

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Metodologia para Obtenção de Rotores  
Radiais Otimizados nos Modos Bomba e  
Turbina Utilizando Critérios de  
Carregamento Hidrodinâmico**

**Lady Fajardo Castellanos**

**Itajubá, Março de 2013**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**Lady Fajardo Castellanos**

**Metodologia para Obtenção de Rotores  
Radiais Otimizados nos Modos Bomba e  
Turbina Utilizando Critérios de  
Carregamento Hidrodinâmico**

**Dissertação submetida ao Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica como parte  
dos requisitos para obtenção do Título de Mestre  
em Ciências em Engenharia Mecânica.**

**Área de Concentração:** Dinâmica dos Fluidos e Máquinas de  
Fluxo

**Orientador:** Prof. Dr. Waldir de Oliveira

**Março de 2013**

**Itajubá - MG**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá  
Bibliotecária Jacqueline Rodrigues de Oliveira Balducci- CRB\_6/1698

F175m

Fajardo Castellanos, Lady

Metodologia para obtenção de rotores radiais otimizados nos modos bomba e turbina utilizando critérios de carregamento hidrodinâmico. / Lady Fajardo Castellanos. – Itajubá, (MG) : [s.n.], 2013.

226 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Waldir de Oliveira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Turbomáquina. 2. Bomba-Turbina. 3. Rotor Radial. 4. Escamento Potencial. 5. Critério do Número de Richardson Máximo. 6. Número Ótimo de Pás. I. Oliveira, Waldir de, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**  
**EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Lady Fajardo Castellanos**

**Metodologia para Obtenção de Rotores  
Radiais Otimizados nos Modos Bomba e  
Turbina Utilizando Critérios de  
Carregamento Hidrodinâmico**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 15 de março de 2013, conferindo à autora o título de **Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.**

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Waldir de Oliveira (Orientador)

Prof. Dr. Ramiro G. Ramirez Camacho (Co-orientador)

Prof. Dr. Cleverson Bringhenti

Prof. Dr. Genésio José Menon

**Itajubá - MG**

**2013**

## **Dedicatória**

À minha querida mãe, Luz Myriam Castellanos Buitrago, e ao meu querido pai, Misael Fajardo Castellanos.

## Agradecimentos

Aos meus pais, Luz Myriam e Misael, pelo carinho, dedicação e sacrifícios que proporcionaram a minha formação e educação. Embora distantes, sempre estiveram do meu lado, me apoiando e me incentivando em todos os momentos, para que eu pudesse concluir mais esta etapa da minha vida. Meu eterno agradecimento.

A toda minha família, pelo apoio incessante em todos os momentos que sempre serviu de motivação para que eu pudesse continuar esta jornada com satisfação e alegria por todos os dias. Sou grata a Deus por ter esta família maravilhosa.

Ao prof. Waldir de Oliveira por pensar em fazer as coisas da melhor forma possível, exigindo dos seus orientados o maior esforço. Dessa forma, ele consegue que a gente atinja o objetivo traçado, nesse caso, a conclusão do trabalho de Dissertação de Mestrado. Ele também nos mostra que na vida o importante é fazer o que a gente gosta e o que realmente quer, para assim atingir o melhor resultado possível. Sou muito grata ao meu orientador de mestrado.

Ao prof. Ramiro Gustavo Ramirez Camacho, pelo apoio incondicional e pelo constante compromisso com o meu trabalho de Dissertação de Mestrado. Sua contribuição e sugestões foram bastante valiosas.

Aos meus colegas de mestrado pela troca de conhecimento, pelo companheirismo e pela amizade em todos os momentos, especialmente às minhas amigas Angie Lizeth Espinosa Sarmiento e Yina Faizully Quintero Gamboa.

Aos professores da UNIFEI, em particular, aos do Instituto de Engenharia Mecânica – IEM, que muito contribuíram para a minha formação acadêmica que resultou no Duplo Diploma de Graduação em convênio com a Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Bogotá – Colômbia e também no título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica. Em especial, agradeço ao prof. Genésio José Menon pelas palavras de incentivo e, principalmente, por amenizar os árduos tempos de trabalho com as suas fantásticas piadinhas na sala de cafezinho do IEM.

Aos funcionários da UNIFEI, particularmente, aos do Instituto de Engenharia Mecânica – IEM, em especial, ao Wanderlei Carlos Martins, por a sua amizade e por prestar, com a maior boa vontade, os serviços de secretaria do IEM.

À UNIFEI, pelo seu ensino de excelência e por propiciar todos os meios para a realização deste trabalho de Dissertação de Mestrado.

À CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro concedido, por meio do Programa de Bolsas de Estudo.

A Deus, por estar sempre do meu lado e ter me dado a oportunidade de realizar esta etapa importante da minha vida aqui no Brasil, um país fantástico, onde tive o imenso prazer de conhecer pessoas maravilhosas, e também por ter me posto algumas dificuldades as quais me deram uma perspectiva diferente da vida.

## Resumo

**FAJARDO CASTELLANOS, L. (2013)**, *Metodologia para Obtenção de Rotores Radiais Otimizados nos Modos Bomba e Turbina Utilizando Critérios de Carregamento Hidrodinâmico*, Itajubá, 226 p. Dissertação (Mestrado em Dinâmica dos Fluidos e Máquinas de Fluxo) - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Este trabalho apresenta uma metodologia para obtenção de rotores radiais otimizados nos modos bomba e turbina utilizando critérios de carregamento hidrodinâmico. Em geral, um rotor de bomba é projetado para operar somente no modo bomba e um rotor de turbina hidráulica é projetado para operar apenas no modo turbina. Uma turbomáquina hidráulica reversível, denominada de bomba-turbina, deve operar de forma eficiente tanto no modo bomba como no modo turbina. Para essa finalidade, um rotor de bomba foi modificado, mantendo-se a geometria da sua seção meridional e o formato das pás. As modificações foram realizadas nos ângulos de entrada e de saída das pás e também no número de pás do rotor.

Um critério de carregamento hidrodinâmico, denominado de critério do número de Richardson máximo, foi utilizado para se obter um rotor radial modificado que pudesse apresentar boas características hidrodinâmicas tanto no modo bomba como no modo turbina. O número de Richardson e também outras características hidrodinâmicas foram obtidas do cálculo do escoamento potencial e incompressível. Três formulações para o escoamento potencial e incompressível são apresentadas, sendo uma para pás de espessura finita e duas para pás infinitamente finas. A solução numérica de cada equação integral resultante das formulações foi obtida pelo método dos painéis.

Os resultados numéricos obtidos mostram que é possível obter um rotor radial com boas características hidrodinâmicas para os modos bomba e turbina, por meio do critério do número de Richardson máximo.

### Palavras-chave

Turbomáquina, Bomba-Turbina, Rotor Radial, Escoamento Potencial, Critério do Número de Richardson Máximo, Número Ótimo de Pás.

## **Abstract**

**FAJARDO CASTELLANOS, L. (2013)**, *Methodology for Obtaining Optimized Radial Impellers in Pump and Turbine Modes Using Hydrodynamic Loading Criteria*, Itajubá, 226 p. MSc. Dissertation - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

This work presents a methodology for obtaining optimized radial impellers in pump and turbine modes using hydrodynamic loading criteria. In general, a pump impeller is designed to operate only in pump mode and a hydraulic turbine runner is designed to operate only in the turbine mode. A reversible hydraulic turbomachine, known as pump-turbine, must operate efficiently in both modes as pump or turbine. For this purpose, a pump impeller has been modified, keeping the geometry of its meridional section and shape of the blades. The modifications were made in the angles of inlet and outlet of the blades and also at the number of rotor blades.

A hydrodynamic loading criterion, called criterion of maximum Richardson number, was used to obtain a modified radial impeller able to provide good hydrodynamic characteristics in both modes as pump or turbine. The Richardson number and also other hydrodynamic characteristics were obtained from the calculation of the potential and incompressible flow. Three formulations for the potential and incompressible flow are presented, one for blades of finite thickness and two for infinitely thin blades. The numerical solution of each integral equation resulting of the formulations was obtained by the panel method.

The numerical results show that it is possible to obtain a radial impeller with good hydrodynamic characteristics for modes pump and turbine by means of the criterion of maximum Richardson number.

### **Keywords**

Turbomachinery, Pump-Turbine, Radial Impeller (Runner), Potential Flow, Criterion of the maximum Richardson Number, Optimum Number of Blades.

## Sumário

<b>SUMÁRIO</b> .....	<b>i</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b> .....	<b>v</b>
<b>ÍNDICE DE TABELAS</b> .....	<b>xii</b>
<b>SIMBOLOGIA</b> .....	<b>xiii</b>
<b>LETRAS LATINAS</b> .....	<b>xiii</b>
<b>LETRAS GREGAS</b> .....	<b>xv</b>
<b>SUBSCRITOS</b> .....	<b>xvi</b>
<b>SUPERESCRITOS</b> .....	<b>xvi</b>
<b>ABREVIATURAS</b> .....	<b>xvii</b>
<b>SIGLAS</b> .....	<b>xvii</b>
<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1 Algumas Considerações sobre Rotores Radiais de</b> <b>Turbomáquinas Hidráulicas</b> .....	<b>1</b>
<b>1.2 Algumas Considerações sobre o Escoamento em Rotores Radiais</b> .....	<b>4</b>
<b>1.3 Revisão Bibliográfica</b> .....	<b>9</b>
<b>1.4 Motivação do Trabalho</b> .....	<b>14</b>
<b>1.5 Objetivos do Trabalho</b> .....	<b>15</b>
<b>1.6 Organização do Trabalho</b> .....	<b>16</b>
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>17</b>
<b>FORMULAÇÃO DO PROBLEMA</b> .....	<b>17</b>
<b>2.1 Formulação Integral do Escoamento Potencial para Rotores Radiais</b> <b>com Pás de Espessura Finita (PEF)</b> .....	<b>18</b>
2.1.1 Equações diferenciais do escoamento para os planos físico e transformado .	18
2.1.2 Determinação do campo de velocidades do escoamento potencial para o plano transformado. ....	23
2.1.3 Equações complementares .....	33
<b>2.2 Formulação Integral do Escoamento Potencial para Rotores Radiais</b>	

<b>com Pás Infinitamente Finas (PIF)</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>2.3 Formulação Clássica por Meio de Singularidades para Pás Infinitamente Finas (PIF)</b> . . . . .	<b>39</b>
2.3.1 Modelo clássico de escoamento potencial através de grades radiais segundo o método das singularidades . . . . .	39
2.3.2 Campo de velocidades induzidas por uma grade radial . . . . .	42
2.3.3 Condição de contorno para o escoamento através de grades radiais móveis . . . . .	49
<b>CAPÍTULO 3</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>SOLUÇÃO NUMÉRICA</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>3.1 Discretização do Contorno das Pás</b> . . . . .	<b>52</b>
3.1.1 Técnica de discretização utilizada . . . . .	52
3.1.2 Discretização das pás de espessura finita (PEF) . . . . .	55
3.1.3 Discretização das pás infinitamente finas (PIF) . . . . .	56
<b>3.2 Determinação do Passo no Plano da Grade Linear para PEF</b> . . . . .	<b>58</b>
<b>3.3 Determinação da Largura das Pás</b> . . . . .	<b>60</b>
<b>3.4 Transformação da Grade Radial em Grade Linear</b> . . . . .	<b>60</b>
<b>3.5 Formação dos Sistemas de Equações Algébricas Lineares</b> . . . . .	<b>61</b>
3.5.1 Formação do sistema de EAL para PEF . . . . .	61
3.5.2 Formação do sistema de EAL para PIF . . . . .	69
<b>3.6 Condições Complementares</b> . . . . .	<b>74</b>
3.6.1 Condições complementares para PEF . . . . .	74
3.6.2 Condições complementares para PIF . . . . .	79
<b>3.7 Tratamento do Rotor Radial no Modo Turbina</b> . . . . .	<b>81</b>
<b>CAPÍTULO 4</b> . . . . .	<b>86</b>
<b>GRANDEZAS HIDRODINÂMICAS LOCAIS E GLOBAIS</b> . . . . .	<b>86</b>
<b>4.1 Grandezas Hidrodinâmicas Locais</b> . . . . .	<b>86</b>
4.1.1 Grandezas hidrodinâmicas locais para PEF . . . . .	86
4.1.2 Grandezas hidrodinâmicas locais para PIF . . . . .	87
<b>4.2 Grandezas Hidrodinâmicas Globais</b> . . . . .	<b>89</b>
4.2.1 Grandezas hidrodinâmicas globais para PEF . . . . .	89
4.2.2 Grandezas hidrodinâmicas globais para PIF . . . . .	92
<b>4.3 Numero de Richardson</b> . . . . .	<b>93</b>
4.3.1 Algumas considerações sobre o número de pás . . . . .	94

4.3.2 Definição do número de Richardson . . . . .	95
4.3.3 Critério do número de Richardson máximo . . . . .	99
<b>CAPÍTULO 5. . . . .</b>	<b>103</b>
<b>RESULTADOS NUMÉRICOS. . . . .</b>	<b>103</b>
5.1 Comentários Iniciais . . . . .	104
5.2 Aferição dos Modelos Computacionais . . . . .	106
5.3 Resultados Numéricos para o Rotor de Dietzel Original (Modo Bomba). . . . .	114
5.4 Resultados Numéricos para o Rotor de Dietzel Modificado (Modo Bomba) . . . . .	118
5.5 Resultados Numéricos para o Rotor de Dietzel Modificado (Modo Turbina). . . . .	124
5.6 Comparação dos Resultados. . . . .	127
<b>CAPITULO 6. . . . .</b>	<b>130</b>
<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES . . . . .</b>	<b>130</b>
6.1 Conclusões. . . . .	130
6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros. . . . .	133
<b>APÊNDICE A. . . . .</b>	<b>137</b>
<b>FORMULAÇÃO INTEGRAL DO ESCOAMENTO POTENCIAL PARA</b>	
<b>ROTORES CENTRÍFUGOS COM PÁS DE ESPESSURA FINITA. . . . .</b>	<b>137</b>
A.1 Equações do escoamento para os Planos Físico e Transformado. . . . .	138
A.1.1 Equações diferenciais do escoamento . . . . .	138
A.1.2 Transformação do escoamento. . . . .	141
A.2 Transformação do Campo de Velocidades do escoamento Potencial	
para o Plano Transformado . . . . .	147
A.2.1 Obtenção da equação integral por meio da segunda identidade de Green . . . . .	147
A.2.2 Equação integral do escoamento . . . . .	150
A.2.3 Relação entre as componentes das velocidades a montante e a	
jusante da grade. . . . .	155
A.2.4 Equação integral da velocidade absoluta no contorno do perfil . . . . .	158
A.2.5 Comportamento das funções-núcleo $\lambda_I$ e $\lambda_{II}$ . . . . .	160
A.2.6 Equação integral da velocidade relativa no contorno do perfil. . . . .	163
A.3 Equações Complementares. . . . .	166
A.3.1 Cálculo da primeira aproximação . . . . .	166
<b>APÊNDICE B. . . . .</b>	<b>174</b>
<b>FORMULAÇÃO INTEGRAL DO ESCOAMENTO POTENCIAL PARA</b>	

<b>ROTORES CENTRÍFUGOS COM PÁS INFINITAMENTE FINAS . . . . .</b>	<b>174</b>
<b>B.1 Equação Diferencial do Escoamento Absoluto para o Rotor Centrífugo . . . . .</b>	<b>175</b>
<b>B.2 Determinação do Campo de Velocidades do Escoamento Potencial         para o Rotor Centrífugo Convencional . . . . .</b>	<b>177</b>
B.2.1 Obtenção da equação integral por meio da segunda identidade de Green . . . . .	177
B.2.2 Equação integral do escoamento . . . . .	178
B.2.3 Desenvolvimento da integral de contorno . . . . .	182
B.2.4 Desenvolvimento da integral de superfície . . . . .	187
B.2.5 Equação integral da velocidade absoluta no contorno da pá . . . . .	190
B.2.6 Equação integral da velocidade absoluta no contorno da pá no caso de pás infinitamente finas . . . . .	190
B.2.7 Equação integral de Fredholm de primeira espécie para o escoamento em rotores centrífugos convencionais . . . . .	194
<b>B.3 Equação Integral de Fredholm de Primeira Espécie para o         Escoamento em Rotores Centrífugos com Pás Auxiliares . . . . .</b>	<b>196</b>
<b>APÊNDICE C . . . . .</b>	<b>198</b>
<b>GEOMETRIA DE ROTORES RADIAIS . . . . .</b>	<b>198</b>
<b>C.1 Seções Meridionais de Rotores Radiais . . . . .</b>	<b>198</b>
<b>C.2 Seções Normais de Rotores Radiais . . . . .</b>	<b>200</b>
C.2.1 Seções normais (transversais) de rotores radiais com pás de de espessura finita (PEF) . . . . .	201
C.2.2 Seções normais (transversais) de rotores radiais com pás infinitamente finas (PIF) . . . . .	210
<b>APÊNDICE D . . . . .</b>	<b>211</b>
<b>RESULTADOS NUMÉRICOS COMPLEMENTARES . . . . .</b>	<b>211</b>
<b>D.1 Resultados Numéricos para o Rotor de Dietzel Modificado (Modo Bomba) . . . . .</b>	<b>211</b>
<b>D.2 Resultados Numéricos para o Rotor de Dietzel Modificado (Modo Turbina) . . . . .</b>	<b>218</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>222</b>

## Lista de Figuras

Figura 1.1	Esquema de um rotor radial de bomba centrífuga: (a) seção meridional e (b) seção transversal mostrando os triângulos de velocidades para a entrada e saída do rotor na condição de número infinito de pás. . . . .	3
Figura 2.1	Grade radial móvel (plano físico) com pás de espessura finita e de largura variável: (a) seção meridional e (b) seção transversal (Oliveira, 2001) . . . . .	19
Figura 2.2	Grade linear móvel de largura $b = b(x)$ variável (plano transformado), Oliveira (2001). . . . .	20
Figura 2.3	Seção normal de um rotor centrífugo com um único conjunto de pás auxiliares . . . . .	38
Figura 2.4	Esquema representativo do escoamento potencial em grades radiais através da superposição de escoamentos mais simples . . . . .	40
Figura 2.5	Nomenclatura de referência para a geometria da grade radial . . . . .	44
Figura 2.6	Discretização da pá de referência em segmentos de reta (painéis) . . . . .	44
Figura 2.7	Grade elementar $k$ e detalhamento do painel $k$ da pá de referência ( $\ell = 1$ ). . . . .	46
Figura 2.8	Condição de contorno para grade radial móvel (bomba). . . . .	50
Figura 3.1	Bordos externos típicos de pás e condições de saída (bomba) para PEF (a) bordo agudo, (b) bordo arredondado e (c) bordo chanfrado. . . . .	54
Figura 3.2	Discretização de uma pá de referência e detalhe de um painel $j$ para PEF . . . . .	56
Figura 3.3	Discretização de uma pá de referência e condição de tangência (bomba) no painel $j$ para PIF . . . . .	57

Figura 3.4	Passo $t(x_{cj})$ em cada ponto de controle dos painéis: (a) lado de pressão e (b) lado de sucção. ....	59
Figura 3.5	Condições de entrada (sem e com choque) e condição de saída (Kutta) para PIF e representação da distribuição linear de vórtice em cada painel. ....	80
Figura 3.6	Triângulos de velocidades num ponto de controle e detalhe dos ângulos de inclinação do respectivo painel e do escoamento relativo para rotor radial nos modos bomba e turbina. ....	82
Figura 4.1	Forças atuando num elemento de fluido em equilíbrio dinâmico no interior de um rotor de bomba centrífuga: (a) seção meridional e (b) seção transversal. ....	96
Figura 4.2	Distribuição de velocidades relativas adimensionais em função do raio adimensional para um determinado número de pás. ....	100
Figura 4.3	Distribuição de números de Richardson em função do raio adimensional para três valores de números de pás. ....	101
Figura 4.4	Números de Richardson máximos em função do coeficiente de vazão para diversos valores de números de pás. ....	101
Figura 5.1	Rotor centrífugo da bomba de Dietzel (1980) com 7 pás de espessura igual a 6 mm em formato de arco de círculo (ARC) de bordos arredondados na entrada e bordos chanfrados na saída (Figura retirada de Dietzel, 1980) ....	104
Figura 5.2	Influência do número de painéis na distribuição de velocidades relativas na superfície das pás DAC do rotor da bomba de Dietzel (1980). ....	108
Figura 5.3	Influência do número de painéis na distribuição de velocidades relativas na superfície das pás ARC, com bordos arredondados, do rotor da bomba de Dietzel (1980) ....	108
Figura 5.4	Influências do número de painéis, da espessura das pás e da geometria do bordo de fuga (arredondado e chanfrado) na distribuição de velocidades relativas do rotor da bomba de Dietzel (1980). ....	109
Figura 5.5	Influência do número de painéis na distribuição de velocidades na superfície das PIF (ARC) do rotor da bomba de Dietzel (1980) ....	109

Figura 5.6	Influências do número de painéis e do fator de discretização no número de Richardson máximo para as pás DAC do rotor da bomba de Dietzel (1980) . . . . .	110
Figura 5.7	Influências do número de painéis e do fator de discretização no número de Richardson máximo para as pás ARC, com bordos arredondados, do rotor da bomba de Dietzel (1980) . . . . .	111
Figura 5.8	Influências do número de painéis e do fator de discretização no número de Richardson máximo para as PIF (ARC) do rotor da bomba de Dietzel (1980) . . . . .	111
Figura 5.9	Distribuição de velocidades relativas na superfície das pás logarítmicas do rotor centrífugo de Murata <i>et al.</i> (1978). . . . .	112
Figura 5.10	Distribuição de pressões na superfície das pás logarítmicas do rotor centrífugo de Murata <i>et al.</i> (1978). . . . .	113
Figura 5.11	Distribuição de velocidades na superfície das PEF, de espessura variável, com bordos arredondados (LOGar) do rotor centrífugo de Sebestyén <i>et al.</i> (1983). . . . .	113
Figura 5.12	Distribuição de pressões na superfície das PEF, de espessura constante, com bordos arredondados (LOGar) e sobre as PIF (LOG) do rotor centrífugo de Helmann e Giese, citados por Salomon (1972)	114
Figura 5.13	Distribuição de velocidades relativas na superfície das pás do rotor de Dietzel original . . . . .	115
Figura 5.14	Distribuição de pressões na superfície das pás do rotor de Dietzel original. . . . .	115
Figura 5.15	Distribuição de números de Richardson e indicação de números de Richardson máximos para diversos números de pás do rotor de Dietzel original. . . . .	116
Figura 5.16	Coefficiente de pressão em função do coeficiente de vazão e indicação da condição de entrada sem choque para diversos números de pás do rotor de Dietzel original. . . . .	117
Figura 5.17	Distribuição do ângulo das pás e do ângulo do escoamento relativo do rotor de Dietzel original . . . . .	117
Figura 5.18	Coefficiente de pressão e fator de deficiência de potência em função do número de pás do rotor de Dietzel original. . . . .	118

Figura 5.19	Esquema de seção transversal dos rotores de Dietzel original e modificado para pás com $\beta_{ip} = 13^\circ$ (original) e diversos ângulos $\beta_{ep}$ .	119
Figura 5.20	Número de Richardson máximo em função do número de pás dos rotores de Dietzel original e modificado para pás com $\beta_{ip} = 13^\circ$ (original).	120
Figura 5.21	Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 23^\circ$ e diversos ângulos $\beta_{ep}$ .	121
Figura 5.22	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 23^\circ$ .	121
Figura 5.23	Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 27^\circ$ e diversos ângulos $\beta_{ep}$ .	122
Figura 5.24	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 27^\circ$ .	122
Figura 5.25	Distribuição de pressões na superfície das pás do rotor de Dietzel modificado para $\beta_{ip} = 21^\circ$ e $\beta_{ep} = 48^\circ$ .	123
Figura 5.26	Distribuição de pressões na superfície das pás do rotor de Dietzel modificado para $\beta_{ip} = 23^\circ$ e $\beta_{ep} = 58^\circ$ .	124
Figura 5.27	Número de Richardson máximo em função do número de pás dos rotores de Dietzel original e modificado para pás com $\beta_{ip} = 13^\circ$ (original) no modo turbina.	125
Figura 5.28	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 23^\circ$ no modo turbina.	126
Figura 5.29	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 27^\circ$ no modo turbina.	126
Figura A.1	Grade radial móvel (plano físico) com pás de espessura finita e de largura variável: (a) seção meridional e (b) seção transversal (Oliveira, 2001).	139
Figura A.2	Grade linear móvel de largura $b = b(x)$ variável (plano transformado), Oliveira (2001).	140
Figura A.3	Representação genérica dos domínios (D), (D <sub>R</sub> ) e (D-D <sub>R</sub> ).	149
Figura A.4	Representação de domínios: (a) domínios (T <sub>μ</sub> ) limitados pelas curvas fechadas (C <sub>μ</sub> ) na grade linear, (b) domínio (T <sub>μ</sub> ) limitado pela curva fechada (C <sub>μ</sub> ) e (c) domínio (T) limitado pela curva fechada (C).	151

Figura B.1	Grade radial móvel com pás infinitamente finas e de largura variável: (a) seção meridional e (b) seção transversal (Oliveira, 2001) . . . . .	176
Figura B.2	Notações para a grade radial móvel com pás de espessura infinitamente fina. . . . .	183
Figura B.3	Condição de tangência do escoamento relativo. . . . .	193
Figura B.4	Seção normal de um rotor centrífugo com um único conjunto de pás auxiliares . . . . .	197
Figura C.1	Esquema de seções meridionais de rotores radiais de largura das pás, $b = b(r)$ , variável com aresta externa paralela ao eixo e alguns formatos de arestas internas. . . . .	199
Figura C.2	Seção transversal de rotor radial com pás de espessura finita (PEF) com região próxima ao bordo interno arredondada e região próxima ao bordo externo chanfrada . . . . .	201
Figura C.3	Esquema de uma pá em formato de arco de círculo, de espessura constante, com bordo interno arredondado e bordo externo chanfrado (ARCC) . . . . .	203
Figura C.4	Esquema de uma pá em formato de arco de círculo, de espessura constante, com bordos interno e externo arredondados (ARCA) . . . . .	204
Figura C.5	Esquema de uma pá em formato de duplo arco de círculo sem arredondamentos nos bordos interno e externo (DAC) . . . . .	206
Figura C.6	Esquema de uma pá de espessura constante, em formato de espiral logarítmica (na sua linha média), com bordos interno e externo arredondados (LOGc) . . . . .	207
Figura C.7	Esquema de uma pá de espessura variável, em formato de espiral logarítmica (na linha média e nos lados de pressão e de sucção), com bordos interno e externo arredondados (LOGv) . . . . .	208
Figura C.8	Esquema, no plano da grade radial, de pás logarítmicas de espessuras variável (LOGv) e constante (LOGc) com largura, $b$ , constante . . . . .	209
Figura C.9	Transformação das pás LOGv e LOGc, representadas na Figura C.8 (plano da grade radial), no plano da grade linear. . . . .	209
Figura C.10	Esquema de uma pá infinitamente fina em formato de arco de	

	círculo (PIF).....	210
Figura C.11	Esquema de uma pá infinitamente fina em formato de espiral logarítmica (LOG).....	210
Figura D.1	Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 11^\circ$ e diversos ângulos $\beta_{ep}$ .....	212
Figura D.2	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 11^\circ$ .....	212
Figura D.3	Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 15^\circ$ e diversos ângulos $\beta_{ep}$ .....	213
Figura D.4	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 15^\circ$ .....	213
Figura D.5	Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 17^\circ$ e diversos ângulos $\beta_{ep}$ .....	214
Figura D.6	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 17^\circ$ .....	214
Figura D.7	Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 19^\circ$ e diversos ângulos $\beta_{ep}$ .....	215
Figura D.8	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 19^\circ$ .....	215
Figura D.9	Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 21^\circ$ e diversos ângulos $\beta_{ep}$ .....	216
Figura D.10	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 21^\circ$ .....	216
Figura D.11	Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 25^\circ$ e diversos ângulos $\beta_{ep}$ .....	217
Figura D.12	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 25^\circ$ .....	217
Figura D.13	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 11^\circ$ no modo turbina .	218
Figura D.14	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 15^\circ$ no modo turbina .	219
Figura D.15	Número de Richardson máximo em função do número de pás do	

	rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 17^\circ$ no modo turbina.	219
Figura D.16	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 19^\circ$ no modo turbina.	220
Figura D.17	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 21^\circ$ no modo turbina.	220
Figura D.18	Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com $\beta_{ip} = 25^\circ$ no modo turbina.	221

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1	Dimensões do rotor original de Dietzel (1980) . . . . .	105
Tabela 5.2	Dimensões do rotor original de Violato (2004) . . . . .	105
Tabela 5.3	Resultados numéricos para os rotores de Dietzel original e modificado (modo bomba). . . . .	128
Tabela 5.4	Resultados numéricos para os rotores de Dietzel original e modificado (modo turbina). . . . .	129

## Simbologia

### Letras Latinas

$a$	Constante; distância
$a_p$	Parâmetro adimensional referente à área da seção transversal da pá
$A$	Área
$A_{kj}$	Elementos da matriz de influência
$A_{pá}$	Área da seção transversal de uma pá
$b$	Largura da pá; constante
$B$	Largura adimensional da pá
$B(r)$	Função de variação da largura da pá no plano da grade radial
$B(x)$	Função de variação da largura da pá no plano transformado
$B_k$	Elementos do vetor independente
$c$	Velocidade do escoamento absoluto
$d$	Distância
$C_I$	Fator de vazão
$C_{II}$	Constante
$C_{kj}$	Coefficientes complexos
$C_U$	Constante
$C_r$	Fator de erro circulatório
$D$	Diâmetro
$e_{pá}$	Espessura da pá
$g$	Aceleração da gravidade local
$H$	Altura de energia (altura efetiva de Elevação (B); altura de queda líquida (T))
$i$	Unidade imaginária $i = (-1)^{1/2}$
$\Im m$	Parte imaginária do argumento complexo
$J(\zeta, \zeta')$	Parte real da função complexa

$k$	Coeficiente; constante
$K(\zeta, \zeta')$	Parte imaginária da função complexa
$\ell$	Corda do perfil (pá) no plano físico (grade radial)
$\ell_{GL}$	Corda do perfil (pá) no plano transformado (grade linear)
$L$	Comprimento; distância
$m, n, s$	Sistema de eixos coordenados de um rotor de turbomáquina diagonal
$n$	Velocidade de rotação
$\hat{n}, \hat{s}$	Versores nas direções normal e tangencial ao contorno da pá
$n_{qA}$	Rotação específica referente à vazão
$M$	Número de painéis
$N$	Número de pás
$p$	Pressão estática
$P$	Pressão adimensional; ponto genérico
$q$	Intensidade de fonte ou sumidouro pontual
$q_{sg}$	Quociente da série geométrica (fator de discretização)
$Q$	Vazão volumétrica
$r, \theta, z$	Coordenadas cilíndricas
$r$	Coordenada radial no plano $z$ ; raio genérico
$R$	Coordenada radial adimensional; raio de curvatura
$\Re$	Parte real do argumento complexo
$Ri$	Número de Richardson
$s$	Coordenada natural da pá; coordenada da linha de singularidades
$S$	Coordenada natural adimensional
$t$	Passo da pá
$T$	Domínio; passo adimensional
$u$	Velocidade circunferencial (tangencial) de um ponto de raio $r$ do rotor
$w$	Velocidade do escoamento relativo
$W$	Velocidade relativa adimensional
$\bar{W}$	Velocidade relativa média adimensional
$X, Y$	Coeficientes complexos
$x, y$	Coordenadas cartesianas retangulares no plano $z$ da grade linear
$x_1, x_2, x_3$	Sistema de eixos coordenados da grade radial ou do rotor
$Y$	Trabalho específico da turbomáquina

$Y_{pá}$	Trabalho específico real do rotor para número finito de pás
$Y_{pá_\infty}$	Trabalho específico ideal do rotor para número infinito de pás
$z$	Ponto no plano complexo da grade linear, $z = x + i y$
$Z$	Variável complexa adimensional

## Letras Gregas

$\alpha$	Ângulo do escoamento absoluto; ângulo do painel em relação ao eixo $x$
$\beta$	Ângulo do escoamento relativo; ângulo geométrico da pá; ângulo do painel
$\gamma$	Densidade de vórtices
$\Gamma$	Circulação; densidade de vórtices adimensional
$\Delta p$	Diferença de pressões estáticas
$\Delta p_T$	Pressão total da turbomáquina
$\Delta W$	Diferença de velocidades relativas adimensionais
$\varepsilon$	Ângulo
$\zeta$	Variável complexa designativa da posição genérica das singularidades distribuídas
$\xi, \eta$	Coordenadas de um ponto do contorno da pá no plano complexo
$\theta$	Argumento da variável complexa $z$ ; ângulo polar
$\kappa$	Contorno (fronteira) do perfil (pá)
$\lambda_I$	Função-núcleo da equação de Fredholm de segunda espécie
$\lambda_{II}$	Função-núcleo da equação de Fredholm de primeira espécie
$\mu$	Fator de deficiência de potência ( <i>slip factor</i> )
$\pi$	3,14159265...
$\rho$	Massa específica
$\phi$	Coefficiente de vazão
$\Phi$	Potencial de velocidades
$\chi$	Ângulo da tangente ao contorno do perfil em relação ao eixo $x$
$\psi$	Coefficiente de pressão
$\omega$	Velocidade angular do rotor, $\omega = 2\pi n$
$\Omega$	Coefficiente de pré-rotação

## Subscritos

0	Referente ao centro da grade radial
$\infty$	Referente à distância longe da grade, ou ao número infinito de pás
$c$	Referente ao ponto de controle
$d$	Referente a dinâmico
$e$	Referente a externo
$i$	Referente a interno
$j$	Referente ao ponto de controle genérico do painel
$k$	Referente à grade elementar genérica; ao painel correspondente
$m$	Referente à componente meridional; referente à linha média
$máx$	Referente a máximo
$ót$	Referente às condições ótimas ou de projeto
$p$	Referente à pá
$pá$	Referente ao rotor
$r$	Referente à componente radial
$s$	Referente a induzido
$u$	Referente à componente circunferencial
$x$	Referente à direção do eixo x no plano transformado
$y$	Referente à direção do eixo y no plano transformado
$\theta$	Referente à componente circunferencial

## Superescritos

–	Referente ao lado de sucção
+	Referente ao lado de pressão
*	Referente ao número ótimo de pás; referente à grandeza adimensional
–	Referente ao conjugado de uma variável complexa
→	Referente a vetor

## Abreviaturas

ARC	Referente à pá em formato de arco de círculo
B	Bomba
DAC	Referente à pá em formato de duplo arco de círculo
GL	Referente à grade linear
GR	Referente à grade radial
LOG	Referente à pá em formato de espiral logarítmica
PEF	Referente à pá de espessura finita
PIF	Referente à pá infinitamente fina
T	Turbina hidráulica

## Siglas

BFT	Bomba funcionando como turbina
CFD	Dinâmica dos fluidos computacional
EAL	Equações algébricas lineares
IEM	Instituto de Engenharia Mecânica
LHV	Laboratório de Hidrodinâmica Virtual
UNIFEI	Universidade Federal de Itajubá
TM	Turbomáquina

## **Capítulo 1**

# **INTRODUÇÃO**

Neste capítulo são apresentadas algumas considerações gerais sobre turbomáquinas radiais, em particular, sobre o rotor, que constitui seu principal componente, e que é o foco deste trabalho. Algumas considerações sobre o escoamento em rotores radiais são apresentadas e, com base na literatura técnica, é descrita a possibilidade de o escoamento potencial, em determinadas condições, representar certas características do escoamento real nesses rotores. A consideração do escoamento potencial para a determinação de certas grandezas do escoamento neste tipo de rotor, especificamente no ponto de projeto, constitui a principal motivação deste trabalho. Uma dessas grandezas, que está relacionada ao carregamento hidrodinâmico das pás do rotor, é útil para estabelecer certas características geométricas ótimas. Com base nessa motivação, diversos objetivos deste trabalho são descritos neste capítulo.

### **1.1 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE ROTORES RADIAIS DE TURBOMÁQUINAS HIDRAÚLICAS**

As turbomáquinas radiais são empregadas em diversas áreas dos setores de energia, aeronáutico, automotivo e industrial, entre outros. A principal característica dessas máquinas é sua capacidade de operar grandes pressões associadas a vazões relativamente baixas, quando comparadas às turbomáquinas axiais. Quanto ao tipo de escoamento operado por essas turbomáquinas (TM), normalmente, elas são classificadas como TM hidráulicas e TM térmicas. Em

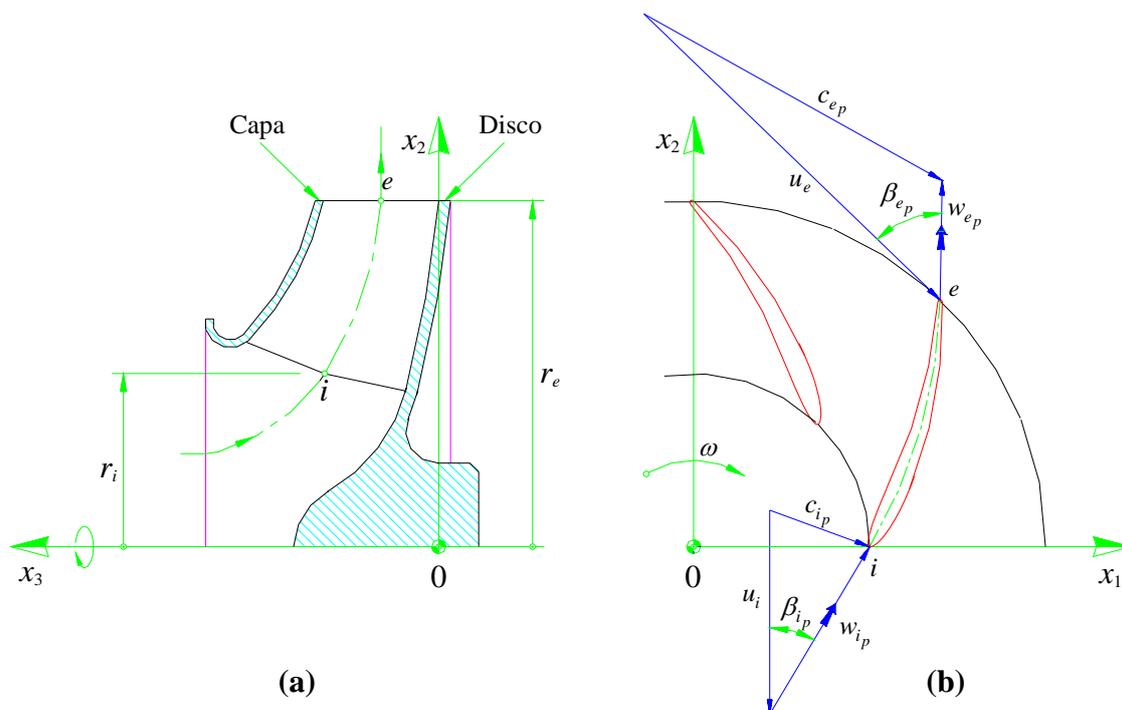
geral, essas máquinas ainda são classificadas em turbomáquinas geradoras (fornecem energia ao fluido), motoras (extraem energia do fluido) e reversíveis (fornecem ou extraem energia do fluido, como são as bombas-turbinas).

Quanto à direção do escoamento principal no rotor, as turbomáquinas radiais são caracterizadas por possuírem direção puramente radial ou aproximadamente radial. Quanto ao sentido do escoamento no rotor, as turbomáquinas podem ser do tipo centrífugo ou centrípeto. Em geral, as TM geradoras são centrífugas e as TM motoras geralmente são centrípetas. As turbomáquinas radiais podem ter um ou mais estágios, dependendo das pressões envolvidas, e uma ou duas entradas (máquinas geradoras) ou saídas (máquinas motoras), dependendo das vazões envolvidas. O foco deste trabalho está apenas na análise do escoamento (potencial) em rotores de turbomáquinas hidráulicas geradoras, motoras e reversíveis que operam líquido, portanto, em rotores radiais de bombas, turbinas (hidráulicas) e bombas-turbinas (projetadas como máquinas reversíveis). Existem também bombas (projetadas como máquinas apenas geradoras) que podem funcionar como turbinas.

Uma grandeza adimensional que caracteriza a geometria da seção meridional, Figura 1.1, de qualquer rotor de turbomáquina hidráulica é a rotação específica referente à vazão,  $n_{qA} = 10^3 n Q^{1/2} / Y^{3/4}$ , sendo  $n$  a velocidade de rotação do rotor em rps,  $Q$  a vazão em  $m^3/s$ , e  $Y = gH = \Delta p_T / \rho$  o trabalho específico da turbomáquina em J/kg.  $H$ ,  $\Delta p_T$ ,  $\rho$  e  $g$  são, respectivamente, a altura de energia (altura efetiva de elevação, no caso de bombas (B), e altura de queda líquida, no caso de turbinas hidráulicas (T)), pressão total, massa específica e aceleração da gravidade local. Turbomáquinas hidráulicas radiais, independentemente se são geradoras ou motoras, geralmente, têm  $30 < n_{qA} < 200$ .

Basicamente, um rotor radial é composto por três componentes, Figura 1.1: 1) pás, 2) disco (B) ou cubo (T) e 3) capa (B) ou cinta (T). As pás podem ser de simples curvatura ou de múltiplas curvaturas (especialmente torcidas). As pás podem ser montadas perpendicularmente ao disco (B) ou cubo (T) e à capa (B) ou à cinta (T), dependendo da rotação específica. A aresta interna das pás pode ser paralela, inclinada ou curvada, Figura 1.1, dependendo da rotação específica e das características de cavitação que se deseja. A aresta externa das pás, geralmente, é paralela ou inclinada. As pás podem ser de espessura constante (a menos das regiões dos bordos interno ( $i$ ) e externo ( $e$ )) ou de espessura variável. Em geral, a espessura das pás de rotores de turbomáquinas radiais é relativamente pequena, quando comparada ao maior diâmetro do rotor (diâmetro externo). Essa característica se torna importante ao comparar os resultados obtidos das soluções numéricas referentes às formulações do escoamento potencial apresentadas no Capítulo 2, indicando que essas pás, como aproximação, podem ser conside-

radas de espessura desprezível. Como em qualquer turbomáquina, os ângulos de entrada e de saída das pás de rotores de turbomáquinas radiais exercem influência importante nas características do escoamento. No caso de bombas, o ângulo de entrada das pás deve ser o mais baixo possível para aliviar os efeitos da cavitação, e o ângulo de saída das pás deve ser menor (geralmente muito menor) que  $90^\circ$ , produzindo graus de reação altos. No caso de turbinas, especificamente de rotores radiais, geralmente, o ângulo de entrada das pás não é tão baixo quanto ao de bombas, e o ângulo de saída das pás é maior que aquele da respectiva bomba, para uma dada rotação específica. O ângulo externo das pás (ângulo de saída, no caso de bombas, e ângulo de entrada, no caso de turbinas), tanto de bombas como de turbinas, sendo menor que  $90^\circ$  é uma característica muito importante para justificar as formulações do escoamento potencial do Capítulo 2.



**Figura 1.1** Esquema de um rotor radial de bomba centrífuga: **(a)** seção meridional e **(b)** seção transversal mostrando os triângulos de velocidades para a entrada e saída do rotor na condição de número infinito de pás

A geometria do disco (B) ou cubo (T) e capa (B) ou cinta (T) está relacionada à rotação específica,  $n_{qA}$ , e à condição de projeto caracterizada pela relação de componentes meridionais da velocidade absoluta (ou relativa) que deve obedecer à equação da continuidade. Por exemplo, dependendo da rotação específica, a largura das pás é constante, portanto, o disco e a ca-

pa são planos e paralelos entre si, logo são perpendiculares ao eixo do rotor. Nesse caso, a relação de componentes meridionais da velocidade absoluta na entrada e saída é maior que 1. Em turbinas, geralmente, adota-se o critério de projeto onde a relação de componentes meridionais na entrada e saída é igual a 1. Neste caso, tanto o cubo quanto a cinta não são planos (geralmente são parcialmente curvados, dependendo da rotação específica).

No presente trabalho, as seguintes considerações são feitas com relação às pás dos rotores radiais analisados:

1) As pás podem ser consideradas de espessura finita (PEF) ou de espessura infinitamente fina (PIF), nas formulações apresentadas no Capítulo 2;

2) As pás são consideradas idênticas e igualmente espaçadas entre si resultando, portanto, em ângulos de montagem idênticos;

3) As pás têm ângulos menores que  $90^\circ$  referentes ao diâmetro externo do rotor, de modo que o escoamento potencial possa ser utilizado para a determinação de diversas características de desempenho do rotor no ponto de projeto, conforme descrito no Item 1.2;

4) As pás têm arestas de entrada e de saída paralelas ao eixo do rotor;

5) As pás são de simples curvatura, ou seja, as projeções de quaisquer estações (seções) axiais das pás em planos transversais são idênticas;

6) As pás são montadas perpendicularmente no disco (B) ou cubo (T) e na capa (B) ou cinta (T), isto é, todas as seções radiais das pás são axiais em relação ao eixo do rotor, pelo fato de as arestas de entrada e de saída serem paralelas ao eixo do rotor (Item 4, acima) e as pás serem de simples curvatura (Item 5, acima);

7) As pás podem ser de largura constante ou de largura variável na direção radial;

8) O rotor gira com velocidade angular constante,  $\vec{\omega}$ , e é estacionário em relação a um referencial inercial, portanto, a relação entre as velocidades absoluta,  $\vec{c}$ , relativa,  $\vec{w}$ , e circumferencial (velocidade de condução) do rotor,  $\vec{u}$ , é  $\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}$ , onde  $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ .

## 1.2 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ESCOAMENTO EM ROTORES RADIAIS

O escoamento em turbomáquinas radiais, como em qualquer turbomáquina, é um dos mais complexos encontrados em dinâmica dos fluidos. Na maioria dos casos, é totalmente tridimensional, com fenômenos de transição laminar/turbulenta e descolamentos associados

ao desenvolvimento das camadas-limites. Complexos mecanismos de dissipação viscosa e geração de vorticidade estão presentes. O escoamento pode ser incompressível, subsônico, transônico ou supersônico, dependendo da turbomáquina. Em alguns tipos de turbomáquinas térmicas radiais todos esses regimes de escoamento estão presentes. A interferência entre os seus componentes móveis e fixos provoca efeitos não-permanentes sobre o escoamento. Até o presente momento, não se dispõe de um modelo matemático que permita prever o escoamento em todo campo de operação da turbomáquina, sem desprezar alguns aspectos importantes do problema. De fato, tal cálculo é extremamente difícil, devido não só à complexidade do escoamento, mas também à geometria complexa dos seus diversos componentes. Mesmo se existisse, não seria apropriado para uma investigação sistemática do escoamento para diferentes geometrias, como se exige num processo de otimização, porque seria muito extenso e de alto custo. O número de variáveis possíveis é tão grande que a otimização pode ser conduzida somente através de um procedimento por passos.

A característica pressão-vazão de uma turbomáquina radial depende das características de cada um de seus componentes. O limite de bombeamento, por exemplo, é estabelecido pelo caráter estabilizante (principalmente do rotor) e desestabilizante (canais do difusor aletado, entre outros) dos diversos componentes da turbomáquina, conforme Greitzer (1981) e Hunziker e Gyarmathy (1994). Os escoamentos nesses componentes interagem entre si, e a característica individual de cada um é obtida em conjunto com os demais, através de testes desenvolvidos em laboratório. Porém, segundo Stow (1985), o projeto de cada componente é feito individualmente, com o objetivo de atingir as melhores características possíveis para uma determinada aplicação da turbomáquina. O tratamento isolado de cada componente constitui numa simplificação notável, porém os problemas relacionados ao escoamento persistem, particularmente, quando se trata de rotores radiais, devido à sua rotação e à sua geometria. Portanto, novas simplificações devem ocorrer, porém, preservando ao máximo as características reais do seu escoamento.

No que se refere à análise teórica do escoamento em rotores radiais, existem diversas classificações dos métodos computacionais relacionadas, basicamente, à: 1) dimensão do campo de escoamento (uni, bi, quase-tri e tridimensionais), 2) consideração ou não dos efeitos viscosos (métodos puramente não-viscosos, não-viscosos com correção empírica, de interação viscosa/não-viscosa e de solução das equações de Navier-Stokes completas), e 3) técnica da solução numérica (diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos), entre outras. Essas considerações não serão abordadas neste trabalho visto que estão relatadas em diversos trabalhos de revisão e em livros-textos publicados por Gostelow (1973), Japikse (1976), Adler

(1980-a), McNally e Sockol (1985), Cumpsty (1989), Whitfield e Baines (1990) e Lakshminarayana (1996).

A existência de escoamento separado em duas regiões bastante distintas nos canais formados pelas pás de rotores radiais (em particular, nos canais de rotores centrífugos) foi observada por vários pesquisadores em seus trabalhos experimentais. Porém, se atribui a Dean Jr. que apontou a necessidade de se levar em consideração esse tipo de escoamento e que também o denominou de modelo jato-esteira. A idéia foi primeiramente esclarecida no trabalho de Dean Jr. e Senoo (1960) no qual o escoamento foi tratado como bidimensional (uniforme na direção axial), com o jato e a esteira dividindo o canal formado por duas pás consecutivas na direção circunferencial (plano transversal). A esteira, com velocidade uniforme, ocupava a região próxima ao lado da superfície de sucção da pá, e o jato, com velocidade uniforme maior que aquela da esteira, ocupava a região próxima ao lado da superfície de pressão da pá.

A primeira informação mais importante sobre o escoamento em rotores centrífugos, sem capa solidária às pás, foi dada por Eckardt (1976, 1980), que utilizou anemometria a laser para a medição detalhada do campo de escoamento. Com essas medições, foi possível esclarecer a maioria das ambiguidades de interpretação sobre o escoamento na saída de rotores centrífugos. A esteira não é como aquela idealizada por Dean Jr. e Senoo (1960), mas ocupa uma região significativa na saída do rotor, com uma velocidade média muito menor que a do jato e posicionada nas proximidades do lado da superfície de sucção da pá. Dean Jr. imaginou a esteira começando na região entre o lado da superfície de sucção da pá e a capa estacionária do rotor, emigrando para preencher a região entre o disco e a capa estacionária, próxima à saída do rotor. Alguns detalhes, portanto, não são precisos, mas, no geral, o modelo proposto por Dean Jr. e Senoo (1960) é bem razoável.

Vários testes realizados no interior de rotores centrífugos de altas, moderadas e baixas velocidades de rotação, com ângulos das pás na saída iguais a  $90^\circ$  ou menores que  $90^\circ$  e de diferentes geometrias foram realizados em diversos centros de pesquisas. Descrições desses trabalhos são relatadas por Fagan e Fleeter (1991) e Hathaway *et al.* (1993), entre outros. Os experimentos indicam a estrutura jato-esteira observada em muitos rotores centrífugos, numa escala maior ou menor.

As características do escoamento descritas acima mostram que o escoamento na forma de jato-esteira depende da vazão e da geometria do rotor centrífugo. No plano transversal, as pás com ângulos de saída menores que  $90^\circ$ , dependendo da sua geometria e do seu ângulo de saída, têm tendência de apresentar pouca ou nenhuma separação do escoamento, no ponto de projeto. No trabalho de Adler e Krimerman (1980) sobre “a relevância de cálculos do escoamento”

mento não-viscoso e subsônico no escoamento real de rotores centrífugos”, a seguinte conclusão foi estabelecida: “... *teorias sobre o escoamento não-viscoso podem ser seguramente utilizadas em todos os casos onde a esteira no lado de sucção das pás não está presente e que os efeitos viscosos não são predominantes*”. Exemplos típicos dessa situação são os rotores de bombas e da maioria dos ventiladores centrífugos (com ângulos de saída das pás menores que  $90^\circ$ ) onde a estrutura jato-esteira não está presente no ponto de projeto.

Teorias sobre o escoamento não-viscoso podem ser classificadas em vários grupos. Sob o aspecto geométrico, uma classificação normalmente encontrada na literatura refere-se aos conceitos das superfícies  $S_1$  (B-B, *Blade-to-Blade*) e  $S_2$  (H-S, *Hub-to-Shroud*) introduzidas por Wu (1952): teorias bi, quase-tri e tridimensionais. Os métodos de cálculo em cada um desses grupos podem ainda ser classificados com base no esquema computacional utilizado: método da curvatura da linha de corrente, método de diferenças finitas e método de elementos finitos, entre outros. Com relação a esses métodos, não se pretende fazer nenhuma revisão dos inúmeros trabalhos publicados. No caso de escoamento não-viscoso em rotores centrífugos, Adler (1980-a) e Whitfield e Baines (1990) fornecem detalhes sobre o assunto.

O caso de escoamento não-viscoso, incompressível e permanente (escoamento potencial) permite um tratamento analítico bastante eficiente e possibilita a solução clássica de dois tipos de problemas: 1) problema direto (obtenção das características do escoamento decorrentes de uma dada geometria de rotor) e 2) problema indireto (obtenção da geometria do rotor decorrente de uma dada característica do escoamento). Dentre os métodos de formulação desses problemas, destacam-se o método de transformação conforme e o método das singularidades. Ambos foram inicialmente aplicados no estudo da asa (aerofólio) isolada, sendo posteriormente estendidos para o caso de rotores axiais e radiais.

No método de transformação conforme procura-se, através da teoria de variável complexa, um mapeamento que transforme a geometria de um corpo a ser analisado (por exemplo, de um rotor radial) em uma geometria mais simples, para a qual já existe solução para o escoamento potencial. Conhecida a lei de transformação e aplicando-se as condições necessárias, é possível determinar a solução exata para a geometria do corpo original.

No método das singularidades, utiliza-se uma distribuição adequada de fontes, sumidouros, vórtices e dipolos para representar o campo de velocidades induzidas pelo corpo a ser analisado. Essa distribuição pode ser feita sobre a superfície do corpo ou no interior do mesmo e deve satisfazer as condições de continuidade e de contorno do escoamento.

No presente trabalho, as seguintes considerações são feitas com relação ao escoamento nos rotores radiais analisados:

1) A análise do escoamento é feita no plano transversal (superfície  $S_1$  (pá a pá), segundo Wu (1952)), porém considera-se a variação radial de largura das pás no plano meridional (superfície  $S_2$  (disco a disco), segundo Wu (1952)), sem conduzir a procedimentos iterativos entre os escoamentos nesses dois planos;

2) O escoamento é analisado no próprio plano da grade radial (para o caso de pás infinitamente finas - PIF) e também no plano da grade linear por meio de transformação (a transformação é conforme, se a largura das pás é constante) do plano da grade radial (para o caso de pás de espessura finita - PEF);

3) O escoamento relativo através do rotor é considerado permanente;

4) O escoamento (absoluto) é considerado uniforme antes e após o rotor;

5) O escoamento relativo é considerado axialmente simétrico no interior do rotor, isto é, o escoamento se realiza em superfícies de corrente que são consideradas axialmente simétricas (superfícies de revolução);

6) O escoamento é considerado bidimensional, em decorrência de as superfícies de corrente do escoamento relativo serem consideradas axialmente simétricas, Vavra (1974);

7) O escoamento é considerado circunferencialmente simétrico, ou seja, o escoamento através do canal formado por duas pás consecutivas é idêntico, na direção circunferencial, a todos os outros canais do rotor;

8) A componente axial da velocidade do escoamento relativo através do rotor,  $w_a$ , é considerada desprezível;

9) A componente meridional da velocidade do escoamento relativo através do rotor,  $w_m = w_r$ , é considerada uniforme em cada seção radial do rotor;

10) A equação da continuidade e as hipóteses de irrotacionalidade e incompressibilidade do escoamento absoluto conduzem a uma equação diferencial do tipo Poisson para o potencial de velocidade,  $\Phi$ , em duas dimensões, como será exposto no Capítulo 2;

11) A equação do tipo Poisson resultante é não-linear (para o caso de pás de largura variável) e se transforma numa equação de Laplace para o caso de pás de largura constante;

12) Para o caso de PIF o escoamento é representado pela combinação de uma fonte (simulando a vazão através do rotor de bomba) ou de um sumidouro (simulando a vazão através do rotor de turbina) e de um vórtice, simulando a pré-rotação, ambos no centro do rotor;

13) O escoamento perturbado pela presença das pás é representado por uma folha de vórtices coincidente com a superfície de cada pá (PEF) ou coincidente com a linha representativa de cada pá (PIF);

14) O escoamento resultante através do rotor é representado pela combinação linear referente à fonte (ou sumidouro) e ao vórtice, ambos posicionados no centro do rotor, e das folhas de vórtices que simulam as pás.

## 1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este item apresenta uma revisão bibliográfica sobre o escoamento potencial em rotores radiais de bombas e turbinas hidráulicas. A partir dos anos de 1970, diversos trabalhos foram publicados sobre bombas funcionando como turbinas (BFT). Nesses trabalhos, em geral, os autores não analisam o rotor isoladamente, mas sim em conjunto com os demais componentes da bomba. Esses trabalhos ou apresentam uma metodologia que utiliza certas correlações empíricas ou utilizam técnicas de dinâmica dos fluidos computacional (CFD) para prever as características de desempenho de bombas funcionando como turbinas. Esse assunto (BFT) não será tratado neste trabalho.

Os principais trabalhos comentados a seguir referem-se ao método de transformação conforme, método das singularidades, método dos painéis (utilizado na solução numérica) e às formulações integrais apresentadas no Capítulo 2. Esses trabalhos serão descritos em ordem cronológica.

Antes de iniciar a revisão bibliográfica, destaca-se que o cálculo do escoamento potencial em rotores radiais, particularmente os de bomba, tem uma longa história. Essa história foi iniciada por Wagenbach (1908) e permanece até o presente momento, destacando-se, entre outros, o trabalho de Hassenpflug (2010) sobre o escoamento potencial, incompressível e bi-dimensional em rotores radiais. O trabalho de Hassenpflug é digno de nota, não pelo fato de conter 91 páginas (um verdadeiro *Tratado*), mas pelo fato de o autor descrever um método para resolver analiticamente o escoamento potencial em rotores radiais, com pás de formato arbitrário, por meio do método de transformação conforme. Mais detalhes sobre o trabalho de Hassenpflug serão comentados ao final deste item.

Wagenbach (1908) foi o primeiro a explicar que o ângulo do escoamento relativo na saída do rotor (bomba) não coincide com o correspondente ângulo da pá, para o caso de número finito de pás. Essa afirmação é contrária àquela referente à equação de Euler Leonhard Paul Euler (1707-1783) para rotores de bombas. Sabe-se que a equação de Euler para rotores de bombas é válida somente para número infinito de pás, onde o escoamento relativo é tan-

gente às pás em toda a sua extensão. Além do mais, Wagenbach também revelou a possibilidade do aparecimento de escoamento reverso no interior de rotores radiais de bombas.

Kusharski (1918), utilizando também pás em formato de espiral logarítmica, seguiu a teoria proposta Wagenbach, e resolveu analiticamente a equação diferencial de Poisson para o escoamento relativo permanente em um rotor especial (rotor radial com pás prolongadas até o centro do rotor). Em seus diversos gráficos, Kusharski mostrou o escoamento reverso predito por Wagenbach. A maior contribuição quantitativa de Kusharski foi um gráfico para a pressão adimensional teórica em função do número de pás.

Spannhake (1925a-b) utilizou o método de transformação conforme sobre um círculo unitário, com uma combinação de fonte e vórtice, sugerindo uma solução exata. Spannhake introduziu o chamado escoamento de deslocamento (devido à rotação do rotor), resolvendo esse escoamento por meio de séries de Fourier com somente poucos termos. Sua análise foi restrita a pás retas, embora o autor tenha indicado que seu método é aplicável a qualquer formato de pás, com o argumento de que a transformação de qualquer forma de pá sobre um círculo teoricamente existe.

Sörensen (1927), baseando-se no trabalho de Spannhake, introduziu o mapeamento da pá em formato de espiral logarítmica sobre um círculo. A pá (pá reta) utilizada por Spannhake é um caso particular da pá em formato de espiral logarítmica.

Schultz (1928) continuou o trabalho de Spannhake e Sörensen sobre pás em formato de espiral logarítmica. Schultz observou que esse formato de pás é aproximadamente igual ao formato de muitas pás de rotores radiais existentes. Os gráficos apresentados pelo autor para rotores radiais com pás retas são bem precisos, quando comparados com solução exata.

Busemann (1928) também analisou rotores radiais com pás em formato de espiral logarítmica utilizando o método da transformação conforme. O autor melhorou os resultados apresentados por Schultz por estender a análise à transformação conforme correta para pás logarítmicas. Busemann forneceu equações explícitas para os coeficientes das séries de Fourier em termos de uma integral, embora não os tenha resolvido, mas obteve a relação entre os trabalhos específicos para número finito e infinito de pás (essa relação é denominada de fator de deficiência de potência). Seus resultados foram apresentados para uma ampla faixa de variação de parâmetros geométricos, visando à aplicação em bombas radiais (centrífugas).

Stauffer (1936) foi o primeiro a utilizar o método das singularidades em grades radiais com pás consideradas infinitamente finas. Stauffer utilizou uma distribuição de vórtices como função da coordenada radial, e atacou o problema de determinar a forma das pás (problema indireto).

Acosta (1952) fez uma contribuição final sobre a solução analítica de rotores radiais com pás em formato de espiral logarítmica. O autor revisou o método de transformação conforme de Busemann e fez cálculos mais precisos. Acosta também propôs uma extensão para pás não logarítmicas, baseada na teoria do perfil delgado. Evidentemente, essa teoria limita sua aplicação às pás de pequena espessura.

Isay (1954) foi um dos primeiros a dar uma contribuição ao problema direto do escoamento potencial. Propôs soluções para os casos de pás infinitamente finas e pás de espessura finita. Em ambos os casos, foram consideradas as situações de grade radial móvel isolada e grade radial móvel precedida de sistema diretor. Foram utilizadas distribuições de vórtices sobre as pás de largura constante, simulando o efeito de grade. A aplicação da condição de tangência do escoamento relativo no contorno das pás resultou numa equação integral de contorno, tendo por incógnita a função de densidade de vórtices.

Hoffmeister (1960) introduziu uma formulação integral exclusivamente de contorno para um caso particular de variação de largura da pá, a qual foi estendida por Murata *et al.* (1978) para o caso de pás logarítmicas de espessura infinitamente fina, esta apesar de ser restrita, pode ser considerada exata.

Giesing (1964) utilizou o método dos painéis para o caso de grades lineares e grades lineares em *tandem*. O autor utilizou densidade de vórtices uniforme em cada painel do contorno das pás discretizadas.

Hess e Smith (1967) apresentaram uma técnica numérica de discretização muito simples e altamente eficiente, denominada de método dos painéis, para o cálculo do escoamento potencial em corpos de geometria de formato arbitrário. Os autores contribuíram decisivamente para o desenvolvimento do método dos painéis e apresentam um sumário da aplicação do método na solução do escoamento potencial para diversos casos de interesse: corpos tridimensionais, aerofólios, hidrofólios, grades axiais, entradas de ar, etc. Porém, não foi apresentada e nem discutida nenhuma aplicação em grades radiais. Segundo o método dos painéis, divide-se a superfície do corpo em elementos de superfície (painéis) de forma genérica. Sobre cada painel admite-se a existência de uma distribuição de singularidades perturbando o escoamento. A forma desta distribuição é fixada: uniforme, linear, etc. A velocidade induzida num certo ponto do escoamento é dada pela soma das contribuições de cada painel, combinando-se linearmente as densidades de singularidades. Se em cada painel for escolhido um determinado “ponto de controle”, a velocidade induzida nesse ponto devida ao conjunto de painéis pode ser calculada. Os coeficientes numéricos dependem do tipo de singularidade empregada, das distâncias entre os pontos de controle, e da geometria do obstáculo (corpo), podendo ser calcula-

dos imediatamente quando se trata do problema direto. Combinando a velocidade induzida no ponto de controle com a velocidade do escoamento não-perturbado (escoamento incidente no corpo), e impondo a condição de contorno aos pontos de controle, resulta um sistema de equações lineares cujas incógnitas são os valores das distribuições de densidades de singularidades. Resolvendo-se o sistema, determinam-se os valores dessas densidades, podendo-se facilmente calcular diretamente as velocidades nos pontos de controle. Em seguida, é possível determinar a pressão nos mesmos pontos, segundo a equação de Bernoulli. As grandes vantagens do método dos painéis são a simplicidade conceitual e a facilidade de adaptação a casos bastante gerais. Além do mais, o método pode ser considerado exato, uma vez que a qualidade numérica dos resultados irá depender apenas da adoção de alguns critérios, e não de simplificações que se façam nas equações que regem o escoamento potencial. Esses critérios estão relacionados ao número, distribuição e forma dos painéis, tipo de singularidade empregada e escolha dos pontos de controle. O método dos painéis só pode ser eficientemente aplicado na solução do problema direto.

Nyiri (1970) e Eremeef (1974) desenvolveram uma formulação integral geral para pás de espessura finita (PEF) válida para o escoamento potencial entre duas superfícies de corrente supostas de revolução. A geometria de interseção do rotor com essas superfícies foi mapeada no plano de uma grade linear, através de uma transformação apropriada. Eremeef apresentou uma formulação para o escoamento potencial que resulta em duas equações integrais de Fredholm: uma de primeira espécie e a outra de segunda espécie. Por meio de uma aproximação para as integrais de campo, tornou-se possível uma formulação integral linear e exclusivamente de contorno. O efeito dessa aproximação não foi devidamente analisado por Nyiri (1970) e Eremeef (1974), apesar desse último ter apresentado procedimentos para refinar as soluções.

Manzanares Filho (1982) apresentou uma formulação para o cálculo do escoamento potencial em grades radiais representativas de rotores centrífugos com pás infinitamente finas (PIF) e de largura constante. A solução numérica foi obtida por meio do método dos painéis. Em cada painel da pá discretizada, foi admitida uma distribuição linear de vórtices. Esse tipo de distribuição facilita a imposição da condição física (condição de Kutta) no bordo de fuga e também da condição de operação (condição de entrada sem choque) no bordo de ataque das pás. Manzanares Filho apresentou diversas características de desempenho aerodinâmico para grades radiais com pás em formato de arco de círculo e em formato de espiral logarítmica.

Fernandes e Oliveira (1991) utilizaram a formulação apresentada por Nyiri e Eremeef, resolvendo a equação integral de Fredholm de segunda espécie, na forma discretizada, para

analisar rotores centrífugos com pás de espessura finita e de largura variável. A solução numérica foi obtida através do método dos painéis, por meio de uma distribuição uniforme de vórtices em cada painel do contorno discretizado das pás.

Lewis (1991), utilizando a formulação clássica de Martensen (1959), também apresentou procedimentos para considerar a variação de largura da pá, porém os seus resultados são mostrados somente para grades radiais de largura constante.

Manzanares Filho e Oliveira (1992) estenderam a formulação apresentada por Manzanares Filho (1982) para o caso de pás infinitamente finas, porém, de largura variável. Os autores utilizaram a mesma aproximação para a integral de campo apresentada por Eremeef, que está relacionada à variação da largura das pás na direção radial.

Oliveira (2001) apresentou um estudo teórico e experimental do escoamento em rotores de ventiladores radiais. O estudo teórico consistiu da análise do escoamento potencial e incompressível. O autor utilizou a mesma formulação apresentada por Niyri e Eremeef e resolveu a equação de Fredholm de segunda espécie por meio do método dos painéis, com distribuição uniforme de densidade de vórtices em cada painel do contorno das pás discretizadas de espessura finita. Oliveira mostrou que, no caso de pás muito finas, com bordos arredondados e excetuando-se as regiões do escoamento muito próximas a esses bordos, o efeito da variação radial de largura das pás é mais importante que o da variação de espessura das pás. Esse fato, segundo o autor, parece indicar que a utilização de modelos de escoamento potencial que desprezam a espessura das pás pode ser recomendável, desde que se leve em conta o efeito da variação radial de largura da pá. Oliveira também apresentou um critério baseado no carregamento das pás (denominado em seu trabalho de número de Richardson) para se definir o número de pás ótimo de rotores de turbomáquinas radiais geradoras (rotores centrífugos). Por meio de várias aplicações em diferentes rotores radiais de bombas e ventiladores, Oliveira mostrou que esse critério é bastante eficiente para estabelecer o número de pás ótimo.

Violato (2004) estendeu o trabalho de Manzanares Filho e Oliveira (1992) para analisar o escoamento potencial em rotores centrífugos com pás auxiliares de espessura desprezível, porém com variação de largura das pás. Violato apresentou diversos resultados referentes às características de desempenho desses rotores para várias posições angulares das pás auxiliares em relação às pás principais e também para vários comprimentos das pás auxiliares.

Hassenpflug (2010), citado no início deste item, propôs um método para resolver analiticamente o escoamento potencial em rotores radiais, com pás de formato arbitrário (porém de largura constante), por meio do método de transformação conforme, mapeando as pás sobre um círculo unitário. O autor utilizou as idéias de Spannhake para resolver o escoamento por

meio de séries de Fourier. Ao contrário do método original de Spannhake, os coeficientes de Fourier não são determinados pelas fórmulas de integração de Euler, que podem incluir séries não-analíticas, mas por expansões analíticas como nos trabalhos de Busemann e Acosta. Os coeficientes de expansões são construídos por meio de álgebra de convolução. Hassenpflug apresentou diversos resultados comparando-os com soluções exatas quando essas existem. Para uma investigação sistemática, a proposta do autor pode não ser tão eficiente para tratar pás de geometria de formato arbitrário (e com variação de largura), como é o caso do método dos painéis.

Neste trabalho, serão utilizadas as formulações apresentadas por Nyiri (1970) e Eremeef (1974) para pás de espessura finita (PEF) e a formulação apresentada por Manzanares Filho e Oliveira (1992) para pás de espessura infinitamente finas (PIF). Essas formulações são para rotores radiais de turbomáquinas geradoras (bombas e ventiladores). Pretende-se estender essa última (formulação para PIF) para analisar o escoamento potencial e incompressível em rotores radiais de turbomáquinas motoras (turbinas hidráulicas). Com base no critério do número de Richardson máximo estabelecido por Oliveira (2001), pretende-se obter uma geometria de rotor radial que seja tão eficiente no modo bomba como no modo turbina.

## 1.4 MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

A principal motivação do presente trabalho está amparada na literatura técnica que relata a possibilidade de o escoamento potencial representar certas características reais do escoamento no interior de rotores radiais de turbomáquinas geradoras, em determinadas condições, como comentado no Item 1.2. Basicamente, são duas condições: uma refere-se ao ângulo de saída das pás que deve ser menor que  $90^\circ$  e a outra refere-se ao cálculo do escoamento potencial que é efetivamente válido no ponto de projeto. Outras motivações, tão importantes quanto à descrita acima, são listadas a seguir:

- 1) Estender a formulação do escoamento potencial realizada para rotores radiais de turbomáquinas geradoras (bombas e ventiladores) para o cálculo do escoamento em rotores radiais de turbomáquinas motoras (turbinas hidráulicas), especificamente para rotores de turbinas de baixas rotações específicas (altas quedas);

- 2) Estender o critério do número e Richardson máximo descrito no Item 1.2 para o caso de rotores radiais de turbomáquinas motoras (turbinas hidráulicas);

3) Obter rotores radiais que são tão eficientes como rotor de bomba como rotor de turbina, utilizando o critério do número e Richardson máximo juntamente com a distribuição de pressões em torno das pás.

## 1.5 OBJETIVOS DO TRABALHO

Em decorrência do Item 1.2, os principais objetivos são listados a seguir:

1) Apresentar formulações para o cálculo do escoamento potencial em rotores radiais de bombas e de turbinas. Essas formulações são para o cálculo do escoamento potencial em rotores radiais com pás de espessura finita (PEF) e com pás de espessura infinita (PIF), ambas para pás de largura variável. Para o caso de PIF, o cálculo do escoamento é feito diretamente no plano da grade radial que representa o rotor. Para o caso de PEF, o cálculo é feito no plano transformado (plano da grade linear) e por meio de uma equação de transformação as características do escoamento são obtidas para o plano da grade radial que representa o rotor;

2) Gerar diversas geometrias de pás, tanto no plano meridional como no plano transversal. No caso de pás de espessura finita (PEF), são geradas pás com variação de espessura e com espessura constante, com regiões dos bordos de ataque e de fuga de formatos variados. No caso de pás infinitamente finas (PIF), são geradas pás com um único formato de curva;

3) Apresentar uma técnica de solução numérica, que é baseada no método dos painéis, para o cálculo do escoamento potencial em rotores radiais de bombas e de turbinas. Para o caso de PEF, é utilizada uma distribuição uniforme de densidade de vórtices em cada painel do contorno discretizado das pás. Para o caso de PIF, é utilizada uma distribuição linear de densidade de vórtices em cada painel da linha representativa discretizada de cada pá;

4) Comparar as soluções numéricas obtidas das formulações para PEF e PIF entre si, e com soluções exatas encontradas na literatura técnica. A finalidade é mostrar as implicações decorrentes da aproximação feita nas duas formulações para o efeito de variação radial da largura da pá, e avaliar a influência da espessura das pás nas características do escoamento;

5) Determinar várias grandezas locais e globais do escoamento potencial em rotores radiais de bombas e de turbinas. Uma dessas grandezas é o número de Richardson, que se baseia no carregamento das pás. De posse dessa grandeza adimensional, pode-se estabelecer o valor mais apropriado do número de pás e também de grandezas geométricas de rotores radiais de bons desempenhos, tanto para o modo bomba como para o modo turbina.

## 1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Na sequência deste trabalho, o Capítulo 2 apresenta as formulações do escoamento potencial para rotores radiais. Uma formulação é para rotores radiais com pás de espessura finita (PEF) e duas são para pás de espessura infinitamente fina (PIF).

O Capítulo 3 apresenta as soluções numéricas para a equação integral de contorno resultante da formulação para PEF e para PIF apresentadas no Capítulo 2. Essas soluções são obtidas pelo método dos painéis.

O Capítulo 4 apresenta diversas grandezas locais e globais do escoamento em rotores radiais, entre elas o carregamento hidrodinâmico das pás e o número de Richardson, que são úteis para se obter rotores radiais de bons desempenhos, tanto para o modo bomba como para o modo turbina.

O Capítulo 5 apresenta os resultados numéricos para rotores radiais de bombas e de turbinas. Alguns comentários relevantes sobre esses resultados são descritos.

O Capítulo 6 apresenta as principais conclusões extraídas deste trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

O Apêndice A apresenta a formulação detalhada para rotores radiais com pás de espessura finita (PEF).

O Apêndice B apresenta a formulação detalhada para rotores radiais com pás de espessura infinitamente fina (PIF), que é diferente daquela formulação clássica pelo método das singularidades apresentada no Capítulo 2.

O Apêndice C apresenta a geometria dos rotores utilizados neste trabalho, tanto para a seção meridional como para a seção transversal.

O Apêndice D apresenta diversos resultados numéricos relacionados àqueles do Capítulo 5.

Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas neste trabalho.

## Capítulo 2

# FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Este capítulo apresenta a formulação do problema direto (conhecida a geometria do rotor determina-se as características do escoamento) do escoamento potencial, incompressível e permanente em rotores radiais de turbomáquinas. O escoamento é considerado bidimensional, mas leva em consideração a variação da largura das pás. Três formulações são apresentadas: 1) Formulação integral de contorno para pás de espessura finita (PEF), 2) Formulação integral de contorno para pás infinitamente finas (PIF) e 3) Formulação clássica por meio de singularidades para pás infinitamente finas (PIF).

As duas primeiras formulações para PEF e PIF são detalhadas nos Apêndices A e B respectivamente para rotores de turbomáquinas geradoras (rotores centrífugos). Essas formulações, além de considerar ou não a espessura das pás, apresentam como principal característica uma função-núcleo da equação integral, para cada formulação, que permite considerar uma única pá (mas que leva em consideração todas as outras pás do rotor) na solução de cada equação (para PEF e PIF), devido à periodicidade do escoamento através do rotor. Essa característica faz com que o tempo computacional para a solução numérica de cada equação integral seja independente do número de pás.

A terceira formulação, além de ser apropriada para PIF (mas pode ser estendida para PEF), tem como principal característica permitir a análise do escoamento independentemente se há ou não periodicidade do escoamento, ou seja, as pás podem estar igualmente espaçadas

entre si ou não. Ao contrário das duas primeiras formulações, o tempo computacional para a solução numérica da equação resultante da formulação do escoamento é dependente do número de pás. Esse tempo aumenta com o aumento do número de pás.

Nos capítulos que seguem, serão apresentadas as implicações decorrentes de cada uma dessas três formulações.

