

Universidade Federal de Itajubá
Instituto de Física e Química - IFQ
Programa de Pós-Graduação em Física

Um estudo sobre modelos inflacionários gerados por um campo escalar com potencial polinomial

Maria Eduarda Antunes dos Santos

Itajubá - MG, 21 de março de 2024

Maria Eduarda Antunes dos Santos

**Um estudo sobre modelos inflacionários gerados por um
campo escalar com potencial polinomial**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Física pela
UNIFEI como parte dos requisitos necessá-
rios para a obtenção do Título de Mestre em
Física.

Universidade Federal de Itajubá - MG

Instituto de Física e Química - IFQ

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Eduardo Henrique Silva Bittencourt

Coorientadora: Micol Benetti

Itajubá - MG

21 de março de 2024

Maria Eduarda Antunes dos Santos

Um estudo sobre modelos inflacionários gerados por um campo escalar com potencial polinomial/ Maria Eduarda Antunes dos Santos. – Itajubá - MG, 21 de março de 2024-

33 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Eduardo Henrique Silva Bittencourt

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá - MG

Instituto de Física e Química - IFQ

Programa de Pós-Graduação em Física, 21 de março de 2024.

1. Palavra-chave 1. 2. Palavra-chave 2. 3. Palavra-chave 3. 4. Palavra-chave 4.
I. Eduardo Henrique Silva Bittencourt. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Instituto de Física e Química. IV. Inserir título aqui.

CDU 02:141:005.7

Maria Eduarda Antunes dos Santos

Um estudo sobre modelos inflacionários gerados por um campo escalar com potencial polinomial

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física pela UNIFEI como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Itajubá - MG, Data de 2022:

Eduardo Henrique Silva Bittencourt
Orientador

Micol Benetti
Coorientadora

Leila Lobato Graef
Convidada 1

Leandro Gustavo Gomes
Convidado 2

Itajubá - MG
21 de março de 2024

Agradecimentos

- Gostaria de agradecer primeiramente minha família, especificamente minha mãe, Rosana, minha irmã Thamiris, minha sobrinha Lara, e ao meu pai, Airton, que sempre estará me guiando de onde estiver. Sem o apoio deles, nada seria possível.
- Ao meu companheiro Lucas, que esteve ao meu lado durante todo meu período acadêmico, sempre prestando apoio para o que fosse preciso.
- Às amigadas que a dança me proporcionou. Obrigada, Adriene, Annelise, Nicole e Neliza por proporcionarem momentos de descontração dentro e fora da dança.
- Aos colegas de turma, Thales e Ricardo, pelo apoio mútuo durante esse período acadêmico.
- Às minhas companheiras de apartamento, Jade e Carol, pela parceria proporcionada ao longo desses anos.
- Aos meus orientadores, prof. Eduardo e prof^a Micol, pela orientação, paciência e ensinamentos. Agradeço a oportunidade da realização desse trabalho.
- À CAPES pela bolsa concedida.

Resumo

Nesse trabalho, foi analisado o comportamento de um modelo inflacionário gerado por um campo escalar com um potencial polinomial. Para isso, foi realizada a análise de um potencial do tipo monomial, para em seguida haver uma investigação dos efeitos devido à introdução de um segundo termo no potencial, focando na sensibilidade paramétrica dos modelos inflacionários, o que nos fornece uma indicação sobre quão estável é um modelo inflacionário quando lhe fazemos perturbações paramétricas. Parâmetros observacionais relacionados à inflação, como o índice espectral n_s das perturbações escalares e a razão tensor-escalar r , os parâmetros de slow roll ϵ e δ , entre outros, foram levados em consideração nesse estudo. Sendo assim, a proposta é estudar o comportamento paramétrico do modelo.

Palavras-chave: Inflação. Campo escalar. Potencial. Slow roll.

Abstract

This work analyzed the behavior of an inflationary model driven by a scalar field with a polynomial potential. For that, it was analyzed a monomial potential type and then an investigation of effects due to an introduction of a second potential term, focusing on the parametric sensitivity of the inflationary models, which gives us an indication of how stable is an inflationary model when we do parametric perturbation. Observational parameters related to inflation, such as the spectral index n_s of the scalar perturbations and the tensor-scalar ratio r , the slow roll parameters ϵ and δ , among others, were taken into account in this study. Therefore, the proposal is to study the parametric behavior of the model.

Keywords: Inflation. Scalar field. Potential. Slow roll.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esboço de como a inflação resolve o problema da planicidade [1]. . . .	10
Figura 2 – Solução do problema do horizonte, dada pela inflação. O universo observável é dado pela circunferência “now”, estando dentro da região observável (indicada pelo círculo sombreado “smooth patch”) a qual está dentro do raio de hubble no início da inflação, e isso aconteceria pela drástica diminuição do raio de hubble (indicado por “hubble length”). [1]	11
Figura 3 – Anisotropias de temperatura da CMB, conforme observadas pelo satélite Planck [2]. As regiões em azul são chamadas pontos frios, enquanto que as regiões em vermelho são os pontos quentes. Entre uma região quente e outra fria há uma variação de temperatura da ordem de 10^{-5}	16
Figura 4 – Espectro de potência da temperatura das anisotropias da CMB, conforme medidas por Planck. [3]	17
Figura 5 – Diagrama no plano $n_s-r_{0,002}$, apresentando os dados do Planck 2018 em contraste com as predições teóricas de certos modelos inflacionários. . .	20
Figura 6 – Potencial monomial para diferentes valores de n	22
Figura 7 – Parâmetros do Slow roll do potencial monomial para diferentes valores de n	22
Figura 8 – Campo escalar do cruzamento do horizonte em função do parâmetro livre n	23
Figura 9 – Amplitude do potencial λ em função do parâmetro livre n , para $\phi = \phi_*$, ou seja, o campo escalar no cruzamento do horizonte.	24
Figura 10 – Espectro de potência do caso monomial.	24
Figura 11 – Potencial binomial, considerando $n = 0$ (em vermelho), $n = 1$ (em azul), $n = 2$ (em verde) e $n = 3$ (em magenta). Também são considerados três valores de γ , como indicados na legenda.	26
Figura 12 – Parâmetros de slow roll do potencial binomial, considerando $n = 0$ (em vermelho), $n = 1$ (em azul), $n = 2$ (em verde) e $n = 3$ (em magenta). Também são considerados três valores de γ , como indicado na legenda.	27
Figura 13 – Parâmetros observacionais n_s e r do potencial binomial.	29
Figura 14 – Relação entre a razão dos espectros de potência do caso binomial e monomial em função de γ , para dados valores de n	30

Sumário

1	MODELO PADRÃO DA COSMOLOGIA	1
1.1	O universo em expansão	1
1.2	Perturbações escalares na métrica FLRW	2
2	TEORIA INFLACIONÁRIA	7
2.1	Problema da Planicidade	7
2.2	Problema do Horizonte	8
2.3	Inflação	9
2.4	Parâmetros de rolamento lento (regime de <i>slow-roll</i>)	10
3	PREDIÇÕES OBSERVACIONAIS	15
3.1	Radiação Cósmica de Fundo	15
3.2	Boltzmann Solver Codes	17
3.3	Inflação <i>versus</i> CMB	19
4	MODELOS INFLACIONÁRIOS REGIDOS POR CAMPOS ESCALARES	21
4.1	Potencial Monomial	21
4.2	Potencial Binomial	25
4.3	Considerando $p - n = 1$	26
5	CONCLUSÃO	31
	Referências	32

Notação

- Assinatura do espaço-tempo: $(-, +, +, +)$.
- Unidades de Planck são utilizadas, assim como $c = \hbar = 1$.
- Tempo conforme:

$$\eta = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')},$$

onde a é o fator de escala.

- Derivada com respeito à coordenada temporal t de uma variável v (exceto no capítulo 2):

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt}.$$

- Derivada com respeito ao tempo conforme η de uma variável v :

$$v' = \frac{dv}{d\eta}.$$

- Derivada de uma função f em relação ao campo escalar:

$$f_{,\phi} = \frac{df}{d\phi}.$$

- Massa de Planck reduzida: $M_P \equiv \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$.

- Parâmetro de Hubble:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a},$$

onde $H_0 = H(t = t_0)$ é o parâmetro de Hubble hoje.

- Densidade crítica:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 3m_{pl}^2 H_0^2$$

- Parâmetro de densidade:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c}$$

1 Modelo Padrão da Cosmologia

1.1 O universo em expansão

A teoria de Albert Einstein para o campo gravitacional, conhecida como teoria da relatividade geral, nos possibilitou entender questões abertas há muito tempo, e assim criar o primeiro modelo cosmológico relativístico. Essas questões muito tinham a ver com o fato do universo estar em expansão, e essa foi uma das muitas contribuições do astrônomo Edwin Powell Hubble, que notou que a distância entre nós e galáxias distantes era menor no passado do que é hoje [4].

De acordo com [5], temos que as velocidades relativas de observadores em um universo em expansão, homogêneo e isotrópico obedecem a Lei de Hubble, ou seja, nesse caso, não há pontos de vista privilegiados, de forma que a expansão se mostra a mesma para qualquer observador. Este Lei nos diz que a velocidade de um observador B com respeito a um observador A é dada por:

$$\vec{v}_{BA} = H(t)\vec{r}_{BA}, \quad (1.1)$$

onde $H(t)$ é o parâmetro de Hubble, \vec{r}_{BA} é o vetor que aponta de B para A e \vec{v}_{BA} é o vetor velocidade relativa. O parâmetro de Hubble, que mede a taxa de expansão do universo e depende apenas de t , é definido como:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.2)$$

onde a é o fator de escala, que nos diz como a distância entre dois pontos varia com o tempo, e o ponto denota uma derivada com respeito a t . A dependência de a em relação ao tempo t varia de acordo com a evolução do universo, que é determinado pela densidade de energia do mesmo. Temos nos primórdios, quando a radiação dominava, que $a \propto t^{1/2}$, enquanto que em tempos posteriores, com a matéria não-relativística responsável pela maior parte da densidade de energia, $a \propto t^{2/3}$ [4].

Nosso universo é descrito como homogêneo e isotrópico em largas escalas, e como dito anteriormente, o universo evolui de acordo com a Lei de Hubble, ou seja, não há direções ou posições privilegiadas no espaço tridimensional. Esse é o chamado princípio cosmológico, e a geometria de um universo com tais características é dada pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [6]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (1.3)$$

onde k corresponde à curvatura espacial, podendo assumir três valores: -1 para um universo aberto, 0 para um universo plano e 1 para um universo fechado.

Podemos relacionar a métrica com a matéria e energia do universo a partir das equações de Einstein, dadas por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, que descreve a geometria, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo, R é o escalar de Ricci (calculado a partir da contração do tensor de Ricci com a métrica, isto é, $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$), G é a constante de Newton e, por fim, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento, que descreve o conteúdo material do universo.

Para encontrar o tensor de Einstein a partir da métrica, precisamos primeiro determinar os símbolos de Christoffel, dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}), \quad (1.5)$$

onde a vírgula indicada derivada parcial com respeito às coordenadas do espaço-tempo x^{α} , ou seja, $g_{\mu\nu,\alpha} = \partial g_{\mu\nu}/\partial x^{\alpha}$. O tensor de Ricci, por sua vez, é dado por

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}. \quad (1.6)$$

Já o tensor momento-energia pode ser decomposto com respeito a uma classe de observadores comóveis com o fluido cósmico v^{μ} da seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)v_{\mu}v_{\nu} + pg_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

onde ρ é a densidade de energia e p é a pressão. Em geral, estas variáveis não são independentes, mas estão relacionadas via uma equação de estado do tipo $p = p(\rho)$. Em cosmologia, esta equação costuma tomar a forma linear $p = \lambda\rho$, sendo $\lambda = \text{const.}$, podendo assumir os valores 0 para matéria incoerente (poeira), 1/3 para radiação e -1 para constante cosmológica, por exemplo.

Por fim, a partir das equações de Einstein, podemos encontrar as duas equações de Friedmann que regem a ordem zero do modelo padrão da cosmologia:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (1.8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (1.9)$$

Em particular, a equação 1.8 é conhecida como a equação de Friedmann, enquanto que a equação 1.9 é conhecida como a equação da aceleração, por dizer como a expansão se dá: desaceleradamente se $\rho + 3p > 0$ ou de forma acelerada se $\rho + 3p < 0$.

1.2 Perturbações escalares na métrica FLRW

Sabemos que com o modelo apresentado acima é impossível descrever as estruturas do universo real, uma vez que esse é perfeitamente homogêneo e isotrópico. Por isso, é

preciso considerar pequenos desvios da métrica FLRW de modo a explicar a formação e evolução das estruturas em grande escala do universo.

