

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

MATEUS ATHIE

**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS: UM
ESTUDO EM UMA DISCIPLINA DE CÁLCULO**

ITAJUBÁ
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

MATEUS ATHIE

**História da Matemática e conhecimentos matemáticos: um estudo em uma disciplina de
cálculo**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação “Strictu Sensu” Mestrado Acadêmico em Educação em Ciências, da Universidade Federal de Itajubá, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Educação em Ciências.

Área de Concentração: Educação em Ciências

Orientadora: Profa. Dra. Mariana Feiteiro Cavallari Silva

Coorientador: Prof. Dr. Rodrigo Silva Lima

ITAJUBÁ
2025

**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS: UM
ESTUDO EM UMA DISCIPLINA DE CÁLCULO**

MATEUS ATHIE

Dissertação defendida e aprovada para obtenção do grau de mestre em Educação em Ciências.

Itajubá, em 31 de janeiro de 2025.

Comissão Examinadora:

Orientadora – Profa. Dra. Mariana Feiteiro Cavalari

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ/UNIFEI

Profa. Dra. Eliane Matesco Cristóvão

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ/UNIFEI

Profa. Dra. Sabrina Bonfim

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL/UFMS

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha família, que me acompanhou e me apoiou durante todo o processo de formação, sempre incentivando e demonstrando carinho e amor, de forma a me manter no caminho certo e nunca desistir.

Gostaria, também, de agradecer a Professora Doutora Mariana Feiteiro Cavalari Silva, que me orientou não apenas com questões relacionadas a pesquisa, mas também com questões da vida, que pretendo levar adiante comigo.

Ao Professor Doutor Rodrigo Silva Lima, meu coorientador, que também em acompanhou durante a graduação e que é um exemplo de profissional no qual pretendo me espelhar quando iniciar minha jornada como professor de Matemática.

Aos meus amigos, que me acompanharam durante a graduação, compartilhando momentos inesquecíveis, fossem eles bons ou ruins, que me permitiram crescer e ser grato pela vida que tenho.

Em especial, gostaria de agradecer ao grupo que me acompanhou durante a graduação e o mestrado, que passaram seis anos ao meu lado e que me deram força para continuar seguindo em frente. Aos amigos Vitor, Regina e Raissa, sou eternamente grato pela amizade que construímos.

Gostaria de agradecer às Professoras Doutoras Eliane Matesco Cristóvão e Mônica Siqueira, que participaram da banca de qualificação e trouxeram contribuições muito relevantes, que permitiram que o trabalho continuasse sendo desenvolvido. Agradeço também a Professora Doutora Sabrina Bonfim, que aceitou fazer parte da banca de defesa da dissertação e que certamente contribuirá com a pesquisa.

Aos professores que fazem parte do programa, que compartilharam experiências e conhecimentos relevantes durante minha jornada, e que certamente farão a diferença em minha vida. Agradeço também aos demais alunos, com os quais tive o prazer de compartilhar a experiência do mestrado.

Aos licenciandos que participaram da pesquisa e que constituem parte fundamental desta, agradeço por terem se mostrado interessados na proposta e por terem se colocado à disposição de realizar as atividades e entrevistas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) por financiar a pesquisa. Financiamento este essencial para a dedicação à elaboração do trabalho.

RESUMO

A presente pesquisa buscou identificar e analisar quais conhecimentos matemáticos são mobilizados por licenciandos ao cursarem uma disciplina de Cálculo, na qual foram abordadas questões históricas na introdução dos conceitos de Derivada e Integral. A pesquisa foi realizada com 14 licenciandos de uma turma de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de uma Universidade Federal localizada no Sul do estado de Minas Gerais. Nessa disciplina, foram elaboradas aulas introdutórias e duas atividades que abordavam elementos históricos sobre o desenvolvimento de conceitos do Cálculo. Os dados foram coletados com base nos registros produzidos nas duas atividades: gravações em áudio das discussões realizadas durante as atividades; observações anotadas em diário de campo e entrevistas realizadas após o término da disciplina. Os dados foram analisados por meio de triangulação e de uma categorização por semelhança, embasada no referencial proposto por Ball *et al.* (2008), denominado Conhecimento Matemático para o Ensino, conhecido pela sigla MKT, que busca apontar conhecimentos matemáticos que são próprios do professor de Matemática. Os resultados da investigação mostram que os participantes mobilizaram conhecimentos matemáticos referentes ao MKT, sendo que houve uma predominância na mobilização de conhecimentos “comuns”, ou seja, que não são relacionados à docência, como a realização de procedimentos matemáticos corretamente; ao passo de que conhecimentos “especializados”, do docente, tais como justificção e explicação de procedimentos, bem como conhecimento de outros algoritmos de resolução foram identificados com uma menor frequência. Foram, também, identificadas dificuldades dos participantes com relação a conteúdos da Educação Básica. Apesar das dificuldades, os resultados apontam que a presença da HM no curso contribuiu para o aprendizado de alguns participantes da pesquisa. Além disso, entende-se que a proposta permitiu a mobilização de conhecimentos matemáticos para o ensino dos licenciandos.

Palavras-chave: História da Matemática, Conhecimento Matemático para o Ensino, Formação de Professores e Cálculo Diferencial e Integral.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDI – Cálculo Diferencial e Integral

HM – História da Matemática

Unesp – Universidade Estadual Paulista

Crephimat – Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática

BDTD – Banco Digital de Teses e Dissertações

TIC – Tecnologias Informacionais e Comunicacionais

PCK – *Pedagogical Content Knowledge*: Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

MKT – *Mathematical Knowledge for Teaching*: Conhecimento Matemático para o Ensino

CCK – *Common Content Knowledge*: Conhecimento Comum do Conteúdo

SCK – *Specialized Content Knowledge*: Conhecimento Especializado do Conteúdo

HCK – *Horizon Content Knowledge*: Conhecimento do Conteúdo no Horizonte

TCLE - Termo de Comprometimento Livre e Esclarecido

TFC – Teorema Fundamental do Cálculo

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estrutura do MKT.....	22
Figura 2 - Modelo GeoGebra: Método de Leibniz.....	43
Figura 3 - Resolução questão 2 (a).....	44
Figura 4 - Gráfico da função da Atividade de Derivada	45
Figura 5 - Método da Exaustão	47
Figura 6 - Método dos indivisíveis.....	48
Figura 7 - Resolução questão 1 (a).....	51
Figura 8 - Resolução questão 1 (b).....	52
Figura 9 - Resolução questão 1 (b).....	55
Figura 10 - Resolução questão 1 (b).....	55
Figura 11 - Resolução questão 1 (c).....	56
Figura 12 - Resolução questão 1 (c).....	57
Figura 13 - Resolução questão 1 (c).....	58
Figura 14 - Resolução questão 1 (d).....	61
Figura 15 - Resolução questão 1 (a).....	64
Figura 16 - Resolução questão 1 (a).....	64
Figura 17 - Resolução questão 1 (c).....	73

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Pesquisas encontradas	15
Quadro 2 - Programação das aulas e atividades que envolviam aspectos da História do Cálculo.....	30
Quadro 3 - Apresentação dos participantes da pesquisa	33
Quadro 4 - Atividades obtidas ao longo da investigação	34
Quadro 6 - Categorias do CCK mobilizadas por participante.....	54
Quadro 7 - Categorias do SCK mobilizadas por participante	62
Quadro 8 - Conhecimentos mobilizados na atividade sobre derivadas.....	70
Quadro 9 - Conhecimentos mobilizados na atividade sobre integrais	71

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Conhecimentos mobilizados por categoria do CCK	61
Gráfico 2 - Conhecimentos mobilizados por categoria do SCK.....	66

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	10
1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E O ENSINO DE CÁLCULO	15
1.1 SOBRE AS PESQUISAS	17
2. O CONHECIMENTO DOCENTE.....	20
2.2 A ESTRUTURA DO MKT	21
3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	26
3.1 INSERÇÃO DOS ASPECTOS HISTÓRICOS NA DISCIPLINA.....	26
3.2 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS	33
3.3 PROCEDIMENTOS DA ANÁLISE DOS DADOS	36
4. DESCRIÇÃO DAS AULAS QUE ENVOLVEM ASPECTOS HISTÓRICOS	39
4.1 DESCRIÇÃO DAS AULAS SOBRE DERIVADA QUE ENVOLVEM ASPECTOS DA HM	39
4.2 DESCRIÇÃO DAS AULAS SOBRE INTEGRAL QUE ENVOLVEM ASPECTOS DA HM	46
5. CONHECIMENTOS MOBILIZADOS PELOS ESTUDANTES	54
5.1 CONHECIMENTO COMUM DO CONTEÚDO (CCK)	54
5.2 CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO CONTEÚDO (SCK).....	62
5.3 CONHECIMENTO DO CONTEÚDO NO HORIZONTE (HCK).....	68
CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
REFERÊNCIAS	81
APÊNDICE A – ROTEIRO DE ENTREVISTA	84
APÊNDICE B – ATIVIDADE 1 (DERIVADA)	87
APÊNDICE C – ATIVIDADE 2 (INTEGRAL)	89

APRESENTAÇÃO DO PESQUISADOR

Durante o Ensino Fundamental, eu não tinha muita afinidade com a Matemática, passando sufoco nas provas para conseguir atingir a média e, assim, passar de ano. No Ensino Médio, porém, isso mudou, principalmente por conta da professora que tive durante o primeiro ano, que conseguia ensinar aqueles conteúdos até então complicados, de forma que eles fizessem sentido para mim.

Desde aí comecei a olhar a Matemática com outros olhos, com mais curiosidade sobre o que estava por de trás de todas aquelas contas e regras. Com a maior facilidade que adquiri para entender o conteúdo, comecei a ajudar amigos que demonstravam a dificuldade que eu também havia experimentado com a disciplina e, perceber que eles entendiam o que eu estava explicando, era algo que me trazia uma sensação muito boa, sensação essa que começou a fomentar minha vontade de ser professor de matemática.

Quando decidi que este seria o caminho que iria trilhar após a formação no Ensino Médio, recebi muito apoio dos meus ex-professores. Eles me davam dicas e até mesmo abriam espaços durante as aulas para que eu pudesse realizar alguma correção de exercício com o restante da turma.

Ao entrar na universidade, porém, percebi que a Matemática que eu havia aprendido não era a mesma que eu estava vendo nas disciplinas presentes no curso. Muitas disciplinas, na verdade, fugiam completamente daquilo que aprendi ao longo do Ensino Médio. Apesar disso, gostava bastante dos novos ensinamentos, por proporcionarem, de certa forma, aquela sensação de estar descobrindo coisas novas sobre algo que eu já tinha afinidade.

Com isso, me deparei com dois mundos aparentemente distintos, o da Matemática escolar e o da Matemática acadêmica — dois mundos que me interessavam bastante, mas que não tinham, na minha visão, uma conexão muito clara. No decorrer do curso, fui entendendo que essa separação realmente existe, de modo que há diversas discussões e pesquisas sobre como articulá-las.

Esse tópico foi assunto de diversas conversas que tive com amigos da graduação e com professores das disciplinas do curso. Tais discussões faziam com que eu me perguntasse se existia uma maneira de conciliar essas duas Matemáticas, de forma que elas colaborassem para a formação do futuro professor.

Para tentar encontrar uma resposta para essa questão, busquei compreender quais práticas e conhecimentos compõem a profissão docente, já que até então não havia ministrado nenhuma aula e os estágios não haviam começado. Assim, comecei minha jornada de um ano como bolsista do PIBID, o que possibilitou esse contato inicial com a realidade das escolas e com a pesquisa na área de educação.

Participar do PIBID foi uma experiência muito gratificante e que me proporcionou uma visão mais ampla sobre a pergunta que me intrigava. Isso foi possível, pois, no programa os professores da Educação Básica e do Ensino Superior permanecem em constante diálogo, compartilhando conhecimentos e ideias e nós, licenciandos, participávamos dessas discussões, o que tornava o processo extremamente formativo para todos os presentes.

Porém, ainda não estava clara para mim a relação que poderia ser estabelecida entre a Matemática ensinada na Educação Básica e aquela da graduação. Durante a elaboração das aulas que tive a oportunidade de ministrar no PIBID, não consegui encontrar relação direta com os conteúdos que aprendi em disciplinas como Álgebra e Análise. Acredito que isso ocorreu pelo fato de que essas disciplinas, assim como outras, têm foco no ensino de demonstrações e teoremas, sem que seja abordada uma conexão entre o conteúdo e o que será ensinado no Ensino Básico.

Essa situação se repetiu durante os estágios obrigatórios do curso. Eu compreendia melhor as tarefas que envolviam a prática docente, mas ainda não estava clara qual a relação delas com o que eu estava aprendendo com as disciplinas de Matemática do curso. Pensando nisso, decidi, no meu último ano, ser tutor de Cálculo, para que assim eu conseguisse entender o que era necessário para ensinar essas disciplinas pertinentes à Matemática acadêmica.

Como tutor, eu me disponibilizava para tirar dúvidas e explicar partes difíceis do conteúdo para os alunos que estavam cursando a disciplina de Cálculo. Grande parte dessas dúvidas eram provenientes de exercícios de listas que os professores entregavam e, ao ouvir essas dúvidas, percebia que muitas delas não envolviam conteúdos como derivada e limites, mas sim conteúdos de Matemática escolar, como funções e procedimentos algébricos utilizados para manipular essas funções. Logo, me deparava com o desafio de explicar essa Matemática escolar, tendo como base o exercício referente à Matemática acadêmica.

Apesar de, a meu ver, não conseguir estabelecer essa relação de maneira satisfatória, a experiência de ser tutor, mesmo que desafiadora, foi muito formativa, pois permitiu que eu compreendesse um outro lado da questão, que até então eu não tinha tido a oportunidade de

conhecer. Foi pensando em todas essas etapas do meu processo de formação como professor de matemática que decidi, ao fim da graduação, prestar o processo seletivo para o Mestrado em Educação em Ciências, para que fosse possível aprofundar meus conhecimentos e buscar possíveis caminhos para articular a matemática acadêmica com a matemática escolar, o que me levou a elaboração da presente dissertação.

INTRODUÇÃO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), de modo geral, se configura como um dos primeiros contatos dos graduandos com a Matemática abordada no Ensino Superior. Essa disciplina, de acordo com Meyer e Souza Júnior (2002), apresenta um elevado índice de reprovações e de evasões.

Tais índices podem estar relacionados com a dificuldade de os alunos compreenderem os conceitos mais abstratos da disciplina, como a definição de limite e de derivada. Meyer (2003) observou que muitos estudantes que conseguem realizar procedimentos mais mecânicos na disciplina de Cálculo, como calcular a derivada em um ponto através de regras de diferenciação, apresentam dificuldade ao realizar exercícios que exigem a parte mais conceitual do conteúdo.

Para D'Ambrósio (1996), algumas das dificuldades que os alunos enfrentam ao cursarem a disciplina de Cálculo podem ter relação com o fato de que muitos professores têm uma visão romantizada da Matemática, ao considerá-la como acabada e sendo a mesma praticada há dois mil anos atrás. Para esse autor, nesses casos o professor não explicita o fator humano que envolve a Matemática, tornando-a desinteressante e puramente mecânica.

Da mesma forma, Giraldo (2022) aponta o Cálculo como uma disciplina estruturada no aprendizado de procedimentos e técnicas. Tal fato, quando analisado na perspectiva da formação do professor de matemática, aponta para uma falta de conexão entre a formação e a prática docente. Isso acontece, pois, ao aprender Cálculo com foco nas regras e fórmulas relacionadas a conteúdos próprios dessa disciplina, não se estabelece para o futuro docente a relação disso com o que será ensinado futuramente no ambiente escolar da Educação Básica. Logo, apoiado nas ideias apresentadas por Moreira *et al.* (2005), sobre uma dicotomia entre a formação docente e a prática escolar, é possível apontar para a pouca ligação entre o que se aprende no Cálculo com o que será ensinado nas escolas.

De modo a compreender a relevância do CDI nos cursos de Licenciatura em Matemática, Aléssio *et al.* (2020) realizaram entrevistas com docentes de diversos *campi* da Universidade Estadual Paulista (Unesp) que ministram/ministraram esta disciplina. A pesquisa contou com a resposta de 19 docentes, sendo que 18 deles apontaram a obrigatoriedade do Cálculo em cursos de formação de professores.

Dentre as justificativas apresentadas por esses docentes podem ser destacadas a questão do formalismo e do rigor matemático, assim como as diversas aplicações que o Cálculo possui. Contudo, os autores destacam que “[...] as respostas não fornecem elementos que permitam entender a relevância dessa “base sólida”, “conceitos e aplicações” na prática docente” (Aléssio, 2020, p. 5).

Apesar disso, foi apontado por alguns docentes participantes da pesquisa, que o Cálculo possibilita uma articulação com alguns conceitos matemáticos que são ensinados na Educação Básica, como funções, áreas e volumes. Foi ressaltado, porém, que, para que essa articulação ocorra, torna-se necessária uma revisão na maneira como a disciplina é abordada nos cursos de licenciatura.

Pensando nessa perspectiva de trazer uma abordagem diferente para a disciplina de CDI, de forma a tentar estabelecer uma articulação entre conteúdos, levanta-se a ideia do uso da História da Matemática (HM) como uma possível abordagem para o ensino de Cálculo, já que ela permite uma “[...] contextualização dos conteúdos, a desmistificação da matemática, a compreensão do processo dinâmico da construção desse conhecimento, entre outros” (Araman, 2011, p.74).

Na literatura, também é acentuado o uso da HM como

[...] um instrumento de apoio e mostrar que a matemática é uma criação humana, é uma ciência desenvolvida pela humanidade, construída a partir da tentativa em solucionar problemas, possível de erro e que surgiu da necessidade do homem. (Rossetta, 2013, p.34)

Trabalhar um lado mais humano da Matemática, como trazer as motivações do desenvolvimento de conceitos matemáticos, sejam elas internas ou externas, permite uma compreensão maior em relação ao que está por trás de fórmulas e regras que são aplicadas em resoluções de exercícios, trazendo um maior significado para o aprendizado do aluno.

Considerando o contexto da formação docente, trabalhar aspectos históricos possibilita a “[...] a compreensão do conteúdo matemático e seu desenvolvimento de uma forma prática (Borges, 2019, p.86)”.

Acreditamos que uma das maneiras de inserir a HM nos cursos de licenciatura seja por meio das próprias disciplinas de Matemática, já que

Ao estudar um determinado conceito, a partir de uma abordagem histórica, o professor pode caminhar para uma compreensão de como aquele conceito foi sendo desenvolvido, quais os elementos conceituais necessários para a sua compreensão, quais são os pontos de maior dificuldade, por que eles foram importantes naquela

época, por que são importantes hoje, quais eram as necessidades para o desenvolvimento daquele dado conceito, entre outros. (Araman e Batista, 2013, p. 386)

Dessa forma, além de contextualizar os conceitos relativos aos conteúdos dessas disciplinas, trazer aspectos históricos para o ensino matemático justifica o aprendizado deles para o futuro professor. Aliado a isso, por meio da abordagem histórica, torna-se possível apresentar a Matemática para os estudantes como um conhecimento em constante desenvolvimento e não como algo pronto e acabado.

Essas são questões relevantes de serem trabalhadas em cursos de formação docente, já que, assim como aponta Brito

A maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática tem privilegiado uma concepção formalista dos conteúdos matemáticos. Tal enfoque além de desvincular, deliberadamente, tais conteúdos daqueles a serem lecionados no Ensino Médio, ainda não fornece os subsídios para a compreensão dos fundamentos destes últimos. (Brito, 2004, p. 13)

Outro ponto importante referente à HM em cursos de formação de professores é levantado por Araman e Batista (2013), ao dissertarem sobre como compreender os acontecimentos históricos fornece ao professor a capacidade de fundamentar as respostas dadas aos seus alunos quando levantam questões relacionadas ao fazer Matemática, por exemplo, experimentos, problemas e técnicas. A HM auxilia o docente a explicitar a relevância daquilo que está sendo aprendido.

Para isso, a História não deve ser tratada apenas como curiosidade, em pequenos trechos ou menções, ao contrário: torna-se necessário que ela seja incorporada ao conteúdo ensinado.

Segundo Fiorentini *et al.*, temos que o futuro docente deve

[...] experienciar o processo de exploração e investigação nas disciplinas matemáticas da licenciatura, tais como: teoria dos números, cálculo diferencial e integral, álgebra, análise, geometria, fractais, teoria dos grafos etc. (2013, p.925)

Logo, apenas apontar acontecimentos históricos de maneira desconexa ao conteúdo não permite ao professor usufruir dos benefícios de trazer a HM para a sala de aula, como a compreensão dos processos epistêmicos da Matemática e seu fator humano. É necessário articular de maneira coerente o fato histórico com o conteúdo, de forma a fazer do aprendizado do futuro professor um processo significativo.

De forma a auxiliar o docente na elaboração de aulas que articulam História e o conteúdo matemático, pesquisas que estudam as contribuições dessa relação na formação docente por meio de aplicações em sala de aula tornam-se uma boa fonte de informação. Por meio dessas

investigações, ideias de aulas e atividades são fornecidas para o docente, que pode escolher aplicá-las ou adaptá-las para sua própria turma. Além disso, pesquisas dessa natureza contribuem para a compreensão das contribuições e das limitações de abordagens históricas no ensino.

Uma forma de analisar as contribuições que a HM traz para o ensino de Matemática é por meio do estudo de conhecimentos mobilizados pelos futuros professores. O estudo de conhecimentos docentes tem como um de seus precursores Shulman (1986), que aponta para especificidades presentes na profissão, indicando que esta possui conhecimentos próprios. Logo, analisar aplicações realizadas em sala de aula, de forma a identificar quais conhecimentos para o ensino são mobilizados, torna-se um bom parâmetro para verificar quais dessas aplicações favorecem a formação do professor de Matemática.

Diante desse contexto, a presente pesquisa tem como objetivo identificar e analisar os conhecimentos matemáticos mobilizados por licenciandos que cursaram uma disciplina de Cálculo, em uma Universidade Federal localizada no Sul do estado de Minas Gerais, que abordou questões históricas na introdução dos conceitos de derivada e integral.

Para alcançar o objetivo proposto, utilizamos como referencial teórico o conceito de conhecimento matemático para o ensino (MKT, do inglês *Mathematical knowledge for teaching*), elaborado por Ball *et al.* (2008), com base na ideia desenvolvida por Shulman (1986), que apresenta a existência de conhecimentos próprios da profissão docente.

A escolha deste referencial se baseia nas ideias levantadas por Jankvist *et al.* (2015), que aponta que o MKT “[...] pode nos providenciar um vocabulário para discutir os potenciais benefícios de usar a história no ensino e aprendizagem de matemática, incluindo a formação docente”¹ (p. 504). Dessa forma, o autor destaca que o MKT se torna um bom referencial para analisar o uso da HM na formação de professores.

Para a realização desta investigação, foram elaboradas aulas e atividades que envolviam preceitos históricos referentes aos conceitos de derivada e integral, em parceria com o professor responsável da disciplina. Os participantes da pesquisa foram 14 alunos do 1º semestre do curso de graduação em Licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina referente ao CDI. Os dados foram coletados por meio das atividades realizadas ao longo da disciplina; gravações das

¹ No original “[...] can provide us with a vocabulary for discussing potential benefits of using history in the teaching and learning of mathematics, including teacher training.

discussões realizadas pelos alunos durante o processo de resolução dessas atividades; anotações em um diário de campo; bem como em entrevistas realizadas com os participantes.

Para apresentação dos resultados desta investigação, o presente texto foi dividido em cinco capítulos. O primeiro capítulo é uma revisão da literatura, na qual são realizados apontamentos sobre pesquisas que já trabalharam questões históricas em disciplinas de Cálculo.