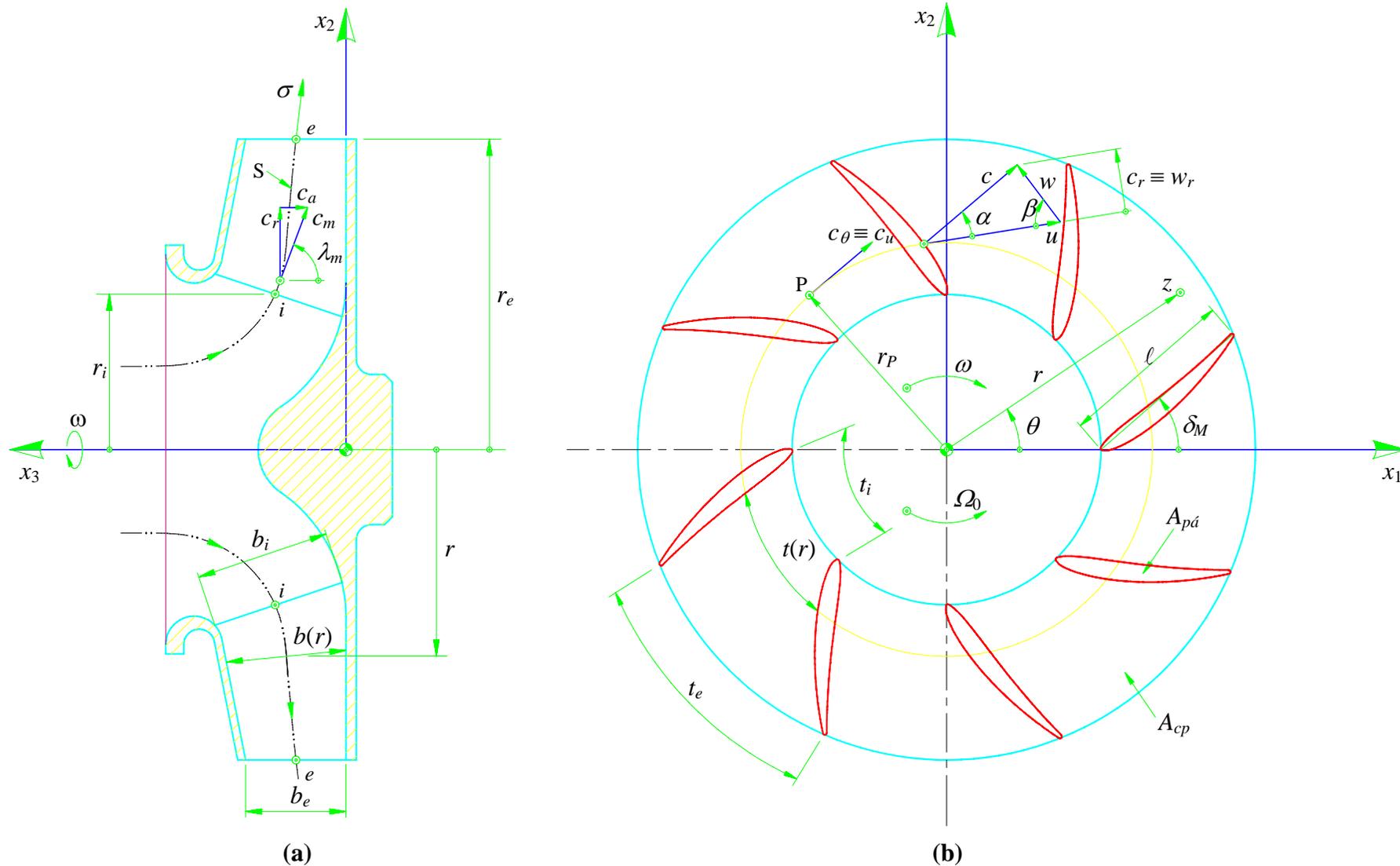
## **2.1 FORMULAÇÃO INTEGRAL DO ESCOAMENTO POTENCIAL PARA ROTORES RADIAIS COM PÁS DE ESPESSURA FINITA (PEF)**

Este item está dividido em três subitens principais: 2.1.1) Equações do escoamento para os planos físico e transformado, onde são apresentadas as equações diferenciais do escoamento e as equações de transformação, tanto da geometria como do escoamento no rotor; 2.1.2) Determinação do campo de velocidades do escoamento potencial para o plano transformado, onde é apresentado, por meio do teorema integral de Green, o desenvolvimento para transformar a equação diferencial (equação do tipo Poisson) do escoamento absoluto em equação integral (equações de Fredholm de primeira e de segunda espécies) do escoamento relativo no contorno dos perfis (pás); 2.1.3) Equações complementares, onde é apresentado o desenvolvimento, com base na equação da continuidade, para tratar as integrais de domínio onde aparecem na formulação apresentada no Subitem 2.1.2.

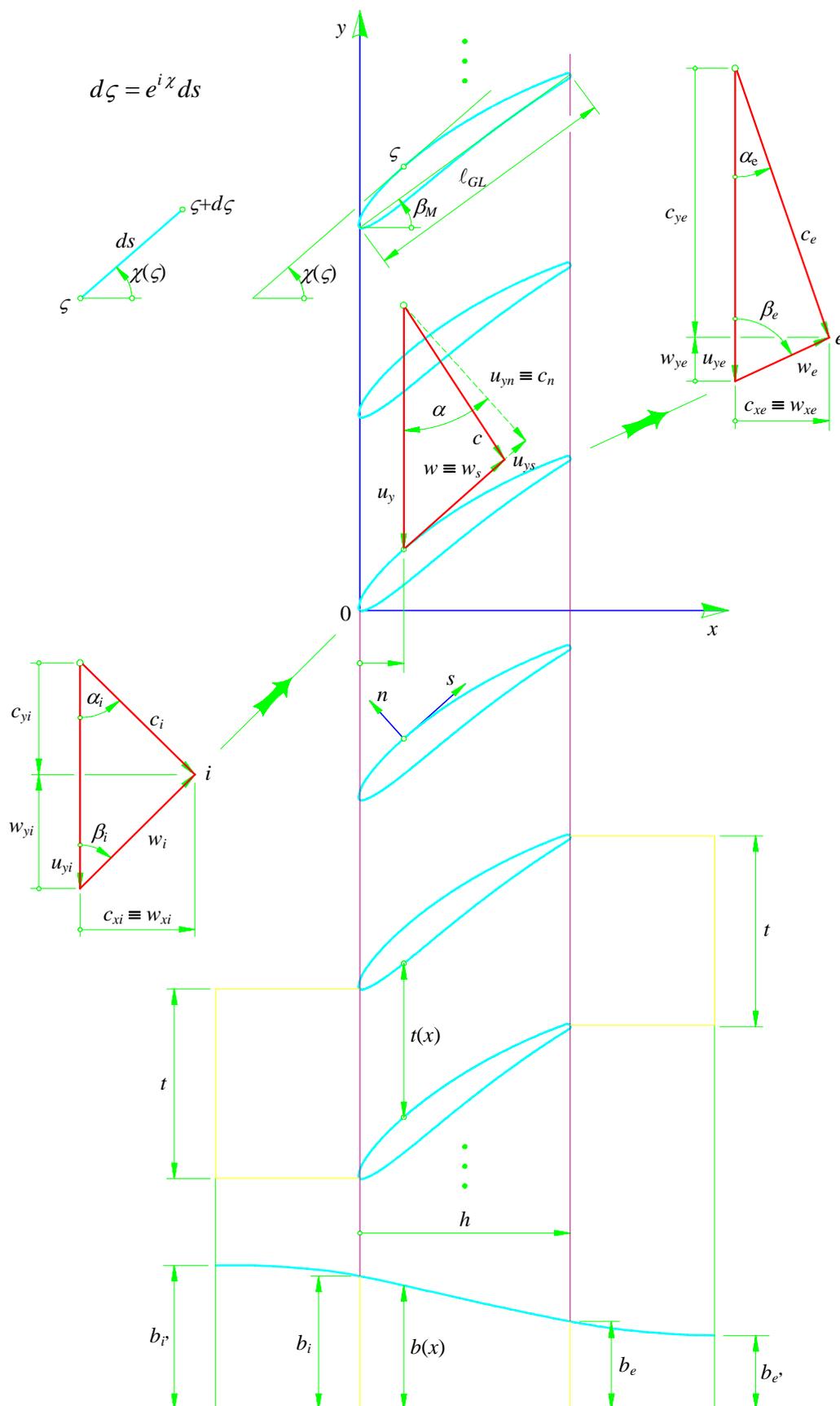
### **2.1.1 Equações diferenciais do escoamento para os planos físico e transformado**

#### **a) Equações diferenciais do escoamento**

As Figuras 2.1 e 2.2 apresentam os esquemas de uma grade radial e de uma grade linear, ambas dotadas de rotação e de largura das pás,  $b = b(r)$ , variável, respectivamente, no plano físico e no plano transformado. O escoamento absoluto através da grade radial é considerado irrotacional e incompressível, ou seja, potencial. As superfícies de corrente do escoamento são consideradas axialmente simétricas, de modo que o escoamento sobre essas superfícies possa ser tratado como bidimensional.



**Figura 2.1** Grade radial móvel (plano físico) com pás de espessura finita e de largura variável:  
**(a)** seção meridional e **(b)** seção transversal (Oliveira, 2001)



**Figura 2.2** Grade linear móvel de largura  $b = b(x)$  variável (plano transformado), Oliveira (2001)

A equação da continuidade do escoamento absoluto,  $c$ , para o plano físico, segundo Nyiri (1970), é dada por

$$\frac{\partial c_\sigma}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_\theta}{\partial \theta} + \left( \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} + \frac{1}{b} \frac{db}{d\sigma} \right) c_\sigma = 0, \quad (2.1)$$

e a equação da irrotacionalidade do escoamento absoluto é dada por

$$\frac{\partial c_\theta}{\partial \sigma} - \frac{1}{r} \frac{\partial c_\sigma}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} c_\theta = 0. \quad (2.2)$$

As Equações (2.1) e (2.2) podem ser escritas em função das componentes das velocidades do escoamento relativo,  $w_\sigma$  e  $w_\theta$ .  $\sigma = \sigma(r)$  representa a coordenada natural da geratriz da superfície de corrente (S) a partir da circunferência de raio  $r_i$  no plano meridional, Figura 2.1, e  $\theta$  representa o ângulo polar. Para uma turbomáquina estacionária (fixada numa estrutura sem movimento de translação), se o rotor gira com uma velocidade angular,  $\omega$ , a velocidade absoluta,  $c$ , é relacionada à velocidade relativa,  $w$ , pela equação

$$\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}. \quad (2.3)$$

A velocidade circunferencial,  $\vec{u}$ , é dada por

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}_p, \quad (2.4)$$

sendo  $\vec{r}_p$  é o vetor-posição de uma particular escoando no interior do rotor, e  $\vec{\omega}$  é o vetor referente à velocidade angular do rotor, conforme a Figura 2.1, dirigido segundo o eixo  $x_3$ , portanto,

$$u_\sigma = 0 \quad (2.5)$$

e

$$u_\theta = -r(\sigma)\omega. \quad (2.6)$$

Considerando as Equações (2.3), (2.5) e (2.6), as Equações (2.1) e (2.2) tornam-se

$$\frac{\partial w_\sigma}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \left( \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} + \frac{1}{b} \frac{db}{d\sigma} \right) w_\sigma = 0 \quad (2.7)$$

e

$$\frac{\partial w_\theta}{\partial \sigma} - \frac{1}{r} \frac{\partial w_\sigma}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} w_\theta = -2\omega \frac{dr}{d\sigma}. \quad (2.8)$$

### b) Transformação do escoamento

A superfície do escoamento (S) no plano físico (Figura 2.1) é mapeada para o plano transformado (Figura 2.2). A transformação procurada é da forma  $x = x(\sigma)$  e  $y = y(\theta)$ .

Conforme Nyiri (1970) e Eremeev (1974), veja também o Apêndice A, as equações de transformação do plano físico  $(\sigma, \theta)$  para o plano transformado  $(x, y)$  são dadas por

$$x = \frac{Nt}{2\pi} \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{r(\sigma)}, \quad (2.9)$$

e

$$y = \frac{Nt}{2\pi} \theta, \quad (2.10)$$

sendo  $N$  o número de pás do rotor e  $t = t(r)$  o passo (distância entre duas pás consecutivas).

A transformação de velocidades do plano físico,  $c_R$ , para o plano transformado,  $c$ , é dada por (Veja o Apêndice A)

$$c_{GL} = \frac{2\pi r}{Nt} c_{GR}. \quad (2.11)$$

Considerando a equação de transformação anterior, as equações do escoamento absoluto para o plano físico, Equações (2.1) e (2.2), são escritas para o plano transformado conforme as Equações (2.12) e (2.13).

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = -\frac{1}{b} \frac{db}{dx} c_x \quad (2.12)$$

e

$$\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} = 0. \quad (2.13)$$

Conforme a Equação (2.13), o escoamento absoluto no plano transformado é irrotacional, porque foi considerado irrotacional o escoamento absoluto no plano físico.

As equações do escoamento relativo para o plano físico, Equações (2.7) e (2.8), são escritas para o plano transformado na seguinte forma (Apêndice A):

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{1}{b} \frac{db}{dx} w_x \quad (2.14)$$

e

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} = -2\omega r \frac{dr}{dx} \frac{2\pi}{Nt} \quad (2.15)$$

O Apêndice A apresenta as equações de transformação da geometria e do escoamento para casos particulares de grades lineares ( $b$  e  $r$  são constantes) e grades puramente radiais ( $b$  é constante e  $r$  é variável).

## 2.1.2 Determinação do campo de velocidades do escoamento potencial para o plano transformado

### a) Obtenção da equação integral por meio da segunda identidade de Green

O campo de velocidades do escoamento potencial no plano transformado (grade linear móvel) deriva de um potencial de velocidade,  $\Phi(x,y)$ . Pode ser demonstrado através de um balanço volumétrico num elemento diferencial de fluido escoando na grade linear que, para um escoamento absoluto incompressível e irrotacional, obtém-se a equação do tipo Poisson representada na Equação (2.16).

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = B(x) c_x(x, y) \quad (2.16)$$

sendo

$$B(x) = -\frac{1}{b(x)} \frac{db(x)}{dx} \quad (2.17)$$

As condições de contorno para o potencial de velocidades, conforme a Figura 2.2, são

$$\text{Infinito à montante da grade: } \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=-\infty} = c'_{i'x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{x=-\infty} = c'_{i'y}, \quad (2.18.a)$$

$$\text{Infinito à jusante da grade: } \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=+\infty} = c'_{e'x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{x=+\infty} = c'_{e'y}, \quad (2.18.b)$$

e

$$\text{Contorno do perfil } (\kappa): \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{(\kappa)} = w_n \Big|_{(\kappa)} = 0. \quad (2.18.c)$$

A solução da Equação (2.16), satisfazendo as condições de contorno, é determinada através do teorema integral de Green, de acordo com a segunda identidade de Green, ou seja,

$$\iint_{(D)} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dx' dy' + \oint_{(C)} \left( u \frac{\partial v}{\partial n'} - v \frac{\partial u}{\partial n'} \right) ds' = 0, \quad (2.19)$$

sendo  $u(x', y')$  e  $v(x', y')$  duas funções cujas primeiras derivadas são contínuas em um domínio simplesmente conexo (D) e sobre a sua fronteira (C);  $\partial/\partial n'$  significa a derivada normal interior (por definição, a normal exterior é oposta) e  $s'$  é o comprimento da linha ao longo da fronteira (C).

Seja M o ponto de coordenadas  $x'$  e  $y'$ , e, P um ponto de coordenadas  $x$  e  $y$ , tal que

$$MP = d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}. \quad (2.20)$$

A função  $\ln d$  é harmônica e regular em todo ponto M diferente de P, e pode ser verificado facilmente que  $\nabla^2 (\ln d) = 0$ .

Pode ser demonstrado (Apêndice A) que, para um ponto P interior ao domínio (D), a Equação (2.19) torna-se

$$2\pi \Phi(P) = \iint_{(D)} (\ln d) \nabla^2 \Phi dx' dy' + \oint_{(C)} (\ln d) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} ds' - \oint_{(C)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} (\ln d) ds', \quad (2.21)$$

e para um ponto P exterior ao domínio (D), a Equação (2.19) torna-se

$$0 = \iint_{(D)} (\ln d) \nabla^2 \Phi dx' dy' + \oint_{(C)} (\ln d) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} ds' - \oint_{(C)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} (\ln d) ds'. \quad (2.22)$$

## b) Equação integral do escoamento

Devido à periodicidade do escoamento, o plano transformado pode ser dividido em uma série infinita de domínios  $(T_\mu)$  idênticos ao domínio  $(T)$ , Figura A.4 (Apêndice A). Como o domínio  $(T)$  contém o ponto  $P$ , as Equações (2.21) e (2.22) podem ser utilizadas, dependendo se o ponto  $P$  está interior ou exteriormente ao domínio  $(T)$ . Para os outros domínios  $(T_\mu)$ , o ponto  $P$  é exterior e, nesse caso, utiliza-se a Equação (2.22). O somatório em  $\mu$  fornece o potencial de velocidade  $\Phi$  no ponto  $P$ , ou seja,

$$\left. \begin{array}{l} P \in (T): \\ P \notin (T): \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\pi\Phi(P) \\ 0 \end{array} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \left\{ \iint_{(T_\mu)} (\ln r_\mu) \nabla^2 \Phi \, dx' \, dy' + \oint_{(C_\mu)} (\ln r_\mu) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \, ds' + \right. \\ \left. - \oint_{(C_\mu)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} (\ln r_\mu) \, ds' \right\}, \quad (2.23)$$

sendo

$$r_\mu = \sqrt{(x-x'_\mu)^2 + (y-y'_\mu)^2}. \quad (2.24)$$

Derivando a Equação (2.23), primeiramente em relação a  $x$  e depois em relação a  $y$ , obtêm-se as componentes da velocidade absoluta,  $c$ , nas direções  $x$  e  $y$ , ou seja,  $c_x(P)$  e  $c_y(P)$ . Após alguns desenvolvimentos, demonstra-se, no Apêndice A, que

$$\left. \begin{array}{l} z \in (T): \\ z \notin (T): \end{array} \right\} \begin{array}{l} \bar{c}(z) \\ 0 \end{array} = \bar{c}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\kappa)} \bar{c}(\zeta') \lambda(\zeta', z) \, d\zeta' + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') \lambda(z, z') \, dx' \, dy', \quad (2.25)$$

que é a forma integral da equação diferencial (2.16).

Na Equação (2.25),  $z = x + iy$  representa a notação complexa das coordenadas do ponto  $P$  do domínio  $(T)$  e  $z' = x' + iy'$  representa a notação complexa do ponto de integração. Do mesmo modo,  $\zeta' = \xi' + i\eta'$  representa a notação complexa das coordenadas do ponto  $P$  do contorno  $(\kappa)$  do perfil (pá). As demais grandezas são dadas por

$$\bar{c}(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = c_x - i c_y, \quad (2.26)$$

sendo  $\bar{c}(z)$  a velocidade complexa conjugada do escoamento absoluto num ponto P do domínio (T).

$$\bar{c}_\infty = \frac{\bar{c}_{i'} + \bar{c}_{e'}}{2}, \quad (2.27)$$

sendo  $\bar{c}_\infty$ ,  $\bar{c}_{i'}$  e  $\bar{c}_{e'}$  as velocidades complexas conjugadas do escoamento absoluto médio, antes ( $i'$ ) e após ( $e'$ ) da grade, respectivamente.

$$\lambda(z, z') = \frac{\pi}{t} \operatorname{cotagh} \left[ \frac{\pi}{t} (z - z') \right] \quad (2.28)$$

é a função-núcleo da equação integral que resulta de um somatório de  $-\infty$  a  $+\infty$ , Equação (A.64), que considera todos os domínios correspondentes a cada perfil da grade linear.

$$d\zeta' = e^{i\chi'} ds' \quad (2.29)$$

relaciona o comprimento infinitesimal,  $ds'$ , do contorno do perfil numa dada posição,  $s'$ , Figura 2.2, com a sua respectiva coordenada complexa  $\zeta'$ . Com a Equação (2.29),  $ds'$ , que aparece na integral de contorno da Equação (2.23), torna-se em  $d\zeta'$  na Equação (2.25).

Ainda na Equação (2.25) aparecem os termos  $B(x')$ , dado na Equação (2.17), e  $c_x(z') \equiv c_x(x', y')$ . Observa-se na Equação (2.16) que esses dois termos estão multiplicados entre si, além do mais  $c_x(x', y')$  resulta da derivada em relação a  $x$  do potencial de velocidade,  $\Phi = \Phi(x', y')$ , tornando a equação diferencial do tipo Poisson, Equação (2.16), não-linear e consequentemente trazendo certas dificuldades ao resolver a integral de domínio da Equação (2.25). Essas dificuldades são superadas por meio de uma aproximação que leva em consideração a equação integral da continuidade. Esse assunto será abordado no Item 2.1.3.

### c) Relações entre as componentes das velocidades a montante e a jusante da grade

Os valores limites da função-núcleo,  $\lambda(z, z')$ , a montante e a jusante da grade linear são

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \lambda(z, z') = \mp \frac{\pi}{t}. \quad (2.30)$$

Fazendo o limite da Equação (2.25) quando  $x \rightarrow \mp\infty$  e considerando (2.30), obtém-se

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \bar{c}(z) = \bar{c}_{i',e'} = \bar{c}_\infty \mp \frac{i}{2t} \oint_{(\kappa)} \bar{c}(\zeta') d\zeta' \mp \frac{1}{2t} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') dx' dy'. \quad (2.31)$$

Considerando (2.27), a Equação (2.31) torna-se

$$\bar{c}_{i'} - \bar{c}_{e'} = -\frac{i}{t} \oint_{(\kappa)} \bar{c}(\zeta') d\zeta' - \frac{1}{t} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') dx' dy'. \quad (2.32)$$

Conforme a Figura 2.2, a velocidade  $\bar{c}(\zeta)$  pode ser representada pelas componentes tangencial,  $c_s$ , e normal,  $c_n$ , ao contorno do perfil, ou seja,

$$\bar{c}(\zeta) = (c_s - i c_n) e^{-i\chi}. \quad (2.33)$$

Após alguns desenvolvimentos e separando as partes real e imaginária, a Equação (2.32) torna-se (Item A.2.3 do Apêndice A)

$$c_{xe'} - c_{i'x} = \frac{1}{t} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') dx' dy' \quad (2.34)$$

e

$$c_{yi'} - c_{ye'} = \frac{\Gamma}{t}. \quad (2.35)$$

A circulação,  $\Gamma$ , é dada por

$$\Gamma = \oint_{(\kappa)} \bar{c}(\zeta) d\zeta. \quad (2.36)$$

#### d) Equação integral da velocidade absoluta no contorno do perfil

Quando o ponto  $z$  tende ao ponto  $\zeta$  do contorno do perfil, a aplicação da fórmula de Plemej conduz às seguintes equações integrais (veja a Equação (2.25)):

$$\begin{aligned} \bar{c}^{\pm}(\zeta) = & \pm \frac{1}{2} \bar{c}(\zeta) + \bar{c}_{\infty} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\kappa)} \bar{c}(\zeta') \lambda(\zeta', \zeta) d\zeta' + \\ & + \frac{1}{2\pi} \iint_{(T)} B(x') c_x(z) \lambda(\zeta, z') dx' dy', \end{aligned} \quad (2.37)$$

sendo  $\bar{c}^+$  e  $\bar{c}^-$  os valores limites obtidos, respectivamente, quando  $z \in (T)$  e  $z \notin (T)$ , e

$$\bar{c}^+ - \bar{c}^- = \bar{c}(\zeta). \quad (2.38)$$

No caso onde  $z \notin (T)$ , conforme a Equação (2.25), a velocidade complexa conjugada é nula em todos os pontos, portanto,

$$\bar{c}^-(\zeta) = 0 \quad (2.39)$$

e, em consequência,

$$\bar{c}^+(\zeta) = \bar{c}(\zeta). \quad (2.40)$$

Substituindo as Equações (2.39) e (2.40) na Equação (2.37), obtém-se

$$\frac{\bar{c}(\zeta)}{2} = \bar{c}_{\infty} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\kappa)} \bar{c}(\zeta') \lambda(\zeta, \zeta') d\zeta' + \frac{1}{2\pi} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') \lambda(\zeta, z') dx' dy'. \quad (2.41)$$

Considerando a Equação (2.33), tem-se que,

$$\Re \left[ \frac{\bar{c}(\zeta)}{2} e^{i\chi} \right] = \frac{c_s(\zeta)}{2} \quad (2.42)$$

e

$$\Im \left[ \frac{\bar{c}(\zeta)}{2} e^{i\chi} \right] = -\frac{c_n(\zeta)}{2}. \quad (2.43)$$

Impondo a condição de que o contorno do perfil é uma linha de corrente, ou seja, que não há escoamento através dele, tem-se

$$c_s = w_s + u_s \quad (2.44)$$

e

$$c_n = u_n. \quad (2.45)$$

Para  $c_n$  fixado, a solução da Equação (2.42) ou (2.43) permite obter a distribuição de velocidades do escoamento potencial.

Utilizando a Equação (2.28), pode-se escrever que

$$\frac{1}{2} \operatorname{cotagh} \left[ \frac{\pi}{t} (z - z') \right] = J(z, z') + iK(z, z'), \quad (2.46)$$

sendo

$$J(z, z') = \frac{1}{2} \frac{\sinh \left[ \frac{2\pi}{t} (x - x') \right]}{\cosh \left[ \frac{2\pi}{t} (x - x') \right] - \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (y - y') \right]} \quad (2.47.a)$$

e

$$K(z, z') = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{t} (y - y') \right]}{\cosh \left[ \frac{2\pi}{t} (x - x') \right] - \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (y - y') \right]}. \quad (2.47.b)$$

As seguintes funções são definidas:

$$\lambda_I(z, z') = -J(z, z') \operatorname{sen} \chi - K(z, z') \cos \chi \quad (2.48)$$

e

$$\lambda_{II}(z, z') = J(z, z') \cos \chi - K(z, z') \operatorname{sen} \chi. \quad (2.49)$$

Também,

$$c_{Bx}(\zeta) = \frac{1}{t} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') J(\zeta, z') dx' dy' \quad (2.50)$$

e

$$c_{By}(\zeta) = -\frac{1}{t} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') K(\zeta, z') dx' dy'. \quad (2.51)$$

Considerando (2.46), (2.48), (2.49), (2.50) e (2.51), as Equações (2.42) e (2.43) tornam-se, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{c_s(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') c_s(\zeta') ds' = [c_{\infty x} + c_{Bx}(\zeta)] \cos \chi + [c_{\infty y} + c_{By}(\zeta)] \sin \zeta + \\ + \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_{II}(\zeta, \zeta') u_n(\zeta') ds' \end{aligned} \quad (2.52)$$

e

$$\begin{aligned} -\frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_{II}(\zeta, \zeta') c_s(\zeta') ds' = [c_{\infty x} + c_{Bx}(\zeta)] \sin \chi + [c_{\infty y} + c_{By}(\zeta)] \cos \chi + \\ + \frac{u_n(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') u_n(\zeta') ds'. \end{aligned} \quad (2.53)$$

As equações anteriores são equações integrais do tipo Fredholm. A Equação (2.52) é uma equação de Fredholm de segunda espécie e a Equação (2.53) é uma equação de Fredholm de primeira espécie. É possível mostrar que a função-núcleo  $\lambda_I$  da Equação (2.52) é limitada quando o ponto de integração  $\zeta'$  tende para o ponto  $\zeta$ . Por outro lado, a função-núcleo  $\lambda_{II}$  da Equação (2.53) é singular. Desta forma, a escolha da equação de Fredholm de segunda espécie é preferível para a determinação das incógnitas  $c_s(\zeta)$ .

### e) Comportamento das funções-núcleo $\lambda_I$ e $\lambda_{II}$

As funções-núcleo,  $\lambda_I$  e  $\lambda_{II}$ , das equações integrais (2.52) e (2.53) são do tipo  $f[\xi', \eta'(\xi')]/g[\xi', \eta'(\xi')]$ . Quando  $\xi' \rightarrow \xi$  e  $\eta' \rightarrow \eta$ , obtém-se  $f/g = 0/0$ .

Aplicando duas vezes a regra de L' Hospital à função-núcleo,  $\lambda_I$  (Equação (2.48) com  $z$  e  $z'$  pertencentes ao contorno do perfil, ou seja,  $\zeta$  e  $\zeta'$ ) ou à Equação (2.54) abaixo

$$\lambda_I = \frac{f_I}{g} = \frac{\cos \chi \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right] - \operatorname{sen} \chi \operatorname{senh} \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right]}{2 \operatorname{cosh} \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right] - 2 \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right]}. \quad (2.54)$$

resulta, após derivação em relação a  $\xi'$  (veja o Item A.2.5 do Apêndice A), que o

$$\lim_{\substack{\xi' \rightarrow \xi \\ \eta' \rightarrow \eta}} \frac{f_I''}{g''} = -\frac{t}{4\pi} \cos^3 \chi \frac{d^2 \eta}{d\xi^2}. \quad (2.55)$$

Se a curva  $\eta(\xi)$  é conhecida na forma paramétrica,  $\xi(s)$  e  $\eta(s)$ , pode-se demonstrar que a Equação (2.55) torna-se

$$\lambda_I \Big|_{\substack{\xi' \rightarrow \xi \\ \eta' \rightarrow \eta}} = \lim_{\substack{\xi' \rightarrow \xi \\ \eta' \rightarrow \eta}} \frac{f_I''}{g''} = -\frac{t}{4\pi R_c}, \quad (2.56)$$

sendo  $R_c$  o inverso da curvatura de uma curva regular num ponto dessa curva,  $C_c$ , dada por

$$C_c = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \chi}{\Delta s} = \frac{d\chi}{ds} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{d\xi}{ds} & \frac{d\eta}{ds} \\ \frac{d^2\xi}{ds^2} & \frac{d^2\eta}{ds^2} \end{vmatrix}}{\left[ \left( \frac{d\xi}{ds} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{ds} \right)^2 \right]} = \cos \chi \frac{d}{ds} (\sin \chi) - \sin \chi \frac{d}{ds} (\cos \chi) = \frac{d\chi}{ds}. \quad (2.57)$$

Fazendo um procedimento semelhante para a função-núcleo  $\lambda_{II}$ , Equação (2.49), tem-se

$$\lambda_{II} = \frac{f_{II}}{g} = \frac{\cos \chi \sinh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right] + \sin \chi \sen \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right]}{2 \cosh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right] - 2 \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right]}, \quad (2.58)$$

e aplicando a regra de L' Hospital resulta, após derivar a Equação (2.58) em relação a  $\xi'$ , que

$$\frac{f_{II}'}{g'} = \frac{\cos \chi \cosh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right] - \frac{d\eta'}{d\xi'} \sin \chi \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right]}{-2 \sinh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right] - 2 \frac{d\eta'}{d\xi'} \sen \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right]}. \quad (2.59)$$

No limite, para  $\xi' \rightarrow \xi$  e  $\eta' \rightarrow \eta$ ,  $f_{II}'$  tende para  $-2\pi/(t \cos \chi)$  e  $g'$  tende para zero; portanto, considerando a relação  $f_{II}'/g'$  e a Equação (2.58),  $\lambda_{II}$  cresce indefinidamente.

## f) Equação integral da velocidade relativa no contorno do perfil

Conforme a Figura 2.2, a velocidade conjugada  $\bar{u} = -i u_y$  pode ser representada pelas componentes tangencial,  $u_s$ , e normal,  $u_n$ , ao contorno do perfil, ou seja,

$$-iu_y = (u_s - iu_n) e^{-i\chi}, \quad (2.60)$$

sendo

$$u_s = \Re(-iu_y e^{i\chi}) = u_y \operatorname{sen} \chi \quad (2.61)$$

e

$$u_n = \Im(-iu_y e^{i\chi}) = u_y \operatorname{cos} \chi. \quad (2.62)$$

Sendo  $c_s = w_s + u_s$  e  $c_n = u_n$ , resulta, conforme as Equações (2.61) e (2.62), que

$$c_s = w_s + u_y \operatorname{sen} \chi \quad (2.63)$$

e

$$c_n = u_n = u_y \operatorname{cos} \chi. \quad (2.64)$$

Substituindo (2.63) e (2.64) na Equação (2.52), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{w_s(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') w_s(\zeta') ds' &= [c_{\infty x} + c_{Bx}(\zeta)] \operatorname{cos} \chi + [c_{\infty y} + c_B(\zeta)] \operatorname{sen} \chi + \\ - \frac{u_y(\zeta) \operatorname{sen} \chi}{2} + \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} [\lambda_I(\zeta, \zeta') \operatorname{sen} \chi' + \lambda_{II}(\zeta, \zeta') \operatorname{cos} \chi'] u_y(\zeta') ds', \end{aligned} \quad (2.65)$$

ou, considerando (2.48) e (2.49),

$$\begin{aligned} \frac{w_s(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') w_s(\zeta') ds' &= [c_{\infty x} + c_{Bx}(\zeta)] \operatorname{cos} \chi + [c_{\infty y} + c_{By}(\zeta)] \operatorname{sen} \chi + \\ - \frac{u_y(\zeta) \operatorname{sen} \chi}{2} + \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} [J(\zeta, \zeta') \operatorname{cos}(\chi + \chi') - K(\zeta, \zeta') \operatorname{sen}(\chi + \chi')] u_y(\zeta') ds'. \end{aligned} \quad (2.66)$$

A Equação (2.66) é a equação integral para a velocidade relativa no contorno do perfil no plano transformado. As componentes  $c_{Bx}$  e  $c_{By}$  da velocidade induzida pela variação da largura das pás não podem ser calculadas diretamente, porque a componente  $c_x(z)$  está no integrando das Equações (2.50) e (2.51), portanto, há necessidade de procedimento iterativo.

Nos casos particulares de escoamento puramente axial ou puramente radial, onde as linhas de corrente estão, respectivamente, sobre cilindros coaxiais ou planos paralelos perpendiculares ao eixo do rotor (nesses casos  $b = b(x)$  é constante), a Equação (2.65) é simplificada porque  $B(x) = -(1/b) db/dx = 0$ .

### 2.1.3 Equações complementares

Conforme apresentado no Item 2.1.2, a velocidade relativa tangencial sobre o contorno do perfil é dada pela equação integral (2.66). A solução desta equação pode ser obtida somente por procedimento iterativo, porque a componente da velocidade absoluta  $c_x(z')$ , em princípio desconhecida, se encontra nos integrandos das Equações (2.50) e (2.51), ou seja, respectivamente, em  $c_{Bx}(\zeta)$  e  $c_{By}(\zeta)$ , que estão no lado direito da Equação (2.66). A fim de se evitar tal iteração, propõe-se neste item uma aproximação que é baseada na equação da continuidade, denominada de primeira aproximação, para o cálculo de  $c_{Bx}(\zeta)$  e  $c_{By}(\zeta)$ .

#### a) Componentes $c_{x\infty}$ e $c_{y\infty}$

As componentes  $c_{x\infty}$  e  $c_{y\infty}$  são determinadas pela equação da continuidade e pela Equação (2.36), ou seja,

$$c_{xi} = c_{xe} \frac{b_e}{b_i} \quad (2.67)$$

e

$$c_{yi} - c_{ye} = \frac{\Gamma}{t} = \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} c_s ds, \quad (2.36)$$

sendo  $b_i$  e  $b_e$  são as larguras na entrada e na saída da pá, conforme mostra a Figura 2.2.

Considerando (2.67) e (2.36), obtém-se

$$c_{x\infty} = \frac{c_{xi} + c_{ye}}{2} = \frac{c_{xi}}{2} \left(1 + \frac{b_i}{b_e}\right) \quad (2.68)$$

e

$$c_{y\infty} = \frac{c_{4yi} + c_{ye}}{2} = c_{yi} - \frac{1}{2t} \oint_{(\kappa)} c_s ds. \quad (2.69)$$

A integral de linha da velocidade absoluta na Equação (2.69) pode ser representada por

$$\oint_{(\kappa)} c_s ds = \oint_{(\kappa)} w_s ds + \oint_{(\kappa)} u_s ds. \quad (2.70)$$

Após alguns desenvolvimentos (veja o Item A.3 do Apêndice A), obtém-se

$$\oint_{(\kappa)} u_s ds = -a_p u_{ye} t, \quad (2.71)$$

sendo

$$a_p = \frac{N A_{pá}}{\pi r_e^2}, \quad (2.72)$$

onde  $A_{pá}$  é a área da pá.

Substituindo a Equação (2.71) na Equação (2.70), a Equação (2.69) torna-se

$$c_{y\infty} = c_{4yi} - \frac{1}{2t} \oint_{(\kappa)} w_s ds + \frac{a_p u_{ye}}{2}. \quad (2.73)$$

## b) Componentes $c_{Bx}$ e $c_{By}$

Conforme apresentado no Item 2.1.2, para um ponto de cálculo genérico,  $\zeta$ , sobre a pá, as componentes  $c_{Bx}(\zeta)$  e  $c_{By}(\zeta)$  são dadas pelas Equações (2.50) e (2.51). Escrevendo novamente estas equações com o superescrito (1) em  $c_{Bx}(\zeta)$  e  $c_{By}(\zeta)$  para indicar o cálculo da primeira aproximação, tem-se

$$c_{Bx}^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{t} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') J(\zeta, z') dx' dy' \quad (2.74)$$

e

$$c_{By}^{(1)}(\zeta) = -\frac{1}{t} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') K(\zeta, z') dx' dy'. \quad (2.75)$$

Como  $c_x(z')$  é uma função, em princípio, desconhecida, pode-se considerar como uma primeira aproximação o valor médio da velocidade meridional do escoamento, obtido por meio da equação da continuidade, sem levar, ainda, em consideração a obstrução devido à presença das pás (espessura das pás), ou seja,

$$c_m^{(1)} = \frac{Q}{2\pi r b}. \quad (2.76)$$

No plano transformado (plano da grade linear), a velocidade  $c_m^{(1)}$ , dada pela Equação (2.76) e considerando a equação de transformação de velocidades, Equação (2.11), é

$$c_x^{(1)} = \frac{2\pi}{Nt} r c_m^{(1)} = \frac{Q}{Nt b(x')}. \quad (2.77)$$

Na entrada da grade, tem-se

$$c_{xi} = \frac{Q}{Nt b_i}. \quad (2.78)$$

Combinando as Equações (2.77) e (2.78), obtém-se

$$c_x^{(1)} = c_{xi} \frac{b_i}{b(x')}. \quad (2.79)$$

Considerando a Equação (2.79), pode-se desenvolver as integrais dadas pelas Equações (2.74) e (2.75). Após alguns desenvolvimentos (veja o Item A.3 do Apêndice A), obtém-se

$$c_{Bx}^{(1)}(\zeta) \cong c_{xi} \left[ \frac{b_i}{b(\xi)} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b_i}{b_e}\right) \right] \quad (2.80)$$

e

$$c_{By}^{(1)}(\zeta) \cong 0. \quad (2.81)$$

Considerando, agora, a obstrução do escoamento devida à espessura da pá, a Equação (2.80) torna-se

$$c_{Bx}^{(1)}(\zeta) \cong c_{xi} \frac{t}{t(\xi)} \left[ \frac{b_i}{b(\xi)} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b_i}{b_e}\right) \right]. \quad (2.82)$$

Substituindo as expressões (2.68), (2.73), (2.81) e (2.82) na equação integral (2.66), resulta, para o cálculo da primeira aproximação a Equação (2.83).

$$\begin{aligned} & \frac{w_s(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \left[ \lambda_t(\zeta, \zeta') - \frac{\text{sen } \chi}{2} \right] w_s(\zeta') ds' \\ & \cong \left[ \frac{t}{t(\xi)} \frac{b_i}{b(\xi)} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b_i}{b_e}\right) \left(1 - \frac{t}{t(\xi)}\right) \right] c_{xi} \cos \chi + \left[ \frac{a_p u_{ye}}{2} + c_{yi} \right] \text{sen } \chi + \\ & - \frac{u_y(\zeta) \text{sen } \chi}{2} + \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \left[ J(\zeta, \zeta') \cos(\chi + \chi') - K(\zeta, \zeta') \text{sen}(\chi + \chi') \right] u_y(\zeta') ds', \quad (2.83) \end{aligned}$$

onde o superescrito (1), que deveria aparecer na incógnita  $w_s$ , para indicar o cálculo da primeira aproximação, foi omitido para simplificar a notação.

Conforme a Figura 2.2,

$$c_{xi} = w_{xe} \quad (2.84.a)$$

e

$$c_{yi} = u_{yi} + w_{yi}. \quad (2.84.b)$$

Portanto, a equação integral (2.83) torna-se

$$\begin{aligned} & \frac{w_s(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \left[ \lambda_I(\zeta, \zeta') - \frac{\text{sen } \chi}{2} \right] w_s(\zeta') ds' \\ & \cong \left[ \frac{t}{t(\xi)} \frac{b_i}{b(\xi)} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b_i}{b_e} \right) \left( 1 - \frac{t}{t(\xi)} \right) \right] w_{xi} \cos \chi + \left[ \frac{a_p u_{ye}}{2} + w_{yi} + u_{yi} \right] \text{sen } \chi + \\ & - \frac{u_y(\zeta) \text{sen } \chi}{2} + \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \left[ J(\zeta, \zeta') \cos(\chi + \chi') - K(\zeta, \zeta') \text{sen}(\chi + \chi') \right] u_y(\zeta') ds'. \quad (2.85) \end{aligned}$$

A Equação (2.85) é uma equação integral, linear e apenas de contorno, do tipo Fredholm de segunda espécie. A sua incógnita é a velocidade relativa no contorno do perfil no plano transformado,  $w_s$ , que representa a primeira aproximação, sem se recorrer a iterações, para obtenção do campo de velocidades relativas no contorno das pás de espessura finita.

## 2.2 FORMULAÇÃO INTEGRAL DO ESCOAMENTO POTENCIAL PARA ROTORES RADIAIS COM PÁS INFINITAMENTE FINAS (PIF)

Um procedimento semelhante àquele do Item 2.1 (para pás de espessura finita - PEF) é apresentado para o caso de escoamento potencial para rotores radiais com pás infinitamente finas (PIF). Ao contrário da formulação para PEF, o cálculo do campo de velocidades no contorno (linha representativa) das pás é feito diretamente no plano da grade radial que representa o rotor (plano físico) sem se recorrer a nenhuma transformação para outro plano.

Devido à semelhança do desenvolvimento das equações para PIF com aquele para PEF, não será exposto neste item o detalhamento das equações que está contido no Apêndice B. Neste item, além da equação integral para o cálculo do escoamento potencial em rotores radiais convencionais (sem pás auxiliares) será apresentada uma extensão desta equação para rotores radiais com pás auxiliares (rotores, por definição, com pás menores (pás auxiliares) que aquelas de rotores convencionais). Conforme comentado no início deste capítulo, as implicações decorrentes das formulações do Item 2.1 (PEF) e deste item (PIF) serão apresentadas nos capítulos subsequentes.

### **a) Equação integral de Fredholm de primeira espécie para o escoamento em rotores centrífugos convencionais**

Conforme o desenvolvimento apresentado no Item B.2 do Apêndice B, a equação integral de Fredholm de primeira espécie para o escoamento em rotores centrífugos convencionais (sem pás auxiliares) é dada por

$$-\frac{Q}{2\pi r b(r)} \cos \beta + \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \sin \beta + \omega r \sin \beta + \frac{1}{2\pi} \int_{s_i}^{s_e} \gamma(s') \Omega(\zeta', \zeta) ds' \cong 0, \quad (2.86)$$

sendo

$$\Omega(\zeta', \zeta) = \Im[K(\zeta, \zeta') e^{i(\theta-\beta)}]. \quad (2.87)$$

A Equação (2.86) é uma equação integral de Fredholm de primeira espécie para a função incógnita  $\gamma(s')$ . Os termos dessa equação representam, fisicamente, componentes de velocidades normais à pá: os dois primeiros, devido a uma fonte,  $Q$ , e a um vórtice,  $\Gamma_0$ , na origem (eixo do rotor), o terceiro, o efeito normal referente à velocidade de condução do rotor, e o quarto, o efeito normal absoluto das distribuições de vórtices sobre as pás.

### **b) Equação integral de Fredholm de primeira espécie para o escoamento em rotores centrífugos com pás auxiliares**

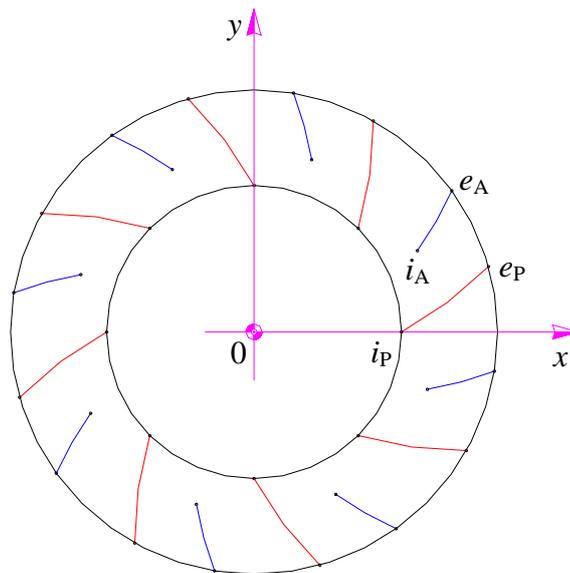
Com base na formulação apresentada para rotores centrífugos convencionais, pode-se obter facilmente as equações para o escoamento em rotores centrífugos com pás auxiliares,

Figura 2.3. No caso de rotores centrífugos convencionais, as pás são simuladas por uma distribuição de densidades de vórtice na linha representativa de cada pá. Esse efeito é representado pela integral de linha da Equação (2.86). No caso de rotores centrífugos com pás auxiliares, deve-se acrescentar na Equação (2.86) um número de integrais de linha idêntico ao número de conjuntos de pás auxiliares. No presente trabalho, foi considerado apenas um conjunto de pás auxiliares de espessura infinitamente fina e de largura variável intercalado no conjunto de pás principais. Dessa forma, para esse único conjunto de pás auxiliares, acrescenta-se na Equação (2.86), uma integral de linha referente ao conjunto de pás auxiliares, conforme a Equação (2.88).

$$\begin{aligned}
 & -\frac{Q}{2\pi r b(r)} \cos \beta + \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \sin \beta + \omega r \sin \beta + \frac{1}{2\pi} \int_{s_{4p}}^{s_{5p}} \gamma(s') \Omega(\zeta', \zeta) ds' + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{s_{iP}}^{s_{eP}} \gamma(s') \Omega(\zeta', \zeta) ds' \cong 0,
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

sendo  $\Omega(\zeta', \zeta)$  dado na Equação (2.87).

$s_{iP}$  e  $s_{eP}$ , e,  $s_{iA}$  e  $s_{eA}$  representam as coordenadas naturais nas linhas representativas de cada pá principal e de cada pá auxiliar, respectivamente, para os bordos de ataque e de fuga (pontos 4 e 5, respectivamente, na Figura 2.3). Havendo mais conjuntos de pás auxiliares, acrescentam-se outras integrais de linha de acordo com a quantidade desses conjuntos.



**Figura 2.3** Seção normal de um rotor centrífugo com um único conjunto de pás auxiliares

## 2.3 FORMULAÇÃO CLÁSSICA POR MEIO DE SINGULARIDADES PARA PÁS INFINITAMENTE FINAS (PIF)

A formulação deste item é a mesma apresentada por Manzanarez Filho (1982) para escoamento potencial em grades radiais (rotores centrífugos) com largura das pás,  $b = b(r)$ , constante. Posteriormente, Manzanarez Filho e Oliveira (1992) introduziram uma modificação na formulação original que leva em consideração a variação da largura das pás.

No que segue, será apresentado o modelo clássico de escoamento potencial através de grades radiais segundo o método das singularidades. Basicamente, esse modelo consiste na superposição de singularidades e cada pá do rotor é tratada como um corpo.

### 2.3.1 Modelo clássico de escoamento potencial através de grades radiais segundo o método das singularidades

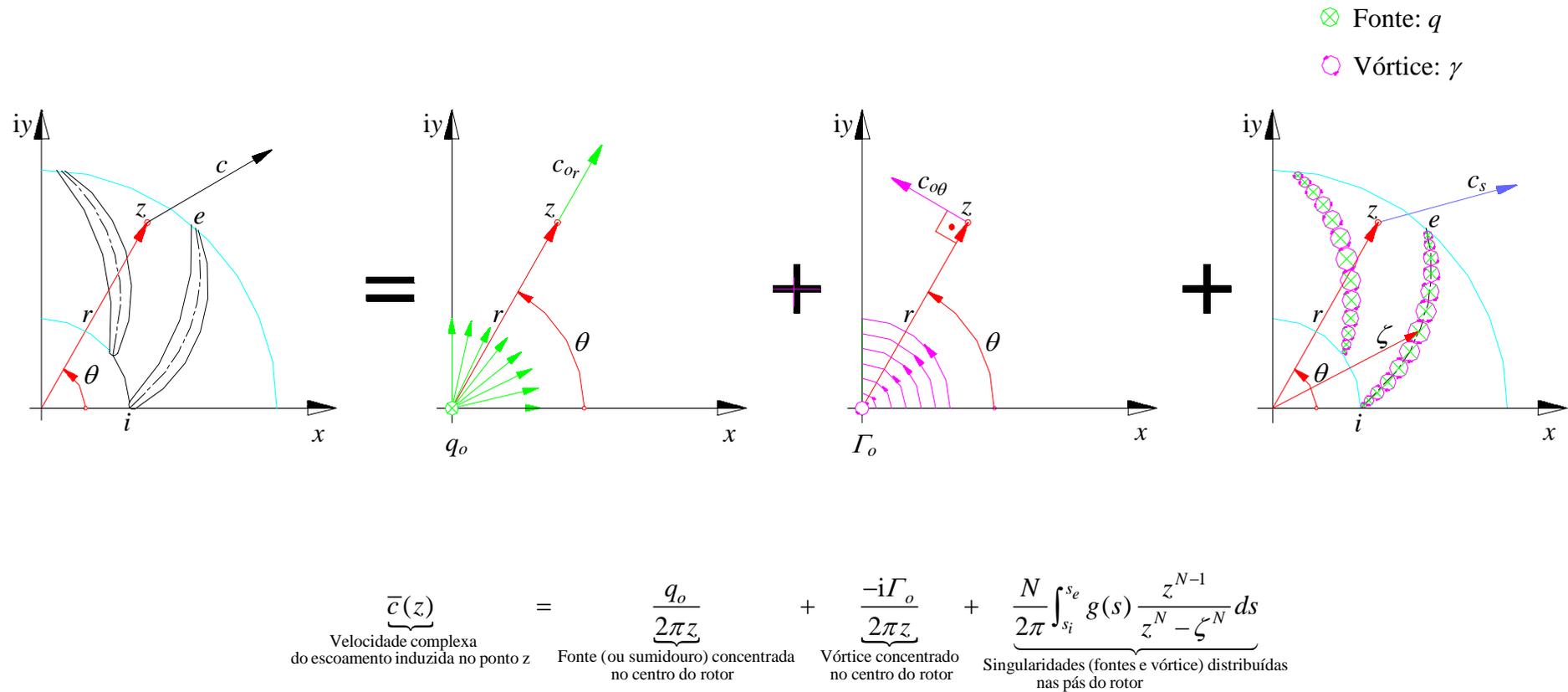
O escoamento potencial, incompressível, permanente e bidimensional através de grades radiais é tradicionalmente representado pela superposição dos seguintes escoamentos mais simples (Figura 2.4): 1) fonte,  $q_0(+)$  (ou sumidouro,  $q_0(-)$ ) disposta no centro da grade (origem do sistema), simulando a vazão do escoamento; 2) vórtice,  $\Gamma_0$ , disposto no centro da grade simulando a circulação do escoamento não-perturbado (sem o efeito da grade); 3) fontes,  $q(+)$ , sumidouros,  $q(-)$ , e vórtices,  $\gamma$ , distribuídos sobre as pás, simulando o efeito da grade.

A velocidade complexa conjugada devida a uma fonte ou sumidouro de intensidade  $q_0$  e um vórtice de intensidade  $\Gamma_0$  colocados na origem de um plano complexo  $z = re^{i\theta}$  é dada por

$$\bar{c}_0(z) = \frac{1}{2\pi z} (q_0 - i\Gamma_0). \quad (2.89)$$

Nesta expressão,  $q_0$  é positiva para uma grade geradora (fonte) e negativa para uma grade motora (sumidouro);  $\Gamma_0$  é positiva no sentido anti-horário e negativa no sentido horário. Considerando as componentes radial,  $c_{0r}$ , e circunferencial,  $c_{0\theta}$ , da velocidade complexa  $c_0$  tem-se que

$$c_0(z) = (c_{0r} + ic_{0\theta}) e^{i\theta}. \quad (2.90)$$



**Figura 2.4** Esquema representativo do escoamento potencial em grades radiais através da superposição de escoamentos mais simples

Comparando as Equações (2.89) e (2.90), resulta

$$c_{0r} = \frac{q_0}{2\pi r} \quad (2.91)$$

e

$$c_{0\theta} = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}. \quad (2.92)$$

A velocidade complexa conjugada induzida no ponto  $z$  por uma distribuição contínua de singularidades sobre as pás de uma grade radial é dada segundo Fernandes (1978) por

$$\bar{c}_s(z) = \frac{N}{2\pi} \int_{s_i}^{s_e} g(s) \frac{z^{N-1}}{z^N - \zeta^N} ds. \quad (2.93)$$

Nesta expressão,  $g(s) = q + i\gamma$  é a densidade complexa de singularidades, representando o efeito combinado das distribuições de fontes com densidade  $q$  e vórtices com densidade  $\gamma$ ;  $N$  é o número de pás da grade;  $s_i$  e  $s_e$  representam, respectivamente, os bordos de ataque e de fuga de uma pá de referência, desde que se admita a distribuição de singularidades sobre toda a pá;  $\zeta$  indica a posição genérica das singularidades e representa, no caso mais geral, o contorno de uma pá de referência.

Desta forma, a velocidade complexa conjugada do escoamento através de uma grade radial pode ser obtida pela superposição das velocidades complexas conjugadas das Equações (2.89) e (2.93), ou seja,

$$\bar{c}(z) = \bar{c}_0(z) + \bar{c}_s(z) = \frac{1}{2\pi z} (q_0 - i\Gamma_0) + \frac{N}{2\pi} \int_{s_i}^{s_e} g(s) \frac{z^{N-1}}{z^N - \zeta^N} ds. \quad (2.94)$$

As velocidades referidas até agora são velocidades absolutas, isto é, vistas de um referencial inercial. No caso de grades radiais móveis é sabido que o escoamento relativo é rotacional. Neste caso, somente o escoamento absoluto pode ser considerado potencial, sendo possível representá-lo por meio de singularidades.

O problema direto (dada a geometria da grade radial determina-se as características do escoamento) consiste em se determinar a distribuição  $g(s)$ , segundo a equação (2.94), que satisfaça as seguintes condições do escoamento:

1) Condição de contorno: o escoamento relativo deve ser tangente à pá. Mais propria-

mente, a velocidade relativa não deve apresentar componente normal à pá nos pontos da mesma ( $w_n = 0$ );

2) Condição de continuidade: a distribuição de singularidades não deve adicionar vazão ao escoamento. A vazão total através da grade é devida simplesmente ao efeito da fonte (ou sumidouro) na origem ( $Q = \int q ds = 0$ );

3) Condição de Kutta: a velocidade do escoamento deve ser finita e contínua no bordo de fuga da pá (Karamcheti, 1966).

Uma vez determinada a distribuição  $g(s)$  que verifique as três condições anteriores, calcula-se diretamente a distribuição de velocidades com base na Equação (2.94). A distribuição de pressões pode ser calculada em seguida de acordo com a equação de Bernoulli para o escoamento relativo.

Verifica-se, na integral da Equação (2.93), que o seu integrando se torna não-analítico quando o ponto de cálculo coincide com a posição das singularidades ( $z = \zeta$ ). Como na imposição da condição de contorno este cálculo é necessário, conclui-se que o mesmo deverá estar sujeito a dificuldades numéricas. Tais dificuldades têm conduzido os pesquisadores a lançar mão de procedimentos diversos como, por exemplo, a separação da parte não-analítica do integrando da Equação (2.93), conforme Isay (1954). Esses procedimentos, porém, se não são de difícil formulação, são, pelo menos, de aplicação trabalhosa e demorada, mesmo tendo-se em vista a utilização de computadores digitais.

Nenhum esforço será empreendido neste trabalho no sentido de se modificar o modelo clássico ou se utilizar um modelo diferente. Acredita-se que o modelo clássico seja suficiente para abranger os casos de interesse e, portanto, deva ser usado na presente formulação. Visando superar as referidas dificuldades matemáticas e tornar o cálculo menos trabalhoso, será proposto no Capítulo 4 um procedimento alternativo para a solução do problema direto do escoamento potencial em grades radiais. Esse procedimento se baseia num método conhecido como Método dos Painéis e visa, em primeiro lugar, substituir a Equação (2.94) para o cálculo da velocidade induzida por uma expressão de cálculo mais simples, sem, no entanto, alterar o seu efeito.

### 2.3.2 Campo de velocidades induzidas por uma grade radial

Neste item é apresentado um procedimento para a obtenção do campo de velocidades induzidas por uma grade radial. Considera-se aqui somente o caso de pás infinitamente finas,

salientando-se, porém, a possibilidade de extensão do procedimento para o caso de pás com espessura finita.

Considere a Figura 2.5 onde está representada uma grade radial no plano complexo  $z = re^{i\theta}$ . A grade é formada por  $N$  pás infinitamente finas, idênticas e igualmente espaçadas. Uma destas pás (pá de referência) está esquematizada na Figura 2.6.

De acordo com o método dos painéis, os seguintes critérios foram adotados:

1) a linha representativa da pá é especificada pela localização de  $M+1$  pontos, incluindo os bordos de ataque e de fuga, no caso, definidos pelos raios interno,  $r_i$ , e externo,  $r_e$ , da pá;

2) a linha representativa da pá é aproximada por  $M$  segmentos de reta (painéis), unindo os  $M+1$  pontos localizados;

3) sobre cada segmento de reta (painel) assim formado é admitida a existência de uma distribuição de vórtices linear; a escolha desse tipo de singularidade (vórtice) se deve ao fato de se tratar com pás infinitamente finas. A forma linear visa facilitar a aplicação futura da condição de Kutta;

4) escolhe-se, sobre cada segmento de reta, um ponto de controle correspondente ao seu ponto central (ponto médio do painel); os pontos de controle são aqueles para os quais se aplica a condição de contorno.

É importante observar que os três primeiros critérios adotados aplicam-se a todas as pás da grade, de uma forma circunferencialmente simétrica. Dessa maneira, a grade é discretizada em  $M$  grades elementares, cujas pás são segmentos de reta (painéis), Figura 2.5. Em relação aos pontos de controle, basta considerar a pá de referência, uma vez que as distribuições de vórtices sobre cada painel de uma mesma grade elementar são idênticas.

Para fins de formulação, é considerada a seguinte convenção de índices:

$j$  : índice designativo de um ponto de controle genérico na pá de referência;  $j = 1, 2, \dots, M$ ;

$k$  : índice designativo de uma grade elementar genérica ou de painel correspondente;  $k = 1, 2, \dots, M$ ;

$\ell$  : índice designativo de uma pá genérica;  $\ell = 1, 2, \dots, N$ .

Resulta, portanto, a seguinte simbologia:

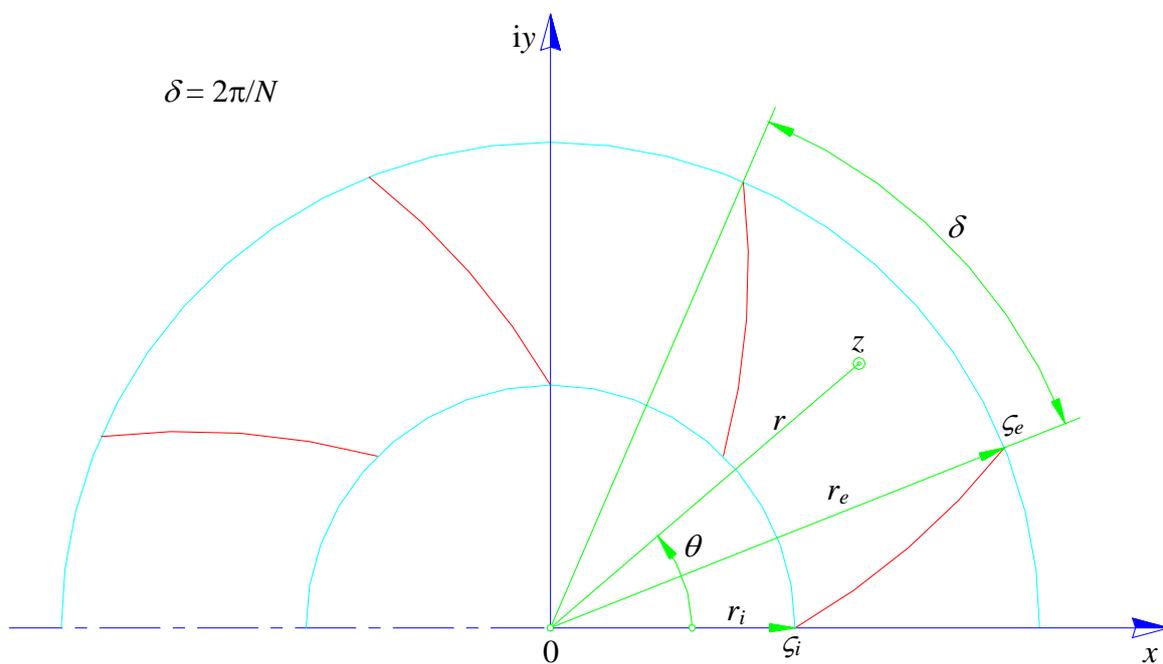
$z_{cj}$  : ponto de controle  $j$  na pá de referência ( $\ell = 1$ );

$z_k$  e  $z_{k+1}$  : pontos extremos do painel  $k$  na pá de referência ( $\ell = 1$ );

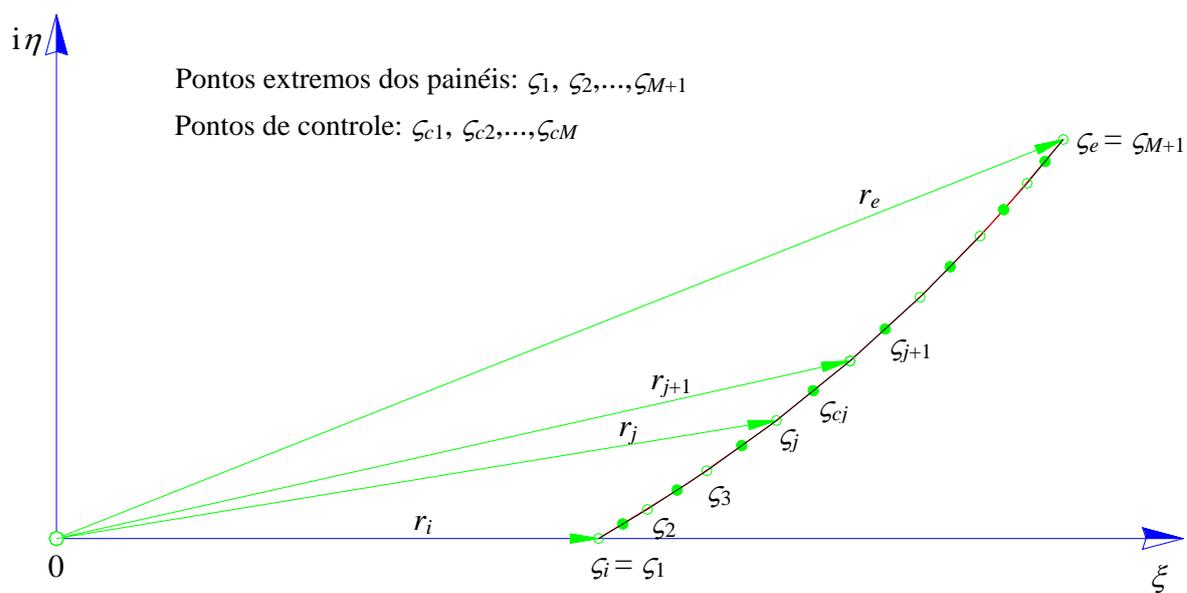
$z_{\ell k}$  e  $z_{\ell k+1}$  : pontos extremos do painel  $k$  na pá  $\ell$ ; para  $\ell = 1$ , considera-se  $z_k$  e  $z_{k+1}$ ;

$\chi_k$  : ângulo que o painel  $k$  da pá de referência forma com o eixo  $x$  da grade (Figura

2.7),



**Figura 2.5** Nomenclatura de referência para a geometria da grade radial



**Figura 2.6** Discretização da pá de referência em segmentos de reta (painéis)

- $\chi_{\ell k}$ : ângulo que o painel  $k$  da pá  $\ell$  forma com o eixo  $x$  da grade (Figura 2.7);
- $\gamma_k$  e  $\gamma_{k+1}$ : valores da densidade de vórtices nos pontos extremos dos painéis da grade elementar  $k$ ;
- $c_{s\ell k}(z)$ : valor da velocidade complexa induzida pelo painel  $k$  situado na pá  $\ell$  sobre o ponto genérico  $z$ ;
- $c_{sk}(z)$ : valor da velocidade complexa induzida pela grade elementar  $k$  sobre o ponto genérico  $z$ ; por superposição,

$$c_{sk}(z) = \sum_{\ell=1}^N c_{s\ell k}(z);$$

- $c_s(z)$ : valor da velocidade complexa total induzida pela grade radial sobre o ponto genérico  $z$ ; por superposição,

$$c_s(z) = \sum_{k=1}^M c_{sk}(z).$$

Devido à simetria circunferencial de uma grade elementar (Figura 2.6), as seguintes relações são válidas:

$$\zeta_{\ell k} = \zeta_k e^{i(\ell-1)\delta}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N. \quad (2.95)$$

$$\chi_{\ell k} = \chi_k + (\ell-1)\delta, \quad \ell = 1, 2, \dots, N. \quad (2.96)$$

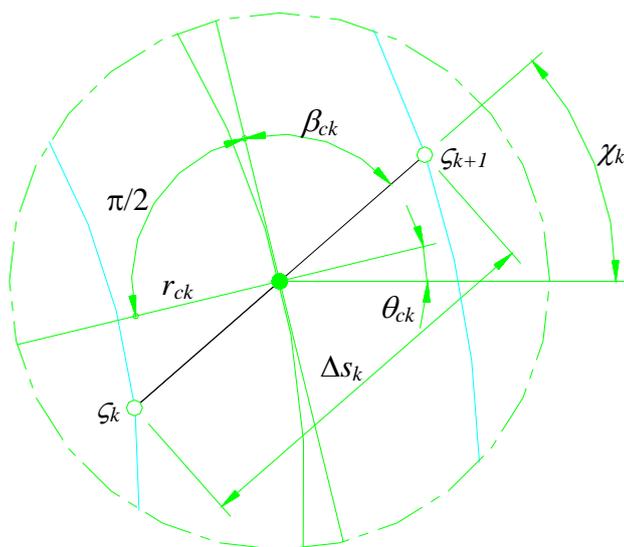
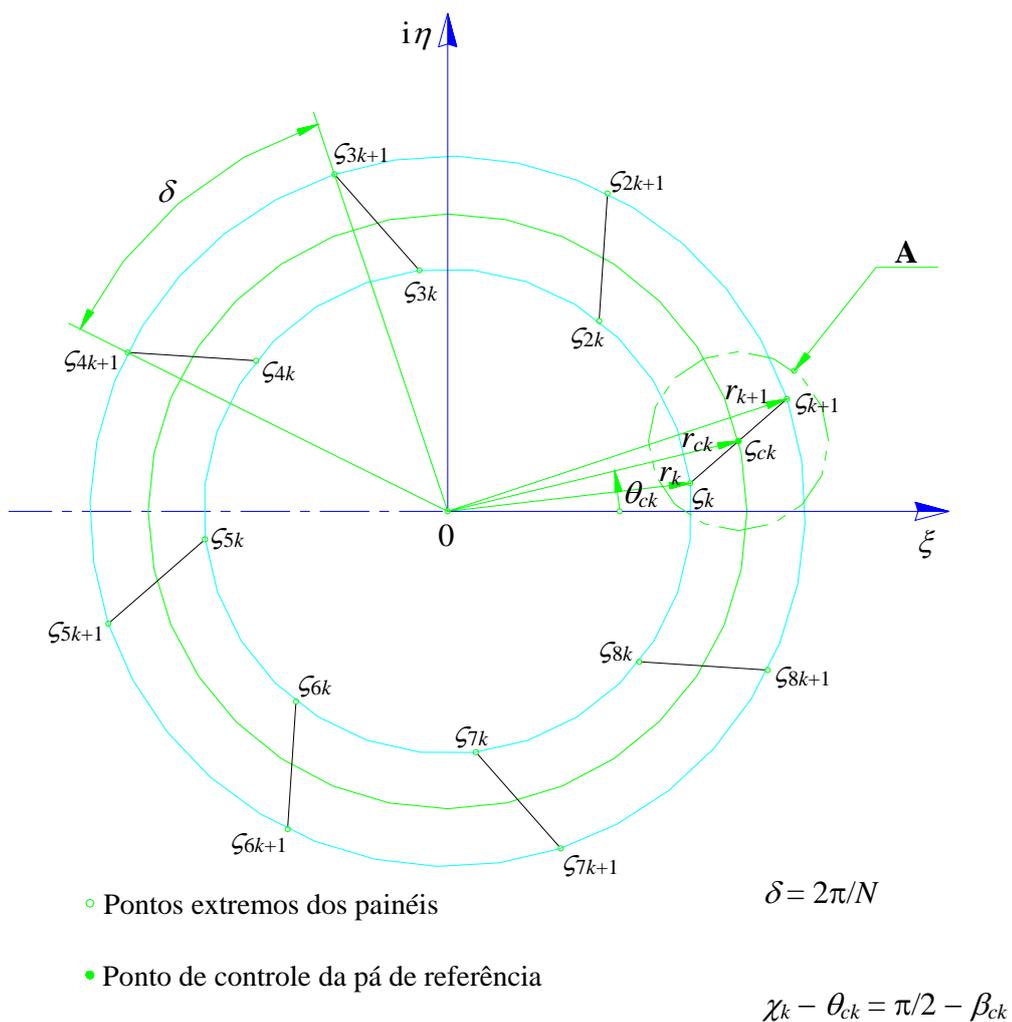
onde  $\delta = 2\pi/N$  é o ângulo de espaçamento das pás (Figura 2.5).

De acordo com Manzanares Filho (1982), e considerando a simbologia definida anteriormente, a velocidade complexa conjugada induzida pela distribuição linear de vórtices do painel  $k$  da pá  $\ell$  sobre o ponto  $z$  é

$$\bar{c}_{s\ell k}(z) = \frac{i e^{-i\chi_{\ell k}}}{2\pi} \left\{ \left[ \frac{\zeta_{\ell k+1} - z}{\zeta_{\ell k+1} - \zeta_{\ell k}} \ln \left( \frac{z - \zeta_{\ell k}}{z - \zeta_{\ell k+1}} \right) + 1 \right] \gamma_k + \left[ \frac{z - \zeta_{\ell k}}{\zeta_{\ell k+1} - \zeta_{\ell k}} \ln \left( \frac{z - \zeta_{\ell k}}{z - \zeta_{\ell k+1}} \right) - 1 \right] \gamma_{k+1} \right\}. \quad (2.97)$$

Tomando o conjugado da equação (2.97), obtém-se, de uma forma resumida que

$$\bar{c}_{s\ell k}(z) = \bar{I}_{\ell k}(z)\gamma_k + \bar{J}_{\ell k}(z)\gamma_{k+1}, \quad (2.98)$$



**Detalhe A**  
(Painel  $k$  da pá de referência)

**Figura 2.7** Grade elementar  $k$  e detalhamento do painel  $k$  da pá de referência ( $\ell = 1$ )

sendo

$$I_{\ell k}(z) = \frac{i e^{-i\chi_{\ell k}}}{2\pi} \left[ \frac{\zeta_{\ell k+1} - z}{\zeta_{\ell k+1} - \zeta_{\ell k}} \ln \left( \frac{z - \zeta_{\ell k}}{z - \zeta_{\ell k+1}} \right) + 1 \right] \quad (2.99.a)$$

$$J_{\ell k}(z) = \frac{i e^{-i\chi_{\ell k}}}{2\pi} \left[ \frac{z - \zeta_{\ell k}}{\zeta_{\ell k+1} - \zeta_{\ell k}} \ln \left( \frac{z - \zeta_{\ell k}}{z - \zeta_{\ell k+1}} \right) - 1 \right]. \quad (2.99.b)$$

A velocidade complexa induzida pela grade elementar  $k$  sobre o ponto genérico  $z$  é dada pela superposição das contribuições de todos os segmentos de reta (painéis) a ela pertencentes, ou seja,

$$c_{s_k}(z) = \sum_{\ell=1}^N c_{s_{\ell k}}(z) = \gamma_k \sum_{\ell=1}^N \bar{I}_{\ell k}(z) + \gamma_{k+1} \sum_{\ell=1}^N \bar{J}_{\ell k}(z) \quad (2.100)$$

onde se considerou a equação (2.98) e o fato de  $\gamma_k$  e  $\gamma_{k+1}$  serem os mesmos para todos os segmentos de reta (painéis) da grade elementar  $k$ .

Definindo-se

$$X_k(z) = \sum_{\ell=1}^N \bar{I}_{\ell k}(z) \quad (2.101.a)$$

e

$$Y_k(z) = \sum_{\ell=1}^N \bar{J}_{\ell k}(z) \quad (2.101.b)$$

a Equação (2.100) torna-se

$$c_{s_k}(z) = \gamma_k X_k(z) + \gamma_{k+1} Y_k(z). \quad (2.102)$$

A velocidade complexa total induzida pela grade radial sobre o ponto genérico  $z$  é dada pela superposição das contribuições de todas as grades elementares, ou seja,

$$c_s(z) = \sum_{k=1}^M c_{s_k}(z) = \sum_{k=1}^M [\gamma_k X_k(z) + \gamma_{k+1} Y_k(z)]. \quad (2.103)$$

Dada a geometria da grade e efetuada certa discretização das pás, calcula-se facilmente a velocidade complexa induzida num ponto  $z$  pela Equação (2.103), desde que os valores da densidade de vórtices sejam conhecidos nos pontos extremos dos painéis. Os coeficientes complexos  $X_k(z)$  e  $Y_k(z)$  dependem apenas da geometria da grade, da discretização realizada e do ponto  $z$  onde se calcula a velocidade induzida.

Observa-se, também, que a expressão obtida ao se tomar o conjugado da Equação (2.103) substitui a Equação (2.93), no caso  $g = i\gamma$  (somente vórtices). O conjugado da equação (2.103) tende à forma exata da Equação (2.93) para  $g = i\gamma$ , à medida que o número de painéis cresce ( $M \rightarrow \infty$ ).

Para aplicação da condição de contorno, é de interesse determinar as componentes radial,  $c_{sr}(z)$ , e circunferencial,  $c_{s\theta}(z)$ , da velocidade induzida no ponto  $z$ , podendo-se escrever

$$c_s(z) = [c_{sr}(z) + i c_{s\theta}(z)] e^{i\theta} \quad (2.104)$$

obtendo-se

$$c_{sr}(z) = \Re [c_s(z) e^{-i\theta}] \quad (2.105.a)$$

e

$$c_{s\theta}(z) = \Im [c_s(z) e^{-i\theta}]. \quad (2.105.b)$$

$\Re[\dots]$  e  $\Im[\dots]$  designam, respectivamente, as partes real e imaginária da expressão complexa considerada. Comparando as Equações (2.103), (2.105.a) e (2.105.b), resultam

$$c_{sr}(z) = \sum_{k=1}^M [\gamma_k A_{rk}(z) + \gamma_{k+1} B_{rk}(z)] \quad (2.106.a)$$

e

$$c_{s\theta}(z) = \sum_{k=1}^M [\gamma_k A_{\theta k}(z) + \gamma_{k+1} B_{\theta k}(z)] \quad (2.106.b)$$

podendo-se definir os seguintes coeficientes reais:

$$A_{rk}(z) = \Re [X_k(z) e^{-i\theta}] = \sum_{\ell=1}^N \Re [\bar{I}_{\ell k}(z) e^{-i\theta}], \quad (2.107.a)$$

$$B_{rk}(z) = \Re \left[ Y_k(z) e^{-i\theta} \right] = \sum_{\ell=1}^N \Re \left[ \bar{J}_{\ell k}(z) e^{-i\theta} \right], \quad (2.107.b)$$

$$A_{\theta k}(z) = \Im \left[ X_k(z) e^{-i\theta} \right] = \sum_{\ell=1}^N \Im \left[ \bar{I}_{\ell k}(z) e^{-i\theta} \right], \quad (2.107.c)$$

$$B_{\theta k}(z) = \Im \left[ Y_k(z) e^{-i\theta} \right] = \sum_{\ell=1}^N \Im \left[ \bar{J}_{\ell k}(z) e^{-i\theta} \right]. \quad (2.107.d)$$

### 2.3.3 Condição de contorno para o escoamento através de grades radiais móveis

A condição de contorno exprime o fato de a velocidade relativa ser tangente à pá em todos os pontos da mesma. Desta forma, para qualquer ponto da pá  $\zeta = re^{i\theta}$ , escreve-se que

$$\text{tag} \beta = \frac{w_r}{w_\theta}, \quad r_i \leq r \leq r_e, \quad (2.108)$$

sendo  $\beta$  o ângulo entre a tangente à pá e a tangente à circunferência no ponto considerado, ou seja, é o ângulo medido em relação à direção circunferencial;  $w_r$  e  $w_\theta$  são, respectivamente, as componentes radial e circunferencial da velocidade relativa resultante,  $w$ .

