UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Investigação do Escoamento ao redor de um Corpo Rombudo de Parede Hidraulicamente Rugosa e que Troca Calor com o Meio Fluido: Simulação Numérica Utilizando o Método de Partículas de Temperatura

Autor: **Gabriel Ferraz Marcondes de Carvalho**
Orientador: **Prof. Dr. Luiz Antonio Alcântara Pereira**

Curso: **Mestrado em Engenharia Mecânica**
Área de Concentração: **Térmica, Fluidos e Máquinas de Fluxo**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Itajubá, fevereiro de 2025
MG – Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Investigação do Escoamento ao redor de um Corpo Rombudo de Parede Hidraulicamente Rugosa e que Troca Calor com o Meio Fluido: Simulação Numérica Utilizando o Método de Partículas de Temperatura

Autor: **Gabriel Ferraz Marcondes de Carvalho**
Orientador: **Prof. Dr. Luiz Antonio Alcântara Pereira**

Composição da Banca Examinadora:
Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato – FEG/UNESP
Prof. Dr. Yohan Alí Diaz Méndez – UNIFEI
Prof. Dr. Antonio Augusto Araújo Pinto da Silva – UNIFEI
Prof. Dr. Luiz Antonio Alcântara Pereira (Orientador) – UNIFEI

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que permitiram, de forma direta ou indireta, que este trabalho fosse realizado.

Agradeço aos meus pais, Antonio e Andrea, pelo formação humanitária e apoio durante toda minha vida.

Agradeço ao meu irmão, família e amigos pela camaradagem durante esta jornada.

Agradeço ao meu orientador, professor Luiz Antonio Alcântara Pereira, pelas valiosas sugestões de pesquisa, conversas e dedicação exemplar ao supervisionar este trabalho. Sem sua ajuda, este trabalho não seria possível.

Agradeço também aos colegas do LMAML de Itajubá e Guaratinguetá: Tiago, Marília, Alex, Victor e aos doutores Marcos de Oliveira e Paulo Moraes por oferecerem sempre apoio, conselhos, ensinamentos e trocas de experiência valiosíssimas durante toda a minha trajetória científica.

Agradeço à FAPEMIG, por meio do projeto APQ-01246-23, pelo financiamento da pesquisa por meio da bolsa de estudos e pela disponibilização de verba para aquisição de novas máquinas para a execução das simulações.

"Time flows ever onward"
(Paarthurnax)

Resumo

Este trabalho investiga escoamentos bidimensionais com número de Reynolds subcrítico ao redor de um cilindro circular com superfície rugosa e mantida aquecida a uma temperatura constante; as análises ainda incluem mecanismos de transferência de calor por convecção mista. A técnica numérica utilizada discretiza o campo de vorticidades e o calor utilizando partículas, o que caracteriza uma descrição puramente lagrangiana.O trabalho contribui com a literatura científica de duas maneiras: i) implementação de um algoritmo acelerador para incorporar modelagem de turbulência do tipo LES para o campo de temperaturas, e ii) proposição de um modelo de rugosidade superficial para a camada limite térmica. Esta segunda contribuição é viabilizada pela modelagem de turbulência do tipo LES, permitindo que os efeitos rugosos interfiram no comportamento dos coeficientes de pressão, arrasto e sustentação, no ângulo de separação da camada limite e na transferência de calor para o meio fluido adotando-se diferentes alturas de rugosidade superficial média. Estes parâmetros são de grande interesse em projetos de engenharia envolvendo diversos aparatos sujeitos a escoamentos nos quais há troca de calor com o meio fluido. As simulações foram realizadas para número de Reynolds Re = 100.000, número de Prandtl Pr = 0,71, e alturas de rugosidade superficial média de $\varepsilon/D = 0{,}001$ e 0,007. Os resultados mostraram que a transferência de calor por convecção mista impacta nos carregamentos fluidodinâmicos de modo complexo aumentando o coeficiente de arrasto e a transferência de calor via comportamento do número de Nusselt. Para este último adimensional, o valor obtido para a simulação no caso de parede hidraulicamente lisa apresentou uma maior diferença em relação ao valor experimental, mostrando a necessidade de se realizar um balanço de energia mais detalhado na camada limite térmica. Ao se incluírem efeitos rugosos, entretanto, observou-se o aumento no valor do número de Nusselt na mesma proporção dos resultados experimentais, indicando que o novo modelo de rugosidade bidimensional é sensível e fornece resultados fisicamente consistentes. Os três tipos característicos de interações entre partículas consomem um elevado tempo computacional, o que também exigiu o uso de processamento paralelo no ambiente OpenMP- Fortran.

Palavras-chaves: Método de Partículas de Temperatura. Método dos Painéis. Carregamentos fluidodinâmicos. Forças de Flutuabilidade. Modelagem de turbulência tipo LES. Modelo de rugosidade superficial.

Abstract

This work investigates two-dimensional flows with subcritical Reynolds number around a circular cylinder with rough surface and kept heated at a constant temperature; the analyses include mechanisms of mixed convection heat transfer. The numerical approach discretizes the vorticity field and the heat by using particles, which characterizes a purely lagrangian description.The work contributes to the scientific literature in two ways: i) implementation of an accelerator algorithm to incorporate LES-type turbulence modeling for the temperature field, and ii) proposition of a surface roughness model for the thermal boundary layer. The second contribution is made possible through LES-type turbulence modeling, allowing that roughness effects for different average surface roughness heights interfere on behavior of pressure, drag and lift coefficients, of the boundary layer separation angle, and heat transfer from body surface to fluid domain. Those parameters are of great interest for engineering design involving various devices subject to external flows, where there is heat exchange with the fluid domain. Simulations were performed for a Reynolds number of Re = 100,000, Prandtl number of Pr = 0.71, and average surface roughness heights of ε/D = 0.001 and 0.007. The results showed that mixed convection heat transfer impacts the fluid dynamic loads in a complex manner, increasing the drag coefficient and heat transfer via Nusselt number behavior. For the latter dimensionless number, the value obtained for the simulation in the smoothed cylinder case showed some discrepancy with the expected experimental date, indicating the need for a more detailed energy balance on the thermal boundary layer. However, by implementing roughness effects, an increase in the Nusselt number was observed in proportion to the experimental results, indicating that the new two-dimensional roughness model is sensitive and provides physically consistent results. The three characteristic kinds of particles interaction consume a high computational time, which also required the use of parallel processing in OpenMP-Fortran.

Keywords: Temperature particles method. Panels method. Fluid dynamic loads. Buoyancy forces. Type LES model. Surface roughness model.

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Aplicações de cilindros na engenharia 2
Figura 1.2 – Esteira de von Kármán formada atrás de um cilindro para Re=105 2
Figura 2.1 – Escoamento para $Re < 1$, regime de *creeping flow* 9
Figura 2.2 – Escoamento para $5 < Re < 40$, formando vórtices estacionários. 9
Figura 2.3 – Escoamento para $40 < Re < 70$, destacando a oscilação dos vórtices, na iminência do desprendimento. Fonte: Reproduzido de [1]. 9
Figura 2.4 – Escoamento para $70 < Re < 200$. Neste regime inicia-se o mecanismo oscilatório de desprendimento de vórtices, porém a esteira ainda é laminar . . . 10
Figura 2.5 – Ponto A: desprendimento de um vórtice horário do topo do cilindro. Campo de velocidades (esquerda) e vórtices discretos (direita) 11
Figura 2.6 – Ponto B: o vórtice horário passa a ser incorporado na esteira viscosa. Campo de velocidades (esquerda) e vórtices discretos (direita) 11
Figura 2.7 – Ponto C: desprendimento de um vórtice anti-horário da parte inferior do cilindro. Campo de velocidades (esquerda) e vórtices discretos (direita) . . . 12
Figura 2.8 – Ponto D: o vórtice anti-horário passa a ser incorporado pela esteira. Campo de velocidades (esquerda) e vórtices discretos (direita). 12
Figura 2.9 – Ponto E: desprendimento de um vórtice horário da parte superior do cilindro. Campo de velocidades (esquerda) e vórtices discretos (direita) 13
Figura 2.10–Coeficiente de pressão versus posição angular ao longo do cilindro para os pontos A–E 13
Figura 2.11–Variação do número de Strouhal para números de Reynolds baixos. 14
Figura 2.12–Supressão de desprendimento por meio do controle da rugosidade superfície do corpo 20
Figura 2.13–Supressão de desprendimento por meio do controle da temperatura na superfície do corpo 21
Figura 3.1 – Geometria do domínio fluido e do corpo estudados 22
Figura 3.2 – Decomposição da velocidade em suas componentes em contato com o corpo 26
Figura 3.3 – Espectro da energia cinética turbulenta com frequência de corte 28
Figura 4.1 – Esquema de geração de vorticidade a partir de uma parede 47
Figura 4.2 – Esquema do corpo com os pontos de interesse. 48
Figura 4.3 – Esquema de geração de temperatura a partir de uma parede 50
Figura 4.4 – Fonte de densidade uniforme 52
Figura 4.5 – Indução de velocidades de uma fonte de densidade uniforme sobre um ponto P genérico no sistema de coordenadas local 53
Figura 4.6 – Adaptação do modelo de turbulência ao MPT. 59
Figura 4.7 – Estrutura de caixas para a aceleração do cálculo da viscosidade turbulenta. . 60

Figura 4.8 – Incremento do raio do núcleo do vórtice discreto nascente por efeito rugoso. 61
Figura 5.1 – Trajetória de uma partícula apenas com a influência do Método de Painéis . 66
Figura 5.2 – Aferição do Método de Painéis para um cilindro circular 68
Figura 5.3 – Aferição do Método de Painéis para um cilindro circular 68
Figura 5.4 – Trajetória de dois vórtices discretos de Lamb de intensidade unitária. 69
Figura 5.5 – Comparação entre a distribuição exata e numérica da vorticidade de vórtices discretos submetidos ao Método de Avanço Randômico em $t = 1,0$. Fonte: O Autor. 71
Figura 5.6 – Difusão puramente radial de vórtices discretos 72
Figura 5.7 – Cargas fluidodinâmicas para um cilindro circular aquecido 74
Figura 5.8 – Coeficiente de pressão médio na superfície do cilindro liso. 74
Figura 5.9 – Coeficiente de pressão instantâneo na superfície do cilindro liso. 75
Figura 5.10–Número de Nusselt médio na superfície do cilindro liso. 78
Figura 5.11–Número de Nusselt médio na superfície do cilindro de parede hidraulicamente rugosa. 79
Figura 5.12–Número de Nusselt médio na superfície do cilindro de parede hidraulicamente rugosa. 80
Figura 5.13–Número de Nusselt médio na superfície do cilindro de parede hidraulicamente lisa. 81
Figura 5.14–Esteira de vórtices discretos de Lamb ao final da simulação 82
Figura 5.15–Esteira de partículas de temperatura ao final da simulação 83
Figura A.1 – Velocidade tangencial induzida por um vórtice discreto de Lamb. 96
Figura A.2 – Distribuição de vorticidade de um vórtice discreto de Lamb para diferentes funções corte. 96
Figura C.1 – Fluxograma do código parte 1/3. 105
Figura C.2 – Fluxograma do código parte 2/3. 106
Figura C.3 – Fluxograma do código parte 3/3. 107

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Interpretação física dos parâmetros de interesse da simulação 35
Tabela 5.1 – Erro relativo entre a velocidade u_1 calculada pela teoria potencial (solução exata) e pelo Método dos Painéis (solução numérica) da discretização do corpo em mb painéis. Ângulo medido em relação ao bordo de ataque. 68
Tabela 5.2 – Erro relativo entre a velocidade u_2 calculada pela teoria potencial (solução exata) e pelo Método dos Painéis (solução numérica) da discretização do corpo em mb painéis. Ângulo medido em relação ao bordo de ataque. 69
Tabela 5.3 – Valores adimensionais de entrada constantes ao longo das simulações. . . . 72
Tabela 5.4 – Valores experimentais de C_D e St para o escoamento ao redor de um cilindro isolado por Blevins 73
Tabela 5.5 – Valores de interesse obtidos nas simulações. 73
Tabela 5.6 – Ângulos de separação da camada-limite na parte superior do cilindro. 81
Tabela A.1 – Matriz dimensional do problema. 93
Tabela B.1 – Matriz dimensional do problema da partícula de temperatura. 98

Lista de abreviaturas e siglas

CFD	*Computational Fluid Dynamics*	1
DNS	*Direct Numerical Simulation*	3
ETV	Equação do Transporte da Vorticidade	35
FEVO2	Função Estrutura de Velocidades de Ordem Dois	33
FFT	*Fast Fourier Transform*, Transformada Rápida de Fourier	74
LES	*Large Eddy Simulation*	3
LMAML	Laboratório de Modelagem e Algoritmos de Métodos Lagrangianos	2
MCRNM	Método do Crescimento do Raio do Núcleo Modificado	6
MPT	Método de Partículas de Temperatura	3
MVD	Método de Vórtices Discretos	3
N-S	Navier-Stokes	25
PCE	Princípio de Conservação da Energia	24
PCM	Princípio de Conservação da Massa	24
PCQML	Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento Linear	24
RANS	*Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations*	3
RMS	*Root Mean Square*	71
SGE	Simulação de Grandes Escalas	28
SND	Simulação Numérica Direta	27

Lista de símbolos

C_p	Coeficiente de Pressão	34
C_D	Coeficiente de Arrasto	10
C_L	Coeficiente de Sustentação	10
D	Diâmetro do cilindro	22
N	Número de vórtices discretos no domínio fluido no dado instante de tempo	58
S_1	Contorno que delimita a superfície do cilindro	23
S_∞	Contorno que delimita a fronteira fluida a grandes distâncias do cilindro	23
T_∞	Temperatura do fluido distante do cilindro	22
T_w	Temperatura da superfície do cilindro	22
U_∞	Módulo da velocidade do escoamento incidente	22
Ω	Domínio fluido completo, $\Omega = S_1 \cup S_\infty$	23
α	Difusividade térmica do fluido	23
α_T	Difusividade térmica turbulenta	32
β	Coeficiente de expansão térmica do fluido	24
δ_{ij}	Delta de Kronecker	31
μ	Viscosidade dinâmica do fluido	25
ν	Viscosidade cinemática do fluido	23
ν_T	Viscosidade turbulenta	30
ω	Componente não-nula do campo de vorticidades	34
$\overline{S}_{ij}$	Tensor taxa de deformação do campo filtrado	31
ρ	Massa específica do fluido	23
ρ^*	Massa específica variável em regiões com gradiente de temperatura	25
Φ	Função de dissipação viscosa	24
ε	Altura média de rugosidade superficial	22
g_i	Campo de acelerações da gravidade	25
g_i	Vetor aceleração gravitacional local	25
p	Campo de pressões	25
u_i	Campo de velocidades	24
u_{i_n}	Velocidade na direção normal à superfície do corpo	26
u_{i_t}	Velocidade na direção tangencial à superfície do corpo	26
$_\infty$	Subscrito que indica grandeza avaliada a grandes distâncias do corpo e da região de troca de calor	23
h	Coeficiente de transferência de calor por convecção (película)	34

Sumário

1 INTRODUÇÃO 1
1.1 Motivações 1
1.2 Objetivos da Dissertação de Mestrado 4
1.2.1 Objetivo Geral 4
1.2.2 Objetivos Específicos 4
1.3 Metodologia 5
1.4 Estrutura do trabalho 7

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 8
2.1 Introdução 8
2.2 Escoamento ao Redor de um Cilindro Circular 8
2.3 O Método de Partículas de Temperatura 15
2.4 Supressão de Desprendimento de Vórtices 18

3 FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA 22
3.1 Geometria e Apresentação do Problema 22
3.2 Hipóteses Assumidas 23
3.3 Equações Governantes 24
3.3.1 Princípio da Conservação da Massa 24
3.3.2 Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento Linear 25
3.3.3 Princípio de Conservação da Energia 25
3.4 Condições de Contorno 25
3.5 Modelagem de Turbulência 27
3.5.1 Filtragem das Equações Governantes 28
3.5.2 Modelagem de Turbulência 30
3.6 Adimensionalização do Problema 34
3.7 A Equação do Transporte da Vorticidade 35
3.8 A Lei de Biot-Savart 38
3.9 Formulação do Cálculo do Campo de Pressões 39

4 MODELO NUMÉRICO: O MÉTODO DE PARTÍCULAS DE TEMPERATURA 45
4.1 Introdução 45
4.2 Geração de Vorticidade 46
4.2.1 Mecanismo Físico 46
4.2.2 Modelagem Numérica do Campo de Vorticidades 46

4.3 Geração de Calor . . . 49
4.3.1 Mecanismo Físico . . . 49
4.3.2 Modelagem Numérica do Campo de Temperaturas . . . 50
4.3.3 Cálculo do Número de Nusselt . . . 51
4.4 O Método de Painéis . . . 52
4.5 A Influência da Nuvem de Vórtices Discretos . . . 54
4.6 Solução da Advecção e Difusão . . . 55
4.6.1 Esquema Advecção . . . 55
4.6.2 Esquema de Difusão . . . 56
4.6.3 Cálculo dos efeitos de Convecção Natural . . . 57
4.7 Cálculo dos Carregamentos Fluidodinâmicos Atuantes sobre a Superfície do Corpo . . . 57
4.8 Modelo de Turbulência . . . 59
4.9 Modelo de Rugosidade Superficial . . . 61
4.9.1 Modelagem para a Nuvem de Vórtices Discretos . . . 61
4.9.2 Modelagem para a Nuvem de Partículas de Temperatura . . . 63
4.10 Implementação Computacional . . . 64

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . 66
5.1 Validação da Metodologia . . . 66
5.2 Valores de Entrada Adotados . . . 72
5.3 Resultados Obtidos . . . 73

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . 84
6.1 Principais Conclusões . . . 84
6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros . . . 85

REFERÊNCIAS . . . 87

APÊNDICE A – O VÓRTICE DISCRETO DE LAMB . . . 92

APÊNDICE B – A PARTÍCULA DE TEMPERATURA . . . 97

APÊNDICE C – ALGORITMO DO CÓDIGO COMPUTACIONAL . 100
C.1 Introdução . . . 100
C.2 Descrição das Rotinas . . . 100
C.3 Algoritmo Computacional . . . 104

1 Introdução

1.1 Motivações

O avanço do desenvolvimento de *hardwares* computacionais nos últimos anos permitiu que os estudos numéricos de diversos problemas da hidrodinâmica não linear pudessem ser realizados, o que favoreceu o florescer de diversas novas metodologias para a solução de diversos problemas de Engenharia. Estes estudos diferem da teoria potencial, na qual os efeitos viscosos são desprezados e, portanto, são capazes de descrever com maior fidelidade os campos do escoamento.

A solução dos problemas de forma numérica é feita pela Dinâmica dos Fluidos Computacional, mais conhecida pela sua sigla em inglês, *Computational Fluid Dynamics* (CFD). Existe uma miríade de métodos de resolução, separados em três categorias principais: métodos eulerianos, métodos lagrangianos e métodos híbridos, cada qual com suas vantagens e desvantagens. Os métodos eulerianos realizam uma discretização do domínio fluido em malhas, as quais possuem nós nos quais são calculadas as propriedades de interesse. Já nos métodos lagrangianos, onde se insere o método usado neste trabalho, distretizam-se propriedades de interesse do escoamento em partículas discretas, que são individualmente acompanhadas ao longo da simulação. Os métodos híbridos consistem em técnicas que mesclam ambas as abordagens já citadas. O uso de tais técnicas permite que escoamentos ao redor de estruturas de engenharia sejam modelados e estudados computacionalmente, o que reduz efetivamente os custos preliminares de projetos, ao diminuir o número de protótipos que devem de fato ser construídos.

A comunidade científica vem dedicando esforços para melhor compreender os fenômenos da hidrodinâmica não-linear em várias aplicações de interesse, tais como: aerodinâmica de corpos rombudos e esbeltos com ou sem transferência de calor; interação fluido-estrutura no contexto de interferência entre fronteiras sólidas; escoamentos multifásicos, como os encontrados na indústria do petróleo; turbomáquinas com movimento relativo entre fronteiras sólidas; equipamentos para esportistas de alto desempenho; dentre outros.

Dentre as estruturas de engenharia estudadas, os cilindros circulares são os representantes elementares de corpos rombudos na mecânica dos fluidos, sendo comuns em aplicações tais quais *risers* da indústria de petróleo, fios de redes de transmissão e tubos de trocadores de calor, como pode ser visto na Figura 1.1. Corpos rombudos, quando expostos a um escoamento incidente, apresentam parte de sua superfície imersa com descolamento da camada limite [7].

Posto isso, o escoamento em torno de cilindros é um problema clássico da mecânica dos fluidos, e os fenômenos observados para esta geometria também são encontrados em corpos rombudos de seções diferentes. Este fato permite que o estudo de uma geometria simples em

(a) (b) (c)

Figura 1.1 – Situações onde há escoamento ao redor de cilindros na engenharia: (a) Risers de petróleo. (b) Linhas de Transmissão. (c) Trocador de calor tipo casco e tubos. Fontes:(a) JPT, site. Disponível em: https://jpt.spe.org/simplified-dynamic-models-control-riser-slugging-offshore-oil-production , (b) Innover Haut, site. Disponível em: https://innover-haut.com.br/setor-eletrico-no-brasil-transmissao-de-energia/, (c) Incase, site. Disponível em: https://www.incase.com.br/trocador-calor-casco-tubo-aco-inox, acesso em 23 Dez. 2023.

diferentes condições contribua para um entendimento mais detalhado da física regente do problema e que se desenvolvam novas metodologias para o campo. Neste escoamento, a depender do número de Reynolds, ocorrerá o desprendimento de estruturas vorticosas contrarrotativas, como pode ser visto na Figura 1.2, chamado também de esteira de von Kármán.

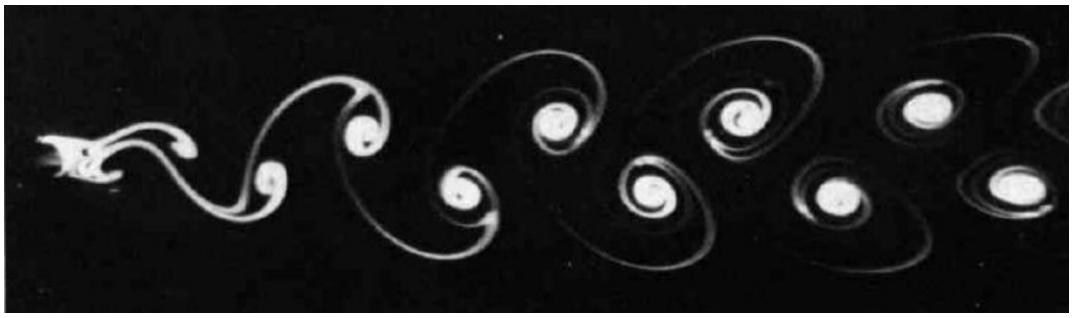


Figura 1.2 – Formação da esteira de vórtices de von Kármán atrás de um cilindro(esteira laminar) para Re = 105. A visualização é feita por emissão de bolhas de hidrogênio. Fonte: [8]

Além do campo de vorticidades, o campo de temperaturas está presente em diversos problemas de Engenharia, como trocadores de calor, aquecedores e sistemas de condicionamento de ar. Nesses casos, o mecanismo de troca é similar: uma tubulação com temperatura diferente do ar ambiente é exposta a um escoamento incidente com diferença de temperatura, resultando em transferência de calor.

O entendimento dos efeitos de transferência de calor podem ser usados, por exemplo, para gerar energia através de vibrações induzidas por vórtices, como feito por Barati [9], destacando os efeitos de diferentes números de Richardson para extrair energia do escoamento.

A fim de compreender melhor tais fenômenos da hidrodinâmica não linear, o Laboratório de Modelagem e Algoritmos de Métodos Lagrangianos (LMAML) desenvolve há mais de duas décadas um método puramente lagrangiano para a solução de escoamentos, implementando diferentes técnicas numéricas para modelar os fenômenos do escoamento de forma mais

precisa. Dentre estas técnicas, citam-se o Método de Painéis [10], a Lei de Biot-Savart para o cálculo do campo de velocidades (interação vórtice-vórtice), convecção da vorticidade (difusão e advecção, mas sem modelar a deformação dos tubos de vorticidade), modelagem de turbulência do tipo *Large Eddy Simulation* (LES) e de efeitos de rugosidade superficial, carregamentos distribuídos e integrados, e transporte de massa.

Esta dissertação de mestrado utiliza várias rotinas que foram desenvolvidas pelo LMAML, como a tese de doutorado de Alcântara Pereira [11], que implementou modelagem de turbulência no Método de Vórtices Discretos (MVD) bidimensional. A tese de doutorado de Bimbato [12] formulou o modelo de rugosidade no escoamento ao redor de um cilindro circular com efeito solo. A dissertação de mestrado de Andrade [13] contribuiu com um algoritmo acelerador do cálculo da viscosidade turbulenta utilizando uma estrutura de caixas. A dissertação de mestrado de Roselli [14] apresentou a implementação do Método de Partículas de Temperatura (MPT) para o cálculo da transferência de calor mista no MVD.

Um dos grandes desafios das simulações numéricas modernas é o elevado tempo de simulação, que pode chegar a dezenas de dias de simulação. Com o desenvolvimento de *hardwares* e *softwares*, o tempo de máquina pode ser reduzido. Um dos métodos que vêm sendo utilizado nos trabalhos do LMAML é o processamento paralelo com OpenMP. Esta ferramenta permite que se utilize todos os processadores lógicos de um computador para realizar os cálculos, ao invés de utilizar apenas um, como na programação serial. Neste trabalho, que serão estudadas duas nuvens,– uma de vórtices discretos e uma de partículas de temperatura– o tempo de processamento é naturalmente elevado, e a inclusão de efeitos de rugosidade superficial, modelagem de turbulência e convecção mista o tornaria inviável sem o uso de ferramentas de processamento paralelo.

Em simulações numéricas, um dos pontos de interesse é o fechamento da turbulência, existindo diversos modelos. Quando é feita a modelagem de turbulência, utilizam-se modelos *Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations* (RANS) ou *Large Eddy Simulation* (LES), a depender do nível de refinamento desejado. A modelagem de turbulência do tipo LES é a utilizada neste trabalho devido à sua compatibilidade com métodos lagrangianos, nos quais a velocidade deve ser calculada a cada instante, simplificando a implementação desta modelagem ao código computacional. A modelagem de turbulência do tipo LES também permite a implementação do modelo de rugosidade conforme proposto por Bimbato [12]. Caso fosse viável a realização de simulações *Direct Numerical Simulation* (DNS) considerando todos os efeitos de interesse, não seria necessário modelagem de turbulência, já que este método resolve todas as escalas do escoamento. O aspecto negativo das simulações DNS, ainda hoje, é seu elevado custo computacional.

Neste contexto, esta dissertação de mestrado se propõe a investigar o escoamento bidimensional ao redor de um cilindro circular único e estacionário, combinando efeitos de rugosidade superficial à transferência de calor. O cálculo é acelerado ao se utilizar diretivas de

processamento paralelo e o método de solução escolhido é o MPT. A necessidade deste estudo se amplifica ao observar que as estruturas ao longo do tempo se desgastam, o que eleva sua rugosidade superficial. Além disso, estas estruturas podem apresentar o fenômeno de *lock-in*, que pode as levar a falha por fadiga. A existência de um gradiente de temperatura entre o cilindro e o meio fluido implicará na alteração do mecanismo de emissão de vórtices. Estes efeitos combinados de rugosidade superficial e transferência de calor apresentam uma lacuna na literatura internacional, o que justifica a condução deste estudo.

Outro ponto de interesse que pode ser estudado com a consideração de um gradiente de temperatura entre o corpo rombudo e o fluido e efeitos de rugosidade superficial é a investigação dos mecanismos de supressão. Particularmente, estes dois efeitos estão englobados nos mecanismos de controle ativo de desprendimento de esteiras [15]. Um melhor entendimento do fenômeno de controle e supressão permite a que estruturas possam ser utilizadas de modo que trabalhem distantes de sua zona de *lock-in*, efetivamente reduzindo chances de acidentes e desastres, como rompimento de cabos de alta tensão e fratura de dutos de petróleo que operam sobre o efeito de correntes marítimas.

1.2 Objetivos da Dissertação de Mestrado

1.2.1 Objetivo Geral

Investigar a influência conjunta de efeitos de rugosidade superficial e transferência de calor por convecção mista ao redor de um cilindro circular nas cargas fluidodinâmicas e número de Nusselt.

1.2.2 Objetivos Específicos

A fim de atingir o objetivo geral, propõe-se os seguintes objetivos específicos:

1. Dar continuidade e aprimorar o modelo de rugosidade superficial desenvolvido por Bimbato [12] também para a camada-limite térmica.
2. Dar continuidade e aprimorar o modelo de transferência de calor por convecção mista desenvolvido por Moraes *et al.* [16], a fim de implementar modelagem de turbulência para o campo de temperaturas.
3. Desenvolver um modelo de geração de partículas de temperatura na superfície de um corpo rombudo (cilindro) em painéis que discretizam a superfície; este modelo também está associado com a implementação de modelagem de turbulência na equação da energia.
4. Analisar o comportamento fluidodinâmico do escoamento e dos carregamentos fluidodinâmicos distribuídos e integrados; e verificar o comportamento do número de Nusselt ao se alterar a altura de rugosidade superficial na superfície do cilindro.

5. Analisar o comportamento do ponto de desprendimento da camada-limite hidrodinâmica ao se alterar a altura de rugosidade superficial na superfície do cilindro.

1.3 Metodologia

O método de solução deste trabalho é o MPT aliado ao MVD. O MVD é utilizado de forma puramente lagrangiana, discretizando o campo de vorticidades do domínio fluido em uma nuvem de vórtices discretos, enquanto o MPT discretiza o campo das temperaturas ao se realizar uma abordagem lagrangiana da Lei de Fourier. Devido à natureza do método, cada partícula – vórtice discreto ou partícula de temperatura – tem sua trajetória acompanhada individualmente ao longo da simulação.

A convecção das nuvens é feita em duas etapas: advecção e difusão. Nisto se encontra uma das características que definem o MVD e o MPT, que é estudar o escoamento apenas nas regiões de interesse, isto é, onde há a presença de vorticidade e calor. Além disso, o MPT dispensa esforços de refinamento de malha e imposições rígidas de condições de contorno nas fronteiras do domínio fluido, sendo estas automaticamente satisfeitas pela sua formulação. Este método também se adequa bem a fronteiras sólidas em movimento.

A etapa de advecção é a mais onerosa do método, na qual se utiliza a Lei de Biot-Savart para o cálculo da velocidade induzida sobre cada vórtice (e partícula de temperatura) existente. O número de operações numéricas para N vórtices discretos é da ordem $\mathcal{O}(N^2)$, duplicado para o caso estudado que envolve, também, partículas de temperatura.

Uma das desvantagens do MPT, entretanto consiste em seu elevado custo computacional, devido à necessidade de acompanhar uma quantidade crescente de vórtices discretos e/ou partículas de temperatura ao longo da simulação. Existem técnicas para reduzir esta desvantagem, como o uso de processamento paralelo com OpenMP (implementado neste trabalho), uso do Método de Expansão em Multipólos e Coalescência de partículas próximas (não implementados nesta dissertação).

O processamento paralelo ainda se faz necessário ao se considerar os efeitos de flutuabilidade (empuxo) que as partículas de temperatura exercem sobre cada vórtice discreto, à sua esquerda e direita. Este cálculo, conforme o número de partículas discretizadas aumenta, se torna ainda mais oneroso. O estudo de efeitos de flutuabilidade aplicado às estruturas vorticosas contrarrotativas originárias de um cilindro de superfície rugosa aquecida é uma das contribuições deste trabalho, desde que envolve modelagem de turbulência para a equação da energia.

Além da advecção, é necessário modelar os efeitos da dissipação de energia pela ação da viscosidade. Neste trabalho é usado um método probabilístico, o Método de Avanço Randômico [17]. Uma das contribuições desta dissertação está na implementação deste algoritmo aplicado a partículas de temperatura com modelagem de turbulência do tipo LES. Este trabalho, a

princípio, utilizaria um método determinístico, o Método do Crescimento do Raio do Núcleo Modificado (MCRNM) [18, 19, 20, 21]. Porém, após a implementação, inclusive com efeitos de turbulência para as partículas de temperatura, o tempo computacional se mostrou inviável devido ao número de partições, de tal modo que o código não era capaz de ir além do incremento de tempo 200, marginalmente ultrapassando o transiente numérico da simulação. Por causa disto, optou-se pelo método menos preciso, porém mais barato, do Avanço Randômico.

O corpo é representado com o uso do Método de Painéis [10], que é uma ferramenta da teoria potencial que inscreve painéis no contorno do corpo e gera em cada um singularidades (que podem ser do tipo dipólo, fontes ou vórtices). Cada painel possui um ponto central chamado ponto de controle ou ponto pivotal para imposição das condições de contorno do problema. Neste trabalho utilizam-se painéis planos com distribuição de fontes com densidade uniforme para representar a superfície do cilindro e garantir a condição de contorno de Neumann, assegurando a condição de impenetrabilidade e a conservação da massa.

Adicionalmente, a condição de escorregamento nulo e conservação da circulação global são garantidas pela geração de vórtices discretos em pontos de desprendimento, cada um posicionado acima de seu correspondente ponto de controle [22], de modo a garantir que a velocidade tangencial induzida em cada painel seja igual (neste caso, no qual o corpo rombudo é estacionário).

A condição de contorno de temperatura constante na superfície do cilindro é obtida com o auxílio da Lei de Fourier, modificada para ser aplicada ao MPT, na qual se geram partículas de temperatura em cada ponto de desprendimento a cada instante a fim de simular uma difusão primária de calor. Esta condição de contorno pode ser assumida para representar um corpo com elevada condutibilidade térmica. Outra alternativa seria modelar um fluxo de calor constante. A maior contribuição deste trabalho é implementar modelagem de turbulência do tipo LES e efeitos de rugosidade bidimensionais às partículas de temperatura via equação da energia e lei de Fourier modificada. Detalhes deste método são apresentados no Capítulo 4.

O cálculo das cargas fluidodinâmicas utiliza o modelo integral apresentado em [23], que resolve as cargas distribuídas (a pressão estática) e as cargas integradas (arrasto de forma e coeficiente de sustentação). Esta metodologia é de interesse por considerar todos os vórtices discretos do escoamento.

Por fim, a realização das simulações considerando modelagem de turbulência, rugosidade e transferência de calor só se torna viável com o uso de programação paralela e, neste caso, com OpenMP. Este modelo de programação é do tipo *Data Parallel Programming*, que consiste em separar os dados entre diversos *threads* que se comunicam com a memória compartilhada global. Desta forma, o conjunto de cálculos a serem feitos é dividido em parcelas que serão realizadas individualmente por cada *thread* e, ao fim, eles retornam estes valores à memória global, o que resulta em um ganho apreciável no tempo de processamento.

1.4 Estrutura do trabalho

Este trabalho é composto de seis capítulos e dois apêndices.

O Capítulo 2 faz uma revisão da literatura dos principais trabalhos relacionados ao MVD e MPT, em seguida, aprofunda no problema estudado nesta dissertação, com os trabalhos relevantes para a compreensão do escoamento em torno de corpos rombudos com transferência de calor e efeitos de rugosidade superficial.

Em seguida, o Capítulo 3 trata da modelagem do problema do escoamento bidimensional, incompressível e transiente de um fluido newtoniano ao redor do cilindro aquecido com efeitos de rugosidade superficial. Também são apresentadas as hipóteses assumidas, as equações governantes e a adimensionalização do problema e as condições de contorno. Mostra-se, também, os fundamentos da modelagem de turbulência aplicada tanto para o campo de vorticidades quanto para o campo de temperaturas e a modelagem dos efeitos de rugosidade superficial. Também é abordada a Lei de Biot-Savart e o cálculo das pressões.

No Capítulo 4 se apresenta os métodos de solução usado neste trabalho, o MPT para resolver os campos de vorticidades e temperaturas. Também se aborda o cálculo das cargas fluidodinâmicas devido ao desprendimento de estruturas vorticosas contrarrotativas do cilindro e a modelagem de turbulência do tipo LES e rugosidade para ambos os campos citados.

O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos das simulações numéricas e as discussões de cada caso.

O Capítulo 6 sintetiza as principais conclusões deste trabalho e apresenta as sugestões para investigações futuras.

No Apêncice A é mostrado o vórtice discreto de Lamb como solução das equações de Navier-Stokes com o uso da análise dimensional.

O Apêndice B apresenta a partícula de temperatura como solução da Equação da Energia por meio da análise dimensional.

O Apêndice C descreve as rotinas usadas no código computacional desenvolvido e o algoritmo implementado.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Introdução

Neste capítulo será apresentada uma revisão bibliográfica atualizada do Método de Partículas de Temperatura e dos avanços das simulações numéricas com transferência de calor e modelagem de rugosidade superficial, a fim de mostrar o atual estado da arte nesta área.

2.2 Escoamento ao Redor de um Cilindro Circular

Cilindros são corpos rombudos, isto é, geometrias que, quando expostas a um escoamento incidente, apresentam descolamento da camada limite em uma porção apreciável de sua superfície. O estudo metódico deste fenômeno remete a Strouhal, no século XIX, quando propôs uma correlação para a frequência de vibração f_s de um fio de diâmetro D exposto a um escoamento incidente com velocidade U. Estas três grandezas seriam posteriormente correlacionadas em um número adimensional, o Número de Strouhal (St), definido como

$$\mathrm{St} = \frac{f_s D}{U}. \tag{2.1}$$

O número de Strouhal é de interesse para a Engenharia, pois a frequência de desprendimento (de vórtices) deve ser controlada em diversas aplicações, pois uma vez que ela se aproxime da frequência natural de vibração de uma estrutura, há o risco de que a mesma entre em ressonância. O controle de desprendimento de vórtices é tratado com mais detalhes na Seção 2.4.

Além do número de Strouhal, outro adimensional de interesse para o entendimento do escoamento viscoso ao redor de um cilindro circular é o número de Reynolds, definido como

$$\mathrm{Re} = \frac{UD}{\nu} \tag{2.2}$$

onde ν é a difusividade da quantidade de movimento (ou viscosidade cinemática) do fluido em escoamento.

O número de Reynolds mede a contraposição entre os efeitos inerciais e viscosos em um escoamento. Dessa forma, conforme ele aumenta, as forças inerciais tornam-se mais significativas do que as viscosas, o que eventualmente leva o escoamento para a transição à turbulência.

Para números de Reynolds muito baixos ($\mathrm{Re} < 1$), o escoamento é chamado de *creeping flow*, caracterizado por linhas de corrente simétricas e dois pontos de estagnação, como pode ser visto na Fig. 2.1. O termo científico correto para o que se popularizou chamar de vórti-

ces deve ser estruturas vorticosas; já vórtices discretos são pontos computacionais que quando sobrepostos constroem os vórtices.

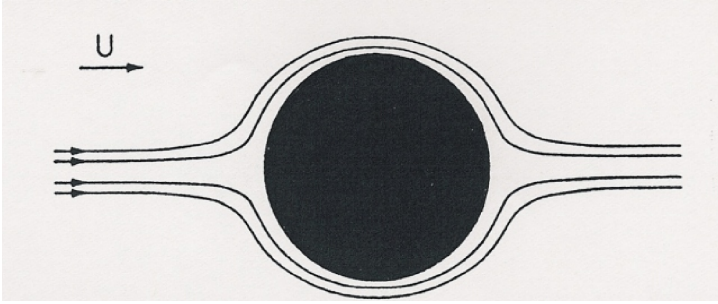


Figura 2.1 – Escoamento para $Re < 1$, regime de *creeping flow*. Fonte: Reproduzido de [1].

O aumento das forças inerciais leva à separação da camada limite. Assim, quando tem-se $5 < Re < 40$, formam-se vórtices estacionários, chamados de vórtices de Föpll, atrás do cilindro, vistos na Fig. 2.2. Neste intervalo, o aumento do número de Reynolds também implica no alongamento da estrutura vorticosa formada, até chegar o momento no qual as camadas cisalhantes apresentam instabilidades, resultando na oscilação dos vórtices, com números de Reynolds entre 40 e 70, como mostrado na Fig. 2.3.

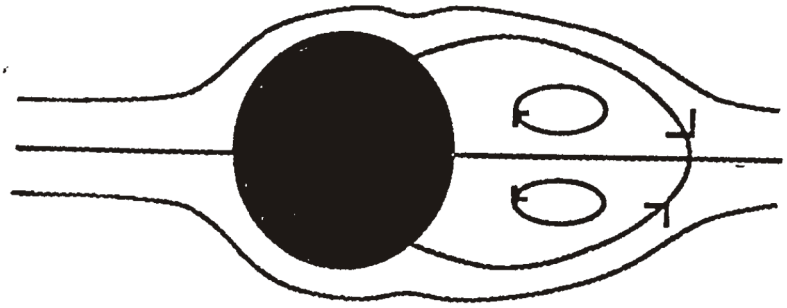


Figura 2.2 – Escoamento para $5 < Re < 40$, formando vórtices estacionários. Fonte: Reproduzido de [1].