Seguindo os passos apresentados da Ref. [4], podemos tomar a métrica FLRW perturbada por funções escalares $\Phi(t, \vec{x})$ e $\Psi(t, \vec{x})$, que correspondem, respectivamente, à perturbação da curvatura espacial e ao potencial gravitacional newtoniano. Eles são dependentes do tempo e do ponto espacial da seguinte forma

$$\begin{aligned} g_{00}(\vec{x}, t) &= -1 - 2\Psi(\vec{x}, t), \\ g_{0i}(\vec{x}, t) &= 0, \\ g_{ij}(\vec{x}, t) &= a^2\delta_{ij}[1 + 2\Phi(\vec{x}, t)], \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, tomando os valores 1 se $i = j$, ou 0, caso contrário. Por simplicidade, iremos analisar as equações perturbadas para o caso de curvatura espacial nula ($k = 0$). Porém, é fácil generalizar para o caso de uma curvatura qualquer.

A partir daí, podemos então calcular as equações de evolução para Φ e Ψ perturbando as equações de Einstein. Para isso é necessário perturbar alguns termos, como o tensor de Ricci e o escalar de Ricci. Sendo assim, precisamos também dos símbolos de Christoffel para a métrica perturbada 1.10, calculados a partir dos termos de primeira ordem e que são linear em Φ e/ou Ψ , dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \dot{\Psi}, & \Gamma_{0i}^0 &= \Gamma_{i0}^0 = ik_i\Psi, & \Gamma_{ij}^0 &= \delta_{ij}a^2[H + 2H(\Phi - \Psi) + \dot{\Phi}], \\ \Gamma_{00}^i &= \frac{ik^i}{a^2}\Psi, & \Gamma_{j0}^i &= \Gamma_{0j}^i = \delta_{ij}(H + \dot{\Phi}), & \Gamma_{jk}^i &= i\Phi[\delta_{ij}k_k + \delta_{ik}k_j - \delta_{jk}k_i], \end{aligned} \quad (1.11)$$

onde i é o número imaginário.

Note que estamos implicitamente expandindo a parte espacial das perturbações em termos de ondas planas, de modo que $\partial_j \rightarrow ik_j$. Com os símbolos de Christoffel conhecidos, podemos calcular o tensor de Ricci perturbado a partir da definição 1.6, obtendo:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\ddot{\Phi} + 3H(\dot{\Psi} - 2\dot{\Phi}) \quad (1.12)$$

$$R_{ij} = \delta_{ij} \left[(2a^2H^2 + a\ddot{a}) (1 + 2\Phi - 2\Psi) + a^2H(6\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) + a^2\ddot{\Phi} + k^2\Phi \right] + k_ik_j(\Phi + \Psi). \quad (1.13)$$

Por fim, a partir da definição, encontramos o escalar de Ricci, contraindo o tensor de Ricci com a métrica, ambos perturbados:

$$\begin{aligned} R &= g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} = [-1 + 2\Psi] \left[-3\ddot{a} - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\ddot{\Phi} + 3H(\dot{\Psi} - 2\dot{\Phi}) \right] + \left[\frac{1 - 2\Phi}{a^2} \right] \times \\ &\times \left\{ 3 \left[(2a^2H^2 + a\ddot{a}) (1 + 2\Phi - 2\Psi) + a^2H(6\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) + a^2\ddot{\Phi} + k^2\Phi \right] + k_ik_j(\Phi + \Psi) \right\}. \end{aligned}$$

Sendo assim, realizando a multiplicação de termos e mantendo apenas aqueles de primeira ordem em Φ e Ψ , obtemos:

$$\delta R = -12\Psi \left(H^2 + \ddot{a} \right) + \frac{2k^2}{a^2} \Psi + 6\ddot{\Phi} - 6H(\dot{\Psi} - 4\dot{\Phi}) + 4\frac{k^2\Phi}{a^2}. \quad (1.14)$$

Partindo então para as equações de Einstein, por estarmos tratando de perturbações escalares, trabalharemos apenas com duas das 10 componentes que as equações de Einstein possuem, isso porque as outras oito serão nulas ou redundantes. Importante dizer que para perturbações tensoriais outras componentes podem ser úteis. Assim, calculando a componente temporal da equação 1.4, temos:

$$\begin{aligned} G_0^0 &= g^{00} \left[R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \right] \\ &= (-1 + 2\Psi)R_{00} - \frac{R}{2}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

onde um dos índices foi levantado ao multiplicar G_{00} por g^{00} . Utilizando a parte temporal do tensor de Ricci, equação 1.12, e o escalar de Ricci, equação 1.14, obtemos a primeira-ordem da parte temporal do tensor de Einstein como sendo:

$$\begin{aligned} \delta G_0^0 &= -6\Psi\ddot{a} + \frac{k^2}{a^2}\Psi + 3\ddot{\Phi} - 3H(\dot{\Psi} - 2\dot{\Phi}) + 6\Psi(H^2 + \ddot{a}) \\ &\quad - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\ddot{\Phi} + 3H(\dot{\Psi} - 4\dot{\Phi}) - 2\frac{k^2\Phi}{a^2} \end{aligned}$$

Rearranjando os termos, obtemos então:

$$\delta G_0^0 = -6H\dot{\Phi} + 6\Psi H^2 - 2\frac{k^2\Phi}{a^2}. \quad (1.16)$$

Por fim, precisamos da parte temporal de primeira-ordem do tensor energia-momento, T_0^0 . Temos que $-T_0^0$ é a densidade de energia de todas as partículas do universo, onde cada espécie terá sua contribuição, sendo que o cálculo é realizado através de uma integral da função de distribuição. Para isso, temos que considerar as variáveis perturbadas para os fótons, os neutrinos, a matéria escura e os bárions, ou seja, considerar a parte de primeira-ordem das funções de distribuição. Sendo assim, temos que:

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -\rho_{dm}(1 + \delta_{dm}) && \text{(matéria escura),} \\ T_0^0 &= -\rho_b(1 + \delta_b) && \text{(bárions),} \\ T_0^0 &= -\rho_\gamma(1 + 4\Theta_0) && \text{(fótons),} \\ T_0^0 &= -\rho_\nu(1 + 4N_0) && \text{(neutrinos).} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Substituindo então a equação 1.16 e a equação 1.17 nas equações de Einstein 1.4, e dividindo os dois lados por 2, obtemos:

$$-3H\dot{\Phi} + 3\Psi H^2 - \frac{k^2\Phi}{a^2} = -4\pi G(\rho_{dm}\delta + \rho_b\delta_b + 4\rho_\gamma\Delta_0 + 4\rho_\nu N_0), \quad (1.18)$$

e com isso encontramos a primeira equação de evolução para Ψ e Φ , a qual pode também ser expressa em termos do tempo conforme ($d\eta = dt/a$):

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\left(\Phi' - \Psi\frac{a'}{a}\right) = 4\pi Ga^2[\rho_{dm}\delta + \rho_b\delta_b + 4\rho_\gamma\Theta_0 + 4\rho_\nu N_0] \quad (1.19)$$

Para calcular as componentes espaciais da equação 1.4, temos que:

$$\begin{aligned} G_j^i &= g^{ik} \left[R_{kj} - \frac{1}{2}g_{kj}R \right] \\ &= \frac{\delta^{ik}(1-2\Phi)}{a^2} R_{kj} - \frac{\delta_{ij}}{2}R, \end{aligned} \quad (1.20)$$

e seguirá basicamente o mesmo procedimento: utilizaremos a parte espacial do tensor de Ricci, equação 1.12, e o escalar de Ricci, equação 1.14, obtendo:

$$G_{ij} = A\delta_{ij} + \frac{k_ik_j(\Phi + \Psi)}{a^2}, \quad (1.21)$$

onde A se refere a alguns termos proporcionais a δ_{ij} , que acabam contribuindo ao traço de G_j^i . Para lidar com esses termos, consideraremos a parte longitudinal e sem traço de G_j^i , que pode ser extraído através de um operador projeção, dado por $(\hat{k}_i\hat{k}^j - (1/3)\delta_i^j)$. Contraindo G_j^i a ele, o operador projeção irá excluir todos os termos proporcionais a δ_{ij} , de forma que:

$$\left[\hat{k}_i\hat{k}^j - \frac{1}{3}\delta_i^j \right] G_j^i = \left[\hat{k}_i\hat{k}^j - \frac{1}{3}\delta_i^j \right] \left(\frac{k^ik_j(\Phi + \Psi)}{a^2} \right) = \frac{2}{3a^2}k^2(\Phi + \Psi). \quad (1.22)$$

Da mesma forma, precisamos encontrar a parte espacial, longitudinal e sem traço do tensor energia-momento, dado através da mesma integral da função de distribuição, porém nesse caso teremos a parte quadrupolar da distribuição, onde o tensor será de primeira-ordem e não nulo apenas para fótons e neutrinos. Essa componente do tensor é chamada de *stress* anisotrópico, e os bárions e a matéria escura não contribuem. Ele é dado por:

$$T_j^i = -\frac{8\rho^{(0)}\Theta_2}{3}. \quad (1.23)$$

Sendo assim, para a segunda equação de evolução, igualando a equação 1.22 com a equação 1.23, obtemos

$$k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi Ga^2(\rho_\gamma\Theta_2 + \rho_\nu N_2), \quad (1.24)$$

onde aqui incluímos a componente dos neutrinos por completeza.

Com o intuito de completar o sistema de equações acima, temos também que fornecer as equações de movimento por parte das perturbações de matéria. Tais equações podem ser obtidas a partir de primeiros princípios quando se estuda a equação de Boltzmann no contexto cosmológico. Como não é nosso propósito deduzi-las num primeiro momento, listando-as simplesmente, no tempo conforme, como sendo:

$$\Theta' + ik\mu\Theta = -\Phi' - ik\mu\Psi - \tau' \left[\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2}P_2(\mu)\Pi \right], \quad (1.25)$$

$$\Pi = \Theta_2 + \Theta_{P2} + \Theta_{P0}, \quad (1.26)$$

$$\Theta'_P + ik\mu\Theta_P = -\tau' \left[-\Theta_P + \frac{1}{2}(1 - P_2(\mu))\Pi \right], \quad (1.27)$$

$$\delta' + ikv = -3\Phi', \quad (1.28)$$

$$v' + \frac{a'}{a}v = -ik\Psi, \quad (1.29)$$

$$\delta'_b + ikv_b = -3\Phi', \quad (1.30)$$

$$v'_b + \frac{a'}{a}v_b - ik\Psi + \frac{\tau'}{R}[v_b + 3i\Theta_1], \quad (1.31)$$

$$N' + ik\mu N = -\Phi' - ik\mu\Psi, \quad (1.32)$$

onde Θ é a distribuição dos fótons e Θ_P é a distribuição da polarização dos fótons. Os sub-índices 0, 1 e 2 indicam, respectivamente, se o termo diz respeito à componente de monopolo, dipolo ou quadrupolo da perturbação. μ é um parâmetro angular que indica a direção de propagação do fóton, τ é corresponde à profundidade óptica e $P_2(\mu)$ é o segundo polinômio de Legendre, ligado ao quadrupolo da distribuição. δ e δ_b são as flutuações de densidade da matéria escura e dos bárions, respectivamente, enquanto v e v_b são as correspondentes flutuações de velocidade. $R = (3/4)\rho_b^{(0)}/\rho_\gamma^{(0)}$, ou seja, uma fração da razão bárion-fóton. N corresponde à flutuação de densidade dos neutrinos. A dedução detalhada de cada uma das equações acima pode ser encontrada na Ref. [4].

2 Teoria inflacionária

Apesar do modelo FLRW explicar muito bem a evolução do universo na maior parte do tempo cósmico, ainda há questões a serem entendidas com respeito ao passado recente (por exemplo, problema da aparente expansão acelerada) e ao universo primordial. Em relação a este último, em particular, existem questões que podem ser resolvidas assumindo que o universo tenha passado por uma curta fase de rápida expansão no passado remoto, sendo o mecanismo por trás desse processo denominado *inflação*, cujos detalhes veremos a seguir. Entretanto, primeiro apresentaremos dois dos principais problemas resolvidos pela inflação, sendo eles a planicidade e o horizonte. Outros problemas como a transição quântico-clássica e as partículas residuais de uma era primordial de grande unificação das interações fundamentais também podem ser resolvidos com a inflação, onde uma discussão a respeito deles pode ser encontrada nos originais [7] e [8], ou nos livros-textos [6], [9].