Em seguida, no segundo capítulo, é apresentado o Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) que se configura como o referencial teórico da pesquisa. No terceiro capítulo é apresentada a metodologia da pesquisa, na qual os participantes são descritos, assim como o contexto da pesquisa, incluindo os procedimentos realizados para a coleta, construção e análise dos dados.

No quarto capítulo são apresentadas as descrições das aulas que fizeram uso de questões históricas, enquanto no quinto capítulo os resultados da investigação são apresentados e discutidos. Por fim, são levantadas considerações finais referentes aos dados analisados, assim como observações com relação à pesquisa realizada.

1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E O ENSINO DE CÁLCULO

O presente capítulo tem o intuito de apresentar um levantamento de pesquisas que trazem relações entre o Ensino de Cálculo e a História da Matemática, de forma a analisar as potencialidades delas, além de identificar possíveis lacunas acerca do tema estudado.

Para isso, foi realizada uma busca, em diferentes plataformas, por pesquisas que tratassem do ensino de Cálculo por meio de uma abordagem histórica. Como plataformas de busca, foram escolhidas o Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (Crephimat) e o Banco Digital de Teses e Dissertações (BDTD). O primeiro foi escolhido devido à sua exclusividade de pesquisas relacionadas à HM, facilitando, assim, a busca de pesquisas condizentes ao tema proposto. Já o BDTD foi escolhido em virtude de ser uma plataforma de busca bastante completa, que poderia complementar à primeira.

Foram encontradas, ao todo, cinco pesquisas. Elas serão apresentadas no Quadro 1, a seguir, com a indicação dos autores, ano de publicação, instituição, palavras-chave utilizadas e plataforma.

Quadro 1 – Pesquisas encontradas

Pesquisas	Autor	Ano	Instituição	Palavras-Chave	Plataforma
A regra de L'Hôpital. Análise histórica da regra de L'Hôpital. A importância da História da Matemática na disciplina de Cálculo (P1)	BARBOSA, F, A	2008	UNICAMP	Cálculo	CREPHIMAT - Dissertações (MP) – HenM
Explorando o conceito de derivada em sala de aula, a partir de suas aplicações e sob uma perspectiva histórica (P2)	OLIVEIRA, D, G	2011	UFOP	Derivada	CREPHIMAT - Dissertações (MP) - HEnM
O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da História da Matemática e da Resolução de Problemas (P3)	RIBEIRO, M, V	2010	PPGEM	Integral	CREPHIMAT - Dissertações (MA) – HenM

Dimensões Teórico-Metodológicas do Cálculo Diferencial e Integral: perspectivas histórica e de ensino e aprendizagem (P4)	ESCHER, M. A; MISKULIN, R. G. S.	2011	PPGEM	História da Matemática e Integral (Pesquisa Avançada)	BDTD
Uso de episódios históricos e geometria dinâmica para o desenvolvimento de conceitos de Integral de Riemann e do Teorema Fundamental do Cálculo para funções reais de variáveis reais (P5)	JACYNTHO, L. A. FILHO, L. M. P. de C.	2008	UNICAMP	História da Matemática e Integral (Pesquisa Avançada)	BDTD

Fonte: Elaborado pelo autor.

No momento da busca, foram utilizadas as ferramentas presentes nas plataformas escolhidas. No Crephimat, foi utilizado o filtro de busca nomeado “História para o Ensino da Matemática” (HEnM), que fornece pesquisas que trazem a articulação entre a HM e o Ensino de Matemática. Aliado a esse filtro, foram utilizadas as seguintes palavras-chave: cálculo, derivada e integral — o que resultou em três pesquisas (P1, P2 e P3, respectivamente), cada uma relacionada a uma das palavras-chave escolhidas.

Na plataforma do BDTD, com base nas buscas realizadas com o uso das palavras-chave “História da Matemática” e “Integral”, foram encontradas duas pesquisas que se encaixavam no tema e que não eram repetições de trabalhos encontrados no Crephimat. A plataforma também forneceu mais alguns resultados para a busca, mas que não foram considerados, pois, com base na leitura de seus títulos e/ou resumos, foi possível perceber que não se encaixavam com o tema proposto. Vale ressaltar que esse processo foi realizado no dia oito de dezembro de 2023.

No item subsequente será apresentada uma visão geral sobre a maneira como as pesquisas relacionam as questões históricas com o ensino de Cálculo, assim como os principais resultados obtidos.

1.1 SOBRE AS PESQUISAS

O estudo de novas possibilidades para o Ensino de Cálculo surgiu, conforme mencionado em grande parte das pesquisas, devido à experiência dos pesquisadores de já terem lecionado para turmas dessa disciplina. Tal fato os fez perceber as dificuldades que os alunos apresentavam, assim como a falta de aprofundamento com relação aos conceitos que eram ensinados.

Ribeiro (2010), por exemplo, comenta que

Trabalhando com Cálculo Diferencial e Integral, pudemos perceber a dificuldade que os alunos têm com a aprendizagem desse ramo de Matemática e isso vem, já de algum tempo, mostrando-se um desafio. (p.3)

Aliado a isso, Oliveira (2011) destaca que, ao lecionar aulas de Cálculo, ele identificava a falta de motivação que os alunos tinham para aprender o conteúdo. Para ele, isso acontecia, pois, os estudantes não conheciam, de fato, os conceitos relativos ao CDI, mas sim regras e fórmulas utilizadas para a resolução de problemas.

Com base nesses e em outros problemas levantados pelas pesquisas concernentes ao Ensino de Cálculo, os autores apontam que uma maneira de os contornar seria por meio do uso da História da Matemática em sala de aula.

São levantadas algumas justificativas para essa inserção da abordagem histórica em sala de aula, por exemplo, a possibilidade de motivar os estudantes, que já era relatada como deficitária no ensino da disciplina, bem como a possibilidade de trabalhar interdisciplinarmente (Barbosa, 2008). Ou, ainda, a justificativa de conceitos matemáticos com base no seu contexto de desenvolvimento (Ribeiro, 2010)

Contudo, Oliveira (2011) ressalta que:

[...] é preciso ter em mente que relacionar o conceito a ser ensinado com uma data ou com o matemático que conseguiu chegar a ele não basta. É preciso ir mais longe, explorar as dificuldades encontradas, as soluções incompletas, e as tentativas feitas para alcançar o sucesso. (p.45)

Com base nisso, ele apresenta a proposta de sua pesquisa, que buscou introduzir o conceito de derivada aos alunos, apresentando o método de diferentes matemáticos da época da sistematização do Cálculo, como Barrow (1630-1677), Fermat (1607-1665) e Newton (1643-1727), de forma que os discentes percebessem a construção final do conceito de maneira intuitiva.

Os métodos foram introduzidos pelo professor, seguidos de um exemplo numérico, para que, posteriormente, os alunos, de maneira individual ou conjunta, conseguissem resolver um problema proposto. No fim, foi aplicado um questionário que envolvia questões de cunho mais matemático, bem como perguntas que visavam compreender qual percepção os alunos teriam tido do uso da HM e qual teria sido o papel dela no aprendizado de cada um.

Já Barbosa (2008), em sua pesquisa, comenta sobre a necessidade de ter um bom conhecimento histórico sobre o assunto que se pretende abordar, para então trabalhá-lo em sala de aula. Com base nisso, o autor traz uma contextualização sobre a Regra de L'Hôpital, trazendo momentos e personagens importantes para o desenvolvimento desse conceito.

Com uma descrição detalhada dos acontecimentos da época, Barbosa objetivou fornecer uma “[...] referência para interessados em utilizar a história da matemática como ferramenta metodológica de ensino” (2008, p. 87).

De maneira distinta dos outros trabalhos, Escher (2011) evidenciou uma relação entre o Ensino de Cálculo e as Tecnologias Informacionais e Comunicacionais (TIC), de forma a apontar dimensões teórico-metodológicas situadas nas inter-relações entre a disciplina de Cálculo e as TIC, com base na perspectiva de professores que já lecionam a disciplina ou que estão em começo de carreira. Entretanto, a História, por mais que esteja presente no trabalho com um breve relato de alguns dos acontecimentos que envolveram o desenvolvimento dessa área da Matemática, não foi muito aprofundada no restante da pesquisa.

Enquanto isso, Jacyntho (2008), além de realçar os benefícios do uso de tecnologias em sala de aula, em especial do software de Geometria dinâmica GeoGebra, trouxe uma conexão mais explícita com as questões históricas. Isso aconteceu, pois, alguns dos problemas apresentados pelo autor estão relacionados a métodos utilizados por outros matemáticos que participaram do desenvolvimento do CDI.

Nesse trabalho, o primeiro exercício proposto, por exemplo, era um problema de construção estudado por Arquimedes (287-212 a.C) e outros estudiosos, que visava encontrar a área de um círculo, que até então não possuía uma fórmula conhecida. Para encontrar a área do círculo foram utilizados polígonos regulares na circunferência, considerando que, quanto maior o número de lados do polígono, mais próximo chega-se ao valor da área do círculo.

A partir daí o autor trabalhou alguns conceitos mais convencionais sobre integrais no GeoGebra, porém, finalizando com diversas construções sobre o Teorema Fundamental do

Cálculo, segundo Isaac Barrow. Além disso, como a pesquisa tinha o objetivo de estudar alguns casos históricos envolvendo o conceito de Integral, o conjunto de atividades elaborado como produto da pesquisa possuía um detalhamento muito importante para que docentes interessados pudessem se apropriar para utilizá-las em suas aulas.

Por fim, a última pesquisa selecionada, elaborada por Ribeiro (2010), tratou do conceito de Integral, e o relacionou ao uso da abordagem histórica com a metodologia de resolução de problemas para o ensino deste conteúdo. O objetivo da proposta elaborada era o de introduzir o conceito de integral de maneira progressiva, iniciando com o cálculo simples de áreas e o método da quadratura, finalizando com a resolução de integrais duplas.

As pesquisas, de maneira geral, destacam os benefícios de trabalhar com a HM no ensino de Cálculo. Jacyntho (2008, p. 85), por exemplo, destaca que “Os episódios históricos auxiliam na compreensão das definições e teoremas atuais ao apresentar como eram tratados em sua época”.

Ribeiro (2010) ressalta que o interesse dos alunos para com as aulas foi maior, devido à oportunidade de conhecer mais sobre o desenvolvimento dos conceitos que estavam sendo estudados, fato esse também apontado por Oliveira (2011), que acrescentou, ainda, a facilidade no aprendizado devido à contextualização do conteúdo.

Apesar de esses trabalhos trazerem a articulação entre o Ensino de Cálculo e a História da Matemática, eles não abordaram a relação entre esses dois tópicos e a formação de professores de Matemática. Com isso, evidencia-se uma lacuna a ser trabalhada através da presente pesquisa, que tem como objetivo investigar os conhecimentos docentes que são desenvolvidos ao se ensinar Cálculo por meio de uma abordagem histórica em uma turma de licenciandos em Matemática. Neste sentido, estamos, como já mencionado, utilizando um referencial voltado aos conhecimentos de professores, que será apresentado no capítulo seguinte.

2. O CONHECIMENTO DOCENTE

O estudo de conhecimentos docentes teve como um de seus precursores Lee Shulman, que, em 1986, publicou um artigo intitulado *Those who understand: Knowledge growth in teaching*. Nele, Shulman comenta sobre a formação docente e como as pesquisas da área estavam deixando de lado questionamentos importantes para o desenvolvimento desse tema.

Segundo o intelectual, o foco estava em questões voltadas para a parte mais pedagógica da prática docente, como as maneiras pelas quais os professores organizam atividades, gerenciam a sala de aula e determinam os níveis de dificuldade de suas questões. Contudo, eram deixadas de lado questões sobre “[...] o conteúdo de lições ensinadas, de perguntas realizadas, e de explicações oferecidas”² (Shulman, 1986, p.8, destaque no original)

Com base nisso, Shulman (1986) apresenta três categorias de conhecimentos do conteúdo do professor, sendo elas: Conhecimento do Conteúdo do Assunto (do inglês *Subject Matter Content Knowledge*), Conhecimento Curricular (do inglês *Curricular Content Knowledge*) e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (do inglês *Pedagogical Content Knowledge*).

O Conhecimento do Conteúdo do Assunto diz respeito ao conhecimento dos conceitos e teorias por trás do conteúdo que será ensinado. No entanto, Shulman ressalta que ele engloba mais que isso, por exemplo, a capacidade do professor de determinar quais tópicos são mais centrais que outros e de conseguir explicar a importância do que está sendo aprendido também fariam parte desse tipo de conhecimento.

Quanto ao Conhecimento Curricular, além de expressar o conhecimento do currículo referente ao nível de ensino no qual o professor atua, ele também se refere ao conhecimento que o professor possui do currículo de maneira vertical, ou seja, quais conteúdos serão ou já foram ensinados ao longo do percurso educacional dos alunos.

Além disso, esse conhecimento também pode ser visualizado como horizontal, apontando para o conhecimento do docente quanto aos currículos de outras disciplinas que seus alunos estão cursando. Dessa forma, torna-se possível que o professor prepare aulas que se comuniquem mais com os demais conteúdos que estão sendo aprendidos pelos estudantes.

² No original [...] *the content of the lessons taught, the questions asked, and the explanations offered.*

Por fim, é apresentado o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, cuja sigla comumente adotada é PCK. Nesse conhecimento, estão agrupadas as diversas maneiras de representar um mesmo conteúdo e a capacidade de escolher aquela que irá facilitar a aprendizagem do aluno, o que implica também a capacidade do docente de saber identificar “[...] o que torna o aprendizado de determinado conteúdo fácil ou difícil” ³(Shulman, 1986, p.9)

Essa categoria de conhecimento ganhou grande destaque internacional em pesquisas da área da Educação. Segundo Fernandez (2012), o PCK é considerado um bom instrumento de análise para a compreensão das habilidades de docentes, destacando que, ao estudar o PCK a partir de diferentes docentes, os resultados desses estudos tornam-se possíveis “[...] subsídios para a formação de professores” (Fernandez, 2012, p.11). Dessa forma, essas pesquisas consideram que o professor “[...] constrói e reconstrói seus conhecimentos conforme a necessidade de utilização dos mesmos, suas experiências, seus percursos formativos e profissionais” (Nunes, 2001. p. 27).

Contudo, deve-se levar em consideração os conhecimentos próprios de cada disciplina, para que a análise desse tipo de conhecimento seja realizada de maneira adequada. Segundo Mello *et al.* (2017), o fato de as categorias de Shulman serem baseadas em conhecimentos mais gerais implica “[...] algo que dificulta a análise mais refinada e a compreensão aprofundada do conhecimento, que é específico e especializado para ensinar determinado conteúdo”. (Mello *et al.* 2017, p.127)

Dessa forma, é possível apontar para um conjunto de conhecimentos específicos de cada disciplina presente no ciclo escolar, de modo que a análise para cada uma delas corresponda às suas particularidades e especificações. Nesse contexto, Ball *et al.* (2008) introduziram o modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino (do inglês *Mathematical Knowledge for Teaching*), conhecido por sua sigla em inglês, MKT, que será apresentado no item subsequente.

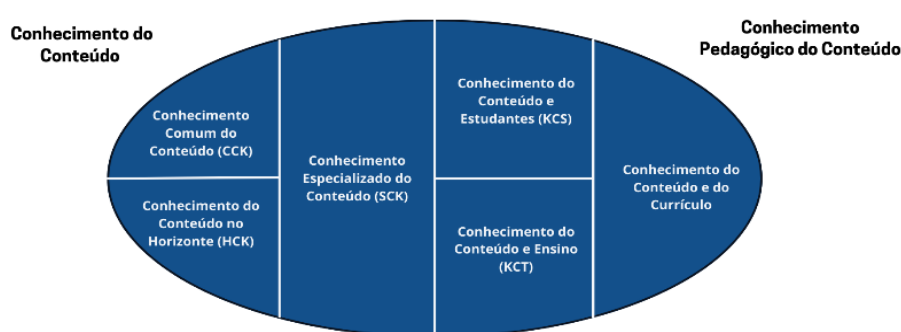
2.2 A ESTRUTURA DO MKT

O modelo do MKT foi elaborado tendo como base análises de práticas de docentes de matemática da Educação Básica nos Estados Unidos da América. Os dados obtidos foram analisados tendo em vista questionamentos como “o que compõe essas práticas”, assim como “quais são os conhecimentos matemáticos necessários para sua realização”.

³ No original “[...] *what makes the learning of specific topics easy or difficult.*”

Segundo Ball *et al.*, o MKT está “[...] preocupado com as tarefas que envolvem o ensino e as demandas matemáticas para estas tarefas” ⁴ (2008, p. 395). Para realizar a análise das tarefas, o modelo é dividido em dois domínios de conhecimento: o “Conhecimento do Conteúdo” e o “Conhecimento Pedagógico do Conteúdo”, sendo que cada um deles é dividido em três subdomínios, que serão apresentados no decorrer do texto. A estrutura do MKT está apresentada na Figura 1.

Figura 1 - Estrutura do MKT



Fonte: Adaptado de Ball *et al.* (2008, p.403)

O domínio referente ao PCK possui grande relação com as práticas pedagógicas do docente. Um de seus subdomínios, o conhecimento do conteúdo e estudantes (KCS, do inglês *knowledge of content and students*), está relacionado com a capacidade do professor de assimilar o “[...] conhecimento dos estudantes e o conhecimento sobre matemática” ⁵. (Ball *et al.*, 2008, p.401)

Logo, a capacidade do professor de lidar com a linguagem matemática do aluno e ser capaz de reconhecer a dúvida levantada pelo estudante, além de conhecer partes do conteúdo as quais os alunos tendem a apresentar mais ou menos dificuldades para entender são tarefas relacionadas ao KCS.

O conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT, do inglês *knowledge of content and teaching*) se refere ao conhecimento do docente que o faz perceber a melhor ordem de abordar

⁴ No original *It is concerned with the tasks involved in teaching and the mathematical demands of these tasks.*

⁵ No original *[...] knowing about students and knowing about mathematics.*

um conteúdo, quais exemplos abordar, como apresentar os conceitos, entre outras questões relacionadas ao contexto de ensino e aprendizagem.

Por fim, o conhecimento do conteúdo e do currículo (do inglês *knowledge of content and curriculum*) se apresenta de maneira semelhante àquele indicado por Shulman (1986). Conhecer o currículo com respeito à sua área de conhecimento, mas também a outras áreas, de modo a estabelecer relações entre os conteúdos que estão sendo apresentados para seus alunos são exemplos desse tipo de conhecimento.

O lado esquerdo do modelo, cujo domínio é referente ao Conhecimento do Conteúdo (do inglês *Content Knowledge*), apesar de intitulado dessa forma, engloba mais do que o conhecimento do conteúdo matemático em si, já que ele trata do “conhecimento do conteúdo necessário para os professores para tarefas específicas do ensino”⁶ (Ball et al, 2008, p.402).

Desta forma, é possível perceber que existem mais fatores presentes nesse domínio, de acordo com Ball *et al.* (2008), que apenas o conhecimento de conceitos matemáticos. As diferentes relações entre esse conhecimento matemático para com as questões do ensino foram ressaltadas em três subdomínios diferentes, cada um com suas especificidades e demandas próprias do professor de Matemática.

Dentre esses subdomínios, o que representa o conhecimento matemático mais usual é o Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK, do inglês *common content knowledge*), que leva esse nome por ser um conhecimento presente em outras atividades além do ensino. Questões como saber utilizar notações corretamente e identificar uma resposta errada são exemplos de conhecimentos presentes nesse subdomínio.

Já o conhecimento especializado do conteúdo (SCK, do inglês *specialized content knowledge*) é entendido por Ball *et al.* (2008) como o conhecimento próprio do ensino. Ao verificar um padrão em respostas erradas ou em averiguar a veracidade de um algoritmo de divisão diferente da usual, o professor está utilizando este tipo de conhecimento.

Para realizar essas tarefas o professor necessita de um conhecimento matemático que é além daquele ensinado em sala de aula. Esse conhecimento agrupa algumas tarefas, por exemplo

[...] ser capaz de falar explicitamente sobre como a linguagem matemática é utilizada (ex. como o significado matemático de aresta é diferente da referência cotidiana de aresta da mesa); como escolher, fazer e usar representações matemáticas efetivamente

⁶ No original *Is subject matter knowledge needed by teachers for specific tasks of teaching.*

(ex. reconhecer vantagens e desvantagens ao usar retângulos ou círculos para comparar frações); e como explicar e justificar suas ideias matemáticas (ex. por que invertemos e multiplicamos para dividir frações)⁷ (Ball et al., 2008, p.400)

O último subdomínio próprio do conhecimento matemático dentro da estrutura do MKT é denominado conhecimento do conteúdo no horizonte (HCK, do inglês *horizon content knowledge*), que fornece ao docente o conhecimento necessário para realizar conexões entre os tópicos do conteúdo matemático presente no currículo escolar, favorecendo a construção de uma “fundação matemática para o que virá depois”⁸. (Ball et al, 2008, p.403)

Os autores ressaltam que apesar de o conhecimento do conteúdo no horizonte estar presente no modelo, ele é considerado uma categoria provisória e que necessita de mais estudos que permitam compreender sua importância para o modelo proposto, o que é indicado também pela falta da sigla referente a esse conhecimento. Para esta pesquisa, porém, será considerada a sigla HCK para o conhecimento do conteúdo no horizonte, que provém de estudos realizados por Jankvist *et al.* (2015).

Apesar de ser denominado como um conhecimento que permite realizar conexões entre tópicos presentes no currículo escolar, o conhecimento do conteúdo no horizonte engloba mais do que isso. Em seu estudo sobre o conhecimento do conteúdo no horizonte, por meio de pesquisas de práticas docentes, Jakobsen *et al.* (2012) traz uma definição para esta categoria do MKT.

Segundo os autores, o conhecimento do conteúdo no horizonte diz respeito, igualmente, a entender “[...] a motivação sobre determinados tópicos, ter uma percepção intuitiva de ideias centrais envolvidas, e estar familiarizado com técnicas básicas desenvolvidas para lidar com estas ideias”⁹ (Jakobsen et al, 2012, p.8).

Ainda segundo os autores, essa subcategoria também está relacionada com a capacidade do professor de “[...] entender ideias no horizonte matemático de maneira que apoiem a

⁷ No original [...] be able to talk explicitly about how mathematical language is used (e.g., how the mathematical meaning of edge is different from the everyday reference to the edge of a table); how to choose, make, and use mathematical representations effectively (e.g., recognizing advantages and disadvantages of using rectangles or circles to compare fractions); and how to explain and justify one's mathematical ideas (e.g., why you invert and multiply to divide fractions).

⁸ No original mathematical foundation for what will come later.

⁹ No original [...] the motivation for given topics, having an intuitive grasp of core ideas involved, and being familiar with basic techniques developed to contend with the ideas.

percepção da relevância de ideias para as interações de ensino e aprendizagem (nas coisas que os alunos dizem e fazem e nas tarefas do currículo)”¹⁰(Jakobsen *et al.*, 2012, p.8.).

Para esses autores, para trabalhar com o contexto e a motivação do desenvolvimento de determinados conteúdos matemáticos em sala de aula, o professor necessita de um conhecimento histórico sobre o assunto. Com isso, é possível inferir a presença da História da Matemática como componente dessa categoria de conhecimento.

Ou seja, com uma base de conhecimentos históricos, o professor possui um maior arcabouço para mediar as interações que acontecem em sala de aula, permitindo que os alunos também vivenciem algumas dificuldades enfrentadas durante o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Além disso, é possível trabalhar, com base na fala do aluno, sem desconsiderá-la ou tomá-la como errada, tornando o processo de aprendizagem mais convidativo.