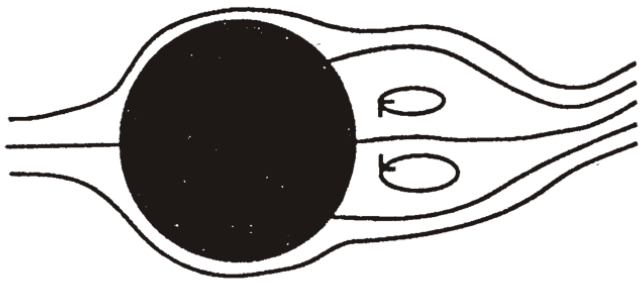


Figura 2.3 – Escoamento para $40 < Re < 70$, destacando a oscilação dos vórtices, na iminência do desprendimento. Fonte: Reproduzido de [1].

O alongamento dos vórtices também é acompanhado pelo aumento do ângulo de separação da camada limite. Esse estreitamento da estrutura vorticosa reduz o coeficiente de arrasto, C_D, e uma vez que a estrutura começa a oscilar, o mecanismo de Gerrard passa a ter efeito e o fenômeno de desprendimento ocorre, no qual estruturas vorticosas contrarrotativas são desprendidas, formando a esteira viscosa a jusante, também conhecida como esteira de von Kármán [24]. Este fenômeno ocorre a partir do momento no qual as estruturas se enrolam dentro de si mesmas, entre $70 < Re < 200$, visto na Fig. 2.4.

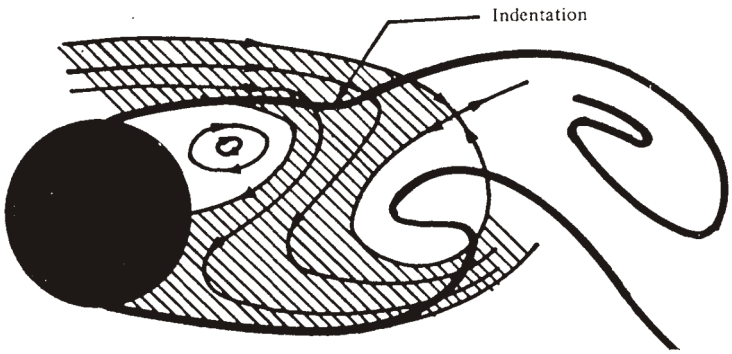


Figura 2.4 – Escoamento para $70 < Re < 200$. Neste regime inicia-se o mecanismo oscilatório de desprendimento de vórtices, porém a esteira ainda é laminar. Fonte: Reproduzido de [1].

Apesar do mecanismo de desprendimento estar em completo funcionamento nesta última faixa mostrada do número de Reynolds, é importante destacar que a esteira formada ainda é laminar, isto é, as tridimensionalidades associadas à turbulência ainda não são manifestadas. Neste instante, é de interesse abordar o mecanismo de desprendimento de vórtices de um cilindro, o mecanismo de Gerrard [25].

Um vórtice inicialmente ganha circulação de sua camada cisalhante correspondente. Conforme ele é alimentado por circulação, sua intensidade aumenta, o que cria uma zona de baixa pressão onde este vórtice se encontra, que eventualmente atrai o vórtice formado pela camada oposta. Quando o vórtice oposto é atraído, ele corta a alimentação de circulação do vórtice inicial, o que destrói a vorticidade ali contida e desprende o vórtice na esteira viscosa. Após o desprendimento, o vórtice que cortou a circulação é abastecido, ganhando quantidade de movimento e, eventualmente, atraindo outro vórtice nascente oposto. Este mecanismo ocorre de forma periódica, dando sentido à definição do número de Strouhal.

Tipicamente, este mecanismo é representado em cinco pontos de interesse, denominados pontos A–E, que representam bem a natureza alternada do fenômeno de desprendimento.

O ponto A é caracterizado por uma zona de baixa pressão localizada na parte superior do cilindro circular. Esta zona caracteriza um vórtice horário sendo desprendido do topo do cilindro, com intensa circulação, caracterizada pela baixa pressão e coeficiente de sustentação, C_L, máximo. Este ponto é mostrado na Fig. 2.5.

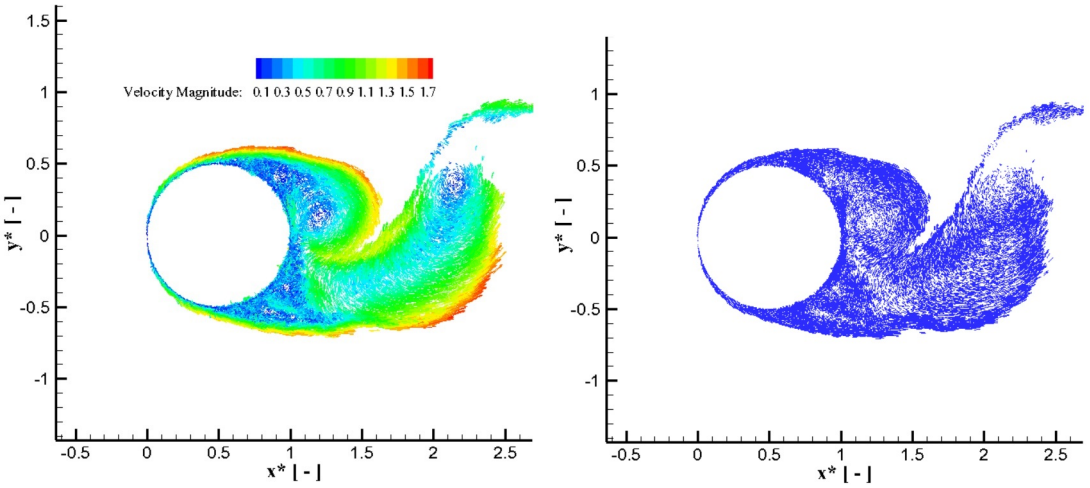


Figura 2.5 – Ponto A: desprendimento de um vórtice horário do topo do cilindro. Campo de velocidades (esquerda) e vórtices discretos (direita). Fonte: O autor.

Conforme o vórtice horário é alimentado de circulação, ele atrai o vórtice anti-horário formado na parte inferior e passa a ser incorporado pela esteira viscosa. Este ponto, chamado de ponto B, é mostrado na Fig. 2.6 e é caracterizado por uma distribuição de pressão aproximadamente uniforme na região de separação, resultando em um coeficiente de sustentação nulo. Observa-se como o vórtice anti-horário corta a circulação ao ser atraído pelo horário. Neste instante ocorre intensa destruição de vorticidade. O vórtice anti-horário, então, passa a receber circulação.

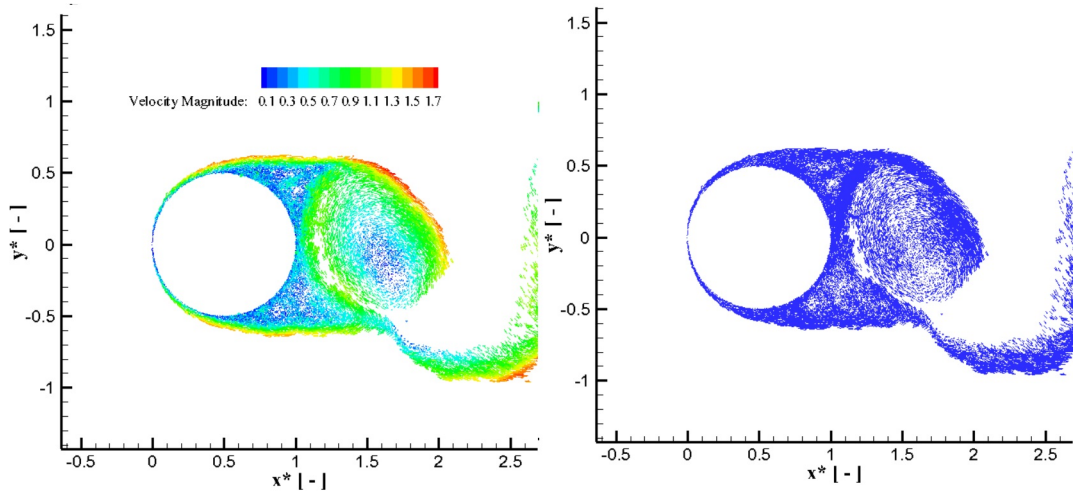


Figura 2.6 – Ponto B: o vórtice horário passa a ser incorporado na esteira viscosa. Campo de velocidades (esquerda) e vórtices discretos (direita). Fonte: O autor.

O vórtice anti-horário, então, é alimentado de circulação pela camada cisalhante inferior, e ele eventualmente é desprendido, no chamado ponto C, apresentado na Fig. 2.7. Este ponto é análogo ao ponto A, mas por ser o desprendimento de um vórtice na parte inferior do cilindro, trata-se do ponto de mínimo coeficiente de sustentação, caracterizado por um coeficiente de pressão baixo nesta seção da estrutura.

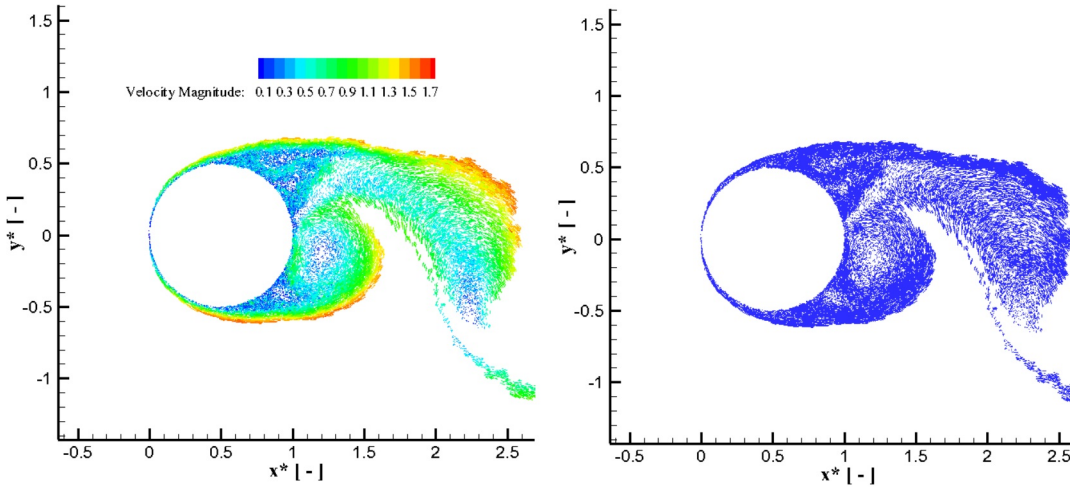


Figura 2.7 – Ponto C: desprendimento de um vórtice anti-horário da parte inferior do cilindro. Campo de velocidades (esquerda) e vórtices discretos (direita). Fonte: O autor.

Conforme a estrutura vorticosa anti-horária ganha circulação, ela atrai a estrutura horária, interrompendo a alimentação da estrutura anti-horária e causando seu desprendimento, do mesmo modo que ocorre do ponto A para B. Assim, o vórtice anti-horário é incorporado na esteira e o horário passa a ser alimentado por mais circulação. Este instante é denominado ponto D (Fig. 2.8), no qual o coeficiente de sustentação é nulo.

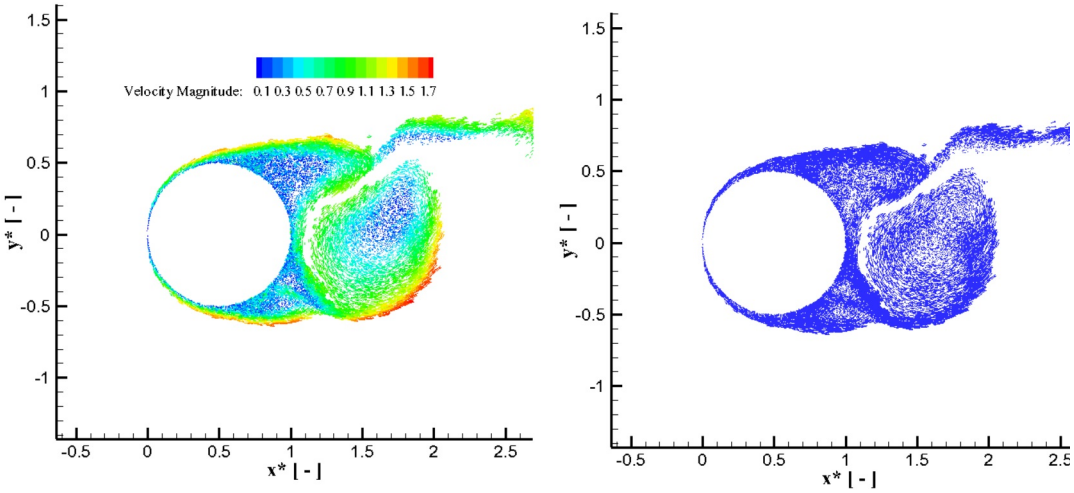


Figura 2.8 – Ponto D: o vórtice anti-horário passa a ser incorporado pela esteira. Campo de velocidades (esquerda) e vórtices discretos (direita). Fonte: O autor.

Completando o ciclo, a estrutura horária formada no topo do cilindro se desprende, sendo o ponto E análogo ao ponto A, visto na Fig. 2.9.

A distribuição instantânea do coeficiente de pressão para cada um dos pontos é vista na Fig. 2.10. Destaca-se a similaridade entre os pontos A e E e a distribuição de pressão sem favorecimento a qualquer um dos lados nos pontos B e D, caracterizando nesses últimos o coeficiente de sustentação nulo.

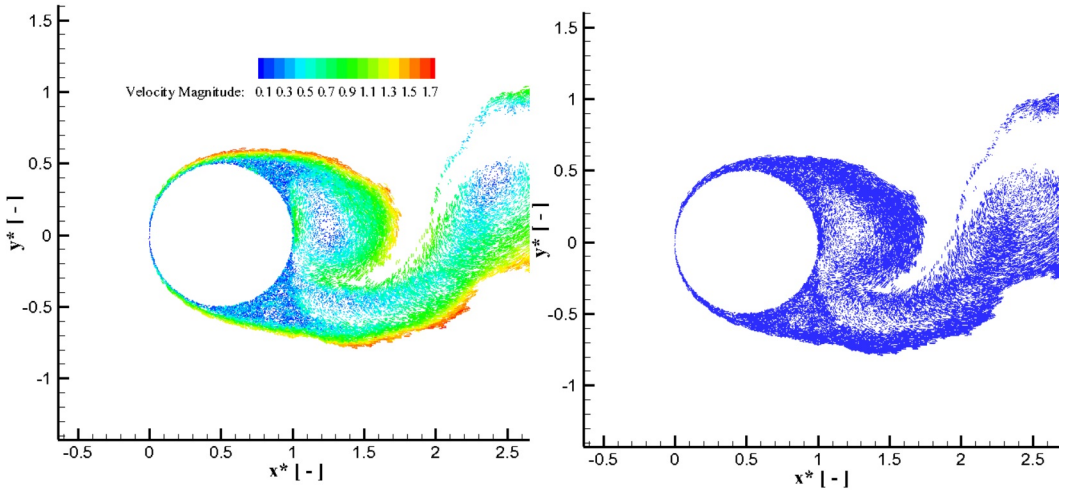


Figura 2.9 – Ponto E: desprendimento de um vórtice horário da parte superior do cilindro. Campo de velocidades (esquerda) e vórtices discretos (direita). Fonte: O autor.

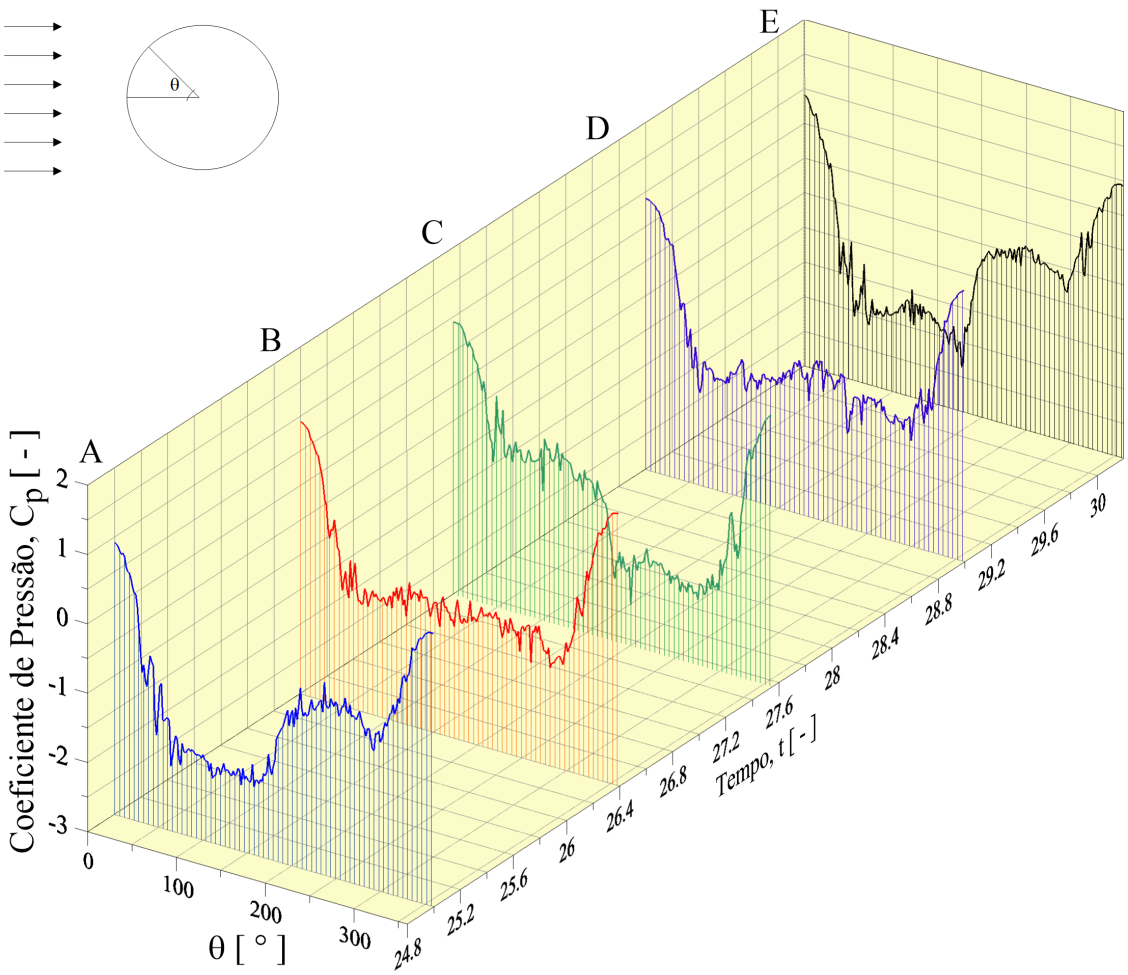


Figura 2.10 – Coeficiente de pressão versus posição angular ao longo do cilindro para os pontos A–E. Fonte: O autor.

O mecanismo de desprendimento prevalece conforme o número de Reynolds aumenta, com importantes alterações para o número de Strouhal e coeficiente de arrasto. Conforme observado por Roshko [26], há uma descontinuidade no número de Strouhal em torno de $Re = 64$,

apresentada na Fig. 2.11. Este fenômeno mostra que existem, mesmo no regime laminar, tridimensionalidades no escoamento, devido à transição do modo de geração oblíquos e paralelos. Isto acontece no resultado experimental por causa das condições de contorno usadas no experimento: ao se utilizar *end plates*, placas planas inclinadas nas bordas do cilindro, o modo de desprendimento pode ser controlado e a descontinuidade mostrada desaparece.

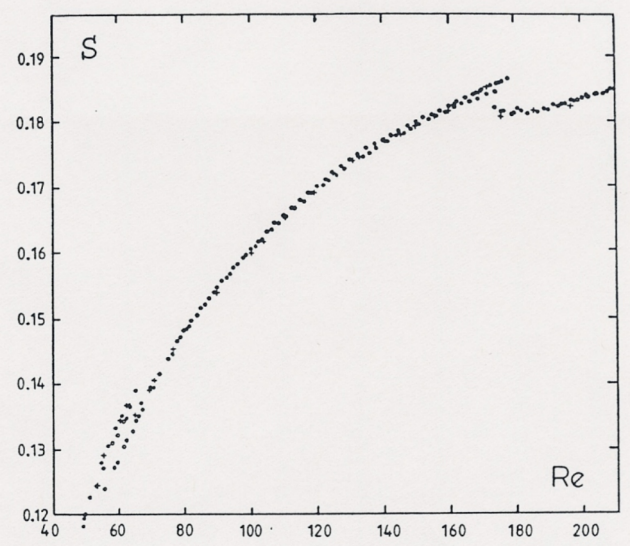


Figura 2.11 – Variação do número de Strouhal para números de Reynolds baixos. Fonte: Reproduzido de [2].

Ainda na Fig. 2.11 se observa uma segunda descontinuidade, desta vez em torno de $Re = 170$. Neste valor, as tridimensionalidades já se manifestam completamente na esteira laminar, alterando o mecanismo de emissão devido ao aparecimento de tubos de vorticidade alinhados ao escoamento, conforme proposto por Williamson [2].

Para um cilindro único e estacionário, algumas vezes referido como cilindro isolado, considera-se, tipicamente, três regimes do escoamento: subcrítico, crítico e pós-crítico.

O regime subcrítico ocorre para números de Reynolds entre 350 e $2 \sim 5 \times 10^5$. Neste regime, a camada-limite hidrodinâmica sofre transição para a turbulência e a separação ocorre em torno de 80° contados a partir do ponto de estagnação frontal (ângulo também mostrado no canto superior esquerdo da Fig. 2.10). Neste regime, a camada limite ao se separar ainda é laminar, ocorrendo a transição para a turbulência na esteira.

Aumentando-se o número de Reynolds, o escoamento transiciona para o regime crítico, com $2 \times 10^5 < Re < 7 \times 10^5$. Neste regime, a camada limite ainda é laminar antes de separar, mas o ponto de transição é próximo do de separação. Uma característica importante deste regime é a formação da estrutura chamada por Roshko [27] de bolha de separação-recolamento, uma zona de recirculação que ocorre entre a separação da camada-limite (entre 80 e 100°) e seu recolamento na parede do cilindro (entre 120 e 140°), onde há um descolamento turbulento da camada-limite. O aumento do número de Reynolds leva o ponto de transição a montante,

o que eventualmente leva ao desaparecimento da bolha. Este fenômeno é altamente sensível a perturbações externas e fatores como rugosidade superficial, e dificilmente é capturado em simulações de CFD.

2.3 O Método de Partículas de Temperatura

Desde sua concepção em 1822, as equações de Navier-Stokes estão aptas a simular escoamentos. Porém, devido à inexistência de computadores, a Dinâmica dos Fluidos Computacional demorou para se tornar um ramo do conhecimento apropriadamente estudada.

O Método de Vórtices Discretos, que oferece a base para o Método de Partículas de Temperatura, possui suas raízes nos trabalhos de Rosenhead em 1934 [28], no qual propôs o método para estudar uma folha de vórtices potenciais submetida a um escoamento incidente. Desde então, o método foi esquecido por décadas, até receber a formulação moderna proposta por Chorin, em 1973 [22].

A proposta de Chorin consistia em discretizar o campo de vorticidades em elementos computacionais e utilizou o Método do Avanço Randômico [17] para simular a difusão, utilizando um algoritmo de separação, que teve sua convergência provada posteriormente em [29]. A vantagem que este método apresentou em relação aos métodos eulerianos (Elementos Finitos, Volumes Finitos e Diferenças Finitas, por exemplo) foi dispensar a etapa de criação de uma malha computacional e seu refinamento, além de ser apropriado para escoamentos que apresentam elevados números de Reynolds. A característica marcante do MVD é a discretização do campo de vorticidades ao invés de todo o domínio fluido de interesse, o que permite estudar o escoamento apenas em regiões de interesse nas quais efetivamente vorticidade se encontra presente.

Smith e Stansby [30] foram os pioneiros no estudo do MPT ao resolver simultaneamente a difusão e advecção de partículas de temperatura e vórtices discretos, ao observarem a similaridade entre as equações da energia e quantidade de movimento.

Ao se discretizar a vorticidade, surge então a necessidade de resolver as equações diferenciais responsáveis pela advecção e difusão dos vórtices discretos e partículas de temperatura. Existem diversos esquemas de advecção para elementos computacionais, como o Método de Euler, que é o esquema de primeira ordem mais simples, vindo da solução direta da equação para incrementos pequenos de tempo Δt. A precisão deste método está associada a estes incrementos, mas apresenta uma vantagem que é a simplicidade de programação e baixo custo computacional, a tornando uma solução atrativa para diversas implementações, como a deste trabalho.

O Método de Runge-Kutta [31, 32] é uma solução numérica em que a ordem depende do número de vezes que o campo de velocidade é calculado no mesmo instante, sendo as ver-

sões de ordem dois (RK2), três (RK3) e quatro (RK4) as mais usuais nos trabalhos numéricos. Este método calcula pequenos avanços advectivos que são corrigidos para se obter a posição final para o incremento de tempo procurado. O Método de Runge-Kutta de Ordem 1 (RK1) é matematicamente idêntico o Método de Euler, podendo ser considerado uma generalização deste esquema de solução. Outro esquema de advecção utilizado nas simulações numéricas é o de Adams-Bashforth(AB) que, diferentemente dos métodos de Runge-Kutta, calcula a cada instante o campo de velocidades apenas uma vez, mas requer que as velocidades anteriores das partículas sejam armazenadas, proporcional à ordem do método. Tipicamente, o método de Adams-Bashforth é preferido ao de Runge-Kutta, uma vez que o cálculo do campo de velocidades é uma das etapas mais onerosas do MPT. Barba [33], entretanto, mostrou que o método RK4 é preferível ao AB3, pois a elevada precisão de RK4 permite que se utilize incrementos de tempo maiores, o que torna esta alternativa atrativa para os métodos de vórtices e partículas de temperatura.

Conforme mencionado, a etapa do cálculo do campo de velocidades se encontra como uma das mais onerosas do MPT, posto que sua ordem $\mathcal{O}(N^2)$ característica do problema de *N-body*, requer elevado esforço computacional. Isto é resultado do método pelo qual as velocidades são calculadas: a Lei de Biot-Savart, que permite calcular a velocidade induzida em um ponto do domínio fluido a partir da distribuição de vorticidade. A solução direta para o MPT requer, para um vórtice discreto (ou partícula de temperatura), o cálculo da indução de todos os demais vórtices discretos presentes no domínio.

Devido aos elevados custos computacionais desta etapa, é necessário o uso de métodos que acelerem os cálculos. O uso de processamento paralelo, isto é, utilizar todos os núcleos lógicos (*threads*) de um processador ou GPU para realizar operações simultâneas, permite acelerar expressivamente os cálculos. Los Reis [34] foi o primeiro a contribuir no LMAML utilizando processamento paralelo com OpenMP para acelerar expressivamente os cálculos da interação vórtice-vórtice.

Quanto aos esquemas de difusão, além do Avanço Randômico [22, 17], existem outros métodos, como o Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice [35], que posteriormente foi corrigido por Rossi [18, 19, 20, 21], o Método da Mudança de Intensidade da partícula, baseado nas ideias de Degond e Mas-Gallic [36, 37], o Método de Redistribuição [38], o Método de Fishelov [39] e o Método da Velocidade da Difusão [40].

O Método de Avanço Randômico [22, 17] baseia-se no movimento browniano a fim de simular a difusão como um espalhamento de partículas. Este método é amplamente usado para escoamentos ligeiramente viscosos devido a sua programação simples, ser puramente lagrangiano e por apresentar resultados aceitáveis. Seu problema, entretanto, é sua baixa taxa de convergência, requerendo uma quantidade elevada de partículas para obter resultados precisos. Além disso, não é recomendado para números de Reynolds inferiores a 100 [33].

O Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice foi proposto por Leonard [35],

mas Greengard [41] mostrou que o método não convergia quando o problema estudado não era puramente radial. O método então caiu em esquecimento, até Nakajima e Kida [42] mostrarem que o uso de um esquema de adaptação espacial permitiria o uso do método para escoamentos quaisquer. O interesse retornou ao ocidente quando Rossi [18] propôs um esquema que corrigia a convergência ao realizar a partição do vórtice discreto em quatro vórtices filhos, o chamado Método do Crescimento do Raio do Núcleo Modificado. Este método apresenta boa convergência se comparado ao Método de Avanço Randômico, mas é severamente onerado pelo crescimento exponencial do número de partículas, inviabilizando seu uso para aplicações de Engenharia a menos que um método de coalescência ou de *rezoning* [33] sejam utilizados.

Já o Método da Mudança de Intensidade da Partícula [36, 37] apresenta a característica de distribuir a intensidade das partículas para suas vizinhas utilizando operadores integrais. Este método, apesar de ser puramente lagrangiano em sua formulação, requer a redistribuição frequente dos vórtices discretos e que eles estejam bem ordenados, o que motivou o desenvolvimento de técnicas de *remeshing* posteriormente.

Posteriormente, o Método de Redistribuição de Vórtices surgiu como uma alternativa ao Método da Mudança de Intensidade da Partícula que dispensava a necessidade de frequentes distribuições espaciais. O princípio de ambos é similar no que tange a distribuição de circulação entre partículas vizinhas, mas o Método de Redistribuição não utiliza operadores integrais, valendo-se de "frações de redistribuição"para, localmente, determinar a troca de intensidade entre as partículas.

O Método de Fishelov [39] consiste em aplicar uma convolução ao campo de vorticidades e a resolver as derivadas do laplaciano de modo explícito. Este método, entretanto, se mostrou sensível às distorções do campo e não recebeu muito interesse de pesquisa posterior.

A proposta de Ogami [40], o Método da Velocidade de Difusão, consiste em um princípio análogo à repulsão que ocorre quando partículas elétricas de mesmo sinais recebem influência mútua, e sua formulação é análoga à Primeira Lei de Fick, mas o método depende altamente de uma sobreposição elevada dos vórtices discretos para retratar de modo correto a difusão.

Quanto às aplicações do MPT em problemas físicos, Kamemoto e Miyasaka [43], utilizaram este método, gerando elementos discretos de calor em uma camada ao redor de um cilindro circular para simular a transferência de calor forçada. Os resultados para o Número de Nusselt mostraram-se próximos dos valores experimentais.

Alcântara Pereira e Hirata [44] usaram o MPT para simular o escoamento ao redor de um cilindro circular, simulando apenas a convecção forçada. Este trabalho estudou o número de Nusselt ao longo da superfície do cilindro e as cargas atuantes. Os autores destacaram também a discrepância inerente que surge ao utilizar um método bidimensional para simular fenômenos inerentemente tridimensionais, posto que o número de Reynolds da simulação realizada, Re = 10000, não se encontra no regime laminar de desprendimento. Ainda assim, foi possível obter

resultados próximos dos experimentais, tornando o método atrativo para simulações numéricas.

A implementação de um modelo de convecção natural para o estudo bidimensional de transferência de calor foi proposto por Ogami [45], no qual apresentou dois esquemas de geração de vorticidade a partir das partículas de temperatura. O primeiro modelo é uma extensão bidimensional do trabalho de Ghoniem e Sherman [46], no qual consiste, a cada incremento de tempo, na modificação da intensidade dos vórtices discretos devido à temperatura em sua esquerda e direita. O segundo método proposto para o cálculo das forças de empuxo consiste em, a cada incremento de tempo, gerar-se dois vórtices discretos de intensidades opostas a partir de cada partícula de temperatura. O primeiro método, como destacado pelo autor, é o mais apropriado quando as partículas de temperatura estão no interior do domínio composto pelos vórtices discretos.

A partir deste modelo, Roselli [14] utilizou o Método de Partículas de Temperatura com a proposta de Ogami para calcular os efeitos da convecção natural, modificando a intensidade dos vórtices discretos a cada instante. Este trabalho ainda considerou o impacto da convecção natural nos coeficientes de pressão, arrasto e sustentação. A simulação foi feita com a discretização do cilindro em 100 painéis de fontes de densidade constante devido aos elevados custos computacionais da simulação.

Collins e Bernard [47] simularam a convecção natural para filamentos de vórtices usando um método tridimensional. O problema foi abordado utilizando uma geometria elíptica simples e atingiu um número final de partículas elevado (da ordem de meio bilhão), apresentando a estrutura inicial para a utilização do método para problemas de Engenharia.

Uma das dificuldades que se observa no atual estado da arte consiste nos resultados experimentais a respeito de problemas com transferência de calor e rugosidade superficial. Motegi *et al.* [48], ao estudar a convecção mista oposta em uma parede, observaram que as correlações empíricas e os resultados experimentais não podem ser comparados uns aos outros, dado que parâmetros adimensionais recebem definições variadas em cada estudo. Ao considerar a rugosidade superficial, que pode apresentar diferentes formas geométricas médias, a comparação entre valores, mesmo que possuam a mesma rugosidade média, não é possível.

2.4 Supressão de Desprendimento de Vórtices

Um dos interesses da Engenharia consiste em encontrar métodos de controlar a supressão de vórtices em corpos submetidos a um escoamento incidente. A transição para a turbulência é um aspecto importante neste momento, uma vez que tanto turbulência no escoamento incidente quanto a rugosidade superficial influenciam na frequência de desprendimento de estruturas vorticosas de corpos rombudos [49].

Rashidi *et al.* [15] apresentaram três grupos de técnicas para controle de desprendi-

mento: (a) Métodos passivos, (b) ativos e (c) ativos de laço fechado. Os métodos passivos não utilizam energia externa para controlar o desprendimento, valendo-se de modificações na geometria, como mudança da rugosidade superficial do corpo, uso de *end plates*, porosidade da parede ou outras modificações geométricas independentes de energia. Já os métodos ativos usam fontes externas, tal como aquecimento da superfície, geração de campos elétricos ou magnéticos ou rotação do corpo. Por fim, os métodos de controle de laço fechado consistem no uso de um sistema de controle com *loop* fechado, no qual um sensor utiliza um *feedback* a fim de alterar a grandeza controlada (tal qual um campo magnético ou escoamento secundário) para atingir a supressão do desprendimento de esteira.

O LMAML vem trabalhando nos últimos anos em desenvolver um código computacional que permita simular, dentre outros, problemas de supressão de desprendimento por métodos ativos e passivos.

Bimbato *et al.* [6] utilizaram com sucesso um modelo de rugosidade superficial para obter as cargas fluidodinâmicas, como coeficientes de arrasto, sustentação e de pressão e o número de Strouhal para o escoamento, analisando um número de Reynolds 1×10^5.

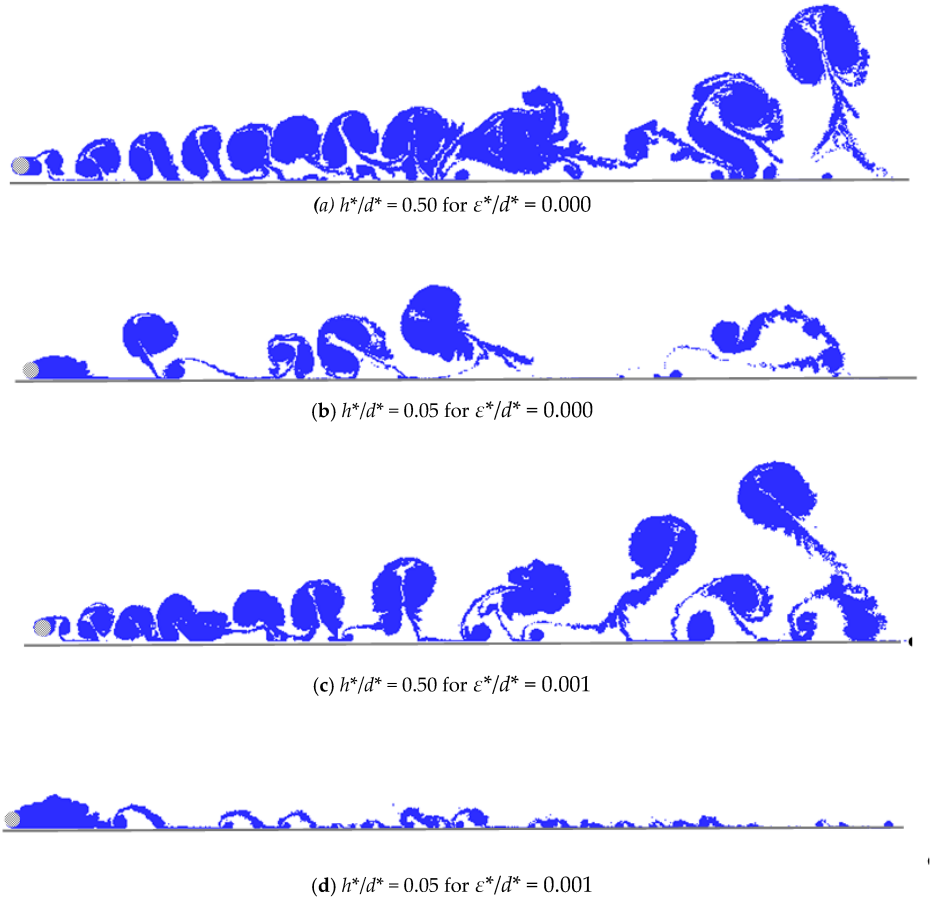
Oliveira *et al.* [3] utilizaram o MVD para estudar a supressão de vórtices de um cilindro circular ligeiramente rugoso próximo a uma parede móvel lisa, obtendo inclusive a completa supressão do desprendimento em um arranjo, alcançando um número de Strouhal nulo, como pode ser observado pela ausência de pares de estruturas vorticosas contrarrotativas na Fig. 2.12, no caso (d). Este trabalho mostra como o Método de Vórtices Discretos é sensível a diferentes alturas de rugosidade superficial.

Estes trabalhos permitiram um entendimento apurado do fenômeno de desprendimento aliado ao controle por meio de rugosidade superficial, porém as simulações realizadas foram isotérmicas.

Koo e Kleinstreuer [50] estudaram a influência dos efeitos combinados de transferência de calor e rugosidade superficial no escoamento de micro-conduítes, medindo a perturbação que asperezas superficiais geravam na transferência de calor global. Uma de suas conclusões foi que, nesta situação, os efeitos rugosos são menos significativos na transferência de calor do que na troca de momento linear.

O efeito do aquecimento de uma superfície foi estudado por Chatterjee [51], onde foi observada a influência do número de Richardson na supressão ou mudança do regime de escoamento em cilindros de seções circulares e quadradas, mostrando o potencial desta técnica de controle, uma vez que o empuxo pode tanto estabilizar quanto degenerar o regime de escoamento. Um exemplo é a supressão dos vórtices estacionários formados em $\mathrm{Re} = 40$. A mudança d do número de Richardson, Ri, de 0,1 para 0,3 proporcionou a completa supressão. Este trabalho, entretanto, abordou apenas números de Reynolds baixos, entre 10 e 150.

Al-Rubaiy [52] em sua Tese investigou a influência da rugosidade superficial e da tur-



(*a*) $h^*/d^* = 0.50$ for $\varepsilon^*/d^* = 0.000$

(**b**) $h^*/d^* = 0.05$ for $\varepsilon^*/d^* = 0.000$

(**c**) $h^*/d^* = 0.50$ for $\varepsilon^*/d^* = 0.001$

(**d**) $h^*/d^* = 0.05$ for $\varepsilon^*/d^* = 0.001$

Figura 2.12 – Supressão de desprendimento por meio do controle da rugosidade superfície do corpo. Fonte: Extraído de Oliveira *et al.* [3].

bulência do escoamento incidente na transferência de calor de modo experimental, captando a variação do número de Nusselt para diferentes condições de contorno. Estes resultados combinados permitem que o fenômeno físico seja entendido de modo mais complexo e fornece base empírica para a aferição de *softwares*.

O estudo da supressão também foi realizado por Salimipour [4], no qual foi investigado para $\mathrm{Re} = 200$ e $\mathrm{Pr} = 0,71$ a supressão do desprendimento de vórtices em um cilindro circular submetido a um escoamento ascendente, e foi encontrado um número de Grashof crítico de $1,2 \times 10^4$ no qual valores superiores continuaram a suprimir o desprendimento, mas com gasto adicional de energia. Este trabalho ainda observou que o aumento do número de Grashof variava fracamente o número de Nusselt superficial médio, chamando a atenção para o ganho econômico ao se adotar um valor ótimo de Gr que minimiza o gasto energético para se obter o menor coeficiente de arrasto possível. A supressão obtida é mostrada na Fig. 2.13.

