \cos^2 \theta}{(1 + \alpha\mu E^2)(1 + \alpha\mu E^2 \cos^2 \theta)}. \quad (3.59)$$

A figura 7 mostra os diferentes valores para a velocidade de grupo em função do campo E e do ângulo θ .

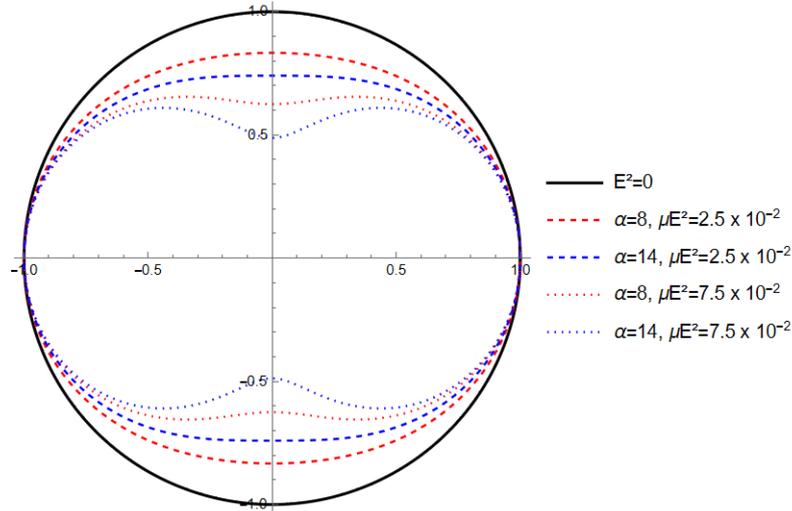


Figura 7: Gráfico polar com os valores de u_{EH}^2 para os diferentes valores de campo elétrico, onde a circunferência de raio 1 representa o caso Maxwelliano. As curvas com mesmo estilo de traço representam o mesmo valor de campo para os diferentes α .

O índice de refração é,

$$\eta_{EH} = \frac{1}{v_{EH}} = \sqrt{\frac{1 + \alpha\mu E^2}{1 + \alpha\mu E^2 \cos^2 \theta}}. \quad (3.60)$$

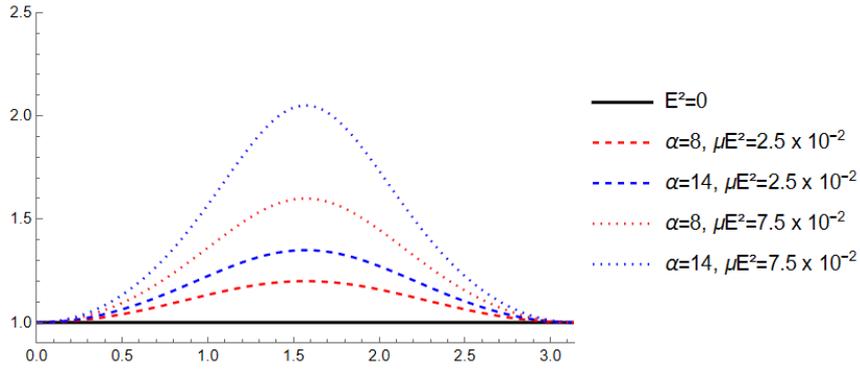


Figura 8: Gráfico com os valores de η_{EH} para os diferentes valores de campo elétrico, onde o eixo horizontal são os valores de θ de 0 a π . A reta horizontal preta representa o caso Maxwelliano. As curvas com mesmo estilo de traço representam o mesmo valor de campo para os diferentes α .

De (3.39), temos que, em primeira aproximação de ξ , a velocidade de fase de Euler-Heisenberg é,

$$v_{EH}^2 = 1 - \alpha\mu E^2 \sin^2 \theta. \quad (3.61)$$

Isto significa que, em primeira aproximação, temos novamente o efeito Kerr na teoria de Euler-Heisenberg. De (3.51), podemos estender o resultado da velocidade de fase aproximada para,

$$v_{EH}^2 = 1 + \alpha\mu(n^i n^j + \eta^{ij})E_i E_j. \quad (3.62)$$

Em si, não há problemas de trabalhar com a velocidade aproximada, visto que a própria Lagrangiana efetiva é uma aproximação em primeira ordem em μ .

Utilizando (3.46) e (3.47) para calcularmos os vetores de polarização, encontramos que o quadrivetor A^μ é o vetor de polarização para $\xi = 8\mu$, enquanto B^μ é o vetor de polarização para $\xi = 14\mu$.

Finalizamos aqui o estudo da propagação da luz em algumas propostas de teorias não lineares. Passemos agora para o estudo da eletrodinâmica Maxwelliana em meios materiais.

4 Eletrodinâmica Maxwelliana em meios materiais

Neste capítulo trataremos da eletrodinâmica Maxwelliana em meios materiais, considerando os coeficientes óticos dados por uma expansão na energia livre de Helmholtz. Perceba que, de (3.10), temos o termo $F^{\alpha\mu}F_{\alpha\nu}k_\mu k^\nu$ que nos dá uma dependência nos campos do tipo E^2 , B^2 e EB . Vamos então analisar expansão da energia livre até a quarta ordem nos campos. Ficará claro ao longo do texto porquê precisamos analisar até a quarta ordem.

Para a eletrodinâmica em meios materiais, devemos utilizar os quadrivetores auxiliares D^μ e H^μ , os quais são definidos como,

$$D^\mu = E^\mu + P^\mu, \quad (4.1)$$

$$H^\mu = B^\mu - M^\mu. \quad (4.2)$$

Os quadrivetores P^μ e H^μ podem ser obtidos a partir da energia livre de Helmholtz. A energia livre de Helmholtz na presença de um campo externo eletromagnético pode ser expandida como [24, 28, 29, 30],

$$\begin{aligned} F(\vec{E}, \vec{B}, T) = & F_0 + \left. \frac{\partial F}{\partial E^\alpha} \right|_{F_0} E^\alpha + \left. \frac{\partial F}{\partial B^\alpha} \right|_{F_0} B^\alpha + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial E^\alpha \partial E^\beta} \right|_{F_0} E^\alpha E^\beta + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial B^\alpha \partial B^\beta} \right|_{F_0} B^\alpha B^\beta \\ & + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial E^\alpha \partial B^\beta} \right|_{F_0} E^\alpha B^\beta + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial E^\alpha \partial E^\beta \partial E^\gamma} \right|_{F_0} E^\alpha E^\beta E^\gamma + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial E^\alpha \partial E^\beta \partial B^\gamma} \right|_{F_0} E^\alpha E^\beta B^\gamma \\ & + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial E^\alpha \partial B^\beta \partial B^\gamma} \right|_{F_0} E^\alpha B^\beta B^\gamma + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial B^\alpha \partial B^\beta \partial B^\gamma} \right|_{F_0} B^\alpha B^\beta B^\gamma \\ & + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 F}{\partial E^\alpha \partial E^\beta \partial E^\gamma \partial E^\sigma} \right|_{F_0} E^\alpha E^\beta E^\gamma E^\sigma + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 F}{\partial E^\alpha \partial E^\beta \partial E^\gamma \partial B^\sigma} \right|_{F_0} E^\alpha E^\beta E^\gamma B^\sigma \\ & + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 F}{\partial E^\alpha \partial E^\beta \partial B^\gamma \partial B^\sigma} \right|_{F_0} E^\alpha E^\beta B^\gamma B^\sigma + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 F}{\partial E^\alpha \partial B^\beta \partial B^\gamma \partial B^\sigma} \right|_{F_0} E^\alpha B^\beta B^\gamma B^\sigma \\ & + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 F}{\partial B^\alpha \partial B^\beta \partial B^\gamma \partial B^\sigma} \right|_{F_0} B^\alpha B^\beta B^\gamma B^\sigma + \mathcal{O}(E^5). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Definimos então P_α como,

$$\begin{aligned} P_\alpha = & -h_\alpha^\tau \frac{\partial F}{\partial E^\tau} = P_\alpha^{(S)} + \chi_{\alpha\beta}^{(1)} E^\beta + \alpha_{\alpha\beta} B^\beta + \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} E^\beta E^\gamma + \gamma_{\alpha\beta\gamma} E^\beta B^\gamma + \frac{1}{2} \beta_{\alpha\beta\gamma} B^\beta B^\gamma \\ & + \chi_{\alpha\beta\gamma\sigma}^{(3)} E^\beta E^\gamma E^\sigma + \xi_{\alpha\beta\gamma\sigma} E^\beta E^\gamma B^\sigma + \Gamma_{\alpha\beta\gamma\sigma} E^\beta B^\gamma B^\sigma + \Lambda_{\alpha\beta\gamma\sigma} B^\beta B^\gamma B^\sigma. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Definimos também a magnetização M_λ como sendo,

$$M_\lambda = -h_\lambda^\tau \frac{\partial F}{\partial B^\tau} = M_\lambda^{(S)} + \alpha_{\alpha\lambda} E^\alpha + \tilde{\chi}_{\alpha\lambda}^{(1)} B^\alpha + \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta\lambda} E^\alpha E^\beta + \beta_{\alpha\beta\lambda} E^\alpha B^\beta + \tilde{\chi}_{\alpha\beta\lambda}^{(2)} B^\alpha B^\beta$$

$$+\frac{1}{3}\xi_{\alpha\beta\gamma\lambda}E^\alpha E^\beta E^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta\gamma\lambda}E^\alpha E^\beta B^\gamma + 3\Lambda_{\alpha\beta\gamma\lambda}E^\alpha B^\beta B^\gamma + \tilde{\chi}_{\alpha\beta\gamma\lambda}^{(3)}B^\alpha B^\beta B^\gamma. \quad (4.5)$$

Note que P^μ e M^μ são quadrivetores do tipo espaço, logo, de (4.1) e (4.2), D^μ e H^μ também são tipo espaço. Como os quadrivetores E^μ e B^μ também são tipo espaço, podemos escrever todos os índices das equações (4.4) e (4.5) como índices espaciais.

