Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Conjugação via Folhas para Difeomorfismos Parcialmente Hiperbólicos

Geovane Rocha de Araujo

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pereira Micena

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

Itajubá, 25 de julho de 2025

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Conjugação via Folhas para Difeomorfismos Parcialmente Hiperbólicos

Geovane Rocha de Araujo

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pereira Micena

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Topologia e Geometria

Itajubá – MG
25 de julho de 2025

Dedico este trabalho à minha família.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as bênçãos que têm me proporcionado, em especial por ter aberto as portas do mestrado para mim.

À minha família, em especial aos meus pais, Maria Conceição Silva Rocha e Edson Monteiro de Araujo, por sempre me incentivarem a lutar pelos meus sonhos; à minha irmã, Francisca, e ao meu irmão, Gilvan, pelo apoio e incentivo. Agradeço, em especial, à minha mãe, por ter dedicado sua vida para que eu tivesse acesso a uma boa educação.

À minha esposa, Débora Bispo de Oliveira Costa, por todo o companheirismo, incentivo e ensinamentos ao longo da minha vida acadêmica e pessoal.

Ao meu orientador, Fernando Pereira Micena, pelos ensinamentos, conselhos, dedicação e paciência.

À todos os professores do IMC, em especial ao Luís Fernando, Fábio, Denis e Mariza.

Aos meus colegas de mestrado, em especial, ao Liomar, Estiven, Alex, Marina, Alejandro, Brayan, Yelsin, Anderson, Lizzeth e Aldecio pela recepção, amizade e por todos os momentos vividos.

Aos professores Alex Sandro, Erik Lopes, João Santos, Helton Lima e Paulo Henrique pelo apoio e conselhos

Aos meus tios, em especial à Edite, Maria José, Benedita, José, Rosa Alice, Hélio, João e Isabel; e aos meus primos, cunhados e amigos, que sempre acreditaram em mim e torceram pelo meu sucesso.

À CAPES pelo auxílio financeiro que possibilitou que eu apenas me dedicasse aos estudos.

"[...]Ora, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam e a prova das coisas que se não veem.[...]" (Hebreus 11 : 1*)*

Resumo

O principal objeto de estudo deste trabalho são os difeomorfismos parcialmente hiperbólicos. Serão abordadas propriedades fundamentais desses sistemas, tais como folheações, levantamento e linearização. Além disso, discutiremos como um difeomorfismo parcialmente hiperbólico no toro $\mathbb{T}^d$ se relaciona com sua linearização. Com base na tese de doutorado de Andy Hammerlindl [10], o resultado principal deste trabalho estabelece que, sob hipóteses apropriadas, todo difeomorfismo parcialmente hiperbólico no toro $\mathbb{T}^d$, $d \geq 3$, é conjugado via folhas à sua linearização.

Palavras–chave: Sistemas dinâmicos, difeomorfismo parcialmente hiperbólico, linearização, folheações, conjugação via folhas.

Abstract

The main object of study in this work is partially hyperbolic diffeomorphisms. Fundamental properties of these systems will be addressed, such as foliations, lifts, and linearization. In addition, we discuss how a partially hyperbolic diffeomorphism on the torus $\mathbb{T}^d$ relates to its linearization. Based on the doctoral thesis of Andy Hammerlindl [10], the main result of this work establishes that, under suitable assumptions, every partially hyperbolic diffeomorphism on the torus $\mathbb{T}^d$, with $d \geq 3$, is leaf conjugate to its linearization.

Keywords: Dynamical systems, partially hyperbolic diffeomorphism, linearization, foliations, leaf conjugacy.

Sumário

Resumo iv

Abstract v

Sumário vi

1 Introdução 1

2 Preliminares 5

2.1 Requisitos de Topologia Geral 5

2.2 Requisitos de Análise 9

2.3 Requisitos de Equação Diferencial Ordinária 12

2.4 Requisitos de Variedades Diferenciáveis 15

3 Difeomorfismos Parcialmente Hiperbólicos: Uma Introdução 17

3.1 Difeomorfismo Parcialmente Hiperbólicos 17

3.2 Folheações 21

3.3 Quase Isometria 24

3.4 Linearização 26

4 Propriedades Geométricas das Variedades Invariantes 31

5 Conjugação de Folhas 63

5.1 Espaços de Folhas 63

5.2 Conjugação de Folhas em C_f 68

6 Seção de Folhas **77**

6.1 Introdução a Seções 77

6.2 A Seção σ^* 83

7 Uma Conjugação de Folhas em $\mathbb{R}^d$ **97**

8 Uma Conjugação de Folhas em $\mathbb{T}^d$ **106**

Referências Bibliográficas **119**

Capítulo 1

Introdução

Na década de 70, Franks [9] e Manning [17] provaram que, se f é um difeomorfismo de Anosov em $\mathbb{T}^d$, então f é topologicamente conjugada a sua linearização. Nesse caso, se g é a linearização de f, existe um homeomorfismo $h : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ tal que $h \circ g = f \circ h$. Esse resultado estabelece uma correspondência topológica entre a dinâmica de f e a de g. No entanto, para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, em geral, não é razoável esperar uma conjugação topológica com a sua linearização. A seguir, apresentamos um contraexemplo que ilustra essa limitação.

Contraexemplo: Seja $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear dada pela matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, g é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico (isto será verificado no Capítulo 2). Seja $\mathrm{Fix}(g)$ o conjunto dos pontos fixos de g, $g(x, y, z) = (x, y, z)$, é fácil verificar que,

$$\mathrm{Fix}(g) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, positivo, suficientemente pequeno tal que a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = g(x, y, z) + (0, 0, \alpha \sin(2\pi z))$ seja um difeomorfismo parcialmente hiperbólico (isto também será verificado no Capítulo 2). Assim, o conjunto dos pontos fixos de f é

dado por:

$$\mathrm{Fix}(f) = \{(0,0,z) : \sin(2\pi z) = 0\} = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{Z}\}.$$

Note que, g é a linearização de f e, enquanto o conjunto $\mathrm{Fix}(g)$ é não enumerável, o conjunto $\mathrm{Fix}(f)$ é infinito enumerável. Como uma conjugação topológica preserva pontos fixos, isto é, leva pontos fixos f em pontos fixos de g, segue que f e g não podem ser topologicamente conjugados. Na realidade, f não pode ser topologicamente conjugada a nenhuma aplicação linear, pois, no caso de aplicações lineares, o conjunto dos pontos fixos ou é finito, ou não enumerável.

Além disso, como o recobrimento universal do toro $\mathbb{T}^d$ é o $\mathbb{R}^d$, e qualquer conjugação no espaço base induz uma conjugação no recobrimento universal, concluímos que o quociente de f em $\mathbb{T}^3$, embora parcialmente hiperbólico, não é conjugado a nenhum automorfismo toral linear. Dessa forma, obtemos um contraexemplo que evidencia tal fenômeno.

Seja $f : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico e $g : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ sua linearização. Como demonstrado no contraexemplo anterior, a conjugação topológica, em geral, é descartada para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos. A presença de uma direção central pode introduzir comportamentos dinâmicos que não ocorrem no sistema linear.

Diante disso, podemos nos perguntar como estão relacionadas as folheações centrais de f e g. Nesse sentido, Andy Hammerlindl em [10] mostra que, no caso em que $d = 3$, existe entre f e g uma conjugação via folhas centrais (leaf conjugacy). Além disso, sob hipóteses apropriadas, esse resultado pode ser estendido para dimensões maiores, ou seja, para $d > 3$.

Definição 1.1. *[10] Dizemos que f e g são **conjugadas via folhas** (centrais), (center leaf conjugacy), se existe um homeomorfismo $h : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ tal que:*

(i) *h leva folhas centrais de f em folhas centrais de g; e*

(ii) *$h(g(\mathcal{L})) = f(h(\mathcal{L}))$ para toda folha central $\mathcal{L}$ de g.*

Como h é invertível, a definição é simétrica em relação a f e g.

A conjugação via folhas é uma noção particularmente útil no estudo de aplicações parcialmente hiperbólicas isotópicas a automorfismos lineares da forma $g : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$, pois, nesse caso, as folhas centrais da aplicação de qualquer levantamento de g são simplesmente translações do subespaço $E^c \subset \mathbb{R}^d$ associado à direção central do sistema linear. Isso oferece um modelo rígido e bem compreendido. Assim, quando uma aplicação f é conjugada via folhas a tal g, a estrutura das folhas centrais de f herda propriedades geométricas e dinâmicas do modelo linear, permitindo estudar f por meio da geometria simples de g.

A proposta deste trabalho é estudar em detalhes a tese de A. Hammerlindl, de modo que, ao final, obtenha-se uma dissertação que possa servir como referência em língua portuguesa aos interessados neste tema. Em particular, nosso objetivo é demonstrar os seguintes teoremas.

Teorema 1.2. *[10] Todo difeomorfismo parcialmente hiperbólico em $\mathbb{T}^3$ é conjugado via folhas à sua linearização.*

Teorema 1.3. *[10] Seja $f : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico, tal que:*

(a) *A distribuição central é unidimensional; e*

(b) *as folheações estável e instável no recobrimento universal do toro $\mathbb{T}^d$ são quase isométricas.*

Então, f é conjugado via folhas à sua linearização.

Neste trabalho adotamos a convenção [ ] para indicar onde podem ser encontradas as definições e resultados, caso o leitor queira saber mais detalhes.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No **Capítulo** 2, apresentamos algumas definições e resultados preliminares que serão utilizados ao longo do trabalho, abordando os seguintes tópicos: Espaços Métricos, Análise Matemática, Topologia, Variedades Diferenciais, Equações Diferenciais Ordinárias, Teoria da Medida e Integração e Análise Funcional.

No **Capítulo** 3, introduzimos conceitos fundamentais sobre os difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, folheações, quase isometria e linearização.

No **Capítulo** 4, comparamos os levantamentos de f e g; em particular, analisamos como as folhas de seus respectivos levantamentos estão relacionadas.

No **Capítulo** 5, utilizamos as propriedades do capítulo anterior para construir uma conjugação via folhas, H, entre os espaços das folhas centrais do levantamento de g e o espaço das folhas centrais do levantamento de f.

No **Capítulo** 6, construímos uma seção σ, uma subvariedade contínua de $\mathbb{R}^d$ que intercepta cada folha central do levantamento de f exatamente uma vez, com as propriedades adicionais de que é uniformemente contínua e limitada na direção central de E^c_g.

No **Capítulo** 7, utilizamos a conjugação H e a seção σ para construir uma conjugação em $\mathbb{R}^d$.

Finalmente, no **Capítulo** 8, concluímos a construção da conjugação via folhas no toro $\mathbb{T}^d$.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos os principais conceitos, definições e resultados de Topologia Geral, Análise, Equações Diferenciais Ordinárias e Variedades Diferenciáveis que serão utilizados ao longo desta dissertação. O objetivo é tornar o texto o mais autocontido possível, fornecendo ao leitor os elementos essenciais para a compreensão dos capítulos seguintes.

2.1 Requisitos de Topologia Geral

Definição 2.1. *[15] Uma* ***métrica*** *em um conjunto X é uma função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado a* ***distância*** *de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in X$:*

(i) $d(x, x) = 0$;

(ii) *Se* $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iv) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

O item (iv) é chamado de **desigualdade triangular**. Um **espaço métrico** é o par (X, d), onde X é um conjunto e d é uma métrica em X.

Definição 2.2. *[15] Seja X um espaço vetorial. Uma norma em X é uma função*

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que associa a cada vetor $x \in X$ um número real $\|x\|$, chamado a ***norma*** *de x, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer vetores $x, y \in X$ e um escalar λ:*

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

(ii) *Se* $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\|x\|$;

(iii) $\|x + z\| \leqslant \|x + y\| + \|y + z\|$.

O par $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de **espaço normado**.

Observação 2.3. *Se $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço normado, então a função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

é uma distância em X.

Definição 2.4. *[22] Seja (x_n) uma sequência em um espaço (X, d). Dizemos que:*

(a) *(x_n) é uma* ***sequência convergente*** *se existe um ponto $p \in X$ com a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N$ implica que*

$$d(x_n, p) < \varepsilon.$$

Neste caso, também dizemos que (x_n) converge para p, ou que p é o limite de (x_n), e escrevemos $x_n \longrightarrow p$, ou

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p.$$

(b) *(x_n) é uma* ***sequência de Cauchy*** *se para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

para quaisquer $n, m > N$.

Observação 2.5. *Em um espaço métrico, qualquer sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

Definição 2.6. *[22] Dizemos que um espaço métrico (X, d) é* ***completo*** *se qualquer sequência de Cauchy em X é convergente.*

Definição 2.7. *[20] Um espaço topológico X é chamado de* ***espaço de Hausdorff*** *se, para cada par x_1, x_2 de pontos distintos de X, existem vizinhanças U_1 e U_2 de x_1 e x_2, respectivamente, que são disjuntas.*

Definição 2.8. *[20] Seja X um espaço topológico. Uma* ***separação*** *de X é um par U, V de subconjuntos abertos, não vazios e disjuntos de X cuja união é X. Dizemos que o espaço X é* ***conexo*** *se não existe uma separação de X.*

Mais precisamente, um espaço X é conexo se, e somente se, os únicos subconjuntos de X que são simultaneamente abertos e fechados em X são o conjunto vazio e o próprio X.

Definição 2.9. *[22] Uma* ***cobertura aberta*** *de um conjunto E em um espaço métrico X é uma coleção $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de subconjuntos abertos de X tal que*

$$E \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Definição 2.10. *[22] Um subconjunto K de um espaço métrico X é dito ser* ***compacto*** *se toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita.*

Mais precisamente, dado qualquer cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de K, existem

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in A$$

tais que

$$K \subseteq U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}.$$

Teorema 2.11. *[22] Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Teorema 2.12. *[20] Todo subespaço fechado em um espaço compacto é compacto.*

Teorema 2.13. *[20] Todo subespaço compacto em um espaço Hausdorff é fechado.*

Definição 2.14. *[20] Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita* ***contínua*** *se para cada subconjunto aberto V de Y, o conjunto $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X.*

Observação 2.15. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é contínua em um ponto $x_0 \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$,*

$$d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Dizemos que f é contínua em X se ela é contínua em todo ponto $x_0 \in X$.

Teorema 2.16. *[20] Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua.*

(a) *Se $E \subset X$ é conexo, então $f(E)$ é conexo.*

(b) *Se $E \subset X$ é compacto, então $f(E)$ é compacto.*

Teorema 2.17. *[20] Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua bijetora. Se X é compacto e Y é Hausdorff, então f é um homeomorfismo.*

Teorema 2.18 (Teorema de Borsuk-Ulam)**.** *[20] Dada uma função contínua*

$$f : S^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

existe um ponto x em S^{n+1} tal que $f(x) = f(-x)$.

Definição 2.19. *[16] Dados um espaço topológico X e uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, o* ***suporte*** *de f é o fecho do conjunto*

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Usamos a notação $\operatorname{supp} f$ para indicar o suporte de f. Dado $x \in X$, dizer que

$$x \notin \operatorname{supp} f$$

significa que f se anula em todos os pontos de uma vizinhança de x.

Definição 2.20. *[20] Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é* ***localmente compacto no ponto x*** *em X, se existe um subespaço compacto $C \subset X$ que contém uma vizinhança de x. Se X é localmente compacto em todos os seus pontos, dizemos simplesmente que X é um* ***espaço localmente compacto****.*

Lema 2.21 (Lema de Urysohn)**.** *[23] Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto, $K \subset V \subset X$ com K compacto e V aberto. Então, existe uma função contínua*

$$f : X \longrightarrow [0, 1],$$

com suporte compacto, tal que $f(x) = 1$ para todo $x \in K$ e $\operatorname{supp}(f) \subset V$.

2.2 Requisitos de Análise

Definição 2.22. *[22] Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é* ***uniformemente contínua*** *em X, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer pontos $x, y \in X$, vale*

$$d_X(x, y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Definição 2.23. *[15] Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Dizemos que uma função $\varphi : X \longrightarrow Y$ é* ***Lipschitz*** *se existe uma constante $L > 0$ (chamada* ***constante de Lipschitz****) tal que*

$$d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant L \cdot d_X(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Se, além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C \cdot d_X(x, y) \leqslant d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant L \cdot d_X(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

então, dizemos que a função φ é **bi-Lipschitz**.

Observação 2.24.

(i) *Toda função Lipschitz é uniformemente contínua.*

(ii) *Toda aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua.*

(iii) *A composição de funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua.*

Definição 2.25. *[1] Dizemos que uma transformação $T : X \longrightarrow X$ em um espaço métrico (X, d) é uma* ***contração*** *se existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leqslant \lambda \cdot d(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in X$.

Definição 2.26. *[1] Um ponto $x \in X$ é dito um* ***ponto fixo*** *de uma transformação $T : X \longrightarrow X$ quando $T(x) = x$.*

Teorema 2.27 (Teorema do ponto fixo)**.** *[1] Se $T : X \longrightarrow X$ é uma contração em um espaço métrico (X, d), então T tem somente um ponto fixo. Além disso, para cada $x \in X$ a sequência $(T^n(x))_n$ converge para o único ponto fixo de T.*

Corolário 2.28. *[1] Seja $T : X \longrightarrow X$ uma transformação em um espaço métrico completo X tal que T^m é uma contração para algum $m \in \mathbb{N}$, então T tem somente um ponto fixo $x_0 \in X$. Além disso, para cada $x \in X$ a sequência $(T^n(x))_n$ converge para x_0.*

Definição 2.29. *[10] Sejam X_1, X_2, Y_1 e X_2 espaços métricos. Dizemos que $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ e $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ são isometricamente equivalentes se existirem isometrias $\alpha : X_1 \longrightarrow X_2$ e $\beta : Y_1 \longrightarrow Y_2$ tais que $f_2 \circ \alpha = \beta \circ f_1$.*

A definição anterior diz que, em relação à sua estrutura como funções em espaços métricos, f_1 e f_2 não podem ser distinguidas.

Proposição 2.30. *[18] Sejam X e Y espaços normados. Uma aplicação linear bijetiva*

$$T : X \longrightarrow Y$$

é um isomorfismo se, e somente se, existem constantes positivas a e b tais que

$$a\|x\| \leqslant \|T(x)\| \leqslant b\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Corolário 2.31. *Seja* $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *um isomorfismo linear. Então, para qualquer sequência* $v_n \in \mathbb{R}^d$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *tal que*

$$\|v_n\| \longrightarrow \infty \quad \textit{quando} \quad n \longrightarrow \infty,$$

tem-se que

$$\|T(v_n)\| \longrightarrow \infty \quad \textit{quando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Definição 2.32. *[16] Uma família* $C = \{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *de subconjuntos de um espaço topológico* X *chama-se* ***localmente finita*** *quando todo ponto* $x \in X$ *possui uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de* $C_{\alpha's}$.

Mais precisamente, C *é localmente finita se, e somente se, para cada* $x \in X$ *existem uma vizinhança* V *de* x *e um subconjunto finito* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset A$ *tais que*

$$V \cap C_\alpha \neq \varnothing \Longrightarrow \alpha \in \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}.$$

Exemplo 2.33.

(1) *A família* C *que consiste de todos os intervalos de reta* $(n, +\infty) \subset \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, ...$ *é localmente finita.*

(2) *Toda família finita é localmente finita.*

Definição 2.34. *[16] Seja* M *uma variedade de classe* C^r. *Uma* ***partição de unidade*** *de classe* C^k $(k \leq r)$ *em* M *é uma família de funções* $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, *de classe* C^k, *tais que:*

(1) *Para todo* $p \in M$ *e* $\alpha \in A$, $\varphi_\alpha(p) \geq 0$;

(2) *A família* $C = \{\text{supp}(\varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ *é localmente finita em* M;

(3) *Para todo* $p \in M$ *tem-se que* $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(p) = 1$.

Observação 2.35. *Seja* $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *uma cobertura aberta de uma variedade diferenciável* M. *Então, existe uma subcobertura aberta localmente finita* $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ *tal que, para todo* $\beta \in B$, *existe* $\alpha(\beta) \in A$ *com* $V_\beta \subset U_{\alpha(\beta)}$.

Definição 2.36. *[22] Seja* (f_n) *uma sequência de funções definida em um conjunto* E.

(a) *Dizemos que* $\{f_n\}$ *é* ***pontualmente limitada*** *em* E *se sequência* $(f_n(x))$ *é limitada para todo* $x \in E$*, isto é, se existir uma função* ϕ *de valores finitos definida em* E *tal que*

$$|f_n(x)| < \phi(x) \quad (x \in E,\ n = 1, 2, 3, ...).$$

(b) *Dizemos que* (f_n) *é* ***uniformemente limitada*** *em* E*, se existe um número* M *tal que*

$$|f_n(x)| < M \quad (x \in E,\ n = 1, 2, 3, ...).$$

Definição 2.37. *[22] Seja* $\mathcal{F}$ *uma família de funções complexas, definidas em um conjunto* E *contido em um espaço métrico* (X, d)*. Dizemos que* $\mathcal{F}$ *é* ***equicontínua*** *em* E *se, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que, para quaisquer* $x, y \in E$ *com* $d(x, y) < \delta$ *e para todo* $f \in \mathcal{F}$*, tem-se*

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

É claro que todo membro de uma família equicontínua é uniformemente contínuo.

Teorema 2.38 (Teorema de Arzelà-Ascoli)**.** *[22] Seja* K *um conjunto compacto e considere uma sequência de funções contínuas* $f_n : K \longrightarrow \mathbb{R}^d$*, para* $n = 1, 2, 3, ...$ *. Suponha que a família* $\{f_n\}$ *seja pontualmente limitada e equicontínua em* K*. Então:*

(a) *A família* $\{f_n\}$ *é uniformemente limitada em* K*.*

(b) *A família* $\{f_n\}$ *possui uma subsequência que converge uniformemente em* K*.*

2.3 Requisitos de Equação Diferencial Ordinária

Definição 2.39. *[1] Dada uma função*

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(t, x) \longmapsto f(t, x),$$

contínua no aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*, considere a* ***equação diferencial ordinária***

$$x' = f(t, x), \tag{2.1}$$

com x' a derivada da função incógnita $x = x(t)$ em relação ao parâmetro t, chamado em geral de tempo.

Definição 2.40. *[1] Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua no aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dizemos que uma função $x : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (com $a \geq -\infty$ e $b \geq +\infty$) é uma* ***solução*** *de (2.1) se:*

(a) *x é de classe C^1;*

(b) *$(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in (a, b)$;*

(c) *$x'(t) = f(t, x(t))$ para todo $t \in (a, b)$.*

Definição 2.41. *[1] Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua no aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Para cada $(t_0, x_0) \in D$,* ***o problema de valor inicial*** *(ou* ***problema de Cauchy****),*

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

consiste em determinar um intervalo aberto (a, b), com $t_0 \in (a, b)$ e uma solução

$$x : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

de (2.1) tal que $x(t_0) = x_0$. Chamamos a $x(t_0) = x_0$ de ***condição inicial*** *do problema de valor inicial.*

Definição 2.42. *[1] Dizemos que uma equação diferencial ordinária é* ***autônoma****, se a função f não depende explicitamente de t.*

Definição 2.43. *[1] Chamamos* ***fluxo*** *a qualquer família de transformações*

$$\varphi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

com $t \in \mathbb{R}$, tal que:

(a) *$\varphi_0 = I_d$, sendo I_d a identidade em $\mathbb{R}^n$;*

(b) *$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, para $t, s \in \mathbb{R}$.*

Proposição 2.44. *[1] Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^n$ e cada problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

possui solução única $x = x(t, x_0)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$, então a família de transformações

$$\begin{aligned} \varphi_t : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto \varphi_t(x_0) = x(t, x_0) \end{aligned}$$

é um fluxo.

Definição 2.45. *[1] Dizemos que uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ em um conjunto aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é* ***localmente Lipschitz*** *na segunda variável se para cada compacto $K \subset D$ existe um número real $L > 0$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant L \cdot \|x - y\|,$$

para quaisquer $(t, x),\ (t, y) \in K$.

Teorema 2.46 (Teorema de Picard-Lindelöf)**.** *[1] Se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e localmente Lipschitz em x em um conjunto aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então para cada $(t_0, x_0) \in D$ existe uma e somente uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida em algum intervalo aberto contendo t_0.

Teorema 2.47. *[1] Se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 em um conjunto aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então para cada $(t_0, x_0) \in D$ existe uma e somente uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida em algum intervalo aberto contendo t_0.

Proposição 2.48 (Dependência C^1 nas Condições Iniciais). *[1] Se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 em um conjunto aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então para cada $(t_0, x_0) \in D$ a função,*

$$(t, x) \longmapsto \varphi(t, x),$$

sendo $\varphi = \varphi(\cdot, x_0)$ a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

é de classe C^1 em uma vizinhança de (t_0, x_0).

Teorema 2.49 (Teorema de Peano). *[1] Se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua em um conjunto aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então, para cada $(t_0, x_0) \in D$, existe pelo menos uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

em algum intervalo aberto contendo t_0.

2.4 Requisitos de Variedades Diferenciáveis

Definição 2.50. *[16] Seja M uma variedade de classe C^k. Dizemos que um **vetor tangente** a M em x é a derivada de uma curva diferenciável em x. E o **espaço tangente** de M em x é o conjunto de todos os vetores tangentes em x e é denotado por T_xM. Isto é,*

$$T_xM = \{v_x : v_x \text{ é a derivada de uma curva diferenciável em } x\}$$

Para $x \in M$ fixo, temos que T_xM é um espaço vetorial.

Definição 2.51. *[16] Seja M uma variedade de classe C^k. O **fibrado tangente** de M é a união disjunta dos vetores tangentes em todos os pontos de M e é denotado por TM. Ou seja,*

$$TM = \{(x, v) : x \in M \text{ e } v \text{ é um vetor tangente em } x\} = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_xM.$$

Definição 2.52. *[16] Uma **métrica riemanniana** numa variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $x \in M$ um produto interno no espaço tangente T_xM.*

Seja g uma métrica riemanniana em M. Indicamos com $\langle u, v\rangle$ o produto interno dos vetores $u, v \in T_xM$.

Definição 2.53. *[16] A **norma** ou comprimento do vetor tangente $u \in T_xM$ é definido por*

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

Definição 2.54. *[16] Uma variedade diferenciável onde está definida uma métrica riemanniana chama-se uma **variedade riemanniana**. Em termos mais precisos, trata-se de um par (M, g) onde g é uma métrica riemanniana na variedade M.*

Definição 2.55. *[16] Seja M uma variedade riemanniana. Definimos o **comprimento de um caminho** $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ como sendo*

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt. \tag{2.4}$$

Um caminho $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ diz-se **seccionalmente de classe** C^1 se α é contínuo e existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ tal que

$$\alpha_i = \alpha\big|_{[t_i, t_{i+1}]}$$

é de classe C^1 para todo $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Dados dois pontos arbitrários $x, y \in M$, existe um caminho $\alpha : [0, 1] \longrightarrow M$ seccionalmente de classe C^k, tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$.

Definição 2.56. *[16] A **distância intrínseca** $d(x, y)$ entre dois pontos x, y de uma variedade riemanniana conexa é dada por*

$$d(x, y) = \inf\left\{\ell(\alpha) \ : \ \alpha \text{ é seccionalmente } C^1 \text{ em } M \text{ ligando } x \text{ a } y\right\}. \tag{2.5}$$

Proposição 2.57. *[16] Seja M uma variedade diferenciável, com uma métrica riemanniana de classe C^0. A distância intrínseca definida acima satisfaz os axiomas que definem um espaço métrico.*

Proposição 2.58. *[16] A topologia de M definida pela distância intrínseca coincide com a topologia original de M.*

Capítulo 3

Difeomorfismos Parcialmente Hiperbólicos: Uma Introdução

3.1 Difeomorfismo Parcialmente Hiperbólicos

Definição 3.1. *[10] Seja M uma variedade Riemanniana. Um difeomorfismo $f : M \to M$ é chamado* ***parcialmente hiperbólico*** *se existem constantes $0 < \lambda < \gamma_1 < 1 < \gamma_2 < \mu$, $C > 1$ e uma decomposição Df-invariante de TM tal que, para todo $x \in M$,*

$$T_xM = E^u(x) \oplus E^c(x) \oplus E^s(x),$$

e, para todo $n \geq 0$, valem as seguintes desigualdades:

- $C^{-1}\mu^n\|v\| < \|Df^n(x)v\|$ *para todo* $v \in E^u(x)\backslash\{0\}$,
- $C^{-1}\gamma_1^n\|v\| < \|Df^n(x)v\| < C\gamma_2^n\|v\|$ *para todo* $v \in E^c(x)\backslash\{0\}$ *e*
- $\|Df^n(x)v\| < C\lambda^n\|v\|$ *para todo* $v \in E^s(x)\backslash\{0\}$.

Observação 3.2.

(i) *Esta forma de parcialmente hiperbólico é também chamada de* ***parcialmente hiperbólico absoluto****, em contraste com outra definição mais fraca em que as constantes $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$ e μ dependem de x. Neste trabalho, consideramos apenas difeomorfismos parcialmente hiperbólicos absolutos.*

(ii) *Embora muitas vezes se assuma que a variedade M é compacta, neste trabalho não impomos essa condição.*

Definição 3.3. *Seja M uma variedade Riemanniana. Um difeomorfismo $f : M \longrightarrow M$ é chamado de* ***difeomorfismo de Anosov*** *se ele for parcialmente hiperbólico com distribuição central trivial. Dessa forma,*

$$TM = E^s(x) \oplus E^u(x),$$

onde E^s e E^u são descritos como na Definição 3.1.

As direções E^u, E^c e E^s são chamadas de direção instável, central e estável para f, respectivamente. É claro que as desigualdades da Definição 3.1 significam que os vetores em E^u se expandem exponencialmente, os vetores em E^s se contraem exponencialmente e os vetores em E^c podem ser contraídos ou expandidos, mas essa ação é dominada pela forte contração e expansão de E^u e E^s.

Em geral, os subespaços E^u, E^c e E^s não são ortogonais com respeito à métrica riemanniana da variedade M. No entanto, existe uma métrica, conhecida como **métrica adaptada**, com a qual é possível assumir $C = 1$, além de que os subespaços E^u, E^c e E^s sejam ortogonais, veja em [21] e [7].

Para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, encontrar a decomposição invariante do fibrado tangente pode ser uma tarefa bastante difícil. Contudo, no caso linear, essa decomposição pode ser obtida de forma direta. A seguir, apresentamos alguns exemplos ilustrativos.

Exemplo 3.4. *Seja $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear dada pela matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que os autovalores de A são $\lambda_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$. Sejam $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}$ e E_{λ_3} os autoespaços generalizados correspondentes aos autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 respectivamente.

Como g é linear e o domínio é todo o $\mathbb{R}^3$, o fibrado tangente é o trivial, ou seja, $T_x\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Além disso, como g possui três autovalores reais distintos, temos a seguinte decomposição:

$$\mathbb{R}^3 = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus E_{\lambda_3},$$

em que cada subespaço é invariante por A. Pela linearidade de g, temos $Dg = A$. Dessa forma, podemos considerar a seguinte decomposição:

- $E_g^s = E_{\lambda_1}$;
- $E_g^c = E_{\lambda_2}$;
- $E_g^u = E_{\lambda_3}$.

Como $\lambda_1 < 1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 > 1$, vetores em E_g^s são contraídos, vetores em E_g^c são preservados (nem contraídos nem expandidos) e vetores em E_g^u são expandidos pela ação de g. Com isso, g é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico.

Observação 3.5. *Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por*

$$f(x, y, z) = g(x, y, z) + (0, 0, \alpha \sin(2\pi z)),$$

onde g é a aplicação linear do exemplo anterior. Note que, f é um difeomorfismo, e

$$Df = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2\pi\alpha\cos(2\pi z) \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de Df são

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1, \quad \lambda_2 = 1 + 2\pi\alpha\cos(2\pi z) \quad e \quad \lambda_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1.$$

Como $\cos(2\pi z) \in [-1, 1]$, então

$$\lambda_2 = 1 + 2\pi\alpha\cos(2\pi z) \in [1 - 2\pi\alpha, 1 + 2\pi\alpha].$$

Portanto, escolhendo $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, garantimos que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.$$

Nesse caso, f é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico, com a seguinte decomposição:

- $E^s_f = E_{\lambda_1}$;
- $E^c_f = E_{\lambda_2}$;
- $E^u_f = E_{\lambda_3}$.

Note que, como a perturbação introduzida por f ocorre apenas na terceira coordenada, e essa perturbação depende unicamente da variável z, a direção central E^c_f é sempre gerada pelo vetor $(0, 0, 1)$.

Chamamos **toro de dimensão** d o quociente $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, ou seja, o espaço das classes de equivalência da relação de equivalência definida em $\mathbb{R}^d$ por $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^d$.

