

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Estudo da Bifurcação de
Neimark-Sacker**

Júlio César Siqueira Cardoso

Orientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga
Coorientador: Prof. Dr. Bráulio Augusto Garcia

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 27 DE AGOSTO DE 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estudo da Bifurcação de Neimark-Sacker

Júlio César Siqueira Cardoso

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ – MG

27 DE AGOSTO DE 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estudo da Bifurcação de Neimark-Sacker

Júlio César Siqueira Cardoso

Dissertação aprovada por banca examinadora em 30 de julho de 2024, conferindo ao autor o título de Mestre em Ciências em Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luiz Fernando Gonçalves, UFG

Prof. Dr. Fabio Scalco Dias, UNIFEI

Prof. Dr. Bráulio Augusto Garcia (Coorientador), UNIFEI

Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga (Orientador), UNIFEI

ITAJUBÁ – MG

27 DE AGOSTO DE 2024

Dedico este trabalho a minha esposa e aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a Deus primeiramente, por ter me dado principalmente saúde e por ter me guiado para realizar este sonho.

A minha esposa Natasha, por sempre me apoiar em todas as minhas decisões, sempre me escutando e aconselhando durante todo o mestrado.

Aos meus pais, Maria Aparecida e Sebastião, por todos os ensinamentos e apoio em todos os momentos de minha vida e aos meus irmãos, que sempre estiveram presentes me incentivando.

Ao meu orientador, prof. Denis de Carvalho Braga, por toda paciência, dedicação, comprometimento, competência e apoio na orientação, sem a ajuda do qual eu não chegaria até aqui.

Ao meu coorientador, prof. Bráulio Augusto Garcia, que fez parte da minha formação acadêmica desde a graduação, me orientando tanto no trabalho final de graduação, quanto no mestrado, me ensinando sempre com muita humildade e competência.

Aos professores do Instituto de Matemática e Computação da UNIFEI, sem o empenho e dedicações de vocês, este sonho não teria se realizado.

Aos colegas e amigos do mestrado, pelas alegrias vividas durante o mestrado, bem como por todas as dificuldades que passamos juntos.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos de mestrado.

“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.”

Galileu Galilei

Resumo

Esta dissertação trata de uma bifurcação local para aplicações suaves no plano, dependendo de um parâmetro real, chamada bifurcação de Neimark-Sacker de codimensão 1, que, em certo sentido, guarda muitas semelhanças com a bifurcação de Hopf para equações diferenciais ordinárias. Em ambas as bifurcações, a mudança na estabilidade de um ponto fixo ou ponto de equilíbrio, junto com uma condição de transversalidade associada com certos autovalores da matriz Jacobiana calculada no ponto, além de uma ou mais condições de não degenerescência, permite o surgimento ou desaparecimento de uma curva fechada invariante pela dinâmica no retrato de fase quando o parâmetro é variado. Este tema foi escolhido devido a sua importância no estudo de sistemas dinâmicos discretos e aplicações em diversas áreas da ciência e, neste sentido, o Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de codimensão 1 é enunciado e demonstrado no caso planar e empregado no estudo de dois modelos biológicos conhecidos na literatura, a saber, a equação logística com atraso e a equação predador-presa discreta.

Palavras-chave: Bifurcação de Neimark-Sacker de codimensão 1, Curva fechada invariante, Equação logística com atraso, Equação predador-presa discreta.

Abstract

This dissertation deals with a local bifurcation for planar smooth mappings, depending on a real parameter, called Neimark-Sacker bifurcation of codimension 1, which, in a certain sense, shares many similarities with the Hopf bifurcation for ordinary differential equations. In both bifurcations, the change in stability of a fixed point or equilibrium point, together with a transversality condition associated with certain eigenvalues of the Jacobian matrix evaluated at the point, along with one or more nondegeneracy conditions, allows the appearance or disappearance of an invariant closed curve by the dynamics in the phase portrait when the parameter is varied. This topic was chosen due to its importance in the study of discrete dynamical systems and applications in many scientific areas. In this sense, the Theorem of Neimark-Sacker Bifurcation of codimension 1 is stated and proved in the planar case, and applied to the study of two well-known biological models, namely, the delayed logistic equation and the discrete predator-prey equation.

Keywords: Neimark-Sacker Bifurcation of codimension 1, Invariant closed curve, Delayed logistic equation, Discrete predator-prey equation.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Sumário	vi
Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
1.1 Curvas Fechadas Invariantes e Bifurcações de Aplicações no Plano: Contexto Histórico	1
1.2 Objetivos da Dissertação	3
1.3 Estrutura da Dissertação	4
2 O Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de Codimensão 1	5
2.1 Algumas Definições	5
2.2 Aplicações Suaves em \mathbb{R}^2	7
2.3 Enunciado do Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de Codimensão 1	10
2.4 Notação	15
3 Aplicações em Modelos Biológicos	17
3.1 Equação Logística com Atraso	17
3.2 Equação Predador-presa Discreta	22

4	Demonstração do Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de Codimensão 1	28
4.1	Forma Normal Truncada da Bifurcação de Neimark-Sacker	29
4.2	Bifurcação Genérica de Neimark-Sacker	35
5	Conclusão da Demonstração do Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de Codimensão 1	48
5.1	Demonstração do Lema 4.1.1	48
	Conclusões	60
	Bibliografia	61

Lista de Figuras

3.1	A linha na cor azul representa a curva fechada invariante assintoticamente estável no retrato de fase da equação logística com atraso (3.1) para $\rho > \rho_0 = 2$ próximo de ρ_0 . O ponto azul representa o ponto fixo $x_\rho = ((\rho - 1)/\rho, (\rho - 1)/\rho)$. O valor do parâmetro é $\rho = 21/10$	22
3.2	A linha na cor azul representa a curva fechada invariante assintoticamente estável no retrato de fase da equação predador-presa discreta (3.6) que surge quando $\rho > \rho_0 = 1/(1 - 2\sigma)$ próximo de ρ_0 . O ponto azul representa o ponto fixo $x_\rho = (\sigma, \rho(1 - \sigma) - 1)$. Os valores dos parâmetros são $\rho = 13/10$ e $\sigma = 1/10$	27
4.1	Bifurcação Neimark-Sacker supercrítica.	32
4.2	Bifurcação Neimark-Sacker subcrítica.	33
5.1	Curvas fechadas acumuladas.	55
5.2	Definição da aplicação \mathcal{F}	56

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo são apresentados o assunto da dissertação, uma revisão da literatura e a estrutura da dissertação.

1.1 Curvas Fechadas Invariantes e Bifurcações de Aplicações no Plano: Contexto Histórico

Em 1885, o matemático Henri Poincaré definiu o número de rotação para homeomorfismos do círculo preservando orientação tendo em vista aplicações no estudo de órbitas de planetas. Tal conceito é um invariante dinâmico e, de modo não rigoroso, fornece a velocidade angular média com que um ponto do círculo roda sob a ação de um homeomorfismo. Além disto, quando é um número racional, o número de rotação tem relação com a existência de pontos periódicos da dinâmica do homeomorfismo. Um estudo detalhado sobre o número de rotação pode ser encontrado em [3] e [4].

O fato é que, em geral, a existência de uma curva fechada invariante isolada, sobretudo atratora, no retrato de fase de uma aplicação contínua no plano permite o cálculo do número de rotação e, conseqüentemente, o entendimento de certos aspectos da dinâmica dada pelas iteradas da aplicação. Por curva fechada invariante entende-se um conjunto, invariante pela dinâmica da aplicação, homeomorfo ao círculo. Quando a aplicação depende de um ou mais parâmetros a continuação desta curva pode convergir para

um conjunto atrator, levando a dinâmicas ainda mais interessantes, já que pontos neste conjunto podem rodar com números de rotação diferentes [2].

No caso de equações diferenciais ordinárias em \mathbb{R}^3 , se existe uma curva fechada invariante pela aplicação de Poincaré na seção transversal, então existe um toro invariante bidimensional no retrato de fase da equação diferencial cuja estabilidade é a mesma da curva fechada invariante [5] e o número de rotação determina se as órbitas são densas ou periódicas no toro.

A existência, número e a estabilidade de curvas fechadas invariantes pela dinâmica de uma aplicação podem ser obtidas através de alguns resultados conhecidos, dentre eles, o Teorema de Moser [12] e o Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker [8]. No Teorema de Moser há certas restrições, visto que a aplicação no plano necessariamente precisa ser analítica real preservando área. Além disto, em geral, é necessário realizar uma mudança de variáveis, algumas vezes para a colocar na forma normal de Birkhoff, o que nem sempre é fácil de realizar. O Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker é mais geral, tratando de aplicações suaves no \mathbb{R}^m , $m \geq 2$.

A origem do Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker tem relação direta com o matemático soviético A.A. Andronov que estudou o surgimento ou desaparecimento de ciclos limites no retrato de fase de equações diferenciais ordinárias no plano quando um par de autovalores complexos conjugados da matriz Jacobiana calculada em um ponto de equilíbrio cruza o eixo imaginário com derivada não nula. A versão moderna e mais geral deste resultado, com todas as condições de genericidade, é conhecida como bifurcação de Poincaré-Andronov-Hopf. Os resultados de A.A. Andronov, junto com o cálculo dos valores focais (ou coeficientes de Lyapunov), podem ser encontrados em [1].

Tendo por base o trabalho de A.A. Andronov, o também matemático soviético J. Neimark (ou J. Naimark) conjecturou que uma curva fechada invariante também poderia bifurcar de um ponto fixo de uma aplicação no plano, desde que uma condição semelhante sobre os autovalores fosse satisfeita. Seus resultados foram registrados em [11] no ano de 1959. O trabalho de J. Neimark era incompleto e coube ao matemático norte-americano R. Sacker, de maneira independente, completar os detalhes. No contexto de equações

diferenciais ordinárias e existência de toros invariantes, R. Sacker percebeu que certas condições de ressonância deveriam ser evitadas a fim de que uma aplicação no plano pudesse ser colocada em uma forma normal. Seu resultado foi incluído em sua tese de doutorado, sob a orientação de J.K. Moser, e publicado em 1965. Veja [15] e [16].

A bifurcação de Neimark-Sacker é também conhecida como bifurcação de Hopf para difeomorfismos por causa do artigo de D. Ruelle e F. Takens [14] e do livro de J.E. Marsden e M. McCracken [10]. Embora haja semelhanças nas condições de genericidade e no surgimento ou desaparecimento de uma curva fechada no retrato de fase, contudo, há uma diferença. Nas condições de ocorrência de uma bifurcação de Hopf de codimensão 1, a dinâmica de uma equação diferencial ordinária no plano é topologicamente equivalente à forma normal truncada (sem os termos de ordem superior) da bifurcação de Hopf. No caso da bifurcação de Neimark-Sacker de codimensão 1, os termos de ordem superior não podem ser desprezados, visto que, embora não alterem a bifurcação da curva fechada invariante, interferem na dinâmica restrita a esta curva.

Conforme [16], a bifurcação de Neimark-Sacker ficou amplamente conhecida devido ao livro de Y.A. Kuznetsov [8], mas, segundo o próprio Y.A. Kuznetsov, seu tratamento moderno, com as condições de transversalidade e não degenerescência, como aparece neste mesmo livro, é devido a G. Iooss [6]. A prova do Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de codimensão 1 no plano pode ser encontrada em ambos os livros e são semelhantes. A prova apresentada em [8] segue aquela de [10].

Tendo em conta a importância do resultado de J. Neimark e R. Sacker na teoria de sistemas dinâmicos e nas aplicações em diversas áreas da ciência, como física, biologia, engenharia e economia, este será o assunto desta dissertação.

1.2 Objetivos da Dissertação

O objetivo principal é enunciar e demonstrar o Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de codimensão 1 no plano conforme [8]. O objetivo secundário é a aplicação do teorema em dois modelos biológicos simples e conhecidos na literatura: a

equação logística com atraso e a equação predador-presa discreta.

Exceto por algumas modificações nas notações, a análise da equação logística com atraso é a mesma feita em [8] e o estudo da equação predador-presa discreta segue [7]. Para ambos os modelos, o interesse está apenas na existência e estabilidade de curvas fechadas invariantes. Assim sendo, certos pontos fixos não são analisados. Além disto, fica a cargo do leitor as interpretações biológicas dos resultados.

Este estudo não trata:

1. Das ressonâncias 1:1, 1:2, 1:3 e 1:4 de aplicações suaves no plano;
2. Da bifurcação de Neimark-Sacker de codimensão 2 no plano, também conhecida como Bifurcação de Chenciner;
3. Do Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de codimensão 1 (ou codimensão 2) em \mathbb{R}^m , $m \geq 3$.

O leitor interessado nestes casos pode consultar [8] e [9]. Os casos **1** e **2** surgem quando certas condições de não degenerescência não são satisfeitas. Uma ideia sobre a ocorrência destes dois primeiros casos é fornecida no final do **Capítulo 2**.

1.3 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está dividida em seis capítulos. No **Capítulo 1**, que é a introdução a esta dissertação, há uma contextualização histórica do problema a ser estudado, a apresentação de algumas referências bibliográficas e do assunto principal a ser abordado na dissertação e a estrutura da dissertação. No **Capítulo 2**, são introduzidos alguns conceitos e resultados sobre aplicações no plano, úteis também para fixar as notações, e enunciado o **Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker** genérica de codimensão 1 no plano. A aplicação do teorema aos modelos biológicos é feita no **Capítulo 3**. Em seguida, os **Capítulos 4** e **5** tratam da prova do teorema. Finalmente, em **Conclusões** são fornecidas as considerações finais.

Capítulo 2

O Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de Codimensão 1

O objetivo principal aqui é apresentar o enunciado do Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de codimensão 1 no plano. Antes, são apresentadas algumas definições e resultados estritamente necessários para a completude do texto e que também servem para fixar grande parte das notações utilizadas ao longo da dissertação, embora nem sempre tenha sido possível atribuir notações distintas a objetos matemáticos distintos.

2.1 Algumas Definições

Parte do texto desta seção foi adaptada de [3] e [4]. Um sistema dinâmico discreto é um par (X, f) , com X um conjunto denominado espaço de estados e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação denominada de dinâmica.

Estamos interessados no caso em que f é contínua em X , com X munido com uma métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes exigências para cada $x, y, z \in X$:

- a. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
- b. $d(x, y) = d(y, x)$;
- c. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Nestas condições, (X, d) é chamado **espaço métrico**. Ele será um **espaço métrico completo** se toda sequência de Cauchy em X for convergente. Em outras palavras, se (x_n) , $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, é uma sequência de Cauchy em X , ou seja, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ para $m, n > N$, então existe $x_0 \in X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$. Mais detalhes, bem como o conceito de limite, podem ser encontrados em [13].

A evolução da dinâmica no tempo discreto $n \in \mathbb{N}$ é obtida pelas iteradas da aplicação f . Dados um ponto $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, a n -ésima iterada de f é $f^n(x)$ obtida por composições, a saber,

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ vezes}}(x).$$

Para $k = 0$, f^0 é a aplicação identidade tal que $f^0(x) = x$.

A partir das iteradas definimos a **órbita positiva** de $x \in X$ por f como sendo o conjunto

$$O^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}.$$

É mais fácil pensar nas mudanças de variáveis em f , quando necessárias, a partir da equação de recorrência

$$y_{n+1} = f(y_n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

que pode ser reescrita em notação simplificada como $\tilde{y} = f(y)$, com $\tilde{y} = y_{n+1}$ e $y = y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Segue que, dado um ponto inicial $y_0 \in X$, a órbita positiva a partir (2.1) é

$$O^+(y_0) = \{y_0, y_1 = f(y_0), y_2 = f(y_1) = f^2(y_0), \dots, y_n = f(y_{n-1}) = f^n(y_0), \dots\}.$$

Um ponto $x_0 \in X$ é um **ponto periódico de período** $l \in \mathbb{N}$ se $f^l(x_0) = x_0$, mas $f^n(x_0) \neq x_0$ se $1 \leq n \leq l - 1$. Se $l = 1$, então $f(x_0) = x_0$ e $x_0 \in X$ é chamado **ponto fixo** da aplicação f .

Sob certas hipóteses, uma aplicação f tem um único ponto fixo. Um destes resultados é conhecido como **Teorema da Contração** ou **Teorema do Ponto Fixo de Banach**. O enunciado e a prova deste teorema podem ser encontrados em [13]. O enunciado está também em [8].

Teorema 2.1.1. *Se (X, d) é um espaço métrico completo e $f : X \rightarrow X$ é uma contração em X , ou seja, existe $\epsilon \in (0, 1)$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \epsilon d(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

então existe um, e somente um, $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$. Além disto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), x_0) = 0, \quad \forall x \in X.$$

Um conjunto $A \subset X$ é **invariante** pela aplicação f , se $f(A) \subset A$. Se $x_0 \in X$ é um ponto periódico de período $l \in \mathbb{N}$ da aplicação f , então $A = O^+(x_0)$ é um conjunto invariante por f . Conjuntos invariantes associados com pontos fixos e curvas fechadas são objetos de interesse neste trabalho.