Para finalizar, destacamos que Jankvist *et al.* (2015), por um lado apresenta o conhecimento sobre a HM na estrutura do MKT e, por outro, destaca que o modelo pode se configurar como um suporte teórico para analisar o uso de questões históricas em sala de aula.

Nessa perspectiva e, considerando que Jankvist *et al.* (2015) destaca que o MKT se configura como um bom referencial para analisar o uso da HM na formação de professores, utilizaremos o MKT como base para a análise dos dados obtidos em nossa investigação. Uma descrição da forma como estes dados foram coletados, construídos e analisados será apresentada no quarto capítulo deste texto.

¹⁰ No original [...] *understand ideas on the mathematical horizon in ways that support seeing the relevance of the ideas to the interactions of teaching and learning (in the things children say and do and in the tasks of the curriculum).*

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A presente pesquisa foi desenvolvida com o objetivo de identificar e analisar os conhecimentos matemáticos mobilizados por licenciandos durante uma disciplina de Cálculo, que abordou questões históricas na introdução dos conceitos de derivada e integral e em atividades.

Para tanto, foram elaboradas, em parceria com o professor responsável pela disciplina de CDI, atividades e aulas que envolvessem aspectos de uma história do CDI. Estas foram implementadas em uma disciplina referente ao Cálculo Diferencial e Integral. Os dados foram coletados ao longo da disciplina por meio de diário de campo, gravações e atividades escritas e, após o seu término, por meio de entrevistas.

Nesse sentido, esta pesquisa pode ser caracterizada como qualitativa, pois, segundo Godoy (1995a, p.58), ela envolve:

[...] a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo.

Na presente investigação, os dados são descritivos, devido ao contato do pesquisador com os participantes da pesquisa, bem como às interações que aconteceram durante as aulas. Foram também realizadas entrevistas com os participantes, de modo a compreender suas percepções com relação às aulas e aplicações da pesquisa, com vistas a atingir o objetivo da presente investigação.

Neste capítulo serão abordadas questões referentes à metodologia da pesquisa. Para isso, o capítulo está dividido em três seções. Na primeira é apresentada a maneira pela qual a HM foi pensada para ser introduzida em aulas da disciplina, assim como em atividades avaliativas. Na segunda, são descritos os instrumentos de coleta de dados. Por fim, na terceira é explicitada a forma como os dados coletados foram analisados.

3.1 INSERÇÃO DOS ASPECTOS HISTÓRICOS NA DISCIPLINA

A pesquisa foi iniciada com base nas escolhas dos momentos históricos que seriam abordados nas aulas da disciplina de CDI. Para determinar quais seriam esses momentos, foi realizado um estudo sobre História do Cálculo em livros que diziam respeito a esse assunto ou em livros de História da Matemática em geral.

Dentre as referências utilizadas estão: *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas* (Roque, 2012); *História do Cálculo e seu desenvolvimento conceitual* (Boyer, 1959); a unidade 3 do livro *Curso de História da Matemática: Origens e desenvolvimento do Cálculo* (Baron et al., 1985), assim como o livro *O Cálculo Diferencial e Integral de Newton e Leibniz: Aproximações e Distanciamentos no Método* (Bonfim; Calábria, 2017).

Além de livros, também foram analisados alguns artigos referentes à História do Cálculo, por exemplo, o artigo: *Uma versão da história do Cálculo Infinitesimal* (Vieira et al., 2021). Também foi possível analisar a tradução de dois artigos publicados por Leibniz, sendo um referente ao Cálculo Diferencial e outro ao Cálculo Integral. A tradução foi realizada por Thiago Augusto Silva Dourado e publicada na *Revista Brasileira de História da Matemática* (RBHM).

Por meio desses materiais, foi possível selecionar tópicos da História do Cálculo que poderiam ser interessantes de serem trabalhados em sala de aula. Estes foram selecionados pelo pesquisador, visando auxiliar o aprendizado e a compreensão dos alunos quanto a conceitos centrais do Cálculo, como a derivada e a integral, além de trazer um aspecto humanizado para o conteúdo da disciplina.

Depois de selecionados, as questões históricas foram apresentadas para discussões com a professora orientadora e o professor regente da turma, para que assim fosse possível estabelecer quais deles seriam levados para a sala de aula, bem como as abordagens. Essas decisões foram tomadas, principalmente, com base na experiência do professor regente, que já ministrou a disciplina de CDI diversas vezes e que acrescentou pontos relevantes a serem considerados para a elaboração da proposta da pesquisa, como o conhecimento do conteúdo, ementa e cronograma, assim como dificuldades comumente apresentadas pelos estudantes nesta disciplina.

Além disso, destaca-se que a ementa do curso é extensa, abordando todo o conteúdo de limites, derivada e integral. Contudo, a carga horária da disciplina é de apenas 64 horas/aula, o que dificulta abordar todos os conteúdos esperados durante o semestre. Por esse motivo, foram elaboradas aulas que trabalhavam temas introdutórios do conteúdo de derivada e integral, com

o auxílio de questões históricas, de modo a apresentar os conteúdos previstos na ementa da disciplina, ao mesmo tempo em que aspectos históricos eram colocados para os estudantes¹¹.

Para as aulas de derivada, escolheu-se trabalhar o conceito de derivada elaborado por Leibniz, assim como o contexto do século XVII, no qual ele desenvolveu suas pesquisas. Além disso, optou-se por trazer uma interpretação do método elaborado por Leibniz para encontrar a inclinação da reta tangente, que foi retirado do livro *História da Matemática: Uma visão crítica*, desfazendo mitos e lendas de Tatiana Roque (Roque, 2012).

Já para a introdução do conceito de integral para a turma, foram escolhidas questões históricas que traziam uma motivação para o cálculo de áreas sob curvas, partindo de ideias gregas para o cálculo da área de circunferências, chegando no contexto do século XVII. Foi escolhida uma adaptação do método elaborado por Fermat e Pascal para o cálculo do que conhecemos hoje como integral para auxiliar na introdução desse conceito. Esse método também foi retirado do livro *História da Matemática: Uma visão crítica*, desfazendo mitos e lendas (Roque, 2012).

A escolha de trabalhar com métodos históricos para introduzir os conteúdos de derivada e integral ocorreu devido à possibilidade de mostrar diferentes representações de um mesmo processo matemático o que, segundo Heffer (2009), auxilia na compreensão do que está sendo ensinado para uma gama maior de estudantes. Além disso, trabalhar com aspectos relacionados ao contexto no qual esses métodos foram desenvolvidos pode trazer uma visão que mostra como “[...] a comunidade de grandes matemáticos necessitou de um longo tempo, mais do que um século, para construir os conceitos básicos da disciplina”¹² (Kronfellner, 2002, p.73).

Entende-se também que “[...] envolver-se nos aspectos matemáticos, históricos e culturais de um conceito matemático é uma forma importante pela qual os professores precisam conhecer o conteúdo que ensinam”¹³ (Clark, 2019, p. 9).

Esperava-se, com a introdução desses métodos, que se estabelecesse uma conexão maior entre as ideias de limite com as de derivada e integral. Tal objetivo foi proposto pois, após a introdução das regras de derivação e integração, não existem mais conexões visíveis entre esses

¹¹ Apesar de a ordem histórica do desenvolvimento dos conceitos do Cálculo iniciar com a ideia de integral, seguida da ideia de derivada, limite e função, devido a essas dificuldades apresentadas, decidiu-se por trabalhar a História do Cálculo apenas nos dois referidos momentos.

¹² No original [...] *community of great mathematicians needed a long time, more than one century, to build the conceptual basis of the subject.*

¹³ No original *engaging in the mathematical, historical, and cultural aspects of a mathematical concept is an important way in which teachers need to know the content that they teach*

conceitos, pelo fato de as regras serem fórmulas prontas, que não apresentam elementos visíveis referentes à notação de limites.

Com isso, seria possível interligar os conteúdos presentes na ementa, de forma a destacar a importância de cada um e as relações estabelecidas entre eles. Tal importância também seria ressaltada por meio dos elementos históricos apresentados em sala de aula, como o fato de Leibniz não se importar tanto em “[...] manter uma coerência” (Roque, 2012) entre seus trabalhos publicados sobre o Cálculo — incoerências estas que foram sendo trabalhadas ao longo do tempo, até chegarmos no Cálculo que temos hoje.

A introdução desses elementos foi realizada nas aulas de maneira dialogada e conectada com os conteúdos da disciplina na qual esses elementos diziam respeito, isto é, eles não foram tratados apenas como curiosidades, mas sim como informações que contextualizavam o conteúdo aprendido, de forma a tornar o processo de aprendizado do estudante mais significativo, para que ele conseguisse se apropriar dos benefícios de trabalhar a HM em aulas de Matemática. A apresentação do método histórico relacionado ao cálculo de derivadas, por exemplo, foi realizada logo após o professor ensinar sobre o cálculo da derivada por meio da definição como limite. Dessa forma, o docente conseguiu estabelecer algumas relações entre as duas maneiras de realizar o cálculo em questão, além de ter podido apontar para algumas concepções que existiam na época e que foram desenvolvidas com o passar do tempo. A maneira na qual as questões históricas foram abordadas em sala de aula serão apresentadas no capítulo seguinte.

Foram, também, elaboradas duas atividades, uma sobre derivada e outra sobre integral. Essas atividades poderiam ser realizadas em dupla ou de maneira individual, além de ser permitida a consulta das anotações realizadas no caderno e o uso de calculadora. Outro fator relevante que diz respeito às atividades é que as datas de aplicação destas já estavam agendadas desde o início do semestre, permitindo que os estudantes conseguissem se preparar com antecedência.

A atividade de derivada era composta por duas questões: a primeira apresentava três itens, e a segunda, dois. Na primeira questão, os dois primeiros itens diziam respeito ao cálculo de derivadas de uma mesma função, porém, em um desses itens deveria ser utilizado o método de Leibniz, enquanto no outro deveria ser utilizada a regra de derivação conhecida como “regra do tombo”, que foi a única apresentada aos estudantes até aquele momento da disciplina.

Ao colocar essas duas questões, esperava-se que os alunos percebessem que não existe apenas uma maneira de calcular derivadas, já que independentemente do processo, o resultado seria o mesmo. Outro fator relevante está relacionado com o método trabalhar, de maneira intuitiva, a questão dos limites, com um ponto tendendo ao outro, reforçando, assim, a conexão entre os dois conceitos.

As demais questões, por mais que não envolvessem elementos históricos, trabalhavam partes mais conceituais do conteúdo, por exemplo, a interpretação, pelos alunos, do significado de derivada em um ponto, dado o contexto de um atleta que realiza o salto com vara. A questão referente à velocidade média também buscava verificar se os alunos compreenderiam que, no ponto de altura máxima, a derivada é igual a zero, pelo fato de a reta tangente ser horizontal. Dessa forma, seria possível avaliar a compreensão deles quanto ao conceito de derivada.

Já a atividade sobre integral apresentava uma questão com quatro itens, dos quais dois possuíam relação com as questões históricas apresentadas em sala de aula. Nesses dois itens, era solicitada a resolução de uma integral, por meio do método histórico dos indivisíveis apresentados em sala. Tal método deixava clara a ligação entre o conceito de integral e o de limite, já que, para elaborar a fórmula de resolução, era necessário que os alunos estabelecessem uma fórmula da soma da área de n retângulos.

Essas atividades foram corrigidas na semana seguinte à aplicação, em aulas ministradas pelo pesquisador, com supervisão do docente responsável pela turma. Essas aulas também foram pensadas de maneira conjunta e tinham como objetivo resolver os problemas propostos na atividade, apontar erros realizados com certa frequência pelos estudantes, além de estabelecer uma maior conexão entre os métodos históricos abordados e os conceitos aos quais eles dizem respeito.

Assim, pode-se afirmar que as aulas/atividades relacionadas à HM foram referentes às aulas expositivas-dialogadas, nas quais o professor apresentava para a turma algumas questões históricas referentes ao conteúdo que estava sendo introduzido/estudado; atividades escritas e aulas de correção das atividades que eram ministradas pelo pesquisador. A disposição dessas aulas/atividades está exposta no Quadro 2.

Quadro 2 - Programação das aulas e atividades que envolviam aspectos da História do Cálculo

Datas	Aulas/Atividades	Objetivos
10/04/2024	Aula sobre derivada com apresentação de questões históricas.	Apresentar uma interpretação de um método histórico e o contexto

		histórico no qual ele foi desenvolvido, de forma a auxiliar no processo de compreensão do conceito de derivada.
22/04/2024	Aplicação da atividade sobre derivada, que tinha uma questão sobre o método histórico apresentado.	Identificar o entendimento dos estudantes com relação ao conceito de derivada e sua representação gráfica. Além dos procedimentos de cálculo de derivadas, por meio de regras de diferenciação e pelo método histórico.
29/04/2024	Correção da atividade sobre derivada.	Corrigir a atividade, focando os exercícios nos quais os estudantes tiveram mais dificuldades. Retomar as ideias referentes ao método histórico relacionando com o conceito de derivada. Buscar sanar dúvidas adicionais apresentadas pelos estudantes durante esta aula.
03/06/2024	Aula sobre integral com apresentação de questões históricas.	Apresentar uma interpretação de um método histórico e o contexto no qual ele foi desenvolvido, de forma a auxiliar no processo de compreensão do conceito de integral.
10/06/2024	Aplicação da atividade sobre integral, que tinha uma questão sobre o método histórico apresentado.	Identificar o entendimento dos estudantes com relação ao conceito de integral. Além dos procedimentos de cálculo de integrais por meio do TFC e pelo método histórico.
18/06/2024	Correção da atividade sobre integral.	Corrigir a atividade, focando nos exercícios nos quais os estudantes tiveram mais dificuldade. Retomar as ideias referentes ao método histórico relacionando com o conceito de integral. Buscar sanar dúvidas adicionais apresentadas pelos estudantes durante esta aula.

Fonte: Elaborado pelo autor

Essas aulas/atividades que tinham aspectos relacionados à HM foram implementadas em uma turma da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral ao longo do primeiro semestre de

2024, composta por alunos de outros cursos e também alunos do 1º semestre do curso de graduação em Matemática Licenciatura de uma Universidade Federal localizada no Sul do estado de Minas Gerais.

A turma era composta por noventa e dois alunos, sendo vinte e cinco do curso de Matemática Licenciatura, dos quais quatorze aceitaram participar da pesquisa. Os outros estudantes eram, sobretudo, alunos do curso de Sistemas de Informação, embora a disciplina também contasse com graduandos de cursos diversos, que não haviam sido aprovados nela anteriormente.

Todos os alunos matriculados no curso deveriam realizar as atividades, já que elas compunham parte do sistema de avaliação da disciplina. Contudo, devido aos objetivos da presente investigação, apenas aqueles matriculados no curso de Matemática Licenciatura foram convidados a participar da pesquisa.

No dia da aplicação da atividade referente à derivada, o pesquisador foi apresentado à turma, assim como a proposta da pesquisa. Em seguida, foram entregues para os alunos do curso de Matemática Licenciatura, o Termo de Comprometimento Livre e Esclarecido (TCLE)¹⁴, de forma a determinar quem seriam os participantes da investigação. Nesse primeiro momento, obtivemos oito termos assinados. Assim, foi requisitado que esses oito participantes realizassem a gravação das discussões com suas duplas e que depois as encaminhassem para o pesquisador.

Diante do baixo número de estudantes que aceitaram fazer parte da pesquisa, após a aplicação da atividade sobre derivada, houve um segundo momento de apresentação da proposta para a turma, que acabou resultando em outros sete TCLE assinados. Logo, foram obtidos quinze termos. Como esses sete participantes não aceitaram participar da pesquisa no primeiro momento, a gravação das discussões durante a primeira atividade não ocorreu.

Apesar de haver quinze TCLE assinados, foram considerados apenas 14 participantes¹⁵ da pesquisa. Para manter o anonimato deles, foi utilizada a identificação da forma AX, na qual X é um número entre 1 e 14. Após o término da disciplina, todos os participantes foram contatados para a realização das entrevistas, entretanto, apenas cinco licenciandos participaram

¹⁴ Aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa por meio do parecer 6.661.054.

¹⁵ Uma das alunas presente no dia da aplicação da primeira atividade acabou não entregando sua resolução por não ter conseguido realizar algumas das questões propostas. Após esse período, a frequência da aluna nas aulas diminuiu e ela deixou de comparecer no restante das aulas do semestre, incluindo no momento de aplicação da segunda atividade, de forma que essa aluna não possui materiais para serem analisados.

desta etapa final. A seguir, será apresentada uma breve descrição dos participantes que aceitaram participar da entrevista.

Quadro 3 - Apresentação dos participantes da pesquisa

Aluno	Porque licenciatura em Matemática	Pretende continuar no curso	Pretende ser professor
A2	Não conseguiu entrar em enfermagem e, como gostava de Matemática, decidiu tentar o curso.	Sim	Sim
A3	Não conseguiu entrar em Ciência da Computação e decidiu entrar na sua segunda opção.	Não	Não
A5	Sempre se deu bem com Matemática e ajudava seus amigos na escola.	Sim	Sim
A6	Tinha facilidade em aprender Matemática e gostava de brincar de dar aulas para suas bonecas.	Sim	Sim
A11	Gosta de Matemática e se interessou pela área da educação por meio de uma conversa com sua admirada professora do Ensino Médio.	Sim	Sim

Fonte: Elaborado pelo autor

Após essa apresentação do contexto da pesquisa, descreveremos, a seguir, o processo de coleta de informações, construção e análise dos dados.

3.2 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Para a coleta de dados foram utilizados diferentes instrumentos, a saber: um diário de campo elaborado pelo pesquisador; as atividades sobre derivada e integral realizadas pelos participantes; gravações tanto das discussões realizadas pelos participantes durante as atividades quanto das aulas de correção delas e, por fim, entrevistas realizadas com alguns participantes após o término da disciplina.

O **diário de campo**, conforme indicado, foi elaborado pelo pesquisador de forma a registrar informações sobre as aulas, com enfoque nas quais o professor regente apresentou aos alunos ideias e métodos históricos, que se relacionavam com o conceito estudado. A recepção da turma, além das dúvidas que surgiram ao longo desse processo foram registradas pelo pesquisador, que estava acompanhando a turma como estagiário. Por fim, as aulas de aplicação das atividades também foram registradas, da mesma forma que as destinadas à correção delas. Essas aulas de correção foram ministradas pelo pesquisador.

Com relação às **atividades propostas**, conforme já apontado, estas poderiam ser realizadas em duplas ou de maneira individual, além de ser permitida a consulta das anotações realizadas no caderno e da calculadora. A atividade sobre derivada foi desenvolvida no dia 22 de abril de 2024 e a de integral foi aplicada no dia 10 de junho de 2024. Ambas as atividades se encontram nos Apêndices B e C da pesquisa.

Obtivemos cinco atividades de derivada, sendo uma individual e quatro em duplas, das quais apenas uma apresentava um aluno não participante da pesquisa. Para o caso em que um dos integrantes da dupla não fosse participante da pesquisa, as atividades escritas não foram analisadas. Portanto, foram analisadas quatro atividades escritas. Já na atividade sobre integral, foram obtidas nove atividades, sendo duas realizadas individualmente e sete em duplas, dentre as quais duas apresentavam integrantes não participantes da pesquisa, portanto, foram analisadas sete atividades. No Quadro 4, são apresentadas as atividades obtidas, sendo que aquelas identificadas com um asterisco (*) não foram analisadas.

Quadro 4 - Atividades obtidas ao longo da investigação

Atividade sobre derivada	Atividade sobre integral
A1, A2	A1, A2
A3, A4	A3, A4
A5, A6	A5, A6
A7	A7
A8, A9	A8, A9
	A10 e colega não participa da pesquisa*
	A11 e colega não participa da pesquisa*
	A12
	A13, A14

Fonte: Elaborado pelo autor

Com relação às **gravações em áudio das discussões**, foi solicitado, nas duas atividades, que os estudantes gravassem suas discussões ao longo da realização destas. Tais gravações poderiam ser realizadas pelos celulares dos alunos ou por meio de gravadores disponibilizados pelo pesquisador. No caso da atividade sobre derivada, somente uma dupla (A1 e A2) entregou

a gravação. Já no caso, da atividade sobre integral, cinco duplas entregaram a gravação. Para o caso em que um dos integrantes da dupla não fosse participante da pesquisa, foi requisitado que, no início das gravações, os participantes fizessem uma apresentação, dizendo seus nomes e se estavam participando da pesquisa ou não. Dessa forma, seria possível selecionar apenas as falas daqueles que assinaram o termo de participação da pesquisa. No Quadro 5, são apresentadas as gravações das atividades obtidas.

Quadro 5 - Gravações obtidas ao longo da investigação

Atividade sobre Derivada	Atividade sobre integral
A1, A2	A1, A2 A5, A6 A8, A9 A11 e colega não participa da pesquisa* A13, A14

Fonte: Elaborado pelo autor

Com relação às **gravações das aulas de correção das atividades**, foi utilizado o gravador do celular do pesquisador. Optou-se por gravar as aulas de correção para que fosse possível registrar dúvidas e falas dos estudantes com relação aos exercícios que indicassem a mobilização de algum conhecimento matemático próprio do ensino. Contudo, não houve momentos nos quais os estudantes participantes da pesquisa levantaram questionamentos ou falas que demonstrassem essa mobilização.

Já no que se refere à realização das **entrevistas**, foi elaborado um roteiro¹⁶ para guiar as perguntas, isto é, entrevistas semiestruturadas. Esse roteiro foi pensado de forma a obter dados que dissessem respeito à formação matemática do estudante, às percepções e entendimentos que ele(a) teve sobre o conteúdo do CDI, assim como sobre questões históricas que foram abordadas durante a disciplina. Tais entrevistas foram realizadas após o término da disciplina e esse período foi escolhido para que os alunos não se sentissem pressionados ou coagidos a dar apenas respostas positivas, com receio de terem suas notas prejudicadas, apesar de a pesquisa não influenciar nesse quesito.

Conforme já mencionado, todos os participantes foram contatados para a realização das entrevistas, sendo que cinco licenciandos (A2, A3, A5, A6 e A11) demonstraram interesse em participar delas. As entrevistas foram realizadas em local e horário previamente acordado com os participantes, sendo todas realizadas no período entre setembro e outubro, além de terem

¹⁶ O roteiro está disponível no Apêndice A da pesquisa.

sido gravadas e transcritas pelo pesquisador. Para deixar a leitura das falas dos estudantes mais natural, momentos de pausas das falas dos alunos serão retirados¹⁷.

Com esses dados em mãos, iniciamos a construção dos dados da investigação, por meio da seleção dos trechos do diário de campo, das atividades escritas, da transcrição da discussão realizada durante a realização da atividade e das entrevistas, que poderiam apontar indícios da mobilização de conhecimentos matemáticos para o ensino pelos licenciandos participantes da pesquisa. Esses dados foram categorizados por semelhança, tendo como referência os conhecimentos propostos no referencial escolhido do MKT.

3.3 PROCEDIMENTOS DA ANÁLISE DOS DADOS

A estrutura do MKT, conforme apresentada anteriormente, é composta por dois domínios, sendo eles o Conhecimento do Conteúdo e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK). Como a pesquisa foi aplicada em uma disciplina do primeiro semestre do curso de Matemática Licenciatura, na qual não há discussões referentes ao ensino de Matemática, entende-se que os conhecimentos referentes ao domínio do PCK não seriam mobilizados pelos participantes da investigação. Dessa forma, os dados obtidos foram analisados por meio de uma categorização por semelhança, tendo como base apenas o lado esquerdo do modelo, apresentado na Figura 1, referente ao Conhecimento do Conteúdo. Ou seja, tendo como referência os subdomínios: conhecimento comum do conteúdo (CCK); o conhecimento especializado do conteúdo (SCK); e o conhecimento do conteúdo no horizonte (HCK).