Nestes tipos de escoamento, o aumento da temperatura da parede atua reduzindo o tamanho da esteira, o que consequentemente reduz o coeficiente de pressão. Este fenômeno é observado tanto para cilindros isolados quanto para cilindros alinhados *in tandem*, conforme observado por Islam *et al.* [53].

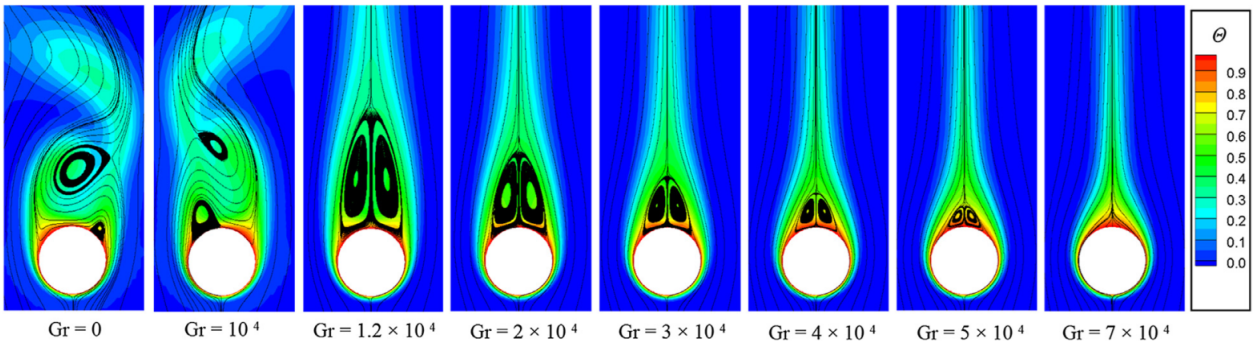


Figura 2.13 – Supressão de desprendimento por meio do controle da temperatura na superfície do corpo. Fonte: Extraído de [4].

Desta forma, observa-se a escassez de trabalhos que tratem simultaneamente dos efeitos combinados de rugosidade superficial e transferência de calor, uma vez que a maioria dos trabalhos tende a focar em um ou em outro. Este presente trabalho, finalmente, contribuirá com um modelo bidimensional de rugosidade superficial que atua na camada limite térmica, e também utiliza a modelagem de turbulência do tipo LES para calcular a difusividade térmica turbulenta em cada partícula de temperatura, sendo esta a responsável por viabilizar o novo modelo de rugosidade superficial proposto.

Finalizando este capítulo, durante esta pesquisa de Mestrado, o autor contribuiu publicando um artigo [54] no qual estudou o efeito da rugosidade superficial na trajetória de esteiras de aeronaves durante operações de decolagem e pouso. Também foram publicados trabalhos utilizando o MCRNM em simulações menos onerosas para partículas de temperatura e vórtices discretos [55], e modos de acelerar as simulações utilizando o MCRNM [56]. Estes trabalhos com o MCRNM, porém, mostraram elevados custos computacionais e as cargas não se aproximaram precisamente dos valores experimentais devido à dificuldade de utilizar um parâmetro de refinamento suficiente elevado, que está relacionado à precisão do método e sua convergência para as equações de Navier-Stokes. Devido a isso, nesta dissertação foi optado pelo Método de Avanço Randômico. Todos estes trabalhos serviram como base de aferição e decisões referentes aos tipos de simulações utilizadas nesta Dissertação de Mestrado e a compreender melhor as possibilidades futuras de investigações do LMAML.

3 Formulação Geral do Problema

Neste capítulo será apresentada a formulação do problema abordado. Define-se a geometria e as hipóteses assumidas, as equações governantes e as condições de contorno. A seguir, são mostrados princípios da modelagem de turbulência utilizada tanto para a vorticidade quanto para o calor e a adimensionalização do problema.

3.1 Geometria e Apresentação do Problema

O problema estudado nesta Dissertação é o escoamento bidimensional, incompressível e em regime não permanente de um fluido Newtoniano ao redor de um corpo rombudo de parede hidraulicamente rugosa e que troca calor com o meio fluido; o corpo escolhido é um cilindro de seção circular e sua superfície é mantida numa temperatura constante maior do que a temperatura do meio fluido, apresentado na Figura 3.1. Define-se a origem do sistema cartesiano *xOy* no ponto de estagnação de ataque.

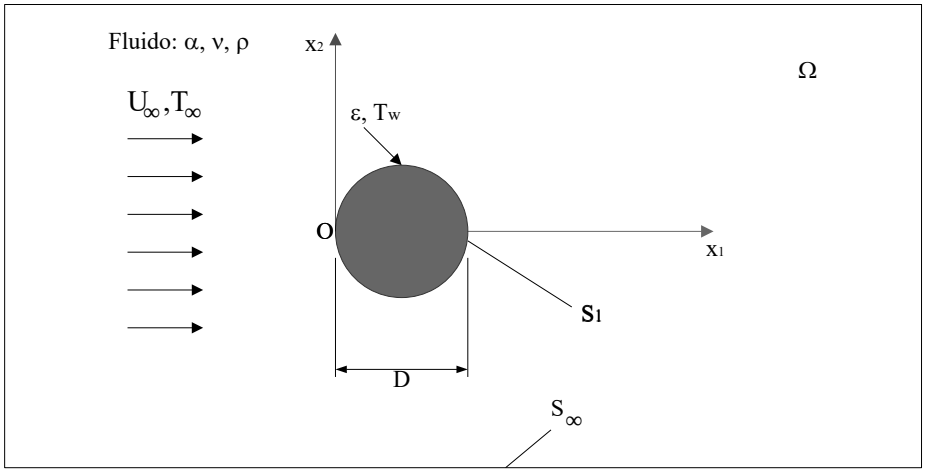


Figura 3.1 – Geometria do domínio e corpo estudados. Fonte: o Autor

As nomenclaturas mostradas na Figura 3.1 são as seguintes:

U_∞ Velocidade do escoamento incidente.

D Diâmetro externo do cilindro.

ε Altura média de rugosidade superficial do cilindro.

T_w Temperatura da superfície do corpo.

T_∞ Temperatura do fluido distante do corpo.

ρ Massa específica do fluido.

ν Coeficiente de difusividade de quantidade de movimento.

α Coeficiente de difusividade térmica do fluido.

S_1 Contorno que delimita a superfície do cilindro.

S_∞ Contorno que delimita a fronteira fluida a grandes distâncias do cilindro.

Ω Domínio fluido, $\Omega = S_1 \cup S_\infty$.

3.2 Hipóteses Assumidas

A fim de tornar possível a solução de um problema físico em tempo hábil e com suficiente acurácia, é necessário assumir hipóteses que reduzam a complexidade do problema e ainda permitiam que características importantes do escoamento possam ser capturadas. A seguir, apresenta-se as que foram utilizadas para modelar este trabalho do escoamento com camada limite descolada ao redor de um cilindro de superfície hidraulicamente rugosa.

(a) Hipóteses relativas à geometria

H1: Domínio fluido infinito e bidimensional.

H2: Escoamento incidente sem ângulo de incidência; no caso de um corpo de forma esbelta, o aumento no ângulo de ataque interfere no comportamento fluidodinâmico do corpo

(b) Hipóteses relativas às propriedades dos fluidos

H3: Fluido newtoniano com propriedades termodinâmicas constantes

H4: As propriedades termodinâmicas dos fluidos, ρ,ν e α não variam com a temperatura, exceto a massa específica nos termos de empuxo. Assim, ela pode ser escrita como uma série de Taylor como segue:

$$\rho = \rho\big|_{T=T_\infty} + \frac{\partial\rho}{\partial T}\bigg|_{T=T_\infty}(T-T_\infty) + \frac{\partial^2\rho}{\partial T^2}\bigg|_{T=T_\infty}\frac{(T-T_\infty)^2}{2!} + \frac{\partial^3\rho}{\partial T^3}\bigg|_{T=T_\infty}\frac{(T-T_\infty)^3}{3!} + \ldots \quad (3.1)$$

(c) Hipóteses relativas ao escoamento

H5: Escoamento incompressível, isto é, os efeitos de compressibilidade podem ser desprezados ($Ma < 0,3$). Assim, não há variação de ρ com a pressão, podendo ser escrita como $\rho_\infty = \rho\big|_{T=T_\infty}$. Desprezando os termos de ordem superior à primeira, tem-se:

$$\rho - \rho_\infty \approx \frac{\partial\rho}{\partial T}\bigg|_{T=T_\infty}(T-T_\infty) \quad (3.2)$$

O coeficiente de expansão térmica, β, é dado por:

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \tag{3.3}$$

Substituindo a Equação 3.3 em 3.2, vem:

$$\rho - \rho_\infty \approx -\ (\rho\beta)\Big|_{T=T\infty}(T - T_\infty) = -\rho_\infty \beta_\infty (T - T_\infty) \tag{3.4}$$

H6: A força de empuxo por unidade de volume, $(\rho - \rho_\infty)g$, é a única responsável pelo movimento na convecção natural. Em todos os termos da equação do movimento, salvo o de empuxo, sua variação é desprezível (Aproximação de Boussinesq).

H7: Despreza-se a taxa de dissipação de energia devido as tensões viscosas. Logo, a função de dissipação viscosa Φ é desconsiderada; em outras palavras, a temperatura do fluido somente poderia ser aumentada na presença de elevados gradientes de temperatura, por exemplo, durante a reentrada de um ônibus espacial na atmosfera, onde sua velocidade chega a 20.000 km/h e a temperatura no escudo refratário atinge 5.000 K.

3.3 Equações Governantes

Todo fluido em movimento é regido por princípios físicos de conservação. Nesta seção serão apresentados três princípios: o Princípio de Conservação da Massa (PCM), o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento Linear (PCQML) e o Princípio de Conservação da Energia (PCE). Numa primeira apresentação ainda não se considera filtragem destas equações para incluir modelagem de turbulência; em seguida, na seção 3.5 a modelagem de turbulência é incluída nas análises.

3.3.1 Princípio da Conservação da Massa

A equação da continuidade, Equação 3.5a, rege o PCM em sua forma mais genérica. Este princípio, quando aplicado a escoamentos incompressíveis (hipótese H5), assume a forma simplificada mostrada na Equação 3.5b.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \tag{3.5a}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.5b}$$

onde ρ é a massa específica do fluido e u_i é o campo de velocidades no referencial inercial.

Neste problema, as duas equações são válidas quando não há presença de termos fontes de massa no interior do escoamento.

3.3.2 Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento Linear

O PCQML é expresso pelas Equações de Navier-Stokes (N-S) e representa o balanço de forças em um volume de controle, de acordo com a Segunda Lei de Newton, indicado na Equação 3.6.

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}u_i\right)=-\rho g\hat{e}_2-\frac{\partial}{\partial x_i}p+\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.6}$$

onde g_i é o campo de acelerações da gravidade, que atua como termo fonte de quantidade de movimento, p é o campo de pressões e μ é a viscosidade dinâmica do fluido. Nesta equação ainda não foi utilizada a aproximação de Boussinesq e o vetor aceleração da gravidade, g_i. Porém, ao considerar a aproximação de Boussinesq (H6), o campo de massas específicas pode variar no termo de empuxo, o que resulta em:

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}u_i\right)=-\rho^* g_i-\frac{\partial}{\partial x_i}p+\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.7}$$

onde ρ^* se refere à massa específica do fluido que pode variar onde há gradiente de temperatura, causando a força de empuxo.

Da hipótese H5, Equação 3.4, conclui-se que $\rho^*-\rho=-\rho\beta(T-T_\infty)$. Substituindo na Equação 3.7 e dividindo termo a termo por ρ, obtém-se a versão final do PCQML:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}u_i=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}+g_i x_i\right)+\nu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+g_i\beta(T-T_\infty) \tag{3.8}$$

sendo $\nu=\mu/\rho$ a viscosidade cinemática do fluido.

3.3.3 Princípio de Conservação da Energia

O PCE é apresentado em sua forma diferencial:

$$\rho_\infty c_{p_\infty}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u_i\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)=K\frac{\partial^2 T}{\partial x_i\partial x_j}+\Phi \tag{3.9}$$

Dividindo ambos os lados da Equação 3.9 por $(\rho_\infty c_{p_\infty})$, sendo $\alpha=K/(\rho_\infty c_{p_\infty})$, e considerando a hipótese H7, chegamos à forma que será usada nesta dissertação:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u_i\frac{\partial T}{\partial x_i}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x_i\partial x_j} \tag{3.10}$$

3.4 Condições de Contorno

Nesta seção são apresentadas as condições de contorno adotadas para resolver o problema. As regiões de interesse são a superfície do cilindro circular e as regiões distantes do domínio fluido. Esquematicamente, as regiões de interesse são mostradas na Figura 3.2.

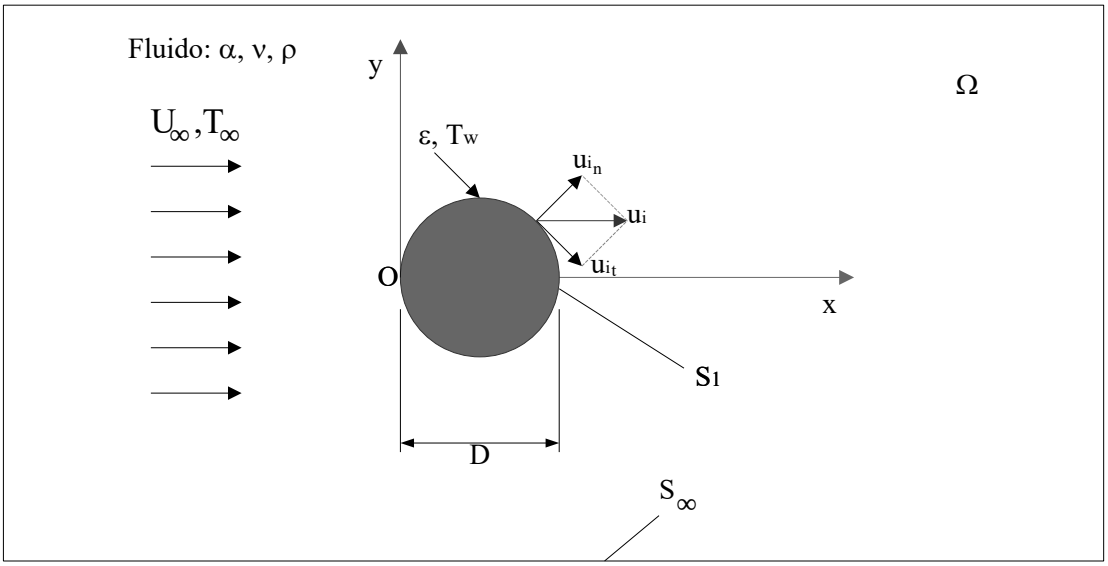


Figura 3.2 – Decomposição das velocidades de uma partícula em contato com a superfície do cilindro em suas componentes normais e tangenciais. Fonte: o Autor

De acordo com a Figura 3.2, observa-se que o vetor velocidade u_i é decomposto em duas componentes: uma na direção normal à superfície do corpo, u_{i_n}, e uma na direção tangencial, u_{i_t}.

Assim, considerado ainda o método de solução (neste caso, o método numérico apresentado no Capítulo 4), impõe-se as condições de contorno necessárias para a solução das equações governantes:

1. **Condição de Escorregamento Nulo**

   A condição de escorregamento nulo é garantida ao se verificar que o fluido tenha a mesma velocidade da parede no contorno do corpo.

$$u_{i_t} = 0 \qquad \text{em } S_1 \tag{3.11}$$

2. **Condição de Impermeabilidade**

   A condição de impermeabilidade garante que não há escoamento na direção normal do contorno do corpo.

$$u_{i_n} = 0 \qquad \text{em } S_1 \tag{3.12}$$

3. **Condição de escoamento não perturbado**

   A grandes distâncias da superfície do corpo, o módulo da velocidade tenderá à do escoamento incidente, expresso pela Equação

$$\|u_i\|_2 \to U_\infty \qquad \text{em } S_\infty \tag{3.13}$$

4. **Condição de temperatura para superfície do corpo**

   A superfície do cilindro se encontra a uma temperatura constante $T_w > T_\infty$.

5. **Condição de temperatura distante da superfície do corpo**

   A grandes distâncias da superfície do corpo, a temperatura do escoamento tenderá à temperatura não perturbada.

$$|T| \rightarrow T_\infty \qquad \text{em } S_\infty \tag{3.14}$$

3.5 Modelagem de Turbulência

A turbulência está presente na maioria dos problemas de Engenharia, especialmente em escoamentos de fluidos. Assim, o entendimento dos mecanismos físicos que descrevem este conceito é necessário para que se possa descrever os escoamentos.

Osborne Reynolds [57] foi o cientista responsável pelas investigações iniciais da transição para a turbulência. Suas observações apontaram que a amplificação das perturbações no escoamento causavam sua transição até a turbulência.

Neste fenômeno, uma das principais características é a multiplicidade de escalas, fator que dificulta uma abordagem analítica da turbulência, dada a ocorrência de interações não lineares entre as diferentes escalas do escoamento. As grandes escalas, menores frequências, são responsáveis por transportar a maior parte da energia e estão ligadas à geometria do escoamento. Já as pequenas estruturas apresentam maiores frequências e são controladas pelas escalas de Kolmogorov, que são as menores escalas de um escoamento, identificadas por não mais ocorrer dissipação de energia pela ação dos efeitos viscosos. As menores escalas apresentam maior vorticidade que as grandes escalas. Em geral, seria necessário entender o comportamento dos vórtices de todas as escalas (as frequências são diferentes) e ainda encontrar uma equação para descrever todos os fenômenos. Portanto, a questão chave é resolver o escoamento quando ele se torna turbulento devido ao aumento do número de Reynolds, que desorganiza o escoamento. O fenômeno da turbulência vem sendo estudado há mais de oitenta anos e não há uma solução fácil e geral para resolver escoamentos turbulentos.

Dada a elevada dificuldade de se resolver todas as interações turbulentas, feita pela Simulação Numérica Direta (SND), torna-se necessário desenvolver modelos que permitam a análise de escoamentos com os efeitos da turbulência, que deve ser observado com o aumento do número de Reynolds, como a modelagem de turbulência do tipo LES.

A SND resolve todas as escalas de tempo e espaço. O transiente de alta frequência existente no escoamento turbulento é resolvido muito rápido. No entanto, SND possui alto custo computacional para problemas de Engenharia; são necessários computadores que permitam utilizar malhas pequenas, incrementos de tempo pequenos e sistemas lineares (equações ma-

triciais) muito grandes. Quando houver computadores com esta capacidade, não haverá mais necessidade de modelos de turbulência.

Na Simulação de Grandes Escalas (SGE), utilizada nesta dissertação, há todo um espectro de frequência dos vórtices e de escalas de comprimento. Portanto, SGE, resolve diretamente as grandes escalas, no estilo SND, e modela as pequenas escalas, após o processo de filtragem das equações diferenciais governantes. Num certo limite, abaixo de uma determinada escala de comprimento, utiliza-se um modelo de turbulência

3.5.1 Filtragem das Equações Governantes

A Simulação de Grande Escalas é o método escolhido para separar as escalas do escoamento. As maiores escalas concentram a maior parte dos fenômenos de interesse [58], e sua solução pode ser feita com um número considerável de vórtices discretos e partículas de temperatura. As micro escalas, entretanto, devem ser modeladas matematicamente.

Na metodologia LES, a fim de filtrar as equações governantes, separa-se o escoamento em duas escalas: as grande escalas $(\bar{f}(x_i,t))$ das pequenas escalas $(f'(x_i,t))$, de modo que:

$$f(x_i,t) = \bar{f}(x_i,t) + f'(x_i,t) \tag{3.15}$$

Filtra-se as grandezas de modo que a parte filtrada (grandes escalas) é dada por:

$$\bar{f}(x_i,t) = \int_{\forall} f(x_i - y_i,t)\bar{G}(y_i)dy_i \tag{3.16}$$

Na integral de convolução 3.16, a função $\bar{G}(y_i)$ é um filtro passa-baixa, relacionado à frequência de corte escolhida para separar as grandes e pequenas escalas. A função da modelagem das pequenas escalas será, efetivamente, correlacionar as interações entre escalas de acordo com a frequência de corte selecionada. O espectro desta distribuição é visto na Figura 3.3.

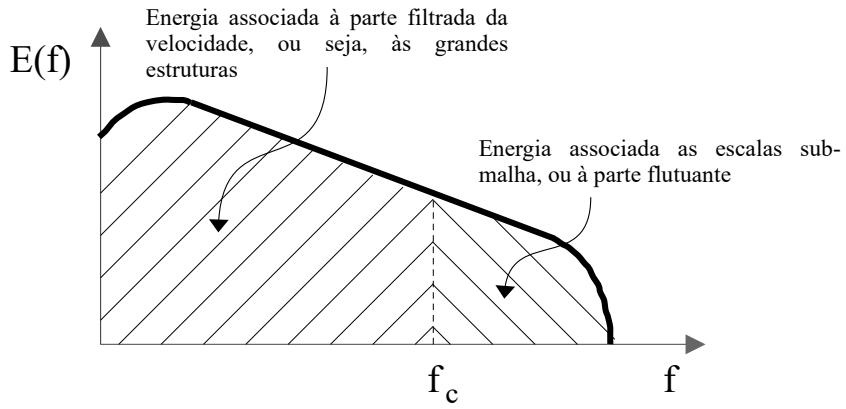


Figura 3.3 – Espectro da energia cinética turbulenta, visto para as grandes escalas (de tamanho acima do comprimento característico do filtro) e para as pequenas escalas (de tamanho abaixo do comprimento do filtro). Fonte: Adaptado de [59]

Filtrando-se as Equações 3.5b, 3.8 e 3.10, obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i u_j}) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{p}}{p_\infty} + g_i x_i\right) + g_i \beta_\infty (\bar{T} - T_\infty) + \nu_\infty \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}\bar{u}_i \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_j T}) = \alpha_\infty \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}\bar{T} \tag{3.19}$$

Observa-se que surgem termos não lineares após a filtragem ($\overline{u_i u_j}$ e $\overline{u_j T}$). Torna-se necessário utilizar a equação da composição, similar ao modo utilizado na metodologia RANS:

$$u_1 = \bar{u}_1 + u_1' \tag{3.20}$$

Utilizando-se a Equação 3.20, obtém-se:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u_j'} + \overline{u_i' \bar{u}_j} + \overline{u_i' u_j'} \tag{3.21}$$

$$\overline{u_j T} = \overline{\bar{u}_j \bar{T}} + \overline{\bar{u}_j T'} + \overline{u_j' \bar{T}} + \overline{u_j' T'} \tag{3.22}$$

Neste ponto define-se os tensores e fluxos turbulentos:

- Tensor de Leonard:

$$L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \tag{3.23}$$

- Fluxo turbulento de Leonard:

$$L_{\theta j} = \overline{\bar{u}_j \bar{T}} - \bar{u}_j \bar{T} \tag{3.24}$$

- Tensor cruzado:

$$C_{ij} = \overline{\bar{u}_i u_j'} + \overline{u_i' \bar{u}_j} \tag{3.25}$$

- Fluxo turbulento cruzado:

$$C_{\theta j} = \overline{\bar{u}_j T'} + \overline{u_j' \bar{T}} \tag{3.26}$$

- Tensor de Reynolds sub-malha:

$$\tau_{ij} = -\overline{u_i' u_j'} \tag{3.27}$$

- Fluxo turbulento sub-malha:

$$\tau_{\theta j} = -\overline{u_j' T'} \tag{3.28}$$

Assim, é possível escrever as Equações 3.21 e 3.22 como:

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + L_{ij} + C_{ij} + \tau_{ij} \tag{3.29}$$

$$\overline{u_j T} = \bar{u}_j \bar{T} + L_{\theta j} + C_{\theta j} + \tau_{\theta j} \tag{3.30}$$

O tensor e fluxo de Leonard estão relacionados às grandes escalas, enquanto o tensor e fluxo cruzado realizam a interação entre as grandes e pequenas escalas. O tensor e fluxo sub-malha compreendem as pequenas escalas do escoamento.

Conforme Silveira Neto *et al.* [60], para esquemas convectivos de até terceira ordem, os tensores de Leonard e cruzado (bem como seus correspondentes fluxos) podem ser desprezados, quando comparados aos efeitos do tensor sub-malha. Posto que neste trabalho será usado um avanço de Euler de primeira ordem, pode-se fazer esta simplificação e as Equações 3.17, 3.18 e 3.19

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_i \bar{u}_j\right) = &- \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{p}}{\rho_\infty} + g_i x_i\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu_\infty\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\overline{u_i' u_j'}\right) + g_i \beta_\infty (\bar{T} - T_\infty) \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_j \bar{T}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\alpha_\infty \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j' T'}\right) \tag{3.33}$$

A fim de solucionar o sistema composto pelas Equações 3.31-3.33, é necessário modelar o tensor de Reynolds sub-malha, $\overline{u_i' u_j'}$, e o fluxo turbulento de energia cinética térmica, $\overline{u_j' T'}$. Este procedimento irá recuperar as frequências mais altas que foram perdidas ao se utilizar a filtragem. Assim, o escoamento terá os efeitos das pequenas escalas interagindo com as grandes escalas, com o transporte turbulento de momento linear e calor, posto que as pequenas escalas não podem ser simuladas por vórtices discretos e partículas de temperatura.

3.5.2 Modelagem de Turbulência

Os modelos de turbulência podem ser divididos em dois grupos principais: os modelos algébricos e os que utilizam a Hipótese de Boussinesq (e calculam a viscosidade turbulenta, ν_T). Este trabalho utiliza a última, obtendo a viscosidade turbulenta.

A fim de resolver o problema do fechamento da turbulência, os modelos mais utilizados são os sub-malha que calculam a viscosidade turbulenta. Esses modelos baseiam-se na hipótese

de difusão do gradiente, na qual assume-se que a parte anisotrópica do tensor de Reynolds sub-malha, τ_{ij}, seja proporcional ao tensor taxa de deformação do campo filtrado, $\overline{S}_{ij}$, isto é:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = -2\nu_T\left(\bar{S}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\bar{S}_{kk}\right) \tag{3.34}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e o tensor taxa de deformação do campo filtrado é dado por:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.35}$$

Pode-se representar a energia cinética turbulenta das pequenas escalas, $\tau_{kk}/(2\rho)$ por κ', o que permite reescrever o lado esquerdo da Equação 3.34 como:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = \tau_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\rho\,\kappa' \tag{3.36}$$

Substituindo a Equação 3.36 em 3.34 e considerando as Equações 3.35 e 3.32, obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_i\bar{u}_j\right) = &-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{p}}{\rho_\infty} + g_i x_i\right) + \nu_\infty\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left[-\frac{2}{3}\delta_{ij}\rho\,\kappa' + \nu_T\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k}\right)\right] + \\ &+ g_i\beta_\infty(\bar{T} - T_\infty)\end{aligned} \tag{3.37}$$

Porém, pela equação da continuidade (Equação 3.31), tem-se que

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0 \tag{3.38}$$

Definindo-se uma pressão modificada como:

$$P := \bar{p} + \frac{2}{3}\rho\,\kappa' \tag{3.39}$$

e substituindo-se 3.39 em 3.37, obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_i\bar{u}_j\right) = &-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{P}}{\rho_\infty} + g_i x_i\right) + \nu_\infty\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_j \partial x_i}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu_T\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right] + \\ &+ g_i\beta_\infty(\bar{T} - T_\infty)\end{aligned} \tag{3.40}$$

Partindo-se da equação da continuidade, pode-se escrever que:

$$\nu_\infty\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j}\right) = \nu_\infty\frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \tag{3.41}$$

Somando-se a Equação 3.41 ao segundo termo do lado direito da Equação 3.40, usando o teorema de Schwarz para derivadas parciais, vem:

$$\begin{aligned}\nu_\infty \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} &= \nu_\infty \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \nu_\infty \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_j \partial x_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu_\infty \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu_\infty \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu_\infty \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right]\end{aligned} \tag{3.42}$$

Esta manipulação permite usar a Equação 3.42 em 3.40, obtendo-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_i \bar{u}_j\right) = &- \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{P}}{\rho_\infty} + g_i x_i\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu_\infty + \nu_T)\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right] + \\ &+ g_i \beta_\infty (\bar{T} - T_\infty)\end{aligned} \tag{3.43}$$

A fim de modelar a turbulência para o campo de temperaturas, o método é análogo. Partindo-se da Equação 3.33, pode-se modelar o segundo termo do lado direito como segue:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u'_j T'}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\alpha_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}\right) \tag{3.44}$$

onde α_T é a difusividade térmica turbulenta.

Utilizando a Equação 3.44 em 3.33, obtém-se a equação da energia considerando-se as trocas turbulentas:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_j \bar{T}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\alpha + \alpha_T)\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}\right] \tag{3.45}$$

Neste ponto, surge o problema do fechamento da turbulência, que requer um modelo de solução para se obter ν_T e α_T.O conhecido modelo de Smagorinsky [61] é um dos mais usados nas simulações CFD, no qual a viscosidade turbulenta é calculada como:

$$\nu_T = (C_S \triangle)^2 \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \tag{3.46}$$

sendo C_S uma constante determinada por Lily [62], $C_S = 0,18$. $\triangle = \sqrt{\Delta x \Delta y}$ é um comprimento característico da malha, sendo Δx e Δy as largura e alturas desta malha.

Uma vez que neste trabalho é usada uma abordagem puramente lagrangiana, o modelo de Smagorinsky não será utilizado, optando-se pela abordagem de Chollet e Lesieur [63], no qual a viscosidade turbulenta é definida a partir do espectro da energia cinética turbulenta local, $E(K_c,t)$. Este modelo apresenta a vantagem que, em um método puramente lagrangiano a velocidade é calculada a cada instante para cada partícula, tornando a implementação de turbulência do tipo LES simples, dispensando cálculos de derivadas. O Espectro da energia cinética

turbulenta local é calculado como segue:

$$\nu_T(K_c,t) = \frac{2}{3}C_K^{-3/2}\sqrt{\frac{E(K_c,t)}{K_c}} \tag{3.47}$$

onde $C_K = 1,4$ é a constante de Kolmogorov e K_c o número de onda de corte simulado.

O cálculo do espectro de energia cinética turbulenta local foi apresentado por Métais e Lesieur [64] com o uso do modelo de uma Função Estrutura de Velocidades de Ordem Dois (FEVO2):

$$\bar{F}_2(x_i',\triangle,t) = \|\overline{\bar{u}_i(x_i',t) - \bar{u}(x_i'+r_i,t)}\|^2_{\|r_i\|=\triangle} \tag{3.48}$$

A interpretação da Eq. 3.48, que foi um refinamento do trabalho de Lesieur, consiste em considerar as flutuações de velocidade em torno de um ponto x_i' do domínio que se pretende calcular ν_T. Neste ponto, gera-se uma esfera de raio $\|r\| = \triangle$ e considera-se a influência dos pontos sobre a superfície desta esfera (um refinamento em relação à proposição inicial de considerar todos os pontos no interior da esfera). A viscosidade turbulenta é, então, calculada como:

$$\nu_T(x_i',\triangle,t) = 0,105C_K^{-3/2}\triangle\sqrt{\bar{F}_2(x_i',\triangle,t)} \tag{3.49}$$

A implementação numérica do modelo de turbulência é descrita na Seção 4.8 e serve de base para a modelagem dos efeitos de rugosidade superficial, apresentados na Seção 4.9.

O cálculo da difusividade térmica turbulenta parte do número de Prandtl turbulento:

$$\mathrm{Pr_T} = \frac{\nu_T}{\alpha_T} \tag{3.50}$$

Este número, que varia entre 0,7–0,95 [59] permite calcular a difusividade térmica turbulenta imediatamente a partir da viscosidade turbulenta local como segue:

$$\alpha_T = \frac{\nu_T}{\mathrm{Pr_T}} \tag{3.51}$$

Finalizando esta seção é importante comentar que os vórtices de diferentes escalas possuem diferentes efeitos sobre o escoamento. Portanto, resolver as equações de Navier-Stokes é um questão de escalas e, em geral, a solução numérica encontrada é física e atende bem os propósitos da Engenharia. Do ponto de vista da Engenharia, a flutuação pode ser entendida como um aglomerado de partículas saltando de uma região de alta energia para uma região de baixa energia. Este efeito é interpretado como uma micro advecção; em outras palavras, além da difusão molecular, transfere-se energia por micro advecção. O cálculo dos coeficientes de viscosidade turbulenta e de difusividade térmica turbulenta são importantes para considerar este efeito na modelagem matemática dos escoamentos turbulentos.

3.6 Adimensionalização do Problema

A fim de se ganhar generalidade, será feita a adimensionalização das equações governantes. Para isso, parte-se de grandezas que serão as referências: uma escala de comprimento, D, uma escala de velocidade, U_∞ e uma escala de tempo, D/U_∞. Assim, obtém-se as seguintes grandezas adimensionalizadas:

- Campo de posições: $x_i^* = \frac{x_i}{D}$
- Campo de velocidades: $u_i^* = \frac{u_i}{U_\infty}$
- Tempo: $t^* = \frac{tU_\infty}{D}$
- Campo de pressões: $p^* = \frac{p}{\rho U_\infty^2}$
- Campo de vorticidades: $\omega^* = \frac{\omega D}{U_\infty}$
- Coeficiente de pressão: $C_p = \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$
- Coeficiente de arrasto: $C_D = \frac{F_A}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A}$
- Coeficiente de sustentação: $C_L = \frac{F_S}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A}$
- Número de Reynolds: $\mathrm{Re} = \frac{U_\infty D}{\nu}$
- Número de Strouhal: $\mathrm{St} = \frac{fD}{U_\infty}$
- Número de Nusselt: $\mathrm{Nu} = \frac{hD}{k}$
- Número de Prandtl: $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$
- Número de Prandtl turbulento: $\mathrm{Pr_T} = \frac{\nu_T}{\alpha_T}$
- Número de Grashof: $\mathrm{Gr} = \frac{g\beta(T_W - T_\infty)D^3}{\nu^2}$
- Número de Richardson: $\mathrm{Ri} = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2} = \frac{g\beta C_p(T_W - T_\infty)D}{\nu}$
- Gradiente de temperatura adimensionalizado: $\theta = \frac{T-T_\infty}{T_W - T_\infty}$, $0 \leq \theta \leq 1$.

É de interesse definir os números adimensionais de interesse baseados em sua interpretação física, como mostrado na Tab. 3.1. Outro ponto importante a se destacar é a diferença entre os números de Grashof e Richardson. O primeiro mede a contraposição de forças de flutuabilidade e inerciais, já o segundo, apesar de realizar uma contraposição similar, é utilizado para estimar o tipo de ocnvecção predominante no problema. Um número de Richardson pequeno (em geral, menor que 0,1) mostra dominância elevada da convecção forçada, enquanto um valor elevado (em geral, maior que 10) mostra a dominância da convecção natural. Valores intermediários são casos de convecção mista.

Tabela 3.1 – Interpretação física dos parâmetros de interesse da simulação. Fonte: O autor.

Parâmetro	Definição	Interpretação
Número de Reynolds	$\mathrm{Re} = \frac{U_\infty D}{\nu}$	Forças inerciais / Forças viscosas
Número de Nusselt	$\mathrm{Nu} = \frac{hD}{k}$	Convecção térmica / Condução térmica
Número de Prandtl	$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$	Difusividade da quantidade de movimento / Difusividade térmica
Número de Strouhal	$\mathrm{St} = \frac{fD}{U_\infty}$	Frequência adimensional de desprendimento de vórtices
Coeficiente de pressão	$C_p = \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$	Pressão estática / Pressão dinâmica
Coeficiente de arrasto	$C_d = \frac{F_A}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A}$	Força de arrasto / Força dinâmica
Coeficiente de sustentação	$C_l = \frac{F_S}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A}$	Força de sustentação / Força dinâmica
Número de Grashof	$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta(T_W - T_\infty)D^3}{\nu^2}$	Forças de flutuabilidade (empuxo) / Forças inerciais
Número de Richardson	$\mathrm{Ri} = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}$	Forças de flutuabilidade (empuxo) / Forças cisalhantes

Retirando-se as dimensões das equações governantes e omitindo o asterisco (*) por conveniência, obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_i \bar{u}_j\right) = &- \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{P}}{\rho_\infty} + g x_2\right) + \\ &+ \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(1 + \frac{\nu_T}{\nu}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right] + \\ &+ \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\left(\frac{\bar{T} - T_\infty}{T_W - T_\infty}\right)\hat{e}_2\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_j \bar{T}\right) = \frac{1}{\mathrm{RePr}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(1 + \frac{\alpha_T}{\alpha}\right)\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}\right] \tag{3.54}$$

3.7 A Equação do Transporte da Vorticidade

A Equação do Transporte da Vorticidade (ETV) é uma equação que permite o estudo do campo de vorticidades ao invés do campo de velocidades, e é uma das equações governantes do

MVD. Sejam as Eqs. de N-S:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = +\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = &-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{\bar{P}}}{\rho}+gx_2\right)+\\ &+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(1+\frac{\nu_T}{\nu}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right]+\\ &+\mathrm{Ri}\bar{\theta}\hat{e}_2\end{aligned} \tag{3.55}$$

Aplicando o rotacional à Eq. 3.55, a equação assume a seguinte forma, deixando a barra de lado por conveniência de escrita:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t}+\hat{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times\left(u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\hat{e}_k\right)=0+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(1+\frac{\nu_T}{\nu}\right)\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_j x_j}+\hat{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times(\mathrm{Ri}\theta\hat{\mathrm{e}}_2) \tag{3.56}$$

onde o termo de pressão é anulado, uma vez que o rotacional de um gradiente de campo escalar é nulo. O último termo, de empuxo, é resolvido manualmente. Desta forma, deve-se resolver o segundo termo do primeiro membro. Para isso, é vantajoso utilizar a seguinte identidade do cálculo, usada sem demonstração:

$$u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_j u_j}{2}\right)-u_i\hat{e}_i\times\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\hat{e}_j\times u_k\hat{e}_k\right) \tag{3.57}$$

Operando o segundo membro da Eq. 3.56 com a identidade da Eq. 3.57, vem:

$$\hat{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times\left(u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\hat{e}_k\right)=\hat{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_k u_k}{2}\right)-\hat{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times\left[u_j\hat{e}_j\times\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\hat{e}_k\times u_l\hat{e}_l\right)\right] \tag{3.58}$$

Observe que a primeira parcela do segundo membro é nula, pois também se trata do rotacional de um gradiente de campo escalar, e que o termo entre parênteses da segunda parcela do lado direito é o rotacional do campo de velocidades. Assim:

$$\hat{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times\left(u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\hat{e}_k\right)=\hat{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times\left[\omega_m\hat{e}_m\times u_j\hat{e}_j\right] \tag{3.59}$$

Operando os produtos escalares com a notação indicial, chega-se a:

$$\hat{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times\left(u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\hat{e}_k\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_m u_j\varepsilon_{mjn}\varepsilon_{inp}\hat{e}_p) \tag{3.60}$$

Valendo-se da propriedade cíclica do operador ε, pode-se escrever:

$$\varepsilon_{nmj}\varepsilon_{npi}=\delta_{mp}\delta_{ji}-\delta_{mi}\delta_{pj} \tag{3.61}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\hat{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times\left(u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\hat{e}_k\right)&=\frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_m u_j\hat{e}_p)\delta_{mp}\delta_{ji}-\frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_m u_j\hat{e}_p)\delta_{mi}\delta_{pj}\\ &=\frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_m u_i\hat{e}_m)-\frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_i u_j\hat{e}_j)\end{aligned} \tag{3.62}$$

Usando a Eq. 3.62 em Eq. 3.56, Resulta em:

$$\frac{\mathrm{D}\omega_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(1 + \frac{\nu_T}{\nu}\right)\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j x_j} + \mathrm{Ri}\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \tag{3.63}$$

onde cada termo é interpretado da seguinte forma:

- $\frac{\partial \omega_i}{\partial t}$: Variação da vorticidade em um ponto fixo do domínio;
- $\frac{\partial u_j \omega_i}{\partial x_i}$: Efeito convectivo do escoamento, isto é, a vorticidade sendo transportada pela velocidade;
- $\frac{\partial \omega_j u_i}{\partial x_j}$: Termo fonte devido à deformação dos tubos de vorticidade. Este termo desaparece ao se estudar um problema bidimensional;
- $\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(1 + \frac{\nu_T}{\nu}\right)\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j x_j}$: Parcela responsável pela dissipação da energia por meio da viscosidade e trocas turbulentas;
- $\mathrm{Ri}\frac{\partial \theta}{\partial x_1}$: Incremento de quantidade de movimento devido à existência de gradiente de temperatura, isto é, convecção mista.