Para finalizar esta seção, introduzimos a noção de conjugação. Dois sistemas dinâmicos discretos, (X, f) e (Y, g) , são **topologicamente conjugados** se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$, chamado **conjugação topológica**, tal que

$$h(f(x)) = g(h(x)), \quad \forall x \in X.$$

Resulta que h leva órbitas positivas de (X, f) em órbitas positivas de (Y, g) e pontos periódicos em pontos periódicos, desde que o período seja o mesmo, já que

$$h(f^n(x)) = g^n(h(x)), \quad \forall x \in X \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.2 Aplicações Suaves em \mathbb{R}^2

Embora X possa ser um subconjunto próprio do \mathbb{R}^2 , neste trabalho trataremos do caso em que $X = \mathbb{R}^2$ com a métrica d dada por $d(x, y) = \|x - y\|$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, sendo $\|\cdot\|$ norma em \mathbb{R}^2 . Admitiremos também que

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)),$$

é uma aplicação suave, ou seja, de classe C^∞ em \mathbb{R}^2 . Por um abuso de notação e linguagem, em lugar de (\mathbb{R}^2, f) , algumas vezes, a aplicação suave no plano f será chamada

sistema dinâmico discreto no plano ou bidimensional. Utilizaremos também a seguinte notação para a aplicação f ,

$$(x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2),$$

e também para outras funções com as devidas adaptações.

Em relação à estabilidade, um ponto fixo x_0 da aplicação f é:

E1. Estável, se dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existir $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, tal que se $d(x, x_0) < \delta$, então $d(f^k(x), x_0) < \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$;

E2. Atrator, se existir $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, tal que se $d(x, x_0) < \delta_0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), x_0) = 0;$$

E3. Assintoticamente estável, se for estável e atrator;

E4. Instável, se não for estável.

Resulta que a estabilidade de um ponto fixo $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ da aplicação f pode ser analisada através da parte linear ou matriz Jacobiana da f , que é a matriz dada por

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x_1, x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x_1, x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

para cada $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Assim, x_0 é ponto fixo hiperbólico da f , se cada um dos autovalores μ_1 e μ_2 da matriz $A = Df(x_0)$ tem módulo diferente de 1. Além disto, um ponto fixo hiperbólico x_0 é:

EH1. Assintoticamente estável, se cada um dos autovalores de A possui módulo menor que 1;

EH2. Instável, se pelo menos um dos autovalores de A possui módulo maior do que 1.

Quando a matriz A tem pelo menos um autovalor com módulo igual a 1 dizemos que x_0 é ponto fixo não hiperbólico.

Uma curva fechada invariante γ pela dinâmica da aplicação f é um conjunto invariante homeomorfo ao \mathbb{S}^1 . O círculo \mathbb{S}^1 é definido como sendo $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\sim = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, com a relação de equivalência em \mathbb{R} definida da seguinte forma: se $z, w \in \mathbb{R}$, então $z \sim w$ se, e somente se, $z - w \in \mathbb{Z}$. Os elementos de \mathbb{S}^1 são as classes de equivalência da forma $[z] = \{z + l : l \in \mathbb{Z}\}$. É comum identificar também \mathbb{S}^1 com o intervalo $[0, 1)$.

Se existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^2$ de γ tal que γ é a única curva fechada invariante pela aplicação f em U , então dizemos que γ é **isolada**. Nestas condições, γ é curva fechada invariante:

EC1. Estável, se dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existir uma vizinhança $V \subset U$ de γ tal que se $x \in V$, então $\text{dist}(f^n(x), \gamma) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo

$$\text{dist}(z, w) = \inf\{d(z, w) : (z, w) \in O^+(x) \times \gamma\};$$

EC2. Assintoticamente estável, se for estável e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f^n(x), \gamma) = 0,$$

para todo $x \in V$;

EC3. Instável, se não for estável.

Suponha que, de agora em diante, a aplicação suave f depende de um parâmetro real α , ou seja,

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, \alpha) = (f_1(x_1, x_2, \alpha), f_2(x_1, x_2, \alpha)). \quad (2.2)$$

A aplicação f em (2.2) é chamada também de **família a um parâmetro α de aplicações**. Para cada α fixado, valem todas as definições e resultados anteriores. Neste sentido, as notações também serão preservadas.

Se para algum $\alpha = \alpha_0$, f possui um ponto fixo hiperbólico x_{α_0} , isto é, $f(x_{\alpha_0}, \alpha_0) = x_{\alpha_0}$ e $A = Df(x_{\alpha_0}, \alpha_0)$ possui autovalores com módulos diferentes de 1, então, como

consequência do Teorema da Função Implícita, existem um intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ contendo α_0 , uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ de x_{α_0} e uma única função diferenciável $\phi : J \rightarrow V$, com $\phi(\alpha_0) = x_{\alpha_0}$, tais que $x_\alpha = \phi(\alpha)$ é ponto fixo hiperbólico da aplicação f para todo $\alpha \in J$. De fato, definindo a aplicação g por $g(x, \alpha) = f(x, \alpha) - x$ para todo $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, segue que $g(x_{\alpha_0}, \alpha_0) = f(x_{\alpha_0}, \alpha_0) - x_{\alpha_0} = 0$ e $\det(Dg(x_{\alpha_0}, \alpha_0)) = \det(Df(x_{\alpha_0}, \alpha_0) - I) \neq 0$, pois 1 não é autovalor de $Df(x_{\alpha_0}, \alpha_0)$, sendo I a matriz identidade 2×2 .

As bifurcações, locais ou globais, têm relação com o conceito de estabilidade estrutural. De maneira simples, as bifurcações locais de pontos fixos podem ocorrer quando para algum $\alpha = \alpha_0$, chamado **valor de bifurcação** ou **valor crítico**, f possui um ponto fixo não hiperbólico x_{α_0} . Mais precisamente, diremos que f apresenta uma **bifurcação local** em α_0 , se existir $\alpha_1 \in (\alpha_0 - \kappa, \alpha_0 + \kappa)$, com $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$, suficientemente pequeno, tal que as aplicações f_0 e f_1 definidas por

$$f_0(x) = f(x, \alpha_0), \quad f_1(x) = f(x, \alpha_1), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

não são topologicamente conjugadas no sentido da definição dada no final da [Seção 2.1](#).

A codimensão de uma bifurcação local envolve desdobramentos versais, mas, de modo não rigoroso, aqui é o número de parâmetros necessários que devem ser variados a fim de que a bifurcação local ocorra. Veja [\[17\]](#) e as referências lá contidas para mais detalhes sobre estabilidade estrutural, bifurcações e codimensão.

2.3 Enunciado do Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de Codimensão 1

O enunciado do Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de codimensão 1 apresentado nesta seção foi extraído de [\[8\]](#).

Suponha que para $\alpha = \alpha_0$, a aplicação f possui um ponto fixo não hiperbólico x_{α_0} tal que $A = Df(x_{\alpha_0}, \alpha_0)$ possui autovalores $e^{i\theta_0}$ e $e^{-i\theta_0}$. Sejam $p, q \in \mathbb{C}^2$ vetores satisfazendo

$$Aq = e^{i\theta_0}q, \quad A^T p = e^{-i\theta_0}p, \quad \langle p, q \rangle = 1,$$

com A^T denotando a transposta da matriz real A , 2×2 , e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno usual em \mathbb{C}^2 definido da seguinte forma para $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ em \mathbb{C}^2 :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^2 \bar{u}_i v_i = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2,$$

com a barra denotando o complexo conjugado.

Resulta que $\{q, \bar{q}\}$ é base de \mathbb{C}^2 e, dado $x \in \mathbb{R}^2$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$x = x_{\alpha_0} + zq + \bar{z}\bar{q}.$$

Uma vez que $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$ (veja [8] ou o Lema 4.2.2), empregando (2.1) na mudança de variáveis de x para z , construímos a função H , em uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^2$ de x_{α_0} , como

$$H(z, \bar{z}) = \langle p, f(x_{\alpha_0} + zq + \bar{z}\bar{q}, \alpha_0) \rangle - \langle p, x_{\alpha_0} \rangle. \quad (2.3)$$

A partir da função H definimos os números complexos

$$\begin{aligned} g_{20} &= \left. \frac{\partial^2}{\partial z^2} H(z, \bar{z}) \right|_{z=0}, \\ g_{11} &= \left. \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} H(z, \bar{z}) \right|_{z=0}, \\ g_{02} &= \left. \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} H(z, \bar{z}) \right|_{z=0}, \\ g_{21} &= \left. \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \bar{z}} H(z, \bar{z}) \right|_{z=0}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

De posse destes números complexos, o Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker genérica de codimensão 1 é apresentado a seguir.

Teorema 2.3.1 (Bifurcação de Neimark-Sacker). *Suponha que para $|\alpha - \alpha_0|$ suficientemente pequeno, a aplicação suave $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ possui um ponto fixo x_α tal que a matriz $Df(x_\alpha, \alpha)$ possui autovalores $\mu_1 = \mu(\alpha)$ e $\mu_2 = \bar{\mu}(\alpha)$, sendo $\mu(\alpha) = r(\alpha)e^{i\theta(\alpha)}$, com $r(\alpha_0) = 1$ e $\theta(\alpha_0) = \theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi$. Sejam $p, q \in \mathbb{C}^2$ vetores satisfazendo*

$$Aq = e^{i\theta_0}q, \quad A^T p = e^{-i\theta_0}p, \quad \langle p, q \rangle = 1,$$

sendo $A = Df(x_{\alpha_0}, \alpha_0)$. *Suponha ainda que as seguintes condições são satisfeitas:*

H1. $r'(\alpha_0) = \frac{d}{d\alpha}r(\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0$ (*transversalidade*);

H2. $e^{ik\theta_0} \neq 1$, para $k = 1, 2, 3, 4$ (*não degenerescência*);

H3. $L_1 = \text{Re}(e^{-i\theta_0}c_1) \neq 0$ (*não degenerescência*), com

$$c_1 = \frac{g_{20}g_{11}(1 - 2e^{i\theta_0})}{2(e^{2i\theta_0} - e^{i\theta_0})} + \frac{|g_{11}|^2}{1 - e^{-i\theta_0}} + \frac{|g_{02}|^2}{2(e^{2i\theta_0} - e^{-i\theta_0})} + \frac{g_{21}}{2}. \quad (2.5)$$

Então, existem mudanças de coordenadas e parâmetros que transformam f em $N : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$N(x_1, x_2, \beta) = (1 + \beta)B(\beta)(x_1, x_2) + (x_1^2 + x_2^2)B(\beta)C(\beta)(x_1, x_2) + O(\|(x_1, x_2)\|^4),$$

sendo

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \theta(\beta) & -\text{sen} \theta(\beta) \\ \text{sen} \theta(\beta) & \cos \theta(\beta) \end{pmatrix}, \quad C(\beta) = \begin{pmatrix} c(\beta) & -d(\beta) \\ d(\beta) & c(\beta) \end{pmatrix},$$

com $\theta(0) = \theta_0$, c e d funções suaves, com $c(0) = L_1$, e $O(\|(x_1, x_2)\|^4)$ denotando os termos de ordem superior na expansão em série de Taylor em torno de $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Além disto, variando α , com $|\alpha - \alpha_0|$ suficientemente pequeno, existe uma vizinhança do ponto fixo x_{α_0} na qual bifurca uma única curva fechada invariante a partir de x_{α_0} cuja estabilidade é dada pelo sinal de L_1 .

Os números complexos g_{20} , g_{11} , g_{02} e g_{21} podem ser calculados, de maneira equivalente, através da matriz A e das funções multilineares simétricas B e C , dadas por

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} f(x_{\alpha_0} + \xi_1 x, \alpha_0) \Big|_{\xi_1=0} = Df(x_{\alpha_0}, \alpha_0)x, \\ B(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} f(x_{\alpha_0} + \xi_1 x + \xi_2 y, \alpha_0) \Big|_{(\xi_1, \xi_2)=(0,0)}, \\ C(x, y, z) &= \frac{\partial^3}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_3} f(x_{\alpha_0} + \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z, \alpha_0) \Big|_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)=(0,0,0)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

com $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ e $z = (z_1, z_2)$.

Na realidade, A , B e C aparecem na expansão em série de Taylor da f , em torno de $x = x_{\alpha_0}$, até os termos de ordem 3 e para $\alpha = \alpha_0$, dada por

$$f(x, \alpha_0) = x_{\alpha_0} + A(x - x_{\alpha_0}) + \frac{1}{2!}B(x - x_{\alpha_0}, x - x_{\alpha_0}) + \frac{1}{3!}C(x - x_{\alpha_0}, x - x_{\alpha_0}, x - x_{\alpha_0}) + O(\|x - x_{\alpha_0}\|^4),$$

com a função O denotando os termos de ordem superior na expansão em série de Taylor da f , em torno de $x = x_{\alpha_0}$, como no Teorema 2.3.1.

Decorre de (2.6) que as componentes de B e C são calculadas, respectivamente, por

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta_j \partial \eta_k} f_i(x_{\alpha_0} + \eta, \alpha_0) \Big|_{\eta=0} x_j y_k, \quad (2.7)$$

$$C_i(x, y, z) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l} f_i(x_{\alpha_0} + \eta, \alpha_0) \Big|_{\eta=0} x_j y_k z_l, \quad (2.8)$$

para $i = 1, 2$, sendo $\eta = (\eta_1, \eta_2)$.

Como consequência da multilinearidade e da simetria das funções B e C , a função H como em (2.3) assume a forma

$$\begin{aligned} H(z, \bar{z}) &= \langle p, A(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle + \frac{1}{2!} \langle p, B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle + \\ &\quad \frac{1}{3!} \langle p, C(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, O(\|zq + \bar{z}\bar{q}\|^4) \rangle \\ &= e^{i\theta_0} z + \frac{1}{2!} \langle p, z^2 B(q, q) + 2z\bar{z}B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle + \\ &\quad \frac{1}{3!} \langle p, z^3 C(q, q, q) + 3z^2\bar{z}C(q, q, \bar{q}) + 3z\bar{z}^2 C(q, \bar{q}, \bar{q}) + \bar{z}^3 C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle + \\ &\quad \langle p, O(\|zq + \bar{z}\bar{q}\|^4) \rangle. \end{aligned}$$

Assim, de (2.4) e do resultado anterior,

$$\begin{aligned} g_{20} &= \langle p, B(q, q) \rangle, \\ g_{11} &= \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \\ g_{02} &= \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle, \\ g_{21} &= \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Algumas considerações podem ser feitas em relação ao enunciado do Teorema 2.3.1:

- T1.** É possível trocar aplicação suave por aplicação de classe C^k , $k \geq 3$;
- T2.** Bifurcações de codimensão 2 ocorrem quando uma condição de não degenerescência não é satisfeita. Este é o caso das ressonâncias percebidas por R. Sacker que ocorrem quando uma das condições em **H2** é violada e que são detectadas a partir dos autovalores da matriz Jacobiana A calculada no ponto fixo e no parâmetro crítico, mas devem satisfazer também outras condições:

T21. A ressonância 1:1 ocorre se a matriz A possui autovalores $\mu_{1,2} = 1$. É, em certo sentido, o análogo discreto da bifurcação de Bogdanov-Takens;

T22. A ressonância 1:2 ocorre se a matriz A possui autovalores $\mu_{1,2} = -1$;

T23. A ressonância 1:3 ocorre se a matriz A possui autovalores $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, com $\theta_0 = 2\pi/3$;

T24. A ressonância 1:4 ocorre se a matriz A possui autovalores $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, com $\theta_0 = \pi/2$.

Uma aplicação suave no plano que apresenta uma das ressonâncias anteriores possui uma dinâmica rica com certos aspectos ainda pouco compreendidos como ocorre, sobretudo, na ressonância 1:4. Tal como na bifurcação de Neimark-Sacker, podem surgir ou desaparecer curvas fechadas invariantes no retrato de fase da aplicação em decorrência destas ressonâncias. Vale a pena ressaltar que se uma aplicação suave apresenta uma ressonância 1: j , $2 \leq j \leq 4$, então há um ponto periódico de período j em seu retrato de fase;

- T3.** Uma bifurcação de Chenciner, análoga à bifurcação de Bautin para equações diferenciais ordinárias, ocorre quando todas as condições são satisfeitas, exceto a condição de não degenerescência **H3**, isto é, $L_1 = 0$. Neste caso, é necessário calcular outro coeficiente L_2 que deve ser não nulo. Estes coeficientes são chamados **coeficientes de Lyapunov** como na bifurcação de Hopf [9];
- T4.** Em \mathbb{R}^m , $m \geq 3$, além dos autovalores μ_1 e μ_2 do enunciado, a matriz A não deve possuir nenhum outro autovalor com módulo igual a 1. Além disto, a dinâmica da

aplicação f restrita à variedade central bidimensional e sua continuação é topologicamente conjugada à dinâmica da forma normal N . Neste contexto, uma variação do enunciado, com uma maneira equivalente de cálculo da condição **H3**, pode ser dada seguindo as referências [8] e [9]. Neste caso, $L_1 = \operatorname{Re}(c_1) \neq 0$, com

$$\begin{aligned} c_1 &= e^{-i\theta_0} \langle p, C(q, q, \bar{q}) + 2B(q, h_{11}) + B(\bar{q}, h_{20}) \rangle, \\ h_{11} &= (I - A)^{-1} B(q, \bar{q}), \\ h_{20} &= (e^{2i\theta_0} I - A)^{-1} B(q, q). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Em [8] esta outra expressão para L_1 é obtida através do Método da Projeção e em [9] empregando uma equação homológica. Vale ressaltar que o sinal de L_1 também fornece a estabilidade do ponto fixo x_{α_0} , sendo assintoticamente estável se $L_1 < 0$ e instável se $L_1 > 0$. A condição **H2** também pode ser calculada como

$$r'(\alpha_0) = \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta_0} \left\langle p, \frac{\partial}{\partial \alpha} Df(x_\alpha, \alpha) \Big|_{\alpha_0} q \right\rangle \right),$$

pois $r(\alpha) = (\mu(\alpha)\bar{\mu}(\alpha))^{1/2}$,

$$Df(x_\alpha, \alpha) Q(\alpha) = \mu(\alpha) Q(\alpha), \quad Df(x_\alpha, \alpha)^T P(\alpha) = \bar{\mu}(\alpha) P(\alpha), \quad \langle P(\alpha), Q(\alpha) \rangle = 1,$$

$q = Q(\alpha_0)$ e $p = P(\alpha_0)$. Há ainda uma terceira possibilidade que é

$$r'(\alpha_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \det(Df(x_\alpha, \alpha)) \Big|_{\alpha=\alpha_0}.$$

O leitor interessado no cálculo do coeficiente de Lyapunov como em **T4** pode consultar [8] no caso planar e [9] em \mathbb{R}^m , $m \geq 2$. No próximo capítulo, o Teorema 2.3.1 será aplicado aos dois modelos biológicos citados na Introdução. Antes, é necessário fazer um breve comentário sobre a notação.