Compreendemos que a estrutura do MKT foi elaborada considerando os conhecimentos produzidos por professores da Educação Básica, porém, assim como aponta Jankvist *et al.* “Deve-se notar que o MKT é relativo ao nível de ensino e ao que está sendo ensinado”¹⁸ (2015, p.498). Dessa forma, considerando o contexto de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral ofertada para alunos do curso de Matemática Licenciatura, entende-se que uma adaptação do modelo do MKT é necessária, de forma a apontar quais conhecimentos mobilizados pelos estudantes caracterizariam os subdomínios citados anteriormente.

Com relação ao CCK, por exemplo, entende-se que, no contexto da presente investigação, o conhecimento relacionado à resolução de exercícios referentes ao CDI, assim como o conhecimento dos conceitos pertinentes ao Cálculo fazem parte desse subdomínio já

¹⁷ Por exemplo, em vez de transcrever: “A função é ... assim né?”. A transcrição seria feita como “A função é assim né?”.

¹⁸ No original *It should be noted that MKT is relative to the level of teaching and what is being taught.*

que ele é definido como “não exclusivo ao ensino”¹⁹ (Ball *et al.*, 2008, p. 399). De fato, saber calcular uma derivada ou uma integral, além de conhecer algumas de suas aplicações, pode ser algo utilizado em outras profissões que não a docente, como engenharia e biologia, por exemplo.

Apesar de os conceitos de derivada, limite e integral não serem abordados diretamente nas aulas de Matemática da Educação Básica, eles contribuem para o entendimento do docente quanto a tópicos que são abordados nesse espaço educacional. Dentre eles, podemos citar todo o universo de funções, a progressão geométrica e o cálculo de áreas e volumes, o que aponta para a importância de um conhecimento que diz respeito a esses tópicos relacionados ao CDI para o professor de Matemática.

Contudo, apenas conhecer esses tópicos não é suficiente para a tarefa do ensino. Também é necessário que o docente consiga relacioná-los com os conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica. Conseguir estabelecer essas relações faz parte de um conhecimento que é próprio da profissão docente e que trabalha “um tipo de trabalho matemático que outros [profissionais] não fazem”²⁰ (Ball *et al.*, 2008, p. 400, interpolação do autor). Esse é um tipo conhecimento que se enquadra como conhecimento especializado do conteúdo (SCK), por ser algo particular da atividade profissional do professor de Matemática. Além disso, como parte desse conhecimento, é possível destacar, também, o entendimento do conteúdo matemático que propicia ao professor justificar e explicar os procedimentos realizados para a resolução de algum problema ou exercício. Somado a isso, conhecer outros algoritmos de resolução de um mesmo problema pode também contribuir para sua prática profissional, já que, ao entrar em contato com outras formas de resolver um exercício e compreender por que elas funcionam, acrescenta ao arcabouço do futuro professor conhecimentos que podem auxiliá-lo a compreender outros algoritmos utilizados por seus estudantes que são diferentes dos usualmente ensinados.

Por fim, com base nos referenciais adotados, entende-se que, como parte do conhecimento do conteúdo no horizonte (HCK), considerando o contexto de uma disciplina de CDI, estão presentes conhecimentos que dizem respeito ao desenvolvimento histórico do Cálculo. Além disso, entrar em contato com aspectos relacionados à natureza do conhecimento matemático, como compreender que eles foram desenvolvidos devido à uma necessidade

¹⁹ No original *not unique to teaching*.

²⁰ No original *a kind of mathematical work that others do not*.

estabelecida na época e como esse desenvolvimento foi realizado até chegar nos resultados que temos hoje, são exemplos desse tipo de conhecimento.

Quadro 6 - Conhecimentos referentes aos subdomínios do MKT

Subdomínios	Conhecimentos
Conhecimento comum do conteúdo (CCK)	C1 - Utilizar notações corretamente; C2 - Resolver problemas e exercícios referentes ao CDI corretamente; C3 - Resolver problemas e exercícios referentes a matemática da Educação Básica corretamente; C4 - Reconhecer respostas corretas e incorretas; C5 - Reconhecer o significado de ideias matemáticas.
Conhecimento especializado do conteúdo (SCK)	S1 - Justificar e explicar os procedimentos realizados nos cálculos; S2 - Calcular derivadas e integrais por maneiras não usuais corretamente; S3 - Utilizar diferentes representações matemáticas corretamente; S4 - Reconhecer relações entre os conceitos do CDI com conteúdos presentes no currículo da Educação Básica.
Conhecimento do conteúdo no horizonte (HCK)	H1 - Conhecer aspectos do desenvolvimento histórico dos conceitos presentes na disciplina.

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Ball (2008), Jakobsen (2012) e Jankvist (2015)

Com base no Quadro 6, apresentado acima, os trechos selecionados para compor a análise da presente investigação foram categorizados por semelhança. Os resultados da pesquisa estão descritos no capítulo a seguir.

4. DESCRIÇÃO DAS AULAS QUE ENVOLVEM ASPECTOS HISTÓRICOS

Neste capítulo, será realizada uma descrição sobre as aulas nas quais as questões históricas foram introduzidas. Essas descrições tiveram como referência as informações que foram registradas pelo pesquisador no diário de campo. Tal diário foi composto por informações referentes à maneira pela qual o professor introduziu as questões históricas relacionadas aos conteúdos de derivada e integral, assim como dúvidas e falas dos estudantes levantadas durante as aulas.

4.1 DESCRIÇÃO DAS AULAS SOBRE DERIVADA QUE ENVOLVEM ASPECTOS DA HM

A seguir, serão descritos os tópicos que foram introduzidos nas aulas iniciais do conteúdo de derivada. Em um primeiro momento, o professor regente lembrou com a turma o conceito de reta secante a um gráfico de uma função, que é aquela que passa por apenas dois pontos da curva. Partindo da escolha de dois pontos genéricos de uma função qualquer, sendo eles (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , o professor apresentou a equação da reta, cuja fórmula é dada por $y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0)$. Em seguida, o professor perguntou o que seria o m colocado na fórmula, de modo que alguns deles disseram se tratar do coeficiente angular da reta ou, então, da inclinação da reta.

Após esse momento, o professor apresentou um gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ e lembrou com a turma o conceito de reta tangente, que se trata da reta que passa por apenas um ponto do gráfico da função. Em seguida, começou a trabalhar a questão da inclinação dessa reta por meio da equação da reta introduzida anteriormente. Por meio da fórmula, foi apontado que a inclinação poderia ser encontrada através de um processo limite, aproximando os dois pontos que definem a reta secante um do outro. O processo para calcular a inclinação da reta tangente foi, depois, denominado como derivada e, com isso, foi apresentada à turma a definição formal de derivada como limite. Após esse momento, a aula foi encerrada, devido ao horário.

Na aula seguinte, dois dias após a introdução do conceito de derivada, foi realizada uma breve revisão sobre o que foi apresentado anteriormente. Em seguida, o professor expôs algumas informações históricas referentes ao desenvolvimento do Cálculo. Foi apresentado, primeiramente, um breve contexto histórico do século XVII e XVIII, época na qual o problema da reta tangente era amplamente estudado, ressaltando dois nomes que obtiveram mais

destaque, sendo eles Newton e Leibniz. Logo depois, o professor desenvolveu com os alunos uma interpretação do método de Leibniz para o cálculo de retas tangentes.

A decisão pela apresentação de um método histórico, como já mencionado anteriormente, se justifica pelo fato de termos entendido que essa seria uma forma de auxiliar os estudantes a compreenderem o conteúdo, por terem mais proximidade com ele, além de mostrar a Matemática como um processo humano, passível de erros e de diversas tentativas.

Para isso, o professor utilizou a função $f(x) = x^2$, que estava sendo utilizada anteriormente, e introduziu o conceito dos diferenciais dx e dy , que eram considerados por Leibniz como quantidades infinitamente pequenas. Foi colocado então que, para encontrar a inclinação da reta tangente, os alunos deveriam, primeiramente, tomar dois pontos genéricos presentes no gráfico da função, sendo eles (x, y) e $(x + dx, y + dy)$, e, então, resolver a seguinte conta $dy = f(x + dx) - f(x)$. Após resolver essa conta, o professor chegou na expressão $dy = 2xdx + dx^2$.

Nesse momento, foi levantado pelo professor que na época em que Leibniz realizou seus estudos, o conceito de limite ainda não havia sido desenvolvido e que, portanto, foram utilizados outros artifícios para encontrar a inclinação da reta tangente. Para Leibniz, como os diferenciais eram considerados como quantidade infinitamente pequenas, qualquer uma de suas potências maiores do que um poderiam ser desconsideradas, já que seus valores seriam desprezíveis. Dessa forma, a expressão se reduzia a $dy = 2xdx$. Em seguida, assim como apresentado no livro *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas* (Roque, 2012), poder-se-ia concluir que $\frac{dy}{dx} = 2x$, que se trata da derivada da função $f(x) = x^2$.

Esse processo, conforme mostrado pelo professor por meio do gráfico da função, consistia em aproximar os dois pontos um do outro, de forma a obter a inclinação da reta tangente, o que permitiu apontar para uma semelhança desse método com a definição de derivada como limite.

O professor ainda comentou sobre o método de Leibniz ter sido criticado na época, devido ao seu uso dos diferenciais. Isso acontece, pois, o resultado do processo para encontrar a inclinação da reta tangente era representado por $\frac{dy}{dx}$, esses termos eram considerados infinitamente pequenos, mas diferentes de zero. Leibniz comentava que essa notação era uma

razão, não uma divisão, mas durante seus cálculos, ele dividia a expressão por dx , o que gerava certa contradição.

Partindo da presença de inconsistências no trabalho de Leibniz, o professor comentou com os alunos que os conceitos de limites e funções vieram após o período de Leibniz, e que, por conta disso, não foram utilizados para o cálculo do método. Essa questão apresenta um fator importante relacionado ao desenvolvimento de conceitos matemáticos, já que demonstra que eles não são prontos e acabados, mas vão se desenvolvendo com o passar do tempo, se aperfeiçoando conforme a matemática se desenvolve conceitualmente. Além disso, aponta que a ordem a qual se aprende os conceitos nem sempre é a mesma a qual eles foram elaborados, implicando uma não linearidade no processo de construção do conhecimento matemático. Essa visão sobre o desenvolvimento de conceitos matemáticos pode “[...] contribuir para uma imagem apropriada da matemática como uma ciência dinâmica e em desenvolvimento, contrário a algumas opiniões públicas, e como uma parte importante da nossa cultura”²¹ (Kronfellner, 2002, p.73). Dessa forma, é possível trazer um lado mais humano para a Matemática, que foge da visão mais técnica e procedimental na qual ela é comumente vista.

Após apresentar o contexto do método, o professor resolveu o cálculo da derivada da função $f(x) = x^2$ no ponto $P = (1,1)$ por meio deste e mostrou que o resultado era o mesmo daquele encontrado por meio da definição de derivada como um limite. Com isso, estabeleceu-se uma relação entre o método histórico e o conteúdo presente na ementa da disciplina, apontando fatores como o porquê de os limites serem apresentados antes das derivadas na ementa do curso, já que, assim como comentado pelo professor, os conceitos de limite e função vieram posteriormente ao trabalho de Leibniz, de modo a justificar os cálculos realizados de modo que não houvesse as contradições presentes no trabalho original.

Após a explicação do método, um estudante destacou que a notação utilizada por Leibniz para representar a derivada ($\frac{dy}{dx}$), era a mesma utilizada atualmente. Além disso, outro estudante questionou se esse método poderia ser utilizado ao longo da disciplina, em vez do tradicional. O professor respondeu afirmando que seria possível, mas que, dependendo da função que deveria ser derivada, os cálculos poderiam ficar mais complicados.

²¹ No original [...] contribute to an appropriate image of mathematics as a dynamic and developing science, contrary to some public opinion, and as an important part of our culture

Essas aulas de inserção das questões históricas foram realizadas duas semanas antes da aplicação da primeira atividade. Com uma semana antes da data da atividade sobre derivadas, foi realizada uma breve revisão sobre o conteúdo que seria cobrado, sendo este a construção do gráfico de funções, o cálculo de derivadas por meio do método histórico e por meio da “regra do tombo”, que era a única regra de derivação aprendida pela turma até então.

Na semana seguinte à aplicação da atividade, foi realizada uma aula de correção dela. Essa aula foi ministrada pelo pesquisador, com supervisão do professor regente da turma. Ficou estabelecido que, para essa aula, o foco seria os exercícios que os alunos tivessem apresentado mais dificuldade, o que foi observado por meio da correção da atividade. Com isso, questões como a construção do gráfico da função e a resolução da derivada por meio do método de Leibniz foram trabalhadas logo no começo da aula, fazendo alguns apontamentos de erros comuns e uma explicação mais detalhada por meio do software de geometria dinâmica GeoGebra.

Durante a correção da questão, em que o enunciado pedia a construção do gráfico da função cuja lei de formação é $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, foi ressaltado pelo pesquisador o fato de ela ser uma função do segundo grau e que, por conta disso, possui algumas características próprias. Dentre elas, está a forma do seu gráfico, que se trata de uma parábola com concavidade para baixo, pelo fato de o coeficiente que acompanha a variável x ser negativo. O procedimento usado para calcular os zeros dessa função, ou seja, os pontos nos quais a curva intercepta o eixo x , se dá por meio da resolução da equação do segundo grau, ao fazer $f(x) = 0$. Foi mostrado, também, que, ao fazer $f(0)$, é possível encontrar o ponto no qual a função intercepta o eixo y , e que, com todas estas informações em mãos, torna-se possível traçar um esboço do gráfico da função.

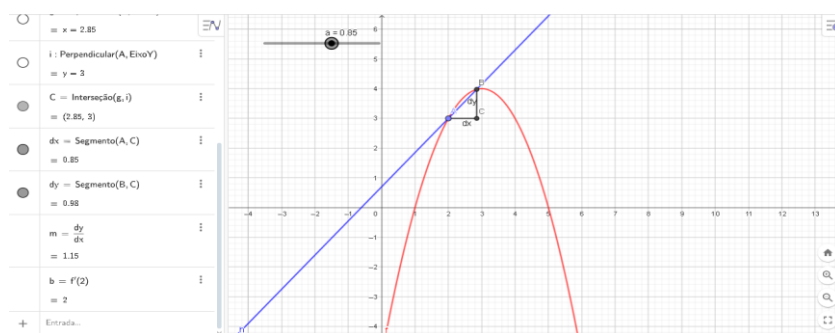
Em seguida, na correção do exercício referente ao cálculo da derivada dessa mesma função $f(x)$, por meio do método de Leibniz, foi apresentado pelo pesquisador um modelo no software GeoGebra (que pode ser visualizado por meio do seguinte link: <https://www.geogebra.org/m/dv4q8pqp>), com o objetivo de mostrar aos alunos a interpretação geométrica do cálculo de derivadas por meio desse método. Esperava-se que, com um apelo visual, ficassem mais claras as semelhanças entre este e a maneira de resolver as derivadas por sua definição como limite.

No modelo apresentado, o ponto $A = (2,3)$ foi fixado, sendo este o ponto no qual a derivada seria calculada. Com isso, foi construído um ponto B que pertence à função, mas que

não possui coordenadas fixas, de forma que é possível movê-lo pela curva conforme alteramos o valor do controle deslizante representado pela letra “a”, que altera as coordenadas desse ponto.

Traça-se, então, uma reta secante que passa pelos pontos A e B . Com isso, é possível traçar uma reta horizontal que passa pelo ponto A e uma reta vertical que passa pelo ponto B . Considerando o ponto de interseção das duas, é possível construir um triângulo retângulo, assim como representado na Figura 2.

Figura 2 - Modelo GeoGebra: Método de Leibniz



Fonte: Elaborado pelo autor

Como na interpretação do método, o ponto B possui coordenadas $(2 + dx, 3 + dy)$, então os lados deste triângulo na vertical e na horizontal são, respectivamente, dy e dx , cuja razão $\frac{dy}{dx}$ nos fornece a inclinação da reta secante a esses dois pontos e que é representada pela reta em azul no modelo.

Esse triângulo construído era chamado de triângulo característico por Leibniz (Roque, 2012), fato este que foi apontado para a turma. É a partir desse triângulo que podemos construir a razão que nos fornece a inclinação da reta tangente no ponto A . Utilizando as ferramentas do software, foi possível estabelecer no canto inferior esquerdo o valor da razão $\frac{dy}{dx}$ assim como o valor da derivada no ponto A . Com isso, foi possível mostrar que, conforme aproximamos o ponto B do ponto A , o valor numérico da razão se aproxima do valor da derivada no ponto. Esse procedimento poderia ser realizado pelo fato dos diferenciais dy e dx poderem ser tão pequenos quanto se quisesse.

Com essa representação, fica clara a semelhança do método com o processo de limite, já que o ponto B está tendendo ao ponto A , conforme tomamos valores cada vez menores para dy e dx . Essa semelhança foi ressaltada pelo fato de a primeira parte do curso de Cálculo ser focada no estudo dos limites, com isso esperava-se que os alunos obtivessem mais familiaridade

com o método, além de obterem uma maior compreensão da relação entre a derivada e o limite, compreensão esta que pode acabar se perdendo após a introdução das regras de derivação, que torna essa relação “invisível”.

A correção do item, cujo enunciado era “Calcule a derivada da função $f(x)$ por meio da Regra da Potência (Regra do Tombo)”, referente ao uso das regras de derivação para encontrar a derivada da função, ocorreu de forma mais direta, já que a grande maioria da turma acertou essa questão. Apesar disso, após o resultado ser encontrado, foi apontado que independentemente da maneira como a derivada fosse calculada, fosse pelo método ou pelas regras de derivação, o resultado seria o mesmo.

O segundo item da atividade era referente a um atleta, que realizou um salto com vara, e que sua trajetória poderia ser descrita por essa mesma função $f(x)$. Era, então, solicitado que os estudantes determinassem, inicialmente, “a velocidade média do atleta considerando o intervalo de tempo que passou desde o momento em que ele atinge 3 metros de altura até o ponto de altura máximo”. Na correção, foram realizados alguns comentários quanto a erros comuns cometidos pelos alunos, por exemplo, o fato de alguns estudantes terem considerado o valor 3 metros de altura como referentes ao valor da derivada da função, assim como mostrado na Figura 3 abaixo.

Figura 3 - Resolução questão 2 (a)

$$\begin{array}{l}
 2) a) f(x) = -x^2 + 6x - 5 \\
 f'(x) = -2x + 6 \\
 3 = -2x + 6 \\
 2x = +6 - 3 \\
 x = 3/2 \text{ m/s.}
 \end{array}$$

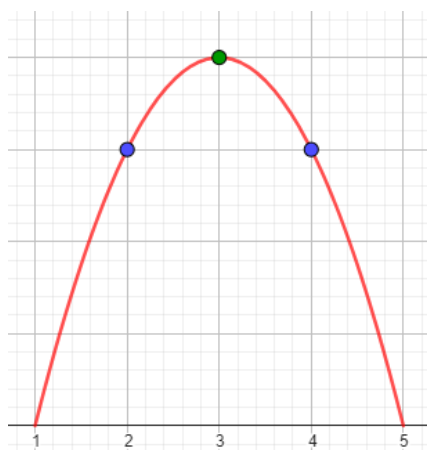
Fonte: Atividade 1, A9 e A10

Nesse caso, foi indicado que a derivada da função, considerando o contexto dado, representa a velocidade instantânea do atleta, e que o valor 3 metros está relacionado com a variável y , ou seja, a altura. Foi dada continuidade a resolução do exercício fazendo $f(x) = 3 = -x^2 + 6x - 5$ até o momento em que a seguinte equação do segundo grau foi resolvida, $0 = -x^2 + 6x - 8$, resultando em dois possíveis valores para x , sendo eles $x = 2$ e $x = 4$.

De forma a determinar qual seria o valor a ser considerado, o pesquisador desenhou novamente o gráfico da função, e fez apontamentos que indicavam e justificavam qual valor deveria ser escolhido. Foi apontado que, como no enunciado do exercício é dito que o que é

procurado é velocidade média do atleta, considerando o ponto em que ele atinge 3 metros de altura até o momento em que ele atinge sua altura máxima, então o movimento do atleta foi realizado antes de ele atingir essa altura máxima. Logo, o valor de x que deve ser tomado para realizar o exercício é $x = 2$.

Figura 4 - Gráfico da função da Atividade de Derivada



Fonte: Elaborado pelo autor

Para o cálculo do ponto de altura máximo do atleta, foi utilizada a fórmula do vértice durante a correção, já que esse foi o procedimento mais utilizado pela turma, porém, foi ressaltado que esse ponto poderia ser encontrado por meio da derivada da função, já que no vértice da parábola a reta tangente é horizontal, ou seja, sua inclinação é zero.

Dessa forma, seria possível utilizar o resultado encontrado no item 1 b) para efetuar o cálculo $f'(x) = 0$. Nesse momento, o professor regente da turma chamou a atenção dos alunos para a fórmula geral de uma função do segundo grau, que é dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, e que, ao derivar essa expressão chega-se em $f'(x) = 2ax + b$. Como, para o cálculo do vértice de uma parábola, devemos considerar a derivada igual a zero, então, de maneira geral, o que se faz é $2ax + b = 0$, o que implica $x = -\frac{b}{2a}$, que é a fórmula do vértice da parábola utilizada pela maioria dos estudantes. Dessa forma, foi estabelecida pelo professor uma conexão entre um conhecimento proveniente do Cálculo com um assunto trabalhado na Educação Básica.

Após à aula de correção, ocorreram outros momentos relevantes para o objetivo da pesquisa. Na aula na qual foi apresentada para a turma a “Regra da Cadeia”, por exemplo, o professor foi questionado pela participante A12 da pesquisa sobre uma outra maneira de representar a fórmula para essa regra de derivação. A fórmula em questão é representada, de maneira usual, por $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, por se tratar da derivada de uma função

composta. Contudo, a aluna comentou que durante seus estudos, ela viu essa fórmula escrita de outra maneira, sendo ela $(f(u))' = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, que é representada dessa forma devido a uma substituição, por considerarmos $u = g(x)$.

Foi questionado pela A12 se ambas as fórmulas tratavam da mesma coisa. O professor regente da turma afirmou que sim, e disse que, apesar de haver uma substituição, o processo era o mesmo, já que é possível escrever $\frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ como $f'(u) \cdot u'$ ou vice-versa. Por meio desse apontamento, o professor pôde ressaltar que a notação de Leibniz, introduzida por meio do método histórico ainda é utilizada atualmente. O professor reiterou com a classe que, para qualquer fórmula que eles optassem por usar em seus cálculos, o resultado seria o mesmo, embora ao utilizar a substituição eles tivessem um pouco mais de trabalho.

4.2 DESCRIÇÃO DAS AULAS SOBRE INTEGRAL QUE ENVOLVEM ASPECTOS DA HM

Para a introdução de questões históricas no conteúdo de integral, conforme já apontado, foram escolhidas a quadratura do círculo e uma interpretação do método para o cálculo de área sob curvas desenvolvido por Fermat e Pascal, retirado do livro *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas* (Roque, 2012), e que é denominado pela autora de “método dos indivisíveis”.

A quadratura do círculo provém da Grécia Antiga e consiste em um problema de cálculo da área do círculo. Como na época, a constante π ainda não havia sido estabelecida, não existia uma fórmula para realizar o cálculo desejado. Esse método foi elaborado por Eudoxo (408 a.E.C - 355 a.E.C) e desenvolvido por Arquimedes (287 a.E.C – 212 a.E.C). Para o primeiro, encontrar a área do círculo seria possível ao considerar polígonos inscritos na circunferência, quanto maior o número de lados desse polígono, mais próxima a área deste seria da do círculo.