Para nosso estudo, vamos ignorar os efeitos magneto-elétricos e consideraremos que não há magnetização. Desta forma, teremos que,

$$H^\mu = B^\mu,$$

e

$$P^\mu = \chi^{\mu\beta}E_\beta + \frac{1}{2}\chi^{\mu\beta\gamma}E_\beta E_\gamma + \frac{1}{6}\chi^{\mu\beta\gamma\sigma}E_\beta E_\gamma E_\sigma.$$

Os termos $P_\alpha^{(S)}$ e $M_\lambda^{(S)}$ desaparecerão nas equações de Maxwell, que envolve as derivadas dos valores da polarização, então já descartamos estas constantes. As equações de Maxwell em meio material são dadas por,

$$P^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad (4.6)$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (4.7)$$

onde $P^{\mu\nu}$ é o tensor dos campos auxiliares \vec{D} e \vec{H} , definidos em (4.1) e (4.2). De (4.6), temos as equações de Maxwell em meios materiais $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ e $\nabla \times \vec{H} = \partial \vec{D} / \partial t$.

Decompomos (4.6) de maneira análoga a feita em (3.16) [31],

$$P^{\mu\nu} = D^\mu V^\nu - D^\nu V^\mu + \eta^{\mu\nu\alpha\beta}V_\alpha H_\beta. \quad (4.8)$$

Utilizando (4.8), (4.1) e (4.2) em (4.6), temos,

$$V^\nu \left(\eta^{\mu\alpha}E_\alpha + \chi^{\mu\alpha}E_\alpha + \frac{1}{2}\chi^{\mu\alpha\beta}E_\alpha E_\beta + \frac{1}{6}\chi^{\mu\alpha\beta\gamma}E_\alpha E_\beta E_\gamma \right)_{,\nu} + \eta^{\mu\nu\alpha\beta}V_\alpha B_{\beta,\nu} = 0.$$

Aplicando o método de Hadamard,

$$\omega \left(\eta^{\mu\alpha} + \chi^{\mu\alpha} + \chi^{\mu\alpha\beta}E_\beta + \frac{1}{2}\chi^{\mu\alpha\beta\gamma}E_\beta E_\gamma \right) e_\alpha + \frac{1}{\omega}\eta^{\mu\nu\alpha\beta}V_\alpha b_\beta k_\nu = 0.$$

Utilizando o resultado de (3.24), obtemos

$$\begin{aligned} \omega \left(\eta^{\mu\alpha} + \chi^{\mu\alpha} + \chi^{\mu\alpha\beta}E_\beta + \frac{1}{2}\chi^{\mu\alpha\beta\gamma}E_\beta E_\gamma \right) e_\alpha + \frac{1}{\omega}\eta^{\mu\nu\tau\beta}\eta_\beta^{\theta\rho\alpha}V_\tau V_\rho k_\nu k_\theta e_\alpha = 0, \\ \left[\eta^{\mu\alpha} + \chi^{\mu\alpha} + \chi^{\mu\alpha\beta}E_\beta + \frac{1}{2}\chi^{\mu\alpha\beta\gamma}E_\beta E_\gamma - \frac{1}{\omega^2}(q^\mu q^\alpha + q^2\eta^{\mu\alpha}) \right] e_\alpha = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Note também que (4.9) é tridimensional e completamente espacial. Note que e^μ , $\chi^{\mu\alpha}$, $\chi^{\mu\alpha\beta}$, $\chi^{\mu\alpha\beta\gamma}$ e q^μ são, por definição, tipo espaço. Assim, podemos reescrever (4.9) somente com índices espaciais. Logo,

$$\left[\eta^{ij} + \chi^{ij} + \chi^{ijk}E_k + \frac{1}{2}\chi^{ijkl}E_k E_l - \frac{1}{\omega^2}(q^i q^j + q^2\eta^{ij}) \right] e_j = 0. \quad (4.10)$$

Sendo $v = \omega/q$, $n^\mu = q^\mu/q$ e escolhendo $\delta^i_j + \chi^i_j = \tilde{\epsilon}\delta^i_j$, $\chi^\mu_\alpha{}^\beta E_\beta = \chi^i_j{}^k E_k = \lambda\delta^i_j$ e $\chi^\mu_\alpha{}^{\beta\gamma} E_\beta E_\gamma = \chi^i_j{}^{kl} E_k E_l = \tau\delta^i_j$, temos então que a equação de Fresnel é dada por,

$$[v^2(\tilde{\epsilon} + \lambda + \tau)\delta^i_j - I^i_j]e^j = 0, \quad (4.11)$$

onde $I^i_j = \delta^i_j + n^i n_j$ é projetor de q^j . Perceba que temos novamente uma equação de autovalores, cuja solução é dada por $\det(Z) = 0$, podemos então calcular as velocidades pelos traços do tensor de Fresnel pelo método de Cayley-Hamilton, como feito anteriormente para o caso da eletrodinâmica não-linear. Para facilitar as contas, escreveremos o tensor de Fresnel como: $Z^i_j = \gamma\delta^i_j - I^i_j$. Temos então para o primeiro traço Z^i_i ,

$$Z_1 = Z^i_i = \gamma\delta^i_i - I^i_i = 3\gamma - 3 - (n^i n_i) = 3\gamma - 2.$$

Notemos que $I^i_j I^j_k = I^i_k$, isto irá nos ajudar nos próximos cálculos junto com $I^j_j = 2$. Mostremos este fato,

$$I^i_j I^j_k = (\delta^i_j + n^i n_j)(\delta^j_k + n^j n_k) = \delta^i_k \delta^j_j + \delta^i_j n^j n_k + \delta^j_k n^i n_j + n^i n_j n^j n_k.$$

Como $n^i n_i = -1$, segue

$$\delta^i_k + n^i n_k + n^i n_k - n^i n_k = \delta^i_k + n^i n_k = I^i_k.$$

Para o segundo traço $Z^i_j Z^j_i$,

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z^i_j Z^j_i = (\gamma\delta^i_j - I^i_j)(\gamma\delta^j_i - I^j_i) = \gamma^2\delta^i_j\delta^j_i - \gamma\delta^i_j I^j_i - \gamma\delta^j_i I^i_j + I^i_j I^j_i = \\ &= 3\gamma^2 - 4\gamma + 2. \end{aligned}$$

Para o terceiro traço $Z^i_j Z^j_k Z^k_i$,

$$\begin{aligned} Z_3 &= Z^i_j Z^j_k Z^k_i = (\gamma\delta^i_j - I^i_j)(\gamma\delta^j_k - I^j_k)(\gamma\delta^k_i - I^k_i) = (\gamma^2\delta^i_j\delta^j_k - \gamma\delta^i_j I^j_k - \gamma\delta^j_k I^i_j + I^i_j I^j_k)(\gamma\delta^k_i - I^k_i) \\ &= (\gamma^2\delta^i_k - 2\gamma I^i_k + I^i_k)(\gamma\delta^k_i - I^k_i) = \gamma^3\delta^i_k\delta^k_i - \gamma^2\delta^i_k I^k_i - 2\gamma^2\delta^i_k I^k_i + 2\gamma I^i_k I^k_i \gamma\delta^k_i - I^i_k I^k_i \\ &= 3\gamma^3 - 6\gamma^2 + 6\gamma - 2. \end{aligned}$$

Com os traços, podemos calcular o determinante pela fórmula,

$$\det(Z) = -\frac{1}{6}(Z_1)^3 + \frac{1}{2}(Z_1)(Z_2) - \frac{1}{3}(Z_3) = 0.$$