2.4 Notação

Conforme escrito anteriormente, neste capítulo é fixada grande parte das notações. Contudo, uma mesma notação, em casos muito raros, pode ser utilizada para objetos matemáticos distintos. Por exemplo, y_1 é vetor em (2.1), mas é também a primeira componente

do vetor $y = (y_1, y_2)$. E, ainda, ρ é parâmetro no **Capítulo 3**, porém aparece na mudança para coordenadas polares no **Capítulo 4**. Possivelmente, há outras ocorrências, mas o leitor não terá problemas, já que o contexto deixará claro o uso.

Por um abuso de notação, no **Capítulo 3** escrevemos também $\mu_1(\alpha)$ no lugar de $\mu(\alpha)$, o mesmo valendo para $\mu_2(\alpha)$ e $\bar{\mu}(\alpha)$. No **Capítulo 4**, a dependência do parâmetro α é omitida para simplificar a notação.

Capítulo 3

Aplicações em Modelos Biológicos

Este capítulo consiste da aplicação do Teorema 2.3.1 a dois modelos biológicos. Certos pontos fixos não são analisados, pois o interesse está apenas na existência e estabilidade de curvas fechadas invariantes. Não são apresentadas interpretações biológicas de nenhum resultado.

3.1 Equação Logística com Atraso

Considere a seguinte equação de recorrência

$$u_{n+1} = \rho u_n (1 - u_{n-1}), \quad (3.1)$$

chamada *equação logística com atraso*. Este é um modelo de dinâmica populacional, onde u_n modela a densidade de uma população no tempo n e o parâmetro real ρ é a taxa de crescimento.

Definindo $v_n = u_{n-1}$, podemos reescrever (3.1) como

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \rho u_n (1 - v_n), \\ v_{n+1} &= u_n, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente, como o sistema dinâmico discreto bidimensional, dependendo do

parâmetro real ρ ,

$$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3.2)$$

$$(x, \rho) \longmapsto g(x, \rho) = (g_1(x, \rho), g_2(x, \rho)) = (\rho x_1(1 - x_2), x_1).$$

É fácil ver que os únicos pontos fixos da aplicação (3.2) são a origem e

$$x_\rho = \left(\frac{\rho - 1}{\rho}, \frac{\rho - 1}{\rho} \right), \quad \rho > 1.$$

A análise da estabilidade destes dois pontos fixos e da ocorrência de bifurcações locais neste modelo é bastante simples. Entretanto, a equação (3.1) e suas generalizações apresentam uma dinâmica interessante, não estudada aqui, conforme [2]. O próximo teorema trata apenas da estabilidade do ponto fixo x_ρ e da bifurcação de Neimark-Sacker.

Teorema 3.1.1. *Seja $\rho_0 = 2$. As seguintes afirmações são verdadeiras em relação ao ponto fixo*

$$x_\rho = \left(\frac{\rho - 1}{\rho}, \frac{\rho - 1}{\rho} \right), \quad \rho > 1,$$

da equação logística com atraso (3.1):

- a. *Se $1 < \rho < \rho_0$, então x_ρ é assintoticamente estável;*
- b. *Se $\rho = \rho_0$, então x_{ρ_0} é não hiperbólico e assintoticamente estável;*
- c. *Se $\rho > \rho_0$, então x_ρ é instável e existe uma única curva fechada invariante assintoticamente estável no retrato de fase de (3.1), em uma vizinhança de x_ρ , para ρ suficientemente próximo de ρ_0 .*

Demonstração. A matriz Jacobiana da aplicação (3.2) calculada no ponto fixo x_ρ é dada por

$$Dg(x_\rho, \rho) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \rho \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e seu polinômio característico é

$$P(\mu) = \mu^2 - \mu + (\rho - 1)$$

com autovalores

$$\mu_1(\rho) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{5 - 4\rho} \right) \quad \text{e} \quad \mu_2(\rho) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{5 - 4\rho} \right). \quad (3.3)$$

Decorre dos resultados de estabilidade de pontos fixos apresentados na [Seção 2.2](#) que:

- a.** Se $1 < \rho < 5/4$, então $0 < 5 - 4\rho < 1$. Logo, $1/2 < \mu_1(\rho) < 1$ e $0 < \mu_2(\rho) < 1/2$. Por outro lado, quando $\rho = 5/4$, temos $\mu_1(\rho) = \mu_2(\rho) = 1/2$. Para $5/4 < \rho < \rho_0$, os autovalores $\mu_1(\rho)$ e $\mu_2(\rho)$ são complexos e $1/4 < \rho - 1 < 1$. Portanto, como $|\mu_{1,2}(\rho)| = \sqrt{\rho - 1}$, segue que $1/2 < |\mu_{1,2}(\rho)| < 1$;
- b.** Substituindo $\rho = \rho_0$ em [\(3.3\)](#), obtemos $|\mu_{1,2}(\rho)| = 1$. Resta mostrar a estabilidade de x_{ρ_0} que segue do sinal negativo do primeiro coeficiente de Lyapunov que será calculado posteriormente;
- c.** Se $\rho > \rho_0$, temos $\rho - 1 > 1$ e $|\mu_{1,2}(\rho)| = \sqrt{\rho - 1} > 1$. Novamente, resta mostrar a parte relativa à existência, unicidade e estabilidade da curva fechada invariante que bifurca no retrato de fase de [\(3.1\)](#) para ρ suficientemente próximo de ρ_0 .

O que falta provar nos itens **b** e **c** depende do [Teorema 2.3.1](#), em particular, do cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov. Para isto, transladando o ponto fixo x_ρ para a origem e definindo o novo parâmetro $\alpha = \rho - \rho_0$, obtemos o sistema dinâmico discreto bidimensional

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, \alpha) &\longmapsto f(x, \alpha) = g(x + x_\rho, \alpha + 2) - x_\rho \\ &= (f_1(x, \alpha), f_2(x, \alpha)) \\ &= (x_1 - x_2(\alpha + 1) - x_1x_2(\alpha + 2), x_1), \end{aligned} \quad (3.4)$$

equivalente a [\(3.2\)](#).

Obviamente, a aplicação [\(3.4\)](#) também tem dois pontos fixos, porém estamos interessados somente no ponto fixo $x_\alpha = (0, 0)$ que corresponde ao ponto fixo não trivial x_ρ da aplicação [\(3.2\)](#).

A matriz Jacobiana da aplicação (3.4) avaliada no ponto fixo $x_\alpha = (0, 0)$ é dada por

$$Df(x_\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 - \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

com autovalores

$$\mu_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-3 - 4\alpha}.$$

Como anteriormente, estes autovalores são complexos conjugados para $\alpha > -3/4$ e

$$|\mu_{1,2}(\alpha)|^2 = \mu_1(\alpha)\mu_2(\alpha) = 1 + \alpha.$$

Assim, definimos

$$r(\alpha) = |\mu_{1,2}(\alpha)| = \sqrt{1 + \alpha}$$

e o valor crítico do parâmetro α é $\alpha_0 = 0$, como esperado.

Agora, verificamos as hipóteses do Teorema 2.3.1. A condição de transversalidade **H1** é satisfeita, visto que

$$r'(\alpha_0) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

A matriz

$$A = Df(x_{\alpha_0}, \alpha_0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

possui autovalores

$$\mu_1(\alpha_0) = \frac{1}{2} (1 + i\sqrt{3}) \quad \text{e} \quad \mu_2(\alpha_0) = \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{3}), \quad (3.5)$$

que podem ser reescritos na forma polar como

$$\mu_{1,2}(\alpha_0) = e^{\pm i\theta_0}, \quad \theta_0 = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Logo, a condição **H2** também é satisfeita, pois

$$e^{i\theta_0} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad e^{i2\theta_0} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad e^{i3\theta_0} = -1, \quad e^{i4\theta_0} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},$$

ou seja, $e^{ik\theta_0} \neq 1$, para $k = 1, 2, 3, 4$.

Os vetores

$$q = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1 \right) \quad \text{e} \quad \bar{q} = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1 \right),$$

são autovetores da matriz A associados, respectivamente, com os autovalores $\mu_1(\alpha_0)$ e $\mu_2(\alpha_0)$.

A transposta da matriz A , dada por

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

tem os mesmos autovalores (3.5). O autovetor da matriz A^T associado com o autovalor $\mu_1(\alpha_0)$, satisfazendo a condição de normalização $\langle p, q \rangle = 1$, é

$$p = \left(\frac{i\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{6} (3 - i\sqrt{3}) \right).$$

A partir das funções multilineares simétricas B e C , dadas por

$$B(x, y) = (-2(x_1y_2 + x_2y_1), 0),$$

$$C(x, y, z) = (0, 0),$$

e dos vetores q , \bar{q} e p , resulta de (2.9) que

$$g_{20} = -2 + \frac{2i\sqrt{3}}{3}, \quad g_{11} = \frac{2i\sqrt{3}}{3}, \quad g_{02} = 2 + \frac{2i\sqrt{3}}{3}, \quad g_{21} = 0.$$

Portanto, de (2.5), $L_1 = -2$ e a condição **H3** é verificada. O sinal de L_1 permite concluir a estabilidade de x_{ρ_0} no item **b**. O Teorema 2.3.1 também garante a existência e a unicidade local, bem como a estabilidade, dada pelo sinal de L_1 , da curva fechada invariante que bifurca quando $\rho > \rho_0$, porém próximo de ρ_0 . Portanto, o item **c** está provado. ■

A Figura 3.1 trata do caso descrito no item **c** do Teorema 3.1.1.

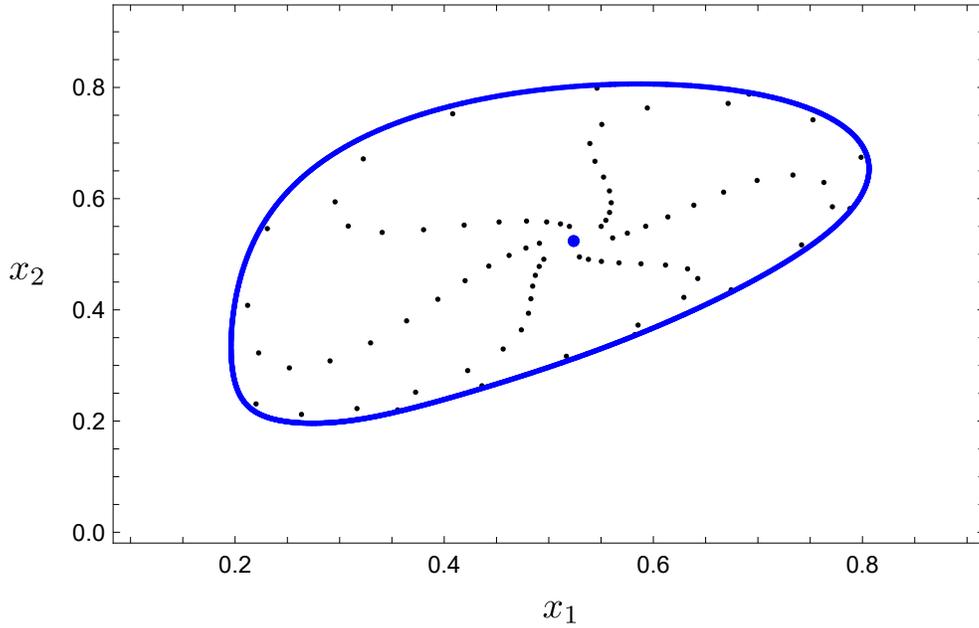


Figura 3.1: A linha na cor azul representa a curva fechada invariante assintoticamente estável no retrato de fase da equação logística com atraso (3.1) para $\rho > \rho_0 = 2$ próximo de ρ_0 . O ponto azul representa o ponto fixo $x_\rho = ((\rho - 1)/\rho, (\rho - 1)/\rho)$. O valor do parâmetro é $\rho = 21/10$.

3.2 Equação Predador-presa Discreta

A equação predador-presa discreta é dada pela seguinte equação de recorrência

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \rho u_n(1 - u_n) - u_n v_n, \\ v_{n+1} &= \frac{1}{\sigma} u_n v_n, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde u_n modela o número de presas, v_n modela o número de predadores e os parâmetros reais ρ e σ são positivos.

Variando o parâmetro ρ e fixando o parâmetro σ , obtemos a seguinte aplicação associada a (3.6),

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, \rho) &\longmapsto g(x, \rho) = (g_1(x, \rho), g_2(x, \rho)) \\ &= \left(\rho x_1(1 - x_1) - x_1 x_2, \frac{1}{\sigma} x_1 x_2 \right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

A aplicação (3.7) tem três pontos fixos: $(0, 0)$, $((\rho - 1)/\rho, 0)$ e o ponto fixo de interesse $x_\rho = (\sigma, \rho(1 - \sigma) - 1)$.

O próximo resultado trata da ocorrência de uma bifurcação de Neimark-Sacker na equação predador-presa discreta (3.6).

Teorema 3.2.1. *Fixado $\sigma > 0$, a equação predador-presa discreta (3.6) apresenta uma bifurcação de Neimark-Sacker de codimensão 1, associada com o ponto fixo*

$$x_\rho = (\sigma, \rho(1 - \sigma) - 1), \quad \rho \in \left(0, \frac{4}{9}\right) \setminus \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{7}\right\},$$

para

$$\rho = \rho_0 = \frac{1}{1 - 2\sigma}.$$

Além disto, o primeiro coeficiente de Lyapunov é negativo e uma única curva fechada invariante assintoticamente estável bifurca no retrato de fase de (3.6) em uma vizinhança de x_ρ , para ρ suficientemente próximo de ρ_0 .

Demonstração. A matriz Jacobiana da aplicação (3.7) avaliada no ponto fixo x_ρ é dada por

$$Dg(x_\rho, \rho) = \begin{pmatrix} 1 - \rho\sigma & -\sigma \\ \frac{\rho(1 - \sigma) - 1}{\sigma} & 1 \end{pmatrix}$$

e possui polinômio característico

$$P(\mu) = \mu^2 + (\rho\sigma - 2)\mu + \rho(1 - 2\sigma)$$

com autovalores

$$\mu_{1,2}(\rho) = \frac{1}{2} \left(2 - \rho\sigma \pm \sqrt{\rho^2\sigma^2 + 4\rho(\sigma - 1) + 4} \right).$$

Estes autovalores são complexos conjugados se $\rho^2\sigma^2 + 4\rho(\sigma - 1) + 4 < 0$ e

$$|\mu_{1,2}(\rho)|^2 = \mu_1(\rho)\mu_2(\rho) = \rho(1 - 2\sigma).$$

Assim, o valor crítico do parâmetro ρ é

$$\rho_0 = \frac{1}{1 - 2\sigma}, \quad 0 < \sigma < \frac{4}{9}. \quad (3.8)$$

A desigualdade para σ em (3.8) garante que os autovalores $\mu_{1,2}(\rho)$ sejam complexos e ρ_0 seja positivo.

Procedendo como na seção anterior, isto é, transladando o ponto fixo x_ρ para a origem e definindo os parâmetros $\alpha = \rho - \rho_0$ e $\beta = \sigma$, obtemos o sistema dinâmico discreto bidimensional

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, \alpha) &\longmapsto f(x, \alpha) = (f_1(x, \alpha), f_2(x, \alpha)), \end{aligned} \tag{3.9}$$

com

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \alpha) &= \frac{(1 - 2\beta)\beta x_2 + (1 + \alpha(1 - 2\beta))x_1^2 + ((1 - 2\beta)x_2 - 1 + (\alpha + 3)\beta - 2\alpha\beta^2)x_1}{2\beta - 1}, \\ f_2(x_1, x_2, \alpha) &= x_2 - \frac{((1 - 2\beta)x_2 + \alpha + \beta - 3\alpha\beta + 2\alpha\beta^2)x_1}{\beta(2\beta - 1)}. \end{aligned}$$

Novamente, a aplicação (3.9) tem três pontos fixos, porém estamos interessados no ponto fixo $x_\alpha = (0, 0)$ que corresponde ao ponto fixo x_ρ anterior.