Superpondo-se os efeitos do escoamento não-perturbado e o escoamento induzido pela grade, tem-se, com base na Figura 2.8 e nas Equações (2.91) e (2.92), que

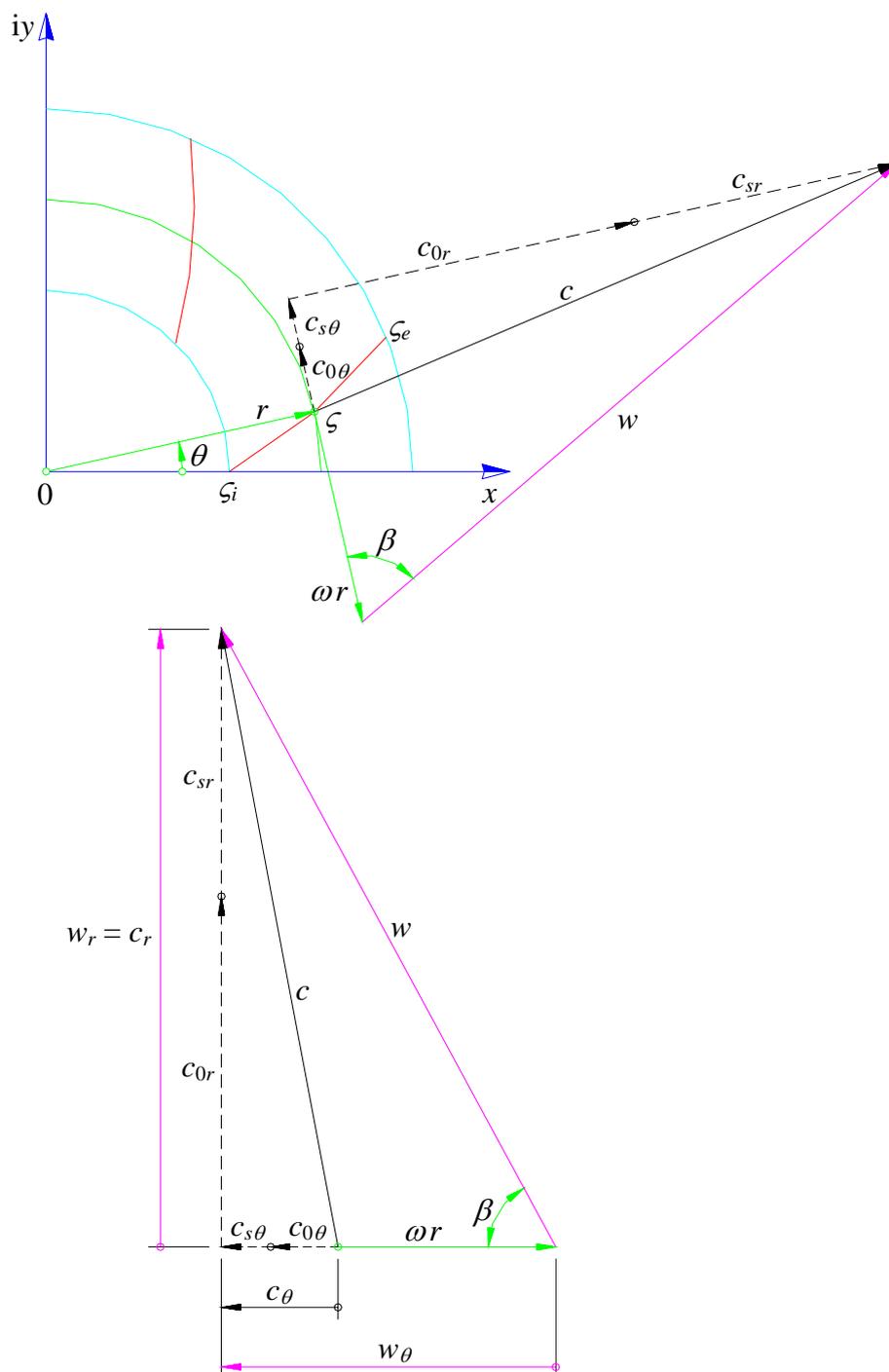
$$w_r = c_r = c_{0r} + c_{sr} = \frac{q_0}{2\pi r} + c_{sr} \quad (2.109.a)$$

e

$$w_\theta = \omega r + c_\theta = \omega r + c_{0\theta} + c_{s\theta} = \omega r + \frac{\Gamma_0}{2\pi r} + c_{s\theta}. \quad (2.109.b)$$

Na equação (2.109.a) o valor de  $q_0$  deve ser considerado positivo para bomba e negativo para turbina. Com as equações (2.109.a) e (2.109.b), a equação (2.108) torna-se

$$\text{tag} \beta = \frac{\frac{q_0}{2\pi r} + c_{sr}}{\omega r + \frac{\Gamma_0}{2\pi r} + c_{s\theta}}, \quad r_i \leq r \leq r_e. \quad (2.110)$$



**Figura 2.8** Condição de contorno para grade radial móvel (bomba)

Separando as grandezas incógnitas das grandezas conhecidas, a Equação (2.110) torna-se

$$c_{s\theta} \operatorname{tag} \beta - c_{sr} = \frac{q_0}{2\pi r} - \left( \omega r + \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \right) \operatorname{tag} \beta, \quad r_i \leq r \leq r_e. \quad (2.111)$$

## Capítulo 3

# SOLUÇÃO NUMÉRICA

As soluções numéricas das equações integrais de contorno resultantes das formulações apresentadas no Capítulo 2, para pás de espessura finita (PEF) e para pás infinitamente finas (PIF), são obtidas pelo método dos painéis de acordo com o trabalho pioneiro de Hess e Smith (1967). O contorno das pás é discretizado em painéis (segmentos de reta). A distribuição desses painéis é feita utilizando uma série (progressão) geométrica. Desse modo, para um número total de painéis fixado, mais painéis de comprimentos menores são distribuídos nas regiões mais próximas aos bordos de ataque e de fuga, onde os gradientes das grandezas a serem determinadas são maiores. Na região mais central das pás os comprimentos dos painéis são relativamente maiores dependendo, naturalmente, da razão da progressão geométrica estabelecida. O ponto central (médio) de cada painel de uma pá de referência é estabelecido como sendo o ponto de controle, onde se aplica a condição de contorno. Em cada painel, admite-se uma distribuição uniforme (para PEF) ou linear (para PIF) de densidade de vórtices. A aplicação do método dos painéis resulta num sistema de equações algébricas lineares tendo por incógnitas as densidades de vórtices. Para uma determinada geometria de grade e alguns parâmetros estabelecidos, uma solução única só é possível se forem satisfeitas certas condições. Essas condições, denominadas de complementares, serão abordadas no Item 3.6. Inicialmente, a solução numérica será apresentada para rotores radiais no modo bomba e posteriormente no modo turbina. Os programas computacionais foram feitos em linguagem Fortran e os resultados numéricos obtidos no Laboratório de Hidrodinâmica Virtual (LHV) do IEM-UNIFEI.

Este capítulo está dividido em sete itens principais: 3.1) Discretização do contorno das pás para PEF e PIF; 3.2) Determinação do passo no plano da grade linear (GL) para o caso de PEF; 3.3) Determinação da largura das pás; 3.4) Transformação da grade radial (GR) em grade linear (GL); 3.5) Formação dos sistemas de equações algébricas lineares; 3.6) Condições complementares; 3.7) Tratamento do rotor radial no modo turbina.

## 3.1 DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO DAS PÁS

Os formatos de pás apresentados neste trabalho têm geometria simples e podem ser gerados analiticamente. No caso de PEF com espessura constante ou com espessura variável (com exceção da pá em formato de duplo arco de círculo (DAC) sem arredondamento nos bordos), a região próxima ao diâmetro interno do rotor é arredondada através de um arco de círculo e a região próxima ao diâmetro externo do rotor é chanfrada (Figura C.3 do Apêndice C). Essa geometria é típica de rotores radiais de bombas centrífugas. No caso de rotores radiais que operam tanto no modo bomba como no modo turbina, os bordos internos e externos das pás são arredondados, Figura C.4 do Apêndice C, ou apresentam uma geometria que não seja chanfrada acompanhando a periferia cilíndrica do rotor. No caso de PIF do presente trabalho, as pás possuem um único formato, ou seja, não são compostas por combinações de formatos, por exemplo, uma parte da pá em formato reto e a outra parte em formato de arco de círculo, como no trabalho de Oliveira (2001). O Apêndice C apresenta a geração de alguns formatos de pás analisados neste trabalho, tanto no plano transversal como no plano meridional.

### 3.1.1 Técnica de discretização utilizada

#### a) Técnica de discretização para as pás de espessura finita (PEF)

Os pontos extremos de cada painel, no plano da grade radial, são obtidos de acordo com a seguinte técnica:

1) Adota-se o número total de painéis,  $M = M_p + M_s$ , sendo  $M_p$  e  $M_s$  os números de painéis do lado do extradorso e do lado do intradorso da pá, respectivamente. Neste trabalho foi utilizado  $M_p = M_s = M/2$ ;

2) Divide-se os comprimentos dos lados do extradorso,  $L_p$ , e do intradorso,  $L_s$ , da pá em duas partes iguais, para se obter uma distribuição de comprimentos dos painéis simétrica em torno dos pontos  $j = M/4+1$  (lado do extradorso) e  $j = 3M/4+1$  (lado do intradorso);

3) Utiliza-se uma série (progressão) geométrica de razão  $q_{sg}$ , denominada de fator de discretização, para obter os pares de pontos  $x_j^*(s)$  e  $y_j^*(s)$ . Para cada par  $(x_j^*, y_j^*)$ , o parâmetro de contorno,  $s$ , da pá assume os valores  $s_p$  (lado do extradorso) e  $s_s$  (lado do intradorso), obtidos através da soma dos  $j$  termos da série geométrica, ou seja,

$$s_{p_{j+1}} = a_{1p} \frac{(q_{sg})^j - 1}{q_{sg} - 1}, \quad j = 1, 2, \dots, M/4,$$

$$s_{p_{j+1}} = s_{p_j} + a_{1p} (q_{sg})^{(M/2-j)}, \quad j = M/4+1, M/4+2, \dots, M/2,$$

sendo

$$a_{1p} = \frac{L_p (q_{sg} - 1)}{(q_{sg})^{M/4} - 1}.$$

O parâmetro de contorno do bordo externo da pá é  $s_{p_l} = s_{be} = 0$ .

O parâmetro de contorno do bordo interno da pá é  $s_{p_{M/2+1}} = s_{bi}$ .

Lado do  
extradorso (3.1)

e

$$s_{s_{j+1}} = a_{1s} \frac{(q_{sg})^{(j-M/2-1)} - 1}{q_{sg} - 1}, \quad j = M/2+1, M/2+2, \dots, 3M/4,$$

$$s_{s_{j+1}} = s_{s_j} + a_{1s} (q_{sg})^{(M-j)}, \quad j = 3M/4+1, 3M/4+2, \dots, M,$$

sendo

$$a_{1s} = \frac{L_s (q_{sg} - 1)}{(q_{sg})^{M/4} - 1}.$$

O parâmetro de contorno do bordo interno da pá é  $s_{s_{N/2+1}} = s_{bi} = 0$ .

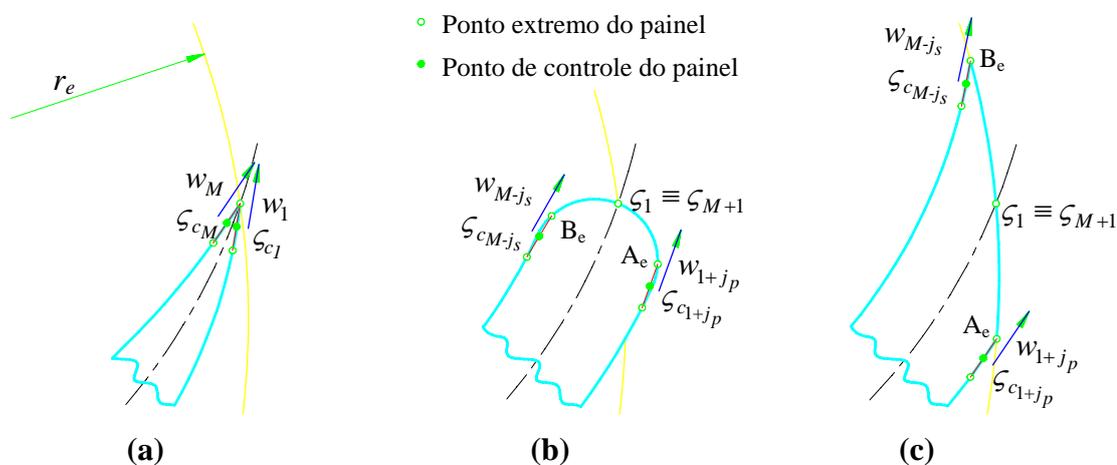
O parâmetro de contorno do bordo externo da pá é  $s_{s_{M+1}} = s_{be}$ .

Lado do  
intradorso (3.2)

4) Calcula-se as coordenadas dos pontos extremos dos painéis  $(x_j^*, y_j^*)$  em função dos valores de  $s_p$  e  $s_s$  determinados nas Equações (2.1) e (2.2), de acordo com a equação da curva que representa o formato da pá no trecho considerado;

5) Transforma-se as coordenadas  $(x_j^*, y_j^*)$  em coordenadas  $(r_j, \theta_j)$  do plano da grade radial (GR), para posterior mapeamento em coordenadas  $(x_j, y_j)$  do plano da grade linear (GL), segundo as Equações (2.9) e (2.10).

A técnica descrita anteriormente pode ser utilizada para qualquer geometria de pá. Porém, quando a região do bordo externo da pá apresenta variações acentuadas de curvaturas nos pontos de tangência das curvas envolvidas, os pontos  $A_e$  e  $B_e$  (Figuras 3.1) devem coincidir com um dos pontos extremos dos painéis em cada lado da pá, como será sugerido no Item 3.6. Essa sistemática também foi estendida para os pontos  $A_i$  e  $B_i$  da região arredondada próxima ao bordo interno da pá. Dessa forma, os painéis devem ser redistribuídos em todo o contorno da pá. Se  $M_p$ ,  $M_s$  e  $q_{sg}$  forem mantidos, os comprimentos dos painéis imediatamente antes e após os pontos  $A_a$ ,  $B_a$ ,  $A_f$  e  $B_f$ , em geral, não manterão o fator de discretização,  $q_{sg}$ . Se essa relação de comprimentos se afastar, dentro de certo critério estabelecido para  $q_{sg}$ , deve-se aumentar ou diminuir o número de painéis entre o bordo externo da pá e os pontos  $A_f$  e  $B_f$ , e entre o bordo interno da pá e os pontos  $A_a$ ,  $B_a$ , mantendo-se ainda o mesmo número total de painéis. Nas simulações realizadas, praticamente não houve divergências entre os resultados das diversas grandezas do escoamento calculadas com ou sem redistribuição de comprimentos dos painéis.



**Figura 3.1** Bordos externos típicos de pás e condições de saída (bomba) para PEF  
 (a) bordo agudo, (b) bordo arredondado e (c) bordo chanfrado

### b) Técnica de discretização para as pás infinitamente finas (PIF)

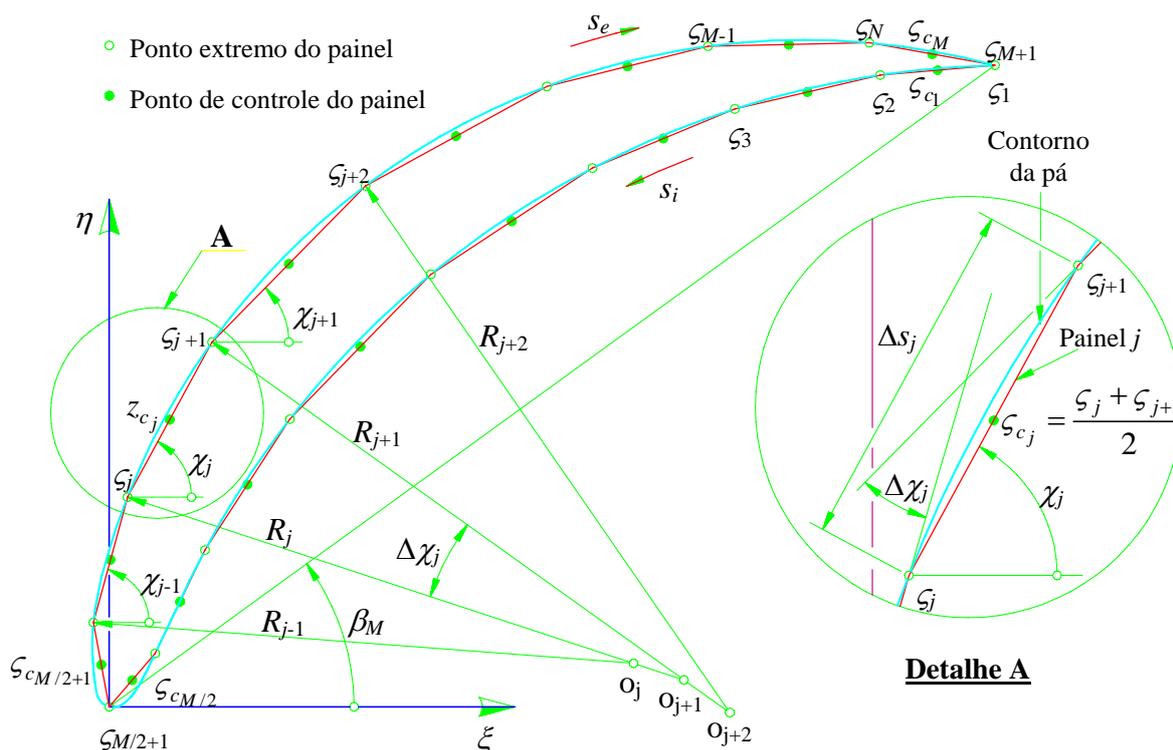
A técnica utilizada para PIF é a mesma empregada para PEF. O número total de painéis,  $M$ , é distribuído na linha representativa da pá, com os pontos extremos  $j = 1$  no bordo interno da pá e  $j = M + 1$  no bordo externo da pá, sendo

$$\left. \begin{aligned}
 s_{j+1} &= a_1 \frac{(q_{sg})^j - 1}{q_{sg} - 1}, & j &= 1, 2, \dots, M / 2. \\
 s_{j+1} &= s_j + a_1 (q_{sg})^{(M-j)}, & j &= M / 2 + 1, M / 2 + 2, \dots, M, \\
 \text{sendo} \\
 a_1 &= \frac{L_{pá} (q_{sg} - 1)}{2 (q_{sg})^{M/2} - 1}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

O parâmetro de contorno do bordo interno da pá é  $s_1 = s_{bi} = 0$ .  
O parâmetro de contorno do bordo externo da pá é  $s_{M+1} = s_{be}$ .

### 3.1.2 Discretização das pás de espessura finita (PEF)

A discretização do contorno das pás é feita no plano da grade radial (plano físico). Devido à periodicidade apresentada pela função-núcleo da equação integral, Equação (2.48) ou Equação (2.54), basta discretizar apenas uma pá do rotor adotando-a como referência. De acordo com a sistemática do método dos painéis, são escolhidos  $M+1$  pontos do contorno da pá. Um desses pontos coincide com o bordo externo e o outro com o bordo interno da pá. A união de todos os pontos, por meio de segmentos de reta (painéis), resulta num polígono de  $M$  lados, cada lado representa um painel.  $M/2$  painéis são colocados no lado frontal e  $M/2$  no lado traseiro da pá. Cada painel  $j$ , definido pelos seus pontos extremos,  $\zeta_j$  e  $\zeta_{j+1}$ , com  $j = 1, 2, \dots, M$ , é considerado como suporte de uma distribuição de vórtices de densidade uniforme igual a  $\gamma_j$ . Os pontos extremos de cada painel são ordenados de tal modo que se percorre o contorno da pá, partindo-se e retornando-se ao ponto localizado no bordo externo ( $\zeta_1 \equiv \zeta_{M+1}$ ), com o interior da pá sempre à direita do trajeto (Figura 3.2). Em cada painel  $j$ , adota-se o seu ponto central (médio),  $\zeta_{c_j}$ , como ponto de controle, para aplicação da condição de contorno.



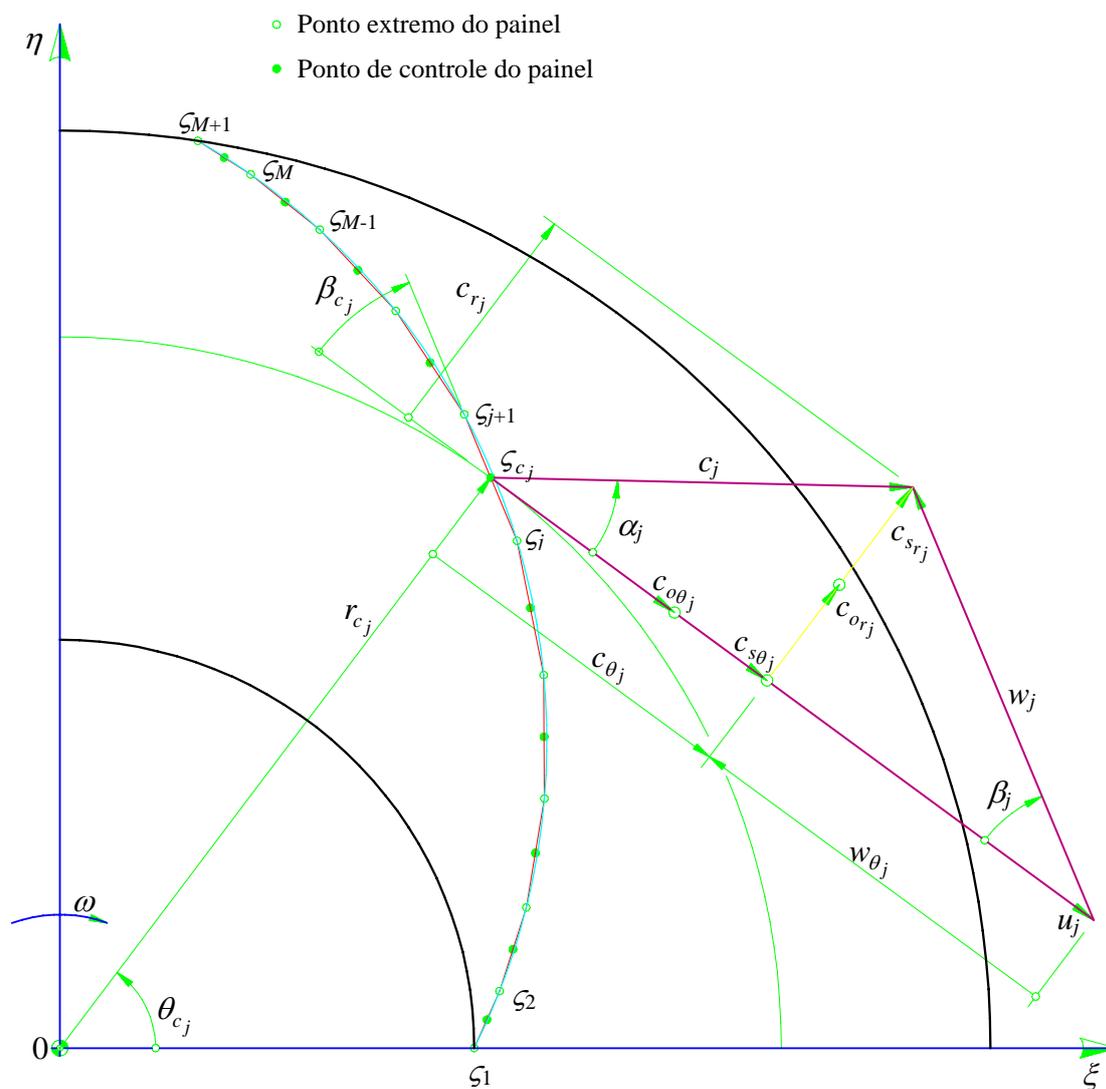
**Figura 3.2** Discretização de uma pá de referência e detalhe de um painel  $j$  para PEF

Para um determinado número de painéis,  $M$ , e uma adequada distribuição dos seus comprimentos no contorno da pá, deve-se concentrá-los, em maior quantidade e menor comprimento, nas regiões próximas aos bordos interno e externo da pá. Essa exigência se justifica não só pelo fato de se aplicar certas condições de entrada e de saída nas proximidades de cada bordo, mas, também, pelo fato de essas regiões apresentarem altos gradientes de velocidades (ou de pressões). A distribuição de comprimentos pode ser feita através de uma série geométrica, como apresentado no Item 3.1.1. O fator de discretização, conforme as simulações realizadas, pode ser estabelecido no intervalo  $1,0 < q_{sg} < 1,1$ , dependendo do número total de painéis empregado. Valores próximos de 1,0 resultam em comprimentos e distribuição dos painéis aproximadamente iguais, ao passo que, valores próximos de 1,1 resultam em painéis de comprimentos desiguais e em maior concentração (em consequência, menores comprimentos) na região próxima aos bordos.

### 3.1.3 Discretização das pás infinitamente finas (PIF)

Os critérios de discretização empregados para PIF são semelhantes àqueles para PEF, com os pontos extremos de cada painel localizados na linha representativa da pá de referên-

cia. Os pontos são ordenados de tal modo que se percorre a pá, partindo-se do ponto localizado no bordo interno,  $\zeta_1$ , em direção ao ponto localizado no bordo externo,  $\zeta_{M+1}$ , conforme a Figura 3.3.



**Figura 3.3** Discretização de uma pá de referência e condição de tangência (bomba) no painel  $j$  para PIF

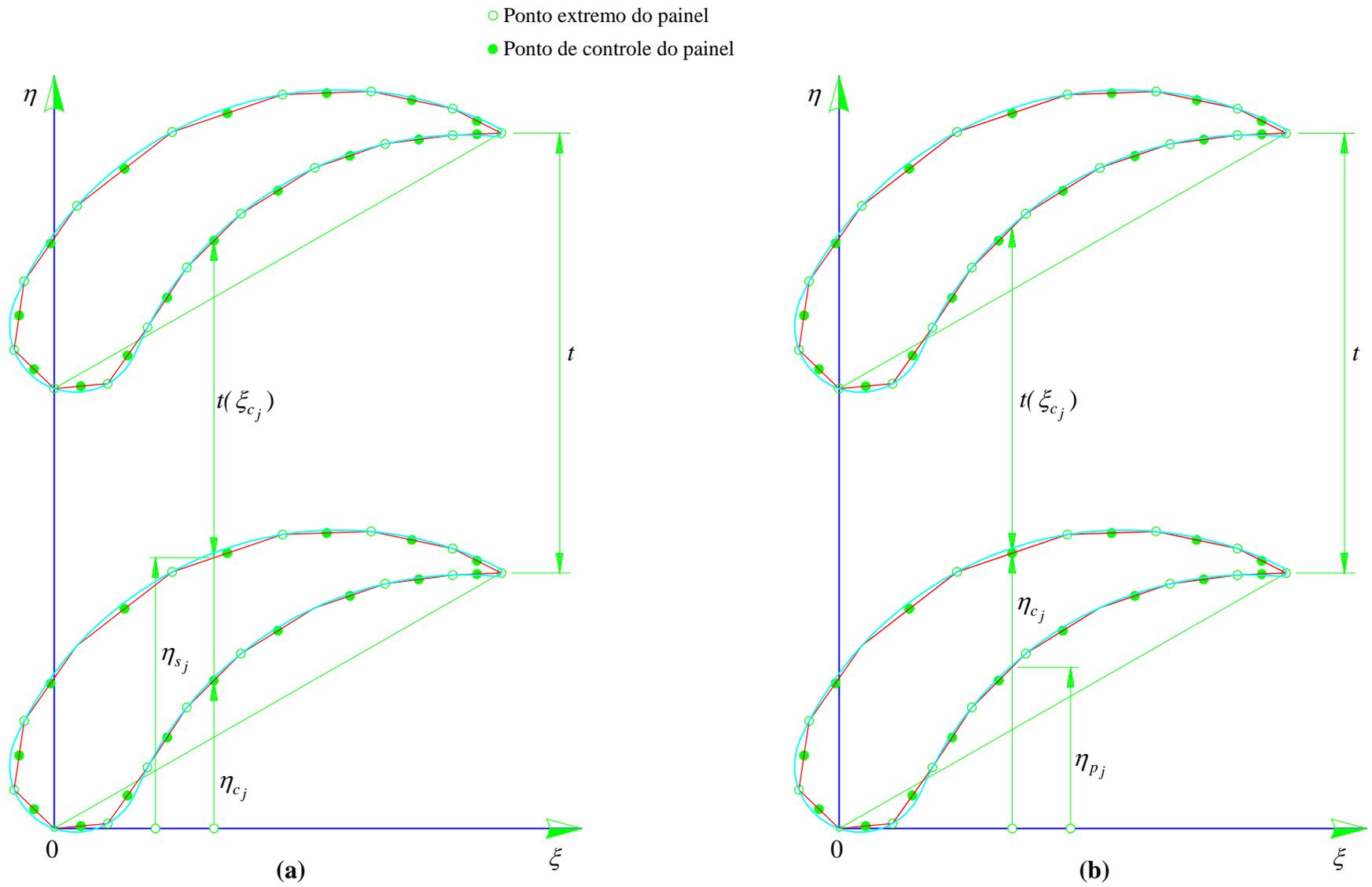
Em cada painel  $j$ , admite-se uma distribuição de vórtices de densidade linear, com valores iguais a  $\gamma_j$  e  $\gamma_{j+1}$  em cada extremidade. A adoção da densidade de vórtices variando linearmente em cada painel facilita a aplicação da condição de Kutta, que será comentada no Item 3.6.

Com relação à distribuição dos comprimentos dos painéis na linha da pá de referência, adotam-se critérios semelhantes aos da PEF, ou seja, utiliza-se uma série geométrica de razão (fator de discretização),  $q_{sg}$ , Item 3.1.1. Para o caso de PIF, o número de painéis,  $M$ , necessário para se obter uma precisão satisfatória é bem menor que aquele referente ao caso de PEF. Em decorrência disso, o fator de discretização pode ser estabelecido num intervalo maior ( $1,0 < q_{sg} < 1,2$ ).

### 3.2 DETERMINAÇÃO DO PASSO NO PLANO DA GRADE LINEAR PARA PEF

Na solução numérica da Equação (2.85), quando a largura das pás não é constante, a velocidade  $c_{Bx}(\zeta)$ , dada na Equação (2.82), que é dependente do passo,  $t = t(\xi)$ , e da própria largura da pá,  $b = b(\xi)$ , não se anula. Nesse caso, deve-se calcular o passo no plano transformado, para cada ponto de controle, conforme mostra a Figura 3.4. Com a discretização do contorno das pás em painéis retos, a coordenada  $\xi_{c_j}$  de cada ponto de controle ( $\zeta_{c_j} = \xi_{c_j} + i\eta_{c_j}$ ), por exemplo, do lado de pressão da pá (modo bomba), geralmente, não coincide com aquela do lado de sucção (modo bomba), dificultando a imediata determinação de  $t_{c_j} = t(\xi_{c_j})$ .

Para determinar esse passo em cada ponto de controle  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, M/2$ ) do lado de pressão da pá (modo bomba), faz-se uma busca do painel  $k$  ( $k = M/2+1, M/2+2, \dots, M+1$ ) localizado no lado de sucção da pá (modo bomba), que tem  $\xi_k \leq \xi_{c_j} \leq \xi_{k+1}$ . Depois de localizado o painel  $k$ , determina-se a equação da reta  $\eta = a_k \xi + b_k$ , baseando-se nos seus pares de pontos extremos  $(\xi_k, \eta_k)$  e  $(\xi_{k+1}, \eta_{k+1})$ . Com a equação dessa reta, obtém-se a coordenada  $\eta_{s_j} = a_k \xi_{c_j} + b_k$  (lado de sucção para o modo bomba) correspondente à coordenada  $\xi_{c_j}$  do ponto de controle,  $j$  (lado de pressão para o modo bomba). Tomando-se por base a Figura 3.4.a, o passo  $t_{c_j} = t + \eta_{c_k} - \eta_{s_j}$  (para os pontos de controle do lado de pressão da pá para o modo bomba) é determinado facilmente. Com um critério semelhante, obtém-se  $t_{c_j} = t - \eta_{c_k} + \eta_{p_j}$  para os pontos de controle,  $j$ , do lado de sucção da pá para o modo bomba (Figura 3.4.b).



**Figura 3.4** Passo  $t(x_{c_j})$  em cada ponto de controle dos painéis: (a) lado de pressão e (b) lado de sucção

### 3.3 DETERMINAÇÃO DA LARGURA DAS PÁS

Na solução numérica da Equação (2.85), quando a largura da pá,  $b = b(r)$ , não é constante, o valor de  $b_{c_j} = b(r_{c_j})$  deve ser estabelecido para cada ponto de controle,  $j$ . Em ambos os casos (PEF e PIF), essa largura é determinada no plano da grade radial. Para PEF, o cálculo da largura,  $b_{c_j}$ , constitui o primeiro passo para se obter a transformação das pás do plano da grade radial para o plano da grade linear, como será apresentado no Item 3.4.

Com o intuito de comparar os diversos resultados numéricos, foram analisadas algumas geometrias de capa (bomba) ou cinta (turbina), mantendo-se a mesma geometria de disco (bomba) ou cubo (turbina), conforme a Figura C.1 do Apêndice C. Esses componentes, juntamente com as arestas interna e externa da pá, definem a geometria da pá no plano meridional e, portanto, a variação de largura da pá,  $b_{c_j} = b(r_{c_j})$ . Quando essas arestas são paralelas ao eixo do rotor, a variação de largura é obtida facilmente pela equação que representa o formato da largura da pá. Porém, quando, pelo menos, uma aresta não é paralela ao eixo, deve-se admitir uma lei de formação para  $b_{c_j}$  na região próxima a essa aresta.

### 3.4 TRANSFORMAÇÃO DA GRADE RADIAL EM GRADE LINEAR

A solução numérica da Equação (2.85), no caso de PEF, é obtida no plano da grade linear (GL). Portanto, as coordenadas dos pontos extremos dos painéis,  $(r_j, \theta_j)$ , no plano da grade radial, devem ser transformadas em coordenadas  $(x_j, y_j \equiv \xi_j, \eta_j)$  no plano da grade linear. No caso particular de largura da pá,  $b = b(r)$ , constante, a equação do tipo Poisson, dada em (2.16), torna-se numa equação de Laplace. Nessa situação, a transformação é dita conforme, e as coordenadas  $(x_j, y_j)$  podem ser obtidas facilmente pelas Equações (2.9) e (2.10).

Se uma situação mais geral é analisada ( $b \neq$  constante), a determinação da coordenada  $x_j$ , dada na Equação (2.9), não é imediata. Conforme a dependência  $b = b(r)$ , a integral na Equação (2.9) tem que ser resolvida numericamente. Neste trabalho, os formatos de larguras das pás analisados permitem solução analítica dessa integral. As coordenadas  $(x_j, y_j)$  são determinadas com base na linha média,  $\sigma$ , do canal da seção meridional do rotor (Figura 3.1).

### 3.5 FORMAÇÃO DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS LINEARES

As equações integrais (2.85) e (2.111), na forma discretizada, serão colocadas em termos de um sistema de equações algébricas lineares (EAL), conforme a Equação (3.4).

$$\sum_{j=1}^M A_{kj} \Gamma_j = B_k, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (3.4)$$

A incógnita desse sistema,  $\Gamma_j$ , representa a densidade adimensional de vórtices, sendo

$$\Gamma_j \Big|_{GR} = \frac{\gamma_j \Big|_{GR}}{u_e}, \quad \text{para o plano físico (grade radial),} \quad (3.5)$$

e

$$\Gamma_j \Big|_{GL} = \frac{\gamma_j \Big|_{GL}}{u_{ye}}, \quad \text{para o plano transformado (grade linear).} \quad (3.6)$$

Na sequência, todos os termos das equações integrais (2.85) e (2.111) serão colocados na forma discretizada e, depois, reunidos convenientemente para formarem, em cada caso (PEF e PIF), a matriz dos coeficientes de influência,  $A_{kj}$ , e o vetor (coluna) independente,  $B_k$ .

#### 3.5.1 Formação do sistema de EAL para PEF

A equação integral (2.85) para PEF pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \underbrace{-\frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') w_s(\zeta') ds'}_{1^\circ \text{ Termo}} + \underbrace{\frac{w_s(\zeta)}{2}}_{2^\circ \text{ Termo}} + \underbrace{\frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \frac{\text{sen } \chi}{2} w_s(\zeta') ds'}_{2^\circ \text{ Termo}} \cong \\ & \cong \underbrace{\left[ \frac{t}{t(\xi)} \frac{b_4}{b(\xi)} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b_4}{b_5} \right) \left( 1 - \frac{t}{t(\xi)} \right) \right]}_{4^\circ \text{ Termo}} w_{x4} \cos \chi + \underbrace{\left( \frac{a_p u_{y5}}{2} + w_{y4} + u_{y4} \right)}_{5^\circ \text{ Termo}} \text{sen } \chi + \\ & \underbrace{-\frac{u_y(\zeta) \text{sen } \chi}{2} + \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} [R(\zeta, \zeta') \cos(\chi + \chi') - J(\zeta, \zeta') \text{sen}(\chi + \chi')] u_y(\zeta') ds'}_{6^\circ \text{ Termo}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

**Primeiro termo:**  $-\frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') w_s(\zeta') ds'$

Considerando as Equações (2.46) e (2.48) e o produto de variáveis complexas, pode ser escrito que

$$\lambda_I = -\Im \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{cotagh} \left[ \frac{\pi}{t} (\zeta - \zeta') \right] e^{i\chi} \right\}. \quad (3.8)$$

Conforme a Figura 3.2,  $d\zeta = e^{i\chi} ds$ . Desenvolvendo a integral referente ao primeiro termo para um painel reto da grade linear (Figura 3.2) com  $\chi \equiv \chi_k$ , e sabendo-se que  $\Im(C_{kj} e^{i\chi_k}) = -\Re(\overline{i C_{kj}} e^{-i\chi_k})$ , obtém-se

$$\frac{1}{t} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \lambda_I(z_{c_k}, z) \gamma_j ds_j = \Re(\overline{i C_{kj}} e^{-i\chi_k}) \gamma_j. \quad (3.9)$$

Segundo Lamb (1932), a velocidade complexa induzida,  $w_{I_j}$ , por uma distribuição de vórtices de densidade uniforme,  $\gamma_j$ , pela grade de painéis,  $j$ , sobre o ponto de controle,  $z_{c_k}$ , de um painel do perfil de referência é dada por

$$w_{I_j}(z_{c_k}) = \overline{i C_{kj}} \gamma_j, \quad (3.10)$$

onde

$$C_{kj} = \left\{ \frac{e^{-i\chi_j}}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{senh} \left[ \frac{\pi}{t} (z_{c_k} - z_j) \right]}{\operatorname{senh} \left[ \frac{\pi}{t} (z_{c_k} - z_{j+1}) \right]} \right\}. \quad (3.11)$$

Portanto, a Equação (3.9) representa a componente tangencial da velocidade induzida por uma distribuição de vórtices de densidade uniforme,  $\gamma_j$ , pela grade de painéis,  $j$ , sobre o ponto de controle,  $z_{c_k}$ , de um painel do perfil de referência, equivalente à própria velocidade tangencial,  $w_{s_j}(z_{c_k})$ . Logo, o primeiro termo da Equação (3.7), na forma discretizada, representa a componente tangencial da velocidade total externa induzida pela grade linear no ponto

de controle,  $z_{c_k}$ , que é dada pela superposição das contribuições de todas as grades de painéis, ou seja,

$$-\frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_t(\zeta, \zeta') w_s(\zeta') ds' \cong -\sum_{j=1}^M \Re \left( \overline{i C_{kj}} e^{-i\chi_k} \right) \gamma_j, \quad \text{para } j \neq k. \quad (3.12)$$

**Segundo termo:**  $\frac{w_s(\zeta)}{2}$

Para  $j = k$ , o coeficiente  $C_{kj}$  não é univocamente determinado podendo-se verificar facilmente, através da Equação (3.11), que

$$C_{kk} = \pm i \frac{1}{2} e^{-i\chi_k}, \quad (3.13)$$

onde, pela convenção adotada, o sinal positivo refere-se ao domínio exterior ao perfil e o sinal negativo ao domínio interior. Portanto, tomando-se, o sinal positivo na Equação (3.13), resulta

$$-\Re \left( \overline{i C_{kk}} e^{-i\chi_k} \right) \gamma_k = \frac{1}{2} \gamma_k. \quad (3.14)$$

Dessa forma, o termo  $w_s(\zeta)/2$  representa a componente tangencial da velocidade total externa induzida por um painel sobre o seu próprio ponto de controle, podendo-se escrever que

$$\frac{w_s(\zeta)}{2} \cong \frac{\gamma_k}{2}, \quad \text{para } j = k. \quad (3.15)$$

**Terceiro termo:**  $\frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \frac{\text{sen } \chi}{2} w_s(\zeta') ds'$

A integral de contorno pode ser aproximada pela “regra dos retângulos” resultando

$$\frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \frac{\text{sen } \chi}{2} w_s(\zeta) ds' \cong \sum_{j=1}^M \Re \left( i \frac{\Delta s_j}{2t} e^{-i\chi_k} \right) \gamma_j, \quad (3.16)$$

onde  $\Delta s_j = |z_{j+1} - z_j|$  é o comprimento do painel  $j$ .

$$\text{Quarto termo: } \left[ \frac{t}{t(\xi)} \frac{b_i}{b(\xi)} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b_i}{b_e} \right) \left( 1 - \frac{t}{t(\xi)} \right) \right] w_{xi} \cos \chi$$

Na forma discretizada, esse termo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{t}{t(x_{ck})} \frac{b_i}{b(x_{ck})} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b_i}{b_e} \right) \left( 1 - \frac{t}{t(x_{ck})} \right) \right] w_{xi} \cos \chi \cong \\ & \cong \Re \left\{ \left[ \frac{t}{t(x_{ck})} \frac{b_4}{b(x_{ck})} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b_4}{b_5} \right) \left( 1 - \frac{t}{t(x_{ck})} \right) \right] w_{x4} e^{-i\chi k} \right\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde  $b(x_{ck})$  e  $t(x_{ck})$  representam, respectivamente, a largura e o passo da pá no ponto de controle de coordenada  $x_{ck}$ .

$$\text{Quinto termo: } \left( \frac{a_p u_{ye}}{2} + w_{yi} + u_{yi} \right) \text{sen } \chi$$

De modo semelhante, esse termo pode ser escrito na forma discretizada como

$$\left( \frac{a_p u_{ye}}{2} + w_{yi} + u_{yi} \right) \text{sen } \chi \cong \Re \left\{ i \left( \frac{a_p u_{ye}}{2} + w_{yi} + u_{yi} \right) e^{-i\chi k} \right\}. \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \text{Sexto termo: } & -\frac{u_y(\zeta) \text{sen } \chi}{2} + \\ & + \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} [J(\zeta, \zeta') \cos(\chi + \chi') - K(\zeta, \zeta') \text{sen}(\chi + \chi')] u_y(\zeta') ds' \end{aligned}$$

Conforme Eremeef (1974), a expressão entre colchetes é equivalente à  $\lambda_I(\zeta, \zeta') \text{sen } \chi' + \lambda_{II}(\zeta, \zeta') \cos \chi'$ , onde  $\lambda_I(\zeta, \zeta')$  é dada pela Equação (3.8), e

$$\lambda_{II}(\zeta, \zeta') = \Re \left\{ \frac{1}{2} \text{cotagh} \left[ \frac{\pi}{t}(\zeta, \zeta') \right] e^{i\chi} \right\}. \quad (3.19)$$

Considerando primeiramente a integral envolvendo  $\lambda_I(\zeta, \zeta')$ , pode-se escrever, na forma discretizada, para  $j \neq k$ , que

$$\frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') \operatorname{sen} \chi' u_y(\zeta') ds' \cong \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^M \Re \left( \overline{i C_{kj}} e^{-i\chi_k} \right) u_{y_{c_j}} \operatorname{sen} \alpha_j \quad (3.20)$$

e, para  $j = k$  (correspondente à  $\zeta' = \zeta$ ),

$$\frac{u_y(\zeta) \operatorname{sen} \chi}{2} \cong \Re \left( \overline{i C_{kk}} e^{-i\chi_k} \right) u_{y_{c_k}} \operatorname{sen} \chi_k. \quad (3.21)$$

A integral envolvendo  $\lambda_{II}(\zeta, \zeta')$  é igual a zero para  $j = k$ , e para  $j \neq k$ , obtém-se

$$\frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_{II}(\zeta, \zeta') \cos \chi' u_y(\zeta') ds' \cong \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^M \Re \left( \overline{C_{kj}} e^{-i\chi_k} \right) u_{y_{c_j}} \cos \chi_j. \quad (3.22)$$

Segundo Giesing (1964), a velocidade complexa induzida,  $u_{I_j}$ , por uma distribuição de fontes de densidade uniforme,  $\sigma_j$ , pela grade de painéis,  $j$ , sobre o ponto de controle,  $z_{c_k}$ , de um painel do perfil de referência, é dada por

$$u_{I_j}(z_{c_k}) = \overline{C_{kj}} \sigma_j, \quad (3.23)$$

e, para  $j = k$  (correspondente à  $\zeta' = \zeta$ ),

$$0 \cong \Re \left( \overline{C_{kk}} e^{-i\chi_k} \right) u_{y_{c_k}} \cos \chi_k. \quad (3.24)$$

Combinando as Equações (3.20) e (3.21), obtém-se

$$\begin{aligned} & -\frac{u_y(\zeta) \operatorname{sen} \chi}{2} + \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} [J(\zeta, \zeta') \cos(\chi + \chi') - K(\zeta, \zeta') \operatorname{sen}(\chi + \chi')] u_y(\zeta') ds' \cong \\ & -\frac{u_{y_{c_k}} \operatorname{sen} \chi_k}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \Re \left\{ \left[ \left( \overline{i C_{kj}} \right) u_{y_{c_j}} \operatorname{sen} \chi_j + \left( \overline{C_{kj}} \right) u_{y_{c_j}} \cos \chi_j \right] e^{-i\chi_k} \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde  $u_{yc_j}$  é a velocidade de condução de cada painel do perfil de referência, tomada no seu ponto de controle  $j$ , no plano da grade linear.

Portanto, as integrais de contorno nas Equações (3.20) e (3.22), na forma discretizada, representam as componentes tangenciais da velocidade total de condução induzida pela grade linear sobre o ponto de controle,  $z_{c_k}$ , que é dada pela superposição das contribuições de todas as grades de painéis. No caso da Equação (3.20), a velocidade é induzida por uma distribuição de vórtices de densidade uniforme conhecida igual a  $u_{yc_j} \sin \alpha_j$  ( $u_{yc_j}$  varia de painel para painel), que decorre da decomposição da velocidade absoluta,  $c_s(\zeta')$ , em velocidades relativa,  $w_s(\zeta')$ , e de condução da grade linear,  $u_s(\zeta')$ . No caso da Equação (3.22), a velocidade é induzida por uma distribuição de fontes de densidade uniforme conhecida igual a  $u_{yc_j} \cos \alpha_j$ , correspondente à velocidade normal de condução,  $u_n(\zeta') \equiv c_n(\zeta')$ . Do mesmo modo, as Equações (3.21) e (3.24) representam as componentes tangenciais da velocidade total de condução induzidas por um painel sobre o seu próprio ponto de controle.

Combinando as Equações (3.12), (3.15), (3.16), (3.17), (3.18) e (3.25), a equação integral (3.7), na forma discretizada, pode ser representada pelo seguinte sistema de equações algébricas lineares  $M \times M$  com incógnitas  $\gamma_j$ :

$$\sum_{j=1}^M A'_{kj} \gamma_j = B'_k, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (3.26)$$

onde

$$A'_{kj} = -\Re e \left[ \left( \overline{i C_{kj}} - i \frac{\Delta s_j}{2t} \right) e^{-i \chi_k} \right], \quad \text{para } j \neq k, \quad (3.27.a)$$

$$A'_{kk} = \frac{1}{2} + \Re e \left[ \left( i \frac{\Delta s_k}{2t} \right) e^{-i \chi_k} \right] \pm \frac{|\Delta \chi_k|}{4\pi}, \quad \text{para } j = k \quad (3.27.b)$$

e

$$B'_k = \Re e \left\{ \left[ \left[ \frac{t}{t(x_{c_k})} \frac{b_i}{b(x_{c_k})} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b_i}{b_e} \right) \left( 1 - \frac{t}{t(x_{c_k})} \right) \right] w_{xi} + i \left( \frac{a_p u_{ye}}{2} + w_{yi} + u_{yi} \right) \right] \right\}$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left[ \left( \overline{i C_{kj}} \right) u_{y_{c_j}} \operatorname{sen} \chi_j + \left( \overline{C_{kj}} \right) u_{y_{c_j}} \cos \chi_j \right] \left. \vphantom{\sum} \right\} e^{-i\chi_k} \left. \vphantom{\sum} \right\} - \frac{u_{y_{c_k}} \operatorname{sen} \chi_k}{2}. \quad (3.28)$$

Na equação (3.27.b), foi incluído o termo de correção de curvatura,  $\pm |\Delta\chi_k|/4\pi$ , onde o sinal + refere-se ao elemento convexo e o sinal – ao elemento côncavo do contorno do perfil.  $\Delta\chi_k$  é o ângulo do setor compreendendo os pontos extremos do painel  $k$  (Figura 3.2) que, no presente trabalho, foi determinado conforme Lewis (1991), ou seja,  $\Delta\chi_k = (\chi_{k+1} - \chi_{k-1})/2$ . O termo de correção de curvatura surge da análise do comportamento da função núcleo,  $\lambda_l$ , da equação integral de Fredholm de segunda espécie, Equação (3.7), quando  $\xi' \rightarrow \xi$  e  $\eta' \rightarrow \eta$  (Veja o Item 2.1.2, Equação (2.56)), conforme o desenvolvimento de Eremeev (1974).

Da análise feita por Martensen (1959) a respeito da existência de soluções para a equação de Fredholm de segunda espécie da qual o sistema de equações algébricas lineares, Equação (3.26), é uma forma discretizada, resultou que uma solução única só pode ser obtida se for satisfeita uma determinada condição complementar para o escoamento. Como comentado anteriormente, a Equação (3.7) foi obtida da condição de que a componente tangencial da velocidade relativa total no contorno interno do perfil deve ser nula ( $w_s^- = 0$ ). Com isso, a componente tangencial da velocidade relativa total em cada ponto do contorno externo do perfil,  $w_s^+$ , é igual a  $w_s$ , equivalente à densidade de vórtices,  $\gamma$ .

Com a utilização do método dos painéis para a solução numérica da Equação (3.7), a condição de contorno não é exatamente satisfeita, implicando num erro no valor das velocidades externas (em consequência do erro nos valores das velocidades internas) em todos os pontos de controle. Neste trabalho, admite-se para esse erro um valor constante  $c_T$ , que passa ser a incógnita adicional. O valor de  $c_T$  será determinado de acordo com uma determinada condição suplementar que será descrita no Item 3.6.

Para maior generalização, deve-se trabalhar com parâmetros adimensionais. Define-se o coeficiente de vazão,  $\phi$ , e o coeficiente de pré-circulação,  $\Omega_o$ , por

$$\phi = \frac{c_{me}}{u_e} \Big|_{GR} = \frac{c_{xe}}{u_{ye}} \Big|_{GL} \quad (3.29)$$

$$\Omega_0 = \frac{\Gamma_0}{2\pi u_e} \Big|_{\text{GR}} = \frac{c_{yi}}{u_{ye}} \Big|_{\text{GL}}, \quad (3.30)$$

onde  $\Gamma_0$  é a circulação absoluta total na entrada da pá. As demais grandezas nas Equações (3.29) e (3.30) estão indicadas nas Figuras 2.1 e 2.2. No sistema de coordenadas adotado, a velocidade de condução do rotor na saída da pá na grade linear,  $u_{ye}$ , é negativa, portanto, para valores positivos de  $\phi$ , deve-se levar em conta os sinais dos termos que compõem o sistema de equações.

Dividindo as Equações (3.27.a-b) e (3.28) por  $u_{ye}$ , considerando o fator de erro circulatório em termos adimensionais,  $C_\Gamma$ , e também os parâmetros definidos dados nas Equações (3.29) e (3.30), resultam as seguintes equações adimensionais que compõem o sistema de EAL, Equação (3.26):

$$A_{kj} = -\Re \left[ \left( \overline{i C_{kj}} - i \frac{\Delta S_j}{2} \right) e^{-i\chi_k} \right], \quad \text{para } j \neq k, \quad (3.31.a)$$

$$A_{kk} = \frac{1}{2} + \Re \left[ \left( i \frac{\Delta S_k}{2} \right) e^{-i\chi_k} \right] \pm \frac{|\Delta\chi_k|}{4\pi}, \quad \text{para } j = k \quad (3.31.b)$$

e

$$B_k = \Re \left\{ \left\{ \left[ \frac{1}{T_{c_k}} \frac{B_i^*}{B_{c_k}^*} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{B_i^*}{B_e^*} \right) \left( 1 - \frac{1}{T_{c_k}} \right) \right] \frac{B_e^*}{B_i^*} \phi - i \left( \frac{a_p}{2} + \Omega_0 \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^M \left[ \left( \overline{i C_{kj}} \right) \sin \chi_j + \left( \overline{C_{kj}} \right) \cos \chi_j \right] R_{c_j}^2 \right\} e^{-i\chi_k} \right\} + \frac{R_{c_k}^2 \sin \chi_k}{2} + C_\Gamma, \quad (3.32)$$

onde todas as grandezas referentes a comprimentos, oriundas do plano da grade radial, foram adimensionalizadas em relação ao raio externo,  $r_e$ , do rotor, antes de se obter as suas transformações para o plano da grade linear. Dessa forma,  $B_i^* = b_i/r_e$  e  $B_e^* = b_e/r_e$ , são, respectivamente, as larguras adimensionais na entrada e na saída da pá.  $R_{c_k} = r_{c_k}/r_e$  é o raio polar adimensional e  $B_{c_k}^* = b_{c_k}/r_e$  e  $T_{c_k} = t_{c_k}/r_e$  são, respectivamente, a largura da pá e o passo

adimensionais no ponto de controle do painel. As coordenadas adimensionais,  $\zeta = \varsigma / r_e$  dos pontos extremos dos painéis,  $\zeta_j$  e  $\zeta_{j+1}$ , e dos pontos de controle,  $\zeta_{c_k}$ , que aparecem em  $\overline{C_{kj}}$ , bem como o comprimento adimensional do painel  $j$ ,  $\Delta S_j$ , estão relacionados ao passo  $t$ , que, na transformação utilizada, é colocado igual a 1, no plano da grade linear. Vale observar que os comprimentos adimensionais dos painéis, no plano da grade linear (relacionados a  $t$ ), correspondem aos comprimentos adimensionais relacionados a  $r_e$ , no plano da grade radial. A incógnita  $\Gamma_j$  na Equação (3.26) é dada por

$$\Gamma_j = \frac{\gamma_j}{u_{ye}} \cong \frac{w_s(\zeta)}{u_{ye}} \cong \frac{w_j}{u_{ye}}. \quad (3.33)$$

### 3.5.2 Formação do sistema de EAL para PIF

A velocidade complexa induzida pelo painel  $k$  da pá  $\ell$  sobre o ponto de controle  $z_{c_j}$  é, segundo a equação (2.98)

$$c_{s\ell k}(z_{c_j}) = c_{s\ell jk} = \overline{I}_{\ell k}(z)\gamma_k + \overline{J}_{\ell k}(z)\gamma_{k+1}, \quad (3.34)$$

onde, de acordo com as equações (2.99.a) e (2.99.b),

$$I_{\ell jk} = I_{\ell k}(\zeta_{c_j}) = \frac{\mathbf{i} e^{-i\chi\ell k}}{2\pi} \left[ \frac{\zeta_{\ell k+1} - \zeta_{c_j}}{\zeta_{\ell k+1} - \zeta_{\ell k}} \ln \left( \frac{\zeta_{c_j} - \zeta_{\ell k}}{\zeta_{c_j} - \zeta_{\ell k+1}} \right) + 1 \right] \quad (3.35.a)$$

e

$$J_{\ell jk} = J_{\ell k}(\zeta_{c_j}) = \frac{\mathbf{i} e^{-i\chi\ell k}}{2\pi} \left[ \frac{\zeta_{c_j} - \zeta_{\ell k}}{\zeta_{\ell k+1} - \zeta_{\ell k}} \ln \left( \frac{\zeta_{c_j} - \zeta_{\ell k}}{\zeta_{c_j} - \zeta_{\ell k+1}} \right) - 1 \right]. \quad (3.35.b)$$

Os coeficientes  $I_{\ell jk}$  e  $J_{\ell jk}$  não são univocamente determinados para  $\ell = 1$  e  $k = j$ . Neste caso, deve-se considerar que  $\zeta_{\ell k} = \zeta_j$  e  $\zeta_{\ell k+1} = \zeta_{j+1}$ , segundo a convenção estabelecida. Além disso, como o ponto de controle é o ponto médio do painel, tem-se que  $\zeta_{c_j} = (\zeta_j + \zeta_{j+1}) / 2$ .

Logo, para  $\ell = 1$  e  $k = j$ , a equação (3.34) torna-se

$$c_{s1jj} = \overline{I}_{1jj} \gamma_k + \overline{J}_{1jj}(z) \gamma_{k+1} \quad (3.36)$$

onde, segundo as Equações (3.35.a) e (3.35.b),

$$I_{1,jj} = \frac{e^{-i\chi_j}}{2\pi} \left( \pm \frac{\pi}{2} + i \right) \quad (3.37.a)$$

e

$$I_{1,jj} = \frac{e^{-i\chi_j}}{2\pi} \left( \pm \frac{\pi}{2} - i \right) \quad (3.37.b)$$

Nas equações (3.37.a-b), o sinal (+) se refere ao lado do intradorso e o sinal (-) ao lado do extradorso do painel. Verifica-se, assim, que a indução que um painel exerce sobre o seu próprio ponto de controle é responsável por uma descontinuidade no valor da velocidade e, portanto, no valor da pressão sobre o painel. Tal descontinuidade é uma característica de toda distribuição de vórtices, sendo de utilidade na simulação do efeito da pá de uma grade radial.

Observa-se, adicionalmente, que para  $\ell \neq 1$  e  $j \neq k$ , o valor de  $c_{stjk}$  na Equação (3.34) é univocamente determinado, não contribuindo para o efeito de descontinuidade.

A velocidade complexa induzida pela grade elementar  $k$  sobre o ponto de controle  $\zeta_{c_j}$ , é, de acordo com a equação (2.102),

$$c_{sk}(\zeta_{c_j}) = c_{sjk} = \gamma_k X_{jk} + \gamma_{k+1} Y_{jk} \quad (3.38)$$

onde

$$X_{jk} = X_k(\zeta_{c_j}) = \sum_{\ell=1}^N \bar{I}_{\ell jk} \quad (3.39.a)$$

e

$$Y_{jk} = Y_k(\zeta_{c_j}) = \sum_{\ell=1}^N \bar{J}_{\ell jk} . \quad (3.39.b)$$

Analogamente, a velocidade complexa total induzida pela grade radial sobre o ponto de controle  $\zeta_{c_j}$  é, segundo a equação (2.103),

$$c_{sk}(\zeta_{c_j}) = \sum_{k=1}^M \gamma_k X_{jk} + \gamma_{k+1} Y_{jk} \quad (3.40)$$

Recorda-se que o valor  $c_{sk}(\zeta_{c_j})$  não é univocamente determinado, devido à contribui-

ção do painel  $j$  sobre o seu próprio ponto de controle,  $\zeta_{c_j}$ : deve-se ter em mente as Equações (3.36) e (3.37.a-b) ao se calcular  $c_s(\zeta_{c_j})$ . Por outro lado, as dificuldades matemáticas que adviriam da utilização da equação (2.93) para o cálculo da velocidade induzida sobre os pontos da pá ficam definitivamente superadas quando se utiliza, em contrapartida, a Equação (3.40).

Observa-se que a equação (3.40) fornece o valor de  $c_s(\zeta_{c_j})$  em função dos valores  $\gamma_k$ , em princípio desconhecidos. A determinação de  $\gamma_k$  só pode ser feita após a imposição de uma condição de contorno para o escoamento sobre os pontos de controle (pá de referência).

Sendo  $\zeta_{c_j} = r_{c_j} e^{i\theta_{c_j}}$ , as componentes radial e circunferencial da velocidade complexa induzida no ponto  $\zeta_{c_j}$  são, de acordo com as Equações (2.106.a) e (2.106.b),

$$c_{sr}(\zeta_{c_j}) = \sum_{k=1}^M (\gamma_k A_{rjk} + \gamma_{k+1} B_{rjk}) \quad (3.41.a)$$

e

$$c_{s\theta}(\zeta_{c_j}) = \sum_{k=1}^M (\gamma_k A_{\theta_{jk}} + \gamma_{k+1} B_{\theta_{jk}}) \quad (3.41.b)$$

onde

$$A_{r_{jk}} = A_{r_k}(\zeta_{c_j}) = \Re \left[ X_{jk} e^{-i\theta_{c_j}} \right] = \sum_{\ell=1}^N \Re \left[ \bar{I}_{\ell jk} e^{-i\theta_{c_j}} \right], \quad (3.42.a)$$

$$B_{r_{jk}} = B_{r_k}(\zeta_{c_j}) = \Re \left[ Y_{jk} e^{-i\theta_{c_j}} \right] = \sum_{\ell=1}^N \Re \left[ \bar{J}_{\ell jk} e^{-i\theta_{c_j}} \right], \quad (3.42.b)$$

$$A_{\theta_{jk}} = A_{\theta_k}(\zeta_{c_j}) = \Im \left[ X_{jk} e^{-i\theta_{c_j}} \right] = \sum_{\ell=1}^N \Im \left[ \bar{I}_{\ell jk} e^{-i\theta_{c_j}} \right], \quad (3.42.c)$$

$$B_{\theta_{jk}} = B_{\theta_k}(\zeta_{c_j}) = \Im \left[ Y_{jk} e^{-i\theta_{c_j}} \right] = \sum_{\ell=1}^N \Im \left[ \bar{J}_{\ell jk} e^{-i\theta_{c_j}} \right]. \quad (3.42.d)$$

Considerando a condição de contorno dada na Equação (2.111) e definindo-se os parâmetros adimensionais denominados coeficiente de vazão,  $\phi$ , e coeficiente de circulação interna,  $\Omega_0$ ,

$$\phi = \frac{q_0}{2\pi \omega r_e^2} \quad (3.43)$$

e

$$\Omega_0 = \frac{\Gamma_0}{2\pi \omega r_e^2}, \quad (3.44)$$

a forma adimensional da Equação (2.111) é dada por

$$(C_{s\theta} \operatorname{tag} \beta - C_{sr})R = \phi - (R^2 + \Omega_0) \operatorname{tag} \beta, \quad R_i \leq R \leq 1. \quad (3.45)$$

sendo  $R = r / r_e$  e  $C_s = c_s / \omega r_e$  as formas adimensionais do raio polar,  $r$ , e da velocidade induzida,  $c_s$ .

Aplicando a condição de contorno dada na Equação (3.45) ao ponto de controle de um painel, obtém-se

$$[C_{s\theta}(\zeta_{c_j}) \operatorname{tag} \beta_{c_j} - C_{sr}(\zeta_{c_j})]R_{c_j} = \phi - (R_{c_j}^2 + \Omega_0) \operatorname{tag} \beta_{c_j}, \quad R_i \leq R \leq 1. \quad (3.46)$$

$\beta_{c_j}$  é o ângulo entre o painel  $j$  e a tangente à circunferência no ponto  $\zeta_{c_j}$  (Figura 2.7);

$\zeta_{c_j} = \zeta_{c_j} / r_e$  é a forma adimensional do valor complexo  $\zeta_{c_j}$ .

As componentes adimensionais da velocidade induzida nos pontos de controle podem ser escritas, de acordo com as equações (3.41.a) e (3.41.b), na forma de

$$C_{sr}(\zeta_{c_j}) = C_{srk} = \sum_{k=1}^M (\Gamma_k A_{r_{jk}} + \Gamma_{k+1} B_{r_{jk}}) \quad (3.47.a)$$

e

$$C_{s\theta}(\zeta_{c_j}) = C_{s\theta k} = \sum_{k=1}^M (\Gamma_k A_{\theta_{jk}} + \Gamma_{k+1} B_{\theta_{jk}}) \quad (3.47.b)$$

onde  $\Gamma = \gamma / \omega r_e$  é a forma adimensional da densidade de vórtices,  $\gamma$ .

Substituindo-se as equações (3.47.a) e (3.47.b) na equação (3.46), resulta que

$$[\operatorname{tag} \beta_{c_j} \sum_{k=1}^M (\Gamma_k A_{\theta_{jk}} + \Gamma_{k+1} B_{\theta_{jk}}) - \sum_{k=1}^M (\Gamma_k A_{r_{jk}} + \Gamma_{k+1} B_{r_{jk}})]R_{c_j} =$$

$$= \phi - (R_{c_j}^2 + \Omega_0) \operatorname{tag} \beta_{c_j} \quad (3.48.a)$$

ou, então,

$$\sum_{k=1}^M [\Gamma_k R_{c_j} (\operatorname{tag} \beta_{c_j} A_{\theta_{jk}} - A_{r_{jk}})] + \sum_{k=1}^M [\Gamma_{k+1} R_{c_j} (\operatorname{tag} \beta_{c_j} B_{\theta_{jk}} - B_{r_{jk}})] = \quad (3.48.b)$$

$$\phi - (R_{c_j}^2 + \Omega_0) \operatorname{tag} \beta_{c_j}, \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Definindo-se os coeficientes

$$A_{jk} = R_{c_j} (\operatorname{tag} \beta_{c_j} A_{\theta_{jk}} - A_{r_{jk}}) \quad (3.49.a)$$

e

$$B_{jk} = R_{c_j} (\operatorname{tag} \beta_{c_j} B_{\theta_{jk}} - B_{r_{jk}}) \quad (3.49.b)$$

a Equação (3.48.b) torna-se

$$\sum_{k=1}^M A_{jk} \Gamma_k + \sum_{k=1}^M B_{jk} \Gamma_{k+1} = \phi - (R_{c_j}^2 + \Omega_0) \operatorname{tag} \beta_{c_j}, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (3.50)$$

Considerando as regras de agrupamento de somatórias, a expressão (3.50) pode ser convenientemente modificada, resultando que

$$A_{j1} \Gamma_1 + \sum_{k=2}^M (A_{jk} + B_{jk-1}) \Gamma_k + B_{jM} \Gamma_{M+1} = \frac{\phi}{B_{c_k}} - (R_{c_k}^2 + \Omega_0) \operatorname{tag} \beta_{c_k}, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (3.51)$$

onde a variação de largura das pás na forma adimensional,  $B_{c_k}$ , já está considerada no termo correspondente ao coeficiente de vazão,  $\phi$ .

O sistema de equações representado em (3.51) possui  $M$  equações com  $M+1$  incógnitas,  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{M+1}$ . Dessa forma o sistema é indeterminado, admitindo infinitas soluções. Para tornar o sistema determinado, deve ser aplicada uma condição complementar que será discutida no item a seguir.

## 3.6 CONDIÇÕES COMPLEMENTARES

No Item 3.5, dois sistemas de equações algébricas lineares resultaram das formulações para PEF, Equações (3.31) e (3.32), e para PIF, Equação (3.51). Uma solução única, para cada um desses sistemas, só é possível através da utilização de certas condições complementares que são apresentadas a seguir.

### 3.6.1 Condições complementares para PEF

Uma forma de resolver o sistema de EAL, Equação (3.26), com  $A_{kj}$  e  $B_k$  dados respectivamente nas Equações (3.27.a-b) e (3.28), consiste em se obter, primeiramente, um conjunto de soluções básicas e, depois, determinar a solução geral através da combinação linear dessas soluções. Seguindo sugestão apresentada por Lewis (1991), serão utilizadas, neste trabalho, quatro soluções básicas,  $\Gamma_j^I$ ,  $\Gamma_j^{II}$ ,  $\Gamma_j^{\Gamma}$  e  $\Gamma_j^U$ , que compõem a seguinte solução geral escrita em termos adimensionais:

$$\Gamma_j = C_I \Gamma_j^I + C_{II} \Gamma_j^{II} + C_{\Gamma} \Gamma_j^{\Gamma} + C_U \Gamma_j^U \quad (3.52)$$

sendo

$$\left. \begin{aligned} C_I = \phi & \quad \text{ou um valor a ser determinado de modo a satisfazer} \\ & \quad \text{uma certa condição no contorno da pá na} \\ & \quad \text{região próxima ao seu bordo de fuga} \\ C_{II} = -\left(\frac{a_p}{2} + \Omega_o\right), \\ C_{\Gamma} = & \quad \text{valor a ser determinado de modo a satisfazer uma certa} \\ & \quad \text{condição complementar no contorno da pá na} \\ & \quad \text{região próxima ao seu bordo de fuga} \\ \text{e} \\ C_U = 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

De acordo com a Equação (3.52), o sistema de EAL, Equação (3.26), se divide em quatro sistemas independentes, ou seja,

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{j=1}^M A_{kj} \Gamma_j^I &= \Re \left\{ \left[ \frac{1}{T_{c_k}} \frac{B_4^*}{B_{c_k}^*} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{B_4^*}{B_5^*} \right) \left( 1 - \frac{1}{T_{c_k}} \right) \right] \frac{B_5^*}{B_4^*} e^{-i\alpha_k} \right\}, \\
 \sum_{j=1}^M A_{kj} \Gamma_j^{II} &= \Re \left\{ i e^{-i\alpha_k} \right\}, \\
 \sum_{j=1}^M A_{kj} \Gamma_j^{\Gamma} &= 1 \\
 e \\
 \sum_{j=1}^M A_{kj} \Gamma_j^U &= \frac{R_{c_k}^2 \operatorname{sen} \alpha_k}{2} - \\
 &\Re \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^M \left[ (i \overline{C_{kj}}) \operatorname{sen} \alpha_j + (\overline{C_{kj}}) \cos \alpha_j \right] R_{c_j}^2 e^{-i\alpha_k} \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Na Equação (3.53), o parâmetro adimensional referente à área da seção transversal das pás,  $a_p$ , Equação (2.72), é conhecido. Então, para cada valor de  $\phi$  e  $\Omega_0$ , o fator de erro circulatório,  $C_r$ , é determinado através da Equação (3.52), de modo a satisfazer uma determinada condição complementar. Duas possibilidades podem existir: 1) Prescrevendo a circulação relativa (em geral, não é conhecida *a priori*) fazendo uso de solução exata (quando existir) ou fixando apropriadamente valores para a circulação relativa e selecionando aquele que produz um resultado satisfatório para a distribuição de pressões (ou de velocidades) na região próxima ao bordo de fuga; 2) Impondo uma condição física denominada de condição de Kutta. Esta última condição é apresentada a seguir.

### Condição de Kutta

No caso de perfis com bordos de fuga afilados ou agudos (Figura 3.1.a), o valor da circulação absoluta é estabelecido de tal modo que o escoamento resultante não possa contornar

o bordo de fuga. Como alternativa para essa condição, Wilkinson (1967) sugeriu que as pressões estáticas nos dois pontos de controle dos painéis mais próximos ao bordo de fuga (um do lado extradorso e o outro do lado do intradorso) têm o mesmo valor. Essa condição implica que, em termos aproximados, as velocidades relativas nesses pontos são iguais (fazendo pressões de movimento  $(p_j^* = p_j + \rho g h_j)$  iguais, e desprezando possíveis variações de raios nos pontos de controle  $\zeta_{c_1}$  e  $\zeta_{c_M}$ ). Em termos adimensionais, tem-se

$$W_N|_{GR} = -W_1|_{GR}. \quad (3.55)$$

Lembrando que, para um escoamento suave deixando a região do bordo de fuga, a convenção adotada anteriormente estabelece o sinal positivo para a velocidade no ponto de controle  $j = M$  (lado do intradorso do perfil) e o sinal negativo para a velocidade no ponto de controle  $j = 1$  (lado do extradorso do perfil).

Na forma adimensional, as velocidades relativas,  $W$ , nos planos físico e transformado, segundo a Equação (3.11), estão relacionadas por

$$W_j|_{GR} = \frac{W_j|_{GL}}{R_{c_j}}, \quad (3.56)$$

onde

$$W_j|_{GR} = \frac{w_j|_{GL}}{\omega r_5} \quad (3.57.a)$$

e

$$W_j|_{GL} = \frac{w_j|_{GL}}{u_{y_5}} \cong \frac{\gamma_j|_{GL}}{u_{y_5}}. \quad (3.57.b)$$

No procedimento numérico apresentado no Item 3.5, foi admitido um erro uniforme igual a  $C_r$  na velocidade relativa tangencial interna ao perfil. Esse erro também deve ser considerado na velocidade relativa externa,  $W_j$ , ao perfil, devido à descontinuidade tangencial imposta pela distribuição de vórtices, portanto,

$$W_1|_{GL} = \Gamma_1 + C_r \quad (3.58.a)$$

e

$$W_N|_{GL} = \Gamma_M + C_r. \quad (3.58.b)$$

Substituindo a Equação (3.58.a-b) na Equação (3.56), com  $j = 1$  e  $j = M$ , e considerando a condição de Kutta, Equação (3.55), resulta

$$\Gamma_M = -\Gamma_1 \left( \frac{R_{cM}}{R_{c1}} \right) - C_T \left( \frac{R_{cM}}{R_{c1}} + 1 \right). \quad (3.59)$$

Substituindo a Equação (3.52), com  $j = 1$  e  $j = M$ , na Equação (3.59) e fazendo  $C_T = \phi$ , resulta

$$C_T = \frac{\phi \left[ \Gamma_1^I \left( \frac{R_{cM}}{R_{c1}} \right) + \Gamma_M^I \right] + C_{II} \left[ \Gamma_1^{II} \left( \frac{R_{cM}}{R_{c1}} \right) + \Gamma_M^{II} \right] + C_U \left[ \Gamma_1^U \left( \frac{R_{cM}}{R_{c1}} \right) + \Gamma_M^U \right]}{\Gamma_1^\Gamma \left( \frac{R_{cM}}{R_{c1}} \right) + \Gamma_M^\Gamma + \frac{R_{cM}}{R_{c1}} + 1}. \quad (3.60)$$

### Condição de entrada:

Normalmente, deseja-se obter as características aerodinâmicas do rotor no chamado ponto de projeto. Nesse ponto, em princípio, não se conhece o coeficiente de vazão,  $\phi$ , que está relacionado à vazão para entrada sem choque (incidência ótima) na pá. Essa condição exige que o escoamento na entrada da pá seja suave. Um ponto de estagnação se forma próximo ao bordo de ataque em um local desconhecido, dificultando a imposição de uma condição de entrada. Para superar tal dificuldade, uma alternativa proposta neste trabalho foi a de impor, nos pontos de controle dos painéis mais próximos ao bordo de ataque, a seguinte condição de entrada:

$$W_{M/2+1}|_{GR} = -W_{N/2}|_{GR}. \quad (3.61)$$

### Condição de saída:

Se a região próxima ao bordo de fuga não é afilada e nem aguda, a condição de Kutta, na Equação (3.55), para os dois pontos de controle mais próximos ao bordo de fuga, não é apropriada. Uma alternativa para essa situação também foi sugerida por Wilkinson (1967), que estabeleceu pressões estáticas iguais nos pontos  $A_e$  e  $B_e$  do contorno da pá (Figura 3.1). Esses pontos são escolhidos próximos aos prováveis pontos de separação do escoamento nessa região. Para regiões arredondadas próximas ao bordo de fuga (Figura 3.1.b),  $A_e$  e  $B_e$  são

estabelecidos nos pontos de tangência das curvas. Para regiões chanfradas (Figura 3.1.c), os pontos de separação são bem definidos em  $A_e$  e em  $B_e$  na interseção das curvas envolvidas. No procedimento numérico deste trabalho, esses pontos foram estabelecidos nos pontos de controle  $\zeta_{c_{1+j_p}}$  e  $\zeta_{c_{M-j_s}}$  imediatamente antes de  $A_f$  e de  $B_f$  no sentido do escoamento.  $j_p$  e  $j_s$  são, respectivamente, os números de painéis dos lados do extradorso e do intradorso, contados a partir do bordo externo da pá (Figuras 3.1.b-c). A condição de pressões estáticas iguais implica, aproximadamente, em

$$W_{M-j_s} \Big|_{GR} = -W_{1+j_p} \Big|_{GR} . \quad (3.62)$$

Utilizando um procedimento semelhante ao adotado na obtenção da Equação (3.60), e sendo

$$W_{1+j_p} \Big|_{GL} = \Gamma_{1+j_p} + C_\Gamma , \quad (3.63.a)$$

$$W_{M-j_s} \Big|_{GL} = \Gamma_{M-j_s} + C_\Gamma , \quad (3.63.b)$$

$$W_{M/2} \Big|_{GL} = \Gamma_{M/2} + C_\Gamma \quad (3.64.a)$$

e

$$W_{M/2+1} \Big|_{GL} = \Gamma_{M/2+1} + C_\Gamma , \quad (3.64.b)$$

resulta

$$C_I = -\frac{C_{II} C_1 + C_U C_2 + C_\Gamma C_3}{C_4} \quad (3.65)$$

e

$$C_\Gamma = \frac{(C_{II} C_1 + C_U C_2) C_5 - (C_{II} C_6 + C_U C_7) C_4}{C_8 C_4 - C_3 C_5} . \quad (3.66)$$

Observando-se as equações anteriores, o valor de  $C_\Gamma$  deve ser calculado primeiramente através da Equação (3.66) e, depois, calcula-se  $\phi = C_I$  pela Equação (3.65).

