

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Índice de Morse de Configurações Centrais Simétricas

Edson Alexsander de Souza

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
FAPEMIG

JULHO DE 2025

ITAJUBÁ – MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Edson Alexander de Souza

Índice de Morse de Configurações Centrais Simétricas

Orientador: Prof. Dr. Lucas Ruiz dos Santos

JULHO DE 2025

ITAJUBÁ – MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Edson Alexander de Souza

Dissertação aprovada por banca examinadora em Julho de 2025, conferindo ao autor o Título de Mestre em Ciências em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Lucas Ruiz dos Santos (Orientador)

Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos

ITAJUBÁ – MG

JULHO DE 2025

Dedico este trabalho, primeiramente, a Deus, por me conceder sabedoria, força e perseverança ao longo desta caminhada. À minha esposa, Ana Sandrini de Melo, por estar sempre ao meu lado com amor e apoio incondicional.

Agradecimentos

Agradeço, antes de tudo, a Deus, por ter me sustentado com força, saúde e fé durante todo este percurso.

À minha esposa, Ana Sandrini de Melo, por estar ao meu lado em todos os momentos, com amor, paciência e incentivo incondicional. Sua presença foi fundamental para que eu nunca desistisse.

À minha família, por todo o apoio, carinho e compreensão nos momentos de ausência e dedicação ao mestrado. Em especial aos meus primos, que sempre torceram por mim e celebraram cada conquista como se fosse deles.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Lucas Ruiz dos Santos, pela orientação cuidadosa, pelas discussões produtivas e pela confiança no desenvolvimento deste trabalho. Sua dedicação e paciência foram essenciais para minha formação acadêmica.

Aos colegas e amigos do mestrado, que tornaram essa jornada mais leve com amizade, apoio mútuo e bons momentos compartilhados. E a todos os professores do programa, cujas aulas e ensinamentos contribuíram de forma significativa para minha formação e para o amadurecimento deste trabalho.

A todos, meu sincero agradecimento.

“A essência da matemática é a sua liberdade”.

(Georg Cantor 1845-1918)

Resumo

Este trabalho investiga a estabilidade, no sentido do índice de Morse, de configurações centrais simétricas no problema de N corpos com interação dada por um potencial homogêneo geral. Utilizando a estrutura simétrica das configurações e ferramentas como matrizes circulantes, é possível calcular os autovalores da matriz hessiana e determinar o índice de Morse em diversos casos. Também analisamos extensões com massas centrais e configurações empilhadas, identificando padrões de instabilidade e propondo duas conjecturas sobre o comportamento geral do índice.

Palavras-chave: Configurações Centrais, Índice de Morse, Estabilidade, Problema de N Corpos

Abstract

This work investigates the stability, in the sense of the Morse index, of symmetric central configurations in the N -body problem with interaction given by a general homogeneous potential. By exploiting the symmetric structure of the configurations and using tools such as circulant matrices, it is possible to compute the eigenvalues of the associated hessian matrix and determine the Morse index in various cases. We also analyze extensions involving central masses and stacked configurations, identifying instability patterns and proposing two conjectures regarding the general behavior of the index.

Keywords: Central Configurations, Morse Index, Stability, N-Body Problem

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	vii
1 O Problema de N Corpos	1
1.1 Introdução	1
1.2 Equações de Movimento	2
1.3 Configurações Centrais	6
1.4 Equações de Andoyer e Aplicações	9
2 Matrizes Circulantes e Polinômios de Chebyshev	15
2.1 Introdução	15
2.2 Matrizes Circulantes	16
2.2.1 Autovalores e Autovetores	16
2.2.2 Operações Matriciais em Matrizes Circulantes	20
2.3 Polinômios de Chebyshev	24
2.3.1 Polinômios de Primeira Espécie (T_n)	25
2.3.2 Polinômios de Segunda Espécie (U_n)	28

2.3.3	Identities Fundamentais dos Polinômios de Chebyshev	30
3	Índice de Morse de Configurações Centrais Poligonais	33
3.1	Introdução	33
3.2	O polígono regular no problema dos N-corpos	38
3.3	O polígono regular no caso de vórtices	51
3.4	O polígono regular para $A > 2$	64
4	Extensão para Configurações Simétricas Empilhadas	76
4.1	Configurações Centrais Poligonais com Massa Central	77
4.2	Configurações Poligonais de Vórtices com um Vórtice Central	82
4.2.1	Triângulo Equilátero com Vórtice Central	82
4.2.2	Quadrado com Vórtice Central	89
4.2.3	Pentágono com Vórtice Central	91
4.2.4	Hexágono com Vórtice Central	94
4.2.5	Heptágono com Vórtice Central	97
4.2.6	Octógono com Vórtice Central	100
4.3	Configurações com Massa Central para $A > 2$	103
4.3.1	Triângulo Equilátero com Massa Central para $A > 2$	103
4.3.2	Quadrado com Massa Central para $A > 2$	106
4.3.3	Hexágono com Massa Central para $A > 2$	109
4.4	Configurações com Dois Triângulos Equiláteros Encaixados	116
4.4.1	Configuração com Dois Triângulos Equiláteros Concêntricos e Ali- nhados	117
4.4.2	Configuração com Dois Triângulos Equiláteros Rotacionados	121
	Conclusões	125

Lista de Figuras

3.1	Retratos de fase do pêndulo. Esquerda: pêndulo sem amortecimento, as soluções coincidem com as curvas de nível da Hamiltoniana. Direita: pêndulo amortecido.	37
3.2	Posição das raízes do polinômio $f(i)$	64
3.3	Gráfico da função (3.38) proposta pela Conjectura 1, e os valores do expoente crítico A_N , para $5 \leq N \leq 15$, obtidos com tratamento numérico. . . .	72
3.4	Índice de Morse para a configuração hexagonal em função do expoente A . . .	73
4.1	Configuração com massas m_1, \dots, m_N em polígono regular e uma massa central	77
4.2	Configuração geométrica do caso $N = 4$ com m_4 central.	82
4.3	Configuração geométrica do caso $N = 5$ com m_5 central.	89
4.4	Configuração geométrica do caso $N = 6$ com m_6 central.	91
4.5	Configuração geométrica do caso $N = 7$ com m_7 central.	94
4.6	Configuração geométrica do caso $N = 8$ com m_8 central.	97
4.7	Configuração geométrica do caso $N = 9$ com m_9 central.	100
4.8	Valor crítico de m_4 para o qual o coeficiente c muda de sinal, em função do parâmetro A	106
4.9	Valor crítico de m_5 para o qual o coeficiente c do polinômio característico muda de sinal, em função do parâmetro A	109
4.10	Valores críticos de m_7 para os quais os coeficientes c e $a_{11,11}$ mudam de sinal, em função do parâmetro A	113

4.11	Valor crítico de m_7 para o qual o coeficiente c do bloco 3×3 muda de sinal, em função de $A \in (2, A_3)$	114
4.12	Índice de Morse do hexágono com massa central, para $A > 2$	115
4.13	Configuração com dois triângulos equiláteros concêntricos e alinhados.	116
4.14	Configuração com dois triângulos equiláteros rotacionado.	117
4.15	Comportamento da função $m_4(x)$ no intervalo $x \in (0, 1)$	119
4.16	Índice de Morse de triângulos empilhados e alinhados.	121
4.17	Comportamento da função $m_4(x)$ no intervalo $x \in (0, 0.5)$	122
4.18	Comportamento da função $m_4(x)$ no intervalo $x \in (0.6, 1)$	123
4.19	Índice de Morse de triângulos empilhados e rotacionados no intervalo $x \in (0, 0.41389)$	124
4.20	Índice de Morse triângulos empilhados e rotacionados no intervalo $x \in (0.61737, 1)$	124

Capítulo 1

O Problema de N Corpos

1.1 Introdução

O Problema Newtoniano de N Corpos é um dos desafios clássicos da mecânica celeste e da física matemática. Ele descreve a evolução de N partículas que interagem sob a influência de forças gravitacionais mútuas. Segundo a Lei da Gravitação Universal de Newton, essa força é proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa (NEWTON, 1687).

As equações de movimento desse sistema são formuladas a partir dessa interação e expressam a aceleração de cada partícula em função das forças exercidas pelas demais. No entanto, essas equações se tornam singularmente indefinidas quando ocorre a sobreposição de corpos, o que motiva a definição do conjunto de colisão e do espaço de configurações do sistema.

Outro conceito fundamental para a compreensão da dinâmica do sistema é o das configurações centrais, nas quais a aceleração de cada partícula aponta na direção do centro de massa, permitindo soluções especiais das equações do movimento. Essas configurações desempenham um papel crucial na caracterização das órbitas e podem ser determinadas por meio das equações de Andoyer, que reformulam as condições de equilíbrio do sistema.

Neste capítulo, apresentamos as equações de movimento, suas propriedades fundamentais e as principais definições utilizadas ao longo do texto, estabelecendo a base teórica

necessária para o estudo das configurações centrais e suas aplicações. Boa parte do conteúdo desse capítulo é baseada na tese de doutorado (FERNANDES, 2011).

No Capítulo 2 apresentamos algumas propriedades das matrizes circulantes e polinômios de Chebyshev, necessárias para esse trabalho. No Capítulo 3 estudamos com detalhes o índice de Morse de configurações centrais no formato de polígono regular, para expoente arbitrário, e estendemos alguns desses resultados para configurações empilhadas no Capítulo 4.

1.2 Equações de Movimento

Considere um sistema isolado formado por N partículas de massas m_1, m_2, \dots, m_N , localizadas pelas coordenadas q_1, q_2, \dots, q_N , respectivamente. Considere $q_i \in \mathbb{R}^3$ com norma e produto interno usuais.

Pela Lei da Gravitação Universal de Newton, dois corpos quaisquer no universo se atraem mutuamente com uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles (NEWTON, 1687).

Considerando a força gravitacional exercida pela partícula j sobre a partícula i , segundo o modelo proposto por Newton, obtemos as seguintes equações de movimento que regem a dinâmica do sistema:

$$m_i \ddot{q}_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^N m_i m_j \frac{q_i - q_j}{r_{i,j}^3}, \quad (1.1)$$

onde $r_{i,j} = |q_i - q_j|$ é a distância entre as partículas i e j , e a constante de gravitação é tomada igual à unidade, o que não ocasiona perda de generalidade para os assuntos tratados no texto.

A partir deste ponto, utilizamos a expressão *Problema Newtoniano de N corpos* para caracterizar sistemas de N partículas que interagem gravitacionalmente, conforme as hipóteses atuais, ressaltando que, posteriormente, consideraremos também potenciais ho-

homogêneos de grau $-A + 2$, com $A > 2$.

Observe que a equação (1.1) deixa de estar bem definida no caso de colisão entre partículas, ou seja, quando ocorre a sobreposição de corpos. Essa observação motiva a definição a seguir.

Definição 1.2.1. *No problema Newtoniano de N corpos, chamaremos de conjunto colisão o seguinte conjunto:*

$$\Delta = \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij}$$

onde:

$$\Delta_{ij} = \{Q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N} \mid q_i = q_j\}.$$

Seja $X = \mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta$ o espaço de configurações do sistema, ou seja, o conjunto de todas as posições possíveis das partículas sem coincidência de posições. Neste domínio, o lado direito da equação (1.1) define uma função analítica. Ressaltamos, no entanto, que isso não impede a ocorrência de colisões no decorrer da evolução do sistema.

A seguir, apresentamos algumas definições que serão fundamentais no decorrer deste trabalho.

Definição 1.2.2. *No problema Newtoniano de N corpos, chamaremos de:*

- *Massa total do sistema a seguinte quantidade escalar*

$$M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (1.2)$$

- *Centro de massa do sistema o seguinte vetor*

$$q_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i q_i. \quad (1.3)$$

Pelas leis de conservação, o vetor q_C move-se com velocidade constante. Dessa

forma podemos, sem perda de generalidade, adotar um referencial inercial no qual $q_C = 0$, chamado de referencial baricêntrico.

- *Momento linear total do sistema o seguinte vetor*

$$P = \sum_{i=1}^N m_i \dot{q}_i. \quad (1.4)$$

- *Energia cinética total do sistema a seguinte quantidade escalar*

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{q}_i|^2. \quad (1.5)$$

- *Energia potencial do sistema a seguinte quantidade escalar*

$$\mathcal{U} = - \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}. \quad (1.6)$$

- *Energia total do sistema a seguinte quantidade escalar*

$$E = T + \mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{q}_i|^2 - \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}. \quad (1.7)$$

- *Momento angular total do sistema o seguinte vetor*

$$J = \sum_{i=1}^N m_i (q_i \wedge \dot{q}_i), \quad (1.8)$$

onde \wedge representa o produto vetorial de \mathbb{R}^3 .

Definição 1.2.3. No problema Newtoniano de N corpos, chamamos de momento de inércia a seguinte quantidade escalar:

$$I = \frac{1}{M} \sum_{i < j} m_i m_j r_{i,j}^2, \quad (1.9)$$

onde $r_{i,j} = |q_i - q_j|$ denota a distância entre as partículas i e j . No caso particular em que o centro de massa do sistema está na origem (referencial baricêntrico), essa expressão pode ser reescrita como:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2, \quad (1.10)$$

onde $r_i = |q_i|$ representa a distância da i -ésima partícula à origem.

De fato, se o centro de massa do sistema está na origem,

$$\sum_{i=1}^N m_i q_i = 0,$$

então valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i<j} m_i m_j r_{i,j}^2 &= \sum_{i,j} m_i m_j (q_i - q_j) \cdot (q_i - q_j) = \sum_{i,j} m_i m_j (r_i^2 - 2q_i \cdot q_j + r_j^2) \\ &= \sum_{j=1}^N m_j \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 - 2 \sum_{j=1}^N m_j q_j \cdot \sum_{i=1}^N m_i q_i + \sum_{j=1}^N m_j r_j^2 \sum_{i=1}^N m_i \\ &= 2M \sum_{i=1}^N m_i r_i^2, \end{aligned}$$

e, portanto, as expressões (1.9) e (1.10) ficam equivalentes.

Nos capítulos seguintes, trabalharemos com potenciais atrativos homogêneos de grau arbitrário $-A + 2$, com $A > 2$. Essa generalização nos permite considerar diferentes tipos de interação entre os corpos, não se limitando apenas ao caso gravitacional. Além disso, essa escolha ainda preserva a estrutura necessária para o estudo de configurações centrais. Por isso, adotaremos a forma geral do potencial com expoente $A > 2$ a partir deste ponto.

Definição 1.2.4. *O potencial generalizado do sistema é dado por*

$$\mathcal{U} = \frac{1}{A-2} \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{i,j}^{A-2}}, \quad (1.11)$$

onde $A > 2$ é um parâmetro fixo que determina o grau de homogeneidade do potencial. O potencial newtoniano é o caso especial $A = 3$.

1.3 Configurações Centrais

Definição 1.3.1. Chamamos de configuração central qualquer vetor $Q \in \mathbb{R}^{3N} - \Delta$ que seja solução da equação:

$$\nabla \mathcal{U}(Q) = \lambda \mathcal{M}Q, \quad (1.12)$$

para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, onde \mathcal{U} é um potencial atrativo homogêneo de grau $-A+2$, com $A > 2$, e \mathcal{M} é a matriz diagonal das massas, isto é, a matriz diagonal de ordem $3N \times 3N$, cujas entradas diagonais são as massas m_i repetidas em blocos de 3×3 .

A partir desta definição, podemos demonstrar uma propriedade fundamental das configurações centrais, relacionada à sua invariância por homotetias.

Teorema 1.3.1. Seja $\mathcal{U} : X \subset \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial homogêneo de grau $-A+2$, com $A > 2$, e seja Q uma configuração central associada à constante λ , isto é, $\nabla \mathcal{U}(Q) = \lambda \mathcal{M}Q$. Então, para todo escalar $k > 0$, o vetor kQ também é uma configuração central, com constante

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{k^A}.$$

Demonstração. Como \mathcal{U} é homogêneo de grau $-A+2$, seu gradiente satisfaz a propriedade:

$$\nabla \mathcal{U}(kQ) = \frac{1}{k^{A-1}} \nabla \mathcal{U}(Q), \quad (1.13)$$

para todo $k > 0$.

Como Q é uma configuração central associada à constante λ , temos que

$$\nabla \mathcal{U}(Q) = \lambda \mathcal{M}Q. \quad (1.14)$$

Substituindo (1.14) na equação (1.13), obtemos:

$$\nabla \mathcal{U}(kQ) = \frac{1}{k^{A-1}} \lambda \mathcal{M}Q = \frac{\lambda}{k^A} \mathcal{M}(kQ).$$

Portanto, kQ também satisfaz a equação de configuração central, com constante $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{k^A}$, como queríamos demonstrar. \square

Observação 1.3.1. *Podemos definir uma configuração central de forma equivalente, usando a equação de movimento (1.1). Ela ocorre quando as posições e acelerações dos corpos satisfazem a relação:*

$$\ddot{q}_i = \lambda q_i, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (1.15)$$

onde $\lambda = \lambda(q_1, \dots, q_N)$ é uma função não nula. Em termos físicos, isso implica que a força resultante atuando sobre o i -ésimo corpo aponta na direção do centro de massa, ou equivalentemente:

$$\lambda q_i = - \sum_{k \neq i} m_k \frac{(q_i - q_k)}{q_{i,k}^A}, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (1.16)$$

onde $q_{i,k} = |q_i - q_k|$ é a distância entre os corpos i e k , e $-A+2 < 0$ é o grau do potencial homogêneo considerado.

Podemos encontrar o valor de λ da seguinte maneira, em acordo com as definições e notações vistas neste capítulo:

$$m_i \ddot{q}_i = -\nabla_i \mathcal{U}. \quad (1.17)$$

Usando a equação (1.15), temos

$$m_i \ddot{q}_i = -\nabla_i \mathcal{U} = \lambda m_i q_i.$$

Se tomarmos o produto interno por q_i em ambos os membros e somar em i , obtemos:

$$(-\nabla_i \mathcal{U}) \cdot q_i = \lambda m_i q_i \cdot q_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N (-\nabla_i \mathcal{U}) \cdot q_i = \lambda \sum_{i=1}^N m_i |q_i|^2.$$

Como \mathcal{U} é homogênea de grau $-(A - 2)$, ela satisfaz a identidade:

$$\sum_{i=1}^N \nabla_i \mathcal{U} \cdot q_i = -(A - 2)\mathcal{U}.$$

Portanto, obtemos:

$$(A - 2)\mathcal{U} = \lambda \sum_{i=1}^N m_i |q_i|^2 = 2\lambda I,$$

onde usamos a Definição 1.2.3 do momento de inércia I .

Assim, concluímos que:

$$\lambda = \frac{(A - 2)\mathcal{U}}{2I}.$$

De acordo com o Teorema 1.3.1, se uma configuração Q é solução da equação de configurações centrais, então qualquer múltiplo kQ , com $k > 0$, também será uma solução, mas com uma nova constante dada por $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{k^A}$. Por esse motivo, vamos considerar que duas configurações centrais são equivalentes se diferem apenas por uma homotetia em relação ao centro de massa. Além disso, se fizermos rotações ao redor do centro de massa, a condição de configuração central continua valendo. Assim, também vamos considerar configurações centrais equivalentes quando diferem apenas por uma rotação rígida em torno do centro de massa.

Definição 1.3.2. Classes de Equivalência: *Duas configurações centrais são consideradas equivalentes quando é possível obter uma a partir da outra por meio de uma homotetia e/ou uma rotação rígida em torno do centro de massa. A partir de agora, quando nos referirmos a uma configuração central, estaremos falando da sua classe de equivalência.*

Há muitos exemplos clássicos de configurações centrais. O mais simples é o caso de dois corpos. Também podemos citar as configurações colineares descritas por Euler e as triangulares equiláteras estudadas por Lagrange, que são exemplos fundamentais de configurações centrais e que originam as soluções homográficas.

Ao longo da história do problema dos N corpos, diversas configurações centrais já foram analisadas e catalogadas.

1.4 Equações de Andoyer e Aplicações

Vamos agora apresentar um conjunto de equações que são bastante úteis na identificação de configurações centrais. Essas equações são conhecidas como equações de Andoyer, e uma referência sobre o assunto pode ser encontrada na tese (FERNANDES, 2011).

Definição 1.4.1. *As equações de Andoyer, para configurações planares, são dadas por*

$$f_{i,j} = \sum_{k \neq i,j} m_k (R_{i,k} - R_{j,k}) \Delta_{i,j,k} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad (1.18)$$

onde $R_{i,j} = R_{j,i} = |q_i - q_j|^{-A}$, $q_i \in \mathbb{R}^2$, e $\Delta_{i,j,k} = (q_i - q_j) \wedge (q_i - q_k)$ representam duas vezes a área com sinal do triângulo formado pelas partículas de massas m_i , m_j e m_k .

Esse sistema tem $\frac{N(N-1)}{2}$ equações. Mesmo resultando em mais equações do que o problema original, em alguns casos elas são mais fáceis de trabalhar.

Demonstra-se que agora que as expressões em (1.16) são equivalentes à expressão (1.18) no caso não colinear.

Teorema 1.4.1. *Considere um sistema de N corpos não colineares, então eles formam uma configuração central se, e somente se, satisfizerem a seguinte condição:*

$$f_{i,j} = 0, \quad \forall i, j \quad (1 \leq i < j \leq N).$$

Demonstração. Suponha que os N corpos estejam em uma configuração central planar. Isso significa que existe uma constante λ tal que:

$$\lambda q_i = - \sum_{k \neq i} m_k R_{i,k} (q_i - q_k),$$

com $R_{i,k} = |q_i - q_k|^{-A}$ e $A > 2$ conforme o potencial adotado.

Escolhendo um índice $j \neq i$, podemos destacar um termo da soma:

$$\lambda q_i = - \sum_{k \neq i, j} m_k R_{i,k} (q_i - q_k) - m_j R_{i,j} (q_i - q_j). \quad (1.19)$$

Analogamente, temos para q_j :

$$\lambda q_j = - \sum_{k \neq j, i} m_k R_{j,k} (q_j - q_k) - m_i R_{j,i} (q_j - q_i). \quad (1.20)$$

Subtraindo a expressão (1.19) por (1.20), obtemos:

$$\lambda(q_i - q_j) = - \sum_{k \neq i, j} m_k [R_{i,k} (q_i - q_k) - R_{j,k} (q_j - q_k)] - [m_j R_{i,j} - m_i R_{j,i}] (q_i - q_j). \quad (1.21)$$

Tomando o produto vetorial com $(q_i - q_j)$ em ambos os membros de (1.21), temos:

$$\lambda(q_i - q_j) \wedge (q_i - q_j) = 0,$$

e os demais termos resultam em:

$$0 = - \sum_{k \neq i, j} m_k [R_{i,k} \Delta_{i,j,k} - R_{j,k} \Delta_{i,j,k}] - [m_j R_{i,j} - m_i R_{j,i}] (q_i - q_j) \wedge (q_i - q_j)$$

$$0 = - \sum_{k \neq i, j} m_k (R_{i,k} - R_{j,k}) \Delta_{i,j,k} - 0$$

$$0 = -f_{i,j}.$$

Logo, $f_{i,j} = 0$, para todo $1 \leq i < j \leq N$.