Exemplo 3.6. *Seja $A : \mathbb{T}^3 \longrightarrow \mathbb{T}^3$, um automorfismo linear dado por uma matriz A, que tem três autovalores reais, λ_1, λ_2 e λ_3 tal que*

$$0 < |\lambda_1| < 1 < |\lambda_2| < |\lambda_3|.$$

Sejam E_{λ_1}, E_{λ_2} e E_{λ_3} os autoespaços generalizados correspondentes aos autovalores λ_1, λ_2 e λ_3, respectivamente. Assim, o difeomorfismo $A : \mathbb{T}^3 \longrightarrow \mathbb{T}^3$ é parcialmente hiperbólico com a seguinte decomposição do fibrado tangente de $\mathbb{T}^3$:

- *E^s_A é o subespaço tangente às projeções afins no toro de translações paralelas a E_{λ_1}.*
- *E^c_A é o subespaço tangente às projeções afins no toro de translações paralelas a E_{λ_2}.*
- *E^u_A é o subespaço tangente às projeções afins no toro de translações paralelas a E_{λ_3}.*

Observação 3.7. *Sabemos que se T é uma matriz invertível, então os autovalores de T^{-1} são os inversos dos autovalores de T. Isso nos permite estabelecer a seguinte relação,*

- $E^s_A = E^u_{A^{-1}}$,
- $E^c_A = E^c_{A^{-1}}$,
- $E^u_A = E^s_{A^{-1}}$,

onde A é um automorfismo linear do Exemplo 3.6. Essa propriedade é válida, de forma análoga, para qualquer difeomorfismo parcialmente hiperbólico e sua inversa.

3.2 Folheações

Definição 3.8. *[5] Seja W uma partição de uma variedade diferenciável M em subvariedades C^1 de dimensão k. Para $x \in M$, seja $W(x)$ a subvariedade contendo x. Dizemos que W é uma* ***folheação contínua k-dimensional com folhas C^1*** *(ou simplesmente* ***folheação****) se para todo $x \in M$ existe uma vizinhança U e um homeomorfismo $\varphi : B^k \times B^{m-k} \longrightarrow U$, onde $B \subset \mathbb{R}$ é um disco aberto, tal que:*

(i) *Para cada $z \in B^{m-k}$, o conjunto $\varphi(B^k \times \{z\})$ é a componente conexa de $W(\varphi(0,z)) \cap U$ contendo $\varphi(0,z)$;*

(ii) *$\varphi(\cdot, z)$ é de classe C^1 e depende continuamente da topologia em z na topologia C^1.*

Cada subvariedade $W(x)$ da folheação é chamada ***folha*** *de W.*

De maneira intuitiva, uma folheação de dimensão k de uma variedade diferenciável M^m é uma decomposição de M em subvariedades de dimensão k chamadas folhas, as quais se aglomeram localmente como subconjuntos de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ com a segunda coordenada constante.

O exemplo mais elementar de folheação de dimensão n é a folheação de

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n},$$

onde as folhas são n-planos da forma $\mathbb{R}^n \times \{c\}$, com $c \in \mathbb{R}^{m-n}$.

Definição 3.9. *[5] O sub-fibrado $E \subset TM$ é dito* ***integrável*** *se existe uma folheação W em M tal que $TW = E$.*

Definição 3.10. *Seja E uma distribuição contínua k-dimensional em uma variedade M. Dizemos que E é:*

(1) ***Unicamente integrável*** *se existe uma folheação W de M cujas folhas são k-dimensionais, tal que toda curva C^1, $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow M$, que satisfaz $\dot{\sigma}(t) \in E(\sigma(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, está contida na folha $W(\sigma(0))$. Em particular, isso implica que $T_x W(x) = E(x)$ para todo $x \in M$.*

(2) ***Localmente unicamente integrável*** *se, para cada ponto $x \in M$, existe uma subvariedade suave k-dimensional $W_{\text{loc}}(x) \subset M$ e uma constante $\alpha(x) > 0$ tais que, para toda curva por partes C^1, $\sigma : [0,1] \to M$, que satisfaz:*

(a) $\sigma(0) = x$;

(b) $\dot{\sigma}(t) \in E(\sigma(t))$ *para todo* $t \in [0,1]$;

(c) *o comprimento de σ é menor que $\alpha(x)$;*

então σ está contida em $W_{\text{loc}}(x)$.

Obviamente, se E é localmente unicamente integrável, então E é integrável e a folheação integrável é única.

Agora voltamos ao contexto de parcialmente hiperbólico. Seja f como na Definição 3.1. Por [13] as distribuições E^u_f e E^s_f são unicamente integráveis as folheações W^u_f e W^s_f, respectivamente. Porém, sobre a integrabilidade da distribuição E^c ainda é pouco compreendida.

Definição 3.11. *Dizemos que um difeomorfismo parcialmente hiperbólico é* ***dinamicamente coerente*** *quando as distribuições $E^{cu} = E^c \oplus E^u$ e $E^{cs} = E^c \oplus E^s$ são unicamente integráveis. Nesse caso, a interseção das folheações W^{cu} e W^{cs} é uma folheação W^c com $TW^c = E^c$, ou seja, E^c é integrável.*

Observação 3.12. *Em geral, a definição de dinamicamente coerente requer apenas que as distribuições E^{cu} e E^{cs} sejam integráveis, sem exigir unicidade da folheação associada. No entanto, neste trabalho adotaremos a definição mais restrita apresentada na Definição 3.11, na qual se assume a integrabilidade única dessas distribuições.*

Definição 3.13. *A folheação W^s tangente à E^s é chamada* ***folheação estável****, a folheação W^u tangente à E^u é chamada* ***folheação instável****, a folheação W^c tangente à E^c é chamada* ***folheação central****, a folheação W^{cu} tangente à E^{cu} é chamada* ***folheação centro instável*** *e a folheação W^{cs} tangente à E^{cs} é chamada* ***folheação centro estável****.*

Observação 3.14. *Existem contextos bem gerais em que a distribuição $E^s_f \oplus E^u_f$ não é integrável a uma folheação W^{us}_f. Por exemplo, os casos onde f tem a propriedade*

de acessibilidade, veja em [12]. No entanto, quando f é linear, a distribuição $E^s_f \oplus E^u_f$ é automaticamente integrável, pois existe uma folheação instável estável, denotada por W^{us}_f, tangente a $E^s_f \oplus E^u_f$.

A Df- invariância do fibrado tangente E^σ_f ($\sigma = u, c, s, cs, cu$) e a unicidade da folheação tangente a E^σ_f implicam na seguinte proposição.

Proposição 3.15. *A folheação W^σ é f-invariante, isto é,*

$$f(W^\sigma(x)) = W^\sigma(f(x)),\ \ \sigma = u, c, s, cs, cu.$$

Denote d^σ à distância intrínseca na folha W^σ induzida pela métrica riemanniana. Temos o seguinte lema.

Lema 3.16. *Sejam f, $\lambda, \gamma_1, \gamma_2, \mu$ e $C > 1$ como na Definição 3.1. Então:*

(a) *Para todo ponto $y \in W^s_f(x)$ tem-se*

$$d^s(f^n(x), f^n(y)) \leqslant C\lambda^n d^s(x, y).$$

(b) *Para todo $y \in W^u_f(x)$ tem-se*

$$C^{-1}\mu^n d^u(x, y) \leqslant d^u(f^n(x), f^n(y)).$$

(c) *Para todo $y \in W^c_f(x)$ tem-se*

$$C^{-1}\gamma_1^n d^c(x, y) \leqslant d^c(f^n(x), f^n(y)) \leqslant C\gamma_2^n d^c(x, y).$$

(d) *Para todo $y \in W^{cs}_f(x)$ tem-se*

$$C^{-1}\gamma_1^n d^{cs}(x, y) \leqslant d^{cs}(f^n(x), f^n(y)) \leqslant C\gamma_2^n d^{cs}(x, y).$$

(e) *Para todo $y \in W^{cu}_f(x)$ tem-se*

$$C^{-1}\gamma_1^n d^{cu}(x, y) \leqslant d^{cu}(f^n(x), f^n(y)) \leqslant C\gamma_2^n d^{cu}(x, y).$$

Demonstração.

(a) Seja $\beta : [a,b] \longrightarrow W_f^s(f(x))$ seccionalmente de classe C^1 em M ligando $f(x)$ a $f(y)$. Pela Proposição 3.15, temos

$$f^{-1}\big(W_f^s(f(x))\big) = f^{-1}\big(f(W_f^s(x))\big) = W_f^s(x).$$

Assim, $\alpha = f^{-1} \circ \beta : [a,b] \longrightarrow W_f^s(x)$ é seccionalmente de classe C^1 ligando x a y e $\alpha'(t) \in E^s(\alpha(t))$ para todo t. Logo,

$$\begin{aligned} d^s(f(x), f(y)) &\overset{2.5}{=} \inf\{\ell(\beta)\} \overset{2.4}{=} \inf\left\{\int_a^b \|\beta'(t)\|dt\right\} \\ &= \inf\left\{\int_a^b \|(f\circ\alpha)'(t)\|dt\right\} \\ &= \inf\left\{\int_a^b \|Df(\alpha'(t))\|dt\right\} \quad \text{(regra da cadeia)} \\ &\leqslant \inf\left\{\int_a^b C\lambda\|\alpha'(t)\|dt\right\} \quad \text{(Definição 3.1)} \\ &= C\lambda \inf\left\{\int_a^b \|\alpha'(t)\|dt\right\} \\ &\overset{2.5}{=} C\lambda d^s(x,y). \end{aligned}$$

Note que

$$d^s(f^2(x), f^2(y)) = d^s\big(f(f(x)), f(f(y))\big) \leqslant \lambda d^s(f(x), f(y)) \leqslant \lambda^2 d^s(x,y).$$

Seguindo indutivamente, obtemos

$$d^s(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \lambda^n d^s(x,y) \leqslant C\lambda^n d^s(x,y).$$

Os itens **(b)**-**(e)** seguem de forma análoga. □

3.3 Quase Isometria

Definição 3.17. *[10] Seja W^σ uma folheação em $\mathbb{R}^d$. Dizemos que W^σ é* ***quase isométrica*** *se existem $a, b > 0$, tais que $d^\sigma(x,y) \leqslant a \cdot \|x-y\| + b$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e $y \in W^\sigma(x)$. Aqui d^σ denota a distância na folha W^σ.*

Observação 3.18. *[10] Para um difeomorfismo parcialmente hiperbólico, a folheação W^u_f é tangente a uma distribuição contínua E^u_f, que implica que a taxa $\dfrac{d^u(x,y)}{\|x-y\|}$ converge uniformemente para um, quando $d_u(x,y) \longrightarrow 0$ e, assim, é fácil verificar que, neste caso, podemos retirar a constante b da definição de quase isometria, trocando a por uma constante maior Q, isto é, W^u_f é quase isométrica se $d^u(x,y) \leqslant Q \cdot \|x-y\|$ para todo $y \in W^u_f(x)$. O mesmo é válido para W^s_f.*

Intuitivamente, a quase isometria impede que as folhas dobrem-se sobre si mesmas, como mostra a imagem a seguir.

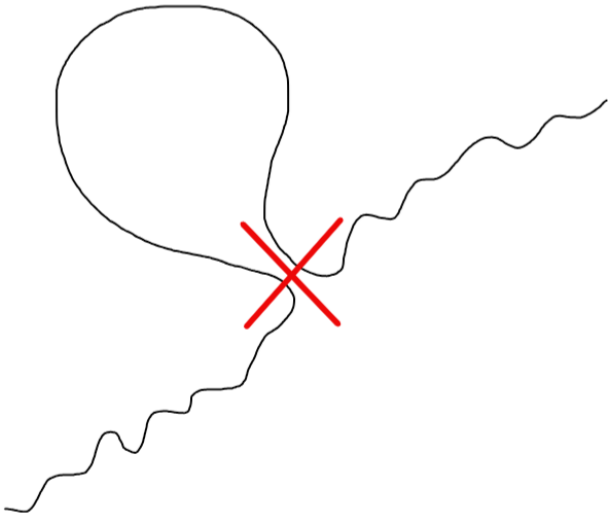

Figura 3.1: Exemplo de comportamento das folhas que é impedido pela quase isometria.

Teorema 3.19. *[2] Seja f um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de uma variedade Riemanniana compacta M de dimensão m. Suponha que as folheações estáveis W^s_f e instáveis W^u_f de f sejam quase isométricas no recobrimento universal $\tilde{M}$. Então, as distribuições E^c_f, E^{cs}_f e E^{cu}_f são localmente unicamente integráveis; em particular, f é dinamicamente coerente.*

Teorema 3.20. *[3] Seja $f : \mathbb{T}^3 \longrightarrow \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Então, no recobrimento universal $\mathbb{R}^3$ as folheações estável $\tilde{W}^s_f$ e instável $\tilde{W}^u_f$ de f são quase isométricas .*

Corolário 3.21. *[3] Todo difeomorfismo parcialmente hiperbólico em $\mathbb{T}^3$ é dinamicamente coerente.*

Observe que, pelo Teorema 3.20, o Teorema 1.2 pode ser visto como um corolário do Teorema 1.3. Por essa razão, no Capítulo 3, trabalharemos com um difeomorfismo que satisfaça as hipóteses do Teorema 1.3. Além disso, o Teorema 3.19 garante que, sob essas hipóteses, o difeomorfismo é dinamicamente coerente. Então, ao longo do Capítulo 3, trabalharemos com as folheações centro estável, centro instável e central.

3.4 Linearização

Definição 3.22. *[20] Sejam X e $\tilde{X}$ espaços topológicos. Seja $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ uma aplicação contínua sobrejetora. Dizemos que $(\tilde{X}, p)$ é um* ***espaço de recobrimento*** *de X, se para todo $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U_x de x tal que $p^{-1}(U_x)$ pode ser escrito como uma união disjunta de conjuntos abertos $V_\alpha \subset \tilde{X}$ tal que para cada α, a restrição $p\big|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow U_x$ é um homeomorfismo.*

Neste caso, a aplicação $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ é dita **aplicação de recobrimento**. Se $(\tilde{X}, p)$ é um espaço de recobrimento de X, é usual chamar o espaço topológico X de **espaço base**. Além disso, quando X é simplesmente conexo, o recobrimento é chamado de **recobrimento universal**.

Exemplo 3.23. *A identidade $I_d : X \longrightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento para qualquer espaço topológico X. Esse recobrimento é chamado de recobrimento trivial.*

Exemplo 3.24. *A aplicação $p : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$, definida por*

$$p(x_1, x_2, ..., x_d) = (e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}, ..., e^{2\pi i x_d})$$

é uma aplicação de recobrimento. Ou seja, o $\mathbb{R}^d$ é o recobrimento universal do toro $\mathbb{T}^d$.

A verificação de que a função p do Exemplo 3.24 é de fato uma aplicação de recobrimento segue diretamente dos Teoremas 53.1 e 53.3, juntamente com o Exemplo 4 da Seção 53 de [20].

Uma das características fundamentais de espaço de recobrimento é seu comportamento em relação ao levantamento de aplicações.

Definição 3.25. *[20] Dado um recobrimento $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ e uma função contínua*

$$f : Y \longrightarrow X,$$

*um **levantamento** de f é uma função contínua $\tilde{f} : Y \longrightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.*

Em particular, quando $Y = X$, dizemos que $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ é o levantamento de $f : X \longrightarrow X$ se $p \circ \tilde{f} = f \circ p$. Desta forma, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Figura 3.2: Levantamento de f.

Observação 3.26. *Sejam $f : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ uma transformação contínua, $p : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ a aplicação de recobrimento do Exemplo 3.24 e $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ o levantamento de f. Então, para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e todo $v \in \mathbb{Z}^d$, vale que*

$$\tilde{f}(x + v) - \tilde{f}(x) \in \mathbb{Z}^d.$$

Isso segue diretamente do fato de que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e $z \in \mathbb{Z}$ tem-se que

$$\begin{aligned} e^{2\pi i(x+v)} &= e^{2\pi ix} \cdot e^{2\pi iv} \\ &= e^{2\pi ix} \cdot (\cos(2\pi v) + i \operatorname{sen}(2\pi v) \\ &= e^{2\pi ix} \cdot (1 + 0) \\ &= e^{2\pi ix}. \end{aligned}$$

Proposição 3.27. *Seja $f : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ uma transformação contínua e $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ o levantamento de f. Então, existe uma transformação $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, tal que para todo $v \in \mathbb{Z}^d$ vale que $\tilde{f}(x + v) = \tilde{f}(x) + T(v)$.*

Demonstração. Como $\tilde{f}$ é o levantamento de f, vale que para todo $v \in \mathbb{Z}^d$,

$$\tilde{f}(x+v) - \tilde{f}(x) \in \mathbb{Z}^d. \tag{3.1}$$

Fixado $v_0 \in \mathbb{Z}^d$, definimos a função $g_{v_0} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ por

$$g_{v_0}(x) = \tilde{f}(x+v_0) - \tilde{f}(x).$$

Como $\tilde{f}$ é contínua, segue que g_{v_0} também é contínua. Por (3.1), temos que

$$g_{v_0}(\mathbb{R}^d) \subset \mathbb{Z}^d.$$

Como $\mathbb{R}^d$ é conexo e g_{v_0} é contínua, a imagem $g_{v_0}(\mathbb{R}^d)$ é um subconjunto conexo de $\mathbb{Z}^d$. Sendo $\mathbb{Z}^d$ totalmente desconexo, então $g_{v_0}(\mathbb{R}^d)$ é um conjunto unitário. Portanto, para cada $v \in \mathbb{Z}^d$, existe um único vetor $Tv \in \mathbb{Z}^d$, tal que

$$\tilde{f}(x+v) - \tilde{f}(x) = Tv,$$

independente de $x \in \mathbb{R}^d$.
Mostraremos que $T : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^d$ é uma transformação linear (com escalares em $\mathbb{Z}$).
De fato, note que:

(i) $T(0) = \tilde{f}(x+0) - \tilde{f}(x) = \bar{f}(x) - \bar{f}(x) = 0$;

(ii) Para todo $v, w \in \mathbb{Z}^d$, vale que

$$\begin{aligned} T(v+w) &= \tilde{f}(x+(v+w)) - \tilde{f}(x) \\ &= \tilde{f}((x+v)+w) - \tilde{f}(x+v) + \tilde{f}(x+v) - \tilde{f}(x) \\ &= (\tilde{f}(x+v) - \tilde{f}(x)) \ + (\tilde{f}((x+v)+w) - \tilde{f}(x+v)) \\ &= T(v) + T(w). \end{aligned}$$

(iii) Para todo $v \in \mathbb{Z}^d$, tem-se que

$$\begin{aligned} T(-v) &= \tilde{f}(x+(-v)) - \tilde{f}(x) \\ &= \tilde{f}(x-v) - \tilde{f}(x), \quad \text{fazendo } y = x - v \end{aligned}$$

$$= \tilde{f}(y) - \tilde{f}(y+v)$$
$$= -(\tilde{f}(y+v) - \tilde{f}(y))$$
$$= -T(v).$$

(iv) Para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $v \in \mathbb{Z}^d$, temos que

$$\begin{aligned}
T(\alpha \cdot v) - \alpha \cdot T(v) &= T(\alpha \cdot v) + \alpha \cdot (-T(v)) \\
&\overset{(iii)}{=} T(\alpha \cdot v) + \alpha \cdot T(-v) \\
&= \underbrace{T(v+v+\cdots+v)}_{\alpha \text{ vezes}} + \alpha \cdot T(-v) \\
&\overset{(ii)}{=} \underbrace{T(v)+T(v)+\cdots+T(v)}_{\alpha \text{ vezes}} + \alpha \cdot T(-v) \\
&= \alpha \cdot T(v) + \alpha \cdot T(-v) \\
&= \alpha \cdot (T(v) + T(-v)) \\
&\overset{(ii)}{=} \alpha \cdot T(v + (-v)) \\
&= \alpha \cdot T(0) \\
&\overset{(i)}{=} \alpha \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$.

Os itens (i), (ii), (iii) e (iv) garantem que T é uma transformação linear (com escalares em $\mathbb{Z}$). □

Observe que os vetores canônicos $e_1,\ e_2, \ldots,\ e_d \in \mathbb{Z}^d$ e $T(\mathbb{Z}^d) \subset \mathbb{Z}^d$, logo a matriz de $T : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^d$ na base canônica é uma matriz com entradas inteiras. T induz uma transformação linear $\tilde{L} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, cuja matriz com respeito à base canônica é igual à matriz de T na base canônica de $\mathbb{R}^d$. Assim, $\tilde{L}(\mathbb{Z}^d) \subset \mathbb{Z}^d$ e, com isso, $\tilde{L}$ induz uma aplicação $L : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$. Chamamos L e $\tilde{L}$ de **linearização** de f e $\tilde{f}$, respectivamente.

Lema 3.28. *Seja $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua e seja g a sua linearização. Então, existe uma função contínua $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d$-periódica tal que $f = \varphi + g$.*

Demonstração. De fato, observe que,

$$f = f + (-g + g) = (f - g) + g.$$

Seja $\varphi = f - g$. Como f e g são contínuas, segue que φ é contínua. Além disso, para todo $v \in \mathbb{Z}^d$ e $x \in \mathbb{R}^d$, temos

$$\begin{aligned}\varphi(x+v) &= f(x+v) - g(x+v) \\ &\overset{(3.27)}{=} f(x) + g(v) - g(x) - g(v) \\ &= f(x) - g(x) \\ &= \varphi(x).\end{aligned}$$

Logo, φ é contínua e $\mathbb{Z}^d$-periódica. □

Observação 3.29. *Podemos aplicar os mesmos argumentos utilizados no Lema 3.28 para demonstrar que, para cada $k \in \mathbb{Z}$, existe uma função contínua $\varphi_k : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d$-periódica, tal que*

$$f^k = \varphi_k + g^k,$$

onde f^k e g^k denotam as iterações de f e g, respectivamente, aplicadas k vezes.

Capítulo 4

Propriedades Geométricas das Variedades Invariantes

Neste capítulo, consideramos $f_0 : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.3, ou seja,

- a distribuição central é unidimensional; e
- as folheações estável e instável no recobrimento universal do toro $\mathbb{T}^d$ são quase isométricas.

Seja $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ um levantamento de f_0 para o recobrimento universal $p : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$, isto é, uma aplicação contínua tal que $p \circ f = f_0 \circ p$. O fato de f_0 ser parcialmente hiperbólico é preservado pelo levantamento, de modo que f também é parcialmente hiperbólico, veja em [7].

A decomposição Df_0-invariante do fibrado tangente de $\mathbb{T}^d$ é levantada para uma decomposição Df-invariante do fibrado tangente de $\mathbb{R}^d$, ou seja,

$$T\mathbb{R}^d = E^u_f \oplus E^c_f \oplus E^s_f.$$

Com respeito à métrica usual de $\mathbb{R}^d$, existem constantes

$$0 < \lambda < \gamma_1 < 1 < \gamma_2 < \mu \quad \text{e} \quad C_{ph} > 1$$

tal que, para $x \in \mathbb{R}^d$,

(i) $C_{ph}^{-1}\mu^n\|v\| < \|Df^n(x)v\|$ para todo $v \in E^u(x)\backslash\{0\}$,

(ii) $C_{ph}^{-1}\gamma_1\|v\| < \|Df^n(x)v\| < C_{ph}\gamma_2^n\|v\|$ para todo $v \in E^c(x)\backslash\{0\}$ e

(iii) $\|Df^n(x)v\| < C_{ph}\lambda^n\|v\|$ para todo $v \in E^s(x)\backslash\{0\}$.

Seja $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ a linearização de f. Nosso objetivo é construir uma conjugação que leve folhas centrais de f em folhas centrais de g. Para isso, o primeiro passo consiste em verificar se g é, de fato, um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Note que, se $\gamma_2 < \gamma_3 < \mu_3 < \mu$, então

$$C_{ph}^{-1}\mu_3^n\|v\| < C_{ph}^{-1}\mu^n\|v\| < \|Df^n v\| \text{ para todo } v \in E_f^u(x)\backslash\{0\},$$

e

$$\|Df^n v\| < C_{ph}\gamma_2^n\|v\| < C_{ph}\gamma_3^n\|v\| \text{ para todo } v \in E_f^c(x)\backslash\{0\},$$

de modo que as desigualdades que caracterizam a hiperbolicidade parcial continuam válidas com as novas constantes γ_3 e μ_3 quanto com as constantes originais γ_2 e μ, ou seja, sem perda de generalidade, o intervalo $[\gamma_2, \mu]$ pode ser substituído pelo subintervalo $[\gamma_3, \mu_3] \subset [\gamma_2, \mu]$. Como g é uma aplicação linear em $\mathbb{R}^d$, então g tem uma quantidade finita de autovalores. Substituindo o intervalo $[\gamma_2, \mu]$ por um subintervalo suficientemente pequeno tal que:

1. Nenhum dos autovalores de g está no anel $\{z \in \mathbb{C} : \gamma_2 \leqslant \|z\| \leqslant \mu\}$ e

2. Nenhum dos autovalores de g está no anel $\{z \in \mathbb{C} : \lambda \leqslant \|z\| \leqslant \gamma_1\}$.

Considerando g como uma aplicação linear em $\mathbb{C}^d$, g tem autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l$ com os autoespaços generalizados $E_{\lambda_1}^{\mathbb{C}}, E_{\lambda_2}^{\mathbb{C}}, ..., E_{\lambda_l}^{\mathbb{C}}$. Seja

$$E_g^{\mathbb{C},u} = \bigoplus_{\mu<|\lambda_i|} E_{\lambda_i}^{\mathbb{C}}, \quad E_g^{\mathbb{C},c} = \bigoplus_{\gamma_1<|\lambda_i|<\gamma_2} E_{\lambda_i}^{\mathbb{C}} \quad \text{e} \quad E_g^{\mathbb{C},s} = \bigoplus_{|\lambda_i|<\lambda} E_{\lambda_i}^{\mathbb{C}}. \tag{4.1}$$

Como os autovalores conjugados foram agrupados, os subespaços $E_g^{\mathbb{C},u}, E_g^{\mathbb{C},c}$ e $E_g^{\mathbb{C},s}$ são apenas complexificações de subespaços reais E_g^u, E_g^c e E_g^s. Por [4], a aplicação g é parcialmente hiperbólica. Além disso, mostraremos neste capítulo que

$$\dim(E_f^u) = \dim(E_g^u),\ \dim(E_f^c) = \dim(E_g^c) \text{ e } \dim(E_f^s) = \dim(E_g^s).$$

Assim, como f, definimos $E_g^{cu} = E_g^c \oplus E_g^u$ e $E_g^{cs} = E_g^c \oplus E_g^s$. Com respeito a essa decomposição, considere as projeções lineares $\pi_g^u, \pi_g^c, \pi_g^s, \pi_g^{cu}, \pi_g^{cs}$ e π_g^{us}.

Exemplo 4.1. *Seja $x \in \mathbb{R}^d$. Pela decomposição $\mathbb{R}^d = E_g^u \oplus E_g^c \oplus E_g^s$, pode-se escrever*

$$x = x^u + x^c + x^s,$$

onde $x^\delta \in E_g^\sigma$ para cada $\sigma = \{u, c, s\}$. Com isso, a projeção linear, $\pi_g^\sigma : \mathbb{R}^d \longrightarrow E_g^\sigma$ é dada por

$$\pi_g^\sigma(x) = x^\sigma.$$

Exemplo 4.2. *Se $x = x^u + x^{cs} \in E_g^u \oplus E_g^{cs}$, então $\pi_g^{cs}(x) = x^{cs}$.*

Queremos comparar f com g, o que se torna uma tarefa difícil caso não seja possível relacionar as distâncias associadas a um dos difeomorfismos com aquelas do outro. Por isso, a única métrica usada sobre pontos e vetores em $\mathbb{R}^d$ será a métrica usual.

Mostraremos agora que, em escalas suficientemente grandes, as ações f e g são aproximadamente equivalentes, o que nos permitirá relacionar as variedades invariantes de f com as de g.

Proposição 4.3. *[10] Para cada $k \in \mathbb{Z}$,*

$$\|f^k - g^k\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|f^k(x) - g^k(x)\| < \infty \ .$$

Demonstração. Como g é a linearização de f, então, pela Observação 3.29, existe uma função contínua $\varphi_k : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d$ -periódica, tal que

$$f^k = g^k + \varphi_k \Longrightarrow \varphi_k = f^k - g^k \ .$$

Note que, todo ponto x em $\mathbb{R}^d$ pode ser escrito como $x = z + y$, onde $z \in \mathbb{Z}^d$ e $y \in [0,1]^d$. Como φ_k é $\mathbb{Z}^d$-periódica, segue que $\varphi_k(x) = \varphi_k(y)$. Desse modo,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|\varphi_k(x)\| = \sup_{y \in [0,1]^d} \|\varphi_k(y)\|.$$

Além disso, como $[0,1]^d$ é compacto e φ_k é contínua, segue que φ_k é limitada nesse conjunto. Assim, temos

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|f^k(x) - g^k(x)\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|\varphi_k(x)\| = \sup_{y \in [0,1]^d} \|\varphi_k(y)\| < \infty.$$

□

Observação 4.4. *Note que:*

$$\begin{aligned}
\|f^k(x) - f^k(y)\| &= \|f^k(x) - f^k(y) + (g^k(x) - g^k(x)) + (g^k(y) - g^k(y))\| \\
&= \|g^k(x) - g^k(y) + (f^k(x) - g^k(x)) + (g^k(y) - f^k(y))\| \\
&\leqslant \|g^k(x) - g^k(y)\| + \|f^k(x) - g^k(x)\| + \|g^k(y) - f^k(y)\| \\
&= \|g^k(x) - g^k(y)\| + \|f^k(x) - g^k(x)\| + \|f^k(y) - g^k(y)\| \\
&\overset{4.3}{\leqslant} \|g^k(x) - g^k(y)\| + \|f^k - g^k\|_0 + \|f^k - g^k\|_0 \\
&= \|g^k(x) - g^k(y)\| + 2\|f^k - g^k\|_0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\|f^k(x) - f^k(y)\| \leqslant \|g^k(x) - g^k(y)\| + 2\|f^k - g^k\|_0 \\
&\implies \frac{\|f^k(x) - f^k(y)\|}{\|g^k(x) - g^k(y)\|} \leqslant 1 + \frac{2\|f^k - g^k\|_0}{\|g^k(x) - g^k(y)\|} \ .
\end{aligned} \tag{4.2}$$

De forma análoga, temos que

$$\begin{aligned}
&\|g^k(x) - g^k(y)\| \leqslant \|f^k(x) - f^k(y)\| + 2\|f^k - g^k\|_0 \\
&\implies \frac{\|f^k(x) - f^k(y)\|}{\|g^k(x) - g^k(y)\|} \geqslant 1 - \frac{2\|f^k - g^k\|_0}{\|g^k(x) - g^k(y)\|}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Corolário 4.5. *[10]*

(a) $\|f^k(x) - g^k(y)\| \sim \|g^k(x) - g^k(y)\|$ *quando* $\|x - y\| \longrightarrow \infty$.

(b) *Mais precisamente, para cada* $k \in \mathbb{Z}$ *e* $c > 1$*, existe* $M > 0$ *tal que* $x, y \in \mathbb{R}^d$*,*

$$\|(x - y)\| > M \implies \frac{1}{c} < \frac{\|f^k(x) - f^k(y)\|}{\|g^k(x) - g^k(y)\|} < c \ .$$

(c) *Mais geralmente, para cada* $k \in \mathbb{Z}$*,* $c > 1$ *e a aplicação linear* $\pi^\sigma : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ $(\sigma \in \{u, c, s\})$ *existe* $M > 0$ *tal que para* $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\|\pi^\sigma(x - y)\| > M \implies \frac{1}{c} < \frac{\|\pi^\sigma(f^k(x) - f^k(y))\|}{\|\pi^\sigma(g^k(x) - g^k(y))\|} < c.$$

Demonstração. **(a)** Por (4.2) e (4.3) temos que

$$1 - \frac{2\|f^k - g^k\|_0}{\|g^k(x) - g^k(y)\|} \leqslant \frac{\|f^k(x) - f^k(y)\|}{\|g^k(x) - g^k(y)\|} \leqslant 1 + \frac{2\|f^k - g^k\|_0}{\|g^k(x) - g^k(y)\|} \ .$$

Como $\|x-y\| \longrightarrow \infty$, segue do Corolário 2.31 que $\|g^k(x)-g^k(y)\| \longrightarrow \infty$. Além disso, pela Proposição 4.3, temos que $\|f^k-g^k\|_0 < \infty$. Assim,

$$\frac{\|f^k-g^k\|_0}{\|g^k(x)-g^k(y)\|} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } \|x-y\| \longrightarrow \infty \ .$$

Com isso, obtemos

$$1 \leqslant \frac{\|f^k(x)-f^k(y)\|}{\|g^k(x)-g^k(y)\|} \leqslant 1 \quad \text{quando } \|x-y\| \longrightarrow \infty \ .$$

Pelo Teorema do Confronto, temos

$$\frac{\|f^k(x)-f^k(y)\|}{\|g^k(x)-g^k(y)\|} \longrightarrow 1 \quad \text{quando } \|x-y\| \longrightarrow \infty \ . \tag{4.4}$$

Portanto, $\|f^k(x)-g^k(y)\| \sim \|g^k(x)-g^k(y)\|$ quando $\|x-y\| \longrightarrow \infty$.

(b) Segue de (4.4) que dado $\varepsilon > 0$, existe $M_\varepsilon > 0$ tal que se

$$\|x-y\| > M_\varepsilon \Longrightarrow \left\| \frac{\|f^k(x)-f^k(y)\|}{\|g^k(x)-g^k(y)\|} - 1 \right\| < \varepsilon.$$

Isto é,

$$\|x-y\| > M_\varepsilon \Longrightarrow 1-\varepsilon < \frac{\|f^k(x)-f^k(y)\|}{\|g^k(x)-g^k(y)\|} < 1+\varepsilon.$$

Assim, dado $c > 1$, basta escolher $\varepsilon = \min\left\{c-1, 1-\frac{1}{c}\right\} > 0$, pois:

(1) Se $\varepsilon = c-1$, então

$$\frac{1}{c} < 1-\left(1-\frac{1}{c}\right) < 1-(c-1) = 1-\varepsilon < \frac{\|f^k(x)-f^k(y)\|}{\|g^k(x)-g^k(y)\|} < 1+\varepsilon = 1+(c-1) = c.$$

(2) Se $\varepsilon = 1-\frac{1}{c}$, então

$$\frac{1}{c} = 1-\left(1-\frac{1}{c}\right) = 1-\varepsilon < \frac{\|f^k(x)-f^k(y)\|}{\|g^k(x)-g^k(y)\|} < 1+\varepsilon = 1+\left(1-\frac{1}{c}\right) < 1+(1-c) = c.$$

Em qualquer caso, temos

$$\frac{1}{c} < \frac{\|f^k(x)-f^k(y)\|}{\|g^k(x)-g^k(y)\|} < c.$$

(c) Como $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é parcialmente hiperbólico, existe uma decomposição

$$\mathbb{R}^d = E^u_g \oplus E^c_g \oplus E^s_g.$$

Assim, todo vetor v em $\mathbb{R}^d$ pode ser escrito como

$$v = v^u + v^v + v^s,$$

onde $v^u \in E^u_g$, $v^c \in E^c_g$ e $v^s \in E^s_g$. Além disso, temos que $v^u = \pi^u_g(v)$, $v^c = \pi^c_g(v)$ e $v^s = \pi^s_g(v)$. Logo,

$$v = v^u + v^c + v^s = \pi^u_g(v) + \pi^c_g(v) + \pi^s_g(v).$$

Afirmação: $\pi^\sigma_g(g(v)) = g(\pi^\sigma_g(v))$ $(\sigma = u, c, s)$, $\forall\ v \in \mathbb{R}^d$.

Iremos mostrar o caso $\sigma = u$, os outros casos são análogos.

$$\begin{aligned}
\pi^u_g(g(v)) &= \pi^u_g(g(v^u + v^v + v^s)) \\
&= \pi^u_g(\underbrace{g(v^u)}_{\in E^u} + \underbrace{g(v^c)}_{\in E^c} + \underbrace{g(v^s)}_{\in E^s}) \\
&= \pi^u_g(g(v^u)) + \underbrace{\pi^u_g(g(v^c))}_{0} + \underbrace{\pi^u_g(g(v^s))}_{0} \\
&= g(v^u) \\
&= g(\pi^u_g(v)).
\end{aligned}$$

O resultado decorre da Observação 3.29, em conjunto com a afirmação anterior e com os argumentos desenvolvidos nos itens **(a)** e **(b)**.

□

Pelas hipóteses, visto que as folheações estáveis e instáveis de f são quase isométricas, segue do Teorema 3.19 que f é dinamicamente coerente, ou seja, existem folheações únicas W^c_f, W^{cu}_f e W^{cs}_f tangentes aos subespaços E^c_f, E^{cu}_f e E^{cs}_f, respectivamente. Além disso, como g é uma aplicação linear, as folheações W^u_g e W^s_g também são quase isométricas. Aplicando o mesmo argumento, conclui-se que g é dinamicamente coerente, e portanto, existem folheações únicas W^c_g, W^{cu}_g e W^{cs}_g tangentes aos subespaços E^c_g, E^{cu}_g e E^{cs}_g, respectivamente.

As folheações W_f^u, W_f^c e W_f^s são tangentes às distribuições E_f^u, E_f^c e E_f^c em escala infinitesimal. Então, se $x \in \mathbb{R}^d$ e (y_n) uma sequência de pontos na folha $W_f^\sigma(x)$, $(y_n) \in W_f^\sigma(x)$, tal que $\|x - y_n\| \longrightarrow 0$, então, como vetores unitários em $\mathbb{R}^d$, a sequência

$$\frac{x - y_n}{\|x - y_n\|} \longrightarrow E_f^\sigma, \quad \sigma = \{u, c, s\}. \tag{4.5}$$

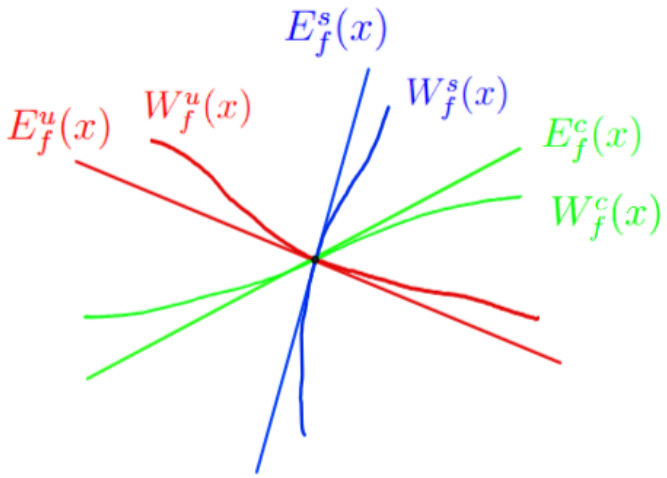

Figura 4.1: Comportamentos das folhas em escalas infinitesimais.

O Corolário 4.5 afirma que, em larga escala, as aplicações f e g são praticamente indistinguíveis. Portanto, nessas escalas, os conjuntos invariantes de f se assemelham aos de g. Esse fato será formalizado nos próximos resultados.

Proposição 4.6. *[10] Se $y \in W_f^s(x)$ e $\|x - y\| \longrightarrow \infty$, então $\dfrac{x - y}{\|x - y\|} \longrightarrow E_g^s$ uniformemente.*

Mais precisamente, para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$, tal que se $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in W_f^s$ e $\|x - y\| > M$, então

$$\|\pi_g^{cu}(x - y)\| < \varepsilon \|\pi_g^s(x - y)\|.$$

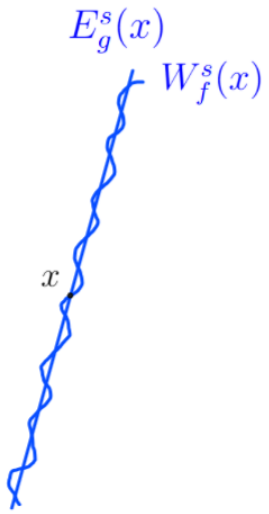

Figura 4.2: Comportamento das folhas estáveis em larga escala

Demonstração. Pela definição dos subespaços E^u_g, E^c_g, E^s_g em (4.1), o espectro da restrição $g\big|_{E^s_g} : E^s_g \longrightarrow E^s_g$ está contido no intervalo $(0, \lambda)$, enquanto o espectro da restrição $g\big|_{E^{cu}_g} : E^{cu}_g \longrightarrow E^{cu}_g$ está contido no intervalo (γ_1, γ_2). Denote $\theta^\sigma = g\big|_{E^\sigma_g} : E^\sigma_g \longrightarrow E^\sigma_g$, $\sigma = \{u, c, s, cs, cu\}$.

Afirmação: Existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que, se $v \in \mathbb{R}^d$, $k > k_0$, e $\|g^k(v)\| < \gamma_1^k \|v\|$, então

$$\|\pi^{cu}_g(v)\| < \varepsilon \cdot \|\pi^s_g(v)\|.$$

De fato, para simplificar os cálculos e argumentos, utilizaremos que os subespaços E^s_f E^c_f e E^u_f são ortogonais (isso é possível com a métrica adaptada). Note que,

$$\begin{aligned}(\theta^s)^k\|v^s\| + (\theta^c)^k\|v^c\| + (\theta^u)^k\|v^u\| = \|g^k(v)\| \\ < \gamma_1^k\|v\| \quad (\text{ hipótese }) \\ = \gamma_1^k(\|v^s + v^c + v^u) \\ < \gamma_1^k\|v^s\| + \gamma_1^k\|v^c\| + \gamma_1^k\|v^u\|.\end{aligned}$$

Disso, obtemos

$$(\gamma_1^k - (\theta^s)^k)\|v^s\| > ((\theta^c)^k - \gamma_1^k)\|v^c\| + ((\theta^u)^k - \gamma_1^k)\|v^u\|$$

$$\implies \left(1-\left(\frac{\theta^s}{\gamma 1}\right)^k\right)\|v^s\| > \left(\left(\frac{\theta^c}{\gamma 1}\right)^k - 1\right)\|v^c\| + \left(\left(\frac{\theta^u}{\gamma 1}\right)^k - 1\right)\|v^u\|.$$

Tome

$$\alpha = \min\left\{\frac{\theta^c}{\gamma_1}, \frac{\theta^u}{\gamma_1}\right\} > 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\left(1-\left(\frac{\theta^s}{\gamma 1}\right)^k\right)\|v^s\| > \left(\alpha^k - 1\right)\|v^{cu}\| \\
&\implies 2\|v^s\| > (\alpha^k - 1)\|\|v^{cu}\| \\
&\implies \|v^{cu}\| < \frac{2}{\alpha^k - 1}\|v^s\| \\
&\implies \|\pi_g^{cu}(v)\| < \frac{2}{\alpha^k - 1}\|\pi_g^s(v)\|.
\end{aligned}$$

Como $\alpha > 1$, então $\alpha^k \longrightarrow \infty$ quando $k \longrightarrow \infty$. Assim, podemos escolher k_0 tal que

$$\frac{2}{\alpha^k - 1} < \varepsilon, \ \forall k > k_0.$$

Com isso, concluímos a demonstração da afirmação.

Como C_{ph}, Q, γ e λ são constantes e $\lambda < \gamma_1$, então existe $k_1 > k_0$ suficientemente grande, tal que

$$2C_{ph}Q\lambda^{k_1} < \gamma_1^{k_1}. \tag{4.6}$$

Pelo Corolário 4.5 ($c = 2$), existe uma constante $M > 0$, tal que

$$\|x - y\| > M \implies \frac{1}{2} < \frac{\|f^k(x) - f^k(y)\|}{\|g^k(x) - g^k(y)\|} < 2.$$

Logo,

$$\|x - y\| > M \implies \|g^k(x) - g^k(y)\| < 2\|f^k(x) - f^k(y)\|. \tag{4.7}$$

Se $y \in W_f^s(x)$ e $\|x - y\| > M$, então

$$\begin{aligned}
&\|f^{k_1}(x) - f^{k_1}(y)\| \leq d^s(f^{k_1}(x), f^{k_1}(y)) \overset{3.16}{<} C_{ph}\lambda^{k_1}d^s(x, y) \\
&\implies \|f^{k_1}(x) - f^{k_1}(y)\| < C_{ph}\lambda^{k_1}Q\|x - y\| \\
&\overset{(4.7)}{\implies} \|g^{k_1}(x) - g^{k_1}(y)\| < 2C_{ph}\lambda^{k_1}Q\|x - y\| \\
&\overset{(4.6)}{\implies} \|g^{k_1}(x - y)\| < \hat{\gamma}^{k_1}\|x - y\| \ .
\end{aligned}$$

E o resultado segue da **Afirmação** anterior. □

Corolário 4.7. *[10] Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são sequências em $\mathbb{R}^d$ e $y_n \in W_f^s(x)$ para todo n, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $d_s(x_n, y_n) \longrightarrow \infty$;

(b) $\|x_n - y_n\| \longrightarrow \infty$;

(c) $\|\pi_g^s(x_n - y_n))\| \longrightarrow \infty$.

Demonstração. **(a)** $\Longrightarrow$ **(b)**: Como W_f^s é quase isométrica, então

$$d^s(x_n, y_n) < Q\|x_n - y_n\| \Longrightarrow \frac{d^s(x_n, y_n)}{Q} < \|x_n - y_n\|.$$

Portanto, se $d^s(x_n, y_n) \longrightarrow \infty$, então $\|x_n - y_n\| \longrightarrow \infty$.

(b) $\Longrightarrow$ **(c)**: Todo $v \in \mathbb{R}^d$ pode ser decomposto da forma

$$v = v^s + v^{cu},$$

onde $v^s \in E_g^s$ e $v^{cu} \in E_g^{cu}$. Então,

$$x_n - y_n = \pi_g^s(x_n - y_n) + \pi_g^{cu}(x_n - y_n).$$

Pela desigualdade triangular, tem-se

$$\|x_n - y_n\| \leqslant \|\pi_g^s(x_n - y_n)\| + \|\pi_g^{cu}(x_n - y_n)\|.$$

Como $\|x_n - y_n\| \longrightarrow \infty$, então pela Proposição 4.6, vale que

$$\|\pi_g^{cu}(x_n - y_n)\| < \varepsilon\|\pi_g^s(x_n - y_n)\| \quad (\text{ para todo } \varepsilon > 0).$$

Substituindo na desigualdade anterior, obtemos

$$\|x_n - y_n\| < (1 + \epsilon)\|\pi_g^s(x_n - y_n)\|.$$

Portanto, se $\|x_n - y_n\| \longrightarrow \infty$, então $\|\pi_g^s(x_n - y_n)\| \longrightarrow \infty$.

(c) $\Longrightarrow$ **(a)**: Decorre diretamente da desigualdade $\|\pi_g^s(x_n - y_n)\| \leqslant d^s(x_n, y_n)$. □

Assim, como ocorre com a maioria dos resultados apresentados neste capítulo, a proposição e o corolário anteriores admitem versões análogas para a direção instável, nas quais os papéis das direções estável e instável são invertidos. Essas versões podem ser demonstradas aplicando os mesmos argumentos à aplicação f^{-1}, que troca naturalmente os papéis de f e f^{-1} (veja a Observação 3.7).

Proposição 4.8. *[10] Se $y \in W_f^u(x)$ e $\|x-y\| \longrightarrow \infty$, então $\dfrac{x-y}{\|x-y\|} \longrightarrow E_g^u$ uniformemente.*

Mais precisamente, para todo $\epsilon > 0$, existe $M > 0$, tal que se $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in W_f^u(x)$ e $\|x-y\| > M$, então

$$\|\pi_g^{cs}(x-y)\| < \epsilon \cdot \|\pi_g^u(x-y)\| \ .$$

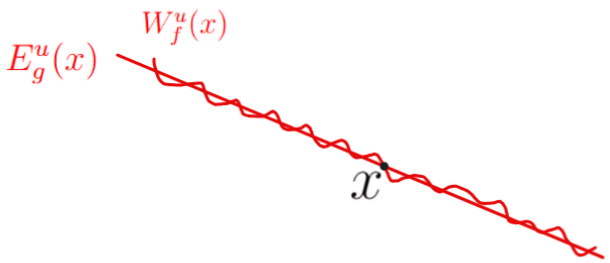

Figura 4.3: Comportamento das folhas instáveis em larga escala

Corolário 4.9. *[10] Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são sequências em $\mathbb{R}$ e $y_n \in W_f^u(x)$ para todo n, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $d^u(x_n, y_n) \longrightarrow \infty$;

(b) $\|x_n - y_n\| \longrightarrow \infty$;

(c) $\|\pi_g^u(x_n - y_n))\| \longrightarrow \infty$.

Definição 4.10. *Seja $X \subset \mathbb{R}^d$ e $R > 0$, definimos*

$$B_R(X) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|x-y\| < R \text{ para algum } x \in X\}$$

Proposição 4.11. *[10] Existe uma constante $R_c > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^d$,*

(a) $W_f^{cs}(x) \subset B_{R_c}\big(W_g^{cs}(x)\big)$;

(b) $W_f^{cu}(x) \subset B_{R_c}\big(W_g^{cu}(x)\big)$; *e*

(c) $W_f^{c}(x) \subset B_{R_c}\big(W_g^{c}(x)\big)$.

Demonstração.

(a) Sabemos que o afastamento entre a folha $W_f^{cs}(x)$ e a folha $W_g^{cs}(x)$ é medido, essencialmente, pela sua variação ao longo da direção instável. Em outras palavras, o afastamento entre essas folheações ocorre predominantemente na direção E^u. Portanto, para provar o item (a), basta mostrar que $\|\pi_g^u(x-y)\|$ é uniformemente limitado quando x e y estão na mesma folha centro estável.

Suponha por contradição, que existam x e y na mesma folha centro estável, tais que $\|\pi_g^u(x-y)\|$ seja ilimitado, ou seja, para todo $M > 0$, tem-se que

$$\|\pi_g^u(x-y)\| > M. \tag{4.8}$$

Como g é parcialmente hiperbólico, existe $C_{ph} > 1$, tal que

$$\|g^k(v)\| > \frac{\mu^k}{C_{ph}}\|v\|, \quad \text{para todo } v \in E_g^u.$$

Fixe um número $\beta \in (\gamma_1, \mu)$ e escolha um número inteiro $k > 0$ suficientemente grande, tal que

$$\frac{\mu^k}{C_{ph}\beta^k} > 1.$$

Usando a equação (4.8) e $C = \dfrac{\mu^k}{C_{ph}\beta^k}$, estamos nas hipóteses do Corolário 4.5, assim

$$\frac{C\beta^k}{\mu^k} < \frac{\|\pi_g^u(f^k(x) - f^k(y))\|}{\|\pi_g^u(g^k(x) - g^k(y))\|} < \frac{\mu^k}{C\beta^k}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \|\pi_g^u(f^k(x) - f^k(y))\| &> \frac{C\beta^k}{\mu^k}\|\pi_g^u(g^k(x) - g^k(y))\| \\ &= \frac{C\beta^k}{\mu^k}\|g^k(\pi_g^u(x-y))\| \quad \text{(Afirmação do Corolário 4.5)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&> \frac{C\beta^k}{\mu^k}\frac{\mu^k}{C}\|\pi_g^u(x-y)\| \\
&= \beta^k\|\pi_g^u(x-y)\| \\
&\overset{(4.8)}{>} \beta^k M \ .
\end{aligned}
$$

Com isso,

$$\|\pi_g^u(f^k(x)-f^k(y))\| > \beta^k M \ . \tag{4.9}$$

Afirmação: Para $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, vale que $\|\pi_g^u(f^{nk}(x)-f^{nk}(y))\| > \beta^{nk}M$.
Mostraremos a afirmação por indução. De fato, observe que:

(i) Para $n=1$, segue de (4.9).

(ii) Suponha que para $n=p$, tenhamos

$$\|\pi_g^u(f^{pk}(x)-f^{pk}(y))\| > \beta^{pk}M.$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
\|\pi_g^u(f^{(p+1)k}(x)-f^{(p+1)k}(y))\| &= \|\pi_g^u(f^{pk}(f^k(x))-f^{pk}(f^k(y)))\| \\
&\overset{(ii)}{>} \beta^{pk}\|\pi_g^u(f^k(x)-f^k(y))\| \\
&\overset{(i)}{>} \beta^{pk}\beta^k M \\
&= \beta^{(p+1)k}M.
\end{aligned}
$$

Como $f^{nk}(x)-f^{nk}(y)$ contém componente na direção instável e a ação de Df na instável domina para n suficientemente grande. Dessa forma, existe $L>0$ tal que

$$\|f^{nk}(x)-f^{nk}(y)\| > L\|\pi_g^u(f^{nk}(x)-f^{nk}(y))\| \ , \text{ para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Assim,

$$\|f^{nk}(x)-f^{nk}(y)\| > LM\beta^{nk}.$$

Em particular, se $\|\pi_g^u(x-y)\| > M$, então $\|f^{nk}(x)-f^{nk}(y)\|$ cresce a uma taxa mais rápida que γ_1^{nk} quando $k \longrightarrow \infty$, o que é um absurdo, pois x e y estão na mesma folha centro estável de f.

(b) A demonstração é análoga, pois a folha centro instável de f é a centro estável de f^{-1}.

(c) Observe que,

$$W_f^c(x) \subset (W_f^{cu}(x) \cap W_f^{cs}(x))$$

e

$$W_g^c(x) \subset (W_g^{cu}(x) \cap W_g^{cs}(x)).$$

Com isso, o resultado segue de (a) e (b). □

Infelizmente, a demonstração da proposição anterior não se aplica às folhas estável e instável de f, pois precisamos da condição $\beta > 1$. Esta é uma rara ocasião em que, de fato, sabemos mais sobre a folha central do que sobre as folhas instável e estável.

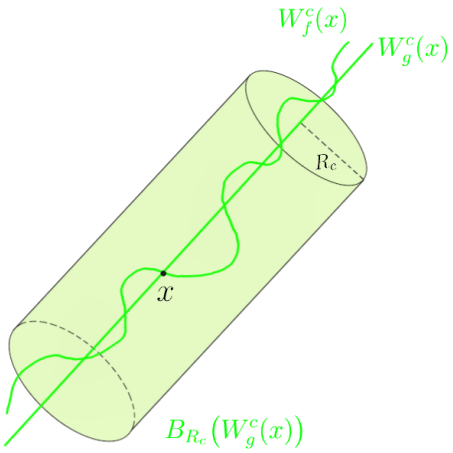

Figura 4.4: Representação do item **(c)** da Proposição 4.11

Corolário 4.12. *[10] Se* $\|x-y\| \longrightarrow \infty$ *e* $y \in W_f^c(x)$, *então* $\dfrac{x-y}{\|x-y\|} \longrightarrow E_g^c$ *uniformemente.*

Mais precisamente, para todo $\varepsilon > 0$, *existe* $M > 0$, *tal que se* $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in W_f^c(x)$ *e* $\|x-y\| > M$, *então*

$$\|\pi_g^{us}(x-y)\| < \varepsilon \|\pi_g^c(x-y)\|.$$

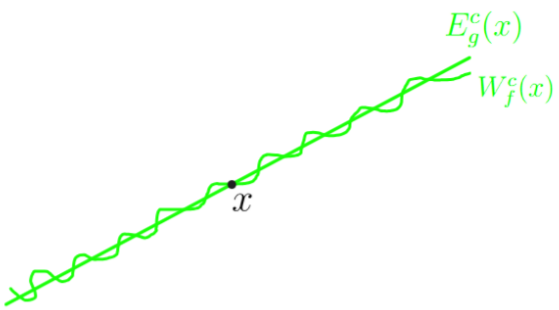

Figura 4.5: Comportamento das folhas centrais em larga escala

Demonstração. Como $y \in W^c_f(x)$ e, pela Proposição 4.8, existe R_c tal que

$$W^c_f(x) \subset B_{R_c}\big(W^c_g(x)\big),$$

temos que, $\|\pi^{us}_g(x-y)\| < 2R_c$. Isto é, na direção instável estável, os pontos da folha central de f estão a uma distância uniformemente limitada entre si. Portanto, basta tomar M suficientemente grande. □

Com os resultados anteriores, podemos analisar as folhas de f em três diferentes escalas. No nível microscópico, elas são tangentes à distribuição parcialmente hiperbólica de f. Em escalas intermediárias, seu comportamento pode ser patológico, portanto, pouco compreendido. Já no nível macroscópico, as folhas se assemelham significativamente às da linearização g, o que permite comparações mais precisas entre as duas dinâmicas, como mostrar a Figura 4.6

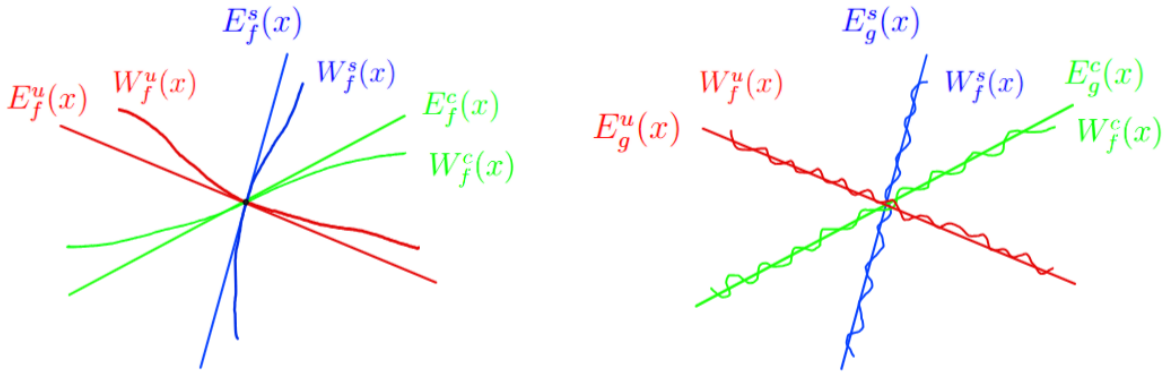

Figura 4.6: Comportamento das folhas em níveis microscópico e macroscópico.

Proposição 4.13. *[10] No recobrimento universal, $\mathbb{R}^d$, uma folha centro estável de f pode intersectar uma folha instável de f no máximo uma vez. Uma folha centro instável de f pode intersectar uma folha estável de f no máximo uma vez.*

Demonstração. Mostraremos que uma folha centro estável de f pode intersectar uma folha instável de f no máximo uma vez.

Suponha por contradição, que existe $x \neq y$ tal que $x, y \in W^{cs}_f \cap W^u_f$. Observe que, por um lado, se $x, y \in W^{cs}_f$, temos que

$$d^{cs}(f^n(x), f^n(y)) < C_{ph}\gamma_2^n d^{cs}(x, y), \ \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Além disso, como

$$\|f^n(x) - f^n(y)\| \leqslant d^{cs}(f^n(x), f^n(y)), \ \forall\ n \in \mathbb{Z},$$

então

$$\|f^n(x) - f^n(y)\| < C_{ph}\gamma_2^n d^{cs}(x, y), \ \forall\ n \in \mathbb{Z}. \tag{4.10}$$

Por outro lado, se $x, y \in W^u_f$, temos que

$$\frac{1}{C_{ph}}\mu^n d^u(x, y) < d^u(f^n(x), f^n(y)), \ \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Como W^u_f é quase isométrica, segue que para todo $n \in \mathbb{Z}$, vale que

$$d^u(f^n(x), f^n(y)) < Q\|f^n(x) - f^n(y)\|$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{Q} d^u(f^n(x), f^n(y)) < \|f^n(x) - f^n(y)\|.$$

Disto, obtemos

$$\frac{1}{C_{ph}Q}\mu^n d^u(x,y) < \|f^n(x) - f^n(y)\|, \ \forall\ n \in \mathbb{Z}. \tag{4.11}$$

Segue das equações (4.10) e (4.11) que

$$\frac{1}{C_{ph}Q}\mu^n d_u(x,y) < C_{ph}\gamma_2^n d_{cs}(x,y)\ .$$

Mas isso é um absurdo, pois como $1 < \gamma < \mu$, existe n suficientemente grande tal que,

$$\frac{1}{C_{ph}Q}\mu^n d_u(x,y) > C_{ph}\gamma_2^n d_{cs}(x,y)\ . \tag{4.12}$$

Trocando-se f por f^{-1}, mostra-se de modo análogo que uma folha centro instável de f pode intersectar uma folha estável de f no máximo um ponto. □

Pela Observação 3.14, podemos definir uma folheação instável estável, W_g^{us}, tangente a $E_g^s \oplus E_g^u$. No entanto, para f não faz sentido falar de folheação instável estável. Em vez disso, definimos o conjunto chamado **pseudofolha -us** de f em x como

$$W_f^{us}(x) = \bigcup_{y \in W_f^u(x)} W_f^s(y).$$

Em outras palavras, a pseudofolha-us de f em x consiste de todos os pontos $z \in \mathbb{R}^d$ tais que $z \in W_f^s(y)$ para algum $y \in W_f^u(x)$.

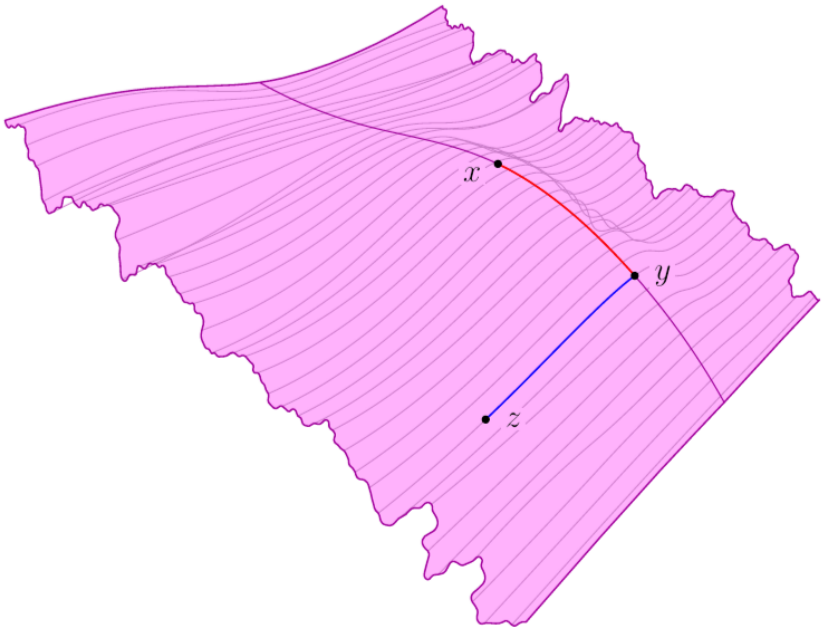

Figura 4.7: Representação de uma pseudofolha-us de f em x. Fonte: [10]

Observação 4.14.

(a) *Se x_1 e x_2 estiverem na mesma folha instável, então $W_f^{us}(x_1) = W_f^{us}(x_2)$.*

(b) *Se x_1 e x_2 não estiverem na mesma folha instável, então $W_f^{us}(x_1)$ e $W_f^{us}(x_2)$ podem ser iguais, disjuntas ou se intersectam de maneira patológica.*

Proposição 4.15. *[10] $W_f^{us}(x)$ é um hiperplano topológico propriamente mergulhado*

Demonstração. Dividiremos a prova em duas partes.
Parte 1: $W_f^{us}(x)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^{u+s}$, onde $\dim E_f^u = u$ e $\dim E_f^s = s$.
Como $W_f^u(x)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^u$, ou seja, existe um homeomorfismo,

$$\varphi^u : \mathbb{R}^u \longrightarrow W_f^u(x)$$
$$\xi \longmapsto \varphi^u(\xi) = y_\xi.$$

Analogamente, para cada $\xi \in \mathbb{R}^u$, temos que $W_f^s(y_\xi)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^s$, isto é, existe uma família contínua de homeomorfismos,

$$\varphi_{y_\xi}^s : \mathbb{R}^s \longrightarrow W_f^s(y_\xi).$$

Seja $\varphi : \mathbb{R}^{u+s} = \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s \longrightarrow W_f^{us}(x)$ definida por $\varphi(\xi, \eta) = \varphi_\xi^s(\eta)$. Assim, φ está bem definida, pois para cada $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$, tem-se que $\varphi(\xi, \eta) = \varphi_\xi^s(\eta) \in W_f^s(y_\xi)$, onde $y_\xi \in W_f^u(x)$. Portanto, pela definição de pseudofolha-us, $\varphi(\xi, \eta) \in W_f^{us}$.

Além disso, sabemos que, se $y_1, y_2 \in W_f^u(x)$ e $y_1 \neq y_2$, então $W_f^s(y_1) \cap W_f^s(y_2) = \varnothing$. Disto temos que, se $W_f^s(y_1) \cap W_f^s(y_2) \neq \varnothing$, segue que $y_1 = y_2$. Agora, usando que φ^u e $\varphi_{y_\xi}^s$ são homeomorfismos e o Teorema da Invariância do Domínio, podemos mostrar que $\varphi : \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s \longrightarrow W_f^{us}(x)$ é um homeomorfismo.

Parte 2: A imersão $W_f^{us}(x) \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ é própria, ou seja, se uma sequência diverge em $W_f^{us}(x)$, então ela também diverge em $\mathbb{R}^d$.

De fato, suponha por contradição que existe uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $W_f^{us}(x)$ tal que $z_n \longrightarrow \infty$ na pseudofolha, mas $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}^d$. Mais precisamente, existe $y_n \in W_f^u(x)$ com $z_n \in W_f^s(y_n)$, tal que

(i) $d^u(y_n, x) \longrightarrow \infty$ ou $d^s(y_n, z_n) \longrightarrow \infty$; e

(ii) $\|x - z_n\| < \infty$.

Por (i), Corolário 4.7 e Corolário 4.9, obtemos

$$\|y_n - x\| \longrightarrow \infty \quad \text{ou} \quad \|y_n - z_n\| \longrightarrow \infty \ . \tag{4.13}$$

Pela desigualdade triangular inversa, temos

$$|\|x - y_n\| - \|y_n - z_n\|| \ \leqslant \|x - z_n\|. \tag{4.14}$$

Assim, pelas expressões (4.13), (4.14) e (ii), obtemos

$$\|y_n - x\| \longrightarrow \infty \quad \text{e} \quad \|y_n - z_n\| \longrightarrow \infty \ .$$

Considere as sequências

$$\frac{y_n - x}{\|y_n - x\|} \quad \text{e} \quad \frac{y_n - z_n}{\|y_n - z_n\|}.$$

Essas sequências têm norma um, portanto pertencem ao compacto $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$. Logo, existem subsequências (y_n) e (z_n), que denotamos da mesma forma, tais que

$$\frac{y_n - x}{\|y_n - x\|} \quad \text{e} \quad \frac{y_n - z_n}{\|y_n - z_n\|} \tag{4.15}$$

convergem para vetores em S^{d-1}.

Afirmação: As subsequências de (4.15) convergem para o mesmo limite $v \in S^{d-1}$.

De fato, dividindo (4.14) por $\|x - y_n\|$, obtemos

$$0 \leq \left| 1 - \frac{\|y_n - z_n\|}{\|x - y_n\|} \right| \leqslant \frac{\|x - z_n\|}{\|x - y_n\|}.$$

Uma vez que $\|x - y_n\| \longrightarrow \infty$ e $\|x - z_n\|$ é limitado, temos

$$0 \leq \left| 1 - \frac{\|y_n - z_n\|}{\|x - y_n\|} \right| \leqslant 0.$$

Pelo teorema do confronto, segue que

$$\frac{\|y_n - z_n\|}{\|x - y_n\|} \longrightarrow 1 \quad \text{quando} \quad \|x - y_n\| \longrightarrow \infty.$$

Além disso,

$$\frac{y_n - x}{\|y_n - x\|} = \frac{y_n - z_n}{\|y_n - x\|} + \frac{z_n - x}{\|y_n - x\|} = \frac{y_n - z_n}{\|y_n - z_n\|} \frac{\|y_n - z_n\|}{\|x - y_n\|} + \frac{z_n - x}{\|y_n - x\|}.$$

Disso, segue a afirmação.

Pelas Proposições 4.8 e 4.6, temos

$$\frac{y_n - x}{\|y_n - x\|} \longrightarrow v \in E_g^u \quad \text{e} \quad \frac{y_n - z_n}{\|y_n - x\|} \longrightarrow v \in E_g^s.$$

Além disso, pela afirmação, $v \in E_g^u \cap E_g^s$. No entanto, isso é um absurdo, pois $v \neq 0$, uma vez que $v \in S^{d-1}$. □

Observação 4.16. *Em geral, $W_f^{us}(x)$ não é diferenciável em todos os seus pontos, mas o espaço tangente de $W_f^{us}(x)$ no ponto x é $E_f^u(x) \oplus E_f^s(x)$. Esse fato é intuitivo, mas uma demonstração rigorosa é tecnicamente complicada. Uma prova formal pode ser encontrada em [10].*

Proposição 4.17. *[10] Se $\|x - z\| \longrightarrow \infty$ e $z \in W_f^{us}(x)$, então*

$$\frac{x - z}{\|x - z\|}$$

Acumulam-se uniformemente em $E_g^u \oplus E_g^s$.

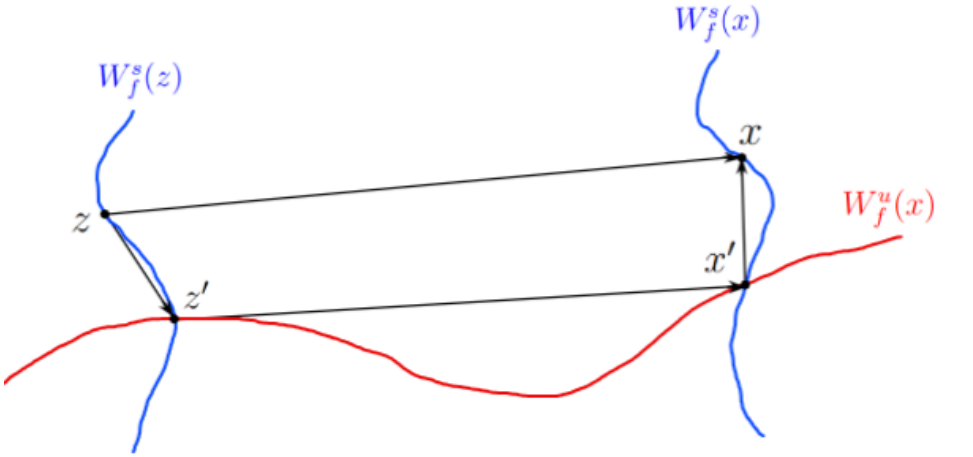

Figura 4.8

Demonstração. Sejam $x, z \in W^{us}_f(x)$, x' e z' como na Figura 4.8. Veja que:

- $x - y = (x - x') + (x' - z') + (z' - z)$;
- $x - x' = (v^s_g + r^s_1)\|x - x'\|$;
- $x' - z' = (v^u_g + r^u_2\|x - z'\|$;
- $z' - z = (-v^s_g + r^s_2)\|z - z'\|$,

onde cada um dos termos r^s_1, r^s_2, r^u_1 ou converge uniformemente para o vetor nulo (conforme estabelecido nas Proposições 4.6 e 4.8), ou são limitados.

Se

$$\frac{x - z}{\|x - z\|} \longrightarrow v,$$

então

$$\frac{x - z}{\|x - z\|} = (v^s_g + r^s_1)\frac{\|x - x'\|}{\|x - z\|} + (v^u_g + r^u_2)\frac{\|x - z'\|}{\|x - z\|} + (-v^s_g + r^s_2)\frac{\|z - z'\|}{\|x - z\|}. \tag{4.16}$$

Como estamos assumindo

$$\frac{x - z}{\|x - z\|} \longrightarrow v,$$

segue da expressão (4.16), Proposições 4.6 e 4.8 e as propriedades de r^s_1, r^s_2, r^u_1 que a soma das 1ª e 3ª parcelas de (4.16) acumula-se uniformemente em E^s_g, enquanto que a 2ª parcela de (4.16) acumula-se uniformemente em E^u_g, segue o resultado. □

Proposição 4.18. *[10] Uma folha central de f intersecta uma pseudofolha-us de f em no máximo um ponto.*

Demonstração. Suponha por contradição, que existam $z_1, z_2 \in W_f^{us}(x)$ tais que

$$z_2 \in W_f^c(z_1).$$

Como $z_1, z_2 \in W_f^{us}(x)$, então existem $y_1, y_2 \in W_f^u(x)$ tais que $z_1 \in W_f^s(y_1)$ e $z_2 \in W_f^s(y_2)$.

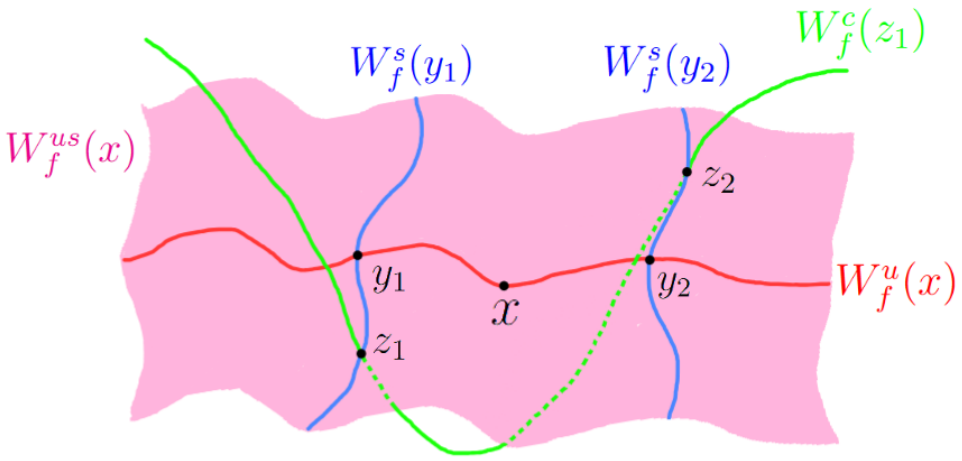

Figura 4.9: Representação para a demonstração da Proposição 4.18.

Assim, $y_1, y_2 \in W_f^u(x)$ e $y_1, y_2 \in W_f^{cs}(z_1)$, o que contradiz a Proposição 4.13. □

Proposição 4.19. *[10] Para cada $x \in \mathbb{R}^d$, $W_f^c(x)$ é uma linha propriamente mergulhada.*

Demonstração. Fixado $x \in \mathbb{R}^d$, pela Proposição 4.15, $W_f^{us}(x)$ é um hiperplano propriamente mergulhado e, portanto, divide o $\mathbb{R}^d$ em dois semiespaços. Como $W_f^c(x)$ é transversal a $E_f^u(x) \oplus E_f^s(x)$, segue que $W_f^c(x)$ intersecta $W_f^{us}(x)$ transversalmente no ponto em x, movendo-se de um semiespaço para outro. Suponha, por contradição, que $W_f^c(x)$ não seja uma linha. Nesse caso, $W_f^c(x)$ seria homeomorfo a um círculo e, portanto, teria que intersectar $W_f^{us}(x)$ uma segunda vez, o que contradiz a Proposição 4.18. Logo, $W_f^c(x)$ é uma linha.

Agora, suponha que $W_f^c(x)$ não seja propriamente mergulhada. Então, existiria um ponto

$y \in \mathbb{R}^d$ tal que $W_f^c(x)$ se acumularia em y. Assim, $W_f^c(x)$ intersecta $W_f^{us}(y)$ em mais de um ponto, o que novamente contradiz a Proposição 4.18. Para ver isso rigorosamente, sejam U e V as duas componentes de $\mathbb{R}^d \setminus W_f^{us}(y)$, e seja

$$\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

um pequeno segmento da curva $W_f^c(y)$ centrado em y tal que $\gamma(-\epsilon) \in U$ e $\gamma(\epsilon) \in V$. Então, como $W_f^c(x)$ se acumula em $W_f^c(y)$, existem segmentos distintos γ_n da curva $W_f^c(x)$ que convergem uniformemente para γ. Portanto, para n suficientemente grande, $\gamma_n(-\epsilon) \in U$ e $\gamma_n(\epsilon) \in V$, o que implica que γ_n intersecta $W_f^{us}(y)$ em pelo menos um ponto.
Como existem infinitos $\gamma_n \subset W_f^c(x)$ com essa propriedade, concluímos que a folha $W_f^c(x)$ intersecta $W_f^{us}(y)$ em infinitos pontos distintos. □

Teorema 4.20. *[10]* $\dim(E_f^u) = \dim(E_g^u)$, $\dim(E_f^c) = \dim(E_g^c)$ *e* $\dim(E_f^s) = \dim(E_g^s)$.

Demonstração. Para demonstrar o teorema, precisamos mostrar as seguintes desigualdades:

$$\text{(I)}\ \dim(E_f^u) \leqslant \dim(E_g^u); \qquad \text{(III)}\ \dim(E_f^c) \leqslant \dim(E_g^c); \quad \text{(V)}\ \dim(E_f^s) \leqslant \dim(E_g^s);$$

$$\text{(II)}\ \dim(E_f^u) \geqslant \dim(E_g^u); \qquad \text{(IV)}\ \dim(E_f^c) \geqslant \dim(E_g^c); \quad \text{(VI)}\ \dim(E_f^s) \geqslant \dim(E_g^s).$$

Primeiramente, observe que como f e g são difeomorfismos parcialmente hiperbólicos em $\mathbb{R}^d$, então

$$\dim(E_f^u) + \dim(E_f^c) + \dim(E_f^s) = d = \dim(E_g^u) + \dim(E_g^c) + \dim(E_g^s), \tag{4.17}$$

onde $d = \dim(\mathbb{R}^d)$.
Passo 1: Mostraremos a desigualdade (III).
Seja $x \in \mathbb{R}^d$ e considere a folha central $W_f^c(x)$. Pela Proposição 4.19, $W_f^c(x)$ é uma linha propriamente mergulhada. Logo, existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $W_f^c(x)$ tal que

$$\|x - y_n\| \longrightarrow \infty \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Pelo Corolário 4.12, temos que

$$\frac{x - y_n}{\|x - y_n\|} \longrightarrow E_g^c.$$

Portanto, $\dim(E^c_g) \geq 1 = \dim(E^c_f)$.

Passo 2: Mostraremos a desigualdade (I).

Seja $u = \dim(E^u_f)$, suponha por absurdo, $\dim(E^u_g) < u$. Fixe $p \in \mathbb{R}^d$ e mergulhe uma esfera $(u-1)$- dimensional, S^{u-1}, na folha $W^u_f(p)$ por uma aplicação $i : S^{u-1} \longrightarrow W^u_f(p)$.

Afirmação: Pontos antipodais, isto é, diametralmente opostos, $x, -x \in S^{u-1}$ são separados por uma distância uniforme, ou seja, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$d^u(i(x), i(-x)) > \epsilon \ \ \forall\ x \in S^{u-1}. \tag{4.18}$$

De fato, suponha por contradição que existam pares antipodais $x_n, -x_n \in S^{u-1}$ tais que

$$d^u(i(x_n), i(-x_n)) \leqslant \epsilon\ , \quad \forall\ n > 0.$$

Como x_n pertence ao compacto S^{u-1}, existe uma subsequência x_{n_k} em S^{u-1} tal que

$$x_{n_k} \longrightarrow x \in S^{u-1}.$$

Note que, por um lado, temos

$$d^u(i(x_{n_k}), i(-x_{n_k})) \longrightarrow 0.$$

Por outro lado,

$$d^u(i(x_{n_k}), i(-x_{n_k})) \longrightarrow d_u(i(x), i(-x)).$$

Pela unicidade do limite, $d^u(i(x), i(-x)) = 0$, logo $i(x) = i(-x)$, o que contradiz a injetividade de i. Com isso, a afirmação está demonstrada.

Considere a função $\pi^u_g \circ f^n \circ i : S^{u-1} \longrightarrow E^u_g$ com $n > 0$. Como $\dim(E^u_g) < u$, segue que $\dim(E^u_g) \leqslant u-1$. Assim, E^u_g é homeomorfo a um subconjunto de $\mathbb{R}^{u-1}$. Pelo Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 2.18), existe $x_n \in S^{u-1}$ tal que

$$\pi^u_g(f^n(i(x_n))) = \pi^u_g(f^n(i(-x_n))).$$

Logo,

$$\pi^u_g(f^n(i(x_n))) - \pi^u_g(f^n(i(-x_n))) = 0 \Longrightarrow \pi^u_g(f^n(i(x_n)) - f^n(i(-x_n))) = 0.$$

Portanto, $f^n(i(x_n)) - f^n(i(-x_n)) \in E_g^{cs}$. Para facilitar o entendimento, denotaremos $y_n = f^n(i(x_n))$ e $z_n = f^n(i(-x_n))$.

Como $i(x_n), i(-x_n) \in W_f^u(p)$ e as folhas de são f-invariantes, então $y_n, z_n \in W_f^u(p)$. Isso implica que $z_n \in W_f^u(y_n)$. Pelo Lema 3.16, temos

$$d^u(y_n, z_n) > \frac{1}{C_{ph}}\mu^n d^u(i(x_n), i(-x_n))$$
$$\overset{(4.18)}{\Longrightarrow} d^u(y_n, z_n) > \frac{1}{C_{ph}}\mu^n \epsilon.$$

Como $\mu > 1$, então

$$d^u(y_n, z_n) \longrightarrow \infty \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Pelo Corolário 4.9 e a Proposição 4.8, segue que

$$\frac{y_n - z_n}{\|y_n - z_n\|} \longrightarrow E_g^u.$$

No entanto, isto contradiz o fato de que $y_n - z_n = f^n(i(x_n)) - f^n(i(-x_n)) \in E_g^{cs}$ para todo $n > 0$. Portanto, a desigualdade (III) está provada.

A demonstração da desigualdade (V) segue de forma análoga ao Passo 2, tomando f^{-1}.

Passo 3: Pelos itens (I), (III) e (V), temos

$$d = \dim E_f^u = \dim E_f^c + \dim E_f^s \leqslant \dim E_g^u + \dim E_g^c + \dim E_g^s = d.$$

Se em (I), (III) ou (V) alguma desigualdade fosse estrita (suponha sem perda de generalidade o item (I)) teríamos:

$$d = \dim E_f^u = \dim E_f^c + \dim E_f^s < \dim E_g^u + \dim E_g^c + \dim E_g^s = d.$$
$$\Longrightarrow d < d \quad \text{absurdo.}$$

Com isso, a demonstração do teorema está completa. □

Lema 4.21. *[10] Existe uma constante $M_c > 0$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$B_{R_c}\left(W_g^c(x)\right) \cap W_f^{us}(x) \subset B_{M_c}(x),$$

onde R_c é a constante da Proposição 4.11.

Demonstração. Suponha por contradição, que existe $x_n \in \mathbb{R}^d$ e

$$z_n \in B_{R_c}\left(W_g^c(x_n)\right) \cap W_f^{us}(x_n),$$

tal que $\|x_n - z_n\| \longrightarrow \infty$. Por um lado, como $z_n \in W_f^{us}(x_n)$, pela Proposição 4.17, temos

$$\frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|} \longrightarrow E_g^u \oplus E_g^s.$$

Por outro lado, como $z_n \in W_g^c(x_n)$, pelo Corolário 4.12, obtemos

$$\frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|} \longrightarrow E_g^c,$$

o que claramente é uma contradição. □

Observação 4.22.

(i) *O Lema 4.21 implica que*

$$B_{R_c}\big(W_f^c(x)\big) \setminus B_{Mc}(x) \subset B_{R_c}\big(W_g^c(x)\big) \setminus W_f^{us}(x).$$

De fato, seja $y \in B_{R_c}\big(W_f^c(x)\big) \setminus B_{Mc}(x)$ então $y \in B_{R_c}\big(W_f^c(x)\big)$ e $y \notin B_{Mc}(x)$. Logo, pelo Lema 4.21 $y \notin W_f^{us}(x)$.

(ii) *Em essência, o Lema 4.21 diz que a pseudofolha $W_f^{us}(x)$ divide o cilindro $B_{R_c}(W_f^c(x))$ em duas partes, e o faz a uma distância limitada de x.*

(iii) *Para M_c suficientemente grande, vale que*

$$\pi_g^c\big(B_{R_c}\big(W_f^c(x)\big) \cap W_f^{us}(x)\big) \subset B_{M_c}(\pi_g^c(x)). \tag{4.19}$$

Sabemos pela Proposição 4.19 que cada folha central de f é homeomorfa à reta real. Para x e y na mesma folha central, denotaremos $[x, y]^c$ o segmento de linha ao longo da folha central de x até y.

Proposição 4.23. *[10] Se $y \in W_f^c(x)$ e $z \in [x, y]^c$, então*

$$\pi_g^c(z) \in B_{M_c}([\pi_g^c(x), \pi_g^c(y)]),$$

em que $[\pi_g^c(x), \pi_g^c(y)]$ é o segmento de linha em $E_g^c \cong \mathbb{R}$ entre $\pi_g^c(x)$ e $\pi_g^c(y)$.

Demonstração. Dado $z \in [x,y]^c$, pela continuidade de π_g^c, existe δ_z tal que se

$$a \in (z-\delta_z, z+\delta_z) \Longrightarrow \pi_g^c(a) \in B_{M_c^z}([\pi_g^c(x), \pi_g^c(y)].$$

Denote $U_z = (z-\delta_z, z+\delta_z)$ e $V_z = B_{M_c^z}([\pi_g^c(x), \pi_g^c(y)]$. Como a coleção

$$\bigcup_{z\in[x,y]^c} U_z,$$

forma uma cobertura para $[x,y]^c$ e este conjunto é compacto, existe uma subcobertura finita $\{U_{z_1}, U_{z_2}, ... \ U_{z_n}\}$. Assim, para todo $z \in [x,y]^c$, existe $i \in \{1,2,...,n\}$ tal que $\pi_g^c(z) \in V_{z_i}$. Defina $M_c = \max\{M_c^{z_i}, \ i = 1,2,...,n\}$. Portanto,

$$\pi_g^c(z) \in B_{M_c}([\pi_g^c(x), \pi_g^c(y)]).$$

□

Em outras palavras, a proposição anterior garante que um segmento da folha central $W_f^c(x)$ pode retornar no máximo uma distância M_c na direção E_g^c, veja na Figura 4.10.

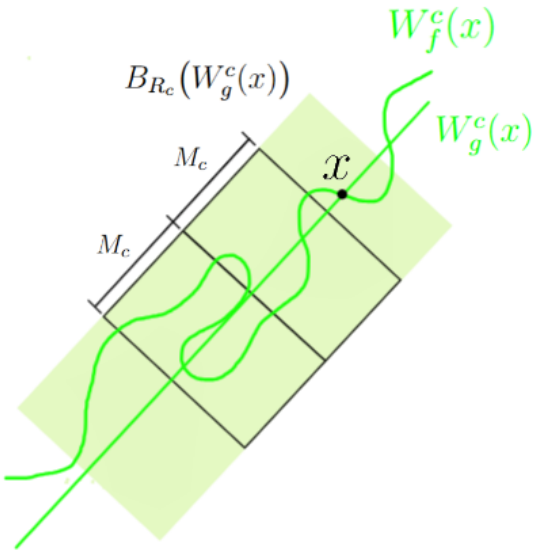

Figura 4.10: Ilustração do fato de que a folha central de f pode retornar até, no máximo, a distância M_c.

Proposição 4.24. *[10] Se $x, y \in \mathbb{R}^d$, então os seguintes pares de conjuntos se intersectam em um único ponto:*

(a) $W_f^{cs}(x)$ *com* $W_f^u(y)$*;*

(b) $W_f^{cu}(x)$ *com* $W_f^s(y)$*;*

(c) $W_f^c(x)$ *com* $W_f^u(y)$ *se* $x \in W_f^{cu}(y)$*;*

(d) $W_f^c(x)$ *com* $W_f^s(y)$ *se* $x \in W_f^{cs}(y)$*;*

(e) $W_f^c(x)$ *com a pseudofolha* $W_f^{us}(y)$*.*

Demonstração.

(a) Vamos mostrar apenas a existência, pois a unicidade decorre da Proposição 4.13. Sabemos, pela decomposição parcialmente hiperbólica, continuidade das folhas e a propriedade de quase isometria, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $x, y \in \mathbb{R}^d$ e $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$, então existe

$$z \in W_f^{cs}(x) \cap W_f^u(y),$$

ou seja, a interseção local é garantida.

Seja,

$$B^0(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(y, W_f^{cs}(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\} \tag{4.20}$$

onde $dist(y, W_f^{cs}(x)) = \inf\{\|y - p\| : p \in W_f^{cs}(x)\}$. Note que, se $z \in B^0(x)$, então

$$\|y - z\| \leqslant \|y - p\| + \|p - z\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Assim, $z \in W_f^{cs}(x) \cap W_f^u(y)$. Seja $B^n(x) = f^n(B^0(f^{-n}(x)))$ para $n > 0$.

Afirmação 1: Se $y \in B^n(x)$, então existe um único $z \in W_f^{cs}(x) \cap W_f^u(y)$.

De fato, se $y \in B^n(x)$, então $f^{-n}(y) \in B^0(f^{-n}(x))$. Portanto, existe

$$q \in W_f^{cs}(f^{-n}(x)) \cap W_f^u(f^{-n}(y)).$$

Como as folhas são invariantes sob f, obtemos que

$$f^n(q) \in W_f^{cs}(x) \cap W_f^u(y).$$

Tome $z = f^n(q)$. Assim, $z \in W_f^{cs}(x) \cap W_f^u(y)$, e z é único, pois f é um difeomorfismo.

Logo, para demonstrar o teorema, basta mostrar que, para qualquer $y \in \mathbb{R}^d$, existe $n > 0$

tal que $y \in B^n(x)$.

Afirmação 2: Para todo $T > 0$, existe $n > 0$ tal que

$$\text{dist}(\partial B^n(x), W_f^{cs}(x)) > T.$$

De fato, seja $n > 0$ e $y \in \mathbb{R}^d$. Como f é um difeomorfismo, então

$$\partial B^n(x) = f^n(\partial B^0(f^{-n}(x))).$$

Além disso, como $B^0(f^{-n}(x))$ é fechado e f^n é contínua, então $B^n(x)$ é fechado. Com isso, $\partial B^n(x) \subset B^n(x)$. Seja $y \in \partial B^n(x)$, pela Afirmação 1, existe um único

$$z \in W_f^{cs}((x)) \cap W_f^u(y)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} f^{-n}(y) \in \partial B^0(f^{-n}(x)) \text{ e } f^{-n}(z) \in W_f^{cs}(f^{-n}(x)) \cap W_f^u(f^{-n}(y)) \\ \implies \text{dist}(f^{-n}(y), W_f^{cs}(f^{-n}(x))) = \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies \|f^{-n}(y) - f^{-n}(z)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies d^u(f^{-n}(y), f^{-n}(z)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies d^u(y, z) \geqslant \frac{\mu^n}{2C_{ph}}\varepsilon \\ \implies \|y - z\| \geqslant \frac{\mu^n}{2QC_{ph}}\varepsilon, \end{aligned}$$

onde Q é a constante de quase isometria e C_{ph} é a constante de parcialmente hiperbólico. Pela Proposição 4.8,

$$\begin{aligned} \|\pi_g^u(y - z)\| &> \frac{1}{\epsilon}\|\pi_g^{cs}(y - z)\| \\ &\geqslant \frac{1}{\epsilon}\|y - z\| \\ &\geqslant \frac{1}{QC_{ph}}\mu^n. \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.11, $W_f^{cs}(x)$ está contida no cilindro $B_{R_c}(W_g^{cs}(x))$, logo π_g^u é limitada na folha $W_f^{cs}(x)$. Assim, temos

$$\text{dist}(y, W_f^{cs}(x)) \geqslant C\mu^n - R$$

para alguma constante $R > 0$. Como $y \in \partial B^n$ é arbitrário, então

$$\text{dist}(\partial B^n(x), W_f^{cs}(x)) \geqslant C\mu^n - R.$$

Como $\mu > 1$, então para $n \longrightarrow \infty$,

$$\text{dist}(\partial B^n(x), W_f^{cs}(x)) \longrightarrow \infty.$$

Portanto, para qualquer $T > 0$, existe $n > 0$ tal que

$$\text{dist}(\partial B^n(x), W_f^{cs}(x)) > T.$$

Das Afirmações 1 e 2 segue o item **(a)**.

(b) É análoga ao item **(a)** tomando a inversa de f.

(c) Observe que, se $x \in W_f^{cu}(y)$, então $W_f^u(x) \subset W_f^{cu}(y)$. Além disso,

$$W_f^c(x) = W_f^{cs}(x) \cap W_f^{cu}(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} W_f^c(x) \cap W_f^u(y) &= (W_f^{cs}(x) \cap W_f^{cu}(x)) \cap W_f^u(y) \\ &= W_f^{cs}(x) \cap (W_f^{cu}(x) \cap W_f^u(y)) \\ &= W_f^{cu}(x) \cap W^u(y), \end{aligned}$$

e o resultado segue de **(a)**.

(d) É análoga ao item **(c)** utilizando o resultado do item **(b)**.

(e) A unicidade foi mostrada na Proposição 4.18. Mostraremos apenas a existência. Seja $x, y \in \mathbb{R}^d$, então:

(i) Por (a) existe um único $p \in W_f^{cu}(x) \cap W_f^s(y)$;

(i) Por (b) existe um único $q \in W_f^c(x) \cap W_f^u(p)$;

(iii) Como $p \in W_f^s(y)$, então $W_f^u(p) \subset W_f^{us}(y)$.

Logo, $q \in W_f^c(x) \cap W_f^{us}(y)$. □

Proposição 4.25. *[10] A folheação W_f^c é quase isométrica.*

Demonstração. Fixe $v \in E_g^c$ tal que $\|v\| > 3M_c$, isto é possível pelo Lema 4.21. Considere a função,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto \varphi(x) \in W_f^c(x) \cap W_f^{us}(x+v). \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.24, esta função está bem definida. Além disso, φ é contínua, pois $W_f^c(x)$ depende continuamente do ponto x.

Note que,

$$\varphi(x) \in W_f^c(x) \overset{Prop 4.11}{\subset} B_{R_c}(W_g^c(x)) \subset B_{R_c}(W_g^c(x+v)).$$

A última continência segue do fato das folhas de g serem lineares e $v \in E_g^c$. Assim,

$$\varphi(x) \in B_{R_c}\big(W_g^c(x+v)\big) \cap W_f^{us}(x+v).$$

Agora, pelo Lema 4.21 e o item **(iii)** da Observação 4.22, existe M_c tal que

$$\begin{aligned} \pi_g^c(\varphi(x)) \in B_{M_c}(\pi_g^c(x+v)) &\Longrightarrow \|\pi_g^c(\varphi(x)) - \pi_g^c(x+v)\| < M_c \\ &\Longrightarrow \|\pi_g^c(\varphi(x) - (x+v))\| < M_c \\ &\Longrightarrow \|\pi_g^c((\varphi(x) - x) + v)\| < M_c \\ &\Longrightarrow \|v\| - \|\pi_g^c(\varphi(x) - x)\| < M_c \\ &\Longrightarrow \|\pi_g^c(\varphi(x) - x)\| > \|v\| - M_c. \end{aligned}$$

Como $\|v\| > 3M_c$, então

$$\|\pi_g^c(\varphi(x) - x)\| > 2M_c. \tag{4.21}$$

Seja $\rho : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\rho(x) = d^c(\varphi(x), x)$. Observe que, ρ é contínua e $\mathbb{Z}^d$-invariante. Logo, para conjuntos compactos, ρ é limitada, digamos por T.

Afirmação: Para todo y em $W_f^c(x)$, tal que $\varphi(x) \in [x, y]^c$ vale que

$$\|\pi_g^c(x - y)\| > M_c.$$

De fato, suponha por absurdo,

$$\|\pi_g^c(x - y)\| \leqslant M_c.$$

Por hipótese, $y \in W_f^c(x)$ e $\varphi(x) \in [x,y]^c$. Assim, pela Proposição 4.23, temos

$$\pi_g^c(\varphi(x)) \in B_{M_c}[\pi_g^c(x), \pi_g^c(y)].$$

Logo, existe $z \in [\pi_g^c(x), \pi_g^c(y)]$ tal que

$$\|\pi_g^c(\varphi(x) - z)\| \leqslant M_c.$$

Pela desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\pi_g^c(\varphi(x) - x)\| &\leqslant \|\pi_g^c(\varphi(x) - z)\| + \|\pi_g^c(z - x)\| \\
&\leqslant M_c + \|\pi_g^c(z - x)\| \\
&\leqslant M_c + \|\pi_g^c(y - x)\| \\
&\leqslant M_c + M_c \\
&\leqslant 2M_c.
\end{aligned}$$

No entanto, isso contradiz a desigualdade 4.21.

Por extensão, se $y \in W_f^c(x)$ e $d^c(y,x) > nT$, então $\|\pi_g^c(x-y)\| > nM_c$ para valores grandes de $d^c(x,y)$. Daí, para $Q \leq \frac{M_c}{T}$, temos

$$\|x - y\| \geqslant \|\pi_g^c(x-y)\| > nM_c \geqslant \frac{M_c}{T} d^c(x,y) \geqslant Q d^c(x,y).$$

Portanto, a folheação W_f^c é quase isométrica. □

Corolário 4.26. *[10] Sejam (x_n) e (y_n) sequências em $\mathbb{R}^d$ com $(y_n) \in W_f^c(x_n)$ para todo n, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $d^c(x_n, y_n) \longrightarrow \infty$;

(b) $\|x_n - y_n\| \longrightarrow \infty$;

(c) $\|\pi_g^c(x_n - y_n)\| \longrightarrow \infty$.

Demonstração. A demonstração é análoga ao Corolário 4.7 usando que $W_f^c(x_n)$ é quase isométrica. □

Capítulo 5

Conjugação de Folhas

5.1 Espaços de Folhas

Definimos uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^d$ por:

$$x \sim y \iff y \in W_f^{cs}(x).$$

O espaço das folhas centro estáveis de f, denotado por CS_f, é o espaço quociente definido por:

$$CS_f = \mathbb{R}^d / \sim,$$

onde cada classe de equivalência $[x]$ corresponde à folha centro estável $W_f^{cs}(x)$ que contém o ponto x. De maneira análoga, definimos CU_f o espaço das folhas centro instáveis de f e C_f o espaço das folhas centrais de f.

Seja dist_u uma métrica em CS_f dada por

$$\text{dist}_u(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \sup_{x \in \mathcal{L}_1} d^u(x, W_f^u(x) \cap \mathcal{L}_2), \tag{5.1}$$

onde $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in CS_f$ são considerados subconjuntos de $\mathbb{R}^d$.

Essa distância está bem definida, pois, pela Proposição 4.24, cada folha instável de f intersecta cada folha centro estável de f em um único ponto.

Observação 5.1.

(a) *A Proposição 4.11 garante que a distância (5.1) é finita para quaisquer duas folhas em* CS_f.

(b) dist_u *é uma métrica completa.*

De fato, observe que

(i) $\mathrm{dist}_u(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \geqslant 0$, *pois* $d^u(x, W^u_f(x) \cap \mathcal{L}_2) \geqslant 0$ *para todo* $x \in \mathcal{L}_1$.

(ii) *Note que*

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_u(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = 0 &\iff \sup_{x \in \mathcal{L}_1} d^u(x, W^u_g(x) \cap \mathcal{L}_2) = 0 \\ &\iff d^u(x, W^u_f(x) \cap \mathcal{L}_2) = 0, \text{ para todo } x \in \mathcal{L}_1. \\ &\iff \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \end{aligned}$$

(iii) *Como* d^u *é uma métrica, então para todo* $x \in \mathcal{L}_1$ *e* $z \in \mathcal{L}_2$, *temos*

$$\begin{aligned} & d^u(x, W^u_f(x) \cap \mathcal{L}_3) \leqslant d^u(x, W^u_f(x) \cap \mathcal{L}_2) + d^u(z, W^u_f(z) \cap \mathcal{L}_3). \\ \implies & \sup_{x \in \mathcal{L}_1} d^u(x, W^u_g(x) \cap \mathcal{L}_3) \leqslant \sup_{x \in \mathcal{L}_1} d^u(x, W^u_g(x) \cap \mathcal{L}_2) + \sup_{z \in \mathcal{L}_2} d^u(z, W^u_g(z) \cap \mathcal{L}_3). \\ \implies & \mathrm{dist}_u(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_3) \leqslant \mathrm{dist}_u(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) + \mathrm{dist}_u(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3). \end{aligned}$$

(iv) *Simetria: Seja* $x \in \mathcal{L}_1$ *e* $y \in W^u_f(x) \cap \mathcal{L}_2$, *onde o supremo ocorre, isto é,*

$$dist_u(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \sup_{x \in \mathcal{L}_1} d^u(x, y).$$

Além disso,

$$dist_u(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1) = \sup_{y \in \mathcal{L}_2} du(y, x).$$

Como d^u *é uma métrica e* $x, y \in W^u_f(x)$. *Então,*

$$d^u(x, y) = d^u(y, x) \implies \sup_{x \in \mathcal{L}_1} d^u(x, y) = \sup_{y \in \mathcal{L}_2} d^u(y, x) \implies \mathrm{dist}_u(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \mathrm{dist}_u(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1).$$

(v) *A métrica* dist_u *é completa.*

De fato, seja $(\mathcal{L}_n) \subset CS_f$ *uma sequência de Cauchy em* CS_f, *isto é, dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n, m \geq N$, *então*

$$\mathrm{dist}_u(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m) < \varepsilon.$$

Para cada folha $\mathcal{L}_n \in CS_f$ fixe um ponto $x_n \in \mathbb{R}^d$ ($\mathcal{L}_n = W_f^{cs}(x_n)$) tal que

$$\mathrm{dist}_u(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m) = d^u(x_n, W_f^u(x_n) \cap \mathcal{L}_m).$$

Como $(\mathcal{L}_n)$ é uma sequência de Cauchy, então para $n \geq N$, temos:

$$\mathrm{dist}_u(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_N) < \varepsilon.$$

Com isso, obtemos

$$d^u(x_n, W_f^u(x_n) \cap \mathcal{L}_N) < \varepsilon.$$

Assim, os termos da sequência (x_n) com $(x_n \in \mathcal{L}_n)$ está a uma distância controlada na direção instável, o que implica que ela está contida numa região compacta de $\mathbb{R}^d$. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência (x_{n_k}) convergente na direção instável, digamos $x_{n_k} \longrightarrow x \in \mathbb{R}^d$, isto é,

$$\|\pi_g^u(x_{n_k} - x)\| \longrightarrow 0.$$

Seja $\mathcal{L}$ a folha centro estável que contém o ponto x, isto é, $\mathcal{L} = W_f^{cs}(x)$. Pela continuidade das folhas centro estáveis, temos que as folhas $\mathcal{L}_{n_k} = W_f^{cs}(x_{n_k})$ se aproximam de $\mathcal{L}$ com respeito a métrica dist_u*, ou seja,*

$$\mathrm{dist}_u(\mathcal{L}_{n_k}, \mathcal{L}) \longrightarrow 0.$$

Com isso, a subsequência $(\mathcal{L}_{n_k})$ converge para $\mathcal{L}$. Como o sequência $(\mathcal{L}_n)$ é de Cauchy, então pela unicidade do limite, temos que $\mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{L}$.

Sabemos que qualquer função que preserve folheação induz naturalmente uma aplicação no espaço quociente. Em particular, faz sentido falar da folha $f(\mathcal{L})$ ou $\mathcal{L} + v$, $v \in \mathbb{Z}^d$, sempre que $\mathcal{L}$ pertence ao conjunto CS_f (ou CU_f ou C_f).

Proposição 5.2. *Para $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in CS_f$ e $n \in \mathbb{Z}$ vale que,*

$$\frac{1}{C_{ph}} \mu^n \, \mathrm{dist}_u(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) < \mathrm{dist}_u(f^n(\mathcal{L}_1), f^n(\mathcal{L}_2)).$$

Demonstração. De fato, seja $x \in \mathcal{L}_1$ e $y \in W^u_f(x) \cap \mathcal{L}_2$ tal que

$$\text{dist}_u(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = d^u(x, y).$$

Note que, $f^n(x) \in f^n(\mathcal{L}_1)$ e $f^n(y) \in f^n(W^u_f(x)) \cap f^n(\mathcal{L}_2)$. Pelo Lema 3.16, temos

$$d^u(f^n(x), f^n(y)) > \frac{1}{C_{ph}}\mu^n d^u(x, y).$$

Assim, obtemos

$$\text{dist}_u(f^n(\mathcal{L}_1), f^n(\mathcal{L}_2)) \geqslant d^u(f^n(\mathcal{L}_1), f^n(\mathcal{L}_2)) > \frac{1}{C_{ph}}\mu^n d^u(x, y) = \frac{1}{C_{ph}}\mu^n \,\text{dist}_u(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2).$$

□

A topologia quociente e a topologia induzida pela métrica em CS_f são, a princípio, construções distintas. Para que a métrica dist_u seja de fato útil e reflita adequadamente a estrutura do espaço de folhas, é essencial que ela induza a mesma topologia que a topologia quociente original. Por isso, antes de utilizar essa métrica, é necessário verificar que ela de fato induz a topologia quociente em CS_f.

Proposição 5.3. *[10] A métrica* dist_u *induz a topologia quociente em* CS_f.

Demonstração. Fixe uma folha instável $W^u_f(x_0)$. Então, para $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in CS_f$, seja y_i a interseção de $\mathcal{L}_i$ com $W^u_f(x_0)$.
Sabemos que a métrica $D(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = d_u(y_1, y_2)$ induz a topologia quociente em CS_f. Como por definição, $D(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \leq \text{dist}_u(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$, então para mostrar que as duas métricas são equivalentes, basta mostrar que para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$D(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) < \delta \Longrightarrow \text{dist}_u(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) < \epsilon.$$

Usando as Proposições 4.6 e 4.11, podemos mostrar que existem constantes $A, b > 0$ tais que para qualquer $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in CS_f$,

$$\text{dist}_u(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) < AD(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) + b.$$

Observe que, para $\epsilon > 0$ podemos escolher n suficientemente grande tal que

$$\frac{\epsilon}{C_{ph}}\mu^n > b.$$

Tome,

$$\delta = \frac{1}{\|Tf^n\|A}\left(\frac{\epsilon}{C_{ph}}\mu^n - b\right),$$

onde

$$\|Tf^n\| = \sup\left\{\frac{\|T_x f^n v\|}{\|v\|} : x \in \mathbb{R}^d, v \in T_x\mathbb{R}^d \text{ e } v \neq 0\right\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} D(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) < \delta &\Longrightarrow \|Tf^n\| D(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) < \frac{1}{A}\left(\frac{\epsilon}{C_{ph}}\mu^n - b\right) \\ &\Longrightarrow D(f^n(\mathcal{L}_1), f^n(\mathcal{L}_2)) < \frac{1}{A}\left(\frac{\epsilon}{C_{ph}}\mu^n - b\right) \\ &\Longrightarrow AD(f^n(\mathcal{L}_1), f^n(\mathcal{L}_2)) + b < \frac{\epsilon}{C_{ph}}\mu^n \\ &\Longrightarrow \mathrm{dist}_u(f^n(\mathcal{L}_1), f^n(\mathcal{L}_2)) < \frac{\epsilon}{C_{ph}}\mu^n \\ &\Longrightarrow \mathrm{dist}_u(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) < \epsilon. \end{aligned}$$

□

Proposição 5.4.

(a) *O espaço C_f é homeomorfo ao produto $CS_f \times CU_f$.*

(b) *O espaço C_g é homeomorfo ao produto $CS_g \times CU_g$, onde C_g, CS_g e CU_g são os espaços correspondentes às folhas de g.*

Demonstração. De fato, considere a função $\varphi : CS_f \times CU_f \longrightarrow C_f$ dada por

$$\varphi(\mathcal{L}_f^{cs}, \mathcal{L}_f^{cu}) = \mathcal{L}_f^{cs} \cap \mathcal{L}_f^{cu}.$$

Pelo Teorema 3.19 e a Definição 3.11, φ é um homeomorfismo. Com isso, provamos o item **(a)**. O item **(b)** segue de forma análoga. □

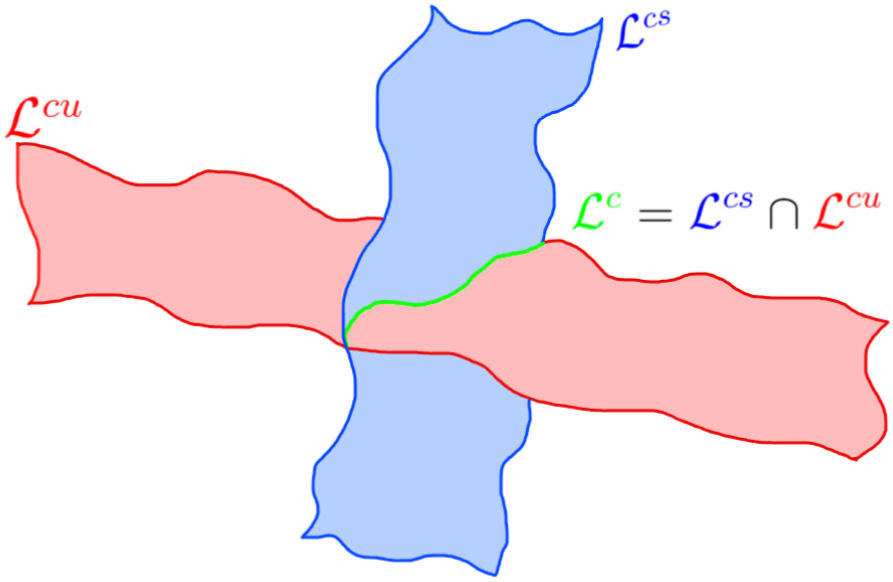

Figura 5.1: A interseção de uma folha centro estável com uma folha centro estável.

5.2 Conjugação de Folhas em C_f

Nesta seção, construiremos um homeomorfismo entre os espaços C_g e C_f.

No lema a seguir, continuaremos utilizando a notação f_0 e g_0; no entanto, todas as propriedades relevantes dessas funções serão explicitamente estabelecidas no próprio enunciado do lema.

Lema 5.5. *[10] Sejam f_0 e g_0 difeomorfismos parcialmente hiperbólicos em $\mathbb{T}^d$ com levantamentos f e g no recobrimento universal $\mathbb{R}^d$. Suponha que:*

(i) *As folhas W^u_f, W^s_f ,W^u_g e W^s_g são quase isométricas;*

(ii) $\dim E^c_f = 1 = \dim E^c_g$;

(iii) $f_{0_*} = g_{0_*}$, *onde f_{0^*} e g_{0^*} são as linearizações de f_0 e g_0 respectivamente; e*

(iv) *Existe $R > 0$ tal que para $x, y \in \mathbb{R}^d$*

$$y \in W^{cs}_g(x) \Longrightarrow \mathrm{dist}_u(W^{cs}_f(x), W^{cs}_f(y)) < R$$

e

$$y \in W_g^{cu}(x) \Longrightarrow \mathrm{dist}_s(W_f^{cu}(x), W_f^{cu}(y)) < R.$$

Então, existe uma única função contínua $H : C_g \longrightarrow C_f$ *tal que:*

(a) $H(g(\mathcal{L})) = f(H(\mathcal{L}))\ \forall\ \mathcal{L} \in C_g$*; e*

(b) $H(\mathcal{L} + v) = H(\mathcal{L}) + v$ *para* $v \in \mathbb{Z}^d$ *e* $\mathcal{L} \in C_g$.

$$\begin{array}{ccc} C_g & \xrightarrow{\ g\ } & C_g \\ {\scriptstyle H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H} \\ C_f & \xrightarrow{\ f\ } & C_f \end{array}$$

Figura 5.2: Representação do diagrama comutativo entre os espaços centrais C_g e C_f por meio da função H

Demonstração. Como $C_f \cong CS_f \times CU_f$ e $C_g \cong CS_g \times CU_g$, vamos construir aplicações $H^{cs} : CS_g \longrightarrow CS_f$ e $H^{cu} : CU_g \longrightarrow CU_f$ com as propriedades (a) e (b) e, então, definir $H = H^{cs} \times H^{cu}$.

Seja

$$\mathcal{H}^{cs} = \left\{h \in C^0(\mathbb{R}^d, CS_f) : h(x + v) = h(x) + v,\ v \in \mathbb{Z}^d\right\}.$$

Note que, $\mathcal{H}^{cs} \neq \varnothing$, pois a aplicação quociente $q : \mathbb{R}^d \longrightarrow CS_f$ dada por $q(x) = W_f^{cs}(x)$ pertence a $\mathcal{H}^{cs}$, uma vez que as folhas de CS_f são contínuas e invariantes por translação em $\mathbb{Z}^d$.

Defina a métrica D em $\mathcal{H}^{cs}$ por

$$D(h_1, h_2) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathrm{dist}_u(h_1(x), h_2(x)).$$

Afirmação 1: $\mathcal{H}^{cs}$ é fechado.

Seja (h_n) uma sequência em $\mathcal{H}^{cs}$ que converge para h. Note que, como $h_n \in \mathcal{H}^{cs}$, então,

(i) $h_n \in C^0(\mathbb{R}^d, CS_f)$ para todo n; e

(ii) $h_n(x + v) = h_n(x) + v$ para todo n e $v \in \mathbb{Z}^d$.

Pela Observação 5.1, (CS_f, dist_u) é completo, então $(C^0(\mathbb{R}^d, CS_f), D)$ é completo, logo $h \in C^0(\mathbb{R}^d, CS_f)$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} h_n \in \mathcal{H}^{cs} &\Longrightarrow h_n(x+v) = h_n(x) + v, \ \forall\ v \in \mathbb{Z}^d \\ &\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} h_n(x+v) = \lim_{n\to\infty} (h_n(x) + v), \ \forall\ v \in \mathbb{Z}^d \\ &\Longrightarrow h(x+v) = h(x) + v, \ \forall\ v \in \mathbb{Z}^d. \end{aligned}$$

Portanto $h \in \mathcal{H}^{cs}$.

Afirmação 2: $(\mathcal{H}^{cs}, D)$ é completo.

Seja (h_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}^{cs}$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$n, m > N \Longrightarrow D(h_n, h_m) < \varepsilon.$$

Dado $x \in \mathbb{R}^d$, temos

$$\text{dist}_u(h_n(x), h_m(x)) \leqslant D(h_n, h_m) < \varepsilon \ \ \forall n, m > N.$$

Assim, $h_n(x)$ é uma sequência de Cauchy em (CS_f, dist_u) que é completo, então

$$h_n(x) \longrightarrow h(x) \in CS_f.$$

Agora mostraremos que $h_n \longrightarrow h$ na métrica D. Como para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n, m > N &\Longrightarrow D(h_n, h_m) < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Longrightarrow \text{dist}_u(h_n(x), h_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Fixe $x \in \mathbb{R}^d$ arbitrário, usando o fato da função distância ser contínua, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \text{dist}_u(h_n(x), h_m(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} &\Longrightarrow \text{dist}_u(h_n(x), \lim_{m\to\infty} h_m(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Longrightarrow \text{dist}_u(h_n(x), h(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Longrightarrow \text{dist}_u(h_n(x), h(x)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como isso é para qualquer x em $\mathbb{R}^d$ e $n > N$, obtemos

$$D(h_n, h) < \varepsilon, \ \ \forall\ n > N.$$

Logo, $h_n \longrightarrow h$ na métrica D, e pela **Afirmação 1**, $h \in \mathcal{H}^{cs}$.

Considere a função $F : \mathcal{H}^{cs} \longrightarrow \mathcal{H}^{cs}$ dada por $F(h) = f^{-1} \circ h \circ g$. Esta aplicação está bem definida, pois, dado $h \in \mathcal{H}^{cs}$ e $x \in \mathbb{R}^d$, temos que

$$F(h(x)) = f^{-1}(h(g(x))).$$

Como $h(g(x))$ pertence a CS_f, então, $f^{-1}(h(g(x))) \in CS_f$. Além disso, para todo $v \in \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned} h(g(x+v)) &\overset{3.27}{=} h(g(x) + g_{0_*}(v)) \\ &= h(g(x)) + g_{0_*}(v) \\ &\overset{(iii)}{=} h(g(x)) + f_{0_*}(v). \end{aligned}$$

Como f_{0_*} é a linearização de f, segue que $f_{0_*}^{-1}$ é a linearização de f^{-1}. Daí,

$$\begin{aligned} F(h(x+v)) &= f^{-1}(h(g(x+v))) \\ &= f^{-1}(h(g(x) + f_{0*}(v)) \\ &\overset{3.27}{=} f^{-1}(h(g(x)) + f_{0_*}^{-1}(f_{0_*}(v)) \\ &= F(h(x)) + v. \end{aligned}$$

Logo, $F(h) \in \mathcal{H}^{cs}$.

Observe que,

$$F^2(h) = F(F(h)) = F(f^{-1} \circ h \circ g) = f^{-1}(f^{-1} \circ h \circ g) \circ g = f^{-2} \circ h \circ g^2$$

Por indução,

$$F^n(h) = f^{-n} \circ h \circ g^n. \tag{5.2}$$

Afirmação 3: Para n suficientemente F^n é uma contração.

De fato, sejam $h_1.h_2 \in \mathcal{H}^{cs}$ e $n > 0$. Observe que,

$$\begin{aligned} D(F^n(h_1), F^n(h_2)) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \text{dist}_u(F^n(h_1(x)), F^n(h_2(x))) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \text{dist}_u(f^{-n}(h_1(g^n(x))), f^{-n}(h_2(g^n(x)))) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \text{dist}_u(f^{-n}(h_1(g^n(x))), f^{-n}(h_2(g^n(x)))) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathrm{dist}_u(f^{-n}(h_1(x)), f^{-n}(h_2(x))) \\
&< C_{ph}\mu^{-n} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathrm{dist}_u(h_1(x), h_2(x)) \\
&= C_{ph}\mu^{-n} D(h_1, h_2),
\end{aligned}
$$

onde $C_{ph} > 1$ e $\mu > 1$ são da definição de parcialmente hiperbólico. Para n suficientemente grande, temos

$$0 < C_{ph}\mu^{-n} < 1.$$

Com isso, a **Afirmação 3** está demonstrada.

Pelo Teorema do Ponto Fixo, existe um único ponto fixo atrator, $h^{cs} \in \mathcal{H}^{cs}$, isto é,

(1) $F(h^{cs}) = h^{cs}$, ou seja, $h^{cs} \circ g = f \circ h^{cs}$; e

(2) Para todo $h \in \mathcal{H}^{cs}$, a sequência $F^n(h)$ converge para h^{cs}.

Defina $H^{cs} : CS_g \longrightarrow CS_f$ por $H^{cs}(\mathcal{L}^{cs}_g(x)) = h^{cs}(x)$. Esta função está bem definida, pois dados $x, y \in \mathbb{R}^d$ com $y \in W^{cs}_g(x)$, então $g^n(y) \in W^{cs}_f(g^n(x))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, existe $R > 0$ tal que,

$$\mathrm{dist}_u(W^{cs}_f(g^n(x)), W^{cs}_f(g^n(y))) < R.$$

Seja $q : \mathbb{R}^d \longrightarrow CS_f$ a aplicação quociente, assim podemos reescrever a desigualdade acima da seguinte forma

$$\mathrm{dist}_u(q(g(x)), q(g(y))) < R.$$

Agora observe que,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dist}_u(F^n(q(x)), F^n(q(y)) &= \mathrm{dist}_u((f^{-n} \circ q \ \circ g^n)(x), (f^{-n} \circ q \ \circ g^n)(y)) \\
&< C_{ph}\mu^{-n} \,\mathrm{dist}_u((q \circ g^n(x)), (q \circ g^n)(x)) \\
&< C_{ph}\mu^{-n} R.
\end{aligned}
$$

Aplicando o limite quando $n \to \infty$ e usando que h^{cs} é um ponto fixo atrator, temos

$$\mathrm{dist}_u(h^{cs}(x), h^{cs}(y)) \leqslant \lim_{n\to\infty} C_{ph}\mu^{-n} R = 0 \Longrightarrow h^{cs}(x) = h^{cs}(y).$$

Claramente a função H^{cs} é contínua. Por (1) e pelo fato de que $h^{cs} \in H^{cs}$, segue que

(a_1) $H^{cs}(g(\mathcal{L}_g^{cs})) = f(H^{cs}(\mathcal{L}_g^{cs}))$ para todo $\mathcal{L}_g^{cs} \in CS_g$; e

(b_1) $H^{cs}(\mathcal{L}_g^{cs} + v) = H^{cs}(\mathcal{L}_g^{cs}) + v$ para $v \in \mathbb{Z}^d$ e $\mathcal{L}_g^{cs} \in CS_g$.

Usando o mesmo raciocínio, podemos mostrar que existe uma única função

$$h^{cu} : \mathbb{R}^d \longrightarrow CU_f$$

em $\mathcal{H}^{cu} = \left\{h \in C^0(\mathbb{R}^d, CU_f) : h(x+v) = h(x) + v,\ v \in \mathbb{Z}^d\right\}$ tal que

(3) $F(h^{cu}) = h^{cu}$, ou seja, $h^{cu} \circ g = f \circ h^{cu}$; e

(4) Para todo $h \in \mathcal{H}^{cu}$ a sequência $F^n(h)$ converge para h^{cu}.

Esta função induz uma aplicação $H^{cu} : CU_g \longrightarrow CU_f$ satisfazendo

(a_2) $H^{cu}(g(\mathcal{L}_g^{cu})) = f(H^{cu}(\mathcal{L}_g^{cu}))$ para todo $\mathcal{L}_g^{cu} \in CU_g$; e

(b_2) $H^{cu}(\mathcal{L}_g^{cu} + v) = H^{cu}(\mathcal{L}_g^{cu}) + v$ para $v \in \mathbb{Z}^d$ e $\mathcal{L}_g^{cu} \in CU_g$.

Defina

$$H : C_g \longrightarrow C_f \quad \text{por} \quad H = H^{cs} \times H^{cu},$$

onde

$$H(\mathcal{L}_g) = H((\mathcal{L}_g^{cs} \times \mathcal{L}_g^{cu}) = H^{cs}(\mathcal{L}_g^{cs}) \times H^{cu}(\mathcal{L}_g^{cu})$$

e

$$(\mathcal{L}_g^{cs} \times \mathcal{L}_g^{cu}) + v = (\mathcal{L}_g^{cs} + v) \times (\mathcal{L}_g^{cu} + v).$$

Note que:

$$\begin{aligned}
H(\mathcal{L}_g^c + v) &= H\big((\mathcal{L}_g^{cs} \times \mathcal{L}_g^{cu}) + v\big) \\
&= H\big((\mathcal{L}_g^{cs} + v) \times (\mathcal{L}_g^{cu} + v)\big) \\
&= H^{cs}(\mathcal{L}_g^{cs} + v) \times H^{cu}(\mathcal{L}_g^{cu} + v) \\
&= \big((H^{cs}(\mathcal{L}_g^{cs}) + v\big) \times \big((H^{cu}(\mathcal{L}_g^{cu}) + v\big) \\
&= \big((H^{cs}(\mathcal{L}_g^{cs}) \times (H^{cu}(\mathcal{L}_g^{cu})\big) + v \\
&= H(\mathcal{L}_g^{cs} \times \mathcal{L}_g^{cs}) + v
\end{aligned}$$

$$= H(\mathcal{L}_g^c) + v,$$

$$\begin{aligned} H(g(\mathcal{L}_g^c)) &= H\big(g(\mathcal{L}_g^{cs} \cap \mathcal{L}_g^{cu})\big) \\ &= H(g(\mathcal{L}_g^{cs}) \cap g(\mathcal{L}_g^{cu})) \\ &= H^{cs}(g(\mathcal{L}_g^{cs})) \cap H^{cu}(g(\mathcal{L}_g^{cu})) \\ &= f(H^{cs}(\mathcal{L}_g^{cs})) \cap f(H^{cu}(\mathcal{L}_g^{cu})) \\ &= f(H^{cs}(\mathcal{L}_g^{cs}) \cap H^{cu}(\mathcal{L}_g^{cu})) \\ &= f(H(\mathcal{L}_g^{cs} \cap \mathcal{L}_g^{cu})) \\ &= f(H(\mathcal{L}_g^c)). \end{aligned}$$

Afirmação 4: H é única.

De fato, suponha que exista $H_1 : C_g \longrightarrow C_f$ satisfazendo (a) e (b). Defina

$$h_1^{cs} : \mathbb{R}^d \longrightarrow CS_f \quad \text{por} \quad h_1^{cs}(x) = W_f^{cs}(H_1(W_g^c(x)).$$

Isto é, $h_1^{cs}(x)$ é a folha centro estável de f que contém a folha central $H_1(W_g^c(x))$. Assim, $h_1^{cs} \in \mathcal{H}^{cs}$, pois é contínua e para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e $v \in \mathbb{Z}^d$ vale que

$$\begin{aligned} h_1^{cs}(x+v) &= W_f^{cs}(H_!(W_f^c(x+v))) \\ &= W_f^{cs}(H_1(W_g^c(x)+v)) \\ &= W_f^{cs}(H_1(W_g^c(x))+v) \\ &= W_f^{cs}(H_1(W_g^c(x))+v \\ &= h_1^{cs}(x)+v. \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} F(h_1(x)) &= f^{-1}\big(h_1^{cs}(g(x))\big) \\ &= f^{-1}\big(W_f^{cs}\big(H_1(W_f^c(g(x)))\big)\big) \\ &= f^{-1}\big(W_f^{cs}\big(H_1(g(W_g^c(x)))\big)\big) \\ &\overset{(a)}{=} f^{-1}\big(W_f^{cs}\big(f(H_1(W_g^c(x)))\big)\big) \\ &= f^{-1}\big(f\big(W_f^{cs}(H_1(W_g^c(x)))\big)\big) \end{aligned}$$

$$= h_1^{cs}(x).$$

Pela unicidade de h^{cs}, $h_1^{cs} = h^{cs}$. Isto significa que para cada $\mathcal{L}_g^c \in C_g$, as folhas centrais de f, $H(\mathcal{L}_g^c)$ e $H_1(\mathcal{L}_g^c)$ são subfolhas da mesma folha centro estável de f. Usando a unicidade de h^{cu}, podemos mostrar que $H(\mathcal{L}_g^c)$ e $H_1(\mathcal{L}_g^c)$ são subfolhas da mesma folha centro instável de f. Como a interseção de uma folha centro estável com uma folha centro instável é uma única folha central, segue que $H(\mathcal{L}_g^c) = H_1(\mathcal{L}_g^c)$. □

Observação 5.6.

(i) *Caso os papéis de f_0 e g_0 sejam invertidos, o enunciado do Lema continua válido, o que garante a existência de uma única aplicação contínua $H^{-1} : C_f \longrightarrow C_g$. Além disso, o mesmo argumento aplica-se aos casos em que f_0 atua sobre si mesmo, bem como g_0 sobre si mesmo. Isso demonstra que H é, de fato, um homeomorfismo.*

(ii) *Os candidatos para f_0 e g_0 no enunciado do lema são, naturalmente, o difeomorfismo parcialmente hiperbólico e sua linearização do Capítulo 3.*

Teorema 5.7. *[10] Seja $f_0 : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ difeomorfismo parcialmente hiperbólico com levantamento $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tal que W_f^u e W_f^s são quase isométricas e $\dim E_f^c = 1$. Se $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é a linearização de f, então existe um único homeomorfismo $H : C_g \longrightarrow C_f$ tal que*

(a) $H(g(\mathcal{L})) = f(H(\mathcal{L}))\ \forall\ \mathcal{L} \in C_g$; *e*

(b) $H(\mathcal{L} + v) = H(\mathcal{L}) + v$ *para* $v \in \mathbb{Z}^d$ *e* $\mathcal{L} \in C_g$.

Demonstração. Pelo Lema 5.5 existe uma função contínua $H : C_g \longrightarrow C_f$ que satisfaz (a) e (b). Novamente pelo Lema 5.5 existe uma única função contínua $K : C_f \longrightarrow C_g$ tal que

(c) $K(f(\mathcal{L})) = g(K(\mathcal{L}))\ \forall\ \mathcal{L} \in C_f$; e

(d) $K(\mathcal{L} + v) = H(\mathcal{L}) + v$ para $v \in \mathbb{Z}^d$ e $\mathcal{L} \in C_f$.

Disto temos os diagramas,

Figura 5.3: Representação dos diagramas com as funções H, K, I_g e I_f.

Como a identidade satisfaz

$$I_g \circ g = g \circ I_g$$

e

$$I_g(\mathcal{L}_g^c + v) = I_g(\mathcal{L}_g^c) + v, \ \forall \mathcal{L}_g^c \in C_g \text{ e } v \in \mathbb{Z}^d.$$

Pela unicidade de H e K, $K \circ H = I_g$. Analogamente $H \circ K = I_f$. Portanto, $K = H^{-1}$, ou seja, H é um homeomorfismo. □

O teorema anterior garante a existência de um único homeomorfismo $H : C_g \to C_f$, ou seja, H leva folhas centrais de g em folhas centrais de f e vice-versa. Para construir uma conjugação via folhas em $\mathbb{R}^d$, basta especificar como os pontos de uma folha são enviados para os pontos da folha correspondente. No próximo capítulo, introduziremos o conceito de seção, que será fundamental para a construção de uma conjugação via folhas em $\mathbb{R}^d$.

Capítulo 6

Seção de Folhas

Sejam f_0, f, g e g_0 como definidos no Capítulo 3. Neste capítulo, apresentaremos a definição de seção, a qual será muito importante no próximo capítulo quando construiremos a conjugação em $\mathbb{R}^d$. Além disso, demonstraremos que existe uma seção σ^* cuja imagem permanece a uma distância uniformemente limitada da folha instáveis estáveis de g e que seja uniformemente contínua para qualquer métrica em C_f que seja $\mathbb{Z}^d$-invariante. Para a construção de tal seção, é necessário que seu domínio possua boas propriedades, bem como uma estrutura que permita somar ao longo da folha central de f.

6.1 Introdução a Seções

Nesta seção, introduziremos o conceito de seção e apresentaremos a propriedade conhecida como Axioma F. Essa propriedade será essencial para garantir a continuidade uniforme da seção σ^*.

Definição 6.1. *[10] Uma* ***seção*** *de C_f é uma função contínua $\sigma : C_f \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tal que*

$$\sigma(\mathcal{L}) \in \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$$

para toda folha central $\mathcal{L} \in C_f$.

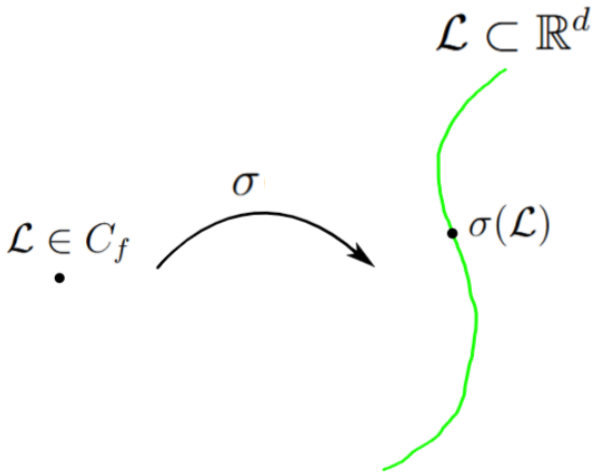

Figura 6.1: Representação da Definição de seção.

Exemplo 6.2. *Considere* $\sigma : C_f \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *dada por* $\sigma(\mathcal{L}) = W_f^{us}(x) \cap \mathcal{L}$ *para qualquer* $x \in \mathbb{R}^d$. *Esta função está bem definida, pois pela Proposição 4.24, para qualquer* $\mathcal{L} \in C_f$ *e* $x \in \mathbb{R}^d$ *a pseudofolha* $W_f^{us}(x)$ *intersecta* $\mathcal{L}$ *em exatamente um ponto. A continuidade de* σ *segue da continuidade das folhas e, claramente* $\sigma(\mathcal{L}) \in \mathcal{L}$. *Logo,* σ *é uma seção.*

Exemplo 6.3. *Para* $z \in \mathbb{Z}^d$, *seja* $\sigma_z : C_f \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *tal que* $\sigma_z(\mathcal{L}) = \sigma(\mathcal{L} - z) + z$. *Esta função está bem definida, pois como* z *é um ponto de* $\mathbb{Z}^d$, *se* $\mathcal{L}$ *é uma folha central de* f, *então a translação* $\mathcal{L} - z$ *também é uma folha central. Usando os mesmos argumentos do exemplo anterior, temos que* σ_z *é uma seção.*

Note que, σ e σ_z dadas nos Exemplos 6.2 e 6.3, respectivamente, não são a seção que desejamos (σ^*), uma vez que podem falhar tanto em ser limitadas na direção E_g^c quanto em serem uniformemente contínuas.

Primeiramente, trataremos do problema da continuidade uniforme. É bem conhecido que toda função contínua com domínio compacto é uniformemente contínua. No entanto, o domínio das seções, por definição, é C_f, que é homeomorfo a $\mathbb{R}^{u+s}$ e, portanto, não é compacto. Por essa razão, para garantir a continuidade uniforme de σ^*, introduziremos uma propriedade de "finitude" denominada Axioma F, que, para os nossos propósitos, é tão eficaz quanto a suposição de compacidade do domínio.

Definição 6.4. *[10] Sejam X e Y espaços métricos. Dizemos que uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$ satisfaz o* ***Axioma F****, se:*

(i) *Existe uma coleção finita de funções*

$$G = \{g_j : X_j \longrightarrow Y_j,\ j = 1, 2, ..., n\},$$

onde cada g_j é uma aplicação entre espaços métricos;

(ii) *Existe uma coleção $\{K_i : i \in I\}$ de subconjuntos compactos de X tal que seus interiores formam uma cobertura aberta de X; e*

(iii) *Para cada K_i, a restrição $f|_{K_i}$ é isometricamente equivalente a um elemento de G, isto é, para $i \in I$ existem isometrias α_i e β_i tais que*

$$f|_{K_i} \circ \alpha_i = \beta_i \circ g_j$$

para algum $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

O conjunto I poderia, a priori, ter qualquer cardinalidade. No entanto, no contexto deste trabalho, considerando as funções que satisfazem o Axioma F, assumiremos que a cardinalidade de I é infinita enumerável.

Exemplo 6.5. *A função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = 3x + sen(2\pi x)$, satisfaz o Axioma F. De fato, seja $K_i = [i, i + 2]$, assim, $\{K_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ é uma coleção de compactos em $\mathbb{R}$, e claramente*

$$\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \overset{\circ}{K}_i$$

é uma cobertura para $\mathbb{R}$. Considere $G = \{g_1 : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R} : g_1(x) = 3x + sen(2\pi x)\}$ e defina as seguintes funções:

(i) $\alpha_i : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $\alpha_i(x) = x + 1$.

(ii) $\beta_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $\beta_i(x) = x + 3i$.

Essas funções são apenas translações e, portanto, são isometrias. Note que,

$$\begin{aligned}\beta_i(g_1(x)) &= \beta_i(3x + sen(2\pi x)) \\ &= 3x + sen(2\pi x) + 3i \\ &= 3(x+i) + sen(2\pi x + 2\pi i) \\ &= 3(x+i) + sen(2\pi(x+i) \\ &= \phi(x+1) \\ &= \phi(\alpha_i(x)).\end{aligned}$$

Proposição 6.6. *[10] Se $f : X \longrightarrow Y$ satisfaz o Axioma F, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Como f satisfaz o Axioma F, existem:

(i) uma coleção finita de funções $G = \{g_j : X_j \longrightarrow Y_j,\ j = 1, 2, ..., n\}$ entre espaços métricos;

(ii) uma família $\{K_i : i \in I\}$ de subconjuntos compactos de X tal que

$$X \subset \bigcup \overset{\circ}{K};$$

(iii) e, para cada $i \in I$, isometrias α_i e β_i tais que

$$f\big|_{K_i} \circ \alpha_i = \beta_i \circ g_j$$

para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Note que, para cada $i \in I$, a função $f\big|_{K_i}$ é contínua em um conjunto compacto e, portanto, é uniformemente contínua. Logo, por **(iii)**, todas as funções da coleção G são uniformemente contínuas. Fixe $\varepsilon > 0$. Para cada g_j, existe $\delta_j > 0$, tal que

$$d_{X_j}(x, y) < \delta_j \Longrightarrow d_{Y_j}(g_j(x), g_j(y)) < \varepsilon.$$

Defina $\delta' = \min\{\delta_j\}_{j=1}^{n}$. Agora, seja $x \in X$, por **(ii)**, existe $i \in I$ tal que $x \in \overset{\circ}{K}_i$. Como $\overset{\circ}{K}_i$ é aberto, existe $\rho > 0$ tal que

$$B(x, \rho) \subset \overset{\circ}{K}_i.$$

Defina $\delta = \min\{\delta', \rho/2\}$.

Suponha que $y \in X$ é tal que $d_X(x,y) < \delta$. Então,

$$d_X(x,y) < \frac{\rho}{2} \Longrightarrow y \in B(x,\rho) \subset \overset{\circ}{K}_i,$$

e, portanto, $x, y \in K_i$.

Pelo item **(iii)**, existem g_j e isometrias $\alpha_i : X_j \longrightarrow K_i,\ \beta_i : Y_j \longrightarrow Y$ tais que:

$$f\big|_{K_i} \circ \alpha_i = \beta_i \circ g_j.$$

Logo, para quaisquer $x, y \in X$ com $d_X(x,y) < \delta$, temos

$$\begin{aligned}
&d_X(x,y) = d_{X_j}(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)) < \delta < \delta_j \\
&\Longrightarrow d_{Y_j}(g_j(\alpha^{-1}(x)), g_j(\alpha^{-1}(y))) < \varepsilon \\
&\Longrightarrow d_Y(\beta(g_j(\alpha^{-1}(x))), \beta(g_j(\alpha^{-1}(y)))) < \varepsilon \\
&\Longrightarrow d_Y(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon \quad \left(\text{onde} f_i = f\big|_{K_i}\right) \\
&\Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, f é uniformemente contínua. □

Observação 6.7. *A recíproca da Proposição 6.6 não é verdadeira. De fato, considere a função logarítmica restrita ao intervalo $(1,\infty)$, isto é,*

$$\begin{aligned}
f\colon (1,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \log(x).
\end{aligned}$$

Observe que f é C^1, pois $f'(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em $(1,\infty)$. Assim, dados $a, b \in (1,\infty)$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (a,b)$ tal que,

$$\begin{aligned}
&\log(b) - \log(a) = f'(c)(b-a) \\
&\Longrightarrow \log(b) - \log(a) = \frac{1}{c}(b-a) \\
&\Longrightarrow |\log(b) - \log(a)| = \frac{1}{c}|b-a|.
\end{aligned}$$

Como $c \in (a,b)$ e $a, b \in (1,\infty)$, então $0 < \frac{1}{c} < 1$. Portanto, f é Lipschitz e, consequentemente, uniformemente contínua. No entanto, f não satisfaz o Axioma F, pois

sua derivada é estritamente decrescente. Isso implica que, para diferentes valores de x em $(1, \infty)$, a função apresenta inclinações distintas. Assim, a restrição da função logarítmica a um subconjunto qualquer não é isometricamente equivalente à sua restrição a outro subconjunto. Em outras palavras, não existe uma coleção finita capaz de reconstruir, por translação ou cópia isométrica, todo o gráfico da função.

Sabemos, pela Proposição 4.19, que cada folha central de f é homeomorfa à reta real. Como a reta é uma curva regular, segue que toda folha central $W_f^c(x)$ é uma curva regular em $\mathbb{R}^2$. Portanto, as folhas W_f^c admitem uma parametrização por comprimento de arco. Seja $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow W_f^c(x)$ uma parametrização de $W_f^c(x)$ por comprimento de arco.

Definição 6.8. *[10] Seja $x_i \in W_f^c(x)$, $a_i \in \mathbb{R}$ e $\sum a_i = 1$. Definimos a soma ao longo da folha por:*

$$\sum\nolimits^c a_i x_i = \gamma \left(\sum a_i \gamma^{-1}(x_i) \right).$$

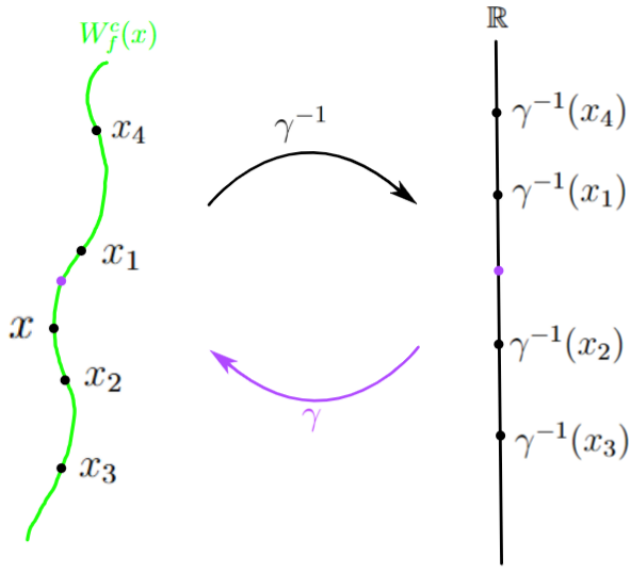

Figura 6.2: Ilustração da Definição 6.8, em que o ponto roxo na folha representa a média dos x_i.

Definição 6.9. *[10] Sejam $\sigma_i : C_f \longrightarrow \mathbb{R}^d$ seções e $\sum a_i = 1$. Definimos $\sum^c a_i \sigma_i$ folha a folha por*

$$\left(\sum\nolimits^c a_i \sigma_i \right)(\mathcal{L}) = \sum\nolimits^c a_i \sigma_i(\mathcal{L}),$$

para todo $\mathcal{L} \in C_f$*, onde* a_i *são constantes ou funções de* C_f *em* $\mathbb{R}$*.*

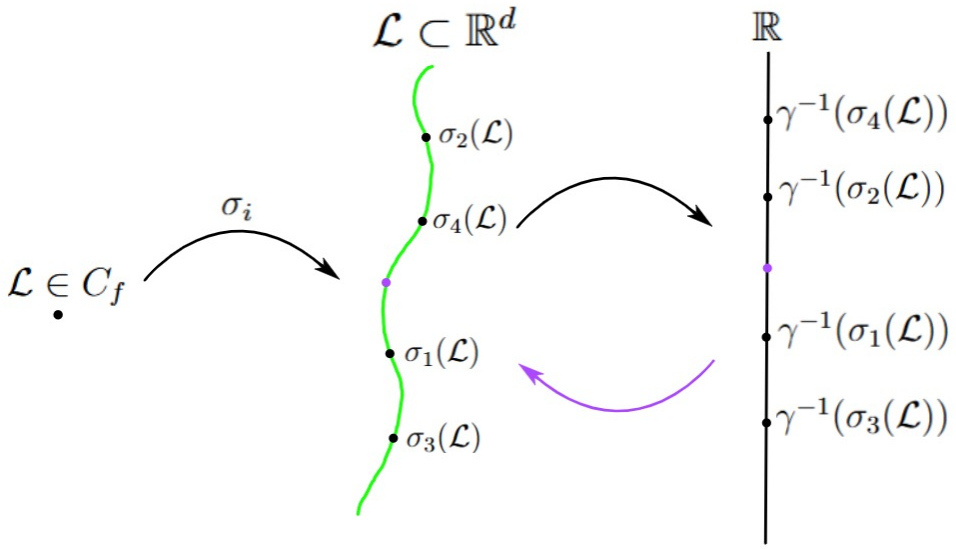

Figura 6.3: Ilustração da Definição 6.9, em que o ponto roxo na folha representa a média das σ_i.

Essas definições são muito importantes para a construção da seção σ^*, uma vez que, se $U_i \subset C_f$ e $\alpha_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}$ formam uma partição de unidade para C_f, então as seções locais $\sigma_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^d$ podem ser combinadas por uma média ponderada para gerar uma seção global contínua

$$\sum^{c} \alpha_i \sigma_i : C_f \longrightarrow \mathbb{R}^d.$$

A seção σ^* será exatamente o resultado desse processo de média.

6.2 A Seção σ^*

Nesta seção, mostraremos que existe uma seção σ^* tal que a imagem de σ^* permaneça a uma distância limitada da folha instáveis estáveis de g e que seja uniformemente contínua para qualquer métrica em C_f que seja $\mathbb{Z}^d$-invariante.

Teorema 6.10. *[10] Existe uma seção* $\sigma^* : C_f \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *tal que:*

(I) *$\pi^c_g \circ \sigma^*$ é limitada; equivalentemente, existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$ e $M > 0$ tal que a imagem de $\sigma^* \subset B_M(W^{us}_g(x_0))$; e*

(II) *Para qualquer métrica compatível em C_f, $\mathbb{Z}^d$-invariante, σ^* satisfaz o Axioma F.*

Para demonstrar este teorema, apresentaremos uma sequência de lemas que serão fundamentais para sua prova. A partir deste ponto, assumiremos que foi escolhida uma métrica em C_f que seja $\mathbb{Z}^d$-invariante. Como exemplo de tal métrica, consideramos a distância de Hausdorff, definida como o ínfimo de todos os $r \geqslant 0$ para os quais

$$\mathcal{L}_2 \subset B_r(\mathcal{L}_1) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_1 \subset B_r(\mathcal{L}_2),$$

onde $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in C_f$ são considerados subconjuntos de $\mathbb{R}^d$. Poderia surgir uma preocupação quanto à finitude dessa distância, uma vez que, pela Proposição 4.19, esses subconjuntos não são compactos. No entanto, a Proposição 4.11 garante que essa distância é, de fato, finita.

Denote a origem $(0, 0, ..., 0)$ de $\mathbb{R}^d$ por z_0. A partir de agora, σ denotará a seção tal que $\mathcal{L} \longmapsto W^{us}_f(z_0) \cap \mathcal{L}$ e σ_z as translações de σ.

A seção desejada σ^* será construída como σ_Λ, uma média das seções σ_z associadas a um subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, na qual a média é ponderada por funções suaves de suporte compacto α_z adequadamente escolhidas. De forma análoga às translações das seções σ_z, cada função α_z será uma translação de uma função base $\alpha : C_f \longrightarrow \mathbb{R}$, cuidadosamente construída para este fim.

Lema 6.11. *[10] Para todo $x \in \mathbb{R}^d$, existe $R_\mathbb{Z} > 0$ tal que $x \in B_{R_\mathbb{Z}}(W^c_f(z))$ para algum $z \in \mathbb{Z}^d \cap B_{R_\mathbb{Z}}(W^{us}_g(z_0))$.*

Demonstração. Como g é linear, existe a simetria

$$x \in B_{R_\mathbb{Z}}(W^c_g(z)) \iff z \in B_{R_\mathbb{Z}}(W^c_g(x)).$$

Portanto, basta mostrar que existe $z \in \mathbb{Z}^d$, tal que

$$z \in B_{R_\mathbb{Z}}(W^c_g(x)) \cap B_{R_\mathbb{Z}}(W^{us}_g(z_0)).$$

Note que, a interseção desses dois cilindros contém uma esfera centrada em

$$\pi_g^{us}(x) \in W_g^c(x) \cap W_g^{us}(z_0)$$

de raio $R_{\mathbb{Z}}$. Escolhendo $R_{\mathbb{Z}}$ suficientemente grande, garantimos que essa esfera contenha ao menos um ponto da grade $\mathbb{Z}^d$. □

Lema 6.12. *[10] Para $R > 0$, existe uma função $\alpha : C_f \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e não negativa tal que:*

(a) *$\alpha(\mathcal{L}) > 0$, para todo $\mathcal{L} \in C_f$ tal que $\mathcal{L} \cap B_{R_{\mathbb{Z}}}(W_g^c(z_0)) \neq \emptyset$; e*

(b) *O $\operatorname{supp}(\alpha)$ é compacto.*

Demonstração. Seja

$$A_f = \{\mathcal{L} \in C_f : \mathcal{L} \cap B_{R_{\mathbb{Z}}}(W_g^c(z_0)) \neq \emptyset\}.$$

Mostraremos que A_f é relativamente compacto, isto é, $\bar{A}_f$ é compacto.
De fato, primeiramente note que,

(i) Se $y \in B_{R_{\mathbb{Z}}}(W_g^c(z_0)) \Longrightarrow \|\pi_g^{us}(y)\|$ é limitada. Seja $M > 0$ tal que $\|\pi_g^{us}(y)\| \leqslant M$.

(ii) Se $\mathcal{L} \cap B_{R_{\mathbb{Z}}}(W_g^c(z_0)) \neq \emptyset$, $x \in \mathcal{L}$ e $y \in B_{R_{\mathbb{Z}}}(W_g^c(z_0))$, então pela Proposição 4.11, existe $R_c > 0$ tal que

$$\|\pi_g^{us}(x) - \pi_g^{us}(y)\| \leqslant R_c.$$

Pela desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} \|\pi_g^{us}(x)\| &\leqslant \|\pi_g^{us}(x-y))\| + \|\pi_g^{us}(y\| \\ &\overset{(i),(ii)}{\Longrightarrow} \|\pi_g^{us}(x)\| \leqslant R_c + M. \end{aligned}$$

Seja

$$K = \{x \in \mathbb{R}^d : \|\pi_g^{us}(x)\| \leqslant R_c + M \ \text{ e } \ \pi_g^c(x) = 0\}.$$

Dessa forma, K é uma bola fechada em $\mathbb{R}^{u+s}$ e, portanto, compacto. Como a função $x \longmapsto W_g^c(x)$ é contínua, segue que $W_g^c(K)$ é compacta.

Afirmação: $A_f \subset W_g^c(K)$.

De fato, seja $\mathcal{L} \in A_f$. Por definição, tem-se que

$$\mathcal{L} \cap B_{R_{\mathbb{Z}}}(W_g^c(z_0)) \neq \emptyset.$$

Além disso, toda folha de C_f intersecta qualquer folha W_g^{us} em pelo menos um ponto; em particular, existe

$$x \in \mathcal{L} \cap W_g^{us}(z_0),$$

isto é, $\pi_g^c(x) = 0$. Por (ii), segue que $\|\pi_g^{us}(x)\| \leqslant R_c + M$. Portanto, $x \in K$, o que implica $\mathcal{L} \in W_g^c(K)$.

Como A_f está contido no compacto $W_f^c(K)$, então $\bar{A}_f$ também está contida em $W_f^c(K)$. Assim, $\bar{A}_f$ é compacto, pois todo subconjunto fechado de um compacto é compacto. Ademais, como C_f é homeomorfo a $\mathbb{R}^{u+s}$ e $\bar{A}_f \subset C_f$ é compacto, então, pelo Lema de Urysohn 2.21, existe uma função $\alpha : C_f \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, com suporte compacto, tal que $0 \leqslant \alpha(\mathcal{L}) \leqslant 1, \forall\ \mathcal{L} \in C_f$ e $\alpha(\mathcal{L}) = 1, \forall\ \mathcal{L} \in \bar{A}_f$. □

Seja $R_{\mathbb{Z}}$ o raio dado pelo Lema 6.11. Para esse raio, existe uma função $\alpha : C_f \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições do Lema 6.12. Para cada $z \in \mathbb{Z}^d$ definimos $\alpha_z : C_f \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\alpha_z(\mathcal{L}) = \alpha(\mathcal{L} - z).$$

Seja Γ um subconjunto de $\mathbb{Z}^d$ tal que, para cada $\mathcal{L} \in C_f$, vale que $\alpha_z(\mathcal{L}) > 0$ apenas para um número finito de $z \in \Gamma$. Defina $\alpha_\Gamma : C_f \longrightarrow \mathbb{R}$ como a soma das funções α_z sobre os índices em Γ, ou seja,

$$\alpha_\Gamma(\mathcal{L}) = \sum_{z \in \Gamma} \alpha_z(\mathcal{L}).$$

Com isso, definimos a seção local

$$\sigma_\Gamma : \mathrm{Dom}(\sigma_\Gamma) \longrightarrow \mathbb{R}$$

no domínio

$$\mathrm{Dom}(\sigma_\Gamma) = \{\mathcal{L} \in C_f : \alpha_\Gamma(\mathcal{L}) > 0\}$$

pela expressão

$$\sigma_\Gamma(\mathcal{L}) = \sum_{z \in \Gamma}^{c} \frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_\Gamma(\mathcal{L})} \sigma_z(\mathcal{L}).$$

Observação 6.13. *O subconjunto de C_f onde $\alpha_\Gamma > 0$, as funções*

$$\mathcal{L} \longmapsto \frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_\Gamma(\mathcal{L})}$$

formam uma partição de unidade.

De fato, as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) *Para todo $z \in \Gamma$ e $\mathcal{L} \in C_f$, tem-se que*

$$\frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_\Gamma(\mathcal{L})} \geqslant 0,$$

uma vez que, $\alpha_z(\mathcal{L}) = \alpha(\mathcal{L} - z) \overset{6.12}{\geqslant} 0$, e consequentemente $\alpha_\Gamma(\mathcal{L}) \geqslant 0$ por ser soma de funções não negativas.

(ii) *A família dos suportes dessas funções é localmente finita.*

De fato, dado $\mathcal{L} \in \mathrm{Dom}(\sigma_\Gamma)$, a definição do conjunto Γ garante que existem apenas uma quantidade finita de $z \in \Gamma$ tal que $\alpha_z(\mathcal{L}) > 0$. Portanto, qualquer $\mathcal{L}$ pertence apenas a um número finito de suportes dos termos da partição.

(iii) *Para todo $\mathcal{L} \in \mathrm{Dom}(\sigma_\Gamma)$, vale*

$$\sum_{z \in \Gamma} \frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_\Gamma(\mathcal{L})} = 1,$$

o que é consequência imediata da definição de α_Γ.

Lema 6.14. *[10] Se $\Gamma, \Upsilon \subset \mathbb{Z}^d$ e $\Upsilon = \Gamma + w$ para algum $w \in \mathbb{Z}^d$, então*

$$\mathrm{Dom}(\sigma_\Upsilon) = \mathrm{Dom}(\sigma_\Gamma) + w$$

e

$$\sigma_\Upsilon(\mathcal{L} + w) = \sigma_\Gamma(\mathcal{L}) + w$$

para $\mathcal{L} \in \mathrm{Dom}(\sigma_\Gamma)$.

Demonstração. Como $\Upsilon = \Gamma + w$ para algum $w \in \mathbb{Z}^d$, então, para todo $z \in \Upsilon$, existe $z' \in \Gamma$ tal que

$$z = z' + w.$$

Note que, para $\mathcal{L} \in C_f$,

$$\alpha_{z'+w}(\mathcal{L}) = \alpha(\mathcal{L} - (z' + w)) = \alpha((\mathcal{L} - w) - z') = \alpha_{z'}(\mathcal{L} - w).$$

e

$$\sigma_{z'+w}(\mathcal{L}) = \sigma(\mathcal{L} - (z' + w)) + (z' + w) = \sigma((\mathcal{L} - w) - z') + z' + w = \sigma_{z'}(\mathcal{L} - w) + w.$$

Assim,

$$\alpha_\Upsilon(\mathcal{L}) = \sum_{z\in\Upsilon} \alpha_z(\mathcal{L}) = \sum_{z'\in\Gamma} \alpha_{z'+w}(\mathcal{L}) = \sum_{z'\in\Gamma} \alpha_{z'}(\mathcal{L} - w) = \alpha_\Gamma(\mathcal{L} - w).$$

e

$$\begin{aligned}
\sigma_\Upsilon(\mathcal{L}) = \sum_{z\in\Upsilon}^{c} \frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_\Upsilon(\mathcal{L})}\sigma_z(\mathcal{L}) &= \sum_{z\in\Gamma}^{c} \frac{\alpha_{z'+w}(\mathcal{L})}{\alpha_\Gamma(\mathcal{L})}\sigma_{z'+w}(\mathcal{L}) \\
&= \sum_{z\in\Gamma}^{c} \frac{\alpha_{z'}(\mathcal{L} - w)}{\alpha_\Gamma(\mathcal{L} - w)}(\sigma_{z'}(\mathcal{L} - w) + w) \\
&= \sum_{z\in\Gamma}^{c} \frac{\alpha_{z'}(\mathcal{L} - w)}{\alpha_\Gamma(\mathcal{L} - w)}\sigma_{z'}(\mathcal{L} - w) + \sum_{z\in\Gamma}^{c} \frac{\alpha_{z'}(\mathcal{L} - w)}{\alpha_\Gamma(\mathcal{L} - w)}w \\
&= \sigma_\Gamma(\mathcal{L} - w) + w \ .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\alpha_\Upsilon(\mathcal{L}) > 0 \iff \alpha_\Gamma(\mathcal{L} - w) > 0 \\
&\implies \mathcal{L} \in \mathrm{Dom}(\sigma_\Upsilon) \iff (\mathcal{L} - w) \in \mathrm{Dom}(\sigma_\Gamma) \\
&\implies \mathrm{Dom}(\sigma_\Upsilon) = \mathrm{Dom}(\sigma_\Gamma) + w.
\end{aligned}$$

Logo, para cada $\mathcal{L} \in \mathrm{Dom}(\sigma_\Gamma)$, tem-se que

$$\mathcal{L} + w \in \mathrm{Dom}(\sigma_\Upsilon)$$

e

$$\sigma_\Upsilon(\mathcal{L} + w) = \sigma_\Gamma((\mathcal{L} + w) - w) + w = \sigma_\Gamma(\mathcal{L}) + w$$

□

Lema 6.15. *[10] Seja $K \subset C_f$ um conjunto compacto. Então, existe um raio $R > 0$ tal que, para qualquer subconjunto $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ satisfazendo $K \subset \mathrm{Dom}(\sigma_\Gamma)$, vale que*

$$\sigma_\Gamma\big|_K = \sigma_{\hat{\Gamma}}\big|_K \ ,$$

onde

$$\hat{\Gamma} = \Gamma \cap B_R(W_g^c(z_0)).$$

Demonstração. Primeiramente, observe que, como σ é contínua e K é compacto, então $\sigma(K)$ é compacta. De forma análoga, $\pi_g^{us}(\sigma(K))$ é compacta, em particular, limitada, digamos por R_1.
Seja $x \in \mathbb{R}^d$ tal que $x \in \mathcal{L}$. Como $\sigma(\mathcal{L}) \in \mathcal{L}$, então pela Proposição 4.11, temos que

$$\|\pi_g^{us}(x - \sigma(\mathcal{L}))\| \leqslant R_c.$$

Assim, para todo $x \in \mathcal{L}$, tal que $\mathcal{L} \in K$, tem-se que

$$\begin{aligned}\|\pi_g^{us}(x)\| &\leqslant \|\pi_g^{us}(x - \mathcal{L})\| + \|\pi_g^{us}(\mathcal{L})\| \\ &\leqslant R_c + R_1.\end{aligned}$$

Denote $R_2 = R_c + R_1$. Como o suporte de α é um subconjunto compacto de C_f, existe R_3 tal que

$$\|\pi_g^{us}(x)\| < R_3,$$

para todo $x \in \mathcal{L}$ com $\alpha(\mathcal{L}) > 0$.
Afirmação: Se $z \in \Gamma$ é tal que $\alpha_z(\mathcal{L}) > 0$ para $\mathcal{L} \in K$, então $\pi_g^{us}(z)$ é limitada.
De fato, note que

$$\begin{aligned}\alpha_z(\mathcal{L}) > 0 &\Longrightarrow \alpha(\mathcal{L} - z) > 0 \\ &\Longrightarrow \|\pi_g^{us}(x - z)\| \leqslant R_3, \ \text{ com } x \in \mathcal{L}.\end{aligned}$$

Como $\mathcal{L} \in K$, então $\|\pi_g^{us}(x)\| < R_2$. Assim, pela desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned}\|\pi_g^{us}(z)\| &\leqslant \|\pi^{us}(z - x)\| + \|\pi^{us}(x)\| \\ \Longrightarrow \|\pi_g^{us}(z)\| &\leqslant R_3 + R_2.\end{aligned}$$

Com isso, concluímos a afirmação.

A contrapositiva da afirmação anterior garante que, se $z \in \Gamma$ e $\mathcal{L} \in K$ são tais que

$$\|\pi_g^{us}(z)\| > R_3 + R_2,$$

então

$$\alpha_z(\mathcal{L}) = 0.$$

Assim, para $\mathcal{L}$ em K,

$$\sigma_\Gamma(\mathcal{L}) = \sum_{z\in\Gamma}^{c} \frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_\Gamma(\mathcal{L})}\sigma_z(\mathcal{L}) = \sum_{z\in\hat{\Gamma}}^{c} \frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_{\hat{\Gamma}}(\mathcal{L})}\sigma_z(\mathcal{L}) = \sigma_{\hat{\Gamma}}(\mathcal{L}),$$

onde $\hat{\Gamma} = \{z \in \Gamma : \|\pi_g^{us}(z)\| < R_3 + R_2\}$.

Além disso, para R suficientemente grande, vale que

$$\|\pi_g^{us}(z)\| < R_3 + R_2\} \Longrightarrow z \in B_R(W_g^c(z_0)).$$

Logo, $\hat{\Gamma} = \{z \in \Gamma : \|\pi_g^{us}(z)\| < R_3 + R_2\} = \Gamma \cap B_R(W_f^c(z_0))$. □

Corolário 6.16. *[10] Seja $K \subset C_f$ um conjunto compacto. Então, existe um raio $R > 0$ tal que, para qualquer subconjunto $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ satisfazendo $K + w \subset \mathrm{Dom}(\sigma_\Gamma)$ para $w \in \mathbb{Z}^d$, vale que*

$$\sigma_\Gamma(\mathcal{L} + w) = \sigma_{\hat{\Gamma}}(\mathcal{L}) + w,$$

para todo $\mathcal{L} \in K$, onde

$$\hat{\Gamma} = (\Gamma - w) \cap B_R(W_g^c(z_0)).$$

Demonstração. Sabemos que

$$\Gamma = (\Gamma - w) + w.$$

Tome $\Upsilon = \Gamma - w$, ou seja, $\Gamma = \Upsilon + w$. Pelo Lema 6.14, temos que

(i) $\mathrm{Dom}(\sigma_\Gamma) = \mathrm{Dom}(\sigma_\Upsilon) + w$.

(ii) $\sigma_\Gamma(\mathcal{L} + w) = \sigma_\Upsilon(\mathcal{L}) + w$, para todo $\mathcal{L} \in \mathrm{Dom}(\sigma_\Upsilon)$.

Agora, note que

$$\mathcal{L} \in \mathrm{Dom}(\sigma_\Upsilon) = \mathrm{Dom}(\sigma_{\Gamma - w}) \iff \mathcal{L} + w \in \mathrm{Dom}(\sigma_\Gamma).$$

Assim, $K \subset Dom(\sigma_\Upsilon)$. Pelo Lema 6.15,

$$\sigma_\Upsilon\big|_K = \sigma_{\hat{\Gamma}}\big|_K,$$

onde $\hat{\Gamma} = \Upsilon \cap B_R(W_g^c(z_0)) = (\Gamma - w) \cap B_R(W_g^c(z_0))$.
Portanto, para $\mathcal{L} \in K$, tem-se que

$$\mathcal{L} \in \mathrm{Dom}(\sigma_\Upsilon) \Longrightarrow \sigma_\Gamma(\mathcal{L} + w) = \sigma_\Upsilon(\mathcal{L}) + w = \sigma_{\hat{\Gamma}}(\mathcal{L}) + w.$$

□

Lema 6.17. *[10] Seja $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ tal que:*

(a) $\mathrm{Dom}(\sigma_\Lambda) = C_f$*; e*

(b) $\pi_g^c(\Lambda)$ *é limitada.*

Então, $\sigma_\Lambda : C_f \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfaz o Axioma F.

Demonstração. Dividiremos a prova em três passos.

(1º passo) Seja $K = \operatorname{supp} \alpha$. Pelo Lema 6.12, K é um conjunto compacto em C_f. Para cada $z \in \Lambda$, definimos

$$K_z = K + z = \{\mathcal{L} + z : \mathcal{L} \in K \text{ e } z \in \Lambda\}.$$

Isto é, K_z é a translação de K pelo vetor z. Observamos que, como K é compacto, cada K_z também é compacto. Além disso, note que

$$\begin{aligned} \forall\ \mathcal{L} \in C_f &\overset{(a)}{\Longrightarrow} \mathcal{L} \in \mathrm{Dom}(\sigma_\Lambda) \\ &\Longrightarrow \alpha_\Lambda(\mathcal{L}) > 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{z \in \Lambda} \alpha_z(\mathcal{L}) > 0 \\ &\Longrightarrow \alpha_z(\mathcal{L}) > 0, \text{ para algum } z \in \Lambda \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \alpha(\mathcal{L}-z)>0, \text{ para algum } z\in\Lambda$$
$$\Longrightarrow (\mathcal{L}-z)\in \overset{\circ}{K}$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}\in \overset{\circ}{K}_z.$$

Assim,

$$C_f \subset \bigcup_{z\in\Lambda} \overset{\circ}{K}_z \ ,$$

isto é,

$$\bigcup_{z\in\Lambda} \overset{\circ}{K}_z$$

é uma cobertura para C_f.

(2º passo) Sabemos por hipótese que $\pi_g^c(\Lambda)$ é limitada, ou seja, existe $M>0$ tal que $\|\pi_g^c(\Lambda)\|\leq M$.

Considere,

$$Z=\{z\in\mathbb{Z}^d\cap B_R(W_g^c(z_0)) : \|\pi_g^c(z)\|<2M\}.$$

Claramente, Z é finito. Com isso, a coleção

$$\Sigma=\{\sigma_{\theta_i} : \theta_i\in Z\}$$

também é finita.

(3º passo) Mostraremos que, para cada K_z a restrição $\sigma_\Lambda\big|_{K_z}$ é isometricamente equivalente a um elemento de Σ.

De fato, seja $z\in\Lambda$. Pelo Corolário 6.16, temos

$$\sigma_\Lambda(\mathcal{L}+z)=\sigma_\Gamma(\mathcal{L})+z \quad \forall \mathcal{L}\in K,$$

onde

$$\Gamma=(\Lambda-z)\cap B_R(W_g^c(z_0)).$$

Considere para cada $z\in\Lambda$, as aplicações

$$\phi_z : C_f \longrightarrow K \ \text{ dada por } \ \phi_z(\mathcal{L})=\mathcal{L}+z$$

e

$$\psi_z : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \text{ dada por } \ \psi_z(x) = x + z.$$

Ambas são translações e, portanto, isometrias nos respectivos espaços. Além disso,

$$\sigma_\Lambda\big|_{K_z}(\phi_z(\mathcal{L})) = \sigma_\Lambda\big|_{K_z}(\mathcal{L} + z) = \sigma_\Gamma(\mathcal{L}) + z = \psi(\sigma_\Gamma(\mathcal{L})).$$

Agora, resta apenas verificar que $\sigma_\Gamma \in \Sigma$, isto é, $\Gamma \subset Z$. De fato, dado $w \in \Gamma$, temos

$$w \in \Lambda - z \Longrightarrow w + z \in \Lambda \Longrightarrow \|\pi_g^c(z + w)\| < M.$$

Aplicando a desigualdade triangular e usando a linearidade de π_g^c, obtemos

$$\|\pi_g^c(w)\| \leqslant \|\pi_g^c(w + z)\| + \|\pi_g^c(z)\| < M + M = 2M.$$

Portanto, $w \in Z$. Com isso, concluímos que $\Gamma \subset Z$.
Logo, σ_Λ satisfaz o Axioma F. □

Lema 6.18. *[10] Se $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ e $\pi_g^c(\Lambda)$ é limitada, então $\pi_g^c \circ \sigma_\Lambda$ é limitada.*

Demonstração. Sabemos que $\pi_g^c \circ \sigma$ é contínua e o $\operatorname{supp}\alpha$ é compacto, então $\pi_g^c \circ \sigma$ é limitado no suporte de α, digamos por M_1. Além disso, por hipótese $\pi_g^c(\Lambda)$ é limitada, então existe $M_2 > 0$ tal que $\|\pi_g^c(\Lambda)\| \leqslant M_2$.
Note que, se

$$z \in \Lambda \quad \text{e} \quad \mathcal{L} \in \operatorname{supp}\alpha_z,$$

então, por definição da função α_z, vale que

$$(\mathcal{L} - z) \in \operatorname{supp}\alpha.$$

Consequentemente,

$$\|\pi_g^c(\sigma(\mathcal{L} - z))\| \leqslant M_1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|\pi_g^c(\sigma_z(\mathcal{L}))\| &= \|\pi_g^c(\sigma(\mathcal{L} - z) + z)\| \\ &\leqslant \|\pi_g^c(\sigma(\mathcal{L} - z))\| + \|\pi_g^c(z)\|\end{aligned}$$

$$\leqslant M_1 + M_2.$$

Tome $M = M_1 + M_2$. Seja

$$\Lambda^* = \{z \in \Lambda : \alpha_z(\mathcal{L}) > 0\}.$$

Pela definição de Λ, segue que Λ^* é finito e

$$\sigma_\Lambda(\mathcal{L}) = \sum_{z\in\Lambda}^{c} \frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_\Lambda(\mathcal{L})}\sigma_z(\mathcal{L}) = \sum_{z\in\Lambda^*}^{c} \frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_{\Lambda^*}(\mathcal{L})}\sigma_z(\mathcal{L}).$$

Pela linearidade de π_g^c, temos

$$\begin{aligned}
\|\pi_g^c(\sigma_\Lambda(\mathcal{L}))\| &= \left\|\pi_g^c\left(\sum_{z\in\Lambda^*}^{c} \frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_{\Lambda^*}(\mathcal{L})}\sigma_z(\mathcal{L})\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{z\in\Lambda^*} \pi_g^c\left(\frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_{\Lambda^*}(\mathcal{L})}\sigma_z(\mathcal{L})\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{z\in\Lambda^*} \frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_{\Lambda^*}(\mathcal{L})}\pi_g^c\left(\sigma_z(\mathcal{L})\right)\right\| \\
&\leqslant \sum_{z\in\Lambda^*} \left\|\frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_{\Lambda^*}(\mathcal{L})}\pi_g^c\left(\sigma_z(\mathcal{L})\right)\right\| \\
&= \sum_{z\in\Lambda^*} \frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_{\Lambda^*}(\mathcal{L})}\left\|\pi_g^c\left(\sigma_z(\mathcal{L})\right)\right\| \\
&\leqslant \sum_{z\in\Lambda^*} \frac{\alpha_z(\mathcal{L})}{\alpha_{\Lambda^*}(\mathcal{L})} M \\
&= M.
\end{aligned}$$

Portanto, $\pi_g^c \circ \sigma_\Lambda$ é limitada. □

Demonstração. **Demonstração do Teorema 6.10**

Seja $\Lambda = \mathbb{Z}^d \cap B_{R_\mathbb{Z}}(W_g^{us}(z_0))$. Assim, $\pi_g^c(\Lambda)$ é limitada, além disso, para qualquer $\mathcal{L} \in C_f$ e $x \in \mathcal{L}$, pelo Lema 6.11, existe $z \in \Lambda$ tal que $x \in B_{R_\mathbb{Z}}(W_g^c(z))$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
&x - z \in \mathcal{L} - z \quad \text{e} \quad x - z \in B_{R_\mathbb{Z}}(W_g^c(z_0)) \\
&\implies (\mathcal{L} - z) \cap B_{R_\mathbb{Z}}(W_g^c(z_0)) \neq \emptyset \\
&\overset{6.12}{\implies} \alpha(\mathcal{L} - z) > 0
\end{aligned}$$

$$\implies \alpha_z(\mathcal{L}) > 0$$
$$\implies \alpha_\Lambda(\mathcal{L}) = \sum_{z\in\Lambda} \alpha_z(\mathcal{L}) > 0$$
$$\implies \mathcal{L} \in \mathrm{Dom}(\sigma_\Lambda).$$

Logo, $C_f = \mathrm{Dom}(\sigma_\Lambda)$. Pelo Lema 6.17, σ_Λ satisfaz o Axioma F, e pelo Lema 6.18, $\pi_g^c \circ \sigma_\Lambda$ é limitada. □

Vejamos como é a imagem de σ^*. Nas imagens a seguir, os pontos cinzas e pretos pertencem à grade $\mathbb{Z}^d$, os pontos pretos pertencem ao conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$.

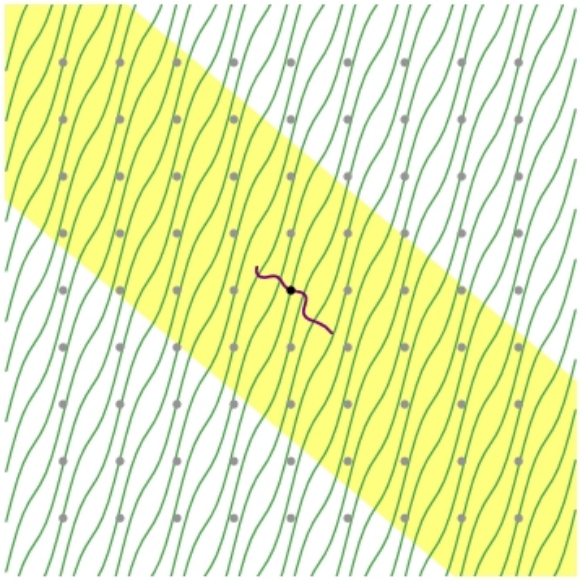

Figura 6.4: Fixado $z \in \Lambda$, a linha em vermelho representa a imagem de σ_z restrito ao $\mathrm{supp}\,\alpha_z$. Fonte: [10]

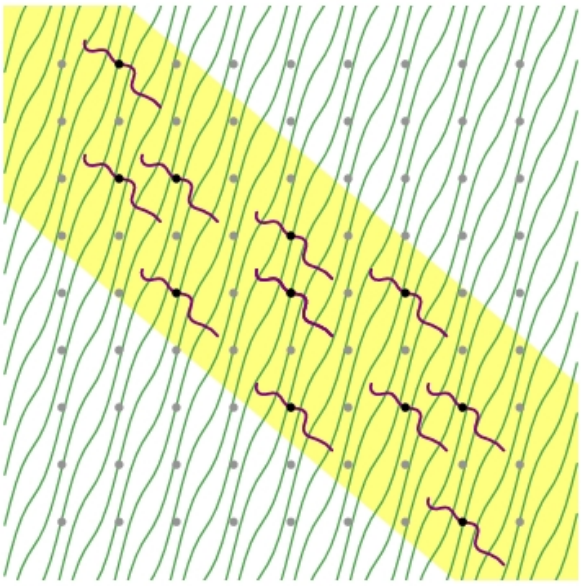

Figura 6.5: Variando z, cada linha em vermelho é a imagem de σ_z restrita ao $\operatorname{supp} \alpha_z$. Fonte: [10]

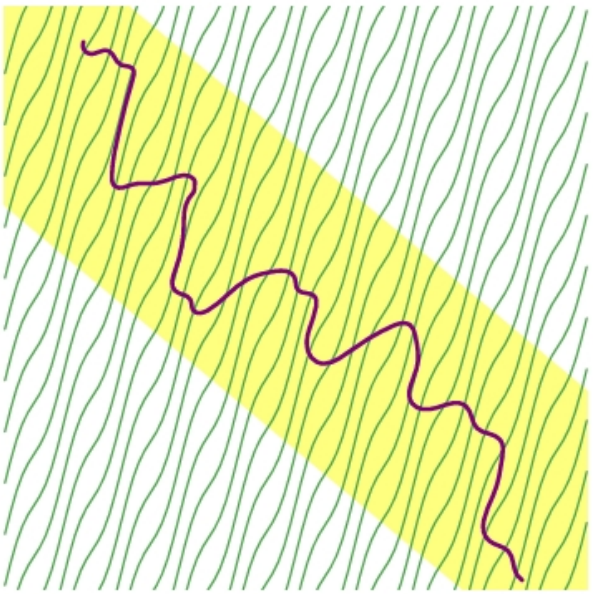

Figura 6.6: A imagem da seção σ^*. Fonte: [10]

Capítulo 7

Uma Conjugação de Folhas em $\mathbb{R}^d$

Sejam f, f_0, g e g_0 como no Capítulo 2. No Capítulo 3, construímos uma conjugação $H : C_g \longrightarrow C_f$ que mapeia as folhas de g para as folhas de f. Neste capítulo, vamos construir uma conjugação $h_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$; para isso, precisamos apenas especificar como os pontos de uma folha são mapeados para pontos de outra folha.

A estratégia consiste em construir blocos locais, chamados de placas, em $\mathbb{R}^d$, uma associada a f e outra a g, de tal forma que cada folha central intersecta a respectiva placa em um segmento compacto. Assim, a aplicação h_0 pode ser definida localmente, mapeando cada segmento de linha central da placa associada a g no segmento correspondente da placa associada a f, de maneira coerente com a conjugação H construída no espaço das folhas.

No caso da linearização g, a placa sólida será definida como a região limitada entre duas folhas folhas instáveis estáveis. Por outro lado, para a função f, cada uma das duas fronteiras do bloco precisaria intersectar cada folha central exatamente uma vez. Uma pseudofolha W_f^{us} satisfaz essa condição, porém sua natureza patológica torna seu uso impraticável. Diante disso, o bloco sólido associado a f será definido como a região delimitada pelas imagens de duas seções transversais adequadamente escolhidas.

Seja $\sigma_0 : C_f \longrightarrow \mathbb{R}^d$ a seção dada pelo Teorema 6.10, a qual é uniformemente contínua e satisfaz que $\pi_g^c \circ \sigma_0$ é limitada. Com isso, é possível escolher $v \in \mathbb{Z}^d$ tal que

$$W_g^{us}(z_0) \cap W_g^{us}(z_0 + v) = \varnothing,$$

onde z_0 denota a origem de $\mathbb{R}^d$, e de forma que as imagens $\mathrm{Im}(\sigma_0)$ e $\mathrm{Im}(\sigma_0)+v$ permanecem

a uma distância uniformemente limitada uma da outra.

Defina a seção $\sigma_1 : C_f \longrightarrow \mathbb{R}^d$ dada por

$$\sigma_1(\mathcal{L}) = \sigma_0(\mathcal{L} - v) + v$$

ou, equivalentemente,

$$\mathrm{Im}(\sigma_1) = \mathrm{Im}(\sigma_0) + v.$$

Observação 7.1.

(i) *σ_1 é uniformemente contínua, pois é apenas uma translação de uma função uniformemente contínua*

(ii) *$\pi_g^c \circ \sigma_1$ limitada, pois*

$$\|\pi_g^c(\sigma_1(\mathcal{L}))\| = \|\pi_g^c(\sigma_0(\mathcal{L} - v) + v)\| \leqslant \underbrace{\|\pi_g^c(\sigma_0(\mathcal{L} - v)\|}_{\text{limitada por 6.10}} + \|\pi_g^c(v))\| < \infty.$$

Definição 7.2. *Para $\mathcal{L} \in C_f$, definimos $[\sigma_0(\mathcal{L}), \sigma_1(\mathcal{L})]^c$ como o segmento da folha central de $\mathcal{L}$ entre $\sigma_0(\mathcal{L})$ e $\sigma_1(\mathcal{L})$.*

Note que a distância usual em $\mathbb{R}^d$ induz uma métrica na folha $\mathcal{L}$, pois, pela Proposição 4.15, $\mathcal{L}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$. Definimos a função $\rho : C_f \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\rho(\mathcal{L}) = \mathrm{lenght}([\sigma_0(\mathcal{L}), \sigma_1(\mathcal{L})]^c) = d_c(\sigma_0(\mathcal{L}), \sigma_1(\mathcal{L})).$$

Observação 7.3.

(i) *ρ é uniformemente contínua, isto segue da dependência contínua das soluções e da continuidade uniforme de σ_0, σ_1 e E_f^c.*

(ii) *ρ é limitada. De fato, como a imagem de σ_0 e σ_1 estão separadas por uma distância limitada, ρ é limitada inferiormente por zero. Além disso, ρ é limitada superiormente, pois, caso contrário, existiria $\mathcal{L}_n \in C_f$ tal que $\rho(\mathcal{L}_n) \longrightarrow \infty$, isto é,*

$$d_c(\sigma_0(\mathcal{L}_n), \sigma_1(\mathcal{L}_n)) \longrightarrow \infty \overset{4.26}{\Longrightarrow} \|\pi_g^c(\sigma_0(\mathcal{L}_n) - \sigma_1(\mathcal{L}_n))\| \longrightarrow \infty.$$

Mas isso é um absurdo, pois $\pi_g^c \circ \sigma_0$ e $\pi_g^c \circ \sigma_1$ são limitadas.

Queremos construir uma conjugação em $\mathbb{R}^d$, isto é, um homeomorfismo

$$h_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

que leva folhas centrais de g em folhas centrais de f e satisfaz

$$h_0(g(\mathcal{L})) = f(h_0(\mathcal{L})) \quad \text{para todo} \quad \mathcal{L} \in C_g.$$

Note que, para $\mathcal{L} \in C_g$, se $h_0(x) \in H(\mathcal{L})$ para todo $x \in \mathcal{L}$, então a condição acima é automaticamente satisfeita, uma vez que H é uma conjugação entre os espaços de folhas C_g e C_f.

Para definir h_0 nos conjuntos $W_g^{us}(z_0)$ e $W_f^{us}(z_0 + v)$, procedemos da seguinte forma:

- Para x em $W_g^{us}(z_0)$, definimos

$$h_0(x) = \sigma_0(H(W_g^c(x))), \tag{7.1}$$

  ou seja, $h_0(x)$ é o ponto da imagem da folha central de x que pertence à seção σ_0.

- Para x em $W_g^{us}(z_0)$, definimos

$$h_0(x) = \sigma_1(H(W_g^c(x))),$$

  ou seja, $h_0(x)$ é o ponto da imagem da folha central de x que pertence à seção σ_1.

Denote por S o espaço entre os hiperplanos $W_g^{us}(z_0)$ e $W_g^{us}(z_0 + v)$. Identificando E_g^c com a reta real, esta placa pode ser escrita como

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d : \pi_g^c(z_0) \leqslant \pi_g^c(x) \leqslant \pi_g^c(z_0 + v)\}.$$

Sabemos que cada folha central de g intersecta uma folha instável estável de g em exatamente um ponto. Denote por $v_1 \in \mathbb{R}^d$ a interseção de $W_g^c(z_0)$ com $W_g^{us}(z_0 + v)$.

Agora estendemos h_0 para todo S mapeando o segmento

$$[x, x + v_1]^c \subset W_g^c(x)$$

para o segmento

$$[h_0(x), h_0(x + v_1)]^c \subset H(W_g^c(x))$$

a uma velocidade constante ao longo da folha central.

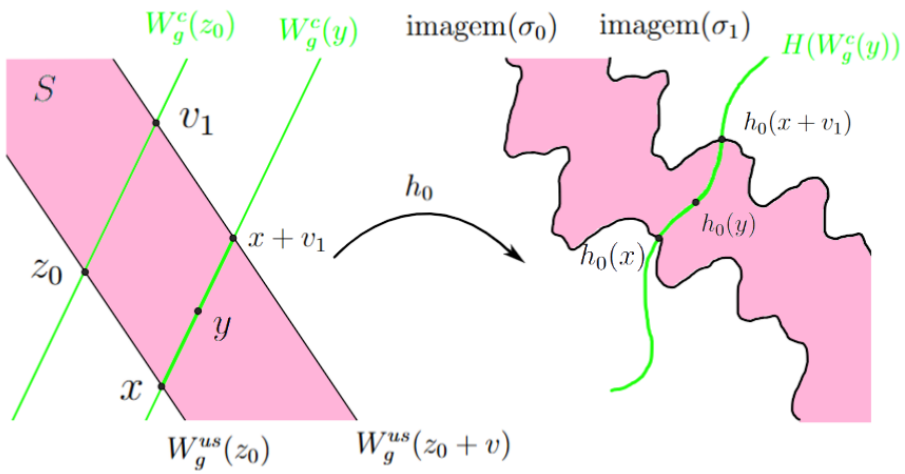

Figura 7.1: A função h_0 em S.

Para definir h_0 explicitamente, introduzimos a função $t : S \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ x \in W_g^{us}(z_0), \\ 1 & \text{se } \ x \in W_g^{us}(z_0+v), \\ \frac{\|\pi_g^c(x)\|}{\|\pi_g^c(v)\|} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que, a função t é linear na direção central e constante nas folhas $W_g^{us}(z_0)$ e $W_g^{us}(z_0+v)$. Como t é definida por uma projeção linear seguida de uma normalização, t é linear e, portanto, uniformemente contínua em S.

Como E_f^c é unicamente integrável e unidimensional, podemos escolher uma orientação. Com isso, podemos definir um fluxo que progride a uma velocidade unitária

$$\varphi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d.$$

Fixamos a orientação de E_f^c de modo que esse fluxo percorra a folha no sentido que vai da imagem de σ_0 até a imagem de σ_1 em tempo 1. Por construção, a função comprimento $\rho : C_f \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

$$\varphi_{\rho(\mathcal{L})}(\sigma_0(\mathcal{L})) = \sigma_1(\mathcal{L}) \quad \text{para todo} \ \ \mathcal{L} \in C_f.$$

Definimos

$$h_0(x) = \varphi_{\rho(\mathcal{L})t(x)}(\sigma_0(\mathcal{L})),$$

onde $\mathcal{L} = H(W_g^c(x))$.

Observação 7.4. *Note que recuperamos a definição de h_0 ao longo das folhas-us de g, pois:*

(1) *Se $x \in W_g^{us}(z_0) \Longrightarrow t(x) = 0$, assim*

$$h_0(x) = \varphi_0(\sigma_0(\mathcal{L})) = \sigma_0(\mathcal{L}) = \sigma_0(H(W_g^c(x)).$$

(2) *Se $x \in W^{us}(z_0 + v) \Longrightarrow t(x) = 1$. Logo,*

$$h_0(x) = \varphi_{\rho(\mathcal{L})}(\sigma_0(\mathcal{L})) = \sigma_1(\mathcal{L}) = \sigma_1(H(W_g^c(x)).$$

Lema 7.5. *[10] A função h_0 é uniformemente contínua em S e uniformemente bi-Lipschitz ao longo de cada folha central.*

Demonstração. Para provar a continuidade uniforme de h_0 em S mostraremos que h_0 é uma composição de funções uniformemente contínuas. Primeiramente, equipe C_g e C_f com métricas $\mathbb{Z}^d$-invariantes. Por definição, temos

$$h_0(x) = \varphi_{\rho(\mathcal{L})t(x)}(\sigma_0(H(W_f^c(x))).$$

Analisemos cada função envolvida:

(i) A função $W_g^c : \mathbb{R}^d \longrightarrow C_g$ é linear, portanto uniformemente contínua.

(ii) A conjugação $H : C_g \longrightarrow C_f$ satisfaz $H(\mathcal{L} + v) = H(\mathcal{L}) + v$ para todo $v \in \mathbb{Z}^d$, o que garante que H é uniformemente contínua em um domínio fundamental.

(iii) Por construção σ_0 é uniformemente contínua.

(iv) As funções $t : S \longrightarrow [0, 1]$ e $\rho : C_f \longrightarrow \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas, por construção. Além disso, por definição $0 \leqslant t(x) \leqslant 1$, para todo $x \in S$ e pela Observação 7.3, ρ é limitada, digamos por M. Assim, o produto $\rho \cdot t$ assume valores em $[0, M]$ e é uniformemente contínuo.

(v) Por hipótese, à distribuição central E^c_f é unidimensional. Isso garante a existência de uma folheação contínua em $\mathbb{R}^d$ cujas as folhas são órbitas do fluxo $\varphi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$. Com isso, o φ é contínuo. Além disso, como restringimos o tempo ao intervalo compacto $[0, M]$, segue que φ é uniformemente contínuo em $\mathbb{R}^d \times [0, M]$.

Dessa forma, h_0 é uma composição de funções uniformemente contínuas e, consequentemente, é uniformemente contínua em S.

Para provar que h_0 é uniformemente bi-Lipschitz ao longo de cada folha central, note que h_0 mapeia o segmento central

$$[x, x + v_1] \subset W^c_g(x)$$

(de comprimento de $\|\pi^c_g(v_1)\|$), a uma velocidade constante no segmento

$$[h_0(x), h_0(x + v_1)]^c \subset H(W^c_g(x)).$$

Como o comprimento desse segmento na folha de f é controlado pela função ρ, que é limitada, e como o fluxo central avança a uma velocidade constante nas folhas unidimensionais, o mapeamento de cada folha central é bi-Lipschitz. □

Lema 7.6. *[10] A função $h_0 : S \longrightarrow \mathbb{R}^d$ está a uma distância limitada da identidade:*

$$\sup_{x \in S} \|h_0(x) - x\| < \infty.$$

Demonstração. Seja $K \subset \mathbb{R}^d$ o domínio fundamental do recobrimento $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$. Pela compacidade de K, existe uma constante $R > 0$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$H(W^c_g(x)) \subset B_R(W^c_g(x)),$$

onde $H(W^c_g(x))$ e $B_R(W^c_g(x))$ são considerados subconjuntos do $\mathbb{R}^d$. Observe que, para $z \in \mathbb{Z}^d$ temos que

$$\begin{aligned}(H(W^c_g(x)) + z) \subset (B_R(W^c_g(x)) + z) &\overset{5.7}{\Longrightarrow} H(W^c_g(x) + z) \subset B_R(W^c_g(x) + z) \\ &\Longrightarrow H(W^c_f(x + z)) \subset B_R(W^c_g(x + z)).\end{aligned}$$

A última implicação segue do fato das folhas serem invariantes por translação em $\mathbb{Z}^d$. Além disso, como $H(\mathcal{L} + z) = H(\mathcal{L}) + z$ para todo $z \in \mathbb{Z}^d$ e $\mathcal{L} \in C_g$, temos

$$H(W^c_g(x)) \subset B_R(W^c_g(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Segue da definição de seção que $\sigma_0(H(W_g^c(x)) \in H(W_g^c(x))$. Logo,

$$\sigma_0(H(W_g^c(x)) \in B_R(W_g^c(x)) \Longrightarrow \|\pi_g^{us}(\sigma_0(H(W_g^c(x)) - x)\| < \infty \ \ \forall x \in S.$$

Por outro lado, para $x \in S$ tem-se que

$$\begin{aligned}\|\pi_g^c(\sigma_0(H(W_g^c(x)) - x)\| &\leqslant \|\pi_g^c(\sigma_0(H(W_g^c(x)))\| + \|\pi_g^c(x)\| \\ &\leqslant \underbrace{\|\pi_g^c(\sigma_0(H(W_g^c(x)))\|}_{\text{limitado pelo Teo. 6.10}} + \|\pi_g^c(v)\| \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Como as distâncias $\|\pi_g^{us}(\sigma_0(H(W_g^c(x))-x)\|$, $\|\pi_g^c(\sigma_0(H(W_g^c(x))-x)\|$ e $\|\sigma_0(H(W_g^c(x))-x\|$ formam um triângulo com dois lados limitados, segue que

$$\|\sigma_0(H(W_g^c(x)) - x\|$$

é limitada, digamos por M^σ. Além disso, para $x \in S$ temos

$$h_0(x) \in [\sigma_0(H(W_g^c(x)), \sigma_1(H(W_g^c(x))]^c.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|h_0(x) - \sigma_0(H(W_g^c(x))\| &\leqslant d_c(\sigma_0(H(W_g^c(x)), \sigma_1(H(W_g^c(x))) \\ &= \rho(H(W_g^c(x)) \\ &\overset{Obs.7.3}{<} \infty.\end{aligned}$$

Seja $M > 0$ tal que $\|h_0(x) - \sigma_0(H(W_g^c(x))\| < M$. Assim, para $x \in S$, temos

$$\begin{aligned}\|h_0(x) - x\| &\leqslant \|h_0(x) - \sigma_0(H(W_g^c(x))\| + \|\sigma_0(H(W_g^c(x)) - x\| \\ &< M + M^\sigma.\end{aligned}$$

Portanto, $\sup_{x\in S} \|h_0(x) - x\| < \infty$. □

Como

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (S + kv),$$

podemos estender $h_0 : S \longrightarrow \mathbb{R}^d$ para uma aplicação $h_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, de modo que $h_0(x+v) = h_0(x) + v$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Essa extensão h_0 é um homeomorfismo, pois é um homeomorfismo entre faixas.

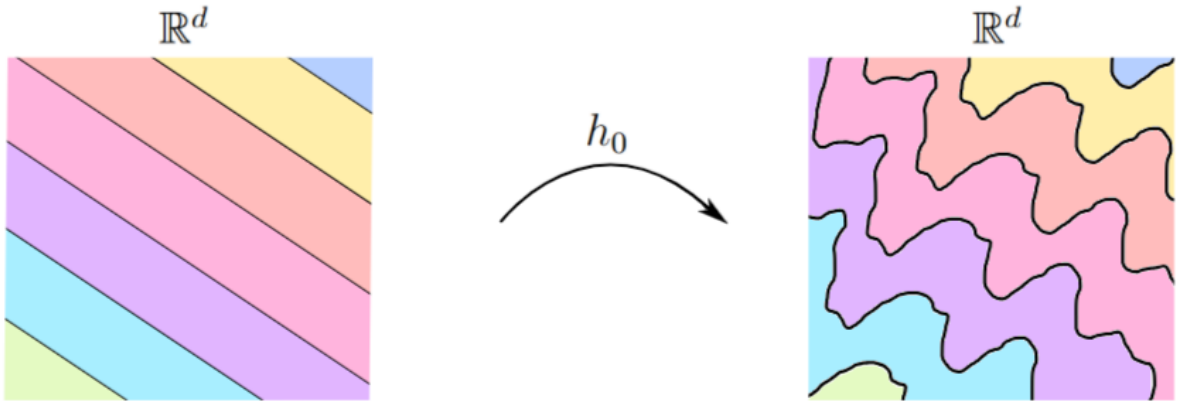

Figura 7.2: A função h_0 em $\mathbb{R}^d$.

Observação 7.7.

(i) *A extensão $h_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é única.*

De fato, dado qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^d$ existe um inteiro $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - kv$ pertence à faixa S. Como a aplicação $h_0 : S \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é definida de forma única em S (construída proporcionalmente ao longo das folhas centrais, utilizando a função H, que por sua vez é única), segue que a definição de h_0 se estende de maneira única a todo o $\mathbb{R}^d$.

(ii) *A extensão $h_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ está bem definida.*

De fato, note que, se $x \in W_g^{us}(z_0 + kv)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, então

$$x - kv \in W_g^{us}(z_0) \quad e \quad x - (k-1)v \in W_g^{us}(z_0 + v).$$

Assim, para mostrar que h_0 está bem definida, basta verificar que

$$h_0(x+v) = h_0(x) + v \quad \forall x \in W_g^{us}(z_0).$$

Seja $x \in W_g^{us}(z_0)$, então $x + v \in W_g^{us}(z_0 + v)$. Logo,

$$h_0(x+v) = \sigma_1(H(W_g^c(x+v)) \qquad (\textit{Definição de } h_0)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma_1(H(W_g^c(x) + v)) && (\textit{As folhas são } \mathbb{Z}^d \textit{ invariantes}) \\
&= \sigma_1(H(W_g^c(x)) + v) && (\textit{Propriedade da função } H) \\
&= \sigma_0(H(W_g^c(x))) + v && (\textit{Definição de } \sigma_1) \\
&= h_0(x) + v. && (\textit{Definição de } h_0)
\end{aligned}
$$

Pela Observação 7.7 e os Lemas 7.5 e 7.6 é possível demonstrar os seguintes corolários.

Corolário 7.8. *[10] A função $h_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é uniformemente contínua e uniformemente bi-Lipschitz ao longo de cada folha central.*

Corolário 7.9. *[10] A função $h_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ está a uma distância limitada da identidade:*

$$\|h_0 - Id\|_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|h_0(x) - x\| < \infty.$$

Por construção, a aplicação $h_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ leva folhas centrais de $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ em folhas centrais de $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ e satisfaz a relação

$$h_0(g(\mathcal{L})) = f(h_0(\mathcal{L})) \text{ para todo } \mathcal{L} \in C_g.$$

Portanto, h_0 é um homeomorfismo via folhas em $\mathbb{R}^d$.

No entanto, surge naturalmente a questão de saber se h_0 induz uma aplicação em $\mathbb{T}^d$. Para que isso ocorra, seria necessário que

$$h_0(x + v) = h_0(x) + v \tag{7.2}$$

para todo $v \in \mathbb{Z}^d$ e todo $x \in \mathbb{R}^d$. Contudo, essa propriedade não é garantida pela nossa construção. Na verdade, a construção de h_0 foi feita utilizando uma decomposição específica do espaço $\mathbb{R}^d$ em faixas da forma $S + kv$, onde v é um vetor fixo de $\mathbb{Z}^d$ e $k \in \mathbb{Z}$. Com isso, a propriedade (7.2) vale apenas quando a translação é feita precisamente na direção de v, mas não em geral para qualquer vetor de $v \in \mathbb{R}^d$. Dessa forma, não há motivo para esperar que h_0 induza uma aplicação bem definida em $\mathbb{T}^d$.

Capítulo 8

Uma Conjugação de Folhas em $\mathbb{T}^d$

Neste capítulo, nosso objetivo é construir uma conjugação via folhas em $\mathbb{T}^d$. Como vimos no capítulo anterior, a aplicação $h_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ não induz diretamente uma aplicação no toro $\mathbb{T}^d$.

Para contornar esse problema, adotaremos uma estratégia que consiste em "fazer médias" das translações inteiras de h_0. Esse procedimento permitirá construir uma nova aplicação $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ que satisfaz a propriedade (7.2). Assim, h induz uma aplicação $\bar{h} : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$, que será uma conjugação via folhas no toro $\mathbb{T}^d$.

Definição 8.1. *Seja $z \in \mathbb{Z}^d$. Defina $h_z : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ como um shift de h_0, isto é,*

$$h_z(x) = h_0(x - z) + z.$$

Seja $\mathcal{H}_0$ a coleção de todos os shifts da Definição 8.1, ou seja,

$$\mathcal{H}_0 = \{h_z : z \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Dessa forma, $\mathcal{H}_0$ é uniformemente equicontínua, pois cada h_z é uniformemente contínua.

Observação 8.2.

(a) *Se $z \in \mathbb{Z}^d$, então $\|h_z - I_d\|_0 = \|h_0 - I_d\|_0$.*

De fato, note que

$$\|h_z - I_d\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|h_z(x) - x\|$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|h_0(x-z)+z-x\|$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|h_0(x-z)-(x-z)\|$$
$$= \|h_0 - Id\|_0.$$

(b) *Se $z, z' \in \mathbb{Z}^d$, então $\|h_z - h_{z'}\|_0 = 2\|h_0 - I_d\|_0$.*

De fato, observe que

$$\begin{aligned}\|h_z - h_{z'}\|_0 &= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|h_z(x) - h_{z'}(x)\| \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|h_z(x) - h_{z'}(x) + x - x\| \\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|h_z(x) - x\| + \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|h_{z'}(x) - x\| \\ &= 2\|h_0 - I_d\|_0.\end{aligned}$$

Pelo Corolário 7.8, h_0 está a uma distância limitada da identidade, isto é,

$$\|h_0 - I_d\|_0 < \infty.$$

Com isso, concluímos pelo item (a) da observação anterior, que cada h_z está a uma distância limitada da identidade e pelo item(b) as translações de h_z também estão a uma distância limitada uma das outras.

Definição 8.3. *Sejam $h_1, h_2 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ funções. Dizemos que h_1 e h_2 são* ***C-equivalentes*** *(com respeito a f) se*

$$h_2(x) \in W^c_f(h_1(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Observação 8.4. *Todos os shifts h_z de h_0 são C-equivalentes.*
De fato, note que dados $x \in \mathbb{R}^d$ e $z \in \mathbb{Z}^d$, temos

$$h_z(x) = h_0(x-z) + z.$$

Como $h_0(x-z) \in H(W^c_g(x-z))$ e as folhas são invariantes por translação, temos

$$h_z(x) \in H(W^c_g(x)).$$

Ou seja, todos os shifts h_z estão na folha $H(W_f^c(x))$. Portanto, todos os shifts h_z de h_0 são C-equivalentes.

Definição 8.5. *[10] Se $h_1, ..., h_n$ são C-equivalentes e $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $\sum a_i = 1$. Definimos a* ***soma afim*** $\sum^c a_i h_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *pontualmente por*

$$\left(\sum^c a_i h_i\right)(x) = \sum^c a_i h_i(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

onde $\sum^c$ do lado direito é a soma ao longo da folha central da Definição 6.8.

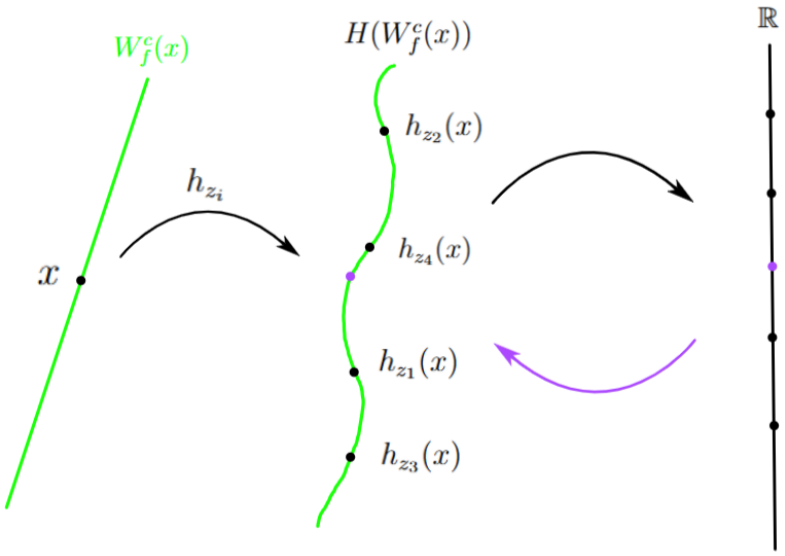

Figura 8.1: Ilustração da Definição 8.3, em que o ponto roxo na folha representa a média de h_i.

Seja $\mathcal{H}_1$ o conjunto de todas as combinações afins (finitas) de elementos de $\mathcal{H}_0$, isto é,

$$\mathcal{H}_1 = \left\{\sum^c a_i h_{z_i} : h_{z_i} \in \mathcal{H}_0, a_i \in \mathbb{R}^d, \sum a_i = 1\right\}.$$

Lema 8.6. *[10] O conjunto $\mathcal{H}_1$ é equicontínuo.*

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}^d$ fixo e $\varepsilon > 0$. Pela Observação 8.2, todas as funções h_z, $z \in \mathbb{Z}^d$, estão a uma distância uniformemente limitada umas das outras. Com isso, podemos escolher uma curva de velocidade unitária $\gamma : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ao longo da folha central $\mathcal{L}_x = H(W_g^c(x))$, de modo que todos os pontos $h_z(x)$, com $x \in \mathbb{Z}^d$, estejam contidos no

interior da imagem dessa curva.

Afirmação: Existe uma vizinhança tubular da imagem de γ tal que, dentro dessa vizinhança, a folheação central é trivial.

De fato, seja $\sigma : D \longrightarrow \mathbb{R}^d$ uma seção local, onde D é um pequeno disco fechado contendo $\mathcal{L}_x$, e tal que $\sigma(\mathcal{L}_x) = \gamma(0)$. Defina $\phi : D \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ por $\phi_t(\mathcal{L})$ como resultado de deslizar o ponto $\sigma(\mathcal{L})$ a uma distância t ao longo da folha $\mathcal{L}$. Pela continuidade uniforme de σ e a continuidade da folheação central, podemos tomar D suficientemente pequeno tal que, para todo $\mathcal{L} \in D$ e $t \in [0,T]$ tem-se que

$$\|\phi_t(\mathcal{L}_x) - \phi_t(\mathcal{L})\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.1}$$

Dessa forma, ϕ é uma bijeção contínua. Como $D \times [0,T]$ é compacto e $\mathbb{R}^d$ é um espaço de Hausdorff, segue do Teorema 2.17 que ϕ é um mergulho. Além disso,

$$K = \phi(D \times [0,T]) \subset \mathbb{R}^d$$

é uma vizinhança tubular de $\gamma([0,T] = \phi(\mathcal{L}_x \times [0,T])$.

Seja $\Psi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\Psi(\phi_t(\mathcal{L})) = t$, ou seja, para $x \in K$, $\Psi(x)$ é a distância de x à imagem de σ ao longo da folha $W^c_f(x)$. Dessa forma, Ψ é contínua, e como $K = \phi(D \times [0,T])$ é compacto ($D \times [0,T]$ é compacto e ϕ é contínua), então Ψ é uniformemente contínua. Além disso, para cada intervalo $\mathcal{L} \cap K$, Ψ é uma parametrização por comprimento de arco.

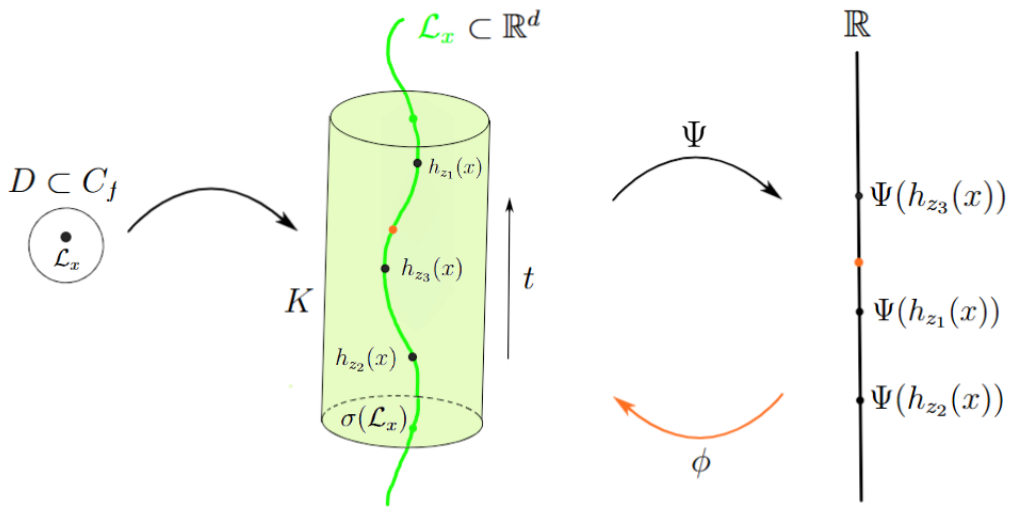

Figura 8.2: Ilustração o que está ocorrendo na demonstração do Lema 8.6.

Pela continuidade uniforme de Ψ, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y, z \in K$,

$$\|y - z\| < \delta \Longrightarrow |\Psi(y) - \Psi(z)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.2}$$

Como $\mathcal{H}_0$ é uniformemente equicontínuo, é possível tomar $y \in \mathbb{R}^d$ suficientemente perto de x tal que, para todo $h \in \mathcal{H}_0$ tem-se $h(y) \in K$ e

$$\|h(x) - h(y)\| < \delta.$$

Seja $\mathcal{L}_y = H(W_g^c(y))$. Então, para qualquer combinação afim $\sum^c a_i h_i$, onde $h_i \in \mathcal{H}_0$ e $\sum a_i = 1$, se x e y estão suficientemente próximos, então

$$\|h_i(x) - h_i(y)\| < \delta, \quad \forall i \overset{8.2}{\Longrightarrow} |\Psi(h_i(x)) - \Psi(h_i(y))| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall i.$$

Disto, segue que

$$\begin{aligned}
\left|\sum a_i \Psi(h_i(x)) - \sum a_i \Psi(h_i(y))\right| &= \left|\sum a_i [\Psi(h_i(x)) - \Psi(h_i(y))]\right| \\
&\leqslant \sum a_i \left|[\Psi(h_i(x)) - \Psi(h_i(y))]\right| \\
&< \sum a_i \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Sejam $t = \sum a_i \Psi(h_i(x))$ e $t' = \sum a_i \Psi(h_i(y))$. Como ϕ é um fluxo de velocidade unitária e a distância usual é menor ou igual à distância ao longo da folha, temos

$$\left\|\phi_t(\mathcal{L}_x) - \phi_{t'}(\mathcal{L}_x)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pela desigualdade acima e a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}\left\|\phi_t(\mathcal{L}_x) - \phi_{t'}(\mathcal{L}_y)\right\| &= \left\|\phi_t(\mathcal{L}_x) - \phi_{t'}(\mathcal{L}_x) + \phi_{t'}(\mathcal{L}_x) - \phi_{t'}(\mathcal{L}_y)\right\| \\ &\leqslant \left\|\phi_t(\mathcal{L}_x) + \phi_{t'}(\mathcal{L}_x)\right\| + \left\|\phi_{t'}(\mathcal{L}_x) - \phi_{t'}(\mathcal{L}_y)\right\| \\ &\overset{8.1}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Agora, observe que, pela forma como ϕ e Ψ foram definidas (com Ψ sendo uma parametrização por comprimento de arco ao longo das folhas em K), temos

$$\phi_t(\mathcal{L}_x) = \sum\nolimits^{c} a_i h_i(x) \quad \text{e} \quad \phi_{t'}(\mathcal{L}_y) = \sum\nolimits^{c} a_i h_i(y).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum\nolimits^{c} a_i h_i\right)(x) - \left(\sum\nolimits^{c} a_i h_i\right)(y)\right\| &= \left\|\sum\nolimits^{c} a_i h_i(x) - \sum\nolimits^{c} a_i h_i(y)\right\| \\ &= \left\|\phi_t(\mathcal{L}_x) - \phi_{t'}(\mathcal{L}_y)\right\| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Disto, segue a equicontinuidade de $\mathcal{H}_1$. □

Para $n > 0$, definimos

$$C_n = \left\{(y_1, ..., y_d) \in \mathbb{Z}^d : \max\{|y_1|, ..., |y_d|\} \leqslant n\right\}.$$

e

$$h_n(x) = \sum_{z \in C_n}{}^{c} \frac{1}{(2n+1)^d} h_z(x)$$

Proposição 8.7. *Se* $a_z = \dfrac{1}{(2n+1)^d}$, *então* $\displaystyle\sum_{z \in C_n} a_z = 1$.

Demonstração. De fato, note que, fixado n, a_z é constante. Com isso, basta mostrar que C_n possui $(2n+1)^d$ elementos. Por definição, temos

$$\begin{aligned}(y_1,...,y_d) \in C_n &\iff \max\{|y_1|,...,|y_d|\} \leqslant n \\ &\iff -n \leqslant y_i \leqslant n \quad \text{para} \quad i = 1,2,...,d \\ &\iff y_i \in \{-n,(-n+1),...,0,...,(n-1),n\} \quad \text{para} \quad i = 1,2,...,d.\end{aligned}$$

Como o conjunto $\{-n,(-n+1),...,0,...,(n-1),n\}$ possui $2n+1$ elementos, para cada coordenada y_i existem exatamente $2n+1$ possibilidades. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C), o conjunto C_n possui $(2n+1)^d$ elementos. □

Proposição 8.8.

(a) *A sequência (h_n) é uniformemente limitada em qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$.*

(b) *A sequência (h_n) é uniformemente equicontínua.*

Demonstração.

(a) De fato, pelo Corolário 7.8, a função h_0 é uniformemente bi-Lipschitz ao longo de cada folha central. Como as funções h_z são translações de h_0, segue que elas também são uniformemente bi-Lipschitz ao longo de cada folha central. Disso, temos

$$\begin{aligned}\|h_n(x)\| &= \left\| \sum_{z\in C_n}^{c} \frac{1}{(2n+1)^d} h_z(x) \right\| \\ &\leqslant K \left\| \sum_{z\in C_n} \frac{1}{(2n+1)^d} h_z(x) \right\| \quad (k \text{ é constante de bi-Lipschitz}) \\ &\leqslant K \sum_{z\in C_n} \frac{1}{(2n+1)^d} \|h_z(x)\| \\ &\leqslant K \sup_{z\in C_n} \|h_z(x)\| \\ &\leqslant K \sup_{z\in C_n} \|h_z(x) - x + x\| \\ &\leqslant K \left(\sup_{z\in C_n} \|h_z(x) - x\| + \|x\| \right).\end{aligned}$$

Se x pertence a um subconjunto compacto, então $\|x\| < \infty$. Além disso, como consequência da Observação 8.2, $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|h_z(x) - x\| = \|h_z - Id\|_0 < \infty$ para todo $z \in \mathbb{Z}^d$. Com isso, a sequência (h_n) restrita a um subconjunto compacto é uniformemente limitada.

(b) De fato, dado $\varepsilon > 0$, como cada $h_z \in \mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_0$ é um conjunto equicontínuo, seque que existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x - y\| < \delta$, então

$$\|h_z(x) - h_z(y)\| < \frac{\varepsilon}{K}$$

para todo $z \in \mathbb{Z}^d$ e $x, y \in \mathbb{R}^d$, onde K é a constante de bi-Lipschitz.

Agora, note que, para todo $n > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\|h_n(x) - h_n(y)\| &= \left\| \sum_{z\in C_n}^{c} \frac{1}{(2n+1)^d} h_z(x) - \sum_{z\in C_n}^{c} \frac{1}{(2n+1)^d} h_z(y) \right\| \\
&= \left\| \sum_{z\in C_n}^{c} \frac{1}{(2n+1)^d} \big(h_z(x) - h_z(y)\big) \right\| \\
&\leqslant K \sum_{z\in C_n} \frac{1}{(2n+1)^d} \|h_z(x) - h_z(y)\| \\
&< K \sum_{z\in C_n} \frac{1}{(2n+1)^d} \frac{\varepsilon}{K} \\
&= \varepsilon \underbrace{\sum_{z\in C_n} \frac{1}{(2n+1)^d}}_{1} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, (h_n) é uniformemente equicontínua.

□

Pela Proposição 8.8, quando a sequência (h_n) é restrita a um subconjunto compacto, tem-se que $(h_n) \subset \mathcal{H}_1$ é uniformemente equicontínua e uniformemente limitada. Assim, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli (Teorema 2.38), esta sequência admite uma subsequência (h_{n_k}) uniformemente convergente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$. Seja h o limite desta subsequência.

Lema 8.9. *[10] A função h é C-equivalente a h_0.*

Demonstração. Por construção, cada h_{n_k} é C-equivalente à h_0, então

$$h_{n_k}(x) \in W_f^c(h_0(x)).$$

Como as folhas são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^d$, temos

$$h(x) = \lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x) \in W_f^c(h_0(x)).$$

□

Observação 8.10. *Por construção, $h(x) \in H(W_g^c(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Portanto $h(g(\mathcal{L})) = f(h(\mathcal{L}))$ para toda folha central $\mathcal{L} \in C_g$.*

Lema 8.11. *[10] A aplicação h é injetora.*

Demonstração. Dados $x, y \in \mathbb{R}^d$ com $x \neq y$. Assim, temos dois casos a considerar: Primeiro caso: Suponha que $y \notin W_g^c(x)$. Nesse caso, temos

$$W_g^c(y) \cap W_g^c(x) = \varnothing.$$

Como H é uma uma conjugação via folhas no espaço das folhas centrais, segue que

$$H(W_g^c(y)) \cap H(W_f^c(x)) = \varnothing.$$

Pela construção de h_0 e pelo Lema 8.9 , segue que $h(y) \neq h(x)$.

Segundo caso: suponha que $y \in W_g^c(x)$. Pelo Corolário 7.9, a aplicação h_0 é bi-Lipschitz ao longo das folhas centrais. Portanto, existe uma constante $r > 0$ tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$ pertencentes a mesma folha central de g, vale

$$d_f^c(h_0(x), h_0(y)) \geqslant r \cdot d_g^c(x, y). \tag{8.3}$$

Além disso, como cada aplicação h_z, $z \in \mathbb{Z}^d$, são apenas shifts de h_0, portanto também são bi-Lipschitz ao longo de cada folha central, assim a desigualdade (8.3) também é verdadeira para h_z. Seja $\sum^c a_i h_i$ uma combinação afim. Como as aplicações h_0 e seus shifts h_z presevam a orientação das folhas centrais, então

$$d_f^c\left(\sum{}^c a_i h_{z_i}(x), \sum{}^c a_i h_{z_i}(y)\right) = \sum a_i \cdot d_f^c(h_{z_i}(x), h_{z_i}(y)).$$

Portanto,

$$d_f^c\left(\sum^c a_i h_{z_i}(x), \sum^c a_i h_{z_i}(y)\right) \geqslant r \cdot d_g^c(x,y).$$

Em particular, vale que

$$d_f^c(h_{n_k}(x), h_{n_k}(y)) \geqslant r \cdot d_g^c(x,y).$$

Como $h_{n_k} \longrightarrow h$ e a função distância é contínua, passando o limite obtemos

$$d_f^c(h(x), h(y)) \geqslant r \cdot d_g^c(x,y).$$

Como $x \neq y$, segue que $d_g^c(x,y) > 0$. Além disso, como $r > 0$, resulta que

$$d_f^c(h(x), h(y)) > 0 \Longrightarrow h(x) \neq h(y).$$

Portanto, em qualquer caso, $h(x) \neq h(y)$ para $x \neq y$. Com isso, concluímos que h é uma aplicação injetora. □

Lema 8.12. *[10] A aplicação h satisfaz a seguinte propriedade,*

$$h(x+v) = h(x) + v,$$

para todo $v \in \mathbb{Z}^d$ e todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Demonstração. Note que, basta mostrar que vale para todo $v \in \mathcal{B}$, onde $\mathcal{B}$ é a base canônica de $\mathbb{Z}^d$, ou seja,

$$\mathcal{B} = \{(1,0,...,0), (0,1,...,0), ..., (0,0,...,1)\}.$$

Mostraremos que

$$h(x+w) = h(x) + w,$$

onde $w = (1,0,...,0) \in \mathcal{B}$. Para os outros vetores da base $\mathcal{B}$ a demonstração segue de forma análoga.

Fixe $x \in \mathbb{R}^d$. Considere $\mathcal{L} = h(W_g^c(x))$ e seja $\psi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma isometria, ou seja,

$$|\psi(a) - \psi(b)| = d_f^c(a,b) \quad \text{para todo} \quad a, b \in \mathcal{L}. \tag{8.4}$$

Nesse caso, ψ é uma parametrização por comprimento de arco. Assim, para $h_n \in \mathcal{H}_1$, temos

$$\psi(h_n(x)) = \psi\left(\sum_{z\in C_n}^{c} \frac{1}{(2n+1)^d} h_z(x)\right) \overset{(8.4)}{=} \frac{1}{(2n+1)^d} \sum_{z\in C_n} \psi(h_z(x)).$$

Além disso, observe que

(i) $h_z(x+w) = h_0((x+w)-z)+z = h_0((x-(z-w))+(z-w)+w = h_{z-w}(x)+w.$

(ii)

$$\begin{aligned} h_n(x+w) &= \sum_{z\in C_n}^{c} \frac{1}{(2n+1)^d} h_z(x+w) \\ &\overset{(i)}{=} \sum_{z\in C_n}^{c} \frac{1}{(2n+1)^d} (h_{z-w}(x)+w) \\ &= \sum_{z\in C_n}^{c} \frac{1}{(2n+1)^d} h_{z-w}(x) + w \quad (\text{ As folhas são invariantes por } \mathbb{Z}^d). \end{aligned}$$

(iii) $h_n(x+w) - w \overset{(ii)}{=} \sum_{z\in C_n}^{c} \frac{1}{(2n+1)^d} h_{z-w}(x).$

A menos de uma mudança de variável em **(iii)**, temos que

$$\begin{aligned} h_n(x+w) - w &= \sum_{z\in C_n - w}^{c} \frac{1}{(2n+1)^d} h_z(x) \\ \overset{(8.4)}{\Longrightarrow} \psi(h_n(x+w)-w) &= \frac{1}{(2n+1)^d} \sum_{z\in C_n - w} \psi(h_z(x)). \end{aligned}$$

Então,

$$\psi(h_n(x+w)-w) - \psi(h_n(x)) = \frac{1}{(2n+1)^d}\left(\sum_{z\in C_n - w} \psi(h_z(x)) - \sum_{z\in C_n} \psi(h_z(x))\right). \quad (8.5)$$

Defina os seguintes conjuntos:

- $C_n^+ = C_n \backslash C_n - w = \{(n, y_2, ..., y_d) \in \mathbb{Z}^d : \max\{|y_i\} \leqslant n\}.$
- $C_n^- = C_n - w \backslash C_n = \{(-n-1, y_2, ..., y_d) \in \mathbb{Z}^d : \max\{|y_i\} \leqslant n\}.$

Note que, quando $C_n \cap (C_n - w) \neq \varnothing$, os termos da equação (8.5) se cancelam. Logo,

$$\psi(h_n(x+w)-w) - \psi(h_n(x)) = \frac{1}{(2n+1)^d}\left(\sum_{z\in C_n^-}\psi(h_z(x)) + \sum_{z\in C_n^+}\psi(h_z(x))\right).$$

Como todas as funções h_z estão a uma distância uniformemente limitada umas das outras, então, o conjunto

$$\{\psi(h_z(x)) : z \in \mathbb{Z}^d\}$$

é limitado, digamos por $R > 0$. Assim,

$$|\psi(h_z(x))| < R.$$

Pela equação (8.5), temos

$$\begin{aligned}
|\psi(h_n(x+w)-w) - \psi(h_n(x))| &= \left|\frac{1}{(2n+1)^d}\left(\sum_{z\in C_n^-}\psi(h_z(x)) + \sum_{z\in C_n^+}\psi(h_z(x))\right)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{(2n+1)^d}\left(\sum_{z\in C_n^-}|\psi(h_z(x))| + \sum_{z\in C_n^+}|\psi(h_z(x))|\right) \\
&< \frac{1}{(2n+1)^d}\left(\sum_{z\in C_n^-}R + \sum_{z\in C_n^+}R\right).
\end{aligned}$$

Usando os mesmos argumentos da Proposição 8.7, podemos mostrar que C_n^+ e C_n^- possuem $(2n+1)^{d-1}$ elementos. Assim,

$$\begin{aligned}
|\psi(h_n(x+w)-w) - \psi(h_n(x))| &< \frac{1}{(2n+1)^d}(R(2n+1)^{d-1} + R(2n+1)^{d-1}) \\
&= \frac{2R}{(2n+1)^d}(2n+1)^{d-1} \\
&= \frac{2R}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Como $h_n \in \mathcal{H}_1$ é qualquer, então

$$|\psi(h_{n_k}(x+w)-w) - \psi(h_{n_k}(x))| < \frac{2R}{2n_k+1}.$$

Aplicando o limite quando $k \longrightarrow \infty$, obtemos

$$|\psi(h(x+w)-w) - \psi(h(x))| \leqslant 0 \Longrightarrow |\psi(h(x+w)-w) - \psi(h(x))| = 0$$

$$\implies h(x+w) - w = h(x)$$
$$\implies h(x+w) = h(x) + w.$$

□

Pelo Lema 8.12, $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ induz uma aplicação $\bar{h} : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$.

Teorema 8.13. *A aplicação $\bar{h}$ é uma conjugação via folhas entre $f_0 : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ e sua linearização $g_0 : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$.*

Demonstração. Como h leva folhas centrais de g em folhas centrais de f, então $\bar{h}$ leva folhas centrais de g_0 em folhas de f_0. Além disso, pela Observação 8.10, h satisfaz

$$h(g(\mathcal{L})) = f(h(\mathcal{L}))$$

para toda folha central $\mathcal{L}$ de g. Disto, segue que

$$\bar{h}(g_0(\mathcal{L})) = f_0(\bar{h}(\mathcal{L}))$$

para toda folha central $\mathcal{L}$ de g_0.
Sabemos que o toro $\mathbb{T}^d$ é uma variedade topológica compacta, conexa e Hausdorff.
Afirmação: $\bar{h}$ é um homeomorfismo.
De fato, observe que

(1) $\bar{h}$ é contínua e injetora, pois h é contínua e injetora.

(2) Como $\bar{h}$ é contínua e injetora entre variedades topológicas de mesma dimensão, o Teorema da Invariância do Domínio (Brouwer) garante que $\bar{h}$ é um homeomorfismo local, e que $\bar{h}(\mathbb{T}^d)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{T}^d$.

(3) Como $\mathbb{T}^d$ é compacto e $\bar{h}$ é contínua, a imagem $\bar{h}(\mathbb{T}^d)$ é compacta. Sendo $\mathbb{T}^d$ Hausdorff, todo subconjunto compacto é fechado. Logo, $\bar{h}(\mathbb{T}^d)$ é fechado.

(4) $\bar{h}(\mathbb{T}^d)$ é um subconjunto aberto e fechado do toro $\mathbb{T}^d$. Como $\mathbb{T}^d$ é conexo, o único conjunto aberto e fechado não trivial é ele mesmo. Logo, $\bar{h}(\mathbb{T}^d) = \mathbb{T}^d$, ou seja, $\bar{h}$ é sobrejetora.

(5) Dos itens (1) e (4), $\bar{h}$ é uma bijeção contínua.

(6) Como $\bar{h}$ é uma bijeção contínua, com domínio compacto ($\mathbb{T}^d$) e contradomínio Hausdorff ($\mathbb{T}^d$), segue do Teorema 2.17, $\bar{h}$ é um homeomorfismo.

Portanto, $\bar{h}$ é uma conjugação via folhas entre f_0 e sua linearização g_0. □

Concluímos, assim, a demonstração do Teorema 1.3.

Referências Bibliográficas

[1] BARREIRA, L.; VALLS, C. *Equações diferenciais ordinárias: teoria qualitativa*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.

[2] BRIN, M. On dynamical coherence. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, v. 23, n. 2, p. 395–401, 2003.

[3] BRIN, M.; BURAGO, D.; IVANOV, S. Dynamical coherence of partially hyperbolic diffeomorphisms of the 3-torus. *Journal of Modern Dynamics*, v. 3, n. 1, p. 1–11, 2009.

[4] BRIN, M.; BURAGO, D.; IVANOV, S. On partially hyperbolic diffeomorphisms of 3-manifolds with commutative fundamental group. In: FISHER, B. et al. (Org.). *Modern Dynamical Systems and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[5] BRIN, M.; STUCK, G. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[6] BRIN, M.; PESIN, Y. Partially hyperbolic dynamical systems. *Mathematics of the USSR-Izvestija*, Moscou, v. 8, p. 177–218, 1974.

[7] COSTA, J. S. C.; MICENA, F. Some generic properties of partially hyperbolic endomorphisms. *Nonlinearity*, Bristol, v. 35, n. 10, p. 5297–5331, 2022.

[8] COSTA, J. S. C. *Rigidez e semi-rigidez dos expoentes de Lyapunov em dimensão mais alta e folheações patológicas*. 2017. 107 f. Tese (Doutorado em Matemática) —

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

[9] FRANKS, J. Anosov diffeomorphisms. In: *Global Analysis: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. v. 14, p. 61–93, 1970.

[10] HAMMERLINDL, A. Leaf conjugacies on the torus. Ergodic Theory and Dynamical Systems, v. 33, n. 3, p. 896–933, 2013.

[11] HERTZ, F. R.; HERTZ, M. R.; URES, R. A non-dynamically coherent example on $\mathbb{T}^3$. In: ELSEVIER. **Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis**. [S.1.], 2015.

[12] HERTZ, F.R.; HERTZ, M. R; URES, R. Accessibility and stable ergodicity for partially hyperbolic diffeomorphisms with 1D-center bundle. *Inventiones Mathematicae*, Berlin, v. 172, p. 353–381, 2008.

[13] HIRSCH, M. W.; PUGH, C. C.; SHUB, M. *Invariant manifolds*. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[14] LIMA, E.L. *Curso de análise*. v.1.11. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2004.

[15] LIMA, E.L. *Espaços métricos*. 4. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2011.

[16] LIMA, E.L., *Variedades Diferenciáveis*. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[17] MANNING, A. There are no new Anosov diffeomorphisms on tori. *American Journal of Mathematics*, v. 96, n. 3, p. 422–429, 1974.

[18] MEGGINSON, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory*. New York: Springer, 1998.

[19] MICENA, F. P. *Avanços em dinâmica parcialmente hiperbólica e entropia para sistema iterado de funções*. 2011. 157 f. Tese (Doutorado em Matemática) — Instituto

de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

[20] MUNKRES, J.R. Topology. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000.

[21] PESIN, Y. B. *Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity*. [S.l.]: European Mathematical Society, 2004.

[22] RUDIN, W. *Principles of mathematical analysis*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1976.

[23] RUDIN, W. *Real and complex analysis*. 3. ed. McGraw-Hill, 1987.