O determinante da matriz Jacobiana da aplicação (3.9) avaliada no ponto fixo x_α ,

$$Df(x_\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1 + 2\alpha\beta^2 - (\alpha + 3)\beta}{1 - 2\beta} & -\beta \\ \frac{2\alpha\beta^2 - 3\alpha\beta + \alpha + \beta}{\beta(1 - 2\beta)} & 1 \end{pmatrix},$$

é

$$\det(Df(x_\alpha, \alpha)) = |\mu_1(\alpha)|^2 = 1 + \alpha - 2\alpha\beta.$$

Assim, definimos

$$r(\alpha) = |\mu_1(\alpha)| = \sqrt{1 + \alpha(1 - 2\beta)}$$

e o valor do parâmetro crítico é $\alpha_0 = 0$.

Segue que a matriz

$$A = Df(x_{\alpha_0}, \alpha_0) = \begin{pmatrix} \frac{1 - 3\beta}{1 - 2\beta} & -\beta \\ \frac{1}{1 - 2\beta} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

possui autovalores

$$\begin{aligned}\mu_1(\alpha_0) &= \frac{2 - 5\beta + i\sqrt{(4 - 9\beta)\beta}}{2(1 - 2\beta)}, \\ \mu_2(\alpha_0) &= \frac{2 - 5\beta - i\sqrt{(4 - 9\beta)\beta}}{2(1 - 2\beta)}, \quad 0 < \beta < \frac{4}{9}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

A condição de transversalidade **H1** é satisfeita, visto que

$$r'(\alpha_0) = \frac{1 - 2\beta}{2} \neq 0, \quad 0 < \beta < \frac{4}{9}.$$

Escrevendo $\mu_1(\alpha_0) = e^{i\theta_0}$ e analisando as equações $(\mu_1(\alpha_0))^k = 1$, $k = 1, 2, 3, 4$, com $\mu_1(\alpha_0)$ como em (3.11), temos o seguinte:

H21. $e^{i\theta_0} \neq 1$ e $e^{2i\theta_0} \neq 1$, para todo $\beta \in (0, 4/9)$;

H22. $e^{3i\theta_0} = 1$ quando $\beta = 3/7$;

H23. $e^{4i\theta_0} = 1$ quando $\beta = 2/5$.

Portanto, a condição de não degenerescência **H2** é satisfeita se $\beta \in (0, 4/9) \setminus \{2/5, 3/7\}$.

Os vetores

$$q = \left(\frac{-\beta + i\sqrt{\beta}\sqrt{4 - 9\beta}}{2}, 1 \right) \quad \text{e} \quad \bar{q} = \left(\frac{-\beta - i\sqrt{\beta}\sqrt{4 - 9\beta}}{2}, 1 \right)$$

são autovetores da matriz A , dada em (3.10), associados com os autovalores $\mu_{1,2}(\alpha_0)$ em (3.11), respectivamente.

O vetor

$$p = \left(\frac{\sqrt{\beta} + i\sqrt{4 - 9\beta}}{\sqrt{\beta}(4 - 9\beta - i\sqrt{(4 - 9\beta)\beta})}, \frac{2(1 - 2\beta)}{4 - 9\beta - i\sqrt{(4 - 9\beta)\beta}} \right)$$

é autovetor de A^T associado com o autovalor $\mu_2(\alpha_0)$ em (3.11) e satisfazendo a normalização $\langle p, q \rangle = 1$.

De posse das funções multilineares simétricas B e C , dadas por

$$B(x, y) = \left(-\frac{2x_1y_1 + (1 - 2\beta)x_1y_2 + (1 - 2\beta)x_2y_1}{1 - 2\beta}, \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{\beta} \right),$$

$$C(x, y, z) = (0, 0),$$

e dos vetores q , \bar{q} e p , segue de (2.9) que

$$g_{20} = \frac{2(3\beta - 1) (3i\sqrt{4 - 9\beta}\beta + 3\sqrt{\beta} - i\sqrt{4 - 9\beta} - 7\beta^{3/2})}{\sqrt{\beta}(1 - 2\beta) (4 - 9\beta + i\sqrt{(4 - 9\beta)\beta})},$$

$$g_{11} = -\frac{2}{4 - 9\beta + 3i\sqrt{(4 - 9\beta)\beta}},$$

$$g_{02} = \frac{2\sqrt{\beta} - 6\beta^{3/2} + 2i\sqrt{(4 - 9\beta)\beta}\sqrt{\beta} - 2i\sqrt{4 - 9\beta}}{\sqrt{\beta} (4 - 9\beta + i\sqrt{(4 - 9\beta)\beta})},$$

$$g_{21} = 0.$$

Portanto, a condição **H3** é

$$L_1 = -\frac{1}{2(1 - 2\beta)} < 0. \quad (3.12)$$

Como consequência, uma única curva fechada invariante assintoticamente estável bifurca do ponto fixo $x_\rho = (\sigma, \rho(1 - \sigma) - 1)$ para $\rho > \rho_0 = 1/(1 - 2\sigma)$ próximo de ρ_0 . ■

A Figura 3.2 exibe uma curva fechada invariante no retrato de fase de (3.6) para uma escolha dos parâmetros ρ e σ .

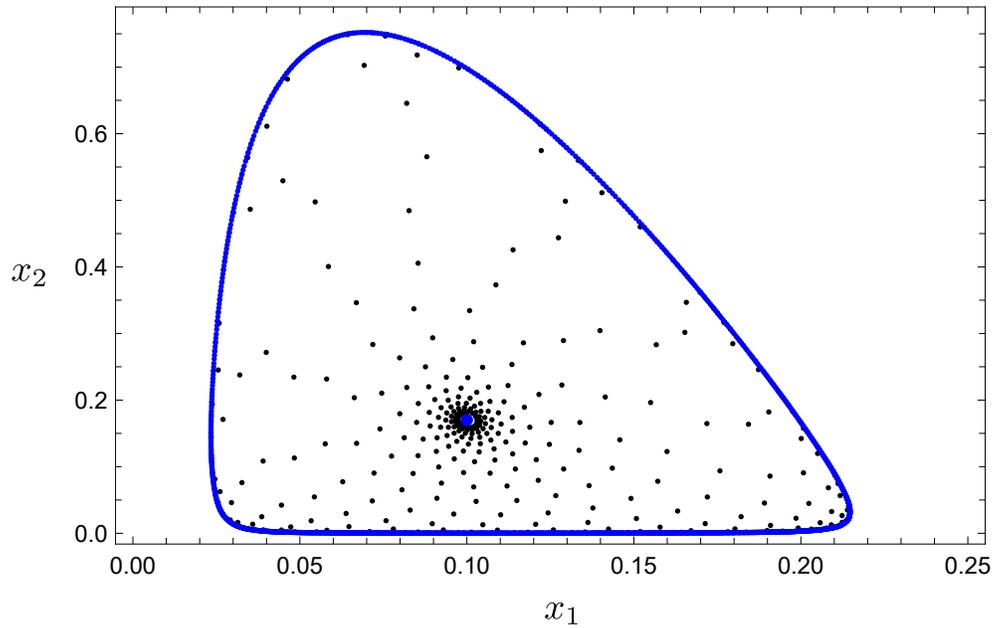


Figura 3.2: A linha na cor azul representa a curva fechada invariante assintoticamente estável no retrato de fase da equação predador-presa discreta (3.6) que surge quando $\rho > \rho_0 = 1/(1 - 2\sigma)$ próximo de ρ_0 . O ponto azul representa o ponto fixo $x_\rho = (\sigma, \rho(1 - \sigma) - 1)$. Os valores dos parâmetros são $\rho = 13/10$ e $\sigma = 1/10$.

Os próximos capítulos tratam da demonstração do Teorema 2.3.1 da mesma maneira feita em [8].

Capítulo 4

Demonstração do Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de Codimensão 1

Este capítulo é dedicado à demonstração do Teorema 2.3.1 relativa à parte da forma normal. Na Seção 4.1, há um estudo da forma normal truncada da bifurcação de Neimark-Sacker, a mesma aplicação N que aparece no Teorema 2.3.1, que, em certo sentido, fornece uma ideia do que ocorre no retrato de fase de um sistema dinâmico discreto bidimensional que apresenta uma bifurcação de Neimark-Sacker. A demonstração do Lema 4.1.1, por ser extensa, é fornecida no próximo capítulo. Na Seção 4.2, há, efetivamente, a prova do Teorema 2.3.1 seguindo [8]. Para simplificar a notação, omitiremos neste capítulo várias vezes a dependência em relação ao parâmetro α , escrevendo, por exemplo, $f(x)$ em lugar de $f(x, \alpha)$ e $\mu_{1,2}$ em lugar de $\mu_{1,2}(\alpha)$. O mesmo vale para outras funções de α , bem como para algumas funções do parâmetro β que será introduzido na Seção 4.2.

4.1 Forma Normal Truncada da Bifurcação de Neimark-Sacker

Sejam

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

e

$$C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

matrizes reais com $\theta = \theta(\alpha)$, $a = a(\alpha)$ e $b = b(\alpha)$ funções suaves dependendo de um parâmetro real α tais que $0 < \theta(0) < \pi$ e $a(0) \neq 0$.

A aplicação ou, mais precisamente, a família a um parâmetro α de aplicações

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto f(x) = (1 + \alpha)Bx + \|x\|^2 BCx, \quad x = (x_1, x_2), \end{aligned} \quad (4.3)$$

é chamada forma normal truncada da bifurcação de Neimark-Sacker. Em coordenadas,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \\ &\quad (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

A aplicação f possui um único ponto fixo $x_0 = (0, 0)$ e sua análise local depende da matriz Jacobiana $Df(x)$ da aplicação f . Se $x \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então

$$\begin{aligned} Df(x)v &= \left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} [(1 + \alpha)B(x + tv) + \langle x + tv, x + tv \rangle BC(x + tv)] \right|_{t=0} \\ &= [(1 + \alpha)B + BC(2M(x) + \|x\|^2 I)] v, \end{aligned}$$

com

$$M(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Logo,

$$Df(x) = (1 + \alpha)B + BC(2M(x) + \|x\|^2 I), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2. \quad (4.5)$$

A matriz

$$A = Df(x_0) = (1 + \alpha)B = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

possui autovalores $\mu_{1,2} = (1 + \alpha)e^{\pm i\theta}$, mostrando que a aplicação f é invertível em uma vizinhança da origem para $|\alpha|$ suficientemente pequeno.

Quando $\alpha = 0$, o ponto fixo $x_0 = (0, 0)$ é não hiperbólico, já que $|\mu_{1,2}| = 1$. A bifurcação correspondente pode ser analisada mediante a mudança para coordenadas complexas

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad |z|^2 = z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2$$

e, posteriormente, para coordenadas polares $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho = |z| \geq 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$.

A mudança para coordenadas complexas transforma f tal como em (4.3) em

$$\begin{aligned} g: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto g(z) = e^{i\theta} z (1 + \alpha + d|z|^2) = \mu z + cz|z|^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

com $\mu = \mu(\alpha) = (1 + \alpha)e^{i\theta(\alpha)}$, $c = c(\alpha) = e^{i\theta(\alpha)}d(\alpha)$ e $d = d(\alpha) = a(\alpha) + ib(\alpha)$ funções complexas dependendo do parâmetro α .

Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é qualquer número complexo, a dinâmica ou sequência $(z_n)_n$ é gerada através de $z_{n+1} = g(z_n)$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, de acordo com (2.1). Em coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} e^{i\varphi_{n+1}} &= g(\rho_n e^{i\varphi_n}) \\ &= \rho_n e^{i\varphi_n} e^{i\theta} (1 + \alpha + d\rho_n^2) \\ &= \rho_n |1 + \alpha + d(\alpha)\rho_n^2| e^{i[\theta + \varphi_n + \phi(\rho_n)]}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo $\phi = \phi(\rho)$ o argumento da função $\rho \longmapsto 1 + \alpha + d\rho^2$. Logo,

$$\rho_{n+1} = R(\rho_n), \quad \varphi_{n+1} = Q(\rho_n, \varphi_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

com

$$\begin{aligned} R(\rho) &= \rho |1 + \alpha + d(\alpha)\rho^2|, \\ Q(\rho, \varphi) &= \theta + \varphi + \phi(\rho). \end{aligned} \quad (4.8)$$

A expansão em série de Taylor da função

$$\rho \mapsto \rho |1 + \alpha + d(\alpha)\rho^2|,$$

em torno de $\rho = 0$ e até os termos de grau 2 fornece

$$\begin{aligned} |1 + \alpha + d(\alpha)\rho^2| &= (1 + \alpha) \left(1 + \frac{2a(\alpha)}{1 + \alpha}\rho^2 + \frac{|d(\alpha)|^2}{(1 + \alpha)^2}\rho^4 \right)^{1/2} \\ &= 1 + \alpha + a(\alpha)\rho^2 + O(\rho^4), \end{aligned} \quad (4.9)$$

com a notação $O(x^m)$ representando uma função suave com expansão em série Taylor em torno de $x = x_0$ iniciando nos termos de grau $m \in \{1, 2, \dots\}$ no mínimo.

Segue das partes real e imaginária de (4.7) que

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} \operatorname{sen} \varphi_{n+1} &= (1 + \alpha)\rho_n \operatorname{sen}(\theta + \varphi_n) + [a \operatorname{sen}(\theta + \varphi_n) + b \cos(\theta + \varphi_n)] \rho_n^3, \\ \rho_{n+1} \operatorname{cos} \varphi_{n+1} &= (1 + \alpha)\rho_n \operatorname{cos}(\theta + \varphi_n) + [a \operatorname{cos}(\theta + \varphi_n) - b \operatorname{sen}(\theta + \varphi_n)] \rho_n^3, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, a função Q em (4.8) satisfaz

$$\operatorname{tg}(Q(\rho, \varphi)) = \frac{(1 + \alpha) \operatorname{sen}(\theta + \varphi) + [a \operatorname{sen}(\theta + \varphi) + b \cos(\theta + \varphi)] \rho^2}{(1 + \alpha) \operatorname{cos}(\theta + \varphi) + [a \operatorname{cos}(\theta + \varphi) - b \operatorname{sen}(\theta + \varphi)] \rho^2}. \quad (4.10)$$

Expandindo ambos os membros de (4.10) em torno de $\rho = 0$ e até os termos de grau 1 resulta que ϕ dada em (4.8) satisfaz $\phi(\rho) = O(\rho^2)$. Portanto,

$$\begin{aligned} R(\rho) &= \rho [1 + \alpha + a(\alpha)\rho^2] + \rho^4 R_\alpha(\rho), \\ Q(\rho, \varphi) &= \varphi + \theta(\alpha) + \rho^2 Q_\alpha(\rho), \end{aligned} \quad (4.11)$$

com R_α e Q_α funções suaves de (ρ, α) .

Agora, o retrato de fase de (4.3) em uma vizinhança de $\alpha = 0$ pode ser analisado facilmente em coordenadas polares através de (4.11), isto é, mediante a aplicação

$$(\rho, \varphi) \mapsto (R(\rho), Q(\rho, \varphi)) = (\rho [1 + \alpha + a(\alpha)\rho^2] + \rho^4 R_\alpha(\rho), \varphi + \theta(\alpha) + \rho^2 Q_\alpha(\rho)).$$

As bifurcações no retrato de fase de (4.3) ou (4.4) quando α passa por zero podem ser facilmente analisadas usando a última forma em coordenadas (ρ, φ) , uma vez que a aplicação para ρ é independente de φ . A primeira aplicação R em (4.11) define um sistema

dinâmico unidimensional que tem o ponto fixo $\rho = 0$ para todo α . Se $\alpha < 0$ o ponto é assintoticamente estável. Se $\alpha > 0$ o ponto torna-se instável. Se $\alpha = 0$ a estabilidade do ponto fixo é determinada pelo sinal do coeficiente $a(0)$. Suponha que $a(0) < 0$. Então, a origem é (não linearmente) assintoticamente estável. Além disso, a aplicação R em (4.11) tem um ponto fixo assintoticamente estável adicional

$$\rho_0(\alpha) = \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}} + O(\alpha)$$

quando $\alpha > 0$. A aplicação Q em (4.11) descreve uma rotação por um ângulo dependendo de ρ e α e é aproximadamente igual a $\theta(\alpha)$. Assim, pela superposição das aplicações definidas por (4.11), ou seja, uma dinâmica radial e uma angular, obtemos o diagrama de bifurcação para o sistema dinâmico bidimensional original (4.4), conforme Figura 4.1.