Os valores das constantes  $C_1, C_2, \dots, C_8$  são determinados por

$$\begin{aligned}
C_1 &= \Gamma_{M/2}^H \left( \frac{R_{c_{M/2+1}}}{R_{c_{M/2}}} \right) + \Gamma_{M/2+1}^H, & C_2 &= \Gamma_{M/2}^U \left( \frac{R_{c_{M/2+1}}}{R_{c_{M/2}}} \right) + \Gamma_{M/2+1}^U, \\
C_3 &= \left( \Gamma_{M/2}^\Gamma + 1 \right) \left( \frac{R_{c_{M/2+1}}}{R_{c_{M/2}}} \right) + \Gamma_{M/2+1}^\Gamma + 1, & C_4 &= \Gamma_{M/2}^I \left( \frac{R_{c_{M/2+1}}}{R_{c_{M/2}}} \right) + \Gamma_{M/2+1}^I, \\
C_5 &= \Gamma_{1+j_p}^I \left( \frac{R_{c_{M-j_s}}}{R_{c_{1+j_p}}} \right) + \Gamma_{M-j_s}^I, & C_6 &= \Gamma_{1+j_p}^{II} \left( \frac{R_{c_{M-j_s}}}{R_{c_{1+j_p}}} \right) + \Gamma_{M-j_s}^{II}, \\
C_7 &= \Gamma_{1+j_p}^U \left( \frac{R_{c_{M-j_s}}}{R_{c_{1+j_p}}} \right) + \Gamma_{M-j_s}^U & \text{e} & \quad C_8 = \left( \Gamma_{1+j_p}^\Gamma + 1 \right) \left( \frac{R_{c_{M-j_s}}}{R_{c_{1+j_p}}} \right) + \Gamma_{M-j_s}^\Gamma + 1.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

### 3.6.2 Condições complementares para PIF

A seguir, são apresentadas as condições de saída (condição de Kutta) e de entrada (condição sem choque ou de incidência ótima do escoamento). No caso de PIF deste trabalho, a densidade de vórtices é linear, o que facilita impor essas condições, bastando simplesmente igualar a zero os valores da densidade de vórtices nos pontos extremos dos painéis localizados na entrada (bordo de ataque) e na saída (bordo de fuga) da pá de referência.

#### Condição de saída: condição de Kutta

Do ponto de vista físico, interessa apenas o escoamento com velocidade finita e contínua no bordo de fuga da pá (condição de Kutta). Uma distribuição de vórtices sempre produz uma descontinuidade no campo de velocidades, a não ser no caso trivial em que a densidade de vórtices é nula. Portanto, a condição de saída apropriada exige que no bordo de fuga da pá, Figura 3.5,

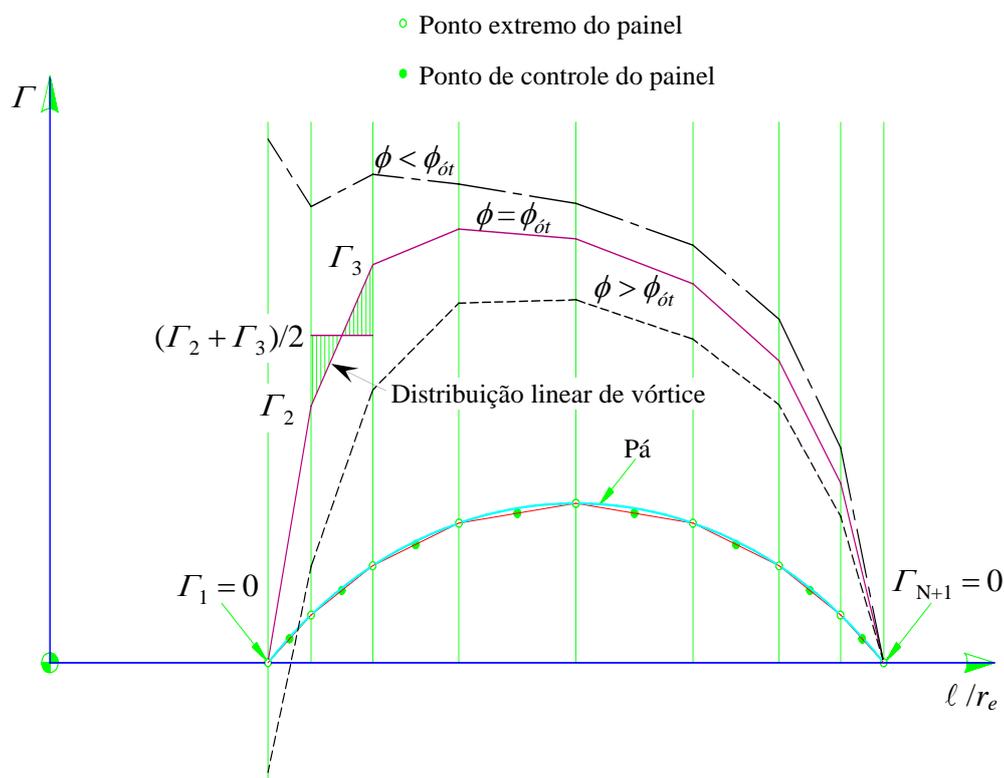
$$\Gamma_{M+1} = 0. \tag{3.68}$$

Considerando a Equação (3.68), a Equação (3.51) torna-se

$$A_{j1} \Gamma_1 + \sum_{k=2}^M (A_{jk} + B_{jk-1}) \Gamma_k = \frac{\phi}{B_{c_k}} - (R_{c_k}^2 + \Omega_0) \tan \beta_{c_k}, \quad j = 1, 2, \dots, M. \tag{3.69}$$

que representa um sistema de equações lineares algébricas  $M \times M$ . Dada a geometria da grade radial, através da especificação da equação que caracteriza a geometria da pá e do número de pás, e considerando  $\phi$  e  $\Omega_0$  como parâmetros, calculam-se diretamente os coeficientes  $A_{jk}$  e  $B_{jk}$ , para uma determinada discretização. Em seguida, calculam-se os valores das incógnitas  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_M$ , resolvendo-se o sistema (3.69). Consequentemente, é possível determinar as características hidro ou aerodinâmicas da grade radial: distribuição de velocidades, distribuição de pressões e trabalho específico, entre outras.

É importante observar que, apesar dos coeficientes  $A_{rjk}, B_{rjk}, A_{\theta jk}$  e  $B_{\theta jk}$  não serem univocamente determinados para  $k = j$ , o mesmo não ocorre com os coeficientes  $A_{jk}$  e  $B_{jk}$ . Este fato foi demonstrado por Manzanares Filho (1982).



**Figura 3.5** Condições de entrada (sem e com choque) e condição de saída (Kutta) para PIF e representação da distribuição linear de vórtice em cada painel

### Condição de entrada: condição sem choque

Do ponto de vista da teoria potencial, define-se escoamento com entrada sem choque (incidência ótima), que é uma condição de operação da turbomáquina, aquele para o qual a velocidade é finita e contínua no bordo de ataque da pá. Nessa condição, para o caso de PIF e

densidade linear de vórtices em cada painel, o efeito de entrada sem choque é obtido fazendo-se no bordo de ataque da pá (Figura 3.5)

$$\Gamma_1 = 0. \quad (3.70)$$

Considerando a Equação (3.70), a Equação (3.69) torna-se

$$\phi_{\dot{\theta}t} + \sum_{k=2}^M (A_{jk} + B_{jk-1}) \Gamma_k = -(R_{c_k}^2 + \Omega_0) \operatorname{tag} \beta_{c_k}, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (3.71)$$

O valor de  $\phi_{\dot{\theta}t}$  não deve ser encarado como parâmetro, mas sim como incógnita do sistema (3.71), juntamente com os valores  $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_M$ . Quando  $\phi \neq \phi_{\dot{\theta}t}$  trata-se de uma situação de entrada com choque ou fora de projeto. Nesta situação, o escoamento potencial através de grades radiais com pás infinitamente finas processa-se com uma velocidade infinita em torno do bordo de ataque.

A solução dos sistemas de EAL dados na Equação (3.54) para PEF foi obtida pelo método de eliminação de Gauss, e a solução do sistema de EAL na Equação (3.71) para PIF foi obtida pelo método de inversão de matriz.

### 3.7 TRATAMENTO DO ROTOR RADIAL NO MODO TURBINA

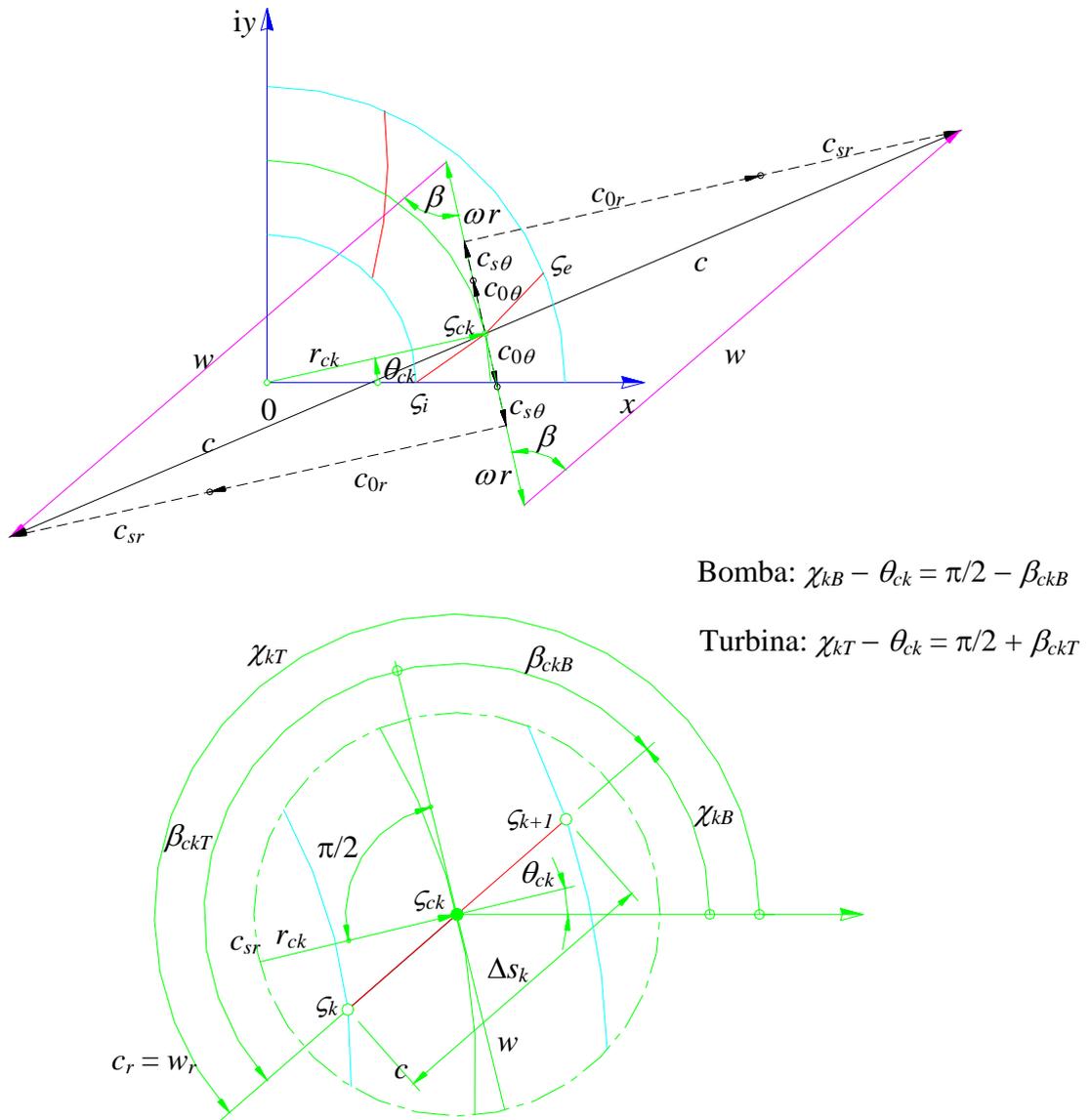
Neste item, são apresentadas as modificações realizadas nos Itens 3.5.2 e 3.6.2 (PIF no modo bomba) para o tratamento do rotor radial no modo turbina (PIF).

Conforme a Figura 2.7 do Capítulo 2 (veja também a Figura 3.6) para o modo bomba, o ângulo de inclinação de um painel  $k$ ,  $\chi_k$ , o ângulo do escoamento relativo  $\beta_{ck}$  e o ângulo polar,  $\theta_{ck}$ , estão relacionados por

$$\chi_{kB} - \theta_{ck} = \pi / 2 - \beta_{ckB} \quad (3.72)$$

e, para o modo turbina (Figura 3.6),

$$\chi_{kT} - \theta_{ck} = \pi / 2 + \beta_{ckT}. \quad (3.73)$$



**Figura 3.6** Triângulos de velocidades num ponto de controle e detalhe dos ângulos de inclinação do respectivo painel e do escoamento relativo para rotor radial nos modos bomba e turbina

Os coeficientes  $Ar_{jk}$ ,  $Br_{jk}$ ,  $A\theta_{jk}$  e  $B\theta_{jk}$ , conforme as Equações (3.42.a-d), não são univocamente determinados para  $k = j$  e  $N = 1$ , e, segundo Manzanares Filho, esses coeficientes na forma adimensional, para o modo bomba, tornam-se

$$Ar_{jj} = \frac{1}{2\pi} \left( \pm \frac{\pi}{2} \text{sen} \beta_{cj} + \cos \beta_{cj} \right) + \sum_{\ell=2}^N \Re \left[ \bar{I}_{\ell jj} e^{-i\theta_{c_j}} \right], \quad (3.74.a)$$

$$Br_{jj} = \frac{1}{2\pi} (\pm \frac{\pi}{2} \text{sen}\beta_{cj} - \text{cos}\beta_{cj}) + \sum_{\ell=2}^N \Re \left[ \bar{J}_{\ell jj} e^{-i\theta_{cj}} \right], \quad (3.74.b)$$

$$A\theta_{jj} = \frac{1}{2\pi} (\pm \frac{\pi}{2} \text{cos}\beta_{cj} - \text{sen}\beta_{cj}) + \sum_{\ell=2}^N \Im \left[ \bar{I}_{\ell jj} e^{-i\theta_{cj}} \right], \quad (3.74.c)$$

$$B\theta_{jj} = \frac{1}{2\pi} (\pm \frac{\pi}{2} \text{cos}\beta_{cj} + \text{sen}\beta_{cj}) + \sum_{\ell=2}^N \Im \left[ \bar{J}_{\ell jj} e^{-i\theta_{cj}} \right], \quad (3.74.d)$$

e, para o modo turbina,

$$Ar_{jj} = \frac{1}{2\pi} (\pm \frac{\pi}{2} \text{sen}\beta_{cj} + \text{cos}\beta_{cj}) + \sum_{\ell=2}^N \Re \left[ \bar{I}_{\ell jj} e^{-i\theta_{cj}} \right], \quad (3.75.a)$$

$$Br_{jj} = \frac{1}{2\pi} (\pm \frac{\pi}{2} \text{sen}\beta_{cj} - \text{cos}\beta_{cj}) + \sum_{\ell=2}^N \Re \left[ \bar{J}_{\ell jj} e^{-i\theta_{cj}} \right], \quad (3.75.b)$$

$$A\theta_{jj} = \frac{1}{2\pi} (\pm \frac{\pi}{2} \text{cos}\beta_{cj} + \text{sen}\beta_{cj}) + \sum_{\ell=2}^N \Im \left[ \bar{I}_{\ell jj} e^{-i\theta_{cj}} \right], \quad (3.75.c)$$

$$B\theta_{jj} = \frac{1}{2\pi} (\pm \frac{\pi}{2} \text{cos}\beta_{cj} - \text{sen}\beta_{cj}) + \sum_{\ell=2}^N \Im \left[ \bar{J}_{\ell jj} e^{-i\theta_{cj}} \right]. \quad (3.75.d)$$

Enquanto os coeficientes  $Ar_{jk}$ ,  $Br_{jk}$ ,  $A\theta_{jk}$  e  $B\theta_{jk}$ , conforme as Equações (3.74.a-d) e (3.75.a-d), não são univocamente determinados para  $k = j$  e  $N = 1$ , o mesmo não ocorre com os coeficientes  $A_{jk}$ ,  $B_{jk}$  e, segundo Manzanares Filho (veja também as Equações (3.49.a-b)), para o modo bomba, são dados por

$$A_{jk} = R_{c_j} (\text{tag}\beta_{c_j} A\theta_{jk} - Ar_{jk}) \quad (3.49.a)$$

e

$$B_{jk} = R_{c_j} (\text{tag}\beta_{c_j} B\theta_{jk} - Br_{jk}) \quad (3.49.b)$$

e, para o modo turbina,

$$A_{jk} = R_{c_j} (\text{tag}\beta_{c_j} A\theta_{jk} + Ar_{jk}) \quad (3.76.a)$$

e

$$B_{jk} = R_{c_j} (\text{tag} \beta_{c_j} B_{\theta_{jk}} + Br_{jk}). \quad (3.76.b)$$

As componentes da velocidade absoluta induzida na forma adimensional, para os lados de pressão ( $p$ ) e de sucção ( $s$ ) das pás, para o modo bomba, são dados por

$$Csr_{pk} = Csr_k - \sum_{k=1}^M Adr_k (\Gamma_k + \Gamma_{k+1}), \quad (3.77.a)$$

$$Csr_{sk} = Csr_k + \sum_{k=1}^M Adr_k (\Gamma_k + \Gamma_{k+1}), \quad (3.77.b)$$

$$Cs\theta_{pk} = Cs\theta_k - \sum_{k=1}^M Ad\theta_k (\Gamma_k + \Gamma_{k+1}), \quad (3.77.c)$$

$$Cs\theta_{sk} = Cs\theta_k + \sum_{k=1}^M Ad\theta_k (\Gamma_k + \Gamma_{k+1}). \quad (3.77.d)$$

e, para o modo turbina,

$$Csr_{pk} = Csr_k - \sum_{k=1}^M Adr_k (\Gamma_k + \Gamma_{k+1}), \quad (3.78.a)$$

$$Csr_{sk} = Csr_k + \sum_{k=1}^M Adr_k (\Gamma_k + \Gamma_{k+1}), \quad (3.78.b)$$

$$Cs\theta_{pk} = Cs\theta_k + \sum_{k=1}^M Ad\theta_k (\Gamma_k + \Gamma_{k+1}), \quad (3.78.c)$$

$$Cs\theta_{sk} = Cs\theta_k - \sum_{k=1}^M Ad\theta_k (\Gamma_k + \Gamma_{k+1}), \quad (3.78.d)$$

sendo  $Csr_k$  e  $Cs\theta_k$  dados respectivamente pelas Equações (3.47.a-b), e  $Adr_k$  e  $Ad\theta_k$  dados por

$$Adr_k = \text{sen} \beta_{c_j} / 4 \quad (3.79.a)$$

e

$$Ad\theta_k = \cos\beta_{cj} / 4. \quad (3.79.b)$$

As componentes da velocidade relativa na forma adimensional, para os lados de pressão ( $p$ ) e de sucção ( $s$ ) das pás, para o modo bomba, são dadas por

$$W_{rp_k} = \frac{\phi}{Rc_k Bv_k} + Cs r_p, \quad (3.80.a)$$

$$W_{rs_k} = \frac{\phi}{Rc_k Bv_k} + Cs r_s, \quad (3.80.b)$$

$$W_{\theta p_k} = Rc_k + \frac{\Omega_0}{Rc_k} + Cs\theta_p, \quad (3.80.c)$$

$$W_{\theta s_k} = Rc_k + \frac{\Omega_0}{Rc_k} + Cs\theta_s. \quad (3.80.d)$$

e, para o modo turbina,

$$W_{rp_k} = \frac{-\phi}{Rc_k Bv_k} - Cs r_p, \quad (3.80.a)$$

$$W_{rs_k} = \frac{-\phi}{Rc_k Bv_k} - Cs r_s, \quad (3.80.b)$$

$$W_{\theta p_k} = Rc_k + \frac{\Omega_0}{Rc_k} + Cs\theta_p, \quad (3.80.c)$$

$$W_{\theta s_k} = Rc_k + \frac{\Omega_0}{Rc_k} + Cs\theta_s. \quad (3.80.d)$$

## Capítulo 4

# GRANDEZAS HIDRODINÂMICAS LOCAIS E GLOBAIS

Neste capítulo são apresentadas as grandezas hidrodinâmicas locais e globais utilizadas nas aplicações numéricas do Capítulo 5. Uma grandeza importante para a determinação do número ótimo de pás, que é o número de Richardson (grandeza local), será tratada num item separado. Este capítulo está dividido em três itens principais: 4.1) Grandezas hidrodinâmicas locais; 4.2) Grandezas hidrodinâmicas globais; 4.3) Número de Richardson.

## 4.1 GRANDEZAS HIDRODINÂMICAS LOCAIS

Este item está dividido em: 4.1.1) Grandezas hidrodinâmicas locais para PEF e 4.1.2) Grandezas hidrodinâmicas locais para PIF.

### 4.1.1 Grandezas hidrodinâmicas locais para PEF

Conhecida a densidade adimensional de vórtices,  $\Gamma_j = \gamma_j / u_{ye} \cong w_j / u_{ye}$ , obtida no plano da grade linear (GL), diversas grandezas locais (nos pontos de controle) podem ser determinadas no plano da grade radial (GR).

No procedimento numérico do Item 4.6, foi admitido um erro,  $C_r$ , de valor constante nas velocidades relativas adimensionais,  $W_j$ , em cada ponto de controle. Utilizando a equação de transformação de velocidades, Equação (2.11), resulta para o plano da grade radial

$$W_j = \mp \frac{\Gamma_j + C_r}{R_{c_j}} \cong \mp \frac{\Gamma_j}{R_{c_j}}, \quad (4.1)$$

sendo os sinais negativo e positivo utilizados, respectivamente, para os lados do extradorso ( $j = 1, 2, \dots, M/2$ ) e do intradorso da pá ( $j = M/2+1, M/2+2, \dots, M$ ).

Para o cálculo da distribuição de pressões, recorre-se à equação de Bernoulli para o escoamento relativo (escoamento relativo no rotor). Sendo o escoamento absoluto irrotacional e incompressível, vale escrever para qualquer ponto do escoamento no rotor que

$$p_j^* + \frac{\rho w_j^2}{2} - \frac{\rho \omega^2 r_{c_j}^2}{2} = p_o. \quad (4.2)$$

$p_o$  é denominada pressão total, constante em todos os pontos do escoamento, e  $p_j^*$  a chamada pressão de movimento dada por

$$p_j^* = p_j + \rho g h_j. \quad (4.3)$$

$p_j$  é a pressão estática do ponto considerado e  $h_j$  é a distância entre este ponto e um plano horizontal de referência, no sentido de baixo para cima.

É conveniente definir uma pressão adimensional,  $P_j$ , como

$$P_j = 2 \frac{(p_j^* - p_o)}{\rho \omega^2 r_e^2}. \quad (4.4)$$

Combinando as Equações (4.2) e (4.4), resulta

$$P_j = R_{c_j}^2 - W_j^2. \quad (4.5)$$

#### 4.1.2 Grandezas hidrodinâmicas locais para PIF

De maneira semelhante ao caso de PEF, as diversas grandezas locais do escoamento podem ser determinadas diretamente no plano da grade radial (GR). Recorda-se que, neste

caso, a densidade de vórtices adimensional em cada painel  $j$  é linear, com valores  $\Gamma_j$  e  $\Gamma_{j+1}$  em cada extremidade.

Com os valores de  $\Gamma_j$  calculados através da solução do sistema de equações (3.71), as componentes adimensionais radial,  $C_{sr_j}^\mp$ , e circunferencial,  $C_{s\theta_j}^\mp$ , da velocidade absoluta podem ser determinadas em cada ponto de controle nos lados do extradorso (–) e do intradorso (+) da pá.

Superpondo-se os efeitos do escoamento não-perturbado e do escoamento induzido pela grade radial, tem-se, de acordo com a Figura 3.8 (cujas grandezas estão na forma dimensional), a componente adimensional radial,  $W_{r_j}^\mp$ , e a componente circunferencial,  $W_{\theta_j}^\mp$ , da velocidade relativa, que são dadas por

$$W_{r_j}^\mp = \frac{\phi / B_{c_j}^*}{R_{c_j}} + C_{sr_j}^\mp \quad (4.6.a)$$

e

$$W_{\theta_j}^\mp = R_{c_j} + \frac{\Omega_0}{R_{c_j}} + C_{s\theta_j}^\mp . \quad (4.6.b)$$

O módulo da velocidade relativa resultante é determinado por

$$W_j^\mp = [(W_{r_j}^\mp)^2 + (W_{\theta_j}^\mp)^2]^{1/2} . \quad (4.7)$$

O ângulo do escoamento relativo,  $\beta_{c_j}$ , em cada ponto de controle,  $j$ , é dado por

$$\text{tag } \beta_{c_j} = \frac{\phi / B_{c_j}^*}{\left( R_{c_j}^2 - \frac{N}{4\pi} \sum_{j=1}^N (\Gamma_j + \Gamma_{j+1}) \right)}, \quad (4.8)$$

e o ângulo do escoamento absoluto,  $\alpha_{c_j}$ , em cada ponto de controle,  $j$ , é dado por

$$\text{cotag } \alpha_{c_j} + \text{cotag } \beta_{c_j} = \frac{R_{c_j}^2 B_{c_j}^*}{\phi} . \quad (4.9)$$

## 4.2 GRANDEZAS HIDRODINÂMICAS GLOBAIS

Este item está dividido em: (4.2.1) Grandezas hidrodinâmicas globais para PEF e (4.2.2) Grandezas hidrodinâmicas globais para PIF.

### 4.2.1 Grandezas hidrodinâmicas globais para PEF

O trabalho específico das pás do rotor ou simplesmente trabalho específico do rotor,  $Y_{pá}$ , é dado pela equação de Euler das turbomáquinas quando se leva em conta o número finito de pás, ou seja,

$$Y_{pá} = \omega (r_e c_{u_e} - r_i c_{u_i}). \quad (4.10)$$

$c_{u_i}$  e  $c_{u_e}$  representam, respectivamente, as componentes circunferenciais da velocidade absoluta no raio interno,  $r_i$ , e no raio externo,  $r_e$ , das pás.

A circulação absoluta em torno de uma pá,  $\Gamma_{c_{pá}}$ , pode ser escrita em termos das grandezas referentes os planos transformado (GL) e físico (GR), ou seja,

$$\Gamma_{c_{pá}} = t (c_{y_e} - c_{y_i}) = \frac{2\pi}{N} (r_e c_{u_e} - r_i c_{u_i}). \quad (4.11)$$

A Equação (4.11) representa a conservação da circulação para os planos transformado (GL) e físico (GR), como estabelece a equação de transformação de velocidades (2.11).

A circulação relativa,  $\Gamma_{w_{pá}}$ , representada na Equação (4.12), pode ser escrita na forma discretizada por meio da “regra dos retângulos”, isto é,

$$\Gamma_{w_{pá}} \cong \sum_{j=1}^M \gamma_j \Delta s_j. \quad (4.12)$$

A circulação referente à velocidade de rotação do rotor,  $\Gamma_{u_{pá}}$ , é dada pela Equação (4.13), de modo que a circulação absoluta, Equação (4.11), na forma discretizada, considerando o sinal negativo de  $u_{y_e}$ , pode ser escrita para o plano transformado (GL) como

$$\Gamma_{c_{pá}} = \Gamma_{w_{pá}} + \Gamma_{u_{pá}} = \sum_{j=1}^M \gamma_j \Delta S_j + \frac{N A_{pá}}{\pi r_e^2} u_{ye} t. \quad (4.13)$$

A forma adimensionalizada da Equação (4.13), para o plano da grade radial, é

$$\Gamma_{c_{pá}}^* \Big|_{GR} = \frac{\Gamma_{c_{pá}}}{\omega r_e^2} = \sum_{j=1}^M \Gamma_j \Delta S_j \Big|_{GR} + \frac{2 A_{pá}}{r_e^2}, \quad (4.14)$$

sendo  $\Gamma_j = \gamma_j / (\omega r_e)$  e  $\Delta S_j = \Delta s_j / r_e$ .

O trabalho específico,  $Y_{pá}$ , pode ser escrito em termos da circulação absoluta em torno de uma pá, combinando as Equações (4.10) e (4.11), na seguinte forma:

$$Y_{pá} = \frac{\omega}{2\pi} N \Gamma_{c_{pá}}. \quad (4.15)$$

Define-se o coeficiente de pressão,  $\psi$ , de uma grade radial móvel (rotor) por

$$\psi = \frac{2Y}{u_e^2}. \quad (4.16)$$

A circulação adimensional no plano transformado é dada por  $\Gamma_{pá}^* \Big|_{GL} = \Gamma_{pá} / (t u_{ye})$ . Então, considerando as Equações (4.14) e (4.15), o coeficiente de pressão do rotor para número finito de pás, segundo a Equação (4.16), pode ser escrito em termos de grandezas adimensionais referentes aos planos físico (GR) e transformado (GL), isto é,

$$\psi_{pá} = \frac{N}{\pi} \Gamma_{c_{pá}}^* \Big|_{GR} = 2 \left( \sum_{j=1}^M \Gamma_j \Delta S_j \Big|_{GL} + \frac{N A_{pá}}{\pi r_e^2} \right), \quad (4.17)$$

Para efeito de comparação com a teoria unidimensional e também para o cálculo do fator de deficiência de potência (*slip factor*), deve-se considerar a equação de Euler das turbomáquinas na seguinte forma:

$$Y_{pá_\infty} = (r_e c_{u_{ep}} - r_i c_{u_{ip}}). \quad (4.18)$$

$Y_{pá_\infty}$  é o trabalho específico para número infinito de pás. Nessa situação, o escoamento é perfeitamente guiado através de canais de largura infinitesimal.

Considerando os triângulos de velocidades e as Equações (4.29) e (4.16), pode-se escrever o coeficiente de pressão,  $\psi_{p\acute{a}\infty}$ , para número infinito de pás como

$$\psi_{p\acute{a}\infty} = 2 \left( 1 - \frac{\phi}{\text{tag } \beta_{e_p}} - \Omega_0^\infty \right), \quad (4.19)$$

onde o coeficiente de pré-circulação para número infinito de pás,  $\Omega_0^\infty$ , é definido por

$$\Omega_0^\infty = \frac{r_i c_{u_{ip}}}{r_e u_e}. \quad (4.20)$$

O fator de deficiência de potência,  $\mu$ , é definido por

$$\mu = \frac{P_{p\acute{a}}}{P_{p\acute{a}\infty}} = \frac{Y_{p\acute{a}}}{Y_{p\acute{a}\infty}} = \frac{\psi_{p\acute{a}}}{\psi_{p\acute{a}\infty}}, \quad (4.21)$$

$\psi_{p\acute{a}}$  e  $\psi_{p\acute{a}\infty}$  são dados pelas Equações (4.17) e (4.19).  $P_{p\acute{a}}$  e  $P_{p\acute{a}\infty}$  são as potências correspondentes para número finito e número infinito de pás, respectivamente.

O coeficiente de vazão para entrada sem choque no caso de número finito de pás,  $\phi = \phi_{oi}$ , é diferente daquele para número infinito de pás,  $\phi = \phi_\infty$ . No cálculo de  $\mu$ , segundo a Equação (4.21), o coeficiente de vazão,  $\phi$ , na Equação (4.19), será considerado igual ao seu valor correspondente ao caso de número infinito de pás, não só para a situação de vazão de projeto (entrada sem choque) como para vazões fora desse ponto.

Considerando os triângulos de velocidades para o raio interno e para o raio externo, obtém-se para o raio interno do rotor

$$\text{cotag } \alpha_i + \text{cotag } \beta_i = \left( \frac{r_i}{r_e} \right)^2 \left( \frac{b_i}{b_e} \right) \frac{1}{\phi}. \quad (4.22.a)$$

Se o escoamento absoluto no raio interno é radial ao eixo do rotor ( $\alpha_i = 90^\circ$ ), obtém-se da Equação (4.22.a) que

$$\text{tag } \beta_3 = \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^2 \left( \frac{b_e}{b_i} \right) \phi. \quad (4.22.b)$$

Para a saída do rotor,

$$\cotag \alpha_e + \cotag \beta_e = \frac{1}{\phi}, \quad (4.23.a)$$

sendo

$$\cotag \beta_e = -\frac{1}{\phi} \frac{\psi_{pá}}{2} + \frac{b_e}{b_i} \cotag \beta_i + \frac{1}{\phi} \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{r_e} \right)^2 \right]. \quad (4.23.b)$$

Se o escoamento absoluto é radial ao eixo do rotor no raio interno, e considerando as Equações (4.17) e (4.22.b), a Equação (4.23.b) torna-se

$$\tag \beta_e = \frac{\phi}{1 - \Gamma_{c_{pá}}^* \Big|_{GL}}. \quad (4.23.c)$$

## 4.2.2 Grandezas hidrodinâmicas globais para PIF

Na formulação efetuada no Item 2.3, o efeito de cada pá da grade radial foi simulado através da distribuição linear de densidade de vórtices,  $\gamma$ . Então, a circulação absoluta em uma pá é determinada por

$$\Gamma_{c_{pá}} = \int_{s_i}^{s_e} \gamma ds. \quad (4.24)$$

Sendo o trabalho específico dado em (2.112), obtém-se

$$Y_{pá} = \frac{\omega}{2\pi} N \int_{s_i}^{s_e} \gamma ds. \quad (4.25)$$

Considerando a Equação (4.15), resulta

$$\psi_{pá_T} = \frac{N}{\pi} \int_{s_i}^{s_e} \Gamma dS, \quad (4.26)$$

sendo  $\Gamma = \gamma / \omega r_e$  e  $S = s / r_e$ .

De posse dos valores de  $\Gamma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M+1$ ) obtidos numericamente em cada ponto extremo dos painéis, aproxima-se a integral na Equação (4.26) pela “regra dos trapézios”, conforme a Figura 3.5, ou seja,

$$\psi_{pá} = \frac{N}{2\pi} \sum_{j=1}^M (\Gamma_j + \Gamma_{j+1}) \Delta S_j. \quad (4.27)$$

Os valores de  $\psi_{pá_\infty}$ ,  $\Omega_0^\infty$  e  $\mu$  são calculados conforme as Equações (4.19), (4.20) e (4.21), respectivamente.

Observa-se que  $\Omega_0^\infty$ , dado na Equação (4.20), pode, conceitualmente, diferir de  $\Omega_0$ , dado na Equação (3.44), já que no caso unidimensional ( $N = \infty$ ), ao contrário do caso bidimensional, a grade não afeta a direção do escoamento anterior à sua entrada. Em outras palavras, o fato de se colocar  $\Omega_0 = 0$  no sistema de equações (3.71) não impõe que  $c_{u_{i_p}}$  tenha de ser nulo, nem mesmo para entrada sem choque, pois as distribuições de vórtices afetam a direção do escoamento não-perturbado. Em contra partida, tem-se  $\Omega_0^\infty = 0$  na Equação (4.19) se e somente se  $c_{u_{i_p}} = 0$ .

Pelas considerações anteriores,  $\Omega$  e  $\Omega_0^\infty$  são ambos parâmetros independentes nas situações respectivas de número finito e de número infinito de pás. Logo, dada a geometria de uma pá e o coeficiente de vazão,  $\phi$ , a comparação entre uma grade com número finito e outra com número infinito de pás só pode ser efetuada se um critério que relacione  $\Omega$  e  $\Omega_0^\infty$  for estabelecido. Nas situações analisadas neste trabalho admite-se que  $\Omega = \Omega_0^\infty$ .

### 4.3 NÚMERO DE RICHARDSON

O objetivo deste item é apresentar um método teórico para a determinação do número de pás de rotores centrífugos. O método é baseado nas características do escoamento e leva em consideração a geometria completa da pá. Inicialmente, alguns comentários são feitos a respeito da importância do valor mais apropriado do número de pás nas características de desempenho de uma turbomáquina. Em seguida, com base na distribuição de velocidades relativas na superfície da pá, define-se um parâmetro adimensional, denominado número de Ri-

chardson, que é um parâmetro de carregamento. Finalmente, o valor máximo desse parâmetro (independentemente do seu valor numérico) é utilizado como critério para se obter o número ótimo de pás de rotores com boas características hidro ou aerodinâmicas.

### 4.3.1 Algumas considerações sobre o número de pás

As pás constituem o principal componente hidromecânico do rotor de uma turbomáquina e, em consequência, o número de pás,  $N$ , torna-se um importante parâmetro para estabelecer o seu desempenho. Dependendo da utilização da turbomáquina, o número de pás é obtido em função das suas próprias características e, também, das exigências impostas pelo sistema no qual ela pertence. Por exemplo, em bombas centrífugas o número de pás deve ser o maior possível a fim de minimizar os efeitos da cavitação em vazões altas, ou seja, a bomba deve apresentar o menor valor possível de  $NPSH_{req}$  (característica da turbomáquina). Por outro lado, o número de pás deve ser o menor possível para se conseguir o menor valor possível da vazão antes de atingir o seu limite de bombeamento (característica exigida pelo sistema). Situação semelhante é encontrada em outras turbomáquinas hidráulicas como, por exemplo, turbinas Francis e turbomáquinas que operam gases (ventiladores, sopradores e turbocompressores). O número de pás também é decisivo na fase inicial de projeto do rotor radial, visto que ele estabelece o diâmetro mínimo de entrada,  $D_i$ , que é limitado pelo bloqueio geométrico das pás, que é caracterizado pelo seu fator de estrangulamento,  $fe_i$ .

Em termos de escoamento, um número pequeno de pás apresenta superfície de atrito reduzida e uma má condução do fluido no interior do rotor. Essa situação faz aumentar o carregamento da pá (aumenta as diferenças de pressões em ambos os lados da pá) e, em consequência, aumenta também a velocidade média do escoamento relativo, diminuindo o rendimento (eficiência) total da turbomáquina. Esse aumento no carregamento pode diminuir a pressão no lado de sucção da pá a níveis proibitivos, fazendo com que as turbomáquinas que operam um líquido tenham sua capacidade de aspiração reduzida, devido ao fenômeno da cavitação. Ao contrário, quando o número de pás é grande, há uma melhor condução do fluido no interior do rotor, porém, a superfície de atrito é aumentada e o carregamento é diminuído, resultando novamente numa diminuição do rendimento total da turbomáquina. Portanto, torna-se necessário uma solução de compromisso baseada em critérios hidro ou aerodinâmicos que levem em consideração as características da turbomáquina e as características exigidas pelo sistema, associados ao melhor rendimento possível.

Via de regra, na fase inicial de um projeto novo, o número de pás é determinado para o ponto de rendimento máximo em função de alguns parâmetros geométricos. Esses parâmetros, invariavelmente, referem-se aos ângulos geométricos de entrada,  $\beta_i$ , e de saída,  $\beta_e$ , e seus respectivos diâmetros,  $D_i$  e  $D_e$ , como é observado nas fórmulas clássicas encontradas na literatura. Dependendo dos coeficientes empíricos adotados em algumas dessas fórmulas e para uma mesma situação, o número de pás pode variar em uma ampla faixa, por exemplo, de 12 a 16 pás, dificultando a escolha do número mais apropriado. Pfleiderer (1960) fez a seguinte afirmação: “... é impossível determinar o número de pás mais adequado através de métodos teóricos levando em consideração todos os parâmetros (geométricos, de forma e do escoamento)”. Inevitavelmente, recorre-se às fórmulas empíricas para uma primeira estimativa, ou às turbomáquinas já construídas. O número de pás apropriado para se ter o maior rendimento, pelo menos em princípio, deve ser estabelecido por meio de métodos experimentais.

### 4.3.2 Definição do número de Richardson

Baljí (1978) sugeriu a possibilidade de o número de Richardson,  $R_i$ , que pode ser definido de várias maneiras, ser um parâmetro adequado para avaliar diversas características do escoamento em rotores centrífugos. Um modo de se obter certos números de Richardson consiste em se estabelecer as equações do movimento relativo para um elemento de fluido em escoamento no interior de um rotor. Para essa finalidade, considera-se o escoamento relativo permanente, incompressível e não-viscoso. Também, considera-se a força gravitacional como sendo a única força de corpo e, ainda, o rotor estacionário, em relação a um referencial inercial, e com velocidade angular constante na direção do seu eixo  $x_3$ . Com essas hipóteses, obtém-se, Eckert e Schnell (1961), as seguintes equações intrínsecas do movimento relativo, escritas na forma de equilíbrio dinâmico, para as direções  $s$ ,  $n$  e  $m$  (Figura 4.1):

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial s} + \omega^2 r \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \beta - \frac{Dw}{Dt} = 0, \quad (4.28.a)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial n} - \omega^2 r \operatorname{sen} \lambda \cos \beta + 2 \omega w \operatorname{sen} \lambda - \frac{w^2}{R_n} = 0 \quad (4.28.b)$$

e

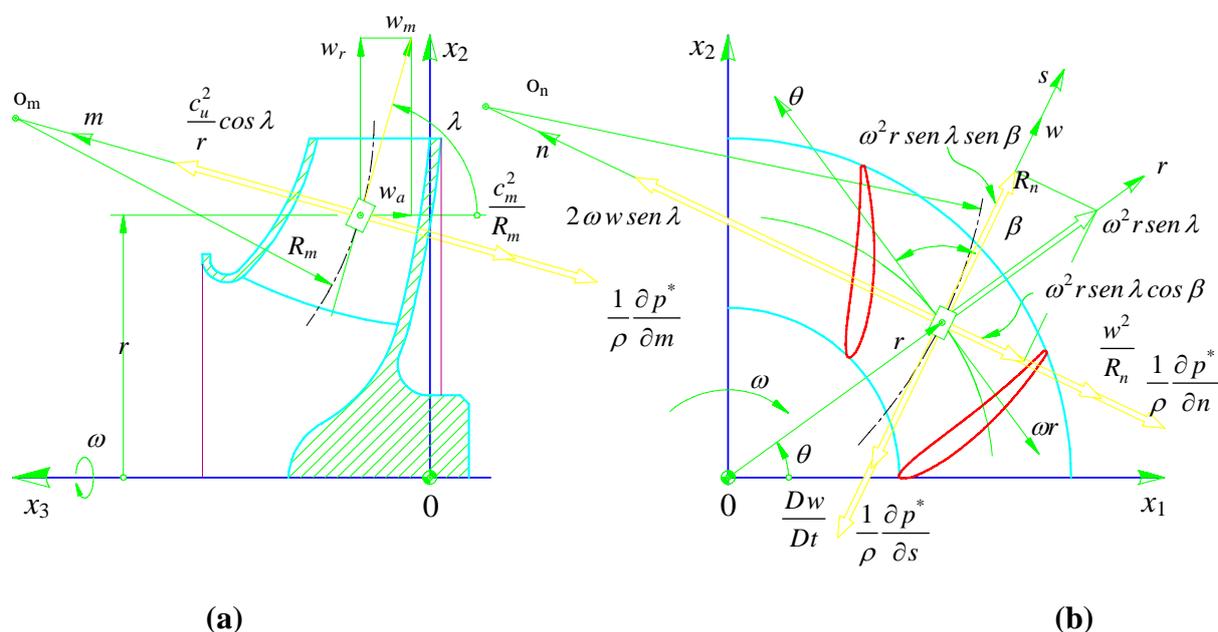
$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial m} - \frac{c_m^2}{R_m} + \frac{c_u^2}{r} \cos \lambda = 0 \quad (4.28.c)$$

sendo  $p^*$  a pressão de movimento definida na Equação (4.3).

Separando os termos relacionados à velocidade relativa,  $w$ , do termo relacionado ao raio,  $r$ , obtém-se da Equação (4.28.b)

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial n} + \frac{w^2}{a} \left( \frac{2\omega a}{w} \operatorname{sen} \lambda - \frac{a}{R_n} \right) - \omega^2 r \operatorname{sen} \lambda \cos \beta = 0, \quad (4.29)$$

onde  $a$  é a distância na direção  $n$  (Figura 4.1) entre duas pás consecutivas.



**Figura 4.1** Forças atuando num elemento de fluido em equilíbrio dinâmico no interior de um rotor de bomba centrífuga: (a) seção meridional e (b) seção transversal

Da Equação (4.28.a), pode-se estabelecer a equação de Bernoulli para o escoamento relativo através do rotor, ou seja,

$$\frac{p^*}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} = Y_o, \quad (4.30)$$

onde  $Y_o$  é a energia total específica, constante em todos os pontos (escoamento absoluto irrotacional) do escoamento.

Derivando a Equação (4.30) em relação a  $n$ , e sabendo-se que  $u = \omega r$  e  $\partial n = -\partial r / \operatorname{sen} \lambda \cos \beta$ , obtém-se

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial n} + w \frac{\partial w}{\partial n} + \omega^2 r \operatorname{sen} \lambda \cos \beta = 0. \quad (4.31)$$

Comparando as Equações (4.29) e (4.31), resulta

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{w}{R_n} - 2\omega \operatorname{sen} \lambda, \quad (4.32)$$

que é uma equação apropriada para rotores centrífugos com  $\beta_e < 90^\circ$ .

Denominando  $\Delta w = w_s - w_p$  a diferença de velocidades relativas entre o lado do intradorso,  $w_s$ , e do lado do extradorso,  $w_p$ , da pá, obtém-se uma relação aproximada para a Equação (4.32) dada por

$$\frac{\Delta w}{\bar{w}} \cong \left( \frac{2\omega a}{\bar{w}} \operatorname{sen} \lambda - \frac{a}{R_n} \right), \quad (4.33)$$

sendo  $\bar{w} = (w_s + w_p) / 2$  a velocidade média do escoamento relativo.

A relação estabelecida na Equação (4.33) foi denominada por Baljé (1978) como sendo o gradiente de velocidades relativas. Observa-se que os termos dessa relação são semelhantes àqueles contidos entre parênteses na Equação (4.29). Um desses termos refere-se ao número de Richardson devido à rotação do rotor,  $Ri_\omega = 2\omega a \operatorname{sen} \lambda / w$ , e, o outro, à curvatura da pá no plano transversal,  $Ri_{C_n} = a / R_n$ . Baljé (1978) denominou  $Ri_{sp} = Ri_\omega + Ri_{C_n}$  como sendo o número de Richardson no plano transversal (plano pá a pá) que é, na realidade, o gradiente de velocidades relativas,  $\Delta w / \bar{w}$ . Outros números de Richardson também podem ser estabelecidos para o plano meridional (Oliveira, 2001).

Com base na Equação (4.33), Baljé (1981) determinou uma expressão para o gradiente de velocidades relativas em função da relação de raios,  $r / r_i$ , para o caso particular de pás infinitamente finas, em formato de arco de círculo e de largura constante. Seus resultados são apresentados para uma geometria particular de rotor centrífugo, variando somente o ângulo de entrada da pá,  $\beta_i$  (dois casos analisados), e o ângulo de saída da pá,  $\beta_e$ , este abrangendo valores menores, iguais e maiores que  $90^\circ$ .

No Capítulo 3, foram apresentados três métodos de cálculo para o escoamento potencial e incompressível em rotores radiais sem as simplificações estabelecidas por Baljé (1981). Es-

ses métodos possibilitam uma determinação mais precisa das velocidades  $w_p$  e  $w_s$  na superfície da pá e, portanto, do gradiente de velocidades relativas,  $\Delta w / \bar{w}$ , Equação (4.33).

Com base nas informações de Baljé (1978), define-se, de modo semelhante neste trabalho, o número de Richardson local por

$$Ri_j = \frac{\Delta W_j}{\bar{W}_j}, \quad (4.34)$$

sendo  $j = 1, 2, \dots, M/2$  referentes ao lado do extradorso da pá e  $j = M/2+1, M/2+2, \dots, M$  ao lado do intradorso da pá, no caso de PEF, e, no caso de PIF,  $j = 1, 2, \dots, M$ .

As velocidades relativas,  $W_j$ , são consideradas em termos adimensionais. A diferença de velocidades relativas,  $\Delta W_j$ , entre os lados intradorso,  $W_{s_j}$ , e do extradorso da pá,  $W_{p_j}$ , e a velocidade média do escoamento relativo,  $\bar{W}_j$ , ambas em cada ponto de controle,  $j$ , são

$$\Delta W_j = W_{s_j} - W_{p_j} \quad (4.35)$$

e

$$\bar{W}_j = \frac{W_{p_j} + W_{s_j}}{2}. \quad (4.36)$$

Considerando a equação de Bernoulli do escoamento relativo e a pressão adimensional,  $P_j$ , definida na Equação (4.4), pode-se estabelecer uma forma equivalente do número de Richardson local em termos do carregamento da pá,  $\Delta P_j = P_{p_j} - P_{s_j}$ , ou seja,

$$Ri_j = \frac{1}{2} \frac{\Delta P_j}{\bar{W}_j^2}. \quad (4.37)$$

Ao analisar  $\Delta w / \bar{w}$  em função de  $\varepsilon = r / r_i$ , Baljé (1981) faz apenas dois comentários: 1)  $\Delta w / \bar{w}$  é inversamente proporcional ao número de pás e 2) fixando certos parâmetros,  $\Delta w / \bar{w}$  atinge um valor máximo sempre na saída do rotor para  $\beta_e \leq 90^\circ$  e, para  $\beta_e > 90^\circ$ , o valor máximo de  $\Delta w / \bar{w}$  está localizado sempre no interior do canal entre os raios de entrada e de saída do rotor.

Baljé (1981) também utilizou o gradiente de velocidades relativas para determinar uma expressão aproximada que fornece o número mínimo de pás numa situação extremamente i-

dealizada, isto é, pás retas com  $\beta_e = 90^\circ$  (portanto,  $\beta_i = 90^\circ$ ),  $\psi_{pá} = 2$  e  $\Delta w / \bar{w} = 2$ . Em seu próprio trabalho, Baljé (1981) faz certas críticas de suas expressões semi-empíricas. De fato, a distribuição de velocidades resultante das suas aproximações, principalmente na região do bordo de fuga, não condiz com a realidade, mesmo em se tratando de escoamento potencial.

### 4.3.3 Critério do número de Richardson máximo

Ao analisar a distribuição de velocidades relativas,  $W_j$ , em função do raio adimensional,  $R_{c_j} = r_j / r_e$ , para diversas geometrias de rotores centrífugos de bons rendimentos, Oliveira (2001) constatou, na condição de entrada sem choque, o seguinte:

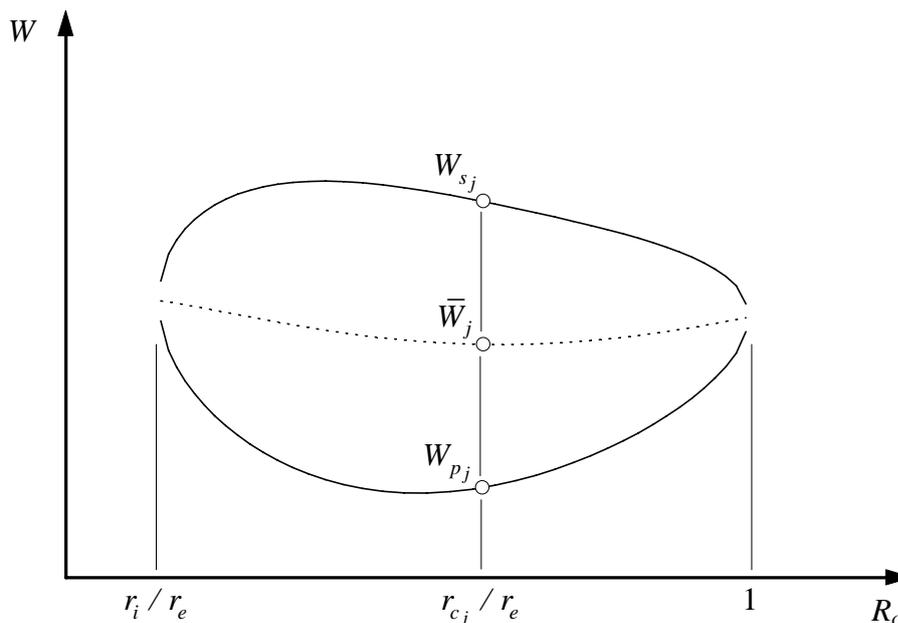
1) As velocidades nos lados do extradorso,  $W_{p_j}$ , e do intradorso,  $W_{s_j}$ , da pá para um determinado número de pás,  $N$ , compunham sempre curvas suaves com comportamentos semelhantes àqueles da Figura 4.2. Essas curvas não se cruzavam no intervalo compreendido entre os raios interno,  $r_i$ , e externo,  $r_e$ , da pá a não ser nas regiões próximas aos bordos de ataque e de fuga no caso de pás de espessura finita (PEF). Essa característica implica em se obter um único valor máximo do número de Richardson,  $Ri_{máx}$ , no citado intervalo de raios (Figura 4.3). Esse resultado não foi obtido por Baljé (1981) para  $\beta_e < 90^\circ$ , devido às suas expressões aproximadas, mas sim para  $\beta_e > 90^\circ$  onde, neste caso, a solução do escoamento potencial deixa de ser válida;

2) As velocidades no lado do extradorso da pá,  $W_{p_j}$ , sempre eram maiores que zero, ou seja, não havia reversão do escoamento potencial nessa superfície e, portanto,  $Ri$  não atingia o valor 2, que é o máximo possível para a situação onde  $W_{p_j} = 0$ .

Ao analisar as distribuições de números de Richardson,  $Ri$ , em função do raio adimensional,  $R_c$ , para diversos valores de números de pás,  $N$ , de uma mesma geometria, Oliveira (2001) constatou, na condição de entrada sem choque, o seguinte:

1) Sempre existia um valor máximo do número de Richardson,  $Ri_{máx}^*$ , para um determinado número de pás,  $N^*$ , maior que todos os demais valores de  $Ri_{máx}$  (Figura 4.3);

2) O número de pás,  $N^*$ , obtido pelo critério do máximo valor do número de Richardson,  $Ri_{máx}^*$ , era sempre igual ou aproximadamente igual (conforme constatado por Oliveira, 2001) ao valor de  $N$  de rotores centrífugos efetivamente ensaiados em laboratório com o propósito de se obter o número de pás para o máximo rendimento possível.



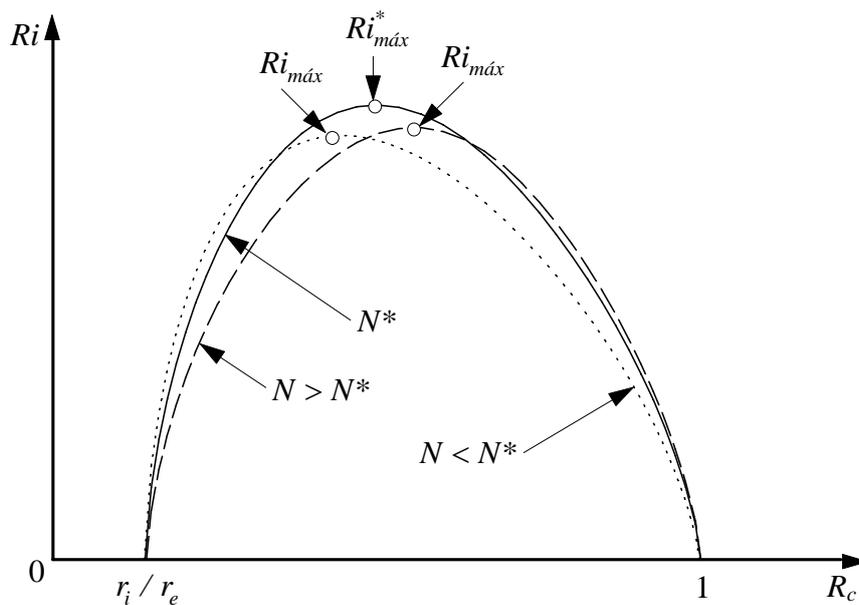
**Figura 4.2** Distribuição de velocidades relativas adimensionais em função do raio adimensional para um determinado número de pás

Analisando a Equação (4.34), observa-se o seguinte:

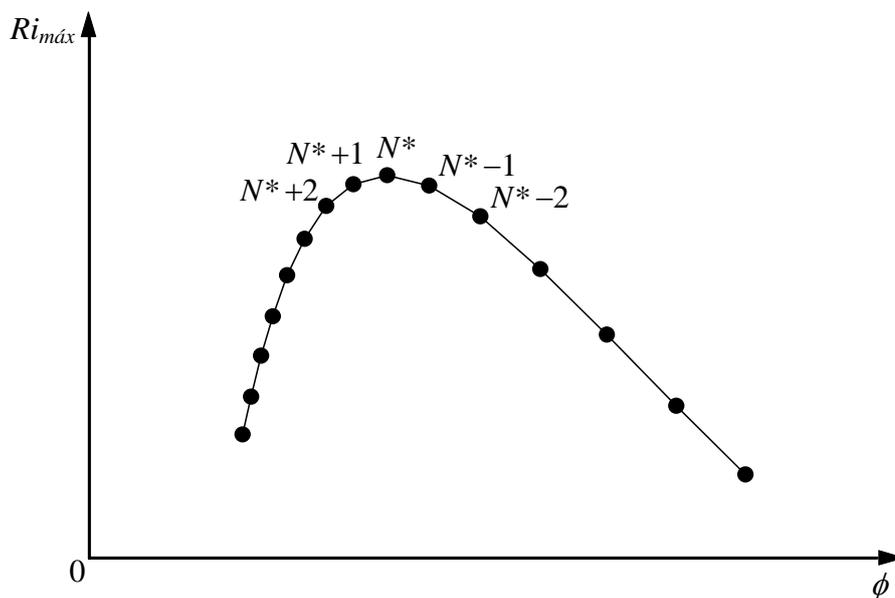
1) Para uma dada geometria, o valor de  $Ri_{máx}^*$  é o maior possível se o carregamento da pá,  $\Delta W_j$ , é o maior possível e, simultaneamente, se o valor da velocidade média do escoamento relativo,  $\bar{W}_j$ , é o menor possível. Para se conseguir altos valores de  $\Delta W_j$ , o número de pás deve ser baixo, e, para se conseguir baixos valores de  $\bar{W}_j$ , o número de pás deve ser alto. O máximo valor do número de Richardson,  $Ri_{máx}^*$ , age, portanto, como uma solução de compromisso para se obter o número de pás para o maior rendimento do rotor:  $N$  baixo implica numa diminuição da superfície de atrito viscoso e  $N$  alto conduz melhor o fluido no interior do rotor;

2) Se  $N \rightarrow \infty$  implica em  $Ri \rightarrow 0$ , podendo-se afirmar que, nas condições estabelecidas anteriormente,  $0 < Ri < 2$ .

Outra característica do número de Richardson é obtida quando, para uma mesma geometria de rotor, se faz um gráfico do número de Richardson máximo,  $Ri_{máx}^*$ , em função do coeficiente de vazão,  $\phi$ , para vários números de pás ótimos,  $N_{ót} = N^*$ . Os diversos  $Ri_{máx}^*$  compõem uma curva que tem um valor máximo ( $Ri_{máx}^*$ ) correspondente ao número de pás mais apropriado (ótimo),  $N^*$ , para o rotor, conforme a Figura 4.4.



**Figura 4.3** Distribuição de números de Richardson em função do raio adimensional para três valores de números de pás



**Figura 4.4** Números de Richardson máximos em função do coeficiente de vazão para diversos valores de números de pás

Pelas considerações anteriores, e pelo trabalho de Oliveira (2001), aparentemente, pode-se concluir que o critério do número de Richardson máximo,  $Ri_{máx}^*$ , para se obter o número de pás ótimo,  $N_{ót} = N^*$ , para rotores de bombas radiais possa ser estendido para rotores de turbi-

nas hidráulicas radiais de baixa rotação específica (turbinas Francis lentas, ou seja, turbinas para altas quedas e baixas vazões).

## Capítulo 5

# RESULTADOS NUMÉRICOS

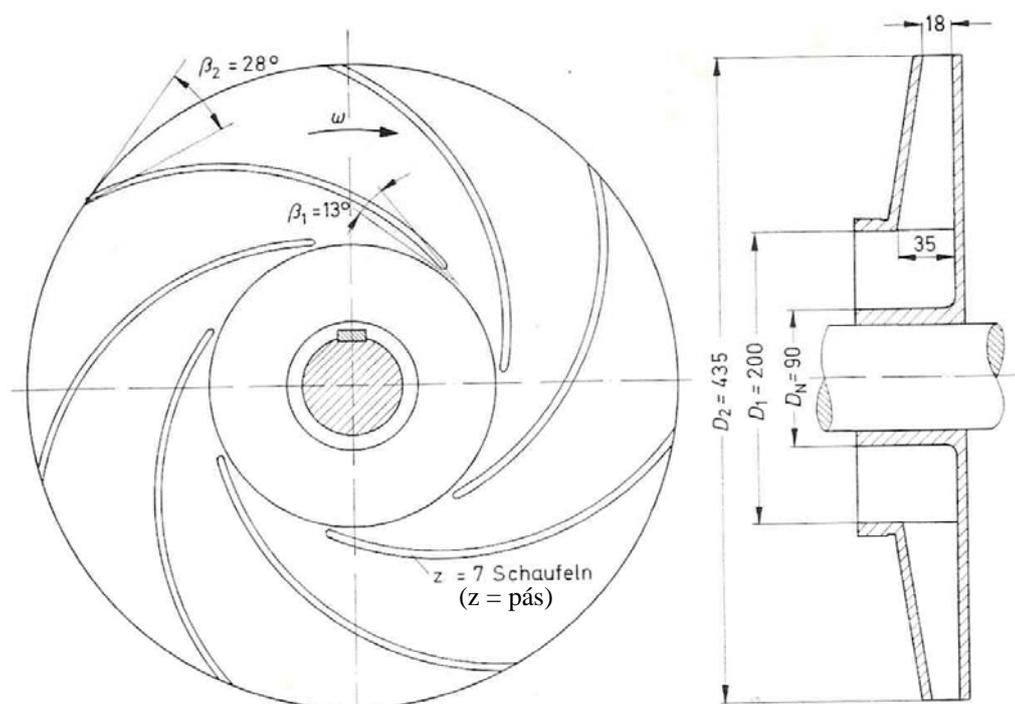
Este capítulo apresenta os resultados numéricos obtidos por meio do método dos painéis para o escoamento potencial e incompressível em rotores radiais. Os resultados inicialmente são apresentados para pás de espessura finita (PEF) e para pás infinitamente finas (PIF) de alguns rotores radiais de bombas. Pelo fato de a espessura das pás ser relativamente pequena, quando comparada com a maior dimensão do rotor (diâmetro externo), verifica-se que a formulação para PIF é adequada para os propósitos do presente trabalho, conforme mostram os resultados numéricos do Item 5.2 (aferição dos modelos computacionais).

Devido à dificuldade de se obter a geometria completa (incluindo o formato das pás) e também resultados analíticos, numéricos e experimentais correspondentes de rotores radiais, principalmente de turbinas hidráulicas, para comparação com os resultados numéricos deste trabalho, este capítulo apresenta somente os resultados numéricos para o rotor da bomba de Dietzel (1980), Figura 5.1 e Tabela 5.1, e para esse mesmo rotor com modificações. Outros resultados numéricos são apresentados no Apêndice D para o rotor de Violato (2004).

A seção meridional do rotor de Dietzel foi mantida, porém, a sua seção normal (transversal) foi modificada. Essas modificações foram nos ângulos de entrada,  $\beta_{ip}$ , e de saída,  $\beta_{ep}$ , das pás, bem como no número de pás,  $N$ . No rotor de Dietzel, as pás são montadas perpendicularmente à capa e ao disco do rotor, e não apresentam torção, ou seja, a largura das pás no plano meridional é igual à respectiva largura da pá em cada seção radial do rotor. Além do

mais, as arestas de entrada e de saída das pás não são curvadas e nem inclinadas, mas sim, são retas e paralelas em relação ao eixo do rotor (Figura 5.1). Essas condições favorecem a aplicação das formulações apresentadas no Capítulo 2, podendo aplicá-las à superfície de corrente referente à linha média do escoamento no plano meridional.

Este capítulo está dividido em seis itens principais: 5.1) Comentários iniciais, 5.2) Aferição dos modelos computacionais; 5.3) Resultados numéricos para o rotor de Dietzel original (modo bomba); 5.4) Resultados numéricos para o rotor de Dietzel modificado (modo bomba); 5.5) Resultados numéricos para o rotor de Dietzel modificado (modo turbina) e 5.6) Comparação dos resultados. Os resultados numéricos apresentados nos Itens 5.3 até 5.5 são para  $M = 150$  painéis.



**Figura 5.1** Rotor centrífugo da bomba de Dietzel (1980) com 7 pás de espessura igual a 6 mm em formato de arco de círculo (ARC) de bordos arredondados na entrada e bordos chanfrados na saída (Figura retirada de Dietzel, 1980)

## 5.1 COMENTÁRIOS INICIAIS

Ao analisar os resultados numéricos obtidos para o rotor de Violato (2004), Tabela 5.2, que tem uma geometria de seção meridional semelhante àquela do rotor de Dietzel (1980) e

ambos têm o mesmo formato de pás em arco de círculo (ARC), foi observado o seguinte: 1) o número de pás ótimo,  $N_{ót}$ , obtido pelo critério do número de Richardson máximo,  $Ri_{máx}$ , para o modo bomba não foi o mesmo para o modo turbina; 2) o ângulo de entrada das pás,  $\beta_{ip}$ , é relativamente grande para ser um rotor de bomba radial (centrífuga) livre de cavitação no ponto de projeto; 3) o ângulo de saída das pás,  $\beta_{ep}$ , é relativamente pequeno para ser um rotor radial de turbina de alta queda.

**Tabela 5.1** Dimensões do rotor original de Dietzel (1980)

Grandeza	Unidade	Dimensão
$D_i$	mm	200
$b_i$	mm	35
$\beta_{ip}$	°	13
$D_e$	mm	435
$b_e$	mm	18
$\beta_{ep}$	°	28
$e_{pá}$	mm	6
$N$	-	7

**Tabela 5.2** Dimensões do rotor de Violato (2004)

Grandeza	Unidade	Dimensão
$D_i$	mm	213,5
$b_i$	mm	70,1
$\beta_i$	°	33,50
$D_e$	mm	419,5
$b_e$	mm	32,1
$\beta_e$	°	50,41
$e_{pá}$	mm	3
$N$	-	8

O rotor de Violato tem a pré-geometria (aresta de entrada das pás paralela ao eixo e com capa do rotor inclinada) que posteriormente resultou na geometria aperfeiçoada de um rotor de ventilador radial (centrífugo). A geometria definitiva desse rotor, FINEP/EFEI (1981), foi modificada para aresta de entrada das pás curvadas e com capa do rotor inclinada com curvatura na sua entrada (veja a Figura C.1 do Apêndice C). Embora o rotor de Violato seja de um ventilador, as três observações anteriores serviram de motivação no sentido de alterar algumas grandezas geométricas do rotor da bomba de Dietzel para que tal rotor pudesse apresentar boas características de desempenho hidrodinâmico tanto no modo bomba como no modo turbina. Dessa forma, três grandezas geométricas foram modificadas: 1) o número de pás,  $N$ ; 2) o ângulo de entrada das pás,  $\beta_{ip}$ ; 3) o ângulo de saída das pás,  $\beta_{ep}$ .

O número de pás,  $N$ , foi alterado com o intuito de verificar se há um número de Richardson máximo,  $Ri_{máx}$ , menor que 2 (para não haver reversão do escoamento relativo no lado de pressão das pás no modo bomba), que pudesse estabelecer o número de pás ótimo,  $N_{ót}$ , tanto para o modo bomba como para o modo turbina, quando são modificados os ângulos  $\beta_{ip}$  e  $\beta_{ep}$ . O ângulo de entrada das pás,  $\beta_{ip}$ , foi alterado com o intuito principalmente de aumentar

tal ângulo, uma vez que as pás de rotores radiais de turbinas hidráulicas geralmente apresentam ângulos de entrada das pás maiores que os de bomba, sem prejudicar as suas características de cavitação. O ângulo de saída das pás,  $\beta_{ep}$ , foi alterado com o intuito principalmente de aumentar tal ângulo, uma vez que as pás de rotores radiais de turbinas hidráulicas de alta queda apresentam ângulos de saída das pás maiores que os de bomba.

## 5.2 AFERIÇÃO DOS MODELOS COMPUTACIONAIS

A qualidade da solução numérica das equações integrais para PEF, Equação (4.54), e para PIF, Equação (4.71), pode ser avaliada através da comparação dos seus resultados com resultados analíticos. Em princípio, não existe solução analítica que possa abranger, simultaneamente, os efeitos de rotação, de variação de largura e de variação de espessura das pás, que são típicos de rotores radiais e diagonais de turbomáquinas, mesmo para escoamento potencial e incompressível.

No caso de PEF, a equação integral (3.85) é uma equação geral para análise do escoamento em perfis isolados ou em grades fixas ou móveis (rotativas) dos tipos axiais, diagonais ou radiais, com ou sem variação de largura das pás. Em situações particulares da Equação (3.85), tais como para perfis isolados e para grades lineares, existem algumas soluções analíticas disponíveis na literatura. Para grades puramente radiais e grades diagonais (com largura das pás constante), fixas ou móveis, também existem algumas soluções analíticas. Destaca-se, nesses dois casos, o trabalho de Fisher e Lewis (1971) que utilizaram o método de transformação conforme na análise do escoamento de grades compostas de perfis Joukowski de diversas geometrias, abrangendo efeitos de espessura e/ou de arqueamento.

Utilizando as soluções numéricas apresentadas no Item 3.5, foram analisados alguns casos referentes a grades radiais representativas de rotores centrífugos (rotores de bombas), com o intuito de aferir o modelo computacional proposto. Foram analisadas as influências do número de painéis,  $M$ , do fator de discretização,  $q_{sg}$ , do contorno das pás, da correção ou não dos elementos da diagonal da matriz de influência e das condições de entrada (condição sem choque, ou seja, condição de incidência ótima) e de saída (condição de Kutta) do rotor.

Da comparação realizada neste trabalho entre os resultados numéricos e analíticos, constatou-se que, de modo geral, 300 painéis e  $q_{sg} = 1,02$ , juntamente com a correção de cur-

vatura (Equação (3.27.b) do Item 3.5.1), são suficientes para se obter uma precisão aceitável para os propósitos estabelecidos neste trabalho.

No caso de PIF, uma solução analítica foi apresentada por Murata *et al.* (1978) para grade radial móvel, com pás em formato de espiral logarítmica e de largura variável. Apesar de ser considerada exata, essa solução é restrita apenas ao caso de uma determinada variação de largura das pás que segue uma expressão logarítmica (veja a Figura C.1 do Apêndice C). Essa solução, apesar de não considerar a espessura das pás, serviu não só para a aferição do modelo computacional referente ao caso de PIF, como também para verificar a influência da largura das pás. Serviu também para analisar as diversas grandezas do escoamento, obtidas através do modelo computacional referente ao caso de PEF, quando, nesse caso, a espessura das pás se aproxima do valor zero.

As Figuras 5.2 até 5.8 apresentam os resultados para o rotor original de Dietzel (1980), conforme a Figura 5.1 e Tabela 5.1 e também para o mesmo rotor com pás modificadas, mantendo-se a mesma geometria da seção meridional e os mesmos ângulos de entrada e saída das pás. Os resultados apresentados são para a distribuição de velocidades relativas nos lados de pressão e de sucção das pás no modo bomba, tanto para PEF como PIF. No caso de PEF, foram realizadas modificações nas regiões próximas aos bordos de ataque e de fuga, e na distribuição de espessura das pás, porém, mantendo-se a geometria original da linha média das pás do rotor de Dietzel que é em formato de arco de círculo (ARC).

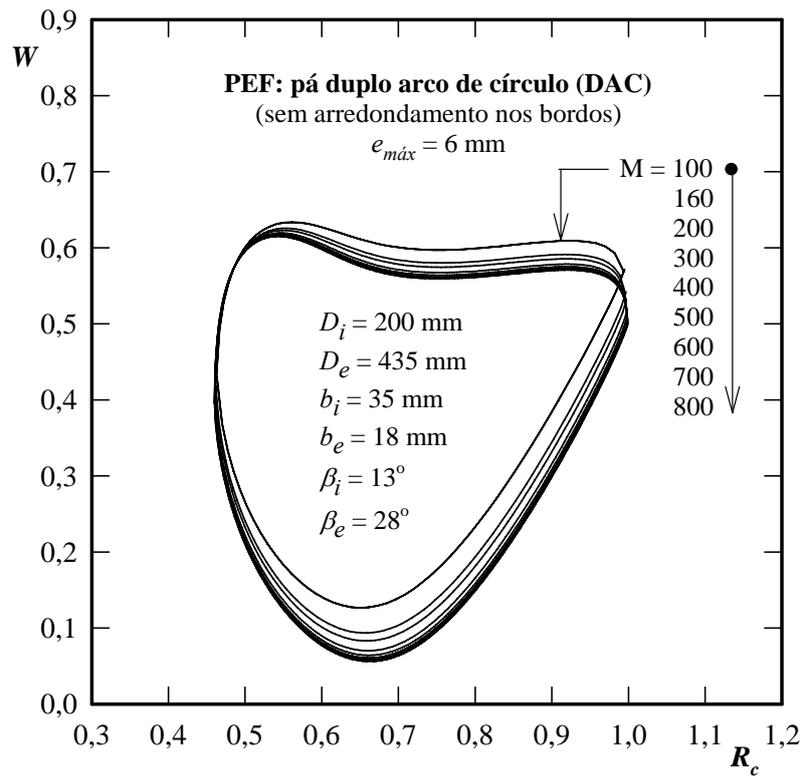
As seguintes influências foram analisadas:

1) Variação do número de painéis,  $M$ , mantendo-se o fator de discretização  $q_{sg} = 1,02$ , conforme a Figura 5.2, para o rotor com pás em formato de duplo arco de círculo (DAC), sem arredondamento nos bordos, que está representada na forma esquemática na Figura C.5 do Apêndice C;

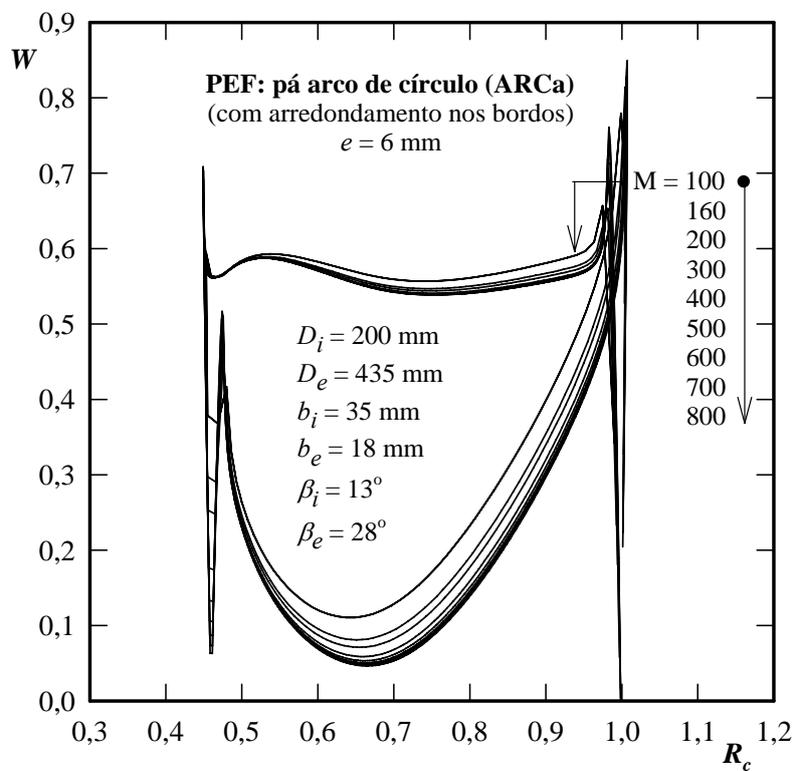
2) Variação do número de painéis,  $M$ , mantendo-se o fator de discretização  $q_{sg} = 1,02$ , Figura 5.3, para o rotor com pás em formato de arco de círculo (ARC) com arredondamento nos bordos (ARCa), que está representada na forma esquemática na Figura C.4 (Apêndice C);

3) Variação da espessura das pás em formato de arco de círculo (ARC): PIF e PEF com arredondamento nos bordos (ARCa) e com arredondamento no bordo interno e chanfrada no bordo externo (ARCc), Figura 5.4, que está representada na forma esquemática na Figura C.3 (Apêndice C);

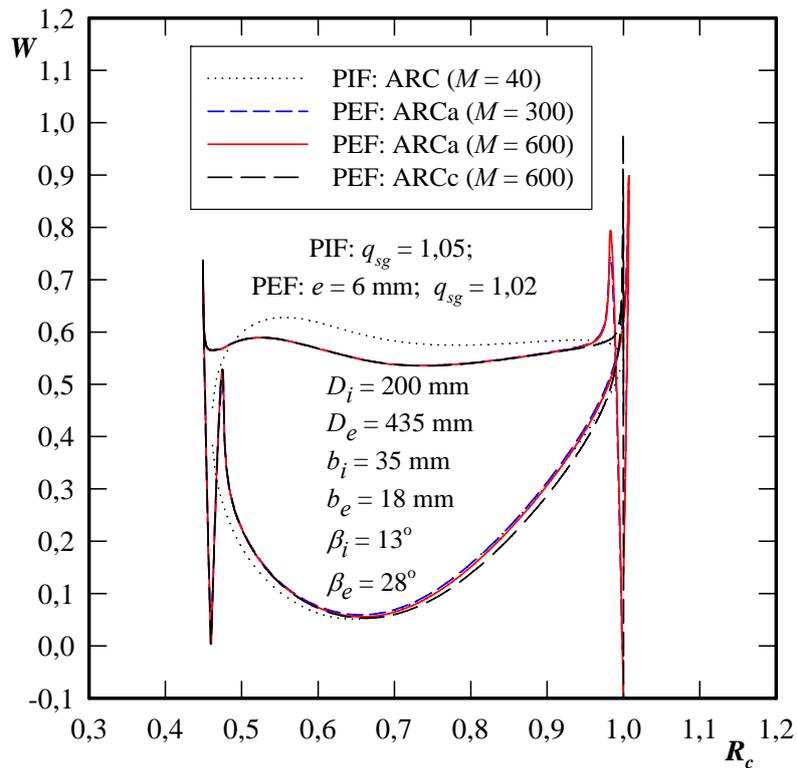
4) Variação do número de painéis,  $M$ , mantendo-se o fator de discretização  $q_{sg} = 1,05$ , para o rotor com PIF em formato de arco de círculo (ARC), Figura 5.5.



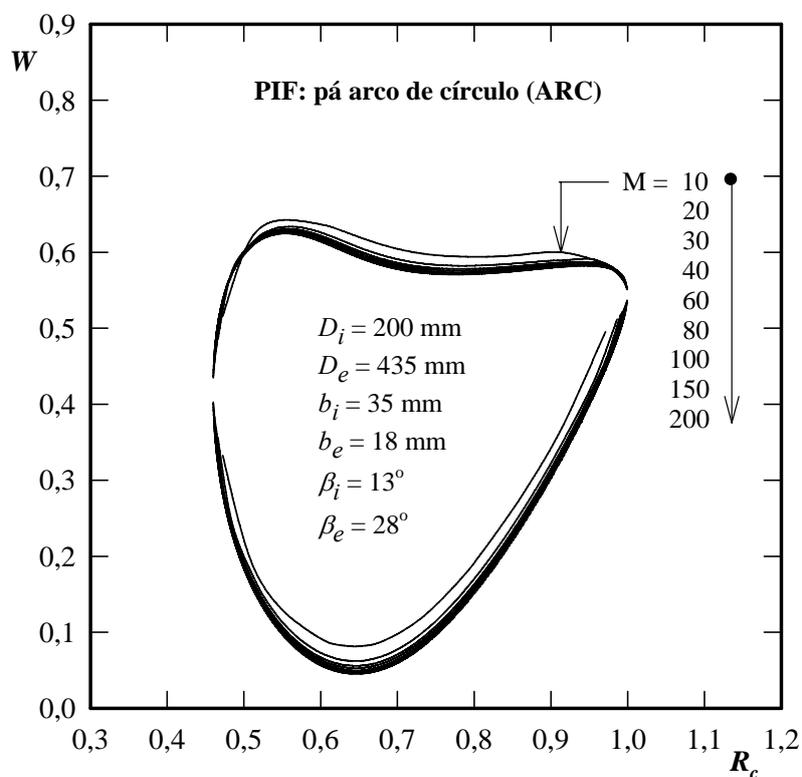
**Figura 5.2** Influência do número de painéis na distribuição de velocidades relativas na superfície das pás DAC do rotor da bomba de Dietzel (1980)



**Figura 5.3** Influência do número de painéis na distribuição de velocidades relativas na superfície das pás ARCa, com bordos arredondados, do rotor da bomba de Dietzel (1980)



**Figura 5.4** Influências do número de painéis, da espessura das pás e da geometria do bordo de fuga (arredondado e chanfrado) na distribuição de velocidades relativas do rotor da bomba de Dietzel (1980)



**Figura 5.5** Influência do número de painéis na distribuição de velocidades na superfície das PIF (ARC) do rotor da bomba de Dietzel (1980)

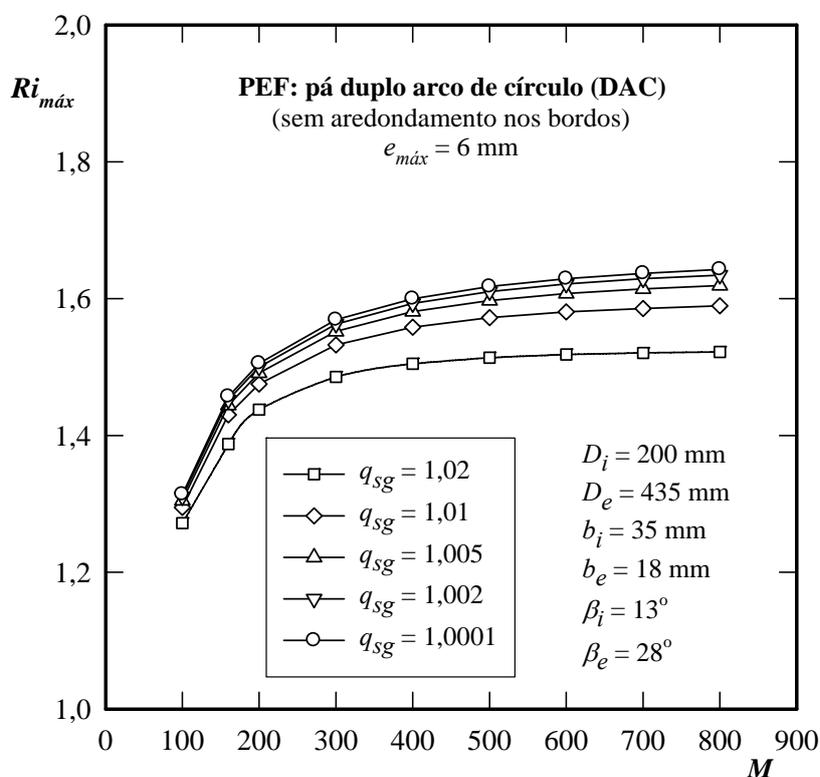
Comparando os resultados para PEF e para PIF apresentados na Figura 5.4 (também na Figura 5.11) para a distribuição de pressões, observa-se que a não consideração da espessura das pás afeta mais a distribuição de velocidades no lado de sucção do que no lado de pressão das pás.

As seguintes influências no valor do número de Richardson máximo,  $Ri_{máx}$ , em função do número de painéis foram analisadas para o rotor da bomba de Dietzel (1980) com algumas modificações na distribuição de espessuras das pás, porém mantendo-se a geometria original da linha média das pás que é em formato de arco de círculo (ARC):

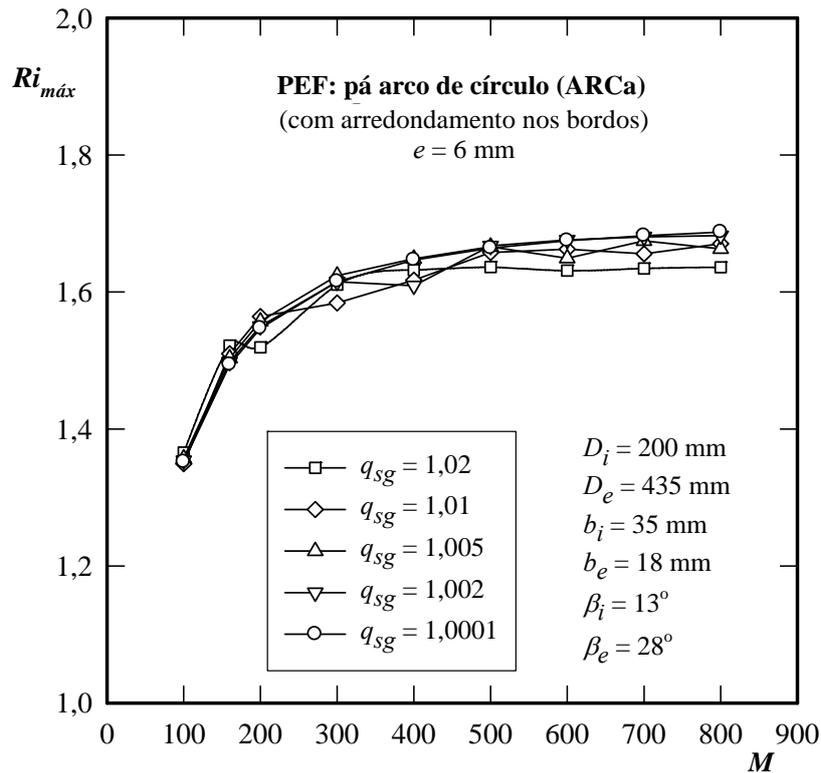
1) Variação do fator de discretização,  $q_{sg}$ , Figura 5.6, para o rotor com pás em formato de duplo arco de círculo (DAC) sem arredondamento nos bordos;

2) Variação do número de painéis,  $M$ , mantendo-se o fator de discretização  $q_{sg} = 1,02$ , Figura 5.7, com pás em formato de arco de círculo (ARC) com arredondamento nos bordos (ARCa);

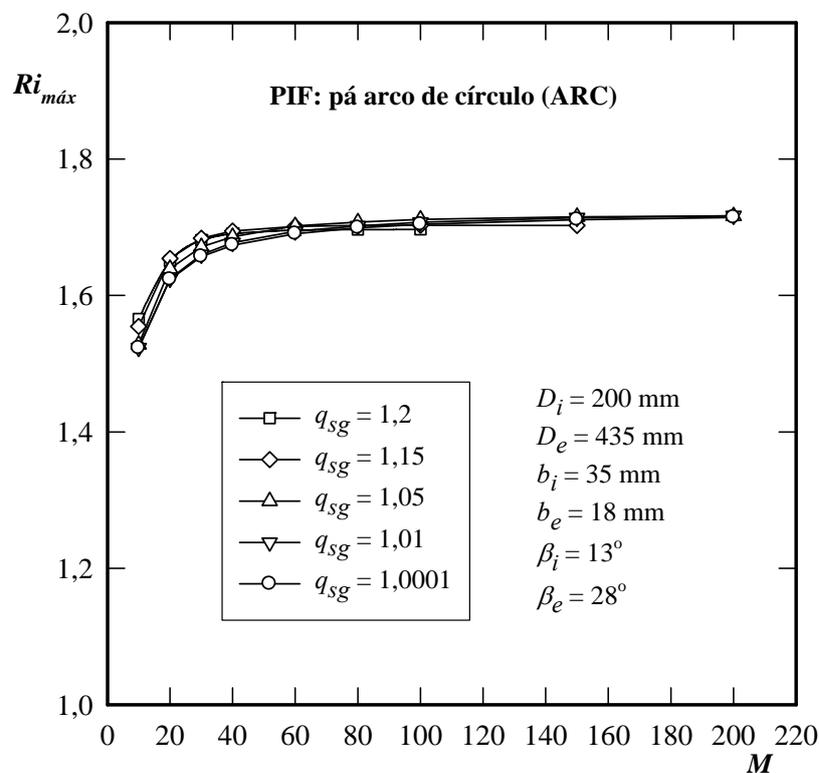
3) Variação da espessura das pás em formato de arco de círculo (ARC): PEF com arredondamento nos bordos (ARCa) e com arredondamento no bordo de ataque e chanfrada no bordo de fuga (ARCc) e PIF, Figura 5.4.



**Figura 5.6** Influências do número de painéis e do fator de discretização no número de Richardson máximo para as pás DAC do rotor da bomba de Dietzel (1980)



**Figura 5.7** Influências do número de painéis e do fator de discretização no número de Richardson máximo para as pás ARC, com bordos arredondados, do rotor da bomba de Dietzel (1980)



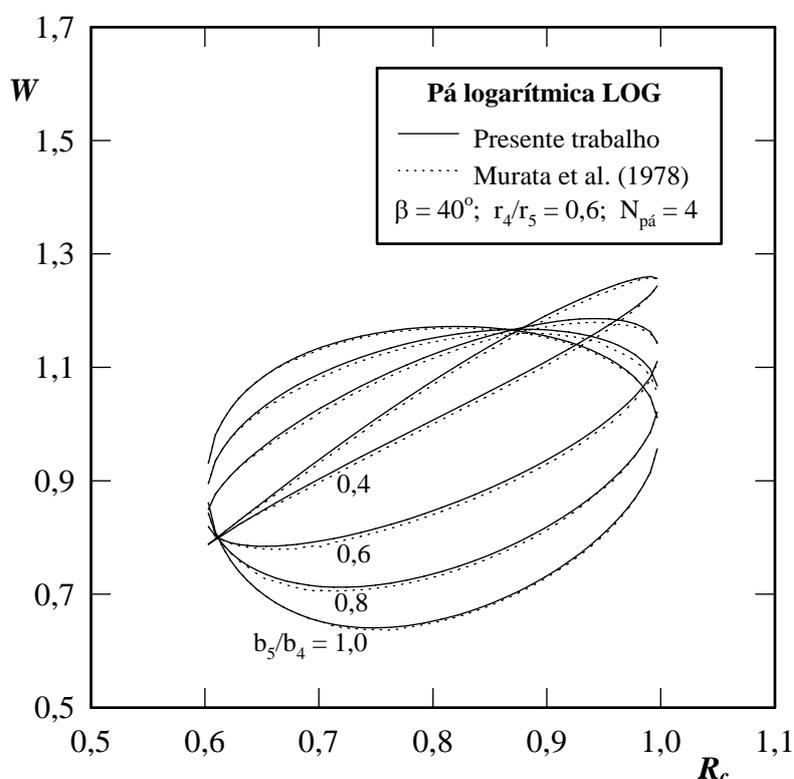
**Figura 5.8** Influências do número de painéis e do fator de discretização no número de Richardson máximo para as PIF (ARC) do rotor da bomba de Dietzel (1980)

Ao se utilizar a solução numérica para PEF, existe um limite para se fazer a espessura das pás tender a zero. Esse limite depende da geometria das pás, do fator de discretização e do número de painéis utilizado. A dependência do número de painéis,  $M$ , influencia os elementos da matriz de influência do sistema de equações algébricas lineares, quando  $M$  aumenta muito, deixando tal matriz mal-condicionada.

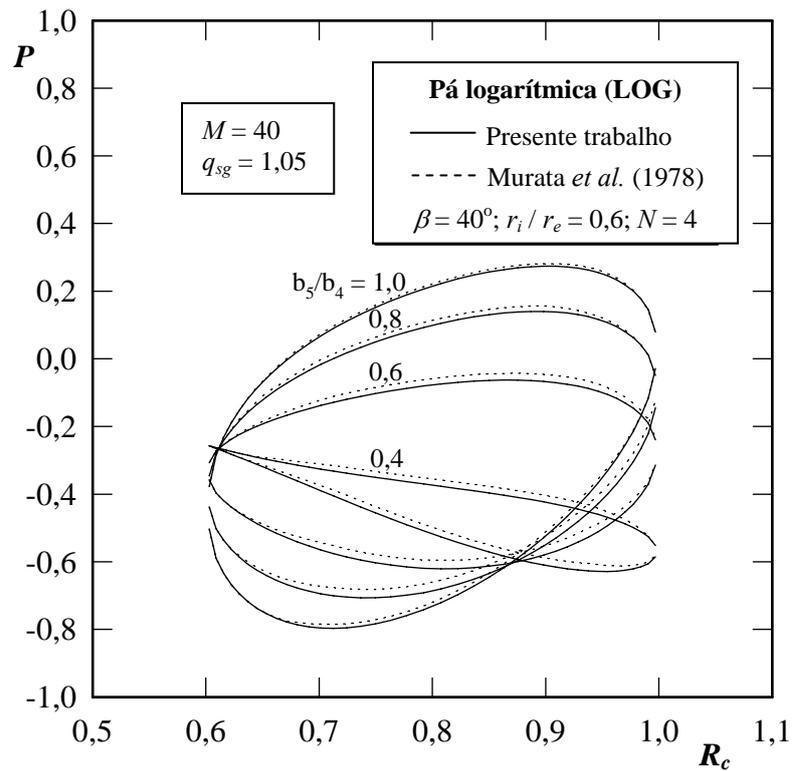
As Figuras 5.9 e 5.10 apresentam, respectivamente, as distribuições de velocidades relativas e de pressões deste trabalho e de Murata *et al.* (1978) com capa do rotor em formato logarítmico (Figura C.1 do Apêndice C) para variações de relação de larguras das pás.

A Figura 5.11 apresenta a distribuição de velocidades relativas na superfície das pás em formato logarítmico de espessura variável no plano físico (GR), mas de espessura constante no plano transformado (GL), Figuras C.7 e C.8 (Apêndice C), com bordos arredondados (LOGar) do rotor centrífugo de Sebestyén *et al.* (1983).

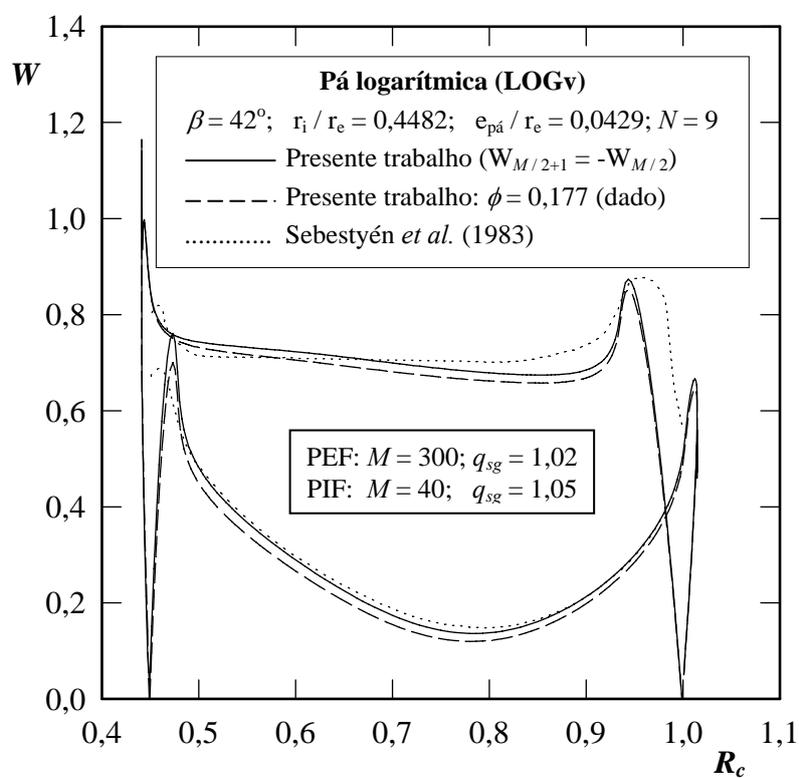
Por fim, a Figura 5.12 apresenta a distribuição de pressões (numérica e experimental) na superfície das pás logarítmicas de espessura constante, Figuras C.6 e C.8 (Apêndice C). Observa-se que os resultados numéricos para PIF são muito bons fora da região dos bordos da pá, quando comparados com os resultados experimentais, validando a formulação para PIF.



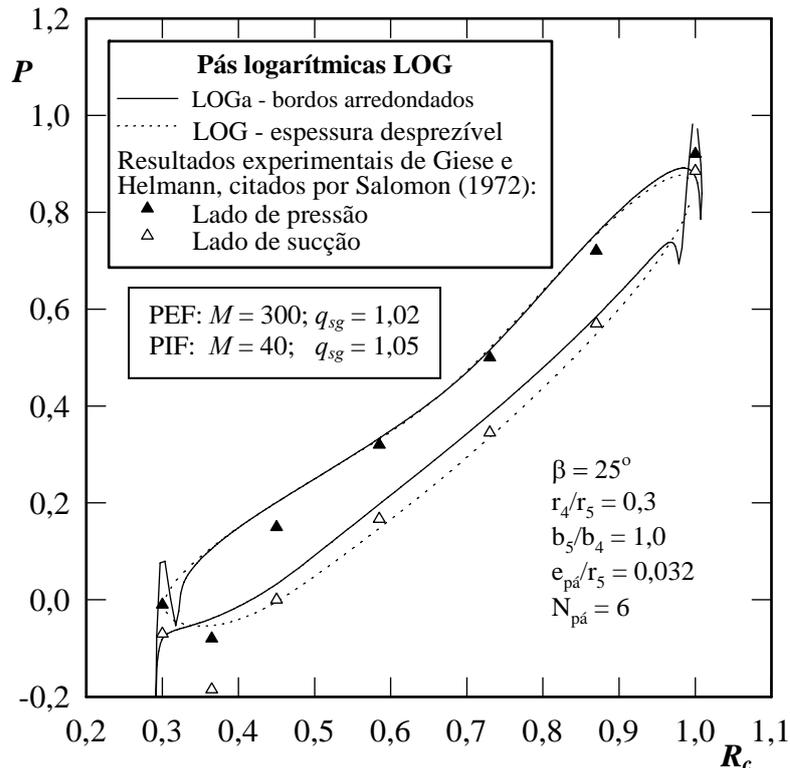
**Figura 5.9** Distribuição de velocidades relativas na superfície das pás logarítmicas do rotor centrífugo de Murata *et al.* (1978)



**Figura 5.10** Distribuição de pressões na superfície das pás logarítmicas do rotor centrífugo de Murata *et al.* (1978)



**Figura 5.11** Distribuição de velocidades na superfície das PEF, de espessura variável, com bordos arredondados (LOGar) do rotor centrífugo de Sebestyén *et al.* (1983)



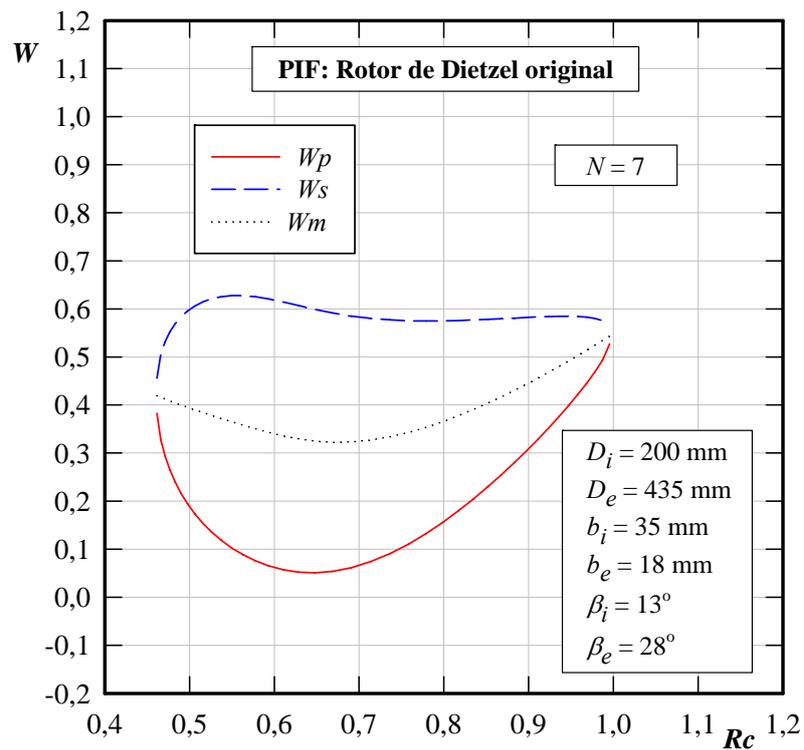
**Figura 5.12** Distribuição de pressões na superfície das PEF, de espessura constante, com bordos arredondados (LOGar) e sobre as PIF (LOG) do rotor centrífugo de Helmann e Giese, citados por Salomon (1972)

### 5.3 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O ROTOR DE DIETZEL ORIGINAL (MODO BOMBA)

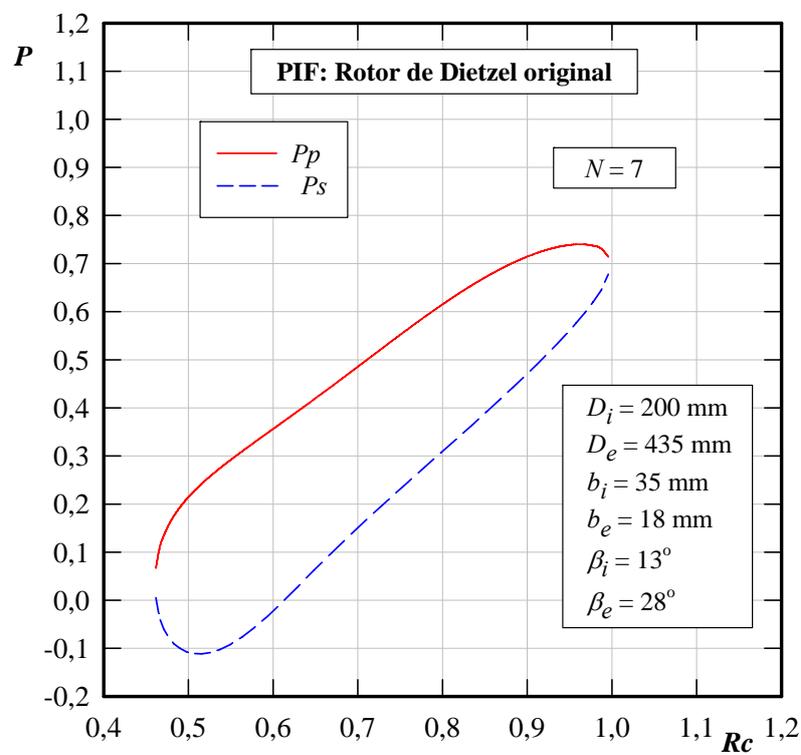
As Figuras 5.13 até 5.18 apresentam diversas grandezas locais e globais do escoamento potencial e incompressível para o rotor de Dietzel original (Figura 5.1 e Tabela 5.1), com exceção de algumas figuras onde o número de pás  $N = 7$  (rotor original) foi modificado.

A Figura 5.13 apresenta a distribuição de velocidades relativas na superfície das pás que juntamente com a velocidade média do escoamento relativo compõem as grandezas para o cálculo do número de Richardson local,  $Ri$ , nesse caso para  $N = 7$ .

A Figura 5.14 apresenta a distribuição de pressões na superfície das pás. Essa grandeza é importante para verificar se a menor pressão na superfície do lado do intradorso (lado de sucção) das pás é suficientemente baixa para atingir a pressão de vapor do líquido bombeado pelo rotor. Observa-se que  $P_s \cong -0,111$  para  $N = 7$ , isto é, um valor que não é tão baixo para que o rotor possa cavitatar no ponto de projeto.



**Figura 5.13** Distribuição de velocidades relativas na superfície das pás do rotor de Dietzel original

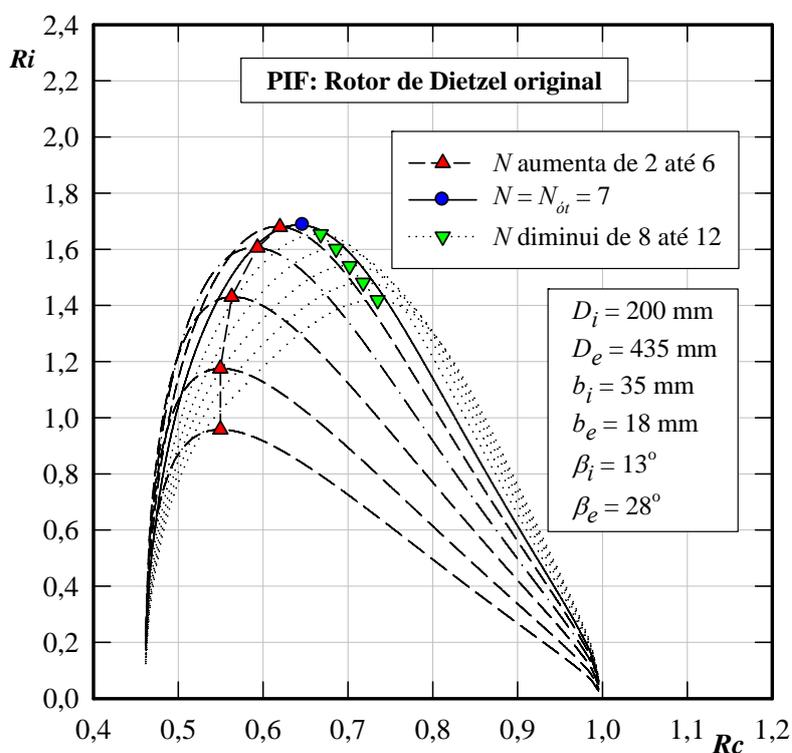


**Figura 5.14** Distribuição de pressões na superfície das pás do rotor de Dietzel original

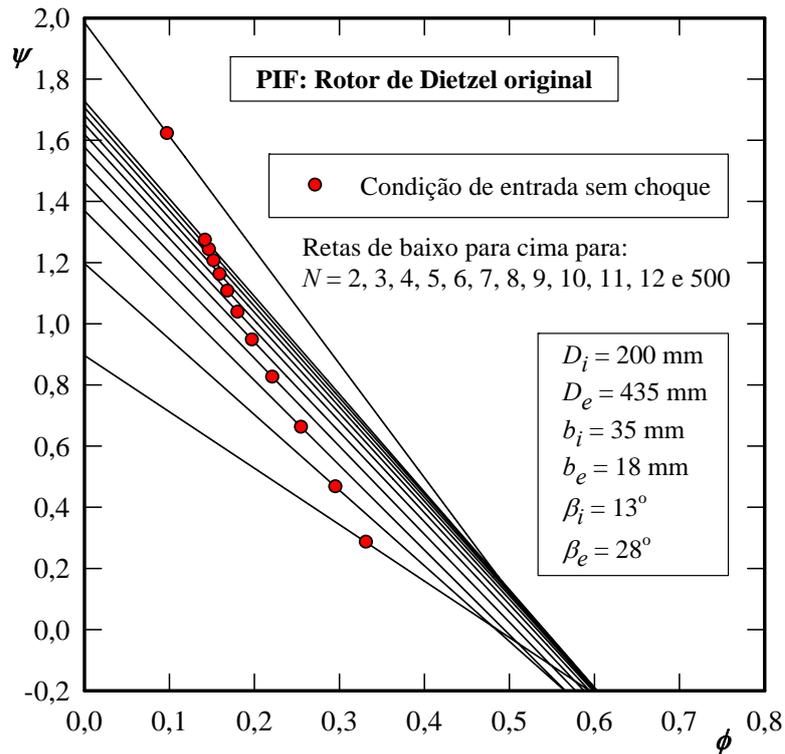
A Figura 5.15 apresenta a distribuição de números de Richardson e indicação de números de Richardson máximos para diversos números de pás. Os resultados numéricos apresentaram  $Ri_{máx} = 1,708685$  para  $N = 6$ ,  $Ri_{máx} = 1,715438$  para  $N = 7$  e  $Ri_{máx} = 1,682483$  para  $N = 8$ . Portanto, o maior  $Ri_{máx}$  corresponde a  $N = 7$ , que comprova a eficácia do critério do maior  $Ri_{máx}$  para estabelecer o número de pás ótimo também para o rotor (original) da bomba de Dietzel.

A Figura 5.16 apresenta o coeficiente de pressão em função do coeficiente de vazão e indicação da condição de entrada sem choque para diversos números de pás. Observa-se que, para  $N = 500$ , praticamente o coeficiente de pressão atinge o valor 2 para o coeficiente de vazão nulo, que é o valor para a condição ideal de número infinito de pás de espessura desprezível correspondente à equação de Euler das turbomáquinas. A figura também mostra que, ao aumentar o número de pás, o coeficiente de vazão diminui, mesmo se as pás são consideradas de espessura desprezível, mostrando que o número de pás é a sua espessura.

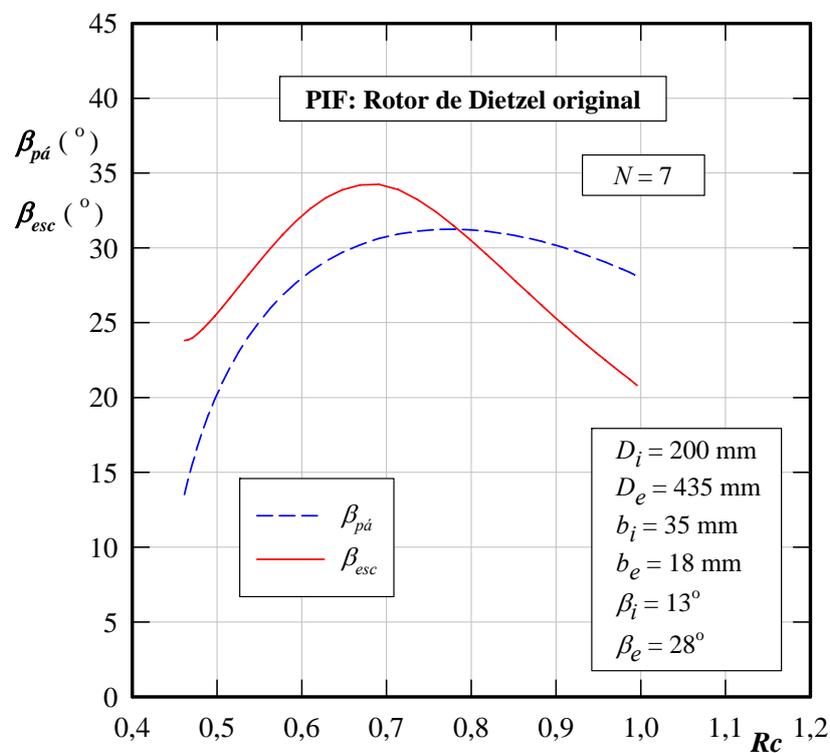
A Figura 5.17 apresenta a distribuição do ângulo das pás,  $\beta_{pá}$ , e do ângulo do escoamento relativo,  $\beta_{esc}$ , para  $N = 7$ , onde se pode notar a diminuição de  $\beta_{esc}$  na saída do rotor, caracterizada pelo desvio do escoamento relativo que é responsável pelo fator de deficiência de potência.



**Figura 5.15** Distribuição de números de Richardson e indicação de números de Richardson máximos para diversos números de pás do rotor de Dietzel original

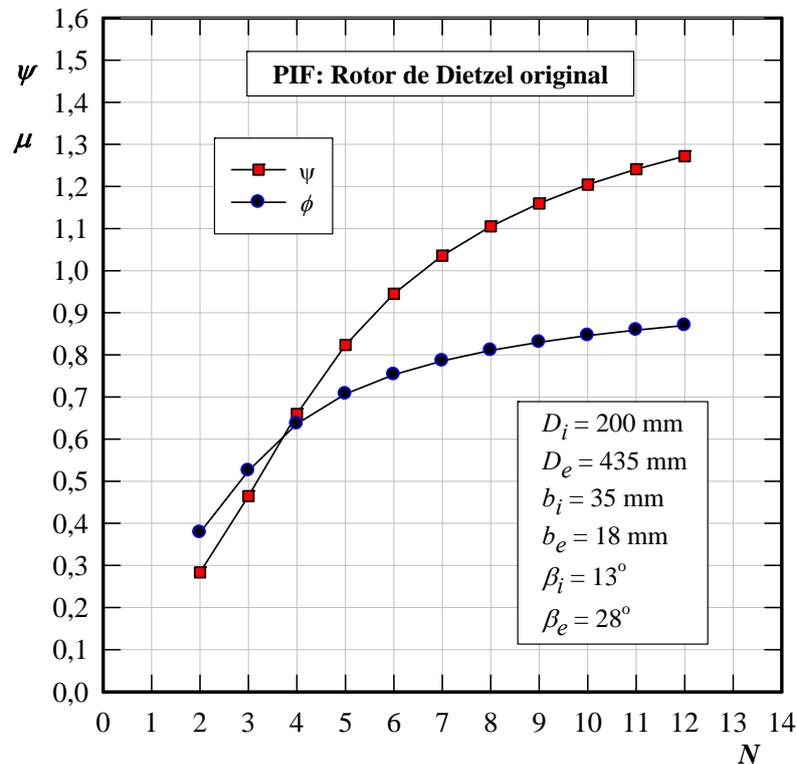


**Figura 5.16** Coeficiente de pressão em função do coeficiente de vazão e indicação da condição de entrada sem choque para diversos números de pás do rotor de Dietzel original



**Figura 5.17** Distribuição do ângulo das pás e do ângulo do escoamento relativo do rotor de Dietzel original

A Figura 5.18 apresenta o coeficiente de pressão,  $\psi$ , em função do fator de deficiência de potência,  $\mu$ , para diversos números de pás. Observa-se que, ao aumentar o número de pás,  $N$ , tanto  $\psi$  como  $\mu$  aumentam, como é de se esperar. No limite, quando  $N \rightarrow \infty$ , resulta  $\psi \rightarrow 2$  e  $\mu \rightarrow 1$ .



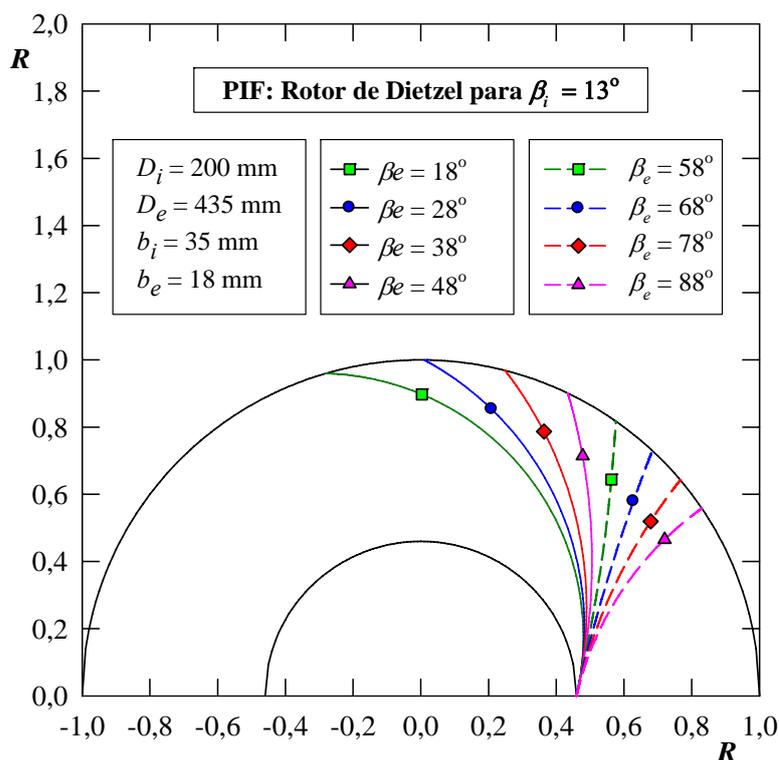
**Figura 5.18** Coeficiente de pressão e fator de deficiência de potência em função do número de pás do rotor de Dietzel original

## 5.4 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O ROTOR DE DIETZEL MODIFICADO (MODO BOMBA)

Este item apresenta os resultados numéricos para o rotor de Dietzel modificado (modo bomba). Três modificações foram realizadas em relação ao rotor original: 1) modificação do ângulo de entrada da pá,  $\beta_{ip}$ ; 2) modificação do ângulo de saída da pá,  $\beta_{ep}$ ; 3) modificação do número de pás,  $N$ . Para cada uma dessas três grandezas, as outras duas são modificadas em certas faixas de valores, dependendo do valor do  $Ri_{máx}$  que não deve ser maior que 2 para não haver reversão do escoamento relativo no lado de pressão da pá. As faixas para se obter  $Ri_{máx} < 2$  que foram analisadas são:  $11^\circ \leq \beta_{ip} \leq 27^\circ$ ,  $18^\circ \leq \beta_{ep} \leq 88^\circ$  e  $2 \leq N \leq 12$ .

Na sequência, serão apresentados alguns resultados mais relevantes para os propósitos deste item. Outros resultados complementares estão no Apêndice D.

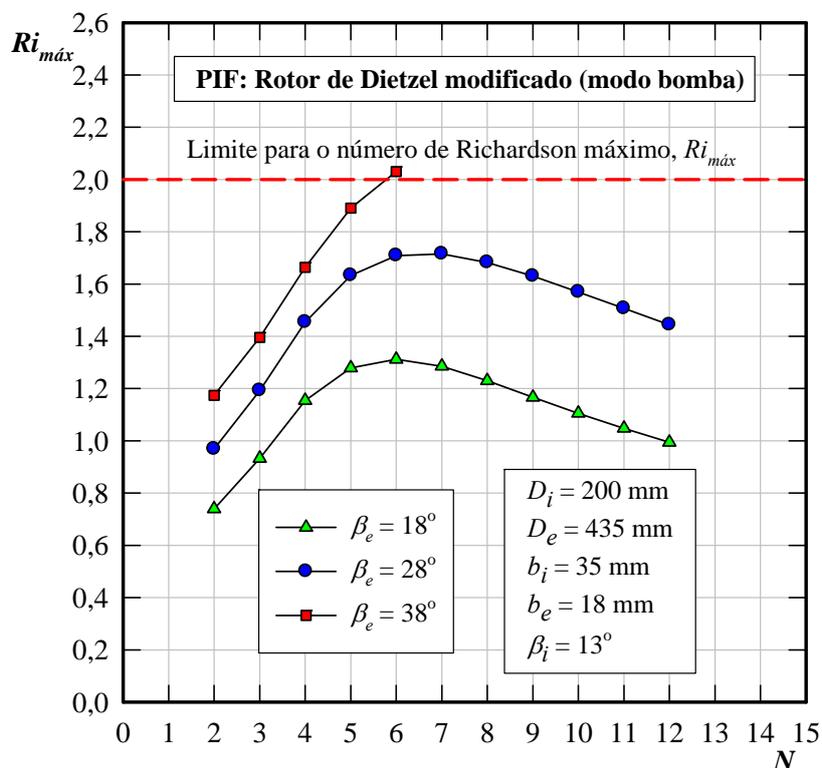
A Figura 5.19 apresenta um esquema da seção normal (transversal) do rotor de Dietzel modificado, com pás em formato de arco de círculo (ARC), para o ângulo de entrada das pás  $\beta_{ip} = 13^\circ$  (original) e diversos ângulos de saída das pás,  $\beta_{ep}$ . Observa-se a alteração na geometria das pás quando  $\beta_{ep}$  é diferente de  $\beta_{ep} = 28^\circ$  (original). Ângulos  $\beta_{ep}$  menores que  $28^\circ$  resultam em pás de comprimentos maiores, ao passo que ângulos  $\beta_{ep}$  maiores que  $28^\circ$  resultam em pás de comprimentos menores. Ângulos  $\beta_{ep}$  pequenos são típicos de bombas radiais, enquanto que ângulos  $\beta_{ep}$  altos são típicos de turbinas de altas quedas. Essa situação sugere que pode haver determinados ângulos  $\beta_{ip}$  e  $\beta_{ep}$  apropriados para rotores radiais de bons desempenhos tanto para o modo bomba como para o modo turbina, para uma determinada seção meridional fixada.



**Figura 5.19** Esquema de seção transversal dos rotores de Dietzel original e modificado para pás com  $\beta_{ip} = 13^\circ$  (original) e diversos ângulos  $\beta_{ep}$

A Figura 5.20 apresenta os resultados do número de Richardson máximo,  $Ri_{máx}$ , em função do número de pás,  $N$ , para  $\beta_{ip} = 13^\circ$  (original). Observa-se que, para esse ângulo, foi pos-

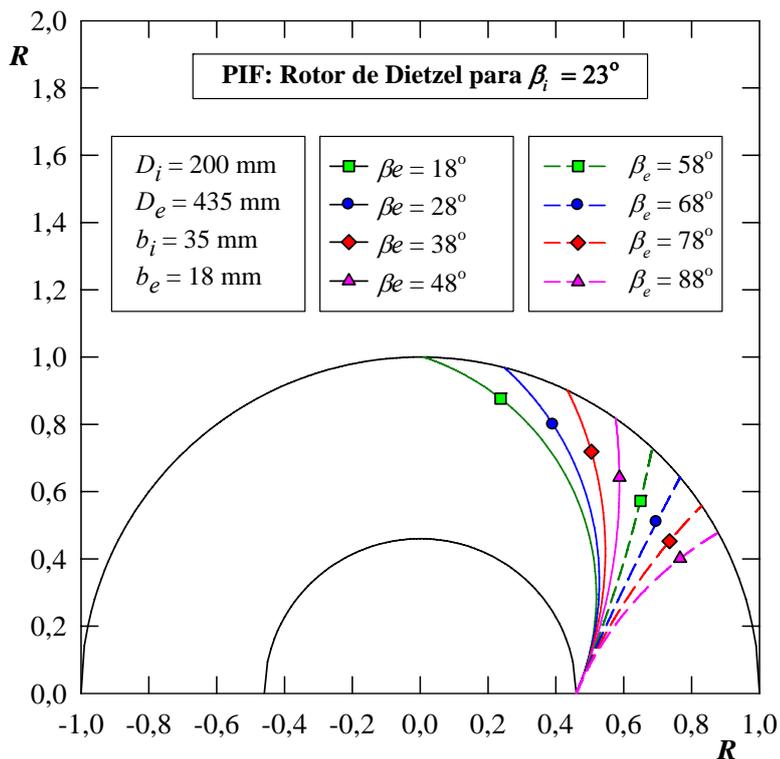
sível obter  $Ri_{m\acute{a}x} < 2$ , apenas para  $\beta_{ep} = 18^\circ$  e  $28^\circ$  com  $2 < N < 12$ , implicando que há um  $Ri_{m\acute{a}x}^*$  (maior  $Ri_{m\acute{a}x}$ ) que vai estabelecer o número de pás ótimo,  $N^*$ , para cada  $\beta_{ep}$ . No caso de  $\beta_{ep} = 18^\circ$ , resultou  $N^* = 6$ , e no caso de  $\beta_{ep} = 28^\circ$ , resultou  $N^* = 7$  (que é o número de pás do rotor de Dietzel original). Observa-se ainda que, para  $\beta_{ep} = 38^\circ$  (também para  $\beta_{ep} > 38^\circ$ ), não há  $Ri_{m\acute{a}x}^*$ , pois, para  $N = 6$ , o  $Ri_{m\acute{a}x}$  já é maior que 2, indicando que há reversão do escoamento relativo no lado de pressão das pás no ponto de projeto.



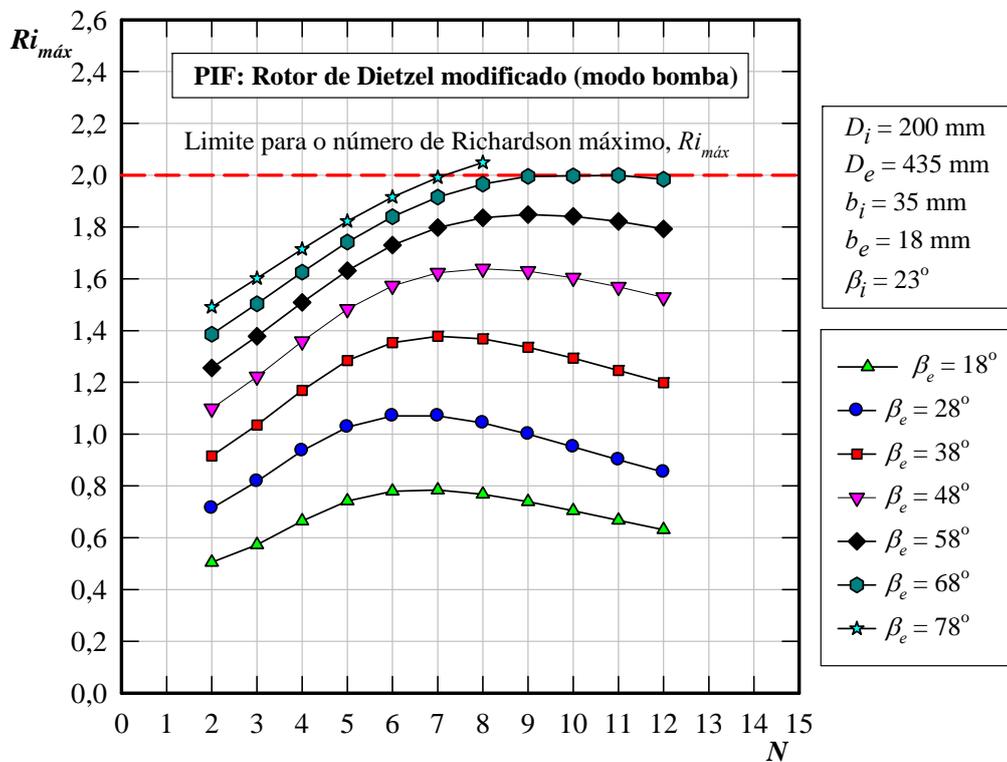
**Figura 5.20** Número de Richardson máximo em função do número de pás dos rotores de Dietzel original e modificado para pás com  $\beta_{ip} = 13^\circ$  (original)

A Figura 5.21 apresenta um esquema da seção normal do rotor de Dietzel modificado, para o ângulo de entrada das pás  $\beta_{ip} = 23^\circ$  e diversos ângulos de saída das pás,  $\beta_{ep}$ . Observa-se a alteração na geometria das pás quando  $\beta_{ip}$  é diferente de  $\beta_{ip} = 13^\circ$  (original), ou seja, as pás têm comprimentos menores que aqueles representados na Figura 5.19.

A Figura 5.22 apresenta os resultados do número de Richardson máximo,  $Ri_{m\acute{a}x}$ , em função do número de pás,  $N$ , para  $\beta_{ip} = 23^\circ$ . Observa-se que, para esse ângulo, quando  $\beta_{ep} = 78^\circ$ , já há reversão do escoamento relativo no lado de pressão da pá para  $N = 8$ .

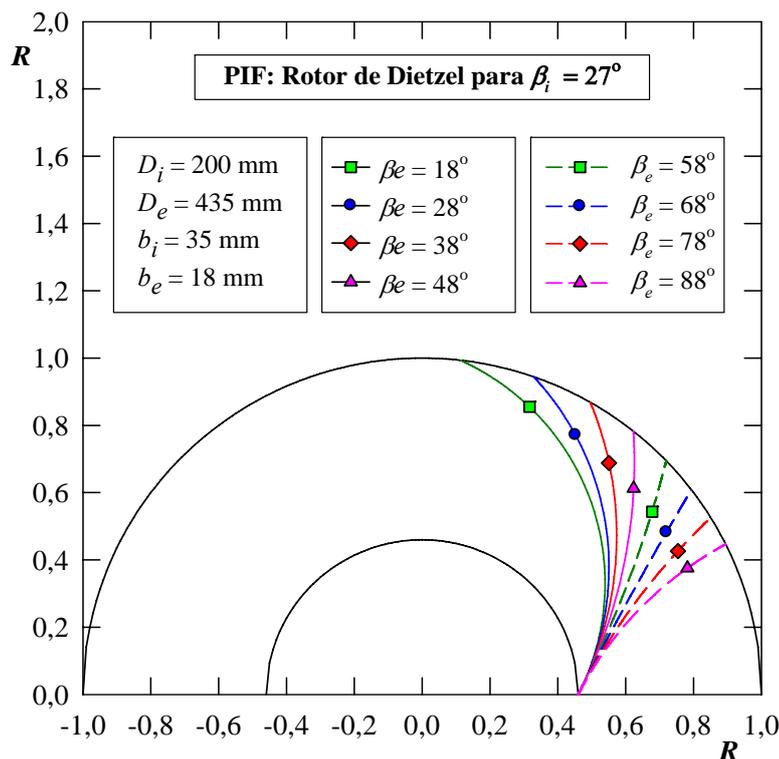


**Figura 5.21** Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 23^\circ$  e diversos ângulos  $\beta_{ep}$



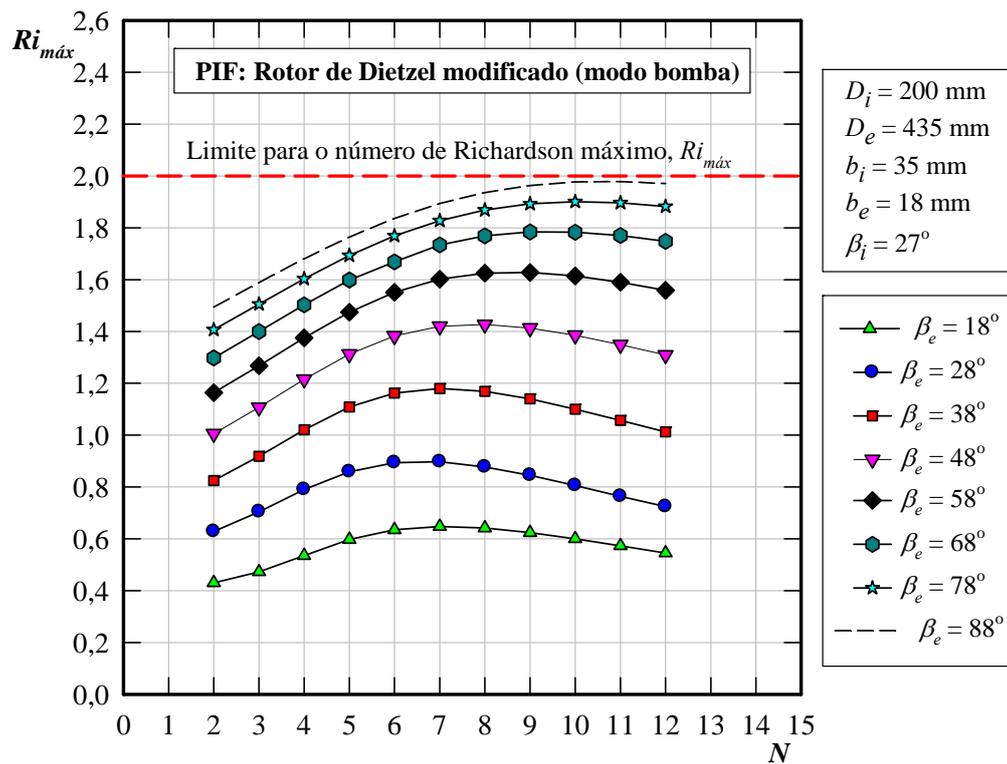
**Figura 5.22** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 23^\circ$

A Figura 5.23 apresenta um esquema da seção normal do rotor de Dietzel modificado, para o ângulo de entrada das pás  $\beta_{ip} = 27^\circ$  e diversos ângulos de saída das pás,  $\beta_{ep}$ . Observa-se novamente a alteração na geometria das pás quando  $\beta_{ip}$  é diferente de  $\beta_{ip} = 13^\circ$  (original) e de  $\beta_{ip} = 23^\circ$ , ou seja, as pás têm comprimentos ainda menores que aqueles representados na Figura 5.21.

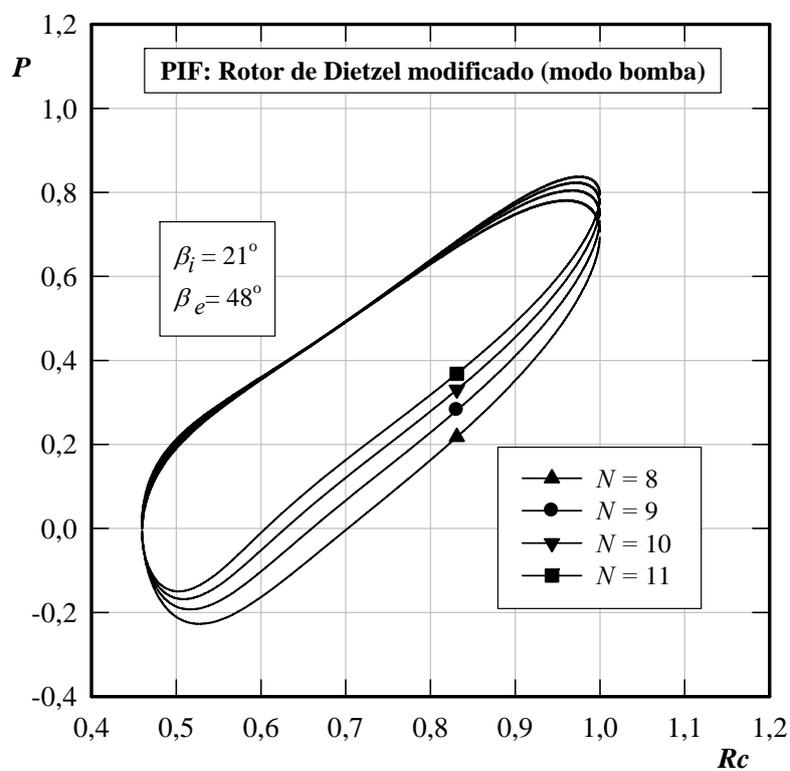


**Figura 5.23** Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 27^\circ$  e diversos ângulos  $\beta_{ep}$

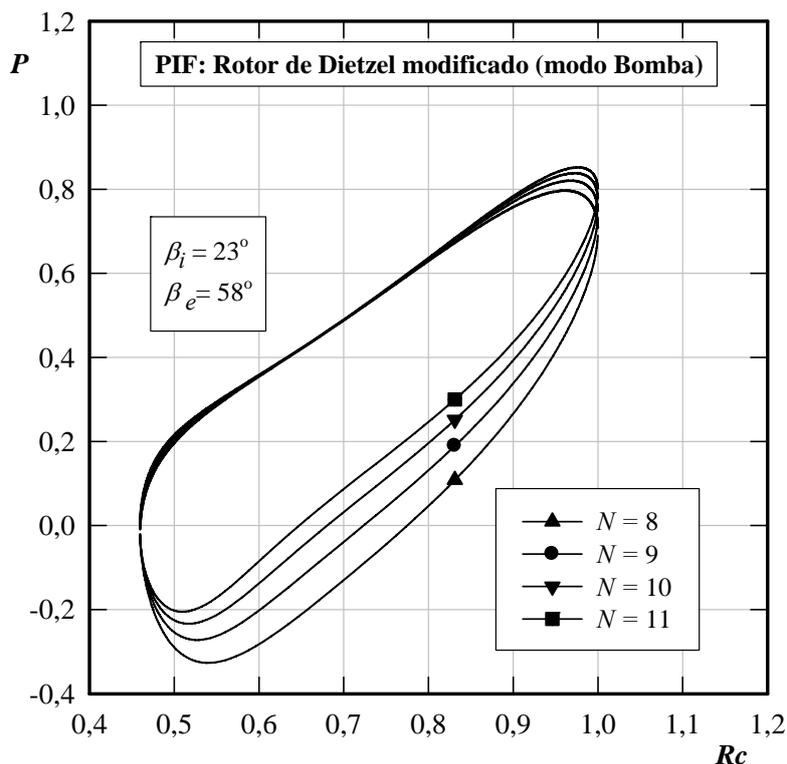
A Figura 5.24 apresenta os resultados do número de Richardson máximo,  $Ri_{m\acute{a}x}$ , em função do número de pás,  $N$ , para  $\beta_{ip} = 27^\circ$ . Observa-se que, para esse ângulo, foram obtidos  $Ri_{m\acute{a}x} < 2$  para todos os valores de  $18^\circ \leq \beta_{ep} \leq 88^\circ$  e todos os  $2 \leq N \leq 12$  analisados neste trabalho. Conclui-se que, quando se aumenta o  $\beta_{ip}$ , aumenta-se também  $\beta_{ep}$ , para o rotor radial no modo bomba. Evidentemente, os valores desses ângulos têm certos limites, por exemplo, o ângulo de entrada das pás,  $\beta_{ip}$ , no caso de bomba, não deve ser excessivo para se evitar a cavitação no ponto de projeto. A susceptibilidade de um rotor radial de bomba cavar está relacionada a vários fatores, além das propriedades do líquido a ser bombeado numa certa temperatura, entre eles a geometria do rotor (incluindo formato e ângulos das pás,  $\beta_{ip}$  e  $\beta_{ep}$ ) e o número de pás, como pode ser observado nas Figuras 5.25 e 5.26.



**Figura 5.24** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 27^\circ$



**Figura 5.25** Distribuição de pressões na superfície das pás do rotor de Dietzel modificado para  $\beta_{ip} = 21^\circ$  e  $\beta_{ep} = 48^\circ$



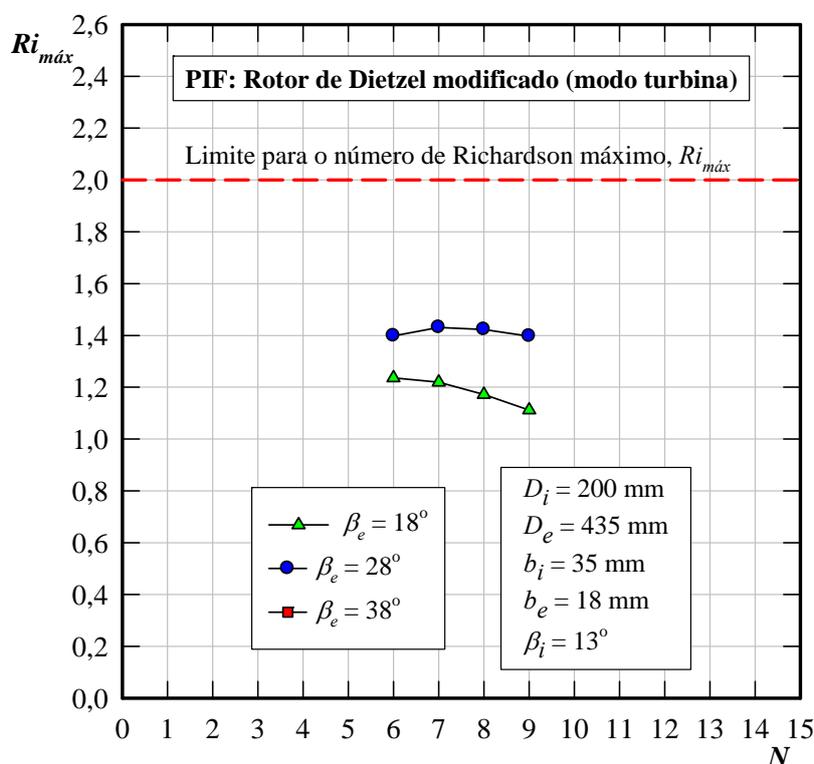
**Figura 5.26** Distribuição de pressões na superfície das pás do rotor de Dietzel modificado para  $\beta_{ip} = 23^\circ$  e  $\beta_{ep} = 58^\circ$

As Figuras 5.25 e 5.26 mostram que, aumentando os ângulos  $\beta_{ip}$  e  $\beta_{ep}$ , as pressões no lado de sucção das pás é cada vez mais negativa, podendo tornar o rotor mais susceptível à cavitação. Esse fato é mais crucial quando se aumenta o ângulo de entrada das pás,  $\beta_{ip}$ . Observa-se ainda que o nível de menor pressão do lado de sucção é cada vez menor à medida que o carregamento hidrodinâmico nas pás é maior, isto é, quando o número de pás é menor.

## 5.5 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O ROTOR DE DIETZEL MODIFICADO (MODO TURBINA)

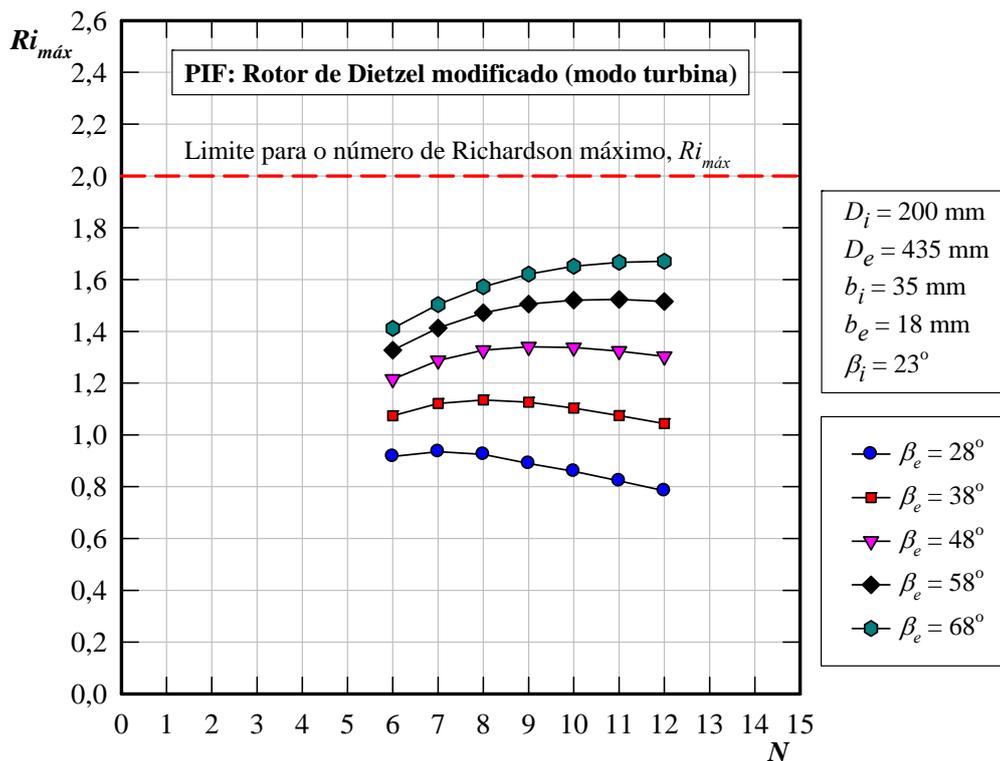
Este item apresenta os resultados numéricos para o rotor de Dietzel modificado (modo turbina). As modificações realizadas foram as mesmas descritas no início do Item 5.4. Portanto, os resultados apresentados referem-se aos rotores de Dietzel modificados operando no modo turbina. Na sequência, novamente, serão apresentados alguns resultados mais relevantes para os propósitos deste item. Outros resultados complementares estão no Apêndice D.

A Figura 5.27 apresenta os resultados do número de Richardson máximo,  $Ri_{máx}$ , em função do número de pás,  $N$ , para  $\beta_{ip} = 13^\circ$  (original) no modo turbina. Os resultados são apresentados somente para os ângulos de entrada do rotor com  $\beta_{ep} = 18^\circ$  e  $28^\circ$ , pelo fato de o  $Ri_{máx}$  (para o modo bomba) ser maior que 2 para os outros valores de  $\beta_{ep}$ , como pôde ser visto na Figura 5.20. Observa-se que, tanto para o modo bomba (rotor original) como para o modo turbina, o número ótimo de pás foi  $N^* = 7$ , para esse rotor especificamente projetado para operar apenas como bomba.

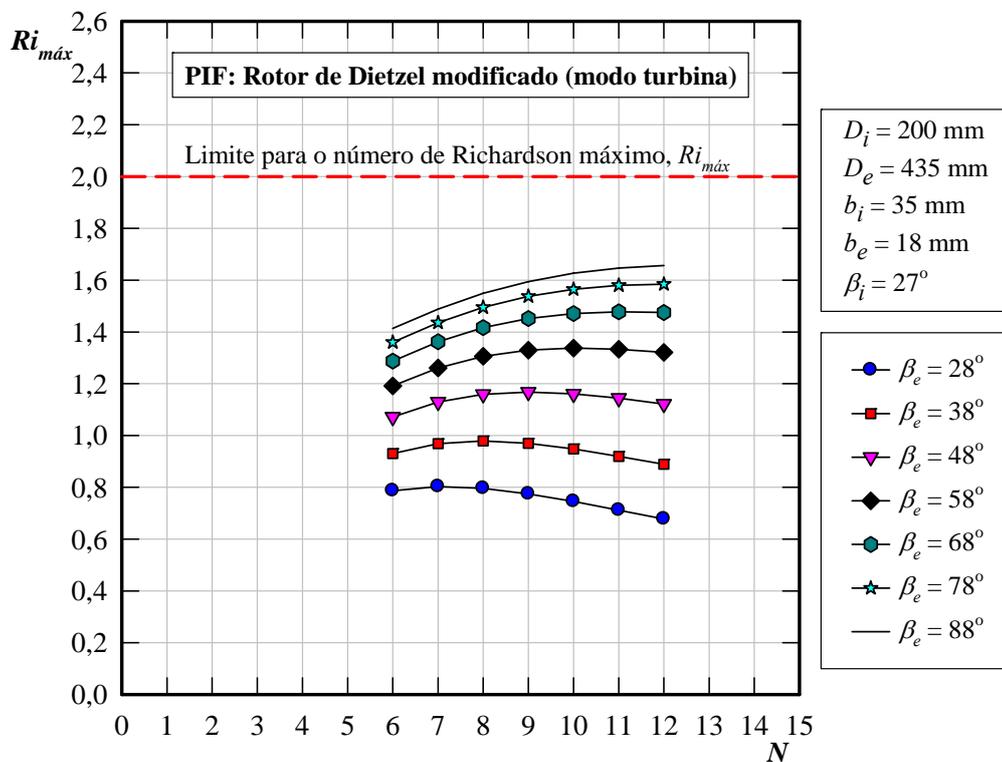


**Figura 5.27** Número de Richardson máximo em função do número de pás dos rotores de Dietzel original e modificado para pás com  $\beta_{ip} = 13^\circ$  (original) no modo turbina

A Figuras 5.28 e 5.29 apresentam os resultados do número de Richardson máximo,  $Ri_{máx}$ , em função do número de pás,  $N$ , para  $\beta_{ip} = 23^\circ$  e  $\beta_{ip} = 27^\circ$  no modo turbina. Observa-se que, para  $\beta_{ip} = 23^\circ$ , há reversão do escoamento relativo no lado de pressão da pá para  $N = 8$  quando  $\beta_{ep} = 78^\circ$ , como pôde ser visto na Figura 5.22 para o modo bomba. Também, pode ser observado na Figura 5.28 que o número de pás ótimo para  $\beta_{ep} = 48^\circ$  é  $N^* = 9$  (modo turbina) e  $N^* = 8$  (modo bomba), conforme a Figura 5.22. Nota-se ainda que os valores de  $Ri_{máx}$  para os dois modos são bem menores que 2. Para  $\beta_{ip} = 27^\circ$  (Figura 5.29) foi possível obter todos os  $Ri_{máx}$  pelo fato de não haver reversão do escoamento relativo no modo bomba.



**Figura 5.28** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 23^\circ$  no modo turbina



**Figura 5.29** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 27^\circ$  no modo turbina

## 5.6 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Alguns comentários mais relevantes foram feitos nos Itens 5.3, 5.4 e 5.5, para o rotor de Dietzel original (bomba), rotor modificado (modo bomba) e rotor modificado (modo turbina), respectivamente. Os resultados numéricos apresentados nos Itens 5.4 e 5.5 visaram principalmente à obtenção de rotores que pudessem operar eficientemente nos modos bomba e turbina. O critério do maior número de Richardson máximo,  $Ri_{máx}^*$ , para estabelecer o número ótimo de pás,  $N^*$ , independentemente do seu valor numérico, mostrou ser eficiente tanto para bombas como para turbinas operando isoladamente. O desafio, então, foi utilizar tal critério para “otimizar” rotores radiais de turbomáquinas reversíveis (bombas-turbinas) e não somente aplicar esse critério para um rotor radial apenas de bomba ou um rotor radial apenas de turbina. Por isso, foram feitas as modificações nos ângulos de entrada e saída das pás,  $\beta_{ip}$  e  $\beta_{ep}$ , e no número de pás,  $N$ . Vale ressaltar que outras modificações na geometria do rotor original poderiam ser feitas, por exemplo, nas larguras de entrada e saída das pás.

Com o intuito de encontrar um rotor (ou rotores) que pudesse apresentar boas características nos modos bomba e turbina, diversos casos foram analisados. Para efeito de comparação algumas grandezas relevantes estão apresentadas na Tabela 5.3 para o modo bomba e na Tabela 5.4 para o modo turbina. Como comentado acima, o critério do maior número de Richardson máximo,  $Ri_{máx}^*$ , é independentemente do seu valor numérico, porém, os valores de  $Ri_{máx}$  devem ser menores que 2 para não haver reversão do escoamento relativo. Dessa forma, o valor numérico de  $Ri_{máx}$  auxilia a escolha do rotor otimizado para operar eficientemente como bomba e como turbina. Por exemplo, mesmo que o número de pás ótimo seja o mesmo para os modos bomba e turbina, o valor de  $Ri_{máx}$  pode ser muito alto (próximo de 2) para o modo bomba, invalidando a escolha de tal rotor.

Da análise das Tabelas 5.3 e 5.4, um rotor radial com valores próximos de  $\beta_{ip} = 23^\circ$  e  $\beta_{ep} = 48^\circ$  poderia ser um rotor com boas características hidrodinâmicas nos modos bomba e turbina, pelos seguintes motivos: 1) o valor do  $Ri_{máx}$  para o modo bomba é bem menor que 2; 2) um ângulo próximo de  $\beta_{ip} = 23^\circ$  não é um ângulo tão grande para apresentar cavitação, nos modos bomba e turbina, no ponto de projeto; 3) um ângulo próximo de  $\beta_{ep} = 48^\circ$  é maior que aquele do rotor original projetado para operar apenas como bomba, e é um valor típico de rotores radiais de turbinas; 4) o número de pás ótimo é praticamente o mesmo para ambos os modos de operação (8 contra 9).

**Tabela 5.3** Resultados numéricos para os rotores de Dietzel original e modificado (modo bomba)

$\beta_{ip}$	$\beta_{ep}$	$N$	$\phi_B$	$\psi_B$	$R_{m\acute{a}x}$
11	18	6	0,161007	0,881364	1,468077
11	28	7	0,162685	1,093995	1,916427
13	18	6	0,177629	0,813436	1,311633
13	28	7	0,179586	1,044052	1,715438
15	18	6	0,194597	0,745490	1,177121
15	28	7	0,196903	0,993527	1,548386
15	38	8	0,202546	1,153826	1,925174
17	18	6	0,211906	0,677749	1,059529
17	28	6	0,231932	0,852914	1,407115
17	38	7	0,237533	1,041982	1,75677
19	18	6	0,229557	0,610396	0,955482
19	28	6	0,250279	0,802626	1,282236
19	38	7	0,256473	1,002413	1,616016
19	48	9	0,287186	1,076974	1,895893
21	18	7	0,234502	0,616923	0,863187
21	28	6	0,268991	0,752430	1,170548
21	38	7	0,275884	0,962489	1,490957
21	48	8	0,284035	1,121996	1,760095
21	58	10	0,275196	1,303321	1,973672
23	18	7	0,252980	0,546591	0,784412
23	28	7	0,270501	0,787427	1,070368
23	38	7	0,295789	0,922248	1,377795
23	48	8	0,304497	1,090457	1,639041
23	58	9	0,313418	1,229547	1,847815
23	68	11	0,304377	1,393635	1,999174
25	18	7	0,271913	0,476456	0,712757
25	28	7	0,290064	0,735204	0,979868
25	38	7	0,316217	0,881685	1,274684
25	48	8	0,325581	1,058440	1,528515
25	58	9	0,334999	1,205167	1,733423
25	68	10	0,343891	1,334749	1,88991
25	78	10	0,373944	1,414487	1,999149
27	18	7	0,291325	0,406570	0,647521
27	28	7	0,310142	0,682760	0,896889
27	38	7	0,337203	0,840809	1,179732
27	48	8	0,347333	1,025936	1,426518
27	58	9	0,357340	1,180295	1,627867
27	68	9	0,390389	1,265903	1,783907
27	78	10	0,397846	1,402906	1,900674
27	88	11	0,403729	1,534375	1,97835

**Tabela 5.4** Resultados numéricos para os rotores de Dietzel original e modificado (modo turbina)

$\beta_{ip}$	$\beta_{ep}$	$N$	$\phi_T$	$\psi_T$	$R_{m\acute{a}x}$
11	18	6	0,172600	0,865991	1,348605
11	28	8	0,174360	1,172402	1,585038
13	18	6	0,186329	0,804125	1,236271
13	28	7	0,208870	1,046011	1,430892
15	18	6	0,200318	0,739235	1,134542
15	28	7	0,227100	0,988981	1,304102
15	38	8	0,242160	1,172683	1,568785
17	18	6	0,213860	0,675054	1,046717
17	28	7	0,245276	0,931431	1,194889
17	38	8	0,262610	1,127219	1,438499
19	18	6	0,226959	0,614007	0,970588
19	28	7	0,263501	0,875119	1,098581
19	38	8	0,283299	1,081495	1,326278
19	48	9	0,297892	1,242127	1,551389
21	18	6	0,239581	0,557282	0,904502
21	28	7	0,281691	0,819622	1,012737
21	38	8	0,304488	1,035230	1,22513
21	48	10	0,299867	1,252697	1,440708
21	58	11	0,313014	1,385874	1,633903
23	28	7	0,299754	0,764905	0,935634
23	38	8	0,325700	0,988700	1,135108
23	48	9	0,343558	1,168988	1,340495
23	58	11	0,336468	1,358928	1,523005
23	68	12	0,349153	1,485057	1,670382
25	28	7	0,317670	0,711105	0,865978
25	38	8	0,347047	0,942230	1,054147
25	48	9	0,367140	1,131641	1,250843
25	58	10	0,383282	1,292005	1,425282
25	68	12	0,374209	1,465754	1,568327
25	78	12	0,409431	1,570272	1,675214
27	28	7	0,335436	0,658458	0,80279
27	38	8	0,368771	0,895488	0,978861
27	48	9	0,391299	1,093521	1,167616
27	58	10	0,409047	1,262749	1,33733
27	68	11	0,424039	1,414532	1,477582
27	78	12	0,437453	1,557893	1,584703
27	88	12	0,478987	1,681879	1,656746

## Capítulo 6

# CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste capítulo, são apresentadas as principais conclusões extraídas deste trabalho. Algumas sugestões para trabalhos futuros são descritas para o cálculo do escoamento em rotores radiais operando tanto no modo bomba como no modo turbina (bombas-tubinas) e também para o cálculo do escoamento em rotores de bombas funcionando como turbinas.