Reciprocamente, suponha que as equações de Andoyer sejam satisfeitas, ou seja:

$$f_{i,j} = \sum_{k \neq i, j} m_k (R_{i,k} - R_{j,k}) (q_i - q_j) \wedge (q_i - q_k) = 0,$$

para $1 \leq i < j \leq N$, as quais podem ser escritas na forma:

$$\sum_{k \neq i, j} m_k R_{i,k}(q_i - q_j) \wedge (q_i - q_k) = \sum_{k \neq i, j} m_k R_{j,k}(q_i - q_j) \wedge (q_i - q_k). \quad (1.22)$$

Adicionando os termos com $k = j$ à esquerda e $k = i$ à direita da equação (1.22), sem alterar a igualdade, temos:

$$\sum_{k \neq i} m_k R_{i,k}(q_i - q_j) \wedge (q_i - q_k) = \sum_{k \neq j} m_k R_{j,k}(q_i - q_j) \wedge (q_i - q_k),$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq i} m_k R_{i,k}(q_i - q_j) \wedge (q_i - q_k) &= \sum_{k \neq j} m_k R_{j,k}[q_i \wedge q_i - q_i \wedge q_k - q_j \wedge q_i + q_j \wedge q_k] \\ (q_i - q_j) \wedge \sum_{k \neq i} m_k R_{i,k}(q_i - q_k) &= \sum_{k \neq j} m_k R_{j,k}[q_i \wedge (q_j - q_k) + (q_j \wedge q_k)]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Denotando $\nabla_i \mathcal{U}$ por F_i , essa igualdade (1.23) se torna:

$$(q_i - q_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = \sum_{k \neq j} m_k R_{j,k}[q_i \wedge (q_j - q_k) + (q_j \wedge q_k)].$$

Podemos acrescentar o termo $-q_j$ no interior do último parênteses do lado direito da equação (1.23) sem modificar a igualdade. Assim, temos:

$$(q_i - q_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = \sum_{k \neq j} m_k R_{j,k}[q_i \wedge (q_j - q_k) + q_j \wedge (-q_j + q_k)].$$

Organizando o lado direito da igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} (q_i - q_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} &= \sum_{k \neq j} m_k R_{j,k}[(q_i - q_j) \wedge (q_j - q_k)] \\ &= (q_i - q_j) \wedge \frac{F_j}{m_j}. \end{aligned}$$

Assim,

$$(q_i - q_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = (q_i - q_j) \wedge \frac{F_j}{m_j},$$

implicando em:

$$(q_i - q_j) \wedge (m_j F_i - m_i F_j) = 0. \quad (1.24)$$

Distribuindo o produto vetorial na equação (1.24), obtemos:

$$m_j q_i \wedge F_i - m_i q_i \wedge F_j - m_j q_j \wedge F_i + m_i q_j \wedge F_j = 0.$$

Somando todos os termos em j , com $j \neq i$, resulta em:

$$(M - m_i) q_i \wedge F_i - m_i q_i \wedge \sum_{j \neq i}^N F_j - \left(\sum_{j \neq i}^N m_j q_j \right) \wedge F_i + m_i \sum_{j \neq i}^N q_j \wedge F_j = 0, \quad (1.25)$$

onde M representa a massa total do sistema. Sabendo que o centro de massa está na origem do referencial, podemos escrever:

$$\sum_{j=1}^N m_j q_j = 0 \implies \sum_{j \neq i}^N m_j q_j + m_i q_i = 0 \implies \sum_{j \neq i}^N m_j q_j = -m_i q_i. \quad (1.26)$$

Devido ao fato de as forças atuantes sobre as partículas serem centrais, isto é, ocorrem na forma de pares ação e reação sobre a reta que liga a posição dos corpos, as quantidades momento linear total e momento angular total se conservam. Assim, temos respectivamente:

$$\sum_{j=1}^N F_j = 0 \implies \sum_{j \neq i}^N F_j = -F_i, \quad (1.27)$$

e

$$\sum_{j=1}^N (q_j \wedge F_j) = 0 \implies \sum_{j \neq i}^N (q_j \wedge F_j) = (-q_i \wedge F_i). \quad (1.28)$$

Substituindo (1.26), (1.27) e (1.28) em (1.25), obtemos:

$$M q_i \wedge F_i - m_i q_i \wedge F_i + m_i q_i \wedge F_i + m_i q_i \wedge F_i - m_i q_i \wedge F_i = 0.$$

Com isso, obtemos $Mq_i \wedge F_i = 0$, o que mostra que q_i e F_i são vetores paralelos. Portanto, podemos escrever $F_i = \lambda_i q_i$, ou, de forma equivalente, $\ddot{q}_i = \left(\frac{\lambda_i}{m_i}\right) q_i$.

De (1.24), decorre:

$$\left(\frac{\lambda_i}{m_i} q_i - \frac{\lambda_j}{m_j} q_j\right) \wedge (q_i - q_j) = 0.$$

Assim:

$$-\frac{\lambda_i}{m_i} q_i \wedge q_j - \frac{\lambda_j}{m_j} q_j \wedge q_i = 0,$$

o que implica em:

$$\left(\frac{\lambda_i}{m_i} - \frac{\lambda_j}{m_j}\right) (q_j \wedge q_i) = 0.$$

Se q_j for paralelo a q_i , a igualdade acima é automaticamente satisfeita. No entanto, como assumimos que a configuração não é colinear, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ existe $j \in \{1, \dots, N\}$ tal que seus vetores posição q_i e q_j sejam independentes. Nesse caso, concluímos que:

$$\frac{\lambda_i}{m_i} = \frac{\lambda_j}{m_j} = \lambda, \tag{1.29}$$

para os correspondentes índices. Para cada par de corpos na configuração, existe um terceiro cuja posição está fora da reta gerada pelo par, concluímos que a igualdade (1.29) vale para todo $i, j \in \{1, \dots, N\}$. Portanto:

$$\ddot{q}_i = \lambda q_i,$$

para todo $i = 1, 2, \dots, N$, como queríamos provar. \square

As equações de Andoyer são especialmente úteis quando se deseja encontrar configurações centrais em situações onde há simetrias conhecidas entre as posições. Como primeira aplicação dessas equações, pode-se calcular as configurações centrais não colineares no

problema de três corpos.

Teorema 1.4.2. *A única configuração central formada por três massas não colineares é o triângulo equilátero, com massas arbitrárias nos vértices.*

Demonstração. Nesse caso, temos três equações de Andoyer com áreas dadas por:

$$f_{1,2} = m_3(R_{1,3} - R_{2,3})\Delta_{1,2,3} = 0,$$

$$f_{1,3} = m_2(R_{1,2} - R_{3,2})\Delta_{1,3,2} = 0,$$

$$f_{2,3} = m_1(R_{2,1} - R_{3,1})\Delta_{3,2,1} = 0.$$

Como estamos assumindo que a configuração não é colinear, cada $\Delta_{i,j,k}$ é diferente de zero. Além disso, como todas as massas são positivas, temos:

$$f_{1,2} = 0 \iff R_{1,3} = R_{2,3} \iff r_{1,3} = r_{2,3},$$

$$f_{1,3} = 0 \iff R_{1,2} = R_{3,2} \iff r_{1,2} = r_{3,2}.$$

Portanto, $r_{1,2} = r_{1,3} = r_{2,3}$, o que significa que as três partículas estão localizadas nos vértices de um triângulo equilátero. Note que essa configuração não depende dos valores das massas. □

Capítulo 2

Matrizes Circulantes e Polinômios de Chebyshev

2.1 Introdução

Neste capítulo, exploramos algumas propriedades importantes das matrizes circulantes e dos polinômios de Chebyshev, que serão úteis para aprofundar a discussão no Capítulo 3.

Primeiro, abordamos as matrizes circulantes, destacando suas características principais e suas propriedades algébricas. Em seguida, estudamos os polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécie, incluindo suas definições, relações de recorrência e identidades mais relevantes.

2.2 Matrizes Circulantes

Uma matriz circulante C é uma matriz quadrada cujas linhas são obtidas por permutações cíclicas da primeira linha. Sua forma geral é:

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots \\ \vdots & c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix},$$

de modo que cada linha é uma permutação cíclica da linha anterior. Essa estrutura também pode ser caracterizada pela seguinte regra: o elemento (k, j) da matriz C , denotado por $C_{k,j}$, é dado por:

$$C_{k,j} = c_{(j-k) \bmod n}.$$

As propriedades das matrizes circulantes são bem conhecidas e de fácil demonstração. Devido à sua estrutura especial, essas matrizes são amplamente utilizadas para modelar e analisar sistemas simétricos em diversas áreas da matemática aplicada. Para uma revisão detalhada dessas propriedades e aplicações, ver (GRAY, 2006).

2.2.1 Autovalores e Autovetores

Os autovalores $\psi_k \in \mathbb{C}$ e os autovetores $y^{(k)} \in \mathbb{C}^n$, $y^{(k)} \neq 0$, de C são soluções da equação:

$$Cy = \psi y, \tag{2.1}$$

ou, de maneira equivalente, das n equações lineares:

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_{n-m+k} y_k + \sum_{k=m}^{n-1} c_{k-m} y_k = \psi y_m, \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \tag{2.2}$$

Alterando as variáveis de soma, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{n-1-m} c_k y_{k+m} + \sum_{k=n-m}^{n-1} c_k y_{k-(n-m)} = \psi y_m, \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.3)$$

Para resolver essas equações, utilizamos um método análogo às equações diferenciais lineares com coeficientes constantes: tentamos uma solução exponencial da forma $y_k = \rho^k$ (análogo a $y(t) = e^{st}$ em equações diferenciais).

Substituindo em (2.3) e cancelando ρ^m , obtemos:

$$\sum_{k=0}^{n-1-m} c_k \rho^k + \rho^{-n} \sum_{k=n-m}^{n-1} c_k \rho^k = \psi.$$

Se escolhermos $\rho^n = 1$, isto é, ρ é uma das n raízes complexas da unidade, temos um autovalor:

$$\psi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \rho^k, \quad (2.4)$$

com o autovetor correspondente:

$$y = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \end{bmatrix}^T, \quad (2.5)$$

onde T denota a transposição, e a normalização foi escolhida para garantir que o autovetor tenha norma igual a 1. Escolhendo ρ_m como a raiz complexa $\rho_m = e^{-2\pi m \mathbb{I}/n}$, onde $\mathbb{I} = \sqrt{-1}$, obtemos o autovalor

$$\psi_m = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{-2\pi m k \mathbb{I}/n}, \quad (2.6)$$

e o autovetor:

$$y^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & e^{-2\pi m \mathbb{I}/n} & \dots & e^{-2\pi m (n-1) \mathbb{I}/n} \end{bmatrix}^T.$$

Portanto, ψ_m e $y^{(m)}$ satisfazem a equação de autovalores e autovetores (2.1),

$$C y^{(m)} = \psi_m y^{(m)}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.7)$$

Destacamos aqui um caso particular importante da expressão dos autovalores (2.6). Caso a matriz circulante tenha apenas coeficientes reais, $c_k \in \mathbb{R}$, e $\psi_m \in \mathbb{R}$ também seja um autovalor real, então tomando a parte real da equação (2.6), obtemos

$$\psi_m = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cos\left(\frac{2\pi mk}{n}\right). \quad (2.8)$$

De forma análoga, se os autovalores são todos imaginários puros, ou nulos, $\psi_m = \pm \mathbb{I} \omega_m \in \mathbb{I} \cdot \mathbb{R}$, tomando a parte imaginária da equação (2.6), obtemos

$$\psi_m = \pm \mathbb{I} \omega_m = -\mathbb{I} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi mk}{n}\right). \quad (2.9)$$

A equação (2.4) é conhecida como a Transformada Discreta de Fourier (TDF) da sequência $\{c_k\}$. Isso nos permite recuperar os coeficientes c_k a partir dos autovalores ψ_k via a inversão da TDF. Em particular,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \psi_m e^{2\pi \ell m \mathbb{I}} &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (c_k e^{-2\pi mk \mathbb{I}/n}) e^{2\pi \ell m \mathbb{I}/n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} e^{2\pi(\ell-k)m \mathbb{I}/n} = c_\ell, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde utilizamos a ortogonalidade das exponenciais complexas:

$$\sum_{m=0}^{n-1} e^{2\pi mk \mathbb{I}/n} = n \delta_{k \bmod n} = \begin{cases} n, & \text{se } k \bmod n = 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.11)$$

com sendo δ o delta de Kronecker,

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notamos que a identidade (2.11) é imediata se $k \bmod n = 0$. Caso contrário, temos

$$\sum_{m=0}^{n-1} e^{2\pi m k \mathbb{I}/n} = \sum_{m=0}^{n-1} (e^{2\pi k \mathbb{I}/n})^m = \frac{1 - e^{2\pi k \mathbb{I}}}{1 - e^{2\pi k(n-1)\mathbb{I}/n}} = 0. \quad (2.12)$$

Os autovalores de uma matriz circulante correspondem à Transformada Discreta de Fourier (TDF) da primeira linha da matriz circulante, e, reciprocamente, a primeira linha de uma matriz circulante é a inversa da TDF dos autovalores.

A equação (2.7) pode ser escrita como uma única equação matricial:

$$CU = U\Psi, \quad (2.13)$$

onde:

$$U = [y^{(0)} | y^{(1)} | \dots | y^{(n-1)}] = n^{-\frac{1}{2}} [e^{-2\pi m k \mathbb{I}/n} \quad ; m, k = 0, 1, \dots, n-1],$$

é a matriz cujas colunas são os autovetores da matriz circulante, e $\Psi = \text{diag}(\psi_k)$ é a matriz diagonal com os autovalores $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ como elementos diagonais. Além disso, a equação (2.11) implica que U é unitária. De fato, denote o k, j -ésimo elemento de UU^* por $a_{k,j}$, que será o produto da k -ésima linha de U , $\{e^{-2\pi m k \mathbb{I}/n}/\sqrt{n}; m = 0, 1, \dots, n-1\}$, pela j -ésima coluna de U^* , $\{e^{2\pi m j \mathbb{I}/n}/\sqrt{n}; m = 0, 1, \dots, n-1\}$. Assim:

$$a_{k,j} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{e^{-2\pi m k \mathbb{I}/n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{e^{2\pi m j \mathbb{I}/n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} e^{2\pi m(j-k)\mathbb{I}/n} = \frac{1}{n} \cdot n \delta_{(k-j) \bmod n} = \delta_{j,k},$$

e, portanto, $UU^* = I = U^*U$. Logo, a equação (2.13) implica que

$$C = U\Psi U^* \quad \Leftrightarrow \quad \Psi = U^* C U. \quad (2.14)$$

Como C é semelhante a uma matriz diagonal por uma transformação unitária, concluímos que C é uma matriz normal.

2.2.2 Operações Matriciais em Matrizes Circulantes

O seguinte teorema resume as propriedades fundamentais das matrizes circulantes, derivadas da seção anterior sobre seus autovalores e autovetores.

Teorema 2.2.1. *Sejam C e B matrizes circulantes $n \times n$ definidas por:*

$$C = \{c_{k-j}\}, \quad B = \{b_{k-j}\}.$$

Os autovalores correspondentes são dados por:

$$\psi_m = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{-2\pi m k \mathbb{I}/n}, \quad \beta_m = \sum_{k=0}^{n-1} b_k e^{-2\pi m k \mathbb{I}/n}.$$

Então, valem as seguintes propriedades:

1. *Toda matriz circulante C possui autovetores:*

$$y^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[1, e^{-2\pi m \mathbb{I}/n}, \dots, e^{-2\pi m (n-1) \mathbb{I}/n} \right]^T, \quad m = 0, 1, \dots, n-1,$$

e autovalores correspondentes:

$$\psi_m = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{-2\pi m k \mathbb{I}/n}.$$

Dessa forma, C pode ser diagonalizada como:

$$C = U \Psi U^*,$$

onde U possui os autovetores como colunas, e $\Psi = \text{diag}(\psi_m)$ é a matriz diagonal dos autovalores.

2. *A matriz U é a mesma para todas as matrizes circulantes C . Portanto, qualquer matriz da forma $C = U \Psi U^*$, com Ψ diagonal, é circulante.*
3. *A multiplicação de duas matrizes circulantes C e B resulta em outra matriz circu-*

lante:

$$CB = BC = U\Gamma U^*,$$

onde $\Gamma = \text{diag}(\psi_m\beta_m)$ e os autovalores de CB são $\gamma_m = \psi_m\beta_m$.

4. A soma de duas matrizes circulantes $C + B$ também é uma matriz circulante:

$$C + B = U\Omega U^*,$$

onde $\Omega = \text{diag}(\psi_m + \beta_m)$.

5. Se $\psi_m \neq 0$ para todos $m = 0, 1, \dots, n-1$, então C é inversível, e sua inversa também é circulante, dada por:

$$C^{-1} = U\Psi^{-1}U^*,$$

onde $\Psi^{-1} = \text{diag}(\psi_m^{-1})$.

Demonstração. Sabemos que qualquer matriz circulante C pode ser diagonalizada como:

$$C = U\Psi U^*, \quad \text{onde } UU^* = I.$$

Analogamente, a matriz circulante B pode ser escrita como:

$$B = U\Phi U^*, \quad \text{onde } \Phi = \text{diag}(\beta_m).$$

Como demonstrado na Seção 2.2, todas as matrizes circulantes compartilham os mesmos autovetores, colunas da matriz U . Assim, qualquer matriz da forma $C = U\Psi U^*$ é necessariamente circulante.

Consideramos o produto das duas matrizes circulantes:

$$CB = (U\Psi U^*)(U\Phi U^*).$$

Como $U^*U = I$, temos:

$$CB = U\Psi(U^*U)\Phi U^* = U\Psi\Phi U^*.$$

Como Ψ e Φ são matrizes diagonais, elas comutam, ou seja, $\Psi\Phi = \Phi\Psi$. Assim:

$$CB = U\Phi\Psi U^* = BC.$$

Isso mostra que CB é circulante e tem autovalores $\gamma_m = \psi_m\beta_m$.

Para a soma, temos:

$$C + B = U\Psi U^* + U\Phi U^* = U(\Psi + \Phi)U^*.$$

Como $\Psi + \Phi$ é diagonal, a matriz resultante é circulante com autovalores $\psi_m + \beta_m$.

Se C é inversível, então Ψ também é inversível, pois é uma matriz diagonal com $\psi_m \neq 0$. Assim, temos:

$$C^{-1} = (U\Psi U^*)^{-1}.$$

Usando o fato de que U é unitária, temos:

$$C^{-1} = U\Psi^{-1}U^*,$$

onde $\Psi^{-1} = \text{diag}(\psi_m^{-1})$, garantindo que C^{-1} é circulante. □

As matrizes circulantes formam uma classe particularmente acessível de matrizes, pois suas inversas, produtos e somas também são circulantes. Isso torna essas operações simples de realizar, além de preservarem o fato de que essas matrizes são normais. Além disso, os autovalores dessas matrizes podem ser determinados de forma exata, e os mesmos autovetores são sempre os mesmos para qualquer matriz circulante de ordem n , formando uma base ortonormal dada pelas colunas da matriz da TDF.

Proposição 2.2.1. *Sejam $A, D, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes circulantes, com A e D simétricas e*

B antissimétrica. Considere a matriz por blocos:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

Então M possui o mesmo conjunto de autovalores que uma matriz diagonal por blocos composta por n blocos 2×2 . Esses blocos podem ser descritos a partir das entradas diagonais obtidas pela diagonalização simultânea de A, B e D por autovetores comuns.

Demonstração. Como as três matrizes A, B e D são circulares, todas compartilham a mesma base de autovetores, dada pela matriz unitária $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, construída a partir da transformada discreta de Fourier. Portanto, existem matrizes diagonais $\Psi_A, \Psi_B, \Psi_D \in \mathbb{C}^{n \times n}$, tais que:

$$U^*AU = \Psi_A, \quad U^*BU = \Psi_B, \quad U^*DU = \Psi_D. \quad (2.15)$$

Como A e D são reais e simétricas, Ψ_A e Ψ_D possuem entradas reais. Já B , por ser antissimétrica real, tem Ψ_B com entradas puramente imaginárias. Esses fatos seguem diretamente ao tomar o conjugado das equações em (2.15).

Agora, construímos a matriz bloco-diagonal de mudança de base:

$$T = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}.$$

Como T é invertível, a matriz transformada $M' = T^{-1}MT$ é equivalente por linhas a M , logo possuem os mesmos autovalores.

Efetuando a transformação, obtemos:

$$M' = T^{-1}MT = \begin{pmatrix} U^{-1}AU & U^{-1}BU \\ -U^{-1}BU & U^{-1}DU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_A & \Psi_B \\ -\Psi_B & \Psi_D \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

onde Ψ_A, Ψ_B e Ψ_D são matrizes diagonais.

No entanto, M' não é diagonal por blocos. Para que isso ocorra, basta realizar uma re-

ordenação apropriada dos vetores da base original. Mais precisamente, se $\{E_1, E_2, \dots, E_n, E_{n+1}, \dots, E_{2n}\}$ é a base segundo a qual M' está expressa, basta a reescrevermos na ordenação $\{E_1, E_{n+1}, E_2, E_{n+2}, \dots, E_n, E_{2n}\}$. Nessa nova base, a matriz M' é transformada em uma matriz M'' , que é diagonal por blocos, da forma:

$$M'' = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_n), \quad \text{com } M_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & d_j \end{pmatrix},$$

onde $a_j, d_j \in \mathbb{R}$, $b_j \in \mathbb{I} \cdot \mathbb{R}$, para $j = 1, \dots, n$.

Logo, os autovalores de M são exatamente os autovalores dos blocos M'_j , ou seja:

$$\text{Autovalores de } M = \bigcup_{j=1}^n \text{Autovalores de } M_j. \quad (2.17)$$

□

2.3 Polinômios de Chebyshev

Existem vários tipos de polinômios de Chebyshev. Em particular, temos os polinômios de primeira e segunda espécies, representados por $T_n(x)$ e $U_n(x)$, respectivamente, que possuem um papel fundamental nas propriedades que serão exploradas ao longo deste trabalho. Além desses, há também os polinômios relacionados conhecidos como polinômios de Jacobi, identificados como $V_n(x)$ e $W_n(x)$, que são chamados de polinômios de Chebyshev de terceira e quarta espécies. Ainda, existem os polinômios deslocados, denotados por $T_n^*(x)$, $U_n^*(x)$, $V_n^*(x)$ e $W_n^*(x)$, que, embora relevantes em alguns contextos, não serão abordados aqui. Para uma apresentação detalhada dessas famílias de polinômios e suas propriedades, ver (MASON; HANDSCOMB, 2002).

É importante ressaltar que, em alguns livros e artigos, o termo polinômio de Chebyshev costuma ser usado exclusivamente para se referir ao polinômio de primeira espécie, $T_n(x)$.

Dado o papel central dos polinômios de Chebyshev, é essencial estabelecer uma definição clara desde o início. Iremos explorar a relação natural desses polinômios com as

funções trigonométricas seno e cosseno. Essa relação é fundamental, já que essas funções desempenham um papel significativo na descrição de diversos fenômenos naturais. É essa conexão que explica a versatilidade dos polinômios de Chebyshev e justifica sua aplicação em tantas áreas da matemática e da ciência aplicada.

2.3.1 Polinômios de Primeira Espécie (T_n)

Definição 2.3.1. *O polinômio de Chebyshev $T_n(x)$ de primeira espécie é o polinômio em x de grau n , definido pela relação:*

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad \text{onde } x = \cos(\theta). \quad (2.18)$$

Se o intervalo da variável x é $[-1, 1]$, o intervalo correspondente de θ pode ser tomado como $[0, \pi]$. Esses intervalos são percorridos em direções opostas, já que $x = -1$ corresponde a $\theta = \pi$ e $x = 1$ corresponde a $\theta = 0$.

Note que a equação (2.18) define uma função de x , pois para cada $\theta \in [0, \pi]$ temos $x = \cos(\theta) \in [-1, 1]$, e não apenas um ponto fixo. Assim, $T_n(x)$ é um polinômio de grau n , definido em todo o intervalo $[-1, 1]$.