2.1 Problema da Planicidade

Contendo seu principal impasse no comportamento do parâmetro de densidade Ω , isto é, a razão entre a verdadeira densidade de massa do universo e a densidade crítica ρ_c , o problema da planicidade é causado pela instabilidade da situação em que Ω iguala a 1. Uma medida da densidade de matéria do universo determina a curvatura espacial k do mesmo, e com isso, a densidade de massa pode ser maior, menor ou igual ao valor crítico (que é calculado com base na taxa de expansão do universo). De acordo com o valor da densidade de massa, o universo pode ser fechado e estar destinado a entrar em colapso; pode ser aberto e continuar a se expandir para sempre; ou pode ser plano, com a taxa de expansão cada vez mais próxima de zero, mas com o universo expandindo sem limites [10].

Sendo assim, a partir de [11], temos que Ω é definido por

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.1)$$

com $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ calculado a partir da equação 1.8 fazendo $k = 0$. Ainda com a equação de Friedmann, dividimos os dois lados por H^2 e rearranjamos os termos, de modo que

$$1 - \frac{8\pi G\rho}{3H^2} = -\frac{k}{H^2 a^2}. \quad (2.2)$$

Substituindo a equação 2.1 na equação 2.2, temos

$$1 - \Omega = -\frac{k}{H^2 a^2}. \quad (2.3)$$

Note que essa equação é dependente do tempo, e daí surge o problema. Nas observações atuais, $\Omega_0 = 1,02 \pm 0,02$ [11], o que nos retornaria um universo plano com a densidade do

universo muito próxima à densidade crítica. Temos então $a = a_0 t^{2/3}$ e $H = \frac{2}{3t}$ para um universo em expansão dominado pela matéria, de forma que a equação 2.3 se torna

$$1 - \Omega = -\frac{9kt^{2/3}}{4a_0^2}. \quad (2.4)$$

Isto é, a medida em que avançamos ou voltamos no tempo, a densidade crítica vai representar um ponto de equilíbrio instável. Em [10], é utilizado a analogia do lápis em equilíbrio para exemplificar essa questão, de forma que a evolução de Ω é como um lápis equilibrado em uma mesa: de acordo com as leis da física, se o lápis estiver em equilíbrio perfeito, assim ele continuará. Porém, caso o lápis se incline para a esquerda ou direita, mesmo que muito pouco, essa inclinação aumentará rapidamente à medida que o lápis cai. Nessa analogia, o lápis em equilíbrio significaria um universo plano, com a densidade de massa igual à densidade crítica e Ω igual a 1, e assim permaneceria para sempre. Porém, caso Ω fosse um pouco menor que 1 no universo inicial, ele cairia rapidamente para 0, da mesma forma que se fosse um pouco maior que 1, aumentaria sem limites.

Ou seja, para explicar o valor do Ω atual, o parâmetro de densidade no universo primordial teria que ser um valor extremamente peculiar, resultando em um problema de plausibilidade. Para que não haja discordância com a observação, no universo inicial o parâmetro de densidade deveria estar extremamente próximo ao valor crítico, assim como é hoje.

2.2 Problema do Horizonte

Nas teorias cosmológicas, temos o que chamamos de distância do horizonte, que nada mais seria que toda a distância que a luz percorreu desde o início do universo, significando também uma limitação de nossos conhecimentos, já que nenhuma velocidade é superior a da luz. O problema do horizonte consiste na uniformidade que a radiação cósmica de fundo revelou que existia quando o universo tinha 300.000 anos, de modo que a temperatura da radiação é a mesma em todas as direções [10]. Sendo assim, ao voltarmos para aquela época, vemos que estamos recebendo fótons de regiões que não se encontravam em contato causal no momento de sua emissão. Daí surge a questão: como é possível que essas regiões possuam a mesma temperatura?

A partir de [6] e [4], podemos enxergar essa questão quantitativamente, e ver que o tamanho angular do horizonte de partículas na recombinação é apenas uma parte do céu da CMB. Sendo assim, temos que a distância própria do horizonte de partículas é definida por:

$$d_H = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = a \int_0^a \frac{da'}{H(a')a'^2}. \quad (2.5)$$

Considerando o universo dominado por matéria e radiação, a equação 2.5 se torna

$$d_H = a \int_0^a \frac{da'}{H_0 \sqrt{\Omega_{m0} a' + \Omega_{r0}}} = \frac{2a}{H_0 \Omega_{m0}} (\sqrt{\Omega_{m0} a + \Omega_{r0}} - \sqrt{\Omega_{r0}}), \quad (2.6)$$

sendo Ω_{m0} o parâmetro de densidade da matéria hoje e Ω_{r0} o parâmetro de densidade da radiação hoje. Sabemos que a distância de diâmetro angular é dada por:

$$d_A = a(t) \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = a \int_a^1 \frac{da'}{H(a') a'^2}. \quad (2.7)$$

E, novamente considerando o universo dominado por matéria e radiação, a equação 2.7 se torna

$$d_A = a \int_a^1 \frac{da'}{H_0 \sqrt{\Omega_{m0} a' + \Omega_{r0}}} = \frac{2a}{H_0 \Omega_{m0}} (\sqrt{\Omega_{m0} + \Omega_{r0}} - \sqrt{\Omega_{m0} a + \Omega_{r0}}). \quad (2.8)$$

Sendo assim, podemos realizar a razão d_H/d_A , que representa o raio angular do horizonte de partículas em um determinado fator de escala. Temos, então

$$\frac{d_H}{d_A} = \frac{\sqrt{\Omega_{m0} a + \Omega_{r0}} - \sqrt{\Omega_{r0}}}{\sqrt{\Omega_{m0} + \Omega_{r0}} - \sqrt{\Omega_{m0} a + \Omega_{r0}}}. \quad (2.9)$$

Note que essa razão vai para 0 quando $a \rightarrow 0$. Em particular, quando $a = 10^{-3}$ (período conhecido como recombinação), a equação 2.9 se torna

$$\frac{d_H}{d_A}(a_{rec} = 10^{-3}) = 0,018. \quad (2.10)$$

Esse valor corresponde a 1° no céu da CMB, e com isso, temos aproximadamente $4\pi/(0,018)^2 \approx 10^4$ regiões causalmente desconectadas no céu. Ou seja, o problema do horizonte diz respeito ao limitado poder de previsão do modelo, pois seria necessário considerar a uniformidade do universo como uma condição inicial, já que a mesma não pode ser explicada pela teoria padrão do big bang [10].

2.3 Inflação

Segundo [7], a inflação não é uma teoria para substituir o modelo padrão, mas sim para adicionar, sem eliminar os feitos do mesmo. A partir das definições dadas por [1], temos que a inflação é uma fase do universo onde

$$\ddot{a} > 0, \quad (2.11)$$

ou seja, uma época no passado remoto em que o fator de escala do universo estava acelerando. Outra forma de escrever a Eq. 2.11 é

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0. \quad (2.12)$$

Essa última forma nos fornece uma interpretação mais física, pois nos diz que o comprimento comóvel de Hubble, dado por $(aH)^{-1}$, diminui com o tempo.

Por fim, a inflação também pode ser escrita através do conteúdo material que proporciona uma fase inflacionária e, a partir da Eq. 1.9, temos

$$\rho + 3p < 0, \quad (2.13)$$

de forma que para satisfazer essa expressão, p terá que ser negativo, já que sempre assumimos ρ positivo.

Sendo assim, a inflação se propõe a resolver os problemas do modelo padrão, como o problema da planicidade e o problema do horizonte. Na Eq. 2.3, percebemos que o problema da planicidade se resume em Ω se aproximar de 1 ao invés de se afastar, e com a expansão acelerada da inflação isso se resolve: por definição, durante a inflação, Ω está se aproximando de 1, e no fim da inflação, ele estará muito perto desse valor, de forma que durante a evolução até atualmente ele se manterá extremamente perto, até que em um futuro muito distante ele volte a se afastar. Na Fig. 1 é ilustrado esse comportamento.

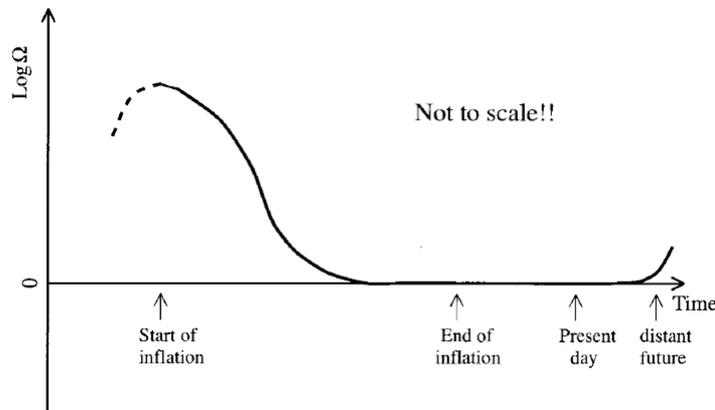


Figura 1 – Esboço de como a inflação resolve o problema da planicidade [1].

Já o problema do horizonte pode ser resolvido pela expressão 2.12, que nos diz que o comprimento comóvel de Hubble se reduz drasticamente durante a inflação, e isso permite que o universo tenha se originado de uma região muito pequena, sendo possível o contato causal de todas as regiões observadas atualmente. A Fig. 2 exemplifica essa situação, donde vemos que o universo observável (indicado pela circunferência marcada por “now”) estaria dentro da região (indicada pelo círculo sombreado “smooth patch”) a qual está dentro do raio de Hubble no início da inflação, e isso aconteceria pela drástica diminuição deste (indicado por “Hubble length”).

2.4 Parâmetros de rolamento lento (regime de *slow-roll*)

Para explicar a inflação precisamos saber que tipo de energia é necessário para haver essa expansão acelerada. Sendo assim, estaremos implementando a inflação a partir

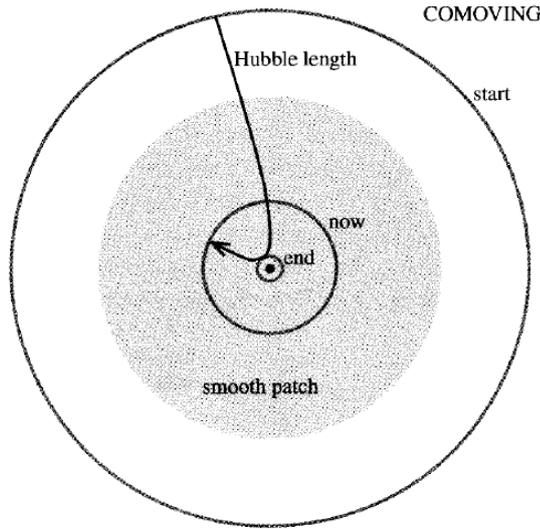


Figura 2 – Solução do problema do horizonte, dada pela inflação. O universo observável é dado pela circunferência “now”, estando dentro da região (indicada pelo círculo sombreado “smooth patch”) a qual está dentro do raio de hubble no início da inflação, e isso aconteceria pela drástica diminuição do raio de hubble (indicado por “hubble length”). [1]

de um campo escalar ϕ , chamado *inflaton*, sujeito a um potencial $V(\phi)$, que terá um comportamento do tipo slow-roll, ou seja, inicialmente o campo escalar rola lentamente para baixo, e atinge o seu mínimo após o fim da inflação [6]. Assumiremos que o campo escalar é predominantemente homogêneo, com componentes de ordem zero dada por $\phi^{(0)}(t)$.

A equação de evolução para um campo escalar homogêneo em um universo em expansão é dada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (2.14)$$

onde $V_{,\phi}$ é a derivada do potencial com relação ao campo. Podemos simplificar essa equação e considerar o tempo conforme η como variável temporal, e assim, obtemos

$$\phi'' + 2aH\phi' + a^2V_{,\phi} = 0. \quad (2.15)$$

Iremos trabalhar com ambas equações, de acordo com a conveniência.