Arquimedes complementou esse procedimento, considerando também polígonos circunscritos, ou seja, que se encontravam fora da circunferência. Dessa forma, seria possível exaurir uma aproximação do valor da área desejada por duas figuras cuja área já era conhecida — essa aproximação seria mais exata à medida que o número de lado dos polígonos aumentasse. Por esse motivo, durante o século XVII, o método ficou conhecido como Método da Exaustão (Roque, 2012).

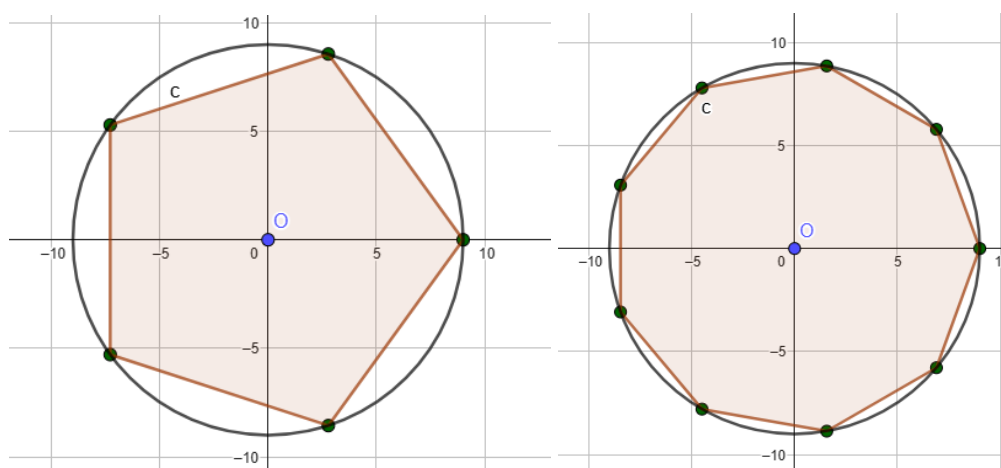
Escolheu-se trazer uma representação desse método para a turma por se tratar de

[...] um argumento epistemológico para evitar uma exatidão exagerada em um estágio inicial do processo de ensino, para proceder para uma interpretação contextual e aplicações em ordem para fazer desses (pré-) conceitos significativos para os estudantes, e somente depois disso elaborar mais as definições exatas²² (Kronfellner, 2002, p.71-73).

Dessa forma, trabalhar com esse método permitiria introduzir a ideia de aproximar a área de figuras desconhecidas por meio de áreas de figuras que já possuem áreas definidas, o que depois auxiliaria na compreensão do conceito de integral que se tem hoje em dia. Com isso, o professor iniciou a aula com o desenho de dois círculos, cada um com diferentes polígonos inscritos nas circunferências.

Na Figura 5, apresentamos duas figuras construídas no GeoGebra, que são uma representação do desenho realizado pelo professor.

Figura 5 - Método da Exaustão



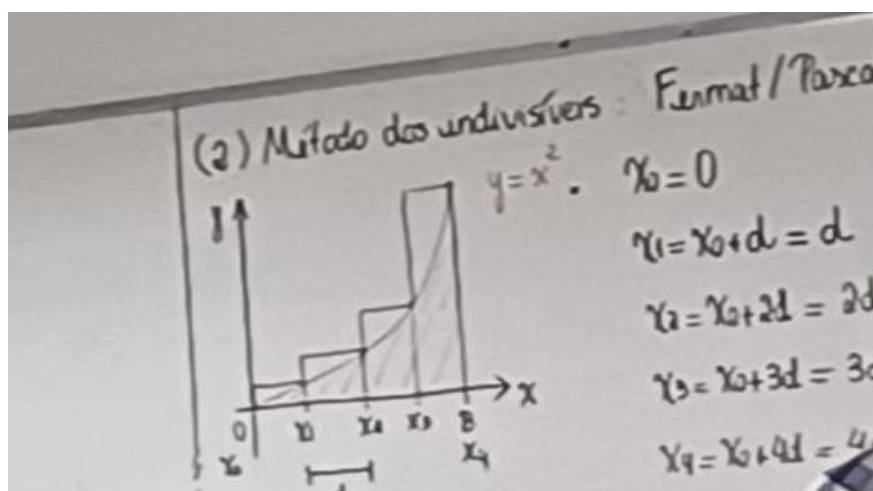
Fonte: Elaborado pelo autor

Por meio desses desenhos, o professor introduziu um pouco do contexto da época no qual esse método foi desenvolvido, apontando a falta da constante π e da fórmula para calcular a área do círculo. Em seguida, o docente se aproveitou dos desenhos para mostrar, de maneira intuitiva, que quanto mais lados o polígono possuía, mais próximo se chegava da área do círculo, ressaltando que o cálculo para encontrar a área desses polígonos já era conhecido pelos gregos na época.

²² No original [...] epistemological argument to avoid exaggerated exactness in too early a stage of the teaching process, to proceed to contextual interpretations and applications in order to make these (pre-) concepts meaningful to the pupils, and only after that to elaborate more exact definitions

Após esse momento, o professor introduziu o método dos indivisíveis para os alunos apontando que, naquele momento, a área que procurava-se encontrar era a área sob a curva. Para demonstrar a relação entre o problema e o da quadratura do círculo, o professor desenhou a parte direita do gráfico da função $f(x) = x^2$, que aparece na Figura 6 e, em seguida, apontou aos estudantes que o objetivo era calcular a área riscada, delimitada pelo eixo x e a curva desenhada. Seguindo o raciocínio do Método da Exaustão, o professor trouxe a ideia de Fermat e Pascal, que propuseram encontrar uma aproximação para o valor da área sob a curva por meio da área de retângulos, que seriam desenhados ao longo de todo o intervalo no qual a curva estava sendo representada, um ao lado do outro. Para deixar a compreensão desse método mais fácil, o professor realizou, primeiramente, um exemplo em que o intervalo OB , no qual a função é representada, deveria ser dividida em apenas quatro retângulos, assim como mostra a Figura 6. Dessa forma, seria possível trabalhar com um número pequeno, antes de trabalhar com o conceito de infinito, ao dividir o intervalo em infinitos retângulos.

Figura 6 - Método dos indivisíveis



Fonte: Foto tirada pelo autor

Primeiramente, foi ressaltado que esses retângulos deveriam possuir a mesma base, valor este que foi determinado pela letra d , fator importante presente na interpretação do método que foi utilizado para elaborar essa aula. Com o intervalo dividido em quatro subintervalos, delimitados por $x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4$, faltava calcular a altura de cada um dos retângulos. Para esse cálculo, o professor utilizou novamente o desenho do gráfico, de forma a mostrar que, para o primeiro retângulo, por exemplo, a altura seria d^2 , que é o valor de y do par ordenado (x_0, y) , e assim consequentemente para os demais intervalos.

Por fim, para determinar a estimativa da área, foi apontado pelo professor que os estudantes deveriam somar as áreas dos quatro retângulos encontrados, resultando na expressão $A \approx d^3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$. Após esse momento, o professor utilizou novamente do desenho do gráfico da função, para mostrar que o valor encontrado era maior do que o valor que queríamos encontrar, já que os retângulos ultrapassam o desenho da curva. Para tornar essa aproximação mais exata, seria necessário aumentar o número de retângulos, da mesma forma que dever-se-ia aumentar o número de lados dos polígonos inscritos na circunferência no Método da Exaustão. Sendo assim, o professor comentou sobre Fermat e Pascal utilizarem esse método com n intervalos, em vez de apenas quatro, assim como mostrado no exemplo.

Ao considerar n intervalos e seguindo o mesmo raciocínio, o professor mostrou para os alunos que, a expressão final ficaria da forma $A = d^3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2)$ e, em seguida, comentou sobre como na época já existiam fórmulas que expressavam a soma do quadrado dos primeiros n naturais, que era dada por $\sum_{i=1}^n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ em notação atual. Por meio dessa fórmula, era possível chegar no resultado aproximado $A = d^3(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$. Fazendo as manipulações algébricas, chegava-se em $A = d^3(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2n} + \frac{n}{6})$. Como o intervalo OB foi dividido em n intervalos, em que todos possuem o mesmo comprimento d , por conta da base dos retângulos serem todas iguais, podemos tomar $\frac{OB}{n} = d$, obtendo, então, $A = OB^3(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2})$. Como o valor de n é cada vez maior, de forma a obter a melhor aproximação possível, os termos $\frac{1}{2n}$ e $\frac{1}{6n^2}$ podem ser desconsiderados, resultando, assim, em $A = \frac{OB^3}{3}$.

Vale ressaltar que a notação de somatório era nova para a maioria dos alunos da turma, dessa forma, o professor fez um rascunho para poder explicar o que cada componente dessa notação significava antes de dar continuidade com a explicação do método histórico.

Após introduzir os conceitos e as ideias por trás do método, assim como resolver o exemplo anterior, o professor, então, calculou a integral definida, utilizando a notação atual de limites, que é dada por $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=a}^n f(xi^*)\Delta x = \int_a^n f(xi^*)\Delta x$. Durante essa etapa, foi possível apontar para algumas semelhanças e diferenças entre as maneiras como o cálculo de áreas sob curvas é realizado. A aproximação da área por meio de retângulos, assim como a soma infinita dessas áreas eram pontos em comum. A maneira de representar essas somas infinitas, porém, possuíam diferenças. Enquanto no método histórico a soma era representada por uma somatória

que fornecia uma expressão geral para a soma, na notação atual essa soma é representada por meio da notação de limites no infinito, ou seja, limites em que $n \rightarrow \infty$.

Outro ponto ressaltado pelo professor foi quanto a notação do S prolongado, que define a operação de integração atualmente, provém dos trabalhos de Leibniz, que já a utilizava. Além disso, o professor também comentou sobre como a expressão $\int f(x)dx$ ser denominada “Soma de Riemann”, era em virtude de outro matemático que colaborou com o desenvolvimento do Cálculo durante o século XVII. O professor introduziu, então, o conceito de funções primitivas, que não foi muito aprofundado devido ao tempo da aula, que já estava no fim.

No começo da aula seguinte, o professor realizou uma breve retomada do conteúdo abordado na última aula, ressaltando o resultado encontrado por meio do método dos indivisíveis ao calcular a área sob o gráfico da função $f(x) = x^2$, que é dado por $\frac{OB^3}{3}$. Em seguida, ele iniciou sua fala sobre o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Foi comentado que o teorema é dividido em duas partes e que a segunda fornece a base para realizar o cálculo das integrais, que se dá por meio das funções primitivas, definidas na primeira parte do teorema.

Após a explicação de que, para calcular a integral, seria necessário encontrar a função cuja derivada é a função que se deseja integrar, a aluna A12 questionou o professor quanto às operações de derivação e integração serem inversas, devido ao fato de como o cálculo era realizado. Essa questão ainda não havia sido levantada pelo professor, o que evidencia a capacidade de percepção da aluna de estabelecer a relação de inversão entre os dois conceitos.

Com base no Teorema Fundamental do Cálculo, foi possível calcular a integral de $f(x) = x^2$, que resultou em $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, em que C é a constante de integração da integral indefinida. Após o cálculo, o professor lembrou com os alunos o resultado encontrado pelo método dos indivisíveis, que se assemelha ao valor calculado. Ademais, foi possível demonstrar como o TFC necessita de bem menos etapas para o cálculo da integral quando comparado ao método histórico.

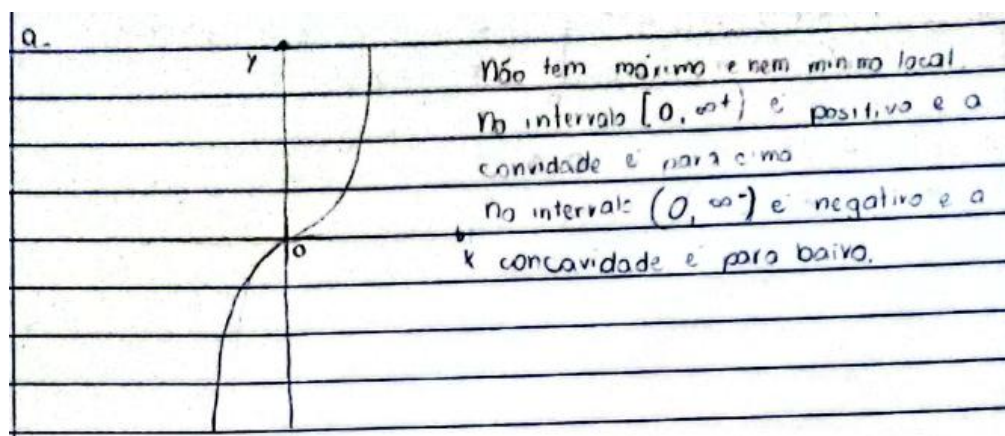
Na semana seguinte, a segunda atividade foi aplicada com a turma. Para essa atividade foram cobrados os conteúdos de construção de gráficos de função por meio de derivadas e limite, assim como o conteúdo apresentado anteriormente, sobre a parte introdutória do conceito de integral: o método dos indivisíveis e o TFC.

Após a aplicação da atividade, foi realizada uma aula de correção dela, ministrada pelo pesquisador, sob supervisão do professor regente. No primeiro item do exercício 1, referente à construção do gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x$, era solicitado que os estudantes levassem em consideração a existência de pontos de máximo e mínimo locais, em quais intervalos a função é crescente e decrescente e em que intervalos a concavidade é voltada para cima ou para baixo.

Durante a correção dele, o pesquisador destacou quais passos deveriam ser tomados para resolver o exercício, sendo eles os testes da primeira e da segunda derivada. O pesquisador foi apontando alguns erros comuns realizados pelos alunos, sendo um deles a análise precipitada dos valores encontrados no teste da primeira derivada.

Em uma das atividades, por exemplo, foi constatado pelos alunos A3 e A4 que a função não apresentava pontos máximo e mínimo, assim como mostrado na Figura 7.

Figura 7 - Resolução questão 1 (a)

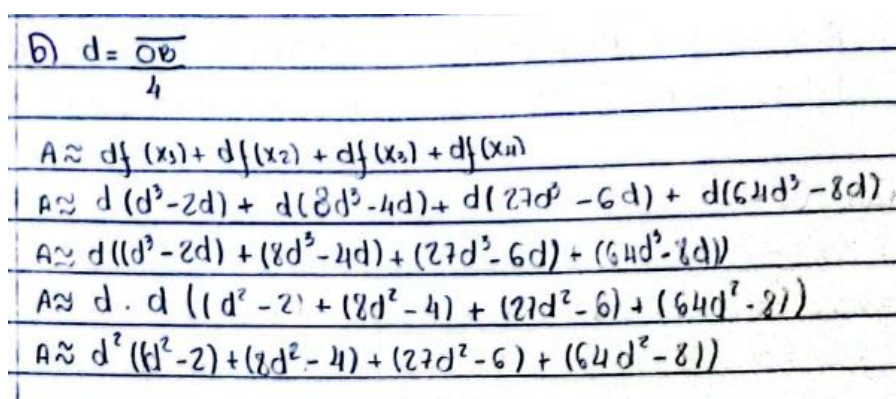


Fonte: Atividade 2, A3 e A4

Outro ponto ressaltado foi referente à maneira de determinar em qual intervalo a função possui concavidade para cima ou para baixo. Para encontrar esses intervalos, é necessário avaliar o sinal da derivada segunda de $f(x)$, ou seja, $f''(x)$. Muito dos estudantes resolveram a questão tomando valores aleatórios de x , de forma a determinar em quais intervalos a função é negativa e positiva. Contudo, apesar de, nesse caso, tomar valores de x ser um método prático, foi ressaltado pelo pesquisador que, caso a derivada segunda fosse uma função de grau maior, tomar valores para determinar os intervalos não seria suficiente. Logo, foi apontado pelo pesquisador e pelo docente regente, que realizar uma análise mais detalhada, independentemente do grau da derivada, é muito importante.

Para a correção do item b) da atividade, referente ao cálculo da integral, por meio da interpretação do método histórico elaborado por Fermat e Pascal, o pesquisador resolveu a questão destacando o passo a passo, já que grande parte dos estudantes teve dificuldade na resolução desse exercício. Destaca-se que poucos estudantes conseguiram resolver corretamente a atividade, sendo que nenhum destes era participante da pesquisa. Alguns estudantes começaram a realizar os cálculos, mas pararam no meio da resolução devido à dificuldade com os procedimentos que deveriam ser realizados, em especial, pela grande quantidade de etapas e de expressões, como pode ser observado na Figura 8, exposta a seguir.

Figura 8 - Resolução questão 1 (b)



$$b) d = \frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8}{4}$$

$$A \approx d \{ (x_1) + d \{ (x_2) + d \{ (x_3) + d \{ (x_n) \}$$

$$A \approx d (d^3 - 2d) + d (2d^3 - 4d) + d (27d^3 - 6d) + d (64d^3 - 8d)$$

$$A \approx d ((d^3 - 2d) + (2d^3 - 4d) + (27d^3 - 6d) + (64d^3 - 8d))$$

$$A \approx d \cdot d ((d^2 - 2) + (2d^2 - 4) + (27d^2 - 6) + (64d^2 - 8))$$

$$A \approx d^2 ((1^2 - 2) + (2d^2 - 4) + (27d^2 - 6) + (64d^2 - 8))$$

Fonte: Atividade 2, A1 e A2

Durante a resolução do passo a passo deste exercício, o pesquisador utilizava o gráfico esboçado no item anterior para demonstrar para os alunos a interpretação geométrica do que deveria ser feito por meio do método dos indivisíveis, de forma a facilitar o entendimento dos estudantes ao relacionar os procedimentos algébricos com sua interpretação geométrica.

Já o último item da atividade, que pedia que os estudantes calculassem a integral da função $f(x)$ dada por meio do Teorema Fundamental do Cálculo, foi corrigido de maneira mais rápida, devido à grande taxa de acerto dos estudantes. Apesar disso, foi ressaltado pelo pesquisador que muitos dos alunos se esqueceram de colocar a constante de integração dx na hora de escrever a notação de integral. Apesar desse equívoco não influenciar diretamente na conta (ou no seu resultado), destaca-se que o dx é parte fundamental da notação, por apontar qual variável está sendo considerada para realizar a operação de integração.

Por meio dessas aulas em que questões históricas foram apresentadas para os estudantes, foi possível elaborar as atividades aplicadas com a turma. Os dados obtidos por meio dessas

atividades, assim como a percepção dos alunos com relação às aulas, obtidas por meio das entrevistas, serão analisadas no capítulo a seguir.

5. CONHECIMENTOS MOBILIZADOS PELOS ESTUDANTES

Neste capítulo são apresentados e discutidos os dados construídos ao longo da pesquisa. Assim, são apresentados os conhecimentos mobilizados pelos estudantes nas atividades referentes à derivada e à integral (na atividade escrita e na gravação em áudio realizada durante o desenvolvimento delas), assim como nas entrevistas. Para tanto, o presente capítulo foi dividido em quatro itens: os três primeiros dizem respeito a cada uma das subcategorias de conhecimento (CCK, SCK e HCK) enquanto o último traz uma síntese dos dados coletados, além de comentários e observações sobre os resultados obtidos.

5.1 CONHECIMENTO COMUM DO CONTEÚDO (CCK)

Nesta investigação, entendemos que o conhecimento comum do conteúdo (CCK) engloba o conhecimento do aluno de saber resolver problemas e exercícios de Cálculo ou problemas matemáticos no geral. Assim, consideramos que os seguintes conhecimentos são referentes ao CCK: utilizar notações corretamente (C1); resolver problemas e exercícios referentes ao CDI corretamente (C2); resolver problemas e exercícios referentes à matemática da Educação Básica corretamente (C3); reconhecer respostas corretas e incorretas (C4); e reconhecer propriedades de ideias matemáticas (C5).

Os conhecimentos mais mobilizados ao longo das atividades foram referentes aos conhecimentos C1, C2 e C3, que dizem respeito à resolução correta de exercícios e ao uso correto de notações matemáticas. Ao todo foram observadas 33 mobilizações do CCK. A relação entre conhecimento mobilizado e participantes da pesquisa é demonstrada no Quadro 6, a seguir.

Quadro 5 - Categorias do CCK mobilizadas por participante

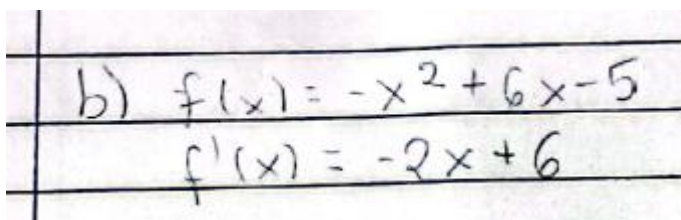
Categorias	Participantes
C1	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, A13, A14
C2	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, A13, A14
C3	A1, A2, A3, A4, A8, A9, A10, A13, A14
C4	A2, A6
C5	A9, A14

Fonte: Elaborado pelo autor

Os dados da investigação permitiram identificar que 10 estudantes manifestaram ao menos as categorias C1, C2 e C3 e que houve poucos indícios da mobilização das categorias C4 e C5. A seguir, serão apresentados alguns exemplos de manifestação desse conhecimento.

Identificamos, por meio das atividades escritas, que quatro duplas de estudantes (A1 e A2; A3 e A4; A5 e A6; A8 e A9) conseguiram resolver corretamente questões referentes ao cálculo de derivada. Dois exemplos de atividades realizadas pelos estudantes são apresentados a seguir, nas Figuras 9 e 10.

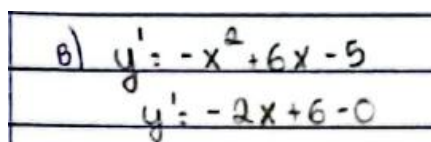
Figura 9 - Resolução questão 1 (b)



$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f(x) &= -x^2 + 6x - 5 \\ f'(x) &= -2x + 6 \end{aligned}$$

Fonte: Atividade 1, A8 e A9

Figura 10 - Resolução questão 1 (b)



$$\begin{aligned} \text{b)} \quad y' &= -x^2 + 6x - 5 \\ y' &= -2x + 6 - 0 \end{aligned}$$

Fonte: Atividade 1, A5 e A6

Na atividade apresentada na Figura 9, é possível identificar indícios de que os estudantes mobilizaram os conhecimentos C1 e C2, já que calcularam a derivada corretamente e utilizaram corretamente sua notação. Já na resolução das alunas A5 e A6, apresentada na Figura 10, é possível notar que, apesar de a resposta estar correta, há um pequeno equívoco quanto à notação y' utilizada, pois a função $f(x)$ é representada pela notação de derivada. Nesse caso, encontrou-se indício da mobilização de C2, mas não de C1.

Durante a discussão do exercício no qual os estudantes deveriam encontrar a derivada da função $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, por meio do método histórico estudado, é possível identificar indícios da mobilização do CCK, como é possível observar no diálogo das alunas A1 e A2:

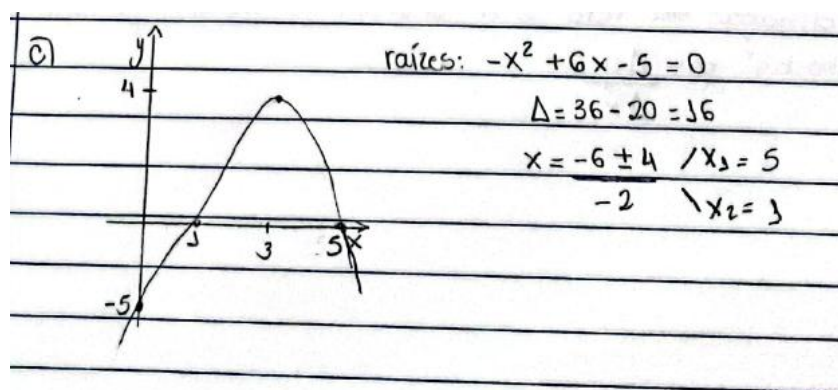
Aluna 1: Vamos supor que x_0 é 1. O $f(x_0)$ é o $f(1)$. Então $-1^2 + 6 - 5$, $-1 + 6,5 - 5$. Ai a coordenada vai ser (1,0).