É bem conhecido (como consequência do teorema de De Moivre) que $\cos(n\theta)$ é um polinômio de grau n em $\cos \theta$. As fórmulas elementares são:

$$\begin{aligned} \cos(0\theta) &= 1, \quad \cos(1\theta) = \cos \theta, \quad \cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1, \\ \cos(3\theta) &= 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta), \quad \cos(4\theta) = 8 \cos^4(\theta) - 8 \cos^2(\theta) + 1, \dots \end{aligned}$$

A partir da equação (2.18), os primeiros polinômios de Chebyshev são:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Na prática, calcular cada $T_n(x)$ diretamente a partir de sua definição não é nem conveniente nem eficiente. Em vez disso, podemos usar uma relação de recorrência que

facilita esse processo, basta combinar a identidade trigonométrica

$$\cos(n\theta) + \cos((n-2)\theta) = 2 \cos \theta \cos((n-1)\theta), \quad (2.20)$$

com a Definição 2.3.1, o que nos leva à seguinte relação de recorrência, por definição dos polinômios de Chebyshev

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.21)$$

Essa relação nos permite calcular qualquer $T_n(x)$ a partir de valores anteriores, tornando os cálculos muito mais eficientes. Como visto, ela é acompanhada das seguintes condições iniciais:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \quad (2.22)$$

Lembramos que uma função $f(x)$ é dita par se satisfaz a condição:

$$f(x) = f(-x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

por outro lado, uma função $f(x)$ é ímpar se vale a relação:

$$f(x) = -f(-x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Sabemos que todas as potências pares de x resultam em funções pares, enquanto todas as potências ímpares de x geram funções ímpares. As equações (2.19) sugerem que $T_n(x)$ é uma função par ou ímpar, dependendo de n ser par ou ímpar.

Afirmamos que, se n é par, então $T_n(x)$ é uma função par, ou seja, $T_n(-x) = T_n(x)$. Se n é ímpar, então $T_n(x)$ é uma função ímpar, ou seja, $T_n(-x) = -T_n(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 0$, temos $T_0(x) = 1$. Como $T_0(-x) = 1 = T_0(x)$, concluímos que $T_0(x)$ é par.

Para $n = 1$, temos $\mathbb{T}_1(x) = x$. Como $\mathbb{T}_1(-x) = -x = -\mathbb{T}_1(x)$, concluímos que $\mathbb{T}_1(x)$ é ímpar.

Agora, suponhamos que a propriedade seja válida para todo $k \leq n$, ou seja,

1. se $k \leq n$ é par, então $\mathbb{T}_k(x)$ é par:

$$\mathbb{T}_k(-x) = \mathbb{T}_k(x).$$

2. Se $k \leq n$ é ímpar, então $\mathbb{T}_k(x)$ é ímpar:

$$\mathbb{T}_k(-x) = -\mathbb{T}_k(x).$$

Demonstraremos que a propriedade também vale para $k = n + 1$. Pela relação (2.21), temos:

$$\mathbb{T}_{k+1}(x) = 2x\mathbb{T}_k(x) - \mathbb{T}_{k-1}(x). \quad (2.23)$$

Se $k = n + 1$ for ímpar, substituindo x por $-x$, obtemos:

$$\mathbb{T}_{n+1}(-x) = 2(-x)\mathbb{T}_n(-x) - \mathbb{T}_{n-1}(-x). \quad (2.24)$$

Aplicando a hipótese de indução, $\mathbb{T}_n(-x) = \mathbb{T}_n(x)$ e $\mathbb{T}_{n-1}(-x) = -\mathbb{T}_{n-1}(x)$, logo:

$$\mathbb{T}_{n+1}(-x) = 2(-x)\mathbb{T}_n(x) - (-\mathbb{T}_{n-1}(x)) = -2x\mathbb{T}_n(x) + \mathbb{T}_{n-1}(x) = -\mathbb{T}_{n+1}(x). \quad (2.25)$$

Por outro lado, se $k = n+1$ for par, aplicando a hipótese de indução, $\mathbb{T}_n(-x) = -\mathbb{T}_n(x)$ e $\mathbb{T}_{n-1}(-x) = \mathbb{T}_{n-1}(x)$. Da equação (2.24) obtemos:

$$\mathbb{T}_{n+1}(-x) = -2(-x)\mathbb{T}_n(x) - \mathbb{T}_{n-1}(x) = 2x\mathbb{T}_n(x) - \mathbb{T}_{n-1}(x) = \mathbb{T}_{n+1}(x). \quad (2.26)$$

As equações (2.25) e (2.26) concluem a prova por indução.

2.3.2 Polinômios de Segunda Espécie (U_n)

Definição 2.3.2. *Os polinômios de Chebyshev de segunda espécie são polinômios de grau n em x definidos por*

$$U_n(x) = \frac{\text{sen}((n+1)\theta)}{\text{sen}(\theta)}, \quad x = \cos(\theta). \quad (2.27)$$

Os intervalos de x e θ são os mesmos considerados para $T_n(x)$. A partir de fórmulas trigonométricas elementares, temos:

$$\begin{aligned} \text{sen}1\theta &= \text{sen}\theta, & \text{sen}2\theta &= 2\text{sen}\theta \cos\theta, & \text{sen}3\theta &= \text{sen}\theta(4\cos^2\theta - 1), \\ \text{sen}4\theta &= \text{sen}\theta(8\cos^3\theta - 4\cos\theta), \dots, \end{aligned}$$

isso mostra que a razão das funções seno em (2.27) é, de fato, um polinômio em $\cos\theta$, o que nos permite deduzir imediatamente que:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, & U_1(x) &= 2x, & U_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x, \dots \end{aligned} \quad (2.28)$$

Utilizando a identidade trigonométrica:

$$\text{sen}((n+1)\theta) + \text{sen}((n-1)\theta) = 2\cos\theta \text{sen}(n\theta), \quad (2.29)$$

e a Definição 2.3.2, concluímos que $U_n(x)$ satisfaz a seguinte relação de recorrência:

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (2.30)$$

juntamente com os seguintes casos iniciais:

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = \frac{\text{sen}(2\theta)}{\text{sen}\theta} = 2\cos\theta = 2x. \quad (2.31)$$

De forma semelhante, a identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen}((n+1)\theta) - \operatorname{sen}((n-1)\theta) = 2 \operatorname{sen}\theta \cos(n\theta), \quad (2.32)$$

nos leva à relação:

$$U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.33)$$

entre os polinômios de primeira e segunda espécies.

Vale destacar que a recorrência em (2.30) para a sequência $\{U_n(x)\}$ possui a mesma estrutura da recorrência (2.21) para $\{T_n(x)\}$. A diferença entre os dois sistemas de polinômios está apenas nas condições iniciais, dadas por (2.22) e (2.31).

A partir da equação (2.28), fica evidente que o polinômio de segunda espécie $U_n(x)$, assim como o de primeira espécie, é uma função par ou ímpar, envolvendo apenas potências pares ou ímpares de x , dependendo se n é par ou ímpar.

Para $n = 0$, temos $U_0(x) = 1$. Como $U_0(-x) = 1 = U_0(x)$, concluímos que $U_0(x)$ é uma função par. Para $n = 1$, temos $U_1(x) = 2x$. Como $U_1(-x) = 2(-x) = -2x = -U_1(x)$, vemos que $U_1(x)$ é uma função ímpar.

Agora, suponhamos que a propriedade seja válida para $n \leq k$, ou seja:

1. Se $k \leq n$ é par, então $U_k(x)$ é par:

$$U_k(-x) = U_k(x).$$

2. Se $k \leq n$ é ímpar, então $U_k(x)$ é ímpar:

$$U_k(-x) = -U_k(x).$$

Demonstraremos que a propriedade também vale para $n = k + 1$. Pela relação (2.30), temos:

$$U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x). \quad (2.34)$$

Se $k = n + 1$ for ímpar, substituindo x por $-x$, obtemos:

$$U_{n+1}(-x) = 2(-x)U_n(-x) - U_{n-1}(-x). \quad (2.35)$$

Aplicando a hipótese de indução, $U_n(-x) = U_n(x)$ e $U_{n-1}(-x) = -U_{n-1}(x)$, logo:

$$U_{n+1}(-x) = 2(-x)U_n(x) - (-U_{n-1}(x)) = -2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = -U_{n+1}(x). \quad (2.36)$$

Por outro lado, se $k = n + 1$ for par, aplicando a hipótese de indução, $U_n(-x) = -U_n(x)$ e $U_{n-1}(-x) = U_{n-1}(x)$. Da equação (2.35) obtemos:

$$U_{n+1}(-x) = 2(-x)U_n(-x) - U_{n-1}(-x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) = U_{n+1}(x). \quad (2.37)$$

As equações (2.36) e (2.37) concluem a prova por indução.

2.3.3 Identidades Fundamentais dos Polinômios de Chebyshev

Uma propriedade fundamental dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie é a forma como eles se comportam sob composição, resultando em outro polinômio de Chebyshev.

Essa relação pode ser expressa pela seguinte identidade:

$$T_j(T_k(x)) = T_{jk}(x), \quad \text{onde } x = \cos \theta. \quad (2.38)$$

Para demonstrá-la, utilizamos a Definição 2.3.1. Logo, $T_k(x) = \cos(k\theta)$. Então,

$$T_j(T_k(x)) = T_j(\cos(k\theta)) = \cos(j \cdot (k\theta)) = \cos(jk\theta) = T_{jk}(x),$$

onde, na última igualdade, usamos a Definição 2.3.1,

Portanto, concluímos que

$$T_j(T_k(x)) = T_{jk}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Essa identidade mostra que a composição de polinômios de Chebyshev também resulta em um polinômio de Chebyshev, com o índice multiplicado.

Além das relações de recorrência e composição, os polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécies satisfazem importantes identidades de soma, que expressam somatórios de índices pares e ímpares em termos dos polinômios $U_n(x)$.

Em particular, as seguintes fórmulas relacionam as somas dos polinômios $T_n(x)$ com os polinômios $U_n(x)$:

$$\sum_{j=0}^m T_{2j+1}(x) = \frac{U_{2m+1}(x)}{2}, \quad (2.39)$$

$$\sum_{j=0}^m T_{2j}(x) = \frac{U_{2m}(x) + 1}{2}. \quad (2.40)$$

Para demonstrar estas fórmulas, utilizaremos a relação de recorrência (2.33). Expandindo a primeira soma, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m T_{2j+1}(x) &= \sum_{j=0}^m \frac{U_{2j+1}(x) - U_{2j-1}(x)}{2} \\ &= \frac{U_1(x) - U_{-1}(x)}{2} + \frac{U_3(x) - U_1(x)}{2} + \frac{U_5(x) - U_3(x)}{2} \\ &\quad + \dots + \frac{U_{2m+1}(x) - U_{2m-1}(x)}{2} \\ &= \frac{U_{2m+1}(x)}{2} - \frac{U_{-1}(x)}{2} = \frac{U_{2m+1}(x)}{2} - \frac{0}{2} = \frac{U_{2m+1}(x)}{2}. \end{aligned}$$

Analogamente, para a segunda soma:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m T_{2j}(x) &= \sum_{j=0}^m \frac{U_{2j}(x) - U_{2j-2}(x)}{2} \\ &= \frac{U_0(x) - U_{-2}(x)}{2} + \frac{U_2(x) - U_0(x)}{2} + \frac{U_4(x) - U_2(x)}{2} \\ &\quad + \dots + \frac{U_{2m}(x) - U_{2m-2}(x)}{2} \\ &= \frac{U_{2m}(x)}{2} - \frac{U_{-2}(x)}{2} = \frac{U_{2m}(x)}{2} - \frac{(-1)}{2} = \frac{U_{2m}(x) + 1}{2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que a soma dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie pode ser expressa em termos dos polinômios da segunda espécie, estabelecendo mais uma conexão entre as duas famílias de polinômios.

Capítulo 3

Índice de Morse de Configurações Centrais Poligonais

Este capítulo baseia-se nos métodos e resultados apresentados por (HAMPTON, 2019), que analisou configurações centrais planas no problema dos N corpos com potenciais homogêneos. A partir dessas ideias, desenvolvemos uma abordagem focada na análise do índice de Morse e na variação do parâmetro A .

3.1 Introdução

A dinâmica clássica de N partículas pontuais, com massas m_i , interagindo por meio de um potencial central \mathcal{U} , generalizando (1.1), é descrita pelas equações:

$$m_i \ddot{q}_i^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i^{(k)}}, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad k \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.1)$$

onde $q_i = (q_i^{(1)}, q_i^{(2)}, q_i^{(3)}) \in \mathbb{R}^3$ representa a posição da partícula i , com $q_i^{(k)}$ denotando sua componente na direção k .

O potencial \mathcal{U} , anteriormente definido na Seção 1.2 como uma função homogênea de grau $-(A - 2)$, depende da distância entre as partículas e do parâmetro $A > 2$. Para referência, sua expressão completa encontra-se na equação (1.11).

O caso clássico gravitacional newtoniano ocorre quando $A = 3$ (NEWTON, 1687), mas também destacamos o caso $A = 2$, que representa o potencial logarítmico:

$$\mathcal{U} = - \sum_{i < k} m_i m_k \log(r_{i,k}), \quad (3.2)$$

usado na modelagem de vórtices em fluidos. Neste modelo, m_i representa a sua vorticidade, e pode assumir qualquer valor real. No entanto, focaremos no caso de vorticidades positivas $m_i > 0$.

O interesse está em configurações centrais, em que cada partícula é acelerada em direção ao centro de massa a uma taxa proporcional à sua distância dele:

$$m_i \ddot{q}_i^{(k)} = \lambda \left(q_i^{(k)} - q_C^{(k)} \right), \quad (3.3)$$

onde q_C é o centro de massa do sistema, conforme definido na equação (1.3) do Capítulo 1. Tais configurações são denominadas configurações centrais, conforme a Definição 1.3.1. Essas configurações são importantes no estudo de colisões, na topologia do espaço de fase e em comportamentos caóticos, especialmente no problema dos três corpos.

O problema da existência de um número finito de classes de equivalência de configurações centrais para massas positivas em $A = 3$ permanece aberto. Esse problema, destacado por (SMALE, 1998) como um grande desafio matemático, apresenta contra-exemplo quando massas negativas são permitidas, como mostrado por (ROBERTS, 1999).

Nesta dissertação, propomos analisar configurações centrais, e seus índices de Morse, sob um potencial homogêneo arbitrário, mais geral do que o newtoniano, motivados pela noção de estabilidade que esses valores possam representar.

Neste trabalho, exploramos as configurações centrais como pontos críticos da função

$$f = \frac{MI}{2} + \mathcal{U}, \quad (3.4)$$

em que M representa a massa total do sistema e I o momento de inércia, conforme definidos no Capítulo 1.

A partir dessa formulação, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.1. *As configurações centrais associadas ao problema, no referencial bari-cêntrico, coincidem com os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por (3.4).*

Demonstração. A prova será feita para o caso planar. Fixemos a massa total M , conforme definida em (1.2), e consideremos o momento de inércia I , dado por (1.10). Queremos mostrar que os pontos críticos da função f são configurações centrais.

Note que cada $q_i = (q_i^1, q_i^2)$, ou seja, a posição do i -ésimo corpo possui componentes q_i^1, q_i^2 . Dessa forma,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1^1}, \frac{\partial f}{\partial q_1^2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_N^1}, \frac{\partial f}{\partial q_N^2} \right).$$

Note que as duas primeiras entradas são $\nabla_{q_1} f$ e assim por diante, até que as duas últimas entradas são $\nabla_{q_N} f$. Temos:

$$\nabla_{q_k} I = 2m_k q_k$$

$$\nabla_{q_k} \mathcal{U} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{m_i m_k}{|q_i - q_k|^A} (q_i - q_k).$$

Dessa forma, o gradiente toma a expressão

$$\nabla f = \left(\frac{M}{2} \cdot 2m_1 q_1 + \frac{(2-A)}{A-2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^N \frac{m_i m_1}{|q_i - q_1|^A} (q_i - q_1), \dots, \frac{M}{2} \nabla_{q_k} I + \frac{1}{A-2} \nabla_{q_k} \mathcal{U}, \dots \right).$$

Efetuada-se os devidos cancelamentos e igualando o gradiente ao vetor nulo, obtemos para cada k que:

$$M m_k q_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{m_i m_k}{|q_i - q_k|^A} (q_i - q_k),$$

a qual tem a forma da equação (3.3), com $\lambda = M$, supondo que a configuração seja simétrica, o que implica que o centro de massa está na origem, isto é, $q_C = 0$. \square

A função potencial \mathcal{U} é invariante por translação, então todos os pontos críticos de f têm o centro de massa na origem, devido à expressão do momento de inércia esco-

lhido (1.10). Diferente de outras abordagens, essa função f trata as massas de forma proporcional, mas não faz o mesmo com as distâncias.

Como f também é invariante por rotações em torno da origem, é natural considerar seu domínio em um espaço quociente que leve essa simetria em conta. Para isso, definimos o espaço de configurações regulares como

$$C_N = (\mathbb{R}^{2N} - \Delta) / S^1,$$

onde Δ é o conjunto das colisões, conforme definido no Capítulo 1. A função f , permanece bem definida sobre C_N , uma vez que ambas as funções (1.10) e (1.6) são invariantes sob rotações. S^1 o representa o círculo unitário no plano complexo, ou seja, o grupo de rotações em \mathbb{R}^2 .

Estudamos configurações centrais para potenciais mais gerais ($A \geq 2$), buscando novas ferramentas matemáticas que possam avançar no caso newtoniano. A análise topológica do problema pode ser feita com o auxílio da teoria de Morse, a qual estabelece uma relação profunda entre a estrutura dos pontos críticos de uma função diferenciável e a topologia da variedade onde ela está definida (MILNOR, 1963). Um conceito central nesse contexto, que desempenhará papel fundamental na análise da estabilidade das configurações centrais, é o índice de Morse.

Definição 3.1.1. Índice de Morse: *Dado um ponto crítico isolado de uma função diferenciável f definida em uma variedade diferenciável, o índice de Morse desse ponto é o número de autovalores negativos da hessiana de f nesse ponto. Em termos geométricos, ele indica a quantidade de direções ao longo das quais a função decresce, ou seja, quantas direções de instabilidade local existem.*

Exemplo 3.1.1. *Nossa motivação para estudar o índice de Morse de configurações centrais se baseia em sistemas dissipativos. Como exemplo ilustrativo, lembramos da equação diferencial do pêndulo*

$$\begin{cases} \theta' = y \\ y' = -by - \text{sen}\theta \end{cases} \quad (3.5)$$

sendo $b \geq 0$ um parâmetro de atrito na base do pêndulo. Para $b = 0$, sabemos que (3.5) é um sistema hamiltoniano, com Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \cos \theta. \quad (3.6)$$

Seus pontos críticos, para $\theta \in [-\pi, \pi]$, são $p_1 = (\theta, y) = (0, 0)$ e $p_2 = (\pm\pi, 0)$. As matrizes hessianas de H sobre esses pontos críticos são

$$D^2H(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^2H(p_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

de forma que p_1 tem índice de Morse nulo, sendo mínimo local de H . O ponto p_2 tem índice de Morse 1, sendo um ponto de sela, como ilustrado no retrato de fase da Figura 3.1, à esquerda. Do ponto de vista de sistemas hamiltonianos, pontos de máximo ou mínimo locais de H são igualmente estáveis, mas para sistemas dissipativos os pontos de máximo, assim como os pontos de sela são instáveis. Esse fato fica claro no retrato de fase do pêndulo amortecido, à direita na Figura 3.1, e também devido aos Teoremas de Estabilidade e Instabilidade de Liapunov (BARREIRA; VALLS, 2012).

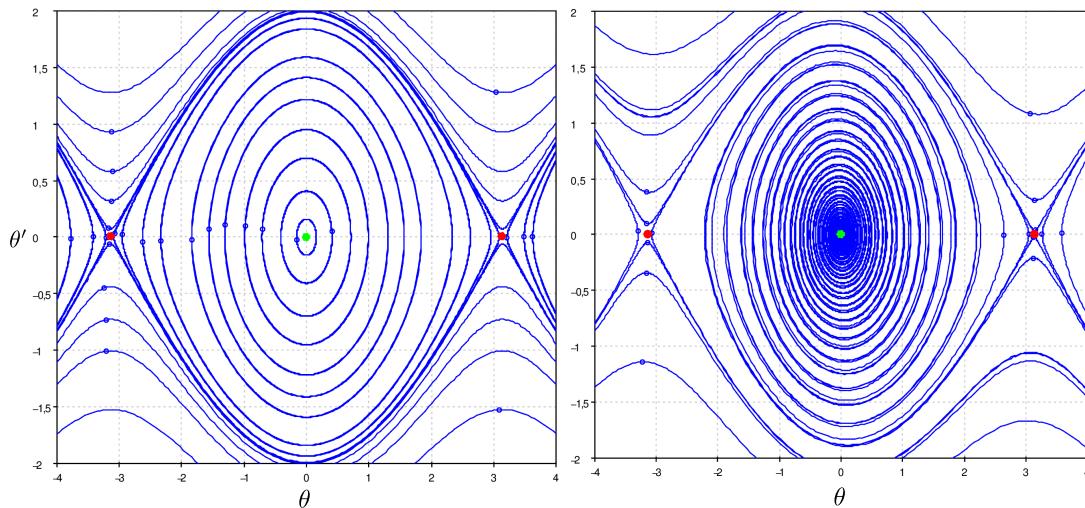


Figura 3.1: Retratos de fase do pêndulo. **Esquerda:** pêndulo sem amortecimento, as soluções coincidem com as curvas de nível da Hamiltoniana. **Direita:** pêndulo amortecido.

3.2 O polígono regular no problema dos N-corpos

Podemos demonstrar algumas propriedades do índice de Morse para configurações centrais de polígonos regulares no problema dos N corpos, variando A , e levantar hipóteses sobre outras. Muitos resultados sobre essas configurações já são conhecidos nos casos newtoniano ($A = 3$) e de vórtices ($A = 2$).

Essas configurações são bem adequadas para coordenadas polares, então expressaremos a posição da i -ésima partícula como

$$q_i = (r_i \cos(\theta_i), r_i \sin(\theta_i)). \quad (3.8)$$

Para o polígono regular centrado na origem, todos os raios são iguais ($r_i = r$ para algum r) e $\theta_i = \frac{2\pi i}{N}$, onde indexaremos as partículas a partir de $i = 0$. No que se segue, denotaremos a avaliação de uma função no polígono regular de massas iguais por um círculo sobrescrito, por exemplo, f° .

Pela equação (3.8), as posições das partículas i e j são dadas por

$$q_i = (r \cos \theta_i, r \sin \theta_i) \quad \text{e} \quad q_j = (r \cos \theta_j, r \sin \theta_j).$$

Assim, a distância entre essas partículas pode ser obtida a partir da fórmula usual da distância euclidiana:

$$|q_j - q_i| = r \sqrt{(\cos \theta_j - \cos \theta_i)^2 + (\sin \theta_j - \sin \theta_i)^2}. \quad (3.9)$$

Aplicando identidades trigonométricas, essa expressão se simplifica para:

$$|q_j - q_i| = r \sqrt{2 - 2 \cos(\theta_j - \theta_i)}.$$

No caso do polígono regular, os ângulos são uniformemente distribuídos, portanto,

$$\theta_j - \theta_i = \frac{2\pi(j - i)}{N}.$$

Substituindo, obtemos a forma final da distância entre os vértices

$$p_{i,j} := |q_j - q_i| = r \cdot \sqrt{2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right)}.$$

Definimos também $p_{i,j} = ru_{i,j} = (r_{i,j})^\circ$, com

$$u_{i,j} = \sqrt{2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right)}. \quad (3.10)$$

Lembramos que: $1 - \cos(\theta) = 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$. Assim:

$$u_{i,j} = \sqrt{2 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right)} = \sqrt{2 \left(2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi(j-i)}{N} \right) \right)} = 2 \left| \operatorname{sen} \left(\frac{\pi(j-i)}{N} \right) \right|,$$

e, portanto,

$$u_{i,j} = \sqrt{2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right)} = 2 \left| \operatorname{sen} \left(\frac{\pi(j-i)}{N} \right) \right| \quad (3.11)$$

são as distâncias entre os pontos i e j no polígono regular de raio unitário.