Ao desconsiderar a parcela responsável pela deformação dos tubos de vorticidade, os resultados das cargas fluidodinâmicas serão mais conservadores. Considerando ainda que a vorticidade apresenta apenas uma componente não-nula em duas dimensões (i.e., pode ser tratada como escalar), pode-se escrever a ETV em sua forma final, que será usada neste trabalho, já filtrada:

$$\frac{\mathrm{D}\bar{\omega}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u_j}\bar{\omega}}{\partial x_j} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(1 + \frac{\nu_T}{\nu}\right)\frac{\partial^2 \bar{\omega}_i}{\partial x_j x_j} + \mathrm{Ri}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_1} \tag{3.64}$$

Outro fator importante de ser notado é que na parcela de convecção, efeitos térmicos são vistos na direção $\hat{e}_2$ e causados por gradientes que ocorrem na direção x_1. Isso será importante na etapa de formulação matemática do problema quando se calcula numericamente os efeitos da convecção natural.

Destaca-se, ainda, que a Eq. 3.64 é uma equação cinemática e escalar (ao invés de vetorial e dinâmica, como as Equações de N-S). Isto ocorre porque os termos de massa, associado à pressão estática, são perdidos ao se aplicar o operador rotacional às Equações de Navier-Stokes. Naturalmente, para se obter as cargas, será necessário recuperar esta contribuição na solução numérica. Isto é feito com a formulação de Shintani e Akamatsu [23], mostrada em detalhes na Seção 3.9.

Nota-se a semelhança da Eq. 3.64 com a Eq. 3.54, a qual permitirá o desenvolvimento do MPT no Capítulo 4 no que se refere a advecção e difusão do campo de temperaturas, e o que permitirá também a implementação similar dos modelos de turbulência e rugosidade superficial.

3.8 A Lei de Biot-Savart

O cálculo do campo de velocidades em um ponto a partir de uma distribuição conhecida de vorticidades é feita por meio de uma formulação integral conhecida como a Lei de Biot-Savart. Isto é possível por causa da relação existente entre os campos de vorticidades e velocidades:

$$\omega_i = \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\varepsilon_{jki} \tag{3.65}$$

A partir disso, a fim de modelar matematicamente o problema, assume-se que o campo de velocidade pode ser escrito como o rotacional de um campo B qualquer [10]:

$$u_i = \frac{\partial B_k}{\partial x_j}\varepsilon_{jki} \tag{3.66}$$

Desta forma, a fim de eliminar termos quando substitui-se a Eq. 3.66 em Eq. 3.65, é escolhido um campo B de tal sorte que:

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.67}$$

Assim, substituindo Eq. 3.66 em Eq. 3.65 e utilizando o campo B escolhido na Eq. 3.67, tem-se:

$$\omega_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial B_m}{\partial x_l}\varepsilon_{lmk}\right)\varepsilon_{jki} \tag{3.68}$$

Utilizando-se as propriedades da notação indicial, pode-se alternar os índices de modo cíclico e o produto de operadores ε pode ser escrito como:

$$\varepsilon_{klm}\varepsilon_{kij} = \delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi} \tag{3.69}$$

Utilizando Eq. 3.69 em Eq. 3.68, além da comutatividade vem:

$$\omega_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial B_m}{\partial x_l}\delta_{li}\delta_{mj} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial B_m}{\partial x_l}\delta_{lj}\delta_{mi} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial B_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial B_i}{\partial x_j} \tag{3.70}$$

Mas é sabido da Eq. 3.67 que a primeira parcela do último lado direito será nula, pois o divergente do campo B é zero. Assim, chega-se a uma equação de Poisson para o vetor B_i:

$$\omega_i = -\frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} \tag{3.71}$$

Como o problema estudado é bidimensional, pode-se resolver a equação de Poisson usando-se uma função de Green. Para o caso mais genérico tridimensional, tem-se:

$$G(x_i, x_i') = \frac{1}{4\pi\|x_i - x_i'\|} \tag{3.72}$$

sendo x_i o ponto do espaço onde se pretende calcular a solução e x_i' o ponto que induzirá velocidade (isto é, o elemento de volume contendo vorticidade). Assim, a solução de B_i pode ser escrita como:

$$B_i = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\forall} \frac{\omega_k}{\|x_i - x_i'\|} d\forall \tag{3.73}$$

O campo de velocidades é obtido ao se aplicar o rotacional à Eq. 3.73:

$$u_i = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\forall} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\omega_k}{\|x_i - x_i'\|} \varepsilon_{mkl} d\forall \tag{3.74}$$

A solução algébrica da Eq. 3.74 resulta na Lei de Biot-Savart.

$$u_i = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\forall} \frac{\omega_j (x_l - x_k') \varepsilon_{jki}}{\|x_l - x_k'\|^3} d\forall, \tag{3.75}$$

Para o caso bidimensional, com a mudança da função de Green, a solução obtida é:

$$u_i = \frac{1}{2\pi} \iiint_{\forall} \frac{\omega_j (x_l - x_k') \varepsilon_{jki}}{\|x_l - x_k'\|^2} d\forall \tag{3.76}$$

3.9 Formulação do Cálculo do Campo de Pressões

A ação do campo de vorticidades sobre a superfície de uma parede gera tensões cisalhantes. Essas tensões (distribuídas) podem ser integradas ao longo do contorno a fim de se obter as chamadas cargas fluidodinâmicas (integradas). É possível, ainda, que sejam decompostas na mesma direção do escoamento incidente ou na direção perpendicular, sendo chamadas, respectivamente, de forças de arrasto e de sustentação.

O cálculo das cargas fluidodinâmicas, tal qual a Lei de Biot-Savart (Eq. 3.76), é feito com uma quadratura. Desta forma, sua precisão também será dependente da convergência da solução numérica. Neste trabalho, utiliza-se a formulação de Shintani e Akamatsu [23], na qual considera-se os efeitos de toda a nuvem de vórtices discretos para a solução. É importante ressaltar que esta formulação vale para o chamado arrasto de forma, que em corpos rombudos é responsável por cerca de 98% do arrasto total. O arrasto restante é devido ao arrasto viscoso, que não é considerado neste trabalho. A dedução apresentada nesta seção foi adaptada do trabalho de Ricci [67].

Este método parte da aplicação do operador divergente às Equações de Navier-Stokes, resultando em uma equação de Poisson que é resolvida de modo similar à Eq. 3.76, utilizando uma função de Green. Este cálculo só pode ser feito sendo conhecido o campo de velocidades, como será visto ao decorrer da dedução.

Inicialmente, é necessário recorrer à identidade do cálculo vetorial:

$$u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial (u_i u_i)}{\partial x_j} - u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} \tag{3.77}$$

Aplicada à equação de Navier-Stokes (aqui aplicada em sua forma sem considerar os efeitos térmicos, já que a nuvem de vórtices discretos que gera as tensões cisalhantes), vem:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p + \frac{u_i u_i}{2}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{3.78}$$

Seja $Y \coloneqq p + \frac{u_i u_i}{2}$ o campo escalar de trabalhos específicos. Usando esta notação, a Eq. 3.78 se torna:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} = -\frac{\partial}{\partial x_i} Y + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{3.79}$$

Aplica-se o operador divergente à Eq. 3.79, resultando em:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_k} u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} Y + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{3.80}$$

Porém, considerada a incompressibilidade do escoamento ($\partial u_i / \partial x_i = 0$), a primeira parcela do lado esquerdo e a segunda parcela do lado direito da Eq. 3.80 são zeradas, resultando em:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} Y = \frac{\partial}{\partial x_k} u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} \tag{3.81}$$

Considerando a nomenclatura da Fig. 3.1, sabe-se que em S_∞, $p = p_\infty$ e $\|u_i\| = 1$, resultando em $Y = Y_\infty$, todas essas grandezas constantes.

Seja $\tilde{Y} \coloneqq Y - Y_\infty$. Como Y_∞ é constante, seu laplaciano será nulo, logo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} Y = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \tilde{Y} \tag{3.82}$$

Substituindo Eq. 3.82 em Eq. 3.81, vem:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial x_k} u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} \tag{3.83}$$

Observa-se que a Eq. 3.83 é uma Equação de Poisson para a pressão. Sua solução pode ser obtida com o uso de uma função de Green para duas dimensões, a saber:

$$G(x_i') = -\frac{1}{2\pi} \ln r \tag{3.84}$$

sendo $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ a distância entre o ponto x_i' e os restantes do domínio e $x_i' = (x'\hat{e}_1 + y'\hat{e}_2)$ o ponto que se deseja obter a solução para a equação de Poisson.

Inicialmente para se obter a solução, multiplica-se a Eq. 3.83 por $G(x_i')$:

$$\iint_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tilde{Y} G(x_l') d\Omega = \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k} u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} G(x_i') d\Omega \tag{3.85}$$

O primeiro termo do lado esquerdo da Eq. 3.85 pode ser manipulado algebricamente sem perdas:

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\tilde{Y}\right) G(x_i')d\Omega = \iint_\Omega \tilde{Y}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}G(x_i')d\Omega + \iint_\Omega \left[G(x_i')\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\tilde{Y} - \tilde{Y}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}G(x_i')\right] \tag{3.86}$$

Porém, o laplaciano da função de Green, visto na primeira integral do lado direito da Eq. 3.86, é a função impulso. Sua solução dependerá de onde o ponto x_i' pertence no domínio, como segue:

$$\iint_\Omega \tilde{Y}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}G(x_i')d\Omega = \begin{cases} 0, & x_i' \notin \Omega \cup S_1 \cup S_\infty \\ -\tilde{Y}(x_i'), & x_i' \in \Omega \\ -\frac{1}{2}\tilde{Y}(x_i'), & x_i' \in S_1 \cup S\infty \end{cases} \tag{3.87}$$

Uma interpretação intuitiva seria que fora do domínio, sem fluido, a função $\tilde{Y}$ não apresenta valor. Dentro do domínio, um volume diferencial estaria repleto de fluido, resultando em seu valor normal. Já em um contorno, o vetor normal apenas funcionaria para a metade em contato com o fluido, pois o interior da parede seria análogo a um ponto fora do domínio, gerando o fator $\frac{1}{2}$.

Uma vez que as regiões sem presença de fluido não são de interesse, tem-se a solução desta integral tal qual segue:

$$\iint_\Omega \tilde{Y}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}G(x_i')d\Omega = -\xi\tilde{Y}(x_i'), \qquad \xi = \begin{cases} 1, & x_i' \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & x_i' \in S_1 \cup S_\infty \end{cases} \tag{3.88}$$

onde ξ é um *switch* que toma o valor unitário no domínio fluido e $\frac{1}{2}$ nos contornos.

Neste momento, é necessário resolver a segunda integral do lado direito da Eq. 3.86. Para isso, aplica-se a segunda Identidade de Green:

$$\iint_\Omega \left[G(x_i')\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\tilde{Y} - \tilde{Y}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}G(x_i')\right] = -\oint_{S_1\cup S_\infty}\left[G(x_i')\frac{\partial}{\partial n_i}\tilde{Y} - \tilde{Y}\frac{\partial}{\partial n_i}G(x_i')\right]dS \tag{3.89}$$

onde n_i representa a direção normal apontando "para dentro" do domínio fluido de cada ponto das superfícies, o que justifica o uso do sinal negativo, contrário à convenção típica do teorema. Assim, a Eq. 3.86 pode ser reescrita como:

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\tilde{Y}\right) G(x_i')d\Omega = -\xi\tilde{Y}(x_i') + \oint_{S_1\cup S_\infty}\tilde{Y}(x_i')\frac{\partial}{\partial n_i}G(x_i')dS - \oint_{S_1\cup S_\infty}G(x_i')\frac{\partial}{\partial n_i}\tilde{Y}(x_i')dS \tag{3.90}$$

O primeiro termo da Eq. 3.85 já foi resolvido, tornando necessário resolver o segundo. Para isso, usando-se as propriedades da divergência, obtém-se:

$$\iint_\Omega G(x_i')\left(\frac{\partial}{\partial x_k}u_i\omega_j\varepsilon_{ijk}\right)d\Omega = \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\left[G(x_i')u_i\omega_j\varepsilon_{ijk}\right]d\Omega - \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_k}G(x_i')\right]u_i\omega_j\varepsilon_{ijk}d\Omega \tag{3.91}$$

Aplicando o teorema da divergência à primeira integral do lado direito e a transformando em uma integral de contorno, vem:

$$\iint_{\Omega} G(x_i') \left(\frac{\partial}{\partial x_k} u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} \right) d\Omega = - \oint_{S_1 \cup S_\infty} G(x_i') u_i \omega_j \varepsilon_{ijn} \hat{e}_n dS - \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} G(x_i') \right] u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} d\Omega \tag{3.92}$$

Usando-se a Eq. 3.90 e Eq. 3.92 na Eq. 3.85, vem:

$$\begin{aligned} -\xi \tilde{Y}(x_i') + \oint_{S_1 \cup S_\infty} \tilde{Y}(x_i') \frac{\partial}{\partial n_i} G(x_i') dS = &- \oint_{S_1 \cup S_\infty} G(x_i') \left(u_i \omega_j \varepsilon_{ijn} - \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{Y} \right) \hat{e}_n dS + \\ &- \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} G(x_i') \right] u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} d\Omega \end{aligned} \tag{3.93}$$

Considerando a Eq. 3.79, pode-se escrever:

$$u_i \omega_j \varepsilon_{ijn} - \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{Y} = \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u_j \tag{3.94}$$

Usando-se Eq. 3.94 em Eq. 3.93:

$$\begin{aligned} -\xi \tilde{Y}(x_i') + \oint_{S_1 \cup S_\infty} \tilde{Y}(x_i') \frac{\partial}{\partial n_i} G(x_i') dS = &- \oint_{S_1 \cup S_\infty} G(x_i') \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u_j \right) \hat{e}_n dS + \\ &- \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} G(x_i') \right] u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} d\Omega \end{aligned} \tag{3.95}$$

Porém, em S_1, devido à condição de escorregamento nulo, a velocidade em contato com a parede é constante (e nula, no caso estudado), enquanto em S_∞ ela é igual à unidade . Desta forma, a derivada temporal é anulada na integral. Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned} \xi \tilde{Y}(x_i') - \oint_{S_1 \cup S_\infty} \tilde{Y}(x_i') \frac{\partial}{\partial n_i} G(x_i') dS = &- \frac{1}{\mathrm{Re}} \oint_{S_1 \cup S_\infty} G(x_i') \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u_j \hat{e}_n dS + \\ &+ \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} G(x_i') \right] u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} d\Omega \end{aligned} \tag{3.96}$$

Pela hipótese assumida de escoamento incompressível, pode-se utilizar a seguinte identidade vetorial:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \omega_j \varepsilon_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_j - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u_j \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u_k = - \frac{\partial}{\partial x_i} \omega_j \varepsilon_{ijk} \tag{3.97}$$

Usando este resultado em Eq. 3.96, vem:

$$\begin{aligned} \xi \tilde{Y}(x_i') - \oint_{S_1 \cup S_\infty} \tilde{Y}(x_i') \frac{\partial}{\partial n_i} G(x_i') dS = &\frac{1}{\mathrm{Re}} \oint_{S_1 \cup S_\infty} G(x_i') \frac{\partial}{\partial x_i} \omega_j \varepsilon_{ijn} \hat{e}_n dS + \\ &+ \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} G(x_i') \right] u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} d\Omega \end{aligned} \tag{3.98}$$

A primeira integral da Eq. 3.96 trata dos dois contornos: S_1 e S_∞. A integral correspondente a S_∞ é nula, uma vez que $\tilde{Y}_\infty = Y_\infty - Y_\infty = 0$.

A segunda integral pode ser reescrita utilizando as propriedades do cálculo vetorial:

$$\oint_{S_1 \cup S_\infty} G(x_i') \frac{\partial}{\partial x_i} \omega_j \varepsilon_{ijn} \hat{e}_n dS = \oint_{S_1 \cup S_\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[G(x_i') \omega_j \varepsilon_{ijn} \right] \hat{e}_n dS - \oint_{S_1 \cup S_\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} G(x_i') \right] \omega_j \varepsilon_{ijn} \hat{e}_n dS \tag{3.99}$$

O teorema de Gauss pode ser aplicado à primeira integral do lado direito da Eq. 3.99, resultando em um divergente de um rotacional de um campo vetorial, a saber, $\vec{\nabla} \bullet [\vec{\nabla} \times G(\vec{x}')\vec{\omega}]$. Como sabido, esta operação resulta em zero , restando apenas a segunda integral.

A segunda integral do lado direito da Eq. 3.99 permite desconsiderar a parcela referente às grandes distâncias, S_∞, pois, devido à dissipação viscosa, $\omega_i \to 0$. Desta forma:

$$\oint_{S_1 \cup S_\infty} G(x_i') \frac{\partial}{\partial x_i} \omega_j \varepsilon_{ijn} \hat{e}_n dS = - \oint_{S_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} G(x_i') \right] \omega_j \varepsilon_{ijn} \hat{e}_n dS \tag{3.100}$$

Usando as considerações dos parágrafos anteriores, pode-se reescrever a Eq. 3.98 como:

$$\begin{aligned} \xi \tilde{Y}(x_i') - \oint_{S_1} \tilde{Y}(x_i') \frac{\partial}{\partial n_i} G(x_i') dS = &+ \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_k} G(x_i') \right] u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} d\Omega + \\ &- \frac{1}{\mathrm{Re}} \oint_{S_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} G(x_i') \right] \omega_j \varepsilon_{ijn} \hat{e}_n dS \end{aligned} \tag{3.101}$$

Neste instante, a Eq. 3.101 está na forma final para os interesses deste trabalho. A seguir, os vetores são resolvidos a fim de obter a equação com suas coordenadas cartesianas, que são facilmente programáveis.

Sendo $G(x_i')$ a função de Green definida em Eq. 3.84, seu gradiente projetado na direção normal, visto na primeira integral da Eq. 3.101, vale:

$$\frac{\partial G(x_i')}{\partial n_i} = -\frac{1}{2\pi} \frac{n_x(x-x') + n_y(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \tag{3.102}$$

Resolve-se então o termo da primeira integral do lado direito, projetando-se o rotacional do campo de velocidades e vorticidades na direção do gradiente de $G(x_i')$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k} G(x_i') \right] u_i \omega_j \varepsilon_{ijk} = -\frac{\omega}{2\pi} \frac{v(x-x') - u(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \tag{3.103}$$

A projeção do rotacional na direção normal da segunda integral do lado direito resulta em:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i} G(x_i') \right] \omega_j \varepsilon_{ijn} \hat{e}_n = \frac{\omega}{2\pi} \frac{n_y(x-x') - n_x(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \tag{3.104}$$

Desta forma, tem-se a equação que permite determinar a pressão em um dado ponto x_i':

$$\begin{aligned} \xi \tilde{Y}(x_i') + \oint_{S_1} \frac{1}{2\pi} \frac{n_x(x-x') + n_y(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \tilde{Y} dS = &- \iint_\Omega \frac{\omega}{2\pi} \frac{v(x-x') - u(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} d\Omega + \\ &- \frac{1}{\mathrm{Re}} \oint_{S_1} \frac{\omega}{2\pi} \frac{n_y(x-x') - n_x(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dS \end{aligned} \tag{3.105}$$

A interpretação física dos termos da Eq. 3.105 é feita analisando cada termo integral. A integral de linha do lado esquerdo se refere à contribuição da parede do cilindro para a pressão estática. A integral de superfície do lado direito mostra a contribuição da vorticidade no domínio Ω, enquanto a integral de linha do lado direito refere-se à vorticidade sendo gerada ou destruída sobre a superfície do cilindro.

4 Modelo Numérico: O Método de Partículas de Temperatura

4.1 Introdução

Neste capítulo é discutida e apresentada a formulação do método numérico utilizado neste trabalho, o Método de Partículas de Temperatura (MPT). O MPT é uma vertente do MVD, pois além da necessidade de discretização do campo de vorticidades em vórtices discretos, o calor deve ser discretizado em partículas de temperatura. A característica puramente lagrangiana do MPT exige que todas as partículas existentes no domínio fluido em cada instante de tempo sejam "rotuladas" e individualmente acompanhadas ao longo de uma simulação numérica típica. Há a necessidade de modelagem numérica das camadas limites hidrodinâmica e térmica, além das esteiras de vórtices e de calor. Desta maneira, as duas nuvens de partículas, isto é, os vórtices discretos e as partículas de temperatura constroem os campos instantâneos de vorticidade e de calor, respectivamente. A construção instantânea dos campos de vorticidades e de calor é necessária para resolver o modelo fluidodinâmico desta dissertação de mestrado. O modelo fluidodinâmico é o elo entre o escoamento e a força de excitação originária do campo de pressões instantâneo, o qual possui comportamento cíclico implicando nos carregamentos fluidodinâmicos integrados periódicos. Em outras palavras, a presença constante do mecanismo de formação de vórtices a partir da superfície do corpo e a consequente formação da esteira de Von Kármán provocam manifestações de carregamentos fluidodinâmicos distribuídos e integrados atuantes sobre a superfície do corpo; e estes carregamentos fluidodinâmicos são calculados através do modelo fluidodinâmico. O MPT também inclui modelagem do turbulência do tipo LES para as equações do transporte da vorticidade e da energia; no caso da segunda equação, há uma contribuição importante deste trabalho para a sua implementação numérica. A modelagem de turbulência viabiliza o modelo de rugosidade superficial, que se mostra sensível, mesmo em simulações numéricas bidimensionais, capturando efeitos físicos importantes. A interferência da esteira de calor sobre a dinâmica da esteira de vórtices é simulada utilizando o modelo de forças de flutuabilidade (forças de empuxo) via aproximação de Boussinesq. A consideração de todos estes efeitos simultaneamente permite uma investigação detalhada de fenômenos físicos de interesse para a Engenharia.

4.2 Geração de Vorticidade

4.2.1 Mecanismo Físico

Os mecanismos que explicam viscosidade (isto é, coesão entre moléculas e saltos de pacotes de moléculas) são responsáveis pela condição de escorregamento-nulo quando o fluido entra em contato com uma fronteira sólida. Desta maneira, o perfil de velocidades de um escoamento incidente (uniforme) é modificado pela difusividade de quantidade de movimento (interpretação física para o coeficiente de viscosidade cinemática) e perderá energia quando em contato com uma parede. Sejam as Equações de Navier-Stokes representadas abaixo em sua versão lagrangiana:

$$\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j}\omega_k \varepsilon_{jki} \tag{4.1}$$

Supondo que o escoamento incida sobre uma placa longa e plana em um escoamento bidimensional. Ao analisar um comprimento diferencial próximo à superfície da placa, assumido o ponto de ordenadas $x_2 = 0$ fixo, no qual a condição de aderência se faz verificada, pode-se escrever a Eq. 4.1 de forma simplificada:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \tag{4.2}$$

A Eq. 4.2 apresenta o princípio de geração e destruição de vorticidade a partir da parede, de acordo com o gradiente de pressão existente, uma vez que em $x_2 = 0$ não há fluxo de vorticidade para ou proveniente do interior da parede. Se o gradiente for desfavorável, isto é, $\frac{\partial p}{\partial x_1} > 0$, a vorticidade é destruída, ao passo que se o gradiente de pressão for favorável, $\frac{\partial p}{\partial x_1} < 0$, gera-se vorticidade.

Desta forma, o trabalho numérico consiste em representar este processo contínuo de modo discretizado, tal qual esquematizado na Fig. 4.1. Isto deve ser feito respeitando a condição de escorregamento nulo, Eq. 3.11, e é satisfeito pela geração, a cada instante de tempo, de vórtices discretos sobre a superfície. Esta geração é feita de modo que a indução de velocidade tangencial total sobre cada ponto de controle dos painéis seja nula.

Este trabalho utiliza o modelo do vórtice discreto de Lamb para a representação da nuvem de vórtices discretos. Este modelo de vórtice discreto apresenta a vantagem de ser uma solução da equação diferencial da difusão puramente radial da vorticidade apresentando, portanto, uma distribuição contínua e suave para a vorticidade. O Apêndice A demonstra a dedução das equações para a distribuição radial de vorticidade e para a distribuição radial da velocidade tangencial induzida pelo modelo do vórtice discreto de Lamb.

4.2.2 Modelagem Numérica do Campo de Vorticidades

No Método de Partículas de Temperatura, o campo das vorticidades ω é trocado por um campo discreto ω_h composto por vórtices discretos localizados em pontos x_i' do domínio fluido

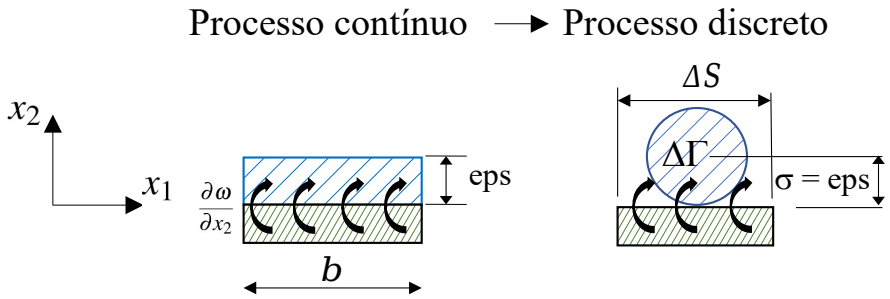


Figura 4.1 – Esquema de geração de vorticidade a partir de uma superfície: processos contínuos e discretos. Fonte: O Autor

que estão sobrepostos. Matematicamente, pode-se escrever [33]:

$$\omega(x_i',t) \approx \omega^h(x_i',t) = \sum_{j=1}^{N} \Delta\Gamma_j(t)\varsigma(x' - x_j(t)) \tag{4.3}$$

onde N é o número total de vórtices discretos no domínio fluido a cada instante, $\Delta\Gamma_j$ é a intensidade do j-ésimo vórtice discreto e ς é uma distribuição característica da vorticidade. Neste trabalho, como é usado o vórtice discreto de Lamb, esta distribuição apresenta a seguinte forma:

$$\varsigma(x_i',t) = \frac{1}{\lambda\pi\sigma_j^2}\exp\left(-\frac{\|x' - x_j\|}{\lambda\sigma_j^2}\right) \tag{4.4}$$

onde λ é uma função que representa a largura de corte, selecionada como 1 neste trabalho e σ é o raio do núcleo do vórtice discreto, relacionado à resolução da simulação: um raio menor consegue captar mais efeitos, mas requer uma nuvem mais populosa para representar a fenomenologia de modo apropriado. O valor do raio do núcleo do vórtice é, a princípio, escolhido para a simulação.

O modelo do vórtice de Lamb permite calcular o efeito de cada vórtice discreto existente no escoamento. Neste instante, então, é necessário um esquema de geração destes vórtices ao longo da marcha temporal da simulação.

Tal qual Chorin [22], a geração será feita com o propósito de anular as velocidades tangenciais em cada ponto de controle da superfície sólida, esquematicamente mostrada na Fig. 4.2. Para isso, são consideradas três influências, a saber (a) A nuvem de vórtices discretos (existentes e nascentes), (b) o escoamento incidente e (c) a contribuição do corpo. A contribuição da nuvem é bem conhecida do modelo de vórtice de Lamb (elaborado em detalhes no Apêndice A), sendo feito um somatório da influência de cada vórtice discreto em cada ponto de controle. Esta operação requer $\mathcal{O}(N)$ cálculos.

O item (b) apresenta uma contribuição imediata: cada ponto de controle recebe a velocidade do escoamento incidente.

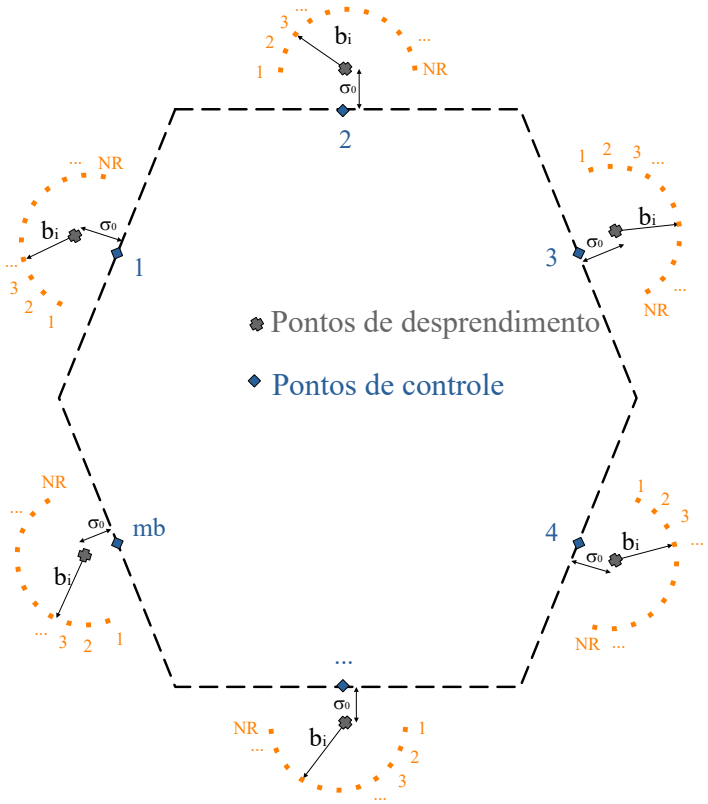


Figura 4.2 – Esquema do corpo com os pontos de interesse. Fonte: O Autor

O item (c) é modelado pelo Método de Painéis, apresentado na Seção 4.4 adiante.

Assim, a velocidade tangencial total atuante em cada painel é calculada em cada um dos *mb* pontos de controle e é armazenada em uma matriz coluna $\{\texttt{RHSV}\}_{mb\times 1}$, chamado vetor lado direito dos vórtices. O objetivo é calcular o a matriz coluna das intensidades de cada vórtice discreto, $\{\Gamma\}_{mb\times 1}$, tendo em consideração a contribuição unitária de cada um nos pontos de controle, representada pela matriz de influência $[\texttt{COUPV}]_{mb\times mb}$. Deve-se, portanto, resolver a seguinte equação matricial:

$$[\texttt{COUPV}]\{\Gamma\} = \{\texttt{RHSV}\} \tag{4.5}$$

Ou então, expandindo, para facilitar o entendimento:

$$\begin{bmatrix} K^v_{11} & K^v_{12} & K^v_{13} & \dots & K^v_{1mb} \\ K^v_{21} & K^v_{22} & K^v_{23} & \dots & K^v_{2mb} \\ K^v_{31} & K^v_{32} & K^v_{33} & \dots & K^v_{3mb} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K^v_{mb1} & K^v_{mb2} & K^v_{mb3} & \dots & K^v_{mbmb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\Gamma_1 \\ \Delta\Gamma_2 \\ \Delta\Gamma_3 \\ \vdots \\ \Delta\Gamma_{mb} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} RHSV_1 \\ RHSV_2 \\ RHSV_3 \\ \vdots \\ RHSV_{mb} \end{Bmatrix} \tag{4.6}$$

sendo K^v_{ij} o elemento da matriz de influência que representa a indução de velocidade tangencial do j-ésimo vórtice nascente no i-ésimo painel se ele apresentasse intensidade unitária. $\Delta\Gamma_j$

é a intensidade do j-ésimo vórtice discreto nascente, a ser calculada, e $RHSV_i$ a velocidade tangencial total induzida no painel i pela nuvem de vórtices, escoamento incidente e painéis.

A velocidade que um vórtice discreto localizado em um ponto k (de coordenadas $x_k\hat{e}_1 + y_k\hat{e}_2$) induz em um ponto qualquer, neste caso, no ponto de controle do painel m (de coordenadas $x_m\hat{e}_1 + y_m\hat{e}_2$), é:

$$u_{mk} = \frac{\Gamma_k}{2\pi}\frac{y_m - y_k}{(x_m - x_k)^2 + (y_m - y_k)^2}\left\{1 - \exp\left[\frac{(x_m - x_k)^2 + (y_m - y_k)^2}{\sigma_k}\right]\right\} \tag{4.7}$$

$$v_{mk} = -\frac{\Gamma_k}{2\pi}\frac{x_m - x_k}{(x_m - x_k)^2 + (y_m - y_k)^2}\left\{1 - \exp\left[\frac{(x_m - x_k)^2 + (y_m - y_k)^2}{\sigma_k}\right]\right\} \tag{4.8}$$

A esta velocidade é ainda acrescentada a contribuição de cada painel sobre os demais painéis. O equacionamento é mostrado na Seção 4.4. Assim, o lado direito é calculado por:

$$RHSV_m = -U_\infty \cos(\beta_m) - V_\infty \text{sen}(\beta_m) + \sum_{k=1}^{N}[-u_{mk}\cos(\beta_m) - v_{mk}\text{sen}(\beta_\infty)] \tag{4.9}$$

onde β_m é o ângulo que o painel m forma com o eixo x_1.

4.3 Geração de Calor

4.3.1 Mecanismo Físico

A existência de gradientes de temperatura anima a transferência de calor entre dois meios. Seja a equação da energia em sua forma mais simples, antes da adimensionalização e a princípio sem modelagem de turbulência. Supondo apenas a existência de gradiente de temperatura, desconsiderando advecção, têm-se:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x_i} \tag{4.10}$$

Se considerarmos o fluxo apenas a partir de uma placa plana aquecida situada em $x_2 = 0$, o único gradiente representativo será na direção x_2, isto é, se trata de um problema unidimensional. A equação da energia se torna, então:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \tag{4.11}$$

A solução desta equação é análoga à da equação da difusão da vorticidade, o que permitirá uma forma similar para a distribuição de temperaturas em uma partícula.

Já o fluxo de calor sobre a parede pode ser escrito pela Lei de Fourier:

$$q(y,t) = -k\frac{\partial T}{\partial x_2} \tag{4.12}$$

onde k é a condutibilidade térmica do material. O sinal negativo mostra a tendência de fluxo de calor. Se a parede, com temperatura T_W está a uma temperatura superior à do fluido, T_∞, $\frac{\partial T}{\partial x_2} < 0$, o que indica um fluxo positivo na direção x_2. Uma vez mais, é necessária a troca do processo contínuo de transferência de calor por um processo discreto, como ilustrado na Fig. 4.3

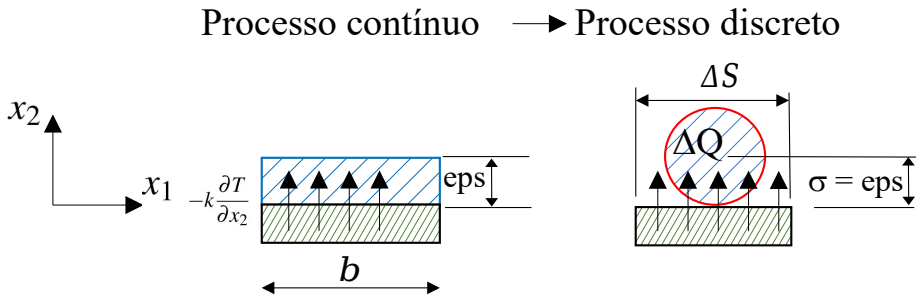


Figura 4.3 – Esquema de geração de temperatura a partir de uma superfície: processos contínuos e discretos. Fonte: O Autor

4.3.2 Modelagem Numérica do Campo de Temperaturas

Analogamente ao campo de vorticidades, o campo de temperaturas real é modelado por uma coleção de partículas de temperatura distribuídas, como segue:

$$T(x_i',t) \approx T^h(x_i',t) = \sum_{j=1}^{N} \Delta Q_j(t)\vartheta(x'-x_j(t)) \tag{4.13}$$

onde ΔQ_j é a intensidade da partícula de temperatura indutora e ϑ é a distribuição de temperatura, também chamada de *kernel*. O *kernel* utilizado nesta Dissertação de Mestrado é Gaussiano e a dedução da indução radial de temperatura de uma partícula de temperatura é feita no Apêndice B.

$$\vartheta(x_i',t) = \frac{1}{\lambda\pi\sigma_{T_j}^2}\exp\left(-\frac{\|x'-x_j\|}{\lambda\sigma_{T_j}^2}\right) \tag{4.14}$$

com a diferença que para a temperatura, $\sigma_{T_j} = \sqrt{4\alpha\Delta t}$.

A análise dimensional mostra que a grandeza análoga da intensidade de vórtice (Γ_j) para o campo de temperaturas é Q_j, de dimensão $[L^2\theta^1]$, ou $[m^2K]$ no Sistema Internacional. O objetivo é obter uma expressão para Q_j.

Partindo-se da Eq. 4.12, dividindo-se membro a membro por ρc_p, ficamos com:

$$\frac{q}{\rho c_p} = -\frac{k}{\rho c_p}\frac{\partial T}{\partial x_2} \tag{4.15}$$

Sendo $\frac{k}{\rho c_p} = \alpha$ e chamando o termo do lado esquerdo de q^*, vem:

$$q^* = -\alpha\frac{\partial T}{\partial x_2} \tag{4.16}$$

A Eq. 4.16 neste instante tem dimensões $[L^1T^{-1}\theta^1]$. A fim de usar a analogia da intensidade da partícula de temperatura, deve-se multiplicar membro a membro por uma grandeza de unidade tempo e outra de comprimento. Como a geração ocorre a cada instante de tempo Δt, esta é a escolha natural para esta dimensão. Sendo as partículas geradas em painéis de comprimento Δs, por onde o fluxo de calor ocorre, este é o segundo valor escolhido. Assim, tem-se:

$$\Delta Q_j = q^* \Delta s \Delta t = -\alpha \frac{\partial T}{\partial x_2} \Delta s \Delta t \tag{4.17}$$

A partícula será desprendida a uma distância ε de cada painel, sendo então este o valor na direção x_2 que é calculado o gradiente Δx_2. A diferença de temperatura é $\Delta T = T_j - T_w$, onde T_j é a temperatura do *ponto de desprendimento* j.

Por fim, chega-se à versão final para a geração de partículas de temperatura a partir de um painel a cada instante de tempo. A Eq. 4.18 é chamada de Lei de Fourier Modificada:

$$\Delta Q_j = \alpha \frac{T_w - T_j}{\varepsilon} \Delta s \Delta t. \tag{4.18}$$

Adimensionalizada, a Eq. 4.18 toma a seguinte forma (na qual os termos adimensionais são escritos sem asterisco por simplicidade):

$$\Delta Q_j = \frac{1}{\mathrm{RePr}} \frac{T_w - T_j}{T_w - T_\infty} \frac{\Delta s \Delta t}{\varepsilon}. \tag{4.19}$$

4.3.3 Cálculo do Número de Nusselt

A fim de calcular o número de Nusselt na superfície do cilindro, é necessário calculá-lo para cada painel. O número de Nusselt é definido como:

$$\mathrm{Nu} = \frac{hD}{K} \tag{4.20}$$

sendo h o coeficiente de transferência de calor por convecção e K a condutividade térmica do fluido. O coeficiente de transferÊncia de calor por convecção pode ainda ser escrito como:

$$h = \frac{\dot{q}}{T_W - T_\infty} \tag{4.21}$$

E a Lei de Fourier permite escrever:

$$\dot{q} = -K \frac{dT}{dn} \tag{4.22}$$

sendo n a direção normal ao fluxo de calor. Desta forma:

$$\mathrm{Nu} = \frac{\frac{\dot{q}}{T_W - T_\infty} D}{K} = \frac{-K \frac{dT}{dn} \frac{D}{T_W - T_\infty}}{K} \tag{4.23}$$

Simplificando o termo K e adimensionalizando a Eq. 4.23, se obtém:

$$\mathrm{Nu}_i = \frac{dT_i}{dn^*} \frac{1}{T_w - T_\infty} \tag{4.24}$$

Para um painel, o diferencial dT_i é aproximado pela diferença $(T_i - T_\infty)$ (o aquecimento local em relação À temperatura do fluido não aquecido) e o diferencial dn^* é aproximado por ε_i^*, a distância do centro da partícula de temperatura nascente ao ponto de controle do respectivo painel. Portanto, tem-se:

$$\mathrm{Nu}_i = \frac{T_i - T_\infty}{T_W - T_\infty} \frac{1}{\varepsilon_i^*} \tag{4.25}$$

4.4 O Método de Painéis

Neste trabalho, a representação do corpo é feita por meio do Método de Painéis [10], que discretiza a superfície real de um corpo utilizando um conjunto de painéis planos ou curvos. Neste trabalho são utilizados painéis planos de comprimentos iguais, formando um polígono inscrito ao contorno real da circunferência, sendo que todos seus vértices pertencem a ela. Este método permite que as condições de contorno sejam garantidas em pontos selecionados de cada painel (e não em toda a superfície). Porém, a adoção de um número adequado de painéis para discretizar o corpo permite a garantia destas condições e uma resposta dinâmica do corpo ao escoamento incidente com erros numéricos aceitáveis.