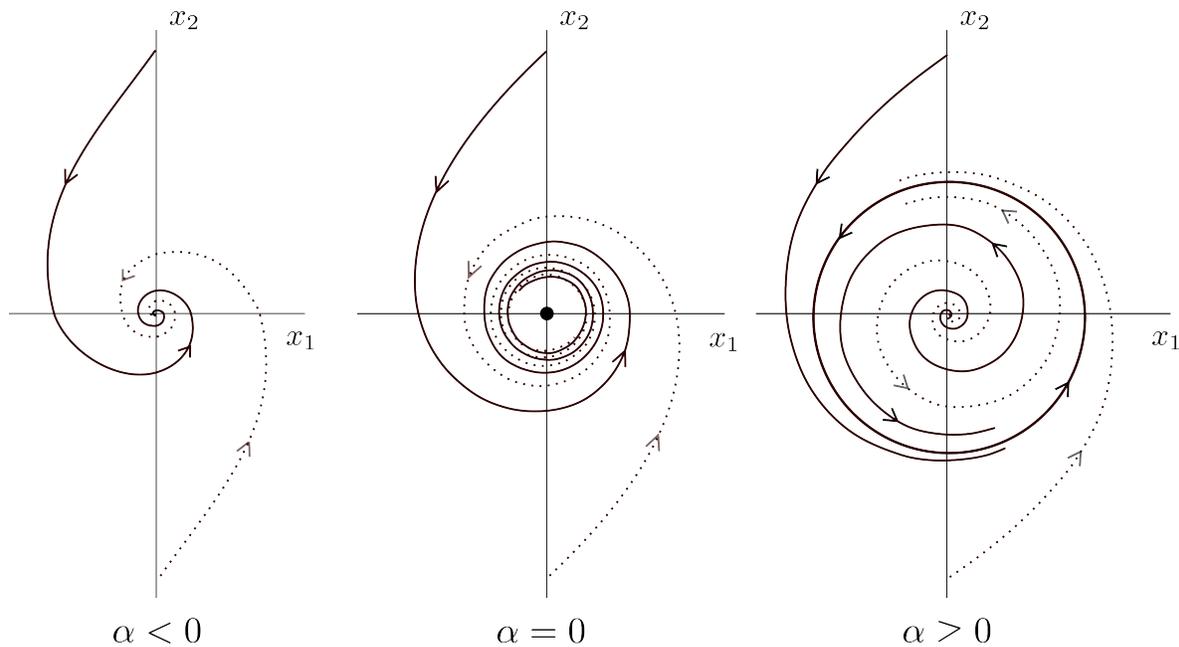


Figura 4.1: Bifurcação Neimark-Sacker supercrítica.

Resumindo, o sistema dinâmico discreto bidimensional (4.3) sempre tem um ponto fixo na origem. Este ponto é assintoticamente estável para $\alpha < 0$ e instável para $\alpha > 0$. As órbitas do sistema perto da origem parecem as órbitas perto de um foco atrator de uma equação diferencial ordinária no plano para $\alpha < 0$ e como órbitas perto de um foco

repulsor para $\alpha > 0$. No valor do parâmetro crítico $\alpha = 0$, o ponto é não linearmente assintoticamente estável. O “não linearmente” significa que a estabilidade não pode ser decidida apenas pela parte linear da aplicação. O ponto fixo é circundado para $\alpha > 0$ por uma curva fechada invariante isolada que é única, assintoticamente estável e, na realidade, é um círculo de raio $\rho_0(\alpha)$. Todas as órbitas começando na região não limitada ou na região limitada pela curva fechada invariante, exceto a origem, tendem para a curva nas iteradas de (4.11). Aqui temos a ocorrência de uma bifurcação Neimark-Sacker.

Esta bifurcação também pode ser representada no espaço (x_1, x_2, α) . A família de curvas fechadas invariantes, parametrizadas por α , forma uma superfície parabolóide.

O caso $a(0) > 0$ pode ser analisado da mesma forma. O sistema dinâmico bidimensional apresenta uma bifurcação de Neimark-Sacker em $\alpha = 0$. Ao contrário do caso anterior, existe uma curva fechada invariante instável que desaparece quando α cruza o zero de valores negativos para positivos, conforme Figura 4.2.

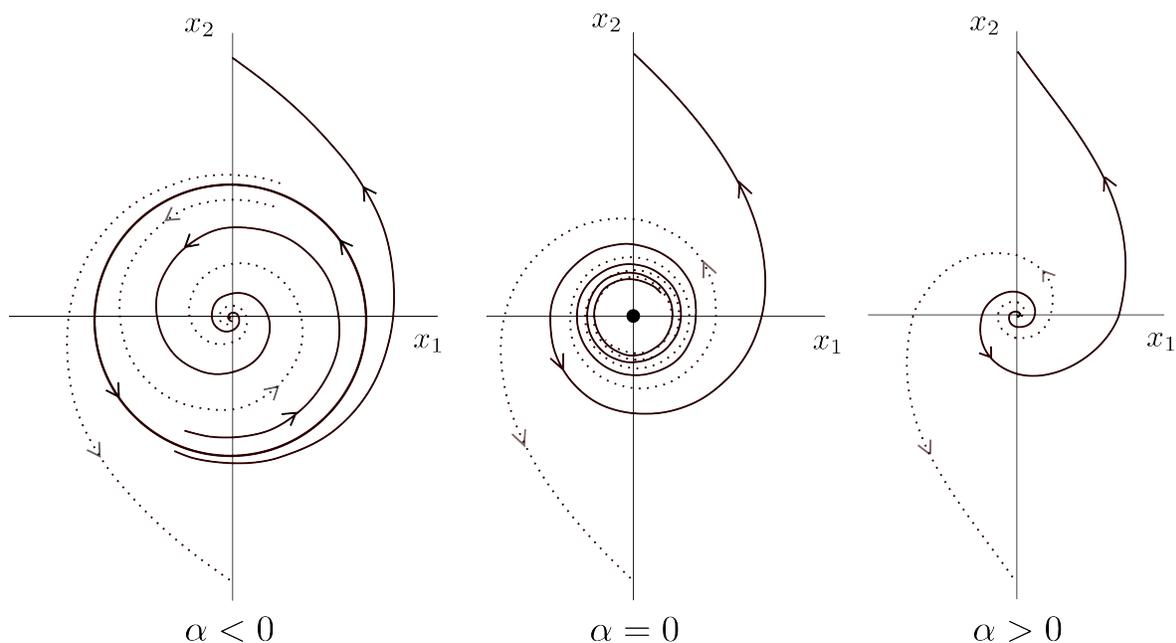


Figura 4.2: Bifurcação Neimark-Sacker subcrítica.

Observação 4.1.1. *Os casos $a(0) > 0$ e $a(0) < 0$ são frequentemente chamados de bifurcações Neimark-Sacker supercríticas e subcríticas, respectivamente. O tipo de bifurcação*

é determinado pela estabilidade do ponto fixo no valor do parâmetro de bifurcação.

Observação 4.1.2. *A estrutura das órbitas de (4.11) no círculo invariante depende de se a razão entre o ângulo de rotação $\Delta\varphi = \theta(\alpha) + \rho^2 Q_\alpha(\rho)$ e 2π é racional ou irracional no círculo. Se for racional, todas as órbitas da curva são periódicas. Mais precisamente, se*

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{p}{q}$$

com inteiros p e q , todos os pontos da curva são periódicos de período q da iterada q da aplicação. Se a razão for irracional, não há órbitas periódicas e todas as órbitas são densas no círculo.

Adicionaremos, agora, termos de ordem superior ao sistema (4.4). Neste sentido, considere o sistema

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \\ (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|(x_1, x_2)\|^4). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aqui, os termos de $O(\|(x_1, x_2)\|^4)$ podem depender suavemente de α . Infelizmente, não se pode dizer que o sistema dinâmico bidimensional (4.12) é localmente topologicamente conjugado ao sistema (4.4). Nesse caso, os termos de ordem superior afetam o comportamento da bifurcação do sistema. Se escrevermos (4.12) na forma polar, a aplicação para ρ dependerá de φ . O sistema pode ser representado de forma semelhante a (4.11), mas com funções 2π periódicas R e Q . No entanto, os retratos de fase dos sistemas (4.4) e (4.12) têm algumas características importantes em comum. Em outras palavras, vale o seguinte lema.

Lema 4.1.1. *Os termos $O(\|(x_1, x_2)\|^4)$ não afetam a bifurcação da curva fechada invariante em (4.12), ou seja, uma única curva fechada invariante bifurca localmente a partir da origem na mesma direção e com a mesma estabilidade do sistema (4.4).*

A prova do lema é bastante extensa e será fornecida, posteriormente, no [Capítulo 5](#). Entretanto, a ideia geométrica por trás da prova é simples. Esperamos que a aplicação [\(4.12\)](#) tenha uma curva fechada invariante perto do círculo invariante da aplicação [\(4.4\)](#).

Fixe α e considere o círculo

$$S_0 = \left\{ (\rho, \varphi) : \rho = \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}} \right\},$$

que está localizado perto do círculo invariante da aplicação “não perturbada” [\(4.4\)](#) sem os termos de ordem superior $O(\|x\|^4)$. Pode-se mostrar que as iteradas $F^n S_0$, $n = 1, 2, \dots$, onde F é a aplicação definida por [\(4.12\)](#), convergem para a curva fechada invariante

$$S_\infty = \{(\rho, \varphi) : \rho = \Psi(\varphi)\},$$

que não é um círculo, mas está próxima do círculo S_0 . Aqui, Ψ é uma função periódica na variável φ descrevendo S_∞ em coordenadas polares.

Para estabelecer a convergência, introduzimos uma nova variável “radial” u em uma faixa em torno de S_0 e mostramos que a aplicação F define uma contração \mathcal{F} em um espaço de funções periódicas de período 2π , $u = u(\varphi)$.

Decorre do [Teorema da Contração](#), o qual é o [Teorema 2.1.1](#) enunciado no [Capítulo 2](#), a existência de um ponto fixo $u^{(\infty)}$ de \mathcal{F} , isto é, $\mathcal{F}(u^{(\infty)}) = u^{(\infty)}$. A função periódica $u^{(\infty)} = u^{(\infty)}(\varphi)$ representa a curva fechada invariante S_∞ que procuramos para α fixado. A unicidade e a estabilidade de S_∞ na faixa decorrem, essencialmente, do [Teorema da Contração](#). Pode-se verificar que fora da faixa não existem conjuntos invariantes não triviais de [\(4.12\)](#).

4.2 Bifurcação Genérica de Neimark-Sacker

Provaremos nesta seção que qualquer sistema dinâmico discreto bidimensional que apresenta uma bifurcação de Neimark-Sacker pode ser transformado na forma [\(4.12\)](#).

Supomos em toda esta seção que a aplicação f dependendo do parâmetro real α possui um ponto fixo $x = 0$ para $\alpha = 0$, ou seja, $f(0, 0) = 0$. Se este não for o caso, basta efetuar uma translação na variável x e outra na variável α . Decorre disto o seguinte resultado.

Lema 4.2.1. *Se a aplicação suave*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, \alpha) &\longmapsto f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2) \end{aligned} \tag{4.13}$$

tem em $\alpha = 0$ o ponto fixo $x = 0$ cuja matriz Jacobiana possui autovalores complexos $\mu_{1,2}(0) = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$, então o sistema dinâmico discreto bidimensional tem um único ponto fixo $x_0(\alpha)$ em alguma vizinhança da origem para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeno.

Demonstração. Por hipótese, temos que $f(0, 0) = 0$. Considere a função suave

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, \alpha) &\longmapsto g(x, \alpha) = f(x, \alpha) - x. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Então:

- i. $g(0, 0) = f(0, 0) - 0 = 0$;
- ii. $Dg(x, \alpha) = Df(x, \alpha) - I$, o que implica que $Dg(0, 0) = Df(0, 0) - I$.

Como a matriz Jacobiana $Df(0, 0)$ da aplicação f possui forma canônica real de Jordan

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\text{sen } \theta_0 \\ \text{sen } \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix},$$

segue que $\mu = 1$ não é autovalor de $Df(0, 0)$, resultando de **ii** que $\det(Dg(0, 0)) \neq 0$ ou, equivalentemente, que $Dg(0, 0)$ é invertível.

Decorre, então, do Teorema da Função Implícita, que existem vizinhanças $J \subset \mathbb{R}$ de $\alpha = 0$, $V \subset \mathbb{R}^2$ de $x = 0$ e uma única função de classe C^∞ ,

$$\begin{aligned} x : J &\longrightarrow V \\ \alpha &\longmapsto x_0(\alpha), \end{aligned} \tag{4.15}$$

tais que:

- I. $x_0(0) = 0$;

II. $g(x_0(\alpha), \alpha) = f(x_0(\alpha), \alpha) - x_0(\alpha) = 0$, ou seja, $f(x_0(\alpha), \alpha) = x_0(\alpha)$, $\forall \alpha \in J$.

■

Transladando o ponto fixo $x_0(\alpha)$, como no Lema 4.2.1, para a origem, temos, sem perda de generalidade, que $x = 0$ é ponto fixo do sistema dinâmico discreto bidimensional para $|\alpha|$ suficientemente pequeno. Logo, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \widehat{f}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, \alpha) &\longmapsto \widehat{f}(x, \alpha) = f(x + x_0(\alpha), \alpha) - x_0(\alpha). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Portanto,

$$\widehat{f}(0, \alpha) = f(0 + x_0(\alpha), \alpha) - x_0(\alpha) = f(x_0(\alpha), \alpha) - x_0(\alpha) = 0, \quad \forall \alpha \in J.$$

Denotando novamente \widehat{f} por f , da expansão em série de Taylor da f , em torno de $x = 0$, temos

$$\begin{aligned} f(x, \alpha) &= f(0, \alpha) + Df(0, \alpha)x + G(x, \alpha) \\ &= A(\alpha)x + G(x, \alpha), \end{aligned} \tag{4.17}$$

onde G é uma função vetorial suave cujas componentes têm expansões em série de Taylor, em torno de $x = 0$, começando com os termos quadráticos e $G(0, \alpha) = 0$ para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeno. Além disso, $A(\alpha) = Df(0, \alpha)$ é a matriz Jacobiana que tem autovalores

$$\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm i\varphi(\alpha)}.$$

Logo, para $\alpha = 0$, temos que

$$\mu_{1,2}(0) = r(0)e^{\pm i\varphi(0)} = e^{\pm i\theta_0},$$

onde $r(0) = 1$ e $\varphi(0) = \theta_0$. Note que

$$\begin{aligned} r(\alpha) &= r(0) + (r'(0)\alpha + r''(0)\alpha^2 + \dots) \\ &= r(0) + \beta(\alpha) \\ &= 1 + \beta(\alpha), \end{aligned}$$

com $\beta = \beta(\alpha)$ uma função suave satisfazendo $\beta(0) = 0$, pois $1 = r(0) = 1 + \beta(0)$. Os três pontos denotam os termos de ordem superior.

Agora, suponha que $\beta'(0) \neq 0$, que é equivalente a $r'(0) \neq 0$. Pelo Teorema da Conservação do Sinal, existe $\hat{J} \subset J$, com $0 \in \hat{J}$ tal que $\beta'(\alpha) \neq 0$ para todo $\alpha \in \hat{J}$. Logo, β é uma função injetora em \hat{J} . Portanto, pelo Teorema da Função Inversa, podemos usar β como novo parâmetro e reescrever os autovalores da matriz Jacobiana como $\mu_1(\beta) = \mu(\beta)$, $\mu_2(\beta) = \bar{\mu}(\beta)$, sendo

$$\mu(\beta) = r(\beta)e^{i\theta(\beta)},$$

com a função suave $\theta = \theta(\beta)$ satisfazendo $\theta(0) = \theta_0$. As demais funções também são reescritas em termos do parâmetro β .

Lema 4.2.2. *Pela introdução de uma variável complexa e um novo parâmetro, o sistema dinâmico discreto bidimensional (4.17) pode ser transformado, para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeno, na seguinte forma*

$$z \mapsto \mu(\beta)z + g(z, \bar{z}, \beta), \quad (4.18)$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$ e g é uma função suave a valores complexos de z , \bar{z} e β cuja expansão em série de Taylor em torno de $(z, \bar{z}) = (0, 0)$ contém os termos quadráticos e os termos de ordem superior

$$g(z, \bar{z}, \beta) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\beta) z^k \bar{z}^l,$$

com $k, l = 0, 1, 2, \dots$

Demonstração. Seja $q(\beta) \in \mathbb{C}^2$ autovetor da matriz $A(\beta)$ correspondente ao autovalor $\mu(\beta)$, isto é,

$$A(\beta)q(\beta) = \mu(\beta)q(\beta),$$

e seja $p(\beta) \in \mathbb{C}^2$ autovetor da matriz transposta $A^T(\beta)$ correspondente ao autovalor $\bar{\mu}(\beta)$, ou seja,

$$A^T(\beta)p(\beta) = \bar{\mu}(\beta)p(\beta).$$

É sempre possível normalizar $p(\beta)$ com respeito a $q(\beta)$,

$$\langle p(\beta), q(\beta) \rangle = 1,$$

com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotando o produto escalar em \mathbb{C}^2 definido no início da Seção 2.3.

Uma vez que

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = 0\},$$

e $\{q(\beta), \bar{q}(\beta)\}$ é base de \mathbb{C}^2 , qualquer vetor $x \cong (x, 0) \in \mathbb{C}^2$ pode ser representado de maneira única, para todo $|\beta|$ suficientemente pequeno, como

$$x = zq(\beta) + \bar{z}\bar{q}(\beta), \quad (4.19)$$

para algum número complexo z dado por

$$z = \langle p(\beta), x \rangle. \quad (4.20)$$

Note que (4.20) está bem definido, pois de (4.19) segue que

$$\begin{aligned} \langle p(\beta), x \rangle &= \langle p(\beta), zq(\beta) + \bar{z}\bar{q}(\beta) \rangle \\ &= \langle p(\beta), zq(\beta) \rangle + \langle p(\beta), \bar{z}\bar{q}(\beta) \rangle \\ &= z\langle p(\beta), q(\beta) \rangle + \bar{z}\langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle p(\beta), q(\beta) \rangle = 1$, basta verificarmos que $\langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle &= \left\langle p(\beta), \frac{A(\beta)\bar{q}(\beta)}{\bar{\mu}(\beta)} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\bar{\mu}(\beta)} \langle p(\beta), A(\beta)\bar{q}(\beta) \rangle \\ &= \frac{1}{\bar{\mu}(\beta)} \langle A^T(\beta)p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle \\ &= \frac{\mu(\beta)}{\bar{\mu}(\beta)} \langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle - \frac{\mu(\beta)}{\bar{\mu}(\beta)} \langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle = 0,$$

implicando que

$$\left(1 - \frac{\mu(\beta)}{\bar{\mu}(\beta)}\right) \langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle = 0.$$

Resulta que

$$\left(1 - \frac{\mu(\beta)}{\bar{\mu}(\beta)}\right) \neq 0,$$

pois, para $|\beta|$ suficientemente pequeno, temos $\mu(\beta) \neq 1$, já que $\theta(0) = \theta_0$ e $0 < \theta_0 < \pi$.