Temos então,

$$\gamma^3 - 2\gamma^2 + \gamma = 0. \quad (4.12)$$

As soluções desta equação são $\gamma = 0$ e $\gamma = 1$. Temos então que para o modo propagante, v^2 é dado por

$$v^2 = \frac{1}{\tilde{\epsilon}(1 + \tilde{\lambda} + \tilde{\tau})}, \quad (4.13)$$

onde $\tilde{\lambda} = \lambda/\tilde{\epsilon}$ e $\tilde{\tau} = \tau/\tilde{\epsilon}$. Considerando que τ e λ são muito menores que $\tilde{\epsilon}$, temos em primeira aproximação que,

$$v^2 = \frac{1}{\tilde{\epsilon}}(1 - \tilde{\lambda} - \tilde{\tau}). \quad (4.14)$$

Da definição de λ e τ , temos que,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{3}\chi^{i,j}E_j = \hat{\chi}^j E_j, \\ \tau &= \frac{1}{3}\chi^{i,jk}E_jE_k = \hat{\chi}^{ij}E_iE_j. \end{aligned}$$

Reescrevemos então a velocidade como,

$$v^2 = \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \left(1 - \frac{1}{\tilde{\epsilon}}(\hat{\chi}^i E_i + \hat{\chi}^{ij} E_i E_j) \right).$$

Incorporando $1/\tilde{\epsilon}$ nos coeficientes χ , encontramos,

$$v^2 = \frac{1}{\tilde{\epsilon}}(1 - \hat{\chi}^i E_i - \hat{\chi}^{ij} E_i E_j). \quad (4.15)$$

A susceptibilidade $\hat{\chi}^\alpha$ é associada ao efeito Pockels, e $\hat{\chi}^{ij}$ ao efeito Kerr. Como visto anteriormente, a velocidade de fase nas teorias estudadas varia com o quadrado do campo elétrico. Logo, na construção do modelo análogo, somente nos interessa o coeficiente $\hat{\chi}^{ij}$. Utilizaremos então materiais centrossimétricos, os quais $\hat{\chi}^i$ é igual a zero. Temos então a expressão da velocidade de fase no meio dada por,

$$v^2 = \frac{1}{\tilde{\epsilon}}(1 - \hat{\chi}^{ij} E_i E_j). \quad (4.16)$$

O índice de refração é dado por,

$$\eta^2 = \frac{\tilde{\epsilon}}{1 - \hat{\chi}^{ij} E_i E_j}. \quad (4.17)$$

Finalizamos aqui nosso estudo da eletrodinâmica Maxwelliana em meios materiais. Vamos agora utilizar todos os resultados já desenvolvidos até aqui para formularmos uma correspondência entre a eletrodinâmica não linear e a eletrodinâmica de Maxwell em meios materiais. Essa correspondência nos permitirá estabelecer modelos análogos de soluções para a propagação de ondas eletromagnéticas nestes dois domínios do eletromagnetismo.

5 Modelo análogo para teorias não lineares em meio material

Neste capítulo, construiremos o modelo análogo entre a eletrodinâmica não linear e a eletrodinâmica Maxwelliana em meios materiais. Faremos isso por meio da associação dos termos da chamada métrica efetiva e associando o índice de refração em cada um dos casos. Vejamos como se constrói uma métrica efetiva [25, 32].

5.1 Métrica efetiva

Da eletrodinâmica linear no vácuo, a relação de dispersão é o que se segue,

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0. \quad (5.1)$$

Em outras palavras, k_μ é um vetor tipo luz na métrica de Minkowski. Numa teoria não linear, k_μ não é mais tipo luz na métrica de Minkowski, mas veja que podemos reescrever (3.10) na forma,

$$g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0, \quad (5.2)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é dado por,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \xi F^{\alpha\mu} F_\alpha{}^\nu. \quad (5.3)$$

Na teoria linear, em um espaço-tempo curvo, o quadrivetor de onda continua a ser um vetor nulo, mas agora em relação à métrica curva, ou seja,

$$g_{RG}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0. \quad (5.4)$$

Vejamos agora se podemos fazer uma relação entre um espaço-tempo curvo da relatividade geral com o tensor $g^{\mu\nu}$ que encontramos na eletrodinâmica não-linear.

Vamos definir o objeto $\bar{g}_{\mu\nu}$ de forma que

$$\bar{g}_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu. \quad (5.5)$$

Perceba que, a priori, $\bar{g}_{\mu\nu}$ não tem nenhuma ligação com $g^{\mu\nu}$, pois o tensor covariante $g_{\mu\nu}$ associado a este é dado abaixando os índices via métrica de Minkowski. $\bar{g}_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ são objetos diferentes. Mostraremos então que a métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ é na verdade uma métrica efetiva para k_μ , ou seja, a propagação de raios luminosos nesta teoria é equivalente ao estudo de raios luminosos propagando em espaço curvo. Para mostrarmos este resultado

[32], comecemos tomando a derivada de 5.2 em relação a coordenada x^γ , e, utilizando que k_μ é o gradiente da eikonal, i.e., $\partial_\nu k_\mu = \partial_\mu k_\nu$, segue que,

$$g^{\mu\nu}{}_{,\gamma} k_\mu k_\nu + 2g^{\mu\nu} k_{\gamma,\mu} k_\nu = 0. \quad (5.6)$$

Tomamos agora a derivada da relação entre $\bar{g}_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$, temos,

$$\bar{g}_{\mu\alpha} g^{\mu\nu}{}_{,\gamma} = -\bar{g}_{\mu\alpha,\gamma} g^{\mu\nu}.$$

Contraindo com $g^{\alpha\beta}$,

$$g^{\beta\nu}{}_{,\gamma} = -g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \bar{g}_{\mu\alpha,\gamma} = -g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (\bar{g}_{\mu\alpha,\gamma} + \bar{g}_{\gamma\alpha,\mu} - \bar{g}_{\gamma\alpha,\mu}).$$

Voltando este resultado em (5.6),

$$\bar{k}^\sigma (k_{\gamma,\sigma} - \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu k_\mu) = 0,$$

onde $\bar{k}^\sigma = g^{\sigma\mu} k_\mu$ e $\Gamma_{\sigma\gamma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\bar{g}_{\sigma\alpha,\gamma} + \bar{g}_{\gamma\alpha,\sigma} - \bar{g}_{\gamma\sigma,\alpha})$.

Vejamos agora que, se $\bar{g}_{\gamma\alpha}$ é considerado uma métrica, então o termo entre parênteses é a derivada covariante do quadri vetor k_μ em relação a esta métrica. Ou seja,

$$k_{\gamma;\sigma} = k_{\gamma,\sigma} - \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu k_\mu,$$

onde $\Gamma_{\sigma\gamma}^\mu$ são os símbolos de Christoffel da métrica efetiva. Temos então,

$$\bar{k}^\sigma k_{\gamma;\sigma} = 0.$$

Multiplicando por $g^{\gamma\beta}$ e utilizando a identidade $g^{\gamma\beta} k_{\gamma,\sigma} = \bar{k}^{\beta}{}_{,\sigma} + \bar{k}^\rho g^{\gamma\beta} \bar{g}_{\rho\gamma,\sigma}$ chegamos a expressão,

$$\bar{k}^\sigma (\bar{k}^{\beta}{}_{,\sigma} + \Gamma_{\sigma\rho}^\beta \bar{k}^\rho) = 0.$$

Identificando o termo dentro dos parênteses como a derivada covariante de \bar{k}^μ em relação a métrica $g^{\mu\nu}$, temos a equação da geodésica,

$$\bar{k}^\sigma \bar{k}^{\beta}{}_{;\sigma} = 0.$$

Vemos assim que, mesmo a métrica de fundo sendo Minkowski, os raios luminosos correrão em geodésicas da métrica efetiva $g^{\mu\nu}$, sendo \bar{k}^μ o vetor tangente ao longo da curva γ que descreve a trajetória da luz. Temos que $\bar{k}^\mu = \frac{dx^\mu}{du}$, onde u é o parâmetro afim ao longo de γ . Dessa forma, podemos reescrever a equação geodésica como

$$\frac{d^2 x^\beta}{du^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du} = 0, \quad (5.7)$$

que é a forma mais conhecida da equação da geodésica.

Desta analogia formal entre objetos em princípio distintos, a métrica de um espaço curvo e a métrica efetiva, surgiram diversos trabalhos onde modelos análogos são propostos

para que se possa medir indiretamente previsões da relatividade geral, destacando aqui o seminal artigo de William Unruh que, em 1981 [8], propôs um análogo a buracos negros onde seria possível medir a radiação Hawking. Uma possível analogia entre os coeficientes ópticos de um meio material e a métrica do espaço-tempo já havia sido observada por Einstein [7]. Ao longo destes últimos 42 anos, um sem número de modelos análogos nas mais diferentes áreas foram propostos para os mais diferentes problemas [9].

5.2 Analogia via associação da geometria efetiva

Apresentamos então um modelo análogo em meio material para as teorias não lineares do eletromagnetismo. Mais especificamente, proporemos um modelo análogo em meios materiais para teorias onde o vácuo se comporta como um material que manifesta efeito Kerr.

Das equações (3.50) e (3.61), temos

$$v^2 = 1 - \gamma E^2 \sin^2 \theta, \quad (5.8)$$

onde γ é um fator igual a $1/\beta^2$ se estivermos tratando a teoria de Born-Infeld e $\alpha\mu$ se Euler-Heisenberg. Note que, comparando (5.8) com (4.16), vemos que o efeito não linear do vácuo é análogo ao efeito Kerr em meio material, ou seja, existe uma correspondência entre os efeitos provocados pela não linearidade da teoria eletromagnética no vácuo com o efeito Kerr no meio material na teoria de Maxwell. De (5.8), podemos tomar a relação de dispersão

$$\omega^2 = (1 - \gamma E^2 \sin^2 \theta) q^2 = V^\mu V^\nu k_\mu k_\nu = -(1 - \gamma E^2 \sin^2 \theta) h^{\mu\nu} k_\mu k_\nu,$$

ou ainda,

$$[V^\mu V^\nu + (1 - \gamma E^2 \sin^2 \theta) h^{\mu\nu}] k_\mu k_\nu = [\eta^{\mu\nu} - \gamma E^2 \sin^2 \theta h^{\mu\nu}] k_\mu k_\nu = 0. \quad (5.9)$$

Definimos então a métrica efetiva para uma teoria não linear da eletrodinâmica como,

$$g_{ENL}^{\mu\nu} \doteq \eta^{\mu\nu} - \gamma E^2 \sin^2 \theta h^{\mu\nu}. \quad (5.10)$$

Esta é a métrica efetiva das teorias não lineares. Como vemos, a correção devido a não linearidade da teoria promove uma alteração do cone de luz de Minkowski, de magnitude $\gamma E^2 \sin^2 \theta$.

Analogamente, da equação (4.16), temos que a relação de dispersão para o meio material é dada por

$$\left[V^\mu V^\nu + \frac{1}{\tilde{\epsilon}} (1 - \hat{\chi}^{ij} E_i E_j) h^{\mu\nu} \right] k_\mu k_\nu = \left[\eta^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}} - 1 \right) h^{\mu\nu} - \frac{\chi^{ijkl} E_j E_k}{3\tilde{\epsilon}^2} h^{\mu\nu} \right] k_\mu k_\nu = 0. \quad (5.11)$$

A métrica efetiva da eletrodinâmica em meios materiais é então

$$g_{EMM}^{\mu\nu} \doteq \eta^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}} - 1\right) h^{\mu\nu} - \frac{\chi^{i,jk} E_j E_k}{3\tilde{\epsilon}^2} h^{\mu\nu}. \quad (5.12)$$

Neste caso, a métrica pode ser decomposta em 3 setores: Minkowski, a contribuição linear na susceptibilidade, e a contribuição não linear da susceptibilidade de terceira ordem associada ao efeito Kerr.

Veja que, na teoria não linear, se considerarmos o espaço sem a presença do campo elétrico, nosso cone de luz é Minkowski. Mas, caso haja campo, há uma contribuição deste para o cone de luz, de modo a fechar seu ângulo de abertura. O mesmo ocorre para o meio material, caso não exista campo elétrico no meio, o cone de luz é o cone de Minkowski corrigido pelo termo da susceptibilidade linear, que é uma constante. Caso apliquemos um campo elétrico, ativamos a componente não linear da susceptibilidade, alterando seu cone de luz de modo a diminuir seu ângulo de abertura. Vamos então associar o desvio provocado pelo campo elétrico na teoria não linear com o desvio provocado pelo campo elétrico no meio material. Assim,

$$\gamma \mathcal{E}^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{3\tilde{\epsilon}^2} \chi^{i,jk} E_j E_k, \quad (5.13)$$

onde \mathcal{E} representa o campo elétrico na teoria não linear e E o campo elétrico no meio material. Por via de simplicidade, consideremos que o campo elétrico só está aplicado em uma direção, e que todos os coeficientes de χ são iguais, temos assim,

$$\gamma \mathcal{E}^2 \sin^2 \theta = \frac{\chi E^2}{\tilde{\epsilon}^2}. \quad (5.14)$$

Esta relação nos diz que: aplicado um campo E no meio material, o desvio provocado no cone de luz para uma onda que se propaga nesse meio é o mesmo desvio provocado no cone de luz de uma onda em uma teoria não linear que se propaga no vazio com um campo elétrico de fundo

$$|\sin \theta| \mathcal{E} = \frac{E}{\tilde{\epsilon}} \sqrt{\frac{\chi}{\gamma}},$$

onde θ é o ângulo entre o vetor de onda e o campo elétrico de fundo. Nosso resultado é consistente. Veja que, de (5.8), quanto mais próximo θ é de zero, menor é o desvio do valor da velocidade, que é nulo com $\theta = 0$. Devemos excluir então $\theta = 0$ de nossa análise.

5.3 Analogia pelo índice de refração

Mostremos agora um modelo análogo experimentável, onde vamos tomar a equivalência entre os índices de refração da teoria não linear com o do meio material. De (5.8) e (4.17), podemos igualar os índices de refração de ambos os casos. Segue que,

$$\frac{1}{1 - \gamma \mathcal{E}^2 \sin^2 \theta} = \frac{\tilde{\epsilon}}{1 - \frac{1}{3\tilde{\epsilon}} \chi^{i,jk} E_j E_k}, \quad (5.15)$$

onde novamente \mathcal{E} representa o campo elétrico na teoria não linear e E o campo elétrico no meio material. Manipulando a expressão, obtemos

$$1 - \gamma \mathcal{E}^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{\tilde{\epsilon}} - \frac{1}{3\tilde{\epsilon}^2} \chi^{i,jk} E_j E_k. \quad (5.16)$$

Novamente, vamos querer associar somente o valor do desvio de cada caso, ou seja, o desvio do valor de 1 no caso da eletrodinâmica não linear e o desvio de $1/\tilde{\epsilon}$ no caso do meio material. Pode-se perguntar da validade de nossa equivalência, onde utilizamos a velocidade aproximada para os meios materiais. Isto não é um problema, visto que χ^{ijkl} é da ordem de $10^{-23} \text{ m}^2/\text{V}^2$ [33, 34]. Mesmo em casos onde podemos ter materiais com χ^{ijkl} da ordem de $10^{-18} \text{ m}^2/\text{V}^2$, este ainda é muito maior que o campo elétrico de ruptura E_{lim} do meio material, que representa o máximo campo elétrico que se pode aplicar ao meio material sem que sua estrutura molecular seja destruída. Temos assim,

$$\gamma \mathcal{E}^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{3\tilde{\epsilon}^2} \chi^{i,jk} E_j E_k, \quad (5.17)$$

que é o mesmo encontrado em (5.13). Por simplicidade experimental, assumiremos que o campo seja aplicado somente na direção \hat{x} , e, como os valores de χ^{ijkl} não variam consideravelmente, podemos tomar $\chi^{i,jk} E_j E_k = 3\chi E^2$. Para realizar nossas estimativas numéricas, vamos utilizar o SI de unidades. Devemos então dividir o lado esquerdo de (5.17) por c^2 para recuperarmos as unidades. Assim, podemos aproximar $\gamma/c^2 = \tilde{\gamma} \approx 10^{-40} \text{ m}^2/\text{V}^2$ em ambas teorias. Desta forma, obtemos

$$\mathcal{E} = \frac{E}{\tilde{\epsilon} |\sin \theta|} \sqrt{\frac{\chi}{\tilde{\gamma}}}. \quad (5.18)$$

Esta é a equivalência entre o valor do campo elétrico na teoria não linear \mathcal{E} e o valor do campo elétrico em meio material E .

5.4 Estimativas numéricas para o Ge e Si

Propomos agora alguns materiais que podem ser utilizados experimentalmente para medir esta equivalência e mostramos a previsão de seus valores. Para o germânio, que possui a estrutura cristalina de tipo diamante cúbico, permissividade relativa aproximada de $\tilde{\epsilon} = 25$ [35], susceptibilidade de terceira ordem $\chi = 5.6 \times 10^{-19} \text{ m}^2/\text{V}^2$ [33] e campo elétrico de ruptura de $E_{lim} = 10^7 \text{ V/m}$, se aplicarmos o campo de ruptura, temos,

$$\mathcal{E} = \frac{3 \times 10^{16} \text{ V}}{|\sin \theta| \text{ m}}. \quad (5.19)$$

Temos então que o desvio do índice de refração do germânio, ao se aplicar um campo elétrico da ordem de 10^7 V/m , é o mesmo do índice de refração do vácuo ao se aplicar um campo elétrico da ordem de $3 \times 10^{16}/|\sin \theta| \text{ V/m}$ na teoria não linear com o ângulo entre o vetor de onda e o campo elétrico externo θ .

Nosso resultado é consistente, caso tomemos um ângulo diferente de $\pi/2$, o efeito do campo elétrico na teoria não linear é menor, logo o campo elétrico \mathcal{E} deve ser maior para alcançar o mesmo valor de desvio, e como não há desvio em $\theta = 0$, o ângulo deve ser descartado. Veja que não falamos da direção da onda se propagando no meio material, isto se dá pois aproximamos o meio material para um modelo isotrópico, logo não há qualquer relação entre o ângulo θ da teoria não linear e o ângulo de incidência no meio material de nossa teoria. Note que se estivermos tratando da teoria de Born-Infeld, e para o ângulo θ o valor de \mathcal{E} é maior que 10^{20} V/m, não é possível chegar a este valor de desvio na teoria não linear.

Outro material possível que podemos utilizar é o silício, cuja estrutura cristalina também é diamante cúbico e possui as seguintes características: permissividade relativa $\tilde{\epsilon} = 10$, susceptibilidade de terceira ordem $\chi = 2.8 \times 10^{-18}$ m²/V², campo elétrico de ruptura $E_{lim} = 3 \times 10^7$ V/m. Aplicando estes dados em (5.18), temos

$$\mathcal{E} = \frac{5 \times 10^{17}}{|\sin \theta|} \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad (5.20)$$

A interpretação é a mesma feita anteriormente para o germânio.

Terminamos aqui nosso modelo análogo. Mostramos então que, com valores de campo elétrico possíveis de se obter em um laboratório comum, podemos mimetizar efeitos de campos elétricos da ordem de 10^{18} no vácuo em teorias não lineares do eletromagnetismo.

6 Conclusão

Iniciamos este trabalho derivando as equações de movimento para uma Lagrangiana arbitrária dependente de F e G e calculamos seu tensor de momento-energia. Após isto, mostramos estes mesmos resultados no formalismo do cálculo vetorial, onde generalizamos as equações de Maxwell para um novo conjunto de equações para uma teoria não linear (2.18 - 2.21). Utilizamos estes resultados obtidos para derivar a teoria de Born-Infeld e suas consequências diretas, como a finitude da auto-energia do elétron e um valor limite para o campo elétrico.

Com o estudo desenvolvido e utilizando a aproximação da ótica geométrica e o método de Hadamard, derivamos a relação de dispersão associada a propagação de ondas nestas teorias e estudamos o fenômeno da birrefringência. Derivamos as expressões para as velocidades de fase e de grupo e mostramos também que, em primeira ordem do fator ξ , a velocidade de fase e de grupo são idênticas. Do tensor de Fresnel, derivamos os vetores de polarização da onda eletromagnética.

Utilizamos estes resultados nas teorias de Born-Infeld e de Euler-Heisenberg, encontrando a velocidade de fase, de grupo, índice de refração e vetores de polarização destas teorias. Encontramos que não há birrefringência na teoria de Born-Infeld, enquanto há o fenômeno para Euler-Heisenberg. Mostramos também que, na teoria de Born-Infeld, e em primeira aproximação do fator ξ na teoria de Euler-Heisenberg, o vácuo se comporta como um meio material que apresenta o efeito Kerr, ou seja, a velocidade de fase varia com o quadrado do campo elétrico aplicado.

Passamos então para o estudo da propagação da luz em meios materiais, onde estudamos os meios materiais que apresentam o efeito Kerr sem a presença do efeito Pockels, ou seja, materiais de estrutura cristalina centrossimétrica. Restringimo-nos a este tipo de material por consequência do vácuo das teorias não lineares estudadas apresentarem um efeito semelhante ao efeito Kerr.

Por último, demonstramos que os raios de luz correm sobre geodésicas da métrica efetiva. Deste resultado, propomos uma analogia entre os coeficientes da métrica efetiva da luz na teoria não linear e os coeficientes da métrica efetiva da luz no meio material. De forma experimentável, mostramos que podemos igualar a mudança do índice de refração do vácuo nas teorias não lineares com a mudança do índice de refração do meio material. Assim, com campos elétricos da ordem de 10^7 V/m, podemos estudar o efeito análogo nas teorias não lineares que necessitam de campos da ordem de 10^{18} V/m.

Concluimos que este trabalho é uma porta de entrada para o vasto campo de estudo da eletrodinâmica não linear. Pretendemos no futuro expandir nossos resultados

através da generalização da velocidade de fase e de grupo com a presença do campo magnético e aplicar nossos resultados em outras teorias não lineares do eletromagnetismo como ModMax [13] e Białynicki-Birula [11, 22], além de avançar no estudo das teorias não lineares e suas aplicações, como teorias generalizadas e aplicações em cosmologia [36, 37, 38].

Apêndices

APÊNDICE A – Cálculos realizados no Software Mathematica

Neste apêndice iremos expor as contas realizadas no capítulo 3.2 no Software Mathematica. Visto que não utilizamos nenhuma extensão para cálculo tensorial, o aplicativo serviu como auxílio para realizar as longas contas do cálculo do determinante do tensor de Fresnel, embora a manipulação algébrica dos tensores tenha sido feita a punho.

Objetos escritos “termoXY” significa “parcela Y do traço X”.

f , $fest$, $fbar$ e $k2$ significam, respectivamente, $F^{\alpha\mu}F_{\alpha\nu}$, $\tilde{F}_{\alpha\nu}F^{\alpha\mu}$, $\tilde{F}^{\alpha\mu}\tilde{F}_{\alpha\nu}$ e k^2 .

as variáveis a , b , c , α , β , γ e σ são variáveis criadas para simplificar os cálculos, sendo fatores que aparecem diversas vezes nos diferentes traços.

$$a = fLFF^2 + fbarLFG^2 + 2festLFFLFG$$

$$b = fLFFLFG + fbarLFGLGG + festLFFLGG + festLFG^2$$

$$c = fLFG^2 + fbarLGG^2 + festLFGLGG + festLFGLGG$$

$$\alpha = afLFF + afestLFG + bfbarLFG + bfestLFF$$

$$\beta = afLFG + afestLGG + bfbarLGG + bfestLFG$$

$$\gamma = bfLFF + bfestLFG + cfbarLFG + cfestLFF$$

$$\sigma = bfLFG + bfestLGG + cfbarLGG + cfestLFG$$

Seguindo pelo programa, se tornará claro onde eles aparecem. Temos então o programa:

In[1]:= **ClearAll**
[apaga tudo]

Out[1]= **ClearAll**

In[2]:= **a = LFF^2 f + LFF LFG fest + LFF LFG fest + LFG^2 fbar**

Out[2]= $f LFF^2 + 2 fest LFF LFG + fbar LFG^2$

In[3]:= **c = LGG^2 fbar + LGG LFG fest + LGG LFG fest + LFG^2 f**

Out[3]= $f LFG^2 + 2 fest LFG LGG + fbar LGG^2$

In[4]:= **b = LFF LGG fest + LGG LFG fbar + LFF LFG f + LFG^2 fest**

Out[4]= $f LFF LFG + fest LFG^2 + fest LFF LGG + fbar LFG LGG$

In[5]:= **$\alpha = a LFF f + a LFG fest + b LFF fest + b LFG fbar$**

Out[5]= $f LFF (f LFF^2 + 2 fest LFF LFG + fbar LFG^2) + fest LFG (f LFF^2 + 2 fest LFF LFG + fbar LFG^2) +$
 $fest LFF (f LFF LFG + fest LFG^2 + fest LFF LGG + fbar LFG LGG) +$
 $fbar LFG (f LFF LFG + fest LFG^2 + fest LFF LGG + fbar LFG LGG)$

In[6]:= **$\beta = a LGG fest + a LFG f + b LGG fbar + b LFG fest$**

Out[6]= $f LFG (f LFF^2 + 2 fest LFF LFG + fbar LFG^2) + fest (f LFF^2 + 2 fest LFF LFG + fbar LFG^2) LGG +$
 $fest LFG (f LFF LFG + fest LFG^2 + fest LFF LGG + fbar LFG LGG) +$
 $fbar LGG (f LFF LFG + fest LFG^2 + fest LFF LGG + fbar LFG LGG)$

In[7]:= **$\gamma = c LFF fest + c LFG fbar + b LFF f + b LFG fest$**

Out[7]= $f LFF (f LFF LFG + fest LFG^2 + fest LFF LGG + fbar LFG LGG) +$
 $fest LFG (f LFF LFG + fest LFG^2 + fest LFF LGG + fbar LFG LGG) +$
 $fest LFF (f LFG^2 + 2 fest LFG LGG + fbar LGG^2) + fbar LFG (f LFG^2 + 2 fest LFG LGG + fbar LGG^2)$

In[8]:= **$\sigma = c LGG fbar + c LFG fest + b LGG fest + b LFG f$**

Out[8]= $f LFG (f LFF LFG + fest LFG^2 + fest LFF LGG + fbar LFG LGG) +$
 $fest LGG (f LFF LFG + fest LFG^2 + fest LFF LGG + fbar LFG LGG) +$
 $fest LFG (f LFG^2 + 2 fest LFG LGG + fbar LGG^2) + fbar LGG (f LFG^2 + 2 fest LFG LGG + fbar LGG^2)$

In[9]:= **fest = 1 / 4 G δ**

Out[9]= $\frac{G \delta}{4}$

In[10]:= **fbar = f - 1 / 2 F δ**

Out[10]= $f - \frac{F \delta}{2}$

In[11]:= **f = kf**

Out[11]= kf

In[12]:= $\delta = k2$
 Out[12]=
 $k2$

In[13]:= **termo41 = FullSimplify[256 (α (LFF f f + LGG fest fest + LFG (fest f + f fest)) +
 [simplifica completamente
 β (LFF f fest + LGG fest fbar + LFG (fest fest + f fbar)) +
 γ (LFF fest f + LGG fbar fest + LFG (fbar f + fest fest)) +
 σ (LFF fest fest + LGG fbar fbar + LFG (fbar fest + fest fbar)))]**

Out[13]=
 $(8 kf (2 kf LFF + G k2 LFG) + G^2 k2^2 LGG)$
 $((4 kf LFF + G k2 LFG) (k2 LFG (3 G LFF - 4 F LFG) + 4 kf (LFF^2 + 2 LFG^2)) +$
 $(G k2 LFF - 2 F k2 LFG + 4 kf LFG)^2 LGG) +$
 $2 (G^2 k2^2 LFG + 8 kf (-F k2 + 2 kf) LFG + 2 G k2 (-F k2 LGG + 2 kf (LFF + LGG)))$
 $(16 kf^2 LFG (LFF^2 + LFG^2 + LFF LGG + LGG^2) +$
 $k2^2 (4 F^2 LFG LGG^2 - 2 F G LGG (3 LFG^2 + LFF LGG) + G^2 (LFG^3 + 3 LFF LFG LGG)) +$
 $4 k2 kf (G (LFF + LGG) (3 LFG^2 + LFF LGG) - 2 F LFG (LFG^2 + LGG (LFF + 2 LGG)))) +$
 $(G k2 (G k2 LFF - 4 F k2 LFG + 8 kf LFG) + 4 (F k2 - 2 kf)^2 LGG)$
 $(16 kf^2 (LFF LFG^2 + 2 LFG^2 LGG + LGG^3) +$
 $k2^2 LGG (-8 F G LFG LGG + 4 F^2 LGG^2 + G^2 (3 LFG^2 + LFF LGG)) +$
 $8 k2 kf (-2 F LGG (LFG^2 + LGG^2) + G LFG (LFG^2 + LGG (LFF + 2 LGG))))$

In[14]:= **termo42 = FullSimplify[256 LF k2 (α f + β fest + γ fest + σ fbar)]**
 [simplifica completamente

Out[14]=
 $8 k2 LF (2 kf (LFF + LGG) + k2 (G LFG - F LGG)) (16 kf^2 (LFF^2 + 3 LFG^2 - LFF LGG + LGG^2) +$
 $8 k2 kf (-3 F LFG^2 + F (LFF - 2 LGG) LGG + 2 G LFG (LFF + LGG)) +$
 $k2^2 (-8 F G LFG LGG + 4 F^2 LGG^2 + G^2 (LFG^2 + 3 LFF LGG)))$

In[15]:= **termo43 = FullSimplify[64 LF^2 k2^2 (a f + 2 b fest + c fbar)]**
 [simplifica completamente

Out[15]=
 $8 k2^2 LF^2 (8 kf^2 (LFF^2 + 2 LFG^2 + LGG^2) + k2^2 (-4 F G LFG LGG + 2 F^2 LGG^2 + G^2 (LFG^2 + LFF LGG)) +$
 $8 k2 kf (G LFG (LFF + LGG) - F (LFG^2 + LGG^2)))$

In[16]:= **termo44 = FullSimplify[32 LF^2 k2^2 (a f + 2 b fest + c fbar)]**
 [simplifica completamente

Out[16]=
 $4 k2^2 LF^2 (8 kf^2 (LFF^2 + 2 LFG^2 + LGG^2) + k2^2 (-4 F G LFG LGG + 2 F^2 LGG^2 + G^2 (LFG^2 + LFF LGG)) +$
 $8 k2 kf (G LFG (LFF + LGG) - F (LFG^2 + LGG^2)))$

In[17]:= **termo45 = FullSimplify[16 LF^3 k2^3 (LFF f + LGG fbar + 2 LFG fest)]**
 [simplifica completamente

Out[17]=
 $8 k2^3 LF^3 (2 kf (LFF + LGG) + k2 (G LFG - F LGG))$

In[18]:= **termo46 = FullSimplify[3 LF^4 k2^4]**
 [simplifica completamente

Out[18]=
 $3 k2^4 LF^4$

```
In[19]:= traco4 = Collect[termo41 + termo42 + termo43 + termo44 + termo45 + termo46,
    [agrupa coeficientes
    {k2, k2^2, k2^3, k2^4}], FullSimplify]
    [simplifica completamente
```

Out[19]=

$$\begin{aligned}
 & 256 k f^4 (LFF^4 + 4 LFF^2 LFG^2 + 2 LFG^4 + 4 LFF LFG^2 LGG + 4 LFG^2 LGG^2 + LGG^4) + \\
 & k^2 (3 LF^4 + 8 G LF^3 LFG + 12 G^2 LF^2 LFG^2 + 8 G^3 LF LFG^3 + \\
 & \quad 2 G^4 LFG^4 - 4 (LF + G LFG)^2 (-3 G^2 LFF + 2 F (LF + 4 G LFG)) LGG + \\
 & \quad 2 (G^4 LFF^2 - 4 F G^2 LFF (3 LF + 4 G LFG) + 4 F^2 (3 LF^2 + 12 G LF LFG + 10 G^2 LFG^2)) LGG^2 + \\
 & \quad 16 F^2 (G^2 LFF - 2 F (LF + 2 G LFG)) LGG^3 + 16 F^4 LGG^4) + \\
 & 256 k^2 k f^3 (2 G LFG (LFF + LGG) (LFF^2 + 2 LFG^2 + LGG^2) + LF (LFF^3 + 3 LFF LFG^2 + 3 LFG^2 LGG + LGG^3) - \\
 & \quad 2 F (LFF^2 LFG^2 + LFG^4 + 2 LFF LFG^2 LGG + 3 LFG^2 LGG^2 + LGG^4)) + \\
 & 32 k^2 k f^2 (3 LF^2 (LFF^2 + 2 LFG^2 + LGG^2) + 4 F^2 (LFG^4 + 3 LGG^4 + 2 LFG^2 LGG (LFF + 3 LGG)) - \\
 & \quad 8 F G LFG (LFF^2 LGG + 4 LFG^2 LGG + 3 LGG^3 + 2 LFF (LFG^2 + LGG^2)) + \\
 & \quad 12 LF (G LFG (LFF^2 + LFG^2 + LFF LGG + LGG^2) - F (LFF LFG^2 + 2 LFG^2 LGG + LGG^3)) + \\
 & \quad 2 G^2 (3 LFG^4 + LFF^3 LGG + 5 LFG^2 LGG^2 + LFF^2 (5 LFG^2 + LGG^2) + LFF (8 LFG^2 LGG + LGG^3))) + \\
 & 16 k^2 k f (LF^3 (LFF + LGG) + 4 G^3 LFG (LFF + LGG) (LFG^2 + LFF LGG) - \\
 & \quad 8 F^3 LGG^2 (LFG^2 + LGG^2) + 8 F^2 G LFG LGG (2 LFG^2 + LGG (LFF + 3 LGG)) - \\
 & \quad 2 F G^2 (3 LFG^4 + LFF LGG^2 (LFF + 2 LGG) + 2 LFG^2 LGG (4 LFF + 5 LGG)) + \\
 & \quad 6 LF^2 (G LFG (LFF + LGG) - F (LFG^2 + LGG^2)) + 3 LF (G^2 (LFF + LGG) (3 LFG^2 + LFF LGG) + \\
 & \quad 4 F^2 LGG (LFG^2 + LGG^2) - 4 F G LFG (LFG^2 + LGG (LFF + 2 LGG))))
 \end{aligned}$$

Vejamos agora o traço 3

```
In[20]:= termo31 = FullSimplify[64 (α f + β fest + γ fest + σ fbar)]
    [simplifica completamente
```

Out[20]=

$$\begin{aligned}
 & 2 (2 k f (LFF + LGG) + k^2 (G LFG - F LGG)) (16 k f^2 (LFF^2 + 3 LFG^2 - LFF LGG + LGG^2) + \\
 & \quad 8 k^2 k f (-3 F LFG^2 + F (LFF - 2 LGG) LGG + 2 G LFG (LFF + LGG)) + \\
 & \quad k^2 (-8 F G LFG LGG + 4 F^2 LGG^2 + G^2 (LFG^2 + 3 LFF LGG)))
 \end{aligned}$$

```
In[21]:= termo32 = FullSimplify[48 LF k2 (a f + 2 b fest + c fbar)]
    [simplifica completamente
```