Como antes, consideramos configurações centrais como pontos críticos da função (3.4). Para calcular as derivadas da função (3.4), será necessário obter as derivadas parciais das distâncias entre partículas em relação a r_i e θ_i .

Como $r_{i,j} = |q_i - q_j|$ de forma análoga à expressão (3.9), usando (3.8), obtemos

$$r_{i,j} = [r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_j - \theta_i)]^{\frac{1}{2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{i,j}}{\partial r_i} &= \frac{1}{2r_{i,j}} \cdot (2r_i - 2r_j \cos(\theta_j - \theta_i)) = \frac{r_i - r_j \cos(\theta_j - \theta_i)}{r_{i,j}}, \\ \frac{\partial r_{i,j}}{\partial \theta_i} &= \frac{1}{2r_{i,j}} \cdot (-2r_i r_j \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_i)) = \frac{-r_i r_j \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_i)}{r_{i,j}}. \end{aligned}$$

Avaliado no polígono regular, usando (3.11) e $\text{sen}(2\theta) = 2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta)$, temos:

$$\left(\frac{\partial r_{i,j}}{\partial r_i}\right)^\circ = \left(\frac{r_i - r_j \cos(\theta_j - \theta_i)}{r_{i,j}}\right)^\circ = \frac{r(1 - \cos(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi i}{N}))}{ru_{i,j}} = \frac{u_{i,j}^2}{2} \cdot \frac{1}{u_{i,j}} = \frac{u_{i,j}}{2},$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial r_{i,j}}{\partial \theta_i}\right)^\circ &= \left(\frac{-r_i r_j \text{sen}(\theta_j - \theta_i)}{r_{i,j}}\right)^\circ = \frac{-r^2 \text{sen}(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi i}{N})}{ru_{i,j}} = \frac{-r \text{sen}\left(\frac{2\pi(j-i)}{N}\right)}{u_{i,j}} \\ &= \frac{-2r \text{sen}\left(\frac{\pi(j-i)}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi(j-i)}{N}\right)}{2 \left|\text{sen}\left(\frac{\pi(j-i)}{N}\right)\right|} = -r \cos\left(\frac{\pi(j-i)}{N}\right) \cdot \text{sgn}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi(j-i)}{N}\right)\right). \end{aligned}$$

Substituindo (1.10) e (1.11) na função (3.4), temos:

$$f = \frac{M}{2} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 + \frac{1}{A-2} \sum_{i<j}^N \frac{m_i m_j}{[r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_j - \theta_i)]^{\frac{A-2}{2}}}.$$

Seu gradiente em relação a r_i e θ_i possui componentes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r_i} &= \frac{M}{2} \cdot (2m_i r_i) + \frac{1}{A-2} \sum_{i<j}^N -(A-2) \cdot \frac{m_i m_j}{r_{i,j}^{A-1}} \cdot \frac{r_i + r_j \cos(\theta_j - \theta_i)}{r_{i,j}} \\ &= m_i M r_i - m_i \sum_{j \neq i} m_j r_{i,j}^{-A} (r_i - r_j \cos(\theta_j - \theta_i)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta_i} &= 0 + \frac{1}{A-2} \sum_{i<j}^N -(A-2) \cdot \frac{m_i m_j}{r_{i,j}^{A-1}} \cdot \frac{(-r_i r_j \text{sen}(\theta_j - \theta_i))}{r_{i,j}} \\ &= m_i \sum_{j \neq i} m_j r_{i,j}^{-A} r_i r_j \text{sen}(\theta_j - \theta_i). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Avaliado no polígono regular de massas iguais, usando que $M = Nm$ e a definição

3.10, esses componentes são:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial r_i}\right)^\circ &= \left(m_i M r_i - m_i \sum_{j \neq i} m_j r_{i,j}^{-A} (r_i - r_j \cos(\theta_j - \theta_i))\right)^\circ \\ &= m M r - m^2 \sum_{j \neq i} p_{i,j}^{-A} r (1 - \cos(\theta_j - \theta_i)) = m^2 \left(N r - r \sum_{j \neq i} p_{i,j}^{-A} (1 - \cos(\theta_j - \theta_i))\right) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right)^\circ &= \left(m_i \sum_{j \neq i} m_j r_{i,j}^{-A} r_i r_j \sin(\theta_j - \theta_i)\right)^\circ = m^2 r^2 \sum_{j \neq i} p_{i,j}^{-A} \sin(\theta_j - \theta_i) = 0, \end{aligned}$$

onde a segunda quantidade é zero devido à antissimetria do termo no seno com relação a somatórios simétricos: para cada termo $\sin(\theta_j - \theta_i)$, existe um termo oposto $\sin(\theta_k - \theta_i) = -\sin(\theta_j - \theta_i)$, resultando no cancelamento total da soma, desde que $p_{i,j} = p_{j,i}$.

Para ser um ponto crítico da função (3.4), $\left(\frac{\partial f}{\partial r_0}\right)^\circ = 0$, então:

$$\begin{aligned} 0 &= N r - r \sum_{j \neq 0}^N p_{0,j}^{-A} (1 - \cos(\theta_j - \theta_0)) \Leftrightarrow N r = r \sum_{j=1}^{N-1} (r u_{0,j})^{-A} (1 - \cos(\theta_j - \theta_0)) \Leftrightarrow \\ N &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{u_{0,j}^{-A} (1 - \cos(\theta_j - \theta_0))}{r^A} \Leftrightarrow r = \left(\frac{\sum_{j=1}^{N-1} u_{0,j}^{-A} (1 - \cos(\theta_j - \theta_0))}{N}\right)^{\frac{1}{A}}, \end{aligned}$$

pela equação (3.11) temos $\frac{u_{0,j}^2}{2} = 1 - \cos(\theta_j - \theta_0)$, assim:

$$r = \left(\frac{\sum_{j=1}^{N-1} u_{0,j}^{2-A}}{2N}\right)^{\frac{1}{A}}. \quad (3.14)$$

À medida que A aumenta, esse raio aumenta até o valor limite $r_\infty(N) = (2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{N}))^{-1}$, para o qual $p_{i,i+1} = 1$. De fato, podemos reescrever r como

$$r = \frac{1}{(2N)^{\frac{1}{A}}} \left(u_{0,1}^{2-A} + \sum_{j=2}^{N-1} (u_{0,j})^{2-A}\right)^{\frac{1}{A}} = \frac{1}{(2N)^{\frac{1}{A}}} u_{0,1}^{\frac{2-A}{A}} \left(1 + \sum_{j=2}^{N-1} \left(\frac{u_{0,1}}{u_{0,j}}\right)^{A-2}\right)^{\frac{1}{A}},$$

de onde, sabemos que $u_{0,1}/u_{0,j} < 1$, para todo $j = 2, \dots, N-1$, portanto, o limite do

somatório dentro dos parênteses é zero. Concluimos que

$$r_\infty = \lim_{A \rightarrow +\infty} r = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2N)^{\frac{1}{A}}} u_{0,1}^{\frac{2-A}{A}} (1)^{\frac{1}{A}} = \frac{1}{u_{0,1}} = \frac{1}{2 \left| \text{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right) \right|} = \frac{1}{2 \text{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right)}.$$

Para $A = 2$, o raio é igual a

$$r = \sqrt{\frac{N-1}{2N}}. \quad (3.15)$$

Agora, para calcular o índice de Morse da função (3.4) para polígonos regulares, é necessário determinar os componentes de sua hessiana. Em expressões que envolvem os índices i e j , assume-se que $i \neq j$. Na forma final de cada expressão, o raio r e as distâncias $u_{i,j}$ do polígono unitário são utilizados sempre que possível. Daqui em diante, como o índice de Morse não depende do valor específico da massa dos corpos, vamos fazê-las $m_j = m = 1$, para todo $j = 0, \dots, N-1$, sempre que necessário.

A partir das equações (3.12) e (3.13) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial r_j} &= 0 - m_i \left[-m_j A r_{i,j}^{-A-2} (r_j - r_i \cos(\theta_j - \theta_i))(r_j - r_i \cos(\theta_j - \theta_i)) \right. \\ &\quad \left. + (-m_i m_j r_{i,j}^{-A} (-\cos(\theta_j - \theta_i))) \right] \\ &= m_i m_j r_{i,j}^{-A-2} \left[A(r_i - r_j \cos(\theta_j - \theta_i))(r_j - r_i \cos(\theta_j - \theta_i)) + r_{i,j}^2 \cos(\theta_j - \theta_i) \right], \\ V_{i,j} &:= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial r_j} \right)^\circ \\ &= m^2 p_{i,j}^{-A-2} \left[A r \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right) r \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + (r u_{i,j})^2 \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right] \\ &= (r u_{i,j})^{-2} p_{i,j}^{-A} \left[A r^2 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right)^2 r^2 + u_{i,j}^2 \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right] \\ &= u_{i,j}^{-2} p_{i,j}^{-A} \left[A \left(\frac{u_{i,j}^2}{2} \right)^2 + u_{i,j}^2 \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right] \\ &= p_{i,j}^{-A} \left[\left(\frac{A}{4} \right) u_{i,j}^2 + \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= p_{i,j}^{-A} \left[\frac{A}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right) + \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right].$$

Simplificando

$$V_{i,j} = p_{i,j}^{-A} \left[\frac{A}{2} \left(\frac{u_{i,j}^2}{2} \right) + \left(1 - \frac{u_{i,j}^2}{2} \right) \right] = r^{-A} u_{i,j}^{-A} \left[u_{i,j}^2 \left(\frac{A-2}{4} \right) + 1 \right].$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r_i^2} = m_i M - m_i \sum_{j \neq i} m_j (-A r_{i,j}^{-A-1}) \cdot \left(\frac{r_i - r_j \cos(\theta_j - \theta_i)}{r_{i,j}} \right) \cdot (r_i - r_j \cos(\theta_j - \theta_i)) + m_j r_{i,j}^{-A}$$

$$= m_i \left(M - \sum_{j \neq i} m_j r_{i,j}^{-A-2} [r_{i,j}^2 - A(r_i - r_j \cos(\theta_j - \theta_i))^2] \right),$$

$$V_{i,i} := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r_i^2} \right)^\circ = m \left(M - m \sum_{j \neq i} (r u_{i,j})^{-2} p_{i,j}^{-A} \left[(r u_{i,j})^2 - A \left(r \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right) \right)^2 \right] \right)$$

$$= m \left(mN - m \sum_{j \neq i} (r u_{i,j})^{-2} p_{i,j}^{-A} \left[(r u_{i,j})^2 - A \left(r^2 \left(\frac{u_{i,j}^2}{2} \right)^2 \right) \right] \right)$$

$$= N - \sum_{j \neq i} p_{i,j}^{-A} \left[1 - A \left(\frac{u_{i,j}^2}{4} \right) \right] = N - \sum_{j \neq i} p_{i,j}^{-A} \left(1 - \frac{A p_{i,j}^2}{4 r^2} \right),$$

para simplificar, lembremos da equação (3.14), para reescrever $N = \frac{\sum_{j \neq i} u_{i,j}^{2-A}}{2r^A}$. Então

$$\begin{aligned} V_{i,i} &= N - \sum_{j \neq i} r^{-A} u_{i,j}^{-A} \left[1 - A \left(\frac{u_{i,j}^2}{4} \right) \right] = N \left[1 - \frac{r^{-A} \sum_{j \neq i} u_{i,j}^{-A} \left[1 - A \left(\frac{u_{i,j}^2}{4} \right) \right]}{N} \right] \\ &= N \left[1 - \frac{r^{-A} \sum_{j \neq i} u_{i,j}^{-A} - \frac{A}{4} u_{i,j}^{-A+2}}{\frac{\sum_{j \neq i} u_{i,j}^{-A+2}}{2r^A}} \right] = N \left[1 - \frac{\sum_{j \neq i} 2u_{i,j}^{-A} - \frac{A}{2} u_{i,j}^{-A+2}}{\sum_{j \neq i} u_{i,j}^{2-A}} \right] \\ &= N \left[1 - \frac{2 \sum_{j \neq i} u_{i,j}^{-A} - \frac{A}{2} \sum_{j \neq i} u_{i,j}^{-A+2}}{\sum_{j \neq i} u_{i,j}^{-A+2}} \right] = N \left[1 + \frac{A}{2} - 2 \frac{\sum_{j \neq i} u_{i,j}^{-A}}{\sum_{j \neq i} u_{i,j}^{-A+2}} \right] \\ &= \frac{r^{-A} \sum_{j \neq i} u_{i,j}^{-A+2}}{2} \left[1 + \frac{A}{2} - 2 \frac{\sum_{j \neq i} u_{i,j}^{-A}}{\sum_{j \neq i} u_{i,j}^{-A+2}} \right] = r^{-A} \sum_{j \neq i} u_{i,j}^{-A} \left[u_{i,j}^2 \left(\frac{A}{4} + \frac{1}{2} \right) - 1 \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial \theta_j} = -m_i \left[m_j + A r_{i,j}^{-A-1} \left(\frac{r_i r_j \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_i)}{r_{i,j}} \right) (r_i - r_j \cos(\theta_j - \theta_i)) + m_j r_{i,j}^{-A} r_j \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_i) \right]$$

$$= -m_i m_j r_{i,j}^{-A-2} r_j \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_i) \left[r_{i,j}^2 - Ar_i(r_i - r_j \cos(\theta_j - \theta_i)) \right],$$

$$\begin{aligned} W_{i,j} &:= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial \theta_j} \right)^\circ = -m^2 p_{i,j}^{-A} r_{i,j}^{-2} r \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \left[r_{i,j}^2 - Ar^2 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right) \right] \\ &= p_{i,j}^{-A} r_{i,j}^{-2} r \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \left[\frac{A}{2} r^2 u_{i,j}^2 - r_{i,j}^2 \right] \\ &= p_{i,j}^{-A} r_{i,j}^{-2} r \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \left[\frac{A}{2} r_{i,j}^2 - r_{i,j}^2 \right] = p_{i,j}^{-A} r \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \left(\frac{A}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Da equação (3.11) temos que $\cos(\theta_j - \theta_i) = 1 - \frac{u_{i,j}^2}{2}$, e que $|\operatorname{sen}(\theta)| = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$ temos:

$$\begin{aligned} W_{i,j} &= (r u_{i,j})^{-A} r \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \left(\frac{A}{2} - 1 \right) \\ &= r^{-A+1} \left(\frac{A}{2} - 1 \right) u_{i,j}^{-A} \sqrt{1 - \cos^2 \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right)} \cdot \operatorname{sgn} \left(\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right) \\ &= r^{-A+1} \left(\frac{A}{2} - 1 \right) u_{i,j}^{-A} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{u_{i,j}^2}{2} \right)^2} \cdot \operatorname{sgn} \left(\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right) \\ &= r^{-A+1} \left(\frac{A}{2} - 1 \right) u_{i,j}^{-A} \sqrt{u_{i,j}^2 \left(1 - \frac{u_{i,j}^2}{4} \right)} \cdot \operatorname{sgn} \left(\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right) \\ &= r^{-A+1} \left(\frac{A}{2} - 1 \right) u_{i,j}^{-A+1} \sqrt{1 - \frac{u_{i,j}^2}{4}} \cdot \operatorname{sgn} \left(\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial \theta_i} &= 0 - m_i \sum_{j \neq i} m_j (-Ar_{i,j}^{-A-1}) \left(\frac{r_i r_j \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_i)}{r_{i,j}} \cdot (-1) \right) (r_i - r_j \cos(\theta_j - \theta_i)) \\ &\quad + m_j r_{i,j}^{-A} (r_j \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_i)) \cdot (-1) \\ &= m_i \sum_{j \neq i} m_j r_{i,j}^{-A-2} r_j \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_i) (-Ar_i(r_i - r_j \cos(\theta_j - \theta_i)) + r_{i,j}^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{i,i} &:= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial \theta_i} \right)^\circ = m^2 \sum_{j \neq i} p_{i,j}^{-A-2} r \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) (-Ar^2(1 - \cos(\theta_j - \theta_i)) + p_{i,j}^2) \\ &= m^2 \sum_{j \neq i} p_{i,j}^{-A-2} r \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \left(p_{i,j}^2 - Ar^2 \frac{u_{i,j}^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j \neq i} p_{i,j}^{-A-2} r \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \left(p_{i,j}^2 - \frac{A p_{i,j}^2}{2} \right) = \sum_{j \neq i} p_{i,j}^{-A} r \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \left(1 - \frac{A}{2} \right) = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= m_i m_j \left[(-A r_{i,j}^{-A-1}) \left(\frac{r_i r_j \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_i)}{r_{i,j}} \right) (r_i r_j \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_i)) + r_{i,j}^{-A} (r_i r_j \cos(\theta_j - \theta_i)) \right] \\ &= m_i m_j r_{i,j}^{-A-2} r_i r_j \left[-A r_i r_j \operatorname{sen}^2(\theta_j - \theta_i) + r_{i,j}^2 \cos(\theta_j - \theta_i) \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} T_{i,j} &:= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right)^\circ = m^2 r^2 p_{i,j}^{-A-2} \left[-A r^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) + p_{i,j}^2 \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right] \\ &= m^2 r^2 (r u_{i,j})^{-A-2} \left[-A r^2 \left(1 - \cos^2 \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right) + (r u_{i,j})^2 \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right] \\ &= m^2 r^2 r^{-A-2} u_{i,j}^{-A-2} \left[-A r^2 \left(1 - \left(1 - \frac{u_{i,j}^2}{2} \right)^2 \right) + r^2 u_{i,j}^2 \left(1 - \frac{u_{i,j}^2}{2} \right) \right] \\ &= m^2 r^{-A} u_{i,j}^{-A-2} \left[-A r^2 u_{i,j}^2 \left(1 - \frac{u_{i,j}^2}{4} \right) + r^2 u_{i,j}^2 \left(1 - \frac{u_{i,j}^2}{2} \right) \right] \\ &= r^{-A+2} u_{i,j}^{-A} \left[-A \left(1 - \frac{u_{i,j}^2}{4} \right) + \left(1 - \frac{u_{i,j}^2}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i^2} &= m_i \sum_{j \neq i} m_j (-A r_{i,j}^{-A-1}) \left(\frac{r_i r_j \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_i) (-1)}{r_{i,j}} \right) r_i r_j \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_i) \\ &\quad - m_j r_{i,j}^{-A} r_i r_j \cos(\theta_j - \theta_i) \\ &= m_i \sum_{j \neq i} m_j r_i r_j r_{i,j}^{-A-2} \left[A r_i r_j \operatorname{sen}^2(\theta_j - \theta_i) - r_{i,j}^2 \cos(\theta_j - \theta_i) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{i,i} &:= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i^2} \right)^\circ = m^2 \sum_{j \neq i} r^2 p_{i,j}^{-A-2} \left[A r^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) - p_{i,j}^2 \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right] \\ &= \sum_{j \neq i} r^2 p_{i,j}^{-A-2} \left[A r^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) - p_{i,j}^2 \cos \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right] = - \sum_{j \neq i} T_{i,j}. \end{aligned}$$

Em termos dessas quantidades recém-definidas, com respeito às variáveis $(r_0, r_1, \dots,$

$r_{N-1}, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}$), a hessiana é dada por

$$D^2 f^\circ = \left(\begin{array}{c|c} V & W \\ \hline -W & T \end{array} \right). \quad (3.17)$$

Proposição 3.2.1. *As matrizes $V, T, W \in \mathbb{R}^{2N}$, obtidas a partir da hessiana da função f° , são matrizes circulantes. Além disso, V e T são simétricas e W é antissimétrica.*

Demonstração. As entradas dessas matrizes dependem das distâncias entre partículas localizadas nos vértices de um polígono regular com N vértices. Como definida, a distância entre as partículas i e j é dada por (3.11), de modo que $u_{i,j}$ depende apenas da diferença $i - j \pmod N$.

Como consequência, todas as entradas $M_{i,j} \in \{V_{i,j}, T_{i,j}, W_{i,j}\}$ dependem unicamente da diferença cíclica entre os índices, o que caracteriza matrizes circulantes.

Mais especificamente, R tem entradas da forma:

$$V_{i,j} = r^{-A} u_{i,j}^{-A} \left[u_{i,j}^2 \left(\frac{A-2}{4} \right) + 1 \right],$$

que é função apenas de $u_{i,j}$, logo de $j - i \pmod N$. Como $u_{i,j} = u_{j,i}$, segue que $R_{i,j} = R_{j,i}$, ou seja, R é simétrica.

Para T , temos:

$$T_{i,j} = r^{-A+2} u_{i,j}^{-A} \left[-A \left(1 - \frac{u_{i,j}^2}{4} \right) + \left(1 - \frac{u_{i,j}^2}{2} \right) \right],$$

também função apenas de $u_{i,j}$, logo de $j - i \pmod N$, e simétrica pelo mesmo argumento que R .

Para W , temos:

$$W_{i,j} = r^{-A+1} \left(\frac{A}{2} - 1 \right) u_{i,j}^{-A+1} \sqrt{1 - \frac{u_{i,j}^2}{4}} \cdot \operatorname{sgn} \left(\sin \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right),$$

o que novamente depende apenas de $i - j \pmod N$, garantindo a estrutura circulante.

Além disso, o termo envolvendo o sinal do seno satisfaz:

$$\operatorname{sgn} \left(\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(j-i)}{N} \right) \right) = -\operatorname{sgn} \left(\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(i-j)}{N} \right) \right),$$

portanto, $W_{j,i} = -W_{i,j}$, isto é, W é antissimétrica.

Assim, V , T e W são circulantes, sendo V e T simétricas, e W antissimétrica. \square

Utilizando a estrutura circulante das submatrizes da hessiana, conforme desenvolvido no Capítulo 2 e com a Proposição 2.2.1 podemos calcular diretamente seus autovalores.

Seja U a matriz $N \times N$ com

$$U_{i,j} = \exp \left(\frac{2\pi ij \mathbb{I}}{N} \right) = \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right) + \mathbb{I} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi ij}{N} \right),$$

onde $i, j \in \{0, \dots, N-1\}$.

Essa matriz U diagonaliza ortogonalmente qualquer matriz circulante de mesma dimensão. Assim, temos

$$H = \left(\begin{array}{c|c} U^{-1} & 0 \\ \hline 0 & U^{-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} V & W \\ \hline -W & T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & U \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} P & S \\ \hline -S & Q \end{array} \right), \quad (3.18)$$

em que os sub-blocos de H são todos diagonais, P e Q são reais, e S é puramente imaginário.