## 6.1 CONCLUSÕES

No Capítulo 1, foram apresentadas duas informações importantes extraídas da literatura que serviram de motivação para a realização deste trabalho: 1) o cálculo do escoamento potencial é efetivamente válido no sentido de representar certas características do escoamento real em rotores radiais de turbomáquinas geradoras para certas condições. Essas condições são válidas para rotores radiais com ângulos de saída das pás menores que  $90^\circ$ , típicos de bombas hidráulicas, e para o ponto de projeto (ponto de operação correspondente à incidência ótima ou ponto de vazão sem choque); 2) O critério de carregamento hidrodinâmico, denominado número de Richardson, obtido pelo cálculo do escoamento potencial, é efetivamente válido para se determinar o número de pás ótimo de rotores radiais de turbomáquinas geradoras de bons desempenhos. Essas duas informações serviram de estímulo no sentido de estendê-las para o caso de rotores radiais de turbomáquinas motoras (turbinas hidráulicas).

No Capítulo 2, foram apresentadas três formulações para o cálculo do escoamento potencial em rotores radiais de turbomáquinas hidráulicas, sendo uma formulação para pás de espessura finita (PEF) e duas para pás infinitamente finas (PIF). Uma das formulações para PIF (formulação clássica por meio de singularidades) considera cada pá do rotor como um corpo, implicando que o tempo computacional depende do número de pás. A outra formulação para PIF, devido à periodicidade do escoamento no rotor, considera apenas uma pá (pá de referência) com influência das demais, por meio da função-núcleo da equação integral de Fredholm de primeira espécie. Essa formulação está devidamente detalhada no Apêndice B, e é importante para determinar certas características de interesse do escoamento potencial quando comparadas com a formulação clássica para PIF, conforme será comentado no Item 6.2. A formulação para PEF, também devido à periodicidade do escoamento no rotor, considera apenas uma pá (pá de referência) com influência das demais, por meio de outra função-núcleo referente à equação integral de Fredholm de segunda espécie. Essa formulação também está devidamente detalhada no Apêndice A. Para essas duas últimas formulações, o tempo computacional independe do número de pás.

No Capítulo 3, foram apresentadas as soluções numéricas, por meio do método dos painéis, correspondentes às equações integrais resultantes das formulações apresentadas no Capítulo 2. Inicialmente, foram descritas as técnicas de discretização do contorno das PEF e da linha representativa das PIF. A geração da geometria das PEF e das PIF utilizadas neste trabalho está apresentada no Apêndice C. Nessa técnica de discretização, foi utilizada uma série (progressão) geométrica cujo quociente (fator de discretização) controla a distribuição dos painéis para um número fixo de painéis. Com isso, pode-se facilmente concentrar mais painéis nas regiões de maiores gradientes das grandezas a serem determinadas, que são as regiões próximas aos bordos de ataque e de fuga das pás.

Para o caso de PEF, o contorno das pás foi discretizado em painéis retos no plano físico (plano da grade radial (GR)) e, por meio de uma equação de transformação, foi mapeado no plano da grade linear (GL). Nesse plano, foi admitida uma distribuição uniforme de densidade de vórtices em cada painel. Para o plano da GL, foi formado um sistema de equações algébricas lineares (EAL) resultante dos seis termos da equação de Fredholm de segunda espécie na forma discretizada. Da solução desse sistema, após aplicar as condições complementares, foi obtida a densidade de vórtices em cada painel no plano da GL.

Para o caso de PIF, a linha representativa das pás foi discretizada também em painéis retos no plano físico (plano da grade radial), mas nenhum mapeamento no plano da GL foi realizado. Uma distribuição linear de densidade de vórtices foi admitida em cada painel. Essa

distribuição linear facilitou a imposição das condições complementares (condições de Kutta e de vazão sem choque). Para o plano da GR, foi formado um sistema de EAL resultante da combinação das singularidades (fonte (B) ou sumidouro (T) e vórtice no centro da GR e vórtices na linha representativa das pás) referentes à formulação clássica. Da solução desse sistema, após aplicar as condições complementares, foi obtida a densidade de vórtices nas extremidades de cada painel no plano da GR. A solução numérica referente à formulação clássica para o cálculo do escoamento potencial em rotores radiais de bombas foi devidamente modificado com o intuito de realizar tal cálculo para rotores radiais de turbinas hidráulicas.

No Capítulo 4, foram apresentadas diversas grandezas locais e globais de interesse. No caso de PEF, a densidade uniforme de vórtices em cada painel, obtida no plano da GL, foi devidamente transformada para o plano da GR por meio de uma equação de transformação. Uma das grandezas locais importantes está relacionada ao carregamento hidrodinâmico das pás. Essa grandeza, denominada número de Richardson,  $Ri$ , foi utilizada como critério para se obter o número de pás ótimo para rotores de turbomáquinas radiais geradoras, com base no número de Richardson máximo,  $Ri_{máx}$ . Foi ressaltado que o critério do  $Ri_{máx}$  é independente do seu valor numérico, ou seja, o número de pás ótimo é obtido para o maior valor de  $Ri$  quando o número de pás é mudado, uma vez que, além do número de pás o  $Ri$  depende também da geometria do rotor analisado. A única ressalva feita se refere ao valor máximo de  $Ri$  que deve ser igual a 2. Valores de  $Ri$  maiores que 2 indicam que há reversão do escoamento relativo no lado de pressão das pás. Tal reversão, que já se realiza no ponto de projeto, indica que o rotor não apresentará um bom desempenho hidrodinâmico. O critério do número de Richardson máximo,  $Ri_{máx}$ , foi estendido no sentido de se obter também o número de pás ótimo para rotores de turbomáquinas radiais motoras (turbinas hidráulicas).

No Capítulo 5, foram apresentados diversos resultados numéricos referentes a rotores de bombas, rotores de bombas operando como rotores de turbinas e rotores de bombas-turbinas. Outros resultados numéricos de interesse estão apresentados no Apêndice D. Inicialmente, com base em diversos resultados numéricos obtidos para rotores de bombas, foi comentada a possibilidade de estender o critério do  $Ri_{máx}$  para rotores de turbinas hidráulicas. Além disso, foi mencionada a possibilidade de o  $Ri_{máx}$  também poder “otimizar” a geometria de rotores radiais que operem com bons desempenhos tanto no modo bomba como no modo turbina.

Os resultados numéricos para PEF, quando comparados com aqueles para PIF, mostraram que considerar a espessura das pás é menos importante do que considerar a variação de larguras das pás. Isso se deve ao fato de que a espessura das pás de rotores radiais, tanto de bombas como de turbinas, é relativamente pequena, quando comparada com a maior dimen-

são do rotor que é o seu diâmetro externo. Já a variação de larguras das pás aparece sempre em rotores radiais de turbomáquinas hidráulicas (bombas e turbinas) onde o critério de velocidades meridionais iguais (ou aproximadamente iguais) na entrada e na saída das pás é considerado no projeto hidrodinâmico desses rotores. Portanto, nesses casos, a variação de larguras não pode ser desprezada. Por esses motivos, que foram observados na aferição dos modelos computacionais, e também pelos propósitos do presente trabalho, os demais resultados numéricos do Capítulo 5 foram obtidos apenas para o caso de PIF.

Devido à dificuldade de se obter na literatura todos os dados geométricos de rotores radiais, principalmente de rotores de turbinas hidráulicas, para gerar a geometria e posterior análise e comparação das características hidrodinâmicas dos rotores, foi analisado apenas o rotor radial de bomba de Dietzel (1980). Esse rotor foi modificado, no intuito de verificar se há um rotor que possa apresentar bom desempenho hidrodinâmico tanto para o modo bomba como para o modo turbina, utilizando o critério do  $Ri_{máx}$ . O rotor original de Dietzel foi modificado, mantendo-se a mesma geometria da seção meridional original e o mesmo formato em arco de círculo das pás. Diversos números de pás e ângulos de entrada e de saída das pás foram modificados em relação àqueles do rotor original.

Os resultados numéricos para esses rotores modificados mostraram que é possível obter um rotor radial hidraulicamente eficiente que pode operar tanto no modo bomba como no modo turbina utilizando o critério do  $Ri_{máx}$ . Evidentemente, mais análises devem ser feitas para rotores radiais de turbinas hidráulicas e de rotores radiais de bombas-turbinas, com a finalidade de comprovar efetivamente a eficácia do critério do  $Ri_{máx}$ .

## 6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este item apresenta algumas sugestões para trabalhos futuros, focando principalmente no cálculo do escoamento potencial e na utilização do critério do  $Ri_{máx}$  em rotores radiais de turbinas hidráulicas e de bombas operando nos modos bomba e turbina.

### **a) Influência da geometria das pás nas características de desempenho de rotores radiais operando nos modos bomba e turbina**

A geometria das pás tem influência importante no desempenho hidrodinâmico de rotores radiais por causa do formato das pás e da distribuição de espessura ao longo do seu com-

primimento. Geralmente, as pás de bombas têm espessura constante (a menos da região próxima ao bordo de ataque) e sua periferia externa (bordo de fuga) geralmente é chanfrada, ou seja, tal periferia tem o mesmo diâmetro externo do rotor. Quando o rotor de bomba opera como rotor de turbina, a periferia externa das pás passa a ser o bordo de ataque. Então, a região próxima a esse bordo de ataque não é apropriada para receber o escoamento oriundo da voluta e deve ser devidamente modificada. Dessa forma, a formulação para PEF apresentada no Capítulo 2 é útil para uma análise preliminar, por meio do cálculo do escoamento potencial. A modificação na geometria poderia ser realizada não só na região próxima ao bordo de fuga, mas também próxima ao bordo de ataque (ambos para bomba). A modificação na região próxima ao bordo de fuga melhoraria as condições de entrada do escoamento no modo turbina, ao passo que a modificação na região próxima ao bordo de ataque poderia diminuir ou evitar os efeitos da cavitação. O critério do  $Ri_{máx}$  poderia ser utilizado para estabelecer o número de pás ótimo de acordo com as modificações realizadas na geometria.

### **b) Características hidrodinâmicas de rotores radiais com pás auxiliares operando nos modos bomba e turbina**

A formulação clássica por meio de singularidades apresentada no Capítulo 2 para PIF poderia ser facilmente estendida para incorporar um ou mais conjuntos de pás auxiliares (pás com comprimentos menores que os das pás principais) intercalados no conjunto de pás principais. Um rotor com pás auxiliares melhora diversas características hidrodinâmicas. Uma dessas características é o aumento da faixa de operação (sem problemas de cavitação e sem decaimento muito grande do rendimento (eficiência) global). Isso poderia ser feito para analisar rotores radiais nos modos bomba e turbina. A posição circunferencial e o comprimento das pás auxiliares seriam dois parâmetros importantes para estabelecer o melhor desempenho possível do rotor em ambos os modos de operação. O desafio seria encontrar um critério (baseado no cálculo do escoamento potencial) para estabelecer, pelo menos em termos aproximados, a posição circunferencial e o comprimento das pás auxiliares, antes de se utilizar um procedimento baseado em técnicas de dinâmica dos fluidos computacional e de otimização numérica para definir o melhor valor desses dois parâmetros mencionados.

### **c) Análise comparativa das formulações para pás infinitamente finas**

Uma das formulações para PIF (formulação clássica por meio de singularidades) considera cada pá do rotor como um corpo, denominada aqui de PIF<sub>1</sub>. A outra formulação, devido à

periodicidade do escoamento no rotor, considera apenas uma pá (pá de referência) com influência das demais, através da função-núcleo da equação integral de Fredholm de primeira espécie, denominada aqui de PIF<sub>2</sub>. Quando o número de pás é finito, como é sabido, resulta o chamado fator de deficiência de potência (*slip factor*) menor que 1, que implica num ângulo do escoamento relativo menor que o ângulo da pá na saída. Ainda para número de pás finito, o ângulo do escoamento relativo é maior que o ângulo da pá na entrada para a condição de incidência ótima (vazão sem choque) e pré-rotação nula. Portanto, só existe um ponto sobre a pá onde o ângulo do escoamento relativo é igual ao ângulo da pá no intervalo  $r_i \leq r \leq r_e$ , independentemente do formato e do número de pás (nesse caso,  $N < \infty$ ). Porém, quando o número de pás tende a infinito, também é sabido que o escoamento relativo tende a se tornar tangente à pá em toda a sua extensão, implicando que o ângulo do escoamento relativo tende ao ângulo da pá em qualquer ponto da pá ( $r_i \leq r \leq r_e$ ).

Na formulação PIF<sub>1</sub>, para um número de painéis,  $M$ , fixo, quando  $N \rightarrow \infty$ , o ângulo do escoamento relativo tende ao ângulo da pá apenas para a entrada e saída da pá. Nas demais posições ( $r_i < r < r_e$ ) esses ângulos não tendem a se igualar, mas são mais próximos entre si nas regiões mais próximas aos bordos de ataque e de fuga da pá. Isso se deve a dois fatores: 1) as pás estão infinitamente próximas entre si e, em consequência, a distância entre os pontos de controle de duas pás consecutivas é infinitamente menor que o comprimento dos respectivos painéis; 2) o fator de discretização ( $q_{sg} > 1$ ) faz com que painéis menores se concentrem nas regiões mais próximas aos bordos de ataque e de fuga e, em consequência, painéis maiores sejam distribuídos na região mais central das pás. Essa situação poderia ser resolvida de duas maneiras: 1) ou aumenta-se o número de painéis ( $M \rightarrow \infty$ ) diminuindo o fator de discretização ( $q_{sg} \rightarrow 1$ ), que é praticamente inviável ou 2) ou utiliza-se a formulação PIF<sub>2</sub> apresentada no Apêndice B.

#### **d) Análise da interação rotor, estator e voluta de turbomáquinas radiais**

Como um passo a mais no sentido de analisar o escoamento potencial em turbomáquinas radiais (com dois componentes (rotor e estator) ou mesmo com três (rotor, estator e voluta)) e não apenas um componente (rotor) isolado como foi feito no presente trabalho, as formulações apresentadas no Capítulo 2 poderiam ser estendidas. A solução numérica das equações também poderia ser obtida por meio do método dos painéis.

Uma primeira sugestão seria o cálculo do escoamento potencial para os componentes rotor e estator (difusor, no caso de bombas, ou pré-distribuidor e distribuidor, no caso de tur-

binas). Esse cálculo poderia ser feito com base em qualquer das três formulações apresentadas no Capítulo 2. Outra sugestão seria incorporar a voluta (caixa espiral, no caso de turbinas). No caso de voluta, necessitaria de outra formulação para calcular o escoamento potencial interagindo com o escoamento no rotor. Essa análise seria de grande utilidade, no sentido de se obter uma pré-geometria “otimizada”, baseada em critérios de carregamento, para posterior otimização da geometria dessa turbomáquina por meio de técnicas de dinâmica dos fluidos computacional e de otimização numérica.

## Apêndice A

# FORMULAÇÃO INTEGRAL DO ESCOAMENTO POTENCIAL PARA ROTORES CENTRÍFUGOS COM PÁS DE ESPESSURA FINITA

Uma formulação integral do escoamento potencial é apresentada para o cálculo das velocidades relativas no contorno das pás de espessura finita de rotores centrífugos. Essas velocidades relativas correspondem a uma distribuição de vórtices no contorno das pás. Inicialmente, esse cálculo é obtido no plano transformado, ou seja, o rotor centrífugo (grade radial móvel) que representa o plano físico é mapeado para o plano transformado (grade linear móvel). Em seguida, essas velocidades relativas são transformadas para o plano da grade radial móvel por meio de uma equação de transformação. A formulação apresentada permite obter as características do escoamento potencial para uma geometria qualquer de rotor centrífugo, incluindo também a variação da largura das pás. Por meio da equação da continuidade, essa variação de largura é tratada de uma maneira aproximada, obtendo-se, dessa forma, uma formulação integral linear exclusivamente de contorno, evitando-se procedimentos iterativos.

Este apêndice está dividido em três itens principais: A.1) Equações do escoamento para os planos físico e transformado, onde são apresentadas as equações diferenciais do escoamento e as equações de transformação, tanto da geometria como do escoamento no rotor; A.2) Determinação do campo de velocidades do escoamento potencial para o plano

transformado, onde é apresentado, por meio do teorema integral de Green, o desenvolvimento para transformar a equação diferencial (equação do tipo Poisson) do escoamento absoluto em equação integral (equações de Fredholm de primeira e de segunda espécies) do escoamento relativo no contorno dos perfis (pás); A.3) Equações complementares, onde é apresentado o desenvolvimento, com base na equação da continuidade, para tratar as integrais de domínio onde aparecem na formulação apresentada no Item A.2.

## A.1 EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO PARA OS PLANOS FÍSICO E TRANSFORMADO

### A.1.1 Equações diferenciais do escoamento

As Figuras A.1 e A.2 apresentam os esquemas de uma grade radial e de uma grade linear, ambas dotadas de rotação e de largura das pás,  $b = b(r)$ , variável, respectivamente, no plano físico e no plano transformado. O escoamento absoluto através da grade radial é considerado irrotacional e incompressível, ou seja, potencial. As superfícies de corrente do escoamento são consideradas axialmente simétricas, de modo que o escoamento sobre essas superfícies possa ser tratado como bidimensional.

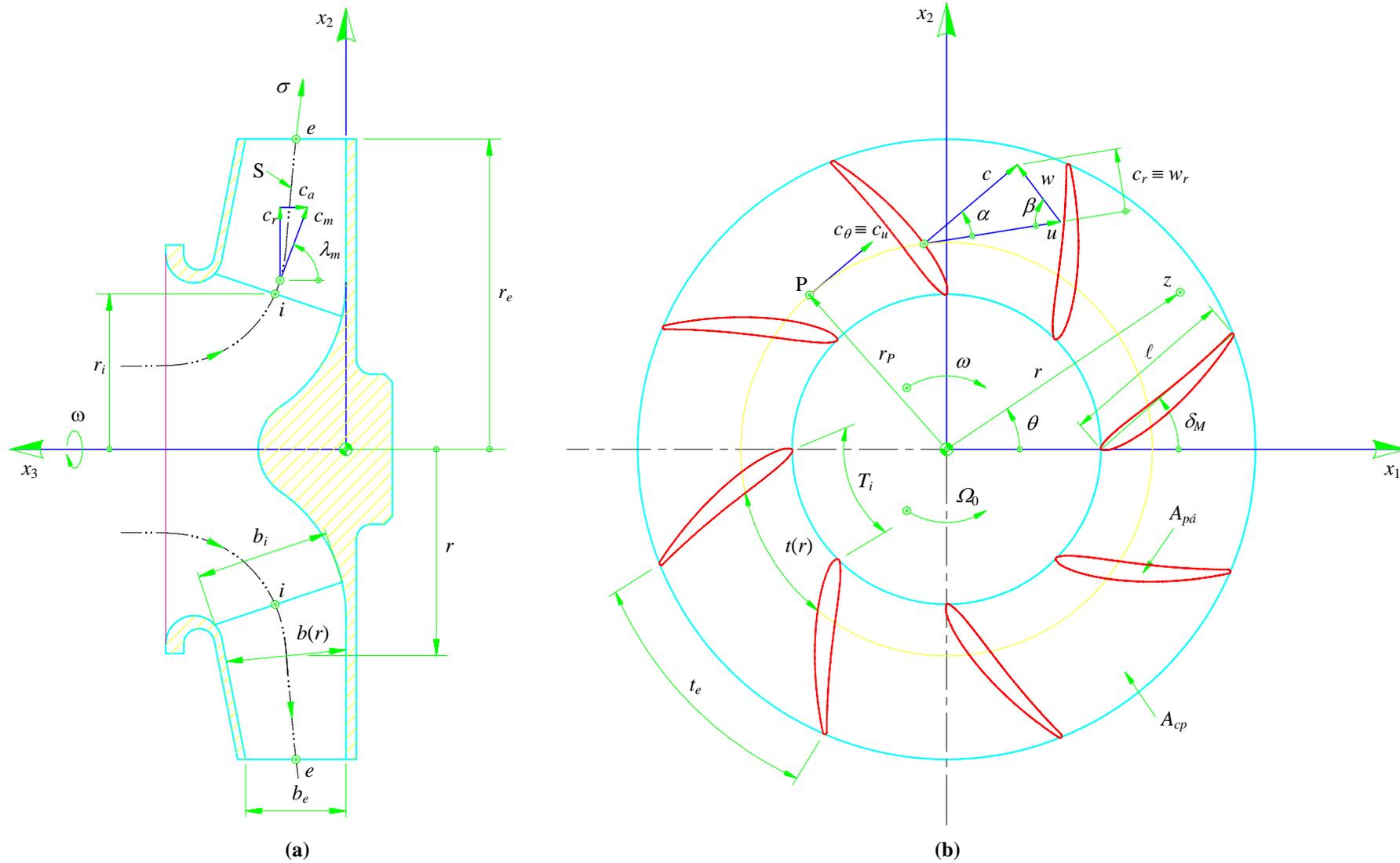
A equação da continuidade do escoamento absoluto,  $c$ , para o plano físico, segundo Nyiri (1970), é dada por

$$\frac{\partial c_\sigma}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_\theta}{\partial \theta} + \left( \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} + \frac{1}{b} \frac{db}{d\sigma} \right) c_\sigma = 0, \quad (\text{A.1})$$

e a equação da irrotacionalidade do escoamento absoluto é dada por

$$\frac{\partial c_\theta}{\partial \sigma} - \frac{1}{r} \frac{\partial c_\sigma}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} c_\theta = 0. \quad (\text{A.2})$$

As Equações (A.1) e (A.2) podem ser escritas em função das componentes das velocidades do escoamento relativo,  $w_\sigma$  e  $w_\theta$ . Para uma turbomáquina estacionária (fixada numa estrutura sem movimento de translação), se o rotor gira com uma velocidade angular,  $\omega$ , a velocidade absoluta,  $c$ , é relacionada à velocidade relativa,  $w$ , pela equação



**Figura A.1** Grade radial móvel (plano físico) com pás de espessura finita e de largura variável: (a) seção meridional e (b) seção transversal (Oliveira, 2001)



$$\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}. \quad (\text{A.3})$$

A velocidade circunferencial,  $\vec{u}$ , é dada por

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}_p, \quad (\text{A.4})$$

sendo  $\vec{r}_p$  é o vetor-posição de uma particular escoando no interior do rotor, e  $\vec{\omega}$  é o vetor referente à velocidade angular do rotor, conforme a Figura A.1, dirigido segundo o eixo  $x_3$ , portanto,

$$u_\sigma = 0 \quad (\text{A.5})$$

e

$$u_\theta = -r(\sigma)\omega. \quad (\text{A.6})$$

Considerando as Equações (A.3), (A.5) e (A.6), as Equações (A.1) e (A.2) tornam-se

$$\frac{\partial w_\sigma}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \left( \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} + \frac{1}{b} \frac{db}{d\sigma} \right) w_\sigma = 0 \quad (\text{A.7})$$

e

$$\frac{\partial w_\theta}{\partial \sigma} - \frac{1}{r} \frac{\partial w_\sigma}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} w_\theta = -2\omega \frac{dr}{d\sigma}. \quad (\text{A.8})$$

## A.1.2 Transformação do escoamento

A superfície do escoamento (S) no plano físico (Figura A.1) é mapeada para o plano transformado (Figura A.2). A transformação procurada é da forma  $x = x(\sigma)$  e  $y = y(\theta)$ . Considerando  $f(P)$  como sendo a função de transformação, pode-se escrever que

$$d\sigma = f(P)dx \quad (\text{A.9.a})$$

e

$$r(\sigma)d\theta = f(P)dy, \quad (\text{A.9.b})$$

e sendo

$$dx = \dot{x}(\sigma)d\sigma \quad (\text{A.10.a})$$

e

$$dy = \dot{y}(\theta)d\theta. \quad (\text{A.10.b})$$

Considerando as Equações (A.9.a-b) e (A.10.a-b), obtém-se

$$f(P) = \frac{1}{\dot{x}(\sigma)} = \frac{r(\sigma)}{\dot{y}(\theta)}. \quad (\text{A.11})$$

A igualdade anterior só pode ser verificada se  $\dot{y}(\theta)$  for constante, portanto,

$$y = K\theta + k' \quad (\text{A.12.a})$$

e

$$x = K \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{r} + k''. \quad (\text{A.12.b})$$

A transformação anterior conserva os ângulos, visto que,

$$\text{tg}\alpha = \frac{r(\sigma)d\theta}{d\sigma} = \frac{dy}{dx}. \quad (\text{A.13})$$

A constante de integração  $k'$  é igual a zero se  $y = 0$  para  $\theta = 0$ .

O passo  $t$ , na grade linear, obtém-se por acréscimo igual a  $2\pi/N$  do ângulo  $\theta$ , ou seja,

$$t = K \frac{2\pi}{N}, \quad (\text{A.14})$$

obtendo-se

$$K = \frac{Nt}{2\pi}. \quad (\text{A.15})$$

Conforme a Figura A.2,  $h$  é a dimensão da grade linear na direção  $x$ . Posicionando a grade linear em  $x = 0$  (bordo de ataque) e  $x = l \cos\lambda = h$  (bordo de fuga) e considerando

$$a_L = \int_0^{\sigma_L} \frac{d\sigma}{r}, \quad (\text{A.16})$$

obtém-se

$$0 = 0 + k'' \quad (\text{A.17.a})$$

e

$$h = K a_L + k'' . \quad (\text{A.17.b})$$

Da Equação (A.17.a),  $k'' = 0$ , resultando da Equação (A.17.b) que

$$h = \frac{N t}{2\pi} a_L . \quad (\text{A.18})$$

Como  $h = l \cos \lambda$ , resulta, da Equação (A.18)

$$t = \frac{2\pi l \cos \lambda}{N a_L} . \quad (\text{A.19})$$

Considerando as Equações (A.15) e (A.17.a), a Equação (A.12.b) torna-se

$$x = \frac{N t}{2\pi} \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{r(\sigma)} , \quad (\text{A.20.a})$$

e, considerando a Equação (A.19), a equação anterior torna-se

$$x = \frac{l \cos \lambda}{a_L} \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{r(\sigma)} . \quad (\text{A.20.b})$$

Considerando a Equação (A.15) e sendo  $k' = 0$ , a Equação (A.12.a) torna-se

$$y = \frac{N t}{2\pi} \theta , \quad (\text{A.21.a})$$

e, considerando a Equação (A.19), a equação anterior torna-se

$$y = \frac{l \cos \lambda}{a_L} \theta , \quad (\text{A.21.b})$$

sendo

$$\cos \lambda = \frac{a_L}{\sqrt{a_L^2 + \theta_L^2}}. \quad (\text{A.22})$$

A transformação de velocidades do plano físico,  $c_R$ , para o plano transformado,  $c$ , é dada por

$$c_{GL} = c_{GR} \frac{dl_{GR}}{dl_{GL}}. \quad (\text{A.23})$$

Sendo

$$dl_{GR} = \sqrt{(d\sigma)^2 + (r d\theta)^2} \quad (\text{A.24.a})$$

e

$$dl_{GL} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \quad (\text{A.24.b})$$

Considerando as Equações (A.20.a), (A.21.a), (A.24.a) e (A.24.b), a Equação (A.23), que estabelece a transformação entre os planos físico e transformado, torna-se

$$c_{GL} = \frac{2\pi r}{Nt} c_{GR}. \quad (\text{A.25})$$

Considerando a equação de transformação anterior, as equações do escoamento absoluto para o plano físico, Equações (A.1) e (A.2), são escritas para o plano transformado conforme as Equações (A.26) e (A.27).

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = -\frac{1}{b} \frac{db}{dx} c_x \quad (\text{A.26})$$

e

$$\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.27})$$

O escoamento absoluto no plano transformado, conforme a Equação (A.27), é irrotacional, porque foi considerado irrotacional o escoamento absoluto no plano físico.

Considerando a Equação (A.10), as equações do escoamento relativo para o plano físico, Equações (A.7) e (A.8), são escritas para o plano transformado na seguinte forma:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{1}{b} \frac{db}{dx} w_x \quad (\text{A.28})$$

e

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} = -2\omega r \frac{dr}{dx} \frac{2\pi}{Nt}. \quad (\text{A.29})$$

### Grade linear:

No caso particular de um escoamento puramente axial,  $b$  e  $r$  são constantes. Neste caso, as Equações (A.16), (A.20.b) e (A.21.b) tornam-se, respectivamente,

$$a_L = \frac{\sigma_L}{r}, \quad (\text{A.30})$$

$$x = l \cos \lambda \frac{\sigma}{\sigma_L}, \quad (\text{A.31.a})$$

e

$$y = l \cos \lambda \frac{r\theta}{\sigma_L}. \quad (\text{A.31.b})$$

Escolhendo um fator de escala tal que  $l = \sqrt{(\sigma_L)^2 + (r\theta_L)^2}$ , isto é,  $l \cos \lambda = \sigma_L$ , resulta das Equações (A.31.a) e (A.31.b) que

$$x = \sigma \quad (\text{A.32.a})$$

e

$$y = r\theta. \quad (\text{A.32.b})$$

O passo  $t$ , conforme a Equação (A.19), torna-se

$$t = \frac{2\pi r}{N}. \quad (\text{A.33})$$

Considerando as Equações (A.25) e (A.33), a velocidade no plano físico é igual à velocidade no plano transformado, ou seja,

$$c_{GL} = c_{GR}. \quad (\text{A.34})$$

Como  $b$  e  $r$  são constantes, as Equações (A.28) e (A.29) tornam-se

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.35})$$

e

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.36})$$

### Grade puramente radial:

No caso de um escoamento puramente radial,  $b$  é constante e  $r$  é variável. Neste caso, a coordenada natural  $\sigma$  é idêntica à  $r$ , portanto, resulta da Equação (A.16) que

$$a_L = \ln \frac{r_e}{r_i}. \quad (\text{A.37})$$

A Equação (A.19) torna-se

$$t = \frac{2\pi l \cos \lambda}{N \ln \frac{r_e}{r_i}}. \quad (\text{A.38})$$

Das Equações (A.20.a) e (A.20.b), resultam

$$x = \frac{Nt}{2\pi} \ln \frac{r}{r_i} \quad (\text{A.39.a})$$

e

$$x = l \cos \lambda \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_e}{r_i}}. \quad (\text{A.39.b})$$

Das Equações (A.21.a) e (A.21.b), resultam

$$y = \frac{Nt}{2\pi} \theta \quad (\text{A.40.a})$$

e

$$y = l \cos \lambda \frac{\theta}{\ln \frac{r_e}{r_i}}. \quad (\text{A.40.b})$$

Considerando as Equações (A.25) e (A.38), a velocidade no plano físico é relacionada à velocidade no plano transformado pela equação

$$c_{GL} = \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{l \cos \lambda} r c_{GR}. \quad (\text{A.41})$$

Como  $b$  é constante, as Equações (A.26) e (A.27) tornam-se

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.42})$$

e

$$\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.43})$$

## A.2 DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADES DO ESCOAMENTO POTENCIAL PARA O PLANO TRANSFORMADO

### A.2.1 Obtenção da equação integral por meio da segunda identidade de Green

O campo de velocidades do escoamento potencial no plano transformado (grade linear móvel) deriva de um potencial de velocidade,  $\Phi(x,y)$ . Pode ser demonstrado através de um balanço volumétrico num elemento diferencial de fluido escoando na grade linear que, para um escoamento absoluto incompressível e irrotacional, obtém-se a equação do tipo Poisson representada na Equação (A.44).

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = B(x) c_x(x, y) \quad (\text{A.44})$$

sendo

$$B(x) = -\frac{1}{b(x)} \frac{db(x)}{dx}. \quad (\text{A.45})$$

As condições de contorno para o potencial de velocidades, conforme a Figura A.2, são

$$\text{Infinito à montante da grade: } \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=-\infty} = c_{i'x} \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{x=-\infty} = c_{i'y}, \quad (\text{A.46.a})$$

$$\text{Infinito à jusante da grade: } \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=+\infty} = c_{e'x} \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{x=+\infty} = c_{e'y}, \quad (\text{A.46.b})$$

e

$$\text{Contorno do perfil } (\kappa): \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{(\kappa)} = w_n|_{(\kappa)} = 0. \quad (\text{A.46.c})$$

A solução da Equação (A.44), satisfazendo as condições de contorno, é determinada através do teorema integral de Green, de acordo com a segunda identidade de Green, ou seja,

$$\iint_{(D)} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dx' dy' + \oint_{(C)} \left( u \frac{\partial v}{\partial n'} - v \frac{\partial u}{\partial n'} \right) ds' = 0, \quad (\text{A.47})$$

sendo  $u(x', y')$  e  $v(x', y')$  duas funções cujas primeiras derivadas são contínuas em um domínio simplesmente conexo (D) e sobre a sua fronteira (C);  $\partial/\partial n'$  significa a derivada normal interior (por definição, a normal exterior é oposta) e  $s'$  é o comprimento da linha ao longo da fronteira (C).

Seja M o ponto de coordenadas  $x'$  e  $y'$ , e, P um ponto de coordenadas  $x$  e  $y$ , tal que

$$MP = d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}. \quad (\text{A.48})$$

A função  $\ln d$  é harmônica e regular em todo ponto M diferente de P, e pode ser verificado facilmente que  $\nabla^2 (\ln d) = 0$ .

### a) Ponto P interior ao domínio (D)

Considere  $(D_R)$  um domínio genérico definido pelo círculo  $(C_R)$  de centro em P e raio  $R$ , Figura A.3. Aplicando o teorema integral de Green, Equação (A.47), às funções  $\phi$  e  $\ln d$  no domínio  $(D - D_R)$ , obtém-se

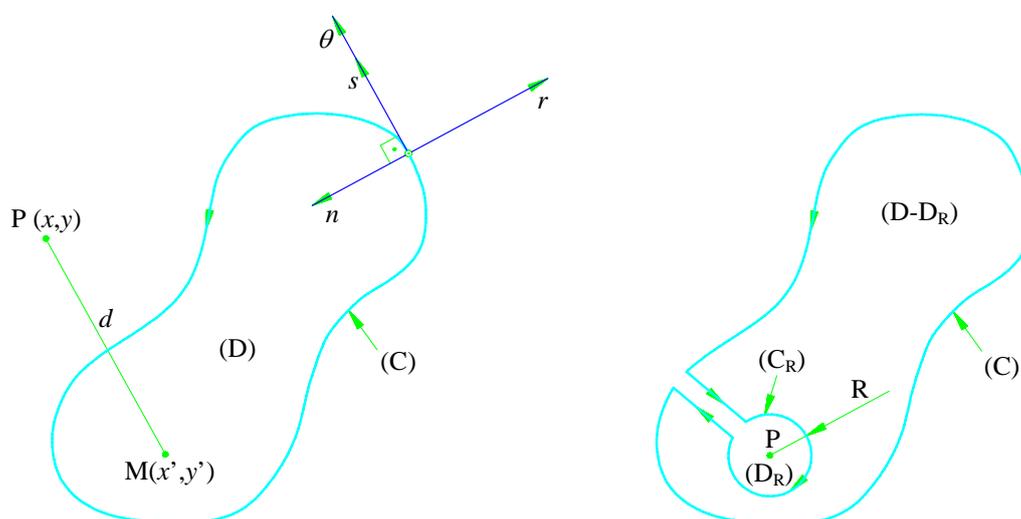
$$\iint_{(D-D_R)} (\ln d) \nabla^2 \Phi \, dx' dy' = \oint_{(C)} \left[ \Phi \frac{\partial}{\partial n'} (\ln d) - (\ln d) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] ds' + \oint_{(C_R)} \left[ \Phi \frac{\partial}{\partial R} (\ln R) - (\ln R) \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right] ds_R. \quad (\text{A.49})$$

A integral de domínio e a primeira integral do lado direito da Equação (A.49) são independentes de  $R$ , em consequência, a segunda integral do lado direito também é independente de  $R$  e é igual ao seu limite quando  $R \rightarrow 0$ . Fazendo, na segunda integral do lado direito  $R$  tão pequeno de tal modo que  $\Phi = \Phi(P)$  no círculo  $(C_R)$ , obtém-se

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[ \frac{\Phi(P)}{R} - (\ln R) \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right] 2\pi R = 2\pi \Phi(P). \quad (\text{A.50})$$

Portanto, a Equação (A.49) torna-se

$$2\pi \Phi(P) = \iint_{(D)} (\ln d) \nabla^2 \Phi \, dx' dy' + \oint_{(C)} (\ln d) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} ds' - \oint_{(C)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} (\ln d) ds'. \quad (\text{A.51})$$



**Figura A.3** Representação genérica dos domínios  $(D)$ ,  $(D_R)$  e  $(D-D_R)$

### b) Ponto $P$ exterior ao domínio $(D)$

O teorema integral de Green, Equação (A.47), se aplica diretamente, visto que, a função  $\ln d$  não tem mais singularidades em  $(D)$ . Neste caso, obtém-se

$$0 = \iint_{(D)} (\ln d) \nabla^2 \Phi \, dx' dy' + \oint_{(C)} (\ln d) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} ds' - \oint_{(C)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} (\ln d) ds'. \quad (\text{A.52})$$

## A.2.2 Equação integral do escoamento

Devido à periodicidade do escoamento, o plano transformado pode ser dividido em uma série infinita de domínios  $(T_\mu)$  idênticos ao domínio  $(T)$ , conforme mostra a Figura A.4. Como o domínio  $(T)$  contém o ponto  $P$ , as Equações (A.51) e (A.52) podem ser utilizadas, dependendo se o ponto  $P$  está interior ou exteriormente ao domínio  $(T)$ . Para os outros domínios  $(T_\mu)$ , o ponto  $P$  é exterior e, nesse caso, utiliza-se a Equação (A.52). O somatório em  $\mu$  fornece o potencial de velocidade  $\Phi$  no ponto  $P$ , ou seja,

$$\left. \begin{array}{l} P \in (T): \quad 2\pi \Phi(P) \\ P \notin (T): \quad 0 \end{array} \right\} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \left\{ \iint_{(T_\mu)} (\ln r_\mu) \nabla^2 \Phi \, dx' dy' + \oint_{(C_\mu)} (\ln r_\mu) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} ds' + \right. \\ \left. - \oint_{(C_\mu)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} (\ln r_\mu) ds' \right\}, \quad (\text{A.53})$$

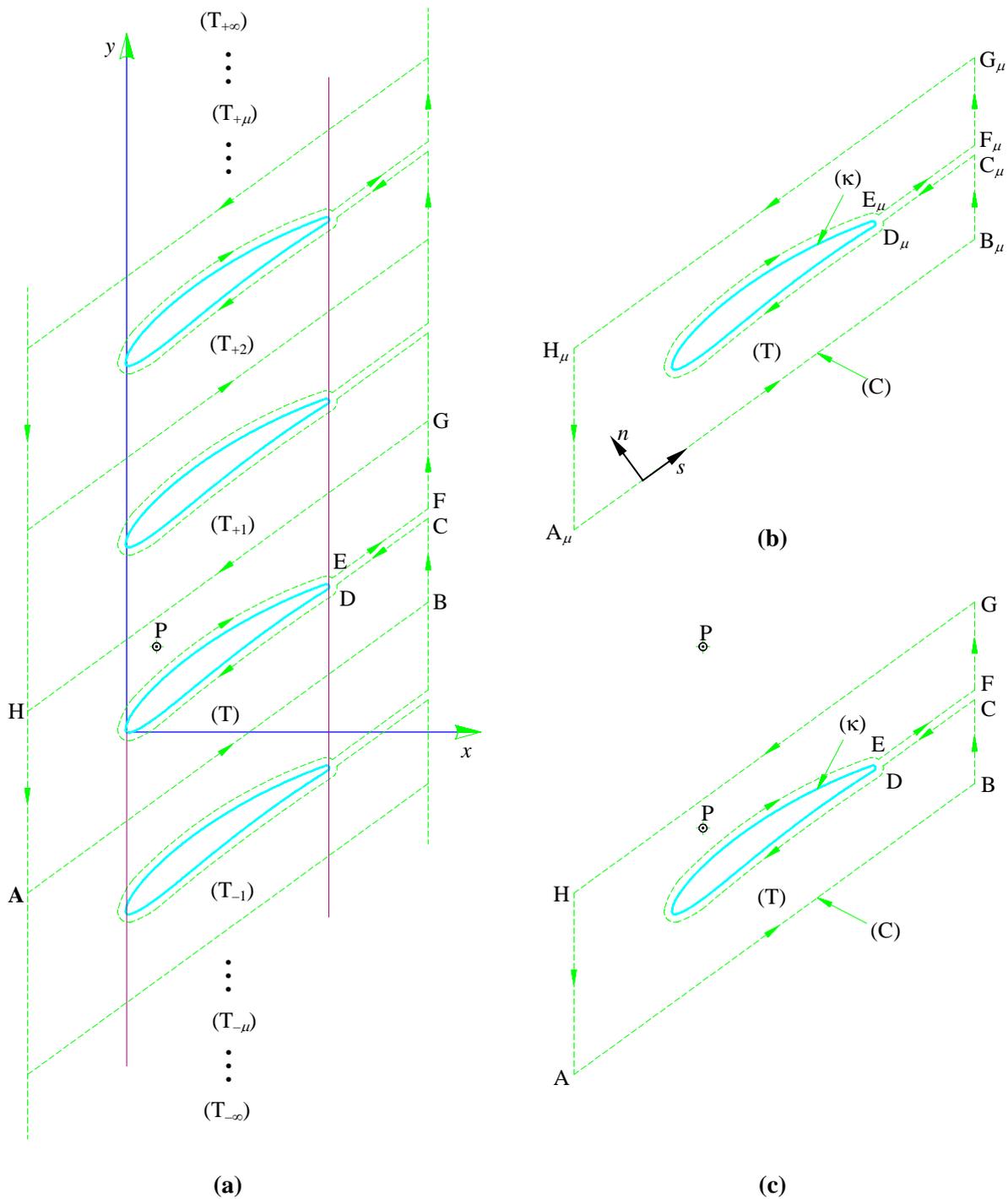
sendo

$$r_\mu = \sqrt{(x-x'_\mu)^2 + (y-y'_\mu)^2}. \quad (\text{A.54})$$

Derivando a Equação (A.53), primeiramente em relação a  $x$  e depois em relação a  $y$ , obtém-se as componentes da velocidade absoluta  $c_x(P)$  e  $c_y(P)$ , ou seja,

$$\left. \begin{array}{l} P \in (T): \quad 2\pi c_x(P) \\ P \notin (T): \quad 0 \end{array} \right\} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \left\{ \iint_{(T_\mu)} \left( \frac{x-x'_\mu}{r_\mu^2} \right) \nabla^2 \Phi \, dx' dy' + \oint_{(C_\mu)} \left( \frac{x-x'_\mu}{r_\mu^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} ds' + \right. \\ \left. - \oint_{(C_\mu)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{x-x'_\mu}{r_\mu^2} \right) ds' \right\} \quad (\text{A.55.a})$$

e



**Figura A.4** Representação de domínios: **(a)** domínios  $(T_\mu)$  limitados pelas curvas fechadas  $(C_\mu)$  na grade linear, **(b)** domínio  $(T_\mu)$  limitado pela curva fechada  $(C_\mu)$  e **(c)** domínio  $(T)$  limitado pela curva fechada  $(C)$

$$\left. \begin{array}{l} P \in (T): \quad 2\pi c_y(P) \\ P \notin (T): \quad 0 \end{array} \right\} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \left\{ \iint_{(T_\mu)} \left( \frac{y-y'_\mu}{r_\mu^2} \right) \nabla^2 \Phi \, dx' \, dy' + \oint_{(C_\mu)} \left( \frac{y-y'_\mu}{r_\mu^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \, ds' + \right.$$

$$-\oint_{(C_\mu)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{y-y'_\mu}{r_\mu^2} \right) ds' \Bigg\}. \quad (\text{A.55.b})$$

Em termos de notação complexa, as coordenadas do ponto P dos domínios (T) e (T<sub>μ</sub>) são

$$z = x + i y \quad (\text{A.56.a})$$

e

$$z' = x' + i y'. \quad (\text{A.56.b})$$

As coordenadas do ponto de integração sobre o contorno (C<sub>μ</sub>), em termos de notação complexa, são representadas na Equação (A.57).

$$\zeta'_\mu = \xi'_\mu + i \eta'_\mu. \quad (\text{A.57})$$

Fazendo as derivadas do potencial de velocidade,  $\Phi$ , em relação a  $x$  e a  $y$ , a velocidade complexa conjugada,  $\bar{c}(z)$ , é dada por

$$\bar{c}(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = c_x - i c_y. \quad (\text{A.58})$$

Considerando as Equações (A.56), (A.57) e (A.58), as Equações (A.55.a) e (A.55.b) tornam-se

$$\left. \begin{array}{l} P \in (T): \\ P \notin (T): \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\pi \bar{c}(z) \\ 0 \end{array} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \left\{ \iint_{(T_\mu)} \nabla^2 \Phi \frac{dx' dy'}{z - z'_\mu} + \oint_{(C_\mu)} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \frac{ds'}{z - \zeta'_\mu} + \right. \\ \left. - \oint_{(C_\mu)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{z - \zeta'_\mu} \right) ds' \right\}. \quad (\text{A.59})$$

Conforme a Figura A.4, para um sistema de coordenadas retangulares definido pela tangente,  $s$ , e pela normal,  $n$ , sobre a fronteira (C<sub>μ</sub>), sendo a normal orientada para o interior do domínio (T<sub>μ</sub>), pode-se escrever, para uma função complexa diferenciável, que

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial n} = -i \frac{\partial}{\partial n}. \quad (\text{A.60})$$

Sendo  $\zeta'_\mu = \zeta'_\mu(s')$ , e utilizando a regra da cadeia, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{z - \zeta'_\mu} \right) = i \frac{\partial}{\partial s'} \left( \frac{1}{z - \zeta'_\mu} \right) = i \frac{1}{(z - \zeta'_\mu)^2} \frac{d\zeta'_\mu}{ds'}. \quad (\text{A.61})$$

Aplicando a fórmula acima e, também, a fórmula de integração por partes à segunda integral de contorno da Equação (A.59), obtém-se

$$\begin{aligned} \oint_{(C_\mu)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{z - \zeta'_\mu} \right) ds' &= i \oint_{(C_\mu)} \Phi \left[ \frac{1}{(z - \zeta'_\mu)^2} \right] \frac{d\zeta'_\mu}{ds'} ds' = \\ &= i \left[ \frac{\Phi}{z - \zeta'_\mu} \right]_{s'=0}^L - i \oint_{(C_\mu)} \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \left[ \frac{1}{z - \zeta'_\mu} \right] ds', \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

sendo  $L$  o comprimento da curva fechada  $(C_\mu)$ .

Como  $(C_\mu)$  limita um domínio simplesmente conexo no qual  $\Phi$  é uma função unívoca, o primeiro termo do lado direito da Equação (A.62) é nulo. Dessa forma, a Equação (A.59) torna-se

$$\left. \begin{array}{l} P \in (T): \\ P \notin (T): \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2\pi \bar{c}(z) \\ 0 \end{array} \right\} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \left\{ \iint_{(T_\mu)} \nabla^2 \Phi \frac{dx'dy'}{z - z'_\mu} + \oint_{(C_\mu)} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n'} + i \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \right) \frac{ds'}{z - \zeta'_\mu} \right\}. \quad (\text{A.63})$$

Na Equação (A.63), observa-se que o somatório representa o desenvolvimento em série da função cotangente hiperbólica, conforme Lavrentiev e Chabat (1977), ou seja,

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \frac{1}{z - z'_0 + i\mu t} = \frac{\pi}{t} \operatorname{cotagh} \left[ \frac{\pi}{t} (z - z'_0) \right]. \quad (\text{A.64})$$

Portanto, a primeira integral da Equação (A.63) torna-se

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \iint_{(T_\mu)} \nabla^2 \Phi \frac{dx'dy'}{z - z'_\mu} = \iint_{(T_0)} \nabla^2 \Phi \left\{ \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \frac{1}{z - z'_0 + i\mu t} \right\} dx'dy'. \quad (\text{A.65})$$

Considerando a Equação (A.64), a equação anterior torna-se

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \iint_{(T_\mu)} \nabla^2 \Phi \frac{dx' dy'}{z - z'_\mu} = \frac{\pi}{t} \iint_{(T)} \nabla^2 \Phi \operatorname{cotagh} \left[ \frac{\pi}{t} (z - z') \right] dx' dy', \quad (\text{A.66})$$

sendo (T) e  $z'$  relativos à  $\mu = 0$ .

A segunda integral da equação da Equação (A.63) tem um tratamento semelhante, portanto, sobre o contorno do perfil ( $\kappa_\mu$ ), tem-se

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \oint_{(\kappa_\mu)} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n'} + i \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \right) \frac{ds'}{z - \zeta'_\mu} = \frac{\pi}{t} \oint_{(\kappa)} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n'} + i \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \right) \operatorname{cotagh} \left[ \frac{\pi}{t} (z - \zeta') \right] ds', \quad (\text{A.67})$$

sendo ( $\kappa$ ) e  $\zeta'$  relativos à  $\mu = 0$ .

As integrais sobre os trechos  $A_\mu B_\mu$  e  $C_\mu D_\mu$  se anulam, respectivamente, com as integrais sobre os trechos  $G_\mu H_\mu$  e  $E_\mu F_\mu$ . Basta, portanto, calcular as integrais sobre os trechos  $H_\mu A_\mu$  e  $B_\mu C_\mu + F_\mu G_\mu = B_\mu G_\mu$ , que serão determinadas considerando as condições de contorno (A.46.a) e (A.46.b), ou seja,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n'} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'} = c_{ix}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = -c_{iy}, \quad (\text{A.68.a})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n'} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x'} = -c_{ex} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = c_{ey}. \quad (\text{A.68.b})$$

Dessa forma, pode-se escrever que

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \int_{(H_\mu A_\mu)} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n'} + i \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \right) \frac{ds'}{z - \zeta'_\mu} = \pi \bar{c}_i \quad (\text{A.69.a})$$

e

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \int_{(B_\mu G_\mu)} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n'} + i \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \right) \frac{ds'}{z - \zeta'_\mu} = \pi \bar{c}_e. \quad (\text{A.69.b})$$

Conforme mostra a Figura A.2, a velocidade complexa conjugada pode ser representada pelas componentes tangencial e normal ao contorno do perfil, ou seja,

$$\bar{c}(\zeta) = (c_s - i c_n) e^{-i\zeta} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial s} - i \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) e^{-i\zeta} . \quad (\text{A.70})$$

Sendo

$$d\zeta = e^{i\chi} ds \quad (\text{A.71})$$

e considerando que

$$\bar{c}_\infty = \frac{\bar{c}_i + \bar{c}_e}{2}, \quad (\text{A.72})$$

$$\lambda(z, z') = \frac{\pi}{t} \operatorname{cotagh} \left[ \frac{\pi}{t} (z - z') \right], \quad (\text{A.73})$$

e, ainda, (A.44), (A.66), (A.67), (A.69) e (A.72), a Equação (A.63) torna-se

$$\left. \begin{array}{l} z \in (\mathbb{T}) : \\ z \notin (\mathbb{T}) : \end{array} \right\} \begin{array}{l} \bar{c}(z) \\ 0 \end{array} = \bar{c}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\kappa)} \bar{c}(\zeta') \lambda(\zeta', z) d\zeta' + \frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathbb{T})} B(x') c_x(z') \lambda(z, z') dx' dy'. \quad (\text{A.74})$$

A Equação (A.74) é a forma integral da solução da equação diferencial (A.44).

### A.2.3 Relações entre as componentes das velocidades a montante e a jusante da grade

Os valores limites da função-núcleo  $\lambda(z, z')$  a montante e a jusante da grade linear são

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \lambda(z, z') = \mp \frac{\pi}{t}. \quad (\text{A.75})$$

Fazendo o limite da Equação (A.74) quando  $x \rightarrow \mp\infty$  e considerando (A.75), obtém-se

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \bar{c}(z) = \bar{c}_{i,e} = \bar{c}_\infty \mp \frac{i}{2t} \oint_{(\kappa)} \bar{c}(\zeta') d\zeta' \mp \frac{1}{2t} \iint_{(\mathbb{T})} B(x') c_x(z') dx' dy'. \quad (\text{A.76})$$

Considerando (A.72), a Equação (A.76) torna-se

$$\bar{c}_i - \bar{c}_e = -\frac{i}{t} \oint_{(\kappa)} \bar{c}(\zeta') d\zeta' - \frac{1}{t} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') dx' dy' . \quad (\text{A.77})$$

Conforme a Figura A.2, a velocidade  $\bar{c}(\zeta)$  pode ser representada pelas componentes tangencial e normal ao contorno do perfil, ou seja,

$$\bar{c}(\zeta) = (c_s - i c_n) e^{-i\chi} . \quad (\text{A.78})$$

Considerando (A.71) e (A.78), pode-se escrever que a integral da velocidade ao longo do contorno do perfil é

$$\int_{(\kappa)} \bar{c}(\zeta) d\zeta = \oint_{(\kappa)} c_s ds - i \oint_{(\kappa)} c_n ds . \quad (\text{A.79})$$

A integral da componente tangencial da velocidade ao longo do contorno do perfil é a circulação, ou seja,

$$\Gamma = \oint_{(\kappa)} c_s ds . \quad (\text{A.80})$$

A integral da componente normal da velocidade ao longo do contorno do perfil é representada por

$$\oint_{(\kappa)} c_n ds = \oint_{(\kappa)} u_n ds + \oint_{(\kappa)} w_n ds . \quad (\text{A.81})$$

Devido à condição de contorno (A.46.c), a componente normal da velocidade relativa,  $w_n$ , é nula ao longo do contorno do perfil, portanto,

$$\oint_{(\kappa)} w_n ds = 0 . \quad (\text{A.82})$$

A integral da componente normal da velocidade de condução da grade linear,  $u_n$ , é determinada através do teorema de Stokes, ou seja,

$$\oint_{(C)} \bar{u} d\zeta = \oint_{(C)} u_s ds - i \oint_{(C)} u_n ds = \iint_{(T)} (\bar{\nabla} \times \bar{u}) \cdot d\bar{A} - i \iint_{(T)} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} dA =$$

$$= \iint_{(T)} (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot d\vec{A}. \quad (\text{A.83})$$

Visto que, na equação anterior,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ , resulta que

$$\Im \left\{ \oint_{(C)} \bar{u} d\zeta \right\} = 0. \quad (\text{A.84})$$

Sendo  $u_x = 0$ , resulta

$$\bar{u} = -i u_y. \quad (\text{A.85})$$

A integral do lado esquerdo de (A.83) também pode ser calculada da seguinte forma:

$$\oint_{(C)} \bar{u} d\zeta = -t u_{5y} + t u_{4y} + \oint_{(\kappa)} u_s ds - i \oint_{(\kappa)} u_n ds. \quad (\text{A.86})$$

Resulta, conforme a Equação (A.84), que

$$\Im \left\{ \oint_{(C)} \bar{u} d\zeta \right\} = - \oint_{(\kappa)} u_n ds = 0. \quad (\text{A.87})$$

Substituindo (A.82) e (A.87), na Equação (A.81), obtém-se

$$\oint_{(\kappa)} c_n ds = 0. \quad (\text{A.88})$$

Substituindo (A.80) e (A.88) na Equação (A.79), resulta

$$\Gamma = \oint_{(\kappa)} \bar{c}(\zeta) d\zeta. \quad (\text{A.89})$$

Considerando a expressão anterior, a Equação (A.77) torna-se

$$\bar{c}_i - \bar{c}_e = c_{ix} - i c_{iy} - c_{ex} + i c_{ey} = -i \frac{\Gamma}{t} - \frac{1}{t} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') dx' dy'. \quad (\text{A.90})$$

Separando as partes real e imaginária da Equação (A.90), resulta

$$c_{ex} - c_{ix} = \frac{1}{t} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') dx' dy' \quad (\text{A.91})$$

e

$$c_{iy} - c_{ey} = \frac{\Gamma}{t}. \quad (\text{A.92})$$

#### A.2.4 Equação integral da velocidade absoluta no contorno do perfil

Quando o ponto  $z$  tende ao ponto  $\zeta$  do contorno do perfil, a aplicação da fórmula de Plemelj conduz às seguintes equações integrais (veja a Equação (A.74)):

$$\begin{aligned} \bar{c}^{\pm}(\zeta) = & \pm \frac{1}{2} \bar{c}(\zeta) + \bar{c}_{\infty} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\kappa)} \bar{c}(\zeta') \lambda(\zeta', \zeta) d\zeta' + \\ & + \frac{1}{2\pi} \iint_{(T)} B(x') c_x(z) \lambda(\zeta, z') dx' dy', \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

sendo  $\bar{c}^+$  e  $\bar{c}^-$  os valores limites obtidos, respectivamente, quando  $z \in (T)$  e  $z \notin (T)$ , e

$$\bar{c}^+ - \bar{c}^- = \bar{c}(\zeta). \quad (\text{A.94})$$

No caso onde  $z \notin (T)$ , conforme a Equação (A.74), a velocidade complexa conjugada é nula em todos os pontos, portanto,

$$\bar{c}^-(\zeta) = 0 \quad (\text{A.95})$$

e, em consequência,

$$\bar{c}^+(\zeta) = \bar{c}(\zeta) \quad (\text{A.96})$$

Substituindo as Equações (A.95) e (A.96) na Equação (A.93), obtém-se

$$\frac{\bar{c}(\zeta)}{2} = \bar{c}_{\infty} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\kappa)} \bar{c}(\zeta') \lambda(\zeta, \zeta') d\zeta' + \frac{1}{2\pi} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') \lambda(\zeta, z') dx' dy'. \quad (\text{A.97})$$

Considerando a Equação (A.78), tem-se que,

$$\Re \left[ \frac{\bar{c}(\zeta)}{2} e^{i\chi} \right] = \frac{c_s(\zeta)}{2} \quad (\text{A.98})$$

e

$$\Im \left[ \frac{\bar{c}(\zeta)}{2} e^{i\chi} \right] = -\frac{c_n(\zeta)}{2}. \quad (\text{A.99})$$

Impondo a condição de que o contorno do perfil é uma linha de corrente, ou seja, que não há escoamento através dele, tem-se

$$c_s = w_s + u_s \quad (\text{A.100})$$

e

$$c_n = u_n. \quad (\text{A.101})$$

Para  $c_n$  fixado, a solução da Equação (A.98) ou (A.99) permite obter a distribuição de velocidades do escoamento potencial.

Utilizando a Equação (A.73), pode-se escrever que

$$\frac{1}{2} \cotagh \left[ \frac{\pi}{t} (z - z') \right] = J(z, z') + iK(z, z'), \quad (\text{A.102})$$

sendo

$$J(z, z') = \frac{1}{2} \frac{\sinh \left[ \frac{2\pi}{t} (x - x') \right]}{\cosh \left[ \frac{2\pi}{t} (x - x') \right] - \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (y - y') \right]} \quad (\text{A.103.a})$$

e

$$K(z, z') = -\frac{1}{2} \frac{\sen \left[ \frac{2\pi}{t} (y - y') \right]}{\cosh \left[ \frac{2\pi}{t} (x - x') \right] - \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (y - y') \right]}. \quad (\text{A.103.b})$$

Define-se as seguintes funções:

$$\lambda_I(z, z') = -J(z, z') \sen \chi - K(z, z') \cos \chi \quad (\text{A.104})$$

e

$$\lambda_{II}(z, z') = J(z, z') \cos \chi - K(z, z') \sen \chi. \quad (\text{A.105})$$

Também,

$$c_{Bx}(\zeta) = \frac{1}{t} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') J(\zeta, z') dx' dy' \quad (\text{A.106})$$

e

$$c_{By}(\zeta) = -\frac{1}{t} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') K(\zeta, z') dx' dy'. \quad (\text{A.107})$$

Considerando (A.102), (A.104), (A.105), (A.106) e (A.107), as Equações (A.98) e (A.99) tornam-se, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{c_s(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') c_s(\zeta') ds' &= [c_{\infty x} + c_{Bx}(\zeta)] \cos \chi + [c_{\infty y} + c_{By}(\zeta)] \sin \chi + \\ &+ \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_{II}(\zeta, \zeta') u_n(\zeta') ds' \end{aligned} \quad (\text{A.108})$$

e

$$\begin{aligned} -\frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_{II}(\zeta, \zeta') c_s(\zeta') ds' &= [c_{\infty x} + c_{Bx}(\zeta)] \sin \chi + [c_{\infty y} + c_{By}(\zeta)] \cos \chi + \\ &+ \frac{u_n(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') u_n(\zeta') ds'. \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

As equações anteriores são equações integrais do tipo Fredholm. A Equação (A.108) é uma equação de Fredholm de segunda espécie e a Equação (A.109) é uma equação de Fredholm de primeira espécie. É possível mostrar que o núcleo  $\lambda_I$  da Equação (A.108) é limitado quando o ponto de integração  $\zeta'$  tende para o ponto  $\zeta$ . Por outro lado, o núcleo  $\lambda_{II}$  da Equação (A.109) é singular. Desta forma, a escolha da equação de Fredholm de segunda espécie é preferível para a determinação das incógnitas  $c_s(\zeta)$ .

### A.2.5 Comportamento das funções-núcleo $\lambda_I$ e $\lambda_{II}$

As funções-núcleo,  $\lambda_I$  e  $\lambda_{II}$ , das equações integrais (A.108) e (A.109) são do tipo  $f[\xi', \eta'(\xi')]/g[\xi', \eta'(\xi')]$ . Quando  $\xi' \rightarrow \xi$  e  $\eta' \rightarrow \eta$ , obtém-se  $f/g = 0/0$ . Analisando as relações de derivadas para cada função-núcleo, resulta:

**Função-núcleo  $\lambda_I$ :**

$$\lambda_I = \frac{f_I}{g} = \frac{\cos \chi \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right] - \operatorname{sen} \chi \operatorname{senh} \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right]}{2 \operatorname{cosh} \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right] - 2 \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right]}. \quad (\text{A.110})$$

Derivando  $f_I$  e  $g$  em relação a  $\xi'$ , obtém-se

$$\frac{f_I'}{g'} = \frac{-\frac{d\eta'}{d\xi'} \cos \chi \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right] + \operatorname{sen} \chi \operatorname{cosh} \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right]}{-2 \operatorname{senh} \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right] - 2 \frac{d\eta'}{d\xi'} \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right]}. \quad (\text{A.111})$$

Para

$$\xi' \rightarrow \xi \text{ e } \eta' \rightarrow \eta, \quad \frac{d\eta'}{d\xi'} \rightarrow \operatorname{tg} \chi, \quad (\text{A.112})$$

obtém-se

$$\lim_{\substack{\xi' \rightarrow \xi \\ \eta' \rightarrow \eta}} \frac{f_I'}{g'} = \frac{0}{0}. \quad (\text{A.113})$$

Derivando as funções  $f_I'$  e  $g'$  em relação a  $\xi'$ , obtém-se

$$\frac{f_I''}{g''} = \frac{-\cos \chi \left\{ \frac{d^2\eta'}{d\xi'^2} \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right] + \frac{2\pi}{t} \left( \frac{d\eta'}{d\xi'} \right)^2 \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right\} \right\}}{2 \left\{ \frac{2\pi}{t} \operatorname{cosh} \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right] - \frac{d^2\eta'}{d\xi'^2} \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right] + \frac{2\pi}{t} \left( \frac{d\eta'}{d\xi'} \right)^2 \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right] \right\}} + \frac{\frac{2\pi}{t} \operatorname{sen} \chi \operatorname{senh} \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right]}{2 \left\{ \frac{2\pi}{t} \operatorname{cosh} \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right] - \frac{d^2\eta'}{d\xi'^2} \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right] + \frac{2\pi}{t} \left( \frac{d\eta'}{d\xi'} \right)^2 \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right] \right\}}. \quad (\text{A.114})$$

Considerando (A.112), tem-se

$$\lim_{\substack{\xi' \rightarrow \xi \\ \eta' \rightarrow \eta}} \frac{f_I''}{g''} = -\frac{t}{4\pi} \cos^3 \chi \frac{d^2\eta}{d\xi^2}. \quad (\text{A.115})$$

Se a curva  $\eta(\xi)$  é conhecida na forma paramétrica,  $\xi(s)$  e  $\eta(s)$ , pode-se escrever que

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{\frac{d\xi}{ds} \frac{d^2\eta}{ds^2} - \frac{d\eta}{ds} \frac{d^2\xi}{ds^2}}{\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2} = \frac{\cos \chi \frac{d^2\eta}{ds^2} - \sin \chi \frac{d^2\xi}{ds^2}}{\cos^3 \chi}, \quad (\text{A.116})$$

sendo

$$\frac{d\eta}{ds} = \sin \chi \quad \text{e} \quad \frac{d\xi}{ds} = \cos \chi. \quad (\text{A.117})$$

Substituindo (A.116) em (A.115) e considerando (A.117), obtém-se

$$\lambda_I \Big|_{\substack{\xi' \rightarrow \xi \\ \eta' \rightarrow \eta}} = \lim_{\substack{\xi' \rightarrow \xi \\ \eta' \rightarrow \eta}} \frac{f_I''}{g''} = -\frac{t}{4\pi} \left[ \cos \chi \frac{d}{ds} (\sin \chi) - \sin \chi \frac{d}{ds} (\cos \chi) \right]. \quad (\text{A.118})$$

Se  $C_c$  a curvatura de uma curva regular num ponto dessa curva e sabendo-se que

$$C_c = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \chi}{\Delta s} = \frac{d\chi}{ds} \quad (\text{A.119})$$

tem-se

$$C_c = \frac{\begin{vmatrix} \frac{d\xi}{ds} & \frac{d\eta}{ds} \\ \frac{d^2\xi}{ds^2} & \frac{d^2\eta}{ds^2} \end{vmatrix}}{\left[ \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 \right]} = \cos \chi \frac{d}{ds} (\sin \chi) - \sin \chi \frac{d}{ds} (\cos \chi) = \frac{d\chi}{ds}. \quad (\text{A.120})$$

Denominando por raio de curvatura,  $R_c$ , a quantidade inversa do valor absoluto da curvatura,  $C_c$ , tem-se

$$R_c = \frac{1}{|C_c|}. \quad (\text{A.121})$$

Substituindo a Equação (A.119) na Equação (A.120) e considerando a Equação (A.121), a Equação (A.118) torna-se

$$\lambda_I \Big|_{\substack{\xi' \rightarrow \xi \\ \eta' \rightarrow \eta}} = -\frac{t}{4\pi R_c}. \quad (\text{A.122})$$

**Função-núcleo  $\lambda_{II}$ :**

$$\lambda_{II} = \frac{f_{II}}{g} = \frac{\cos \chi \sinh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right] + \sin \chi \sen \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right]}{2 \cosh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right] - 2 \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right]}. \quad (\text{A.123})$$

Derivando  $f_{II}$  e  $g$  em relação a  $\xi'$ , obtém

$$\frac{f'_{II}}{g'} = \frac{\cos \chi \cosh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right] - \frac{d\eta'}{d\xi'} \sen \chi \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right]}{-2 \sinh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \right] - 2 \frac{d\eta'}{d\xi'} \sen \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - \eta') \right]}. \quad (\text{A.124})$$

No limite, para  $\xi' \rightarrow \xi$  e  $\eta' \rightarrow \eta$ ,  $f'_{II}$  tende para  $-2\pi/(t \cos \chi)$  e  $g'$  tende para zero; portanto, considerando a relação  $f'_{II}/g'$  e a Equação (A.123),  $\lambda_{II}$  cresce indefinidamente.

## A.2.6 Equação integral da velocidade relativa no contorno do perfil

Conforme a Figura A.2, a velocidade conjugada  $\bar{u} = -iu_y$  pode ser representada pelas componentes tangencial e normal ao contorno do perfil, ou seja,

$$-iu_y = (u_s - iu_n) e^{-i\chi}, \quad (\text{A.125})$$

sendo

$$u_s = \Re(-iu_y e^{i\chi}) = u_y \sen \chi \quad (\text{A.126})$$

e

$$u_n = \Im(-iu_y e^{i\chi}) = u_y \cos \chi. \quad (\text{A.127})$$

Substituindo as Equações (A.126) e (A.127) nas Equações (A.100) e (A.101), resulta

$$c_s = w_s + u_y \operatorname{sen} \chi \quad (\text{A.128})$$

e

$$c_n = u_n = u_y \operatorname{cos} \chi . \quad (\text{A.129})$$

Substituindo (A.128) e (A.129) na Equação (A.108), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{w_s(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') w_s(\zeta') ds' &= [c_{\infty x} + c_{Bx}(\zeta)] \operatorname{cos} \chi + [c_{\infty y} + c_B(\zeta)] \operatorname{sen} \chi + \\ - \frac{u_y(\zeta) \operatorname{sen} \chi}{2} + \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} [\lambda_I(\zeta, \zeta') \operatorname{sen} \chi' + \lambda_{II}(\zeta, \zeta') \operatorname{cos} \chi'] u_y(\zeta') ds' , \end{aligned} \quad (\text{A.130})$$

ou, considerando (A.104) e (A.105),

$$\begin{aligned} \frac{w_s(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') w_s(\zeta') ds' &= [c_{\infty x} + c_{Bx}(\zeta)] \operatorname{cos} \chi + [c_{\infty y} + c_{By}(\zeta)] \operatorname{sen} \chi + \\ - \frac{u_y(\zeta) \operatorname{sen} \chi}{2} + \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} [J(\zeta, \zeta') \operatorname{cos}(\chi + \chi') - K(\zeta, \zeta') \operatorname{sen}(\chi + \chi')] u_y(\zeta') ds' . \end{aligned} \quad (\text{A.131})$$

A Equação (A.131) é a equação integral para a velocidade relativa no contorno do perfil no plano transformado. As componentes  $c_{Bx}$  e  $c_{By}$  da velocidade induzida pela variação da largura das pás não podem ser calculadas diretamente, porque a componente  $c_x(z)$  está no integrando das Equações (A.106) e (A.107), portanto, torna-se necessário um procedimento iterativo.

Nos casos particulares de escoamentos puramente axial ou puramente radial, onde as linhas de corrente estão, respectivamente, sobre cilindros coaxiais ou planos paralelos perpendiculares ao eixo do rotor (nesses casos  $b = b(x)$  é constante), a Equação (A.130) é simplificada porque  $B(x) = -(1/b) db/dx = 0$ .

### a) Escoamento Puramente Axial

A velocidade circunferencial (velocidade de condução),  $u_y(\zeta)$ , é constante através da grade linear móvel, ou seja,  $u_y = U = \omega r$ .

Substituindo as relações

$$c_{\infty x} = w_{\infty x} , \quad (\text{A.132})$$

$$c_{\infty y} = w_{\infty y} + U, \quad (\text{A.133})$$

$$c_{Bx} = 0 \quad (\text{A.134})$$

e

$$c_{By} = 0 \quad (\text{A.135})$$

na Equação (A.131), resulta

$$\begin{aligned} \frac{w_s(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') w_s(\zeta') ds' &= w_{\infty x} \cos \chi + w_{\infty y} \operatorname{sen} \chi + \\ + \frac{U \operatorname{sen} \chi}{2} + \frac{U}{t} \oint_{(\kappa)} [J(\zeta, \zeta') \cos(\chi + \chi') - K(\zeta, \zeta') \operatorname{sen}(\chi + \chi')] ds'. \end{aligned} \quad (\text{A.136})$$

A integral do segundo membro da equação anterior pode ser calculada por:

$$\begin{aligned} \oint_{(\kappa)} [J(\zeta, \zeta') \cos(\chi + \chi') - K(\zeta, \zeta') \operatorname{sen}(\chi + \chi')] ds' &= \\ \oint_{(\kappa)} \left\{ \Re \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{cotagh} \left[ \frac{\pi}{t} (\zeta - \zeta') \right] \right\} \Re \left[ e^{i(\chi + \chi')} \right] - \right. \\ \left. \Im \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{cotagh} \left[ \frac{\pi}{t} (\zeta - \zeta') \right] \right\} \Im \left[ e^{i(\chi + \chi')} \right] \right\} ds' + \\ \Re \oint_{(\kappa)} \frac{e^{i\chi}}{2} \operatorname{cotagh} \left[ \frac{\pi}{t} (\zeta - \zeta') \right] e^{i\chi'} ds' &= \Re \frac{e^{i\chi}}{2} \oint_{(\kappa)} \operatorname{cotagh} \left[ \frac{\pi}{t} (\zeta - \zeta') \right] d\zeta'. \end{aligned} \quad (\text{A.137})$$

Aplicando o cálculo dos resíduos, obtém-se

$$\oint_{(\kappa)} \operatorname{cotagh} \left[ \frac{\pi}{t} (\zeta - \zeta') \right] d\zeta' = it. \quad (\text{A.138})$$

Portanto, a Equação (A.137) torna-se

$$\oint_{(\kappa)} [J(\zeta, \zeta') \cos(\chi + \chi') - K(\zeta, \zeta') \operatorname{sen}(\chi, \chi')] ds' = -\frac{t \operatorname{sen} \chi}{2}. \quad (\text{A.139})$$

Substituindo a Equação (A.139) na Equação (A.136), resulta

$$\frac{w_s(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') w_s(\zeta') ds' = w_{\infty x} \cos \chi + w_{\infty y} \operatorname{sen} \chi. \quad (\text{A.140})$$

A Equação (A.140) é a equação de Fredholm de segunda espécie para a grade linear de largura,  $b$ , constante.

### b) Escoamento Puramente Radial (grade radial fixa)

Substituindo as relações

$$u_y(\zeta) = 0, \quad (\text{A.141})$$

$$c_s(\zeta) = w_s(\zeta) \quad (\text{A.142})$$

e

$$\frac{db}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{Bx} = 0 \quad \text{e} \quad c_{By} = 0 \quad (\text{A.143})$$

na Equação (A.131), resulta

$$\frac{c_s(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \lambda_I(\zeta, \zeta') c_s(\zeta') ds' = c_{\infty x} \cos \chi + c_{\infty y} \operatorname{sen} \chi. \quad (\text{A.144})$$

## A.3 EQUAÇÕES COMPLEMENTARES

Conforme apresentado no Item A.2, a velocidade relativa tangencial sobre o contorno do perfil é dada pela equação integral (A.131). A solução desta equação pode ser obtida somente por procedimento iterativo, porque a componente da velocidade absoluta  $c_x(z')$ , em princípio desconhecida, se encontra nos integrandos das Equações (A.106) e (A.107), ou seja, respectivamente, em  $c_{Bx}(\zeta)$  e  $c_{By}(\zeta)$ , que estão no lado direito da Equação (A.131).

### A.3.1 Cálculo da primeira aproximação

#### a) Componentes $c_{\infty x}$ e $c_{\infty y}$

As componentes  $c_{\infty x}$  e  $c_{\infty y}$  são determinadas pela equação da continuidade e pela Equação (A.92), ou seja,

$$c_{ix} = c_{ex} \frac{b_e}{b_i} \quad (\text{A.145})$$

e

$$c_{iy} - c_{ey} = \frac{\Gamma}{t} = \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} c_s ds, \quad (\text{A.92})$$

sendo  $b_i$  e  $b_e$  são as larguras na entrada e na saída da pá, conforme mostra a Figura A.2.

Considerando (A.145) e (A.92), obtém-se

$$c_{\infty x} = \frac{c_{ix} + c_{ey}}{2} = \frac{c_{ix}}{2} \left(1 + \frac{b_i}{b_e}\right) \quad (\text{A.146})$$

e

$$c_{\infty y} = \frac{c_{iy} + c_{ey}}{2} = c_{iy} - \frac{1}{2t} \oint_{(\kappa)} c_s ds. \quad (\text{A.147})$$

A integral de linha da velocidade absoluta pode ser representada por

$$\oint_{(\kappa)} c_s ds = \oint_{(\kappa)} w_s ds + \oint_{(\kappa)} u_s ds. \quad (\text{A.148})$$

Substituindo a Equação (A.148) na Equação (A.147), resulta

$$c_{\infty y} = c_{4y} - \frac{1}{2t} \oint_{(\kappa)} w_s ds - \frac{1}{2t} \oint_{(\kappa)} u_s ds. \quad (\text{A.149})$$

A segunda integral da Equação (A.149) pode ser calculada do seguinte modo: foi mostrado no Item A.2, através da Equação (A.83), que

$$\oint_{(C)} \bar{u} d\zeta = \iint_{(T)} (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot d\vec{A} \quad (\text{A.150})$$

e, através da Equação (A.86), que

$$\oint_{(C)} \bar{u} d\zeta = -t u_{iy} + t u_{ey} + \oint_{(\kappa)} u_s ds - i \oint_{(\kappa)} u_n ds. \quad (\text{A.151})$$

Considerando a equação de transformação de velocidades (A.25), do espaço real para o espaço transformado, obtém-se

$$u = u_y = \frac{2\pi}{Nt} r (\omega r) = \frac{2\pi}{Nt} \omega r^2 \quad (\text{A.152})$$

e, portanto,

$$|\vec{\nabla} \times \vec{u}| = \frac{2\pi}{Nt} 2\omega r \frac{dr}{dx}. \quad (\text{A.153})$$

A integral de área da Equação (A.150), considerando (A.152) e (A.153), é determinada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \iint_{(T)} (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot d\vec{A} &= 2\omega \iint_{(T)} r \frac{dr}{dx} \frac{2\pi}{Nt} dx dy = \\ &= 2\omega \int_{\eta}^{r_2} \int_{\theta}^{\theta + \frac{2\pi}{Nt} - \delta\theta} r dr d\theta = 2\omega A_{cp}. \end{aligned} \quad (\text{A.154})$$

Considerando a Figura A.1, obtém-se

$$A_{cp} = \frac{\pi}{N} (r_e^2 - r_i^2) - A_{pá}, \quad (\text{A.155})$$

onde  $A_{pá}$  é a área da pá e  $A_{cp}$  é a área compreendida entre duas pás consecutivas.