Os painéis planos contém singularidades que podem ser do tipo fonte ou vórtice. Neste trabalho serão utilizadas distribuições de fontes de densidade uniforme (vide Fig. 4.4) para discretizar o contorno do cilindro com um polígono inscrito à geometria real. Esta escolha permite verificar a condição de contorno de Neumann da impenetrabilidade no ponto médio de cada painel (chamado neste texto de *ponto de controle* ou *ponto pivotal*).

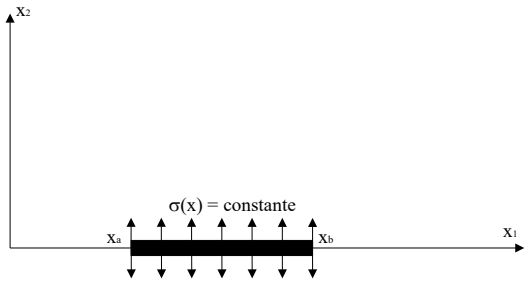


Figura 4.4 – Fonte de densidade uniforme no sistema de coordenas global. Fonte: Adaptado de [10]

A velocidade induzida por uma fonte em um ponto P(x,y) é calculada em um sistema de coordenadas locais $Ox_{1L}x_{2L}$, como esquematizado pela Fig. 4.5. O cálculo é então feito como:

$$u_L = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_a}^{x_b} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx_0 \tag{4.26}$$

$$v_L = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_a}^{x_b} \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx_0 \tag{4.27}$$

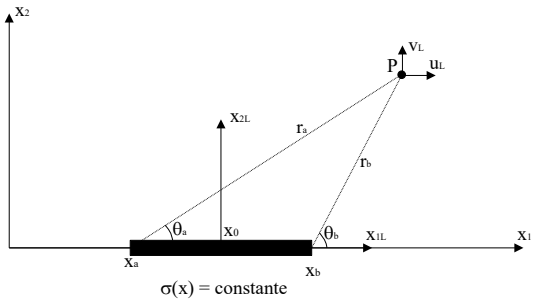


Figura 4.5 – Indução de velocidades de uma fonte de densidade uniforme sobre um ponto *P* genérico no sistema de coordenadas local. Fonte: Elaborado pelo autor.

A solução das integrais das Eqs. 4.26 e 4.27 fornece:

$$u_L = \frac{\sigma}{2\pi}\ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right) = \frac{\sigma}{4\pi}\ln\left(\frac{r_a^2}{r_b^2}\right) \tag{4.28}$$

$$v_L = \frac{\sigma}{2\pi}(\theta_b - \theta_a) \tag{4.29}$$

sendo:

$$\theta_k = \arctan\left(\frac{y}{x-x_k}\right), \qquad k = a,b \tag{4.30}$$

$$r_k = \sqrt{(x-x_k)^2+y^2}, \qquad k = a,b \tag{4.31}$$

As fontes , porém, são singulares em $y = 0$. Este desafio é contornado ao se aplicar um processo limite em $y \to 0^{\pm}$. Como visto na equação Eq. 4.29, quando $y \to 0^{\pm}$, $(\theta_b - \theta_a) \to \pm\pi$. Desta forma, pode-se definir a autoindução como:

$$v(x_0, 0^{\pm}) := \pm\frac{\sigma}{2} \tag{4.32}$$

Uma vez calculadas as velocidades, é necessário retorná-las ao referencial global antes de prosseguir com os cálculos.

Como o propósito de gerar fontes é anular a velocidade normal em cada ponto de controle, deve-se resolver um sistema linear para se determinar as intensidades das fontes em cada painel. Este sistema é representado escrito como $[\texttt{COUPS}]\{\sigma\} = \{\texttt{RHSS}\}$, ou então, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0,5 & K_{12}^s & K_{13}^s & \dots & K_{1mb}^s \\ K_{21}^s & 0,5 & K_{23}^s & \dots & K_{2mb}^s \\ K_{31}^s & K_{32}^s & 0,5 & \dots & K_{3mb}^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{mb1}^s & K_{mb2}^s & K_{mb3}^s & \dots & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{mb} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} RHSS_1 \\ RHSS_2 \\ RHSS_3 \\ \vdots \\ RHSS_{mb} \end{Bmatrix} \tag{4.33}$$

onde K_{ij}^s é o termo da indução da j-ésima fonte no i-ésimo painel, caso a intensidade fosse unitária, formando a matriz de influência $[\texttt{COUPS}]$. A matriz $\{\texttt{RHSS}\}$ é a matriz do lado direito que armazena a influência do escoamento incidente e da nuvem de vórtices em cada painel, que será mostrado a seguir.

Sempre que vórtices discretos são gerados, é necessário recalcular a distribuição de fontes do corpo, uma vez que a antiga não é mais capaz de garantir a condição de impenetrabilidade. Sendo assim, o lado direito da Eq.4.33 muda a cada instante. A indução de velocidades de um vórtice discreto k (de coordenadas $x_k\hat{e}_1 + y_k\hat{e}_2$) no m-ésimo painel(de coordenadas $x_m\hat{e}_1 + y_m\hat{e}_2$) é a conhecida, já apresentada nas Eqs. 4.7 e 4.8. Esta velocidade induzida em cada painel é ainda somada da contribuição de cada painel sobre os demais, de acordo com as Eqs. 4.28 e 4.29.

No instante inicial, quando não há nuvem de vórtices discretos, o lado direito é calculado como:

$$RHSS_m = U_\infty \text{sen}(\beta_m) - V_\infty \cos(\beta_m) \tag{4.34}$$

Assim que ocorre a primeira geração, ele é calculado instantaneamente como:

$$RHSS_m = U_\infty \text{sen}(\beta_m) - V_\infty \cos(\beta_m) + \sum_{k=1}^{N} [u_{mk}\text{sen}(\beta_m) - v_{mk}\cos(\beta_m)] \tag{4.35}$$

4.5 A Influência da Nuvem de Vórtices Discretos

Como visto, a geração instantânea de vórtices discretos é necessária para anular a componente tangencial da velocidade induzida sobre o ponto de controle de cada painel a cada instante de tempo. Estes vórtices discretos são, então, advectados pela velocidade induzida pelo corpo, escoamento incidente e pela própria nuvem de vórtices. Esta última contribuição é a solução numérica da lei de Biot-Savart, e seu cálculo é implementado como apresentado nas Eqs. 4.7 e 4.8. Assim, a interação vórtice-vórtice, que calcula a velocidade em um vórtice discreto j a partir da contribuição de cada vórtice k da nuvem, é calculada, para as direções x_1 e x_2, como:

$$u_j = \sum_{k=1}^{N} u_{jk} \tag{4.36}$$

$$v_j = \sum_{k=1}^{N} v_{jk} \tag{4.37}$$

Como existem N vórtices discretos no domínio fluido e para cada um deles é necessário calcular a contribuição de cada um dos demais $N-1$ vórtices discretos, fica claro que esta etapa tem um custo computacional de $\mathcal{O}(N^2)$ e é um dos gargalos do MPT referente a tempo computacional. A nuvem de partículas de temperatura também advecta de acordo com a velocidade induzida pela nuvem de vórtices discretos. Desta forma, como são gerdas N partículas de cada tipo por instante de tempo, a indução vórtice-temperatura é igualmente onerosa computacionalmente. A redução do tempo computacional pode ser alcançada de diversos modos. Porém, neste trabalho, é usado o processamento paralelo por meio do OpenMP.

4.6 Solução da Advecção e Difusão

A solução das Equações de Navier-Stokes é resolvida com a proposta de Chorin [22], o algoritmo da separação da parte viscosa da ETV (*viscous-splitting algorithm*, em inglês). Este esquema permite que a Eq. 3.64 seja resolvida, desde que sejam considerados pequenos incrementos de tempo. O princípio é resolver separadamente a advecção e a difusão. Para a vorticidade, expressas pelas Eqs. 4.38 e 4.39

$$\frac{\mathrm{D}\bar{\omega}}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(1+\frac{\nu_T}{\nu}\right)\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x_i^2} \tag{4.39}$$

Devido às similaridades entre a ETV e a Equação da Energia, pode-se usar o mesmo algoritmo para resolver, separadamente, os deslocamentos advectivos(Eq. 4.40) e difusivos(Eq. 4.41) da nuvem de partículas de temperatura.

$$\frac{\mathrm{D}\bar{\theta}}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{RePr}}\left(1+\frac{\alpha_T}{\alpha}\right)\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i^2} \tag{4.41}$$

O efeito de convecção natural é considerado ao se resolver a Eq. 4.42, baseado no mesmo princípio do algoritmo de Chorin.

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_1}\hat{e}_2 \tag{4.42}$$

4.6.1 Esquema Advecção

A solução das Eqs. 4.38 e 4.40 apresenta a mesma forma, dada a similaridade. Existem diversos esquemas que permitem resolvê-las com diferentes erros. Neste trabalho é usado o esquema mais simples de solução, o método de Euler. Seja uma partícula j com posição $r_j(t)$ e velocidade $u_j(t)$. A nova posição é calculada como [65]:

$$r_j(t+\Delta t) = r_j(t) + u_j(t)\Delta t \tag{4.43}$$

onde Δt é o incremento de tempo da simulação. O termo $u_j(t)\Delta t$ será definido como o deslocamento advectivo da j-ésima partícula:

$$r_{advec_j}(t) = x_{advec_j}(t)\hat{e}_1 + y_{advec_j}(t)\hat{e}_2 \tag{4.44}$$

Como se pode observar na Eq, 4.43, o esquema é indiferente se a advecção é de um vórtice discreto ou partícula de temperatura. Assim, o mesmo esquema é utilizado para ambas as nuvens uma vez que se tenha a velocidade de cada partícula pela lei de Biot-Savart e demais contribuições.

4.6.2 Esquema de Difusão

A solução das equações de difusão, Eqs. 4.39 e 4.41, é feita considerando a viscosidade molecular (decaimento viscoso) e viscosidade turbulenta. Existem diversos algoritmos para simular tais efeitos, tal qual o Método de Avanço Randômico, o da Mudança da Intensidade da Partícula, o Método de Fishelov, Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice, o Método da Redistribuição, e o Método da Velocidade da Difusão [33].

Neste trabalho houve a necessidade de optar pelo Método de Avanço Randômico [22, 66] devido a sua simplicidade de implementação, precisão razoável e por não onerar excessivamente o tempo final de simulação numérica típica. Ao longo do desenvolvimento desta dissertação foram feitas tentativas de implementar o Método do Crescimento do Raio do Núcleo Modificado [18], mas o crescimento exponencial da população de partículas tornou a simulação inviável de ser executada. Mesmo assim foi possível realizar simulações utilizando o Método do Crescimento do Raio do Núcleo Modificado para o problema da dissipação de vórtices de ponta de asa nas imediações de uma superfície plana em diferentes configurações [56, 55, 54].

Nesta abordagem estatística da difusão, em analogia ao movimento browniano, cada vórtice discreto se desloca uma distância radial Δr_k^v e sofre um deslocamento angular $\Delta\Theta_k^v$ dados por:

$$\Delta r_k^v = \sqrt{\frac{4\Delta t}{\mathrm{Re}}\left(1+\mathrm{Re}\nu_T\right)\ln\left(\frac{1}{P}\right)} \tag{4.45}$$

$$\Delta\Theta_k^v = 2Q\pi \tag{4.46}$$

onde $P, Q \in [0,1]$ são números randômicos.

Analogamente, para as partículas de temperatura, o método é adaptado:

$$\Delta r_k^T = \sqrt{\frac{4\Delta t}{\mathrm{RePr}}\left(1+\mathrm{RePr}\alpha_T\right)\ln\left(\frac{1}{P}\right)} \tag{4.47}$$

$$\Delta\Theta_k^T = 2Q\pi \tag{4.48}$$

Após o cálculo destes valores, a posição da partícula recebe um incremento nas direções x_1 e x_2 como segue:

$$x_k(t+\Delta t)\hat{e}_1 = [x_k(t) + x_{advec_k}(t) + \Delta r_k \cos(\Delta\Theta_k)]\hat{e}_1 \tag{4.49}$$

$$y_k(t+\Delta t)\hat{e}_2 = [y_k(t) + y_{advec_k}(t) + \Delta r_k \mathrm{sen}(\Delta\Theta_k)]\hat{e}_2 \tag{4.50}$$

para vórtices discretos ou partículas de temperatura.

A implementação numérica dos cálculos de ν_T e α_T são feitos na Seção 4.8.

4.6.3 Cálculo dos efeitos de Convecção Natural

Diferente do esquema de Chorin [22], as equações modeladas neste trabalho apresentam um termo de convecção natural. Fundamentado no mesmo princípio da separação da parte viscosa da ETV, a equação responsável por este fenômeno é:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \mathrm{Ri}\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\hat{e}_2 \tag{4.51}$$

A Eq. 4.42 pode ser entendida como um efeito gerador de vorticidade a partir dos gradientes de temperatura. Deve-se, ainda, enfatizar que este gradiente ocorre exclusivamente na direção x_1. O modelo de solução é feito conforme proposto por Ogami [45]. O primeiro modelo propõe realizar um incremento na intensidade de vórtice discreto devido ao gradiente de temperatura na direção x_1, enquanto o segundo propõe a geração de dois vórtices discretos a partir de cada partícula de temperatura. Nesta dissertação é utilizado o primeiro modelo, no qual o incremento é dado por:

$$\Delta\Gamma_i = \mathrm{Ri}\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\Delta t \Delta A_i \tag{4.52}$$

onde $\Delta A_i = \pi\sigma_i^2$ é assumida como a área do i-ésimo vórtice discreto.

A derivada presente na Eq. 4.52 é resolvida por diferenças centradas para o i-ésimo vórtice discreto:

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right|_i = \frac{\theta_{i+1}-\theta_{i-1}}{2\Delta x_1} - \frac{\Delta x^2}{3!}\left.\frac{\partial^3 \theta}{\partial x_1^3}\right|_i - \frac{\Delta x^4}{5!}\frac{\partial^5 \theta}{\partial x^5} + \ldots \tag{4.53}$$

Truncando a Eq. 4.53 no primeiro termo, resulta em:

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right|_i = \frac{\theta_{i+1}-\theta_{i-1}}{2\Delta x_1} \tag{4.54}$$

onde $\Delta x_1 = \sigma_i$, $\theta_{i\pm1}$ são as temperaturas à direita(+) e esquerda(-) do centro do vórtice discreto i, distanciadas de $2\sigma_i$. A versão final implementada da Eq. 4.52 é:

$$\Delta\Gamma_i = \mathrm{Ri}\frac{\pi\sigma_i}{2}\Delta t(\theta_{i+1}-\theta_{i-1}) \tag{4.55}$$

4.7 Cálculo dos Carregamentos Fluidodinâmicos Atuantes sobre a Superfície do Corpo

A dedução das equações que realizam o cálculo das pressões já foi apresentado na Seção 3.9. Neste momento será mostrada a implementação numérica dessas equações, como visto em [67]. A Eq. 3.105 assume a seguinte forma:

$$\xi\tilde{Y}_i + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1,j\neq i}^{mb}\frac{n_{x_j}(x_j-x_i)+n_{y_j}(y_j-y_i)}{(x_j-xi_i)^2+(y_j-y_i)^2}\tilde{Y}_j\Delta S_j = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\frac{v_j(x_j-x_i)-u_j(y_j-y_i)}{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2}\Delta\Gamma_j\kappa_j + \\ + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1,j\neq i}^{mb}\frac{n_{y_j}(x_j-x_i)+n_{x_j}(y_j-y_i)}{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2}\Delta S_j\gamma_j \tag{4.56}$$

sendo *mb* o número de painéis, ΔS_j o comprimento de cada painel plano, N o número de vórtices discretos de Lamb presentes no domínio no instante do cálculo, γ_j é a densidade de vórtices nascentes distribuída sobre o j-ésimo painel, calculada como:

$$\gamma_j = \frac{\Delta\Gamma_j}{\Delta S_j} \tag{4.57}$$

e κ_j é um fator de amortecimento para os vórtices discretos de Lamb, responsável por evitar comportamento singular caso estejam muito próximos ao ponto de controle i (análogo à auto-indução do vórtice potencial), calculado como:

$$\kappa_j = 1 - \exp\left(-\frac{r_{ji}}{\sigma_j^2}\right) \tag{4.58}$$

A Eq. 4.56 pode ser escrita em notação matricial, mantendo a mesma estrutura dos termos dos lados esquerdo e direito:

$$\begin{bmatrix} 0,5 & K_{12}^p & K_{13}^p & \dots & K_{1mb}^p \\ K_{21}^p & 0,5 & K_{23}^p & \dots & K_{2mb}^p \\ K_{31}^p & K_{32}^p & 0,5 & \dots & K_{3mb}^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{mb1}^p & K_{mb2}^p & K_{mb3}^p & \dots & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \tilde{Y}_3 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{mb} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} RHSP_1 \\ RHSP_2 \\ RHSP_3 \\ \vdots \\ RHSP_{mb} \end{Bmatrix} \tag{4.59}$$

que recebe a seguinte nomenclatura:

$$[\texttt{COUPP}]\{\tilde{Y}\} = \{\texttt{RHSP}\} \tag{4.60}$$

Destaca-se que a autoindução de cada painel vale 0,5, de acordo com a definição de ξ na Eq. 3.88.

A solução da Eq. 4.59 é obtida numericamente pelo método da Eliminação de Gauss com Pivoteamento. Assim, descobre-se o valor dos $\tilde{Y}$, permitindo o cálculo do coeficiente de pressão, C_p:

$$C_{p_i} = 2\tilde{Y} + 1 \tag{4.61}$$

Os coeficientes de arrasto e sustentação são obtidos a cada instante a partir da Eq. 4.61 do seguinte modo:

$$C_{d_i} = \sum_{j=1}^{mb} [C_{p_j} \text{sen}(\beta_j) \Delta S_j] \tag{4.62}$$

$$C_{l_i} = \sum_{j=1}^{mb} [-C_{p_j} \cos(\beta_j) \Delta S_j] \tag{4.63}$$

4.8 Modelo de Turbulência

As seções anteriores mostraram a implementação do MPT sem modelagem de turbulência e sem modelo de rugosidade superficial. Nas seções 4.8 e 4.9 são apresentadas as ideias principais para a inclusão destes dois efeitos importantes no MPT. A modelagem de turbulência bidimensional adotada neste trabalho consiste em uma adaptação da FEVO2 de Métais e Lesieur [64] para um escoamento bidimensional, apresentada por Alcântara Pereira [11].

Esta adaptação consiste em (i) calcular as flutuações turbulentas em torno de uma coroa circular de raio interno $r_{int_i} = 0,1\sigma_i$ e externo $r_{ext_i} = (sm)(\sigma_i)$, sendo σ_i o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb no qual será calculada a viscosidade turbulenta e *sm* um parâmetro aferido estatisticamente. O esquema é mostrado na Fig. 4.6, na qual, a partir do vórtice discreto i (de borda espessa), delimita-se a coroa circular. A necessidade de se comparar com uma coroa ao invés de um círculo surge da analogia com a formulação original, na qual não são feitas comparações em zonas muito próximas ao ponto de interesse. A adaptação (ii) consiste em calcular as flutuações considerando os vórtices discretos localizados no interior desta coroa ao invés de pontos físicos do domínio, tornando o modelo puramente lagrangiano.

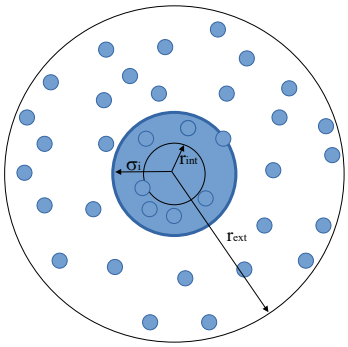


Figura 4.6 – Adaptação do modelo de turbulência ao MPT. Fonte: O Autor

O cálculo numérico da viscosidade turbulenta é feito por:

$$\nu_{T_i} = 0,105 C_K^{-3/2} \sigma_i \sqrt{\bar{F}_{2_i}} \tag{4.64}$$

onde a FEVO2 para o i-ésimo vórtice é calculada como:

$$\bar{F}_{2_i} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\|u_i - u_j\|^2 \left(\frac{\sigma_i}{r_{ji}} \right)^{2/3} \right] \tag{4.65}$$

sendo N o número total de vórtices discretos na coroa circular e r_{ji} a distância entre os vórtices i e j, sendo j pertencente à área delimitada pela coroa. O termo $\left(\frac{\sigma_i}{r_{ji}}\right)^{2/3}$ é necessário ao se considerar a distribuição desigual dos vórtices discretos no interior da coroa, que não é o que ocorre quando estão todos equidistantes (a uma distância igual ao raio da esfera) na concepção tridimensional[11]. Após obtido o valor da viscosidade turbulenta, este valor é levado em

conta na etapa do cálculo de difusão, detalhado na Subseção 4.6.2, pois este processo é um dos responsáveis pela dissipação de energia.

O cálculo da viscosidade turbulenta é feito a cada instante e para cada vórtice discreto da nuvem. Isto, a princípio, gera um problema de tamanho $\mathcal{O}(N^2)$, tal qual a interação vórtice-vórtice e cálculo da força de empuxo. Andrade [13] propôs um mecanismo acelerador para o cálculo desta etapa que utiliza uma estrutura de zonas na forma de caixas retangulares, como ilustrado na Fig. 4.7. Dado que a turbulência é um fenômeno local, esta estrutura permite comparar o vórtice discreto de interesse apenas com os que estão na mesma caixa ou caixas vizinhas, o que reduz expressivamente o tempo de cálculo desta etapa. Por exemplo, na Fig. 4.7, a caixa $(2,3)$ irá comparar distâncias apenas entre os vórtices contidos nela e os pertencentes às caixas em cinza.

Figura 4.7 – Estrutura de caixas para a aceleração do cálculo da viscosidade turbulenta. Fonte: Adaptado pelo autor de [13].

Uma das contribuições desta dissertação é modelar a viscosidade térmica turbulenta para as partículas de temperatura. Neste ponto, com a apresentação da implementação para os vórtices discretos feita, a adaptação do modelo para a difusividade térmica turbulenta é análoga.

Entretanto, duas modificações devem ser feitas, isto é, (i) No cálculo da FEVO2, a flutuação de velocidades em torno de cada partícula de temperatura deve ser feita considerando os *vórtices discretos* dentro das coroas. Isto é necessário, uma vez que o cálculo de α_T parte do valor de ν_T, do conceito do número de Prandtl turbulento. (ii) O cálculo da difusividade térmica turbulenta é feito considerando o número de Prandtl turbulento. Assim, as equações se tornam, para a i-ésima partícula de temperatura:

$$\alpha_{T_i} = \frac{1}{\mathrm{Pr_T}} 0,105 C_K^{-3/2} \sigma_i \sqrt{\bar{F}_{2_i}} \tag{4.66}$$

onde a FEVO2 para a i-ésima partícula de temperatura é calculada como:

$$\bar{F}_{2_i}(x_i',t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\|u_i(x_i',t) - u_j(x_i'+b_i,t)\|^2 \left(\frac{\sigma_i}{r_{ji}} \right)^{2/3} \right] \tag{4.67}$$

A diferença computacional que surge neste instante é a necessidade de se ter o controle das velocidades tanto das partículas de temperatura quanto dos vórtices discretos. Deve-se notar que o contador da Eq. 4.67 ainda considera os N vórtices discretos contidos na coroa de raio interno $r_{int_i} = 0,1\sigma_i$ e raio externo $r_{ext_i} = (sm)(\sigma_i)$ e as velocidades do j-ésimo vórtice para

cada partícula de temperatura i. Uma vez que as simulações do MPT são naturalmente mais custosas do que o mesmo problema simulado apenas com vórtices discretos, o cálculo direto da turbulência para as partículas de temperatura não é de interesse, por ser de tamanho $\mathcal{O}(N^2)$. Para isto, nesta dissertação também foi adaptada a estrutura de caixas [13] para a nuvem de temperatura.

O uso da mesma estrutura de caixas para vórtices e partículas de temperatura não é possível do modo que foram concebidas, uma vez que o cálculo da difusividade térmica turbulenta requer informações de ambas as nuvens simuladas. A fim de resolver esta barreira, criou-se uma nova estrutura de caixas que contém apenas partículas de temperatura, de modo que cada caixa $(i,j)_T$ de temperatura esteja nas mesmas coordenadas que a caixa correspondente de vórtices, $(i,j)_V$. Um dos problemas que surgem ao usar este método é o aumento da exigência de memória da máquina, que é contornado pelo uso de alocação dinâmica de memória para as caixas e seus contadores.

4.9 Modelo de Rugosidade Superficial

Nesta seção será apresentado o modelo de rugosidade superficial implementado no código numérico para as nuvens de vórtices discretos e partículas de temperatura. A modelagem deste efeito permite que sejam notadas variações do número de Strouhal e coeficiente de arrasto [12].

4.9.1 Modelagem para a Nuvem de Vórtices Discretos

O modelo de rugosidade superficial utilizado nesta Dissertação de Mestrado foi implementado por Bimbato[12] para o MVD e é viabilizado pelo uso da simulação LES de turbulência. Este esquema parte da ideia de que uma parede hidraulicamente rugosa favorece o desenvolvimento da turbulência local, permitindo que a Eq. 3.48 seja utilizada.

Uma característica deste modelo é que a superfície discretizada do corpo não precisa apresentar protuberâncias geométricas que constituem a rugosidade superficial.

Em cada painel, quando ocorre a geração de vorticidade, utiliza-se a FEVO2 para calcular a influência de NR pontos rugosos posicionados em uma semi-circunferência de raio $b = 2\varepsilon - \sigma_i$, indicados na Fig. 4.2. Este cálculo é inserido na simulação por meio do aumento do raio do núcleo do vórtice discreto nascente, como mostrado na Fig.4.8.

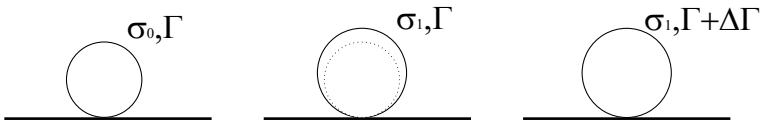


Figura 4.8 – Incremento do raio do núcleo do vórtice discreto nascente por efeito rugoso.Fonte: Adaptado de Moraes [68].

A adaptação do cálculo da viscosidade turbulenta para a modelagem dos efeitos de rugosidade superficial é feita como segue:

$$\bar{F}_{2r_i}(x_i',t) = \frac{1}{NR}\sum_{j=1}^{NR}\left[\|u_i(x_i',t) - u_j(x_i'+b_i,t)\|^2(1+\varepsilon)\right] \tag{4.68}$$

onde x_i' é o ponto onde será calculada a viscosidade turbulenta (isto é, o ponto de desprendimento i), considerando as velocidades induzidas em cada um dos NR pontos rugosos (pelas contribuições do escoamento incidente, nuvem de vórtices discretos e painéis), ε é a altura média de rugosidade superficial e $NR = 21$ é a quantidade de pontos rugosos dispostos sobre cada semicircunferência, a uma distância b do ponto de desprendimento correspondente. O valor de foi usado por Bimbato [12] a fim de obter um valor médio para a flutuação de velocidades no ponto de desprendimento. O termo $(1+\varepsilon)$ representa um incremento de energia cinética do escoamento devido à injeção de quantidade de movimento devida à rugosidade superficial. Destaca-se, ainda, o desaparecimento do termo de correção mostrado nas Eqs. 4.65 e 4.67, posto que os pontos rugosos apresentam distribuição fixa e uniforme ao longo do semi-círculo que os dispõe. A viscosidade turbulenta é então calculada como:

$$\nu_{Tr_i}(x_i',t) = 0,105C_K^{-3/2}\sigma_{0i}\sqrt{\bar{F}_{2r_i}(x_i',t)} \tag{4.69}$$

sendo σ_{0i} o raio do núcleo nascente caso não houvesse modelagem de efeitos de rugosidade superifical (chamado de modo breve de raio do núcleo "liso"), de modo que este vórtice nascente tangencia o painel correspondende no ponto de controle.

Munidos da viscosidade turbulenta local, o incremento no raio do núcleo do vórtice discreto nascente é feito de acordo com a Eq. 4.70:

$$\sigma_{r_i}(t) = 1,41421\sqrt{\frac{\Delta t}{\mathrm{Re}}(1+\nu_{Tr_i}\mathrm{Re})} \tag{4.70}$$

onde o valor $1,41421$ foi obtido por meio de aferições de coeficientes de arrasto e sustentação feitas em [6].

Uma vez gerada a nova distribuição de vórtices discretos com os novos raios do núcleo, deve-se resolver a Eq. 4.6 para se obter o valor das intensidades $\Delta\Gamma_i$ que satisfazem a condição de escorregamento nulo. A matriz $[\mathtt{COUPV}]$, entretanto, deve ser alterada, posto que o ponto de desprendimento de cada vórtice discreto foi alterado ao receber o incremento do raio do núcleo devido aos efeitos rugosos, dado que o vórtice nascente deve tangenciar o painel. Desta forma, a intensidade dos vórtices discretos de Lamb rugosos, $\Delta\Gamma_{r_i}$, sofre seguinte variação:

$$\Delta\Gamma_{r_i} = \Delta\Gamma_{liso_i} + \delta\Gamma_{r_i} \tag{4.71}$$

no qual o acréscimo $\delta\Gamma_{r_i}$ interfere com os efeitos inerciais dentro da camada limite, alterando a transferência de quantidade de movimento e reduzindo o valor do coeficiente de arrasto [12].

4.9.2 Modelagem para a Nuvem de Partículas de Temperatura

Nesta subseção apresenta-se a modelagem dos efeitos de rugosidade superficial para a geração de partículas de temperatura. Esta modelagem é uma extensão do modelo original de Bimbato [12], apenas para a geração de vórtices discretos de Lamb, tendo em mente o mesmo princípio de que uma parede hidraulicamente rugosa atuará injetando quantidade de movimento no interior da camada limite térmica.

Sabe-se da transferência de calor que a turbulência atua aumentando a taxa de mistura e difusão. Isto permite entender que uma partícula de temperatura irá trocar calor mais rapidamente com o meio quando presente em uma zona de elevada atividade turbulenta, como a camada limite formada em uma parede hidraulicamente rugosa. Assim, é natural que esta modelagem será feita pelo incremento da intensidade destas partículas de modo similar à Eq. 4.71:

$$\Delta Q_{r_i} = \Delta Q_{liso_i} + \delta Q_{r_i} \tag{4.72}$$

onde, analogamente, δQ_{r_i} é o incremento de intensidade da partícula de temperatura devido aos efeitos de rugosidade superficial, Q_{liso_i} é a intensidade da partícula vinda da lei de Fourier modificada (Eq. 4.18) e ΔQ_{r_i} será a nova intensidade.

De modo similar ao que é feito com vórtices discretos, são gerados $NR = 21$ pontos rugosos ao longo de uma semicircunferência de raio $b = 2\varepsilon - \sigma_{T_i}$ centrada nos pontos de desprendimento das partículas de temperatura, como mostrado na Fig. 4.2. A função estrutura de velocidades é dada por:

$$\bar{F}_{2r_i}(x_i',t) = \frac{1}{NR}\sum_{j=1}^{NR}\left[\|u_i(x_i',t) - u_j(x_i'+b_i,t)\|^2(1+\varepsilon)\right] \tag{4.73}$$

Observa-se que a Eq. 4.73 é idêntica à Eq. 4.68, porém, neste caso, o ponto x_i' se refere ao ponto de desprendimento da partícula de temperatura (lisa), que pode ser distinto do mesmo ponto para vórtices discretos, uma vez que os raios dos núcleos iniciais não são necessariamente os mesmos. Para esta Dissertação de Mestrado, entretanto, os raios do núcleo foram assumidos como os mesmos. De modo similar à Eq. 4.69, a difusividade térmica local é calculada como:

$$\alpha_{Tr_i}(x_i',t) = \frac{1}{\mathrm{Pr_T}} 0,105 C_K^{-3/2} \sigma_{0i} \sqrt{\bar{F}_{2r_i}(x_i',t)} \tag{4.74}$$

Desta forma, os efeitos de rugosidade superficial podem ser modelados pelo incremento do raio do núcleo da partícula de temperatura é proposto da seguinte forma, em analogia à Eq. 4.70:

$$\sigma_{r_i}^T = 1,41421\sqrt{\frac{\Delta t}{\mathrm{RePr}}(1+\alpha_{Tr_i}\mathrm{RePr})} \tag{4.75}$$

onde $\sigma_{r_i}^T$ é o novo raio do núcleo da partícula de temperatura. Assim, a nova intensidade é obtida após resolver a seguinte equação:

$$\Delta Q_j = \frac{(1+\alpha_{Tr_j}\mathrm{RePr})}{\mathrm{RePr}} \frac{T_w - T_j}{T_w - T_\infty} \frac{\Delta s_j \Delta t}{\sigma_{r_i}^T}. \tag{4.76}$$

Observa-se, nitidamente, que a Eq. 4.76 considera um aumento de intensidade da partícula de temperatura pela ação dos efeitos rugosos, acelerando as trocas turbulentas e, consequentemente, a difusão térmica.

4.10 Implementação Computacional

Nesta seção é apresentada a sequência do algoritmo desenvolvido para a implementação do código computacional adaptado para esta Dissertação de Mestrado. Outros detalhes encontram-se no Apêndice C.

1. Discretização da superfície do cilindro em painéis planos e cálculo das grandezas de interesse (pontos extremos, de desprendimento e de controle, comprimento dos painéis e seus ângulos);
2. Cálculo dos *NR* pontos rugosos em cada painel plano;
3. Cálculo das matrizes de influência de fontes, vórtices discretos e pressão, assumindo inicialmente superfície hidraulicamente lisa ([COUPS],[COUPV] e [COUPP], respectivamente);
4. Cálculo do vetor lado direito fontes, {RHSS};
5. Cálculo da densidade das fontes geradas para representar o corpo;
6. Cálculo do vetor lado direito vórtices, {RHSV};
7. Cálculo da intensidade dos vórtices discretos de Lamb nascentes (sem efeito de rugosidade superficial);
8. Processo iterativo (10 iterações) para garantir a condição de aderência;
9. Cálculo da velocidade total induzida sobre os pontos de desprendimento e *NR* pontos rugosos;
10. Cálculo da viscosidade turbulenta local em cada ponto de desprendimento;
11. Cálculo do incremento do raio do núcleo do vórtice discreto devido aos efeitos de rugosidade superficial;
12. Cálculo da convergência da condição de aderência (para parede hidraulicamente rugosa);
13. Cálculo da intensidade dos vórtices discretos de Lamb, considerando efeitos de rugosidade superficial;
14. Cálculo da velocidade total de cada vórtice, induzida pelo escoamento incidente, fontes e nuvem de vórtices;

15. Cálculo do vetor lado direito pressão,{RHSP};
16. Cálculo do trabalho específico, $\tilde{Y}$, por eliminação de Gauss e das cargas fluidodinâmicas integradas;
17. Cálculo das cargas fluidodinâmicas atuantes;
18. Geração das partículas de temperatura pela Lei de Fourier modificada;
19. Cálculo do incremento do raio do núcleo da partícula de temperatura devido aos efeitos de rugosidade superficial;
20. Cálculo da intensidade da partícula de temperatura nascente, considerando os efeitos de rugosidade superficial;
21. Cálculo da velocidade total de cada partícula de temperatura devido ao escoamento incidente, fontes de densidade uniforme e nuvem de vórtices discretos;
22. Cálculo da viscosidade turbulenta associada a cada vórtice discreto de Lamb e partícula de temperatura;
23. Advecção da nuvem de vórtices discretos de Lamb e da nuvem de partículas de temperatura;
24. Difusão da nuvem de vórtices discretos de Lamb e da nuvem de partículas de temperatura, considerando as viscosidades e difusividades turbulentas;
25. Reflexão dos vórtices discretos e partículas de temperatura que, porventura, se deslocaram para o interior do corpo;
26. Cálculo dos efeitos de empuxo causados pelas partículas de temperatura sobre os vórtices discretos de Lamb;
27. Geração dos arquivos de saída com as grandezas de interesse;
28. Cálculo da temperatura dos pontos de desprendimento devido à nuvem de partículas de temperatura;
29. Cálculo da velocidade total induzida sobre cada ponto de controle devido ao escoamento incidente, nuvem de vórtices discretos de Lamb e painéis de fontes de densidade uniforme;
30. Cálculo do vetor lado direito vórtices, {RHSV} e cálculo da intensidade dos vórtices discretos de Lamb (lisos) que serão gerados no instante seguinte;
31. Caso o incremento de tempo não seja o último, avanço temporal de Δt;
32. Caso seja o último instante, cálculo das cargas fluidodinâmicas médias atuantes no corpo.

5 Resultados e Discussões

Este capítulo apresenta os resultados numéricos mais importantes obtidos durante o desenvolvimento da dissertação de mestrado. O capítulo inicialmente apresenta uma validação do Método dos Painéis, a fim de mostrar a sensibilidade do método e a possibilidade de aplicação para problemas de dinâmica dos fluidos. Em seguida, apresentam-se os resultados numéricos envolvendo principalmente combinação entre efeitos rugosos e transferência de calor por convecção mista; são incluídas discussões sobre valores numéricos, sensibilidade numérica e interpretações dos carregamentos fluidodinâmicos atuantes.

5.1 Validação da Metodologia

É interessante, antes de partir para a apresentação dos resultados numéricos mais importantes deste trabalho, demonstrar como algumas etapas cruciais do método numérico respondem individualmente. A Fig. 5.1 apresenta a trajetória de um vórtice discreto de Lamb isolado com intensidade $\Delta\Gamma_1 = 0,01$ posicionado no ponto $(-1,0;-0,1)$ e submetido a um escoamento incidente uniforme de magnitude unitária e incremento de tempo $\Delta t = 0,05$. O movimento advectivo se dá da esquerda para a direita, e a cada instante a posição do vórtice discreto é calculada considerando a influência do escoamento incidente e do corpo, esta última feita pelo Método de Painéis com distribuição uniforme de fontes. O avanço advectivo é calculado por meio do esquema de primeira ordem de Euler.

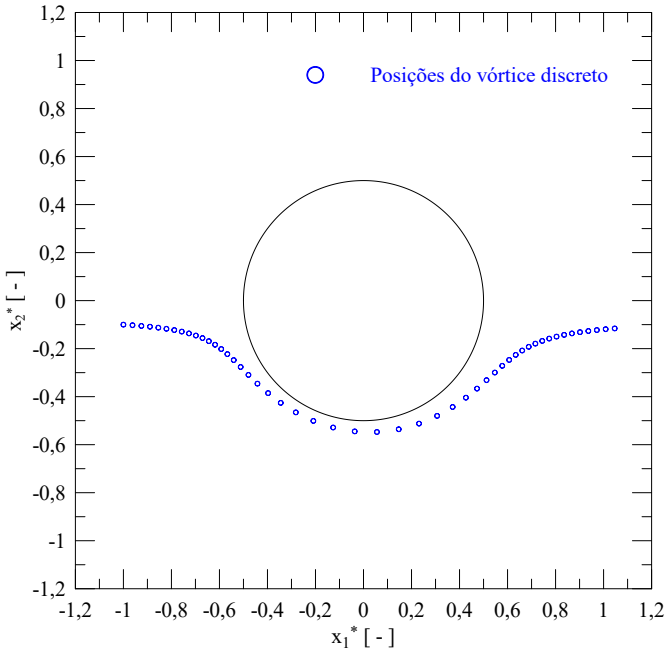


Figura 5.1 – Trajetória de uma partícula apenas com a influência do Método de Painéis. $mb = 300, \Gamma_1 = 0,01, \sigma_1 = 0,001$ Fonte: o Autor

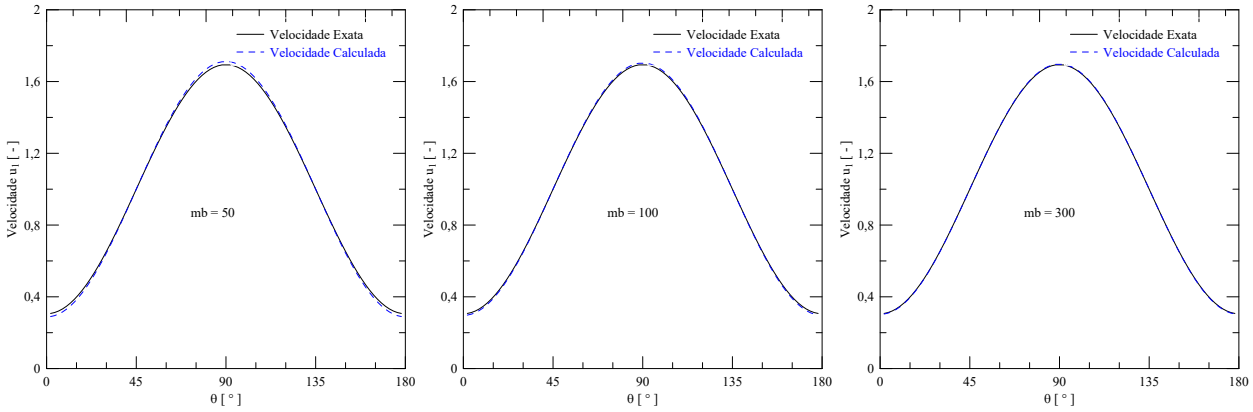
Observa-se que a trajetória do vórtice discreto é coerente com a prevista pelo escoamento potencial, que é utilizada para formular o Método dos Painéis. É possível observar que nas vizinhanças da posição $x_1^* = 0$ a velocidade é mais alta do que nas demais posições, devido ao estreitamento das linhas de corrente nesta região causado pela influência do corpo. A consideração de efeitos viscosos é feita em uma etapa subsequente de geração de vórtices discretos na superfície do corpo a cada instante de tempo, não feita neste caso didático que visa mostrar como a representação do corpo exclusivamente por painéis responderia a um escoamento. A partir desta simulação, torna-se claro que o Método dos Painéis, uma ferramenta da teoria potencial, pode ser incorporada ao Método de Partículas de Temperatura para representar a contribuição do corpo no cálculo do campo de velocidades induzido sobre a nuvem de partículas de temperatura. A grande vantagem do Método dos Painéis é que qualquer superfície de forma conhecida pode ser utilizada e discretizada em painéis; a desvantagem é que as condições de contorno são verificadas apenas sobre o ponto de controle de cada painel.

É de interesse também selecionar um número apropriado de painéis a fim de obter uma representação fiel da resposta do modelo numérico em relação aos valores teóricos. Um cilindro de seção circular pode ser representado pela teoria potencial com o auxílio do Princípio da Superposição Linear ao se utilizar a sobreposição de um escoamento uniforme, de uma fonte pontual e de um sumidouro pontual, estes dois últimos próximos de modo infinitesimal a origem [10]. Assim, consegue-se predizer pela teoria potencial as componentes u_1 e u_2 do vetor velocidade teórica (solução exata) induzidas sobre qualquer ponto do domínio fluido pela superposição de um escoamento uniforme e de um cilindro de seção circular, isto é:

$$W(Z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}F(Z) = u_1 - iu_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\left(U\left(Z + \frac{r_0^2}{Z}\right)\right) \tag{5.1}$$

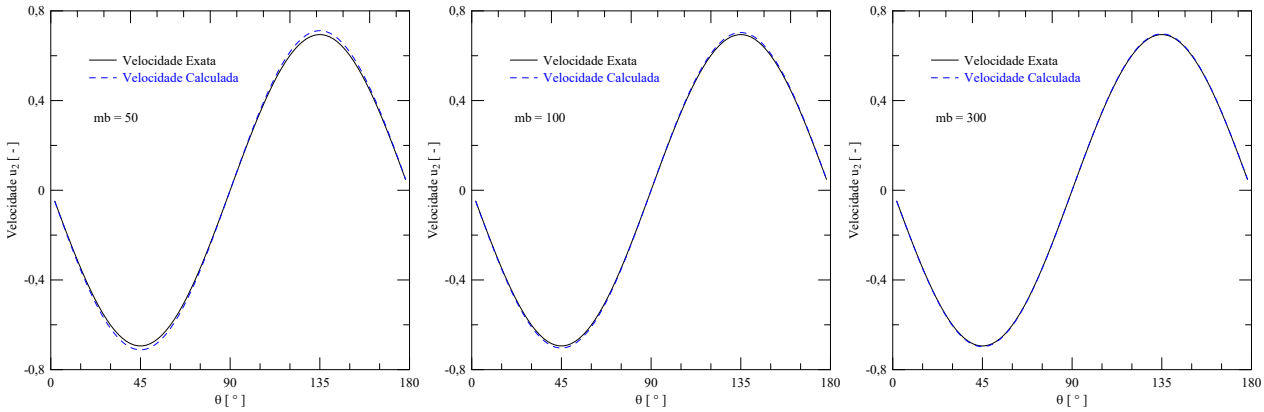
onde $F(Z)$ e $W(Z)$ representam a função potencial complexo e a velocidade complexa conjugada, respectivamente; r_0 corresponde ao raio do cilindro circular; U corresponde à velocidade do escoamento incidente com ângulo de ataque igual a zero e $i = \sqrt{-1}$. Estes resultados são apresentados nas Figs. 5.2 e 5.3, onde θ representa o ângulo medido a partir do bordo de ataque do cilindro circular.

Observa-se que quanto maior o número de painéis, menor o erro entre o modelo e o valor teórico para as velocidades na superfície do cilindro. Para mb = 300 o erro relativo médio é de cerca de 0,5%, mostrando que esta discretização já é suficiente para a representação do corpo, veja as Tabs. 5.1 e 5.2. Um refinamento adicional reduziria os erros, no entanto não seria necessário pela rápida convergência do Método dos Painéis. No caso de uma simulação numérica com formação das camadas limites hidrodinâmica e térmica tornar-se-ia necessário um grande número de avanços no tempo para os desenvolvimentos das esteiras de vórtices e de calor, o que fica impedido pela infraestrutura computacional disponível. A representação numérica mais precisa do corpo pelo Método dos Painéis é parte importante de uma simulação numérica típica usando o MPT. Com esta representação resolvida, podem ser geradas partículas



(a) mb = 50 painéis (b) mb = 100 painéis (c) mb = 300 painéis

Figura 5.2 – Comparação entre a velocidade u_1 calculada pela teoria potencial (solução exata) e pelo Método de Painéis (solução numérica) para um cilindro circular com superfície discretizada em diferentes números de painéis mb. Fonte: O Autor.



(a) mb = 50 painéis (b) mb = 100 painéis (c) mb = 300 painéis

Figura 5.3 – Comparação entre a velocidade u_2 calculada pela teoria potencial (solução exata) e pelo Método de Painéis (solução numérica) para um cilindro circular com superfície discretizada em diferentes números de painéis mb. Fonte: O Autor.

Tabela 5.1 – Erro relativo entre a velocidade u_1 calculada pela teoria potencial (solução exata) e pelo Método dos Painéis (solução numérica) da discretização do corpo em mb painéis. Ângulo medido em relação ao bordo de ataque. Fonte: O autor.

θ	mb = 50	mb = 100	mb = 300
0°	5,67%	2,98%	1,02%
45°	0,06%	0,03%	0,01%
90°	1,03%	0,54%	0,19%
135°	0,06%	0,03%	0,01%
180°	5,67%	2,98%	1,02%

(vórtices discretos de Lamb e partículas de temperatura, nesta dissertação) que são acompanhadas individualmente. O movimento destas partículas é simulado em duas etapas: uma parcela corresponde ao mecanismo da advecção da vorticidade e do calor, e a outra parcela corresponde ao mecanismo de difusão da vorticidade e do calor.

Tabela 5.2 – Erro relativo entre a velocidade u_2 calculada pela teoria potencial (solução exata) e pelo Método dos Painéis (solução numérica) da discretização do corpo em mb painéis. Ângulo medido em relação ao bordo de ataque. Fonte: O autor.

θ	mb = 50	mb = 100	mb = 300
0°	2,52%	1,32%	0,45%
45°	2,51%	1,32%	0,45%
90°	2,51%	1,32%	0,45%
135°	2,51%	1,32%	0,45%
180°	2,52%	1,32%	0,45%

A advecção é resolvida neste trabalho pelo esquema de avanço de Euler, um método de primeira ordem de fácil implementação e precisão aceitável. Sua validação para o método é feita por um problema simples no qual são colocados dois vórtices discretos de Lamb a uma distância adimensional 2,0 um do outro e submetidos ao movimento de advecção exclusivamente devido à influência de um sobre o outro, até que o vórtice superior tenha uma posição na qual $x_1 < 0$. Observe que se fossem utilizadas duas partículas de temperatura, então elas deveriam estar sobrepostas aos dois vórtices discretos para serem advectadas por eles, uma vez que partículas de temperatura não induzem velocidade sobre o domínio fluido, mas sim induzem temperatura (veja no Apêndice B). Este problema possui uma solução exata (idealizada) para a trajetória dos dois vórtices discretos, que é representada por uma circunferência de raio unitário. Ambos os vórtices discretos apresentam intensidade $\Delta\Gamma = +1,0$, isto é, o sentido de giro da trajetória será horário. O incremento de tempo é o mesmo das simulações deste trabalho, $\Delta t = 0,05$. A trajetória dos dois vórtices discretos está mostrada na Fig. 5.4.

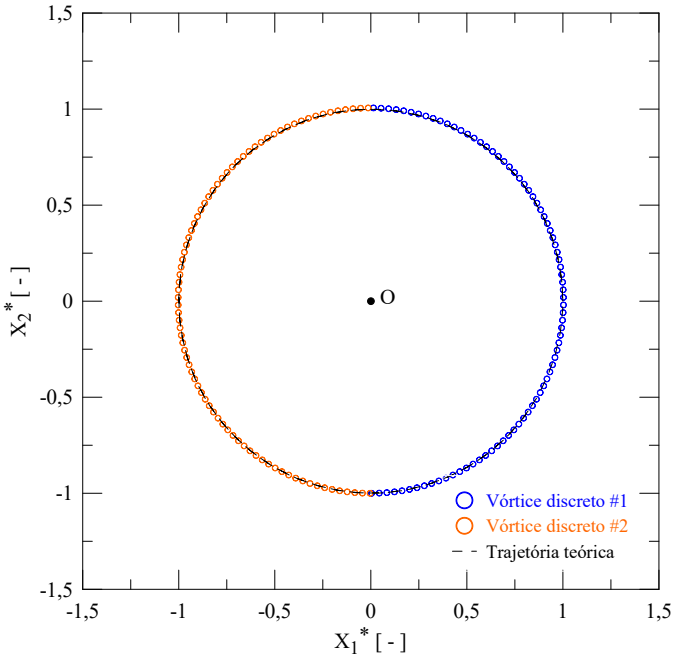


Figura 5.4 – Trajetória de dois vórtices discretos de intensidade unitária submetidos exclusivamente a indução um do outro. Fonte: o Autor

Considere que um vórtice discreto esteja inicialmente posicionado sobre um ponto A e outro sobre um ponto B. Assim, determina-se o ponto onde o vórtice discreto A (e o vórtice discreto B) cruza o eixo vertical pela primeira vez. Neste análise considera-se que r1 e r2 definem os raios das circunferências onde cada vórtice discreto localiza-se imediatamente antes e imediatamente depois de ultrapassar o eixo vertical. E o raio onde cada vórtice discreto cruza o eixo vertical pela primeira vez é calculado como a semissoma de r1 e r2. Com a finalidade de analisar a precisão do algoritmo utilizado para simular o mecanismo da advecção dos dois vórtices discretos considera-se a definição de seguinte função erro:

$$E = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{Z} (\Delta P_j)^2}}{Z} \tag{5.2}$$

onde Z é o número total de vórtices discretos presentes no escoamento e ΔP_j é a distância entre a posição ocupada pelo vórtice discreto após sofrer o movimento advectivo (no instante considerado) e a posição teoricamente correta para localização do mesmo vórtice discreto.

Em seguida, define-se o erro relativo através da seguinte equação:

$$E_r = \frac{E}{b} \tag{5.3}$$

onde b representa um comprimento característico.

O erro encontrado para a posição final de cada vórtice discreto em relação à circunferência de raio unitário foi de 0,62%, e a simulação precisou de 795 incrementos de tempo até os dois vórtices discretos atingirem a posição final. Assim, conclui-se que o esquema de avanço de Euler, apesar de sua simplicidade e baixa ordem, já se mostra suficiente para este trabalho, que utiliza modelagem de turbulência do tipo LES viabilizando o modelo de rugosidade superficial para injetar quantidade de movimento nas camadas limites hidrodinâmica e térmica formadas ao redor da superfície do cilindro circular. A fim de obter-se resultados mais precisos ao longo da marcha temporal, é de interesse implementar métodos de ordem superior, como os de Adams-Bashforth de ordem dois ou três, ou os de Runge-Kutta também de ordem dois ou três, este com o benefício de permitir simular incrementos de tempo maiores com menos esforço computacional.

Como já mencionado, esta dissertação utiliza o Método de Partículas de Temperatura, então, além da nuvem de vórtices discretos, é gerada uma nuvem composta por partículas de temperatura que recebem indução de velocidade dos vórtices discretos. Logo, caso esses elementos fossem colocados na mesma posição inicial dos vórtices discretos de Lamb, suas trajetórias seriam a mesma circunferência.

A fim de validar o esquema de difusão, o Método de Avanço Randômico, utiliza-se um problema de difusão radial, no qual, no instante inicial, o problema é inicializado com $Z = 6000$ vórtices discretos de Lamb sobrepostos na origem de um sistema cartesiano. Estes vórtices discretos são difundidos pelo Método de Avanço Randômico em 20 incrementos de tempo de $\Delta t = 0,05$ cada.

A solução da distribuição de vorticidade de um vórtice discreto de intensidade $\Delta\Gamma$ é conhecida (veja o Apêndice A):

$$\omega(r,t) = \frac{\Delta\Gamma}{\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \tag{5.4}$$

Escolhe-se inicialmente o valor do raio para o qual será estudada a difusão radial. Neste caso, adotou-se $r = 6,0$. Em seguida, divide-se este círculo em $N = 20$ coroas radiais que serão utilizadas para calcular a distribuição de vorticidade em cada valor *Root Mean Square* (RMS) destas coroas. A distribuição numérica é feita assumindo vórtices de intensidade $1/Z$. Desta forma a vorticidade em cada coroa é calculada de acordo com a quantidade n de vórtices discretos em cada coroa como segue:

$$\omega_{r-(r+\Delta r)} = \frac{n}{Z\pi[(r+\Delta r)^2 - r^2]} \tag{5.5}$$

A Figura 5.5 mostra a distribuição de vorticidade no instante final da simulação. utilizando este método.

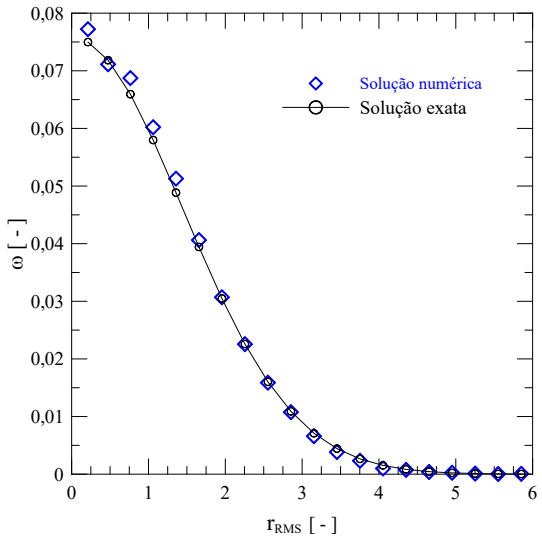
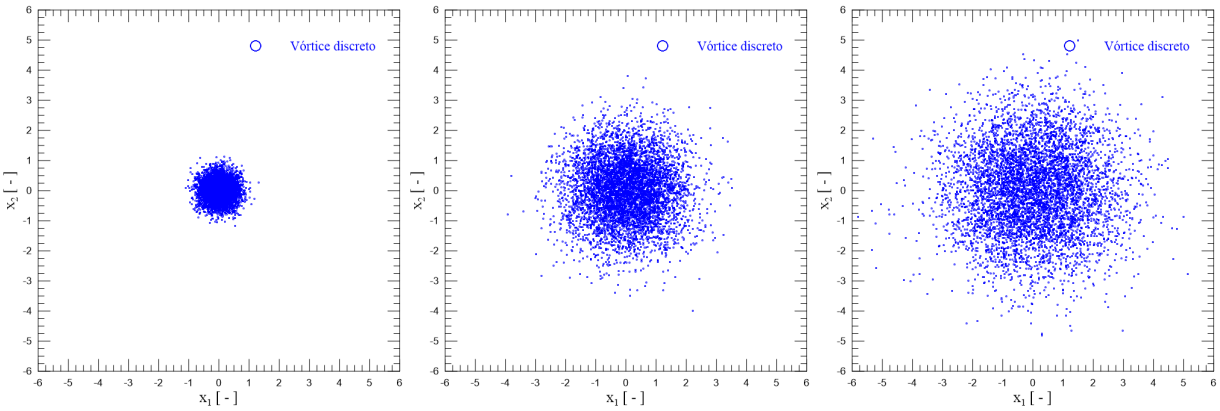


Figura 5.5 – Comparação entre a distribuição exata e numérica da vorticidade de vórtices discretos submetidos ao Método de Avanço Randômico em $t = 1,0$. Fonte: O Autor.

A média dos erros relativos em cada ponto de cálculo nas coroas circulares, descartando os dois valores finais (cuja diferença absoluta é de cerca de 3×10^{-5}, efetivamente nula, mas com variação significativa quando é considerada única precisão) é de $7,3\%$, que é aceitável para um método de difusão puramente probabilístico e de implementação simples. Estes cálculos foram feitos apenas para o último instante de tempo, representado na Fig. 5.5. As posições instantâneas de cada vórtice discreto são mostradas nas Figs. 5.6 (a)–(c).

Fica claro pela Fig. 5.6 que o Método de Avanço Randômico captura a difusão da vorticidade, e a Fig. 5.5 mostra que qualitativamente, o método é convergente. Caso fossem analisadas partículas de temperatura ao invés de vórtices discretos, o comportamento seria o mesmo



(a) $t = 0,05$ (b) $t = 0,5$ (c) $t = 1,0$

Figura 5.6 – Posições instantâneas dos vórtices discretos submetidos à difusão em instantes selecionados. Fonte: O Autor.

dado que as equações de difusão são as mesmas, variando apenas o coeficiente de difusividade, isto é: difusividade da quantidade de movimento, ν, para a vorticidade (e vórtices discretos) e difusividade térmica, α, para a temperatura (e partículas de temperatura).

5.2 Valores de Entrada Adotados

As simulações do código requerem valores de entrada que são fornecidos no arquivo `INPUT.DAT`. A descrição completa das rotinas e a sequência de chamada são mostradas no Apêndice C. Para os casos rodados,variou-se a altura de rugosidade superficial, ε/D e manteve-se constantes os números de Reynolds e Richardson.

A Tabela 5.3 apresenta os valores de entrada que permaneceram constantes ao longo das simulações. O arquivo `INPUT.DAT` lê dados adicionais, como opções para considerar modelagem de turbulência, rugosidade, e adimensionais de interesse (Re, Ri, Pr, ε/D), cujos valores são apresentados nas curvas ou figuras relativas ao caso.

Tabela 5.3 – Valores adimensionais de entrada constantes ao longo das simulações. Fonte: O autor.

Descrição	Valor
Diâmetro do cilindro (D)	1,0
Número de painéis para descrever o corpo (mb)	300
Escoamento incidente (U_∞)	$1,0\hat{e}_1$
Número de Reynolds (Re)	100.000
Número de Prandtl (Pr)	0,71
Número de Prandtl turbulento (Pr_T)	0,95
Raio do núcleo inicial dos vórtices discretos (σ_0)	0,001
Raio do núcleo inicial das partículas de temperatura (σ_{0t})	0,001
Incremento de tempo (Δt)	0,05

Tabela 5.4 – Valores experimentais de C_D e St para o escoamento ao redor de um cilindro isolado por Blevins [5].

	C_D	St
Blevins (1984)	$1,2 \pm 10\%$	$0,19 \pm 10\%$

A escolha do número de Richardson não foi arbitrária. Considerando o escoamento do ar ($\beta = 0,00343°C^{-1}$), escoamento incidente de 1 m/s e $b = 0,5\ m$ (diâmetro), vem:

$$\mathrm{Ri} = \frac{g\beta(T_W - T_\infty)b}{U^2} = \frac{(9,81)(0,00343)(0,50)(T_W - T_\infty)}{1^2} = 0,01682(T_W - T_\infty) \tag{5.6}$$

Nesta Dissertação de Mestrado utilizou-se uma diferença de temperatura de $\Delta T = 10°C$, com $T_\infty = 283\ K$ e $T_W = 293\ K$, resultando no número de Richardson escolhido para as simulações. Dada a diferença de temperatura constante na parede e número de Reynolds constante, as variações captadas foram devidas aos efeitos de rugosidade superficial.

5.3 Resultados Obtidos

A fim de verificar a sensibilidade do modelo de rugosidade superficial proposto, torna-se necessário usar utilizar *benchmarks*. Os casos iniciais são comparados com valores experimentais e, posteriormente, verifica-se o impacto das demais modelagens (especialmente, convecção natural, turbulência e rugosidade superficial, combinadas).

O resultado experimental utilizado para comparação é o de Blevins [5]. Este autor apresentou valores para os coeficientes de arrasto e para o número de Strouhal, com$\pm 10\%$ de incerteza, como mostrado na Tab. 5.4.

Os casos executados são apresentados na Tab. 5.5 para as diferentes alturas de rugosidade e considerando ou não convecção natural.

Tabela 5.5 – Valores de interesse obtidos nas simulações. Fonte: O autor.

Caso	ε/D	Ri	C_D	C_L	St	$\overline{\mathrm{Nu}}$	θ_{sep}
I	0,0	0,0	1,23	-0,027	0,200	–	80°
II	0,0	0,168	1,21	-0,05	0,199	109,1	$81,0°$
III	0,001	0,168	1,245	0,164	0,200	141,5	$82,5°$
IV	0,007	0,168	1,255	0,03	0,224	172,8	$86,5°$

Neste instante, a proposta inicial é verificar a influência do número de Richardson na simulação. Assim, mostra-se na Fig. 5.7 dois casos realizado que consideram um cilindro liso, com modelagem de turbulência sem rugosidade superficial (casos I e II), considerando um gradiente de temperatura $\Delta T = T_W - T_\infty = 10°$ (T_∞ é assumido como constante, valendo 283 K em todas as simulações com efeitos térmicos neste trabalho). O coeficiente de pressão médio ao longo da simulação do caso II para cada ponto do cilindro discretizado é apresentado na Fig. 5.8.

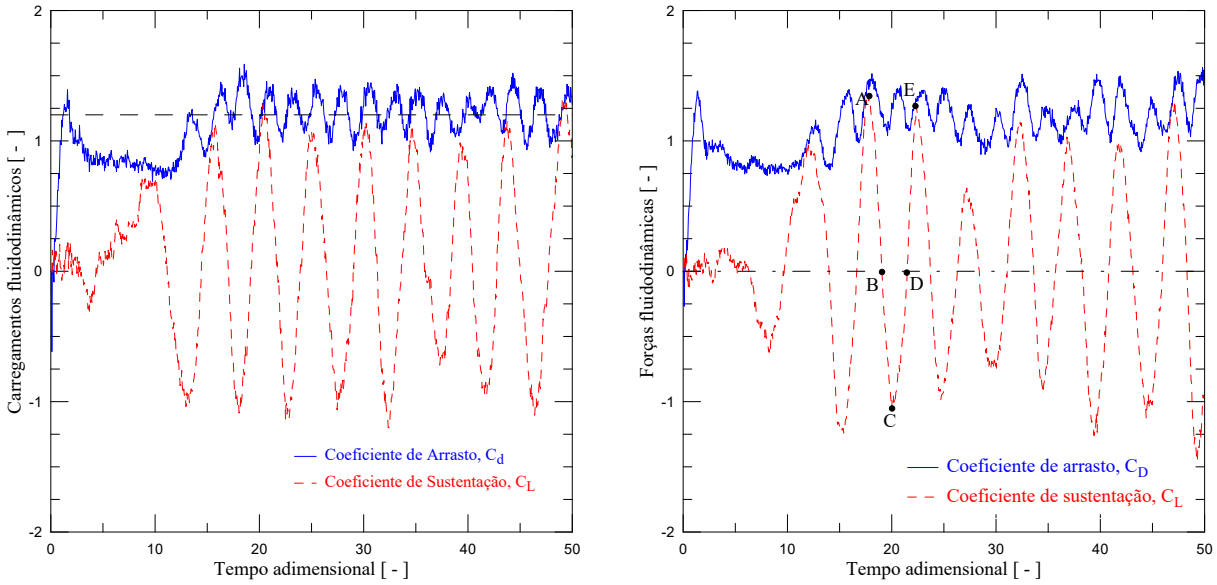


Figura 5.7 – Cargas fluidodinâmicas para os dois casos: (a)sem convecção natural, caso I e (b) com convecção natural, caso II. Fonte: O Autor.

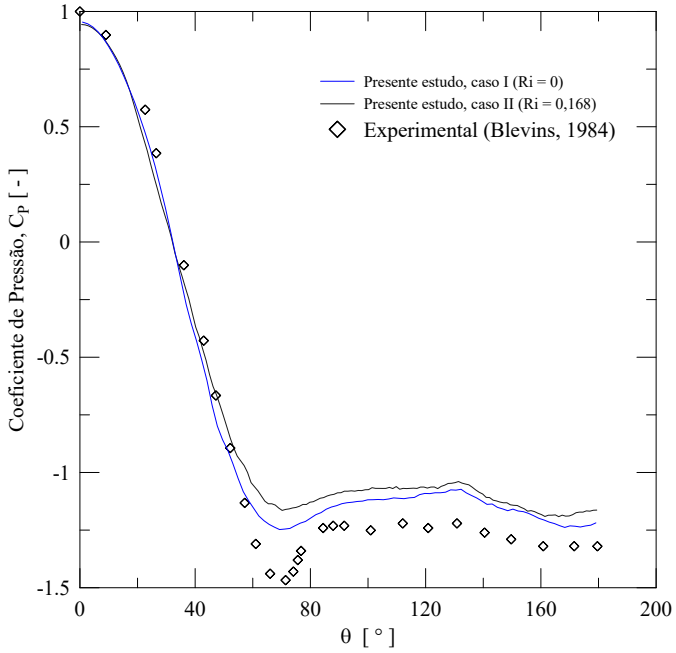


Figura 5.8 – Coeficiente de pressão médio para os casos I e II: mb = 300,$\sigma_0 = \sigma_T = 0,001$, $\Delta t = 0,05$, Re $= 100000$, Pr $= 0,71$,Ri $= 0,168$ (caso II) e Ri $= 0$ (caso I), $\Delta T = 10\ K$ Fonte: o Autor

Para o caso II, o coeficiente de arrasto médio obtido foi $C_D = 1,21$ com coeficiente de sustentação médio $C_L = -0,05$. As médias foram calculadas a partir do tempo adimensional $t = 20,0$, após o transiente numérico passar. O número de Strouhal obtido após o uso de uma *Fast Fourier Transform*, Transformada Rápida de Fourier (FFT) aplicada à curva de sustentação, obtendo-se $St = 0,199$. Estes resultados estão bem próximos dos valores experimentais obtidos por Blevins [5] para um cilindro circular que não troca calor. Este comportamento se deve provavelmente ao baixo número de Richardson adotado e à perpendicularidade entre o vetor

aceleração da gravidade e o vetor velocidade do escoamento incidente.

Já no caso I, considerando Ri = 0 apresentou coeficiente de arrasto de 1,23 e sustentação -0,027. A comparação entre as duas simulações mostrou que ao se considerar a convecção natural, o arrasto foi ligeiramente reduzido. Pode-se entender que neste número de Reynolds o efeito da convecção natural contribuiu como fonte de quantidade de movimento adicional, modificando a estrutura vorticosa formada na esteira de von Kármán, como se pode entender ao comparar com o caso no qual ocorre apenas a convecção forçada (Ri = 0).

Da Fig. 5.8 utilizou-se um método gráfico para estimar-se o ponto de separação da camada limite. Em essência, estima-se o ponto de inflexão por meio da média entre o ângulo com C_P mínimo e do ângulo do coeficiente de pressão de base. Por este método, obtém-se um ângulo de separação $\theta \approx 81°$, mostrando boa concordância aos resultados de Milne-Thompson [69] ($\theta \approx 82°$) e Son & Hanratty [70] ($\theta \approx 78°$).

Uma verificação adicional do coeficiente de pressão é feita analisando-se os pontos A–E no cilindro, mostrada na Fig. 5.9 que podem ser identificados na Fig. 5.7 (b).

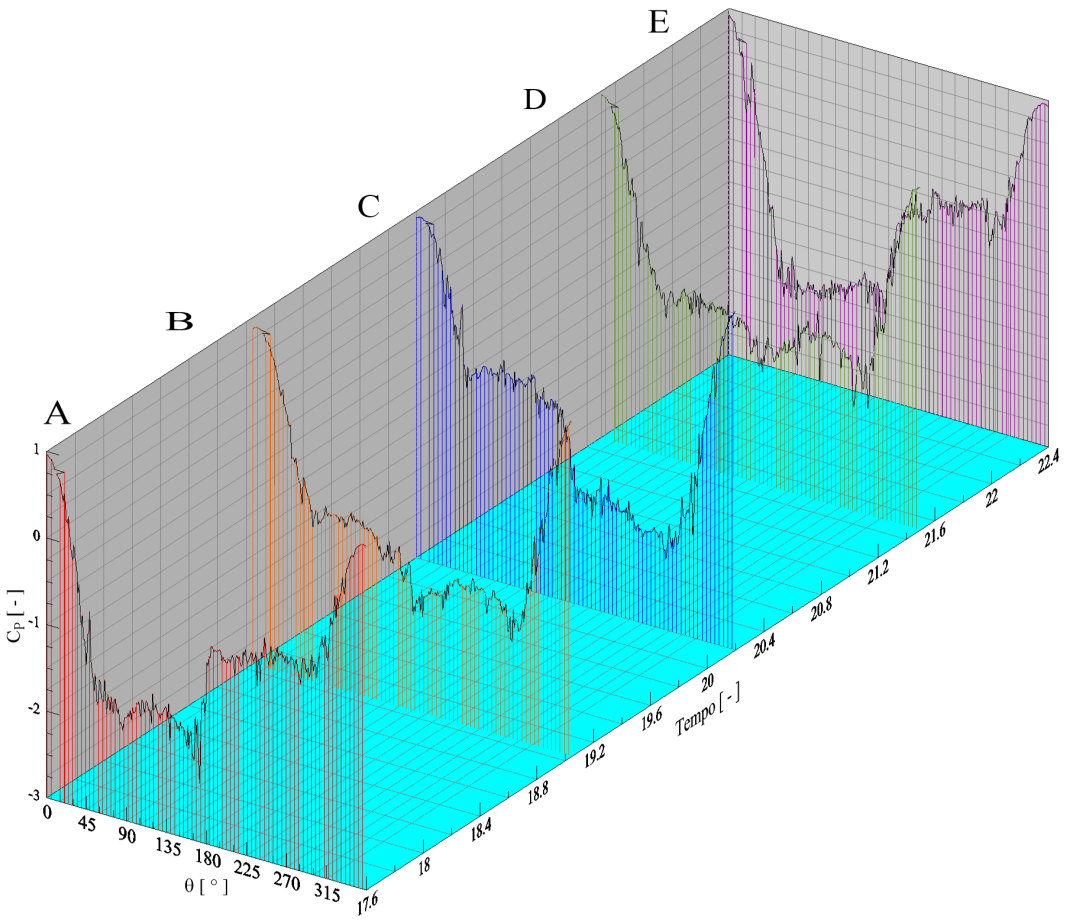


Figura 5.9 – Coeficiente de pressão instantâneo nos pontos A–E. Caso 1: mb = 300,$\sigma_0 = \sigma_T = 0,001$, $\Delta t = 0,05$, Re $= 100000$, Pr $= 0,71$,Ri $= 0,168$, $\Delta T = 10\ K$ Fonte: o Autor

O Ponto A (correspondente ao tempo adimensional $t = 17,6$ na Fig. 5.7) apresenta uma zona de baixa pressão entre 68° e 180° a partir do bordo de ataque do cilindro, caracterizando

o desprendimento de uma estrutura vorticosa horária no cilindro, iniciando o mecanismo de Gerrard [25]. Neste instante, devido à baixa pressão, o coeficiente de sustentação é máximo devido a esta distribuição de pressão.

Analogamente, o ponto B (correspondente ao tempo adimensional $t = 19,05$ na Fig. 5.7) apresenta uma distribuição de pressão relativamente uniforme, caracterizando o ponto de inversão da sustentação de positiva para negativa, quando a estrutura horária está sendo incorporada na esteira. O ponto C (correspondente ao tempo adimensional $t = 20,2$ na Fig. 5.7) apresenta entre 180 e 270° uma região de baixa pressão, mostrando o desprendimento de um vórtice anti-horário, munido de alta quantidade de movimento e resultando em baixas pressões na região, causando coeficiente de sustentação mínimo, também atrelado a um incremento do coeficiente de arrasto,que oscila duas vezes para cada oscilação da sustentação, uma vez que o coeficiente de arrasto está relacionado ao desprendimento de uma estrutura vorticosa, enquanto o coeficiente de sustentação está relacionado ao desprendimento de um par de estruturas vorticosas contrarrotativas.

O ponto D (correspondente ao tempo adimensional $t = 21,5$ na Fig. 5.7) é análogo ao ponto B, e é possível identificar a distribuição aproximadamente uniforme de pressão entre a parte superior e inferior do cilindro, caracterizando a inversão do sinal do coeficiente de sustentação de negativo para positivo, quando uma estrutura vorticosa anti-horária está sendo incorporada na esteira. O ponto E (correspondente ao tempo adimensional $t = 22,4$ na Fig. 5.7) é análogo ao ponto A, representando o desprendimento de uma estrutura vorticosa horária no cilindro, dando seguência ao mecanismo alternado de desprendimento.

A partir deste caso, observa-se uma boa efetividade do MPT para a simulação do escoamento ao redor de um cilindro circular em relação aos carregamentos fluidodinâmicos atuantes, número de Strouhal e ângulo de separação da camada limite hidrodinâmica. Os resultados experimentais também são muito importantes para a validação do MPT.

Nesta dissertação, porém, o objeto de estudo é o efeito da rugosidade superficial na camada limite térmica e seus impactos na mecânica de desprendimento de vórtices. Os casos considerados foram os já mostrados na Tab. 5.5.

Pela Tab. 5.5, pode-se observar que o efeito previsto por Al-Rubay [52] são bem capturados: o número de Nusselt aumentou em 29,7% do caso II para III, quando a única modificação nos parâmetros da simulação foi a altura de rugosidade superficial. Do caso II para o IV, o aumento foi de 58,4%, mostrando a proporcionalidade do número de Nusselt à altura de rugosidade superficial média. A sensibilidade capturada para o número de Nusselt médio superficial é o resultado mais importante desta dissertação de mestrado. O comportamento físico esperado é que o número de Nusselt aumente com o aumento do número de Reynolds refletindo maior transferência de calor do corpo para o meio fluido. Desta maneira, tal comportamento foi capturado com a variação da altura média de rugosidade superficial de $\varepsilon/D = 0,0$ para $\varepsilon/D = 0,007$, incluindo-se um valor intermediário de $\varepsilon/D = 0,001$. Conclui-se que o aumento do valor da al-

tura média de rugosidade com a manutenção do número de Reynolds fixo no regime subcrítico de Re = 100,000 demonstra a boa sensibilidade do código computacional desenvolvido para projetos conservadores de Engenharia, que trabalham com fatores de segurança, mesmo para o caso bidimensional.

Esta captura, vale ressaltar, só foi possível devido ao modelo de rugosidade superficial estendido nesta dissertação de mestrado para a camada limite térmica. Bimbato [12] originalmente propôs um modelo de rugosidade superficial para a camada limite hidrodinâmica, viabilizado pela modelagem de turbulência do tipo LES. A modelagem de turbulência do tipo LES foi adaptada por Alcântara Pereira [11] do espaço tridimensional para o espaço bidimensional via cálculo da função estrutura de velocidade de segunda ordem para o campo de velocidades filtrado. Neste trabalho, além do modelo de Bimbato, contribuiu-se com uma modelagem de turbulência do tipo LES via FEVO2 para a nuvem de partículas de temperatura, acelerada tanto pela contribuição de Andrade [13] com uma estrutura aceleradora quanto por uma adaptação desta para a nuvem de partículas de temperatura realizadas neste trabalho. Ao utilizar estas ferramentas desenvolvidas pelo LMAML, foi possível levá-las a diante e propor um modelo funcional de rugosidade superficial para a camada limite térmica.

Há de se destacar, entretanto, que os valores obtidos nas simulações apresentam divergência apreciável do número de Nusselt previstos por aproximações semi-empíricas. A equação de Churchill–Bernstein, Eq. 5.7, é uma das equações que permitem estimar o número de Nusselt para um cilindro submetido a um escoamento incidente.

Para $\mathrm{Re} = 1,0 \times 10^5$ e $\mathrm{Pr} = 0,71$, a Eq. 5.7 fornece $\overline{Nu} = 215,4$. Conforme a Tab. 5.5, observa-se a existência de erros no número de Nusselt médio superficial entre as simulações e a previsão na literatura. Em contrapartida, a ordem de grandeza é a mesma, e a resposta aos efeitos de rugosidade superficial é consistente em uma análise qualitativa, isto é, o aumento da rugosidade superficial, que é análogo ao aumento do número de Reynolds para o cilindro, está relacionado a um maior número de Nusselt.

$$\overline{Nu} = 0,3 + \frac{0,62 Re^{1/2} Pr^{1/3}}{[1+(0,4/Pr)^{2/3}]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re}{282000} \right)^{5/8} \right]^{4/5}, \qquad \mathrm{RePr} > 0,2 \qquad (5.7)$$

Na presente simulação, o número de Nusselt é calculado conforme a Eq. 4.25.

Isto é, o número de Nusselt é interpretado como um gradiente de temperatura adimensional medido entre o ponto de desprendimento das partículas de temperatura e o ponto de controle de cada painel, localizado em seu ponto médio na superfície discretizada do corpo. O valor apresentado na Tabela 5.5 para o número de Nusselt é obtido a partir de um cálculo médio ao longo de toda a simulação numérica, passado o transiente numérico. Este valor é o número de Nusselt médio superficial, que pode ser usado para comparar valores pela Eq. 5.7. A evolução temporal para o caso I é mostrada na Fig. 5.10. Observa-se que o número de Nusselt se estabiliza em torno do instante de tempo 10, mas a curva apresenta ruído devido à intensa variação

local de temperaturas, que é altamente dependente da disposição das partículas de temperatura em relação aos pontos de desprendimento. É importante destacar, neste instante, a importância da distribuição espacial e do recobrimento para alcançar boa precisão no Método de Partículas de Temperatura.

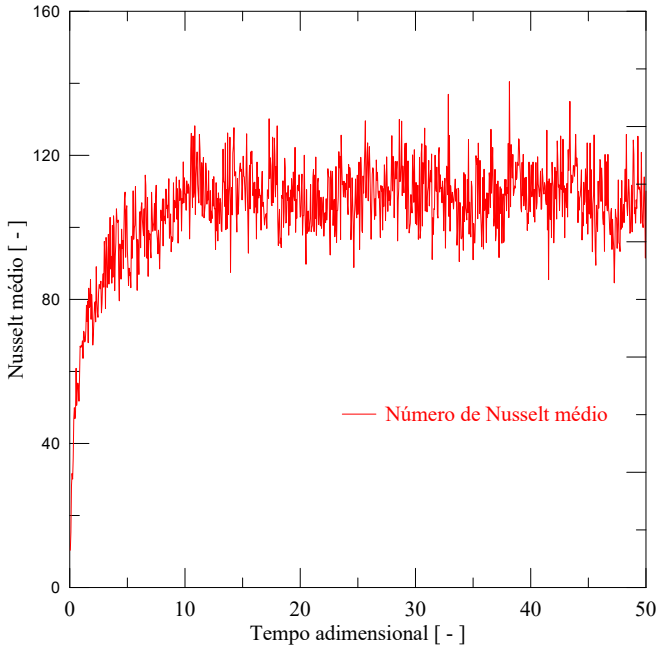


Figura 5.10 – Número de Nusselt superficial médio para o Caso II: mb = 300,$\sigma_0 = \sigma_T = 0,001$, $\Delta t = 0,05$, Re $= 100000$, Pr $= 0,71$,Ri $= 0,168$, $\Delta T = 10\ K$ Fonte: o Autor

A comparação entre o modelo hidraulicamente liso do caso I ao caso de parede hidraulicamente rugosa de maior intensidade, caso IV, permite observar que o modelo de rugosidade superficial afeta rapidamente a dinâmica da troca de calor, com o transiente numérico efetivamente finalizado em um tempo adimensional 10, como pode ser observado na Fig. 5.11. Este caso foi interrompido antes do instante de tempo final devido à problemas de *stack overflow* na máquina. Isto destaca a necessidade de se realizar otimizações na alocação dinâmica de memória e otimizações de código, tal qual reduzir a demanda de memória da estrutura de caixas, tanto a de vórtices quanto a de temperatura, e desalocar a memória de vetores ociosos a fim de reservá-la para tarefas mais custosas na simulação. A infraestrutura atual do LMAML consiste em máquinas com Intel Core i7 2.8 GHz, 8MB cache (i7-860), 8GB RAM DDR3 1333 MHz, estas incapazes de realizar uma simulação do código computacional gerado devido aos altos custos de alocação de memória. Por isso, os casos foram exclusivamente executados em uma máquina mais recente, com configurações Intel© Core™ i9-13900KF @5,8 GHz, 32 threads, 36 MB cache, 128 GB RAM DDR5. Esta máquina consegue executar o o código e, quando não há *stack overflow*, uma simulação típica com efeitos de rugosidade e convecção natural demora cerca de 432 h. Destaca-se que na ausência de processamento paralelo, o tempo de máquina requerido seria inviável.