Desde que a matriz V é simétrica, sabemos que seu espectro é real. Como seus autovalores são simplesmente os coeficientes diagonais da matriz P , da equação (2.8) obtemos que

$$P_{i,i} = \sum_{j=0}^{N-1} V_{0,j} \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right).$$

Notamos que os termos na soma (3.2), sobre os vértices do polígono, são os mesmos segundo a simetria com respeito ao eixo horizontal, portanto podemos somar apenas sobre a metade dos vértices. Levando em conta que, para um número par de vértices, sempre ocorre um vértice antípoda ao vértice de índice zero, então surge um termo adicional para

$j = N/2$, N par, lembrando que $\cos(\pi i) = (-1)^i$. Assim,

$$V_{0, \frac{N}{2}} = r^{-A} u_{0, \frac{N}{2}}^{-A} \left[u_{0, \frac{N}{2}}^2 \left(\frac{A-2}{4} \right) + 1 \right] = r^{-A} 2^{-A} \left[4 \left(\frac{A-2}{4} \right) + 1 \right] = (2r)^{-A} (A-1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P_{i,i} &= \sum_{j=0}^{N-1} V_{0,j} \cos \left(\frac{2\pi i j}{N} \right) = V_{0,0} + \sum_{j=1}^{N-1} V_{0,j} \cos \left(\frac{2\pi i j}{N} \right) \\ &= V_{0,0} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} 2 \cos \left(\frac{2\pi i j}{N} \right) V_{0,j} + \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ (-1)^i (2r)^{-A} (A-1), & \text{se } N \text{ é par,} \end{cases} \end{aligned}$$

ou mais explicitamente,

$$\begin{aligned} P_{i,i} &= r^{-A} \sum_{j \neq 0}^{N-1} u_{0,j}^{-A} \left[u_{0,j}^2 \left(\frac{A}{4} + \frac{1}{2} \right) - 1 \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} 2 \cos \left(\frac{2\pi i j}{N} \right) \left(r^{-A} u_{0,j}^{-A} \left(u_{0,j}^2 \left(\frac{A-2}{4} \right) + 1 \right) \right) \\ &+ \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ (-1)^i (2r)^{-A} (A-1), & \text{se } N \text{ é par,} \end{cases} \\ &= r^{-A} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} \left[u_{0,j}^2 \left(\frac{A}{2} + 1 \right) - 2 \right] + \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ (2r)^{-A} (A+1), & \text{se } N \text{ é par,} \end{cases} \\ &+ r^{-A} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} \left(u_{0,j}^2 \left(\frac{A}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{2\pi i j}{N} \right) + 2 \cos \left(\frac{2\pi i j}{N} \right) \right) \\ &+ \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ (-1)^i (2r)^{-A} (A-1), & \text{se } N \text{ é par,} \end{cases} \\ &= r^{-A} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} \left[u_{0,j}^2 \left(\frac{A}{2} + 1 + \left(\frac{A}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{2\pi i j}{N} \right) \right) - 2 + 2 \cos \left(\frac{2\pi i j}{N} \right) \right] \end{aligned}$$

$$+ \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ (2r)^{-A}((-1)^i(A-1) + (A+1)), & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases}$$

Portanto,

$$P_{i,i} = r^{-A} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} \left[u_{0,j}^2 \left(\frac{A}{2} + 1 + \left(\frac{A}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right) \right) - 2 + 2 \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right) \right] \\ + \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ (2r)^{-A}((-1)^i(A-1) + (A+1)), & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.19)$$

De modo análogo, como Q também é simétrica, temos

$$Q_{i,i} = \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^{N-1} T_{0,j} U_{j,i} \right) = \sum_{j=0}^{N-1} T_{0,j} \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right) = \sum_{j=0}^{N-1} T_{0,j} \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right),$$

com

$$T_{0,\frac{N}{2}} = r^{-A+2} u_{0,\frac{N}{2}}^{-A} \left[-A \left(1 - \frac{u_{0,\frac{N}{2}}^2}{4} \right) + \left(1 - \frac{u_{0,\frac{N}{2}}^2}{2} \right) \right] \\ = r^{-A+2} 2^{-A} \left[-A \left(1 - \frac{2^2}{4} \right) + \left(1 - \frac{2^2}{2} \right) \right] = -r^2 (2r)^{-A}.$$

Portanto,

$$Q_{i,i} = \sum_{j=0}^{N-1} T_{0,j} \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right) = T_{0,0} + \sum_{j=1}^{N-1} T_{0,j} \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right) \\ = - \sum_{j \neq 0}^{N-1} T_{0,j} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} 2 \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right) T_{0,j} + \begin{cases} 0, & \text{para } N \text{ ímpar,} \\ (-1)^i (-r^2 (2r)^{-A}), & \text{para } N \text{ par,} \end{cases} \\ = - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} 2T_{0,j} + \begin{cases} 0, & \text{para } N \text{ ímpar,} \\ r^2 (2r)^{-A}, & \text{para } N \text{ par,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} 2 \cos\left(\frac{2\pi ij}{N}\right) T_{0,j} + \begin{cases} 0, & \text{para } N \text{ ímpar,} \\ (-1)^i (-r^2(2r)^{-A}), & \text{para } N \text{ par,} \end{cases} \\
& = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi ij}{N}\right) - 1 \right) T_{0,j} + \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ (1 - (-1)^i) r^2 (2r)^{-A}, & \text{se } N \text{ é par,} \end{cases}
\end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
Q_{i,i} &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} -2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi ij}{N}\right) \right) \left[r^{-A+2} u_{0,j}^{-A} \left(-A \left(1 - \frac{u_{0,j}^2}{4} \right) + \left(1 - \frac{u_{0,j}^2}{2} \right) \right) \right] \\
& + \begin{cases} 0, & \text{para } N \text{ ímpar,} \\ (1 - (-1)^i) r^2 (2r)^{-A}, & \text{para } N \text{ par,} \end{cases} \\
& = -2r^{-A+2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi ij}{N}\right) \right) \left[-A + 1 + \left(\frac{A-2}{4} \right) \cdot u_{0,j}^2 \right] \\
& + \begin{cases} 0, & \text{para } N \text{ ímpar,} \\ (1 - (-1)^i) r^2 (2r)^{-A}, & \text{para } N \text{ par,} \end{cases} \\
& = 2r^{-A+2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi ij}{N}\right) \right) \left[A - 1 - \left(\frac{A-2}{4} \right) \cdot 2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) \right) \right] \\
& + \begin{cases} 0, & \text{para } N \text{ ímpar,} \\ (1 - (-1)^i) r^2 (2r)^{-A}, & \text{para } N \text{ par,} \end{cases}
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
Q_{i,i} &= 2r^{-A+2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi ij}{N}\right) \right) \left[\frac{A-2}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) \right) + 1 \right] \\
& + \begin{cases} 0, & \text{para } N \text{ ímpar,} \\ (1 - (-1)^i) r^2 (2r)^{-A}, & \text{para } N \text{ par.} \end{cases} \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Essa última forma de $Q_{i,i}$ deixa claro que $Q_{i,i} > 0$ para $A \geq 2$, pois cada termo da

soma é não negativo.

Finalmente, como W é real e antissimétrica, por (2.9)

$$S_{i,i} = \sum_{j=0}^{N-1} W_{0,j} U_{j,i} = \mathbb{I} \sum_{j=0}^{N-1} W_{0,j} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi ij}{N} \right) = 2\mathbb{I} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi ij}{N} \right) W_{0,j},$$

portanto

$$\begin{aligned} S_{i,i} &= \mathbb{I} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} 2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi ij}{N} \right) \left[r^{-A+1} u_{0,j}^{-A} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \left(\frac{A-2}{2} \right) \right] \\ &= 2r^{-A+1} \left(\frac{A-2}{2} \right) \mathbb{I} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi ij}{N} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi j}{N} \right) u_{0,j}^{-A}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Agora podemos calcular os autovalores da hessiana da função (3.4) em pares a partir de matrizes 2×2 , como explicado em (2.17),

$$E_i = \left(\begin{array}{c|c} P_{i,i} & S_{i,i} \\ \hline -S_{i,i} & Q_{i,i} \end{array} \right). \quad (3.22)$$

Encontrando o polinômio característico da matriz, temos:

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(E_i)\lambda + \det(E_i) = \lambda^2 - (P_{i,i} + Q_{i,i})\lambda + (P_{i,i}Q_{i,i} + S_{i,i}^2) = 0.$$

Denotaremos os dois autovalores deste bloco por:

$$\lambda(N, i, \pm) = \frac{\operatorname{tr}(E_i) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(E_i)^2 - 4 \det(E_i)}}{2} = \frac{P_{i,i} + Q_{i,i} \pm \sqrt{(P_{i,i} - Q_{i,i})^2 - 4S_{i,i}^2}}{2}.$$

3.3 O polígono regular no caso de vórtices

Agora consideramos as configurações de polígonos regulares, começando com o caso extremo de $A = 2$.

Teorema 3.3.1. Para $A = 2$,

$$Q_{i,i}|_{A=2} = \left\lfloor \frac{i}{2}N - \frac{i^2}{2} \right\rfloor.$$

Demonstração. Provemos por indução em i . Primeiro, observe que podemos restringir a equação (3.20) para $A = 2$ como

$$\begin{aligned} Q_{i,i}|_{A=2} &= 2r^{-2+2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right) \right) \left(\frac{2-2}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) + 1 \right) \\ &+ \begin{cases} 0, & \text{para } N \text{ ímpar,} \\ (1 - (-1)^i)r^2(2r)^{-2}, & \text{para } N \text{ par.} \end{cases} \\ &= 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right) \right) + \begin{cases} 0, & \text{para } N \text{ ímpar,} \\ \frac{(1-(-1)^i)}{4}, & \text{para } N \text{ par.} \end{cases} \\ &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{1 - \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right)}{1 - \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right)} + G(i), \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $G(i)$ representa os termos que dependem da paridade de N . Os casos base necessários são para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, sendo os dois primeiros:

$$\begin{aligned} Q_{0,0}|_{A=2} &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{1-1}{1 - \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right)} + G(0) = 0, \\ Q_{1,1}|_{A=2} &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{1 - \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right)}{1 - \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right)} + G(1) = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + G(1). \end{aligned}$$

Se N é ímpar, $G(1) = 0$ e $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor = \frac{N-1}{2}$. Então:

$$Q_{1,1}|_{A=2} = \frac{N-1}{2} + 0 = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor.$$

Se N é par, $G(1) = \frac{1}{2}$ e $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor = \frac{N-2}{2}$. Assim:

$$Q_{1,1}|_{A=2} = \frac{N-2}{2} + \frac{1}{2} = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$$

Para $i = 2$ e $i = 3$, reescrevemos o numerador em termos de $\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)$. Em cada caso, o denominador surge como um fator que pode ser cancelado utilizando identidades trigonométricas.

A forma final em cada um dos casos foi obtida utilizando as definições e as relações de recorrência dos polinômios de Chebyshev apresentadas no Capítulo 2

$$\begin{aligned} Q_{2,2}|_{A=2} &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{1 - \cos\left(\frac{4\pi j}{N}\right)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)} + G(2) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{1 - (2\cos^2\left(\frac{2\pi j}{N}\right) - 1)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)} + G(2) \\ &= 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{1 - \cos^2\left(\frac{2\pi j}{N}\right)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)} + G(2) = 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\right) + G(2) \\ &= 2 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + G(2) \\ &= 2 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + 2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} T_{2j}\left(\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right) - 2 + G(2) \\ &= 2 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + 2 \left(\frac{U_{2\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}\left(\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right) + 1}{2} \right) - 2 + G(2) \\ &= 2 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + U_{2\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) - 1 + G(2), \end{aligned}$$

onde usamos a identidade (2.40).

Utilizando a Definição 2.3.2, temos:

$$U_{2\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \left(\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \right) = \frac{\text{sen}\left(\left(2\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor + 1\right) \frac{\pi}{N}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{N}\right)}.$$

Se N é ímpar, temos $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor = \frac{N-1}{2}$ e $G(2) = 0$, assim:

$$U_{N-1} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) \right) = \frac{\text{sen}(\pi)}{\text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}\right)} = 0.$$

Logo,

$$Q_{2,2}|_{A=2} = 2 \left(\frac{N-1}{2} \right) + 0 - 1 + 0 = N - 2.$$

Se N é par, temos $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor = \frac{N-2}{2}$ e $G(2) = 0$, assim:

$$U_{N-2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{N} \right) \right) = \frac{\text{sen}((N-1)\frac{\pi}{N})}{\text{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right)} = \frac{\text{sen}(\pi - \frac{\pi}{N})}{\text{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right)} = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{N})}{\text{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right)} = 1.$$

Portanto,

$$Q_{2,2}|_{A=2} = 2 \left(\frac{N-2}{2} \right) + 1 - 1 + 0 = N - 2.$$

$$\begin{aligned} Q_{3,3}|_{A=2} &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{1 - \cos \left(\frac{6\pi j}{N} \right)}{1 - \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right)} + G(3) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{2 \text{sen}^2 \left(\frac{3\pi j}{N} \right)}{2 \text{sen}^2 \left(\frac{\pi j}{N} \right)} + G(3) \\ &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{(3 \text{sen} \left(\frac{\pi j}{N} \right) - 4 \text{sen}^3 \left(\frac{\pi j}{N} \right))^2}{\text{sen}^2 \left(\frac{\pi j}{N} \right)} + G(3) \\ &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{9 \text{sen}^2 \left(\frac{\pi j}{N} \right) - 24 \text{sen}^4 \left(\frac{\pi j}{N} \right) + 16 \text{sen}^6 \left(\frac{\pi j}{N} \right)}{\text{sen}^2 \left(\frac{\pi j}{N} \right)} + G(3) \\ &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} 9 - 24 \text{sen}^2 \left(\frac{\pi j}{N} \right) + 16 \text{sen}^4 \left(\frac{\pi j}{N} \right) + G(3) \\ &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} 9 - 24 \left(\frac{1 - \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right)}{2} \right) + 16 \left(\frac{1 - \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right)}{2} \right)^2 + G(3) \\ &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} 1 + 4 \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) + 4 \cos^2 \left(\frac{2\pi j}{N} \right) + G(3) \\ &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} 3 + 4 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \cos \left(\frac{4\pi j}{N} \right) + G(3) \\ &= 3 \left[\frac{N-1}{2} \right] + 4 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} T_{2j} \left(\cos \left(\frac{\pi}{N} \right) \right) - 4 + 2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} T_{2j} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right) - 2 + G(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - 6 + 4 \left(\frac{U_{2 \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \left(\cos \left(\frac{\pi}{N} \right) \right) + 1}{2} \right) + 2 \left(\frac{U_{2 \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right) + 1}{2} \right) + G(3) \\
&= 3 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + 2U_{2 \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \left(\cos \left(\frac{\pi}{N} \right) \right) + U_{2 \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right) - 3 + G(3).
\end{aligned}$$

Utilizando a Definição 2.3.2, temos:

$$\begin{aligned}
U_{2 \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \left(\cos \left(\frac{\pi}{N} \right) \right) &= \frac{\text{sen} \left(\left(2 \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor + 1 \right) \frac{\pi}{N} \right)}{\text{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right)}, \\
U_{2 \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right) &= \frac{\text{sen} \left(\left(2 \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor + 1 \right) \frac{2\pi}{N} \right)}{\text{sen} \left(\frac{2\pi}{N} \right)}.
\end{aligned}$$

Se N é ímpar, temos $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor = \frac{N-1}{2}$ e $G(3) = 0$, assim:

$$U_{N-1} \left(\cos \left(\frac{\pi}{N} \right) \right) = \frac{\text{sen}(\pi)}{\text{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right)} = 0, \quad U_{N-1} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right) = \frac{\text{sen}(2\pi)}{\text{sen} \left(\frac{2\pi}{N} \right)} = 0.$$

Logo,

$$Q_{3,3}|_{A=2} = 3 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - 3 + 0 = 3 \left(\frac{N-1}{2} \right) - 3 = \left\lfloor \frac{3N-9}{2} \right\rfloor.$$

Se N é par, temos $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor = \frac{N-2}{2}$ e $G(3) = \frac{1}{2}$, assim:

$$\begin{aligned}
U_{N-2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{N} \right) \right) &= \frac{\text{sen} \left((N-1) \frac{\pi}{N} \right)}{\text{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right)} = \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right)}{\text{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right)} = 1, \\
U_{N-2} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right) &= \frac{\text{sen} \left((N-1) \frac{2\pi}{N} \right)}{\text{sen} \left(\frac{2\pi}{N} \right)} = \frac{-\text{sen} \left(\frac{2\pi}{N} \right)}{\text{sen} \left(\frac{2\pi}{N} \right)} = -1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$Q_{3,3}|_{A=2} = 3 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - 3 + 2 - 1 + \frac{1}{2} = 3 \left(\frac{N-2}{2} \right) - \frac{3}{2} = \left\lfloor \frac{3N-9}{2} \right\rfloor.$$

Suponha que a fórmula seja válida para todo $k \leq j$,

$$Q_{j,j}|_{A=2} = \left\lfloor \frac{j}{2}N - \frac{j^2}{2} \right\rfloor,$$

$$Q_{j-2,j-2}|_{A=2} = \left\lfloor \frac{j-2}{2}N - \frac{(j-2)^2}{2} \right\rfloor.$$

queremos mostrar que também vale para $j+2$, ou seja,

$$Q_{j+2,j+2}|_{A=2} = \left\lfloor \frac{j+2}{2}N - \frac{(j+2)^2}{2} \right\rfloor.$$

Para o passo de indução, consideramos a diferença dupla

$$D_i = (Q_{i+2,i+2} - Q_{i,i}) - (Q_{i,i} - Q_{i-2,i-2}) = Q_{i+2,i+2} - 2Q_{i,i} + Q_{i-2,i-2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} D_i &= \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi(i+2)j}{N}\right)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)} - 2 \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi ij}{N}\right)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)} + \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi(i-2)j}{N}\right)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)} \\ &+ G(i+2) - 2G(i) + G(i-2) \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{(-1) \left(\cos\left(\frac{2\pi ij}{N} + \frac{4\pi j}{N}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi ij}{N}\right) + \cos\left(\frac{2\pi ij}{N} - \frac{4\pi j}{N}\right) \right)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)} \\ &+ G(i+2) - 2G(i) + G(i-2) \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{4 \cos\left(\frac{2\pi ij}{N}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi j}{N}\right)}{2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi j}{N}\right)} + G(i+2) - 2G(i) + G(i-2) \\ &= 8 \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \cos\left(\frac{2\pi ij}{N}\right) \cos^2\left(\frac{\pi j}{N}\right) + G(i+2) - 2G(i) + G(i-2) \\ &= 4 \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \cos\left(\frac{2\pi ij}{N}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\right) + G(i+2) - 2G(i) + G(i-2) \\ &= 4 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\right) \mathbb{T}_i\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\right) + G(i+2) - 2G(i) + G(i-2). \end{aligned}$$

Primeiro notamos que os inteiros $i, i + 2, i - 2$ têm a mesma paridade, portanto

$$G(i) = \begin{cases} 0, & \text{para } N \text{ ímpar,} \\ \frac{(1-(-1)^i)}{4}, & \text{para } N \text{ par,} \end{cases}$$

é tal que $G(i + 2) - 2G(i) + G(i - 2) = G(i)(1 - 2 + 1) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Podemos agora simplificar D_i

$$D_i = 4 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) \mathbb{T}_i \left(\cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) = 4 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} (\mathbb{T}_i(x_j) + x_j \mathbb{T}_i(x_j)), \quad (3.24)$$

onde usamos a notação $x_j = \cos(2\pi j/N)$.

Usando as propriedades dos polinômios de Chebyshev (2.39) e (2.40), e sabendo que $\mathbb{T}_i(x_j) = \mathbb{T}_i(\mathbb{T}_j(x_1)) = \mathbb{T}_{ij}(x_1) = \mathbb{T}_j(x_i)$, vemos que o primeiro fator de (3.24) fica

$$\sum_{j=1}^m \mathbb{T}_j(x_i) = \sum_{j=0}^m \mathbb{T}_j(x_i) - 1 = \frac{\mathbb{U}_m(x_i) + \mathbb{U}_{m-1}(x_i) - 1}{2} \quad (3.25)$$

onde $m = \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$. Por outro lado, a propriedade (2.23) garante que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m x_j \mathbb{T}_i(x_j) &= \sum_{j=1}^m \frac{\mathbb{T}_{i+1}(x_j) + \mathbb{T}_{i-1}(x_j)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\mathbb{T}_j(x_{i+1}) + \mathbb{T}_j(x_{i-1})) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m (\mathbb{T}_j(x_{i+1}) + \mathbb{T}_j(x_{i-1})) - 1, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde

$$\sum_{j=0}^m \mathbb{T}_j(x_{i+1}) = \frac{\mathbb{U}_m(x_{i+1}) + \mathbb{U}_{m-1}(x_{i+1}) + 1}{2}, \quad (3.27)$$

$$\sum_{j=0}^m \mathbb{T}_j(x_{i-1}) = \frac{\mathbb{U}_m(x_{i-1}) + \mathbb{U}_{m-1}(x_{i-1}) + 1}{2}. \quad (3.28)$$

Cada uma dessas expressões pode ser simplificada usando a definição do polinômio de

Chebyshev de segunda espécie (2.27), para obtermos

$$\begin{aligned}
\frac{U_m(x_i) + U_{m-1}(x_i)}{2} &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi i(m+1)}{N}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi im}{N}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi i}{N}\right)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi i}{N}\left(m + \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi i}{N}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi i}{N}\left(m + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi i}{N}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi i}{N}\right)} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi i}{N}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi i}{N}\right)}{4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi i}{N}\right)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi i}{N}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{N}\right)}. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Analisando a expressão (3.29) por casos, se N é ímpar,

$$m = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor = \frac{N-1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi i}{N}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right) = \operatorname{sen}(\pi i) = 0 \tag{3.30}$$

e se N é par,

$$\begin{aligned}
m &= \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor = \frac{N-2}{2}, \\
\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi i}{N}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{N}(N-1)\right) = (-1)^{i+1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{N}\right) \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Concluimos, das equações (3.24), (3.25), (3.26), (3.27) e (3.28) que para ambos os casos N ímpar

$$D_i = 4 \left(\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \mathbb{T}_i(x_j) + \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} x_j \mathbb{T}_i(x_j) \right) = 4 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - 1 \right) = -4, \tag{3.32}$$

e N par,

$$\begin{aligned}
D_i &= 4 \left(\sum_{j=1}^{\frac{N-2}{2}} \mathbb{T}_i(x_j) + \sum_{j=1}^{\frac{N-2}{2}} x_j \mathbb{T}_i(x_j) \right) \\
&= 4 \left(\frac{(-1)^{i+1} - 1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^{i+2} + 1}{2} + \frac{(-1)^i + 1}{2} \right) - 1 \right) = -4. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Portanto, $D_i = -4$ para todos i e N .