Introduzindo a expressão

$$a_p = \frac{N A_{pá}}{\pi r_e^2}, \quad (\text{A.156})$$

obtém-se

$$A_{cp} = \frac{\pi}{N} r_e^2 (1 - a_p) - \frac{\pi}{N} r_i^2 \quad (\text{A.157})$$

Substituindo (A.152), (A.154) e (A.157) em (A.150) e considerando novamente a equação de transformação (A.25), obtém-se

$$\oint_{(C)} \bar{u} d\zeta = 2\omega A_{cp} = u_{ey}(1-a_p)t - u_i^2 t. \quad (\text{A.158})$$

Comparando a Equação (A.158) com a Equação (A.151), resulta

$$\oint_{(\kappa)} u_n ds = 0 \quad (\text{A.159})$$

e

$$\oint_{(\kappa)} u_s ds = -a_p u_{ey} t. \quad (\text{A.160})$$

Portanto, substituindo a Equação (A.160) na Equação (A.149), tem-se

$$c_{\infty y} = c_{iy} - \frac{1}{2t} \oint_{(\kappa)} w_s ds + \frac{a_p u_{ey}}{2} \quad (\text{A.161})$$

### b) Componentes $c_{Bx}$ e $c_{By}$

Conforme apresentado no Item A.2, para um ponto de cálculo genérico,  $\zeta$ , sobre a pá, as componentes  $c_{Bx}(\zeta)$  e  $c_{By}(\zeta)$  são dadas pelas Equações (A.106) e (A.107), ou seja,

$$c_{Bx}^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{t} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') J(\zeta, z') dx' dy' \quad (\text{A.162})$$

e

$$c_{By}^{(1)}(\zeta) = -\frac{1}{t} \iint_{(T)} B(x') c_x(z') K(\zeta, z') dx' dy', \quad (\text{A.163})$$

onde o superescrito (1) indica o cálculo de  $c_{Bx}(\zeta)$  e  $c_{By}(\zeta)$  para a primeira aproximação.

Considerando as Equações (A.103.a) e (A.103.b), pode-se escrever, para o ponto de cálculo  $\zeta$ , que

$$J(\zeta, z') = \frac{1}{2} \frac{\sinh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - x') \right]}{\cosh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - x') \right] - \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - y') \right]} \quad (\text{A.164.a})$$

$$K(\zeta, z') = -\frac{1}{2} \frac{\sen \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - y') \right]}{\cosh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - x') \right] - \cos \left[ \frac{2\pi}{t} (\eta - y') \right]}. \quad (\text{A.164.b})$$

Como  $c_x(z')$  é uma função, em princípio, desconhecida, pode-se considerar como uma primeira aproximação o valor médio da velocidade meridional do escoamento, obtido por meio da equação da continuidade, sem levar, ainda, em consideração a obstrução devido à presença das pás (espessura das pás), ou seja,

$$c_m^{(1)} = \frac{Q}{2\pi r b}. \quad (\text{A.165})$$

No plano transformado (plano da grade linear), a velocidade  $c_m^{(1)}$ , dada pela Equação (A.165) e considerando a equação de transformação de velocidades, Equação (A.25), é

$$c_x^{(1)} = \frac{2\pi}{Nt} r c_m^{(1)} = \frac{Q}{Nt b(x')}. \quad (\text{A.166})$$

Na entrada da grade, tem-se

$$c_{4x} = \frac{Q}{Nt b_i}. \quad (\text{A.167})$$

Combinando as Equações (A.166) e (A.167), obtém-se

$$c_x^{(1)} = c_{ix} \frac{b_i}{b(x')}. \quad (\text{A.168})$$

Considerando (A.168), pode-se explicitar as integrais dadas pelas Equações (A.162) e (A.163), ou seja,

$$c_{Bx}^{(1)}(\zeta) = \frac{c_{4x}}{2t} \int_{x_4}^{x_5} B(x') \frac{b_4}{b(x')} dx' \int_{y'=f(x')}^{y'=f(x')+t(x')} \frac{\sinh\left[\frac{2\pi}{t}(\xi - x')\right]}{\cosh\left[\frac{2\pi}{t}(\xi - x')\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(\eta - y')\right]} dy' \quad (\text{A.169})$$

e

$$c_{By}^{(1)}(\zeta) = \frac{c_{4x}}{2t} \int_{x_4}^{x_5} B(x') \frac{b_4}{b(x')} dx' \int_{y'=f(x')}^{y'=f(x')+t(x')} \frac{\sin\left[\frac{2\pi}{t}(\eta - y')\right]}{\cosh\left[\frac{2\pi}{t}(\xi - x')\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(\eta - y')\right]} dy' \quad (\text{A.170})$$

Conforme a Figura A.2,  $t(x')$  é definido por

$$t(x') = \begin{cases} t & \text{se } x' \leq x_e \\ t(x') & \text{se } x_4 < x' < x_5 \\ t & \text{se } x' \geq x_s \end{cases} \quad (\text{A.171})$$

Resolvendo as integrais

$$I_1 = \int_{y'=f(x')}^{y'=f(x')+t(x')} \frac{\sinh\left[\frac{2\pi}{t}(\xi - x')\right]}{\cosh\left[\frac{2\pi}{t}(\xi - x')\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(\eta - y')\right]} dy' \quad (\text{A.172})$$

e

$$I_2 = \int_{y'=f(x')}^{y'=f(x')+t(x')} \frac{\sin\left[\frac{2\pi}{t}(\eta - y')\right]}{\cosh\left[\frac{2\pi}{t}(\xi - x')\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(\eta - y')\right]} dy' \quad (\text{A.173})$$

e fazendo

$$\theta = -\frac{2\pi}{t}(\eta - y'), \quad (\text{A.174.a})$$

$$d\theta = \frac{2\pi}{t} dy', \quad (\text{A.174.b})$$

$$\theta_0 = -\frac{2\pi}{t}[\eta - f(x')] \quad (\text{A.174.c})$$

e

$$a = \cosh\left[\frac{2\pi}{t}(\xi - x')\right], \quad (\text{A.174.d})$$

obtém-se

$$I_1 = \frac{t}{2\pi} \sinh\left[\frac{2\pi}{t}(\xi - x')\right] \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{d\theta}{a - \cos\theta}. \quad (\text{A.175})$$

A função  $1/(a - \cos\theta)$  é par de período  $2\pi$  e, portanto, a integral  $I_1$  torna-se

$$I_1 = \frac{t}{\pi} \sinh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - x') \right] \int_0^\pi \frac{d\theta}{a - \cos \theta}. \quad (\text{A.176})$$

Para  $a > 1$ , tem-se

$$\int \frac{d\theta}{a - \cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{(a-1) \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad (\text{A.177})$$

e, portanto,

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a - \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \quad (\text{A.178})$$

Substituindo (A.178) em (A.176) e considerando (A.174.d), obtém-se:

$$I_1 = \frac{t}{\pi} \sinh \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - x') \right] \frac{\pi}{\sqrt{\cosh^2 \left[ \frac{2\pi}{t} (\xi - x') \right] - 1}} = \begin{cases} t & \text{se } \xi > x' \\ -t & \text{se } \xi < x' \end{cases} \quad (\text{A.179})$$

Para a integral  $I_2$ , Equação (A.173), a função  $\sin \theta / (a - \cos \theta)$  é ímpar de período  $2\pi$  e, portanto,  $I_2 = 0$ .

Substituindo os valores de  $I_1$  e  $I_2$  nas Equações (A.169) e (A.170), e considerando (A.45), obtém-se

$$\begin{aligned} c_{Bx}^{(1)}(\zeta) &\cong \frac{b_i c_{ix}}{2} \left[ \int_{x_i}^{\xi} \frac{B(x')}{b(x')} dx' - \int_{\xi}^{x_5} \frac{B(x')}{b(x')} dx' \right] = \\ &= \frac{b_i c_{ix}}{2} \left[ \frac{1}{b(x')} \Big|_{x_i}^{\xi} - \frac{1}{b(x')} \Big|_{\xi}^{x_5} \right] = c_{ix} \left[ \frac{b_i}{b(\xi)} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b_i}{b_e} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.180})$$

e

$$c_{By}^{(1)}(\zeta) \cong 0. \quad (\text{A.181})$$

Considerando, agora, a obstrução da pá devida à sua espessura, a Equação (A.180) torna-se

$$c_{Bx}^{(1)}(\zeta) \cong c_{ix} \frac{t}{t(\xi)} \left[ \frac{b_i}{b(\xi)} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b_i}{b_e} \right) \right]. \quad (\text{A.182})$$

Substituindo as expressões (A.146), (A.161), (A.181) e (A.182) na equação integral (A.131), resulta, para o cálculo da primeira aproximação a Equação (A.183).

$$\begin{aligned} & \frac{w_s(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \left[ \lambda_I(\zeta, \zeta') - \frac{\text{sen } \chi}{2} \right] w_s(\zeta') ds' \\ & \cong \left[ \frac{t}{t(\xi)} \frac{b_i}{b(\xi)} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b_i}{b_e} \right) \left( 1 - \frac{t}{t(\xi)} \right) \right] c_{ix} \cos \chi + \left[ \frac{a_p u_{ey}}{2} + c_{iy} \right] \text{sen } \chi + \\ & - \frac{u_y(\zeta) \text{sen } \chi}{2} + \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \left[ J(\zeta, \zeta') \cos(\chi + \chi') - K(\zeta, \zeta') \text{sen}(\chi + \chi') \right] u_y(\zeta') ds', \quad (\text{A.183}) \end{aligned}$$

onde o superescrito (1), que deveria aparecer na incógnita  $w_s$  para indicar o cálculo da primeira aproximação, foi omitido para simplificar a notação.

Conforme a Figura A.2,

$$c_{ix} = w_{ix} \quad (\text{A.184.a})$$

e

$$c_{iy} = u_{iy} + w_{iy}. \quad (\text{A.184.b})$$

Portanto, a equação integral (A.183) torna-se

$$\begin{aligned} & \frac{w_s(\zeta)}{2} - \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \left[ \lambda_I(\zeta, \zeta') - \frac{\text{sen } \chi}{2} \right] w_s(\zeta') ds' \\ & \cong \left[ \frac{t}{t(\xi)} \frac{b_i}{b(\xi)} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b_i}{b_e} \right) \left( 1 - \frac{t}{t(\xi)} \right) \right] w_{ix} \cos \chi + \left[ \frac{a_p u_{ey}}{2} + w_{iy} + u_{iy} \right] \text{sen } \chi + \\ & - \frac{u_y(\zeta) \text{sen } \chi}{2} + \frac{1}{t} \oint_{(\kappa)} \left[ J(\zeta, \zeta') \cos(\chi + \chi') - K(\zeta, \zeta') \text{sen}(\chi + \chi') \right] u_y(\zeta') ds'. \quad (\text{A.185}) \end{aligned}$$

## **Apêndice B**

# **FORMULAÇÃO INTEGRAL DO ESCOAMENTO POTENCIAL PARA ROTORES CENTRÍFUGOS COM PÁS INFINITAMENTE FINAS**

Uma formulação integral do escoamento potencial, semelhante àquela do Apêndice A, é apresentada para o cálculo das velocidades relativas no contorno das pás de espessura infinitamente fina de rotores centrífugos. Essas velocidades relativas são obtidas de uma distribuição de vórtices no contorno das pás que constitui a função-incógnita da equação de Fredholm de primeira espécie resultante da formulação do problema. Ao contrário da formulação apresentada no Apêndice A, o cálculo do escoamento é realizado diretamente no plano físico (rotor centrífugo), evitando-se transformações intermediárias. A formulação apresentada permite obter as características do escoamento potencial para uma geometria qualquer de rotor centrífugo, incluindo também a variação da largura das pás, com a única restrição de as pás serem infinitamente finas. Por meio da equação da continuidade, essa variação de largura é tratada de uma maneira aproximada, tal como foi feito no Apêndice A, obtendo-se uma formulação integral linear exclusivamente de contorno, evitando-se procedimentos iterativos. Inicialmente, essa formulação é desenvolvida para rotores centrífugos convencionais, ou seja, sem pás auxiliares. Ao final do desenvolvimento, a equação integral resultante da formulação apresentada é escrita para o escoamento em rotores centrífugos com pás auxiliares.

Este apêndice está dividido em três itens principais: B.1) Equação diferencial do escoamento absoluto para o rotor centrífugo, onde é apresentada a equação diferencial do escoamento potencial para rotores com pás de largura variável, que é uma equação do tipo Poisson; B.2) Determinação do campo de velocidades do escoamento potencial para o rotor centrífugo convencional, ou seja, rotor sem pás auxiliares, onde é apresentado, por meio do teorema integral de Green, o desenvolvimento para transformar a equação diferencial (equação do tipo Poisson) do escoamento absoluto em equação integral (equação de Fredholm de primeira espécie) tendo como incógnita a distribuição de vórtices no contorno dos perfis (pás); B.3) Equação integral de Fredholm de primeira espécie para o escoamento em rotores centrífugos com pás auxiliares, onde, com base na formulação do Item B.2, é apresentada a equação integral para um ou mais conjuntos de pás auxiliares inserido(s) no conjunto de pás principais.

## B.1 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO ESCOAMENTO ABSOLUTO PARA O ROTOR CENTRÍFUGO

A Figura 2.1 representa um esquema de um rotor centrífugo (grade radial móvel) convencional composto de pás de espessura infinitamente fina e de largura,  $b = b(r)$ , variável. A grade é composta por um número e formato arbitrários de pás idênticas e igualmente espaçadas.

O campo de velocidades do escoamento potencial no rotor centrífugo (grade radial móvel) deriva de um potencial de velocidade,  $\Phi(r, \theta)$ . Pode ser demonstrado através de um balanço volumétrico num elemento diferencial de fluido escoando no rotor centrífugo que, para um escoamento absoluto incompressível e irrotacional, obtém-se a equação do tipo Poisson representada na Equação (B.1).

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta) = B(r) c_r(r, \theta), \quad (\text{B.1})$$

sendo

$$B(r) = -\frac{1}{b(r)} \frac{db(r)}{dr}. \quad (\text{B.2})$$

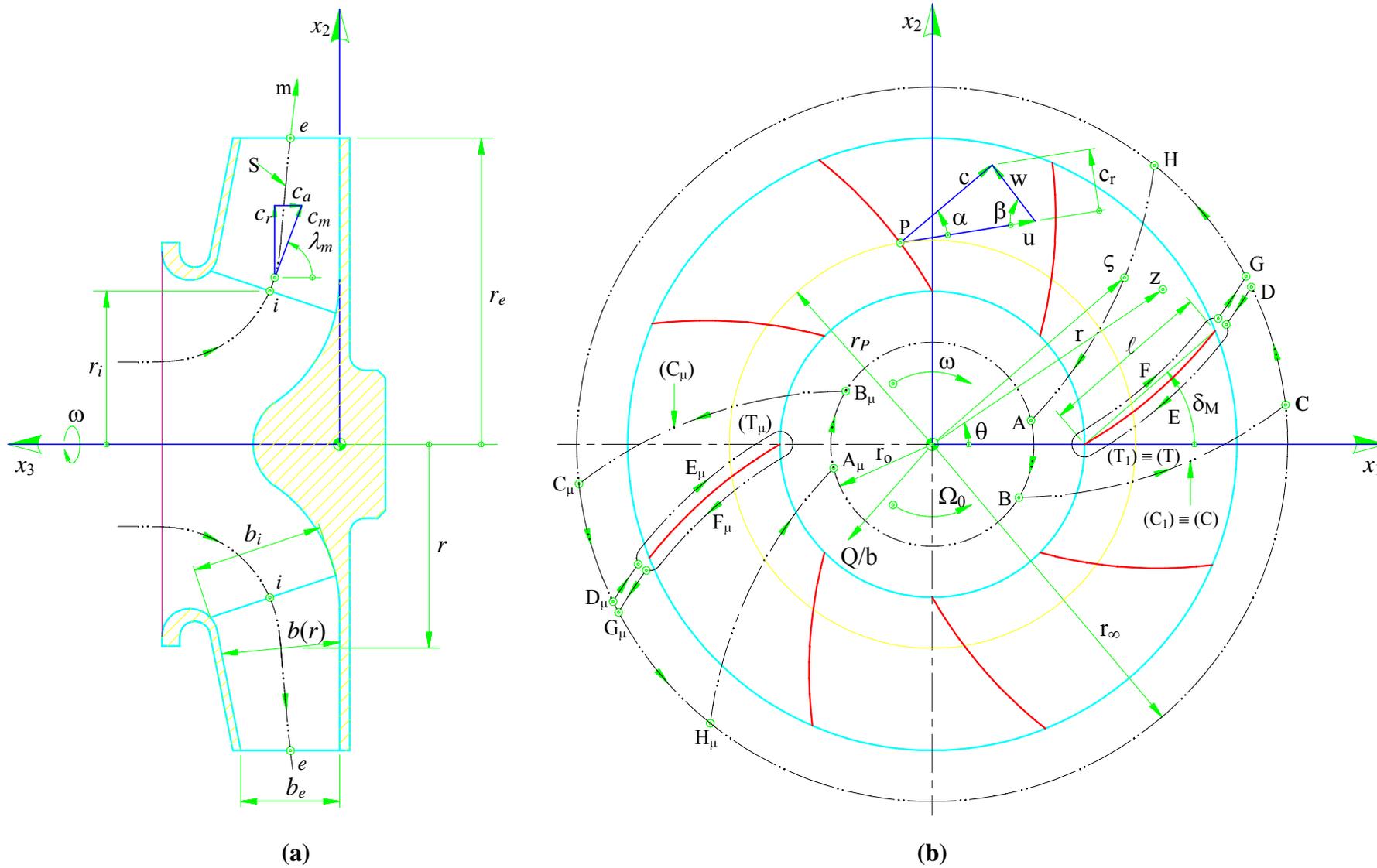


Figura B.1 Grade radial móvel com pás infinitamente finas e de largura variável: (a) seção meridional e (b) seção transversal (Oliveira, 2001)

## B.2 DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADES DO ESCOAMENTO POTENCIAL PARA O ROTOR CENTRÍFUGO CONVENCIONAL

### B.2.1 Obtenção da equação integral por meio da segunda identidade de Green

O teorema da divergência aplicado ao campo vetorial,  $\vec{V}$ , num domínio plano, (D), limitado por uma curva fechada, (C), é representado por

$$\iint_{(D)} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \, dx' dy' = -\oint_{(C)} \hat{n} \cdot \vec{V} \, ds'. \quad (B.3)$$

Na Equação (B.3), substituindo o vetor  $\vec{V}$  pelo vetor  $u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u$ , resulta a segunda identidade de Green, ou seja,

$$\iint_{(D)} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \, dx' dy' + \oint_{(C)} \left( u \frac{\partial v}{\partial n'} - v \frac{\partial u}{\partial n'} \right) ds' = 0, \quad (B.4)$$

sendo  $u(x', y')$  e  $v(x', y')$  duas funções escalares de posição cujas primeiras derivadas são contínuas em um domínio simplesmente conexo (D) e sobre a sua fronteira (C);  $\partial / \partial n'$  significa a derivada normal interior (por definição, a normal exterior é oposta) e  $s'$  é o comprimento da linha ao longo da fronteira (C).

Seja M um ponto de coordenadas  $x'$  e  $y'$ , e P um ponto de coordenadas  $x$  e  $y$ , conforme a Figura A.3 (Apêndice A), de modo que

$$\overline{MP} = d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}. \quad (B.5)$$

A função  $\ln d$  é harmônica e regular em todo ponto M diferente de P, e pode ser verificado facilmente que  $\nabla^2 (\ln d) = 0$ .

#### a) Ponto P interior ao domínio (D)

Sendo  $(D_R)$  o domínio definido pelo círculo  $(C_R)$  de centro P e raio  $R$ , conforme a Figura A.3, e aplicando a Equação (B.4) às funções  $\Phi$  e  $\ln d$  no domínio  $(D - D_R)$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \iint_{(D-D_R)} (\ln d) \nabla^2 \Phi \, dx' dy' &= \oint_{(C)} \left[ \Phi \frac{\partial}{\partial n'} (\ln d) - (\ln d) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] ds' + \\ &+ \oint_{(C_R)} \left[ \Phi \frac{\partial}{\partial R} (\ln R) - (\ln R) \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right] ds_R. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

A integral de domínio e a primeira integral do lado direito da Equação (A.49) são independentes de  $R$ , em consequência, a segunda integral do lado direito também é independente de  $R$  e é igual ao seu limite quando  $R \rightarrow 0$ . Fazendo, na segunda integral do lado direito  $R$  tão pequeno de tal modo que  $\Phi = \Phi(P)$  no círculo  $(C_R)$ , obtém-se

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[ \frac{\Phi(P)}{R} - (\ln R) \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right] 2\pi R = 2\pi \Phi(P). \quad (\text{B.7})$$

Portanto, a Equação (B.6) torna-se

$$2\pi \Phi(P) = \iint_{(D)} (\ln d) \nabla^2 \Phi \, dx' dy' + \oint_{(C)} (\ln d) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} ds' - \oint_{(C)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} (\ln d) ds'. \quad (\text{B.8})$$

### b) Ponto P exterior ao domínio (D)

A Equação (B.4) se aplica diretamente, visto que, a função  $\ln d$  não tem mais singularidades no domínio (D). Neste caso, obtém-se

$$0 = \iint_{(D)} (\ln d) \nabla^2 \Phi \, dx' dy' + \oint_{(C)} (\ln d) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} ds' - \oint_{(C)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} (\ln d) ds'. \quad (\text{B.9})$$

## B.2.2 Equação integral do escoamento

Devido à periodicidade do escoamento (Figura B.1),  $c_r(r, \theta + 2\pi/N) = c_r(r, \theta)$  e  $c_\theta(r, \theta + 2\pi/N) = c_\theta(r, \theta)$ , o plano  $(x_1, x_2)$  pode ser dividido em  $N$  Domínios  $(T_\ell)$ , onde  $\ell = 1, 2, \dots, N$ , idênticos ao domínio  $(T_1)$ . Como o domínio  $(T_1)$  contém o ponto  $P$ , as Equações (B.8) e (B.9) podem ser utilizadas, dependendo se o ponto  $P$  está interior ou exteriormente ao domínio  $(T_1)$ .

Para os outros domínios  $(T_\ell)$ , com  $\ell \neq 1$ , o ponto  $P$  é exterior, neste caso, a Equação (B.9) é utilizada. O somatório em  $\ell$  fornece o potencial de velocidade no ponto  $P$ , ou seja,

$$\left. \begin{array}{l} P \in T_1: \quad 2\pi\Phi(P) \\ P \notin T_1: \quad 0 \end{array} \right\} = \sum_{\ell=1}^N \left\{ \iint_{(T_\ell)} (\ln r_\ell) \nabla^2 \Phi \, dx' dy' + \oint_{(C_\ell)} (\ln r_\ell) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} ds' + \right. \\ \left. - \oint_{(C_\ell)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} (\ln r_\ell) ds' \right\}, \quad (\text{B.10.a-b})$$

sendo

$$r_\ell = \sqrt{(x-x'_\ell)^2 + (y-y'_\ell)^2}. \quad (\text{B.11})$$

As componentes da velocidade absoluta, no sistema de coordenadas cartesianas,  $c_x(x, y) = \partial\Phi(x, y)/\partial x$  e  $c_y(x, y) = \partial\Phi(x, y)/\partial y$ , obtêm-se derivando a Equação (B.10), primeiramente em relação a  $x$  e depois em relação a  $y$ , ou seja,

$$\left. \begin{array}{l} P \in T_1: \quad 2\pi c_x(P) \\ P \notin T_1: \quad 0 \end{array} \right\} = \sum_{\ell=1}^N \left\{ \iint_{(T_\ell)} \left( \frac{x-x'_\ell}{r_\ell^2} \right) \nabla^2 \Phi \, dx' dy' + \oint_{(C_\ell)} \left( \frac{x-x'_\ell}{r_\ell^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} ds' + \right. \\ \left. - \oint_{(C_\ell)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{x-x'_\ell}{r_\ell^2} \right) ds' \right\} \quad (\text{B.12.a-b})$$

e

$$\left. \begin{array}{l} P \in T_1: \quad 2\pi c_y(P) \\ P \notin T_1: \quad 0 \end{array} \right\} = \sum_{\ell=1}^N \left\{ \iint_{(T_\ell)} \left( \frac{y-y'_\ell}{r_\ell^2} \right) \nabla^2 \Phi \, dx' dy' + \oint_{(C_\ell)} \left( \frac{y-y'_\ell}{r_\ell^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial n'} ds' + \right. \\ \left. - \oint_{(C_\ell)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{y-y'_\ell}{r_\ell^2} \right) ds' \right\}. \quad (\text{B.12.c-d})$$

Em termos de notação complexa, as coordenadas do ponto  $P$  dos domínios  $(T_1)$  e  $(T_\ell)$  são

$$z = x + iy \quad \text{no domínio } (T_1) \quad (\text{B.13.a})$$

e

$$z'_\ell = x'_\ell + iy'_\ell \quad \text{no domínio } (T_\ell). \quad (\text{B.13.b})$$

As coordenadas do ponto de integração sobre o contorno, em termos de notação complexa, são

$$z'_\ell = \xi'_\ell + i\eta'_\ell \quad \text{no contorno } (C_\ell). \quad (\text{B.14})$$

Com as derivadas do potencial de velocidade,  $\Phi$ , a velocidade absoluta complexa conjugada é

$$\bar{c}(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = c_x - i c_y. \quad (\text{B.15})$$

Considerando as Equações (B.13), (B.14) e (B.15), as Equações (B.12.a-b) e (B.12.c-d) tornam-se

$$\left. \begin{array}{l} P \in T_1 : \quad 2\pi\bar{c}(P) \\ P \notin T_1 : \quad 0 \end{array} \right\} = \sum_{\ell=1}^N \left\{ \iint_{(T_\ell)} \nabla^2 \Phi \frac{dx' dy'}{z - z'_\ell} + \oint_{(C_\ell)} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \frac{ds'}{z - \zeta'_\ell} + \right. \\ \left. - \oint_{(C_\ell)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{z - \zeta'_\ell} \right) ds' \right\}. \quad (\text{B.16.a-b})$$

Conforme mostra a Figura A.3 (Apêndice A), para um sistema de coordenadas cartesianas definido pela tangente e pela normal à fronteira ( $C_\ell$ ), sendo a normal voltada para o interior do domínio ( $T_\ell$ ), pode-se escrever, para uma função complexa diferenciável, que

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial s} = \frac{1}{i} \frac{\partial(\quad)}{\partial n} = -i \frac{\partial(\quad)}{\partial n}. \quad (\text{B.17})$$

Sendo  $\zeta'_\ell = \zeta'_\ell(s')$ , e aplicando a regra da cadeia, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{z - \zeta'_\ell} \right) = i \frac{\partial}{\partial s'} \left( \frac{1}{z - \zeta'_\ell} \right) = i \frac{1}{(z - \zeta'_\ell)^2} \frac{d\zeta'_\ell}{ds'}. \quad (\text{B.18})$$

Aplicando a fórmula anterior e, também, a fórmula de integração por partes à segunda integral de contorno da Equação (B.16), obtém-se

$$\oint_{(C_\ell)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{z - \zeta'_\ell} \right) ds' = i \oint_{(C_\ell)} \Phi \left[ \frac{1}{(z - \zeta'_\ell)^2} \frac{d\zeta'_\ell}{ds'} \right] ds' = \\ = i \left[ \frac{\Phi}{z - \zeta'_\ell} \right]_{s'=0}^L - i \oint_{(C_\ell)} \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \left[ \frac{1}{z - \zeta'_\ell} \right] ds', \quad (\text{B.19})$$

sendo  $L$  o comprimento da curva fechada referente ao contorno ( $C_\ell$ ).

Como o contorno ( $C_\ell$ ) limita um domínio simplesmente conexo, no qual  $\Phi$  é uma função unívoca, o primeiro termo do lado direito de (B.19) se anula, então, a Equação (B.16) torna-se

$$\left. \begin{array}{l} P \in T_1: \quad 2\pi\bar{c}(P) \\ P \notin T_1: \quad 0 \end{array} \right\} = \sum_{\ell=1}^N \left\{ \iint_{(T_\ell)} \nabla^2 \Phi \frac{dx'dy'}{z-z'_\ell} + \oint_{(C_\ell)} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n'} + i \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \right) \frac{ds'}{z-\zeta'_\ell} \right\}. \quad (\text{B.20.a-b})$$

Os valores de  $\nabla^2 \Phi = B(x', y')$  e  $[\partial \Phi / \partial n' - i \partial \Phi / \partial s']$  independem de  $\ell$ , quando se calcula em pontos circunferenciais periódicos (período  $2\pi/N$ ) em cada domínio, ou seja,

$$z'_\ell = z'_1 e^{i(\ell-1)2\pi/N} \quad (\text{B.21})$$

e

$$\zeta'_\ell = \zeta'_1 e^{i(\ell-1)2\pi/N}, \quad (\text{B.22})$$

sendo  $\ell = 1, 2, \dots, N$ .

Com isso, as Equações (B.20.a-b) tornam-se

$$\left. \begin{array}{l} P \in T_1: \quad 2\pi\bar{c}(P) \\ P \notin T_1: \quad 0 \end{array} \right\} = \sum_{\ell=1}^N \iint_{(T_\ell)} \nabla^2 \Phi \sum_{\ell=1}^N \left( \frac{1}{z-z'_\ell} \right) dx'dy' + \\ - \oint_{(C_\ell)} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n'} + i \frac{\partial \phi}{\partial s'} \right) \sum_{\ell=1}^N \left( \frac{1}{z-\zeta'_\ell} \right) ds'. \quad (\text{B.23.a-b})$$

Sendo

$$c_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{e} \quad c_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (\text{B.24})$$

e

$$c_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad \text{e} \quad c_s = \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad (\text{B.25})$$

e observando na Figura A.3 (Apêndice A) que  $c_n = -c_r$  e  $c_s = c_\theta$ , pode-se escrever

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial n'} + i \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \right) \sum_{\ell=1}^N \left( \frac{1}{z-\zeta'_\ell} \right) = (-c_r + i c_\theta) \sum_{\ell=1}^N \left( \frac{1}{z-\zeta'_\ell} \right). \quad (\text{B.26})$$

Adotando a convenção  $T_1 = T$  e  $C_1 = C$ , as Equações (B.23) tornam-se

$$\left. \begin{array}{l} P \in T_1 : \quad 2\pi\bar{c}(P) \\ P \notin T_1 : \quad 0 \end{array} \right\} = \iint_{(T_1)} \nabla^2 \Phi \sum_{\ell=1}^N \left( \frac{1}{z-z'_\ell} \right) dx' dy' + \\ - \oint_{(C_\ell)} (-c_r + i c_\theta) \sum_{\ell=1}^N \left( \frac{1}{z-\zeta'_\ell} \right) ds'. \quad (\text{B.27.a-b})$$

Pode ser demonstrado, através de decomposição em  $N$  frações parciais, que

$$K(z, z') = \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{z-z'_\ell} = \frac{N z^{N-1}}{z^N - z'^N} \quad (\text{B.28})$$

e

$$K(z, \zeta') = \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{z-\zeta'_\ell} = \frac{N z^{N-1}}{z^N - \zeta'^N}. \quad (\text{B.29})$$

Considerando as Equações (B.1), (B.25), (B.27.a-b), (B.27) e (B.28), define-se

$$F(z, z') = \nabla^2 \Phi \sum_{\ell=1}^N \left( \frac{1}{z-z'_\ell} \right) = B(z') c_r(z') K(z, z') \quad (\text{B.30})$$

e

$$G(z, \zeta') = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n'} + i \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \right) \sum_{\ell=1}^N \left( \frac{1}{z-\zeta'_\ell} \right) = (-c_r + i c_\theta) K(z, \zeta'). \quad (\text{B.31})$$

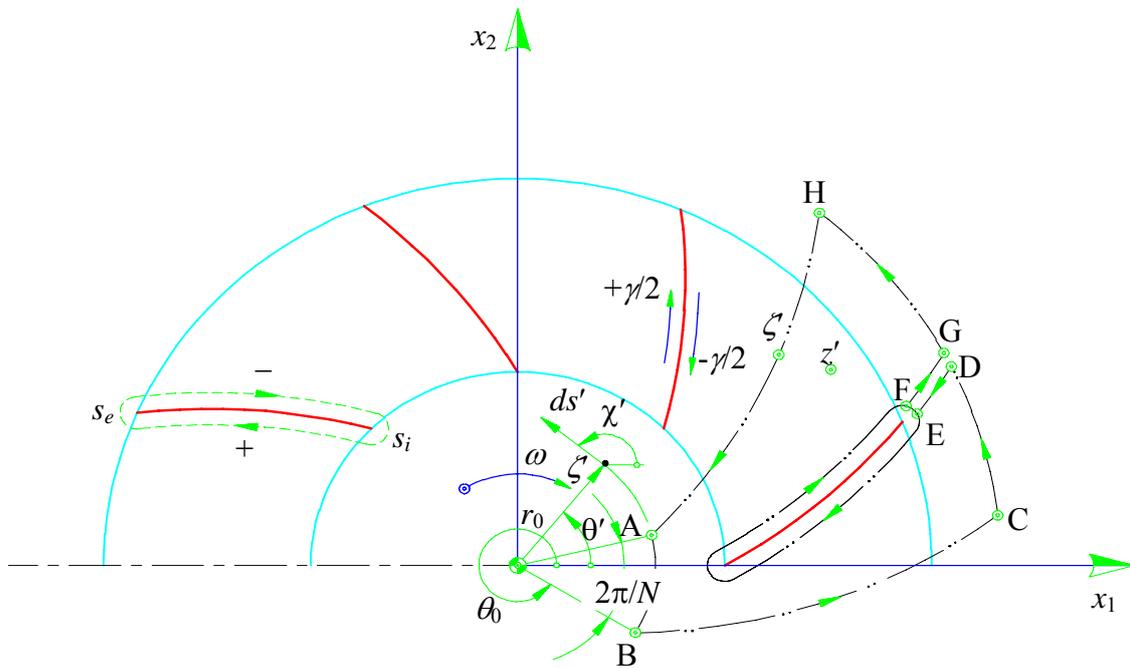
Substituindo as Equações (B.30) e (B.31) nas Equações (B.27.a-b), resulta

$$\left. \begin{array}{l} P \in T_1 : \quad 2\pi\bar{c}(P) \\ P \notin T_1 : \quad 0 \end{array} \right\} = \iint_{(T)} F(z, z') dx' dy' + \oint_{(C)} G(z, \zeta') ds'. \quad (\text{B.32.a-b})$$

### B.2.3 Desenvolvimento da integral de contorno

Considerando a integral de contorno nas Equações (3.32.a-b), pode-se abrir o seu caminho de integração de acordo com a Equação (B.33), conforme ilustra a Figura B.2.

$$I_{(C)} = \oint_{(C)} G(z, \zeta') ds' = I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DE} + I_{EF} + I_{FG} + I_{GH} + I_{HA}. \quad (\text{B.33})$$



**Figura B.2** Notações para a grade radial móvel com pás de espessura infinitamente fina

As integrais sobre os trechos BC e DE se anulam, respectivamente, com as integrais sobre os trechos HA e FG, ou seja,

$$I_{BC} = -I_{HA} \quad \text{e} \quad I_{DE} = -I_{FG} \quad (\text{B.34})$$

A integral sobre a linha representativa da pá é dada por

$$I_{EF} = \oint_{(\kappa)} G(z, \zeta') ds' \quad (\text{B.35})$$

Portanto, a integral de contorno, nas Equações (B.32.a-b), torna-se

$$I_{(C)} = \oint_{(C)} G(z, \zeta') ds' = \int_A^B G(z, \zeta') ds' + \int_C^D G(z, \zeta') ds' + \oint_{(\kappa)} G(z, \zeta') ds' + \int_G^H G(z, \zeta') ds' \quad (\text{B.36})$$

Conforme a Figura B.2,

$$\zeta' = r_0 e^{i\theta'} \quad (\text{B.37})$$

e

$$ds' = e^{-i\chi'} d\zeta', \quad (\text{B.38})$$

obtendo-se

$$d\zeta' = i r_0 e^{i\theta'} d\theta' . \quad (\text{B.39})$$

Também, da Figura B.2, tem-se

$$\chi' - \theta' = \frac{\pi}{2} . \quad (\text{B.40})$$

Das Equações (B.37), (B.38) e (B.39), ou da própria Figura B.2, obtém-se

$$ds' = r_0 d\theta' \quad (\text{B.41})$$

$$\theta' = \theta_0 + 2\pi / N , \quad (\text{no ponto A da Figura 3.3}) \quad (\text{B.42})$$

$$\theta' = \theta_0 . \quad (\text{no ponto B da Figura 3.3}) \quad (\text{B.43})$$

A primeira integral do segundo membro da Equação (B.36), no limite com  $r_0 \rightarrow 0$ , torna-se

$$I_{AB} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_A^B G(z, \zeta') ds' = - \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi/N} G(z, \zeta') d\theta' . \quad (\text{B.44})$$

Considerando a substituição de variável representada na Equação (B.45),

$$\lambda_0 = a + b\theta' , \quad (\text{B.45})$$

com

$$\lambda_0 = 0 , \text{ para } \theta' = \theta_0 \quad \text{e} \quad \lambda_0 = 2\pi , \text{ para } \theta' = \theta_0 + 2\pi / N , \quad (\text{B.46})$$

obtém-se

$$\lambda_0 = (\theta' - \theta_0)N , \quad (\text{B.47})$$

e, portanto,

$$d\theta' = \frac{d\lambda_0}{N} . \quad (\text{B.48})$$

Sendo

$$\zeta' = r_0 e^{i\theta'} = r_0 e^{i\left(\frac{\lambda_0}{N} + \theta_0\right)} \quad (\text{B.49.a})$$

e

$$\zeta'^N = r_0^N e^{iN\left(\frac{\lambda_0}{N} + \theta_0\right)}, \quad (\text{B.49.b})$$

obtém-se

$$d\lambda_0 = -i \frac{d\zeta'^N}{\zeta'^N}. \quad (\text{B.50})$$

Considerando as Equações (B.29), (B.48) e (B.50), a Equação (B.44) torna-se

$$\begin{aligned} I_{AB} &= \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_A^B G(z, \zeta') ds' = - \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi/N} G(z, \zeta') d\theta' = - \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} G(z, \zeta') d\lambda_0 \\ &= - \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{r_0}{N} \oint_{\zeta_{r_0}} (-c_r - i c_\theta) \frac{N z^{N-1}}{z^N - \zeta'^N} (-i) \frac{d\zeta'^N}{\zeta'^N} \\ &= i \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \oint_{\zeta_{r_0}} (c_r - i c_\theta) \frac{z^{N-1}}{\zeta'^N (\zeta'^N - z^N)} d\zeta'^N. \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Pode ser demonstrado que

$$\frac{z^N}{\zeta'^N (\zeta'^N - z^N)} = \frac{-1}{\zeta'^N} + \frac{1}{\zeta'^N - z^N}. \quad (\text{B.52})$$

Considerando (B.52), a Equação (B.51) torna-se

$$\begin{aligned} I_{AB} &= i \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \oint_{\zeta_{r_0}} (c_r - i c_\theta) \frac{z^{N-1}}{\zeta'^N (\zeta'^N - z^N)} d\zeta'^N \\ &= \frac{i}{z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left[ \oint_{\zeta_{r_0}} r_0 \frac{c_r - i c_\theta}{\zeta'^N - z^N} d\zeta'^N - \oint_{\zeta_{r_0}} r_0 \frac{c_r - i c_\theta}{\zeta'^N} d\zeta'^N \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Aplicando a fórmula integral de Cauchy, são obtidos os resultados apresentados nas Equações (B.54) e (B.55).

$$\oint_{\zeta_{r_0}} r_0 \frac{c_r - i c_\theta}{\zeta'^N - z^N} d\zeta'^N = 0 \quad (\text{B.54})$$

e

$$\oint_{\zeta_{r_0}} r_0 \frac{c_r - i c_\theta}{\zeta'^N} d\zeta'^N = 2\pi i r_0 (c_r - i c_\theta). \quad (\text{B.55})$$

Portanto, a Equação (B.44) torna-se

$$I_{AB} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_A^B G(z, \zeta') ds' = \frac{2\pi}{z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 (c_r - i c_\theta). \quad (\text{B.56})$$

Aplicando o mesmo desenvolvimento anterior para as integrais  $I_{CD}$  e  $I_{GH}$ , tem-se

$$I_{CD} + I_{GH} = \int_C^D G(z, \zeta') ds' + \int_G^H G(z, \zeta') ds' = \int_{\theta_\infty}^{\theta_\infty + 2\pi/N} G(z, \zeta') ds' \quad (\text{B.57})$$

sendo

$$\zeta' = r_\infty e^{i\theta'}, \quad (\text{B.58})$$

$$\lambda_\infty = (\theta' - \theta_\infty) N, \quad (\text{B.59})$$

e fazendo o limite com  $r_\infty \rightarrow \infty$ , obtém-se

$$I_{CD} + I_{GH} = - \lim_{r_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} r_\infty (-c_r + i c_\theta) \frac{z^{N-1}}{\zeta'^N - z^N} d\lambda_\infty \quad (\text{B.60})$$

sendo

$$z = r e^{i\theta}, \quad \text{com } r \neq \infty, \quad (\text{B.61})$$

tem-se

$$I_{CD} + I_{GH} = - \lim_{r_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{(-c_r + i c_\theta)}{e^{iN\theta'} - \left(\frac{r}{r_\infty}\right)^N e^{iN\theta}} \left(\frac{r}{r_\infty}\right)^{N-1} e^{i(N-1)\theta} d\lambda_\infty. \quad (\text{B.62.a})$$

Para  $N > 1$  com  $r_\infty \rightarrow \infty$ , tem-se  $\left(\frac{r}{r_\infty}\right)^{N-1} \rightarrow 0$ .

Portanto, a Equação (B.62) torna-se

$$I_{CD} + I_{GH} = 0, \quad \text{para } N > 1. \quad (\text{B.62.b})$$

Para  $N = 1$ , e considerando novamente a variável  $\theta'$ , tem-se

$$I_{CD} + I_{GH} = - \lim_{r_\infty \rightarrow \infty} \int_{\theta_\infty}^{\theta_\infty + 2\pi} (-c_r - i c_\theta) e^{-i\theta'} d\theta'. \quad (\text{B.63})$$

Como não há singularidades no infinito, ou seja, quando  $r_\infty \rightarrow \infty$ , obtém-se

$$\lim_{r_\infty \rightarrow \infty} c_r = \lim_{r_\infty \rightarrow \infty} c_\theta = 0, \quad (\text{B.64})$$

resultando

$$I_{CD} + I_{GH} = 0, \quad \text{para } N = 1. \quad (\text{B.65})$$

Portanto, considerando as Equações (B.62.b) e (B.65), a (B.57) torna-se

$$I_{CD} + I_{GH} = \int_C^D G(z, \zeta') ds' + \int_G^H G(z, \zeta') ds' = 0. \quad (\text{B.66})$$

A Equação (B.33), com as Equações (B.56) e (B.66), torna-se

$$I_{(C)} = \oint_{(C)} G(z, \zeta') ds' = \frac{2\pi}{z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 (c_r - i c_\theta) + \oint_{(\kappa)} G(z, \zeta') ds'. \quad (\text{B.67})$$

## B.2.4 Desenvolvimento da integral de superfície

Considerando a integral de superfície nas Equações (3.32.a-b), ou seja,

$$I_{(T)} = \iint_{(T)} F(z, z') dx' dy' = \iint_{(T)} B(z') c_r(z') K(z, z') dx' dy', \quad (\text{B.68})$$

observa-se que o seu integrando contém a componente radial da velocidade absoluta  $c_r(z')$  que é uma função, em princípio, desconhecida. Neste caso, a solução da Equação (B.32) pode ser obtida somente por processo iterativo.

Para uma primeira aproximação, pode-se considerar o valor médio de  $c_r(z')$  através da equação da continuidade do escoamento, ou seja,

$$c_r(z') \cong c_m(z') = \frac{Q}{2\pi r' b(r')}. \quad (\text{B.69})$$

Considerando que o

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 c_r(r_0) = \frac{Q}{2\pi b(r_0)} \quad (\text{B.70})$$

e, em consequência,

$$\frac{2\pi}{z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 c_r(r_0) = \frac{Q}{z b(r_0)}, \quad (\text{B.71})$$

obtém-se, como aproximação, que

$$\begin{aligned} \frac{r'}{b(r')} \frac{db(r')}{dr'} c_r(z') &\cong \frac{r'}{b(r')} \frac{db(r')}{dr'} \frac{Q}{2\pi r' b(r')} \\ &= \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{b^2(r')} \frac{db(r')}{dr'} = -\frac{Q}{2\pi} \frac{d}{dr'} \left[ \frac{1}{b(r')} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

Substituindo (B.72) em (B.68), e considerando a Equação (B.28), obtém-se

$$\begin{aligned} I_{(T)} &= \iint_{(T)} F(z, z') dx' dy' = \iint_{(T)} \left[ -\frac{1}{b(r')} \frac{db(r')}{dr'} c_r(z') \frac{N z^{N-1}}{z^N - z'^N} \right] dx' dy' \\ &= \iint_{(T)} \left[ -\frac{1}{b(r')} \frac{db(r')}{dr'} c_r(z') \frac{N z^{N-1}}{z^N - z'^N} \right] r' dr' d\theta' \\ &= \frac{Q}{2\pi} \int_{r_0 \rightarrow 0}^{r_\infty \rightarrow \infty} \frac{d}{dr'} \left[ \frac{1}{b(r')} \right] \int_{f(r')}^{f(r')+2\pi/N} \left( \frac{N z^{N-1}}{z^N - z'^N} d\theta' \right) dr'. \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

Desenvolvendo isoladamente a integral

$$\int_{f(r')}^{f(r')+2\pi/N} \frac{N z^{N-1}}{z^N - z'^N} d\theta', \quad (\text{B.74})$$

com

$$\lambda = (\theta' - f(r'))N \quad (\text{B.75})$$

e

$$z' = r' e^{i\theta'}, \quad (\text{B.76})$$

tem-se

$$d\lambda = -i \frac{d(z'^N)}{z'^N}, \quad (\text{B.77})$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} \int_{f(r')}^{f(r')+2\pi/N} \frac{N z'^{N-1}}{z^N - z'^N} d\theta' &= \int_0^{2\pi} \frac{z'^{N-1}}{z^N - z'^N} d\lambda = -i \oint \frac{z'^{N-1}}{z'^N (z^N - z'^N)} d(z'^N) \\ &= i \oint \frac{z'^{N-1}}{z'^N (z^N - z'^N)} d(z'^N). \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

Em termos de frações parciais, conforme feito na Equação (B.52), obtém-se

$$i \oint \frac{z'^{N-1}}{z'^N (z^N - z'^N)} d(z'^N) = -\frac{i}{z} \left[ \oint \frac{d(z'^N)}{z'^N - z^N} - \oint \frac{d(z'^N)}{z'^N} \right]. \quad (\text{B.79})$$

Aplicando a fórmula integral de Cauchy, a expressão entre colchetes na Equação (B.79) é igual a 0, para  $|z'| < |z|$ , e igual a  $2\pi i$ , para  $|z'| > |z|$ . Dessa forma, a Equação (B.78) torna-se

$$\int_{f(r')}^{f(r')+2\pi/N} \frac{N z'^{N-1}}{z^N - z'^N} d\theta' = \frac{2\pi}{z}, \quad \text{para } (r' > r) \quad (\text{B.80})$$

e

$$\int_{f(r')}^{f(r')+2\pi/N} \frac{N z'^{N-1}}{z^N - z'^N} d\theta' = 0, \quad \text{para } (r' < r). \quad (\text{B.81})$$

Substituindo as Equações (B.80) e (B.81) na Equação (B.73), resulta

$$\begin{aligned} I_{(\text{T})} &= \iint_{(\text{T})} F(z, z') dx' dy' = \frac{Q}{2\pi} \int_{r_0 \rightarrow 0}^r \frac{d}{dr'} \left[ \frac{1}{b(r')} \right] \left( \frac{2\pi}{z} \right) dr' = \frac{Q}{z} \left[ \frac{1}{b(r')} \right]_{r_0 \rightarrow 0}^r \\ &= \frac{Q}{z b(r)} - \frac{Q}{z b(r_0)} = \frac{Q}{z b(r)} - \frac{2\pi}{z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 c_r. \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

## B.2.5 Equação integral da velocidade absoluta no contorno da pá

Substituindo as Equações (B.67) e (B.82) na Equação (B.32.a), tem-se

$$2\pi\bar{c}(z) = \frac{Q}{zb(r)} - \frac{2\pi}{z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 c_r + \frac{2\pi}{z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 (c_r - i c_\theta) + \oint_{(\kappa)} G(z, \zeta') ds'. \quad (\text{B.83})$$

Portanto,

$$2\pi\bar{c}(z) = \frac{Q}{zb(r)} - \frac{2\pi i}{z} \lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 c_\theta + \oint_{(\kappa)} G(z, \zeta') ds' \quad (\text{B.84})$$

Definindo-se a pré-rotação anti-horária,  $\Gamma_0$ , como

$$\Gamma_0 = \lim_{r_0 \rightarrow 0} 2\pi r_0 c_\theta, \quad (\text{B.85})$$

a Equação (B.84) torna-se

$$\bar{c}(z) = \frac{Q/b(r) - i\Gamma_0}{2\pi z} + \frac{1}{2\pi} \oint_{(\kappa)} G(z, \zeta') ds' \quad (\text{B.86})$$

A Equação (B.86) é linear e com singularidades de perturbação apenas no contorno ( $\kappa$ ) de cada pá. A diferença entre essa formulação e aquela para o caso de largura da pá,  $b = b(r)$ , constante está no termo fonte, cuja intensidade passa a variar com a largura radial da pá, segundo  $Q/b(r)$ .

No caso de pás infinitamente finas, a integral de contorno ( $\kappa$ ) da pá pode ser reduzida a uma integral de linha estendendo-se do bordo de ataque,  $s_i$ , ao bordo de fuga,  $s_e$ , Figura B.2, como demonstrado no próximo item.

## B.2.6 Equação integral da velocidade absoluta no contorno da pá no caso de pás infinitamente finas

Analisando a integral da Equação (B.86), ou seja,

$$I_{(\kappa)} = \oint_{(\kappa)} G(\zeta, \zeta') ds', \quad (\text{B.87})$$

que representa o efeito das pás do rotor, pode-se obter uma expressão para essa integral para pás de espessura infinitamente fina de formato arbitrário, então, conforme a Figura B.1.

$$\begin{aligned} I_{(\kappa)} &= \oint_{(\kappa)} G(\zeta, \zeta') ds' = \oint_{(\kappa)} (c_{n'} + i c_{s'}) ds' \frac{N \zeta^{N-1}}{\zeta^N - \zeta'^N} \\ &= \int_{s_e}^{s_i} [c_{n'}^{(-)} + i c_{s'}^{(-)}] \frac{N \zeta^{N-1}}{\zeta^N - (\zeta'^N)^{-}} ds' + \int_{s_i}^{s_e} [c_{n'}^{(+)} + i c_{s'}^{(+)}] \frac{N \zeta^{N-1}}{\zeta^N - (\zeta'^N)^{+}} ds'. \end{aligned} \quad (\text{B.88})$$

No caso de pás infinitamente finas, observa-se que

$$\zeta'^{(-)} = \zeta'^{(+)} = \zeta' \quad (\text{B.89})$$

e, ainda,

$$= \int_{s_e}^{s_i} [c_{n'}^{(-)} + i c_{s'}^{(-)}] \frac{N \zeta^{N-1}}{\zeta^N - (\zeta'^N)^{-}} ds' = - \int_{s_i}^{s_e} [c_{n'}^{(-)} + i c_{s'}^{(-)}] \frac{N \zeta^{N-1}}{\zeta^N - (\zeta'^N)^{+}} ds', \quad (\text{B.90})$$

onde o sinal (+) indica o lado de sucção e o sinal (-) o lado de pressão da pá.

Com isso, a Equação (B.88) torna-se

$$\begin{aligned} I_{(\kappa)} &= \oint_{(\kappa)} G(z, \zeta') ds' = \int_{s_4}^{s_5} G(z, \zeta') ds' + \int_{s_5}^{s_4} G(z, \zeta') ds' = \int_{s_4}^{s_5} [G(z, \zeta')^{(+)} - G(z, \zeta')^{(-)}] ds' \\ &= - \int_{s_i}^{s_e} [(c_{n'}^{(+)} + c_{n'}^{(-)}) + i (c_{s'}^{(+)} + c_{s'}^{(-)})] \frac{N z^{N-1}}{z^N - (\zeta'^N)^{+}} ds' \end{aligned} \quad (\text{B.91})$$

Considera-se as definições

$$c_{n'}^{(+)} + c_{n'}^{(-)} = q(\zeta'), \quad (\text{B.92})$$

representando uma distribuição de fontes, e

$$c_{s'}^{(+)} + c_{s'}^{(-)} = \gamma(\zeta'), \quad (\text{B.93})$$

representando uma distribuição de vórtices.

Como

$$c_n = w_n + u_n = u_n, \quad (\text{B.94})$$

visto que  $w_n = 0$ , pela condição de tangência, e ainda

$$u_n^{(+)} = u_n^{(-)} \quad (\text{B.95})$$

devido à continuidade da velocidade de condução do rotor num dado ponto sobre a pá, tem-se

$$q = c_{n'}^{(+)} - c_{n'}^{(-)} = u_n^{(+)} - u_n^{(-)} = 0. \quad (\text{B.96})$$

Portanto, a Equação (B.91) pode ser escrita por

$$I_{(\kappa)} = \int_{(\kappa)} G(\zeta, \zeta') ds' = iN \int_{s_i}^{s_e} \frac{\gamma(\zeta') \zeta'^{N-1}}{\zeta^N - \zeta'^N} ds' \quad (\text{B.97})$$

e, em consequência, a Equação (B.86) torna-se

$$\bar{c}(z) \cong \frac{Q/b(r) - i\Gamma_0}{2\pi z} + \frac{i}{2\pi} \int_{s_i}^{s_e} \gamma(s') K(\zeta, \zeta') ds'. \quad (\text{B.98})$$

Portanto, para pás infinitamente finas, a integral de contorno em (B.87) pôde ser reduzida a uma integral de linha estendendo-se do bordo de ataque ( $s_i$ ) ao bordo de fuga ( $s_e$ ) e representando o efeito da distribuição de vórtices de densidade,  $\gamma(\zeta')$ , sobre a linha da pá.

Seja  $\zeta$  um ponto de cálculo genérico sobre a pá. A velocidade média na linha da pá,  $\bar{c}(\zeta)$ , é calculada fazendo  $z = \zeta$  na Equação (B.98) e interpretando a integral no sentido do valor principal de Cauchy, ou seja,

$$\bar{c}(\zeta) \cong \frac{Q/b(r) - i\Gamma_0}{2\pi \zeta} + \frac{i}{2\pi} \int_{s_i}^{s_e} \gamma(s') K(\zeta, \zeta') ds'. \quad (\text{B.99})$$

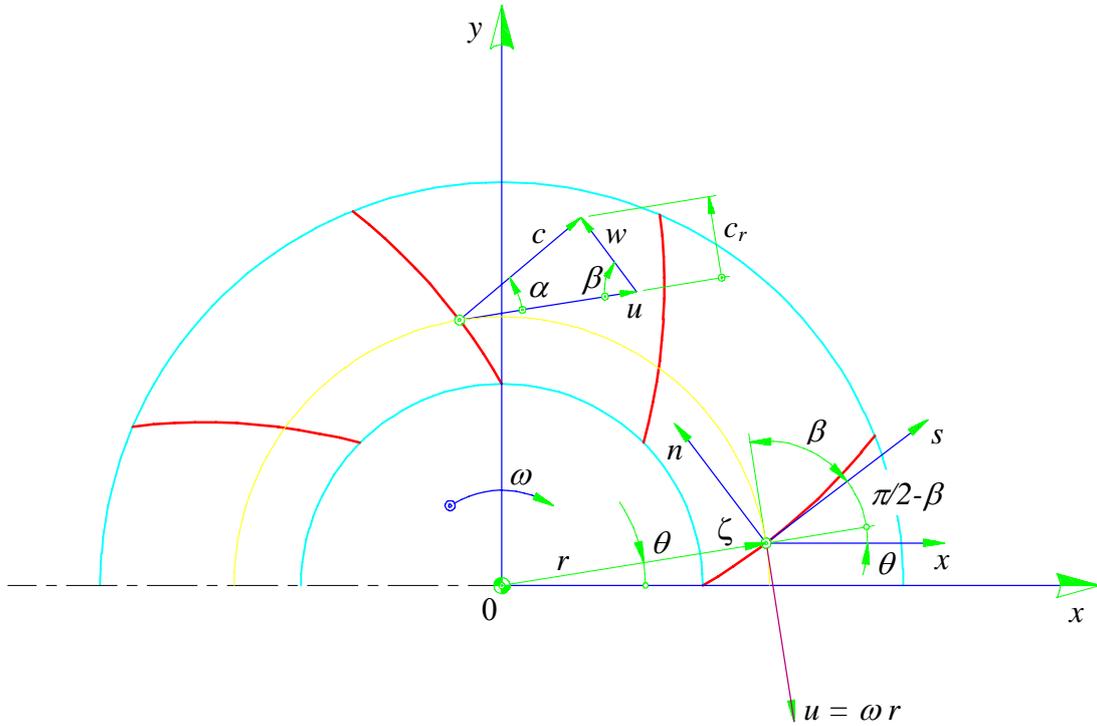
Na Equação (B.99),  $\bar{c}(\zeta)$  representa a média entre as velocidades absolutas complexas conjugadas nos lados de sucção,  $\bar{c}^{(+)}(\zeta)$ , e de pressão,  $\bar{c}^{(-)}(\zeta)$ , ou seja,

$$\bar{c}(\zeta) = \frac{c^{(+)}(\zeta) + c^{(-)}(\zeta)}{2}. \quad (\text{B.100})$$

Por sua vez,  $\bar{c}^{(+)}(\zeta)$  e  $\bar{c}^{(-)}(\zeta)$ , podem ser determinadas considerando a descontinuidade tangencial imposta pela distribuição de densidades de vórtices,  $\gamma(\zeta)$ .

Conforme a Figura B.3, pode-se efetuar a mudança de coordenadas  $(x, y)$  para  $(s, n)$ , sendo  $s$  e  $n$ , respectivamente, a tangente e a normal à pá. Assim,

$$(c_s + i c_n) = (c_x + i c_y) e^{-i(\theta + \pi/2 - \beta)}. \quad (\text{B.101})$$



**Figura B.3** Condição de tangência do escoamento relativo

A velocidade complexa conjugada no sistema de coordenadas  $(s, n)$  é dada por

$$(c_s + i c_n) = \bar{c}(\zeta) e^{i(\theta + \pi/2 - \beta)} \quad (\text{B.102})$$

ou, ainda,

$$c_s(\zeta) - i c_n(\zeta) = i \bar{c}(\zeta) e^{i(\theta - \beta)}. \quad (\text{B.103})$$

Considerando a descontinuidade na velocidade tangencial,  $\pm \gamma/2$ , típica de qualquer distribuição de vórtices, tem-se, para os lados de sucção (+) e de pressão (-), que

$$\bar{c}^{(+)}(\zeta) = \bar{c}(\zeta) + \frac{\gamma}{2} e^{-i(\theta + \pi/2 - \beta)} \quad (\text{B.104})$$

e

$$\bar{c}^{(-)}(\zeta) = \bar{c}(\zeta) - \frac{\gamma}{2} e^{-i(\theta + \pi/2 - \beta)}. \quad (\text{B.105})$$

Das Equações (B.104) e (B.105), juntamente com a Equação (B.103), obtém-se

$$c_s^{(+)}(\zeta) = \Re e [i \bar{c}(\zeta) e^{i(\theta - \beta)}] + \frac{\gamma(\zeta)}{2}, \quad (\text{B.106})$$

$$c_s^{(-)}(\zeta) = \Re e [i \bar{c}(\zeta) e^{i(\theta - \beta)}] - \frac{\gamma(\zeta)}{2} \quad (\text{B.107})$$

e

$$c_n^{(+)}(\zeta) = c_n^{(-)}(\zeta) = \Im m [i \bar{c}(\zeta) e^{i(\theta - \beta)}] c_s^{(-)}(\zeta). \quad (\text{B.108})$$

### B.2.7 Equação integral de Fredholm de primeira espécie para o escoamento em rotores centrífugos convencionais

Para o caso de pás infinitamente finas, a velocidade relativa complexa conjugada é

$$\bar{w}(\zeta) = \bar{c}(\zeta) - \bar{u}(\zeta), \quad (\text{B.109})$$

Sendo

$$\bar{w}(\zeta) = \bar{w}_s(\zeta) - i \bar{w}_n(\zeta), \quad (\text{B.110})$$

pode-se escrever, de maneira semelhante à Equação (B.103), que

$$w_s(\zeta) - i w_n(\zeta) = i \bar{w}(\zeta) e^{i(\theta - \beta)}. \quad (\text{B.111})$$

Assim, as componentes normais e tangenciais da velocidade relativa nos lados de sucção da pá (+) e de pressão (-) tornam-se

$$w_n^{(+)}(\zeta) = w_n^{(-)}(\zeta) = -\Im m \{ [i \bar{c}(\zeta) - \bar{u}(\zeta)] e^{i(\theta - \beta)} \}, \quad (\text{B.112})$$

$$w_s^{(+)}(\zeta) = \Re e \{ [i \bar{c}(\zeta) - \bar{u}(\zeta)] e^{i(\theta - \beta)} \} + \frac{\gamma(\zeta)}{2} \quad (\text{B.113})$$

e

$$w_s^{(-)}(\zeta) = \Re \{ [i\bar{c}(\zeta) - \bar{u}(\zeta)e^{i(\theta-\beta)}] \} - \frac{\gamma(\zeta)}{2}. \quad (\text{B.114})$$

Aplicando a condição de tangência

$$w_n^{(+)}(\zeta) = w_n^{(-)} = 0, \quad (\text{B.115})$$

tem-se que

$$\Im \{ i[\bar{c}(\zeta) - \bar{u}(\zeta)]e^{i(\theta-\beta)} \} = 0. \quad (\text{B.116})$$

Assim, conforme a Equação (B.116), obtém-se

$$\Im \{ i\bar{c}(\zeta)e^{i(\theta-\beta)} \} - \Im \{ i\bar{u}(\zeta)e^{i(\theta-\beta)} \} = 0. \quad (\text{B.117})$$

Substituindo a Equação (B.100) na Equação (B.117), e sendo

$$u = \omega r e^{-i(\pi/2-\theta)}, \quad (\text{B.118})$$

resulta

$$\Im \left\{ i \frac{Q/b(r) - i\Gamma_0}{2\pi\zeta} e^{i(\theta-\beta)} - \frac{1}{2\pi} \int_{s_4}^{s_5} \lambda(s') K(\zeta, \zeta') e^{i(\theta-\beta)} ds' \right\} +$$

$$-\Im(-\omega r e^{-i\beta}) = 0. \quad (\text{B.119})$$

Finalmente, com

$$\zeta = r e^{i\theta} \quad (\text{B.120})$$

e

$$e^{-i\beta} = \cos \beta - i \operatorname{sen} \beta, \quad (\text{B.121})$$

obtém-se

$$-\frac{Q}{2\pi r b(r)} \cos \beta + \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \operatorname{sen} \beta + \omega r \operatorname{sen} \beta + \frac{1}{2\pi} \int_{s_4}^{s_5} \gamma(s') \Omega(\zeta', \zeta) ds' \cong 0, \quad (\text{B.122})$$

sendo

$$\Omega(\zeta', \zeta) = \Im [K(\zeta, \zeta') e^{i(\theta-\beta)}]. \quad (\text{B.123})$$

A Equação (B.122) é uma equação integral de Fredholm de primeira espécie para a função incógnita  $\gamma(s')$ . Os termos dessa equação representam, fisicamente, componentes de velocidades normais à pá: os dois primeiros, devido a uma fonte e a um vórtice na origem (eixo do rotor), o terceiro, o efeito normal referente à velocidade de condução do rotor, e o quarto, o efeito normal absoluto das distribuições de vórtices sobre as pás.

### B.3 EQUAÇÃO INTEGRAL DE FREDHOLM DE PRIMEIRA ESPÉCIE PARA O ESCOAMENTO EM ROTORES CENTRÍFUGOS COM PÁS AUXILIARES

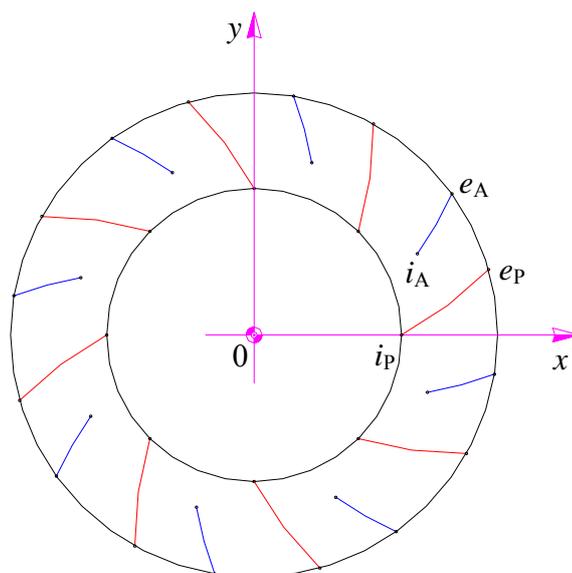
Com base na formulação apresentada anteriormente para rotores centrífugos convencionais, pode-se obter facilmente as equações para o escoamento em rotores centrífugos com pás auxiliares, Figura B.4. No caso de rotores centrífugos convencionais, as pás são simuladas por uma distribuição de densidades de vórtice na linha representativa de cada pá. Esse efeito é representado pela integral de linha da Equação (B.122). No caso de rotores centrífugos com pás auxiliares, deve-se acrescentar na Equação (B.122) um número de integrais de linha idêntico ao número de conjuntos de pás auxiliares. No presente trabalho, foi considerado apenas um conjunto de pás auxiliares de espessura infinitamente fina e de largura variável intercalado no conjunto de pás principais. Dessa forma, para esse único conjunto de pás auxiliares, acrescenta-se na Equação (B.122), uma integral de linha referente ao conjunto de pás auxiliares, conforme a Equação (B.124).

$$\begin{aligned}
 & -\frac{Q}{2\pi r b(r)} \cos \beta + \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \sin \beta + \omega r \sin \beta + \frac{1}{2\pi} \int_{s_{iP}}^{s_{eP}} \gamma(s') \Omega(\zeta', \zeta) ds' + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{s_{iA}}^{s_{eA}} \gamma(s') \Omega(\zeta', \zeta) ds' \cong 0,
 \end{aligned}
 \tag{B.124}$$

sendo  $\Omega(\zeta', \zeta)$  dado na Equação (B.123).

$s_{iP}$  e  $s_{eP}$  e,  $s_{iA}$  e  $s_{eA}$  representam as coordenadas naturais nas linhas representativas de cada pá principal e de cada pá auxiliar, respectivamente, para os bordos de ataque e de fuga (pontos  $i$  e  $e$ , respectivamente, na Figura B.4). Havendo mais conjuntos de pás auxiliares, outras integrais de linha são acrescentadas de acordo com a quantidade desses conjuntos.

O restante do desenvolvimento para o caso de rotores centrífugos com pás auxiliares é idêntico ao apresentado anteriormente, uma vez que se trabalha apenas com a velocidade complexa conjugada do escoamento absoluto dada pela Equação (B.124). Portanto, segundo a condição de contorno, utiliza-se a mesma Equação (B.116) que resultará em uma equação de Fredholm de primeira espécie semelhante à Equação (B.122).



**Figura B.4** Seção normal de um rotor centrífugo com um único conjunto de pás auxiliares

## Apêndice C

### GEOMETRIA DE ROTORES RADIAIS

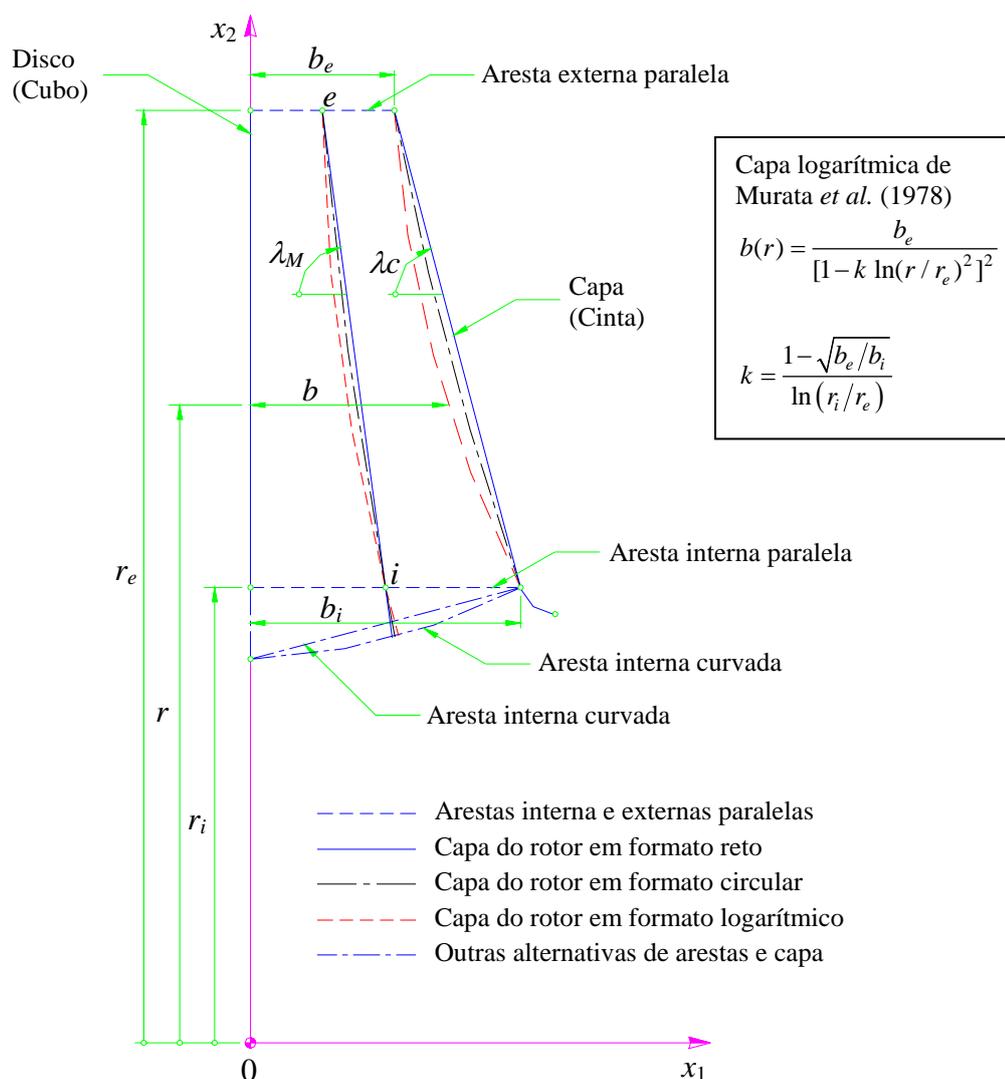
Algumas seções meridionais e transversais (normais), que caracterizam a geometria de rotores radiais típicos, são apresentadas neste apêndice. Os rotores radiais analisados neste trabalho se referem à faixa de baixos valores de rotação específica,  $30 < n_{qA} < 200$ , portanto, a largura das pás,  $b = b(r)$ , ou é constante ou apresenta pouca variação ao longo do seu comprimento. Conforme descrito nos Apêndices A e B, as pás ou têm espessura finita ou são consideradas infinitamente finas.

Este apêndice está dividido em dois itens principais: C.1) Seções meridionais de rotores radiais, onde são apresentadas algumas seções típicas, tanto de bombas como de turbinas; C.2) Seções normais (transversais) de rotores radiais, onde são apresentados alguns formatos típicos de pás utilizados em bombas e turbinas.

#### C.1 SEÇÕES MERIDIONAIS DE ROTORES RADIAIS

Os rotores radiais analisados neste trabalho têm pás montadas perpendicularmente ao disco (cubo) e à capa (cinta) do rotor. Isto implica que não só as arestas interna e externa são perpendiculares ao disco e à capa mas também toda a pá, pelo fato de elas não apresentarem

torção ao longo do seu comprimento. Dessa forma, a seção meridional, no que se refere ao canal do escoamento, é caracterizada pela largura das pás, ou seja, a distância entre o disco e a capa é a própria a largura da pá,  $b = b(r)$ , ao longo do seu comprimento, conforme ilustra a Figura C.1.



**Figura C.1** Esquema de seções meridionais de rotores radiais de largura das pás,  $b = b(r)$ , variável com aresta externa paralela ao eixo e alguns formatos de arestas internas

Em geral, para rotores puramente radiais (valores muito baixos de rotação específica,  $n_{qA}$ , próximos de 30), onde a largura das pás é constante, o disco é plano e perpendicular ao eixo do rotor, em consequência, a capa também é perpendicular ao eixo do rotor. Outra característica desse tipo de rotor é que a aresta externa da pá é paralela ao eixo do rotor, ao

passo que, a aresta interna da pá ou é paralela ou é inclinada ao rotor (Figura C.1). Essa geometria de seção meridional é típica tanto de turbomáquinas radiais geradoras (bombas, ventiladores, sopradores e turbocompressores) como também de turbomáquinas radiais motoras (turbinas).

Para rotores aproximadamente radiais (valores de  $n_{qA}$  próximos de 200), o disco apresenta uma parte plana e perpendicular muito próxima à periferia externa do rotor, e uma parte curvada no restante do disco. Para esses rotores, a capa ou é inclinada em relação ao eixo do rotor ou é curvada, como mostra a Figura C.1. Geralmente, esses rotores têm a aresta externa da pá paralela ao eixo do rotor, e a aresta interna da pá ou é inclinada ou é curvada (Figura C.1).

## C.2 SEÇÕES NORMAIS DE ROTORES RADIAIS

Este item trata de dois tipos de seções normais (transversais) de rotores radiais, no que se refere à espessura das pás: C.2.1) Seções normais de rotores radiais com pás de espessura finita (PEF) e C.2.2) Seções normais de rotores radiais com pás infinitamente finas (PIF). São apresentadas as principais expressões para gerar a geometria completa de duas pás típicas empregadas em rotores radiais, ou seja, pás em formato de arco de círculo (ARC) e em formato de espiral logarítmica (LOG), ambas para PEF e PIF. Para efeito de comparação, também são apresentadas as principais expressões para gerar a geometria de pás em duplo arco de círculo (DAC), sem arredondamentos nas regiões dos bordos de ataque e de fuga.

Não serão listadas as expressões para os diversos ângulos e comprimentos que estão indicados nas figuras, visto que os mesmos podem ser obtidos facilmente através de relações trigonométricas e geométricas. Desenhos esquemáticos de cada pá são mostrados, destacando-se um sistema local de coordenadas retangulares  $[x^*, y^*]$ , cujo eixo  $x^*$ , posicionado na corda do perfil (pá), está inclinado em relação ao eixo  $x_1$  de um ângulo de montagem,  $\delta_M$ , que facilita a transformação das coordenadas do perfil (pá) isolado para aquelas do perfil em grade, no caso de PEF.

As expressões que seguem referem-se à linha média da pá no plano normal (Figura C.2), desde o ponto  $i$  (na aresta interna) até o ponto  $e$  (na aresta externa), e à linha média da pá compreendida entre os pontos  $i$  e  $e$  no plano meridional (Figura C.1).



sendo  $R_m$  o raio de curvatura da linha média da pá, e

$$\theta_m = 2 \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{\cos \beta_e - \frac{D_i}{D_e} \cos \beta_i}{\operatorname{sen} \beta_e + \frac{D_i}{D_e} \operatorname{sen} \beta_i} \right], \quad (\text{C.2})$$

sendo  $\theta_m$  o ângulo do setor referente à corda da pá (Figura C.2).

$$\delta_M = \pi / 2 + \theta_m - \beta_i, \quad (\text{C.3})$$

sendo  $\delta_M$  o ângulo de montagem das pás;

$$L_p = R_p (\theta_l + \pi / 2 - \delta_p) + \theta_s e_{pá} / 2 + r_e \gamma'_p \quad (\text{C.4.a})$$

e

$$L_s = R_s (\theta_l + \pi / 2 - \delta_s) + \theta_i e_{pá} / 2 + r_e \gamma'_s, \quad (\text{C.4.b})$$

sendo  $L_p$  e  $L_s$  os comprimentos da pá nos lados de pressão e de sucção, respectivamente.