Portanto,

$$\langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle = 0.$$

A variável complexa z satisfaz

$$\tilde{z} = \mu(\beta)z + \langle p(\beta), G(zq(\beta) + \bar{z}\bar{q}(\beta), \beta) \rangle.$$

De fato, de (4.20) temos que

$$\tilde{z} = \langle p(\beta), \tilde{x} \rangle.$$

Logo, de (4.17) temos

$$\tilde{z} = \langle p(\beta), A(\beta)x + G(x, \beta) \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \langle p(\beta), A(\beta)x + G(x, \beta) \rangle \\ &= \langle p(\beta), A(\beta)x \rangle + \langle p(\beta), G(x, \beta) \rangle \\ &= \langle p(\beta), A(\beta)(zq(\beta) + \bar{z}\bar{q}(\beta)) \rangle + \langle p(\beta), G(zq(\beta) + \bar{z}\bar{q}(\beta), \beta) \rangle \\ &= \langle p(\beta), A(\beta)(zq(\beta)) \rangle + \langle p(\beta), A(\beta)(\bar{z}\bar{q}(\beta)) \rangle + \langle p(\beta), G(zq(\beta) + \bar{z}\bar{q}(\beta), \beta) \rangle \\ &= \mu(\beta)z \langle p(\beta), q(\beta) \rangle + \bar{\mu}(\beta)\bar{z} \langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle + \langle p(\beta), G(zq(\beta) + \bar{z}\bar{q}(\beta), \beta) \rangle \\ &= \mu(\beta)z + \langle p(\beta), G(zq(\beta) + \bar{z}\bar{q}(\beta), \beta) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$g(z, \bar{z}, \beta) = \langle p(\beta), G(zq(\beta) + \bar{z}\bar{q}(\beta), \beta) \rangle.$$

■

O próximo lema garante que os termos quadráticos da função g em (4.18) podem ser eliminados através de uma mudança de coordenadas complexa. Utilizaremos a notação simplificada para uma equação de recorrência, conforme a Seção 2.1.

Lema 4.2.3. *A aplicação*

$$z \mapsto \mu z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3), \quad (4.21)$$

onde $\mu = \mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$ e $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$, pode ser transformada pela mudança de coordenadas complexa

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2, \quad (4.22)$$

para $|\beta|$ suficientemente pequeno, na aplicação sem termos quadráticos

$$w \mapsto \mu w + O(|w|^3),$$

desde que $e^{i\theta_0} \neq 1$ e $e^{3i\theta_0} \neq 1$, sendo $\theta_0 = \theta(0)$.

Demonstração. Tanto a mudança de coordenadas complexa (4.22), quanto a mudança de coordenadas complexa inversa, dada por

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3)$$

dependem suavemente de β e são próximas da identidade em uma vizinhança de $z = 0$.

Trabalharemos com a equação de recorrência,

$$z \mapsto \tilde{z} = \mu z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3), \quad (4.23)$$

e as mudanças de coordenadas complexas,

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{w} = \tilde{z} - \frac{h_{20}}{2} \tilde{z}^2 - h_{11} \tilde{z} \bar{\tilde{z}} - \frac{h_{02}}{2} \bar{\tilde{z}}^2 + O(|\tilde{z}|^3) \quad (4.24)$$

e

$$w \mapsto z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2. \quad (4.25)$$

Substituindo (4.23) em (4.24), obtemos

$$\tilde{w} = \mu z + \frac{1}{2} (g_{20} - \mu^2 h_{20}) z^2 + (g_{11} - |\mu|^2 h_{11}) z \bar{z} + \frac{1}{2} (g_{02} - \bar{\mu}^2 h_{02}) \bar{z}^2 + O(|z|^3). \quad (4.26)$$

Agora, substituindo (4.25) em (4.26), encontramos a equação de recorrência

$$w \mapsto \tilde{w} = \mu w + \frac{1}{2} (g_{20} + (\mu - \mu^2) h_{20}) w^2 + (g_{11} + (\mu - |\mu|^2) h_{11}) w \bar{w} + \frac{1}{2} (g_{02} + (\mu - \bar{\mu}^2) h_{02}) \bar{w}^2 + O(|w|^3). \quad (4.27)$$

Escolhendo

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\mu^2 - \mu}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{|\mu|^2 - \mu}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{\bar{\mu}^2 - \mu},$$

eliminamos todos os termos quadráticos em (4.27). Estas escolhas são possíveis desde que os denominadores sejam não nulos para $|\beta|$ suficientemente pequeno. Na realidade, este é o caso, pois

$$\begin{aligned} \mu^2(0) - \mu(0) &= e^{i\theta_0}(e^{i\theta_0} - 1) \neq 0, \\ |\mu^2(0)| - \mu(0) &= 1 - e^{i\theta_0} \neq 0, \\ \bar{\mu}^2(0) - \mu(0) &= e^{-2i\theta_0}(1 - e^{3i\theta_0}) \neq 0, \end{aligned}$$

devido às restrições em θ_0 . ■

Obviamente, a mudança de coordenadas complexa presente no lema anterior, além de anular os coeficientes dos termos quadráticos de (4.21), modifica também os termos de ordem superior. Em particular, os coeficientes dos termos cúbicos são alterados. No próximo lema, os coeficientes dos termos cúbicos de (4.28) podem ser vistos neste sentido.

Lema 4.2.4. *A aplicação*

$$z \mapsto \mu z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21} z^2 \bar{z}}{2} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4), \quad (4.28)$$

onde $\mu = \mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$ e $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$, pode ser transformada pela mudança de coordenadas complexa

$$z = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21} w^2 \bar{w}}{2} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3,$$

para $|\beta|$ suficientemente pequeno, na aplicação com apenas um termo cúbico,

$$w \mapsto \mu w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4),$$

desde que $e^{2i\theta_0} \neq 1$ e $e^{4i\theta_0} \neq 1$, sendo $\theta_0 = \theta(0)$.

Demonstração. Procedemos como na prova do Lema 4.2.3. Novamente, a mudança de coordenadas complexa inversa é dada por

$$w = z - \frac{h_{30}}{6} z^3 - \frac{h_{21}}{2} z^2 \bar{z} - \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4),$$

em uma vizinhança de $z = 0$.

Há uma equação de recorrência,

$$z \mapsto \tilde{z} = \mu z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21} z^2 \bar{z}}{2} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4), \quad (4.29)$$

e as mudanças de coordenadas,

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{w} = \tilde{z} - \frac{h_{30}}{6} \tilde{z}^3 - \frac{h_{21}}{2} \tilde{z}^2 \bar{\tilde{z}} - \frac{h_{12}}{2} \tilde{z} \bar{\tilde{z}}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{\tilde{z}}^3 + O(|\tilde{z}|^4) \quad (4.30)$$

e

$$w \mapsto z = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21} w^2 \bar{w}}{2} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3. \quad (4.31)$$

A substituição de (4.29) em (4.30), leva a

$$\begin{aligned} \tilde{w} = \mu z + \frac{1}{6} (g_{30} - \mu^3 h_{30}) z^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - \mu |\mu|^2 h_{21}) z^2 \bar{z} + \frac{1}{2} (g_{12} - \bar{\mu} |\mu|^2 h_{12}) z \bar{z}^2 + \\ \frac{1}{6} (g_{03} - \bar{\mu}^3 h_{03}) \bar{z}^3 + O(|z|^4). \end{aligned} \quad (4.32)$$

A seguinte equação de recorrência é obtida substituindo (4.31) em (4.32),

$$\begin{aligned} w \mapsto \tilde{w} = \mu w + \frac{1}{6} (g_{30} + (\mu - \mu^3) h_{30}) w^3 + \frac{1}{2} (g_{21} + (\mu - \mu |\mu|^2) h_{21}) w^2 \bar{w} + \\ \frac{1}{2} (g_{12} + (\mu - \bar{\mu} |\mu|^2) h_{12}) w \bar{w}^2 + \frac{1}{6} (g_{03} + (\mu - \bar{\mu}^3) h_{03}) \bar{w}^3 + O(|w|^4). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Escolhendo

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{\mu^3 - \mu}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{\bar{\mu} |\mu|^2 - \mu}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{\bar{\mu}^3 - \mu},$$

eliminamos todos os termos cúbicos em (4.33), exceto o coeficiente do termo $w^2 \bar{w}$, que deve ser tratado separadamente. As escolhas para h_{30} , h_{12} e h_{03} são possíveis, uma vez que das hipóteses sobre θ_0 ,

$$\mu^3(0) - \mu(0) = e^{i\theta_0} (e^{2i\theta_0} - 1) \neq 0,$$

$$\bar{\mu}(0) |\mu^2(0)|^2 - \mu(0) = e^{-i\theta_0} (1 - e^{2i\theta_0}) \neq 0,$$

$$\bar{\mu}^3(0) - \mu(0) = e^{-3i\theta_0} (1 - e^{4i\theta_0}) \neq 0.$$

Pode-se também tentar eliminar o termo $w^2 \bar{w}$ definindo formalmente

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\mu(|\mu|^2 - 1)}.$$

Isto é possível para $\beta \neq 0$ com módulo suficientemente pequeno, mas o denominador se anula quando $\beta = 0$, pois

$$\mu(0)(|\mu(0)|^2 - 1) = e^{i\theta_0}(|e^{i\theta_0}|^2 - 1) = 0,$$

para todo θ_0 .

Para obter uma transformação que dependa suavemente de β , escolhemos $h_{21} = 0$, que resulta em $c_1 = g_{21}/2$. ■

O termo cúbico $w^2\bar{w}$ é denominado **termo ressonante**. A prova do próximo resultado é imediata a partir dos lemas e construções anteriores.

Lema 4.2.5 (Forma Normal da Bifurcação de Neimark-Sacker). *A aplicação*

$$z \mapsto \mu z + \frac{g_{20}}{2}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{g_{02}}{2}\bar{z}^2 + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}z^2\bar{z}}{2} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4), \quad (4.34)$$

onde $\mu = \mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$ e $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$, satisfazendo $e^{ki\theta_0} \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$, sendo $\theta_0 = \theta(0)$, pode ser transformada pela mudança de coordenadas complexa, que depende suavemente do parâmetro β ,

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3,$$

para $|\beta|$ suficientemente pequeno, na aplicação com apenas o termo cúbico ressonante

$$w \mapsto \mu w + c_1 w^2\bar{w} + O(|w|^4),$$

onde $c_1 = c_1(\beta)$.

Resumindo, as mudanças de coordenadas complexas definidas nos Lemas 4.2.3 e 4.2.4 fornecem a mudança de coordenadas necessária para a forma normal. Primeiro, os termos quadráticos são eliminados. Isto, obviamente, altera os coeficientes dos termos cúbicos. O coeficiente do termo $w^2\bar{w}$ será, digamos, $\tilde{g}_{21}/2$, em vez de $g_{21}/2$. Em seguida, eliminamos todos os termos cúbicos, exceto o termo ressonante, que permanece com coeficiente $\tilde{g}_{21}/2$.

Assim, tudo o que precisamos calcular para obter o coeficiente de c_1 é o novo coeficiente $\tilde{g}_{21}/2$ do termo $w^2\bar{w}$ após a mudança de coordenadas complexa dada no Lema 4.2.3.

Os cálculos no Lema 4.2.3 resultam na seguinte expressão para $c_1 = c_1(\beta) = g_{21}/2$,

$$c_1 = \frac{g_{20}g_{11}(\bar{\mu} - 3 + 2\mu)}{2(\mu^2 - \mu)(\bar{\mu} - 1)} + \frac{|g_{11}|^2}{1 - \bar{\mu}} + \frac{|g_{02}|^2}{2(\mu^2 - \bar{\mu})} + \frac{g_{21}}{2}. \quad (4.35)$$

Para $\alpha = 0$,

$$c_1(0) = \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)(1 - 2\mu_0)}{2(\mu_0^2 - \mu_0)} + \frac{|g_{11}(0)|^2}{1 - \bar{\mu}_0} + \frac{|g_{02}(0)|^2}{2(\mu_0^2 - \bar{\mu}_0)} + \frac{g_{21}(0)}{2}, \quad (4.36)$$

com $\mu_0 = e^{i\theta_0}$.

Os resultados obtidos anteriormente podem ser resumidos no seguinte teorema.

Teorema 4.2.1. *Suponha que o sistema dinâmico discreto bidimensional*

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (4.37)$$

com f suave, possui, para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeno, o ponto fixo $x = 0$ com matriz Jacobiana tendo autovalores complexos

$$\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm i\varphi(\alpha)},$$

onde $r(0) = 1$ e $\varphi(0) = \theta_0$. Suponha também que as seguintes condições são satisfeitas:

H1. $r'(0) \neq 0$;

H2. $e^{ki\theta_0} \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$.

Então, existem mudanças de coordenadas suaves e invertíveis e mudanças de parâmetros que transformam (4.37) em

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &\mapsto (1 + \beta) \begin{pmatrix} \cos \theta(\beta) & -\text{sen } \theta(\beta) \\ \text{sen } \theta(\beta) & \cos \theta(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \\ &(y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta(\beta) & -\text{sen } \theta(\beta) \\ \text{sen } \theta(\beta) & \cos \theta(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(\beta) & -b(\beta) \\ b(\beta) & a(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \\ &O(\|(y_1, y_2)\|^4), \end{aligned} \quad (4.38)$$

com $\theta_0 = \theta(0)$ e $a(0) = \text{Re}(e^{-i\theta_0}c_1(0))$, onde $c_1(0)$ é dado em (4.36).

Demonstração. Decorre das hipóteses e dos Lemas 4.2.3 e 4.2.4 que o sistema dinâmico discreto bidimensional

$$(x, \alpha) \mapsto f(x, \alpha)$$

pode ser reescrito como a forma

$$w \mapsto \mu(\beta)w + c_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

com $\mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$.

Por sua vez, esta forma pode ser reescrita como

$$w \mapsto e^{i\theta(\beta)} (1 + \beta + d(\beta)|w|^2) w + O(|w|^4), \quad (4.39)$$

com $d(\beta) = a(\beta) + ib(\beta)$, sendo $a(\beta)$ e $b(\beta)$ funções suaves a valores reais.

Resulta que o sistema dinâmico discreto bidimensional (4.38) é obtido substituindo $w = y_1 + iy_2$ em (4.39), separando as partes real e imaginária e reescrevendo o resultado na forma vetorial.

Por último, de (4.39),

$$a(\beta) = \operatorname{Re} d(\beta) = \operatorname{Re} (e^{-i\theta(\beta)} c_1(\beta))$$

e, portanto, $a(0) = \operatorname{Re} (e^{-i\theta_0} c_1(0))$. ■

Podemos, agora, enunciar o seguinte resultado geral.

Teorema 4.2.2 (Bifurcação Genérica de Neimark-Sacker). *Para qualquer sistema dinâmico discreto bidimensional genérico a um parâmetro,*

$$(x, \alpha) \mapsto f(x, \alpha),$$

tendo em $\alpha = 0$ o ponto fixo $x = 0$ com matriz Jacobiana tendo autovalores complexos $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, existe uma vizinhança de $x = 0$ na qual bifurca uma única curva fechada invariante de $x = 0$ quando α passa por zero.

Demonstração. O Teorema 4.2.1 permite reescrever

$$(x, \alpha) \mapsto f(x, \alpha),$$

como (4.39). O resultado, então, segue do Lema 4.1.1. ■

Observação 4.2.1. *As condições de genericidade assumidas são a condição de transversalidade **H1**, a condição de não degenerescência **H2**, dadas no Teorema 4.2.1, e a condição de não degenerescência adicional dada também no Teorema 4.2.1:*

H3. $a(0) \neq 0$.

Vale ressaltar que as condições $e^{ik\theta_0} \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$ não são meramente técnicas. Se elas não forem satisfeitas, a curva fechada invariante pode não existir ou pode haver várias curvas fechadas invariantes bifurcando a partir do ponto fixo.

O coeficiente $a(0)$, que permite o surgimento ou desaparecimento de uma única curva fechada invariante no retrato de fase de um sistema dinâmico discreto bidimensional genérico exibindo a bifurcação de Neimark Sacker de codimensão 1, pode ser calculado também como

$$a(0) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\theta_0} g_{21}}{2} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - 2e^{i\theta_0})e^{-2i\theta_0}}{2(1 - e^{i\theta_0})} g_{20} g_{11} \right) - \frac{1}{2} |g_{11}|^2 - \frac{1}{4} |g_{02}|^2. \quad (4.40)$$

Capítulo 5

Conclusão da Demonstração do Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de Codimensão 1

Este capítulo consiste apenas da prova do Lema 4.1.1.