Agora podemos concluir a indução; assumimos que $Q_{i,i}|_{A=2} = \left\lfloor \frac{i}{2}N - \frac{i^2}{2} \right\rfloor$ seja válida para $i < j + 2$. Então, assumindo que j ou $N - j$ sejam pares,

$$\begin{aligned}
Q_{j+2,j+2}|_{A=2} &= 2Q_{j,j}|_{A=2} - Q_{j-2,j-2}|_{A=2} + D_j \\
&= 2 \left\lfloor \frac{j}{2}(N - j) \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j-2}{2}(N - j + 2) \right\rfloor - 4 \\
&= 2 \left(\frac{j}{2}N - \frac{j^2}{2} \right) - \left(\frac{j-2}{2}N - \frac{(j-2)^2}{2} \right) - 4 \\
&= \frac{j+2}{2}N - \frac{(j+2)^2}{2} = \left\lfloor \frac{j+2}{2}N - \frac{(j+2)^2}{2} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Caso j e $N - j$ sejam ímpares, a igualdade também se mostra verdadeira, basta subtrair $1/2$ em cada um dos termos envolvendo a função maior inteiro $\lfloor \cdot \rfloor$. \square

Teorema 3.3.2. Para $A = 2$,

$$P_{i,i}|_{A=2} = (2 - i)N + \frac{(i^2 - i)N}{N - 1}.$$

Demonstração. A partir das equações (3.15) e (3.19) temos:

$$\begin{aligned}
P_{i,i}|_{A=2} &= r^{-2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-2} \left(2u_{0,j}^2 - 2 + 2 \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right) \right) \\
&+ \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ (2r)^{-2} ((-1)^i + 3), & \text{se } N \text{ é par,} \end{cases} \\
&= \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} 2 - \frac{2 + 2 \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right)}{u_{0,j}^2} + \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ \frac{((-1)^i + 3)}{4r^2}, & \text{se } N \text{ é par,} \end{cases} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{N-1}{2N}} \right)^2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} 2 - \frac{2 + 2 \cos \left(\frac{2\pi ij}{N} \right)}{2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right)} + \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ \frac{((-1)^i + 3)}{4 \left(\sqrt{\frac{N-1}{2N}} \right)^2}, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2N}{N-1} \right) \left[\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} 2 - \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi ij}{N}\right)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)} + \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ \frac{((-1)^i+3)}{4}, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases} \right] \\
&= \left(\frac{2N}{N-1} \right) \left[2 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - Q_{i,i} + \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ \frac{((-1)^i+3)}{4}, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases} \right]
\end{aligned}$$

Os casos base que precisamos são para $i \in \{0, 1\}$. Para $i = 0$:

$$P_{0,0}|_{A=2} = \left(\frac{2N}{N-1} \right) \left[2 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - Q_{0,0} + \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ \frac{(1+3)}{4}, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases} \right]$$

Sabemos que $Q_{0,0} = 0$, do Teorema 3.3.1.

$$P_{0,0}|_{A=2} = \left(\frac{2N}{N-1} \right) \left[2 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ 1, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases} \right]$$

Se N é ímpar, temos $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor = \frac{N-1}{2}$, logo $P_{0,0}|_{A=2} = 2N$. Se N é par, temos $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor = \frac{N-2}{2}$, logo $P_{0,0}|_{A=2} = \left(\frac{2N}{N-1} \right) (N-2+1) = 2N$.

Para $i = 1$, sabemos que $Q_{1,1} = \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$, então

$$P_{1,1}|_{A=2} = \left(\frac{2N}{N-1} \right) \left[\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ \frac{1}{2}, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases} \right]$$

Se N é ímpar, temos $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor = \frac{N-1}{2}$, assim $P_{1,1}|_{A=2} = N$. Se N é par, temos $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor = \frac{N-2}{2}$, assim $P_{1,1}|_{A=2} = N$.

Suponha que a fórmula valha para todo $k \leq j$, então

$$P_{j,j}|_{A=2} = (2-j)N + \frac{(j^2-j)N}{N-1}, \quad (3.34)$$

$$P_{j-2,j-2}|_{A=2} = (2-(j-2))N + \frac{((j-2)^2-(j-2))N}{N-1}. \quad (3.35)$$

Iremos mostrar que também vale para $j + 2$, ou seja,

$$P_{j+2,j+2}|_{A=2} = (2 - (j + 2))N + \frac{((j + 2)^2 - (j + 2))N}{N - 1}.$$

Para o passo da indução, consideramos a diferença dupla

$$C_i = (P_{i+2,i+2} - P_{i,i}) - (P_{i,i} - P_{i-2,i-2}) = P_{i+2,i+2} - 2P_{i,i} + P_{i-2,i-2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} C_i &= \left(\frac{2N}{N-1} \right) \left[2 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - Q_{i+2,i+2} + H(i+2) \right] \\ &\quad - 2 \left(\frac{2N}{N-1} \right) \left[2 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - Q_{i,i} + H(i) \right] \\ &\quad + \left(\frac{2N}{N-1} \right) \left[2 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - Q_{i-2,i-2} + H(i-2) \right] \\ &\quad + \left(2 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - Q_{i-2,i-2} + H(i-2) \right) \\ &= \left(\frac{2N}{N-1} \right) \left[-Q_{i+2,i+2} + 2Q_{i,i} - Q_{i-2,i-2} + H(i+2) - 2H(i) + H(i-2) \right] \\ &= \left(\frac{2N}{N-1} \right) \left[-D_i + H(i+2) - 2H(i) + H(i-2) \right] \\ &= \left(\frac{2N}{N-1} \right) \left[4 + H(i+2) - 2H(i) + H(i-2) \right], \end{aligned}$$

onde $H(i)$ representa os termos que dependem da paridade de N ,

$$H(i) = \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ \frac{((-1)^i + 3)}{4}, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases}$$

Notamos, novamente, que os índices i , $i + 2$ e $i - 2$ têm a mesma paridade, logo

$H(i+2) - 2H(i) + H(i-2) = 0$. Portanto,

$$C_i = \frac{8N}{N-1}, \quad \forall i. \quad (3.36)$$

Agora podemos concluir a indução. De (3.34), (3.35) e da definição do coeficiente C_j ,

$$\begin{aligned} P_{j+2,j+2}|_{A=2} &= 2P_{j,j}|_{A=2} - P_{j-2,j-2}|_{A=2} + C_j \\ &= 2 \left[(2-j)N + \frac{(j^2-j)N}{N-1} \right] \\ &\quad - \left[(2-(j-2))N + \frac{((j-2)^2-(j-2))N}{N-1} \right] + \frac{8N}{N-1} \\ &= (2-(j+2))N + \frac{((j+2)^2-(j+2))N}{N-1}. \end{aligned}$$

Como queríamos concluir. □

Assim, torna-se possível determinar completamente os autovalores da hessiana para a configuração do polígono regular no caso de vórtices.

Teorema 3.3.3. *Os autovalores da hessiana de f no caso $A = 2$ são $(2-i)N + \frac{(i^2-i)N}{N-1}$ e $\left\lfloor \frac{i}{2}N - \frac{i^2}{2} \right\rfloor$ para $0 \leq i \leq N-1$. No espaço de configuração quociente C_N , o polígono regular tem índice de Morse de 0 para $N \in \{3, 4, 5, 6\}$, é degenerado para $N = 7$ e tem um índice de Morse de $N-5$ para $N \geq 8$.*

Demonstração. É imediato pela equação (3.21) para $S_{i,i}$ que $S_{i,i}|_{A=2} = 0$, então os autovalores da hessiana são simplesmente $Q_{i,i}|_{A=2}$ e $P_{i,i}|_{A=2}$, conforme obtido nos teoremas 3.3.1 e 3.3.2. Ao analisar a expressão

$$\left\lfloor \frac{i}{2}N - \frac{i^2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{i}{2}(N-i) \right\rfloor,$$

observamos que ambos os fatores são não-negativos para $0 \leq i \leq N-1$. Assim, concluímos que esta expressão não contribui com autovalores negativos e, portanto, não impacta o

índice de Morse. Para analisar o índice de Morse, consideramos a expressão

$$(2-i)N + \frac{(i^2-i)N}{N-1} = \frac{N-1}{N} (i^2 - iN + 2(N-1)).$$

Notamos que o sinal desses autovalores é o mesmo sinal da função quadrática

$$f(i) = i^2 - iN + 2(N-1), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Assim, podemos analisar para quais valores de N a $f(i)$ será negativa. Temos que:

- Soma das raízes: $i_1 + i_2 = N > 0$,
- Produto das raízes: $i_1 i_2 = 2(N-1) > 0$,
- Discriminante:

$$\Delta = (-N)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2(N-1) = N^2 - 8N + 8 = (N-4)^2 - 8,$$

logo, a condição de existência de raízes reais desse polinômio é $\Delta > 0 \Leftrightarrow N \geq 7$, considerando apenas N inteiros positivos. Portanto, para os polinômios com $3 \leq N \leq 6$, todos os seus autovalores são positivos, ou seja, o índice de Morse é zero. Suas raízes são:

$$i_1 = \frac{N - \sqrt{(N-4)^2 - 8}}{2}$$

$$i_2 = \frac{N + \sqrt{(N-4)^2 - 8}}{2}$$

Como $f(i)$ é uma parábola com concavidade positiva, os valores de $f(i)$ são negativos no intervalo entre as raízes i_1 e i_2 , enquanto são positivos fora desse intervalo. Para que $f(i)$ contribua para o índice de Morse, precisamos determinar quando essa expressão assume valores negativos para N inteiro. Em particular, para $N = 7$, há ausência de inteiros entre suas raízes $i_1 = 3$ e $i_2 = 4$, logo a parábola $f(i) = i^2 - iN + 2(N-1)$ não assume valores negativos para nenhum i inteiro no intervalo $0 \leq i \leq N-1$. Apesar disso, há um par de autovalores nulos, o que torna esse ponto crítico degenerado.

Afirmamos que $2 < i_1 < 3$ quando $N \geq 8$. De fato

$$\begin{aligned} i_1 = \frac{N - \sqrt{(N-4)^2 - 8}}{2} > 2 &\Leftrightarrow N - 4 > \sqrt{(N-4)^2 - 8} \\ &\Leftrightarrow (N-4)^2 > (\sqrt{(N-4)^2 - 8})^2 \Leftrightarrow (N-4)^2 > (N-4)^2 - 8 \Leftrightarrow 0 > -8 \end{aligned}$$

o que é verdadeiro. Portanto, $i_1 > 2$. Da mesma forma, mostramos que $i_1 < 3$ quando $N \geq 8$

$$\begin{aligned} i_1 = \frac{N - \sqrt{(N-4)^2 - 8}}{2} < 3 &\Leftrightarrow N - 6 < \sqrt{(N-4)^2 - 8} \\ &\Leftrightarrow (N-6)^2 < (\sqrt{(N-4)^2 - 8})^2 \Leftrightarrow N^2 - 12N + 36 < N^2 - 8N + 8 \Leftrightarrow N > 7 \end{aligned}$$

Notamos, ainda que o vértice da função f ocorre no ponto $N/2$. Portanto, a segunda raiz $i_2 = N/2 + (N/2 - i_1) = N - i_1$. Concluimos que, para $N \geq 8$, $2 < i_1 < 3$ e $N-3 < i_2 < N-2$. Logo, o intervalo entre as raízes da parábola $f(i) = i^2 - iN + 2(N-1)$ contém exatamente $N - 5$ valores inteiros, como ilustrado na Figura 3.2.

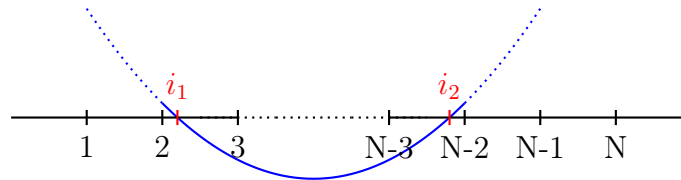


Figura 3.2: Posição das raízes do polinômio $f(i)$.

□

O fato de o heptágono ter uma hessiana degenerada no caso do vórtice é interessante em comparação aos resultados de estabilidade dinâmica em (CABRAL; SCHMIDT, 1999), em que o heptágono também é um caso degenerado.

3.4 O polígono regular para $A > 2$

Agora provamos um teorema que descreve características do índice de Morse do polígono regular para valores maiores de A . Um resultado anterior relacionado, para o caso

Newtoniano ($A = 3$), é que o N -ágono regular não tem índice 0 para $N \geq 6$ ((MEYER; SCHMIDT, 1988); (SLAMINKA; WOERNER, 1990); (WOERNER, 1990)).

Lema 3.4.1. *Para $N \geq 2$:*

$$\lambda_{(N,0,+)} > NA, \quad \lambda_{(N,0,-)} = 0, \quad e \quad \lambda_{(N,1,\pm)} > 0.$$

Demonstração. O resultado para $i = 0$ segue imediatamente das expressões para $P_{0,0}$, $Q_{0,0}$ e $S_{0,0}$.

$$\begin{aligned} P_{0,0} &= r^{-A} \sum_{j=1}^{\lfloor (N-1)/2 \rfloor} u_{0,j}^{-A} \left[u_{0,j}^2 \left(\frac{A}{2} + 1 + \left(\frac{A}{2} - 1 \right) \right) - 2 + 2 \right] \\ &+ \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ (2r)^{-A} 2A, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases} \\ &= Ar^{-A} \sum_{j=1}^{\lfloor (N-1)/2 \rfloor} u_{0,j}^{-A+2} + \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ 2A(2r)^{-A}, & \text{se } N \text{ é par,} \end{cases} \\ Q_{0,0} &= 2r^{-A+2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} (1-1) \left(\frac{A-2}{2} (1+1) + 1 \right) = 0, \\ S_{0,0} &= 2r^{-A+1} \left(\frac{A-2}{2} \right) \mathbb{I} \sum_{j=1}^{(N-1)/2} 0 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi j}{N} \right) u_{0,j}^{-A} = 0. \end{aligned}$$

Assim, desde que $P_{0,0} > NA > 0$, devido à expressão (3.14), os autovalores associados são

$$\lambda(N, 0, \pm) = \frac{P_{0,0} + 0 \pm \sqrt{(P_{0,0} - 0)^2 - 40^2}}{2} = \frac{P_{0,0} \pm P_{0,0}}{2}.$$

Portanto,

$$\lambda(N, 0, +) = P_{0,0}, \quad \lambda(N, 0, -) = 0.$$

Para $i = 1$, analisamos o determinante da matriz (3.22):

$$\det(E_i) = P_{1,1}Q_{1,1} + S_{1,1}^2,$$

Desenvolvendo a expressão:

$$\begin{aligned}
P_{1,1}Q_{1,1} &= \left[r^{-A} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} \left[u_{0,j}^2 \left(\frac{A}{2} + 1 + \left(\frac{A}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) - \underbrace{2 + 2 \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right)}_{-u_{0,j}^2} \right] \right] \\
&+ \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ 2(2r)^{-A}, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases} \\
&\times \left[2r^{-A+2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,k}^{-A} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) \left(\frac{A-2}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) + 1 \right) \right] \\
&= r^{-2A+2} \left[\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} u_{0,k}^{-A} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) \right. \\
&\times \left(A + (A-2) \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) \times \left((A-2) \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) + 2 \right) \\
&+ \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ 2(2r)^{-A} \times Q_{1,1}, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases} \\
&= r^{-2A+2} \left[\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} u_{0,k}^{-A} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) \right. \\
&\times \left((A-2) \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) + 2 \right) \times \left((A-2) \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) + 2 \right) \\
&+ \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ 2(2r)^{-A} \times Q_{1,1}, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases} \\
&= r^{-2A+2} \left[\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} u_{0,k}^{-A} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) \right. \\
&\times \left[(A-2)^2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) \right. \\
&\left. \left. + 2(A-2) \left(2 + \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) + \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) + 4 \right] \right]
\end{aligned}$$

$$+ \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ 2(2r)^{-A} \times Q_{1,1}, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases},$$

Já para $S_{1,1}^2$, temos:

$$\begin{aligned} S_{1,1}^2 &= \left(r^{-A+1} (A-2) \mathbb{I} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2\pi j}{N} \right) u_{0,j}^{-A} \right) \\ &\times \left(r^{-A+1} (A-2) \mathbb{I} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2\pi k}{N} \right) u_{0,k}^{-A} \right) \\ &= r^{-2A+2} (A-2)^2 (-1) \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} u_{0,k}^{-A} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \\ &= -r^{-2A+2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} u_{0,k}^{-A} (A-2)^2 \left(1 - \cos^2 \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) \left(1 - \cos^2 \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) \\ &= -r^{-2A+2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} u_{0,k}^{-A} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) \\ &\times (A-2)^2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right). \end{aligned}$$

Logo, somando os termos:

$$\begin{aligned} P_{1,1}Q_{1,1} + S_{1,1}^2 &= r^{-2A+2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} u_{0,k}^{-A} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) \\ &\times \left[\left((A-2)^2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) \right. \right. \\ &+ 2(A-2) \left(2 + \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) + \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) + 4 \left. \right. \\ &\left. \left. - (A-2)^2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi j}{N} \right) \right) \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) \right] \\ &+ \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ 2(2r)^{-A} \times Q_{1,1} + S_{1,1}^2, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r^{-2A+2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} u_{0,k}^{-A} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\right) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right) \\
&\times \left[\left(2(A-2) \left(2 + \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right) + 4\right) \right] \\
&+ \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ 2(2r)^{-A} \times Q_{1,1} + S_{1,1}^2, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Os termos da soma são positivos para $A \geq 2$, pois envolvem apenas fatores não negativos, garantindo que $P_{1,1}Q_{1,1} + S_{1,1}^2 > 0$.

Dado que o produto dos autovalores do bloco $i = 1$ é o determinante calculado, eles devem ter sinais iguais. O traço desse bloco, a soma dos autovalores, determina o sinal de ambos.

$$\begin{aligned}
P_{1,1} + Q_{1,1} &= r^{-A} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\right) \left((A-2) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\right) + 2\right) \\
&+ \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ 2(2r)^{-A}, & \text{se } N \text{ é par.} \end{cases} \\
&+ r^{-A+2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\right) \left((A-2) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\right) + 2\right) \\
&= r^{-A}(1+r^2) \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\right) \left((A-2) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\right) + 2\right),
\end{aligned}$$

o qual é positivo. Segue que os autovalores $\lambda_{(N,1,\pm)}$ são positivos. \square

Para $i \in \{1, \dots, N-1\}$, temos que $\lambda_{(N,i,\pm)} = \lambda_{(N,N-i,\pm)}$ para cada escolha de sinal, e assim podemos restringir nossa atenção a $1 \leq i \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$. Exceto para os casos especiais de pequenos valores de N , verifica-se que o autovalor $\lambda_{(N,2,-)}$, que é igual a $\lambda_{(N,N-2,-)}$, é geralmente o primeiro autovalor negativo da matriz hessiana, e a partir dele todos os autovalores contribuem para o índice de Morse.

Teorema 3.4.1. *Para cada $N \geq 5$, existe um valor de $A = A_N$ e $i \in \{1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor\}$ tal*

que os autovalores da hessiana da função (3.4) para o polígono regular de massas iguais satisfazem

$$\begin{aligned}\lambda_{(N,i,+)} &> 0, \\ \lambda_{(N,i,-)} &> 0 \quad \text{para } i < 2, \\ \lambda_{(N,i,-)} &< 0 \quad \text{para } i \geq 2,\end{aligned}$$

para todo $A > A_N$. O índice de Morse da função (3.4) para o polígono regular no espaço de configurações quociente C_N é $N - 3$ para $A > A_N$.

Demonstração. Para os propósitos do índice de Morse, precisamos apenas determinar o sinal dos autovalores da hessiana da função (3.4), então, para cada bloco 2×2 de E_i (3.22), precisamos saber o sinal de $P_{i,i}Q_{i,i} + S_{i,i}^2$. Consideraremos, nesta prova, apenas o caso N ímpar, uma vez que o caso N par possui ordem inferior em relação ao caso ímpar.

Se este valor for negativo, então os autovalores terão sinais opostos. Assim, examinamos os termos das somas em nossa expressão para

$$\begin{aligned}P_{i,i}Q_{i,i} + S_{i,i}^2 &= r^{-2A+2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} u_{0,k}^{-A} \left[-\frac{1}{2} \left(-4 + (2+A)u_{0,j}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (4 + (-2+A)u_{0,j}^2) \cos\left(\frac{2\pi ij}{N}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. \left(A + (-2+A) \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi ik}{N}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - (-2+A)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ij}{N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ik}{N}\right) \right].\end{aligned}$$

Para tornar as expressões extensas mais manejáveis, adotamos a notação $\theta = \frac{2\pi}{N}$ e utilizamos o fato de que $u_{0,j}^2 = 2 - 2\cos(j\theta)$. Além disso, em razão da estrutura de $S_{i,i}^2$, será conveniente usar também a notação $B = A - 2$, além de A . Com essas definições,

temos:

$$\begin{aligned}
P_{i,i}Q_{i,i} + S_{i,i}^2 &= r^{-2A+2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} u_{0,k}^{-A} \left[-\frac{1}{2} \left(2A(1 + \cos(ij\theta)) - 2 \cos(j\theta) \right) \right. \\
&\quad \times (2 + A + (-2 + A) \cos(ij\theta)) \left. \right) (A + (-2 + A) \cos(k\theta)) (-1 + \cos(ik\theta)) \\
&\quad \left. - (-2 + A)^2 \operatorname{sen}(j\theta) \operatorname{sen}(ij\theta) \operatorname{sen}(k\theta) \operatorname{sen}(ik\theta) \right] \\
&= r^{-2A+2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} u_{0,k}^{-A} \left[-\frac{1}{2} \left(2(2 + B)(1 + \cos(ij\theta)) - 2 \cos(j\theta) \right) \right. \\
&\quad \times (4 + B + B \cos(ij\theta)) \left. \right) (2 + B + B \cos(k\theta)) (-1 + \cos(ik\theta)) \\
&\quad \left. - B^2 \operatorname{sen}(j\theta) \operatorname{sen}(ij\theta) \operatorname{sen}(k\theta) \operatorname{sen}(ik\theta) \right] \\
&= r^{-2A+2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} u_{0,k}^{-A} \left[4(-1 + 2 \cos(j\theta) - \cos(ij\theta)) (-1 + \cos(ik\theta)) \right. \\
&\quad + 2B \left(- (1 + \cos(ij\theta))(2 + \cos(k\theta)) + \cos(j\theta) \right) \\
&\quad \times (3 + \cos(ij\theta) + 2 \cos(k\theta)) \left. \right) (-1 + \cos(ik\theta)) \\
&\quad + B^2 \left[8(1 + \cos(ij\theta)) \cos^2 \left(\frac{k\theta}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{j\theta}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{ik\theta}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{sen}(j\theta) \operatorname{sen}(ij\theta) \operatorname{sen}(k\theta) \operatorname{sen}(ik\theta) \right] \left. \right].
\end{aligned}$$

Notamos que todos os termos somados possuem o fator $u_{0,j}^{-A} u_{0,k}^{-A}$, que domina o crescimento da função quando $A \rightarrow +\infty$, desde que $u_{0,k} u_{0,j} < 1$. Dentre todos esses índices, a combinação $j = k = 1$ é aquela que maximiza a base dessa exponencial. Portanto, para A suficientemente grande, o sinal desse determinante coincide com o sinal do fator multiplicativo de $u_{0,1}^{-A} u_{0,1}^{-A}$. Dessa forma, separamos primeiro os termos diagonais, isto é, $j = k$. Nesses termos, o coeficiente de B^2 se anula.

$$P_{i,i}Q_{i,i} + S_{i,i}^2 = r^{-2A+2} \left[\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-2A} \left(4(-1 + 2 \cos(j\theta) - \cos(ij\theta)) (-1 + \cos(ij\theta)) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + 2B \left(- (1 + \cos(ij\theta))(2 + \cos(j\theta)) + \cos(j\theta) \right. \\
& \times \left. (3 + \cos(ij\theta) + 2 \cos(j\theta))(-1 + \cos(ij\theta)) \right) \\
& + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} u_{0,j}^{-A} u_{0,k}^{-A} \left(4(-1 + 2 \cos(j\theta) - \cos(ij\theta))(-1 + \cos(ik\theta)) \right. \\
& + 2B \left(- (1 + \cos(ij\theta))(2 + \cos(k\theta)) + \cos(j\theta) \right) \\
& \times \left. (3 + \cos(ij\theta) + 2 \cos(k\theta))(-1 + \cos(ik\theta)) \right. \\
& + B^2 \left[8(1 + \cos(ij\theta)) \cos^2 \left(\frac{k\theta}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{j\theta}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{ik\theta}{2} \right) \right. \\
& \left. \left. - \operatorname{sen}(j\theta) \operatorname{sen}(ij\theta) \operatorname{sen}(k\theta) \operatorname{sen}(ik\theta) \right] \right).
\end{aligned}$$

Para um valor fixo de N , o termo principal (com $j = k = 1$) expandido em θ domina para valores suficientemente grandes de A :

$$P_{i,i}Q_{i,i} + S_{i,i}^2 = -r^{-2A+2}u_{0,1}^{-2A} (i^2(i^2 - 2 + B(i^2 - 3))\theta^4 + O(N^2 A^2 \theta^{A+4})) \quad (3.37)$$

e para tais valores de A , este termo é negativo para $i \geq 2$. \square

Observamos que a expressão encontrada em (3.37) é distinta daquela apresentada em (HAMPTON, 2019), no entanto a conclusão é exatamente a mesma. Ainda em (HAMPTON, 2019), é proposta uma conjectura, mais forte que o Teorema 3.4.1, baseada em investigações numéricas.

Conjectura 1. *Existe um valor único A_N para cada $N > 4$ tal que, para $A < A_N$, o índice de Morse da função (3.4) para o polígono regular no espaço de configuração quociente C_N é $N - 5$, e o índice de Morse é $N - 3$ para $A > A_N$. Além disso, os A_N são monotonamente decrescentes em N com*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_N = 2.$$

É proposta uma aproximação de Padé para ajustar os valores do expoente crítico A_N

como função do número de vértices N , cujo erro relativo mostrou-se inferior a 1% para $5 \leq N \leq 200$, segundo a referência,

$$A_N \approx \frac{2N^3 - 2.46N^2 + 0.713N - 91.5}{N^3 - 3.3N^2 - 17.17N + 58.5}. \quad (3.38)$$

Na Figura 3.3, apresentamos o gráfico de (3.38) juntamente com os valores que obtemos para $5 \leq N \leq 15$, mostrando-se adequada a aproximação.

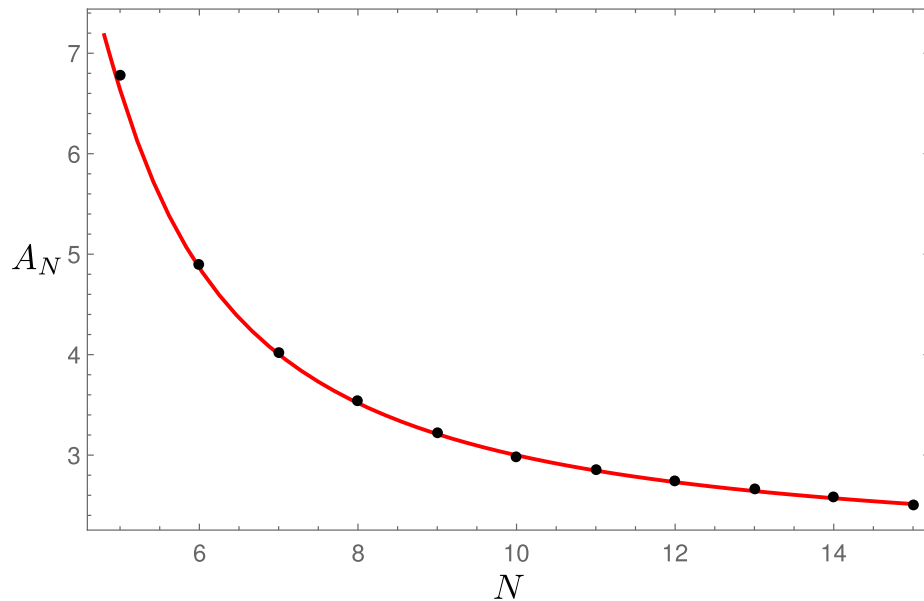


Figura 3.3: Gráfico da função (3.38) proposta pela Conjectura 1, e os valores do expoente crítico A_N , para $5 \leq N \leq 15$, obtidos com tratamento numérico.

No entanto, ao observar o caso do hexágono com detalhes, vemos duas mudanças do índice de Morse, $Ind_M(A, N)$, com o a variação de A . A primeira ocorre em $A_1 \approx 2,97$ e a segunda no valor indicado em (HAMPTON, 2019), $A_2 \approx 4,87$. A Figura 3.4 ilustra este comportamento. Portanto a Conjectura 1 não é verdadeira exatamente na forma como está proposta.

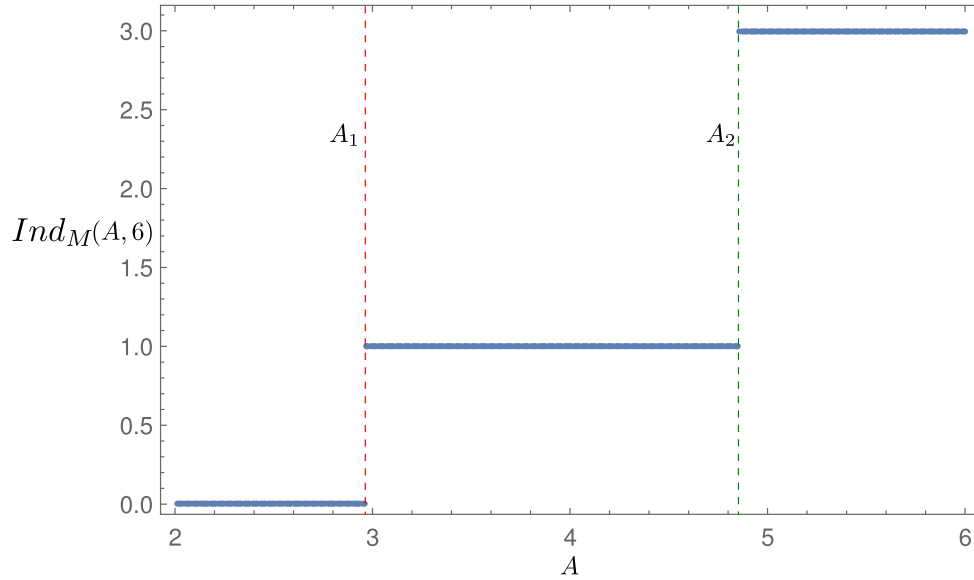


Figura 3.4: Índice de Morse para a configuração hexagonal em função do expoente A .

É uma curiosidade interessante que A_7 (para a Conjectura 1) seja exatamente igual a 4.

Lema 3.4.2. $\lambda(7, 2, -)|_{A=4}$ é exatamente igual a 0.

Demonstração. Temos as fórmulas explícitas (3.19), (3.20) e (3.21), a partir das quais podemos calcular os autovalores da hessiana da função (3.4). No caso $N = 7$, sabemos que

$$\begin{aligned} -1 &= e^{\mathbb{I}\pi} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \mathbb{I} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \right)^7 \\ &= c(64c^6 - 112c^4 + 56c^2 - 7) + \mathbb{I} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)(64c^6 - 80c^4 + 24c^2 - 1), \end{aligned}$$

onde usamos a notação $c := \cos(\pi/7)$. Vemos que este cosseno é uma das raízes do polinômio $c(64c^6 - 112c^4 + 56c^2 - 7) + 1 = (c + 1)(8c^3 - 4c^2 - 4c + 1)^2$, qual seja,

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = \left(\frac{7}{144} \mathbb{I}\sqrt{3} - \frac{7}{432} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{7}{36 \left(\frac{7}{144} \mathbb{I}\sqrt{3} - \frac{7}{432} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{6}.$$

Essas identidades nos permitem simplificar:

$$P_{2,2}|_{A=4, N=7} = r^{-4} \sum_{j=1}^3 u_{0,j}^{-4} \left[u_{0,j}^2 \left(3 + \cos\left(\frac{4\pi j}{7}\right) \right) - 2 + 2 \cos\left(\frac{4\pi j}{7}\right) \right]$$

$$= -\frac{1}{r^4} \sum_{j=1}^3 \cos(2j\theta) = \frac{7}{4},$$

com $\theta = \pi/7$. Da mesma forma, vemos que

$$\begin{aligned} Q_{2,2}|_{A=4,N=7} &= 2r^{-2} \sum_{j=1}^3 u_{0,j}^{-4} \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi j}{7}\right)\right) \left(2 + \cos\left(\frac{2\pi j}{7}\right)\right) \\ &= \frac{1}{R^2} \sum_{j=1}^3 (\cos(2\theta j) + 2) \cot^2(\theta j) = \sqrt{\frac{4375}{8}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{2,2}|_{A=4,N=7} &= 2r^{-3} \mathbb{I} \sum_{j=1}^3 \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi j}{7}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{7}\right) u_{0,j}^{-4} \\ &= \frac{1}{r^3} \mathbb{I} \sum_{j=1}^3 \cos(2\theta j) \cot^2(\theta j) = \mathbb{I} \sqrt[4]{\frac{214375}{128}}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\lambda(7, 2, -)|_{A=4} = \frac{1}{2} \left(P_{2,2} + Q_{2,2} - \sqrt{(P_{2,2} - Q_{2,2})^2 - 4S_{2,2}^2} \right) = 0.$$

□

Como estamos estudando a estabilidade no sentido do índice de Morse, vale destacar a existência de outra noção importante de estabilidade: a estabilidade linear, baseada na análise dos autovalores da linearização do sistema em um referencial em rotação. Essa distinção é bem ilustrada pelo exemplo clássico da configuração de Lagrange, formada por um triângulo equilátero com três massas iguais. Essa configuração é estável no sentido do índice de Morse. Entretanto, como discutido na Seção 3.2 de (MOECKEL, 1995), a configuração de Lagrange é linearmente estável se, e somente se,

$$27(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) < (m_1 + m_2 + m_3)^2. \quad (3.39)$$

Em particular, se as três massas são iguais, como consideramos nesse trabalho, a equação

(3.39) é equivalente a $3^4 < 3^2$, e portanto falsa. Em outras palavras, embora a configuração de Lagrange seja estável no sentido do índice de Morse, com índice igual a zero, ela não satisfaz, em geral, os critérios de estabilidade linear, o que evidencia a diferença entre essas duas abordagens.

Capítulo 4

Extensão para Configurações

Simétricas Empilhadas

Neste capítulo, propomos uma extensão natural do estudo de configurações centrais simétricas ao considerar arranjos empilhados de partículas que preservam as simetrias poligonais. O objetivo é investigar como a inserção de massas adicionais em posições centrais ou sobrepostas a outras configurações clássicas afeta a caracterização dessas configurações como centrais, bem como os valores associados ao índice de Morse.

Não conseguimos obter resultados gerais sobre o índice de Morse dessas configurações, como feito no Capítulo 3, assim resolvemos analisar configurações empilhadas com poucos corpos, obtendo resultados caso a caso de forma a sugerirmos conjecturas.

Neste contexto, definimos a noção de configuração central empilhada, conforme descrita em (HAMPTON, 2005).

Definição 4.0.1. *Uma configuração central com posições r_1, \dots, r_N é chamada de empilhada se existe um subconjunto próprio $\{r_{i_1}, \dots, r_{i_k}\} \subset \{r_1, \dots, r_N\}$ com $k \geq 3$, que também forma uma configuração central.*

4.1 Configurações Centrais Poligonais com Massa Central

Consideremos uma configuração composta por N massas $m_1 = m_2 = \dots = m_N = m$, com $m = 1$ sem perda de generalidade, posicionadas simetricamente sobre os vértices de um polígono regular de N lados, com uma massa adicional m_0 localizada no centro do polígono, ou seja, na origem do sistema de coordenadas, conforme ilustrado na Figura 4.1. Além das configurações do tipo pirâmide dupla estudadas por (ZHANG; ZHOU, 2001), esta é uma das configurações empilhadas conhecidas em que o corpo adicional está localizado no centro do polígono, conforme discutido por (FERNANDES; SILVA; VIDAL, 2025).

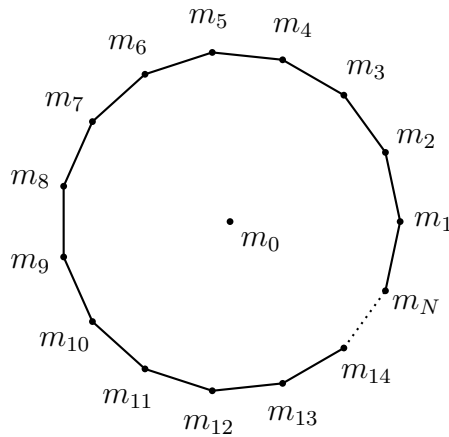


Figura 4.1: Configuração com massas m_1, \dots, m_N em polígono regular e uma massa central

Pela equação (1.2), temos $M = N + m_0$. A partir das expressões para o momento de inércia e o potencial, dadas por (1.10) e (1.11), obtemos:

$$I = \sum_{i=1}^N r_i^2 + m_0 r_{N+1}^2,$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{A-2} \left(\sum_{1 \leq i < k}^N \frac{1}{r_{i,k}^{A-2}} + \sum_{j=1}^N \frac{m_0}{r_{j,N+1}^{A-2}} \right).$$

Substituindo I e \mathcal{U} na expressão de f (3.4), temos:

$$\begin{aligned} f &= \frac{N + m_0}{2} \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 + m_0 r_{N+1}^2 \right) + \frac{1}{A-2} \left(\sum_{1 \leq i < k}^N \frac{1}{r_{ik}^{A-2}} + \sum_{j=1}^N \frac{m_0}{r_{j,N+1}^{A-2}} \right) \\ &= \frac{N}{2} \sum_{i=1}^N r_i^2 + \frac{m_0}{2} \sum_{i=1}^N r_i^2 + \frac{N + m_0}{2} \cdot m_0 r_{N+1}^2 + \frac{1}{A-2} \sum_{1 \leq i < k}^N \frac{1}{r_{ik}^{A-2}} + \frac{1}{A-2} \sum_{j=1}^N \frac{m_0}{r_{j,N+1}^{A-2}}, \end{aligned}$$

reorganizando, temos:

$$f = \underbrace{\frac{N + m_0}{2} \cdot m_0 r_{N+1}^2 + \frac{1}{A-2} \sum_{j=1}^N \frac{m_0}{r_{j,N+1}^{A-2}}}_{f_0} + \frac{m_0}{2} \sum_{i=1}^N r_i^2 + \underbrace{\frac{N}{2} \sum_{i=1}^N r_i^2 + \frac{1}{A-2} \sum_{1 \leq i < k}^N \frac{1}{r_{ik}^{A-2}}}_{f_1}.$$

Observa-se que f_1 corresponde exatamente à forma da função utilizada para configurações centrais com N massas iguais, conforme discutido no Capítulo 3. Já f_0 representa a contribuição da massa central m_0 sobre a configuração total. Assim,

$$f = f_0 + \frac{m_0}{2} \sum_{i=1}^N r_i^2 + f_1.$$

Dessa forma,

$$\nabla f = \nabla f_0 + \frac{m_0}{2} \cdot \nabla \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 \right) + \nabla f_1.$$

Conforme discutido no Capítulo 3, denotando por $X_0 = (R_1, \dots, R_N, R_{N+1})$ o vetor cujas coordenadas são as posições R_j dos corpos na configuração central, sabemos que o vetor (R_1, \dots, R_N) consiste apenas nos vértices do polígono regular, o que forma uma configuração central em \mathbb{R}^{2N} . No entanto, encontramos a dificuldade de que não é possível anular ambos $\nabla f(X_0) = 0$ e $\nabla f_1(X_0) = 0$ com o mesmo vetor X_0 , há um fator multiplicativo entre os dois pontos críticos. De fato, temos que

$$\nabla \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 \right) = (2r_1, 2r_2, \dots, 2r_N, 0),$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial r_j} = -\frac{m_0 r_{j,N+1}}{|r_{j,N+1}|^A}, \quad \text{para } j = 1, \dots, N,$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial r_{N+1}} = (N + m_0)m_0 r_{N+1} - \sum_{j=1}^N \frac{m_0 r_{j,N+1}}{|r_{j,N+1}|^A},$$

de modo que o gradiente de f , sobre o ponto crítico, pode ser reescrito como:

$$\nabla f(X_0) = \begin{bmatrix} -m_0 \frac{r_{1,N+1}}{|r_{1,N+1}|^A} + m_0 r_1 \\ \vdots \\ -m_0 \frac{r_{N,N+1}}{|r_{N,N+1}|^A} + m_0 r_N \\ (N + m_0)m_0 r_{N+1} - \sum_{j=1}^N \frac{m_0 r_{j,N+1}}{|r_{j,N+1}|^A} \end{bmatrix} + \nabla f_1(X_0) = m_0 \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{|R_1|^A} + R_1 \\ \vdots \\ -\frac{R_N}{|R_N|^A} + R_N \\ 0 \end{bmatrix} + \nabla f_1(X_0),$$

o que deixa claro que X_0 não pode anular ambos os gradientes se $|R_j| \neq 1$.

Assim, podemos prosseguir com o cálculo da matriz hessiana da função f ,

$$\text{Hess}_f = \text{Hess}_{f_0} + m_0 \cdot I_{2N} + \text{Hess}_{f_1}.$$

Verificamos que, ao calcular essa hessiana novamente em coordenadas polares, na ordem $(r_1, r_2, \dots, r_N, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N, r_{N+1}, \theta_{N+1})$, a função f_0 tem pouca contribuição no resultado final. A matriz resultante tem um primeiro bloco $N \times N$ com o mesmo formato de (3.17), o qual pode ser diagonalizado por blocos, novamente, usando uma matriz similar a usada em (3.18), para obtermos

$$\text{Hess}_f = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & \cdots & 0 & B_1^T \\ 0 & H_2 & \cdots & 0 & B_2^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_N & B_N^T \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_N & B_{N+1} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde todos H_j são blocos 2×2 análogos aos usados no Capítulo 3, e B_j também são blocos 2×2 mas com segunda linha nula. De fato, vemos imediatamente de (3.16) que as

derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_{N+1}} = m_i m_{N+1} r_{i,N+1}^{-A-2} r_i r_{N+1} \left[-A r_i r_{N+1} \sin^2(\theta_{N+1} - \theta_i) + r_{i,N+1}^2 \cos(\theta_{N+1} - \theta_i) \right] \quad (4.2)$$

se anulam em $r_{N+1} = 0$, para todo $i = 1, \dots, N$, sendo esse o motivo para que em (4.1) as últimas linha e coluna se anulem e, portanto, tenha pelo menos um autovalor nulo a mais que no caso poligonal.

Apesar da estrutura relativamente simples, como a que estudamos no Capítulo 3, os blocos B_j não nulos influenciam nos autovalores dessa matriz hessiana, impedindo que a matriz seja desacoplada como antes. Essa dificuldade impacta diretamente no cálculo dos autovalores da matriz, o que, por sua vez, torna mais complexa a determinação direta do índice de Morse.

No contexto das configurações estudadas, é importante compreender como a matriz hessiana da função f atua sobre o vetor de posições r . No Lema 4.1.1, mostramos que $r = X_0$, sendo um autovetor da hessiana, é associado a um autovalor positivo proporcional à massa total do sistema.

Lema 4.1.1. *Considere um sistema de massas m_{N+1} e $m_1 = \dots = m_N = 1$, dispostas nos vértices de um polígono regular de N lados, juntamente com uma massa m_{N+1} localizada no centro do polígono. Seja $r = X_0 \in \mathbb{R}^{2N}$ o vetor que representa as posições dessas massas, de forma a ser ponto crítico de f . Então, o vetor r é autovetor da matriz hessiana $Hess_f$, associado ao autovalor positivo $\sigma = AM > 0$, isto é,*

$$Hess_f(r) \cdot r = \sigma r,$$

onde $A > 2$ é o grau do potencial homogêneo considerado e $M = \sum_{i=1}^N m_i + m_{N+1}$ é a massa total do sistema.

Demonstração. Considere a função

$$f(r) = \frac{M}{2} \sum_{i=1}^{N+1} m_i |r_i|^2 + \frac{1}{A-2} \sum_{i < j}^{N+1} \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|^{A-2}}$$

Ao avaliar f em $(1 + \lambda)r$, obtemos:

$$f((1 + \lambda)r) = (1 + \lambda)^2 \frac{M}{2} \sum_{i=1}^{N+1} m_i |r_i|^2 + \frac{(1 + \lambda)^{2-A}}{A - 2} \sum_{i < j}^{N+1} \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|^{A-2}}.$$

Sabemos que o vetor r é um ponto crítico de f , isto é, $\nabla f(r) = 0$. Assim,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} f(r + \lambda r) \right|_{\lambda=0} = \nabla f(r) \cdot r = 0. \quad (4.3)$$

Calculando explicitamente a derivada:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} f(r + \lambda r) \right|_{\lambda=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[(r + \lambda r)^2 \frac{M}{2} \sum_{i=1}^{N+1} m_i |r_i|^2 + \frac{(r + \lambda r)^{2-A}}{A - 2} \sum_{i < j}^{N+1} \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|^{A-2}} \right] \right|_{\lambda=0} \\ &= M \sum_{i=1}^{N+1} m_i |r_i|^2 - \sum_{i < j}^{N+1} \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|^{A-2}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Comparando (4.3) com (4.4), concluímos que:

$$\sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|^{A-2}} = M \sum_{i=1}^N m_i |r_i|^2 = MNL^2,$$

onde L é o raio do polígono regular formado pelas massas.

Além disso, pela definição da matriz hessiana, temos:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} f(r + \lambda r + \mu r) = \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \nabla f(r + \lambda r) \cdot r = (\text{Hess}_f(r)r) \cdot r = \sigma |r|^2,$$

onde σ é o autovalor associado ao autovetor r .

Calculando a segunda derivada,

$$\begin{aligned} \sigma |r|^2 &= \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} \left[(1 + \lambda + \mu)^2 \frac{M}{2} \sum_{i=1}^{N+1} m_i |r_i|^2 + \frac{(1 + \lambda + \mu)^{2-A}}{A - 2} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|^{A-2}} \right] \\ &= M \sum_{i=1}^{N+1} m_i |r_i|^2 - (A - 1) \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|^{A-2}} = MNL^2 - (A - 1)MNL^2 = AMNL^2. \end{aligned}$$

Como $|r|^2 = \sum_{i=1}^{N+1} r_i^2 = NL^2$, segue que:

$$\sigma|r|^2 = AMNL^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = AM = A \left(\sum_{i=1}^N m_i + m_{N+1} \right).$$

Isso conclui a demonstração. \square

4.2 Configurações Poligonais de Vórtices com um Vórtice Central

4.2.1 Triângulo Equilátero com Vórtice Central

Neste caso, consideramos $N = 4$ corpos, dos quais três possuem massas iguais $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ e estão distribuídos simetricamente em torno da origem, com mesma distância radial L , formando um triângulo equilátero. Utilizamos coordenadas polares para descrever as posições dessas massas, o que facilita a representação simétrica da configuração. A quarta massa, m_4 , está localizada no centro, coincidindo com a origem do sistema, como ilustrado na Figura 4.2.

Para a análise algébrica e do comportamento dos autovalores da matriz hessiana associada a essa configuração, utilizamos o software *Mathematica*, que permitiu realizar os cálculos de forma simbólica e numérica.

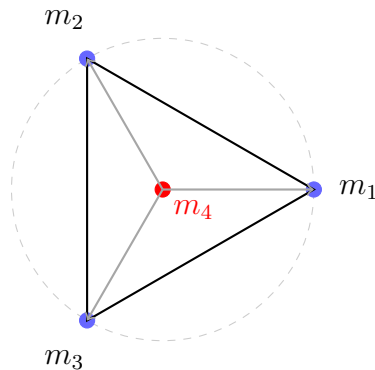


Figura 4.2: Configuração geométrica do caso $N = 4$ com m_4 central.