O erro observado no número de Nusselt médio pode ser entendido como um erro de

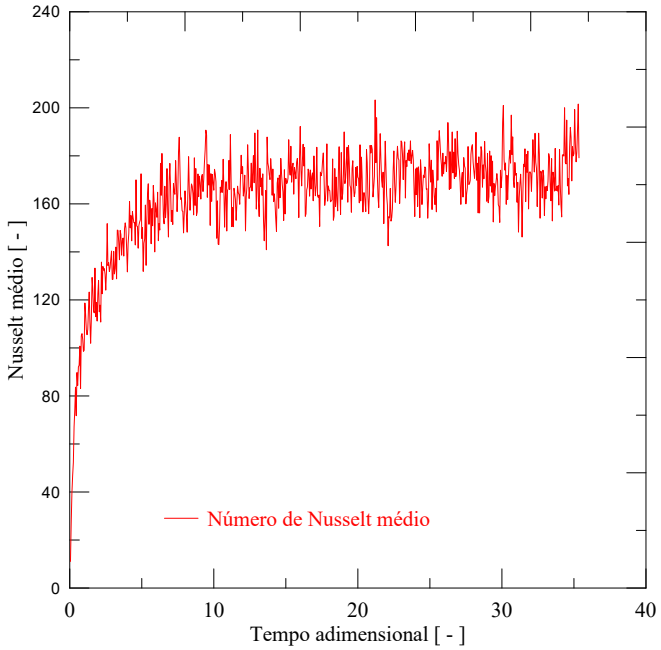


Figura 5.11 – Número de Nusselt superficial médio para o Caso IV: mb = 300,$\sigma_0 = \sigma_T = 0,001$, $\Delta t = 0,05$, Re $= 100000$, Pr $= 0,71$,Ri $= 0,168$, $\Delta T = 10\ K$ e $\varepsilon/D = 0,007$. Fonte: o Autor

aferição, pois o MPT é sensível a diversos parâmetros: o incremento de tempo da simulação, número total de avanços da simulação numérica e o raio do núcleo de cada tipo de partícula. Quanto mais avanços no tempo, melhor será a sobreposição entre as partículas, o que imediatamente irá refletir num melhor refinamento da discretização dos campos de vorticidades e de temperaturas. Adiciona-se a necessidade de melhoria no balanço térmico de geração das partículas de temperatura via Lei de Fourier modificada. Estas grandezas não são ligadas explicitamente, mas todas afetam a sobreposição lagrangiana de partículas, responsável pela precisão da simulação.

A fim de compreender a variação do número de Nusselt na superfície, elaborou-se um código computacional para calcular a média do número de Nusselt em cada painel (medido entre o ponto de controle e o ponto de desprendimento, conforme a Eq. **??**) ao longo da simulação, após o transiente numérico, para o caso IV. Este resultado é apresentado na Fig. 5.12, na qual foi utilizado um filtro para reduzir os ruídos da curva e foram descartados pontos com número de Nusselt nulo devido à baixa população de partículas de temperatura local.

Comparado aos resultados de Al-Rubaiy para um cilindro liso [52], apresentados na Fig. 5.13, observa-se que o comportamento qualitativo do número de Nusselt obtido é consistente com o valor físico previsto. O valor quantitativo, considerando que o caso IV apresenta efeitos de rugosidade superficial, ainda está subestimado nesta simulação computacional, e uma das necessidades será a realização de um balanço térmico em cada painel para assegurar uma geração de partículas de temperatura com intensidades que representem de modo mais fidedigno a transferência de calor local. Entretanto, é possível observar que, próximo ao ponto de separação da camada-limite, há um mínimo local consistente com os valroes experimentais [52, 74]

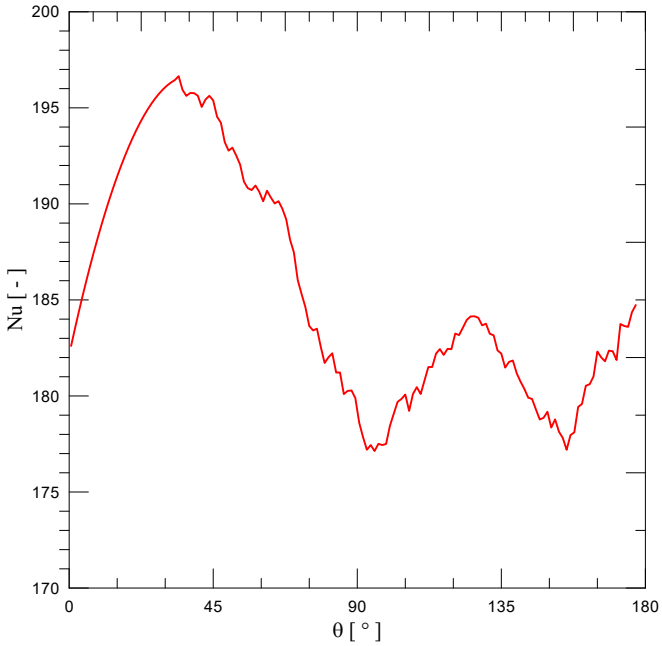


Figura 5.12 – Número de Nusselt superficial para o Caso IV: mb = 300,$\sigma_0 = \sigma_T = 0,001$, $\Delta t = 0,05$, Re $= 100000$, Pr $= 0,71$,Ri $= 0,168$, $\Delta T = 10\ K$ e $\varepsilon/D = 0,007$. Fonte: o Autor

e um máximo próximo aos 30°. Após a separação, com o efeito do mecanismo alternado de desprendimento, no qual a região é alimentada por quantidade de movimento das estruturas vorticosas contrarrotativas, observa-se uma recuperação do número de Nusselt, entre 90 e 120°, e posteriormente outra queda entre 120 e 150° devido à zona de desprendimento, seguido de um aumento até o ponto de estagnação traseiro, entre $150e180°$, caracterizado por um número de Nusselt elevado. A fim de reduzir os erros para o cálculo do Número de Nusselt, deve-se implementar uma adaptação no código que permita a aferição independente dos raios do núcleo das partículas de temperatura e dos vórtices discretos de Lamb. Anteriormente esta deficiência não foi observada devido aos cálculos focarem apenas nos efeitos da convecção nos coeficientes de arrasto, sustentação e número de Strouhal. Inicialmente, este trabalho utilizaria o MCRNM, porém, devido aos custos computacionais altamente elevados deste esquema de difusão, levando a uma quantidade de partículas que cresce exponencialmente, a realização de uma simulação completa tornou-se inviável, tornando necessário o uso do Método de Avanço Randômico.

A respeito do ângulo de separação, a comparação inicial parte de resultados para um cilindro único sem transferência de calor, caso investigado numericamente por Bimbato, Alcântara Pereira e Hirata [6] e experimentalmente por Achenbach e Heinecke [71]. Os resultados obtidos são apresentados na Tab. 5.6.

Comparados aos resultados desta dissertação, verifica-se que o caso liso ($\varepsilon/D = 0,0$) concorda com os resultados de Achenbach e Bimbato. Para a altura de rugosidade relativa $\varepsilon/D = 0,001$, este trabalho encontrou $\theta_{sep} = 82,5°$, enquanto Bimbato encontrou $\theta_{sep} = 84,0°$. Observa-se a redução do ângulo de separação no presente trabalho. Isto pode ser explicado pelo uso do modelo de convecção natural. Dado que o vetor aceleração da gravidade é $g_i = -g\hat{e}_2$,

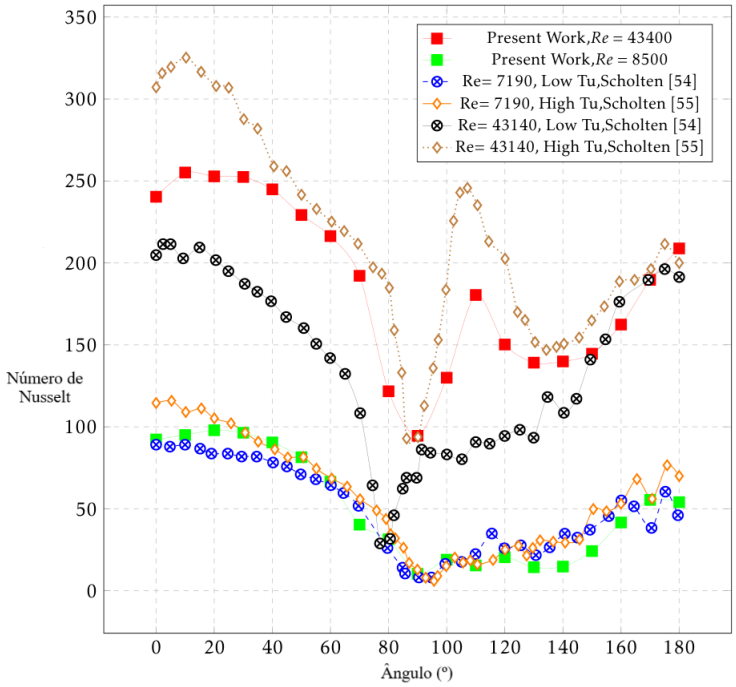


Figura 5.13 – Número de Nusselt médio para a superfície de um cilindro circular de parede hidraulicamente lisa. Fonte: reproduzido de Al-Rubaiy [52].

Tabela 5.6 – Ângulos de separação da camada-limite na parte superior do cilindro. Fonte: Adaptada de [6].

ε/D	Achenbach & Heinecke [71]	Bimbato, Alcântara Pereira e Hirata [6]
Liso	77°	81,0°
0,10%	–	84°
0,20%	–	84°
0,45%	102°	93,0°
0,70%	–	89,4°
0,90%	99°	–

os efeitos de flutuabilidade tendem a levar o escoamento na direção positiva do versor $\hat{e}_2$ ("para cima"), um efeito adverso ao aumento do ângulo de separação causado apenas devido aos efeitos de rugosidade superficial. Já para a altura de rugosidade $\varepsilon/D = 0,007$, o ângulo de separação encontrado neste trabalho foi $\theta_{\text{sep}} = 86,5°$, comparado a $\theta_{\text{sep}} = 89,4°$ de Bimbato. O aumento do ângulo de separação com a altura de rugosidade superficial média é capturado e observa-se que o ângulo com efeitos de flutuabilidade é menor do que o caso sem efeitos de forças de empuxo. Uma vez mais, esta diferença pode ser atribuída à ação dos efeitos de convecção natural que tornam-se um efeito adverso ao aumento do ângulo de separação a justante do cilindro. Em um escoamento ascendente, estes efeitos seriam favoráveis ao aumento do ângulo de separação. Esta configuração de escoamento não foi investigada nesta dissertação.

A ação dos efeitos de convecção natural também explicam o ligeiro aumento do coeficiente de arrasto na configuração investigada. As estruturas vorticosas se aproximando mais do corpo e reduzindo o aumento do ângulo de separação (que reduz o coeficiente de arrasto devido

ao estreitamento da esteira viscosa) causaram um pequeno aumento no coeficiente de arrasto como foi captado neste trabalho.

A posição final dos vórtices discretos na esteira para a simulação do caso Ri = 0,168 e $\varepsilon/D = 0,007$ é apresentada na Fig. 5.14. Nesta figura é possível observar a formação da esteira clássica de von Kármán desenvolvida na simulação e o resultado do mecanismo alternado de desprendimento de estruturas vorticosas contrarrotativas. As estruturas formadas inicialmente mostram-se deformadas mais a frente do cilindro devido ao transiente numérico que foram sumbetidas e também a ausência de efeitos tridimensionais, enquanto as estruturas próximas do corpo estão mais organizadas. A ideia para a interpretação do número de Strouhal pode ser observada ao verificar a distância centro a centro entre duas estruturas vorticosas rotativas formadas após o transiente numérico, e observa-se ainda a ligação entre as estruturas contrarrotativas através de folhas de vorticidade.

O padrão das estruturas vorticosas iniciais, além delas terem sido formadas em um instante no qual a simulação não estava em regime de desprendimento estável, o que se deve também à solução numérica da difusão pelo método de Avanço Randômico. Por ser apropriado para pequenos avanços de tempo e um grande número de partículas, a marcha temporal sofre eventualmente com a distorção lagrangiana, posto que não foi feita a implementação de um algoritmo de *remeshing* ou *rezoning* [33].

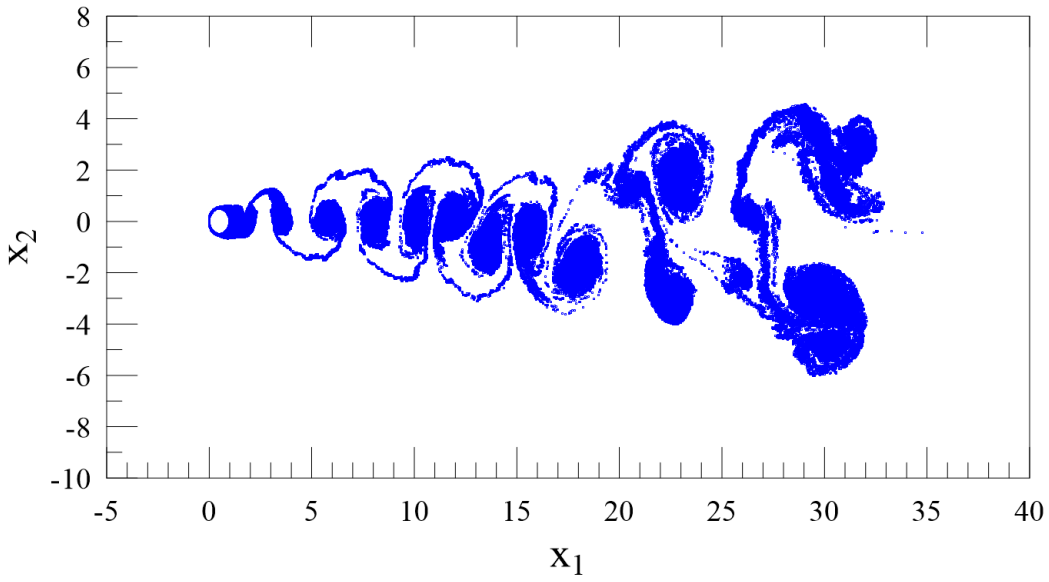


Figura 5.14 – Esteira de vórtices discretos de Lamb no instante t = 40,1. Fonte: o Autor

Destaca-se o elevado custo computacional das simulações, sendo necessários 14 dias corridos para simular 802 incrementos de tempo. Após este valor houve *stack overflow* na memória, cancelando a simulação. Este tempo ocorre devido à existência de três interações $\mathcal{O}(N^2)$, a saber: a interação vórtice-vórtice (a Lei de Biot-Savart), a interação vórtice-temperatura (vórtices induzem velocidades nas partículas de temperatura) e temperatura-vórtice (modelo de con-

vecção natural), tornando clara a necessidade de se utilizar diferentes técnicas aceleradoras nos códigos do LMAML.

A fim de comparação, a Fig. 5.15 mostra a distribuição das partículas de temperatura no instante t = 40,1 da simulação. Neste caso, verifica-se que as partículas de temperatura acompanham de modo próximo os vórtices discretos de Lamb correspondentes. A diferença se faz mais visível nos instantes finais da simulação, quando o Método de Avanço Randômico passa a espalhar mais o campo de temperaturas, além dos moderados efeitos de força de flutuabilidade induzidos na esteira de vórtices pela esteira de calor.

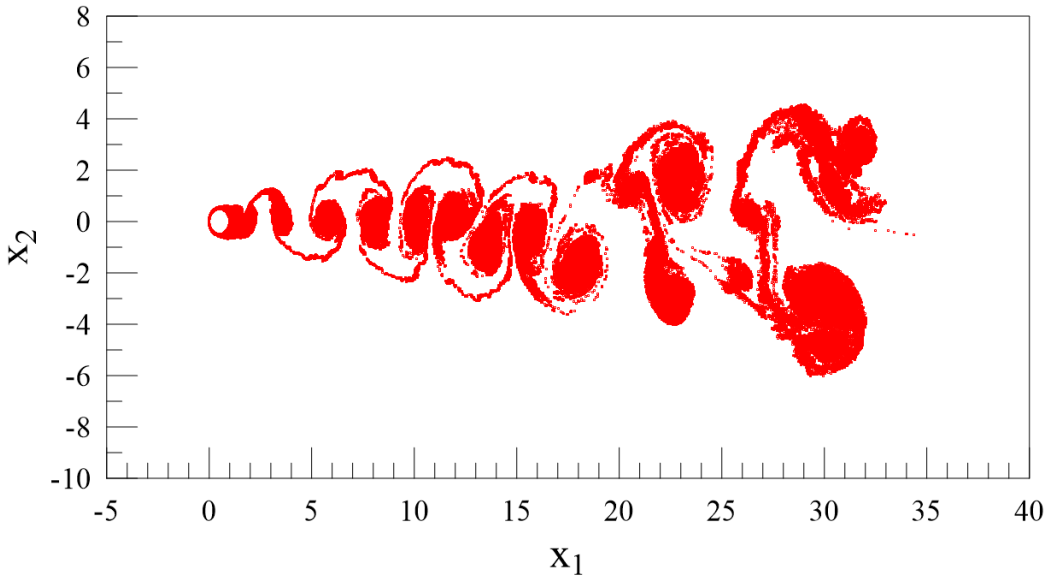


Figura 5.15 – Esteira de partículas de temperatura no instante t = 40,1. Fonte: o Autor

Portanto, uma das conclusões que se obtém é o baixo impacto da transferência de calor no regime de desprendimento considerado. Isto é explicado pelo baixo número de Richardson, tornando a convecção natural fraca, se aproximando de uma convecção mista. Casos com número de Richardson mais altos não foram realizados devido a problemas de alocação de memória que estão sob investigação.

6 Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

6.1 Principais Conclusões

Nesta Dissertação de Mestrado foi estudado o escoamento ao redor de um corpo rombudo de parede hidraulicamente rugosa que troca calor com o meio fluido utilizando-se o Método de Partículas de Temperatura. A modelagem de rugosidade superficial só foi possível por meio da modelagem de turbulência do tipo LES utilizada.

As simulações numéricas foram realizadas para um número de Reynolds de $1,0 \times 10^5$, em regime subcrítico, e para um número de Prandtl de 0,71, valor típico para o ar. As aferições foram realizadas com número de Richardson de 0,168. Estes valores captam uma fraca influência dos efeitos de convecção natural, porém são necessários por causa da estrutura computacional presente, dado que números elevados necessitariam de mais incrementos de tempo adimensionais para ultrapassar o regime transiente das simulações relativo ao desenvolvimento da camada limite térmica.

A primeira contribuição importante deste trabalho foi implementar a modelagem de turbulência do tipo LES na equação da energia através da relação entre o coeficiente de viscosidade cinemática turbulenta, o coeficiente de difusividade térmica turbulenta e o número de Prandtl turbulento (Eq. 3.50). Como segunda contribuição importante foi implementado um modelo de rugosidade superficial para a camada limite térmica, um fenômeno ainda pouco estudado na literatura tanto especializada em métodos lagrangianos quanto em estudos experimentais ou em modelos de malha. O modelo mostrou-se altamente sensível a variações de rugosidade superficial, captadas pelo número de Nusselt superficial médio calculado ao longo da simulação.

Para o número de Reynolds estudado, o número de Nusselt superficial médio calculado do caso de altura de rugosidade mais elevada ($\varepsilon/D = 0,007$) foi cerca de 70% maior que o correspondente caso com parede hidraulicamente lisa. Al-Rubaiy [52] encontrou a mesma tendência em seu estudo, mostrando que o modelo proposto responde apropriadamente a estas mudanças na superfície do corpo.

O modelo de rugosidade superficial para a camada limite térmica proposto também mostrou baixo impacto no coeficiente de arrasto do cilindro circular. Isto está de acordo com as medições de Koo e Kleinstreuer [50], que observaram que os efeitos rugosos apresentam impactos maiores na camada limite hidrodinâmica do que térmica, dado que apesar do ganho da transferência de calor obtida, a variação do coeficiente de arrasto captada se deve principalmente aos efeitos de rugosidade superficial, não sendo captado um efeito de supressão. Isto é explicado, também, pelo tipo de escoamento, que é perpendicular ao vetor aceleração da gravi-

dade, arranjo que reduz a influência da convecção natural.

A sensibilidade do código computacional desenvolvido foi capturada com o aumento do valor da rugosidade superficial média mantendo-se o numero de Reynolds constante. Este resultado reflete a física esperada para o problema, isto é, com o aumento do número de Reynolds, via aumento do valor da rugosidade superficial, o número de Nusselt aumenta e a transferência de calor do corpo para o meio fluido também aumenta.

Um dos obstáculos encontrados foi a intensa demanda de memória do código gerado, fator que por vezes levou a erros de *stack overflow* nas simulações. Devido ao fato de não terem sido observadas correlações entre os instantes da simulação no qual o código apresentava erros, conjectura-se que este problema foi causado pelo Método de Avanço randômico em conjunto à estrutura de caixas. Devido à natureza da simulação e com a necessidade de se montar dois conjuntos de caixas, todas usando a mesma quantidade de memória ao invés de uma alocação individual, surgem caixas que podem estar vazias e consumindo a mesma memória que as caixas mais populosas. O Método de Avanço randômico pode, eventualmente, levar a caixas que estejam mais densamente povoadas, o que aumenta o requerimento global de memória, podendo acarretar erros.

Este obstáculo na alocação de memórias requer ajustes a fim de otimizar o algoritmo computacional. Horizontes a serem explorados envolvem o uso de alocação dinâmica de memória para a maioria, ou mesmo totalidade, dos vetores e matrizes criados. Desta forma, o código só usará memória para operações relevantes à etapa do processo iterativo na qual se encontra. Outra possibilidade é adaptar a estrutura aceleradora de caixas para reduzir a quantidade de memória atribuída a caixas ociosas.

Apesar das limitações encontradas pelo aparato computacional, este trabalho apresentou um novo modelo de rugosidade superficial para a camada limite térmica de modo puramente lagrangiano, sendo capaz de cumprir os objetivos propostos e abrindo uma nova vertente a ser explorada pelo grupo de pesquisa do LMAML.

6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

O uso da computação de ultra-alta performance é um dos caminhos mais promissores para a Dinâmica dos Fluidos Computacional, e os métodos puramente lagrangianos, como o Método de Partículas de Temperatura, são beneficiados fortemente por essa implementação, dado o elevado número de operações matemáticas a cada iteração. Além disso, como cada partícula é acompanhada individualmente, a implementação do método é feita de modo mais simples do que a contraparte em euleriana, uma vez que na última cada nó da malha depende das grandezas em pontos vizinhos, sendo um dos desafios existentes para a aceleração dos códigos computacionais comerciais existentes.

Uma linha adicional de desenvolvimento seria a implementação do Método de Multipolos Rápidos [72] para o campo de temperaturas. Isto permitiria a redução da complexidade computacional de $\mathcal{O}(N^2)$ para $\mathcal{O}(N^{1,3})$ [73]. Considerando que a maior parcela de tempo de uma simulação numérica típica é devida a interações $\mathcal{O}(N^2)$, como interação vórtice-vórtice, vórtice-partícula de temperatura e partícula de temperatura-vórtice (forças de empuxo), a implementação efetiva deste método é necessária para se obter um método numérico capaz de simular geometrias complexas e maiores tempos de simulação com menores incrementos de tempo. Aliado ao processamento paralelo. o Método de Multipolos Rápidos oferece *speedups* expressivos para as simulações numéricas.

O cálculo do coeficiente de arrasto de atrito também é uma implementação importante para o MPT, pois os efeitos de rugosidade superficial aumentam o arrasto viscoso, conforme previsto por Achenbach [74], tornando necessário um modo de quantificar esta parcela do coeficiente de arrasto.

Uma possibilidade para o futuro é usar processamento paralelo com placas de vídeo (GPUs), ao traduzir o código para a linguagem CUDA C, por exemplo. Em testes preliminares para a interação vórtice-vórtice, a etapa mais onerosa da simulação (junto das outras operações de complexidade de $\mathcal{O}(N^2)$), implementou-se a linguagem CUDA C para alcançar *speed-ups* da ordem de 20 vezes em relação ao código com OpenMP. Comparado ao processamento em série, o ganho chega a ser da ordem de 100 vezes mais rápido. Neste caso, foi utilizado um processador Intel© Core™ i5-12450H @2,50 GHz, 12 threads, e placa de vídeo NVIDIA GeForce RTX 3050 (versão laptop) com 4GB de VRAM dedicada.

Pelos dados obtidos nesta dissertação, verifica-se a necessidade da aferição do raio do núcleo das partículas de temperatura para diferentes números de Reynolds a fim de se obter valores melhores quantitativamente para o número de Nusselt superficial médio. Outra vertente que merece ser estudada é o impacto do número de Nusselt para diferentes números de Richardson, Reynolds e Prandtl, uma vez que as dificuldades de tempo de processamento e relativas a memória excedida sejam ultrapassadas. Além disso, é necessário que um balanço térmico seja feito em cada painel a fim de assegurar a conservação da energia em cada painel a fim de melhorar os resultados quantitativos do número de Nusselt.

Por fim, durante o desenvolvimento desta Dissertação de Mestrado houve a possibilidade de aplicar o conjunto de técnicas numéricas para o problema da dissipação de vórtices de ponta de asa nas imediações de uma superfície plana, o que também ajudou a validar o presente código computacional [54, 55, 75]. Adicionalmente, este trabalho permite investigações futuras para a aferição do Método de Partículas de Temperatura desenvolvido pelo LMAML, sendo esta uma sugestão de Tese de Doutorado.

Referências

1 YOUNG, J. A. *Viscous flow around vortex shedding flowmeters: a discrete vortex model*. [S.l.]: PhD thesis, Imperial College, Department of Aeronautics, University of London., 1989. 7, 9, 10

2 K., W. C. H. 2-d and 3-d aspects of the wake of a cylinder, and their relation to wake computation. *Lecture of Applied Mathematics*, v. 28, p. 719, 1991. 14

3 OLIVEIRA, M. A. et al. Control and suppression of vortex shedding from a slightly rough circular cylinder by a discrete vortex method. *Energies*, v. 13, p. 1–23, 08 2020. 19, 20

4 SALIMIPOUR, E. A numerical study on the fluid flow and heat transfer from a horizontal circular cylinder under mixed convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 131, p. 365–374, 2019. 20, 21

5 BLEVINS, R. D. Applied fluid dynamics handbook. In: . [S.l.: s.n.], 1984. 73, 74

6 BIMBATO, A. M.; ALCÂNTARA PEREIRA, L. A.; HIRATA, M. H. Study of surface roughness effect on a bluff body – the formation of asymmetric separation bubbles. *Energies*, v. 13, n. 6094, p. 1–20, 2020. 19, 62, 80, 81

7 BEARMAN, P. W. Vortex shedding from oscillating bluff bodies. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 16, n. 1, p. 195–222, 1984. Disponível em: <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.16.010184.001211>. 1

8 VAN DYKE, M. *An Album of Fluid Motion*. Stanford: Parabolic Press, 1982. 2

9 BARATI, E.; BIABANI, M.; ZARKAK, M. R. Numerical investigation on vortex-induced vibration energy harvesting of a heated circular cylinder with various cross-sections. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 132, p. 105888, 2022. 2

10 KATZ, J.; PLOTKIN, A. *Low Speed Aerodynamics: From Wing Theory to Panel Methods*. [S.l.]: McGraw Hill, 1991. 3, 6, 38, 52, 67

11 ALCÂNTARA PEREIRA, L. A. *Simulação Numérica do Escoamento ao Redor de Perfis Aerodinâmicos Montados em Grades Lineares de Turbomáquinas Utilizando o Método de Vórtices Discretos*. Tese (Doutorado) — Instituto de Engenharia Mecânica, UNIFEI, 2002. 3, 59, 77

12 BIMBATO, A. M. *Estudo de Escoamento Turbulento em Torno de um Corpo Rombudo de Superfície Hidraulicamente Lisa ou Rugosa Utilizando o Método de Vórtices Discretos*. Tese (Doutorado) — Instituto de Engenharia Mecânica, UNIFEI, 2012. 3, 4, 61, 62, 63, 77

13 ANDRADE, C. L. *Desenvolvimento de um Algoritmo Acelerador da Modelagem de Turbulência de um Método de Vórtices Discretos Lagrangeano*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Engenharia Mecânica, UNIFEI, 2017. 3, 60, 61, 77

14 ROSELLI, M. V. *Estudo Numérico da Transferência de Calor por Convecção Mista a partir de um Corpo Rombudo e Efeitos de uma Parede Frontal*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Engenharia Mecânica,UNIFEI, 2017. 3, 18

15 RASHIDI, S.; HAYATDAVOODI, M.; ESFAHANI, J. A. Vortex shedding suppression and wake control: A review. *Ocean Engineering*, v. 126, p. 57–80, 2016. ISSN 0029-8018. 4, 18

16 MORAES, P. G. d. et al. A lagrangian description of buoyancy effects on aircraft wake vortices from wing tips near a heated ground plane. *Energies*, v. 15, n. 19, 2022. ISSN 1996-1073. Disponível em: <https://www.mdpi.com/1996-1073/15/19/6995>. 4

17 EINSTEIN, A. *Investigations on the theory of the brownian movement*. [S.l.]: Dover, 1956. 5, 15, 16

18 ROSSI, L. Resurrecting core spreading vortex methods: A new scheme that is both deterministic and convergent. *Siam Journal on Scientific Computing*, v. 17, 03 1996. 6, 16, 17, 56

19 ROSSI, L. F. Merging computational elements in vortex simulations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 18, n. 4, p. 1014–1027, 1997. 6, 16

20 ROSSI, L. F. Achieving high-order convergence rates with deforming basis functions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 26, n. 3, p. 885–906, 2005. 6, 16

21 ROSSI, L. F. A comparative study of lagrangian methods using axisymmetric and deforming blobs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 27, n. 4, p. 1168–1180, 2006. 6, 16

22 CHORIN, A. Numerical study of slightly viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 57, p. 785 – 796, 1973. 6, 15, 16, 47, 55, 56, 57

23 SHINTANI, M.; AKAMATSU, T. Investigation of two dimensional discrete vortex method with viscous diffusion model. *Computational Fluid Dynamics Journal*, v. 3, n. 2, p. 237–254, 1994. 6, 37, 39

24 VON KÁRMÁN, T. Uber den mechanismus des widerstandes den ein bewegter körper in einer flüssigkeit erfährt gottinger nachrichten. *Math.-Phys.Kl*, p. 509–517, 1911. 10

25 GERRARD, J. H. The mechanics of the formation region of vortices behind bluff bodies. *J. Fluid Mech.*, v. 25, n. 2, p. 401–413, 1966. 10, 76

26 ROSHKO, A. On the drag and shedding frequency of two-dimensional bluff bodies. In: . [S.l.: s.n.], 1954. 13

27 ROSHKO, A. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 10, n. 3, p. 345–356, 1961. 14

28 ROSENHEAD, L.; JEFFREYS, H. The formation of vortices from a surface of discontinuity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 134, n. 823, p. 170–192, 1931. 15

29 BEALE, J. T.; MAJDA, A. Rates of convergence for viscous splitting of the navier-stokes equations. *Math. Comp.*, v. 37, p. 243–259, 1981. 15

30 SMITH, P. A.; STANSBY, P. K. An efficient surface algorithm for random-particle simulation of vorticity and heat transport. *Journal of Computational Physics*, v. 81, p. 349–371, 1988. 15

31 RUNGE, C. D. T. Über die numerische auflösung von differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, v. 46, n. 2, p. 167–178, 1895. 15

32 KUTTA, W. Beitrag zur näherungsweisen integration totaler differentialgleichungen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, v. 46, p. 435–453, 1895. 15

33 BARBA, L. A. *Vortex Method for computing high-Reynolds number flows: Increased accuracy with a fully mesh-less formulation*. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, 2004. 16, 17, 47, 56, 82

34 LOS REIS, J. H. F. *Método de Vórtices Discretos no Ambiente FORTRAN/OPENMP*. [S.l.]: Trabalho final de Graduação - Universidade Federal de Itajubá, 2017. 16

35 LEONARD, A. Vortex methods for flow simulation. *Journal of Computational Physics*, v. 37, n. 3, p. 289–335, 1980. 16

36 DEGOND, P.; MAS-GALLIC, S. The weighted particle method for convection-diffusion equations. part 1. the case of an isotropic viscosity. *Math. Comp.*, v. 53, p. 485–507, 1989. 16, 17

37 DEGOND, P.; MAS-GALLIC, S. The weighted particle method for convection-diffusion equations. part 2. the anisotropic case. *Math. Comp.*, v. 53, p. 509–525, 1989. 16, 17

38 SHANKAR, S.; VAN DOMMELEN, L. A new diffusion procedure for vortex methods. *J. Comp. Phys.*, v. 127, p. 88–109, 1996. 16

39 FISHELOV, D. A new vortex scheme for viscous flows. *J. Comp. Phys.*, v. 86, p. 211–224, 1990. 16, 17

40 OGAMI, Y.; AKAMATSU, T. Viscous flow simulation using the discrete vortex model – the diffusion velocity method. *Computers & Fluids*, v. 19, p. 433–441, 1991. 16, 17

41 GREENGARD, C. The core spreading vortex method approximates the wrong equation. *Journal of Computational Physics*, v. 61, n. 2, p. 345–348, 1985. 17

42 NAKAJIMA, T.; KIDA, T. A remark of discrete vortex method. derivation from navier-stokes equation. *TRANSACTIONS OF THE JAPAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS Series B*, The Japan Society of Mechanical Engineers, v. 56, n. 531, p. 3284–3291, 1990. 17

43 KAMEMOTO, K.; MIYASAKA, T. Development of a vortex and heat elements method and its application to analysis of unsteady heat transfer around a circular cylinder in a uniform flow. In: . [S.l.: s.n.], 2000. 17

44 ALCâNTARA PEREIRA, L.; HIRATA, M. H. Heat transfer in the wake behind a body using a particle method. In: *Proceedings of the 17th International Congress of Mechanical Engineering*. [S.l.: s.n.], 2003. 17

45 OGAMI, Y. Simulation of heat-fluid motion by the vortex method. *JSME International Journal*, v. 44, p. 513–519, 2001. 18, 57

46 GHONIEM, A. F.; SHERMAN, F. S. Grid-free simulation of diffusion using random walk methods. *Journal of Computational Physics*, v. 61, n. 1, p. 1–37, 1985. 18

47 COLLINS, J. P.; BERNARD, P. S. A gridfree scheme for simulation of natural convection in three dimensions. *J. Comput. Phys.*, v. 369, p. 209–224, 2018. 18

48 MOTEGI, K. et al. Opposing mixed convection heat transfer for turbulent single-phase flows. *International Journal of Energy Research*, v. 2024, p. 1–22, 01 2024. 18

49 CROUCH, J. et al. Influence of surface roughness and free-stream turbulence on crossflow-instability transition. *Procedia IUTAM*, v. 14, p. 295–302, 2015. 18

50 KOO, J.; KLEINSTREUER, C. Analysis of surface roughness effects on heat transfer in micro-conduits. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 48, n. 13, p. 2625–2634, 2005. 19, 84

51 CHATTERJEE, D. Dual role of thermal buoyancy in controlling boundary layer separation around bluff obstacles. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 56, p. 152–158, 2014. 19

52 AL-RUBAY, A. *The Effect of Surface Roughness and Free Stream Turbulence on the Flow and Heat Transfer around a CircularCylinders*. Tese (Doutorado) — The University of Sheffield, 2018. 19, 76, 79, 81, 84

53 ISLAM, M. et al. Flow and heat transfer from heated-unheated tandem cylinders: Effect of diameters, gap ratios and heating scenarios. *Case Studies in Thermal Engineering*, v. 52, p. 103751, 2023. 20

54 CARVALHO, G. F. M. d. et al. Lagrangian vortices interactions using large-eddy simulation (les) and surface roughness model—application for aircraft wake vortices with crosswind. *Applied Sciences*, v. 13, n. 22, 2023. 21, 56, 86

55 CHIARADIA, T. et al. 20 th brazilian congress of thermal sciences and engineering. In: . [S.l.: s.n.], 2024. 21, 56, 86

56 MORAES, P. et al. A numerical study of the flow around a circular cylinder using the corrected core-spreading method with coalescence scheme. In: . [S.l.: s.n.], 2024. 21, 56

57 REYNOLDS, O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc.*, n. 186, p. 123–164, 1895. 27

58 LESIEUR, M.; METAIS, O. New trends in large-eddy simulations of turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 28, n. 1, p. 45–82, 1996. 28

59 SILVEIRA NETO, A. *Escoamentos Turbulentos*: Análise física e modelagem teórica. Uberlândia: Composer, 2020. 28, 33

60 SILVEIRA NETO, A. et al. A numerical investigation of the coherent vortices in turbulence behind a backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 256, p. 1–25, 1993. 30

61 OGAMI, Y. General circulation experiments with the primitive equations 1. the basic experiment. *Mon. Weather Rev.*, v. 91, p. 99–164, 1963. 32

62 LILLY, D. K. *The representation of small-scale turbulence in numerical experiments*. White Plains, NY: Proc. IBM Sci. Comput. Symp. Environ. Sci., IBM Data Process. Div., 1967. 195-210 p. 32

63 CHOLLET, J. P.; LESIEUR, M. Parameterization of small scales of three dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closures. *J. Atmos. Sci.*, v. 38, p. 2747–2757, 1981. 32

64 MÉTAIS, O.; LESIEUR, M. Spectral large-eddy simulation of isotropic and stably stratified turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 239, p. 157–194, 1992. 33, 59

65 FERZIGER, J. H. *Numerical Methods for Engineering Application*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1981. 55

66 LEWIS, R. I. *Vortex Elemento Method for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1991. 56

67 RICCI, J. E. R. *Simulação Numérica do Escoamento ao Redor de um Corpo de Forma Arbitrária, Estacionado nas Imediações de uma Superfície Plana, com o Emprego do Método de Vórtices*. Tese (Doutorado) — Instituto de Engenharia Mecânica-Universidade Federal de Itajubá, 2002. 39, 57

68 MORAES, P. G. *Estudo de Efeitos de Rugosidade Superficial sobre Escoamentos ao Redor de Dois Corpos Rombudos Idênticos e Alinhados In Tandem Utilizando o Método de Vórtices Discretos*. Tese (Doutorado) — Instituto de Engenharia Mecânica-Universidade Federal de Itajubá, 2021. 61

69 MILNE-THOMPSON, L. M. *Theoretical Hydrodynamics*. New York: Mcmillan, 1955. 75

70 SON, J. S.; HANRATTY, T. J. Velocity gradients at the wall for flow around a cylinder at reynolds numbers from 5 × 103 to 105. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 35, n. 2, p. 353–368, 1969. 75

71 ACHENBACH, E.; HEINECKE, E. On vortex shedding from smooth and rough cylinders in the range of reynolds numbers 6×10^3 to 5×10^6. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 109, p. 239–251, 1981. 80, 81

72 GREENGARD, L.; ROKHLIN, V. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Physics*, v. 73, n. 2, p. 325–348, 1987. 86

73 RICCIARDI, T. R. *Fast Multipole Discrete Vortex Method Applied to Unsteady Flow Simulations*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia Mecânica – UNICAMP, 2016. 86

74 ACHENBACH, E. Influence of surface roughness on the cross-flow around a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 46, n. 2, p. 321–335, 1971. 79, 86

75 CARVALHO, G. et al. Lagrangian vortices with corrected core-spreading method and large eddy simulation (les). In: . [S.l.: s.n.], 2023. 86

APÊNDICE A – O Vórtice Discreto de Lamb

Seja um vórtice pontual num domínio Ω de intensidade Γ e distribuição radial de vorticidade $\omega(r,t)$, com as seguintes dimensões[1]:

$$[\Gamma] = [L^2 T^{-1}]$$

$$[\omega] = [T^{-1}]$$

A intensidade do vórtice pontual é dada por:

$$\Gamma = \int_{\Omega} \omega dA = \int_0^{\infty} \omega 2\pi r dr \tag{A.1}$$

A Equação do Transporte da Vorticidade em coordenadas cilíndricas é escrita como:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial \omega}{\partial \theta} + w\frac{\partial \omega}{\partial w} = \nu \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right] \tag{A.2}$$

Uma vez que o problema apresenta simetria radial e para um problema puramente difusivo, i.e., $u_r = 0$ e $\partial_\theta = 0$, vem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\nu}{r}\left(\frac{r\partial \omega}{\partial r} \right) \tag{A.3}$$

Neste momento, utiliza=se a análise dimensional a fim de obter a expressão da velocidade tangencial induzida pelo vórtice pontual.