5.1 Demonstração do Lema 4.1.1

Reescrevendo (4.12) em coordenadas complexas, provamos o seguinte lema que é análogo ao Lema 4.1.1.

Lema 5.1.1. *A aplicação*

$$z \mapsto \tilde{z} = e^{i\theta(\alpha)} z (1 + \alpha + d(\alpha)|z|^2) + g(z, \bar{z}, \alpha), \quad (5.1)$$

onde $d(\alpha) = a(\alpha) + ib(\alpha)$, com $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ e $\theta(\alpha)$ funções suaves a valores reais, $a(0) < 0$, $0 < \theta(0) < \pi$ e $g = O(|z|^4)$ é uma função complexa suave dependendo de z , \bar{z} e α , tem uma curva fechada invariante assintoticamente estável no retrato de fase para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno.

Demonstração.

PASSO 1 (REDIMENSIONAMENTO E DESLOCAMENTO). Primeiramente, introduzimos novas variáveis (s, φ) através de

$$z = \chi e^{i\varphi}(1 + s), \quad (5.2)$$

onde $s, \varphi \in \mathbb{R}$, $1 + s > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ e

$$\chi = \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}}.$$

Note que, como $a(0) < 0$, para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, $a(\alpha)$ preserva o sinal de $a(0)$ e, portanto, χ é um número real positivo. Observe também que

$$\tilde{z} = \chi e^{i\tilde{\varphi}}(1 + \tilde{s}) \quad \text{e} \quad |z|^2 = -\frac{\alpha}{a(\alpha)}|1 + s|^2. \quad (5.3)$$

Logo, substituindo (5.2) e (5.3) em (5.1) temos

$$\chi e^{i\tilde{\varphi}}(1 + \tilde{s}) = e^{i\theta(\alpha)} \chi e^{i\varphi}(1 + s) \left[1 + \alpha + d(\alpha) \left(-\frac{\alpha}{a(\alpha)}|1 + s|^2 \right) \right] + g(z, \bar{z}, \alpha).$$

Daí

$$\begin{aligned} e^{i\tilde{\varphi}}(1 + \tilde{s}) &= e^{i[\varphi + \theta(\alpha)]}(1 + s) \left[1 + \alpha + (a(\alpha) + ib(\alpha)) \left(-\frac{\alpha}{a(\alpha)}|1 + s|^2 \right) \right] + \frac{g(z, \bar{z}, \alpha)}{\chi} \\ &= e^{i[\varphi + \theta(\alpha)]}(1 + s) \left[1 + \alpha - \alpha|1 + s|^2 - i\alpha \frac{b(\alpha)}{a(\alpha)}|1 + s|^2 \right] + \frac{g(z, \bar{z}, \alpha)}{\chi}. \end{aligned}$$

Visto que $1 + s \geq 0$, então

$$\begin{aligned} e^{i\tilde{\varphi}}(1 + \tilde{s}) &= e^{i[\varphi + \theta(\alpha)]}(1 + s) \left[1 + \alpha - \alpha(1 + s)^2 - i\alpha \frac{b(\alpha)}{a(\alpha)}(1 + s)^2 \right] + \frac{g(z, \bar{z}, \alpha)}{\chi} \\ &= e^{i[\varphi + \theta(\alpha)]}(1 + s) \left[1 + \alpha - \alpha(1 + 2s + s^2) - i\alpha \frac{b(\alpha)}{a(\alpha)}(1 + s)^2 \right] + \\ &\quad \frac{g(z, \bar{z}, \alpha)}{\chi} \\ &= e^{i[\varphi + \theta(\alpha)]}(1 + s) \left[1 - \alpha(2s + s^2) - i\alpha \frac{b(\alpha)}{a(\alpha)}(1 + s)^2 \right] + \frac{g(z, \bar{z}, \alpha)}{\chi}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Agora, como $g(z, \bar{z}, \alpha) = O(|z|^4)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}, \alpha) &= \sum_{k+l \geq 4} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l \\ &= \frac{1}{4!} g_{40}(\alpha) z^4 + \frac{1}{3!} g_{31}(\alpha) z^3 \bar{z} + \frac{1}{2!2!} g_{22}(\alpha) z^2 \bar{z}^2 + \\ &\quad \frac{1}{3!} g_{13}(\alpha) z \bar{z}^3 + \frac{1}{4!} g_{04}(\alpha) \bar{z}^4 + \dots, \end{aligned}$$

com z dado (5.2). Logo,

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \chi^4 G(s, \varphi, \alpha)$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{g(z, \bar{z}, \alpha)}{\chi} = \chi^3 G(s, \varphi, \alpha) = \alpha^{3/2} h(s, \varphi, \alpha),$$

onde h é uma função suave a valores complexos de $(s, \varphi, \alpha^{1/2})$.

Portanto, podemos reescrever (5.4) na seguinte forma

$$e^{i\tilde{\varphi}}(1 + \tilde{s}) = e^{i[\varphi + \theta(\alpha)]}(1 + s) [1 - \alpha(2s + s^2) + i\alpha\nu(\alpha)(1 + s)^2] + \alpha^{3/2} h(s, \varphi, \alpha), \quad (5.5)$$

onde

$$\nu(\alpha) = -\frac{b(\alpha)}{a(\alpha)}.$$

Assim, a aplicação (5.1) nas coordenadas (s, φ) se escreve como

$$\begin{cases} \tilde{s} = (1 - 2\alpha)s - \alpha(3s^2 + s^3) + \alpha^{3/2} p(s, \varphi, \alpha), \\ \tilde{\varphi} = \varphi + \theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)(1 + s)^2 + \alpha^{3/2} q(s, \varphi, \alpha), \end{cases} \quad (5.6)$$

onde p e q são funções suaves a valores reais de $(s, \varphi, \alpha^{1/2})$. De fato, basta substituir (5.6) em $e^{i\tilde{\varphi}}(1 + \tilde{s})$, obtendo

$$\begin{aligned} e^{i\tilde{\varphi}}(1 + \tilde{s}) &= e^{i[\varphi + \theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)(1+s)^2 + \alpha^{3/2}q(s, \varphi, \alpha)]} [1 + (1 - 2\alpha)s - \alpha(3s^2 + s^3) + \alpha^{3/2}p(s, \varphi, \alpha)] \\ &= e^{i[\varphi + \theta(\alpha)]} e^{i[\alpha\nu(\alpha)(1+s)^2 + \alpha^{3/2}q(s, \varphi, \alpha)]} [1 + (1 - 2\alpha)s - \alpha(3s^2 + s^3) + \alpha^{3/2}p(s, \varphi, \alpha)], \end{aligned}$$

observar que

$$e^{i[\alpha\nu(\alpha)(1+s)^2 + \alpha^{3/2}q(s, \varphi, \alpha)]} = 1 + i(\alpha\nu(\alpha)(1 + s)^2 + \alpha^{3/2}q(s, \varphi, \alpha)) + \dots$$

e agrupar os primeiros termos de maneira conveniente.

Agora, seja

$$s = \sqrt{\alpha}\xi \quad (5.7)$$

e note que

$$\tilde{s} = \sqrt{\alpha}\tilde{\xi}. \quad (5.8)$$

Substituindo (5.7) e (5.8) em (5.6), temos

$$\begin{cases} \sqrt{\alpha}\tilde{\xi} = (1 - 2\alpha)\sqrt{\alpha}\xi - \alpha(3(\sqrt{\alpha}\xi)^2 + (\sqrt{\alpha}\xi)^3) + \alpha^{3/2}p(\sqrt{\alpha}\xi, \varphi, \alpha), \\ \tilde{\varphi} = \varphi + \theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)(1 + \sqrt{\alpha}\xi)^2 + \alpha^{3/2}q(\sqrt{\alpha}\xi, \varphi, \alpha). \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \frac{(1 - 2\alpha)\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\alpha(3(\sqrt{\alpha}\xi)^2 + (\sqrt{\alpha}\xi)^3)}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\alpha^{3/2}p(\sqrt{\alpha}\xi, \varphi, \alpha)}{\sqrt{\alpha}} \\ &= (1 - 2\alpha)\xi - \frac{\alpha(3\alpha\xi^2 + \alpha\sqrt{\alpha}\xi^3)}{\sqrt{\alpha}} + \alpha p(\sqrt{\alpha}\xi, \varphi, \alpha) \\ &= (1 - 2\alpha)\xi - \frac{\alpha^2(3\xi^2 + \sqrt{\alpha}\xi^3)}{\sqrt{\alpha}} + \alpha p(\sqrt{\alpha}\xi, \varphi, \alpha) \\ &= (1 - 2\alpha)\xi - \alpha^{3/2}(3\xi^2 + \sqrt{\alpha}\xi^3) + \alpha p(\sqrt{\alpha}\xi, \varphi, \alpha) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \varphi + \theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)(1 + \sqrt{\alpha}\xi)^2 + \alpha^{3/2}q(\sqrt{\alpha}\xi, \varphi, \alpha) \\ &= \varphi + \theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)(1 + 2\sqrt{\alpha}\xi + (\sqrt{\alpha}\xi)^2) + \alpha^{3/2}q(\sqrt{\alpha}\xi, \varphi, \alpha) \\ &= \varphi + \theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)(2\sqrt{\alpha}\xi + (\sqrt{\alpha})^2\xi^2) + \alpha^{3/2}q(\sqrt{\alpha}\xi, \varphi, \alpha) \\ &= \varphi + \theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)(\sqrt{\alpha}(2\xi + \sqrt{\alpha}\xi^2)) + \alpha^{3/2}q(\sqrt{\alpha}\xi, \varphi, \alpha) \\ &= \varphi + [\theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)] + \alpha^{3/2}\nu(\alpha)(2\xi + \sqrt{\alpha}\xi^2) + \alpha^{3/2}q(\sqrt{\alpha}\xi, \varphi, \alpha). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = (1 - 2\alpha)\xi - \alpha^{3/2}(3\xi^2 + \alpha^{1/2}\xi^3) + \alpha p^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha), \\ \tilde{\varphi} = \varphi + [\theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)] + \alpha^{3/2}\nu(\alpha)(2\xi + \alpha^{1/2}\xi^2) + \alpha^{3/2}q^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha), \end{cases} \quad (5.9)$$

onde

$$\begin{aligned} p^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha) &= p(\alpha^{1/2}\xi, \varphi, \alpha), \\ q^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha) &= q(\alpha^{1/2}\xi, \varphi, \alpha), \end{aligned}$$

são funções suaves com respeito a $(\xi, \varphi, \alpha^{1/2})$.

Seja $\omega(\alpha) = \theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)$ e note que $p^{(1)}$ pode ser reescrita como

$$p^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha) = r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha^{1/2}r^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha). \quad (5.10)$$

Substituindo (5.10) na primeira expressão de (5.9), temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi} &= (1 - 2\alpha)\xi - \alpha^{3/2} (3\xi^2 + \alpha^{1/2}\xi^3) + \alpha (r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha^{1/2}r^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha)) \\
&= (1 - 2\alpha)\xi - \alpha^{3/2} (3\xi^2 + \alpha^{1/2}\xi^3) + \alpha r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha^{3/2}r^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha) \\
&= (1 - 2\alpha)\xi + \alpha r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha^{3/2} (- (3\xi^2 + \alpha^{1/2}\xi^3) + r^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha)).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Assim, (5.9) pode ser representada por

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = (1 - 2\alpha)\xi + \alpha r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha^{3/2}r^{(2)}(\xi, \varphi, \alpha), \\ \tilde{\varphi} = \varphi + \omega(\alpha) + \alpha^{3/2}q^{(2)}(\xi, \varphi, \alpha), \end{cases} \tag{5.12}$$

com

$$\begin{aligned}
r^{(2)}(\xi, \varphi, \alpha) &= - (3\xi^2 + \alpha^{1/2}\xi^3) + r^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha), \\
q^{(2)}(\xi, \varphi, \alpha) &= \nu(\alpha) (2\xi + \alpha^{1/2}\xi^2) + q^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha).
\end{aligned}$$

As funções $r^{(2)}$ e $q^{(2)}$ tem a mesma suavidade que $p^{(1)}$ e $q^{(1)}$.

Finalmente, para eliminar o termo $\alpha r^{(0)}(\varphi, \alpha)$ da primeira expressão em (5.12), realizamos a mudança de coordenadas,

$$\xi = u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha), \tag{5.13}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi} &= (1 - 2\alpha)\xi + \alpha r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha^{3/2}r^{(2)}(\xi, \varphi, \alpha) \\
&= (1 - 2\alpha) \left(u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha) \right) + \alpha r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha^{3/2}r^{(2)} \left(u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha), \varphi, \alpha \right) \\
&= u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha) - 2\alpha u - \alpha r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha^{3/2}r^{(2)} \left(u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha), \varphi, \alpha \right) \\
&= (1 - 2\alpha)u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha^{3/2}r^{(2)} \left(u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha), \varphi, \alpha \right).
\end{aligned}$$

Logo, como

$$\tilde{\xi} = \tilde{u} + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha),$$

temos que

$$\tilde{u} + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha) = (1 - 2\alpha)u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha^{3/2}r^{(2)} \left(u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha), \varphi, \alpha \right),$$

ou seja,

$$\tilde{u} = (1 - 2\alpha)u + \alpha^{3/2}r^{(2)} \left(u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha), \varphi, \alpha \right). \quad (5.14)$$

Portanto, temos a aplicação F definida por

$$F : \begin{cases} \tilde{u} = (1 - 2\alpha)u + \alpha^{3/2}H_\alpha(u, \varphi), \\ \tilde{\varphi} = \varphi + \omega(\alpha) + \alpha^{3/2}K_\alpha(u, \varphi), \end{cases} \quad (5.15)$$

onde $\omega(\alpha)$ é suave e

$$\begin{aligned} H_\alpha(u, \varphi) &= r^{(2)} \left(u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha), \varphi, \alpha \right), \\ K_\alpha(u, \varphi) &= q^{(2)} \left(u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha), \varphi, \alpha \right), \end{aligned}$$

são funções suaves de $(u, \varphi, \alpha^{1/2})$ e periódicas de período 2π na variável φ .

Note que a faixa $\{(u, \varphi) : |u| \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi]\}$ corresponde a faixa de largura $O(\alpha)$ em torno do círculo

$$S_0(\alpha) = \left\{ z : |z|^2 = -\frac{\alpha}{a(\alpha)} \right\}$$

em (5.1), que tem raio $O(\alpha^{1/2})$ na coordenada original z . Com isso, é conveniente introduzir o número

$$\lambda = \sup_{|u| \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi]} \left\{ |H_\alpha|, |K_\alpha|, \left| \frac{\partial H_\alpha}{\partial u} \right|, \left| \frac{\partial K_\alpha}{\partial u} \right|, \left| \frac{\partial H_\alpha}{\partial \varphi} \right|, \left| \frac{\partial K_\alpha}{\partial \varphi} \right| \right\}. \quad (5.16)$$

Assim definido, λ depende de α , mas permanece limitado quando $\alpha \rightarrow 0$.

PASSO 2 (DEFINIÇÃO DOS ESPAÇOS DAS FUNÇÕES). Denotemos por X o conjunto das funções

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto u(\varphi), \end{aligned}$$

que são contínuas e periódicas de período 2π . Com a métrica

$$d(u, v) = \|u - v\|,$$

induzida pela norma

$$\|u\| = \sup_{\varphi \in [0, 2\pi]} |u(\varphi)|,$$

temos que (X, d) é um espaço métrico completo.

Seja $U \subset X$ o conjunto das funções satisfazendo as duas propriedades a seguir:

- i. $|u(\varphi)| \leq 1$, para todo $\varphi \in \mathbb{R}$;
- ii. $|u(\varphi_1) - u(\varphi_2)| \leq |\varphi_1 - \varphi_2|$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.

A primeira propriedade diz que $u(\varphi)$ é **absolutamente limitada** por 1, enquanto a segunda propriedade diz que $u(\varphi)$ é **Lipschitz** com constante Lipschitz igual a 1. Lembremos que toda função Lipschitz é contínua.

Restringindo a métrica d definida em X a U , resulta que o par (U, d) é um espaço métrico. Se (u_n) é uma sequência de Cauchy em (U, d) , então, como $U \subset X$, (u_n) é uma sequência de Cauchy em (X, d) e pelo fato de (X, d) ser completo, existe $u \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u) = 0.$$

Assim, $u(\varphi)$ é uma função contínua e limitada em $\varphi \in [0, 2\pi]$. Além disto, para todo $\varphi \in [0, 2\pi]$, temos que:

- i. $|u(\varphi)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(\varphi)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$, para todo $\varphi \in \mathbb{R}$;
- ii. $|u(\varphi_1) - u(\varphi_2)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(\varphi_1) - u_n(\varphi_2)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_1 - \varphi_2| = |\varphi_1 - \varphi_2|$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.

Portanto, o par (U, d) é também espaço métrico completo.