Há duas variáveis que quantificam o slow-roll, dadas pelas definições

$$\epsilon \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) = \frac{-H'}{aH^2}, \quad (2.16)$$

e

$$\delta \equiv \frac{1}{H} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}. \quad (2.17)$$

Geralmente, o segundo parâmetro de slow-roll é denotado pela letra grega η , porém, para não nos confundirmos com o tempo conforme, o adotaremos como δ , assim como a

referência [4]. Na métrica FLRW, o campo escalar depende apenas de t , de forma que a densidade de energia é dada por

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2a^2} + V(\phi). \quad (2.18)$$

Durante a inflação, época em que o fator de escala é pequeno, o termo de curvatura é pouco importante para a dinâmica do universo quando comparado aos demais conteúdos materiais, uma vez que, este vai de a^{-2} . Sendo assim, a equação de Einstein para a evolução de a é

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \equiv \text{constante}. \quad (2.19)$$

Substituindo a Eq. 2.18 na Eq. 2.19, obtemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2a^2} + V(\phi) \right). \quad (2.20)$$

Derivando a Eq. 2.20 no tempo conforme, temos

$$2HH' = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}'\dot{\phi}''}{a^2} - \frac{a'\dot{\phi}^2}{a^3} + V_{,\phi}\dot{\phi}' \right).$$

Dividindo por $2H^3$,

$$\frac{H'}{H^2} = \frac{4\pi G}{3H^3} \left[\dot{\phi}' \left(\frac{\dot{\phi}''}{a^2} + V_{,\phi} - \frac{H}{a} \dot{\phi}' \right) \right], \quad (2.21)$$

onde $H = a'/a^2$. Da Eq. 2.15, podemos isolar o termo

$$\frac{\dot{\phi}''}{a^2} = \frac{-2H}{a} \dot{\phi}' - V_{,\phi},$$

e assim substituí-lo na Eq. 2.21, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{H'}{H^2} &= \frac{4\pi G}{3H^3} \left[\dot{\phi}' \left(\frac{-2H}{a} \dot{\phi}' - V_{,\phi} + V_{,\phi} - \frac{H}{a} \dot{\phi}' \right) \right], \\ \frac{H'}{H^2} &= \frac{-4\pi G}{aH^2} \dot{\phi}'^2, \end{aligned} \quad (2.22)$$

ou, no tempo coordenado, temos

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{-4\pi G}{H^2} \dot{\phi}^2. \quad (2.23)$$

Substituindo a Eq. 2.22 na Eq. 2.16, encontramos

$$\epsilon = \frac{4\pi G}{a^2 H^2} \dot{\phi}'^2, \quad (2.24)$$

no tempo conforme, ou

$$\epsilon = \frac{4\pi G}{H^2} \dot{\phi}^2, \quad (2.25)$$

no tempo coordenado. Da Eq. 2.14, podemos dizer que

$$\frac{d\phi}{dt} \approx \frac{-V_{,\phi}}{3H}. \quad (2.26)$$

Dai, substituindo a Eq. 2.26 na Eq. 2.25, temos

$$\epsilon = \frac{4\pi G}{H^4} \frac{V_{,\phi}^2}{9}. \quad (2.27)$$

Usando que $\phi'^2 \ll |V|$ e $\phi'' \ll 1$, então a Eq. 2.20 se torna

$$H^2 = \frac{8\pi G V}{3}. \quad (2.28)$$

Por fim, substituindo a Eq. 2.28 na Eq. 2.27, obtemos:

$$\epsilon = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2. \quad (2.29)$$

Sendo assim, podemos expressar os parâmetros de slow-roll como condições sobre a forma do potencial.

Faremos agora o mesmo para o parâmetro δ . Primeiro, derivando a Eq. 2.25 com respeito ao tempo, obtemos

$$\dot{\epsilon} = \frac{4\pi G}{H^2} \left(2\dot{\phi}\ddot{\phi} - \frac{2\dot{H}}{H}\dot{\phi}^2 \right). \quad (2.30)$$

Reescrevendo a Eq. 2.17 na forma

$$\ddot{\phi} = H\dot{\phi}\delta, \quad (2.31)$$

e substituindo-a na Eq. 2.30, juntamente com 2.23, temos

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{4\pi G}{H^2} \left[2H\delta\dot{\phi}^2 + 2H \left(\frac{4\pi G}{H^2}\dot{\phi}^2 \right) \dot{\phi}^2 \right] \\ &= 2H \frac{4\pi G\dot{\phi}^2}{H^2} (\delta + \epsilon) \\ &= 2H\epsilon(\delta + \epsilon). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Por fim, encontramos

$$\delta = -\epsilon + \frac{\dot{\epsilon}}{2H\epsilon}. \quad (2.33)$$

Para determinar δ em termos do potencial e suas derivadas, derivamos a Eq. 2.29 com respeito ao tempo e substituímos em 2.33. Assim,

$$\begin{aligned} \delta &= -\epsilon + \frac{1}{2H\epsilon} \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{2V_{,\phi}V_{,,\phi}}{V^2} - 2\frac{V_{,\phi}^3}{V^3} \right) \dot{\phi} \\ &= -\epsilon - \frac{1}{16\pi G} \frac{V_{,\phi}^2 V_{,,\phi}}{V^2 3H^2 \epsilon} + \frac{1}{16\pi G} \frac{V_{,\phi}^4}{V^3} \frac{1}{3H^2 \epsilon} \\ &= -\epsilon - \frac{V_{,,\phi}}{3H^2} + \frac{V_{,\phi}^2}{3H^2 V}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Substituindo a Eq. 2.28 na equação acima e utilizando a definição de ϵ , finalmente, obtemos

$$\delta = -\epsilon - \frac{V_{,,\phi}}{8\pi G V} + \frac{V_{,\phi}^2}{8\pi G V^2}$$

$$\begin{aligned}\delta &= -\epsilon + 2\epsilon - \frac{1}{8\pi G} \frac{V_{,\phi}}{V} \\ \delta &= \epsilon - \frac{1}{8\pi G} \frac{V_{,\phi}}{V}.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Como $G = (8\pi m_{\text{pl}}^2)^{-1}$, podemos reescrever as Eqs. 2.29 e 2.35 em função da massa de Planck:

$$\epsilon = \frac{m_{\text{pl}}^2}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2, \quad (2.36)$$

$$\delta = \epsilon - m_{\text{pl}}^2 \frac{V_{,\phi}}{V}. \quad (2.37)$$

Conforme discutido na Ref. [9], podemos construir observáveis que devem ser avaliados quando a escala de referência (*pivot*) sair do horizonte. São eles os chamados índice espectral escalar e a razão tensor-escalar, sendo, respectivamente

$$n_s = 1 - 4\epsilon - 2\delta, \quad (2.38)$$

$$r = 16\epsilon. \quad (2.39)$$

A escala de referência é uma escala representativa dentre as averiguadas pela CMB, e se refere a um ponto específico do domínio do campo escalar, denotado por ϕ_* . Este valor é fixado quando o modo fiducial 0.05Mpc^{-1} cruza o horizonte de Hubble [12]. É possível obter a relação entre o valor do campo, o número de e-folds e o tamanho do modo de referência a partir da seguinte equação

$$N = \int_a^{a_e} \frac{da'}{a'} = \int_{\phi_e}^{\phi} \frac{dt'}{d\phi} H d\phi = \int_{\phi_e}^{\phi} \frac{d\phi}{m_{\text{pl}} \sqrt{2\epsilon}}, \quad (2.40)$$

onde o limite de integração superior pode ser tanto ϕ_* ou ϕ_i (valor do campo no início da inflação), a depender do valor de N , que resulta do modelo inflacionário e detalhes do reaquecimento. Aqui, segundo [1], estaremos adotando $N_* = 60$ e $N_i = 70$.

Por fim, podemos escrever o espectro de potência, que será mais detalhado na próxima seção, em termos do potencial, avaliado no valor de referência, da seguinte forma [9]

$$P_R(\phi) = \frac{V(\phi)}{24\pi^2\epsilon}, \quad (2.41)$$

ou, equivalentemente, em função de k

$$P_\phi(k) = \frac{8\pi}{9k^3} \frac{H^2}{\epsilon m_{\text{pl}}^2} \Big|_{aH=k} \quad (2.42)$$

onde aqui são tomadas as equivalências $aH = k$ ou $-k\eta = 1$ ou $\phi = \phi_*$.

Apesar de termos construído toda a análise acima baseada num campo escalar, as condições necessárias para uma era inflacionária do universo são independentes disso. Desde que exista uma época finita em que ϵ e δ sejam menores que a unidade, um período inflacionário estará acontecendo independentemente da natureza do campo que o gera. No próximo capítulo, veremos quantitativamente como isso se dá para os casos de potenciais escalares monomiais e binomiais.

3 Predições Observacionais

O modelo padrão da cosmologia descreve as eras iniciais do nosso universo muito bem, porém algumas inconsistências eram encontradas, como o que chamamos de problema da *planicidade* e problema do *horizonte*, discutidos no Capítulo 2. Sendo assim, além da inflação se propor a solucionar, de maneira elegante e simples, essas questões com uma expansão acelerada do universo, a teoria também é capaz de descrever o que é observado no mapa da radiação cósmica de fundo, a principal constatação observacional do passado remoto do universo.

Nesse capítulo será discutido acerca de algumas predições observacionais, a radiação cósmica de fundo e códigos para estudar a inflação que apareceram com o avanço da tecnologia nas últimas décadas.

3.1 Radiação Cósmica de Fundo

A radiação cósmica de fundo, do inglês *cosmic microwave background* (CMB), foi detectada pela primeira vez por Arno A. Penzias e Robert W. Wilson em 1964, em New Jersey. A partir de uma antena de rádio de baixo nível de ruído, eles descobriram os primeiros indícios de um sinal sibilante de rádio, que atualmente acredita-se ser remanescente das eras primordiais de um universo quente e denso a mais de 10 bilhões de anos atrás, e que preenche todo o nosso universo nos dias de hoje. Ela nos proporciona uma visão do universo primitivo, como informações de sua composição, estrutura e evolução [10].

As primeiras observações sobre a distribuição espacial da CMB foram realizadas pelo satélite COBE (Cosmic Background Explorer), que nos proporcionou pela primeira vez uma estimativa das inhomogeneidades do universo em largas escalas. A partir desse marco para a cosmologia, nos foi confirmado o espectro de frequência da CMB como sendo um corpo negro com limites experimentais, e a sua temperatura como $T = 2,728 \pm 0,004K$ em todas as direções [1]. Já os últimos resultados nessa direção foram fornecidos pela colaboração ligada ao satélite Planck 2013, Planck 2015, Planck 2018, que em 2018 apresentou o último mapa de anisotropias de temperatura da radiação, como mostra a Figura 3. As regiões em azul são chamadas pontos frios *cold spots*, enquanto que as regiões em vermelho são os pontos quentes *hot spots*. Entre uma região quente e outra fria há uma variação de temperatura da ordem de 10^{-5} . Portanto, a distribuição da radiação é incrivelmente homogênea e isotrópica.

Após a recombinação, a radiação primordial emana pelo universo sem muitas dispersões, de forma que as variações na intensidade são pequenas, o que nos diz que o

universo era extremamente homogêneo, contrastando com a atualidade: uma distribuição de matéria irregular e não-homogênea. Além disso, a amplitude padrão das inomogeneidades é o que é exigido para explicar a formação de galáxias e estruturas em grande escala de um universo composto por matéria escura fria e matéria comum, assim como as inomogeneidades possuem propriedades estatísticas de acordo com o que é previsto pelos modelos inflacionários do universo, indicado pela função de autocorrelação de temperatura [5].

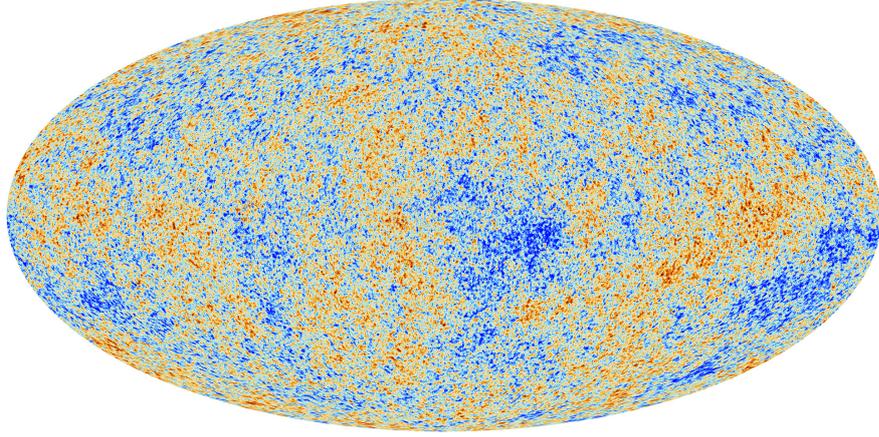


Figura 3 – Anisotropias de temperatura da CMB, conforme observadas pelo satélite Planck [2]. As regiões em azul são chamadas pontos frios, enquanto que as regiões em vermelho são os pontos quentes. Entre uma região quente e outra fria há uma variação de temperatura da ordem de 10^{-5} .