Out[21]=

$$\begin{aligned}
 & 6 k^2 LF (8 k f^2 (LFF^2 + 2 LFG^2 + LGG^2) + k^2 (-4 F G LFG LGG + 2 F^2 LGG^2 + G^2 (LFG^2 + LFF LGG)) + \\
 & \quad 8 k^2 k f (G LFG (LFF + LGG) - F (LFG^2 + LGG^2)))
 \end{aligned}$$

```
In[22]:= termo33 = FullSimplify[12 LF^2 k2^2 (LFF f + LGG fbar + 2 LFG fest)]
    [simplifica completamente
```

Out[22]=

$$6 k^2 LF^2 (2 k f (LFF + LGG) + k^2 (G LFG - F LGG))$$

In[23]:= **termo34 = FullSimplify[3 LF^3 k2^3]**
|simplifica completamente

Out[23]=
 $3 k2^3 LF^3$

In[24]:= **traco3 = termo31 + termo32 + termo33 + termo34**

Out[24]=

$$3 k2^3 LF^3 + 6 k2^2 LF^2 (2 kf (LFF + LGG) + k2 (G LFG - F LGG)) +$$

$$2 (2 kf (LFF + LGG) + k2 (G LFG - F LGG)) (16 kf^2 (LFF^2 + 3 LFG^2 - LFF LGG + LGG^2) +$$

$$8 k2 kf (-3 F LFG^2 + F (LFF - 2 LGG) LGG + 2 G LFG (LFF + LGG)) +$$

$$k2^2 (-8 F G LFG LGG + 4 F^2 LGG^2 + G^2 (LFG^2 + 3 LFF LGG))) +$$

$$6 k2 LF (8 kf^2 (LFF^2 + 2 LFG^2 + LGG^2) + k2^2 (-4 F G LFG LGG + 2 F^2 LGG^2 + G^2 (LFG^2 + LFF LGG))) +$$

$$8 k2 kf (G LFG (LFF + LGG) - F (LFG^2 + LGG^2))$$

Vejamos agora o traço 2

In[25]:= **termo21 = FullSimplify[16 (a f + 2 b fest + c fbar)]**
|simplifica completamente

Out[25]=

$$2 (8 kf^2 (LFF^2 + 2 LFG^2 + LGG^2) + k2^2 (-4 F G LFG LGG + 2 F^2 LGG^2 + G^2 (LFG^2 + LFF LGG))) +$$

$$8 k2 kf (G LFG (LFF + LGG) - F (LFG^2 + LGG^2))$$

In[26]:= **termo22 = FullSimplify[8 LF k2 (LFF f + LGG fbar + 2 LFG fest)]**
|simplifica completamente

Out[26]=
 $4 k2 LF (2 kf (LFF + LGG) + k2 (G LFG - F LGG))$

In[27]:= **termo23 = FullSimplify[3 LF^2 k2^2]**
|simplifica completamente

Out[27]=
 $3 k2^2 LF^2$

In[28]:= **traco2 = termo21 + termo22 + termo23**

Out[28]=

$$3 k2^2 LF^2 + 4 k2 LF (2 kf (LFF + LGG) + k2 (G LFG - F LGG)) +$$

$$2 (8 kf^2 (LFF^2 + 2 LFG^2 + LGG^2) + k2^2 (-4 F G LFG LGG + 2 F^2 LGG^2 + G^2 (LFG^2 + LFF LGG))) +$$

$$8 k2 kf (G LFG (LFF + LGG) - F (LFG^2 + LGG^2))$$

Traco 1

```
In[45]:= termo11 = FullSimplify[4 (LFF f + LGG fbar + 2 LFG fest)]
[simplifica completamente]
```

```
Out[45]=
4 kf (LFF + LGG) + 2 k2 (G LFG - F LGG)
```

```
In[44]:= termo12 = 3 LF k2
```

```
Out[44]=
3 k2 LF
```

```
In[31]:= traco1 = termo11 + termo12
```

```
Out[31]=
3 k2 LF + 4 kf (LFF + LGG) + 2 k2 (G LFG - F LGG)
```

Vamos agora utilizar os traços para o cálculo do determinante através do teorema de Cayley-Hamilton

```
In[32]:= DetZ = Collect[
[agrupa coeficientes]
-1/4 (traco4 - 4/3 traco1 traco3 - 1/2 traco2^2 + traco1^2 traco2 - 1/6 traco1^4),
{k2, k2^2, k2^3, k2^4}, Simplify]
[simplifica]
```

```
Out[32]=
0
```

```
In[33]:= DetTridZ = Collect[Simplify[traco1^3 - 3 traco1 traco2 + 2 traco3] / k2, {k2, k2^2, k2^3}]
[agrupa ... [simplifica]
```

```
Out[33]=
-96 kf^2 LF (LFG^2 - LFF LGG) + 24 k2 kf LF (LF (LFF + LGG) + 2 F (LFG^2 - LFF LGG)) +
6 k2^2 LF (LF^2 + 2 LF (G LFG - F LGG) + G^2 (LFG^2 - LFF LGG))
```

```
In[34]:= SOL3d = Simplify[Solve[DetTridZ == 0, k2]]
[simplifica [resolve]
```

```
Out[34]=
{{k2 -> -((2 (kf LF LFF + 2 F kf LFG^2 + kf LF LGG - 2 F kf LFF LGG +
sqrt(kf^2 ((LF (LFF + LGG) + 2 F (LFG^2 - LFF LGG))^2 + 4 (LFG^2 - LFF LGG)
(LF^2 + 2 LF (G LFG - F LGG) + G^2 (LFG^2 - LFF LGG)))))) /
(LF^2 + 2 LF (G LFG - F LGG) + G^2 (LFG^2 - LFF LGG))}},
{k2 -> (2 (-kf LF LFF - 2 F kf LFG^2 - kf LF LGG + 2 F kf LFF LGG +
sqrt(kf^2 ((LF (LFF + LGG) + 2 F (LFG^2 - LFF LGG))^2 +
4 (LFG^2 - LFF LGG) (LF^2 + 2 LF (G LFG - F LGG) + G^2 (LFG^2 - LFF LGG)))))) /
(LF^2 + 2 LF (G LFG - F LGG) + G^2 (LFG^2 - LFF LGG))}}
```

In[35]:= **sol1 = Simplify**[k2 /. SOL3d[[1]], **Assumptions** → {kf > 0, μ > 0}]
[simplifica] [premissas]

Out[35]=

$$-\left(\left(2 \text{ kf } \left(\text{LF LFF} + 2 \text{ F LFG}^2 + \text{LF LGG} - 2 \text{ F LFF LGG} + \sqrt{\left(\left(\text{LF} (\text{LFF} + \text{LGG}) + 2 \text{ F} (\text{LFG}^2 - \text{LFF LGG})\right)^2 + 4 (\text{LFG}^2 - \text{LFF LGG}) (\text{LF}^2 + 2 \text{ LF} (\text{G LFG} - \text{F LGG}) + \text{G}^2 (\text{LFG}^2 - \text{LFF LGG}))}\right)\right)\right) / \left(\text{LF}^2 + 2 \text{ LF} (\text{G LFG} - \text{F LGG}) + \text{G}^2 (\text{LFG}^2 - \text{LFF LGG})\right)$$

In[36]:= **sol2 = Simplify**[k2 /. SOL3d[[2]], **Assumptions** → {kf > 0, μ > 0}]
[simplifica] [premissas]

Out[36]=

$$\left(2 \text{ kf } \left(-\text{LF LFF} - 2 \text{ F LFG}^2 - \text{LF LGG} + 2 \text{ F LFF LGG} + \sqrt{\left(\left(\text{LF} (\text{LFF} + \text{LGG}) + 2 \text{ F} (\text{LFG}^2 - \text{LFF LGG})\right)^2 + 4 (\text{LFG}^2 - \text{LFF LGG}) (\text{LF}^2 + 2 \text{ LF} (\text{G LFG} - \text{F LGG}) + \text{G}^2 (\text{LFG}^2 - \text{LFF LGG}))}\right)\right)\right) / \left(\text{LF}^2 + 2 \text{ LF} (\text{G LFG} - \text{F LGG}) + \text{G}^2 (\text{LFG}^2 - \text{LFF LGG})\right)$$

 Testando o resultado para Euler-Heisenberg

In[37]:= **EHsol1 = Series** [
[série]
Simplify[k2 /. SOL3d[[1]] /. {LFF → 1 / 2 μ, LFG → 0, LGG → 7 / 8 μ, LF → -1 / 4 + 1 / 2 μ F},
[simplifica]
Assumptions → {kf > 0, μ > 0}], {μ, 0, 1}]
[premissas]

Out[37]=
 $8 \text{ kf } \mu + O[\mu]^2$

In[38]:=

In[39]:= **EHsol2 = Series** [
[série]
Simplify[k2 /. SOL3d[[2]] /. {LFF → 1 / 2 μ, LFG → 0, LGG → 7 / 8 μ, LF → -1 / 4 + 1 / 2 μ F},
[simplifica]
Assumptions → {kf > 0, μ > 0}], {μ, 0, 1}]
[premissas]

Out[39]=
 $14 \text{ kf } \mu + O[\mu]^2$

In[40]:= **SSol1 = Simplify**[sol1 /. {LFF → 1 / 2 μ, LFG → 0, LGG → 7 / 8 μ, LF → -1 / 4 + 1 / 2 μ F},
[simplifica]
Assumptions → {kf > 0, μ > 0}]
[premissas]

Out[40]=

$$\frac{\text{kf } \mu \left(-11 - 6 \text{ F } \mu + \sqrt{9 - 204 \text{ F } \mu + 1156 \text{ F}^2 \mu^2 + 784 \text{ G}^2 \mu^2}\right)}{-1 - 3 \text{ F } \mu + 10 \text{ F}^2 \mu^2 + 7 \text{ G}^2 \mu^2}$$

In[41]:= **SSol2 = Simplify**[sol2 /. {LFF → 1 / 2 μ, LFG → 0, LGG → 7 / 8 μ, LF → -1 / 4 + 1 / 2 μ F},

[\[simplifica](#)

Assumptions → {kf > 0, μ > 0}]

[\[premissas](#)

Out[41]=

$$\frac{k f \mu \left(11 + 6 F \mu + \sqrt{9 - 204 F \mu + 1156 F^2 \mu^2 + 784 G^2 \mu^2} \right)}{-1 - 3 F \mu + 10 F^2 \mu^2 + 7 G^2 \mu^2}$$

In[42]:= **Series**[SSol1, {μ, 0, 1}]

[\[série](#)

Out[42]=

$$8 k f \mu + O[\mu]^2$$

In[43]:= **Series**[SSol2, {μ, 0, 1}]

[\[série](#)

Out[43]=

$$14 k f \mu + O[\mu]^2$$

Referências

- 1 BORK, A. M. Maxwell, displacement current, and symmetry. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 31, n. 11, p. 854–859, 1963. [11](#)
- 2 DITTRICH, W.; GIES, H. Light propagation in nontrivial qed vacua. *Physical Review D*, APS, v. 58, n. 2, p. 025004, 1998. [12](#)
- 3 LORENCI, V. D. et al. Light propagation in non-linear electrodynamics. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 482, n. 1-3, p. 134–140, 2000. [12](#), [16](#), [29](#), [38](#)
- 4 OBUKHOV, Y. N.; RUBILAR, G. F. Fresnel analysis of wave propagation in nonlinear electrodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 66, n. 2, p. 024042, 2002. [12](#)
- 5 VSHIVTSEVA, P. A.; DENISOV, M. Mathematical modeling of electromagnetic wave propagation in nonlinear electrodynamics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Springer, v. 49, p. 2092–2102, 2009. [12](#)
- 6 PÉREZ-GARCÍA, M.; MARTÍNEZ, A. P.; QUERTS, E. R. Remarks on propagating waves in non-linear vacuum electrodynamics. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 83, n. 8, p. 746, 2023. [12](#)
- 7 POST, E. J. *Formal structure of electromagnetics: general covariance and electromagnetics*. [S.l.]: Courier Corporation, 1997. [12](#), [47](#)
- 8 UNRUH, W. G. Experimental black-hole evaporation? *Physical Review Letters*, APS, v. 46, n. 21, p. 1351, 1981. [12](#), [47](#)
- 9 ARIAS, E. et al. Analogue spacetimes: The first thirty years. *LF Editorial*, 2013. [12](#), [47](#)
- 10 LANDAU, L. D. *The classical theory of fields*. [S.l.]: Elsevier, 2013. v. 2. [16](#), [19](#)
- 11 BIALYNICKI-BIRULA, I. Nonlinear electrodynamics: Variations on a theme by born and infeld. *Quantum theory of particles and fields*, World Scientific Singapore, p. 31–48, 1983. [17](#), [25](#), [36](#), [52](#)
- 12 BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 144, n. 852, p. 425–451, 1934. [17](#), [18](#), [20](#), [25](#)
- 13 BANDOS, I. et al. Nonlinear duality-invariant conformal extension of maxwell’s equations. *Physical Review D*, APS, v. 102, n. 12, p. 121703, 2020. [17](#), [52](#)
- 14 LORENCI, V. D.; KLIPPERT, R. Analogue gravity from electrodynamics in nonlinear media. *Physical Review D*, APS, v. 65, n. 6, p. 064027, 2002. [19](#), [26](#), [29](#)
- 15 NOVELLO, M.; GOULART, E. Eletrodinâmica nao linear: causalidade e efeitos cosmológicos. *Editora Livraria da Física*, 2010. [19](#), [26](#), [29](#)

- 16 RIBEIRO, C. C. H.; VANZELLA, D. A. T. Analogues of gravity-induced instabilities in anisotropic metamaterials. *Physical Review Research*, APS, v. 2, n. 1, p. 013281, 2020. [19](#), [29](#)
- 17 BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 132, n. 3348, p. 1004–1004, 1933. [20](#)
- 18 ZANGWILL, A. *Modern electrodynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. [20](#)
- 19 BORN, M.; INFELD, L. On the quantization of the new field equations i. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 147, n. 862, p. 522–546, 1934. [25](#)
- 20 BORN, M.; INFELD, L. On the quantization of the new field theory ii. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 150, n. 869, p. 141–166, 1935. [25](#)
- 21 DIRAC, P. A. M. An extensible model of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 268, n. 1332, p. 57–67, 1962. [25](#)
- 22 SOROKIN, D. P. Introductory notes on non-linear electrodynamics and its applications. *Fortschritte der Physik*, Wiley Online Library, v. 70, n. 7-8, p. 2200092, 2022. [25](#), [38](#), [52](#)
- 23 GIBBONS, G. Aspects of born-infeld theory and string/m theory. *Rev. Mex. Fis.*, v. 49, n. arXiv: hep-th/0106059, p. 19–29, 2003. [25](#)
- 24 LORENCI, V. A. D. Aspects of wave propagation in a nonlinear medium: Birefringence and the second-order magnetoelectric coefficients. *Physical Review A*, APS, v. 105, n. 2, p. 023530, 2022. [26](#), [41](#)
- 25 NOVELLO, M. et al. Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 61, n. 4, p. 045001, 2000. [26](#), [45](#)
- 26 SILVA, R. R. The trace formulas yield the inverse metric formula. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 39, n. 11, p. 6206–6213, 1998. [31](#)
- 27 HEISENBERG, W.; EULER, H. Consequences of dirac theory of the positron. *arXiv preprint physics/0605038*, 2006. [38](#)
- 28 LANDAU, L. D. et al. *Electrodynamics of continuous media*. [S.l.]: elsevier, 2013. v. 8. [41](#)
- 29 RIVERA, J.-P. On definitions, units, measurements, tensor forms of the linear magnetoelectric effect and on a new dynamic method applied to cr-cl boracite. *Ferroelectrics*, Taylor & Francis, v. 161, n. 1, p. 165–180, 1994. [41](#)
- 30 RIVERA, J.-P. A short review of the magnetoelectric effect and related experimental techniques on single phase (multi-) ferroics. *The European Physical Journal B*, Springer, v. 71, p. 299–313, 2009. [41](#)

-
- 31 LORENCI, V. D. Effective geometry for light traveling in material media. *Physical Review E*, APS, v. 65, n. 2, p. 026612, 2002. [42](#)
- 32 LORENCI, V. D.; PAULA, L. de. Analog models for gravity in linear magnetoelectrics. *arXiv preprint arXiv:2205.05149*, 2022. [45](#), [46](#)
- 33 BOYD, R. W.; GAETA, A. L.; GIESE, E. Nonlinear optics. In: *Springer Handbook of Atomic, Molecular, and Optical Physics*. [S.l.]: Springer, 2008. p. 1097–1110. [49](#)
- 34 BOYD, R. W. Order-of-magnitude estimates of the nonlinear optical susceptibility. *journal of modern optics*, Taylor & Francis, v. 46, n. 3, p. 367–378, 1999. [49](#)
- 35 POLYANSKIY, M. Refractiveindex.info database of optical constants. *Sci Data*, v. 11, p. 94, 2024. [49](#)
- 36 KRUGLOV, S. On generalized modmax model of nonlinear electrodynamics. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 822, p. 136633, 2021. [52](#)
- 37 NOVELLO, M.; BERGLIAFFA, S. P.; SALIM, J. Nonlinear electrodynamics and the acceleration of the universe. *Physical Review D*, APS, v. 69, n. 12, p. 127301, 2004. [52](#)
- 38 LORENCI, V. D. et al. Nonlinear electrodynamics and frw cosmology. *Physical Review D*, APS, v. 65, n. 6, p. 063501, 2002. [52](#)
- 39 LORENCI, V. D.; KLIPPERT, R.; TEODORO, D. Birefringence in nonlinear anisotropic dielectric media. *Physical Review D*, APS, v. 70, n. 12, p. 124035, 2004.