Aluna 2: Deu isso aqui né? $-2x + 6$. O nosso tombo [se referindo ao resultado obtido por meio da utilização de uma regra de derivação].

Nessas falas das participantes, identificamos indícios de que A1 mobilizou o conhecimento C5, pois indica conhecer propriedades de funções, mais especificamente seu conhecimento sobre pares ordenados e a maneira pela qual a variável x é representada na lei da função $f(x)$. Já a aluna A2, demonstrou saber utilizar as regras de derivação para calcular derivadas, uma vez que ao calcular a derivada de $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, ela apresenta o resultado correto em sua fala. Logo, podemos apontar indícios de que a aluna A2 mobilizou o conhecimento C2.

Outro exemplo de situação na qual identificamos manifestação do CCK, foi quando a dupla formada pelas estudantes A1 e A2 esboçou o gráfico da função corretamente, assim como mostra a Figura 11 a seguir. Para tanto, as estudantes calcularam corretamente os zeros da função, encontraram o valor da coordenada na qual a função atinge seu valor máximo, chamada de vértice, no caso de a função ser do segundo grau, além de encontrar o ponto no qual a função intercepta o eixo y . Todos esses procedimentos estão relacionados com a categoria C3, que diz respeito à resolução correta de exercícios referentes às áreas da matemática trabalhadas na Educação Básica.

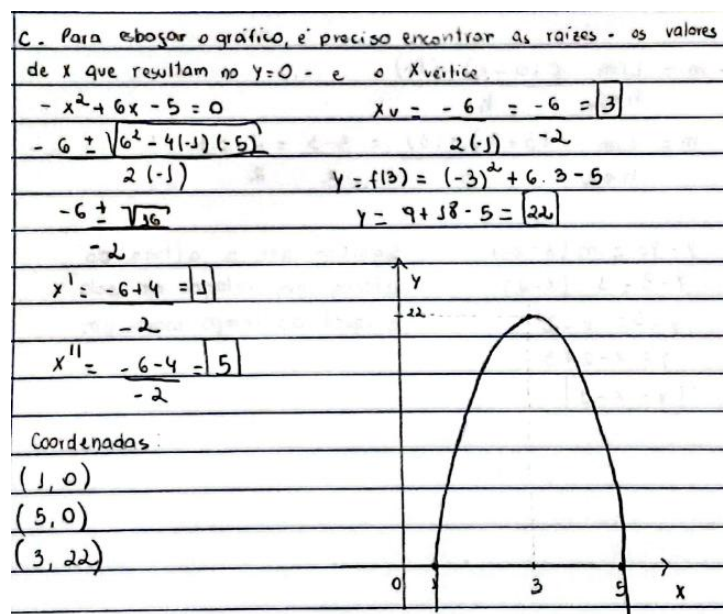
Figura 11 - Resolução questão 1 (c)



Fonte: Atividade 1, A1 e A2

Destacamos, ainda, com relação a essa questão, que a resolução apresentada pelos estudantes A3 e A4, também aponta para uma manifestação do CCK. Embora os estudantes tenham cometido um erro durante o procedimento, já que consideraram $(-3)^2$, em vez de $-(-3)^2$, entendemos que o CCK foi mobilizado, por conta dos demais processos terem sido realizados corretamente, o que demonstra entendimento dos procedimentos a serem desenvolvidos (C3).

Figura 12 - Resolução questão 1 (c)



Fonte: Atividade 1, A3 e A4

Indícios da mobilização de conhecimentos referentes ao CCK foram identificados nas discussões entre A1 e A2, durante a resolução do item (a) da questão 2, da atividade referente à derivada. Nessa questão, era solicitado que os alunos encontrassem a velocidade média do atleta no intervalo de tempo que se iniciava no momento em que ele atingisse 3 metros de altura até o momento que ele atingisse a altura máxima. Para tanto, deveria ser considerado que a trajetória do movimento do atleta era representada pela função $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, de modo que x representava o tempo em segundos, e $f(x)$ representava a altura do atleta em relação ao solo, em metros. As estudantes estavam discutindo qual seria a maneira que o 3 seria aplicado na função, ou seja, se deveria ser feito $f(3)$ ou $f(x) = 3$, o que resultou na seguinte interação:

Aluna 1: E se fizer substituindo o 3, dá o que? O 3 no x^2 . Isso daí é o quê?

Aluna 2: Da $-9 + 18 - 5$. Da 4. Só que isso daí a gente tá [sic] falando que x é 3 e a gente não tem nenhuma informação que x é 3, a gente tem que o y é 3.

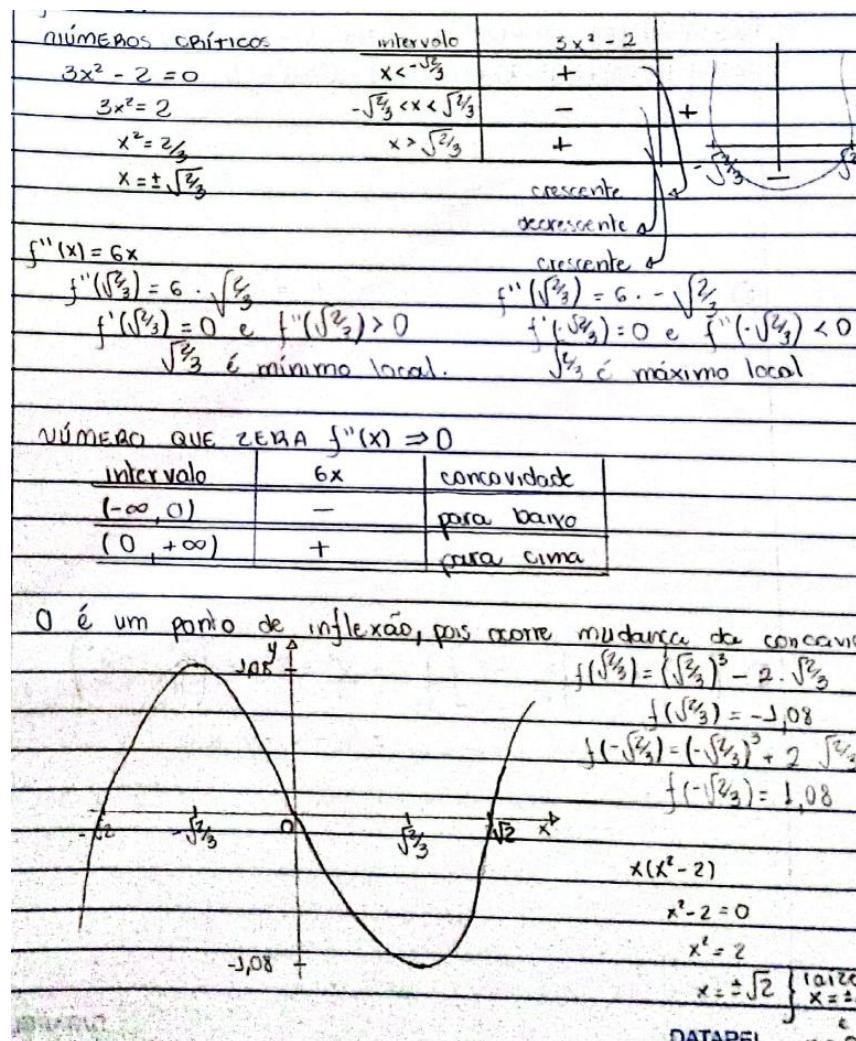
Nesse diálogo, A2 percebe o erro da colega e a corrige, o que indica a mobilização do CCK (C4), que é descrito por Ball *et al.* (2008) como o conhecimento que permite o reconhecimento de respostas e interpretações erradas presentes em cálculos matemáticos.

Identificamos indícios da mobilização de conhecimentos referentes ao CCK na resolução do primeiro exercício da segunda atividade. Nesse exercício, era solicitado que fosse

esboçado o gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x$. Para tanto, era necessário calcular pontos de máximo e mínimo locais, os intervalos nos quais a função é crescente e decrescente e os intervalos em que a concavidade é voltada para cima ou para baixo. Na resolução desse exercício, encontramos indícios da mobilização dos seguintes conhecimentos referentes ao CCK: C2 relativo à realização de cálculos corretos de derivadas (três duplas); C3 concernente aos cálculos dos zeros das funções e cálculo do valor da função em determinados valores de x (as mesmas três duplas).

Na Figura 13 é apresentada a resolução das alunas A1 e A2, que calcularam a derivada segunda da função $f(x)$; avaliaram os valores de $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, valores estes que foram encontrados ao calcularem os zeros da função $f'(x)$, que, por sua vez, foram calculados ao fazerem $f'(x) = 0$.

Figura 13 - Resolução questão 1 (c)



Nas gravações das falas das alunas A5 e A6, durante a resolução desse exercício, é possível identificar indícios da mobilização do conhecimento C4, já que há um momento no qual a aluna A6 reconhece o erro da aluna A5 quanto à maneira de resolver a derivada da função $f(x) = x^3 - 2x$, por meio da regra do tombo.

Aluna 5: *É aquela do tombo lá? Que cai um. Por exemplo, ... x ao, ... 2x... Não. 3x [se referindo a derivação do termo x^3]*

Aluna 6: *A gente tem que derivar ela.*

Aluna 5: *É isso? Aqui, olha. 3x... Não seria só 3x daqui? [se referindo a derivação do termo x^3]*

Aluna 6: *Aqui fica 3... 3x ao quadrado... [se referindo a derivação do termo x^3]*

Aluna 5: *Não é 2 menos 1? Em cima, no expoente.*

Aluna 6: *Não, porque aí fica 3 menos 1, né? [se referindo a regra do tombo com relação ao expoente de x^3]*

Em uma interação entre as alunas A8 e A9, ao resolver essa mesma questão, é possível identificar indícios da mobilização das categorias C3 e C5, conforme pode ser observado no diálogo a seguir:

Aluna 8: *Então, vamos derivar a primeira derivada e igualar a zero para achar o ponto crítico. Acho que é isso. $f(x)$. A derivada de x ao cubo. 3x ao quadrado, né?*

Aluna 9: *3x ao quadrado.*

Aluna 8: *Caiu o 3. Menos a derivada de 2x. 2. Uma constante. Isso mesmo?*

Aluna 9: *Aí, agora, será que faz o...*

Aluna 8: *Iguala a zero. Para achar o ponto crítico.*

Aluna 9: *Aí, a gente vai achar os dois pontos.*

Indícios da mobilização do conhecimento C2 podem ser identificados devido ao entendimento que as alunas demonstram para resolver uma derivada. Já os referentes ao conhecimento C5, estão relacionados com o fato de A9 apontar que, por conta da derivada ser uma função do segundo grau, o número de pontos críticos que serão encontrados é igual a dois,

o que demonstra um conhecimento quanto à propriedade de funções do segundo grau, que apresentam duas raízes.

Durante a resolução desse mesmo exercício, a dupla A13 e A14 teve a seguinte discussão:

Aluno 14: *Então, ela vai dar negativo, certo? Quando uma derivada é negativa, a concavidade é para baixo.*

Aluno 13: *Não é o contrário?*

Aluno 14: *Não. Positiva é para cima e negativa é para baixo.*

Nesse excerto, temos indícios de que A14 mobilizou o conhecimento C5, ao saber enunciar uma propriedade do teste da derivada segunda, que é utilizado para determinar em quais intervalos a função possui concavidade voltada para cima ou para baixo.

Outro momento no qual encontramos indícios de que A14 mobilizou o conhecimento C5 foi no diálogo apresentado a seguir.

Aluno 14: *Quando é para calcular só a integral, usando o teorema fundamental do cálculo não precisa colocar constante, certo?*

Aluno 13: *Certo.*

Nesse diálogo, o aluno A14 aponta para o fato de que não é necessário manter a constante de integração no resultado do cálculo, por se tratar de uma integral definida.

Por fim, no item (d) da atividade sobre integrais, que solicitava o cálculo da Integral da função $f(x)$, por meio do TFC, verificou-se indícios da mobilização de C2 e C1. O conhecimento C2 foi mobilizado por quatro duplas (A1 e A2; A3 e A4; A8 e A9; A13 e A14), sendo que dessas quatro duplas, três também mobilizaram C1. A exceção foi a dupla composta pelos alunos A13 e A14, que apesar de ter realizado o cálculo da derivada corretamente, cometeu um equívoco quanto ao uso da notação de integral, ao colocarem o símbolo em todas as etapas do procedimento, quando este deveria aparecer apenas no primeiro, além de terem esquecido de colocar a variável de integração dx , o que aponta para um entendimento mais procedimental sobre o conteúdo, conforme pode ser observado na Figura 14, mostrada a seguir.

Figura 14 - Resolução questão 1 (d)

$$d) \int_0^2 f(x) = x^3 - 2x$$

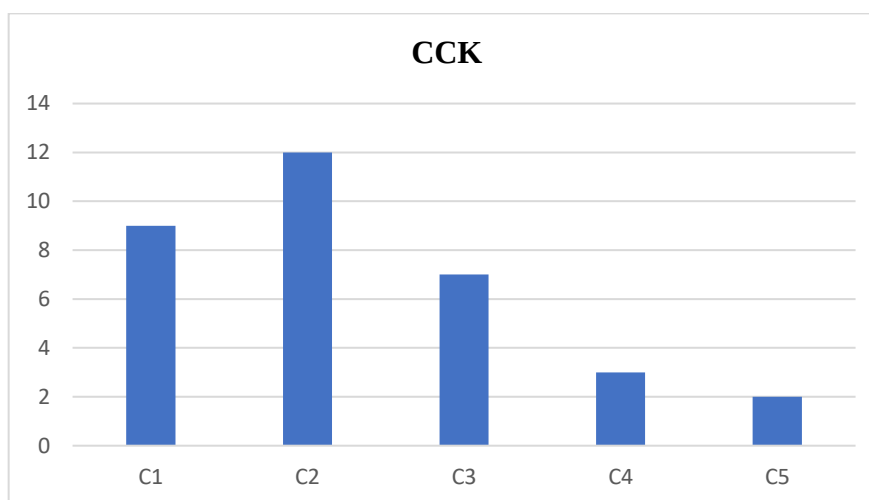
$$\rightarrow \int f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$$

$$\int_0^2 \left(\frac{2^4}{4} - 2^2 \right) - \left(\frac{0^4}{4} - 0^2 \right)$$

$$(4 - 4) - 0 = 0$$

Fonte: Atividade 2, A13 e A14

Com vistas a facilitar a visualização da quantidade de mobilizações de cada conhecimento referente ao subdomínio do CCK, foi construído o Gráfico 1, apresentado a seguir.

Gráfico 1 - Conhecimentos mobilizados por categoria do CCK

Fonte: Elaborado pelo autor

Com base nos dados apresentados nesse gráfico, é possível perceber o alto índice de mobilização das categorias C1 e C2, que dizem respeito, respectivamente, ao uso correto de notações matemáticas e ao conhecimento para resolver corretamente problemas e exercícios relacionados ao Cálculo.

Quanto à categoria C3, que trata da resolução correta de exercícios e problemas matemáticos relacionados à Matemática aprendida durante a Educação Básica, é possível observar um menor número de mobilizações do que as duas primeiras categorias. Em questões

nas quais o cálculo era mais direto, como a questão 1 (b) da atividade de derivadas, em que era pedido para os alunos calcularem a derivada da função $f(x)$, utilizando regras de derivação, foi possível perceber uma maior facilidade para encontrarem a resposta correta. Contudo, em questões que envolviam mais etapas para serem resolvidas, ficou evidente uma dificuldade dos estudantes com relação aos cálculos mais básicos, apontando para a pouca mobilização da categoria C3.

Essa dificuldade se relaciona diretamente com a compreensão dos conceitos relacionados ao Cálculo. Foram realizadas perguntas sobre a formação dos estudantes antes de eles ingressarem na universidade. Essas falas serão discutidas posteriormente, ao fim deste capítulo.

Com relação às categorias C4 e C5, elas apareceram em grande parte nos áudios de discussões dos estudantes, enquanto eles realizavam as atividades propostas. Apesar de terem aparecido poucas vezes, em comparação com as demais categorias, elas também representam um conhecimento importante para futuros professores, por estarem envolvidas com a habilidade de reconhecer respostas corretas, incorretas e as propriedades dos conceitos que estão sendo trabalhados.

5.2 CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO CONTEÚDO (SCK)

Para categorizar trechos referentes ao SCK, foram considerados os conhecimentos referentes para justificar e explicar procedimentos realizados nos cálculos (S1); calcular derivadas e integrais por maneiras não usuais corretamente (S2); utilizar diferentes representações matemáticas corretamente (S3); e reconhecer relações entre os conceitos do CDI com conteúdos presentes no currículo da Educação Básica (S4). Vale ressaltar que, no modelo do MKT, esse é o conhecimento que caracteriza a profissão do docente de Matemática, por sistematizar as ações relacionadas ao ensino, como conhecer boas representações de um determinado conteúdo.

A relação entre as categorias mobilizadas pelos estudantes ficou representada no Quadro 7, a seguir, no qual percebe-se que apenas quatro dos quatorze participantes demonstraram indícios sobre a mobilização desse tipo de conhecimento.

Quadro 6 - Categorias do SCK mobilizadas por participante

Categorias	Participantes
------------	---------------

S1	A2, A13
S2	A1, A2
S3	A1, A2
S4	A2, A3

Fonte: Elaborado pelo autor

Durante as atividades, as alunas A1 e A2 demonstraram conhecer outras formas de calcular uma derivada, que não por meio de uma regra de derivação. Na segunda questão da primeira atividade, na qual pedia-se a derivada da função $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ no ponto (2,3), apesar de as estudantes já possuírem a expressão geral da derivada da função, calculada no item 1 (b), o cálculo foi realizado mais uma vez, mas dessa vez utilizando a definição de derivada como limite, o que acaba por gerar o seguinte momento de discussão:

Aluna 1: *Vai ficar $-2xh - h^2 + 6h$. Só né? Sobre h . Agora a gente põe o h em evidência. Fica $-2x - h + 6$, certo? Aí, aqui a gente vai cortar ... Isso aqui vai ficar $-2x$, o h é zero, esse daqui, né. Tá [sic] tendendo a zero, é zero. [se referindo aos procedimentos da resolução da derivada por meio de sua definição como limite, no qual h tende a zero.]*

Aluna 2: *Tá, mas agora do que a gente precisa? Do ponto? “A derivada no ponto 2”, ah, a derivada então é [...]*

Aluna 1: $-2 \cdot 2 + 6 = 3$.

Essa interação indica o entendimento das alunas quanto ao uso da definição de derivada como limite para efetuar cálculos, que é evidenciado nas falas realizadas pela A1 apresentadas anteriormente, além de a resposta final ser correta. Com base nisso, entende-se que nesse momento de interação entre as alunas, o SCK foi mobilizado, já que ele está relacionado com o conhecimento de calcular derivadas por meios não usuais, como o uso das regras de derivação (S2). Além disso, o fato de essas alunas também terem calculado a derivada da função $f(x)$ por meio do método histórico corretamente (Figura 15) aponta igualmente para a mobilização da categoria S2, uma vez que utilizaram um método não usual para resolver os exercícios propostos de derivada.

Figura 15 - Resolução questão 1 (a)

Questão 1 -

a) $x_0 = 3$

$(3, f(3))$ e $(3 + dx, f(3 + dx))$

$f(3) = -3^2 + 6 - 5$

$f(3) = 0$

$dy = (- (3 + dx)^2 + 6(3 + dx) - 5) - f(3)$

$dy = -1 - 2dx - dx^2 + 6 + 6dx - 5 - 0$

$dy = -6 + 6 - 2dx + 6dx$

$dy = 4dx$

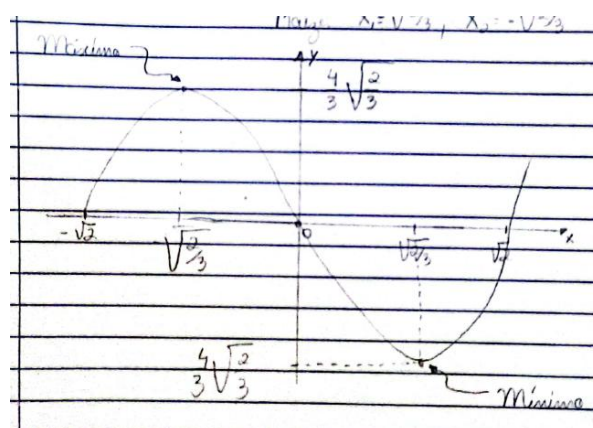
$\frac{dy}{dx} = 4$

Fonte: Atividade 1, A1 e A2

A resolução por meio do método histórico também apresenta a mobilização da categoria S3, já que, em vez de utilizarem a representação usual para a derivada, $f'(x)$, as alunas utilizaram uma outra forma de representação, sendo ela dy/dx , que, apesar de ter sido apresentada nas aulas, não foi utilizada com tanta frequência ao longo da disciplina.

Durante a análise do item (d), referente ao cálculo da integral da função $f(x) = x^3 - 2x$, por meio do TFC, os alunos A13 e A14 discutiram sobre o resultado ser igual a zero, o que causou um estranhamento no aluno A14, que questionou seu colega. Para justificar o resultado, o aluno A13 retomou o gráfico da função, esboçado no item a) da atividade, representado na Figura 16 a seguir.

Figura 16 - Resolução questão 1 (a)



Fonte: Atividade 2, A13 e A14

Por meio desse desenho, o aluno A13 explicou o porquê de a integral ter dado zero da seguinte forma:

Aluno 13: *Essa integral, ela é uma função de terceiro grau. Então ele tá pegando a diferença desse ponto com esse. Sacou?*

Aluno 14: *Ah, pode crer. Entendi.*

Aluno 13: *Porque lembra quando tá nesse quadrante aqui? Ele é negativo. Então você tem que subtrair. Então ele tá subtraindo isso com isso que dá zero.*

Percebe-se aqui a capacidade de o aluno A13 explicar o porquê de o resultado ser igual a zero, ao apontar que o intervalo de integração aborda dois quadrantes, um no qual a função possui sinal negativo e outro em que ela é positiva e que, a área apresentada em cada um é igual, mas com sinais opostos, chegando, assim, no valor zero como resposta. A partir desse momento relatado, entende-se que houve a mobilização da categoria S1 pelo aluno A13, por conseguir justificar matematicamente o significado do resultado encontrado para seu colega.

Destacamos que os participantes foram questionados durante as entrevistas sobre suas percepções a respeito de uma relação entre os conceitos e procedimentos que aprenderam durante a disciplina com os que eram ensinados na Educação Básica (S4). Com base nas respostas obtidas, foi possível identificar que apenas os estudantes A2 e A3 apresentaram indícios da mobilização desse conhecimento. Contudo, percebe-se que as percepções dos estudantes foram muito superficiais, sem apontar para relações mais concretas entre os conteúdos. Na fala da aluna A2, por exemplo, é estabelecida uma conexão entre o conteúdo de derivadas e o conteúdo de equações da reta que é ensinado na Educação Básica, mas sem a presença de um exemplo objetivo.