## 2) Pá de espessura constante, em formato de arco de círculo, com bordos interno e externo arredondados e (ARCa)

A Figura C.4 (com espessura aumentada) ilustra as principais grandezas da pá.  $R_m$ ,  $\theta_m$  e  $\delta_M$  são dados em (C.1), (C.2) e (C.3), respectivamente.

$$L_p = R_p \theta_l + \theta_s e_{pá} \quad (\text{C.5.a})$$

e

$$L_s = R_s \theta_l + \theta_i e_{pá} \quad (\text{C.5.b})$$

são, respectivamente, os comprimentos da pá nos lados de pressão e de sucção.

## 3) Pá em formato de duplo arco de círculo sem arredondamentos nos bordos interno e externo (DAC)

A Figura C.5 (com espessura aumentada) ilustra as principais grandezas da pá.  $R_m$ ,  $\theta_m$  e  $\delta_M$  são dados em (C.1), (C.2) e (C.3), respectivamente.





$$H_m = R_m [1 - \cos (\theta_m / 2)] \quad (\text{C.6})$$

$$L_p = R_p \theta_p \quad (\text{C.7.a})$$

e

$$L_s = R_s \theta_s . \quad (\text{C.7.b})$$

#### 4) Pá de espessura constante, em formato de espiral logarítmica (apenas na linha média), com bordos interno e externo arredondados (LOGc)

A Figura C.6 (com espessura aumentada) ilustra as principais grandezas da pá. Deve-se ressaltar que o formato em espiral logarítmica refere-se apenas à linha média, ou seja, os lados de pressão e de sucção da pá não têm o formato de uma espiral logarítmica. Como se sabe, o ângulo da pá,  $\beta$  (na linha média), é constante ao longo da pá.

$$r = r_4 e^{(\text{tg } \beta) \theta} \quad (\text{na linha média da pá}), \quad (\text{C.8})$$

$$L_m = (r_e - r_i) / \text{sen } \beta , \quad (\text{C.9})$$

onde  $L_m$  é o comprimento da linha média da pá.

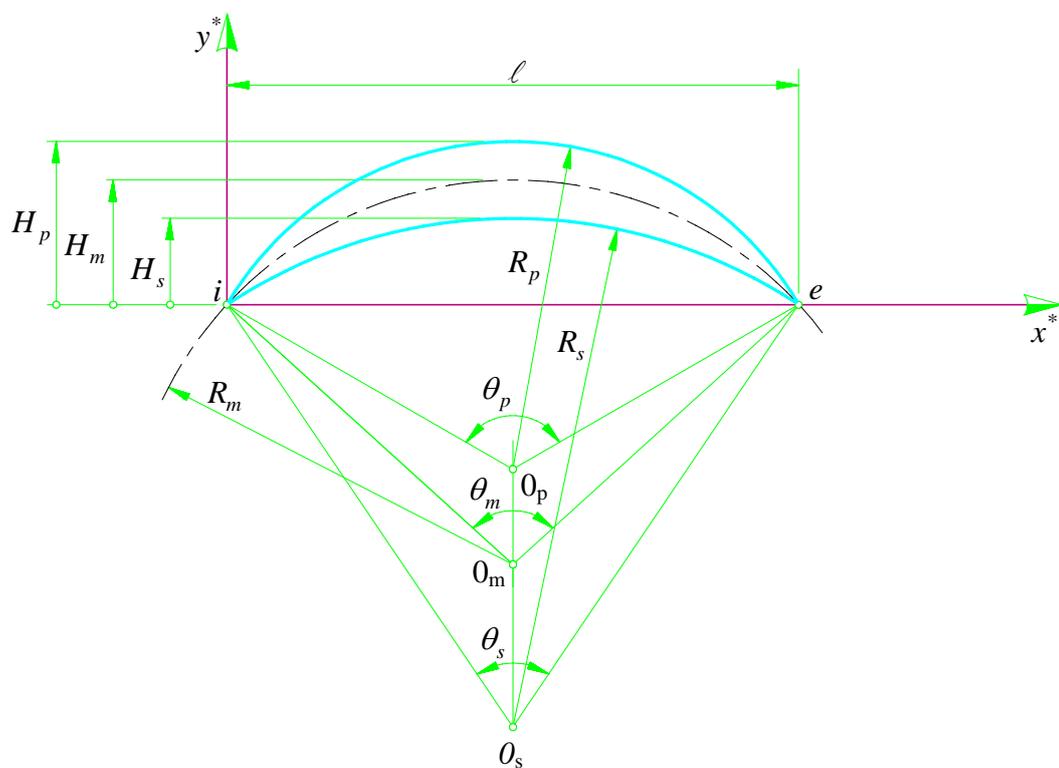
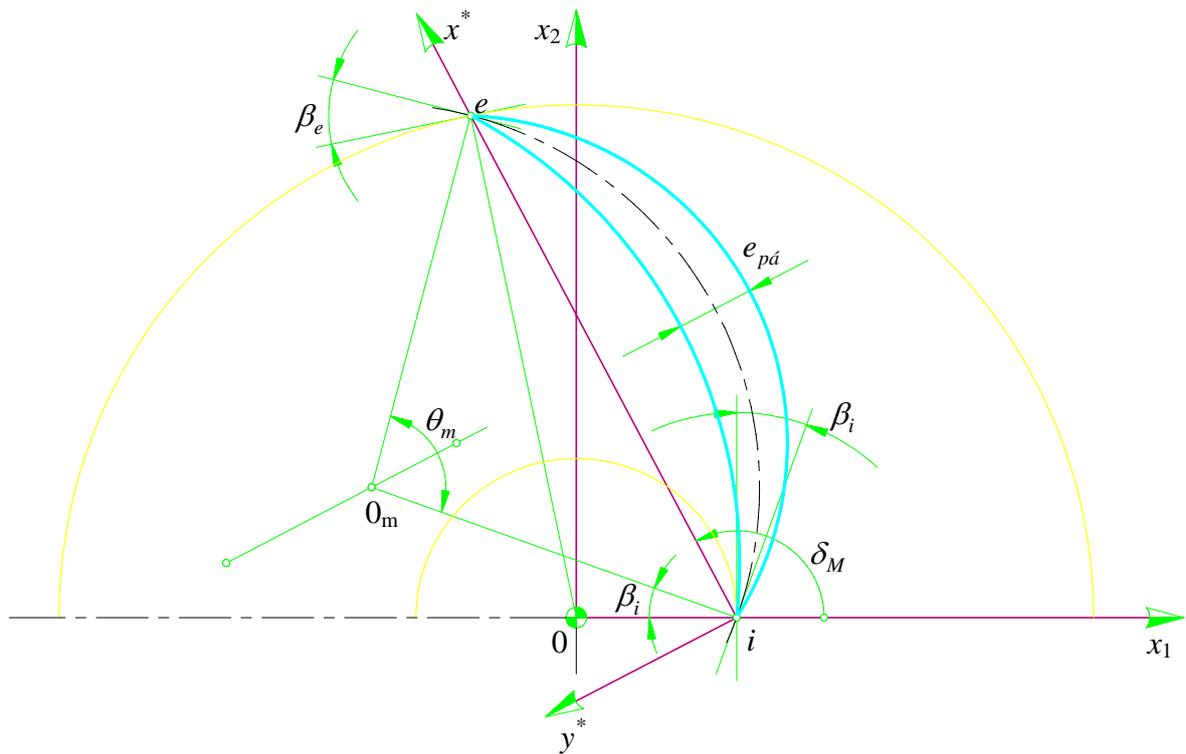
#### 5) Pá de espessura variável, em formato de espiral logarítmica (na linha média e nos lados de pressão e de sucção), com bordos interno e externo arredondados (LOGv)

A Figura C.7 (com espessura aumentada) ilustra as principais grandezas da pá. Deve-se ressaltar que tal pá é genuinamente em formato de espiral logarítmica. Ao mapear (transformar) o plano físico (plano da grade radial) para o plano transformado (plano da grade linear), conforme o Apêndice A, resulta uma pá com espessura constante (a menos nas regiões dos bordos interno e externo) no plano transformado, como ilustram as Figuras C.8 e C.9. A dependência de  $r$  com  $\theta$  é a mesma representada na Equação (C.8).

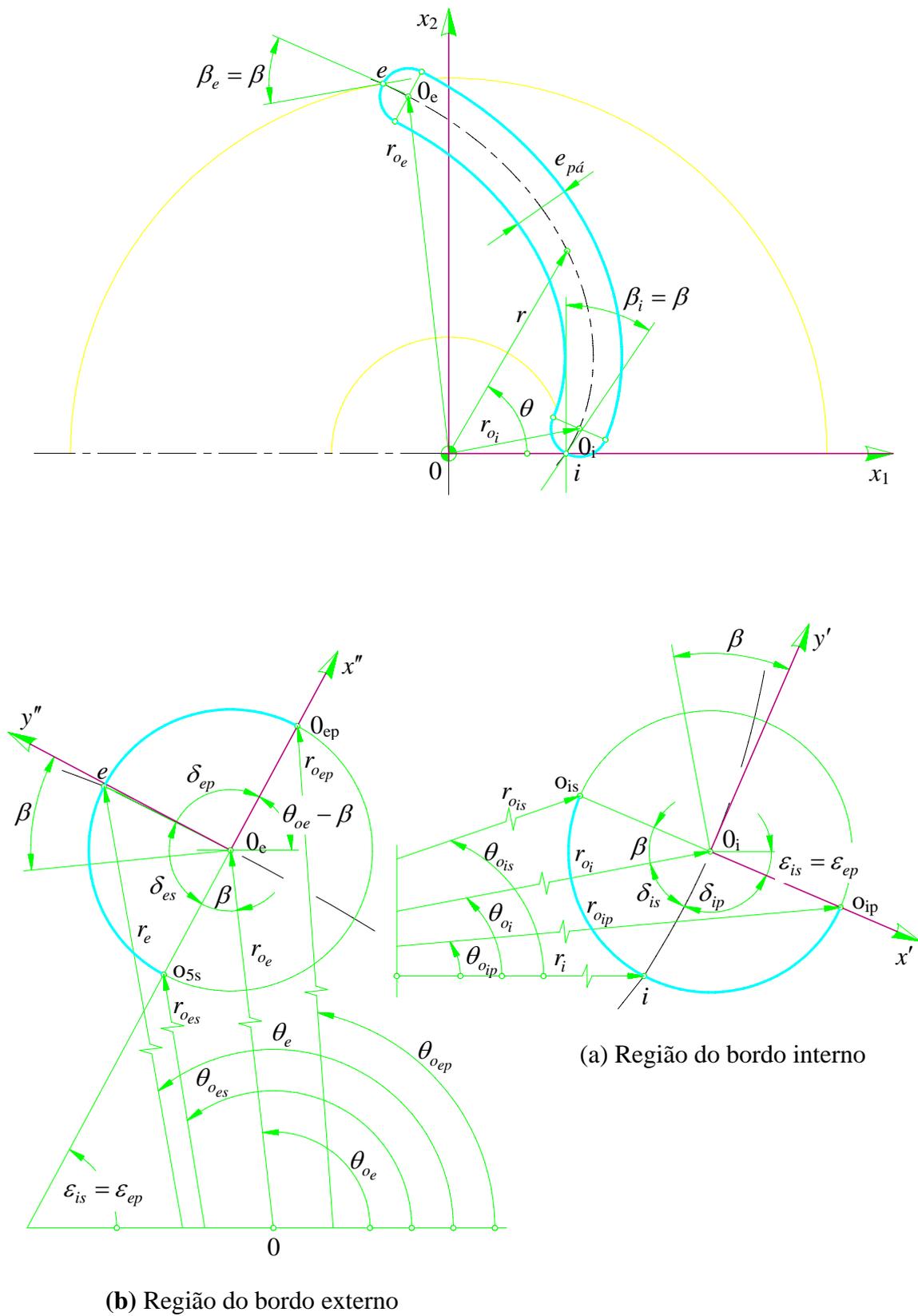
$$L_p = \delta_{ip} e_{pái} / 2 + \delta_{ep} e_{páoe} / 2 + (r_{oep} - r_{oip}) / \text{sen } \beta \quad (\text{C.10.a})$$

e

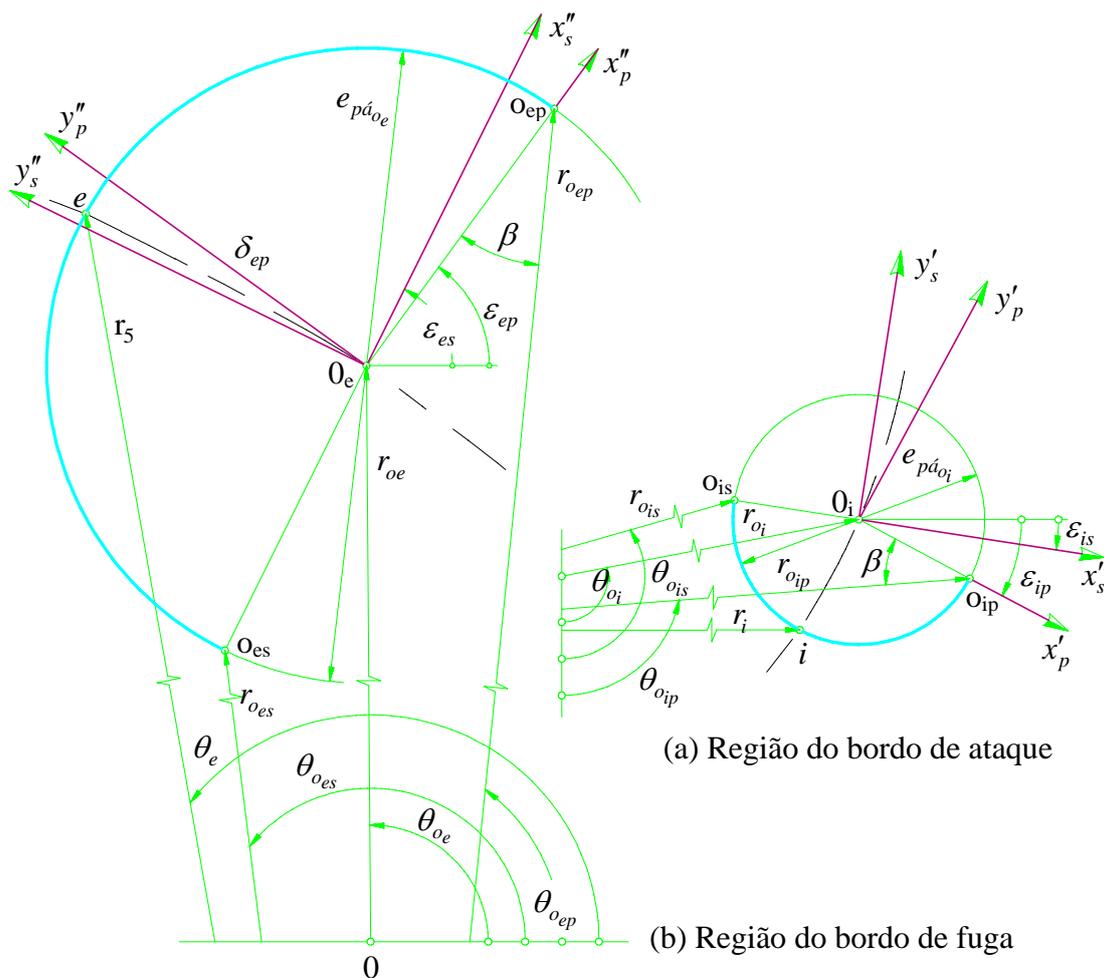
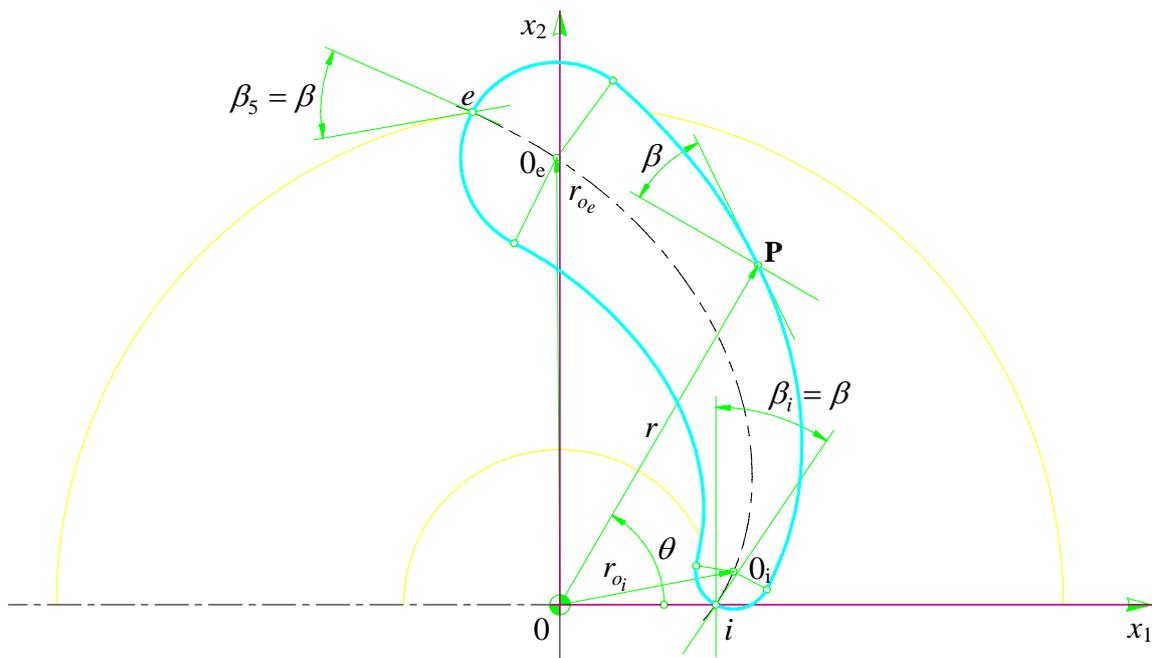
$$L_s = \delta_{is} e_{páoi} / 2 + \delta_{es} e_{páoe} / 2 + (r_{ose} - r_{ois}) / \text{sen } \beta . \quad (\text{C.10.b})$$



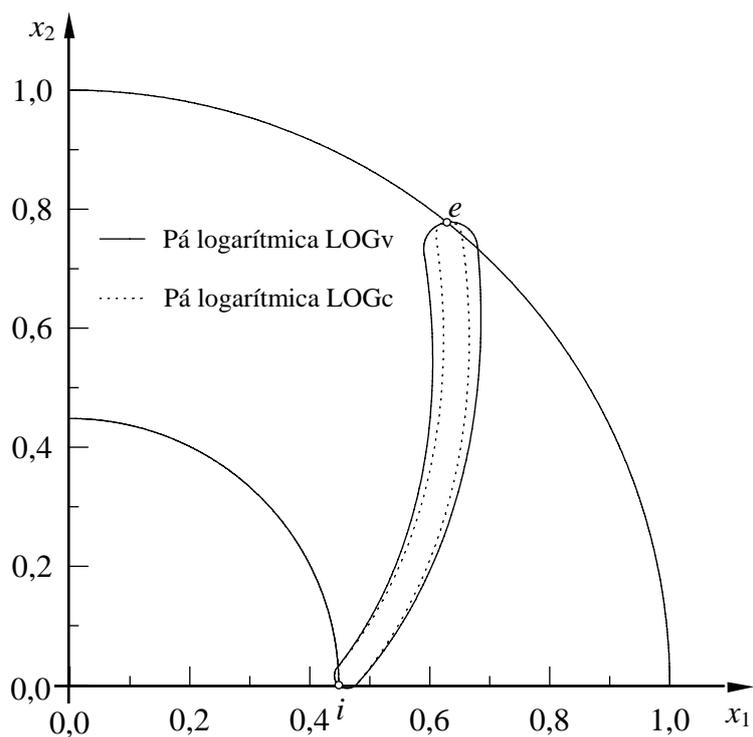
**Figura C.5** Esquema de uma pá em formato de duplo arco de círculo sem arredondamentos nos bordos interno e externo (DAC)



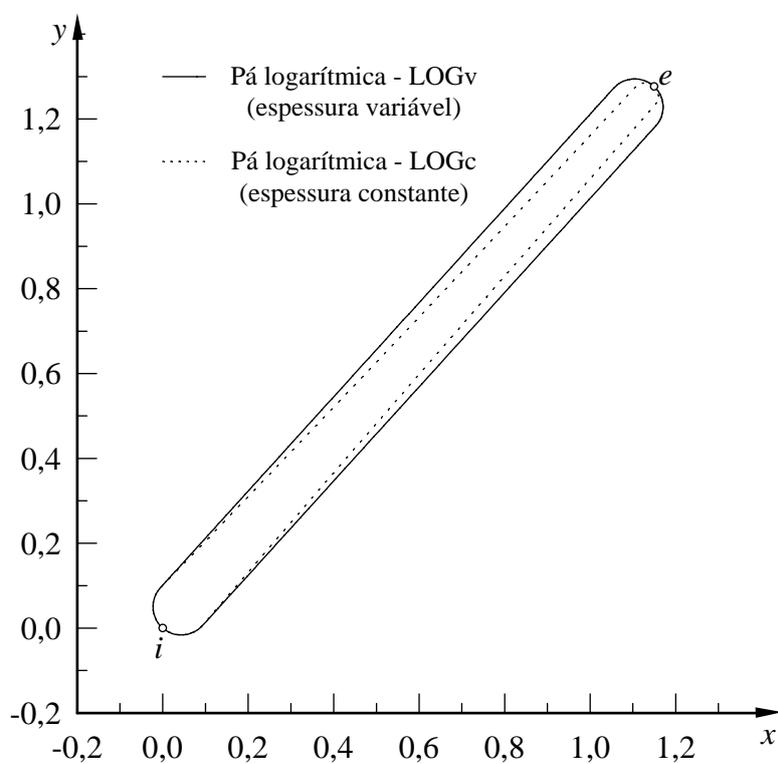
**Figura C.6** Esquema de uma pá de espessura constante, em formato de espiral logarítmica (na sua linha média), com bordos interno e externo arredondados (LOGc)



**Figura C.7** Esquema de uma pá de espessura variável, em formato de espiral logarítmica (na linha média e nos lados de pressão e de sucção), com bordos interno e externo arredondados (LOGv)



**Figura C.8** Esquema, no plano da grade radial, de pás logarítmicas de espessuras variável (LOGv) e constante (LOGc) com largura,  $b$ , constante.

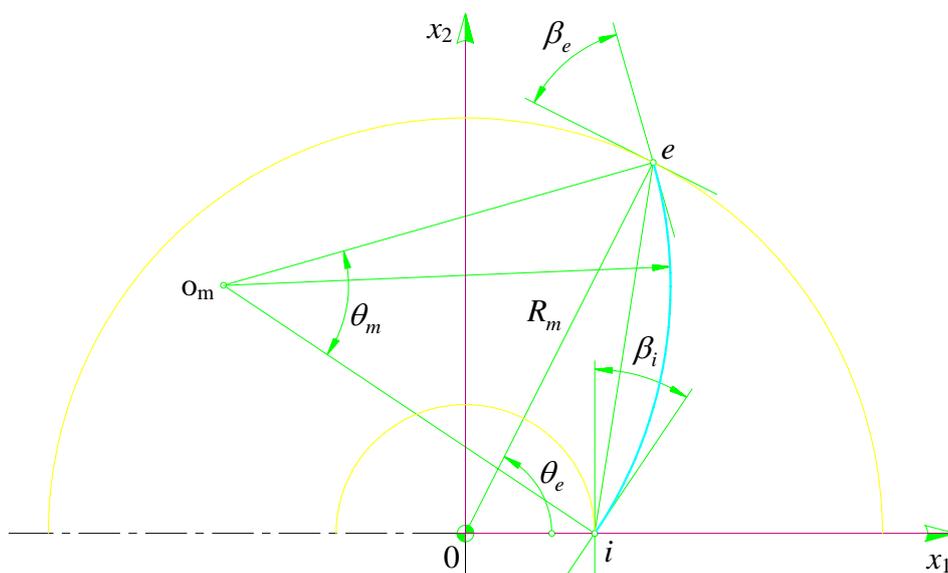


**Figura C.9** Transformação das pás LOGv e LOGc, representadas na Figura C.8 (plano da grade radial), no plano da grade linear

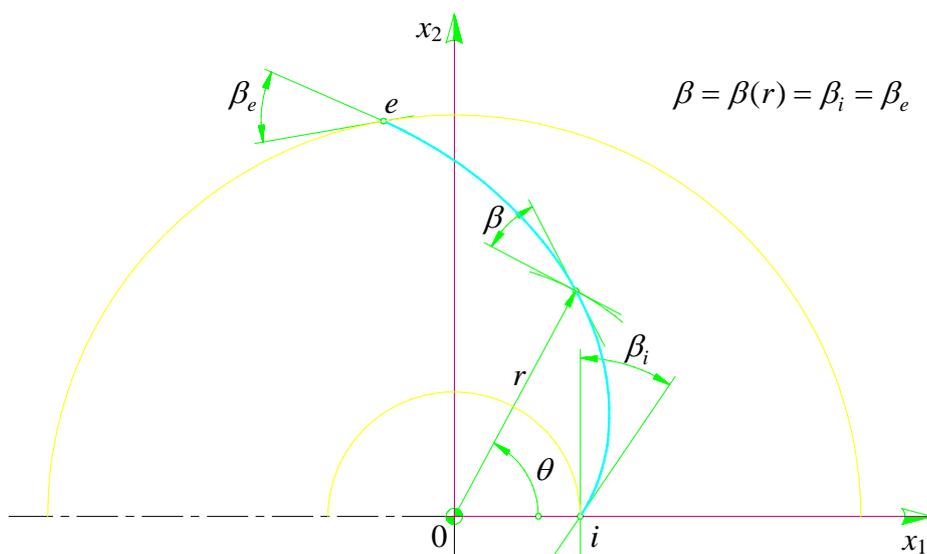
### C.2.1 Seções normais (transversais) de rotores radiais com pás infinitamente finas (PIF)

No caso de pás infinitamente finas (PIF), a linha média das pás (de  $i$  até  $e$ ), naturalmente, é a linha representativa das PIF. Portanto, as expressões que representam tal linha são as mesmas listadas no Item C.2.1.

As Figuras C.10 e C.11 ilustram as pás infinitamente finas em formato de arco de círculo (ARC) e em formato de espiral logarítmica (LOG), respectivamente.



**Figura C.10** Esquema de uma pá infinitamente fina em formato de arco de círculo (PIF)



**Figura C.11** Esquema de uma pá infinitamente fina em formato de espiral logarítmica (LOG)

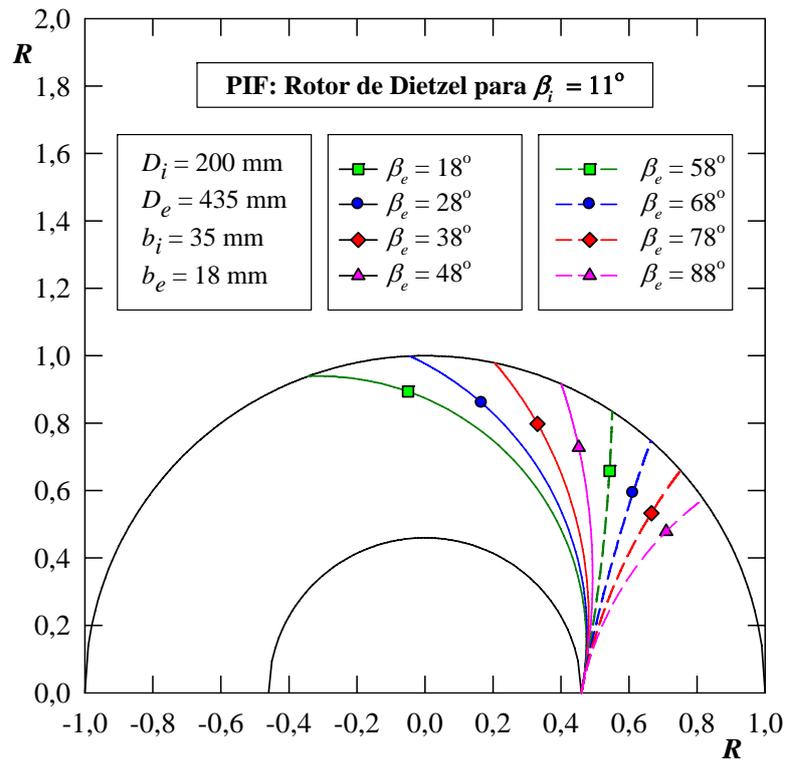
## Apêndice D

# RESULTADOS NUMÉRICOS COMPLEMENTARES

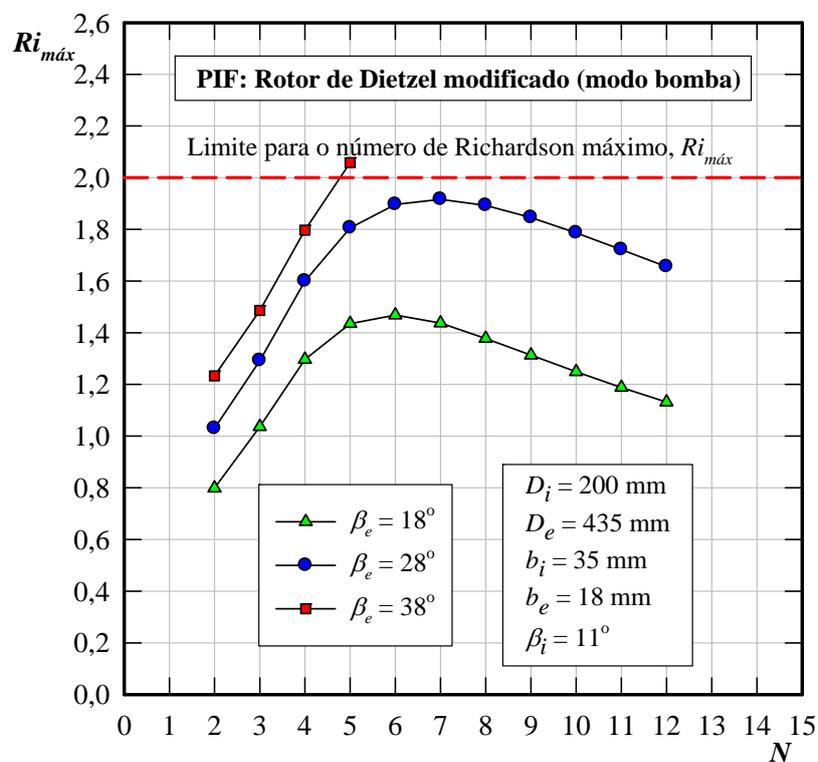
Este apêndice apresenta os resultados numéricos complementares para o rotor de Dietzel modificado referentes àqueles do Item 5.4 para o modo bomba e do Item 5.5 para o modo turbina.

## D.1 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O ROTOR DE DIETZEL MODIFICADO (MODO BOMBA)

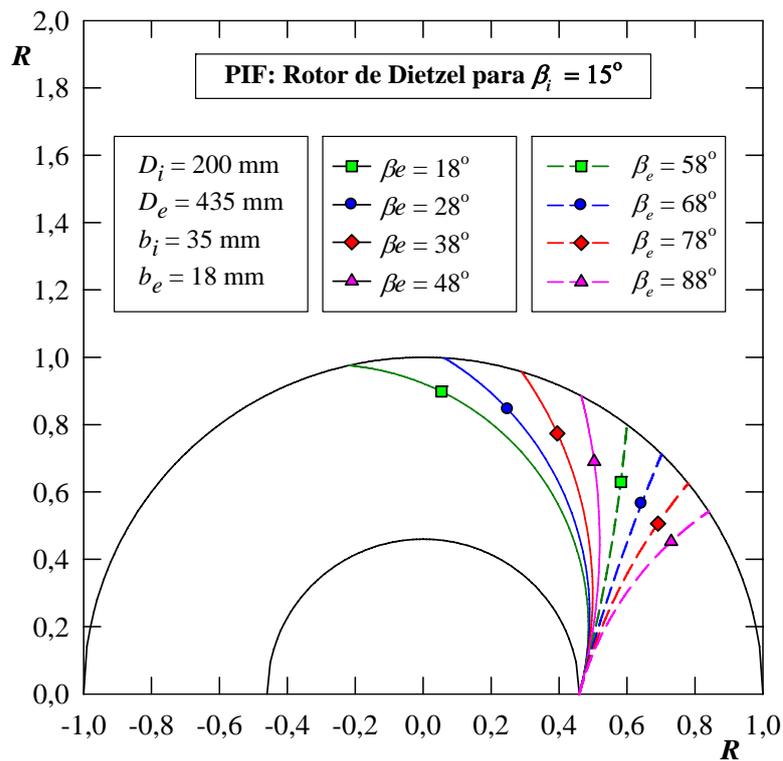
Este item apresenta os resultados numéricos para o rotor de Dietzel modificado referentes àqueles do Item 5.4 para o modo bomba. As modificações se referem àquelas comentadas no Item 5.4, ou seja: 1) modificação do ângulo de entrada da pá,  $\beta_{ip}$ ; 2) modificação do ângulo de saída da pá,  $\beta_{ep}$ ; 3) modificação do número de pás,  $N$ . Para cada uma dessas três grandezas, as outras duas são modificadas em certas faixas de valores, dependendo do valor do  $Ri_{máx}$  que não deve ser maior que 2 para não haver reversão do escoamento relativo no lado de pressão da pá. As faixas para se obter  $Ri_{máx} < 2$  que foram analisadas são:  $11^\circ \leq \beta_{ip} \leq 27^\circ$ ,  $18^\circ \leq \beta_{ep} \leq 88^\circ$  e  $2 \leq N \leq 12$ . Os resultados que seguem são para a seção transversal do rotor de Dietzel modificado e para o número de Richardson máximo.



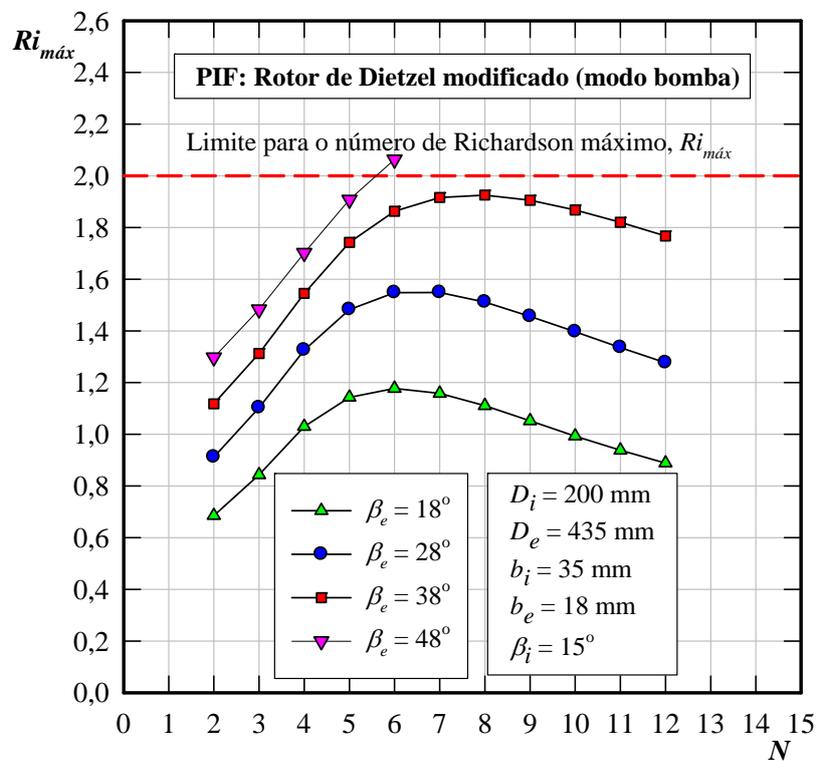
**Figura D.1** Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 11^\circ$  e diversos ângulos  $\beta_{ep}$



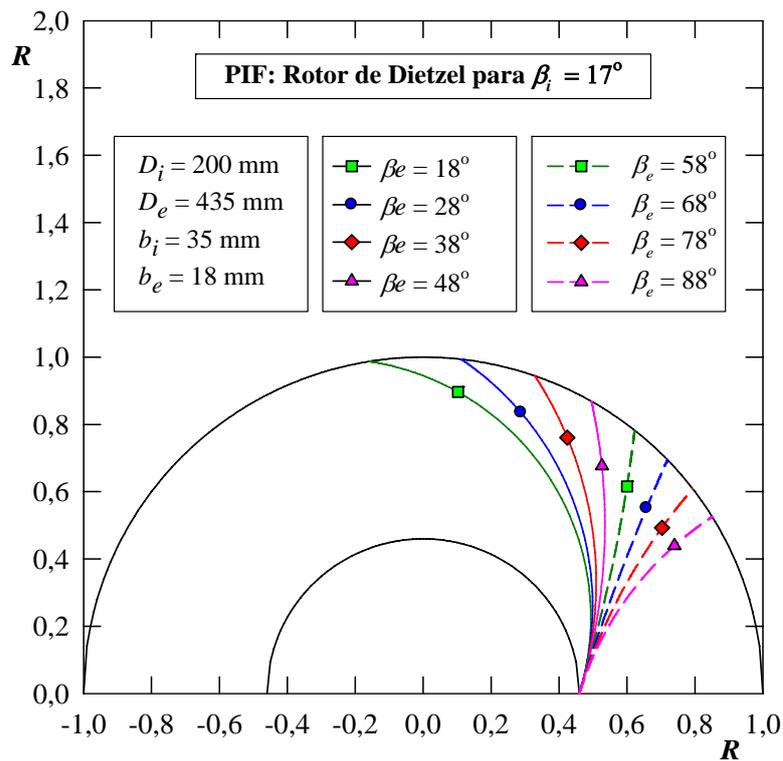
**Figura D.2** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 11^\circ$



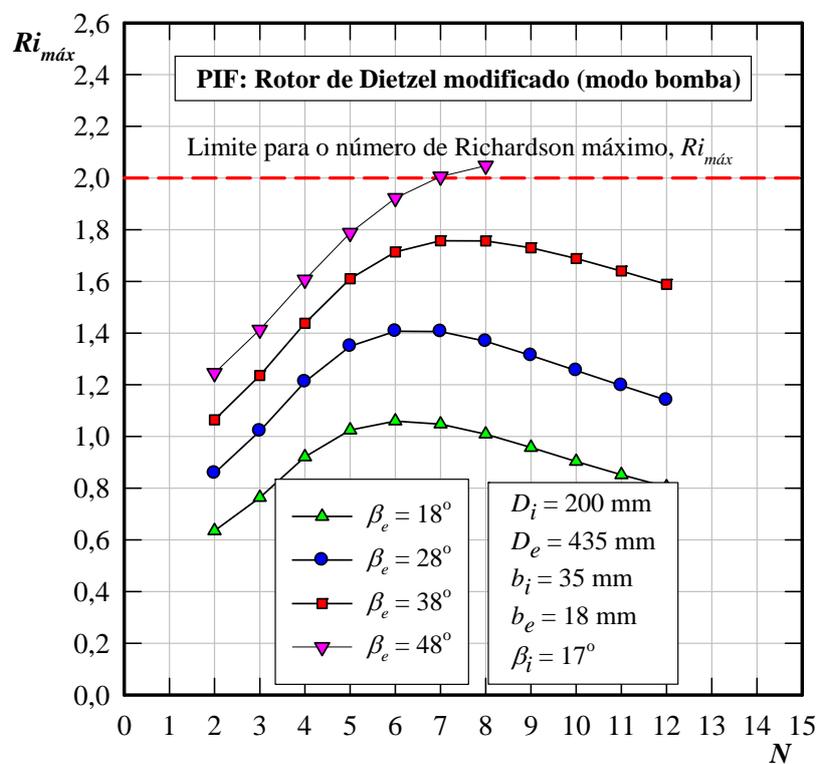
**Figura D.3** Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 15^\circ$  e diversos ângulos  $\beta_{ep}$



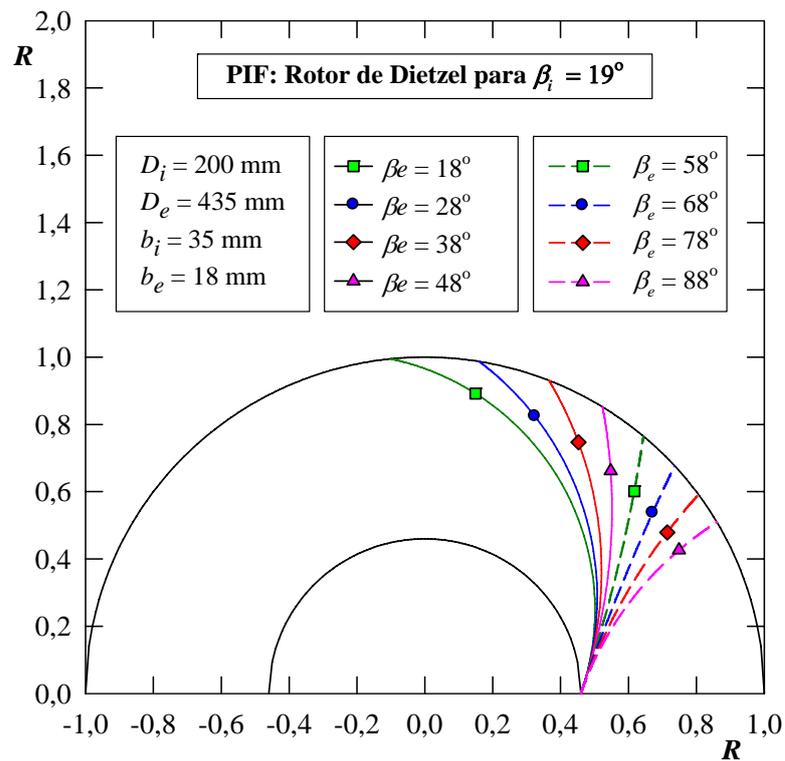
**Figura D.4** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 15^\circ$



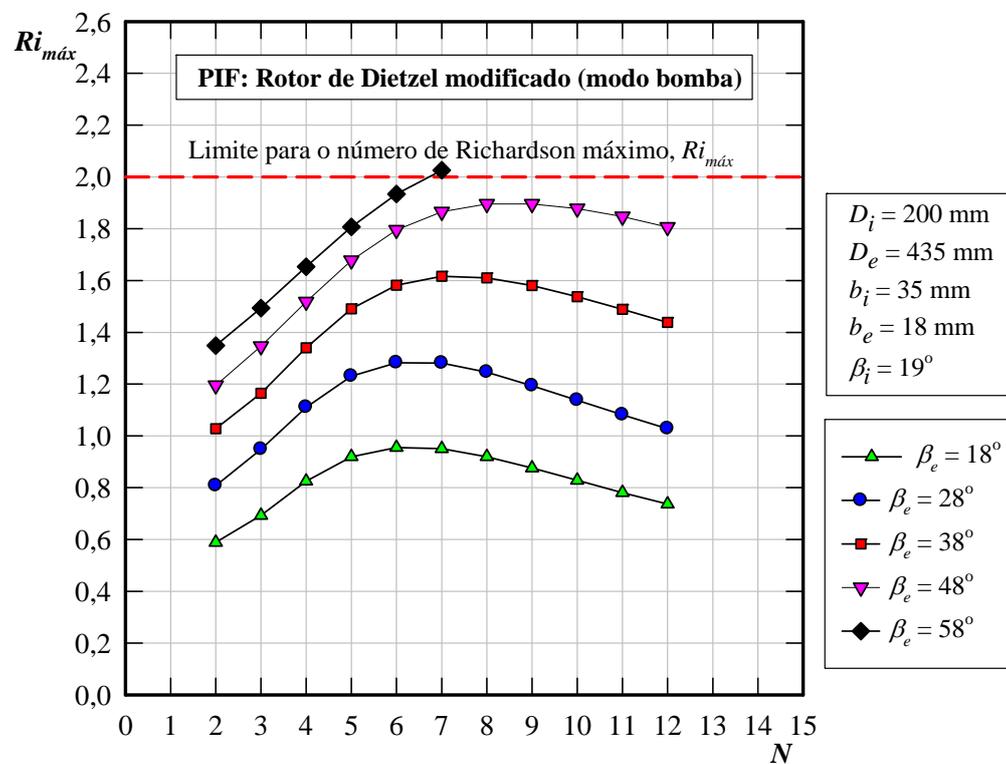
**Figura D.5** Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 17^\circ$  e diversos ângulos  $\beta_{ep}$



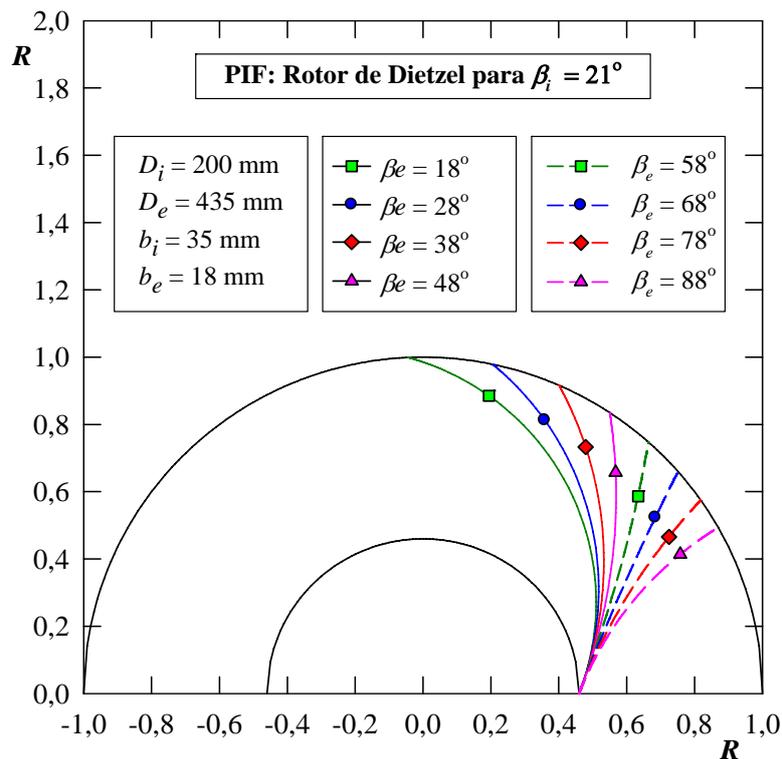
**Figura D.6** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 17^\circ$



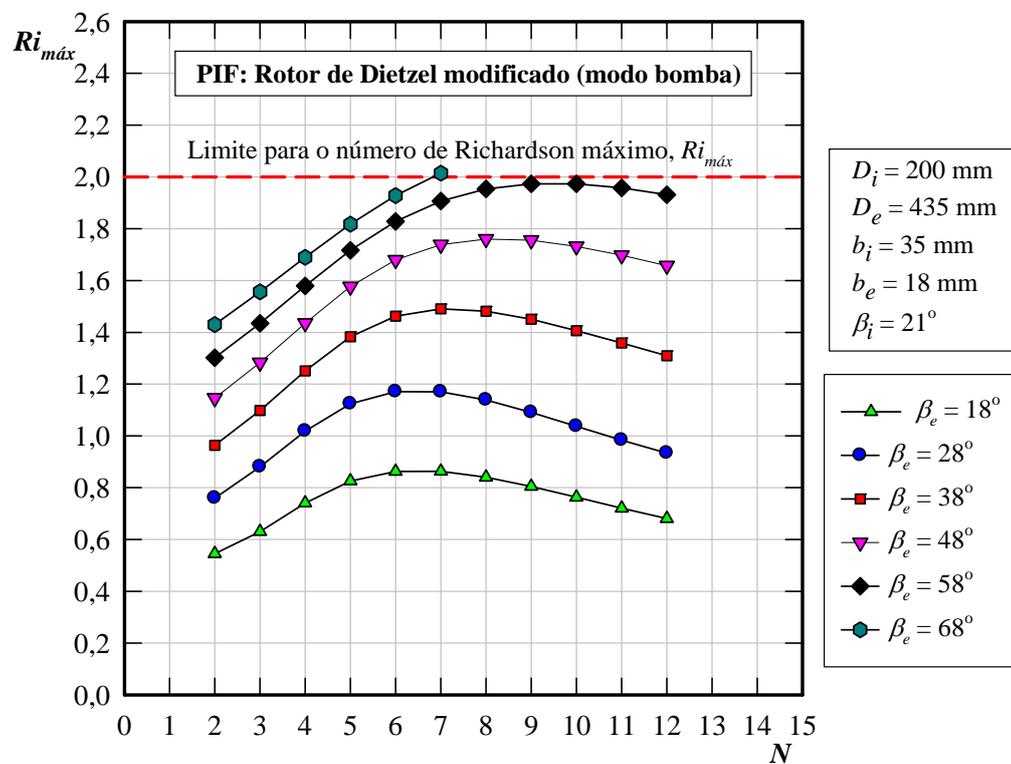
**Figura D.7** Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 19^\circ$  e diversos ângulos  $\beta_{ep}$



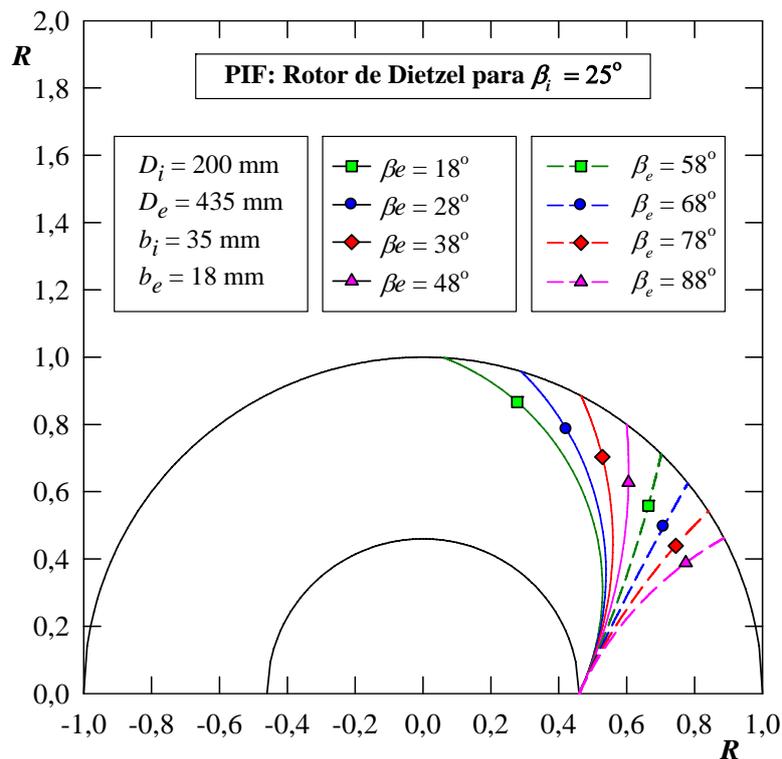
**Figura D.8** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 19^\circ$



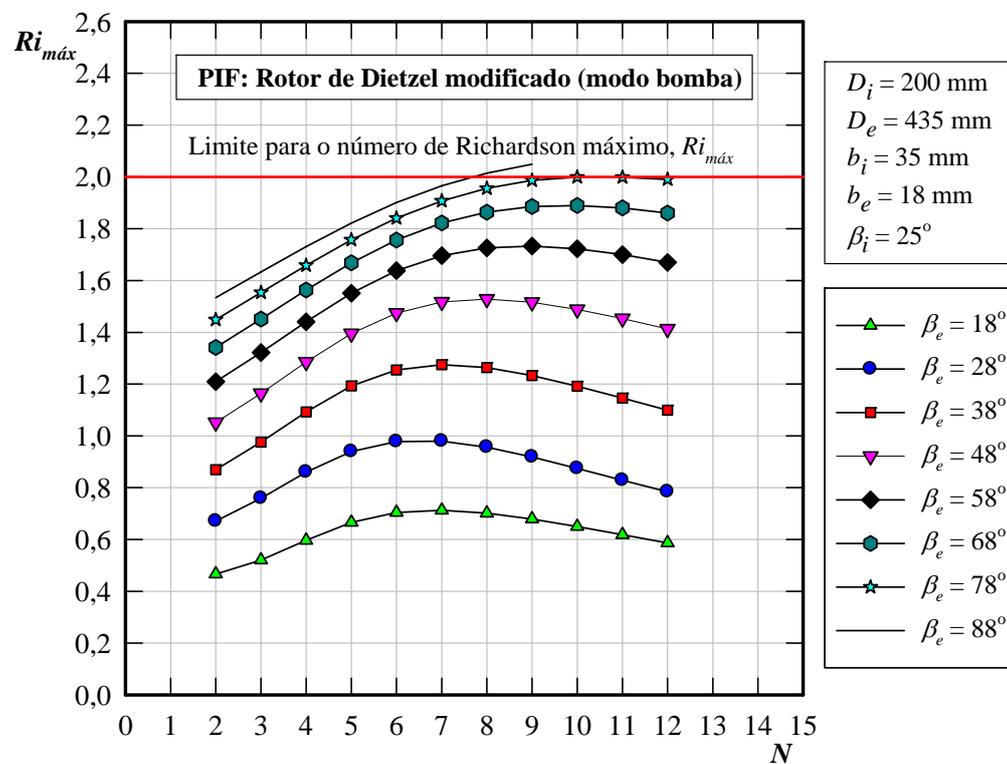
**Figura D.9** Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 21^\circ$  e diversos ângulos  $\beta_{ep}$



**Figura D.10** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 21^\circ$



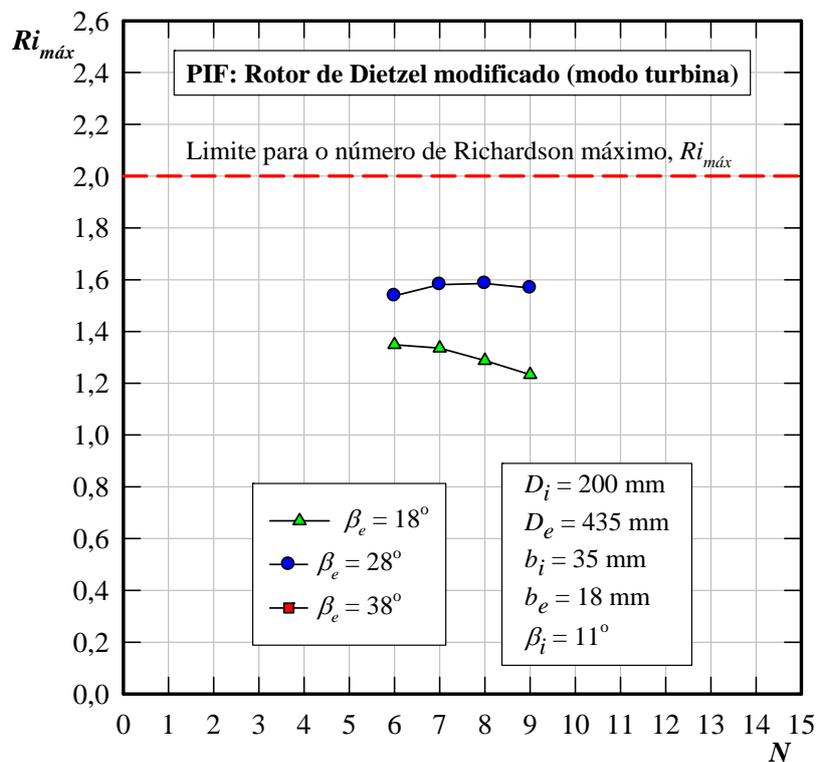
**Figura D.11** Esquema de seção transversal do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 25^\circ$  e diversos ângulos  $\beta_{ep}$



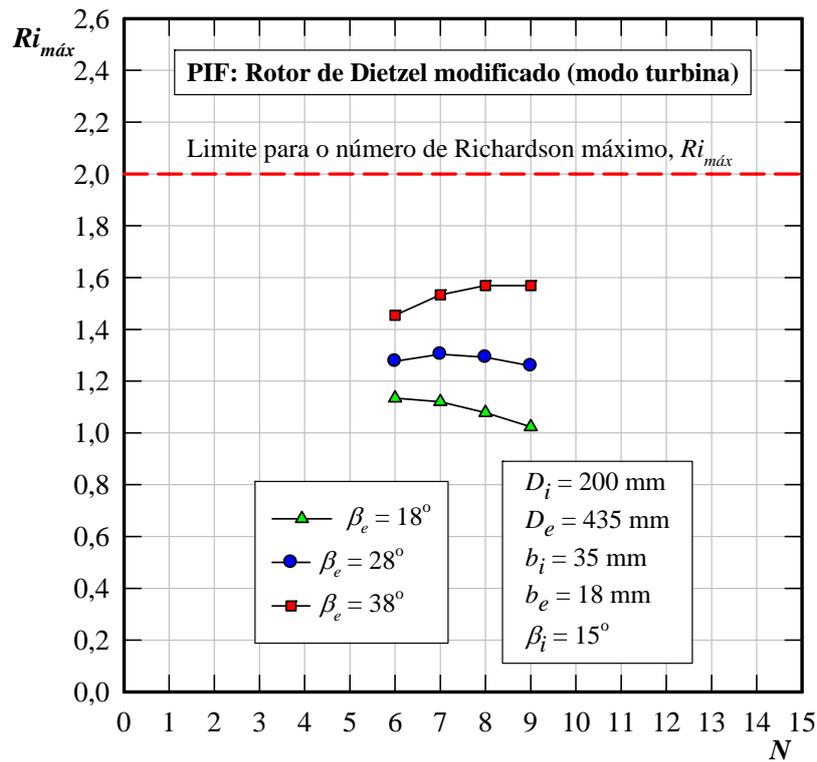
**Figura D.12** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 25^\circ$

## D.2 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O ROTOR DE DIETZEL MODIFICADO (MODO TURBINA)

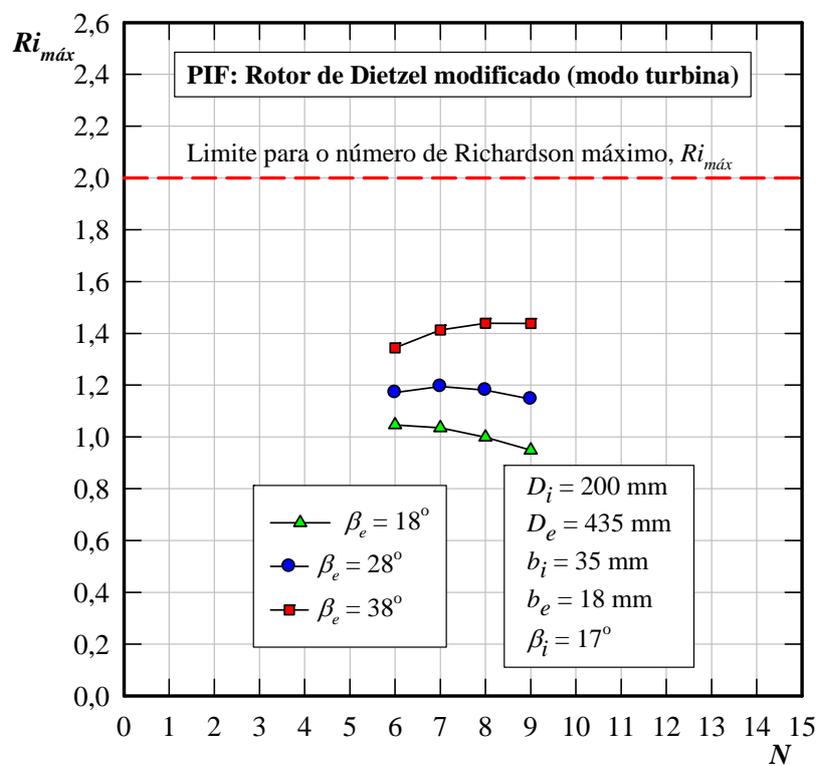
Este item apresenta os resultados numéricos para o rotor de Dietzel modificado (modo turbina). As modificações realizadas foram as mesmas descritas no início do Item 5.4 e no Item D.1. As seções meridionais do rotor de Dietzel modificado são as mesmas representadas nas figuras do Item D.1. Portanto, na sequência, são apresentados os resultados do número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com diversos ângulos de entrada das pás,  $\beta_{ip}$ .



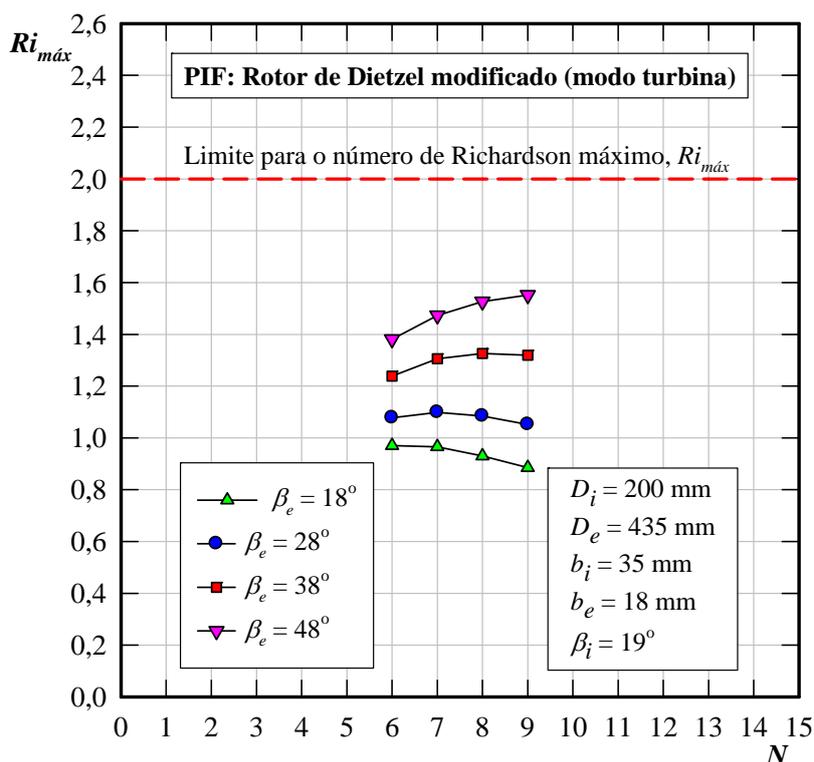
**Figura D.13** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 11^\circ$  no modo turbina



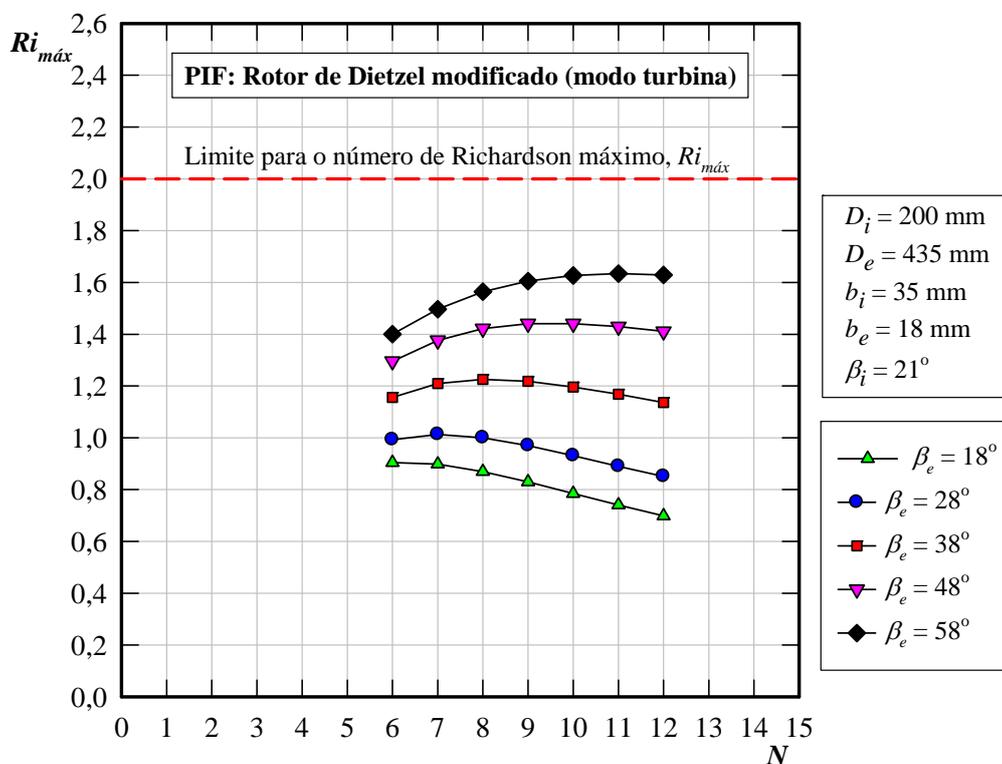
**Figura D.14** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 15^\circ$  no modo turbina



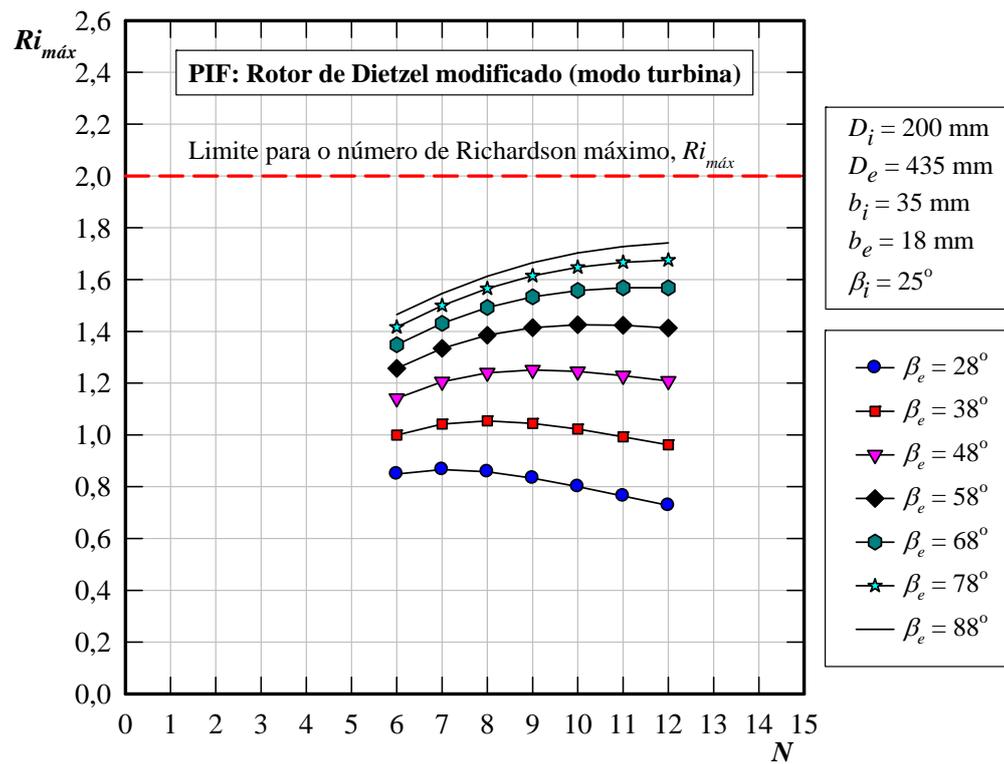
**Figura D.15** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 17^\circ$  no modo turbina



**Figura D.16** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 19^\circ$  no modo turbina



**Figura D.17** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 21^\circ$  no modo turbina



**Figura D.18** Número de Richardson máximo em função do número de pás do rotor de Dietzel modificado para pás com  $\beta_{ip} = 25^\circ$  no modo turbina

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACOSTA, A. J. (1952)**, An experimental and theoretical investigation of two-dimensional centrifugal pump impeller, Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California
- ADLER, D. (1980-a)**, “Status of centrifugal impeller internal aerodynamics - Part I: Inviscid flow prediction methods”, ASME Journal of Engineering for Power, Vol. 102, pp. 728-737
- ADLER, D. (1980-b)**, “Status of centrifugal impeller internal aerodynamics - Part II: Experiments and influence of viscosity”, ASME Journal of Engineering for Power, Vol. 102, pp. 738-746
- ADLER, D., KRIMERMAN, Y. (1980)**, “On the relevance of inviscid subsonic flow calculations to real centrifugal impellers flows”, ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 102, pp. 78-84
- BALJÉ, O. E. (1978)**, “A flow model for centrifugal compressor rotors”, ASME Journal of Engineering for Power, Vol. 100, pp. 148-158
- BALJÉ, O. E. (1981)**, “Turbomachines - A guide to design, selection, and theory”, John Wiley & Sons, Inc.
- BUSEMANN, A. (1928)**, “Das Förderhöhenverhältniss radialer Kreiselpumpen mit logarithmischspiraligen Schaufeln”, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 8, S. 371-384
- CUMPSTY, N. A. (1989)**, “Compressor aerodynamics”, Longman Scientific & Technical
- DEAN JR., R. C., SENOO, Y. (1960)**, “Rotating wakes in vaneless diffusers”, ASME Journal of Basic Engineering, Vol. 82, pp. 563-574

**DIETZEL, F. (1980)**, “Turbinen, Pumpen und Verdichter”, Vogel-Buchverlag

**ECKARDT, D. (1976)**, “Detailed flow investigations within a high speed centrifugal compressor impeller”, ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 98, pp. 390-402

**ECKARDT, D. (1980)**, “Flow field analysis of radial and backswept centrifugal compressor impellers, Part I: Flow measurement using a laser velocimeter”, The 25<sup>th</sup> Annual International Gas Turbine Conference and the 22<sup>th</sup> Annual Fluids Engineering Conference, New Orleans, Symposium Performance Prediction of Centrifugal Pumps and Compressors - ASME, pp. 77-86

**ECKERT, B., SCHNELL, E. (1961)**, “Axial und Radialkompressoren- Anwendung/Theorie/Berechnung”, Springer-Verlag

**EREMEEF, L. R. (1974)**, “Calcul des écoulements dans les turbomachines en fluide parfait et incompressible”, Compte rendu, Contrat No. 73.71765.00.221.75.01, Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique, Grenoble

**FAGAN, J. R., FLEETER, S. (1991)**, “Impeller flow field measurement and analysis”, ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 113, pp. 670-679

**FERNANDES, E. C. (1978)**, “Análise do escoamento em máquinas de fluxo segundo o método das singularidades”, Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA – IEME (Publicação Interna), São José dos Campos – SP - Brasil

**FERNANDES, E. C., OLIVEIRA, W. (1991)**, “Cálculo do escoamento potencial em rotores centrífugos de máquinas de fluxo”, IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, São Paulo, Brasil, p. 497-500

**GREITZER, E. M. (1981)**, “The stability of pumping systems - The 1980 Freeman Scholar Lecture”, ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 103, pp. 193-242

**FINEP/EFEI (1981)**, “Pesquisa de novas formas de ventiladores visando reduzir o seu volume construtivo do escoamento, ruído e vibração”, FINEP/EFEI, Itajubá - MG

**FISHER, E. H., LEWIS, R. I. (1971)**, “Exact solutions for conical mixed-flow rotors”, Part I: Symmetrical profiled blades, N.E.L. Report No. 498, D.T.I., Part II: Cambered blades of finite thickness, N.E.L. Report 524, D.T.I.

- GIESING, J. P. (1964)**, “Extension of the Douglas Neumann program to problems of lifting cascades”, Report No. LB 31653, Bureau of Ships Fundamental Hydromechanics Research, USA
- GOSTELOW, J. P. (1973)**, “Review of compressible flow theories for airfoil cascades”, ASME Journal of Engineering for Power, Vol. 95, pp. 281-292
- HASSENPFUG, W.C. (2010)**, “The incompressible two-dimensional potential flow through blades of a rotating radial impeller”, Mathematical and Computer Modelling, Vol. 52, No. 9 - 10, pp. 1299-1389
- HATHAWAY, M. D., CHRISS, R. M., WOOD, J. R. AND STRAZISAR, A. J. (1993)**, “Experimental and computational investigation of the NASA low-speed centrifugal compressor flow field”, ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 115, pp. 527-542
- HESS, J. L., SMITH, A. M. O. (1967)**, “Calculation of potential flow about arbitrary bodies”, Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 8, pp. 1-138
- HOFFMEISTER, M. (1960)**, “Berechnung der Strömung durch ein radiales Laufrad unter Berücksichtigung der veränderlichen Breite der Schaufeln”, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden, Band 9, Heft 1, S. 27-36
- HUNZIKER, R., GYARMATHY, G. (1994)**, “The operational stability of a centrifugal compressor and its dependence on the characteristics of the subcomponents”, ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 116, pp. 250-259
- ISAY, W. H. (1954)**, “Beitrag zur Potentialströmung durch radiale Schaufelgitter”, Ingenieur - Archiv, Band 32, S. 203-210
- JAPIKSE, D. (1976)**, “Review - Progress in numerical turbomachinery analysis”, ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 98, pp. 592-606
- KARAMCHETI, K. (1966)**, “Principles of ideal-fluid aerodynamics”, John Wiley
- KUSHARSKI, W. (1918)**, Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper, Oldenbourg, München
- LAMB, H. (1932)**, “Hydrodynamics”, Cambridge University Press
- LAKSHMINARAYANA, B. (1996)**, “Fluid dynamics and heat transfer of turbomachinery”, John Wiley & Sons Inc.

- LAVRENTIEV, M., B. CHABAT, B. (1977)**, “Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe”, Éditions Mir, Moscou
- LEWIS, R. I. (1991)**, “Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems”, Cambridge University Press
- MANZANARES FILHO, N. (1982)**, “Escoamento potencial em grades radiais de máquinas de fluxo”, Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá - MG
- MANZANARES FILHO, N., OLIVEIRA, W. (1992)**, “Cálculo do escoamento potencial em rotores centrífugos com pás finas e largura variável”, ENCIT, IV Encontro Nacional de Ciências Térmicas, ABCM, Rio de Janeiro - RJ
- MARTENSEN, E. (1959)**, “Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholmschen Integralgleichung”, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Band. 3, S. 235-270
- McNALLY, W. D., SOCKOL, P. M. (1985)**, “Review - Computational methods for internal flows with emphasis on turbomachinery”, ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 107, pp. 6-22
- MURATA, S., OGAWA, T., GOTOH, M. (1978)**, “On the flow in a centrifugal impeller (2<sup>nd</sup> Report, Effects of change in impeller width)”, Bulletin of the JSME, Vol. 21, No. 151, pp. 90-97
- NYIRI, A. (1970)**, “Determination of the theoretical characteristics of hydraulic machines based on potential theory”, Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Vol. 69 (3-4), pp. 243-273
- OLIVEIRA, W. (2001)**, “Análise do escoamento em turbomáquinas radiais”, Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA, Documento N.: CTA/ITA-IEM/TD-007/2001, São José dos Campos – SP
- PFLEIDERER, C. (1960)**, “Bombas centrífugas y turbocompresores”, Editorial Labor S. A.
- SALOMON, L. B. R. (1972)**, “Cálculo teórico do escoamento em máquinas de fluxo radiais”, Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá - MG
- SCHULTZ, W. (1928)**, “Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln”, ZAMM Z. Angew. Math. Mech, Vol. 8, No. 1

- SEBESTYÉN, A. STECK, E., FELSCH, O. (1983)**, “Comparison of two methods for calculating the velocity distribution in rotation cascade”, Proceedings of the Seventh Conference on Fluid Machinery, Budapest, Vol. 2, pp. 779-787
- SÖRENSEN, E. (1927)**, “Potentialströmungen durch rotierende Kreiselräder”, ZAMM Z. Angew. Math. Mech, Vol. 7
- SPANNHAKE, W. (1925-a)**, “Leistungsaufnahme einer parallelkränzigen Zentrifugalpumpe”, Festschrift, Karlsruhe 1925. Festschrift zur Jahrhundertfeier der T.H. Karlsruhe, S. 387-400
- SPANNHAKE, W. (1925-b)**, “Anwendung der Konformen Abbildung auf die Berechnung von Strömungen in Kreiselrädern”, ZAMM Z. Angew. Math. Mech, Vol. 5, No. 6, S. 481-484
- STAUFER, F. (1936)**, “Verfahren zur Bestimmung der Schaufel-Form um Laufender Kreisfoermiger Schaufelgitter”, Wasserkraft und Wasserwirtschaft, Vol. 31, S. 212-219
- STOW, P. (1985)**, “Turbomachinery blade design using advanced calculation methods”, Thermodynamics and Fluid Mechanics of Turbomachinery, NATO ASI Series E, No. 97A, Vol. II, pp. 923-964
- VAVRA, M. H. (1974)**, “Aero-thermodynamics and flow in turbomachines”, Robert E. Krieger Publishing Company
- VIOLATO, O. M. (2004)**, “Análise teórica do escoamento em rotores centrífugos com pás auxiliares”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI, Itajubá - MG
- WAGENBACH, W. (1908)**, “Beiträge zur Berechnung und Konstruktion der Turbomaschinen, Z”, Gesamte Turbinenwes, Vol. 17, pp. 261-263; 282-286
- WHITFIELD, A., BAINES, N. C. (1990)**, “Design of radial turbomachines”, Longman Scientific & Technical
- WILKINSON, D. (1967)**, “A numerical solution of the analysis and design problems for the flow past one or more aerofoils or cascades”, ARC Report & Memorandum, 3545
- WU, C. H. (1952)**, “A general theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial -, radial-, and mixed-flow types”, NACA TN 2604