De acordo com [13], o que observamos é a temperatura da CMB $T(\hat{\mathbf{n}})$ ao longo da linha de visada $\hat{\mathbf{n}}$. Por se tratar de uma função escalar definida na esfera, esta pode ser decomposta a partir de harmônicos esféricos $Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$, como segue

$$T(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{lm} T_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}). \quad (3.1)$$

onde T_{lm} são as amplitudes de cada termo na expansão. Já o espectro de potência (transformada de Fourier da função de dois pontos) para flutuações estatisticamente isotrópicas é definido por

$$\langle T_{lm} T_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l, \quad (3.2)$$

que em um experimento perfeito pode ser estimado por

$$\hat{C}_l = \frac{1}{2l+1} \sum_m |T_{lm}|^2. \quad (3.3)$$

Sendo assim, a probabilidade do verdadeiro espectro de potência C_l é dada pela probabilidade \mathcal{L} , a partir destes estimadores. Por conveniência, definimos $\chi_{\text{eff}}^2 = -2 \log \mathcal{L}$. Então para perturbações gaussianas, temos

$$\chi_{\text{eff}}^2 = \sum_{l_{\min}}^{l_{\max}} (2l+1) \left(\frac{\hat{C}_l}{C_l} + \ln \left(\frac{C_l}{\hat{C}_l} \right) - 1 \right). \quad (3.4)$$

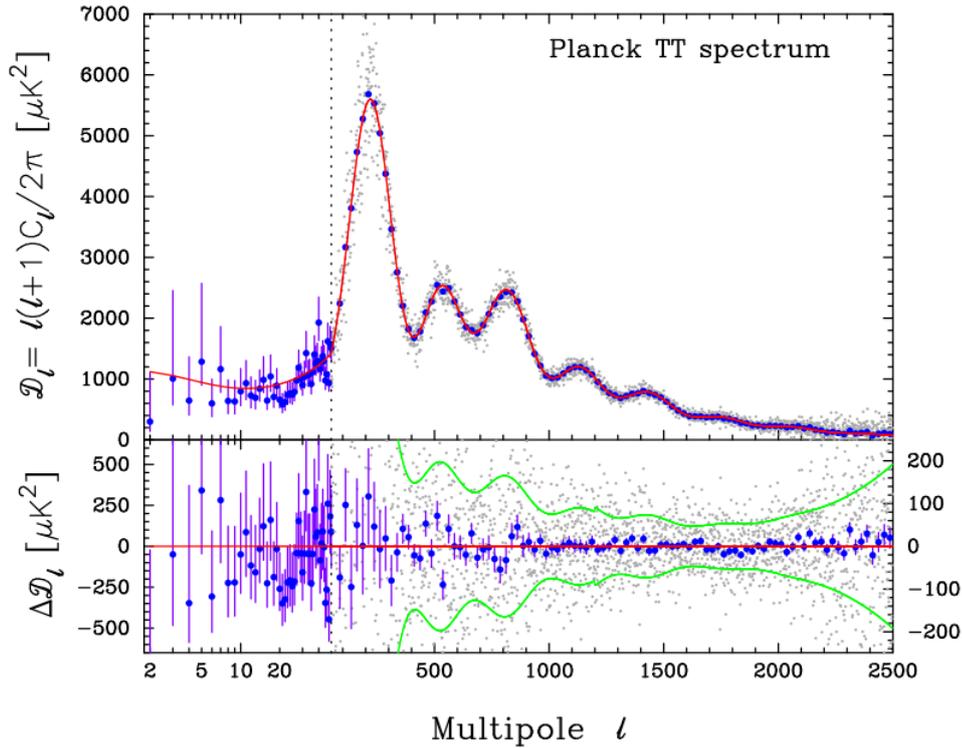


Figura 4 – Espectro de potência da temperatura das anisotropias da CMB, conforme medidas por Planck. [3]

3.2 Boltzmann Solver Codes

As equações teóricas apresentadas no Capítulo 1, como as equações de Friedmann, Einstein e Boltzmann, podem ser implementadas em códigos numéricos para derivar as previsões observacionais da teoria. Os códigos de Boltzmann que consideramos aqui resolvem as equações de Einstein e Boltzmann para o Modelo Cosmológico Padrão e fornecem previsões teóricas, entre outras coisas, para o espectro de temperatura da CMB. Um desses códigos muito usado é o CAMB (*Code for Anisotropies in the Microwave Background*) e para estudar a inflação pode-se usar uma modificação dele, chamada *ModeCode*, que resolve numericamente as equações de Einstein e Boltzmann também para calcular o espectro de perturbação inicial. A partir daí, o CAMB calcula o espectro de anisotropia da CMB para determinados valores dos parâmetros relevantes que descrevem o modelo.

O *ModeCode* é um código que proporciona uma avaliação numérica muito eficaz do espectro de perturbação inflacionária, mas evitando a aproximação de rolamento lento (*slow roll*), que caracteriza o período inflacionário. Sendo assim, dado um potencial de um modelo inflacionário específico $V(\phi)$, iremos calcular numericamente a curvatura inicial e o espectro de potência, pois assim teremos resultados numéricos exatos para potenciais inflacionários arbitrários. De acordo com a construção realizada em [14], começaremos revisitando o formalismo utilizado para a solução numérica das equações do *ModeCode*. A

partir da variável de Mukhanov invariante de calibre u , podemos descrever as perturbações escalares como sendo

$$u = -zR \quad (3.5)$$

onde $z \equiv \dot{\phi}/H$ e R é a perturbação da curvatura. As componentes de Fourier u_k obedecem a equação

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) u_k = 0, \quad (3.6)$$

onde k é o módulo do vetor de onda \mathbf{k} .

Como dito, o espectro de potência é definido a partir da função correlação de dois pontos, dado por

$$\langle R_{\vec{k}} R_{\vec{k}'}^* \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} P_R(k) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.7)$$

onde

$$P_R(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k}{z} \right|^2. \quad (3.8)$$

A Eq. 3.8 relaciona u_k e z , porém também podemos escrever $P_R(k)$ em termos de parâmetros mais interessantes observacionalmente, como A_s , n_s e α_s , que são, respectivamente, a amplitude das perturbações, o índice espectral e sua variação com respeito a k . Essa relação é dada por:

$$P_R(k) = A_s \left(\frac{k}{k_{pivot}} \right)^{n_s - 1 + \frac{1}{2} \alpha_s \ln(k/k_{pivot}) + \dots}, \quad (3.9)$$

onde k_{pivot} é a escala na qual o espectro de potência é normalizado.

O logaritmo do fator de escala é uma coordenada de tempo natural para soluções numéricas das equações dos modos na era inflacionária e, por isso, estaremos expressando as equações do fundo em termos de $\ln a$, já que a equação 3.6 depende da dinâmica do fundo através de z e suas derivadas. Adotaremos $d/d \ln a$ como sendo ponto, porém essa notação será utilizada somente nesse capítulo, por falta de uma notação melhor. Temos, então, por definição, que $H = d \ln a / dt$, e com isso, as equações de Einstein para \dot{H} e a equação de Klein-Gordon para $\dot{\phi}$ são dadas por:

$$\dot{H} = -\frac{M_{pl}^2}{2} \dot{\phi}^2 H, \quad (3.10)$$

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{\dot{H}}{H} + 3 \right) \dot{\phi} + \frac{1}{H^2} \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.11)$$

A escolha de variáveis independentes nos proporcionou $\dot{\phi} = z$. A partir disso, utilizando as equações 3.10 e 3.11 na equação 3.6, encontramos

$$\ddot{u}_k + \left(\frac{\dot{H}}{H} + 1 \right) \dot{u}_k + \left\{ \frac{k^2}{a^2 H^2} - \left[2 - 4 \frac{\dot{H}}{H} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} - 2 \left(\frac{\dot{H}}{H} \right)^2 - 5 \frac{\dot{H}}{H} - \frac{1}{H^2} \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right] \right\} u_k = 0. \quad (3.12)$$

No caso das perturbações tensoriais do tensor métrico, é possível encontrar uma equação de evolução para estas perturbações muito semelhante ao caso escalar dada pela Eq. 3.6, sendo dada por

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_k = 0, \quad (3.13)$$

a qual se torna, na variável temporal $\ln a$, a seguinte equação

$$\ddot{v}_k + \left(\frac{\dot{H}}{H} + 1 \right) \dot{v}_k + \left[\frac{k^2}{a^2 H^2} - \left(2 + \frac{\dot{H}}{H} \right) \right] v_k = 0. \quad (3.14)$$

O espectro de potência correspondente às perturbações tensoriais primordiais é dado por:

$$P_t(k) = \frac{4}{\pi^2} \frac{k^3}{M_{pl}^2} \left| \frac{v_k}{a} \right|^2. \quad (3.15)$$

3.3 Inflação *versus* CMB

De acordo com a referência [15], o caso mais simples de modelos inflacionários gerados por um campo escalar é o caso de um potencial monomial do tipo

$$V(\phi) = A m_{pl}^4 \left(\frac{\phi}{m_{pl}} \right)^n, \quad (3.16)$$

onde A é a amplitude adimensional do potencial. Essa classe de potenciais prevê em primeira ordem para os parâmetros do slow-roll as seguintes expressões

$$n_s - 1 \approx \frac{-n(n+2)m_{pl}^2}{\phi_*^2}, \quad (3.17)$$

$$r \approx \frac{8n^2 m_{pl}^2}{\phi_*^2}, \quad (3.18)$$

e

$$\phi_*^2 \approx \frac{nm_{pl}^2(4N_* + n)}{2}. \quad (3.19)$$

A Figura 5 retrata a razão tensor-escalar r em função do índice espectral escalar n_s , onde podemos notar que há uma certa preferência dos dados da CMB entre as potências menores ou maiores que 1, ou seja, potenciais côncavos ou convexos, respectivamente, dada pela reta preta contínua. Partindo do caso quadrático, que descreve um campo escalar massivo, e indo em direção a potências mais baixas, notamos que há uma inversão com respeito ao número de e-folds requerido para concordância com os dados. Em particular, vemos que para o Planck+WP+high-L, o potencial quadrático se encontra fora da região de melhor ajuste com 95% de confiança, para $N_* < 60$, enquanto que os potenciais com $n = 1$ ou $n = 2/3$ encontram-se na região 95% de confiança.

De fato, do comportamento qualitativo dos potenciais monomiais apresentados, vemos que quanto menor a potência do potencial monomial, menor o número de e-folds

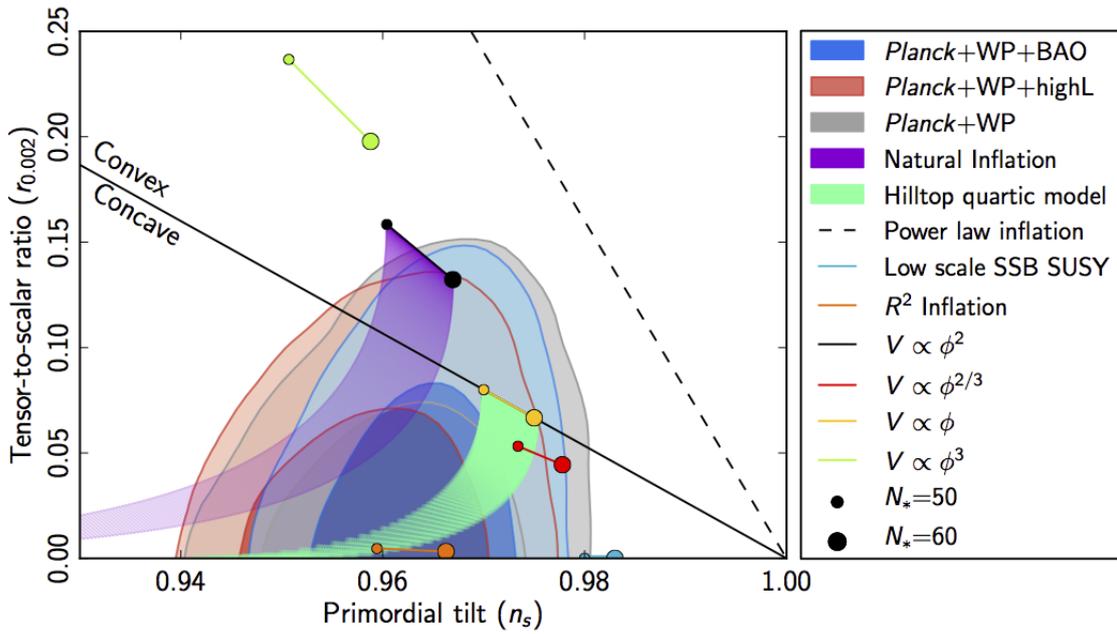


Figura 5 – Diagrama no plano n_s - $r_{0.002}$, apresentando os dados do Planck 2018 em contraste com as previsões teóricas de certos modelos inflacionários.

necessário durante o período inflacionário, havendo uma curva de corte dada pela reta preta tracejada. Entretanto, modelos inflacionários do tipo Starobinsky [8], R^2 -inflation, encontram-se ainda melhor posicionados nas regiões de confiança, contrariamente a modelos como o potencial monomial com $n = 3$, ou mesmo modelos supersimétricos com quebra espontânea de simetria

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 + \alpha_h \log \left(\frac{\phi}{m_{\text{pl}}} \right) + \dots \right]. \quad (3.20)$$

Diante disso, a proposta deste trabalho será iniciar uma investigação na direção de entender quão sensíveis são os parâmetros inflacionários frente a perturbações da forma funcional do potencial. Por exemplo, adicionando o novo monômio a um potencial monomial, o que pode ocorrer com os valores de n_s , r e ϕ_* previamente determinados? Vale ressaltar que vários detalhes com respeito ao regime de slow-roll devem ser revistos por conta da quebra de simetria gerada pelo novo termo. Portanto, a resposta não seria imediata para a questão acima. Todavia, antes de tentar respondê-la, iremos nos capítulos seguintes apresentar mais detalhes sobre a teoria inflacionária e os modelos regidos por um campo escalar com potenciais monomiais e binomiais.

4 Modelos Inflacionários regidos por campos escalares

Nesse capítulo, iremos analisar como nosso modelo inflacionário, regido por um campo escalar, se comportará de acordo com um potencial dado. Sendo assim, a análise será realizada para dois tipos de potenciais, um monomial e outro binomial, sendo este último com a condição de que a diferença entre as potências de cada monômio fosse igual a 1. Esta escolha tem seu devido interesse por quebrar a paridade do caso monomial, e possibilitar novos intervalos entre os valores inicial e final da inflação.

Foi considerado $m_{pl} = 1$ nos cálculos e plots do capítulo.

4.1 Potencial Monomial

Primeiro, assumimos um potencial dado por

$$V(\phi) = \lambda\phi^n, \quad (4.1)$$

onde $n \geq 0$ é um parâmetro livre e λ é a amplitude do potencial. Suas derivadas primeira e segunda são dadas por:

$$V_{,\phi} = n\lambda\phi^{n-1}, \quad (4.2)$$

$$V_{,,\phi} = (n-1)n\lambda\phi^{n-2}. \quad (4.3)$$

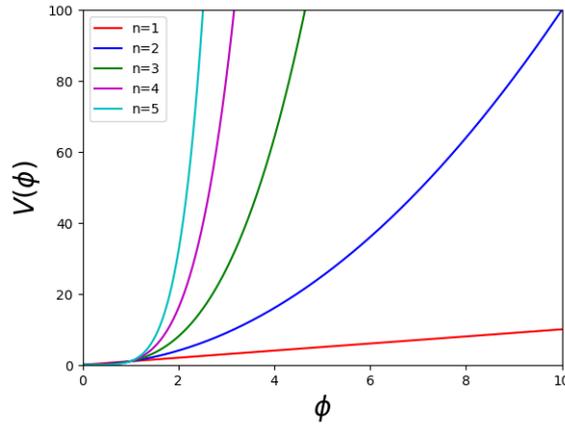
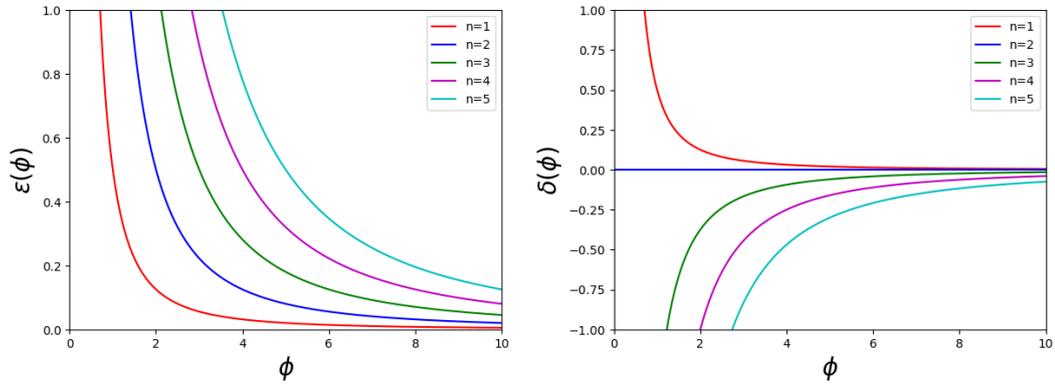
Na Fig. 6, é possível observar o comportamento desse potencial para diferentes valores de n , onde podemos perceber que conforme o valor de n aumenta, menos o potencial é apropriado para um regime de slow roll. As curvas em que $n = 1$ e 2 são as mais adequadas para o caso.

Para obter os parâmetro de slow roll para esse potencial, substituímos a Eq. 4.1 nas Eqs. 2.36 e 2.37, assim como as derivadas de V , obtendo:

$$\epsilon = \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{n\lambda\phi^{n-1}}{\lambda\phi^n} \right)^2 = \frac{n^2 m_{pl}^2}{2\phi^2}, \quad (4.4)$$

$$\delta = \epsilon - m_{pl}^2 \left(\frac{(n-1)n\lambda\phi^{n-2}}{\lambda\phi^n} \right) = \frac{m_{pl}^2 n^2}{2\phi^2} - \frac{(n-1)nm_{pl}^2}{\phi^2} = \frac{-(n-2)nm_{pl}^2}{2\phi^2}. \quad (4.5)$$

Na Fig. 7, podemos analisar o comportamento desses parâmetros de acordo com esse potencial para diferentes valores de n . Para o caso do δ , estaremos considerando seu módulo, onde em ambos os gráficos, podemos analisar o momento em que $\epsilon, \delta = 1$, que


 Figura 6 – Potencial monomial para diferentes valores de n .

 Figura 7 – Parâmetros do Slow roll do potencial monomial para diferentes valores de n .

significa o fim da inflação. Algebricamente, podemos obter da Eq. 4.4 a expressão para o campo no momento em que a inflação termina

$$1 = \frac{n^2 m_{pl}^2}{2\phi_e^2}, \quad \longrightarrow \quad \phi_e^2 = \frac{n^2 m_{pl}^2}{2}. \quad (4.6)$$

Já o valor do campo escalar no momento em que o modo fiducial cruza o horizonte e o valor do campo no início da inflação, podem ser obtidos usando a expressão do número de e-folds, dada pela equação 2.40. Substituindo 4.4 nessa integral, obtemos

$$\begin{aligned} N &= \int_{\phi_e}^{\phi} \frac{d\phi}{m_{pl}} \sqrt{\frac{2\phi^2}{2m_{pl}^2 n^2}} \\ &= \frac{1}{m_{pl}^2 n} \int_{\phi_e}^{\phi} \phi d\phi \\ &= \frac{1}{m_{pl}^2 n} \left[\frac{\phi^2}{2} \right]_{\phi_e}^{\phi}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Substituindo a Eq. 4.6, obtemos o ϕ do cruzamento considerando $N = 60$:

$$60 = \frac{1}{m_{pl}^2 n} \left[\frac{\phi_*^2}{2} - \frac{m_{pl}^2 n^2}{4} \right]$$

$$\begin{aligned}
60 &= \frac{1}{2m_{pl}^2 n} \phi_*^2 - \frac{1}{m_{pl}^2 n} \frac{m_{pl}^2 n^2}{4} \\
60 + \frac{n}{4} &= \frac{1}{2m_{pl}^2 n} \phi_*^2 \\
\phi_*^2 &= 120m_{pl}^2 n + \frac{m_{pl}^2 n^2}{2}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

A Fig. 8 retrata o comportamento do campo no momento do seu cruzamento no horizonte para diferentes valores de n . Conforme o valor do parâmetro livre aumenta, maior será também o valor do campo.

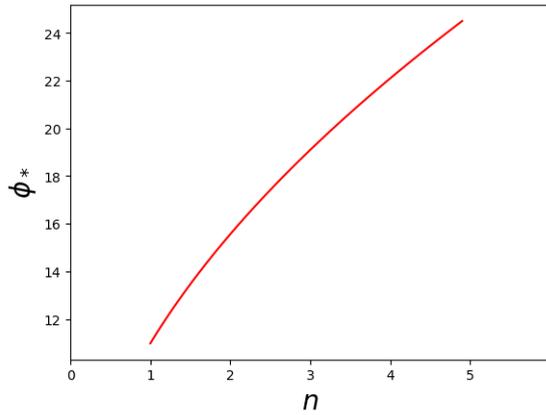


Figura 8 – Campo escalar do cruzamento do horizonte em função do parâmetro livre n .

Para o valor inicial de ϕ utilizaremos $N = 70$. Sendo assim, a partir também da Eq. 4.7, temos

$$\begin{aligned}
70 &= \frac{1}{m_{pl}^2 n} \left[\frac{\phi_i^2}{2} - \frac{m_{pl}^2 n^2}{4} \right] \\
70 &= \frac{1}{2m_{pl}^2 n} \phi_i^2 - \frac{1}{m_{pl}^2 n} \frac{m_{pl}^2 n^2}{4} \\
70 + \frac{n}{4} &= \frac{1}{2m_{pl}^2 n} \phi_i^2 \\
\phi_i^2 &= 140m_{pl}^2 n + \frac{m_{pl}^2 n^2}{2}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Para obtermos λ , substituímos as Eqs. 2.36 e 4.1 na equação do espectro de potência 2.41, obtendo

$$\lambda(\phi) = \frac{P_R 12\pi^2 n^2 m_{pl}^2}{\phi^{2+n}} \tag{4.10}$$

Considerando o valor de referência $P_R = 2.09 \times 10^{-9}$ [9], com isso calculamos λ em termos de ϕ_* , ou seja,

$$\lambda(\phi_*) = 25,08 \times 10^{-9} \pi^2 n^2 m_{pl}^2 \phi_*^{-2-n} \tag{4.11}$$

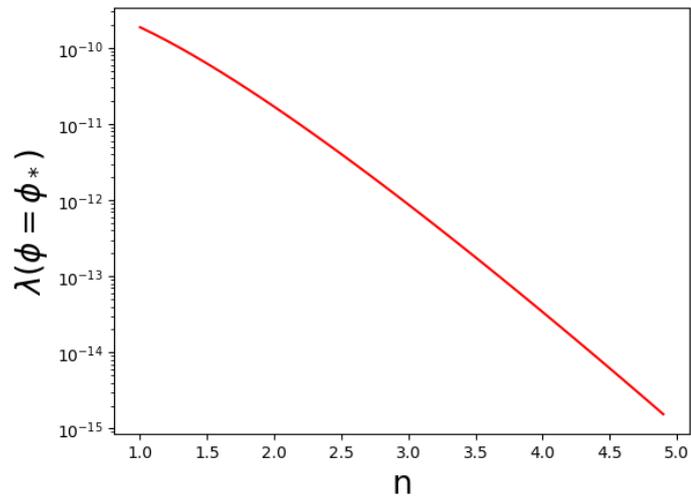


Figura 9 – Amplitude do potencial λ em função do parâmetro livre n , para $\phi = \phi_*$, ou seja, o campo escalar no cruzamento do horizonte.

Na Fig. 9, é retratada a amplitude do potencial ϕ_* , ou seja, no momento em que o campo escalar cruza o horizonte, em função de n . É possível verificar que a amplitude do potencial λ vai diminuindo conforme o parâmetro livre n aumenta seu valor.

Por fim, a Fig. 10 foi realizada pelo CAMB, e trata do espectro de potência do caso do potencial monomial, onde foram inseridas as principais equações obtidas nessa seção no código.

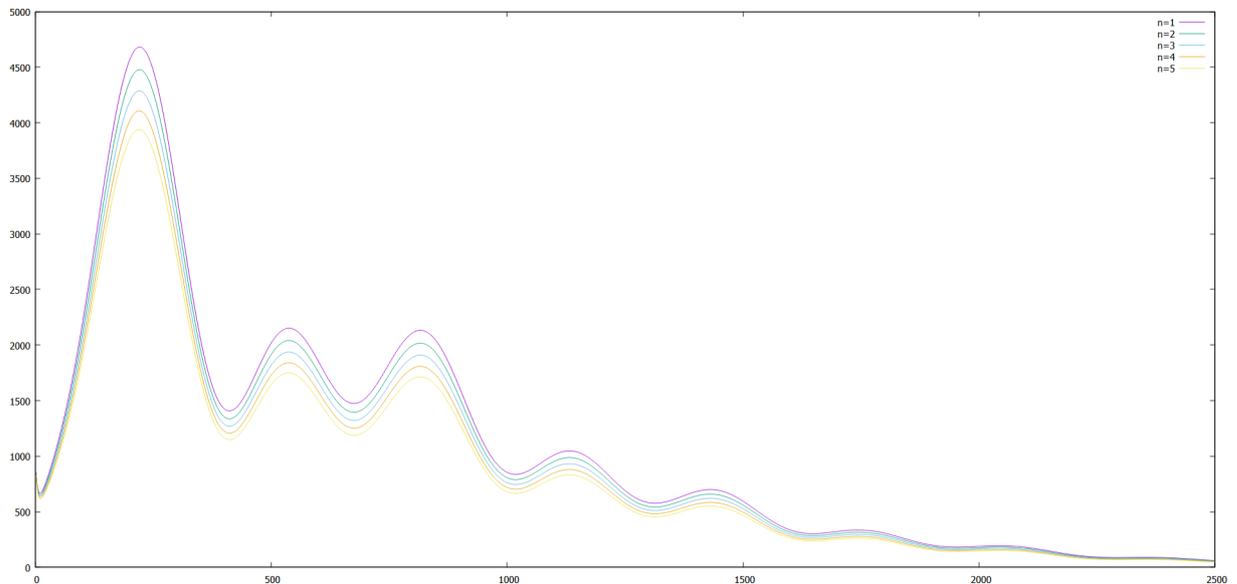


Figura 10 – Espectro de potência do caso monomial.

4.2 Potencial Binomial

Consideremos agora um potencial binomial do tipo

$$V(\phi) = \alpha\phi^n + \beta\phi^p, \quad (4.12)$$

onde $p > n$. O intuito nesse caso é pensar nesse potencial como sendo o caso monomial, porém com uma pequena modificação, sendo sempre possível resgatar o caso trabalhado na seção anterior. Suas derivadas primeira e segunda são dadas por

$$V'(\phi) = n\alpha\phi^{n-1} + p\beta\phi^{p-1}, \quad (4.13)$$

$$V''(\phi) = (n-1)n\alpha\phi^{n-2} + (p-1)p\beta\phi^{p-2}. \quad (4.14)$$

Da mesma forma do potencial anterior, podemos calcular os parâmetros de slow-roll para esse potencial a partir de suas derivadas e das Eqs. 2.36 e 2.37, obtendo

$$\epsilon = \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{n\alpha\phi^{n-1} + p\beta\phi^{p-1}}{\alpha\phi^n + \beta\phi^p} \right)^2, \quad (4.15)$$

e

$$\delta = \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{n\alpha\phi^{n-1} + p\beta\phi^{p-1}}{\alpha\phi^n + \beta\phi^p} \right)^2 - m_{pl}^2 \frac{(n-1)n\alpha\phi^{n-2} + (p-1)p\beta\phi^{p-2}}{\alpha\phi^n + \beta\phi^p}. \quad (4.16)$$

A partir daqui, consideraremos $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$, para facilitar os cálculos. Fazendo $\epsilon = 1$, obtemos:

$$1 = \frac{m_{pl}^2}{2} \frac{(n\phi^{n-1} + p\gamma\phi^{p-1})^2}{(\phi^n + \gamma\phi^p)^2} = \frac{m_{pl}^2}{2} \frac{(n\phi^{-1} + p\gamma\phi^{p-n-1})^2}{(1 + \gamma\phi^{p-n})^2} = \frac{m_{pl}^2}{2\phi^2} \frac{(n + p\gamma\phi^{p-n})^2}{(1 + \gamma\phi^{p-n})^2}. \quad (4.17)$$

Esta equação resulta num polinômio que não é possível de se resolver para p e n arbitrários.

A equação para o número de e-fold desse potencial segue o mesmo princípio. A partir da Eq. 2.40, encontramos

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{m_{pl}} \int_{\phi_e}^{\phi} \frac{1}{\sqrt{2 \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{n\alpha\phi^{n-1} + p\beta\phi^{p-1}}{\alpha\phi^n + \beta\phi^p} \right)^2}} d\phi \\ &= \frac{1}{m_{pl}^2} \int_{\phi_e}^{\phi} \frac{d\phi}{\left| \frac{n\alpha\phi^{n-1} + p\beta\phi^{p-1}}{\alpha\phi^n + \beta\phi^p} \right|} \\ &= \frac{1}{m_{pl}} \int_{\phi_e}^{\phi} \left| \frac{\alpha\phi^n + \beta\phi^p}{n\alpha\phi^{n-1} + p\beta\phi^{p-1}} \right| d\phi \\ &= \frac{1}{m_{pl}} \int_{\phi_e}^{\phi} \left| \frac{1 + \gamma\phi^{p-n}}{n + p\gamma\phi^{p-n}} \right| \phi d\phi. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Por fim, a partir da equação do espectro de potência 2.41, substituímos 4.12 e 4.15 e obtemos

$$\begin{aligned}
 P(r) &= \frac{\alpha\phi^n + \beta\phi^p}{24\pi^2 \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{n\alpha\phi^{n-1} + p\beta\phi^{p-1}}{\alpha\phi^n + \beta\phi^p} \right)^2} \\
 &= \frac{\alpha\phi^n(1 + \gamma\phi^{p-n})}{24\pi^2 \frac{m_{pl}^2}{2\phi^2} \left(\frac{n+p\gamma\phi^{p-n}}{1+\gamma\phi^{p-n}} \right)^2} \\
 &= \frac{2\phi^{n+2}\alpha(1 + \gamma\phi^{p-n})(1 + \gamma\phi^{p-n})^2}{24\pi^2 m_{pl}^2 (n + p\gamma\phi^{p-n})^2} \\
 &= \frac{\phi^{n+2}\alpha(1 + \gamma\phi^{p-n})(1 + \gamma\phi^{p-n})^2}{12\pi^2 m_{pl}^2 (n + p\gamma\phi^{p-n})^2}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

4.3 Considerando $p - n = 1$

A fim de facilitar os cálculos em relação ao potencial binomial, iremos considerar o caso específico em que $p - n = 1$. Com isso, a forma simplificada do potencial 4.12 é dada por:

$$\frac{V(\phi)}{\alpha} = \phi^n + \gamma\phi^{n+1}. \tag{4.20}$$

O comportamento desse potencial podemos observar na Fig. 11, onde foi considerado três valores para a razão γ : 0,01, 0,05 e 0,1, que são representados na figura por diferentes linhas tracejadas. Para cada valor de n , foram realizadas curvas com os três valores de γ . Outrossim ao potencial monomial, conforme o valor de n aumenta, menos o potencial se torna adequado para um regime de slow roll, e o mesmo vale para γ , já que as curvas se tornam mais inclinadas a medida em que seu valor aumenta.

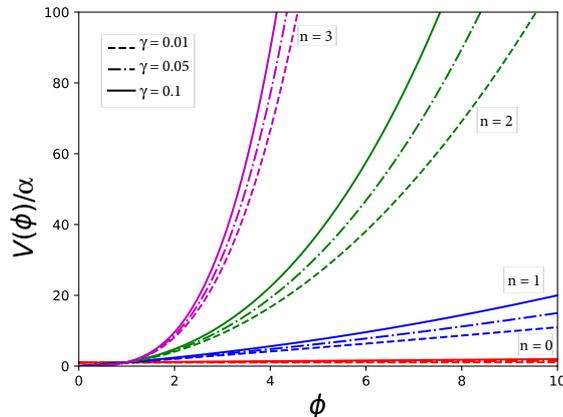


Figura 11 – Potencial binomial, considerando $n = 0$ (em vermelho), $n = 1$ (em azul), $n = 2$ (em verde) e $n = 3$ (em magenta). Também são considerados três valores de γ , como indicados na legenda.

As equações de slow roll 4.15 e 4.16 simplificadas adquirirão a seguinte forma:

$$\epsilon = \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{n\phi^{n-1} + (n+1)\gamma\phi^n}{\phi^n + \gamma\phi^{n+1}} \right)^2 \quad (4.21)$$

$$\delta = \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{n\phi^{n-1} + (n+1)\gamma\phi^n}{\phi^n + \gamma\phi^{n+1}} \right)^2 - \frac{m_{pl}^2}{8\pi} \left(\frac{n(n-1)\phi^{n-2} + n(n+1)\gamma\phi^{n-1}}{\phi^n + \gamma\phi^{n+1}} \right)^2 \quad (4.22)$$

Como γ é considerado um parâmetro pequeno, expandimos as equações acima em série de potências e tomamos a primeira ordem em γ , obtendo

$$\epsilon = \frac{n^2}{2\phi^2} + \frac{n}{\phi}\gamma \quad (4.23)$$

$$\delta = -\frac{(1-2n+n^2-4\pi\phi^2)n^2}{8\pi\phi^4} + \left(\frac{n}{\phi} + \frac{n^2-n^3}{2\pi\phi^3} \right) \gamma \quad (4.24)$$

Os gráficos desses parâmetros para esse tipo de potencial são dados pela Fig. 12, em que nesse caso ϵ será analisado em módulo. Igualmente ao gráfico anterior, temos três valores para γ , para diferentes valores de n . Nesse caso, também podemos analisar o momento em que as curvas alcançam o 1, que é quando a inflação termina, e como o valor do parâmetro n influencia nisso, além do valor de γ nesse caso.

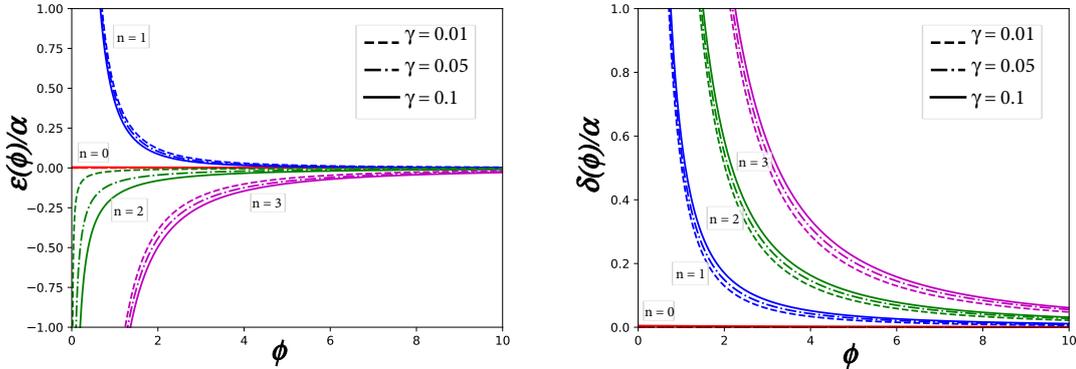


Figura 12 – Parâmetros de slow roll do potencial binomial, considerando $n = 0$ (em vermelho), $n = 1$ (em azul), $n = 2$ (em verde) e $n = 3$ (em magenta). Também são considerados três valores de γ , como indicado na legenda.

Para encontrar ϕ_e , seguimos da Eq. 4.17 com a condição adotada ($p - n = 1$):

$$\begin{aligned} m_{pl}^2(n^2 + 2np\gamma\phi^{p-n} + p^2\gamma^2\phi^{2(p-n)}) &= 2\phi^2(1 + 2\gamma\phi^{p-n} + \gamma^2\phi^{2(p-n)}) \\ \longrightarrow m_{pl}^2(n^2 + 2np\gamma\phi + p^2\gamma^2\phi^2) &= 2\phi^2(1 + 2\gamma\phi + \gamma^2\phi^2) \\ \longrightarrow 2\gamma^2\phi^4 + 4\gamma\phi^3 + (2 - m_{pl}^2p^2\gamma^2)\phi^2 - 2m_{pl}^2np\gamma\phi - n^2m_{pl}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

O polinômio 4.25 foi resolvido pelo software Maple e expandido em série em γ até primeira ordem. Sendo assim, as possíveis soluções para ϕ_e são dadas por:

$$\phi_e^{(1)} = -\frac{1}{\gamma} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{n}{2}\gamma \quad (4.26)$$

$$\phi_e^{(2)} = \frac{\sqrt{2}n}{2} + \frac{n}{2}\gamma \quad (4.27)$$

$$\phi_e^{(3)} = -\frac{1}{\gamma} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{n}{2}\gamma \quad (4.28)$$

$$\phi_e^{(4)} = -\frac{\sqrt{2}n}{2} + \frac{n}{2}\gamma \quad (4.29)$$

Analisando estas soluções para ϕ_e , é possível concluir que apenas as Eqs. 4.27 e 4.29 são fisicamente aceitáveis, pois as Eqs. 4.26 e 4.28 divergem quando $\gamma \rightarrow 0$, não sendo possível retomar o caso monomial. Sendo assim, dentre as duas opções, estaremos utilizando $\phi_e^{(2)}$, deixando para trabalhos futuros a análise com a solução $\phi_e^{(4)}$.

Algo análogo ao que ocorreu para ϕ_e irá ocorrer para ϕ_* e ϕ_i . Assim, da Eq. 4.18, obtemos que

$$N = \frac{1}{m_{pl}} \int_{\phi_e}^{\phi} \left| \frac{1 + \gamma\phi}{a + b\gamma\phi} \right| \phi d\phi \quad (4.30)$$

Considerando γ pequeno, podemos aproximar a integral para

$$\begin{aligned} N &\approx \frac{1}{m_{pl}^2} \int (1 + \gamma\phi)(a - b\gamma\phi) \phi d\phi \\ &= \frac{1}{m_{pl}^2} \int [a\phi + a\gamma\phi^2 - b\gamma\phi^2] d\phi \\ &= \frac{1}{m_{pl}^2} \left[\phi^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{\gamma}{3}\phi \right) \right] \Big|_{\phi_e}^{\phi_{*,i}} \\ &= \frac{1}{m_{pl}^2} \left[\phi_{*,i}^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{\gamma}{3}\phi_{*,i} \right) - \phi_e^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{\gamma}{3}\phi_e \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sendo assim, substituindo $\phi_e^{(2)}$ e fazendo $N = 60$, obtemos as seguintes soluções para ϕ_* :

$$\begin{aligned} \phi_*^{(1)} &= -\frac{1}{6} \sqrt{n} \sqrt{1440 + 6n} \sqrt{3} \\ &+ \left(-\frac{1}{18} \frac{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{1440 + 6n} \sqrt{2} \sqrt{3}}{240 + n} + \frac{1}{6} \frac{n^2}{240 + n} + \frac{80n}{240 + n} + \frac{9600}{240 + n} \right) \gamma, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\phi_*^{(2)} = \frac{3n}{2\gamma} + \left(-80 - \frac{n}{3} \right) \gamma, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \phi_*^{(3)} &= \frac{1}{6} \sqrt{n} \sqrt{1440 + 6n} \sqrt{3} \\ &+ \left(\frac{1}{18} \frac{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{1440 + 6n} \sqrt{2} \sqrt{3}}{240 + n} + \frac{1}{6} \frac{n^2}{240 + n} + \frac{80n}{240 + n} + \frac{9600}{240 + n} \right) \gamma. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Dentre as possíveis soluções, descartamos $\phi_*^{(2)}$, por não ser fisicamente aceitável. Sendo assim, daremos preferência trabalhar com o $\phi_*^{(3)}$. Note que é possível recuperar o caso monomial para $\phi_*^{(3)}$ quando $\gamma = 0$, considerando $n > 0$.

Realizando o mesmo procedimento, porém para $N = 70$, obtemos as soluções para ϕ_i :

$$\phi_i^{(1)} = -\frac{1}{6}\sqrt{n}\sqrt{1680 + 6n}\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{18} \frac{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1680 + 6n}\sqrt{2}\sqrt{3}}{280 + n} + \frac{1}{6} \frac{n^2}{280 + n} + \frac{280}{3} \frac{n}{280 + n} + \frac{39200}{3(280 + n)} \right) \gamma, \quad (4.35)$$

$$\phi_i^{(2)} = \frac{3n}{2\gamma} + \left(-\frac{280}{3} - \frac{n}{3} \right) \gamma, \quad (4.36)$$

$$\phi_i^{(3)} = \frac{1}{6}\sqrt{n}\sqrt{1680 + 6n}\sqrt{3} + \left(\frac{1}{18} \frac{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1680 + 6n}\sqrt{2}\sqrt{3}}{280 + n} + \frac{1}{6} \frac{n^2}{280 + n} + \frac{280}{3} \frac{n}{280 + n} + \frac{39200}{3(280 + n)} \right) \gamma \quad (4.37)$$

O índice espectral escalar e a razão tensor-escalar, dadas pelas Eqs. 2.38 e 2.39, podem ser escritas em suas formas simplificadas, obtendo:

$$n_s = 1 - \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{n\phi^{n-1} + (n+1)\gamma\phi^n}{\phi^n + \gamma\phi^{n+1}} \right)^2 + \frac{m_{pl}^2}{4\pi} \left(\frac{n(n-1)\phi^{n-2} + n(n+1)\gamma\phi^{n-1}}{\phi^n + \gamma\phi^{n+1}} \right)^2, \quad (4.38)$$

e

$$r = 8m_{pl}^2 \left(\frac{n\phi^{n-1} + (n+1)\gamma\phi^n}{\phi^n + \gamma\phi^{n+1}} \right)^2. \quad (4.39)$$

Novamente, expandindo em série de potências até primeira ordem em γ , obtemos

$$n_s = \left(1 - \frac{n^2}{2\phi^2} + \frac{(n-1)^2 n^2}{4\pi\phi^4} \right) + \left(-\frac{n}{\phi} + \frac{n^3 - n^2}{\pi\phi^3} \right) \gamma \quad (4.40)$$

$$r = \frac{8n^2}{\phi^2} + \frac{16n}{\phi} \gamma \quad (4.41)$$

A Fig. 13 retrata esses parâmetros para diferentes valores de n em função de γ .

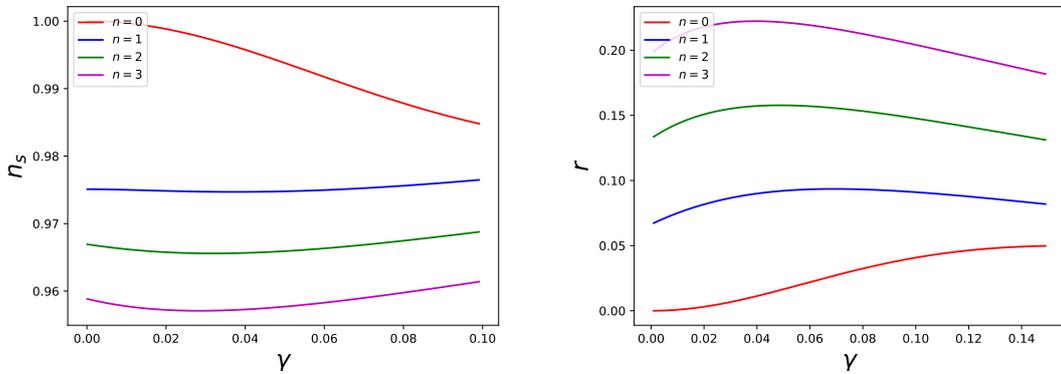


Figura 13 – Parâmetros observacionais n_s e r do potencial binomial.

Por fim, podemos calcular a relação entre γ e n em ϕ_* utilizando a Eq. 2.41. Logo,

$$P_R = \frac{\phi_*^{2+n} \alpha (1 + \gamma\phi_*)^3}{12\pi^2 (n + (n+1)\gamma\phi_*)^2} \quad (4.42)$$

É possível colocar em evidência o espectro de potência do caso monomial, e assim achar uma relação entre γ e n através da razão dos espectros do caso binomial e monomial. Ou seja,

$$P_R = \frac{\phi_*^{2+n} \alpha}{12\pi^2 n^2} \frac{(1 + \gamma\phi_*)^3}{\left(1 + \frac{n+1}{n} \gamma\phi_*\right)^2} \quad (4.43)$$

Em primeira ordem em γ , temos

$$\frac{P_R}{P_{R,mon}} = (1 + 3\gamma\phi_*) \left(1 - \frac{2(n+1)}{n} \gamma\phi_*\right) \quad (4.44)$$

$$= 1 + \left(3 - \frac{2(n+1)}{n}\right) \gamma\phi_* \quad (4.45)$$

$$= 1 + \frac{(n-2)}{n} \gamma\phi_*, \quad (4.46)$$

ou, equivalentemente,

$$\gamma = \frac{n}{(n-2)\phi_*} \left(\frac{P_R}{P_{R,mon}} - 1\right). \quad (4.47)$$

A Fig. 14 representa essa relação, onde é possível notar que partindo do caso monomial $\gamma = 0$, para cada valor de n os espectros monomial e binomial se afastam em taxas distintas dependendo do valor de n , exceto para $n = 2$ que permanece inalterado.

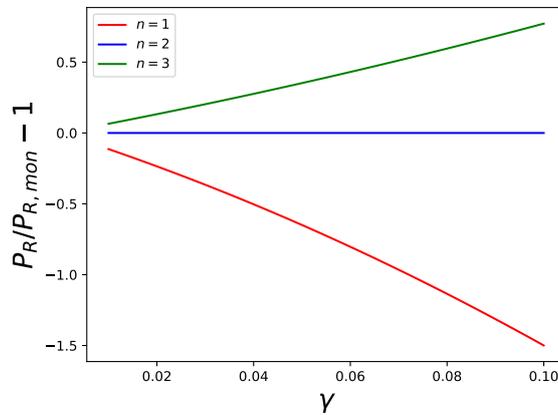


Figura 14 – Relação entre a razão dos espectros de potência do caso binomial e monomial em função de γ , para dados valores de n .

5 Conclusão

Nesta dissertação, foi investigado o comportamento de modelos inflacionários regidos por campos escalares com um potencial polinomial, em particular, os casos monomial e binomial. Para isso, foram realizados gráficos do comportamento de cada potencial e de vários parâmetros inflacionários, como ϵ , δ , n_s , r , entre outros, através da linguagem de programação Python e de cálculos analíticos.

Na análise de um potencia do tipo monomial, pode-se perceber que para que o regime de slow roll seja apropriado, o valor que a potência n adotar irá influenciar no resultado, ou seja, quanto maior este valor, menos o potencial se torna adequado para um regime de slow roll. O mesmo é válido para os parâmetros de slow roll, onde os valores mais apropriados para o parâmetro livre são as potências abaixo de 2, com exceção do parâmetro δ , que irá se anular para $n = 2$. Além disso, foi possível obter a amplitude do potencial no momento em que o campo escalar cruza o horizonte, de forma que conforme o parâmetro livre aumenta seu valor, o potencial vai perdendo sua importância, além de ser possível visualizar que a amplitude vai decaindo com a potência de n .

Já a análise de um potencial do tipo binomial foi um pouco mais rebuscada, por conta da adição de um segundo termo no potencial, o que deixaram as contas mais complexas, caindo em polinômios de terceiro e quarto graus. Porém, com a ajuda de softwares matemáticos foi possível a análise desse caso, em que algumas simplificações foram necessárias, como considerar γ pequeno e a diferença entre as potências $p - n = 1$. Com isso, foi possível visualizar os melhores parâmetros para o potencial ser apropriado para um regime de slow roll, além de ter o objetivo de sempre ser possível retornar ao caso monomial.

Para trabalhos futuros, temos como objetivo estudar mais a fundo o potencial binomial, aumentando a diferença das potências, como por exemplo, $p - n = 2$. Além disso, pretendemos trabalhar com outras formas do potencial, que possam ser deduzidas a partir de primeiros princípios, ou teorias com acoplamento não-mínimo entre a gravitação e o campo escalar.

Referências

- [1] Andrew R Liddle and David H Lyth. *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge University Press, 2000. [7](#), [9](#), [10](#), [11](#), [14](#), [15](#)
- [2] Planck Collaboration. Planck 2018 results. iv. diffuse component separation. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A4, 2020. [7](#), [16](#)
- [3] Planck Collaboration. Planck 2013 results. xvi. cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics*, 571:A16, 2014. [7](#), [17](#)
- [4] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003. [1](#), [3](#), [6](#), [8](#), [12](#)
- [5] V. Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge University Press, 2005. [1](#), [16](#)
- [6] Oliver Piattella. *Lecture notes in cosmology*. Springer, 2018. [1](#), [7](#), [8](#), [11](#)
- [7] Alan H Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23(2):347, 1981. [7](#), [9](#)
- [8] A. A. Starobinskiĭ. Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 30:682, December 1979. [7](#), [20](#)
- [9] Daniel Baumann and Liam McAllister. *Inflation and string theory*. Cambridge University Press, 2015. [7](#), [14](#), [23](#)
- [10] Alan H. Guth. *O universo inflacionário*. Editora Campus Ltda., 1997. [7](#), [8](#), [9](#), [15](#)
- [11] Mário Novello, Nelson Pinto Neto, and Santiago Esteban Perez Bergliaffa. *Programa mínimo de cosmologia*. Jauá Editora, 2010. [7](#)
- [12] Planck Collaboration. Planck 2018 results. X. Constraints on inflation. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A10, September 2020. [14](#)
- [13] Cullan Howlett, Antony Lewis, Alex Hall, and Anthony Challinor. Cmb power spectrum parameter degeneracies in the era of precision cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(04):027, 2012. [16](#)
- [14] Michael J Mortonson, Hiranya V Peiris, and Richard Easther. Bayesian analysis of inflation: parameter estimation for single field models. *Physical Review D*, 83(4):043505, 2011. [17](#)

-
- [15] Planck Collaboration. Planck 2013 results. xxii. constraints on inflation. *Astronomy & Astrophysics*, 571:A22, 2014. [19](#)