Aluna 2: *Derivada a gente ensina, né? Tipo, não derivada, mas na parte de... de reta, equação da reta, que a gente ensina na escola, tem. Não é assim que a gente vê, mas, tipo, a gente já tem uma inclinação, umas coisas assim.*

Da mesma forma, ao ser questionado sobre seu entendimento de possíveis contribuições que os conceitos de Cálculo podem trazer para a prática do professor, o aluno A3 indica a mobilização da categoria S4, ao dizer:

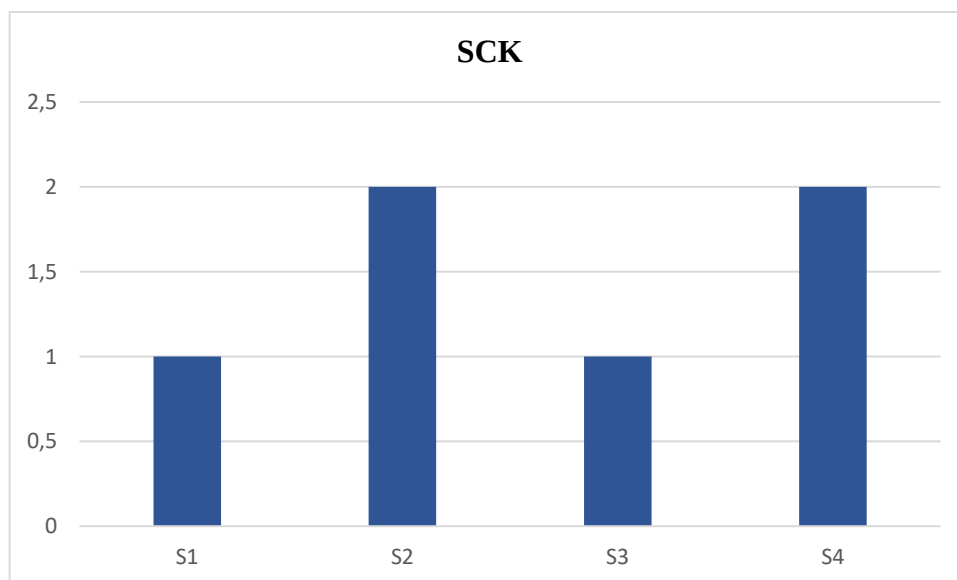
Aluno 3: *Ele tem que ter um entendimento sobre aquilo, né? Que na própria escola, muitas vezes a gente sabe fazer tal exercício, mas a gente não sabe por que ou o que é aquilo. Eu acho que ajuda a entender e se olhar por outra perspectiva.*

Indicando que, conhecimentos sobre os conceitos de integral e derivada, por exemplo, podem auxiliar o professor a entender a validade dos procedimentos realizados para resolver exercícios relacionados a conteúdos presentes no currículo da Educação Básica. Com relação aos demais participantes entrevistados, nenhum deles acredita que haja uma relação entre o Cálculo e a Matemática ensinada na Educação Básica, assim como apontado pela aluna A6, em sua fala apresentada a seguir.

Aluna 6: *Assim, eu quero formar matemática, mas eu quero dar aula para criança, então o que eu aprender em cálculo não vai me ajudar na aula em criança.*

Com base nas análises sobre as categorias pertinentes ao conhecimento especializado do conteúdo, foi elaborado o Gráfico 2 a seguir.

Gráfico 2 - Conhecimentos mobilizados por categoria do SCK



Fonte: Elaborado pelo autor

É possível perceber, por meio do gráfico, que houve apenas uma mobilização do conhecimento S1, que diz respeito à habilidade dos estudantes de conseguirem justificar e explicar os cálculos que foram realizados. Apesar da pouca mobilização, essa categoria indica

um bom conhecimento sobre o conteúdo pelos alunos, que precisam compreender as ideias matemáticas para conseguir justificar os procedimentos matemáticos realizados.

Outro fator correspondente à categoria S1 ocorreu na mobilização de justificativas e explicações que os estudantes que realizaram a atividade em dupla colocaram para auxiliar o colega a compreender o que deveria ser feito. Dessa forma, além de conseguirem justificar seus procedimentos, eles também contribuíam para o aprendizado de seus colegas.

A habilidade de calcular derivadas e integrais por maneiras não usuais, que corresponde ao conhecimento S2, também é considerado um conhecimento importante para o futuro professor. No ambiente da sala de aula, é possível que professores se deparem com algoritmos de resolução diferentes dos comumente utilizados. Logo, entrar em contato com outras formas de resolver um mesmo exercício torna-se muito importante para que o futuro docente comece a desenvolver a habilidade de analisar essas outras formas de resolução. Considerando que essa categoria foi mobilizada apenas duas vezes, entende-se que trazer outras formas de resolução mais simples seja necessário para desenvolver essa habilidade de maneira mais adequada. Apesar disso, trabalhar com métodos alternativos pode contribuir para desenvolver o conhecimento de representações alternativas, fato este apresentado pela mobilização de S2, em que o cálculo foi realizado por meio do método histórico apresentado em sala de aula.

O conhecimento pertinente à categoria S4, que diz respeito à capacidade de os estudantes reconhecerem relações entre os conceitos do CDI com conteúdos presentes no currículo da Educação Básica, foi mobilizado duas vezes, em falas de dois participantes da pesquisa (A2 e A3) durante as entrevistas. Apesar de esses alunos compreenderem que o conhecimento matemático adquirido durante a disciplina de Cálculo seja relevante para o ensino na Educação Básica, eles não conseguem estabelecer uma relação concreta. A Aluna 2 aponta para a questão de o conceito de derivada ser trabalhado de maneira indireta, já que conceitos como equação da reta e inclinação da reta são conteúdos trabalhados durante o Ensino Fundamental e Médio, contudo, na sua visão, a forma na qual seria possível articular esses dois conteúdos não é explícita.

Entende-se que o pouco diálogo estabelecido entre os conteúdos apresentados durante a disciplina e os conteúdos que são ensinados na Educação Básica ocorre devido à forma pela qual a disciplina é apresentada, que tem como foco o aprendizado dos conceitos de limite, derivada e integral e algumas de suas aplicações. Outro fator relevante a ser considerado é o fato de a turma não ser exclusivamente de alunos do curso de Matemática Licenciatura, mas

sim uma turma mista, com alunos do curso de formação de professores e de Sistemas de Informação, o que dificulta trabalhar os conteúdos com foco na formação de um grupo em específico.

Além disso, a proposta da pesquisa possui suas limitações, não permitindo estabelecer essa relação entre os conteúdos do curso com aqueles da Educação Básica, fato este apontado pelo Gráfico 4. Entende-se que as atividades precisam ser repensadas, de forma a incentivar e desenvolver uma maior conexão entre estes conteúdos.

5.3 CONHECIMENTO DO CONTEÚDO NO HORIZONTE (HCK)

Segundo Ball *et al.* (2008), o HCK está relacionado com a relação que o professor estabelece entre conteúdos presentes ao longo de todo o currículo escolar do aluno. Com essas relações estabelecidas, torna-se possível, por exemplo, reforçar o aprendizado de determinados conteúdos que servirão como base para outros mais complexos, que serão apresentados futuramente para os estudantes.

Além disso, segundo Jakobsen (2012), a categoria referente ao HCK é aquela na qual a HM se faz mais presente. Conhecer como determinados conceitos se desenvolveram historicamente, as influências que levaram ao seu desenvolvimento, assim como outros aspectos relacionados à natureza do conhecimento matemático fazem parte do HCK. Com base nesses referenciais, entende-se que conhecer aspectos do desenvolvimento histórico dos conceitos presentes na disciplina (H1) faz parte do HCK.

Na fala da aluna A11, durante a entrevista realizada, é possível observar a percepção da aluna quanto ao desenvolvimento da Matemática após entrar em contato com as questões históricas apresentadas em sala de aula. Nela, a aluna A11 comenta sobre como a HM contribuiu para seu entendimento sobre como a Matemática é produzida.

Aluna 11: [...] porque daí conta o método, e aí fala quem que fez o método e como que foi. Então, daí dá pra ter como que foi a produção dele.

Com relação aos aspectos históricos terem contribuído para a aprendizagem dos conceitos de derivada e integral, A2 indicou que:

Aluna 2: *Acho que é mais na compreensão de tipo, entender que é isso e passar para o outro e ver que é a mesma coisa. Como que eu explico. É, tipo, tenho esse, esse método. E ele serve para tal coisa, eu preciso fazer tal coisa aqui. Só que para eu não usar esse método, eu vou usar esse outro. Só que eles são meio que a mesma coisa, só que em meios diferentes.*

Entende-se, com essa fala, que a aluna compreende que o método histórico e as regras de derivação possuem a mesma finalidade, apesar de as representações e os procedimentos serem diferentes. Nesse sentido, para ela, esse foi “mais um” método apresentado. Para um futuro professor de Matemática, esse conhecimento é importante, pois permite que o aluno compreenda que a disciplina vai além do aprendizado e de aplicação de fórmulas e regras.

Essa mesma estudante fez um apontamento com relação às aulas de integral, na qual foram apresentadas questões históricas como o método da exaustão e uma interpretação do método de Fermat e Pascal sobre o cálculo de áreas sob curvas, ambos com representações gráficas para auxiliar a compreensão. Segundo ela, trabalhar figuras e desenhos ao lado das questões históricas é uma estratégia que auxilia na compreensão do que está sendo ensinado.

Aluna 2: *Eu acho que por causa do desenho, de realmente, de você pensar que realmente vai diminuindo, vai chegando mais próximo.*

Por meio do desenho do método da exaustão e do gráfico com retângulos sob a curva representada, entende-se que há uma melhor compreensão sobre o que se pretendia encontrar por meio do cálculo da integral e como chegar no resultado pretendido.

Já o aluno A3, durante a entrevista, comentou sobre a HM ter apresentado uma outra perspectiva quanto ao conteúdo ensinado, mas que acabou não contribuindo para a sua aprendizagem, uma vez que não teria sido aprovado, conforme pode ser identificado no excerto apresentado a seguir:

Aluno 3: *Eu acho que é bom para ter uma visão melhor. Mas é por conta de realmente eu não ter sido aprovado em cálculo, não ter ido tão bem. Por mais que seja uma forma de ver as coisas de outro lado, não me ajudou tanto, porque, no final das contas, eu não aprendi muito bem a matéria.*

Dessa forma fica claro que, apesar de a HM poder contribuir com a aprendizagem matemática de alguns estudantes, ela não terá o mesmo impacto para todos os estudantes.

5.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS CONHECIMENTOS MOBILIZADOS

Com base na análise apresentada anteriormente, é possível estabelecer uma visão geral dos resultados obtidos por meio de coleta de dados, assim como uma perspectiva geral dos conhecimentos mobilizados pelos participantes da pesquisa.

Na atividade sobre derivada, percebe-se que, de maneira geral, o CCK foi o conhecimento mais mobilizado durante a realização da atividade, principalmente por meio das questões 1 (b) e 1 (c); ao passo de que o conhecimento do conteúdo no horizonte (HCK) não foi mobilizado, enquanto o conhecimento especializado do conteúdo (SCK) foi mobilizado três vezes.

No Quadro 8, estão apresentados os conhecimentos mobilizados durante a atividade cujo conteúdo girava em torno do conceito de derivada, divididos por material no qual o conhecimento foi identificado, sendo eles: a atividade escrita dos alunos e as discussões realizadas pelos alunos durante a execução dessas atividades.

Quadro 7 - Conhecimentos mobilizados na atividade sobre derivadas

Conhecimento Mobilizado	Atividade Escrita	Gravações
CCK	12	2
SCK	1	1
HCK	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor

Dentre os participantes da pesquisa, A1 e A2 estão entre os que mais demonstraram mobilizar algum tipo de conhecimento. Essa situação pode ser justificada pelo fato de que apenas essa dupla encaminhou a gravação das discussões realizadas durante as duas atividades, o que possibilitou a identificação de conhecimentos que não seriam perceptíveis apenas pelos procedimentos matemáticos realizados no papel.

Entende-se que a pouca mobilização de conhecimentos pertinentes à categoria de SCK ocorreu por uma dificuldade de relacionar o conteúdo de funções com o conceito de derivada. Além disso, percebe-se, também, uma dificuldade com o próprio entendimento sobre funções, fato este que foi evidenciado pelas resoluções dos exercícios referentes ao esboço do gráfico e à velocidade média.

Já o HCK não foi mobilizado em nenhuma das questões presentes na atividade. Entende-se o ocorrido devido à natureza das questões, que não buscavam compreender o conhecimento dos estudantes quanto às questões históricas correspondentes ao conteúdo de derivada. Além

disso, como apenas uma das duplas realizou a gravação do áudio da discussão realizada durante a atividade, poucos dados foram obtidos para serem analisados.

Vale ressaltar que o foco da disciplina é o ensino de Cálculo para as turmas de Matemática Licenciatura e de Sistemas de Informação. Como a HM não faz parte da ementa do curso, não foi possível, durante as atividades, colocar muitos exercícios relacionados a questões históricas, o que acabou influenciando nos resultados obtidos durante a aplicação da pesquisa. Contudo, a não identificação da mobilização de conhecimentos não implica o fato de os estudantes não os possuírem, mas sim que eles não puderam ser identificados por meio da atividade.

Com relação à atividade sobre integral, a questão colocada, referente ao método histórico apresentado em sala de aula, não foi realizada por nenhum dos participantes da pesquisa. Vale ressaltar que apenas três duplas iniciaram o cálculo dessa questão, mas sem prosseguir até um resultado. Entende-se, com isso, que a quantidade de procedimentos pode ter influenciado os estudantes a não resolverem a questão, apesar de duas dessas três duplas terem iniciado o processo corretamente. Durante as discussões dos estudantes, também não foi possível identificar nenhuma fala que se referisse a algum conhecimento histórico sobre o assunto. De maneira geral, os conhecimentos mobilizados, divididos por meio de coleta de dados são apresentados no Quadro 9, a seguir.

Quadro 8 - Conhecimentos mobilizados na atividade sobre integrais

Conhecimento Mobilizado	Atividade Escrita	Gravações
CCK	13	7
SCK	0	1
HCK	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor

Quanto ao conhecimento especializado do conteúdo, a vez na qual ele foi mobilizado estava relacionada com a explicação apresentadas pelo aluno A13 ao seu colega, para justificarem matematicamente os cálculos que estavam sendo realizados. Além de o estudante apresentar um certo domínio do conteúdo, é colocado em evidência uma habilidade importante para futuros professores, isto é: saberem justificar os procedimentos realizados por meio de argumentos matemáticos para a resolução de exercícios.

Quando questionados, na entrevista, os estudantes apontaram algumas sugestões para alterações nas atividades. Segundo eles, os métodos históricos poderiam ser mais trabalhados,

de forma que mais exemplos fossem desenvolvidos em sala de aula. Os alunos A2 e A3, por exemplo, apresentaram as seguintes ideias:

Aluna 2: *Eu acho que faltou o professor fazer um exemplo a mais, porque eu acho que o exemplo que ele deu foi muito simples, e aí o que caiu na atividade era bem mais complicado, aí acho que dificultou um pouco nisso.*

Aluno 3: *Na minha concepção foram atividades bem difíceis. Eu tive bastante dificuldade em fazer as duas, mesmo estando em dupla. Mas eu não acho que as atividades estavam incoerentes com o que foi dado em sala. A questão é que eu acho que ela abordou temas complicadinhos que a gente não viu tanto na sala de aula.*

Os demais alunos entrevistados também trouxeram argumentos quanto ao nível de dificuldade das atividades, o que tornou seu processo de resolução mais difícil. Em suas falas foi citada a questão do pouco tempo utilizado para desenvolver o método histórico com a turma. De fato, devido ao tempo da disciplina, não foram mais do que duas aulas de cinquenta minutos para desenvolver os conteúdos de integral e derivada relacionados com a HM. Além disso, deve-se levar em conta que todos os conteúdos presentes na ementa da disciplina são trabalhados de maneira célere em sala de aula, tendo em vista a carga horária do curso (64h) e a quantidade de conteúdo que precisa ser abordada.

Diante disso, entende-se que essa limitação da presente pesquisa pode ser contornada com o desenvolvimento de mais exemplos com os alunos utilizando os métodos históricos como resolução, ou, então, trabalhando com exercícios mais simples durante as atividades, utilizando o tempo da aula para trazer mais questões históricas relacionadas com o conteúdo.

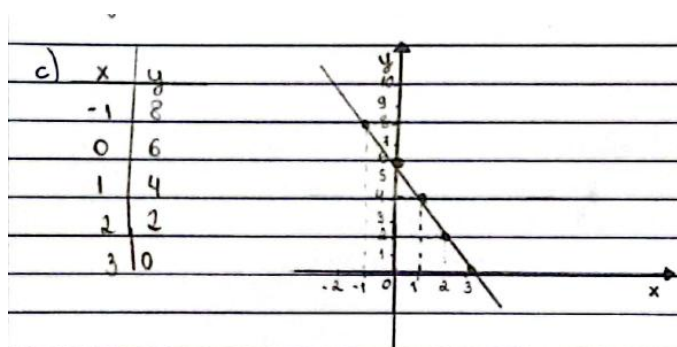
Além disso, durante as entrevistas, foi levantado pelos estudantes as maiores dificuldades com relação à disciplina em suas percepções. Dentre essas dificuldades estão: o pouco conhecimento com respeito a conteúdos da Educação Básica; a dificuldade de adaptação ao Ensino Superior; e, como relatado por um dos participantes, um período de afastamento dos estudos.

Com relação à dificuldade de adaptação ao ambiente da universidade, foi levantado pela aluna A5, o seguinte comentário, apresentado abaixo.

Aluna 5: *E às vezes chega aqui, não estou falando que foi o caso do professor, mas assim, às vezes chega aqui na universidade, os professores já esperam que a gente já saiba aquilo, já saiba de muita coisa. E às vezes a gente esqueceu, às vezes a gente não teve uma boa base daquilo, e aí acaba atrapalhando.*

Ao longo das atividades, foi possível perceber que conceitos como função e sua representação no plano cartesiano não estavam muito bem definidos para alguns estudantes, assim como mostra a Figura 17, que retrata a resolução apresentada pelas estudantes A5 e A6, da questão na qual deveria ser esboçado o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Figura 17 - Resolução questão 1 (c)



Fonte: Atividade 1, A5 e A6

Apesar de $f(x)$ ser uma função do segundo grau, seu gráfico foi representado como uma reta e não como uma parábola, apontando para uma deficiência no aprendizado de funções. Destaca-se que o professor ministrou uma aula de revisão dos conteúdos de função e dos gráficos das funções, colocando, no quadro, uma tabela com as funções que os alunos veriam com mais frequência durante o curso e os seus respectivos gráficos. Entretanto, para um aluno que não aprendeu adequadamente esse conteúdo no Ensino Médio, essa revisão, em muitos casos, não é suficiente. Dessa forma, entende-se que, em vez desses conteúdos serem trabalhados em uma breve revisão no início da disciplina, eles poderiam ser incorporados na ementa do curso, ou, assim como aponta o aluno A3, em disciplinas separadas e que são ofertadas antes do curso de Cálculo.

Aluno 3: *Eu acho que o maior problema não envolve nem o Cálculo em si, mas a ordem das disciplinas que você tem nos semestres. Eu estava tendo disciplinas que eram para auxiliar Cálculo, e eu estava tendo isso junto com o Cálculo. Eu acho que uma separação assim de semestres iria auxiliar.*

No caso dos estudantes que participaram da entrevista, foi relatado que o aprendizado de conceitos da Educação Básica, como funções e logaritmos, foi defasado, devido ao fato de eles terem sido trabalhados durante a pandemia. Podemos identificar que as alunas A2, A5 e A11 afirmaram ter tido uma boa formação Matemática durante o Ensino Médio, mas que foram apresentadas ao conceito de função superficialmente devido ao contexto pandêmico. Já os alunos A3 e A6 indicaram que não aprenderam, ou aprenderam muito pouco, sobre funções durante a pandemia. De acordo com o aluno A3, por exemplo:

Aluno 3: *Então, eu tive dois anos ali. O segundo e o terceiro ano foi completamente online. Eu não tive aprendizado, não aprendi nada nesses anos. [...] Eu acho que antes da pandemia eu não cheguei a ver função. Eu acho que eu iria ver mais nos anos finais do Ensino Médio mesmo.*

Além de função, a aluna A6 ressalta outros conteúdos com os quais ela não teve contato antes de entrar na universidade.

Aluna 6: *Eu entrei aqui sem saber função, sem saber logaritmo, então eu entrei sem saber muita coisa.*

Essas dificuldades ficam evidentes com a análise das atividades, já que a mobilização de conhecimentos pertinente à categoria C3 é menor do que as da categoria C2. Apesar disso, foi possível perceber a contribuição da História da Matemática para o aprendizado dos estudantes. Durante a entrevista, quando questionada sobre o uso das questões históricas nas aulas sobre derivada e se ela utilizaria a HM em suas futuras aulas, respectivamente, a aluna A2 indicou:

Aluna 2: *Dá uma noção do que a gente está fazendo, né? Tipo, não está perdido ali de passar uma conta. Você vê que realmente tem algo por trás.*

Aluna 2: *Acho que é importante, né? Pra dar um contexto.*

Entende-se, por meio dessas falas, que trabalhar os aspectos históricos contribuiu para que o conceito de derivada não ficasse preso apenas a um cálculo matemático e que este contribui para trazer mais significado para os procedimentos que são realizados. Outro ponto colocado pelas alunas A6 e A11 diz respeito ao papel motivador da HM. Após serem

questionadas sobre como os aspectos históricos contribuíram para com seus aprendizados ao longo da disciplina, ambas as estudantes comentaram sobre como aprender sobre aspectos históricos relacionados à disciplina trouxe um fator de motivação, assim como apresentado na fala da aluna A6 a seguir.

Aluna 6: *É porque eu gosto, eu acho bem interessante, então me motivou a continuar assim.*

Apesar de ter sido positivamente vista por esses alunos, outros participantes da pesquisa trazem um lado contrário sobre a inserção da HM nas aulas de Cálculo. De acordo com a aluna A5, por exemplo, as questões históricas não contribuíram para seu aprendizado, já que, segundo ela:

Aluna 5: *Ah, eu acho que assim, na minha opinião, eu sou mais prática do que... Enfim, acho que história e teoria para mim não importam muito. Pra mim. Eu sou mais ali na hora né, fazer.*

Essa fala coloca em pauta o fato apontado por Meyer (2003, p.4), que comenta sobre como os alunos que cursam essa disciplina:

[...] são capazes de determinar a função derivada de diversas funções, utilizando-se de regras e procedimentos algébricos, ou mesmo, de reproduzir a definição formal da derivada de uma função. Mas, frequentemente, produzem significados para este conceito que não são compartilhados pela comunidade matemática.

Ou seja, os procedimentos mecânicos da disciplina, como calcular a derivada por meio de uma regra de derivação ou uma integral por meio de regras de integração são mais trabalhados e até mesmo mais absorvidos pelos estudantes do que o conceito e a explicação por trás destes métodos. Entende-se que isso ocorre, por meio dos resultados obtidos na presente pesquisa, devido à dificuldade apresentada pelos alunos relacionada aos conteúdos de função, que acabam prejudicando o entendimento dos conceitos pertinentes ao Cálculo, que estão intimamente relacionados com esse conceito apresentado na Educação Básica. Em contrapartida, as regras de derivação e integração, por exemplo, não necessitam desse conhecimento prévio, já que estas são fórmulas que fornecerão a resposta correta, caso o aluno siga o passo a passo corretamente.

Com base nos resultados apresentados, entende-se que, apesar de algumas dificuldades apresentadas pelos estudantes, a presença da HM durante o curso de CDI contribuiu para o aprendizado dos participantes da pesquisa. Além disso, foi apontado por todos os entrevistados que eles utilizariam a HM em suas futuras aulas, por considerá-la um fator interessante e importante de ser trabalhado em turma, assim como aponta a aluna A2.