Inicialmente, se estabelece a relação funcional para as grandezas:

$$F\left(\frac{\omega}{\Gamma}, r, t, \nu \right) = 0 \tag{A.4}$$

sendo $n = 4$ grandezas dimensionais.

Neste momento obtém-se a ordem da matriz dimensional, visto na Tab. A.1.

O determinante não nulo com mais grandezas é obtido, por exemplo, da coluna dos r e t, linhas L e T.

Desta forma, tem-se $r = 2$ e, portanto, $n - r = 4 - 2 = 2\Pi$ a serem determinados.

Então usamos o método expedito para a obtenção, selecionando como segue:

[1] Este material foi adaptado das notas de aula da disciplina MMF11: Dinâmica da Vorticidade, oferecida pelo PPG-EM da UNIFEI, ministrada pelo professor Dr. Luiz Antonio Alcântara Pereira no primeiro semestre de 2024.

Tabela A.1 – Matriz dimensional do problema.

	$\frac{\omega}{\Gamma}$	r	t	ν
M	0	0	0	0
L	-2	1	0	2
T	0	0	1	-1
θ	0	0	0	0

- **Comprimento ou velocidade representativa do escoamento adotado**: tempo representativo: $t = T \rightarrow T = t$
- **Propriedade dos fluidos**: Propriedade dos fluidos: $\nu = L^2T^{-1} \rightarrow L = (\nu t)^{1/2}$

$$\Pi_1 : \frac{\omega}{\Gamma} = L^{-2} = \left[(\nu t)^{1/2}\right]^{-2} = (\nu t)^{-1} \longrightarrow \Pi_1 = \frac{\omega}{\Gamma}\nu t \tag{A.5}$$

$$\Pi_2 : r = L = (\nu t)^{1/2} \longrightarrow \Pi_2 = \frac{r}{\sqrt{\nu t}} \tag{A.6}$$

Estabelecendo agora a relação adimensional $\vartheta(\Pi_1, \Pi_2) = 0$:

$$\vartheta\left(\frac{\omega}{\Gamma}\nu t, \frac{r}{\sqrt{\nu t}}\right) = 0 \tag{A.7}$$

Seja $\eta = \frac{r}{\sqrt{\nu t}}$, pode-se escrever a Eq. A.7 como:

$$\omega = \frac{\Gamma}{\nu t} f(\eta) \tag{A.8}$$

A fim de resolver a Eq. A.3 com a informação da Eq. A.8, deve-se calcular as derivadas que são obtidas facilmente com o uso da regra do produto e da cadeia do cálculo:

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{\nu t}} \tag{A.9}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2} r \nu (\nu t)^{-3/2} = -\frac{1}{2}\frac{r}{\sqrt{\nu t}}\frac{1}{t} = -\frac{\eta}{2t} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= -\frac{\Gamma \nu}{(\nu t)^2} f(\eta) + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\Gamma}{\nu t} \\ &= -\frac{\Gamma}{\nu t^2} f(\eta) + \frac{\partial f}{\partial \eta}\left(-\frac{\eta}{2t}\right)\frac{\Gamma}{\nu t} \\ &= -\frac{\Gamma}{\nu t^2}\left[f(\eta) + \frac{1}{2}\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}\right] \end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\Gamma}{\nu t}\frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{\Gamma}{\nu t}\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{1}{\sqrt{\nu t}} = \frac{\Gamma}{\nu t\sqrt{\nu t}}\frac{\partial f}{\partial \eta} \tag{A.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) = \frac{\partial \omega}{\partial r} + r\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = \frac{\Gamma}{\nu t\sqrt{\nu t}}\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{r\Gamma}{\nu t\sqrt{\nu t}}\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{\Gamma}{\nu t\sqrt{\nu t}}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} + \eta\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \tag{A.13}$$

Usando essas derivadas na Eq. A.3, vem:

$$\left(-f-\frac{1}{2}\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\frac{\Gamma}{\nu t^2}=\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial f}{\partial \eta}-\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)\frac{\Gamma}{\nu t^2} \tag{A.14}$$

Rearranjando os termos da E. A.14, ficamos com a seguinte equação diferencial parcial:

$$2\eta\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial f}{\partial \eta}+\eta^2\frac{\partial f}{\partial \eta}+2f\eta=0 \tag{A.15}$$

Por simplicidade de notação, as derivadas parciais de η serão escritas sem a notação de Leibniz:

$$2\eta f''+2f'+\eta^2 f'+2f\eta=0 \tag{A.16}$$

Mas a regra do produto permite escrever (derivando em relação a η):

$$2(\eta f')'=2\eta f''+2f' \tag{A.17}$$

$$(\eta^2 f)'=\eta^2 f'+2f\eta \tag{A.18}$$

Observando que estas duas derivadas aparecem na Eq. A.16, pode-se reescrevê-la:

$$2(\eta f')'+(\eta^2 f)'=0 \tag{A.19}$$

Integrando a Eq. A.19 em relação a η, vem:

$$2\eta f'+\eta^2 f=A \tag{A.20}$$

Onde $A=0$, pois $f'(0)=0$.

Dividindo membro a membro por η, e usando o método de separação, vem:

$$2f'+\eta f=0\longrightarrow 2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}+\eta f=0\longrightarrow \frac{\mathrm{d}f}{f}=-\frac{\eta}{2}\mathrm{d}\eta \tag{A.21}$$

Integrando:

$$\ln f=-\frac{\eta^2}{4}+C \tag{A.22}$$

Sendo C uma constante, vale dizer que $C=\ln B$, $B,C\in\mathbb{R}^*$. Assim:

$$\ln f-\ln B=\ln\left(\frac{f}{B}\right)=-\frac{\eta^2}{4} \tag{A.23}$$

Portanto:

$$f(\eta)=B\exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) \tag{A.24}$$

Da Eq. A.8 e substituindo o valor de $f(\eta)$:

$$\omega(r,t) = \frac{\Gamma B}{\nu t}\exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{\sqrt{\nu t}}\right)^2\right] = \frac{\Gamma B}{\nu t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \tag{A.25}$$

uma vez que $\nu > 0$ e $t > 0$.

Considerando a Eq. A.1, pode-se escolher $B = \frac{1}{4\pi}$, resultando em:

$$\omega(r,t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \tag{A.26}$$

Caso se queira usar o conceito de raio de penetração da vorticidade, $\sigma = \sqrt{4\nu t}$, a Eq. A.26 assume a seguinte forma:

$$\omega(r,t) = \frac{\Gamma}{\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \tag{A.27}$$

A definição de vorticidade ($\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$) permite calcular a velocidade tangencial induzida por um vórtice discreto de Lamb:

$$\omega = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) \longrightarrow u_\theta = \frac{1}{r}\int_0^r \omega r dr \tag{A.28}$$

Substituindo a Eq. A.27 em Eq. A.28, vem:

$$u_\theta = \frac{1}{r}\int_0^r \frac{\Gamma r}{\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right)dr \tag{A.29}$$

Por substituição, seja $u = -r^2/\sigma^2 \rightarrow du = -2rdr/\sigma^2 \rightarrow rdr = -\frac{\sigma^2}{2}du$. Retornando à integral, agora em u e alterando os limites de integração apropriadamente:

$$\begin{aligned} u_\theta &= \frac{\Gamma}{\pi\sigma^2 r}\int_0^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} -\frac{\sigma^2}{2}\exp(u)du \\ &= \frac{-\Gamma}{2\pi r}\int_0^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} \exp(u)du \\ &= \frac{-\Gamma}{2\pi r}\exp(u)|_0^{-\frac{r^2}{2}} \\ u_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1-\exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{A.30}$$

É de interesse comparar a indução de velocidade do vórtice de Lamb quando comparado a um vórtice potencial, como é mostrado na Fig. A.1.

Adicionalmente, a vorticidade tem sua distribuição normal de acordo com a Fig. A.2. Aqui, vale ressaltar que abordagens numéricas apresentam diferentes parâmetros de recobrimento, que representa a razão entre distância mínima média entre os vórtices que compõem a

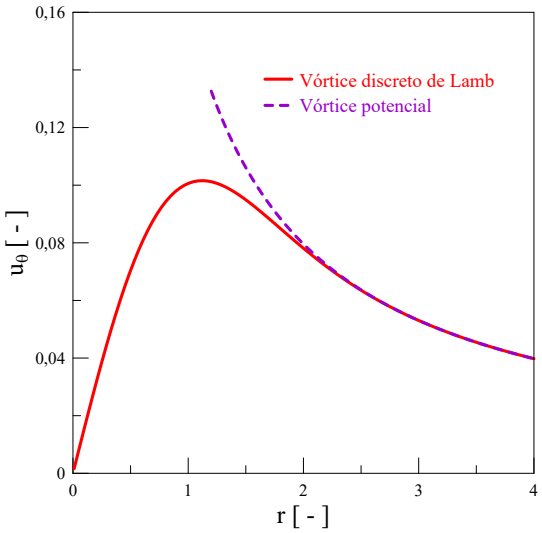


Figura A.1 – Velocidade tangencial induzida por um vórtice discreto de Lamb.

nuvem e o raio do núcleo do vórtice. Nisso, surge um parâmetro chamado de *função de corte*. Chamando-a de λ, a Eq. A.27 é reescrita como:

$$\omega(r,t) = \frac{\Gamma}{\lambda\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{\lambda\sigma^2}\right) \tag{A.31}$$

Este parâmetro λ é uma largura de corte, escolhida como 1,2 ou 4 pelos autores. Um valor mais alto requer um recobrimento maior a fim de preservar a convergência do método. Nesta abordagem bidimensional, escolhe-se $\lambda = 1$.

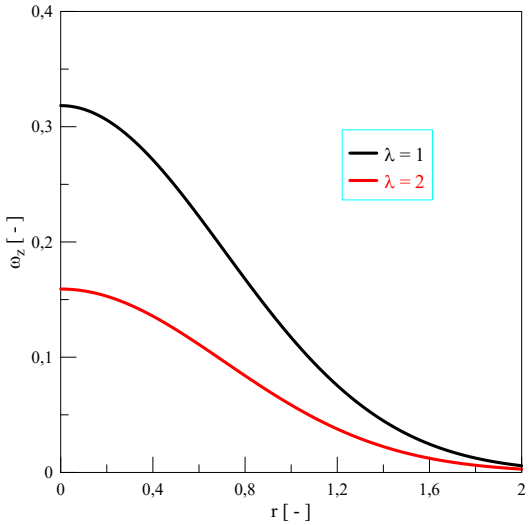


Figura A.2 – Distribuição de vorticidade de um vórtice discreto de Lamb para diferentes funções corte.

APÊNDICE B – A Partícula de Temperatura

Seja uma partícula de temperatura pontual em um domínio bidimensional Ω e intensidade Q. A distribuição radial da temperatura é $T(r,t)$. Q e T possuem as seguintes dimensões[1]:

$[Q] = [L^2\theta]$.

$[T] = [\theta]$.

Define-se a intensidade da partícula de temperatura como:

$$Q \coloneqq \int_0^\infty T 2\pi r dr \tag{B.1}$$

A Equação da Energia pode ser escrita em coordenadas cilíndricas como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + W\frac{\partial T}{\partial z} = \alpha\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \frac{\overbrace{\dot{q}}^{0}}{\rho c_p} \tag{B.2}$$

Considerando a simetria do problema e levando em conta apenas efeitos difusivos na Eq. B.2, isto é, $\left(U_r = 0, \frac{\partial}{\partial \theta} = 0\right)$, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial T}{\partial r}\right) \tag{B.3}$$

A seguir, utiliza-se argumentos de Análise Dimensional para se obter a expressão da temperatura induzida por uma partícula de temperatura. Inicialmente, se estabelece a relação funcional:

$$F\left(\frac{T}{Q}, r, t, \alpha\right) = 0 \tag{B.4}$$

sendo n = 4 grandezas.

Em seguida, a ordem (r) da matriz dimensional é obtida. Veja a Tab. B.1.

O determinante não nulo com mais grandezas é obtido, por exemplo, pela coluna dos r e t, linhas L e T. Logo, tem-se $r = 2$ e, portanto, $n - r = 4 - 2 = 2\Pi$'s a serem determinados. Estes adimensionais são obtidos por meio de um método expedito.

[1] Este material foi adaptado das notas de aula da disciplina MMF11: Dinâmica da Vorticidade, oferecida pelo PPG-EM da UNIFEI, ministrada pelo professor Dr. Luiz Antonio Alcântara Pereira no primeiro semestre de 2024.

Tabela B.1 – Matriz dimensional do problema da partícula de temperatura.

	$\frac{T}{Q}$	r	t	α
M	0	0	0	0
L	-2	1	0	2
T	0	0	1	-1
θ	0	0	0	0

- **Comprimento ou velocidade representativa do escoamento adotado**: tempo representativo: $t = T \rightarrow T = t$
- **Propriedade dos fluidos**: Propriedade dos fluidos: $\alpha = L^2T^{-1} \rightarrow L = (\alpha t)^{1/2}$

$$\Pi_1 : \frac{T}{Q} = L^{-2} = \left[(\alpha t)^{1/2}\right]^{-2} = (\alpha t)^{-1} \longrightarrow \Pi_1 = \frac{T}{Q}\alpha t \tag{B.5}$$

$$\Pi_2 : r = L = (\alpha t)^{1/2} \longrightarrow \Pi_2 = \frac{r}{\sqrt{\alpha t}} \tag{B.6}$$

Estabelecendo a relação adimensional: $\vartheta(\Pi_1, \Pi_2) = 0$

$$\vartheta\left(\frac{T}{Q}\alpha t, \frac{r}{\sqrt{\alpha t}}\right) = 0 \tag{B.7}$$

Seja $\eta = \frac{r}{\sqrt{\alpha t}}$, a relação adimensional definida pela Eq. B.7 pode ser escrita como:

$$T = \frac{Q}{\alpha t} f(\eta) \tag{B.8}$$

As derivadas da Eq. B.8 tomam a seguinte forma:

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{\alpha t}} \tag{B.9}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t} \tag{B.10}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{Q}{\alpha t^2}\left[f(\eta) + \frac{1}{2}\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}\right] \tag{B.11}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{Q}{\alpha t\sqrt{\alpha t}}\frac{\partial f}{\partial \eta} \tag{B.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{Q}{\alpha t\sqrt{\alpha t}}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} + \eta\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \tag{B.13}$$

$$\frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{Q}{\eta\alpha t^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} + \eta\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \tag{B.14}$$

Utilizando as derivadas na Eq.B.3, vem:

$$\left(-f - \frac{1}{2}\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\frac{Q}{\alpha t^2} = \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)\frac{Q}{\alpha t^2} \tag{B.15}$$

Simplificando o termo $\frac{Q}{\alpha t^2}$ em ambos os lados e organizando, vem:

$$2\eta\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial f}{\partial\eta}+\eta^2\frac{\partial f}{\partial\eta}+2f\eta=0 \tag{B.16}$$

Alternativamente, abrindo mão da notação de Leibniz de derivadas:

$$2\eta f''+2f'+\eta^2 f'+2f\eta=0 \tag{B.17}$$

Porém, na diferenciação em relação a η, pode-se escrever a Eq. B.17 de forma alternativa:

$$2(\eta f')'+(\eta^2 f)'=0 \tag{B.18}$$

Integrando a Eq. B.18 em relação a η, tem-se:

$$2\eta f'+\eta^2 f=A \tag{B.19}$$

onde A = 0, uma vez que $f'(0)=0$.

Dividindo membro a membro por η, e usando o método de separação, vem:

$$2f'+\eta f=0\longrightarrow 2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}+\eta f=0\longrightarrow\frac{\mathrm{d}f}{f}=-\frac{\eta}{2}\mathrm{d}\eta \tag{B.20}$$

Integrando:

$$\ln f=-\frac{\eta^2}{4}+C \tag{B.21}$$

Sendo C uma constante, vale dizer que $C=\ln B$, $B,C\in\mathbb{R}^*$. Assim:

$$\ln f-\ln B=\ln\left(\frac{f}{B}\right)=-\frac{\eta^2}{4} \tag{B.22}$$

Portanto:

$$f(\eta)=B\exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) \tag{B.23}$$

Da Eq. B.8, substitui-se o valor de $f(\eta)$

$$T(r,t)=\frac{QB}{\alpha t}\exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{\sqrt{\alpha t}}\right)^2\right]=\frac{QB}{\alpha t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\alpha t}\right) \tag{B.24}$$

Escolhendo-se $B=\frac{1}{4\pi}$, tem-se, em termos de variáveis dimensionais, a distribuição gaussiana de temperatura de uma partícula de temperatura de intensidade Q:

$$T(r,t)=\frac{Q}{4\pi\alpha t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \tag{B.25}$$

É possível fazer uma analogia com o conceito de raio de penetração do calor a partir de uma superfície sólida aquecida trocando calor com o meio fluido durante um incremento de tempo, define-se o raio do núcleo da partícula como $\sigma_T=\sqrt{4\alpha t}$, o que permite se escrever a Eq. B.26 como:

$$T(r,t)=\frac{Q}{4\pi\alpha t}\exp\left(-\frac{r^2}{\sigma_T^2}\right) \tag{B.26}$$

APÊNDICE C – Algoritmo do Código Computacional

C.1 Introdução

Este apêndice tratará da estrutura computacional do algoritmo implementado para simular o escoamento ao redor de um corpo rombudo com parede hidraulicamente rugosa e que troca calor com o fluido. Inicialmente serão descritas as subrotinas que compõem o código e, em seguida, a ordem de chamada. Antes disso, é necessário descrever parâmetros do programa que são utilizados para alocar memória aos vetores.

- **bm**: Número máximo de corpos que podem ser simulados;
- **pm**: Relacionado ao número máximo de painéis. Deve ser sempre superior porque as matrizes receberão uma linha adicional para considerar condições de contorno;
- **zm**: Relacionado ao número máximo de partículas (vórtices discretos e partículas de temperatura) que o programa terá no último instante da simulação;
- **am**: Relacionado ao número de incrementos de tempo da simulação;
- **pmr**: Número máximo de pontos rugosos dispostos sobre todos os semi-círculos dispostos sobre o corpo discretizado.

C.2 Descrição das Rotinas

- `Input.for`: Rotina responsável por ler os dados de entrada de `INPUT.DAT`, inicializar as variáveis do programa e abrir os arquivos de saída;
- `Discret.for`: Gera o vetor que armazena os pontos extremos,`ep(pm,2,bm)`, de cada painel que compõe o corpo;
- `Datapr.for`: Determina a região retangular ao redor do corpo que será usada para a etapa de reflexão. Também define, para cada painel, seus pontos de início e fim (vetores `pt1(pm,2,bm)` e `pt2(pm,2,bm)`), sua inclinação com o eixo x_1, `fi(pm,bm)`, pontos de controle, `co(pm,2,bm)`, e de desprendimento, `pshed(pm,2,bm)`;
- `Geometry.for`: Preenche o arquivo `DISCRET.DAT` contendo os pontos de desprendimento, controle, de início e fim dos painéis, o comprimento de cada painel e seu ângulo;

- `Dataprr.for`: Preenche o arquivo `DISCRETR.DAT` com os *NR* pontos rugosos, `prough(pmr,2,bm)`, de cada painel;
- `Coups.for`: Gera a matriz de influência de fontes, [`COUPS`], calculando a velocidade induzida em cada ponto de controle devido às fontes que discretizam o corpo;
- `Coupv.for`: Gera a matriz de influência de vórtices, [`COUPV`], calculando a velocidade induzida pelos vórtices nascentes em `pshed` nos pontos de controle `co`;
- `Modcoup.for`: Acrescenta uma linha adicional à matriz `coup` correspondente a fim de acrescentar a equação responsável pela conservação da circulação (para `COUPV`) ou comnservação da massa (para `COUPS`);
- `Couppr.for`: Gera a matriz de influência de pressão, [`COUPP`], calculando a velocidade induzida por cada painel nos *mb* pontos de controle;
- `Rhss.for`: Calcula o vetor lado direito-fontes, considerando em cada ponto de controle a velocidade normal induzida pelo escoamento incidente e nuvem de vórtices discretos;
- `Gausspiv.for`: Resolve sistemas lineares da forma $[\texttt{COUP}]\{\texttt{X}\} = \{\texttt{RHS}\}$ por eliminação de Gauss;
- `Verifmass.for`: Verifica a conservação da massa, isto é, a soma das intensidades de cada fonte pelo tamanho do respectivo painel, e preenche este valor e informações do último painel no arquivo `CTRLS.DAT`;
- `Compusvs.for`: Calcula a velocidade induzida em cada ponto de controle pela indução das fontes de densidade uniforme distribuídas nos painéis;
- `rhsv.for`: Calcula o vetor lado direito-vórtices, considerando para cada ponto de controle a velocidade tangencial induzida pelo escoamento incidente e nuvem de vórtices discretos;
- `Modrhs.for`: Adiciona uma linha adicional ao vetor lado direito correspondente a fim de adicionar a condição de conservação de circulação ou da massa ao sistema linear;
- `Mini_quad.for`: Multiplica a matriz de influência e o vetor coluna lado direito pela transposta da matriz de influência, aplicando o Método de Mínimos Quadrados;
- `Verifcirculat.for`: Soma a intensidade de todos os vórtices discretos nascentes e escreve este valor no arquivo `CTRLV.DAT`;
- `Generat.for`: Gera os *mb* vórtices discretos nascentes nos pontos de desprendimento de cada painel;

- `Compumvm.for`: Calcula a velocidade total induzida em cada ponto de controle devido à nuvem de vórtices discretos de Lamb (z vórtices discretos);

- `Compumvmextra.for`: Calcula a velocidade total induzida em cada ponto de controle devido à nuvem de vórtices discretos existentes antes da geração no início do incremente de tempo do processo iterativo ($z - mb$ vórtices discretos);

- `Generatextra.for`: Corrige a intensidade dos vórtices discretos de Lamb nascentes dentro do processo iterativo para verificar a condição de escorregamento nulo;

- `Compubvbr.for`: Calcula as velocidades induzidas nos pontos de desprendimento e nos pontos rugosos devido ao escoamento incidente e aos painéis que discretizam o corpo;

- `Compuvvvr.for`: Calcula a velocidade induzida nos pontos de desprendimentos e nos pontos rugosos devido à nuvem de vórtices discretos de Lamb com o uso da Lei de Biot-Savart;

- `Roughness.for`: Esta rotina calcula a viscosidade turbulenta nos pontos de desprendimento chamando a sub-rotina `Turbviscr.for`. Em seguida, atualiza o raio do núcleo do vórtice discreto e seu ponto de desprendimento devido aos efeitos de rugosidade superficial, como mostrado na Seção 4.9;

- `Turbviscr.for`: Calcula a viscosidade turbulenta nos pontos turbulentos utilizando a FEVO2 considerando a influência dos *NR* pontos rugosos dispostos sobre semi-círculos em torno de cada painel (vide Fig. 4.2);

- `Coupvr.for`: Matriz de influência auxiliar que calcula o efeito dos vórtices discretos nascentes em cada ponto de controle, considerando o raio do núcleo modificado pelos efeitos de rugosidade superficial;

- `Generatr.for`: Gera os *mb* novos vórtices discretos nos pontos de desprendimento rugosos, `pshedr`, atualizando os raios do núcleo e intensidade gerados para uma parede hidraulicamente lisa, de acordo com a Eq. 4.70;

- `Printrough.for`: Abre os arquivos `VELROUGHXXXX.DAT` e `ROUGHXXXX.DAT`. No primeiro, preenche as velocidades de cada ponto de desprendimento e em cada ponto rugoso. O segundo arquivo escreve os pontos de desprendimento rugosos, a viscosidade turbulenta em cada um deles, o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb rugoso nascente e a intensidade deste vórtice;

- `Velfield.for`: Abre o arquivo `ADERENCIAXXXX.DAT`, calcula e preenche em cada arquivo as velocidades normais e tangenciais em cada ponto de controle;

- `Compubvb.for`: Calcula as componentes da velocidade de advecção de cada vórtice discreto de Lamb devido à contribuição dos painéis de fontes e do escoamento incidente;

- `Compuavvav.for`: Realiza a interação vórtice-vórtice. A lei de Biot-Savart é utilizada, conforme explicado na Seção 4.5;

- `Rhsp.for`: Cria o vetor coluna do lado direito-pressão, conforme a Eq. 4.56;

- `Pressure.for`: Resolve o sistema linear da Eq. 4.59, obtendo os valores do trabalho específico, $\tilde{Y}$, e calcula os coeficientes de arrasto e sustentação, de acordo com as Eqs. 4.62 e 4.63. Em seguida, preenche o arquivo `FORC.DAT` com o instante da simulação, coeficientes de arrasto e sustentação. Este arquivo é utilizado para construir as curvas de arrasto e sustentação;

- `Generationt.for`: Gera as partículas de temperatura nascentes a cada instante e suas intensidades de acordo com a Lei de Fourier Modificada, Eq. 4.19;

- `Tempco.for`: Verifica a temperatura induzida em cada ponto de controle a fim de assegurar a condição de temperatura constante na parede;

- `Roughness_t.for`: Utiliza a FEVO2 para calcular a difusividade térmica turbulenta local e realizar um incremento na intensidade de cada partícula de temperatura. Também realiza o incremento do raio do núcleo da partícula e ajusta seu ponto de desprendimento;

- `Generattempr.for`: Atribui os valores de posição e intensidade às partículas de temperaturas que foram geradas para uma parede hidraulicamente lisa a fim de considerar a altura média de rugosidade superficial do cilindro;

- `Compubvbt.for`: Calcula a contribuição do corpo e escoamento incidente para se obter a velocidade de cada partícula de temperatura;

- `Compuatvat.for`: Calcula a interação vórtice-temperatura, na qual os vórtices discretos induzem velocidade nas partículas de temperatura;

- `Domain.for`: Calcula os valores mínimos e máximos das posições em x_1 e x_2 que possuem vórtices discretos ou partículas de temperatura a fim de gerar a estrutura de caixas da aceleração da turbulência;

- `Boundary.for`: Aloca memória para as variáveis box e boxt, que farão o agrupamento local das partículas da nuvem e das camadas-limites. Ambas as caixas possuem as mesmas dimensões, mas a primeira somente comporta vórtices discretos, enquanto a segunda considera apenas partículas de temperatura;

- `Box_structure.for`: Verifica a qual caixa pertence cada vórtice discreto e partícula de temperatura;

- `Turbulence.for`: Calcula a viscosidade turbulenta e difusividade térmica turbulenta em cada vórtice discreto de Lamb e partícula de temperatura, respectivamente. Os cálculos

consideram uma coroa em torno de cada partícula e verifica apenas os vórtices discretos na própria caixa e nas oito adjacentes. Tanto para vórtices discretos quanto para partículas de temperatura é utilizada a nuvem de vórtices para o cálculo de ν_T e α_T, devido à necessidade de se obter a flutuação de velocidades local.

- `Advec.for`: Realiza a advecção dos vórtices discretos de Lamb e das partículas de temperatura pelo Método de Euler;
- `Diffus.for`: Realiza a difusão de cada partícula por meio do Método de Avanço Randômico;
- `Radreflection.for`: Reflete as partículas que podem ter migrado para o interior do cilindro durante a advecção ou difusão para que retornem ao domínio fluido;
- `Natconvec.for`: Caso Ri $\neq 0$, realiza a convecção natural dos vórtices discretos devido às partículas de temperatura. Isto é feito considerando o gradiente de temperatura à esquerda e direita de cada vórtice discreto de Lamb;
- `Print.for`: Abre e preenche os arquivos de esteira `WKXXXX.DAT`,`WTXXXX.DAT`, que possuem as informações de posição, intensidade e raio do núcleo de cada vórtice discreto e partícula de temperatura naquele instante da simulação. Também abre e preenche os arquivos `CP1XXXX.DAT` que armazenam o coeficiente de pressão em cada instante de tempo para cada ângulo, sendo 0° o bordo de ataque;
- `Tempshed.for`: Calcula a temperatura induzida pela nuvem nos pontos de desprendimento das partículas de temperatura hidraulicamente lisa;
- `Nusselt.for`: Calcula o número de Nusselt médio ao longo da superfície do cilindro em cada instante de tempo;
- `Average.for`: Gera os arquivos de saída de coeficiente de pressão médio e fecha os arquivos abertos na subrotina `Input.for`;
- `Turbmesh.for`: Preenche as posições e as viscosidades turbulentas e difusividades térmicas turbulentas de cada vórtice discreto e partícula de temperatura no instante final de tempo da simulação.

C.3 Algoritmo Computacional

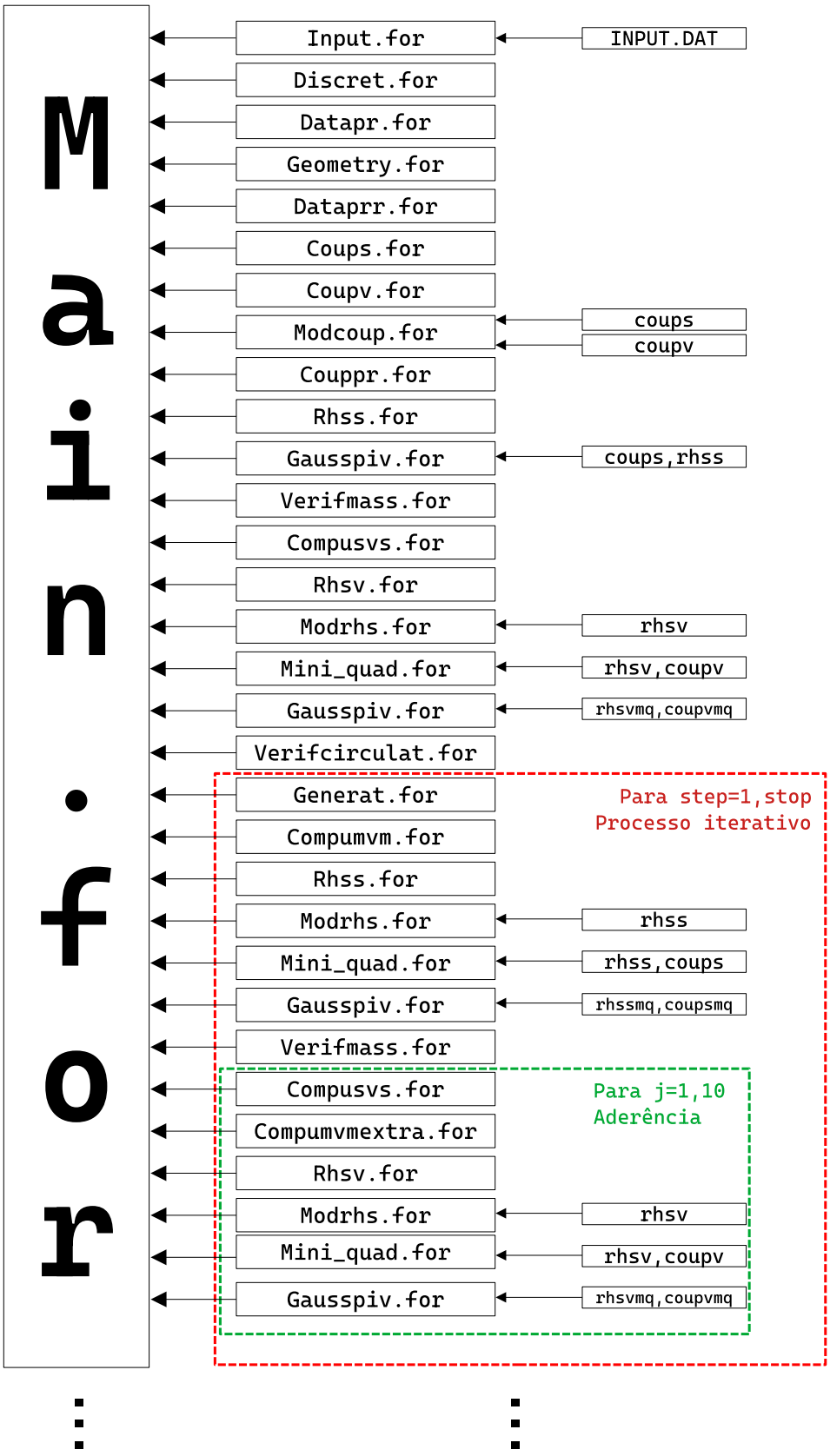


Figura C.1 – Fluxograma do código parte 1/3. Fonte: O Autor.

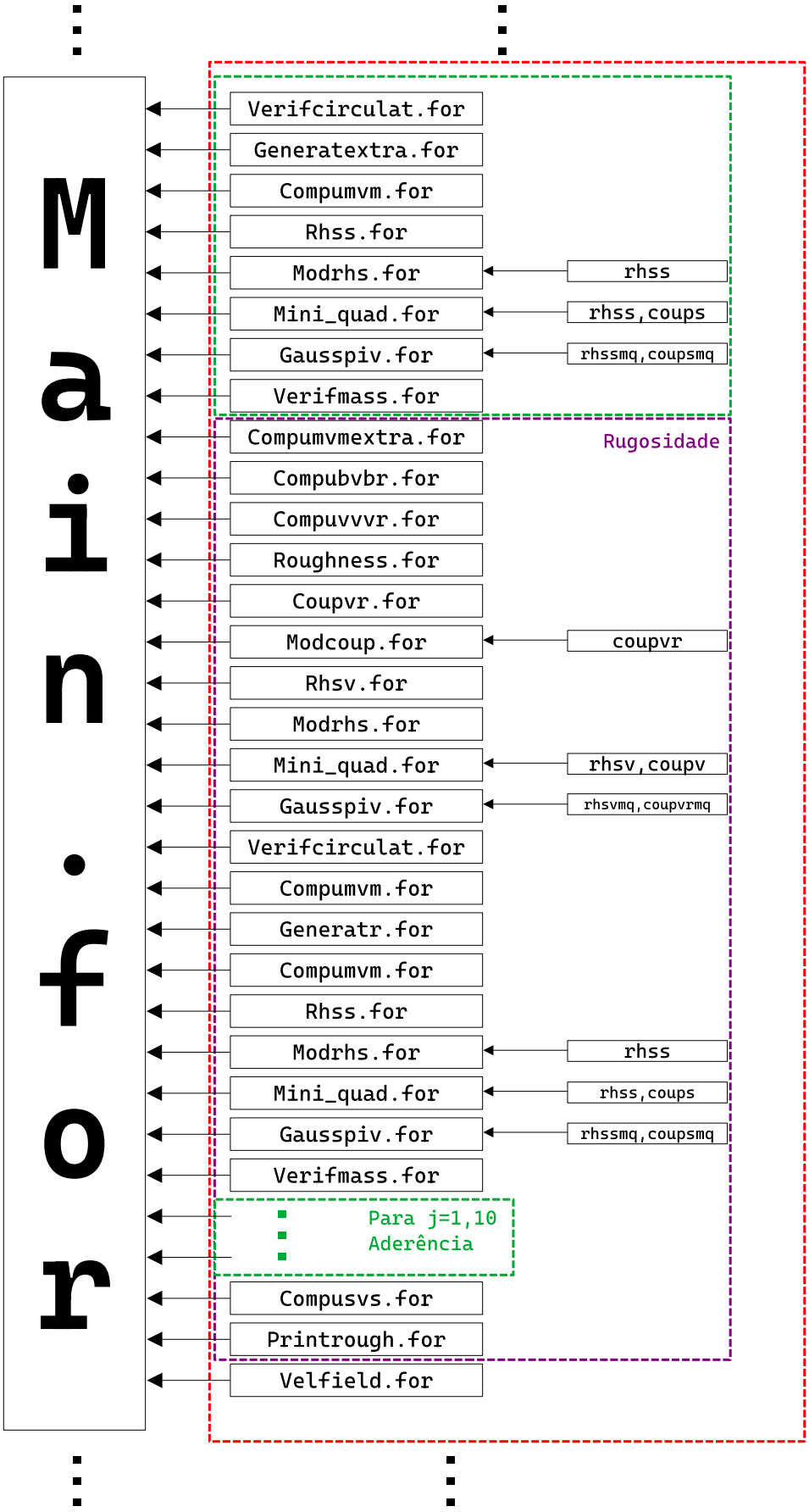


Figura C.2 – Fluxograma do código parte 2/3. Fonte: O Autor.

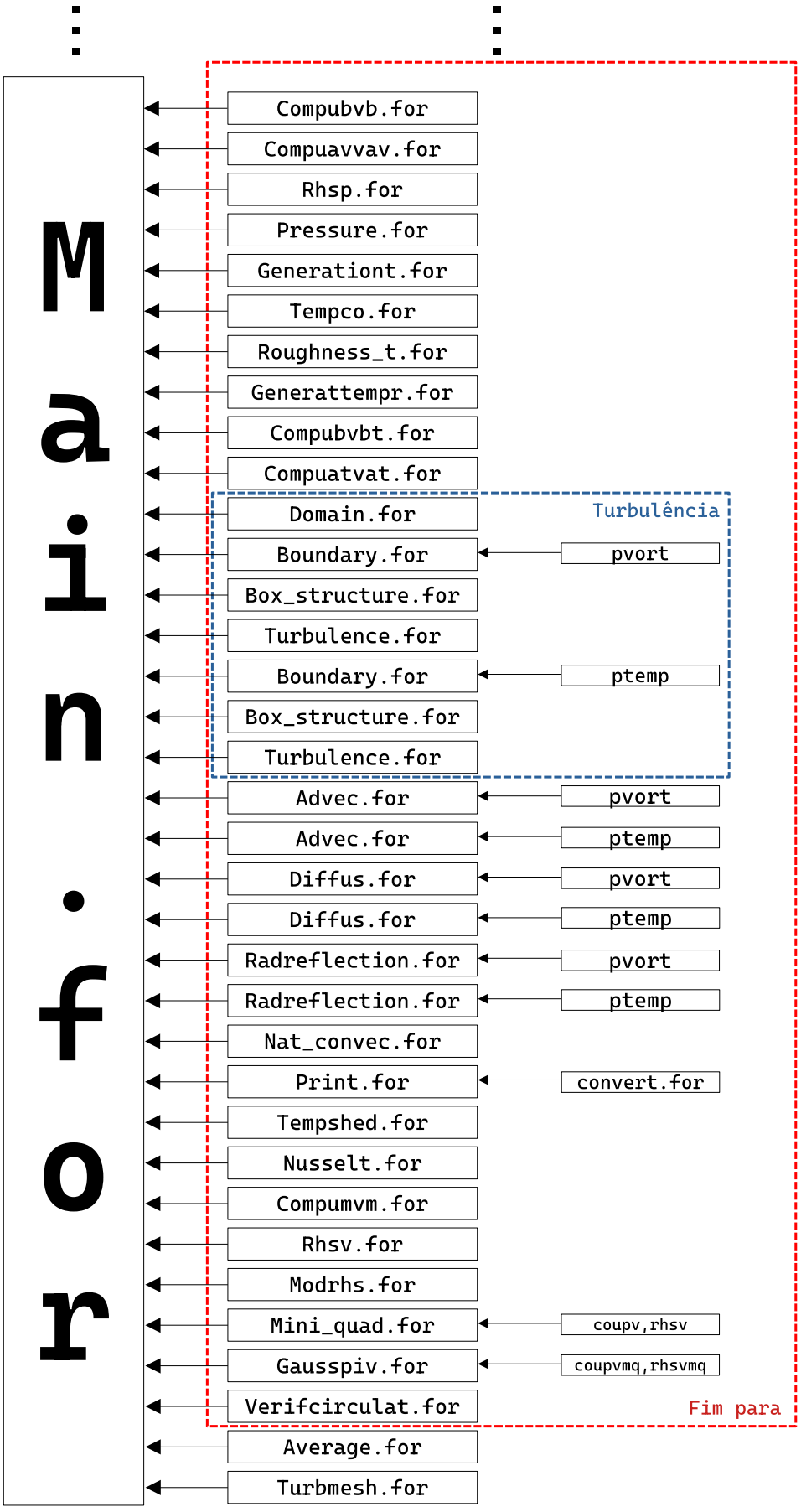


Figura C.3 – Fluxograma do código parte 3/3. Fonte: O Autor.