Lembremos que a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : U &\longrightarrow U \\ u(\varphi) &\longmapsto \tilde{u}(\varphi) = (\mathcal{F}u)(\varphi), \end{aligned}$$

no espaço métrico (U, d) é uma contração se existe $0 < \epsilon < 1$ tal que

$$d(\mathcal{F}(u_1), \mathcal{F}(u_2)) \leq \epsilon d(u_1, u_2),$$

para todo $u_1, u_2 \in U$. Logo, pelo Teorema da Contração ou Teorema 2.1.1, a aplicação \mathcal{F} tem um único ponto fixo $u^{(\infty)} \in U$, ou seja,

$$\mathcal{F}(u^{(\infty)}) = u^{(\infty)}.$$

Além disso, para todo $u \in U$ temos que a sequência $(\mathcal{F}^n(u))$ converge para o único ponto fixo de \mathcal{F} , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathcal{F}^n(u), u^{(\infty)}) = 0,$$

conforme Figura 5.1.

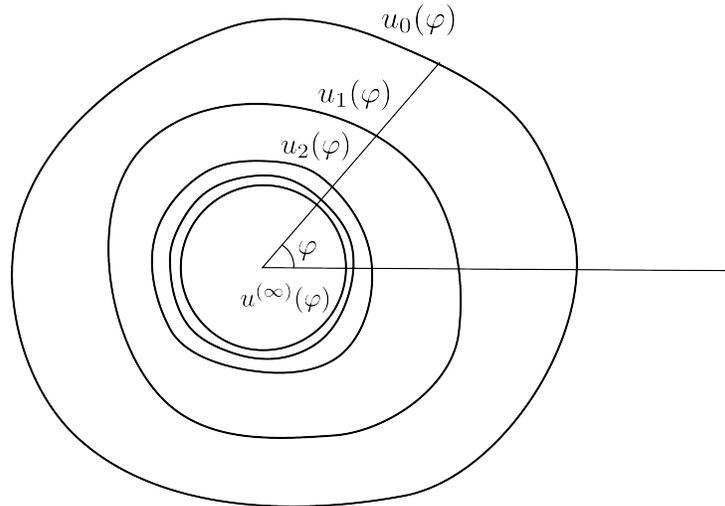


Figura 5.1: Curvas fechadas acumuladas.

PASSO 3 (CONSTRUÇÃO DA APLICAÇÃO \mathcal{F}). Consideremos a aplicação \mathcal{F} induzida por F em U . Isso significa que se u representa uma curva fechada, então $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$ representa sua imagem sob a aplicação F definida por (5.15).

Suponha que uma função $u = u(\varphi)$ de U é dada. Para construir a aplicação \mathcal{F} , temos que especificar um procedimento para cada φ dado que nos permita encontrar a correspondente $\tilde{u}(\varphi) = (\mathcal{F}u)(\varphi)$. Observe, no entanto, que F é quase uma rotação pelo ângulo $\omega(\alpha)$ em φ . Assim, um ponto $(\tilde{u}(\varphi), \varphi)$ na curva resultante é a imagem de um ponto $(\tilde{u}(\hat{\varphi}), \hat{\varphi})$ na curva original com uma coordenada de ângulo diferente $\hat{\varphi}$, conforme Figura 5.2.

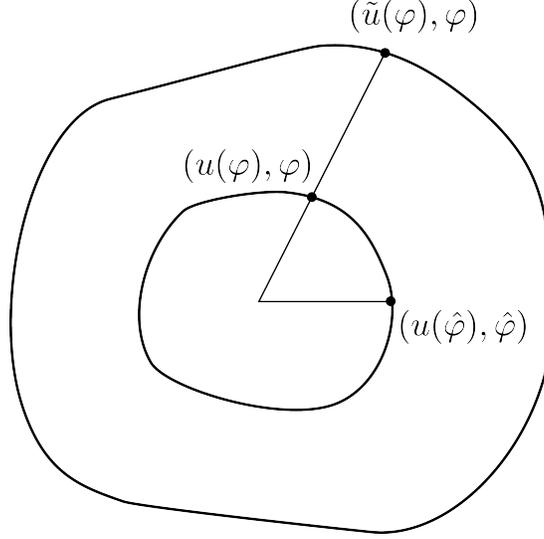


Figura 5.2: Definição da aplicação \mathcal{F} .

Para mostrar que $\hat{\varphi}$ é unicamente definido, temos que provar que a equação

$$\varphi = \hat{\varphi} + \omega(\alpha) + \alpha^{3/2} K_\alpha(u(\hat{\varphi}), \hat{\varphi}) \quad (5.17)$$

tem uma única solução $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\varphi)$, para qualquer $u \in U$ dado. Este é o caso, pois o membro direito de (5.17) é uma função estritamente crescente de $\hat{\varphi}$. De fato, se $\varphi_2 > \varphi_1$, então, de acordo com (5.15),

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1 &= \varphi_2 - \varphi_1 + \alpha^{3/2} [K_\alpha(u(\varphi_2), \varphi_2) - K_\alpha(u(\varphi_1), \varphi_1)] \\ &\geq \varphi_2 - \varphi_1 - \alpha^{3/2} [K_\alpha(u(\varphi_2), \varphi_2) - K_\alpha(u(\varphi_1), \varphi_1)]. \end{aligned}$$

Levando em conta que K_α é uma função suave, com (5.16) e ii, obtemos

$$\begin{aligned} |K_\alpha(u(\varphi_2), \varphi_2) - K_\alpha(u(\varphi_1), \varphi_1)| &\leq \lambda [|u(\varphi_2) - u(\varphi_1)| + |\varphi_2 - \varphi_1|] \\ &\leq 2\lambda |\varphi_2 - \varphi_1| \\ &= 2\lambda (\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Esta última estimativa também pode ser reescrita como

$$- |K_\alpha(u(\varphi_2), \varphi_2) - K_\alpha(u(\varphi_1), \varphi_1)| \geq -2\lambda (\varphi_2 - \varphi_1),$$

o que implica que

$$\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1 \geq (1 - 2\lambda\alpha^{3/2}) (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Assim, o membro direito de (5.17) é uma função estritamente crescente, desde que $\alpha > 0$ seja pequeno o suficiente, e sua solução $\tilde{\varphi}$ esteja definida com precisão.

Das estimativas anteriores, segue-se também que $\hat{\varphi}(\varphi)$, isto é, a função inversa à função dada por (5.17), é Lipschitz contínua, pois

$$|\hat{\varphi}(\varphi_1) - \hat{\varphi}(\varphi_2)| \leq (1 - 2\lambda\alpha^{3/2})^{-1} |\varphi_1 - \varphi_2|. \quad (5.18)$$

Agora, podemos definir a aplicação $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$ por

$$\tilde{u}(\varphi) = (1 - 2\alpha)u(\hat{\varphi}) + \alpha^{3/2}K_\alpha(u(\hat{\varphi}), \hat{\varphi}), \quad (5.19)$$

onde $\hat{\varphi}$ é a solução de (5.17). A mera definição, claro, não é suficiente e temos que verificar que $\mathcal{F}(u) \in U$, se $u \in U$, ou seja, verificar **i** e **ii** para $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$.

A condição **i** para \tilde{u} decorre da estimativa

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(\varphi)| &\leq (1 - 2\alpha)|u(\hat{\varphi})| + \alpha^{3/2} |H_\alpha(u(\hat{\varphi}), \hat{\varphi})| \\ &\leq 1 - 2\alpha + \lambda\alpha^{3/2}, \end{aligned}$$

onde usamos **i** para u e a definição (5.16) de λ . Assim, $|\tilde{u}| \leq 1$ se α for suficientemente pequeno e positivo. A condição **ii** para \tilde{u} é obtida pela sequência de estimativas

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(\varphi_1) - \tilde{u}(\varphi_2)| &\leq (1 - 2\alpha) |u(\hat{\varphi}_1) - u(\hat{\varphi}_2)| + \\ &\quad \alpha^{3/2} |H_\alpha(u(\hat{\varphi}_1), \hat{\varphi}_1) - H_\alpha(u(\hat{\varphi}_2), \hat{\varphi}_2)| \\ &\leq (1 - 2\alpha) |u(\hat{\varphi}_1) - u(\hat{\varphi}_2)| + \\ &\quad \alpha^{3/2}\lambda [|\tilde{u}(\varphi_1) - \tilde{u}(\varphi_2)| + |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|] \\ &\leq (1 - 2\alpha + 2\lambda\alpha^{3/2}) |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|, \end{aligned}$$

onde a desigualdade final vale devido à continuidade Lipschitz de u . Inserindo a estimativa (5.18), obtemos

$$|\tilde{u}(\varphi_1) - \tilde{u}(\varphi_2)| \leq (1 - 2\alpha + 2\lambda\alpha^{3/2}) (1 - 2\lambda\alpha^{3/2})^{-1} |\varphi_1 - \varphi_2|.$$

Assim, **ii** também vale para \tilde{u} para todo α positivo suficientemente pequeno. Portanto, a aplicação $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$ está bem definida.

PASSO 4 (VERIFICAÇÃO DA PROPRIEDADE DE CONTRAÇÃO). Agora, suponha que duas funções $u_1, u_2 \in U$ sejam dadas. O que precisamos obter é a estimativa de $\|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|$ em termos de $\|u_1 - u_2\|$. Pela definição (5.19) de $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$,

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_1(\varphi) - \tilde{u}_2(\varphi)\| &\leq (1 - 2\alpha) |u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| + \\ &\quad \alpha^{3/2} |H_\alpha(u_1(\hat{\varphi}_1), \hat{\varphi}_1) - H_\alpha(u_2(\hat{\varphi}_2), \hat{\varphi}_2)| \\ &\leq (1 - 2\alpha) |u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| + \\ &\quad \alpha^{3/2} \lambda [|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| + |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|], \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde $\hat{\varphi}_1$ e $\hat{\varphi}_2$ são as soluções únicas de

$$\varphi = \hat{\varphi}_1 + \omega(\alpha) + \alpha^{3/2} K_\alpha(u_1(\hat{\varphi}_1), \hat{\varphi}_1) \quad (5.21)$$

e

$$\varphi = \hat{\varphi}_2 + \omega(\alpha) + \alpha^{3/2} K_\alpha(u_2(\hat{\varphi}_2), \hat{\varphi}_2) \quad (5.22)$$

respectivamente. As estimativas (5.20) ainda não resolveram o problema, pois temos que usar apenas $\|u_1 - u_2\|$ no membro direito. Primeiro, expresse $|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)|$ em termos de $\|u_1 - u_2\|$ e $|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|$

$$\begin{aligned} |u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| &= |u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_1) + u_2(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| \\ &\leq |u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_1)| + |u_2(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| \\ &\leq \|u_1 - u_2\| + |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|. \end{aligned} \quad (5.23)$$

A última desigualdade foi obtida usando a definição da norma e a continuidade Lipschitz de u_2 . Para completar as estimativas, precisamos expressar $|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|$ em termos de $\|u_1 - u_2\|$. Subtraindo (5.22) de (5.21) e tomando o valor absoluto, obtemos

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2| &\leq \alpha^{3/2} |K_\alpha(u_1(\hat{\varphi}_1), \hat{\varphi}_1) - K_\alpha(u_2(\hat{\varphi}_2), \hat{\varphi}_2)| \\ &\leq \alpha^{3/2} \lambda [|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| + |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|]. \end{aligned}$$

Inserindo (5.23) nesta desigualdade e reunindo todos os termos envolvendo $|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|$ à esquerda, resulta em

$$|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2| \leq (1 - 2\alpha^{3/2}\lambda)^{-1} \alpha^{3/2}\lambda \|u_1 - u_2\|. \quad (5.24)$$

Usando as estimativas (5.23) e (5.24), podemos completar (5.20) da seguinte forma

$$\|\tilde{u}_1(\varphi) - \tilde{u}_2(\varphi)\| \leq \epsilon \|u_1 - u_2\|,$$

onde

$$\epsilon = (1 - 2\alpha) \left[1 + \alpha^{3/2} \lambda (1 - 2\alpha^{3/2} \lambda)^{-1} \right] + \alpha^{3/2} \lambda \left[1 + 2\alpha^{3/2} \lambda (1 - 2\alpha^{3/2} \lambda)^{-1} \right].$$

Como

$$\epsilon = 1 - 2\alpha + O(\alpha^{3/2})$$

a aplicação \mathcal{F} é uma contração em U para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, tem um único ponto fixo estável $u^{(\infty)} \in U$.

PASSO 5 (ESTABILIDADE DA CURVA INVARIANTE). Agora tome um ponto (u_0, φ_0) dentro da faixa $\{(u, \varphi) : |u| \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Se o ponto pertence à curva dada por $u^{(\infty)}$, ele permanece nesta curva sob iteradas da F , já que a aplicação \mathcal{F} aplica essa curva em si mesma. Se o ponto não pertencer à curva invariante, tome alguma curva fechada (não invariante) passando por ela denotada por $u^{(0)} \in U$. Tal curva sempre existe. Tomando as iteradas deste ponto pela aplicação F definida por (5.15), obtemos uma sequência de pontos (u_n, φ_n) .

É claro que cada ponto dessa sequência pertence à correspondente iterada da curva $u^{(0)}$ sob a aplicação \mathcal{F} . Acabamos de mostrar que as iteradas da curva convergem para a curva invariante dada por $u^{(\infty)}$. Portanto, a sequência de pontos também deve convergir para a curva. Isso prova a estabilidade da curva fechada invariante como conjunto invariante da aplicação, completando a demonstração. ■

Conclusões

Dependendo do número de parâmetros e da complexidade da aplicação no plano analisada, pode ser um tanto quanto complicado testar as hipóteses do Teorema da Bifurcação de Neimark-Sacker de codimensão 1. Isto porque o ponto fixo e o valor de bifurcação podem nem ser conhecidos, exceto do ponto de vista numérico. Na realidade, todas as condições enunciadas no Teorema 2.3.1 podem ser calculadas numericamente.

Mesmo nos casos em que o ponto fixo e o valor de bifurcação são conhecidos, pode não ser fácil testar as condições **H2** e **H3** do Teorema 2.3.1. O cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov pode ser ainda mais complicado, já que o esforço computacional pode ser grande ou a expressão obtida de difícil análise. Em certas situações, calcular tal coeficiente empregando a expressão (2.5) é mais fácil do que utilizando a expressão correspondente em (2.10), embora a última seja mais geral, valendo inclusive em \mathbb{R}^m , $m \geq 2$.

Vale destacar que, na análise do modelo predador-presa discreto (3.6), o autor em [7] não fornece uma expressão final para o primeiro coeficiente de Lyapunov. Além disto, o Teorema 3.1 deste mesmo artigo sugere a possibilidade de troca de sinal no primeiro coeficiente de Lyapunov, o que implicaria na existência de uma bifurcação degenerada, possivelmente, de Chenciner. Contudo, isto está em contradição com a expressão (3.12) obtida no final da Seção 3.2.

Como último comentário, há também uma diferença nas condições de ressonância, pois em [7] não há restrições nos parâmetros a fim de evitar ressonâncias, o que não ocorre aqui, conforme pode ser visto em **H22** e **H23** na Seção 3.2.

Referências Bibliográficas

- [1] A.A. ANDRONOV, A.G. MAIER, I.I. GORDON, E.A. LEONTOVICH, *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*, Israel Program for Scientific Translations, (1971).
- [2] D.G. ARONSON, M.A. CHORY, G.R. HALL, R.P. MCGEHEE, *Bifurcations from an Invariant Circle for Two-Parameter Families of Maps of the Plane: A Computer-Assisted Study*, Commun. Math. Phys., **83** (1982), 303-354.
- [3] L. BARREIRA, C. VALLS, *Dynamical Systems: An Introduction*, Springer-Verlag, (2013).
- [4] L. BARREIRA, C. VALLS, *Dynamical Systems by Example*, Springer-Verlag, (2019).
- [5] M.R. CÂNDIDO, D.D. NOVAES, C. VALLS, *Periodic Solutions and Invariant Torus in the Rössler System*, Nonlinearity, **33** (2020), 4512–4538.
- [6] G. IOOSS, *Bifurcations of Maps and Applications*, North-Holland, (1979).
- [7] A.Q. KHAN, *Neimark-Sacker Bifurcation of a Two-dimensional Discrete-time Predator-prey Model*, SpringerPlus, **5** (2016), 126.
- [8] Y.A. KUZNETSOV, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 2nd Edition, Springer, (1998).
- [9] Y.A. KUZNETSOV, H.G.E. MEIJER, *Numerical Normal Forms for Codim 2 Bifurcations of Fixed Points with at Most Two Critical Eigenvalues*, SIAM J. Sci. Comput., **26** (2005), 1932-1954.

- [10] J. MARSDEN, M. MCCrackEN, *Hopf Bifurcation and its Applications*, Springer-Verlag, New York, (1976).
- [11] J. NAIMARK, *On Some Cases of Periodic Motions Depending on Parameters*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **129** (1959), 736-739.
- [12] C.G. RAGAZZO, M.J.D. CARNEIRO, S. ADDAS-ZANATA, *Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist*, 25º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (2005). Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/25CBM_09.pdf. Acesso em: 06 de julho de 2024.
- [13] W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd Edition, McGraw-Hill, (1976).
- [14] D. RUELLE, F. TAKENS, *On the Nature of Turbulence*, Commun. Math. Phys., **20** (1971), 167-192.
- [15] R.J. SACKER, *On Invariant Surfaces and Bifurcation of Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations*, IMM-NYU 333, Courant Institute - New York University, (1964).
- [16] R.J. SACKER, *On Invariant Surfaces and Bifurcation of Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations*, J. Differ. Equ. Appl., **15** (2009), 759-774.
- [17] S. WIGGINS, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, 2nd Edition, Springer, (2003).