Com base nos resultados, pode-se afirmar que, apesar de algumas limitações, a abordagem histórica tem o potencial de permitir a mobilização de conhecimentos matemáticos próprios para a docência.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa teve o objetivo de identificar e analisar os conhecimentos matemáticos para o ensino, mobilizados por licenciandos em Matemática, que cursaram uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, em uma Universidade Federal localizada no Sul do estado de Minas Gerais, abordando questões históricas na introdução dos conceitos de derivada e integral.

Para atingir o objetivo proposto, foram elaborados momentos de inserção de questões históricas em aulas nas quais os conceitos de derivada e integral seriam introduzidos. Essas aulas tinham como objetivo contextualizar o conteúdo, além de apresentar adaptações de métodos históricos referentes aos conceitos citados anteriormente. Com base nessas aulas, foram elaboradas duas atividades, uma sobre derivada e outra sobre integral, que tinham como objetivo verificar o entendimento dos estudantes com relação aos conceitos e aos cálculos matemáticos relacionados a esses conteúdos.

Os dados obtidos por meio das aulas, atividades, áudios e entrevistas foram analisados considerando uma adaptação do modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT), elaborado por Ball *et al.* (2008). Por meio desse modelo, foi possível olhar para os dados e categorizá-los por semelhança com os domínios de conhecimentos matemáticos que fazem parte da particularidade da profissão docente.

De maneira geral, os resultados obtidos apontam para o potencial das atividades de desenvolverem os conhecimentos CCK e SCK com os estudantes. A maior identificação de indícios de mobilização de conhecimentos referentes ao CCK ocorreu, em nosso entendimento, em grande parte, devido a um dos focos da disciplina de CDI ser o aprendizado de fórmulas e de regras de diferenciação e integração, assim como o cálculo de limites. Com relação ao SCK, foi possível perceber a presença, em algumas falas dos estudantes, durante as discussões ocorridas entre eles durante as atividades ou durante as entrevistas, que indicavam a mobilização desse conhecimento. A habilidade demonstrada pelos alunos, de conseguir justificar o porquê de estarem realizando determinados procedimentos, assim como a capacidade de explicar aos seus colegas o que deveria ser feito, demonstra um benefício para o desenvolvimento de conhecimentos docentes de realizar atividades desse tipo em duplas. Além disso, trabalhar com métodos históricos pode ser um bom caminho para desenvolver um conhecimento próprio do docente de Matemática. Ademais, apresentar algoritmos diferentes dos usuais para resolver algum exercício pode auxiliar o licenciando a compreender outros possíveis algoritmos colocados por seus futuros alunos.

Dentre algumas afirmações dos estudantes durante as entrevistas, foi possível perceber contribuições que as questões históricas colocadas durante a disciplina trouxeram para seu aprendizado, por exemplo, a motivação e a contextualização de um conteúdo, de forma que ele não ficasse preso a fórmulas e regras. Diante disso, vale ressaltar que as gravações em áudio das entrevistas, bem como as discussões realizadas durante as atividades, foram imprescindíveis para determinar mobilizações de conhecimentos que não seriam possíveis obter apenas pelos cálculos realizados nas atividades.

Destacamos que, durante a aplicação da proposta da pesquisa, notou-se uma grande dificuldade dos participantes com relação a conteúdos da Educação Básica, como funções e logaritmos. Ao longo das entrevistas, os participantes da pesquisa apontaram que a causa dessa dificuldade estava relacionada à pandemia, que prejudicou o aprendizado desses conteúdos durante o Ensino Médio. Assim, destaca-se a relevância de que os cursos de Cálculo sejam elaborados de modo a permitir que o professor, se necessário, faça uma abordagem da matéria ao longo da disciplina.

Devido a essa dificuldade, alguns alunos não conseguiram ter um bom entendimento quanto aos conteúdos trabalhados durante a disciplina, assim como das questões históricas trabalhadas. Entretanto, destaca-se que, mesmo com essas dificuldades, em exercícios nos quais os alunos deveriam calcular uma derivada ou integral de uma função por meio das regras aprendidas em sala de aula, notou-se uma maior facilidade dos estudantes de resolverem esse tipo de problema, reforçando o caráter procedimental normalmente estabelecido sobre a disciplina de CDI.

Ressaltamos que, ao longo da investigação foram vivenciadas algumas dificuldades. Dentre elas, destacamos a ementa da disciplina ser bastante extensa para o pouco tempo de aulas, o que influenciou no tempo restrito para abordar as questões relacionadas à HM e o fato de a turma não ser exclusivamente de alunos do curso de Matemática Licenciatura, ou Licenciatura no geral, o que limitou a elaboração de exercícios e atividades.

Além disso, destacamos algumas limitações da proposta implementada, que possibilitou uma reflexão acerca das possibilidades de alteração dela, como a apresentação de mais exemplos históricos ao longo das aulas e a inclusão, nas atividades, de perguntas discursivas, de forma que os alunos possam seus entendimentos com relação ao conteúdo e quais conexões foram estabelecidas no que se refere ao contexto histórico. Esse tipo de questão, além de promover o raciocínio do estudante, possibilita que o foco da disciplina não fique tanto nos

aspectos procedimentais, auxiliando, também, o professor regente da turma a verificar quais conceitos precisam ser mais bem trabalhados.

Outra possibilidade de alteração seria abordar as questões históricas apontando mais explicitamente possíveis conexões dos conteúdos do CDI com conteúdos matemáticos da Educação Básica. Durante a apresentação do método de Leibniz, por exemplo, uma ideia pode ser relacionar sua interpretação geométrica com a fórmula do vértice de uma parábola, já que, por meio da visualização de que um ponto está se aproximando do outro, torna-se mais claro que, no vértice a reta tangente é horizontal e que, portanto, a derivada naquele ponto é zero.

Com relação ao conteúdo de integral, foi indicado por alguns dos participantes da pesquisa que, por um lado, a questão que envolvia HM na atividade era bem complicada, mas que, por outro, a representação visual da adaptação do método de Fermat e Pascal, contribuiu para o entendimento do que estava sendo calculado. Nesse sentido, entendemos que enfatizar as aplicações do método com apelo visual, sem destacar tanto todos os cálculos realizados, pode facilitar o entendimento dos estudantes sobre o que está por trás do procedimento. Além disso, trabalhar com funções de forma a relacionar o cálculo da integral com o cálculo de áreas de figuras planas pode ser uma boa maneira de interligar esse conteúdo com aqueles que serão ensinados pelos futuros professores na Educação Básica.

Realizar essa conexão, entre os conteúdos que são aprendidos durante a disciplina, com aqueles que serão ensinados futuramente na Educação Básica, é um processo importante para a formação do professor de Matemática. Apesar de conceitos como derivada e integral não estarem diretamente presentes no currículo do Ensino Fundamental e Médio, compreender o conceito de derivada, por exemplo, amplia o entendimento do professor sobre o universo das funções, permitindo que o docente tenha um entendimento sobre o comportamento delas, assim como de propriedades relacionadas à representação gráfica das funções.

Esse entendimento pode contribuir para a elaboração de aulas que trabalhem os conteúdos de maneira mais detalhada, além de acrescentarem ao arcabouço do professor de Matemática ideias e conceitos que podem auxiliá-lo a responder dúvidas de alunos sobre o conteúdo com maior precisão.

Essa relação deve estar presente em cursos de formação de professores, para que estes consigam aprender os conceitos de maneira adequada e, por sua vez, consigam apresentar aos seus futuros alunos justificativas matematicamente corretas, que façam sentido e que utilizem da linguagem matemática com a qual o aluno está tendo contato.

Uma outra adaptação que entendemos ser profícua é apresentar mais questões e exemplos que permitam que os alunos reflitam sobre os procedimentos que devem ser realizados para sua resolução, de forma que a discussão gerada facilite o entendimento para além da realização de procedimentos. Uma possibilidade seria a inclusão de questões nas quais são apresentadas resoluções incorretas de exercícios, que devem ser analisadas pelos estudantes de forma que eles possam apontar e discutir os erros observados. Entendemos que esse tipo de atividade além de contribuir para a aprendizagem matemática do licenciando pode se relacionar com uma futura prática do profissional docente.

Entende-se que uma análise na qual esses conhecimentos são identificados é importante, pois permite uma avaliação daquilo que foi proposto considerando o contexto da formação de professores. Ao compreender quais conhecimentos são mobilizados ao realizar determinado tipo de atividades, torna-se mais fácil para professores formadores elaborarem aplicações que permitam o desenvolvimento do licenciando com relação a uma característica específica pertinente à sua futura profissão. Por meio desse modelo também torna-se possível uma análise que visa identificar de que maneira a HM, inserida através de aulas e atividades, contribuiu para esse processo de formação docente

Para finalizar, merece destaque que a presente pesquisa apresenta resultados que permitem uma reflexão sobre a formação de professores, em especial referentes ao uso de atividades e propostas em disciplinas de Matemática acadêmica, assim como a presença da HM nessas disciplinas. Outro fator relevante relaciona-se aos conhecimentos matemáticos já estabelecidos (ou não) pelos ingressantes do curso, de modo a estabelecer uma passagem mais coerente da Educação Básica para o Ensino Superior. Trabalhar os conteúdos da disciplina de forma a apresentar considerações sobre seu desenvolvimento histórico; a estabelecer conexões entre esse conhecimento e os conhecimentos prévios dos estudantes; mostrar formas pelas quais o conteúdo poderá ser utilizado na atividade profissional dos futuros professores são ideias que devem ser consideradas ao se pensar em um curso de Cálculo para uma turma de Matemática Licenciatura.

REFERÊNCIAS

- ALÉCIO, A. NESPOLI, C. A importância do Cálculo Diferencial e Integral para a formação do professor de Matemática da Educação Básica. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*. v. 7. n. 1. p. 7. 2020. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/2680/2700>. Acesso em: 09 de fevereiro de 2024.
- ARAMAN, E. M. O. **Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática**. 2011. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina.
- ARAMAN, E. M. O; BATISTA, I. L. Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 27, p. 1-30, 2013.
- BALL, D. L; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special?. **Journal of teacher education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.
- BARON, M. E; BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática: Origens e desenvolvimento do Cálculo**. Tradução: COELHO, J. R. B. et al. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985, c1974.
- BONFIM, Sabrina Helena; CALÁBRIA, Angélica Raiz. **O Cálculo Diferencial e Integral de Newton e Leibniz: Aproximações e Distanciamentos no Método**. Itajubá: XII Seminário Nacional de História da Matemática, 2017.
- BORGES, L. C. **A História da Matemática na formação inicial de professores de Matemática: Um estudo em teses e dissertações brasileiras**. 2019. 132f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá: 2019.
- BOYER, C. B. **História do Cálculo e seu desenvolvimento conceitual**. Nova York: Dover publications, Inc, 1959.
- BRITO, A. J. A História da Matemática e a da Educação Matemática na Formação de Professores. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8., 2004, Recife. **Anais do VIII ENEM**. Recife: UFPE, 2004, p. 1-9.
- CLARK, K. M. **History and pedagogy of mathematics in mathematics education: history of the field, the potential of current examples, and directions for the future**. In: ELEVENTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 11., 2019, Utrecht. *Proceedings [...]*. Utrecht: Utrecht University, 2019.
- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996.
- FERNANDEZ, Carmen. PCK - Conhecimento Pedagógico do Conteúdo: perspectivas e possibilidades para a formação de professores. 2012, *Anais..* Campinas: ABRAPEC, 2012. . Acesso em: 04 set. 2024.
- FERNANDEZ, C. Revisitando a base de conhecimentos e o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) de professores de ciências. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 17, p. 500-528, 2015. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/epcc/a/jcNkTj9wx5GScw956ZGD4Bh/?lang=pt>. Acesso em: 27 jun. de 2024.

GIRALDO, V. O que é Cálculo? Por que essa fama de difícil? *Ciência Hoje*, 2022. Disponível em: <https://cienciahoje.org.br/artigo/o-que-e-calculo-por-que-essa-fama-de-dificil/>. Acesso em 16 de novembro de 2023.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *Revista de administração de empresas*, v. 35, n. 2, p. 57-63, 1995a.

HEEFFER, Albrecht. The methodological relevance of the history of mathematics for mathematics education. *Colección Digital Eudoxus*, v. 1, n. 5, 2009.

JAKOBSEN, A; RIBEIRO, M; DELANEY, S. Using practice to define and distinguish horizon content knowledge. In: *INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION*, XII, 2012, Seoul.

JANKVIST, U. T; MOSVOLD, R; FAUSKANGER, J; JAKOBSEN, A. Analysing the use of history of mathematics through MKT. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 46, n. 4, p. 495-507, 2015. DOI: 10.1080/0020739X.2014.990528.

KRONFELLNER, M. The indirect genetic approach to calculus. In: FAUVEL, J; VAN MAANEN, J. A. (Eds.). **History in Mathematics Education: The ICMI Study**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p.71-74.

LEIBNIZ, G. W. V. Novo método para máximos e mínimos, bem como para tangentes, que não se detém ante as quantidades fracionárias ou irracionais, e é um singular gênero do cálculo para estes problemas. Tradução: DOURADO, T. A. S. *Revista Brasileira de História da Matemática* - Vol. 22, no 44 – pp. 45–60.

LEIBNIZ, G. W. V. Sobre uma geometria altamente oculta e a análise dos indivisíveis e infinitos. Tradução: DOURADO, T. A. S. *Revista Brasileira de História da Matemática* - Vol. 22, no 45 – pp. 1–20.

MEYER, J. F. C. A; **Derivada/reta tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - PUC/SP. São Paulo, p.148. 2003.

MEYER, J. F. C. A.; DE SOUZA JÚNIOR, A. J. A utilização do computador no processo de ensinar-aprender Cálculo: a constituição de grupos de ensino com pesquisa no interior da universidade. **Zetetike**, v. 10, n. 1-2, p. 113-148, 2002.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. *Revista brasileira de educação*, n. 28, p. 59-61, 2005.

NUNES, C. M. F. Saberes docentes e formação de professores: um breve panorama da pesquisa brasileira. *Educação & Sociedade*, v. 22, n. 74, p. 27–42, abr. 2001.

ROQUE, T. **História da Matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SMESTAD, B. When HPM meets MKT – exploring the place of history of mathematics in the mathematical knowledge for teaching. **History and epistemology in mathematics: Proceedings of the seventh European Summer University ESU7**, p. 539-549. 2015.

VIEIRA, G. F; MARTINES, M. C. S. Uma versão da história do Cálculo Infinitesimal. **Revista de Iniciação Científica**, Uberaba: Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), v. 6, n. 1, p. 109-123, jun. 2021

APÊNDICE A – ROTEIRO DE ENTREVISTA

Entrevistador: _____

Entrevistado: _____

E-mail do entrevistado: _____

Número para contato do entrevistado: _____

Data: ____/____/____

Local: _____

Horário do início da entrevista: _____

Horário do término da entrevista: _____

Iniciar a entrevista fazendo a apresentação do entrevistador e agradecendo a presença do entrevistado.

Explicar os objetivos da entrevista para o entrevistado, sendo eles a compreensão sobre momentos da disciplina e qual o impacto que a HM teve durante seu aprendizado.

Solicitar a autorização do entrevistado para que a entrevista seja gravada, assegurando o caráter confidencial das informações fornecidas e o seu uso restrito ao âmbito da presente investigação.

Bloco 1: Informação sobre o curso e a disciplina de Cálculo

- O que te motivou a escolher o curso de Matemática Licenciatura?
- O curso está atendendo as suas expectativas?
- Você pretende permanecer no curso?
- Você pretende atuar como professor de Matemática?
- Quais eram suas expectativas quanto a disciplina de Cálculo? Essas expectativas, de maneira geral, foram atendidas?
- Você entende que os conteúdos aprendidos ao longo da disciplina irão contribuir para sua prática profissional no futuro?
- Você consegue estabelecer alguma relação entre as ideias de limite com algum conteúdo que é ensinado na Educação Básica?
- Como você diria que foi sua formação matemática no Ensino Médio?
- Como o conteúdo de funções foi abordado durante seu Ensino Médio?
- De modo geral, aqui em nossa universidade, a disciplina de cálculo tem uma taxa de reprovação muito alta. Você entende que teve dificuldades na disciplina de Cálculo? Se sim, quais foram as suas maiores dificuldades?

Bloco 2: Contribuições da HM para o entendimento de conceitos Matemáticos ao longo da disciplina.

- Quais conteúdos você teve mais facilidade para aprender ao longo da disciplina? Justifique
- Quais conteúdos você teve mais dificuldade para aprender ao longo da disciplina? Justifique
- Após o término da disciplina, você entende que teve um entendimento sobre os conceitos de limite, derivada e integral?
- Após o término da disciplina, você entende que teve um aprendizado com relação as manipulações e cálculos utilizando limite, derivada e integral?
- Você proporia alguma alteração nas duas atividades aplicadas durante a disciplina? Justifique
- Poder realizar as atividades em duplas auxiliou no seu processo de resolução dela?
- Poder realizar as atividades com consultas ao caderno auxiliou no seu processo de resolução dela?
- Como você diria que foi o seu preparo para esta atividade?
- Caso não fosse possível realizar as atividades com consulta, o que você mudaria na sua preparação?
- No seu entendimento há alguma relação estabelecida durante a disciplina entre as ideias de integral e limite?
- No seu entendimento há alguma relação estabelecida durante a disciplina entre as ideias de derivada e limite?
- No seu entendimento há alguma relação estabelecida durante a disciplina entre as ideias de integral e derivada?
- Para você, essa relação entre a derivada e a integral tem alguma relação com o Teorema Fundamental do Cálculo?
- Entrar em contato com o método de Leibniz, assim como o contexto no qual ele foi desenvolvido, contribuiu, no seu entendimento, para a sua compreensão da ideia de derivada? Justifique.
- Entrar em contato com o método de Fermat e Pascal, assim como o contexto no qual ele foi desenvolvido, contribuiu, no seu entendimento, para a sua compreensão da ideia de integral? Justifique.
- Você proporia alguma alteração na maneira nas quais as questões históricas foram inseridas durante as aulas? Justifique.
- Você utilizaria a HM em atividades nas suas futuras aulas?
- Com base na sua experiência na disciplina de Cálculo, você considera que o uso da HM contribuiu para o seu aprendizado dos conceitos relacionados ao Cálculo? Justifique.

Bloco 3: Contribuições da HM para o entendimento sobre Matemática ao longo da disciplina.

- Você gostaria de ter aprendido outros aspectos históricos relacionados ao Cálculo durante a disciplina? Se sim, quais ou de que tipo?

- Os momentos das aulas nos quais elementos históricos foram introduzidos contribuíram para que você refletisse sobre como a matemática é produzida?
- Durante a disciplina, foi apresentado que primeiro surgiram os conceitos de integral e derivada, e só depois vieram as ideias de função e limite. Na sua opinião aprender esses conteúdos seguindo a ordem histórica traria algum benefício para o aprendizado da disciplina? Por que?
- Na sua opinião, faz mais sentido aprender da forma em que a disciplina é dada atualmente, seguindo a ordem função-limite-derivada-integral? Por que?
- Ao longo do curso foram introduzidos diversos nomes de matemáticos que tiveram papéis importantes no desenvolvimento do Cálculo. Isso te interessou a buscar mais informações sobre eles, ou sobre outras pessoas que estiveram envolvidas com o Cálculo?

Bloco 4: Finalização da entrevista.

- Existe alguma informação sobre as atividades realizadas na disciplina, sobre a HM ou sobre seu aprendizado que você queira apresentar, mas que não foi perguntado?

Agradecer a contribuição a pesquisa.

APÊNDICE B – ATIVIDADE 1 (DERIVADA)**Atividade Avaliativa 1 – Introdução ao estudo de derivadas de funções**

Nome: _____ Matrícula: _____

Nome: _____ Matrícula: _____

Um pouco de história...

Nos séculos XVII e XVIII, diversos estudiosos se dedicaram a resolver determinados tipos de problemas, como os problemas de tangentes e de áreas sob curvas. O entendimento e solução destes problemas estavam, dentre outras temáticas, relacionados à resolução de problemas que envolviam movimento, como a determinação da distância e até mesmo da velocidade e aceleração de corpos em determinados instantes de um deslocamento.

Os conceitos de derivada e integral se consolidaram após os trabalhos de Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), que foram publicados durante o século XVII. Já que estes estudiosos desenvolveram, de maneira independente, trabalhos que forneciam um conjunto de regras e métodos para o cálculo de tangentes e áreas sob curvas, sendo ambos considerados os “Pais do Cálculo”.

Vimos em sala que uma forma de obter a derivada de uma função é dada pelo Método proposto por Leibniz descrito, em notação moderna, pelos seguintes passos:

- 1- Escolha um valor de x_0 pertencente ao domínio de $f(x)$ e defina dois pontos com coordenadas $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + dx, f(x_0 + dx))$, onde dx é uma grandeza muito pequena.
- 2- Avalie a função $f(x)$ nos pontos definidos e calcule dy (a diferença de suas ordenadas).
- 3- Simplifique a expressão obtida, considerando que qualquer potência positiva de dx maior que 1 pode ser desprezada.
- 4- Divida os dois lados da igualdade obtida no passo 3 por dx .

.

Atividade 1

1. **(1.5 pontos)** O Método desenvolvido por Leibniz, apesar de ter cerca de 340 anos desde sua elaboração, ainda funciona para o cálculo de derivadas de funções. Considerando o método descrito acima e a função $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, resolva as seguintes questões:.

- a) **(0.8 pontos)** Calcule a derivada da função $f(x)$, utilizando o Método proposto por Leibniz.
- b) **(0.4 pontos)** Calcule a derivada da função $f(x)$ por meio da Regra da Potência (Regra do Tombo).
- c) **(0.3 pontos)** Esboce o gráfico da função $f(x)$.
2. **(1.5 pontos)** Nos Jogos Olímpicos existe a modalidade de salto com vara, onde a trajetória do movimento que o atleta realiza é semelhante à uma parábola com concavidade para baixo. Considerando que a trajetória do movimento do atleta é representada pela função $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, onde x representa o tempo em segundos e $f(x)$ representa a altura do atleta em relação ao solo, medida em metros. Determine:
- a) **(0.5 ponto)** A velocidade média do atleta considerando o intervalo de tempo que passou desde o momento em que ele atinge 3 metros de altura até o ponto de altura máxima.
- b) **(1.0 ponto)** A derivada de $f(x)$ no ponto $A = (2,3)$. Em seguida, explique com suas palavras, o que este resultado significa levando em consideração o contexto do salto com vara apresentado.

APÊNDICE C – ATIVIDADE 2 (INTEGRAL)**Atividade Avaliativa 2 – Introdução ao estudo de integrais**

- 1- Para resolver as questões a seguir, considere $f(x) = x^3 - 2x$.
- a) **(1,0 ponto)** Esboce o gráfico da função $f(x)$. Levando em consideração a existência de pontos de máximo e mínimo locais, em quais intervalos a função é crescente e decrescente e em que intervalos a concavidade é voltada para cima ou para baixo.
- b) **(1,0 ponto)** Determine uma expressão geral para a integral da função $f(x)$ em um intervalo $[O, B]$, com $O = (0,0)$ e $B = (b,0)$ utilizando o método histórico de Fermat e Pascal apresentado em sala de aula, que buscava encontrar a área sob curvas por meio da área de retângulos.

Dica: A expressão final ficará em função do comprimento do segmento OB .

Para resolver, utilize as seguintes fórmulas:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \text{ e } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- c) **(0,5 ponto)** Calcule a integral de $f(x)$ no intervalo $[O, B]$ considerando $O = (0,0)$ e $B = (2,0)$.
- d) **(0,5 ponto)** Calcule a integral de $f(x)$ no intervalo $[0,2]$ utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo.