

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Resultados de Existência e de Não Existência de Ciclos
Limites e Nós em Equações Diferenciais Ordinárias**

Gabrieli Silva Ney de Paula

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando Mello

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da
CAPES e o orientador da FAPEMIG.

ITAJUBÁ, 28 DE FEVEREIRO DE 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Resultados de Existência e de Não Existência de Ciclos
Limites e Nós em Equações Diferenciais Ordinárias**

Gabrieli Silva Ney de Paula

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando Mello

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ – MG

28 DE FEVEREIRO DE 2024

À minha mãe, Ângela.

Em memória de minhas avós Maria e Jandira que partiram em 2021.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha mãe, que sempre me inspirou e me deu todo suporte para seguir adiante nos meus objetivos e sonhos.

À minha avó Maria e meus irmãos Lion e Átila que me apoiaram e me incentivaram.

Ao Professor Doutor Luis Fernando de Osório Mello que me orientou com toda a dedicação e paciência e fez com que esse estudo fosse possível. Mais que isso, foi um grande motivador e inspirador durante todo o percurso.

À Universidade Federal de Itajubá pela oportunidade de desenvolvimento e aprendizado.

A todos os docentes que contribuíram para minha formação e fizeram com que essa jornada fosse possível.

Aos meus queridos amigos que caminham comigo e aos novos amigos que fiz durante essa etapa por tornarem esse processo um pouco mais leve e divertido.

A matemática, senhora que ensina o homem a ser simples e modesto, é a base de todas as ciências e de todas as artes.

- Malba Tahan

Resumo

Nós são equilíbrios de uma equação diferencial ou de um campo de vetores no plano cujos autovalores têm o mesmo sinal e são estrelados quando os autovalores são iguais e não nulos. Ciclos limites são órbitas fechadas e isoladas no conjunto de todas as órbitas fechadas de um campo de vetores. Esta dissertação tem por objetivo estudar condições, as mais gerais possíveis, de forma a garantir a coexistência de ciclos limites e nós estrelados. Tal estudo é feito de maneira conveniente: toma-se uma família de equações diferenciais ou campo de vetores cuja origem é um equilíbrio do tipo nó estrelado e busca condições para a existência de um ciclo limite ao redor da origem. O estudo é generalizado posteriormente e alguns resultados contemplam outros tipos de equilíbrios.

Palavras-chave: equação diferencial ordinária, campo de vetor, ciclo limite, nó estrelado.

Abstract

Nodes are equilibria of a planar differential equation or vector field whose eigenvalues have the same sign. Star nodes are nodes whose eigenvalues are equal and nonzero. Limit cycles are closed and isolated orbits in the set of closed orbits of a vector field. This work aims to find conditions, as general as possible, in order to guarantee the coexistence of limit cycles and star nodes. Such a study is done in a convenient way: take a family of differential equations whose origin is a star node equilibrium and searches for conditions for the existence of a limit cycle around the origin. Later, the study is generalized and some results contemplate other types of equilibria.

Keywords: ordinary differential equation, vector field, limit cycle, star node.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Sumário	vi
Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
1.1 Contextualização Histórica	2
1.2 Contextualização Matemática	4
1.3 Problema de Pesquisa	5
1.4 Próximos Capítulos	6
2 Considerações Iniciais	7
2.1 Revisão de Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias	7
2.2 Funções Homogêneas	22
2.3 Modelo de Estudo	24
3 Compactificação de Poincaré	27
3.1 Desenvolvimento	27
3.2 Exemplos	36
3.3 Equivalência trigonométrica	40

4 Resultados Principais	44
4.1 Teorema 4.1.1	44
4.1.1 Exemplo	57
4.2 Teorema 4.2.1	59
4.3 Teorema 4.3.1	69
4.3.1 Exemplos	76
4.4 Teorema 4.4.1	78
4.4.1 Exemplo	90
Conclusões	93
Bibliografia	95

Lista de Figuras

2.1	Retrato de fase de (2.6). [9]	10
2.2	Retratos de fase de F (à esquerda) e de G (à direita). [9]	12
2.3	Ilustração da transformação de Poincaré. [9]	16
2.4	Ciclos limites: Estável (esquerda), instável (centro) e semi-estável (direita). [9]	18
3.1	Projeções centrais. [9]	28
3.2	Cartas locais U_1 , U_2 e U_3 da esfera de Poincaré [9].	32
3.3	Retrato de fase global de $X(x, y) = (-x, y)$ [9].	37
3.4	Retrato de fase local de $F(x, y) = (2 + x^2 + 4y^2, 10xy)$. [9]	39
3.5	Retrato de fase global de $F(x, y) = (2 + x^2 + 4y^2, 10xy)$. [9]	39
3.6	Justificativa geométrica para $u = \tan(\theta)$. A carta U_1 está representada pela curva tracejada em vermelho, enquanto a carta V_1 está representada pela curva tracejada em azul. Os pontos representados são as descontinuidades das cartas U_1 e V_1 .	41
3.7	Justificativa geométrica para $u = \cot(\theta)$. A carta U_2 está representada pela curva tracejada em azul, enquanto a carta V_2 está representada pela curva tracejada em vermelho. Os pontos representados são as descontinuidades das cartas U_2 e V_2 .	42
4.1	Retrato de fase local de 4.32. [11]	59
4.2	Retrato de fase local de (4.65), onde a curva em roxo é um esboço do ciclo limite que contém a origem. [11]	77
4.3	Retrato de fase da equação diferencial (4.70) para $\varepsilon = 0, 1$. Em vermelho tracejado está a circunferência Γ_2 . O ciclo limite está em roxo. [9]	82

4.4	Retrato de fase da equação diferencial (4.70) para $\varepsilon = 1$. Em vermelho tracejado está a circunferência Γ_2 . O ciclo limite está em roxo. [9]	82
4.5	Retrato de fase de (4.71) para $n = 3$. [9]	84
4.6	Retrato de fase da equação diferencial do Exemplo para $\varepsilon = 0, 1$. [9]	91

Capítulo 1

Introdução

As equações diferenciais ordinárias são consequências do estudo do Cálculo Diferencial e Integral que teve início no século XVII pelas descobertas feitas por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Desde então, diversos resultados e aplicações importantes foram revelados e consolidados ao longo de um pouco mais de quatro séculos de estudo. Em especial, algumas das inferências físicas, biológicas e químicas que são feitas atualmente são frutos do estudo de modelos matemáticos que foram desenvolvidos utilizando equações diferenciais. Como exemplo, podem ser citados modelos de previsão do tempo, o modelo de Lorenz, para prever o movimento do ar na atmosfera, modelos de curva de contágio de doenças, como o COVID-19 e, também, o modelo aplicado a Leucemia Promielocítica Aguda, como nas referências [15] e [16].

Todos esses sistemas passam por um processo de modelagem, o qual define se as equações serão lineares ou não. De maneira geral, os modelos lineares podem ser explicitamente resolvidos por métodos conhecidos, enquanto modelos não lineares precisam de métodos analíticos para fazer inferências sobre seus resultados, neste caso, nem sempre é possível encontrar esses resultados de maneira explícita.

Isso posto, este trabalho tem por objetivo fornecer uma contribuição para o estudo de famílias específicas de equações diferenciais, mais precisamente, aquelas cuja origem tem um equilíbrio do tipo nó estrelado ou, de maneira mais geral, um equilíbrio do tipo nó. Neste capítulo será apresentada uma breve contextualização das equações diferenciais

no aspecto histórico e no aspecto matemático e o problema de pesquisa. Além disso, a última seção do capítulo evidencia o conteúdo dos próximos capítulos, com a finalidade de familiarizar o leitor com o que será feito neste estudo.

1.1 Contextualização Histórica

No século XVII, Newton e Leibniz deram origem à formalização e estruturação do que se conhece hoje por Cálculo Diferencial e Integral. Outros matemáticos da época também fizeram contribuições significativas para essa área de estudos, como os irmãos Bernoulli, Euler e Riccati. Nesse processo foi construída a definição de limite e os conceitos de diferenciabilidade e integrabilidade, que precederam a formalização das equações diferenciais.

Em especial, tais conceitos levaram às equações diferenciais ordinárias, ou seja, àquelas cuja variável independente é única. Este modelo de equações será objeto de estudo deste trabalho. Para essas equações, foram desenvolvidos métodos de resolução que buscavam encontrar soluções explícitas, como: o Método do Fator Integrante, o método das Equações Separáveis, o Método da Variação de Parâmetros, entre outros, que podem ser encontrados em [14]. Contudo, estes métodos não são efetivos para encontrar as soluções de qualquer equação diferencial, e, logo ficou evidente que, para muitas dessas equações, é impossível encontrar as soluções explícitas.

De maneira geral, esses métodos não resolvem equações diferenciais não lineares, sendo necessário recorrer a métodos numéricos ou analíticos. Neste sentido, a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias utiliza de métodos analíticos para compreender estes modelos, sem necessariamente apresentar as soluções explícitas, mas buscando conhecer características dos equilíbrios que permitam esboçar ou fazer inferências sobre o retrato de fase do campo de vetores associado à equação e, conseqüentemente, do modelo matemático equivalente. Assim, o objetivo não é resolver a equação ou encontrar as soluções, mas conseguir o máximo de informações sobre as equações para entender como elas se comportam.

Essa teoria teve início pelos estudos de Henri Poincaré e Aleksandr Lyapunov, ao fi-

nal do século XIX, muito após as descobertas de Newton. Poincaré foi responsável pelo desenvolvimento geométrico, enquanto Lyapunov trabalhava com o estudo do comportamento de soluções na vizinhança dos pontos de equilíbrio de um sistema, como no Segundo Método de Lyapunov, que pode ser encontrado em [4].

Ainda ao final do século XIX, mais especificamente no ano de 1900, aconteceu o Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Paris, no qual David Hilbert publicou 10 dos 23 problemas que hoje são conhecidos como Problemas de Hilbert. Para Hilbert, sua publicação ao fim do século XIX seria um breve prenúncio do progresso da matemática para o século XX, ou do que deveria ser. Em suas palavras, “Se quisermos ter uma idéia do desenvolvimento provável do conhecimento matemático no futuro imediato devemos fazer passar por nossas mentes as questões não-resolvidas e olhar os problemas que a ciência de hoje coloca e cujas soluções esperamos do futuro.”([5], p. 443).

Esses problemas tratam de diversas áreas da matemática em geral como topologia, álgebra e geometria. Atualmente, muitos deles já foram resolvidos, enquanto outros, apesar de terem sido propostos para o século anterior, permanecem em aberto. Em especial, o décimo sexto problema de Hilbert permanece em aberto e possui duas partes. Neste estudo, somente a segunda parte será considerada, cujo objetivo é encontrar o número máximo de ciclos limites para uma equação diferencial polinomial no plano de um determinado grau.

Mesmo não tendo uma resolução completa, muitos pesquisadores estão trabalhando para resolver esse problema, em particular, nos artigos [1], [3] e nas referências principais deste estudo [2] e [7], os autores alcançaram alguns resultados que tangenciam e avançam no sentido da resolução da segunda parte do décimo sexto problema de Hilbert num contexto específico. Alguns desses resultados compõem o núcleo deste trabalho, mas não com a ideia de quantificar, tal como no 16^o problema de Hilbert. E sim, para compreender a respeito da existência (ou não) de ciclos limites circunscrevendo equilíbrios, com destaque para os nós (estrelados).

1.2 Contextualização Matemática

Uma breve contextualização matemática será feita para familiarizar o leitor com as definições e resultados que aparecerão posteriormente. Nesta seção, o tratamento será dado de maneira informal e, posteriormente, no Capítulo 2, todas as definições serão feitas utilizando da formalidade necessária.

Seja um campo de vetores de classe C^1

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

sendo U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . A partir do campo de vetores F , define-se a equação diferencial ordinária em U por

$$X' = \frac{dX}{dt} = F(X),$$

sendo t a variável independente. Sem perda de generalidade, a equação diferencial ordinária acima será identificada com o campo de vetores F .

Uma solução ou uma trajetória, ou ainda, uma curva integral de uma equação diferencial é uma função diferenciável $\phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow U$, tal que

$$\phi'(t) = \frac{d\phi}{dt}(t) = F(\phi(t)),$$

para todo $t \in I$. Além disso, dado qualquer ponto P no aberto U , a imagem da solução de F pelo ponto P é a órbita de F pelo ponto P .

Em qualquer equação diferencial, duas órbitas não se cruzam e tampouco se tangenciam, ou seja, elas coincidem, ou são disjuntas e, além disso, podem ser classificadas por equivalência topológica: uma órbita é fechada quando é homeomorfa a um círculo e é singular quando esta é composta por um único ponto P , o qual é chamado de equilíbrio e sua principal característica é $F(P) = 0$. Os pontos que não são equilíbrios são considerados pontos regulares.

De maneira enxuta, os equilíbrios são hiperbólicos quando as partes reais de seus autovalores são não nulas. Estes, podem ser classificados de acordo com a sua estabilidade em atratores, repulsores e selas. São atratores quando as partes reais de seus autovalores

são negativas, repulsores quando as partes reais de seus autovalores são positivas e selas quando as partes reais de seus autovalores têm sinais opostos.

Além da estabilidade, os equilíbrios hiperbólicos podem ser classificados de acordo com o comportamento do campo de vetores numa vizinhança como nós, selas ou focos. Neste trabalho, o interesse principal são os equilíbrios do tipo nó, os quais têm autovalores reais com o mesmo sinal, e são estrelados quando seus autovalores são iguais e não nulos.

As órbitas também podem ser classificadas quanto à estabilidade, em estáveis, semi-estáveis e instáveis. Um dos principais interesses neste estudo é relacionado aos ciclos limites, ou seja, órbitas periódicas isoladas no conjunto das órbitas periódicas.

Afirmar que a estabilidade de uma órbita coincide com o sinal de uma função dada é equivalente a dizer que esta órbita é atratora ou repulsora quando a função é negativa ou positiva definida, respectivamente.

1.3 Problema de Pesquisa

Como já mencionado, a finalidade deste trabalho é estudar um modelo específico de equações diferenciais ordinárias não lineares, aquelas cuja origem possui um equilíbrio do tipo nó estrelado e, posteriormente, generalizar o estudo para outros nós. Além disso, considerando resultados já publicados, a ideia é fazer deduções à respeito da existência e não existência de ciclos limites circunscrevendo a origem.

Apesar da ampla aplicabilidade deste modelo de equações, neste trabalho não serão feitas aplicações em modelos matemáticos de problemas reais de qualquer área. O principal objetivo deste estudo é encontrar condições, as mais gerais possíveis, que sejam capazes de garantir a existência de um nó (estrelado) na região limitada por um ciclo limite. As principais referências utilizadas são os artigos [2] e [7] que concentram os quatro resultados primordiais para este estudo e que dão suporte para progredir na resolução desse problema de pesquisa.

1.4 Próximos Capítulos

Os capítulos subsequentes estão organizados como segue. No Capítulo 2 estão as definições mais importantes, uma pequena apresentação da família de equações que será objeto de estudo e uma justificativa para a escolha desta família. Além disso, neste capítulo encontra-se toda a revisão de Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias necessária para a compreensão do estudo.

No Capítulo 3 está concentrado todo o desenvolvimento da compactificação de Poincaré, dois exemplos de aplicação deste método e uma relação fundamental para a compreensão dos resultados que serão estudados. Este capítulo tem como principal objetivo construir uma base de conhecimentos e definições para que o leitor possa acompanhar o desenvolvimento do trabalho.

O quarto capítulo está reservado para a apresentação e as demonstrações dos principais teoremas que serão estudados neste trabalho. Neste capítulo encontram-se os quatro teoremas que são base para esta pesquisa em ordem crescente de generalização e, mais que isso, todos os lemas e corolários úteis para a demonstração destes teoremas, além das demonstrações detalhadas de cada um dos resultados que aparecerão. Neste capítulo, o objetivo principal é apresentar o que já está publicado na literatura a respeito do tema e quais avanços já foram concretizados pelos autores, é uma síntese do que já está publicado no tema.

O Capítulo 5 contém o desfecho do texto, o que foi alcançado e qual a conclusão deste estudo. Este capítulo permite compreender quais foram os avanços e quais problemas podem ser objetos de estudo no futuro. É por meio deste capítulo que se pretende evidenciar para o leitor o que já foi feito no sentido de resolver o problema de pesquisa. Por fim, este trabalho encerra apresentando todos os livros e artigos que foram referências para o estudo.

Capítulo 2

Considerações Iniciais

Para dar início ao estudo deste trabalho, serão revisadas neste capítulo algumas definições e resultados que são pertinentes para a compreensão geral do texto. Em particular, esta seção trata de uma curta revisão da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, uma breve passagem sobre funções homogêneas e a apresentação do modelo da equação que será estudado. Além disso, este capítulo traz alguns resultados que auxiliarão em demonstrações que serão feitas mais tarde neste estudo. A próxima seção será baseada nas referências [6] e [12], sendo que as outras referências utilizadas, quando necessárias, serão indicadas.

2.1 Revisão de Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias

Antes de mais nada, considere um campo de vetores de classe C^1

$$F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

sendo U um subconjunto aberto. A partir do campo de vetores F , define-se a equação diferencial ordinária em U por

$$X' = \frac{dX}{dt} = F(X), \quad (2.2)$$

sendo t a variável independente. Para este estudo, a equação diferencial ordinária (2.2) será identificada com o campo de vetores F em (2.1), sem qualquer perda de generalidade.

Uma solução de (2.2) é uma função diferenciável $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, tal que

$$\phi'(t) = \frac{d\phi}{dt}(t) = F(\phi(t)), \quad (2.3)$$

para todo $t \in I$. As soluções também podem ser chamadas de trajetórias ou curvas integrais do campo de vetores F .

Seja o Problema de Valor Inicial (PVI) ou Problema de Cauchy

$$X' = \frac{dX}{dt} = F(X), \quad X(t_0) = X_0 \quad (2.4)$$

no qual X_0 é a condição inicial. Uma solução de (2.4) é uma função diferenciável $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, tal que

$$\phi'(t) = \frac{d\phi}{dt}(t) = F(\phi(t)), \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad \phi(t_0) = X_0, \quad t_0 \in I. \quad (2.5)$$

Não há perda de generalidade em considerar $t_0 = 0$. Além disso, a solução $\phi : I \rightarrow U$ de (2.4) chama-se máxima se para toda solução $\zeta : J \rightarrow U$ tal que $I \subset J$ e $\phi = \zeta|_I$ se tenha $I = J$ e, conseqüentemente, $\phi = \zeta$. Em outras palavras, pode-se dizer que as soluções máximas são aquelas definidas num intervalo tão grande quanto possível. Neste caso, o intervalo aberto I é chamado de intervalo maximal.

No teorema a seguir estão reunidas algumas das principais propriedades em relação ao Problema de Valor Inicial (2.4).

Teorema 2.1.1. *Considere $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1 .*

- (a) *Para cada $X_0 \in U$ existe um intervalo aberto I_{X_0} onde está definida a única solução máxima ϕ_{X_0} de (2.4).*
- (b) *Se $Y = \phi_{X_0}(t_1)$ e $t_1 \in I_{X_0}$, então $I_Y = I_{X_0} - t_1 = \{r - t_1 : r \in I_{X_0}\}$ e $\phi_Y(s) = \phi_{X_0}(t_1 + s)$, para todo $s \in I_Y$.*
- (c) *O conjunto $\Omega = \{(t, X) : X \in U, t \in I_X\}$ é aberto em \mathbb{R}^{n+1} e a aplicação $\phi : \Omega \rightarrow U$ dada por $\phi(t, X) = \phi_X(t)$ é de classe C^1 em Ω .*

Em outros termos, pode-se concluir que o item (a) trata da existência e unicidade de soluções máximas, o item (b) trata da propriedade de grupos e, o item (c), trata da regularidade com relação às condições iniciais. O Teorema 2.1.1 pode ser encontrado em [6], na página 3. O próximo teorema complementa o teorema anterior, e sua demonstração está disponível na referência [6], página 4.

Teorema 2.1.2. *Considere $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1 , $X_0 \in U$ e $\phi_{X_0} : I_{X_0} \rightarrow U$ a solução máxima de F por $X_0 = \phi_{X_0}(0)$. Suponha que $I_{X_0} = (a, b)$, com b finito. Então, dado qualquer conjunto compacto $K \subset U$, existe $t_0 \in (a, b)$ tal que*

$$\phi_{X_0}(t_0) \notin K.$$

Resultado análogo vale para o caso em que a é finito.

A aplicação $\phi : \Omega \rightarrow U$ definida no Teorema 2.1.1 é chamada fluxo gerado por F . E, para cada $P \in U$, o conjunto

$$\Phi(P) = \{\phi(t, P) : t \in I_P\},$$

isto é, a imagem da curva integral de F pelo ponto P , é chamado órbita de F pelo ponto P .

Note que

$$Q \in \Phi(P) \iff \Phi(P) = \Phi(Q),$$

pois, se $Q \in \Phi(P)$, então $Q = \phi(t_1, P)$, com $t_1 \in I_P$ e

$$\phi(t, Q) = \phi(t, \phi(t_1, P)) = \phi(t + t_1, P), \quad \text{com } I_P - t_1 = I_Q.$$

Em outras palavras, duas órbitas de F coincidem ou são disjuntas, sendo que não há uma terceira opção.

Desta forma, U fica decomposto numa união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser: a imagem bijetora de um intervalo de \mathbb{R} ; um ponto; homeomorfa a um círculo. No segundo caso, $\{P\} = \Phi(P)$, a órbita chama-se singular. Nestas circunstâncias, P é um ponto de equilíbrio de F e vale $F(P) = 0$. Se $F(P) \neq 0$, diz-se que P é um ponto regular de F . E, no terceiro caso, a órbita chama-se fechada (ou periódica).

Desta maneira, pode-se enunciar o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [6], na página 5.

Teorema 2.1.3. *Se ϕ é uma solução máxima de (2.2) em I , ocorre uma das seguintes alternativas:*

- I. ϕ é bijetora;*
- II. $I = \mathbb{R}$ e ϕ é constante;*
- III. $I = \mathbb{R}$ e ϕ é periódica, isto é, existe um $k > 0$ tal que*

$$\phi(t + k) = \phi(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, e $\phi(t_1) \neq \phi(t_2)$ se $|t_1 - t_2| < k$.

O conjunto aberto U , munido da decomposição em órbitas de F , chama-se retrato de fase de F . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo F e os pontos de equilíbrio são munidos da orientação trivial. A figura a seguir ilustra o retrato de fase da equação diferencial

$$x' = \frac{1}{10}x - 4x^5 + 12x^4y - 20x^3y^2 + 20x^2y^3 - 12xy^4 + 4y^5, \tag{2.6}$$

$$y' = \frac{1}{10}y - 4x^5 + 4x^4y - 4x^3y^2 - 4x^2y^3 + 4xy^4 - 4y^5.$$

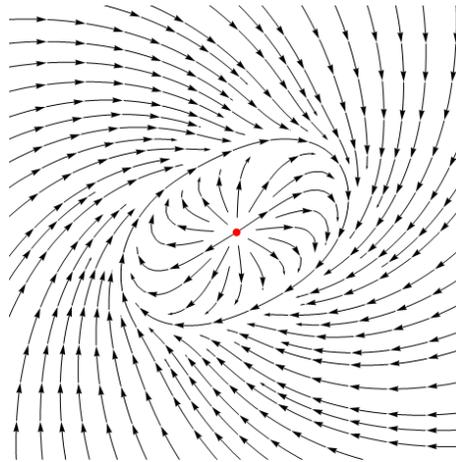


Figura 2.1: Retrato de fase de (2.6). [9]

No retrato de fase esboçado na Figura 2.1, o ponto em vermelho é um equilíbrio, ou uma órbita singular e as setas que compõem uma figura semelhante à uma elipse representam uma órbita fechada. Os retratos de fase são ferramentas geométricas que permitem compreender o comportamento de determinados campos de vetores. Porém, algumas equações possuem retratos de fase muito difíceis de serem esboçados e para isso, as equivalências fazem-se necessárias.

Algumas equivalências entre dois campos de vetores permitem comparar seus retratos de fase, estas serão recordadas agora.

Considere

$$F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad e \quad G : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

campos de vetores de classe C^1 definidos nos abertos U e V , respectivamente. Diz-se que F é topologicamente equivalente a G se existe um homeomorfismo

$$H : U \longrightarrow V$$

que aplica órbitas de F em órbitas de G preservando as orientações. Mais precisamente, se $P \in U$ e $\Phi(P)$ é a órbita orientada de F passando por P , então $H(\Phi(P))$ é a órbita orientada $\Psi(H(P))$ de G passando por $H(P)$. Neste caso, H é uma equivalência topológica entre F e G .

Considere

$$\phi_1 : \Omega_1 \longrightarrow U \quad e \quad \phi_2 : \Omega_2 \longrightarrow V$$

os fluxos gerados pelos campos F e G , respectivamente. F é topologicamente conjugado a G quando existe um homeomorfismo

$$H : U \longrightarrow V,$$

tal que

$$H(\phi_1(t, X)) = \phi_2(t, H(X)),$$

para todo $(t, X) \in \Omega_1$. O homeomorfismo H é uma conjugação topológica entre F e G .

Exemplo 2.1.1. *Considere os seguintes campos de vetores no plano*

$$F(x, y) = (x + y^2, -y) \tag{2.7}$$

e

$$G(u, v) = (u, -v). \quad (2.8)$$

Afirma-se que o homeomorfismo

$$H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad H(x, y) = \left(x + \frac{y^2}{3}, y \right)$$

é uma conjugação topológica entre F e G . De fato, como H é um difeomorfismo, basta mostrar que

$$G(H(x, y)) = DH(x, y) F(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} DH(x, y) F(x, y) &= \begin{bmatrix} 1 & 2y/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + y^2 \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y^2/3 \\ -y \end{bmatrix} \\ &= G(H(x, y)), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Os retratos de fase de F e G estão esboçados na Figura 2.2 a seguir.

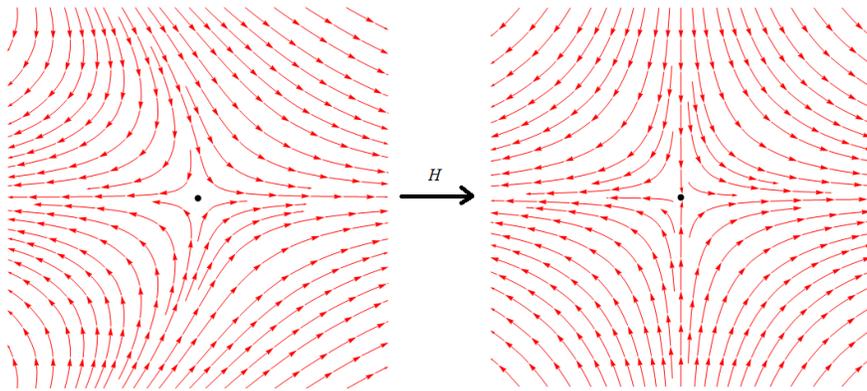


Figura 2.2: Retratos de fase de F (à esquerda) e de G (à direita). [9]

Considere $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto. Uma aplicação $G : B \longrightarrow U$ de classe C^1 chama-se seção transversal (local) de F quando, para todo $P \in B$,

$$DG(P)(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ e } F(G(P))$$

geram o espaço \mathbb{R}^n . Seja $\Sigma = G(B)$ munido da topologia induzida. Se $G : B \rightarrow \Sigma$ for um homeomorfismo, dizemos que Σ é uma seção transversal de F .

O teorema a seguir informa que, numa vizinhança de um ponto regular, o retrato de fase de um campo de vetores F está completamente determinado e sua demonstração pode ser encontrada na página 9 da referência [6].

Teorema 2.1.4 (Fluxo Tubular). *Considere $P \in U$ um ponto regular de um campo de vetores $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Então, existe um difeomorfismo que conjuga F , em uma vizinhança de P , com o campo constante*

$$(1, 0, 0, \dots, 0)$$

restrito a uma vizinhança da origem.

Considere um campo de vetores $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $P \in U$ um ponto de equilíbrio de F . P é um ponto de equilíbrio hiperbólico se a sua linearização $DF(P)$ possui todos os autovalores com partes reais não nulas. Caso contrário, o ponto é não hiperbólico.

O Teorema de Hartman–Grobman a seguir constata que, numa vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico P , o comportamento do campo de vetores F é o “mesmo” que o da sua linearização $DF(P)$. A demonstração deste teorema está disponível em [12], página 290.

Teorema 2.1.5 (Hartman–Grobman). *Considere $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1 e $P \in U$ um ponto de equilíbrio hiperbólico. Então, existem vizinhanças $V \subset U$ de P e $W \subset \mathbb{R}^n$ de 0 tais que $F|_V$ é topologicamente conjugado a $DF(P)|_W$.*

Considere $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetores de classe C^1 e $P \in U$ um ponto de equilíbrio de F . O ponto de equilíbrio P é estável, se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\|X - P\| < \delta \implies \|\phi(t, X) - P\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Diz-se que um ponto de equilíbrio P é instável se não for estável, ou seja, se não satisfizer a condição acima. E, por último, um ponto de equilíbrio P é assintoticamente

estável se é estável e, além disso, $\delta > 0$ puder ser escolhido tal que

$$\|X - P\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, X) = P.$$

De outra maneira, pode-se dizer que um equilíbrio é **estável** quando as soluções não escapam de uma região limitada suficientemente próxima desse equilíbrio, um equilíbrio é **assintoticamente estável** quando além de ser estável, à medida que o tempo tende ao infinito, as soluções tendem ao equilíbrio. Por último, um equilíbrio é **instável** quando não se pode garantir a permanência das soluções nessa região limitada.

Sendo P assintoticamente estável, está bem definida a bacia de atração de P , denotada por $B(P)$, como o conjunto das condições iniciais cujas soluções tendem a P .

Considere um campo de vetores $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . A derivada de V na direção do campo F no ponto $X \in U$ é definida por

$$\dot{V}(X) = \nabla V(X) \cdot F(X).$$

Suponha que $P \in U$ é um ponto de equilíbrio de F . Uma função $V : W \subset U \rightarrow \mathbb{R}$, $P \in W$ é uma função de Lyapunov (para o ponto de equilíbrio P) se:

- I. $V(X) \geq 0$, para todo $X \in W$ e $V(X) = 0$ se, e somente se, $X = P$.
- II. $\dot{V}(X) \leq 0$, para todo $X \in W$.

A função V é uma função de Lyapunov estrita (para o ponto de equilíbrio P) se V é uma função de Lyapunov e, além disso,

$$\dot{V}(X) < 0, \quad \forall X \in W \setminus \{P\}.$$

Teorema 2.1.6 (Lyapunov). *Considere P um ponto de equilíbrio isolado do campo F .*

- (a) *Se existir um função de Lyapunov V definida em alguma vizinhança $W \subset U$ contendo P , então P é um ponto de equilíbrio estável.*
- (b) *Se V for uma função de Lyapunov estrita, então P é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.*

A demonstração do Teorema 2.1.6 pode ser encontrada na página 272 do livro [12]. Apesar de ser um teorema forte para o estudo de equilíbrios, infelizmente pode ser um desafio encontrar uma função de Lyapunov, uma vez que não existem métodos para sua determinação. Sendo assim, esse método acaba tendo sua utilização limitada.

O próximo teorema é conhecido como Princípio de Invariância de Lasalle e uma demonstração para esse resultado pode ser encontrada em [8], na página 201. Considere um campo de vetores $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Um conjunto $W \subset U$ é positivamente invariante se, para todo $X \in W$,

$$\phi_X(t) \in W, \quad \forall t \geq 0.$$

De modo análogo, pode-se definir conjunto negativamente invariante. Por outro lado, W é invariante se, para todo $X \in W$,

$$\phi_X(t) \in W, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Uma órbita inteira de F é um conjunto da forma

$$\{\phi_X(t) : X \in U, t \in \mathbb{R}\}.$$

Teorema 2.1.7 (Lasalle). *Considere um campo de vetores $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $P \in U$ um ponto de equilíbrio de F . Considere $L : W \subset U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov (para o ponto de equilíbrio P), de modo que $P \in W$. Considere ainda $\mathcal{P} \subset W$ uma vizinhança fechada de P . Suponha que \mathcal{P} é positivamente invariante e que não exista órbita inteira em $\mathcal{P} \setminus \{P\}$ sobre a qual L é constante. Então, P é assintoticamente estável e \mathcal{P} está contido na bacia de atração de P .*

Antes de tratar da transformação de Poincaré, é importante revisar a definição de divergência de um campo de vetores e, mais que isso, como ela é calculada. A divergência é uma medida de tendência, pela qual é possível compreender quando esse campo se expande ou se contrai em um determinado ponto e quando isso não acontece, tem-se $\operatorname{div} F = 0$. Sabe-se que, para campos de vetores no plano $F = (F_1, F_2)$, em coordenadas cartesianas,

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}, \quad (2.9)$$

e, para campos de vetores em coordenadas polares, $F = (F_r, F_\theta)$,

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}, \quad (2.10)$$

onde r é a coordenada radial e θ é a coordenada angular. Sem perda de generalidade, a divergência pode ser estendida para campos de vetores definidos em conjuntos em espaços de dimensões mais altas.

Define-se, portanto, a transformação de Poincaré, ou transformação de primeiro retorno, de um campo de vetores no plano. Essa transformação descreve o comportamento de um campo de vetores em uma vizinhança de uma órbita fechada no plano.

Considere um campo de vetores

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

de classe C^1 e uma órbita fechada γ de período τ_0 e uma seção transversal Σ de F em $P \in \gamma$. A continuidade do fluxo ϕ de F garante que, para todo ponto $Q \in \Sigma$, suficientemente próximo de P , a trajetória $\phi_Q(t)$ permanece próxima de γ , para t pertencente a um intervalo compacto. Tomando $\Sigma_0 \subset \Sigma$ adequado, pode-se definir

$$\begin{aligned} \pi : \Sigma_0 &\longrightarrow \Sigma \\ X &\longmapsto \pi(X) \end{aligned}$$

em que $\pi(X)$ é a primeira interseção de $\phi_X(t)$ com Σ para $t > 0$. Veja Figura 2.3.

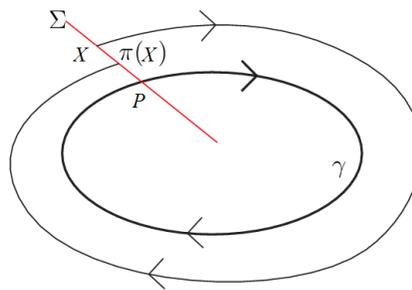


Figura 2.3: Ilustração da transformação de Poincaré. [9]

Note que $P \in \Sigma_0$ e $\pi(P) = P$. Tem-se a seguinte proposição.

Proposição 2.1.1. *Considere a construção descrita acima. Então a transformação de Poincaré $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \pi(\Sigma_0)$ é um difeomorfismo de classe C^1 .*

A demonstração da proposição acima está disponível na página 227 de [12].

Considere um campo de vetores

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

de classe C^1 , uma órbita fechada γ de F e Q numa vizinhança de γ . Para cada $t \in I_Q$ fixado, a distância de $\phi_Q(t)$ a γ é dada por

$$d(\phi_Q(t), \gamma) = \inf\{\|\phi_Q(t) - R\| : R \in \gamma\}.$$

Se γ é uma órbita fechada isolada, isto é, se existe uma vizinhança $V \subset U$ de γ tal que γ é a única órbita fechada, dizemos que γ é um ciclo limite. Pode-se mostrar que existem somente os seguintes tipos de ciclos limites:

- Estável: se, para todo Q numa vizinhança V de γ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_Q(t), \gamma) = 0.$$

- Instável: se, para todo $Q \in V$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi_Q(t), \gamma) = 0.$$

- Semi-estável: se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_Q(t), \gamma) = 0,$$

para todo $Q \in V \cap \text{Ext}\gamma$ e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi_Q(t), \gamma) = 0,$$

para todo $Q \in V \cap \text{Int}\gamma$, ou vice-versa.

Em outras palavras, quando as soluções tendem ao ciclo limite interna e externamente, ele é considerado estável. Quando as soluções tendem interna **ou** externamente a ele, é

considerado semi-estável e quando as soluções não tendem ao ciclo limite, instável. Essa ideia fica mais evidente na Figura 2.4.

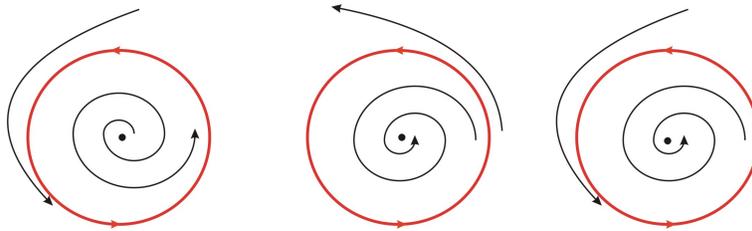


Figura 2.4: Ciclos limites: Estável (esquerda), instável (centro) e semi-estável (direita). [9]

Pode-se observar que os ciclos limites correspondem aos pontos fixos isolados da aplicação de Poincaré π e, identificando a seção transversal Σ com um intervalo da reta real considerando $P = 0$, segue que a aplicação de Poincaré tem uma expansão da forma

$$\pi(X) = \pi(0) + \pi'(0)X + \dots = \pi'(0)X + \dots.$$

O próximo teorema estabelece uma expressão para a derivada da aplicação de Poincaré e condições para que uma órbita fechada γ seja um ciclo limite hiperbólico, ou seja, quando $\pi'(P) \neq 1$, para algum $P \in \gamma$. Sua demonstração está disponível em [12], página 229.

Teorema 2.1.8. *Considere um campo de vetores $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 e uma órbita fechada γ de F de período τ_0 . Considere Σ uma seção transversal em $P \in \gamma$ e $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ a aplicação de Poincaré. Então, a derivada da aplicação de Poincaré é dada por*

$$\pi'(P) = \exp\left(\int_0^{\tau_0} \operatorname{div}F(\gamma(t)) dt\right), \quad (2.11)$$

em que $\operatorname{div}F$ é a divergência de F .

Em particular, se

$$\int_0^{\tau_0} \operatorname{div}F(\gamma(t)) dt < 0,$$

então γ é estável e, se

$$\int_0^{\tau_0} \operatorname{div}F(\gamma(t)) dt > 0,$$

então γ é instável.

Será feita agora, a recordação das definições de conjuntos limites a fim de estudar o comportamento assintótico das órbitas de campos de vetores.

Considere $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

um campo de vetores de classe C^1 . Considere $\phi_P(t)$ a trajetória de F passando pelo ponto $P \in U$ definida em seu intervalo máximo $I_P = (a, b)$. Se $b = \infty$, define-se o conjunto

$$\omega(P) = \{Q \in U : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, t_n \rightarrow \infty \text{ e } \phi_P(t_n) \rightarrow Q, n \rightarrow \infty\},$$

chamado conjunto ω -limite de P . Analogamente, se $a = -\infty$, pode-se definir

$$\alpha(P) = \{Q \in U : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \phi_P(t_n) \rightarrow Q, n \rightarrow \infty\},$$

chamado conjunto α -limite de P .

Por um conjunto limite entende-se um conjunto α -limite ou ω -limite de algum ponto $P \in U$. É imediato que, se S é um ponto da órbita de P , então

$$\omega(S) = \omega(P) \quad \text{e} \quad \alpha(S) = \alpha(P),$$

ou seja, estão bem definidos conjuntos limites de órbitas.

Considere os campos de vetores F e $-F$. Pode-se perceber que o conjunto $\omega(P)$ do campo F coincide com o conjunto $\alpha(P)$ do campo $-F$ e reciprocamente. Assim, basta estudar propriedades gerais de conjuntos ω -limites. As mesmas serão válidas para conjuntos α -limites, com as devidas modificações.

O teorema a seguir reúne as principais propriedades dos conjuntos limites e será enunciado para um conjunto ω -limite e sua demonstração pode ser encontrada em [6], página 13. Um teorema análogo é válido para um conjunto α -limite.

O conjunto

$$\gamma^+(P) = \{\phi_P(t) : 0 \leq t \in I_P\}$$

é chamado semiórbita positiva do campo F pelo ponto P .

Teorema 2.1.9. *Considere $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1 . Se $\gamma^+(P) = \{\phi_P(t) : t \geq 0\}$ está contida em um subconjunto compacto $K \subset U$, então:*

- $\omega(P) \neq \emptyset$.
- $\omega(P)$ é compacto.
- $\omega(P)$ é invariante por F , isto é, se $Q \in \omega(P)$, então $\phi_Q(t) \in \omega(P)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $\omega(p)$ é conexo.

Teorema 2.1.10 (Poincaré–Bendixson). *Considere $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 . Suponha que $\gamma^+(P)$ está contida num subconjunto compacto $K \subset U$. Suponha, ainda, que o campo F possui um número finito de pontos de equilíbrio em $\omega(P)$. Então:*

- Se $\omega(P)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(P)$ é uma órbita fechada.
- Se $\omega(P)$ contém pontos regulares e de equilíbrio, então $\omega(P)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos de equilíbrio quando $t \rightarrow \pm\infty$.
- Se $\omega(P)$ não contém pontos regulares, então $\omega(P)$ é um ponto de equilíbrio.

A demonstração do Teorema 2.1.10 acima, está disponível na página 28 do livro [6].

Teorema 2.1.11 (Bendixson). *Considere $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto simplesmente conexo e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 . Se a divergência de F tem sinal constante em U , então o campo F não tem órbita fechada em U .*

A demonstração do Teorema 2.1.11 acima, está disponível no livro [6], página 188.

De fato, vale um teorema mais geral, denominado Teorema de Dulac.

Teorema 2.1.12 (Dulac). *Considere $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto simplesmente conexo, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 e $B : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Se a divergência de BF tem sinal constante em U , então o campo F não tem órbita fechada em U .*

A demonstração do Teorema 2.1.12 acima, pode ser encontrada em [6], página 189.

O campo de vetores $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é integrável em U se existe uma função diferenciável não constante $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, chamada integral primeira de F , constante em todas as soluções $(x(t), y(t))$ da EDO definida por F . Deste modo, h é uma integral primeira de F se, e somente se,

$$\frac{dh}{dt}(x(t), y(t)) = \nabla h(x(t), y(t)) \cdot F(x(t), y(t)) \equiv 0.$$

A existência de uma integral primeira h para o campo de vetores F implica no conhecimento do seu retrato de fase, uma vez que as suas órbitas estão contidas nos conjuntos de nível de h . Existe uma vasta teoria a respeito da existência ou não de integrais primeiras (integração) para campos de vetores.

Considere

$$I : U \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função de classe C^1 , não identicamente nula em U . A função I é um fator integrante de F em U se

$$\operatorname{div}(IF)(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in U.$$

Resulta que o campo de vetores IF é integrável. Se a função I tem sinal constante em U , resulta que os retratos de fase de F e de IF são os mesmos.

Considere o campo de vetores polinomial

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

da forma $F = (P, Q)$. O seu grau é o número máximo entre os graus dos polinômios P e Q . Assim, diz-se que F tem grau n se

$$n = \max \{ \operatorname{grau}(P), \operatorname{grau}(Q) \}.$$

E, da mesma forma, considere uma função polinomial $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, não identicamente nula. A curva $f = 0$, ou seja, a curva de nível $f^{-1}\{0\} \subset U$, é uma curva algébrica invariante de F se existe uma função polinomial $k : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, chamado cofator da curva algébrica invariante $f = 0$, tal que

$$(Ff)(x, y) = F(x, y) \cdot \nabla f(x, y) = k(x, y)f(x, y).$$

Se o campo de vetores polinomial F tem grau n , então o cofator k tem grau, no máximo, $n - 1$.

2.2 Funções Homogêneas

Antes de apresentar o modelo que será estudado, será feita uma breve apresentação de algumas propriedades fundamentais das funções polinomiais homogêneas, com o intuito de utilizá-las nas próximas seções. Além disso, esta seção evidencia um resultado que será essencial para uma das demonstrações do Capítulo 4.

Definição 2.2.1. *Uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ é chamada de homogênea de grau $n \in \mathbb{N}$, se para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a seguinte relação é válida:*

$$f(kx, ky) = k^n f(x, y), \quad \text{para todo } k > 0.$$

Se as variáveis x e y forem multiplicadas por um número positivo $k > 0$, o valor da função é multiplicado pelo fator k^n .

Alguns exemplos de funções homogêneas são dados a seguir.

Exemplo 2.2.1. *A função $f(x, y) = x^3 + y^3$ é homogênea de grau 3, pois*

$$f(kx, ky) = (kx)^3 + (ky)^3 = k^3(x^3 + y^3) = k^3 f(x, y),$$

para todo $k > 0$.

Exemplo 2.2.2. *A função $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ é homogênea de grau 2, pois*

$$f(kx, ky) = (kx)^2 + (kxky) + (ky)^2 = k^2(x^2 + xy + y^2) = k^2 f(x, y),$$

para todo $k > 0$.

Para facilitar a manipulação dessas funções, podem ser utilizadas as propriedades que estão listadas abaixo.

1. As operações de **soma** e **subtração** de funções homogêneas só resultam em uma função homogênea caso todas as funções tenham o mesmo grau de homogeneidade.

2. A **multiplicação** de funções homogêneas de graus m e n resulta em uma função homogênea de grau $m + n$.
3. A **divisão** de funções homogêneas de graus m e n resulta em uma função homogênea de grau $m - n$.

Além das propriedades acima, a homogeneidade de uma função pode ser estendida para suas derivadas parciais, como pode ser observado no teorema abaixo.

Teorema 2.2.1. *Se a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y)$ é homogênea de grau k , então as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ são funções homogêneas de grau $k - 1$.*

Demonstração. Assuma que f é homogênea de grau k . Logo, tem-se

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

ou, de outra maneira,

$$f(x, y) = \frac{1}{t^k} f(tx, ty).$$

Derivando ambos os membros da última expressão com relação a x , tem-se que

$$f_x(x, y) = \frac{1}{t^k} f_x(tx, ty) \cdot \frac{d}{dx}(tx) = \frac{1}{t^k} f_x(tx, ty) \cdot t = \frac{1}{t^{k-1}} f_x(tx, ty).$$

De onde se conclui que

$$f_x(tx, ty) = t^{k-1} f_x(x, y).$$

O mesmo argumento pode ser utilizado para $f_y(x, y)$, concluindo a prova. ■

O próximo teorema descreve a relação entre as derivadas parciais de uma função homogênea.

Teorema 2.2.2. *Se $f = f(x, y)$ é uma função homogênea de grau k então a função satisfaz a seguinte equação diferencial:*

$$x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = k \cdot f(x, y), \quad \forall (x, y).$$

Demonstração. Considere a função homogênea f de grau k . Isso significa que vale $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$, para $t > 0$.

Calculando a derivada de f com relação a t usando a regra da cadeia, tem-se

$$\frac{d}{dt} f(tx, ty) = \frac{d}{dt} (t^k f(x, y)) = kt^{k-1} f(x, y).$$

Por outro lado, usando a regra da cadeia nas derivadas parciais de f em relação a x e y , tem-se

$$\frac{d}{dt} f(tx, ty) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d(tx)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d(ty)}{dt} = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Igualando as duas expressões para $\frac{d}{dt} f(tx, ty)$, obtem-se

$$kt^{k-1} f(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Agora, uma vez que t é um elemento arbitrário de \mathbb{R} , considere $t = 1$. Substituindo na equação acima, conclui-se que:

$$kf(x, y) = x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

■

O Teorema 2.2.2 acima apresentado é conhecido como Teorema de Euler para Funções Homogêneas. No caso particular apresentado acima, está enunciado e demonstrado para funções de duas variáveis, mas pode ser estendido para mais variáveis.

2.3 Modelo de Estudo

Nesta seção será apresentado o modelo de equações diferenciais escolhido para este estudo, assim sendo, será feita uma breve introdução com as definições, o modelo e a justificativa da escolha.

Tem-se, de acordo com [8], página 225, a definição de ciclos limites.

Definição 2.3.1. *Um ciclo limite é uma órbita fechada γ tal que $\gamma \subset \omega(X)$ ou $\gamma \subset \alpha(X)$, para algum $X \notin \gamma$.*

Em outras palavras, pode-se dizer que um ciclo limite é uma órbita fechada e isolada do conjunto de órbitas fechadas do campo F . Por outro lado, definem-se os pontos de equilíbrio do tipo nó estrelado.

Definição 2.3.2. *Um nó estrelado é um equilíbrio cuja linearização é um múltiplo não nulo da identidade.*

Em outras palavras, é um equilíbrio cujos autovalores são iguais e não nulos.

Agora, considere uma equação diferencial ordinária autônoma em \mathbb{R}^2 como definida abaixo

$$x' = \frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad y' = \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (2.12)$$

onde t é a variável independente e o campo de vetores C^∞ é dado por

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)). \quad (2.13)$$

O sistema em (2.12) pode ser identificado com o campo de vetores em (2.13), sem perda de generalidade.

Isso posto, o principal interesse deste estudo é compreender a existência de um nó estrelado na região limitada por um ciclo limite e, de maneira conveniente, será feito o estudo do sistema (2.12) quando este assume a forma do sistema abaixo

$$x' = \lambda x + P^n(x, y), \quad y' = \lambda y + Q^n(x, y), \quad (2.14)$$

com $\lambda \neq 0$, $P^n(x, y)$ e $Q^n(x, y)$ funções homogêneas de grau $n > 1$.

Para justificar a escolha do modelo, pode-se perceber que a origem é um ponto de equilíbrio da equação (2.14). Além disso, sabe-se que matriz Jacobiana J para um sistema de equações pode ser escrita da seguinte forma

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

No caso em particular do campo F relacionado à equação (2.14), tem-se que a matriz Jacobiana é dada por

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix},$$

a qual tem por resultado

$$J = \begin{bmatrix} \lambda + O(n-1) & O(n-1) \\ O(n-1) & \lambda + O(n-1) \end{bmatrix},$$

onde $O(n-1)$ são termos de ordem $n-1$ em x e y , ou seja, termos de ordem pelo menos 1, uma vez que $n > 1$. Daí, quando aplicada no equilíbrio da origem, resulta em uma matriz quadrada 2×2 onde a diagonal principal possui λ em ambas entradas e a diagonal secundária é nula, tal como abaixo

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Mas isso significa dizer que o equilíbrio da origem possui autovalores iguais e, consequentemente, a origem é um nó estrelado. Ou seja, quer-se compreender o comportamento da classe de sistemas diferenciais polinomiais com não linearidades homogêneas e com um nó estrelado na origem.

Desta maneira, o estudo aqui apresentado busca encontrar ciclos limites no retrato de fase de equações equivalentes à (2.14), uma vez que já se pode garantir que a origem tem um equilíbrio do tipo nó estrelado. Posteriormente, as equações serão modificadas para garantir resultados mais gerais para outros equilíbrios.

Estudos semelhantes vêm se tornando presentes ao longo dos anos e serão utilizados alguns resultados publicados recentemente, como [2] e [7], para avançar na direção do problema de pesquisa aqui proposto. Para isso, o primeiro passo é construir a ideia principal da compactificação de Poincaré, pois esta é base fundamental para compreender a definição das funções utilizadas nos principais resultados que serão apresentados neste trabalho. Tal construção será feita no capítulo seguinte.

Capítulo 3

Compactificação de Poincaré

3.1 Desenvolvimento

Todo o desenvolvimento que será feito nesta seção, incluindo um teorema e uma proposição e suas respectivas demonstrações estão disponíveis no capítulo 5 de [6], a partir da página 149, no livro [13] e no Capítulo 2 do artigo [1]. A construção da Compactificação de Poincaré aqui apresentada está considerando um campo de vetores polinomial em \mathbb{R}^2 , mas pode, sem perda de generalidade, ser estendida para campos de vetores polinomiais em \mathbb{R}^n , com $n > 2$.

Seja a esfera de Poincaré dada por

$$\mathbb{S}^2 = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\},$$

onde (y_1, y_2, y_3) são coordenadas do espaço \mathbb{R}^3 . Considere (x_1, x_2) como coordenadas do plano \mathbb{R}^2 e $X(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$ um campo de vetores polinomial no plano.

O ponto de coordenadas $PN = (0, 0, 1)$ é denominado polo norte e, por construção, pode-se afirmar que o plano com coordenadas $(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, 1)$ é tangente à esfera \mathbb{S}^2 no ponto PN .

Decompõe-se a esfera de Poincaré em 3 conjuntos, sendo eles: os hemisférios norte e sul e o equador. A decomposição é feita tal como na divisão imaginária do planeta terra, de maneira que o equador “divida” o planeta ao meio. Neste caso, o equador compreende

todos os pontos que anulam a terceira coordenada, ou seja,

$$\mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}.$$

Nos hemisférios norte e sul estão compreendidos todos os pontos com a terceira coordenada positiva ou negativa, respectivamente, de forma que o hemisfério norte é

$$H_+ = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}$$

e o hemisfério sul é dado por

$$H_- = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}.$$

Assim sendo, dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, considere a reta passando por $(0, 0, 0)$ e $(x_1, x_2, 1)$ que intersecta \mathbb{S}^2 em exatamente dois pontos diametralmente opostos, os quais serão tratados de y^+ e y^- , tal como na Figura 3.1 abaixo.

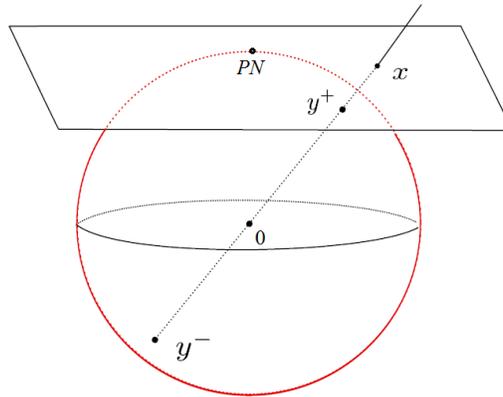


Figura 3.1: Projeções centrais. [9]

Pela definição acima, e considerando $\Delta(x)$ a distância entre o ponto x e o centro da esfera, ou seja,

$$\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1},$$

pode-se determinar as coordenadas dos pontos antípodas y^+ e y^- , que são essencialmente os vetores unitários que apontam na direção de x , determinados por

$$y^+ = \frac{x}{\Delta(x)} \in H_+,$$

$$y^+ = \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \in H_+,$$

e

$$y^- = -\frac{x}{\Delta(x)} \in H_-,$$

$$y^- = -\left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \in H_-.$$

Desta maneira, definem-se os difeomorfismos do plano nos hemisférios da esfera que representam as projeções centrais da maneira que segue

$$f^+ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow H_+ \subset \mathbb{S}^2, \quad f^- : \mathbb{R}^2 \longrightarrow H_- \subset \mathbb{S}^2,$$

sendo

$$f^+(x) = y^+ \quad \text{e} \quad f^-(x) = y^-.$$

Com tais aplicações, podem ser definidos os campos de vetores induzidos nos hemisférios norte e sul de \mathbb{S}^2 por

$$\bar{X} : H_+ \cup H_- \longrightarrow H_+ \cup H_-,$$

onde

$$\bar{X}(y) = \begin{cases} Df^+(x)X(x), & \text{se } y = f^+(x) \in H_+, \\ Df^-(x)X(x), & \text{se } y = f^-(x) \in H_-. \end{cases}$$

Por construção, pode-se afirmar que \bar{X} é um campo de vetores em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$, tangente a \mathbb{S}^2 em cada ponto. E daí, é conveniente verificar que, dado $y = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$, as aplicações inversas podem ser determinadas como abaixo,

$$(f^+)^{-1}(y) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right), \quad \text{se } z > 0,$$

$$(f^-)^{-1}(y) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right), \quad \text{se } z < 0,$$

fazendo-se uso da identificação $(x_1, x_2) \approx (x_1, x_2, 1)$.

O campo \bar{X} pode ser escrito explicitamente como

$$\bar{X}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} Df^+ \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right), & \text{se } y_3 > 0, \\ Df^- \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right), & \text{se } y_3 < 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Levando em consideração que

$$\Delta(x) = \frac{1}{|y_3|},$$

pode-se concluir que

$$Df^+ \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) = y_3 \begin{pmatrix} y_2^2 + y_3^2 & -y_1 y_2 \\ -y_1 y_2 & y_1^2 + y_3^2 \\ -y_3 y_1 & -y_3 y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \\ Q \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \end{pmatrix},$$

$$Df^- \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) = y_3 \begin{pmatrix} y_2^2 + y_3^2 & -y_1 y_2 \\ -y_1 y_2 & y_1^2 + y_3^2 \\ -y_3 y_1 & -y_3 y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \\ Q \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \end{pmatrix}.$$

Isso posto, fica evidente que o campo \bar{X} tem a mesma expressão nos hemisférios norte e sul e, considerando a projeção $\Pi_3(y_1, y_2, y_3) = y_3$, segue que,

$$\|x\| \rightarrow \infty \implies \Pi_3(f^+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)} \rightarrow 0.$$

Neste sentido, o equador de \mathbb{S}^2 representa o infinito de \mathbb{R}^2 . Com o objetivo de estudar o comportamento do campo X fora de partes compactas do plano, pode-se definir o campo \bar{X} em toda a esfera \mathbb{S}^2 .

De maneira geral, este campo próximo ao equador é não limitado. Isto é contornado multiplicando-se o campo de vetores \bar{X} pelo fator

$$\rho(y) = y_3^{d-1},$$

no qual

$$d = \text{grau}(X) = \max \{ \text{grau}(P), \text{grau}(Q) \}.$$

Assim, o campo de vetores pode ser estendido a $y_3 = 0$, visto que cada componente de

$$\begin{pmatrix} y_3^d P \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \\ y_3^d Q \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \end{pmatrix}$$

está bem definida.

O novo campo de vetores $\mathcal{P}(X)$, sendo

$$\mathcal{P}(X)(y) = \rho(y)\overline{X}(y),$$

é chamado de compactificação de Poincaré do campo de vetores X .

Continuando com a construção, deve-se levar em consideração que \mathbb{S}^2 é uma superfície compacta que pode ser coberta pelas seguintes seis cartas locais, denotadas por (U_k, ϕ_k) e (V_k, ψ_k) , e definidas por

$$\phi_k : U_k \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_k(y) = \left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right), \quad m < n, \quad m, n \neq k,$$

em que,

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\}$$

e, de maneira semelhante,

$$\psi_k : V_k \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi_k(y) = -\phi_k(y), \quad m < n, \quad m, n \neq k,$$

onde

$$V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\}$$

com $k \in \{1, 2, 3\}$.

Denota-se por $z = (u, v)$ a imagem de $\phi_k(y)$ ou $\psi_k(y)$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.

Assim, segue que (u, v) dependerá da carta local que se está estudando. Pelo aspecto geométrico, as coordenadas (u, v) podem ser visualizadas na Figura 3.2, na qual, os pontos de \mathbb{S}^1 , nas cartas U_1 , U_2 , V_1 e V_2 , são dados por $v = 0$, e são chamados de equilíbrios infinitos.

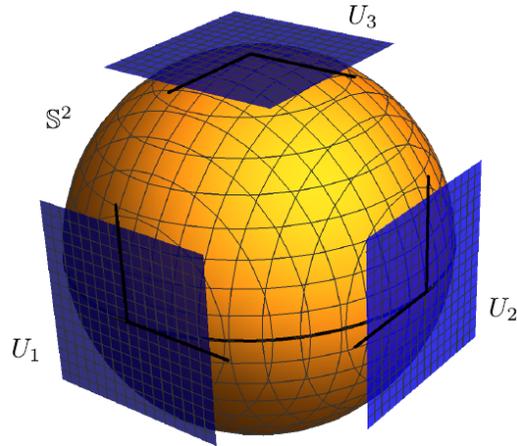


Figura 3.2: Cartas locais U_1 , U_2 e U_3 da esfera de Poincaré [9].

Nos passos seguintes, serão obtidas as expressões de $\mathcal{P}(X)$ nas cartas locais. Os cálculos serão apresentados apenas para a carta local U_1 , de maneira que, nas demais cartas, os cálculos são semelhantes e ficarão para o desenvolvimento do leitor.

Visto que $X(x) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$, então,

$$\bar{X}(y) = Df^+(x)X(x), \text{ com } y = f^+(x)$$

e

$$D\phi_1(y)\bar{X}(y) = D\phi_1(y)Df^+(x)X(x) = D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x).$$

Seja $\bar{X}|_{U_1}$ o campo definido por $D\phi_1(y)\bar{X}(y)$. Como

$$(\phi_1 \circ f^+)(x) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right) = (u, v),$$

tem-se que

$$\begin{aligned}
\bar{X}|_{U_1} &= \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{x_1^2} (-x_2 P(x_1, x_2) + x_1 Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)) \\
&= v^2 \left(-\frac{u}{v} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).
\end{aligned}$$

Agora, como

$$\rho(y) = y_3^{d-1} = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} = v^{d-1} m(z),$$

sendo

$$m(z) = (1 + u^2 + v^2)^{(1-d)/2},$$

segue que

$$\rho(\bar{X}|_{U_1})(z) = v^{d+1} m(z) \left(-\frac{u}{v} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).$$

A fim de provar que a extensão de $\rho\bar{X}$ para $\mathcal{P}(X)$ está definida em todo \mathbb{S}^2 , deve-se evidenciar que enquanto $\bar{X}|_{U_1}$ não está bem definido em $v = 0$,

$$\mathcal{P}(X)|_{U_1} = \rho\bar{X}|_{U_1}$$

está bem definido em $v = 0$, pois multiplicando-o por v^{d+1} pode-se cancelar qualquer fator de v que apareça no denominador. Argumentos semelhantes podem ser aplicados às outras cartas locais de maneira conveniente.

Para simplificar o campo de vetores estendido, será feita uma reparametrização da variável independente (tempo) a fim de remover o fator $m(z)$. Obtem-se ainda um campo de vetores em \mathbb{S}^2 que é topologicamente equivalente a X em quaisquer dos hemisférios H_+ e H_- .

As expressões para $\mathcal{P}(X)$, nas cartas locais, são as seguintes:

1. Na carta (U_1, ϕ_1) :

$$\begin{cases} u' = v^d \left[-uP \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right], \\ v' = -v^{d+1} P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right). \end{cases} \quad (3.2)$$

2. Na carta (U_2, ϕ_2) :

$$\begin{cases} u' = v^d \left[P \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) - uQ \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right], \\ v' = -v^{d+1} Q \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right). \end{cases} \quad (3.3)$$

3. Na carta (U_3, ϕ_3) :

$$\begin{cases} u' = P(u, v), \\ v' = Q(u, v). \end{cases}$$

As expressões para $\mathcal{P}(X)$, nas cartas (V_k, ψ_k) , $k \in \{1, 2, 3\}$, são as mesmas de (U_k, ϕ_k) multiplicadas por

$$(-1)^{d-1}.$$

Observe que de (3.2) e (3.3), o eixo v das cartas U_1 e U_2 é invariante e, consequentemente, o mesmo ocorre com as cartas V_1 e V_2 . Deste modo, o equador da esfera é invariante pelo fluxo da compactificação de Poincaré.

É suficiente trabalhar em $H_+ \cup \mathbb{S}^1$ para estudar o comportamento do campo de vetores X , incluindo seu comportamento fora de partes compactas do plano. A projeção de $H_+ \cup \mathbb{S}^1$ em \mathbb{R}^2 será chamada de disco de Poincaré.

Da construção acima, segue o seguinte teorema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [6], capítulo 5.

Teorema 3.1.1. *Considere $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores polinomial de grau d . Considere $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função $\rho(y_1, y_2, y_3) = y_3^{d-1}$, e \overline{X} o campo induzido em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$, definido em (3.1). Então, $\rho\overline{X}$ pode ser estendido a um campo de vetores analítico em \mathbb{S}^2 com o equador \mathbb{S}^1 invariante.*

É comum na literatura chamar de ponto de equilíbrio finito de X ou de $\mathcal{P}(X)$ o ponto de equilíbrio de $\mathcal{P}(X)$ em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$. Por outro lado, é comum chamar de ponto de equilíbrio infinito de X ou $\mathcal{P}(X)$ o ponto de equilíbrio de $\mathcal{P}(X)$ em \mathbb{S}^1 .

A seguir, será feito o estudo dos pontos de equilíbrio infinitos de X . Já foi mencionado neste estudo que os pontos de equilíbrio infinitos são da forma $(u, 0)$.

Serão denotados por P_i e Q_i os polinômios homogêneos de grau i de P e Q de maneira que P e Q podem ser escritos da seguinte forma

$$P(x, y) = P_m(x, y) + \cdots + P_d(x, y),$$

$$Q(x, y) = Q_m(x, y) + \cdots + Q_d(x, y),$$

sendo P_j e Q_j polinômios homogêneos de grau j de P e Q , com $j = m, \dots, d$, e P_m e Q_m , com $m > 0$, os polinômios homogêneos não nulos de menor grau.

Vale a seguinte proposição.

Proposição 3.1.1. *Considere $X = (P, Q)$ um campo de vetores polinomial em \mathbb{R}^2 . Então, $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ é um ponto de equilíbrio infinito de $\mathcal{P}(X)$ se, e somente se,*

$$F(u) := Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0.$$

De modo análogo, $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ é um ponto de equilíbrio infinito de $\mathcal{P}(X)$ se, e somente se,

$$G(u) := P_d(u, 1) - uQ_d(u, 1) = 0.$$

Demonstração. A proposição trata de equilíbrios infinitos e, portanto, a hipótese é que $v = 0$. Isso posto, uma vez que os polinômios P e Q são homogêneos de grau d , tem-se de (3.2) que, para a primeira equação,

$$\lim_{v \rightarrow 0} v^d \left[-uP \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right] = -uP_d(1, u) + Q_d(1, u).$$

Por outro lado, para a segunda equação,

$$v' = 0$$

uma vez que $v = 0$. Assim sendo, $(u, 0)$ é um ponto de equilíbrio se, e somente se,

$$Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0.$$

Concluindo a primeira parte da prova. A segunda parte da prova pode ser realizada de maneira análoga considerando a equação (3.3). ■

Na próxima seção serão apresentados dois exemplos da aplicação da compactificação de Poincaré para campos de vetores homogêneos.

3.2 Exemplos

Exemplo 3.2.1. *Considere o seguinte campo de vetores linear no plano*

$$X(x, y) = (-x, y).$$

Este campo de vetores tem um único ponto de equilíbrio finito na origem, o qual é uma sela. Para compreender tal afirmação, basta notar que o campo só se anula quando ambas coordenadas são nulas, e, mais que isso, que a derivada do campo aplicada na origem é uma matriz diagonal cujos autovalores são reais, iguais e de sinais opostos. Isso posto, o eixo x é a curva estável, enquanto o eixo y é a curva instável. O objetivo deste exemplo é esboçar, por meio da compactificação, o retrato de fase de X no disco de Poincaré. Omitindo os cálculos, pode-se afirmar que na carta local U_1 , a compactificação de X tem a forma

$$u' = 2u, \quad v' = v.$$

E assim, como a origem da carta U_1 é o único equilíbrio e seus autovalores são reais e positivos, a origem é um nó instável e é o único ponto de equilíbrio infinito nesta carta. Agora, na carta local U_2 , a compactificação de X tem a forma

$$u' = -2u, \quad v' = -v,$$

a qual também possui a origem como único equilíbrio infinito, o qual é um nó estável, pois seus autovalores são ambos reais e negativos. A carta U_3 coincide com o campo de vetores e , desta maneira, não precisa ser analisada, uma vez que isso já foi feito para o campo de vetores X . Podemos afirmar, portanto, que a carta U_3 tem um único equilíbrio que é do tipo sela e está situado na origem. Neste exemplo, como X é linear, isto é, tem grau

$d = 1$, e como as expressões para $\mathcal{P}(X)$, nas cartas (V_k, ψ_k) , $k \in \{1, 2, 3\}$, são as mesmas de (U_k, ϕ_k) multiplicadas por

$$(-1)^{d-1} = 1,$$

as análises são triviais. O retrato de fase global do campo de vetores X está esboçado na Figura 3.3.

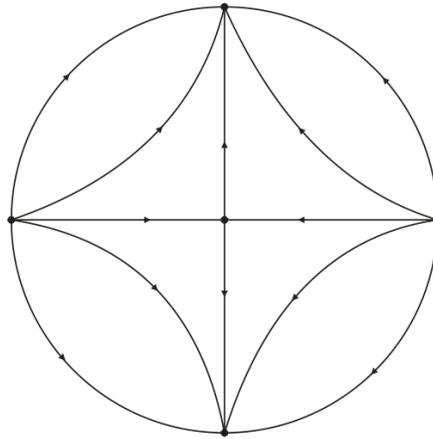


Figura 3.3: Retrato de fase global de $X(x, y) = (-x, y)$ [9].

Exemplo 3.2.2. Para este exemplo, o objetivo é buscar o entendimento do retrato de fase global do campo de vetores polinomial

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (2 + x^2 + 4y^2, 10xy).$$

Note que F é polinomial de grau $d = 2$ e não tem pontos de equilíbrio (finitos), pois $P(x, y)$ nunca se anula. Além disso, a reta $y = 0$ é uma curva algébrica invariante e ao longo dessa curva a direção do campo F é leste.

Será realizada a compactificação de Poincaré do campo de vetores F , para entender o retrato de fase global desse campo.

Carta U_1 . Na carta U_1 , a compactificação de F tem a forma

$$u' = 9u - 2uv^2 - 4u^3, \quad v' = -v - 4u^2v - 2v^3.$$

Os pontos de equilíbrio infinitos são obtidos fazendo $v = 0$, logo, tem-se

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = \left(-\frac{3}{2}, 0\right), \quad P_3 = \left(\frac{3}{2}, 0\right).$$

Denotando por G o campo de vetores que define a EDO acima, a matriz Jacobiana de G calculada em cada um desses pontos de equilíbrio resulta em

$$DG(P_1) = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad DG(P_2) = DG(P_3) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, pode-se afirmar que os pontos de equilíbrio P_1 , P_2 e P_3 são hiperbólicos, de forma que P_1 uma sela e P_2 e P_3 nós estáveis.

Além disso, as análises acima permitem concluir que a curva instável de P_1 está no bordo do disco de Poincaré, enquanto que a sua curva estável está sobre o eixo v , ou equivalentemente, sobre o eixo x .

Carta U_2 . Na carta U_2 , a compactificação de F tem a forma

$$u' = 4 - 9u^2 + 2v^2, \quad v' = -10uv.$$

É imediato que $(0,0)$ não é um ponto de equilíbrio dessa equação, uma vez que a primeira equação não se anula. Daí, uma vez que os pontos de equilíbrio já foram apresentados, com exceção da origem da carta U_2 , pode-se concluir que não há novos pontos de equilíbrio infinitos na carta U_2 , terminando a sua análise.

A compactificação do campo de vetores F terá três pontos de equilíbrio infinitos na carta V_1 , denotados por P_4 , P_5 e P_6 , os quais serão, respectivamente, os antípodas de P_1 , P_2 e P_3 . Isso ocorre porque o grau de F é $d = 2$, e, de maneira mais geral, par, então $(-1)^{d-1} = -1$.

Assim, os pontos de equilíbrio infinitos P_4 , P_5 e P_6 são:

P_4 é uma sela e P_5 e P_6 são nós instáveis, de forma que a curva estável de P_4 está no bordo do disco de Poincaré, enquanto que a sua curva instável está sobre o eixo v , ou equivalentemente, sobre o eixo x , o que é o exato oposto da carta U_1 , pois o grau do campo é par.

Nas Figuras 3.4 e 3.5 estão ilustrados os retratos de fase local e global de F .

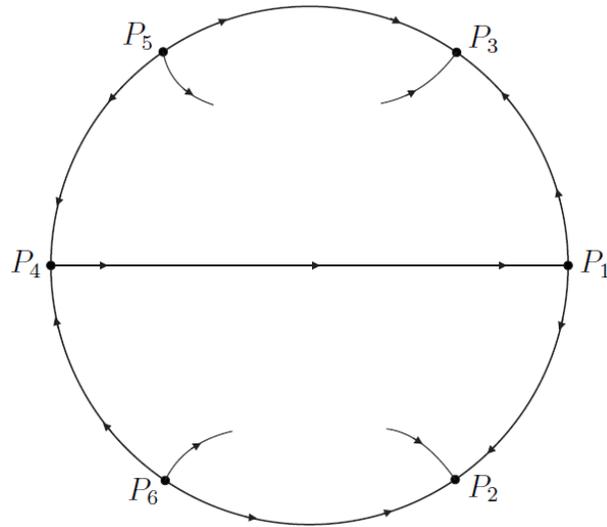


Figura 3.4: Retrato de fase local de $F(x, y) = (2 + x^2 + 4y^2, 10xy)$. [9]

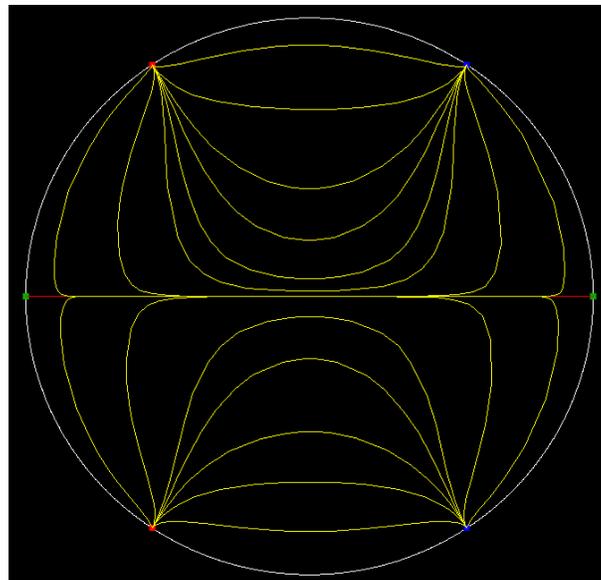


Figura 3.5: Retrato de fase global de $F(x, y) = (2 + x^2 + 4y^2, 10xy)$. [9]

Observe que o retrato de fase de F parece ter uma simetria por reflexão com relação ao eixo x .

De fato, considere a involução analítica

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y) = (x, -y).$$

O conjunto dos pontos fixos de φ é o eixo x e, decorre imediatamente, que

$$D\varphi(x, y) F(x, y) = F(\varphi(x, y)), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

provando, assim, a tal simetria por reflexão com relação ao eixo x .

3.3 Equivalência trigonométrica

Sejam as funções f e g definidas no artigo [2] para $\theta \in [0, 2\pi)$ como abaixo

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos(\theta)P^n(\cos(\theta), \sin(\theta)) + \sin(\theta)Q^n(\cos(\theta), \sin(\theta)), \\ g(\theta) &= \cos(\theta)Q^n(\cos(\theta), \sin(\theta)) - \sin(\theta)P^n(\cos(\theta), \sin(\theta)). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sabe-se, pela Proposição 3.1.1 que um ponto $(u, 0)$ é um ponto de equilíbrio infinito de $\mathcal{P}(X)$ se, e somente se, satisfaz a equação

$$F(u) := Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0,$$

para $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ e satisfaz, para $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$

$$G(u) := P_d(u, 1) - uQ_d(u, 1) = 0.$$

Lema 3.3.1. *A condição na Proposição 3.1.1 para a existência de equilíbrios infinitos no equador é equivalente à existencia de um zero real da função g , na qual*

$$g : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

está definida na equação (3.4). De maneira análoga, é equivalente à existencia de um zero real da função f , na qual

$$f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

está definida na equação (3.4) acima.

Demonstração. Pode-se dizer que nas cartas U_1 e V_1 , tem-se

$$u = \tan(\theta)$$

pela definição da tangente, tal como na Figura 3.6 abaixo

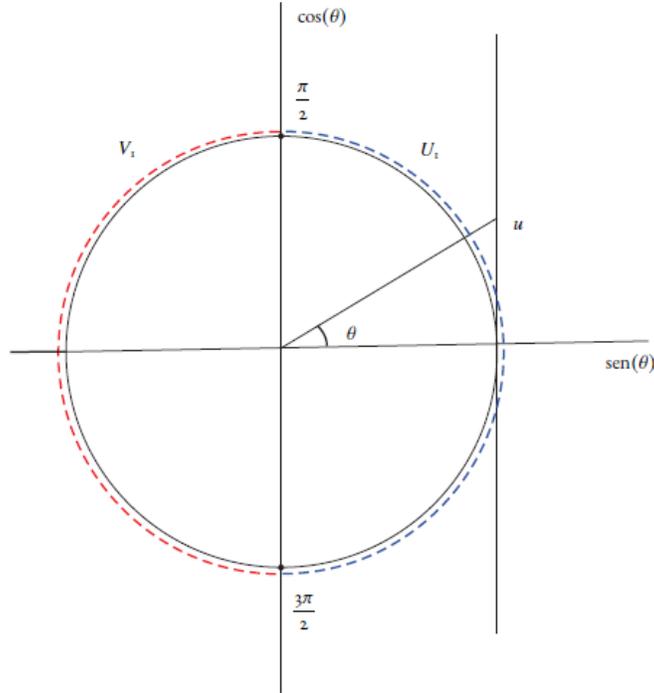


Figura 3.6: Justificativa geométrica para $u = \tan(\theta)$. A carta U_1 está representada pela curva tracejada em vermelho, enquanto a carta V_1 está representada pela curva tracejada em azul. Os pontos representados são as discontinuidades das cartas U_1 e V_1 .

Daí, substituindo a equivalência acima na função F da Proposição 3.1.1, tem-se

$$\begin{aligned}
 F(u) &= F(\tan(\theta)) \\
 &= Q_d(1, \tan(\theta)) - \tan(\theta)P_d(1, \tan(\theta)) \\
 &= Q_d\left(1, \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}\right) - \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}P_d\left(1, \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}\right) \\
 &= \left[\text{cos}(\theta)Q_d\left(\frac{\text{cos}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}, \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}\right) - \text{sen}(\theta)P_d\left(\frac{\text{cos}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}, \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}\right) \right] \frac{1}{\text{cos}(\theta)}.
 \end{aligned}$$

Como, por definição, os polinômios P e Q são homogêneos, cada um dos termos nos polnômios P_d e Q_d possui um fator $\text{cos}^{-d}(\theta)$. Colocando esse fator em evidência na equação, tem-se

$$F(\tan(\theta)) = \frac{1}{\text{cos}^{d+1}(\theta)} [\text{cos}(\theta)Q_d(\text{cos}(\theta), \text{sen}(\theta)) - \text{sen}(\theta)P_d(\text{cos}(\theta), \text{sen}(\theta))].$$

Lembre que as raízes da função F são exatamente os valores para os quais a função se anula. É fato que

$$\frac{1}{\cos^{d+1}(\theta)}$$

não se anula para valores reais em θ , e, além disso, esta fração é indeterminada quando θ é um múltiplo de $\pi/2$. Contudo, as cartas U_1 e V_1 que estão sendo analisadas não cobrem os múltiplos de $\pi/2$, uma vez que a tangente é indeterminada nesses pontos. Sendo assim, para que a função F tenha raízes, é preciso garantir que

$$\cos(\theta)Q_d(\cos(\theta), \text{sen}(\theta)) - \text{sen}(\theta)P_d(\cos(\theta), \text{sen}(\theta)) = 0,$$

ou, de maneira equivalente, garantir a existência de um zero real da função g , definida na equação (3.4), concluindo a primeira parte da prova.

De maneira análoga, considere a Figura 3.7 abaixo.

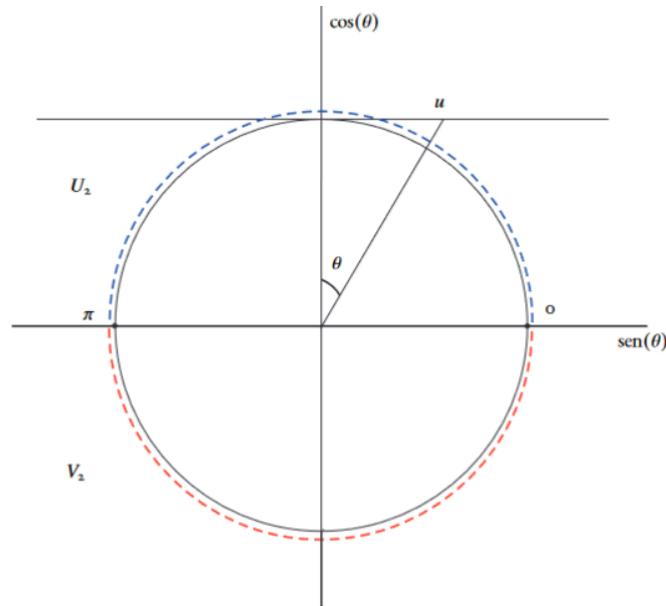


Figura 3.7: Justificativa geométrica para $u = \cot(\theta)$. A carta U_2 está representada pela curva tracejada em azul, enquanto a carta V_2 está representada pela curva tracejada em vermelho. Os pontos representados são as discontinuidades das cartas U_2 e V_2 .

Neste caso, para as cartas U_2 e V_2 , tem-se

$$u = \cot(\theta)$$

pela definição da cotangente ser inversa da tangente. Daí, substituindo a equivalência acima na função G da Proposição 3.1.1, tem-se:

$$\begin{aligned}
 G(u) &= G(\cot(\theta)) \\
 &= P_d(\cot(\theta), 1) - \cot(\theta)Q_d(\cot(\theta), 1) \\
 &= P_d\left(\frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}, 1\right) - \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}Q_d\left(\frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}, 1\right) \\
 &= \left[\text{sen}(\theta)P_d\left(\frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}, \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{sen}(\theta)}\right) - \cos(\theta)Q_d\left(\frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}, \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{sen}(\theta)}\right) \right] \frac{1}{\text{sen}(\theta)}.
 \end{aligned}$$

Uma vez que a homogeneidade dos polinômios P e Q , garante a existência de um fator $\cos^{-d}(\theta)$ em cada termo dos polnômios P_d e Q_d , pode-se chegar em

$$G(\cot(\theta)) = \frac{1}{\text{sen}^{d+1}(\theta)} [\text{sen}(\theta)P_d(\text{sen}(\theta), \cos(\theta)) - \cos(\theta)Q_d(\text{sen}(\theta), \cos(\theta))].$$

Daí, como

$$\frac{1}{\text{sen}^{d+1}(\theta)}$$

não se anula para valores reais em θ , e, além disso, esta fração é indeterminada quando θ é um múltiplo de π , pode-se afirmar que a fração acima é indeterminada apenas nos pontos de descontinuidade da cotangente, evidenciando que não há problemas de indeterminação neste caso. Sendo assim, as raízes da função G nas cartas U_2 e V_2 são os valores de θ para os quais a função f definida em (3.4) se anula, ou seja, suas próprias raízes. Conclui-se a prova da afirmação. ■

Capítulo 4

Resultados Principais

4.1 Teorema 4.1.1

Antes de apresentar o primeiro resultado base para este estudo, será feita a apresentação e demonstração de dois lemas.

O primeiro lema apresentado nesta seção pode ser encontrado em [2] e é fundamental para a demonstração dos dois primeiros itens da prova do Teorema 4.1.1, o qual será enunciado, demonstrado e exemplificado na sequência.

Lema 4.1.1. *Sejam $P^n(x, y)$ e $Q^n(x, y)$ polinômios homogêneos de grau $n > 1$. A curva*

$$F(x, y) = xQ^n(x, y) - yP^n(x, y) = 0 \quad (4.1)$$

é uma curva algébrica invariante do sistema (2.14).

Demonstração. O objetivo é mostrar que a curva $F = 0$ contém órbitas do campo de vetores associado à equação (2.14). Para isso, será calculado o produto interno entre o gradiente de F e o campo de vetores que define (2.14) e o resultado deve ser nulo em $F = 0$. Considere, na equação (2.14)

$$x' = P(x, y) = \lambda x + P^n(x, y), \quad y' = Q(x, y) = \lambda y + Q^n(x, y). \quad (4.2)$$

De (4.2) acima, tem-se que o produto interno do gradiente de F pelo campo de vetores

que define (2.14) é dado por

$$\frac{\partial F}{\partial x}P(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda x) + \frac{\partial F}{\partial x}(P^n(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial y}(\lambda y) + \frac{\partial F}{\partial y}(Q^n(x, y)). \quad (4.3)$$

Reorganizando a equação (4.3),

$$\frac{\partial F}{\partial x}P(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\lambda y) + \frac{\partial F}{\partial x}(P^n(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial y}(Q^n(x, y)). \quad (4.4)$$

Uma vez que P e Q são funções homogêneas de grau n , pode-se aplicar o Teorema de Euler para Funções Homogêneas 2.2.2 para afirmar que são válidas as seguintes equivalências

$$x \frac{\partial P^n(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial P^n(x, y)}{\partial y} = nP^n(x, y) \quad (4.5)$$

e

$$x \frac{\partial Q^n(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial Q^n(x, y)}{\partial y} = nQ^n(x, y). \quad (4.6)$$

De maneira a organizar os cálculos, a equação (4.4) foi dividida em duas partes, como abaixo

$$I = \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\lambda y) \quad (4.7)$$

e

$$II = \frac{\partial F}{\partial x}(P^n(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial y}(Q^n(x, y)). \quad (4.8)$$

Desenvolvendo I e usando as notações $P^n(x, y) = P^n$ e $Q^n(x, y) = Q^n$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\lambda y) &= \left(Q^n + x \frac{\partial Q^n}{\partial x} - y \frac{\partial P^n}{\partial x} \right) (\lambda x) + \left(-P^n + x \frac{\partial Q^n}{\partial y} - y \frac{\partial P^n}{\partial y} \right) (\lambda y) \\ &= \lambda \left[\left(xQ^n + x^2 \frac{\partial Q^n}{\partial x} - xy \frac{\partial P^n}{\partial x} \right) + \left(-yP^n + xy \frac{\partial Q^n}{\partial y} - y^2 \frac{\partial P^n}{\partial y} \right) \right] \\ &= \lambda \left[xQ^n + x^2 \frac{\partial Q^n}{\partial x} - xy \frac{\partial P^n}{\partial x} - yP^n + xy \frac{\partial Q^n}{\partial y} - y^2 \frac{\partial P^n}{\partial y} \right] \\ &= \lambda \left[x \left(Q^n + x \frac{\partial Q^n}{\partial x} + y \frac{\partial Q^n}{\partial y} \right) - y \left(x \frac{\partial P^n}{\partial x} + P^n + y \frac{\partial P^n}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned}$$

Agora, aplicando o Teorema de Euler 2.2.2 como adaptado nas equações (4.5) e (4.6) no desenvolvimento acima, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\lambda y) &= \lambda [x(Q^n + nQ^n) - y(P^n + nP^n)] = \lambda [x(n+1)Q^n - y(n+1)P^n] \\ &= \lambda(n+1) [xQ^n - yP^n] = \lambda(n+1)F(x, y). \end{aligned}$$

Concluindo de I que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\lambda y) = \lambda(n+1)F(x, y).$$

Por outro lado, desenvolvendo II e também considerando $P^n(x, y) = P^n$ e $Q^n(x, y) = Q^n$, de maneira a facilitar os cálculos, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(P^n) + \frac{\partial F}{\partial y}(Q^n) &= \left(Q^n + x \frac{\partial Q^n}{\partial x} - y \frac{\partial P^n}{\partial x} \right) (P^n) + \left(x \frac{\partial Q^n}{\partial y} - P^n - y \frac{\partial P^n}{\partial y} \right) (Q^n) \\ &= P^n Q^n + x P^n \frac{\partial Q^n}{\partial x} - y P^n \frac{\partial P^n}{\partial x} + x Q^n \frac{\partial Q^n}{\partial y} - P^n Q^n - y Q^n \frac{\partial P^n}{\partial y} \\ &= x P^n \frac{\partial Q^n}{\partial x} - y P^n \frac{\partial P^n}{\partial x} + x Q^n \frac{\partial Q^n}{\partial y} - y Q^n \frac{\partial P^n}{\partial y}. \end{aligned}$$

Daí, fazendo as modificações convenientes no Teorema de Euler 2.2.2, tem-se as igualdades abaixo

$$y \frac{\partial P^n}{\partial y} = n P^n - x \frac{\partial P^n}{\partial x} \quad \text{e} \quad x \frac{\partial Q^n}{\partial x} = n Q^n - y \frac{\partial Q^n}{\partial y},$$

as quais, aplicadas no desenvolvimento anterior, resultam em

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(P^n) + \frac{\partial F}{\partial y}(Q^n) &= P^n \left[n Q^n - y \frac{\partial Q^n}{\partial y} - y P^n \frac{\partial P^n}{\partial x} \right] + Q^n \left[x \frac{\partial Q^n}{\partial y} - n P^n + x \frac{\partial P^n}{\partial x} \right] \\ &= P^n \left[n Q^n - y \left(\frac{\partial Q^n}{\partial y} + P^n \frac{\partial P^n}{\partial x} \right) \right] + Q^n \left[-n P^n + x \left(\frac{\partial Q^n}{\partial y} + \frac{\partial P^n}{\partial x} \right) \right] \\ &= n P^n Q^n - y P^n \left(\frac{\partial Q^n}{\partial y} + P^n \frac{\partial P^n}{\partial x} \right) - n P^n Q^n + x Q^n \left(\frac{\partial Q^n}{\partial y} + \frac{\partial P^n}{\partial x} \right) \\ &= -y P^n \left(\frac{\partial Q^n}{\partial y} + P^n \frac{\partial P^n}{\partial x} \right) + x Q^n \left(\frac{\partial Q^n}{\partial y} + \frac{\partial P^n}{\partial x} \right) \\ &= (-y P^n + x Q^n) \left(\frac{\partial Q^n}{\partial y} + P^n \frac{\partial P^n}{\partial x} \right) = F(x, y) \left(\frac{\partial Q^n}{\partial y} + P^n \frac{\partial P^n}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

De I e II , conclui-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}P(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}Q(x, y) &= \lambda(n+1)F(x, y) + F(x, y) \left(\frac{\partial Q^n}{\partial y} + P^n \frac{\partial P^n}{\partial x} \right) \\ &= F(x, y) \left[\lambda(n+1) + \frac{\partial Q^n}{\partial y} + P^n \frac{\partial P^n}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

E, portanto, em $F = 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}P(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}Q(x, y) = 0.$$

Isso significa dizer que o vetor normal à curva $F = 0$ também é normal a pelo menos uma das órbitas do campo, ou seja, $F = 0$ coincide com pelo menos uma das órbitas do campo

de vetores associado à equação (2.14). Portanto, $F = 0$ é uma curva algébrica invariante do sistema (2.14), concluindo a prova. ■

O segundo lema desta seção pode ser encontrado em [10] e tem a finalidade de facilitar a compreensão da demonstração do item (c) do Teorema 4.1.1.

Lema 4.1.2. *Considere as funções contínuas $a_0, a_1, a_2 : I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. A equação diferencial ordinária não autônoma do tipo (Riccati)*

$$\frac{dx}{dt} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2, \quad (4.9)$$

definida em (4.9), tem, no máximo, duas soluções periódicas, ou todas as soluções são periódicas.

Demonstração. Suponha que a equação diferencial (4.9) tenha duas soluções periódicas diferentes, as quais serão denotadas por x_1 e x_2 , e considere a mudança de variáveis

$$y = y(t, x) = \frac{x(t) - x_1(t)}{x_2(t) - x_1(t)}.$$

Dessa mudança de variáveis tem-se

$$y_1(t) = y(t, x_1(t)) = \frac{x_1(t) - x_1(t)}{x_2(t) - x_1(t)} = 0$$

e

$$y_2(t) = y(t, x_2(t)) = \frac{x_2(t) - x_1(t)}{x_2(t) - x_1(t)} = 1.$$

Ou seja, ela transforma $x_1(t)$ em $y_1(t) \equiv 0$ e $x_2(t)$ em $y_2(t) \equiv 1$.

Considerando $x(t) = x$, $x_1(t) = x_1$ e $x_2(t) = x_2$, tem-se que a mudança de variáveis acima modifica a equação diferencial (4.9) como abaixo

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = y' &= \frac{(x - x_1)'(x_2 - x_1) - (x - x_1)(x_2 - x_1)'}{(x_2 - x_1)^2} \\ &= \frac{(x' - x_1')(x_2 - x_1) - (x - x_1)(x_2' - x_1')}{(x_2 - x_1)^2}. \end{aligned}$$

Para avançar no desenvolvimento, o numerador da fração acima será dividido em duas partes, sendo

$$I = (x' - x_1')(x_2 - x_1)$$

e

$$II = -(x - x_1)(x'_2 - x'_1).$$

Aplicando (4.9) com $a_0(t) = a_0$, $a_1(t) = a_1$ e $a_2(t) = a_2$ em I , tem-se

$$\begin{aligned} I &= [(a_0 + a_1x + a_2x^2) - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2)](x_2 - x_1) \\ &= a_1xx_2 + a_2x^2x_2 - a_1xx_1 - a_2x^2x_1 - a_1x_1x_2 - a_2x_1^2x_2 + a_1x_1^2 + a_2x_1^3. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, aplicando (4.9) com $a_0(t) = a_0$, $a_1(t) = a_1$ e $a_2(t) = a_2$ em II ,

$$\begin{aligned} II &= (x_1 - x) [(a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2) - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2)] \\ &= a_1x_1x_2 + a_2x_1x_2^2 - a_1xx_2 - a_2xx_2^2 - a_1x_1^2 - a_2x_1^3 + a_1xx_1 + a_2xx_1^2. \end{aligned}$$

Juntando os termos em I e II , tem-se

$$\begin{aligned} I + II &= a_2x^2x_2 - a_2x^2x_1 - a_2x_1^2x_2 + a_2x_1x_2^2 - a_2xx_2^2 + a_2xx_1^2 \\ &= a_2(x^2x_2 - x^2x_1 - x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - xx_2^2 + xx_1^2) \\ &= a_2 [x^2(x_2 - x_1) - x(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + x_1x_2(x_2 - x_1)] \\ &= a_2(x_2 - x_1) [x^2 - x(x_2 + x_1) + x_1x_2] \\ &= a_2(x_2 - x_1)(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2) \\ &= a_2(x_2 - x_1) [x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] \\ &= a_2(x_2 - x_1)(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Devolvendo o denominador à fração, tem-se

$$\begin{aligned} y' &= \frac{a_2(x_2 - x_1)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_2 - x_1)^2} \\ &= \frac{a_2(x - x_1)(x - x_2)}{x_2 - x_1} \\ &= a_2y(x - x_2). \end{aligned}$$

E, reescrevendo a equação acima de maneira conveniente, tem-se

$$\frac{dy}{dt} = y' = \lambda(t)y(y - 1), \quad t \in I, \quad (4.10)$$

sendo $\lambda(t) = a_2(t)(x_2(t) - x_1(t))$. Pela suposição inicial x_1 e x_2 são soluções periódicas, e, como uma solução $x(t)$ de (4.9) é periódica se, e somente se, a correspondente solução

$y(t) = y(t, x(t))$ de (4.10) é periódica, tem-se que y_1 e y_2 são soluções periódicas de (4.10). Considere a nova mudança de variáveis abaixo,

$$z = z(t, y(t)) = \frac{y(t) - 1}{y(t)},$$

a qual transforma a equação diferencial (4.10) em

$$\begin{aligned} z' &= \frac{(y' - 0)y - y'(y - 1)}{y^2} \\ &= \frac{y'y - y'y + y'}{y^2} \\ &= \frac{y'}{y^2}. \end{aligned}$$

Substituindo y' da equação anterior, tem-se

$$z' = \frac{\lambda y(y - 1)}{y^2}.$$

E, por fim, pode-se concluir que

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t) z, \quad t \in I. \quad (4.11)$$

Com esta nova mudança de variáveis, a solução $y_2(t) \equiv 1$ é transformada na solução $z_2(t) \equiv 0$, enquanto que a solução $y_1(t) \equiv 0$ é transformada na “solução” $z_1(t) \equiv \infty$. A equação diferencial (4.11) é linear, de onde a sua solução geral tem a forma

$$z : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad z(t) = \exp\left(\int_0^t \lambda(s) ds\right) z_0, \quad z_0 \in \mathbb{R}.$$

Se

$$\int_0^1 \lambda(s) ds \neq 0,$$

então a única solução periódica de (4.11) é exatamente $z_2(t) \equiv 0$, obtida tomando a condição inicial $z_0 = 0$. Se

$$\int_0^1 \lambda(s) ds = 0,$$

então toda solução de (4.11) e, portanto, de (4.10) e de (4.9), são periódicas, concluindo a prova do lema. ■

Na sequência, segue o primeiro resultado principal deste estudo, juntamente com a sua demonstração.

Teorema 4.1.1. *Considere a equação diferencial polinomial em (2.14) e as funções definidas em (3.4), com $\lambda \neq 0$ e $n > 1$.*

(a) *Se n é par, o sistema (2.14) não tem soluções periódicas ao redor da origem.*

(b) *Se n é ímpar e $g(\theta)$ se anula para algum $\theta \in [0, 2\pi)$, então o sistema (2.14) não possui soluções periódicas ao redor da origem.*

(c) *Se n é ímpar e $g(\theta) \neq 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, então a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (2.14). Além disso, se*

$$\frac{\lambda}{g(\theta)} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} d\theta < 0 \quad (4.12)$$

então o sistema (2.14) tem exatamente um ciclo limite ao redor da origem.

Demonstração. Por abuso de notação, F pode assumir a notação da curva (4.1) ou do campo de vetores (2.14) durante a demonstração. Para evitar desentendimentos, o contexto da notação será indicado antes da utilização.

Para os primeiros dois itens da prova, tem-se a mesma ideia principal, sendo que a base para a demonstração dos itens (a) e (b) segue do Lema 4.1.1.

Item (a): Já foi verificado na demonstração do Lema 4.1.1 que, para F definida em (4.1), $F = 0$ é uma curva invariante do sistema (2.14). Ao mesmo tempo, pode-se afirmar que F é um polinômio homogêneo de grau $n + 1$, pois se trata da adição de dois polinômios homogêneos de grau n multiplicados por um termo de grau 1. Como, por hipótese, n é par, pode-se afirmar que $n + 1$ é ímpar e, conseqüentemente, F tem um fator linear da forma $ax + by \neq 0$, o qual também é uma curva algébrica invariante do sistema (2.14). Em resumo, a reta $ax + by = 0$ é invariante e contém a origem, o que implica que o sistema (2.14) não tem órbita fechada ao redor da origem, concluindo a prova do item (a).

Item (b): Da mesma maneira, utilizando o Lema 4.1.1 e assumindo que $\theta^* \in [0, 2\pi)$ é uma raiz de g na equação (3.4), pode-se afirmar que $g = 0$ é uma curva algébrica

invariante da equação (2.14), pois é equivalente à $F = 0$ da equação (4.1), como provado na equivalência trigonométrica do Capítulo 2. Sendo assim, existe um fator linear $x \sin(\theta) - y \cos(\theta) = 0$ que também é uma curva algébrica invariante de (2.14) e que passa pela origem, mas não é identicamente nulo. Tal como no item (a), pode-se afirmar que pelo menos uma das órbitas do campo coincide com essa reta que passa pela origem e, portanto, (2.14) não possui órbitas fechadas ao redor da origem, provando o item (b).

Item (c): Para o item (c), a prova será dividida em três partes, como abaixo

Parte I. Nas hipóteses do Teorema 4.1.1, a equação diferencial (2.14) não tem ponto de equilíbrio diferente da origem.

Supõe-se, por contradição, a existência de um ponto de equilíbrio $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ do campo de vetores F , definido em (2.14). Neste caso, $F(x_0, y_0) = (0, 0)$, de onde

$$0 = \lambda x_0 + P^n(x_0, y_0), \quad 0 = \lambda y_0 + Q^n(x_0, y_0)$$

o que implica

$$P^n(x_0, y_0) = -\lambda x_0, \quad Q^n(x_0, y_0) = -\lambda y_0. \quad (4.13)$$

Considera-se a reta unindo esse ponto de equilíbrio à origem, isto é,

$$R = \{s(x_0, y_0) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Calculando F sobre os pontos dessa reta, tem-se

$$\begin{aligned} F(sx_0, sy_0) &= (\lambda(sx_0) + P^n(sx_0, sy_0), \lambda(sy_0) + Q^n(sx_0, sy_0)) \\ &= (s(\lambda x_0) + s^n P^n(x_0, y_0), s(\lambda y_0) + s^n Q^n(x_0, y_0)) \\ &= (s(\lambda x_0) + s^n(-\lambda x_0), s(\lambda y_0) + s^n(-\lambda y_0)) \\ &= ((s - s^n)\lambda x_0, (s - s^n)\lambda y_0) \\ &= \underbrace{(s - s^n)}_{\alpha(s)} \lambda(x_0, y_0) = \alpha(s) (x_0, y_0), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

E, assim, a reta R é invariante pelo campo de vetores F , o que impossibilita a existência de uma órbita fechada em torno da origem. Contudo, a contradição ainda não foi alcançada. Para tal, basta provar que as extremidades da reta R são pontos de equilíbrio da

compactificação de Poincaré de F em \mathbb{S}^1 .

Seja a coordenada $x_0 \neq 0$. Caso contrário, se $x_0 = 0$, basta analisar $y_0 \neq 0$. Considere a inclinação de R , isto é

$$u_0 = \frac{y_0}{x_0}.$$

De acordo com a Proposição 3.1.1, os pontos de equilíbrio da compactificação de Poincaré de F em \mathbb{S}^1 na carta U_1 são dados por $(u, 0)$ sendo que u satisfaz

$$Q^n(1, u) - u P^n(1, u) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q^n(1, u_0) - u_0 P^n(1, u_0) &= Q^n\left(1, \frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0} P^n\left(1, \frac{y_0}{x_0}\right) \\ &= Q^n\left(\frac{x_0}{x_0}, \frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0} P^n\left(\frac{x_0}{x_0}, \frac{y_0}{x_0}\right) \\ &= \frac{1}{x_0^{n+1}} [x_0 Q^n(x_0, y_0) - y_0 P^n(x_0, y_0)] \\ &= \frac{1}{x_0^{n+1}} [x_0(-\lambda y_0) - y_0(-\lambda x_0)] = 0. \end{aligned}$$

Em outras palavras, pode-se dizer que $(u_0, 0)$ é um ponto de equilíbrio da compactificação de Poincaré de F em \mathbb{S}^1 na carta U_1 , obtendo uma contradição e terminando a prova da Parte I.

Parte II. Nas hipóteses do Teorema 4.1.1, existe pelo menos um ciclo limite ao redor da origem.

Para essa demonstração, serão feitas três mudanças de variáveis, de forma a transformar a equação num modelo conveniente para a análise posterior. Tomando coordenadas polares $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$ e derivando com relação a t , tem-se

$$\frac{dx}{dt} = r' \cos(\theta) - r \sin(\theta) \theta',$$

e

$$\frac{dy}{dt} = r' \sin(\theta) + r \cos(\theta) \theta'.$$

Substituindo na equação (2.14), obtem-se

$$\lambda r \cos(\theta) + P^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r' \cos(\theta) - r \sin(\theta) \theta' \quad (4.14)$$

e

$$\lambda r \operatorname{sen}(\theta) + Q^n(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) = r' \operatorname{sen}(\theta) + r \cos(\theta) \theta'. \quad (4.15)$$

Isolando θ' na equação (4.14), tem-se

$$-r \operatorname{sen}(\theta) \theta' = \lambda r \cos(\theta) + P^n(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) - r' \cos(\theta) \quad (4.16)$$

de onde

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{\lambda r \cos(\theta) + P^n(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) - r' \cos(\theta)}{-r \operatorname{sen}(\theta)} \\ &= \frac{-\lambda r \cos(\theta) - P^n(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) + r' \cos(\theta)}{r \operatorname{sen}(\theta)}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

e, repetindo esse processo na equação (4.15),

$$r \cos(\theta) \theta' = \lambda r \operatorname{sen}(\theta) + Q^n(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) - r' \operatorname{sen}(\theta) \quad (4.18)$$

o que implica que

$$\theta' = \frac{\lambda r \operatorname{sen}(\theta) + Q^n(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) - r' \operatorname{sen}(\theta)}{r \cos(\theta)}. \quad (4.19)$$

Como as equações são equivalentes, pode-se encontrar r' igualando as equações (4.17) e (4.19). Considere $P^n(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) = P^n$ e $Q^n(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) = Q^n$ para facilitar os cálculos.

$$\frac{-\lambda r \cos(\theta) - P^n + r' \cos(\theta)}{r \operatorname{sen}(\theta)} = \frac{\lambda r \operatorname{sen}(\theta) + Q^n - r' \operatorname{sen}(\theta)}{r \cos(\theta)}$$

o que implica que

$$-\lambda r^2 \cos^2(\theta) - r \cos(\theta) P^n + r' r \cos^2(\theta) = \lambda r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) + r \operatorname{sen}(\theta) Q^n - r' r \operatorname{sen}^2(\theta)$$

de onde se obtém

$$r' r \cos^2(\theta) + r' r \operatorname{sen}^2(\theta) = \lambda r^2 \cos^2(\theta) + r \cos(\theta) P^n + \lambda r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) + r \operatorname{sen}(\theta) Q^n.$$

Usando a identidade trigonométrica, tem-se

$$\begin{aligned} r' &= \frac{\lambda r^2 \cos^2(\theta) + r \cos(\theta) P^n + \lambda r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) + r \operatorname{sen}(\theta) Q^n}{r} \\ &= \lambda r + \cos(\theta) P^n + \operatorname{sen}(\theta) Q^n. \end{aligned}$$

E, voltando $P^n = P^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ e, $Q^n = Q^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, tem-se

$$\begin{aligned} r' &= \lambda r + \cos(\theta)P^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta)Q^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ &= \lambda r + r^n [\cos(\theta)P^n(\cos(\theta), \sin(\theta)) + \sin(\theta)Q^n(\cos(\theta), \sin(\theta))]. \end{aligned}$$

E, por fim,

$$r' = \lambda r + r^n f(\theta). \quad (4.20)$$

Por outro lado, isolando r' nas equações (4.14) e (4.15), tem-se

$$r' \cos(\theta) = \lambda r \cos(\theta) + P^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + r \sin(\theta)\theta' \quad (4.21)$$

o que implica que

$$r' = \frac{\lambda r \cos(\theta) + P^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + r \sin(\theta)\theta'}{\cos(\theta)} \quad (4.22)$$

e

$$r' \sin(\theta) = \lambda r \sin(\theta) + Q^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) - r \cos(\theta)\theta' \quad (4.23)$$

o que implica que

$$r' = \frac{\lambda r \sin(\theta) + Q^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) - r \cos(\theta)\theta'}{\sin(\theta)}. \quad (4.24)$$

Igualando (4.22) e (4.24) e tomando $P^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = P^n$ e $Q^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = Q^n$ pode-se obter

$$\frac{\lambda r \cos(\theta) + P^n + r \sin(\theta)\theta'}{\cos(\theta)} = \frac{\lambda r \sin(\theta) + Q^n + r \cos(\theta)\theta'}{\sin(\theta)}$$

de onde

$$\lambda r \sin(\theta) \cos(\theta) + \sin(\theta)P^n + r \sin^2(\theta)\theta' \lambda r \sin(\theta) \cos(\theta) + \cos(\theta)Q^n - r \cos^2(\theta)\theta'.$$

Isolando θ' , obtem-se

$$r \sin^2(\theta)\theta' + r \cos^2(\theta)\theta' = -\sin(\theta)P^n + \cos(\theta)Q^n.$$

Voltando, mais uma vez, $P^n = P^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ e $Q^n = Q^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, tem-se

$$\begin{aligned} r\theta' &= -\sin(\theta)P^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \cos(\theta)Q^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ &= r^n [-\sin(\theta)P^n(\cos(\theta), \sin(\theta)) + \cos(\theta)Q^n(\cos(\theta), \sin(\theta))] \end{aligned}$$

de onde se obtém

$$\theta' = r^{n-1} [-\operatorname{sen}(\theta)P^n(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) + \cos(\theta)Q^n(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))].$$

E, por fim,

$$\theta' = g(\theta)r^{n-1}. \quad (4.25)$$

Tendo em conta a mudança de variável acima e que

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}},$$

conclui-se que

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\lambda}{g(\theta)r^{n-2}} + \frac{f(\theta)}{g(\theta)}r. \quad (4.26)$$

Contudo, nesse formato não é possível garantir que o denominador não seja nulo, pois, apesar de $g(\theta) \neq 0$ por hipótese, nada se pode afirmar sobre r . Então, como forma de garantir que o denominador não seja nulo, será feita outra mudança de variável.

Considerando $\rho = r^{n-1}$, pode-se concluir que $r = \rho^{\frac{1}{n-1}}$ e, conseqüentemente,

$$r' = \frac{1}{n-1}\rho^{\frac{2-n}{n-1}}.$$

Fazendo a mudança de variável em (4.26), obtém-se,

$$\frac{1}{n-1}\rho^{\frac{2-n}{n-1}} = \frac{\lambda}{g(\theta)\rho^{\frac{n-2}{n-1}}} + \frac{f(\theta)}{g(\theta)}\rho^{\frac{1}{n-1}}, \quad (4.27)$$

concluindo que a equação diferencial (4.26) tem a forma

$$\frac{d\rho}{d\theta} = (n-1)\frac{\lambda}{g(\theta)} + (n-1)\frac{f(\theta)}{g(\theta)}\rho \quad (4.28)$$

na variável ρ . Agora, já é possível afirmar que o denominador não se anula, pois $g(\theta) \neq 0$, para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ pela hipótese do item (c).

Na equação acima, pode-se notar que a estabilidade na origem $\rho = 0$ é dada pelos termos de mais baixo grau, e, como $n-1$ é sempre positivo, para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, a estabilidade na origem é dada pelo sinal de

$$\frac{\lambda}{g(\theta)}. \quad (4.29)$$

Apesar da análise, a equação (4.28) ainda não está no formato desejado. Será feita uma nova mudança de variáveis de forma a garantir que a equação (2.14) esteja no formato da equação de Riccati (4.9), como no Lema 4.1.2.

Finalmente, considerando $R = 1/\rho$, tem-se

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{R}, \\ \rho' &= \frac{-1}{R^2}\end{aligned}$$

o que, substituindo em (4.28), resulta em

$$\frac{-1}{R^2} = (n-1) \frac{\lambda}{g(\theta)} + (n-1) \frac{f(\theta)}{g(\theta)} \frac{1}{R}.$$

E, por fim,

$$\frac{dR}{d\theta} = (1-n) \frac{f(\theta)}{g(\theta)} R + (1-n) \frac{\lambda}{g(\theta)} R^2. \quad (4.30)$$

Agora, a equação (2.14) está no formato do Lema 4.1.2 e, portanto, pode-se afirmar que a equação (4.30) tem, no máximo, duas soluções periódicas ou todas as soluções são periódicas.

Interpretando a equação diferencial (4.30) no cilindro $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{S}^1$, definida pelo campo de vetores

$$G(R, \theta) = \left((1-n) \frac{f(\theta)}{g(\theta)} R + (1-n) \frac{\lambda}{g(\theta)} R^2, 1 \right),$$

pode-se afirmar que a órbita fechada é dada por $R = 0$. O Teorema 2.1.8 garante que a estabilidade de uma órbita fechada é determinada pelo sinal da integral da divergência do campo de vetores ao longo dessa órbita. A divergência do campo de vetores G (em coordenadas polares, veja a equação (2.10)) em $R = 0$ tem a forma

$$\begin{aligned}\operatorname{div} G(0, \theta) &= \left[\frac{1}{R} \frac{\partial R G_1}{\partial R}(R, \theta) + \frac{1}{R} \frac{\partial G_2}{\partial \theta}(R, \theta) \right]_{R=0} \\ &= 2(1-n) \frac{f(\theta)}{g(\theta)}.\end{aligned}$$

Segue que a estabilidade da órbita fechada $R = 0$ é dada pela expressão

$$- \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} d\theta, \quad (4.31)$$

visto que $2(1 - n) < 0$. Deste modo, a origem e a órbita fechada no bordo do disco de Poincaré terão a mesma estabilidade se o produto das expressões em (4.29) e em (4.31) for positivo ou, equivalentemente, devido ao sinal negativo em (4.31),

$$\frac{\lambda}{g(\theta)} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} d\theta < 0,$$

ou seja, se a desigualdade em (4.12) é satisfeita.

Parte III. A equação (2.14) possui um único ciclo limite ao redor da origem.

A equação (4.30) é uma equação de Riccati, a qual tem, no máximo, duas soluções periódicas ou todas as soluções são periódicas, de acordo com o Lema 4.1.2. E, como a equação diferencial original (2.14) é analítica e tem um nó estrelado na origem, não é possível ter um contínuo de órbitas fechadas, ou seja, não é possível que todas as soluções da equação de Riccati acima sejam periódicas. Logo, esta equação de Riccati tem, no máximo, duas soluções periódicas, sendo que uma delas corresponde a $R = 0$, ou equivalentemente, a $\rho = \infty$. Sendo assim, essa equação tem, no máximo, mais uma solução periódica, exatamente àquela correspondente a da prova da existência, terminando, assim, a prova do Teorema 4.1.1. ■

4.1.1 Exemplo

Exemplo 4.1.1. *Seja*

$$\begin{cases} x' = -8x + x^3 - y^3, \\ y' = -8y + x^3 + y^3, \end{cases} \quad (4.32)$$

uma equação diferencial na forma de (2.14) com $\lambda = -8$. Será feita a verificação de que (4.32) possui um ciclo limite em torno do nó estrelado da origem.

Note que a origem é, de fato, o único ponto de equilíbrio do sistema e é um nó estrelado, uma vez que a equação acima está na forma da equação diferencial (2.14). Além disso, o grau dos polinômios homogêneos $P^n(x, y)$ e $Q^n(x, y)$ é 3, e, portanto, o sistema não está nas hipóteses do item (a) do Teorema 4.1.1.

Para o item (b), será feito abaixo o cálculo de $g(\theta)$, com x e y em coordenadas polares

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \cos(\theta) [\cos^3(\theta) + \operatorname{sen}^3(\theta)] - \operatorname{sen}(\theta) [\cos^3(\theta) - \operatorname{sen}^3(\theta)] \\ &= \cos^4(\theta) + \operatorname{sen}^3(\theta) \cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta) \cos^3(\theta) + \operatorname{sen}^4(\theta). \end{aligned}$$

Usando as relações

$$\operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}, \quad \operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \quad e \quad \cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2},$$

tem-se

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)^2 + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} - \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) + \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos^2(2\theta)}{4} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta) \cos(2\theta)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos^2(2\theta)}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\cos^2(2\theta)}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta) \cos(2\theta)}{2}, \end{aligned}$$

e, por fim,

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{1}{2} + \frac{1 + \cos(4\theta)}{4} - \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{4} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{\cos(4\theta)}{4} - \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{4}. \end{aligned}$$

Sendo assim, $g(\theta)$ não se anula para nenhum $\theta \in [0, 2\pi)$, pois tem-se

$$g(\theta) = \frac{1}{4}(-\operatorname{sen}(4\theta) + \cos(4\theta) + 3), \quad (4.33)$$

descartando a condição do item (b).

Para verificar o item (c), considere, omitindo os cálculos,

$$f(\theta) = \frac{1}{4}(\operatorname{sen}(4\theta) + \cos(4\theta) + 3), \quad (4.34)$$

a qual foi obtida de maneira análoga à $g(\theta)$ calculada anteriormente.

Assim, como f e g são positivas para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, a integral em (4.12) é positiva e, uma vez que $\lambda < 0$, o sistema satisfaz as condições da alternativa (c), e tem exatamente um ciclo limite ao redor da origem, como ilustrado na Figura 4.1 abaixo.

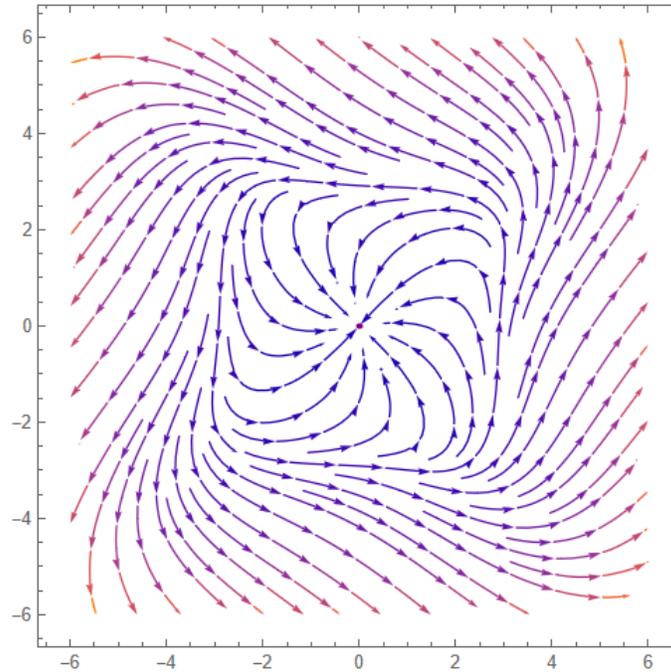


Figura 4.1: Retrato de fase local de 4.32. [11]

Neste exemplo pode-se perceber que, quando f e g são positivos ou negativos no intervalo $[0, 2\pi)$, a existência (ou não) dos ciclos limites fica condicionada ao termo λ . Em particular, para o exemplo acima, qualquer $\lambda < 0$ garante a existência de um único ciclo limite ao redor do equilíbrio da origem, pois os demais termos são todos positivos.

4.2 Teorema 4.2.1

Em [7], Gasull, Yu e Zhang avançaram um pouco mais na direção da quantidade de ciclos limites ao redor de um equilíbrio na origem. No artigo, os autores apresentam três resultados que avançam no sentido da proposta deste estudo, os quais serão apresentados neste capítulo, por meio desta e das próximas seções. A equação (2.14) começa a ser generalizada e contemplar outros tipos de equilíbrios e os resultados evidenciam outra característica importante dos ciclos limites: a estabilidade.

Considere as matrizes

$$L_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

com $\lambda\mu > 0$ em L_1 , $\lambda \neq 0$ em L_2 e $\beta \neq 0$ em L_3 . Tais matrizes, podem ser generalizadas por

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

com a , b , c e d valores reais quaisquer de forma a satisfazer L_1 , L_2 ou L_3 . Seja $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e considere a equação diferencial

$$X' = LX + (P^n(X), Q^n(X)),$$

ou equivalentemente,

$$x' = ax + by + P^n(x, y), \quad y' = cx + dy + Q^n(x, y), \quad (4.37)$$

com P^n e Q^n polinômios homogêneos de grau $n > 1$. A equação acima é uma generalização de (2.14), sendo que quando b e c são nulos e $a = d$, as equações são iguais.

Em coordenadas polares, tem-se

$$x = r \cos(\theta) \quad e \quad y = r \sin(\theta)$$

e suas respectivas derivadas

$$x' = r' \cos(\theta) - r \sin(\theta)\theta' \quad e \quad y' = r' \sin(\theta) + r \cos(\theta)\theta'.$$

Partindo daí, pode-se realizar a mudança de variáveis na equação (4.37). Substituindo em (4.37), tem-se

$$\begin{aligned} r' \cos(\theta) - r \sin(\theta)\theta' &= ar \cos(\theta) + br \sin(\theta) + P^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \\ r' \sin(\theta) + r \cos(\theta)\theta' &= cr \cos(\theta) + dr \sin(\theta) + Q^n(r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Isolando θ' nas equações (4.38) acima, tem-se

$$\theta' = \frac{ar \cos(\theta) + br \operatorname{sen}(\theta) + P^n(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) - r' \cos(\theta)}{-r \operatorname{sen}(\theta)}$$

e

$$\theta' = \frac{cr \cos(\theta) + dr \operatorname{sen}(\theta) + Q^n(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) - r' \operatorname{sen}(\theta)}{r \cos(\theta)}.$$

Agora, usando

$$P^n(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) = r^n P^n(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = r^n P^n \quad (4.39)$$

e

$$Q^n(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) = r^n Q^n(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = r^n Q^n \quad (4.40)$$

para facilitar os cálculos e igualando as equações acima, tem-se

$$\cos(\theta) [(ar - r') \cos(\theta) + br \operatorname{sen}(\theta) + r^n P^n] = -\operatorname{sen}(\theta) [cr \cos(\theta) + (dr - r') \operatorname{sen}(\theta) + r^n Q^n],$$

de onde,

$$\begin{aligned} r' &= r [a \cos^2(\theta) + d \operatorname{sen}^2(\theta) + (b + c) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)] + \cos(\theta) r^n P^n + \operatorname{sen}(\theta) r^n Q^n \\ &= u(\theta)r + \cos(\theta) r^n P^n + \operatorname{sen}(\theta) r^n Q^n. \end{aligned}$$

E, por fim,

$$r' = u(\theta)r + f(\theta)r^n. \quad (4.41)$$

Por outro lado, isolando r' nas equações (4.38), tem-se

$$r' = \frac{r \operatorname{sen}(\theta)\theta' + ar \cos(\theta) + br \operatorname{sen}(\theta) + P^n(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta))}{\cos(\theta)} \quad (4.42)$$

e

$$r' = \frac{-r \cos(\theta)\theta' + cr \cos(\theta) + dr \operatorname{sen}(\theta) + Q^n(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta))}{\operatorname{sen}(\theta)}. \quad (4.43)$$

Igualando as equações acima e simplificando tal como nas equações (4.39) e (4.40), tem-se a equação

$$\operatorname{sen}(\theta) [\operatorname{sen}(\theta)(r\theta' + br) + ar \cos(\theta) + r^n P^n] = \cos(\theta) [\cos(\theta)(cr - r\theta') + dr \operatorname{sen}(\theta) + r^n Q^n],$$

a qual pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\theta' &= \frac{r [c \cos^2(\theta) - b \operatorname{sen}^2(\theta) + (d - a) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)] + r^n [\cos(\theta)Q^n - \operatorname{sen}(\theta)P^n]}{r} \\ &= c \cos^2(\theta) - b \operatorname{sen}^2(\theta) + (d - a) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + r^{n-1} [\cos(\theta)Q^n - \operatorname{sen}(\theta)P^n].\end{aligned}$$

E, por fim,

$$\theta' = v(\theta) + g(\theta)r^{n-1}. \quad (4.44)$$

Da mudança de variáveis acima, pode-se dizer que a equação (4.37) tem a forma,

$$r' = u(\theta)r + f(\theta)r^n, \quad \theta' = v(\theta) + g(\theta)r^{n-1}, \quad (4.45)$$

sendo $\theta \in [0, 2\pi)$ e

$$\begin{aligned}u(\theta) &= a \cos^2(\theta) + d \operatorname{sen}^2(\theta) + (b + c) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta), \\ v(\theta) &= c \cos^2(\theta) - b \operatorname{sen}^2(\theta) + (d - a) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta), \\ f(\theta) &= \cos(\theta) P^n(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) + \operatorname{sen}(\theta) Q^n(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)), \\ g(\theta) &= \cos(\theta) Q^n(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) - \operatorname{sen}(\theta) P^n(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)).\end{aligned} \quad (4.46)$$

Define-se a função

$$F : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(\theta) = u(\theta)g(\theta) - v(\theta)f(\theta). \quad (4.47)$$

Para compreender o enunciado do teorema que será apresentado na sequência é importante relembrar que a estabilidade de um ponto de equilíbrio *coincide com o sinal de uma função h a valores reais* quando $h > 0$ implica que o ponto de equilíbrio é instável, e $h < 0$ implica que o ponto de equilíbrio é estável. O mesmo pode ser dito de órbitas periódicas ou do infinito de um campo de vetores polinomial.

Teorema 4.2.1. *Se a função F em (4.47) não se anula, então a origem é o único ponto de equilíbrio da equação (4.37). Neste caso, a equação (4.37) tem, no máximo, um ciclo limite, o qual, se existe, é hiperbólico. Além disso, a estabilidade desse ciclo limite coincide com o sinal de F , se o ciclo limite tem orientação horária, e é oposta ao sinal de F , se o ciclo limite tem orientação anti-horária.*

Em outras palavras, se o ciclo limite tiver orientação horária, então o ciclo limite é instável quando F é positiva e estável quando F é negativa. Caso contrário, se a orientação do ciclo limite for anti-horária, o ciclo limite é instável quando F é negativa e estável quando F é positiva.

Considere o caso em que a equação (4.37) tem a forma estudada no Teorema 3.1.1. Mais especificamente, pode-se afirmar que se a origem é um nó estrelado, então

$$a = d = \lambda = \mu \neq 0, \quad b = c = 0,$$

$$u(\theta) = \lambda, \quad v(\theta) = 0, \quad F(\theta) = \lambda g(\theta), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi).$$

Deste modo, a função F em (4.47) não se anula, se, e somente se, a função g não se anula. E, para esse caso, o teorema garante que a equação tem, no máximo, um ciclo limite e viabiliza a compreensão da estabilidade dessa órbita fechada, se ela existir.

Note que F é uma função polinomial trigonométrica homogênea de grau $n + 3$ nas variáveis $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$, e, portanto, a hipótese do Teorema 4.2.1 que afirma que (4.47) não se anula só pode ser satisfeita se n for ímpar.

Antes da prova do Teorema 4.2.1, serão enunciados e provados quatro lemas fundamentais para a compreensão deste resultado.

Lema 4.2.1. *Se a função F em (4.47) não se anula, então a origem é o único ponto de equilíbrio da equação (4.37).*

Demonstração. Seja um ponto de equilíbrio de (4.37) denotado pelas coordenadas (r_0, θ_0) e diferente da origem. De (4.45), tem-se

$$u(\theta_0) r_0 + f(\theta_0) r_0^n = 0 \quad \text{e} \quad v(\theta_0) + g(\theta_0) r_0^{n-1} = 0,$$

resolvendo o sistema acima, tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= (u(\theta_0) r_0 + f(\theta_0) r_0^n) v(\theta_0) - r_0 (v(\theta_0) + g(\theta_0) r_0^{n-1}) u(\theta_0) \\ &= -r_0^n (u(\theta_0) g(\theta_0) - v(\theta_0) f(\theta_0)) = -r_0^n F(\theta_0). \end{aligned}$$

Como $F(\theta_0) \neq 0$ por hipótese, segue que $r_0 = 0$. ■

Definem-se os conjuntos

$$\begin{aligned}\Theta^0 &= \{(r, \theta) : r > 0, v(\theta) + g(\theta)r^{n-1} = 0\}, \\ \Theta^\pm &= \{(r, \theta) : r > 0, \pm (v(\theta) + g(\theta)r^{n-1}) > 0\},\end{aligned}$$

onde estes representam a curva de nível zero da função que representa θ' e os hemisférios norte e sul do campo de vetores que define (4.45).

Lema 4.2.2. *Se a função F em (4.47) não se anula, então um ciclo limite de (4.37), se existir, não tem interseção com o conjunto Θ^0 .*

Demonstração. Como F em (4.47) não se anula, segue que

$$v^2(\theta) + g^2(\theta) \neq 0, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi).$$

Pois, pela contrapostiva, se

$$v^2(\theta) + g^2(\theta) = 0, \quad \text{para algum } \theta \in [0, 2\pi),$$

então,

$$v(\theta) = g(\theta) = 0.$$

O que resulta que $F(\theta) = 0$, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Absurdo, pois $F(\theta) \neq 0$. Então, vale que $v(\theta)$ e $g(\theta)$ não se anulam ao mesmo tempo.

Além disso, se o conjunto $\Theta^0 \neq \emptyset$, então existe algum (r_0, θ_0) , com $r_0 > 0$ e $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ tal que

$$v(\theta_0) + g(\theta_0)r_0^{n-1} = 0,$$

de onde

$$v(\theta_0) = -g(\theta_0)r_0^{n-1},$$

e, uma vez que $r_0 > 0$, então $g(\theta_0)$ e $v(\theta_0)$ tem sinais opostos e vale

$$v(\theta)g(\theta) < 0, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi),$$

o que implica que tanto $g(\theta)$ quanto $v(\theta)$ são não nulos e θ' tem sinal fixo. Daí r é um gráfico com relação à variável θ e, escrevendo r em função de θ , tem-se

$$r^{n-1} = -\frac{v(\theta)}{g(\theta)} > 0 \quad \implies \quad r = \left(-\frac{v(\theta)}{g(\theta)}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Ao longo deste gráfico, isto é, em Θ^0 , o campo de vetores que define (4.45) é horizontal, uma vez que θ' tem sinal fixo, e não tem ponto de equilíbrio, como foi visto no Lema 4.2.1. Reescrevendo a primeira componente do campo de vetores que define (4.45) no conjunto Θ^0 , tem-se

$$\begin{aligned} r' &= r(u(\theta) + f(\theta)r^{n-1}) = r\left(u(\theta) + f(\theta)\left(-\frac{v(\theta)}{g(\theta)}\right)\right) \\ &= r\left(\frac{u(\theta)g(\theta) - v(\theta)f(\theta)}{g(\theta)}\right) = r\frac{F(\theta)}{g(\theta)} \neq 0, \end{aligned}$$

para todo $\theta \in [0, 2\pi)$.

Uma vez que $r > 0$ em Θ^0 , $F(\theta) \neq 0$ por hipótese e $g(\theta)$ é não nulo pelo anterior, então r' tem sinal fixo em Θ^0 , ou seja, as órbitas que passam por Θ^0 não conseguem retornar, pois todas vão para a mesma direção.

Sem perda de generalidade, se um ponto de uma órbita de (4.37) em Θ^+ tem interseção com Θ^0 , então essa interseção é transversal, de modo que essa órbita tem interseção com Θ^- e não pode mais retornar para Θ^+ .

Assim, essa órbita não pode ser um ciclo limite. ■

Neste caso, como θ' tem sinal fixo em Θ^\pm , esse ciclo limite pode ser escrito da forma

$$r = R(\theta),$$

para alguma função R . Além disto, esse ciclo limite deve ser solução de período 2π da equação não autônoma

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{u(\theta)r + f(\theta)r^n}{v(\theta) + g(\theta)r^{n-1}} = S(r, \theta). \quad (4.48)$$

Lema 4.2.3. *Considere γ um ciclo limite de (4.37). Então, a sua estabilidade coincide com o sinal de*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial S}{\partial r}(R(\theta), \theta) d\theta. \quad (4.49)$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 2.1.8, a estabilidade de uma órbita fechada é determinada pelo sinal da integral da divergência do campo de vetores ao longo dessa órbita.

Sendo assim, interpretando a equação diferencial (4.37) ou (4.48) no cilindro $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{S}^1$, ela pode ser definida pelo campo de vetores

$$G(r, \theta) = (G_1(r, \theta), G_2(r, \theta)) = (S(r, \theta), 1).$$

De acordo com a equação (2.10), a divergência do campo de vetores G em coordenadas polares ao longo do ciclo limite γ , isto é, $r = R(\theta)$, tem a forma

$$\begin{aligned} \operatorname{div} G(R(\theta), \theta) &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r G_1}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial G_2}{\partial \theta}(r, \theta) \right]_{r=R(\theta)} \\ &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r S(r, \theta)}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial 1}{\partial \theta} \right]_{r=R(\theta)} \\ &= \frac{1}{R(\theta)} S(R(\theta), \theta) + \frac{\partial S}{\partial r}(R(\theta), \theta) \\ &= \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} + \frac{\partial S}{\partial r}(R(\theta), \theta). \end{aligned}$$

Integrando de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$, tem-se

$$\int_0^{2\pi} \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\partial S}{\partial r}(R(\theta), \theta) d\theta,$$

onde a primeira parcela da soma é nula, pois ao longo do ciclo limite a integral assume o mesmo valor em 0 e 2π e, conseqüentemente, a integral da divergência do campo de vetores ao longo da órbita periódica é dada pela equação (4.49), cujo sinal coincide com a estabilidade da órbita periódica. ■

Lema 4.2.4. *Se a função F em (4.47) não se anula, então a equação (4.37) tem, no máximo, um ciclo limite, o qual, se existe, é hiperbólico.*

Demonstração. Foi verificado no Lema 4.2.3 que a estabilidade de um ciclo limite da equação (4.37), se este existir, coincide com o sinal da integral em θ avaliada em 0 a 2π da derivada parcial de $S(R(\theta), \theta)$ com relação a r . Tem-se que o integrando, suprimindo

(θ) para encurtar os cálculos, é dado por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial r}(R(\theta), \theta) &= \frac{[uR + fR^n]' [v + gR^{n-1}] - [uR + fR^n] [v + gR^{n-1}]'}{[v + gR^{n-1}]^2} \\
&= \frac{[u + nfR^{n-1}] [v + gR^{n-1}] - [uR + fR^n] [(n-1)gR^{n-2}]}{[v + gR^{n-1}]^2} \\
&= \frac{u + nfR^{n-1} + fR^{n-1} - fR^{n-1}}{v + gR^{n-1}} - \frac{[ugR^{n-1} + fgR^{2n-2}] (n-1)}{[v + gR^{n-1}]^2} \\
&= \frac{u + fR^{n-1} + (n-1)fR^{n-1}}{v + gR^{n-1}} - \frac{[ugR^{n-1} + fgR^{2n-2}] (n-1)}{[v + gR^{n-1}]^2} \\
&= \frac{u + fR^{n-1}}{v + gR^{n-1}} - \frac{(n-1) [-fR^{n-1}(v + gR^{n-1}) + ugR^{n-1} + fgR^{2n-2}]}{[v + gR^{n-1}]^2} \\
&= \frac{R'}{R} + \frac{(1-n)R^{n-1} [-fv - fgR^{n-1} + ug + fgR^{n-1}]}{[v + gR^{n-1}]^2}.
\end{aligned}$$

E, de maneira mais completa,

$$\frac{\partial S}{\partial r}(R(\theta), \theta) = \frac{(1-n)F(\theta)R^{n-1}(\theta)}{(v(\theta) + g(\theta)R^{n-1}(\theta))^2} + \frac{R'(\theta)}{R(\theta)}.$$

Integrando ambos os membros de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$, tem-se

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial S}{\partial r}(R(\theta), \theta) d\theta = (1-n) \int_0^{2\pi} \frac{F(\theta)R^{n-1}(\theta)}{(v(\theta) + g(\theta)R^{n-1}(\theta))^2} d\theta, \quad (4.50)$$

pois a integral de

$$\frac{R'(\theta)}{R(\theta)}$$

ao longo do ciclo limite $r = R(\theta)$ é nula.

Do Lema 4.2.3 e da equação (4.49), segue que as estabilidades dos ciclos limites dependem apenas do sinal de F , uma vez que o fator $1 - n < 0$. Portanto, se a equação (4.37) tem ciclos limites e eles estão numa mesma componente conexa de Θ^\pm , existe, no máximo, um ciclo limite em cada uma dessas componentes conexas. De fato, isso deve-se ao fato de que, sob as hipóteses do lema, a origem é o único ponto de equilíbrio e, deste modo, os ciclos limites são encaixantes e estão em torno da origem. Contudo, numa mesma componente conexa, os ciclos limites tem a mesma estabilidade, a qual coincide com o sinal de F e por isso não se pode ter mais de um.

Observe que a estabilidade do ciclo limite, se ele existir, coincide com o sinal de $\pm F$ em Θ^\mp .

Suponha agora que cada uma das componentes conexas Θ^+ e Θ^- tenha um ciclo limite, ou seja, os ciclos limites tem estabilidades diferentes. Seja um ciclo limite γ dado por $r = R(\theta)$. Daí, assumindo $v(\theta) \neq 0$, pode-se calcular

$$\begin{aligned}
\frac{R'(\theta)}{R(\theta)} &= \frac{u(\theta) + f(\theta)R^{n-1}(\theta)}{v(\theta) + g(\theta)R^{n-1}(\theta)} \\
&= \frac{v(\theta) \frac{u(\theta) + f(\theta)R^{n-1}(\theta)}{v(\theta) + g(\theta)R^{n-1}(\theta)}}{v(\theta)} \\
&= \frac{u(\theta)v(\theta) + f(\theta)v(\theta)R^{n-1}(\theta)}{v(\theta)[v(\theta) + g(\theta)R^{n-1}(\theta)]} \\
&= \frac{u(\theta)v(\theta) + f(\theta)v(\theta)R^{n-1}(\theta) + u(\theta)g(\theta)R^{n-1} - u(\theta)g(\theta)R^{n-1}}{v(\theta)[v(\theta) + g(\theta)R^{n-1}(\theta)]} \\
&= \frac{u(\theta)[v(\theta) + g(\theta)R^{n-1}] - R^{n-1}[-f(\theta)v(\theta) + u(\theta)g(\theta)]}{v(\theta)[v(\theta) + g(\theta)R^{n-1}(\theta)]} \\
&= \frac{u(\theta)}{v(\theta)} - \frac{F(\theta)R^{n-1}(\theta)}{v(\theta)(v(\theta) + g(\theta)R^{n-1}(\theta))}.
\end{aligned}$$

Integrando a última equação em ambos os membros de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$ e observando que esta integral é nula no membro da esquerda, pois γ é um ciclo limite, pode-se obter

$$\int_0^{2\pi} \frac{F(\theta)R^{n-1}(\theta)}{v(\theta)(v(\theta) + g(\theta)R^{n-1}(\theta))} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{u(\theta)}{v(\theta)} d\theta.$$

Como a integral do membro da esquerda é diferente de zero, pois $F(\theta) \neq 0$ e $R(\theta) = r > 0$ e o denominador está bem definido, segue que o mesmo ocorre com a integral do membro da direita. No entanto, note que esta última integral é constante e diferente de zero em qualquer componente conexa de Θ^+ ou de Θ^- . Mas, o sinal da integral do membro da esquerda depende do sinal do denominador do integrando, o qual depende da componente conexa de Θ^+ ou de Θ^- em que se encontra o ciclo limite.

Em resumo, a equação (4.37) tem, no máximo, um ciclo limite na região Θ^ε , $\varepsilon \in \{+, -\}$, cuja estabilidade coincide com

$$\text{sinal}(\varepsilon F v) = \text{sinal}(K), \quad \text{sendo} \quad K = \varepsilon F v.$$

A prova do lema está concluída. ■

Demonstração. (do Teorema 4.2.1) Do Lema 4.2.1, se F não se anula, a origem é o único ponto de equilíbrio de (4.37). Do Lema 4.2.2, se a equação (4.37) tem um ciclo

limite γ , esse ciclo limite deve estar contido em um dos conjuntos Θ^\pm . Dos Lemas 4.2.3 e 4.2.4, se existir um ciclo limite na equação (4.37), ele é único e a sua estabilidade coincide com o sinal de $-F$ em Θ^\pm .

E, portanto, a prova do Teorema 4.2.1 está concluída. ■

4.3 Teorema 4.3.1

Avançando juntamente com [7], o próximo teorema garante a existência (ou não) de exatamente um ciclo limite ao redor do equilíbrio na origem, inclusive, evidenciando a estabilidade dessa órbita. Esse resultado torna possível encontrar condições que descartam a possibilidade da existência de um ciclo limite na generalização da equação (2.14).

Considere, para os próximos teoremas, $n > 1$, ímpar e as funções f e g como definidas em (3.4), de forma que

$$N = \min_{\theta \in \mathbb{R}} |g(\theta)| > 0 \quad (4.51)$$

e defina os seguintes números:

$$M_1 = \max_{\theta \in \mathbb{R}} |g(\theta) \cos^2(\theta) + \cos(\theta) \sin(\theta) f(\theta)|, \quad (4.52)$$

$$K_1 = \max_{\theta \in \mathbb{R}} |g(\theta) \sin^2(\theta) - \cos(\theta) \sin(\theta) f(\theta)|, \quad (4.53)$$

$$M_2 = \max_{\theta \in \mathbb{R}} |g(\theta) \cos(\theta) \sin(\theta) - \cos^2(\theta) f(\theta)|, \quad (4.54)$$

$$M_3 = \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(\theta)|. \quad (4.55)$$

Considere ainda

$$\nu = \begin{cases} \lambda, & \text{se } L = L_1 \quad \text{ou} \quad L = L_2, \\ \alpha, & \text{se } L = L_3, \end{cases} \quad (4.56)$$

sendo L_1 , L_2 e L_3 as matrizes definidas em (4.35) e

$$\kappa = \nu \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{|g(\theta)|} d\theta. \quad (4.57)$$

Teorema 4.3.1. *Considere a equação diferencial (4.37), sendo $n > 1$, ímpar, e os números N , M_1 , K_1 , M_2 , M_3 , ν e κ definidos em (4.51), (4.52), (4.53), (4.54), (4.55), (4.56) e (4.57), respectivamente. Considere as seguintes afirmações.*

- $L = L_1$, com $\lambda\mu > 0$ e

$$\left| \frac{\lambda}{\mu} - 1 \right| < \frac{N}{M_1}. \quad (4.58)$$

- $L = L_1$, com $\lambda\mu > 0$ e

$$\left| \frac{\mu}{\lambda} - 1 \right| < \frac{N}{K_1}. \quad (4.59)$$

- $L = L_2$, com $\lambda \neq 0$ e

$$|\lambda| > \frac{M_2}{N}. \quad (4.60)$$

- $L = L_3$, com $\beta \neq 0$ e

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| > \frac{M_3}{N}. \quad (4.61)$$

As seguintes afirmações são verdadeiras:

- Se $\kappa > 0$, então equação (4.37) não tem ciclo limite.
- Se $\kappa < 0$, então equação (4.37) tem exatamente um ciclo limite, o qual é hiperbólico e com estabilidade dada pelo sinal de $-\nu$.

Perceba que os denominadores das equações (4.58), (4.59), (4.60) e (4.61) estão bem definidos, uma vez que M_1 e K_1 são os máximos dos módulos de duas funções não identicamente nulas, e portanto, são números positivos, e N é o mínimo do módulo de uma função não nula e, portanto, também é um número positivo.

Os seguintes lemas de [7] fornecem a base para a compreensão do Teorema 4.3.1 abordado nesta seção.

Lema 4.3.1. *Considere a equação diferencial (4.37). Suponha que $g(\theta) \neq 0$, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, sendo g definida em (4.46). Então, a estabilidade da órbita fechada da compactificação de Poincaré do campo de vetores que define (4.37) em \mathbb{S}^1 é dada pelo sinal de*

$$V_1^\infty = - \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{|g(\theta)|} d\theta, \quad (4.62)$$

desde que esse número seja diferente de zero.

Demonstração. Considere a equação diferencial (4.37) ou, equivalentemente, (4.45), ou ainda, a equação diferencial escalar não autônoma

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{u(\theta)r + f(\theta)r^n}{v(\theta) + g(\theta)r^{n-1}},$$

a qual, com a mudança de variáveis $R = r^{1-n} = 1/r^{n-1}$, tal como na equação (4.30), pode ser escrita da forma

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{(1-n)f(\theta)R + (1-n)u(\theta)R^2}{g(\theta) + v(\theta)R}.$$

Note que esta mudança de variáveis envia a órbita fechada em \mathbb{S}^1 ($g(\theta) \neq 0$) em $R = 0$. Tomando a expansão de Taylor do membro da direita da última equação e suprimindo “ (θ) ”, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\theta} &= 0 + \left[\frac{(1-n)[fR + uR^2]'[g + vR] - (1-n)[fR + uR^2][g + vR]'}{1!(g + vR)^2} \right]_{R=0} R + O(2) \\ &= \left[\frac{(1-n)[f + 2uR][g + vR] - (1-n)[fR + uR^2]v}{g^2 + 2gvR + v^2R^2} \right]_{R=0} R + O(2) \\ &= \frac{(1-n)[f + 0][g + 0] - (1-n)[0]v}{g^2 + 0 + 0} R + O(2) \\ &= \frac{(1-n)fg}{g^2} R + O(2). \end{aligned}$$

E, por fim, de maneira mais completa,

$$\frac{dR}{d\theta} = (1-n) \frac{f(\theta)}{g(\theta)} R + O(2). \quad (4.63)$$

A equação diferencial (4.63) pode ser interpretada no cilindro $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{S}^1$, definida pelo campo de vetores

$$G(R, \theta) = (G_1(R, \theta), G_2(R, \theta)) = \left((1-n) \frac{f(\theta)}{g(\theta)} R + O(2), 1 \right).$$

Nessa interpretação, a órbita fechada é dada por $R = 0$ e a estabilidade de uma órbita fechada é determinada pelo sinal da integral da divergência do campo de vetores ao longo dessa órbita, de acordo com o Teorema 2.1.8.

Calculando, portanto, a divergência do campo de vetores G em coordenadas polares tal

como em (2.10), em $R = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} G(0, \theta) &= \left[\frac{1}{R} \frac{\partial R G_1}{\partial R}(R, \theta) + \frac{1}{R} \frac{\partial G_2}{\partial \theta}(R, \theta) \right]_{R=0} \\
&= \left[\frac{1}{R} \frac{\partial R \left[(1-n) \frac{f(\theta)}{g(\theta)} R + O(2) \right]}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial 1}{\partial \theta} \right]_{R=0} \\
&= \left[\frac{1}{R} \left[(1-n) \frac{f(\theta)}{g(\theta)} R + O(2) \right] + \frac{1}{R} \left[(1-n) \frac{f(\theta)}{g(\theta)} + O(1) \right] R \right]_{R=0} \\
&= (1-n) \frac{f(\theta)}{g(\theta)} + (1-n) \frac{f(\theta)}{g(\theta)} \\
&= 2(1-n) \frac{f(\theta)}{g(\theta)}.
\end{aligned}$$

Segue que a estabilidade da órbita fechada $R = 0$ é dada por

$$- \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} d\theta, \quad (4.64)$$

visto que $2(1-n) < 0$.

Portanto, a estabilidade da órbita fechada em \mathbb{S}^1 é dada pelo sinal de V_1^∞ em (4.62), desde que esse número seja diferente de zero. ■

Lema 4.3.2. *Considere a equação diferencial (4.37), sendo $n > 1$, ímpar, e os números N e M_1 definidos em (4.51) e (4.52), respectivamente. Se $L = L_1$, com $\lambda\mu > 0$ e vale (4.58), então $F(\theta) \neq 0$, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$.*

Demonstração. Nas hipóteses do lema, as funções u e v têm as formas

$$\begin{aligned}
u(\theta) &= \lambda \cos^2(\theta) + \mu \operatorname{sen}^2(\theta), \\
v(\theta) &= (\mu - \lambda) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta).
\end{aligned}$$

E, uma vez que $\mu \neq 0$, a função

$$F(\theta) = u(\theta) g(\theta) - v(\theta) f(\theta)$$

pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
F(\theta) &= (\lambda \cos^2(\theta) + \mu \operatorname{sen}^2(\theta)) g(\theta) - (\mu - \lambda) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) f(\theta) \\
&= \mu \left(g(\theta) + \left(\frac{\lambda}{\mu} - 1 \right) (g(\theta) \cos^2(\theta) + \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) f(\theta)) \right).
\end{aligned}$$

Suponha a existência de um $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ tal que $F(\theta_0) = 0$. Da última expressão, tem-se que

$$g(\theta_0) + \left(\frac{\lambda}{\mu} - 1\right) (g(\theta_0) \cos^2(\theta_0) + \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\theta_0) f(\theta_0)) = 0$$

de onde

$$\frac{\lambda}{\mu} - 1 = \frac{-g(\theta_0)}{g(\theta_0) \cos^2(\theta_0) + \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\theta_0) f(\theta_0)},$$

e, conseqüentemente,

$$\left| \frac{\lambda}{\mu} - 1 \right| = \frac{|g(\theta_0)|}{|g(\theta_0) \cos^2(\theta_0) + \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\theta_0) f(\theta_0)|} \geq \frac{N}{M_1},$$

o que prova o lema pela contrapositiva. ■

As provas dos próximos três lemas serão feitas de maneira análoga à prova do Lema 4.3.2.

Lema 4.3.3. *Considere a equação diferencial (4.37), sendo $n > 1$, ímpar, e os números N e K_1 definidos em (4.51) e (4.53), respectivamente. Se $L = L_1$, com $\lambda\mu > 0$ e vale (4.59), então $F(\theta) \neq 0$, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$.*

Demonstração. Tal como no Lema 4.3.2, na hipótese de $L = L_1$, as funções u e v têm o seguinte formato

$$u(\theta) = \lambda \cos^2(\theta) + \mu \operatorname{sen}^2(\theta),$$

$$v(\theta) = (\mu - \lambda) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta).$$

Daí, reescrevendo F , tem-se

$$\begin{aligned} F(\theta) &= (\lambda \cos^2(\theta) + \mu \operatorname{sen}^2(\theta)) g(\theta) - (\mu - \lambda) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) f(\theta) \\ &= \lambda [1 - \operatorname{sen}^2(\theta)] g(\theta) + \mu \operatorname{sen}^2(\theta) g(\theta) - (\mu - \lambda) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) f(\theta) \\ &= \lambda \left[g(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) g(\theta) + \frac{\mu}{\lambda} \operatorname{sen}^2(\theta) g(\theta) - \left(\frac{\mu}{\lambda} - 1\right) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) f(\theta) \right] \\ &= \lambda \left[g(\theta) + \left(\frac{\mu}{\lambda} - 1\right) (\operatorname{sen}^2(\theta) g(\theta) - \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) f(\theta)) \right]. \end{aligned}$$

Uma vez que $\lambda \neq 0$, se F se anula para algum $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, então

$$g(\theta_0) + \left(\frac{\mu}{\lambda} - 1\right) (\operatorname{sen}^2(\theta_0) g(\theta_0) - \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\theta_0) f(\theta_0)) = 0$$

o que implica que

$$\left(\frac{\mu}{\lambda} - 1\right) (\operatorname{sen}^2(\theta_0)g(\theta_0) - \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\theta_0) f(\theta_0)) = -g(\theta_0)$$

ou ainda

$$\left(\frac{\mu}{\lambda} - 1\right) = \frac{-g(\theta_0)}{\operatorname{sen}^2(\theta_0)g(\theta_0) - \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\theta_0) f(\theta_0)}.$$

E, portanto,

$$\left|\frac{\mu}{\lambda} - 1\right| = \frac{|-g(\theta)|}{|\operatorname{sen}^2(\theta)g(\theta) - \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) f(\theta)|} \geq \frac{N}{K_1}.$$

Mas isso é absurdo, pois contraria a hipótese da equação (4.59). Portanto, $F(\theta) \neq 0$, $\forall \theta \in [0, 2\pi)$. ■

Lema 4.3.4. *Considere a equação diferencial (4.37), sendo $n > 1$, ímpar, e os números N e M_2 definidos em (4.51) e (4.54), respectivamente. Se $L = L_2$, com $\lambda \neq 0$ e vale (4.60), então $F(\theta) \neq 0$, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$.*

Demonstração. Sob a hipótese de $L = L_2$, tem-se que as funções u e v são dadas por

$$u(\theta) = \lambda + \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)$$

$$v(\theta) = \cos^2(\theta).$$

Substituindo em F , tem-se

$$\begin{aligned} F(\theta) &= (\lambda + \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta))g(\theta) - \cos^2(\theta)f(\theta) \\ &= \lambda g(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)g(\theta) - \cos^2(\theta)f(\theta). \end{aligned}$$

Se existe algum $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ que anula F , então, nesse ponto,

$$\lambda g(\theta_0) + \operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\theta_0)g(\theta_0) - \cos^2(\theta_0)f(\theta_0) = 0$$

a qual pode ser escrita da forma

$$\lambda g(\theta_0) = \cos^2(\theta_0)f(\theta_0) - \operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\theta_0)g(\theta_0)$$

ou ainda

$$\lambda = \frac{\cos^2(\theta_0)f(\theta_0) - \operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\theta_0)g(\theta_0)}{g(\theta_0)}$$

e, conseqüentemente,

$$|\lambda| = \left| \frac{\cos^2(\theta_0)f(\theta_0) - \operatorname{sen}(\theta_0)\cos(\theta_0)g(\theta_0)}{g(\theta_0)} \right| \geq \frac{M_3}{N}.$$

É absurdo, pois nega a hipótese da equação (4.60). ■

Lema 4.3.5. *Considere a equação diferencial (4.37), sendo $n > 1$, ímpar, e os números N e M_3 definidos em (4.51) e (4.55), respectivamente. Se $L = L_3$, com $\beta \neq 0$ e vale (4.61), então $F(\theta) \neq 0$, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$.*

Demonstração. Por fim, quando $L = L_3$, tem-se que as funções u e v são dadas por

$$\begin{aligned} u(\theta) &= \alpha, \\ v(\theta) &= \beta, \end{aligned}$$

as quais, substituindo em F , resultam em

$$F(\theta) = \alpha g(\theta) - \beta f(\theta).$$

Supondo a existência de um $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ tal que $F(\theta) = 0$, tem-se que

$$\alpha g(\theta_0) - \beta f(\theta_0) = 0$$

o que implica que

$$\alpha g(\theta_0) = \beta f(\theta_0)$$

ou ainda

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{f(\theta_0)}{g(\theta_0)}.$$

Mas, se a equação acima é válida, então

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \left| \frac{f(\theta_0)}{g(\theta_0)} \right|,$$

o que contraria a hipótese da equação (4.61), absurdo. ■

Demonstração. (Teorema 4.3.1) Pelos Lemas 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4 e 4.3.5, pode-se afirmar que a função F , definida em (4.47), não se anula em $[0, 2\pi)$ e, deste modo, as hipóteses

do Teorema 4.2.1 são satisfeitas.

Além disso, pelo Lema 4.3.1, a estabilidade da órbita fechada da compactificação de Poincaré do campo de vetores que define (4.37) em \mathbb{S}^1 é dada pelo sinal de V_1^∞ em (4.62), de onde estabilidade do único ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é dada pelo sinal de ν em (4.56).

Portanto, a origem e a órbita fechada em \mathbb{S}^1 têm a mesma estabilidade se

$$0 < \nu V_1^\infty = -\kappa.$$

Assim, se $\kappa < 0$, então a equação diferencial (4.37) tem exatamente um ciclo limite em torno da origem, o qual é hiperbólico e cuja estabilidade é dada pelo sinal de $-\nu$.

E se $\kappa > 0$, então a equação diferencial (4.37) não tem órbita fechada em torno da origem.

Desta maneira, a prova do Teorema 4.3.1 está concluída. ■

Para ilustrar a aplicação dos resultados acima, serão feitos dois exemplos.

4.3.1 Exemplos

Exemplo 4.3.1. *Considere a equação diferencial*

$$x' = -x + (x^2 + y^2)(x - y), \quad y' = -y + (x^2 + y^2)(x + y), \quad (4.65)$$

uma equação diferencial da família de (2.14). Sendo assim, pode-se afirmar que a origem é um equilíbrio do tipo nó estrelado.

Encontrando as expressões de f e g em (3.4), e suprimindo (θ) , obtém-se

$$\begin{aligned} f &= \cos[(\cos^2 + \sen^2)(\cos - \sen)] + \sen[(\cos^2 + \sen^2)(\cos + \sen)] \\ &= \cos[\cos^3 - \cos^2 \sen + \cos \sen^2 - \sen^3] + \sen[\cos^3 + \cos^2 \sen + \cos \sen^2 + \sen^3] \\ &= \cos^4 - \cos^3 \sen + \cos^2 \sen^2 - \cos \sen^3 + \cos^3 \sen + \cos^2 \sen^2 + \cos \sen^3 + \sen^4 \\ &= \cos^4 + 2 \cos^2 \sen^2 + \sen^4 = (\cos^2 + \sen^2)^2 = 1. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, para g , tem-se

$$\begin{aligned} g &= \cos[(\cos^2 + \sen^2)(\cos + \sen)] - \sen[(\cos^2 + \sen^2)(\cos - \sen)] \\ &= \cos[\cos^3 + \cos^2 \sen + \cos \sen^2 + \sen^3] - \sen[\cos^3 - \cos^2 \sen + \cos \sen^2 - \sen^3] \\ &= \cos^4 + \cos^3 \sen + \cos^2 \sen^2 + \cos \sen^3 - \cos^3 \sen + \cos^2 \sen^2 - \cos \sen^3 + \sen^4 \\ &= \cos^4 + 2 \cos^2 \sen^2 + \sen^4 = (\cos^2 + \sen^2)^2 = 1. \end{aligned}$$

E, portanto

$$g(\theta) = f(\theta) = 1, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi).$$

Uma vez que $N = \min_{\theta \in \mathbb{R}} |g(\theta)|$, então $N = 1$. Como $L = L_1$, então $\nu = \lambda = -1$.

Calculando V_1^∞ e κ , obtem-se

$$V_1^\infty = - \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{|g(\theta)|} d\theta = - \int_0^{2\pi} 1 d\theta = -2\pi$$

e

$$\kappa = \nu \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{|g(\theta)|} d\theta = \nu \int_0^{2\pi} 1 d\theta = (-1)(2\pi) = -2\pi.$$

Por último, calculando M_1 e K_1 , tem-se

$$M_1 = K_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

Do Teorema 4.3.1, se $\lambda < 0$ e $\mu < 0$, ou seja $\lambda\mu > 0$, tais que

$$\left| \frac{\lambda}{\mu} - 1 \right| < \frac{N}{M_1} = \frac{2}{1 + \sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - 1),$$

então a equação diferencial (4.65) tem exatamente um ciclo limite instável, uma vez que o sinal de $-\lambda > 0$, em torno da origem. Além disso, o nó estrelado da origem é estável, como pode ser observado na Figura 4.2.

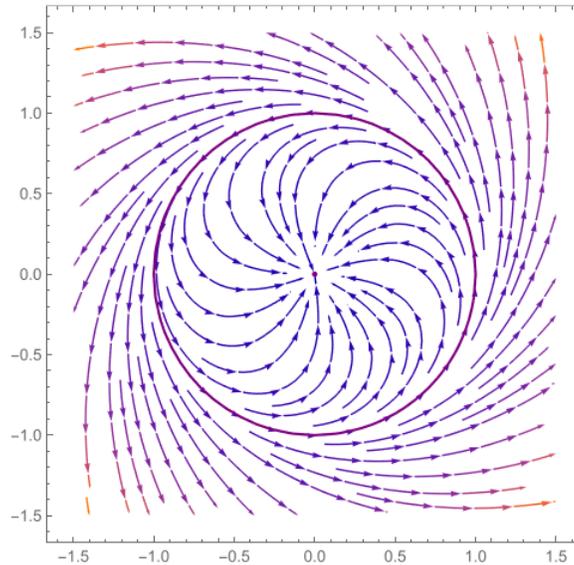


Figura 4.2: Retrato de fase local de (4.65), onde a curva em roxo é um esboço do ciclo limite que contém a origem. [11]

Exemplo 4.3.2. *Considere a equação diferencial*

$$x' = 2x + (x^2 + y^2)(x - y), \quad y' = 2y + (x^2 + y^2)(x + y), \quad (4.66)$$

uma equação diferencial da família de (2.14). Novamente, pode-se afirmar que a origem é um equilíbrio do tipo nó estrelado e, mais do que isso, que a equação (4.66) é da mesma família da equação (4.65).

Já foi verificado anteriormente que

$$g(\theta) = f(\theta) = 1, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi),$$

$$N = 1, \quad M_1 = K_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \quad e \quad V_1^\infty = -2\pi.$$

Além disso, tem-se que $\kappa = 2(2\pi) = 4\pi$ e $\nu = \lambda = 2$.

Pelo Teorema 4.3.1, como $\lambda > 0$ e $\mu > 0$, então $\lambda\mu > 0$. Daí, tem-se

$$\left| \frac{\lambda}{\mu} - 1 \right| < \frac{N}{M_1} = \frac{2}{1 + \sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Contudo, como $\kappa > 0$, o Teorema 4.3.1 garante que não há ciclos limites ao redor da origem.

4.4 Teorema 4.4.1

Avançando na compreensão da equação (2.14) generalizada por (4.37), o próximo teorema permite quantificar, em alguns casos, os ciclos limites que circunscrevem o equilíbrio na origem de acordo com o tipo do equilíbrio. Por meio desse resultado, é possível perceber que a quantidade de órbitas fechadas está diretamente relacionada com o grau dos polinômios homogêneos que compõem a equação e, mais que isso, com o equilíbrio no interior da órbita fechada. O último e mais geral dos resultados estudados será enunciado e demonstrado a seguir.

Teorema 4.4.1. *Considere $n > 1$, ímpar. Existem equações diferenciais da forma (4.37) tais que:*

- *O ponto de equilíbrio na origem é um foco, ou uma sela ou um nó e essas equações diferenciais possuem $(n + 1)/2$ ciclos limites em torno da origem.*
- *O ponto de equilíbrio na origem é nilpotente ou um foco fraco e essas equações diferenciais possuem $(n - 1)/2$ ciclos limites em torno da origem.*

No Teorema 4.4.1, se o ponto de equilíbrio na origem for uma sela ou um ponto nilpotente de índice zero, então, na região limitada pelo ciclo limite mais interno, deve existir mais um ponto de equilíbrio.

A prova do Teorema 4.4.1 será feita perturbando um centro (global) e analisando as órbitas fechadas que persistem pela perturbação. Existem várias maneiras de fazer essa análise da persistência de órbitas após uma perturbação, dentre elas, podem ser citadas as integrais abelianas, o estudo de funções de Melnikov e a teoria da média. Sob condições bastante gerais, essas teorias são equivalentes. Neste trabalho somente será considerado o estudo de funções de Melnikov.

Considere uma equação diferencial no plano

$$X' = F_H(X), \quad X = (x, y), \quad (4.67)$$

definida por um campo de vetores Hamiltoniano $F_H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , tendo um centro em $(0, 0)$ e um anel periódico $\mathcal{P}_{(0,0)}$.

Considere um campo de vetores $G = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , $\varepsilon \geq 0$ um parâmetro, e a seguinte equação diferencial

$$X' = F_H(X) + \varepsilon G(X). \quad (4.68)$$

Problema 1. *O que se pode dizer a respeito das órbitas fechadas do anel periódico $\mathcal{P}_{(0,0)}$ da equação (4.67) sob a perturbação em (4.68)?*

Considere a família de órbitas fechadas $\Gamma_a \subset \mathcal{P}_{(0,0)}$ do campo de vetores Hamiltoniano $F_H = (-H_y, H_x)$ ou $F_H = (H_y, -H_x)$, determinadas por

$$\Gamma_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = a, a \in I\},$$

sendo $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana de F_H e $I = (0, \alpha)$, com $\alpha > 0$.

Para cada $a \in I$, a órbita fechada Γ_a está parametrizada por

$$\gamma_a : [0, T(a)] \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

sendo $T(a)$ o período de Γ_a .

O próximo teorema dá uma resposta para o Problema 1. A função M é conhecida com uma função de Melnikov e a expressão integral que aparece em M é também chamada de integral Abeliana.

Teorema 4.4.2. *Considere a equação diferencial (4.68) e a função*

$$M : (0, \alpha) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M(a) = \oint_{\gamma_a} G^\perp, \quad (4.69)$$

sendo G^\perp o campo de vetores ortogonal ao campo de vetores G . Se $a_0 \in I$ é um zero simples de M , então, para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, existe um ciclo limite X^ε de (4.68) tal que

$$X^\varepsilon \rightarrow \Gamma_{a_0}, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

O ciclo limite X^ε é estável, se $M'(a_0) < 0$, e é instável, se $M'(a_0) > 0$.

Considerando $G = (G_1, G_2)$, então o campo ortogonal a G é dado por $G^\perp = (G_2, -G_1)$.

Para ilustrar a ideia do Teorema 4.4.2 será feito um exemplo abaixo.

Exemplo 4.4.1. *A perturbação do centro linear*

$$x' = y, \quad y' = -x - \varepsilon(x^2 - 1)y, \quad (4.70)$$

tem um ciclo limite estável para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

A equação diferencial (4.70) é conhecida como equação de van der Pol e pode ser colocada na forma da equação(4.68), tomando

$$F_H(x, y) = (y, -x) \quad e \quad G(x, y) = (0, (1 - x^2)y).$$

Aqui,

$$H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Para cada $a \in I = (0, \infty)$, a órbita fechada do campo de vetores não perturbado é dada por

$$\Gamma_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = (\sqrt{2a})^2 \right\},$$

a qual pode ser parametrizada por

$$\gamma_a^- : [0, T(a) = 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_a^-(t) = \left(\sqrt{2a} \cos(t), \sqrt{2a} \sin(t) \right).$$

Deste modo, a função M em (4.69) tem a forma

$$M : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M(a) = \oint_{\gamma_a^-} G^\perp = \oint_{\gamma_a^-} ((1 - x^2) y, 0),$$

de onde, obtem-se

$$M(a) = 2a \int_0^{2\pi} (1 - 2a \cos^2(t)) \sin^2(t) dt = \pi a(2 - a).$$

Portanto, $a_0 = 2$ é o único zero simples de M e, além disso,

$$M'(2) < 0,$$

o que implica, pelo Teorema 4.4.2, que para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, a equação diferencial (4.70) tem um ciclo limite estável X^ε em torno do ponto de equilíbrio instável na origem. Esse ciclo limite X^ε tende para a circunferência Γ_2 quando ε tende a zero.

Nas Figuras 4.3 e 4.4 são esboçados os retratos de fase de (4.70) para alguns valores de ε .

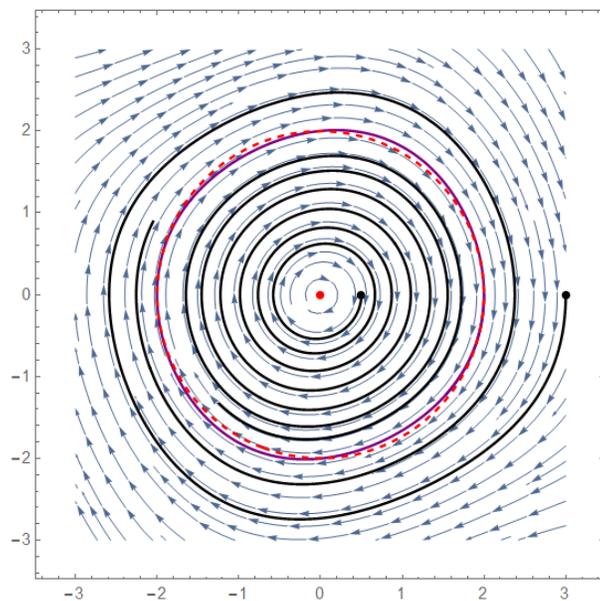


Figura 4.3: Retrato de fase da equação diferencial (4.70) para $\varepsilon = 0, 1$. Em vermelho tracejado está a circunferência Γ_2 . O ciclo limite está em roxo. [9]

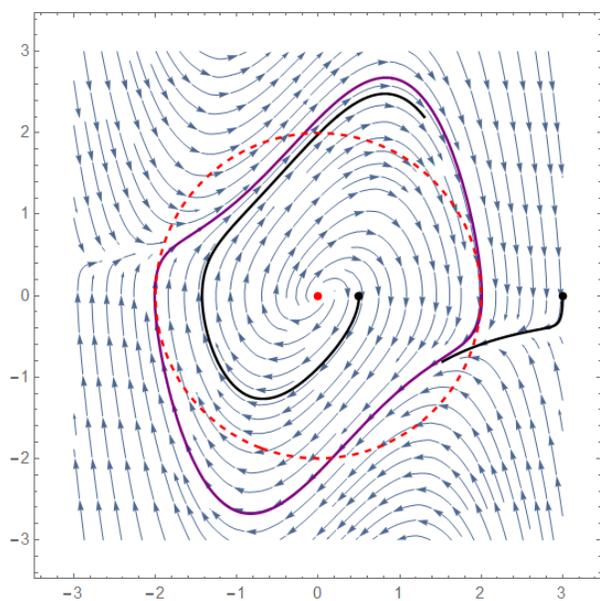


Figura 4.4: Retrato de fase da equação diferencial (4.70) para $\varepsilon = 1$. Em vermelho tracejado está a circunferência Γ_2 . O ciclo limite está em roxo. [9]

Pelo exemplo anterior, é possível perceber que órbitas fechadas permanecem apesar da

perturbação, mesmo que para perturbações muito pequenas. As Figuras 4.3 e 4.4 ilustram a ideia de quanto maior a perturbação, mais o ciclo limite se diferencia da órbita fechada original. Isso significa dizer que basta tomar uma perturbação suficientemente pequena e as órbitas fechadas permanecerão fechadas após a perturbação, possibilitando a extensão de alguns resultados para equações mais gerais, como será o caso do Teorema 4.4.1.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Definem-se as funções seno e cosseno generalizadas, denotadas por Sn e Cs , respectivamente, como sendo as componentes da solução do Problema de Cauchy

$$x' = -y^n, \quad y' = x, \quad x(0) = \sqrt{\frac{2}{n+1}}, \quad y(0) = 0. \quad (4.71)$$

Note que o campo de vetores que define (4.71) é Hamiltoniano, definido pela função Hamiltoniana

$$\tilde{H}(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^{n+1}}{n+1}.$$

Considere a seguinte função Hamiltoniana

$$H(x, y) = (n+1)\tilde{H}(x, y) = \frac{n+1}{2}x^2 + y^{n+1}. \quad (4.72)$$

Será denotada por

$$x(\theta) = \text{Cs}(\theta), \quad y(\theta) = \text{Sn}(\theta), \quad \theta \in [0, T], \quad T > 0, \quad (4.73)$$

a solução de (4.71). Veja a Figura 4.5. A curva em destaque corresponde à solução do Problema de Cauchy (4.71).

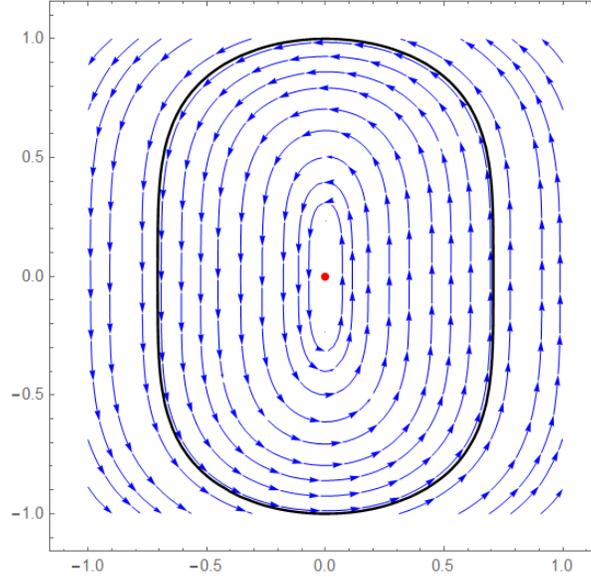


Figura 4.5: Retrato de fase de (4.71) para $n = 3$. [9]

Uma vez definidas como componentes da solução do Problema de Cauchy (4.71), podem ser determinadas algumas propriedades das funções Cs e Sn .

Propriedade 1: *Relação Fundamental*

Como

$$H\left(\sqrt{\frac{2}{n+1}}, 0\right) = \frac{n+1}{2} \left(\frac{2}{n+1}\right) + 0 = 1,$$

segue que $H(Cs(\theta), Sn(\theta)) = 1$, para todo $\theta \in [0, T]$.

Assim, pode-se estabelecer uma espécie de “relação fundamental” para as funções trigonométricas definidas anteriormente $Cs(\theta)$ e $Sn(\theta)$, tal como abaixo

$$\frac{n+1}{2} Cs^2(\theta) + Sn^{n+1}(\theta) = 1, \quad \forall \theta \in [0, T]. \quad (4.74)$$

Propriedade 2: *Derivadas*

Para as derivações, tem-se, de forma análoga às funções trigonométricas habituais,

$$\frac{dCs}{d\theta}(\theta) = x'(\theta) \stackrel{(4.71)}{=} -y^n(\theta) = -Sn^n(\theta),$$

$$\frac{dSn}{d\theta}(\theta) = y'(\theta) \stackrel{(4.71)}{=} x(\theta) = Cs(\theta).$$

Propriedade 3: Período

As funções Cs e Sn são periódicas de período

$$T = T_n = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\right)},$$

sendo Γ a função gama. Veja mais detalhes em [7]. Alguns exemplos de períodos são

$$T_1 = 2\pi, \quad T_3 \approx 7,4163, \quad T_4 \approx 7,9292.$$

Propriedade 4: Integrais

Para as integrais, podem ser consideradas as seguintes propriedades

$$\int_0^T \text{Cs}^i(\theta) \text{Sn}^j(\theta) d\theta \neq 0, \quad (4.75)$$

se, e somente se, i e j são ambos pares, para todo i e para todo j números inteiros não negativos.

Uma generalização das coordenadas polares pode ser dada pelas seguintes coordenadas

$$x = \rho^{(n+1)/2} \text{Cs}(\theta), \quad y = \rho \text{Sn}(\theta), \quad \rho \geq 0, \quad \theta \in [0, T]. \quad (4.76)$$

Deste modo, da definição de H e das coordenadas acima, obtém-se

$$\begin{aligned} H(x, y) &\stackrel{(4.72)}{=} \frac{n+1}{2} (\rho^{(n+1)/2} \text{Cs}(\theta))^2 + (\rho \text{Sn}(\theta))^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{2} \rho^{n+1} \text{Cs}^2(\theta) + \rho^{n+1} \text{Sn}^{n+1}(\theta) \\ &= \rho^{n+1} \underbrace{\left(\frac{n+1}{2} \text{Cs}^2(\theta) + \text{Sn}^{n+1}(\theta) \right)}_{\stackrel{(4.74)}{=} 1} \\ &= \rho^{n+1}. \end{aligned}$$

Da última análise, pode-se concluir que a curva

$$\gamma_\rho : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_\rho(\theta) = (\rho^{(n+1)/2} \text{Cs}(\theta), \rho \text{Sn}(\theta)), \quad (4.77)$$

é uma parametrização das órbitas da equação diferencial em (4.71), isto é, uma parametrização para as órbitas regulares do campo de vetores Hamiltoniano

$$F_H(x, y) = (-y^n, x). \quad (4.78)$$

Definem-se, agora, o campo de vetores $G = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$G(x, y) = (\bar{a}x + \bar{b}y + P^n(x, y), \bar{c}x + \bar{d}y + Q^n(x, y)), \quad (4.79)$$

sendo $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in \mathbb{R}$,

$$P^n(x, y) = \sum_{i=0}^n a_i x^i y^{n-i} \quad \text{e} \quad Q^n(x, y) = \sum_{i=0}^n b_i x^i y^{n-i}$$

polinômios homogêneos de grau $n > 1$.

Por fim, considere a equação diferencial

$$x' = -y^n + \varepsilon (\bar{a}x + \bar{b}y + P^n(x, y)), \quad (4.80)$$

$$y' = x + \varepsilon (\bar{c}x + \bar{d}y + Q^n(x, y)),$$

sendo $n \geq 3$, ímpar e $\varepsilon \geq 0$.

Note que a equação diferencial (4.80) está na forma da equação diferencial (4.37) e nas hipóteses do Teorema 4.4.1.

O campo de vetores que define a equação diferencial (4.80) tem a forma

$$F_H(X) + \varepsilon G(X),$$

sendo F_H definido em (4.78) e G definido em (4.79).

Assim, o que está sendo feito é um estudo de uma perturbação de centro Hamiltoniano. Pode-se lançar mão do Teorema 4.4.2 para auxiliar nesse estudo.

Precisa-se, então, estimar os zeros simples positivos da função

$$M : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M(\rho) = \oint_{\gamma_\rho} G^\perp, \quad (4.81)$$

sendo G^\perp o campo de vetores ortogonal ao campo de vetores G em (4.79) e γ_ρ definida em (4.77).

Pelo que foi visto acima, pode-se escrever

$$M(\rho) = \oint_{\gamma_\rho} G^\perp = \int_{\theta=0}^{\theta=T} G^\perp(\gamma_\rho(\theta)) \cdot \gamma'_\rho(\theta) d\theta. \quad (4.82)$$

Adotando

$$G^\perp(x, y) = \left(-(\bar{c}x + \bar{d}y + Q^n(x, y)), (\bar{a}x + \bar{b}y + P^n(x, y)) \right),$$

pode-se escrever o integrando de (4.82) como a soma das seguintes cinco parcelas

$$G^\perp(\gamma_\rho(\theta)) \cdot \gamma'_\rho(\theta) = \rho^2 \bar{b} \text{Cs}(\theta) \text{Sn}(\theta) + \quad (4.83)$$

$$\rho^{n+1} \bar{c} \text{Cs}(\theta) \text{Sn}^n(\theta) + \quad (4.84)$$

$$\rho^{(n+3)/2} (\bar{a} \text{Cs}^2(\theta) + \bar{d} \text{Sn}^{n+1}(\theta)) + \quad (4.85)$$

$$\rho^{(n+1)/2} \text{Sn}^n(\theta) Q^n(\gamma_\rho(\theta)) + \quad (4.86)$$

$$\rho \text{Cs}(\theta) P^n(\gamma_\rho(\theta)). \quad (4.87)$$

Da equação (4.75) e das parcelas (4.83) e (4.84), resulta que

$$\int_0^T \rho^2 \bar{b} \text{Cs}(\theta) \text{Sn}(\theta) d\theta = \int_0^T \rho^{n+1} \bar{c} \text{Cs}(\theta) \text{Sn}^n(\theta) d\theta = 0. \quad (4.88)$$

Deste modo, tem-se que analisar as integrais das três parcelas (4.85), (4.86) e (4.87).
 Recorde que, do ponto de vista da integração, as contribuições dos fatores

$$\text{Cs}^i(\theta) \text{Sn}^j(\theta)$$

só ocorrem quando i e j são ambos pares.

Será feita a análise da integração da parcela (4.87) na sequência.

$$\begin{aligned}
\int_0^T \rho \text{Cs}(\theta) P^n(\gamma_\rho(\theta)) d\theta &= \int_0^T \rho \text{Cs}(\theta) P^n(\rho^{(n+1)/2} \text{Cs}(\theta), \rho \text{Sn}(\theta)) d\theta \\
&= \int_0^T \rho \text{Cs}(\theta) \left(\sum_{i=0}^n a_i \rho^{(n+1)i/2} \text{Cs}^i(\theta) \rho^{n-i} \text{Sn}^{n-i}(\theta) \right) d\theta \\
&= \sum_{i=0}^n \left(\rho^{(n+1)i/2} \rho^{n-i+1} \int_0^T a_i \text{Cs}^{i+1}(\theta) \text{Sn}^{n-i}(\theta) d\theta \right) \\
&\stackrel{i=2j+1}{=} \sum_{j=0}^{(n-1)/2} \left(\rho^{(n-1)j+(3n+1)/2} \int_0^T a_{2j+1} \text{Cs}^{2j+2}(\theta) \text{Sn}^{n-2j-1}(\theta) d\theta \right) \\
&= \rho^{(n+3)/2} \sum_{j=0}^{(n-1)/2} \left(\int_0^T a_{2j+1} \text{Cs}^{2j+2}(\theta) \text{Sn}^{n-2j-1}(\theta) d\theta \right) \rho^{(n-1)(j+1)}.
\end{aligned}$$

Fazendo cálculos análogos aos anteriores, a integração da parcela (4.86) resulta em

$$\begin{aligned}
\int_0^T \rho^{(n+1)/2} \text{Sn}^n(\theta) Q^n(\rho^{(n+1)/2} \text{Cs}(\theta), \rho \text{Sn}(\theta)) d\theta &= \\
&\rho^{(n+3)/2} \sum_{j=0}^{(n-1)/2} \left(\int_0^T b_{2j} \text{Cs}^{2j}(\theta) \text{Sn}^{2n-2j}(\theta) d\theta \right) \rho^{(n-1)(j+1)}.
\end{aligned}$$

Já a integração da parcela (4.85) tem a forma

$$\rho^{(n+3)/2} \int_0^T (\bar{a} \text{Cs}^2(\theta) + \bar{d} \text{Sn}^{n+1}(\theta)) d\theta.$$

A expressão da função M em (4.82), levando em conta as parcelas do integrando da sua expressão integral em (4.83), (4.84), (4.85), (4.86) e (4.87), o anulamento das integrais das duas primeiras parcelas e as expressões das integrais das três últimas parcelas, tem a forma

$$M(\rho) = \rho^{(n+3)/2} \left(\delta + \sum_{j=0}^{(n-1)/2} c_j \rho^{(n-1)(j+1)} \right), \quad (4.89)$$

sendo

$$\delta = \int_0^T (\bar{a} \text{Cs}^2(\theta) + \bar{d} \text{Sn}^{n+1}(\theta)) d\theta \quad (4.90)$$

e

$$c_j = \int_0^T \left(a_{2j+1} \text{Cs}^{2j+2}(\theta) \text{Sn}^{n-2j-1}(\theta) + b_{2j} \text{Cs}^{2j}(\theta) \text{Sn}^{2(n-j)}(\theta) \right) d\theta. \quad (4.91)$$

Demonstração. (do Teorema 4.4.1) Utilizando a equação diferencial (4.80), obtém-se a função M em (4.89).

Os zeros simples positivos de M , se existirem, são obtidos da expressão entre parênteses em (4.89), qual é destacada a seguir

$$\begin{aligned}\widetilde{M}(\rho) &= \delta + \sum_{j=0}^{(n-1)/2} c_j \rho^{(n-1)(j+1)} \\ &= \delta + c_0 \rho^{n-1} + c_1 \rho^{2(n-1)} + \cdots + c_{(n-1)/2} \rho^{((n+1)/2)(n-1)}.\end{aligned}\tag{4.92}$$

Como $n \geq 3$ é ímpar, então $n-1$ é par, de onde cada uma das potências de ρ na expressão acima é par. Logo, se ρ_0 é um zero real de M , então $-\rho_0$ também é.

Denote por $\mu = \rho^{n-1}$. Pode-se escrever \widetilde{M} da forma

$$\widetilde{M}(\mu) = \delta + c_0 \mu + c_1 \mu^2 + \cdots + c_{(n-1)/2} \mu^{(n+1)/2}.$$

Desta última expressão, pode-se concluir que M tem, no máximo, $(n+1)/2$ zeros reais simples positivos.

Escolhendo, adequadamente, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in \mathbb{R}$ e os coeficientes reais a_{2j+1} e b_{2j} de P^n e de Q^n , respectivamente, é possível obter $(n+1)/2$ zeros reais simples positivos da função M .

Com essas escolhas, a equação diferencial (4.80) terá $(n+1)/2$ ciclos limites. Isto prova o item 1 do Teorema 4.4.1.

Para obter $(n+1)/2$ zeros reais simples positivos da função M no caso acima, deve-se observar que $\delta \neq 0$ (veja (4.90)).

Se $\delta = 0$, por exemplo, quando $\bar{a} = \bar{d} = 0$, casos em que a origem é um foco fraco ou um ponto de equilíbrio nilpotente, então a função M tem, no máximo, $(n-1)/2$ zeros reais simples positivos.

Com escolhas adequadas dos coeficientes envolvidos, a equação diferencial (4.80) terá $(n-1)/2$ ciclos limites. Isto prova o item 2 do Teorema 4.4.1.

Em resumo, a prova do Teorema 4.4.1 está concluída. ■

Note que a função g associada à equação diferencial (4.80) tem a forma

$$g(\theta) = \cos(\theta)(\varepsilon Q^n(\cos(\theta), \sin(\theta))) - \sin(\theta)(\varepsilon P^n(\cos(\theta), \sin(\theta)) - \sin^n(\theta)).$$

Na prova do Teorema 4.4.1 utiliza-se apenas os coeficientes b_{2j} (pares) de Q^n , ou seja,

$$Q^n(x, y) = b_0 y^n + b_2 x^2 y^{n-2} + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} y.$$

Pode-se colocar y em evidência nesta última expressão. Isto implica que o fator $\sin(\theta)$ pode ser colocado em evidência na expressão da função g .

Conclui-se, assim, que a função g , no caso em estudo, terá, pelo menos, dois zeros.

Assim, a compactificação de Poincaré do campo de vetores que define a equação diferencial (4.80) terá, pelo menos, dois pontos de equilíbrio em \mathbb{S}^1 .

Por fim, vale observar que, em virtude dos comentários acima, as hipóteses dos teoremas estudados anteriormente a respeito da existência de, no máximo, um ciclo limite em torno do ponto de equilíbrio na origem não são satisfeitas.

4.4.1 Exemplo

1. Considere $n = 3$ e as seguintes escolhas de coeficientes

$$\bar{a} = \bar{c} = \bar{d} = 1, \bar{b} = 0,$$

$$a_0 = a_2 = 0, a_1 = -4, a_3 = 1, b_0 = -4, b_1 = b_3 = 0, b_2 = 1.$$

Com essas escolhas, a equação diferencial (4.80) tem a forma

$$x' = \varepsilon x + \varepsilon(-4xy^2 + x^3) - y^3, \quad y' = (1 + \varepsilon)x + \varepsilon y + \varepsilon(-4y^3 + x^2y). \quad (4.93)$$

A origem é, de fato, um equilíbrio da equação diferencial, uma vez que

$$x = 0, y = 0 \Rightarrow x' = 0, y' = 0.$$

Daí, calculando a matriz jacobiana do campo de vetores associado à equação (4.93), tem-se

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon(1 - 4y^2 + 3x^2) & -3y^2 + \varepsilon(-8xy) \\ 1 + \varepsilon(1 + 2xy) & \varepsilon(1 - 12y^2 + x^2) \end{bmatrix}. \quad (4.94)$$

E, aplicando no equilíbrio na origem, obtém-se

$$\begin{aligned} J(0,0) &= \begin{bmatrix} \varepsilon(1 - 4 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0^2) & -3 \cdot 0^2 + \varepsilon(-8 \cdot 0 \cdot 0) \\ 1 + \varepsilon(1 + 2 \cdot 0 \cdot 0) & \varepsilon(1 - 12 \cdot 0^2 + 0^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 + \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Para encontrar os autovalores da matriz Jacobiana basta recordar que a matriz é triangular inferior e, conseqüentemente, os autovalores estão na diagonal principal. Portanto, $\lambda = \varepsilon$. Uma vez que ε é autovalor da matriz, basta tomar $\varepsilon \neq 0$ e o equilíbrio será hiperbólico. Em particular, quando $\varepsilon > 0$, a origem é um ponto de equilíbrio do tipo nó instável, pois ambos os autovalores serão reais e positivos.

Pelo primeiro item do Teorema 4.4.1, existem equações diferenciais da forma (4.37), nas quais o equilíbrio na origem é um nó e elas possuem $(n + 1)/2$ ciclos limites ao redor da origem. Neste caso,

$$\frac{n + 1}{2} = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Sendo assim, a equação do exemplo deveria ter exatamente dois ciclos limites ao redor da origem, o que de fato acontece, como pode ser observado na Figura 4.6.

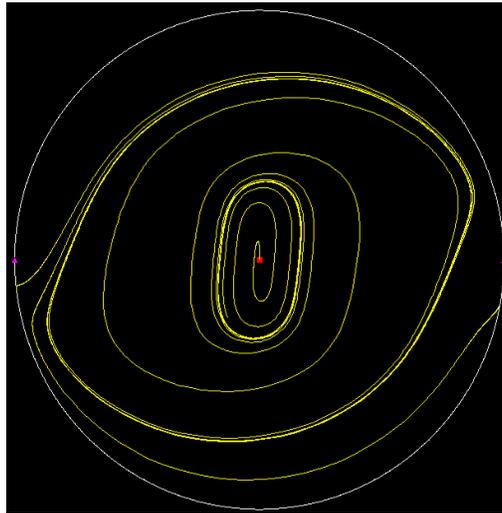


Figura 4.6: Retrato de fase da equação diferencial do Exemplo para $\varepsilon = 0, 1$. [9]

Na Figura 4.6 acima está esboçado o retrato de fase global da equação diferencial (4.93)

para $\varepsilon = 0, 1$. Estão ilustrados dois ciclos limites, sendo o mais interno estável e o mais externo instável, exemplificando uma equação diferencial para a qual o Teorema 4.4.1 é válido.

Conclusões

As equações diferenciais de maneira geral e, em particular, as não lineares, não são de análise simples. Sendo que os mecanismos de compreensão são, na maioria dos casos, estudos analíticos dos equilíbrios e da sua vizinhança, permitindo a compreensão da equação e do retrato de fase correspondente. Assim, esse estudo se deu por meio da análise qualitativa da família de equações escolhida com o intuito de compreender a relação entre suas órbitas singulares e fechadas.

Muitas vezes, na ciência, é necessário voltar alguns passos para trás para que se possa caminhar para frente, neste sentido, a segunda parte do 16^o problema de Hilbert foi motivação para a busca da compreensão da existência de ciclos limites circunscrevendo equilíbrios e, a partir daí, da quantificação destes. Em particular, neste estudo, o ponto de partida foi a existência, mas ao longo do caminho, a quantificação se fez presente.

Das primeiras percepções que se pôde ter com base neste ensaio, é que a paridade do grau da função homogênea que compõe a função estudada é determinante para a existência de ciclos limites circunscrevendo equilíbrios. Essa condição apresentada no primeiro resultado foi tão forte que os demais resultados já tem como hipótese o fato desse determinado grau ser ímpar, de forma que as órbitas fechadas tenham a possibilidade de existir.

Por outro lado, foi por meio da Compactificação de Poincaré e das funções trigonométricas equivalentes às funções da Proposição 3.1.1 que se tornou possível a determinação, em alguns casos, da existência desses ciclos limites e, mais que isso, da estabilidade dessas órbitas. Já a quantificação, quando possível de determinação, ficou por conta do tipo de equilíbrio existente no interior da região limitada pela órbita fechada.

É fato que esses resultados estudados não resolvem a segunda parte do 16^o problema de Hilbert e, tampouco apresentam um resultado capaz de determinar condições necessárias e suficientes para garantir pelo menos a existência desses ciclos limites circunscrevendo equilíbrios para equações diferenciais de maneira geral. Mas utilizando um modelo específico de equações, foi possível obter alguns resultados positivos de garantia da existência desses ciclos limites e da sua quantificação, em particular, as condições apresentadas nesse trabalho são verificáveis.

Inicialmente, a equação estudada possuía um nó estrelado na origem e foi generalizada para contemplar outros equilíbrios e expandir os resultados. Seria possível modificar esses resultados de forma a fazê-los contemplar outras famílias de equações diferenciais? Essas famílias tem alguma característica em comum? Ou, melhor, seria possível encontrar semelhanças nessas equações capazes de fornecer uma condição necessária e suficiente para a existência dessas órbitas fechadas circunscrevendo equilíbrios? São questões que surgem após o estudo aqui apresentado e podem se tornar motivações para estudos futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] B. Alarcón, S.B.S.D. Castro, I.S. Labouriau, *Global planar dynamics with star nodes: beyond Hilbert's 16th problem*, arXiv:2106.07516 [math.DS], 2021, 1–19.
- [2] A. Bendjeddou, J. Llibre, T. Salhi, *Dynamics of the polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities and a star node*, Journal of Differential Equations, **254**, 2013, 3530–3537.
- [3] A. Bendjeddou, J. Llibre, *On the limit cycles surrounding a diagonalizable linear node with homogeneous nonlinearities*, Applied Mathematics Letters, **98**, 2019, 427–431.
- [4] W.E. Boyce; R.C. Dippima Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.
- [5] C.B. Boyer, História da Matemática, tradução de Elza F. Gomide, 2 ed., São Paulo: Blucher, 1996.
- [6] F. Dumortier, J. Llibre, J. Artés, Qualitative Theory of Planar Differential Systems, Springer–Verlag, 2016.
- [7] A. Gasull, J. Yu, X. Zhang, *Vector fields with homogeneous non-linearities and many limit cycles*, Journal of Differential Equations, **258**, 2015, 3286–3303.
- [8] M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, Elsevier, 3rd ed., 2012.
- [9] L.F. Mello, Tópicos Avançados em Matemática II: Ciclos Limites e Equilíbrios do Tipo Nó, IMC - UNIFEI, 21 de março a 16 de julho de 2022. Notas de Aula.

- [10] A.L. NETO, *On the number of solutions of the equation $dx/dt = \sum_{j=0}^n a_j(t) x^j$, $0 \leq t \leq 1$, for which $x(0) = x(1)$* , *Inventiones Mathematicae*, **59**, 1980, 67–76.
- [11] Software WOLFRAM MATHEMÁTICA: <https://www.wolfram.com/mathematica/>.
- [12] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projetos Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [13] J. Sotomayor, *Curvas Definidas por Equações Diferenciais no Plano*, 13^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1981.
- [14] J. Stewart, *Cálculo: volume 2*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- [15] G.H. Yoshinari Júnior, *Um Modelo de Equações Diferenciais Ordinárias Aplicado à Leucemia Promielocítica Aguda*, Tese de Doutorado, Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, 2019.
- [16] G.H. Yoshinari Júnior, A.C. Fassoni, L.F. Mello, E.M. Rego, *Modeling dynamics and alternative treatment strategies in acute promyelocytic leukemia*, *PLoS One*, **14**, 2019, p. e0221011.