As posições dos corpos são dadas por:

$$q_1 = (L, 0, 0), \quad q_2 = \left(-\frac{L}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}L, 0\right), \quad q_3 = \left(-\frac{L}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}L, 0\right) \quad \text{e} \quad q_4 = (0, 0, 0).$$

Utilizando a Equação (1.10) para o momento de inércia total da configuração e substituindo as coordenadas dos vetores r_k obtemos:

$$I = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{k-1} m_k m_j r_{k,j}^2 = 3L^2.$$

Substituindo as posições dos vetores r_k na equação (3.2), o potencial logarítmico da configuração fica:

$$\mathcal{U} = - \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j < k}}^{k-1} m_j m_k \log r_{j,k} = -\frac{3}{2} (\log(3) + 2(m_4 + 1) \log(L)).$$

Os pontos críticos de f , dada por (3.4), são encontrados a partir das equações

$$\nabla_{q_i} f = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4,$$

que são equivalentes a uma única equação escalar, $-1 + 3L^2 + (-1 + L^2)m_4 = 0$, cuja solução positiva é

$$L = \frac{\sqrt{1 + m_4}}{\sqrt{3 + m_4}}.$$

Calculando sua hessiana sobre o ponto crítico, em coordenadas cartesianas, obtemos a matriz

$$\text{Hess}_f = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

onde cada coluna C_j é dada explicitamente por

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{9 + 19m_4 + 6m_4^2}{3(1 + m_4)} \\ 0 \\ \frac{9 + 7m_4}{6(1 + m_4)} \\ \frac{3 + m_4}{3 + m_4} \\ \frac{2\sqrt{3}(1 + m_4)}{9 + 7m_4} \\ \frac{6(1 + m_4)}{3 + m_4} \\ \frac{2\sqrt{3}(1 + m_4)}{2m_4(2 + m_4)} \\ \frac{1 + m_4}{0} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3 - m_4}{3(1 + m_4)} \\ \frac{3 + m_4}{2\sqrt{3}(1 + m_4)} \\ \frac{6(1 + m_4)}{3 + 5m_4} \\ \frac{2\sqrt{3}(1 + m_4)}{3 + m_4} \\ \frac{2\sqrt{3}(1 + m_4)}{3 + 5m_4} \\ \frac{6(1 + m_4)}{0} \\ \frac{2m_4}{1 + m_4} \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} \frac{9 + 7m_4}{6(1 + m_4)} \\ \frac{3 + m_4}{2\sqrt{3}(1 + m_4)} \\ \frac{9 + 8m_4 + 3m_4^2}{6(1 + m_4)} \\ \frac{3 + 10m_4 + 3m_4^2}{2\sqrt{3}(1 + m_4)} \\ \frac{2m_4}{3(1 + m_4)} \\ 0 \\ \frac{(-1 + m_4)m_4}{2(1 + m_4)} \\ \frac{\sqrt{3}m_4(3 + m_4)}{2(1 + m_4)} \end{bmatrix},$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} \frac{3 + m_4}{2\sqrt{3}(1 + m_4)} \\ \frac{3 + 5m_4}{6(1 + m_4)} \\ \frac{3 + 10m_4 + 3m_4^2}{2\sqrt{3}(1 + m_4)} \\ \frac{15 + 28m_4 + 9m_4^2}{6(1 + m_4)} \\ 0 \\ \frac{6 + 4m_4}{3(1 + m_4)} \\ \frac{\sqrt{3}m_4(3 + m_4)}{2(1 + m_4)} \\ \frac{m_4(5 + 3m_4)}{2(1 + m_4)} \end{bmatrix}, \quad C_5 = \begin{bmatrix} \frac{9 + 7m_4}{6(1 + m_4)} \\ \frac{3 + m_4}{2\sqrt{3}(1 + m_4)} \\ \frac{2m_4}{3(1 + m_4)} \\ 0 \\ \frac{9 + 8m_4 + 3m_4^2}{6(1 + m_4)} \\ \frac{3 + 10m_4 + 3m_4^2}{2\sqrt{3}(1 + m_4)} \\ \frac{(-1 + m_4)m_4}{2(1 + m_4)} \\ \frac{\sqrt{3}m_4(3 + m_4)}{2(1 + m_4)} \end{bmatrix}, \quad C_6 = \begin{bmatrix} \frac{3 + m_4}{2\sqrt{3}(1 + m_4)} \\ \frac{3 + 5m_4}{6(1 + m_4)} \\ 0 \\ \frac{6 + 4m_4}{3(1 + m_4)} \\ \frac{3 + 10m_4 + 3m_4^2}{2\sqrt{3}(1 + m_4)} \\ \frac{15 + 28m_4 + 9m_4^2}{6(1 + m_4)} \\ \frac{\sqrt{3}m_4(3 + m_4)}{2(1 + m_4)} \\ \frac{m_4(5 + 3m_4)}{2(1 + m_4)} \end{bmatrix},$$

$$C_7 = \begin{bmatrix} \frac{2m_4(2+m_4)}{1+m_4} \\ 0 \\ \frac{(-1+m_4)m_4}{2(1+m_4)} \\ \frac{\sqrt{3}m_4(3+m_4)}{2(1+m_4)} \\ \frac{2(1+m_4)}{(-1+m_4)m_4} \\ \frac{2(1+m_4)}{\sqrt{3}m_4(3+m_4)} \\ \frac{2(1+m_4)}{2(1+m_4)} \\ 3m_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2m_4}{1+m_4} \\ \frac{\sqrt{3}m_4(3+m_4)}{2(1+m_4)} \\ \frac{m_4(5+3m_4)}{2(1+m_4)} \\ \frac{2(1+m_4)}{\sqrt{3}m_4(3+m_4)} \\ \frac{2(1+m_4)}{m_4(5+3m_4)} \\ \frac{2(1+m_4)}{2(1+m_4)} \\ 0 \\ 3m_4 \end{bmatrix}.$$

A matriz hessiana é muito complexa para se obter diretamente seus autovalores. Para facilitar a obtenção desses autovalores, utilizamos uma base apresentada em (MOECKEL, 1995), o qual lida com a estabilidade linear de configurações simétricas no problema de N corpos. Essa base aproveita as simetrias da configuração e permite decompor o espaço em blocos menores, como no Capítulo 3.

Os vetores dessa base são da forma $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N, 0, 0)$, $\mathbf{v}' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_N, 0, 0) \in \mathbb{R}^{2N+2}$, $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N, 0, 0)$, $\mathbf{w}' = (\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \dots, \mathbf{w}'_N, 0, 0) \in \mathbb{R}^{2N+2}$, além dos vetores $\mathbf{e}_{2N+1} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_{2N+2} = (0, 0, \dots, 0, 0, 1)$, sendo suas componentes

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k &= \cos(\theta_{k\ell}) \begin{bmatrix} \cos(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) \end{bmatrix}, & \mathbf{w}_k &= \sin(\theta_{k\ell}) \begin{bmatrix} \cos(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}'_k &= \cos(\theta_{k\ell}) \begin{bmatrix} -\sin(\theta_k) \\ \cos(\theta_k) \end{bmatrix}, & \mathbf{w}'_k &= \sin(\theta_{k\ell}) \begin{bmatrix} \sin(\theta_k) \\ -\cos(\theta_k) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde $\theta_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 1, \dots, N$ e $\ell = 0, 1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$.

Como demonstrado em (MOECKEL, 1995), os vetores $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathbf{w}'$, são linearmente independentes para $0 \leq \ell \leq \lfloor N/2 \rfloor$, exceto dois deles quando $\ell = 0$ e mais dois deles

quando N é par e $\ell = N/2$. Em qualquer um desses casos, concluímos que esses vetores, juntamente com \mathbf{e}_{2N+1} e \mathbf{e}_{2N+2} formam uma base de \mathbb{R}^{2N+2} . Mais do que isso, o Lema 3.1 de (MOECKEL, 1995) garante que subespaços gerados por pares de vetores dessa base são invariantes pela matriz hessiana. Esse resultado permite decompor o espaço de deslocamentos \mathbb{R}^{2N+2} em subespaços invariantes associados a cada valor de ℓ , reduzindo a análise espectral a problemas de menor dimensão.

Uma formulação mais geral desse resultado, que se aplica a quaisquer configurações centrais simétricas, com respeito a algum subgrupo de simetria de \mathbb{R}^2 , é apresentada por (LEANDRO, 2017), utilizando ferramentas da teoria de representações do grupo diedral D_N . Nesse contexto, os vetores que geram tais subespaços são obtidos a partir de operadores de projeção associados às representações irredutíveis do grupo, permitindo descrever novamente uma base adaptada à simetria que diagonaliza por blocos a matriz de estabilidade. Não abordaremos neste trabalho os detalhes da construção e das propriedades completas dessa base. Utilizaremos apenas a adaptação da base do N -ágono como uma ferramenta para reescrever a matriz hessiana em blocos menores.

Dessa forma, arranjando os vetores na ordem adequada, obtemos a matriz de mudança de base

$$B_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz hessiana original é transformada para uma forma muito mais simples, com-

posta por blocos menores e repetidos

$$\mathcal{H}_f = B_M^{-1} \cdot \text{Hess}_f \cdot B_M$$

$$\mathcal{H}_f = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 \end{bmatrix}$$

com os blocos 3×3 definidos por:

$$a_{11} = \frac{3 + 11m_4 + 4m_4^2}{2(1 + m_4)}, \quad a_{12} = -\frac{3}{2}, \quad a_{13} = -\frac{2m_4(2 + m_4)}{1 + m_4},$$

$$a_{21} = -\frac{3}{2}, \quad a_{22} = \frac{3 - m_4}{2(1 + m_4)}, \quad a_{23} = \frac{2m_4}{1 + m_4},$$

$$a_{31} = -\frac{3m_4(2 + m_4)}{1 + m_4}, \quad a_{32} = \frac{3m_4}{1 + m_4}, \quad a_{33} = 3m_4.$$

Essa forma evidencia dois blocos idênticos de ordem 3×3 , o que torna o cálculo dos autovalores muito mais simples. Os blocos restantes têm um autovalor zero e outro conforme o Lema 4.1.1.

$$\mathcal{H}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{3 + 11m_4 + 4m_4^2}{2(1 + m_4)} & -\frac{3}{2} & -\frac{2m_4(2 + m_4)}{1 + m_4} \\ \frac{3}{2} & \frac{3 - m_4}{2(1 + m_4)} & \frac{2m_4}{1 + m_4} \\ -\frac{3m_4(2 + m_4)}{1 + m_4} & \frac{3m_4}{1 + m_4} & 3m_4 \end{pmatrix}.$$

A fim de investigar os autovalores desse bloco, calculamos seu polinômio característico.

$$\det(\mathcal{H}_{3 \times 3} - \lambda I) = \frac{\lambda}{(1 + m_4)^2} \cdot p(\lambda),$$

onde $p(\lambda)$ é um polinômio de grau 2 dado por:

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

com coeficientes:

$$a = (1 + m_4)^2 > 0,$$

$$b = -(1 + m_4)^2(3 + 5m_4) < 0,$$

$$c = -4m_4(-3 + 2m_4 + m_4^2).$$

O sinal de c depende do valor de m_4 . Para analisá-lo, consideramos a equação quadrática:

$$-3 + 2m_4 + m_4^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_4 = -3 \quad \text{ou} \quad m_4 = 1.$$

Para $m_4 > 1$, temos $-3 + 2m_4 + m_4^2 > 0$. Isso significa que o produto das raízes do polinômio $p(\lambda)$ é negativo, implicando que ele possui uma raiz positiva e uma raiz negativa. Reforçamos aqui o fato de que todos autovalores da hessiana são reais, desde que é matriz simétrica. Além disso, como o determinante do bloco $\mathcal{H}_{3 \times 3}$ possui o fator λ , a matriz apresenta três autovalores: um nulo, um positivo e um negativo. Por fim, como a matriz hessiana transformada é composta por dois blocos idênticos de ordem 3×3 , cada um contribuindo com exatamente um autovalor negativo, concluimos que o índice de Morse da matriz hessiana completa é igual a 2. No intervalo $0 \leq m_4 < 1$, $-3 + 2m_4 + m_4^2 < 0$, portanto $c > 0$, com $b < 0$, portanto ambas as raízes são positivas. Lembramos que no caso especial $m_4 = 0$, o Teorema 3.3.3 garante que o índice de Morse da configuração é igual a zero, conforme acabamos de obter.

Seguindo a mesma estratégia adotada para o caso do triângulo com uma massa central, analisamos os casos com $N = 5$ até $N = 9$, onde uma das massas está posicionada no centro da configuração. Para cada valor de N , aplicamos o mesmo procedimento: construímos a matriz hessiana associada à configuração central, diagonalizamos de forma

simbólica com a ajuda do *Mathematica*, e determinamos o índice de Morse correspondente.

Além disso, com o objetivo de validar a consistência do método, verificamos que ao fazer $m_{N+1} = 0$, isto é, ao remover a massa central, recuperamos exatamente a configuração simétrica do polígono regular com N massas. Nesses casos, o índice de Morse coincide com o Teorema 3.3.3, conforme esperado.

4.2.2 Quadrado com Vórtice Central

Neste caso, consideramos quatro massas de valor unitário ($m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$) dispostas simetricamente nos vértices de um quadrado regular, com mesma distância radial L em torno da origem. A quinta massa, m_5 , é colocada no centro da configuração, coincidente com a origem. Como nos casos anteriores, utilizamos coordenadas polares para representar as posições das massas periféricas, aproveitando a simetria do sistema, como ilustrado na Figura 4.3.

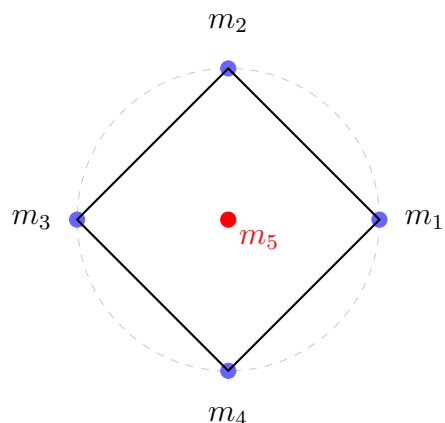


Figura 4.3: Configuração geométrica do caso $N = 5$ com m_5 central.

Utilizando o *Mathematica*, construímos a matriz hessiana da função $f_{N=5}$, levando em conta a interação entre todas as massas. A forma simplificada da matriz hessiana obtida é a seguinte:

$$\mathcal{H}_{f_{N=5}} = \begin{pmatrix} 2(4+m_5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6+15m_5+4m_5^2}{3+2m_5} & -2 & -\frac{m_5(11+4m_5)}{3+2m_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{6-m_5}{3+2m_5} & \frac{5m_5}{3+2m_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2m_5(11+4m_5)}{3+2m_5} & \frac{10m_5}{3+2m_5} & 4m_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4(4+m_5)}{3+2m_5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8+18m_5+4m_5^2}{3+2m_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6+15m_5+4m_5^2}{3+2m_5} & -2 & -\frac{m_5(11+4m_5)}{3+2m_5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{6-m_5}{3+2m_5} & \frac{5m_5}{3+2m_5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2m_5(11+4m_5)}{3+2m_5} & \frac{10m_5}{3+2m_5} & 4m_5 \end{pmatrix}.$$

De forma análoga, temos o autovalor positivo fornecido pelo Lema 4.1.1 e um autovalor nulo na diagonal, como esperado pela simetria do problema. Além disso, identificamos mais dois autovalores claramente positivos, restando, então, dois blocos 3×3 idênticos, cuja análise detalhada permite determinar os demais autovalores da matriz hessiana.

O bloco 3×3 resultante da matriz transformada assume a forma

$$\mathcal{H}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{6+15m_5+4m_5^2}{3+2m_5} & -2 & -\frac{m_5(11+4m_5)}{3+2m_5} \\ -2 & \frac{6-m_5}{3+2m_5} & \frac{5m_5}{3+2m_5} \\ -\frac{2m_5(11+4m_5)}{3+2m_5} & \frac{10m_5}{3+2m_5} & 4m_5 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico desse bloco possui a forma $\frac{\lambda}{(3+2m_5)^2} \cdot p(\lambda)$, com $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, e os coeficientes dados por:

$$a = (3+2m_5)^2 > 0,$$

$$b = -2(3+2m_5)^2(2+3m_5) < 0,$$

$$c = -5m_5(-36+7m_5+4m_5^2).$$

O termo c muda de sinal conforme o valor de m_5 . Resolvendo $-36+7m_5+4m_5^2=0$,

obtemos:

$$m_5 = -4 \quad \text{ou} \quad m_5 = \frac{9}{4}.$$

Portanto, $c < 0$ para $m_5 > \frac{9}{4}$, o que implica que o polinômio $p(\lambda)$ possui uma raiz positiva e uma negativa. Com isso, concluímos que, nesse intervalo, a matriz $\mathcal{H}_{3 \times 3}$ possui um autovalor positivo, um negativo e um nulo, exatamente como no caso anterior. Concluímos que o índice de Morse total da configuração quadrada é igual a 2 para $m_5 > 9/4$. Para $0 \leq m_5 < 9/4$, $c > 0$ e $b < 0$, portanto os dois autovalores são positivos e o índice de Morse é zero, como no Teorema 3.3.3.

4.2.3 Pentágono com Vértice Central

O problema do pentágono de vórtices, com vórtice central é ilustrado na Figura 4.4.

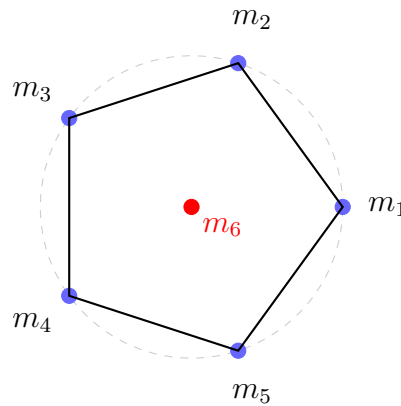


Figura 4.4: Configuração geométrica do caso $N = 6$ com m_6 central.

Utilizamos o *Mathematica* para construir a matriz hessiana da função $f_{N=6}$, considerando todas as interações entre os corpos. No entanto, essa etapa exigiu um esforço computacional significativamente maior, pois a função resultante carregava expressões com diversas raízes, especialmente envolvendo $\sqrt{5}$, o que dificultou a simplificação simbólica. Após sucessivas manipulações, foi possível obter a forma final da matriz hessiana,

apresentada abaixo

$$\mathcal{H}_{f_{N=6}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,10} & a_{10,11} & a_{10,12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,11} & a_{11,11} & a_{11,12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,12} & a_{11,12} & a_{12,12} & 0 \end{bmatrix}$$

com os elementos não nulos dados por:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 2(5 + m_6), \\ a_{3,3} &= \frac{80(299537289 + 133957148\sqrt{5})(10 + 19m_6 + 4m_6^2)}{(3 + \sqrt{5})^3(7 + 3\sqrt{5})(47 + 21\sqrt{5})(360 + 161\sqrt{5})^2(2 + m_6)}, \\ a_{3,4} &= a_{4,3} = a_{10,11} = a_{11,10} = -\frac{5}{2}, \\ a_{3,5} &= a_{10,12} = -\frac{m_6(7 + 2m_6)}{2\sqrt{2}(2 + m_6)}, \\ a_{5,3} &= a_{12,10} = -\frac{5\sqrt{2}m_6(7 + 2m_6)}{2 + m_6}, \\ a_{4,4} &= -\frac{20(87403803 + 39088169\sqrt{5})(-10 + m_6)}{(3 + \sqrt{5})^3(47 + 21\sqrt{5})(360 + 161\sqrt{5})^2(2 + m_6)}, \\ a_{4,5} &= a_{11,12} = \frac{3m_6}{\sqrt{2}(4 + 2m_6)}, \\ a_{5,4} &= a_{12,11} = \frac{15\sqrt{2}m_6}{2 + m_6}, \\ a_{5,5} &= a_{12,12} = 5m_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{6,6} &= \frac{384(37325880 + 16692641\sqrt{5})(5 + m_6)}{(3 + \sqrt{5})^3(5 + 3\sqrt{5})(47 + 21\sqrt{5})(123 + 55\sqrt{5})^2(2 + m_6)}, \\
a_{7,7} &= \frac{40(969323029 + 433494437\sqrt{5})(5 + 11m_6 + 2m_6^2)}{(2 + \sqrt{5})^3(7 + 3\sqrt{5})(47 + 21\sqrt{5})(445 + 199\sqrt{5})^2(2 + m_6)}, \\
a_{8,8} &= \frac{40(87403803 + 39088169\sqrt{5})(5 + 11m_6 + 2m_6^2)}{(3 + \sqrt{5})^3(47 + 21\sqrt{5})(360 + 161\sqrt{5})^2(2 + m_6)}, \\
a_{9,9} &= \frac{3(5 + m_6)}{2 + m_6}, \\
a_{10,10} &= \frac{20(87403803 + 39088169\sqrt{5})(10 + 19m_6 + 4m_6^2)}{(3 + \sqrt{5})^3(47 + 21\sqrt{5})(360 + 161\sqrt{5})^2(2 + m_6)}, \\
a_{11,11} &= -\frac{80(299537289 + 133957148\sqrt{5})(-10 + m_6)}{(3 + \sqrt{5})^3(7 + 3\sqrt{5})(47 + 21\sqrt{5})(360 + 161\sqrt{5})^2(2 + m_6)}.
\end{aligned}$$

Nesta configuração, um dos autovalores positivos está garantido pelo Lema 4.1.1, e outro nulo, dada a simetria por rotação dos pontos críticos. Além desses, observamos diretamente quatro autovalores positivos adicionais, associados às entradas diagonais a_{66} , a_{77} , a_{88} e a_{99} . Com isso, restam dois blocos de ordem 3×3 , quase idênticos, mas diferindo nas duas primeiras entradas da diagonal principal. No entanto, ao analisarmos seus polinômios característicos, verificamos que eles coincidem, o que implica que esses blocos compartilham o mesmo conjunto de autovalores.

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{3,3} & -\frac{5}{2} & -\frac{m_6(7 + 2m_6)}{2\sqrt{2}(2 + m_6)} \\ -\frac{5}{2} & a_{4,4} & \frac{3m_6}{\sqrt{2}(4 + 2m_6)} \\ -\frac{5\sqrt{2}m_6(7 + 2m_6)}{2 + m_6} & \frac{15\sqrt{2}m_6}{2 + m_6} & 5m_6 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} a_{10,10} & a_{10,11} & a_{10,12} \\ a_{11,10} & a_{11,11} & a_{11,12} \\ a_{12,10} & a_{12,11} & a_{12,12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10,10} & -\frac{5}{2} & -\frac{m_6(7 + 2m_6)}{2\sqrt{2}(2 + m_6)} \\ -\frac{5}{2} & a_{11,11} & \frac{3m_6}{\sqrt{2}(4 + 2m_6)} \\ -\frac{5\sqrt{2}m_6(7 + 2m_6)}{2 + m_6} & \frac{15\sqrt{2}m_6}{2 + m_6} & 5m_6 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de cada bloco 3×3 possui a forma $\lambda \cdot p(\lambda)$, com

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

onde os coeficientes são dados por:

$$a = (2 + m_6)^2 > 0,$$

$$b = -(2 + m_6)^2(5 + 7m_6) < 0,$$

$$c = -6m_6(-20 + m_6 + m_6^2).$$

Observa-se que o termo c muda de sinal conforme o valor de m_6 . Temos que $c < 0$ sempre que $m_6 > 4$, o que implica que nesse intervalo, o polinômio $p(\lambda)$ possui uma raiz positiva e uma negativa. Dessa forma, o índice de Morse da configuração com $N = 6$ é igual a 2 para $m_6 > 4$. Por outro lado, ao considerarmos $0 \leq m_6 < 4$, $c > 0$ e $b < 0$, e como estabelecido no Teorema 3.3.3, essa configuração apresenta índice de Morse igual a zero.

4.2.4 Hexágono com Vórtice Central

O problema do hexágono de vórtices, com vórtice central é ilustrado na Figura 4.5.

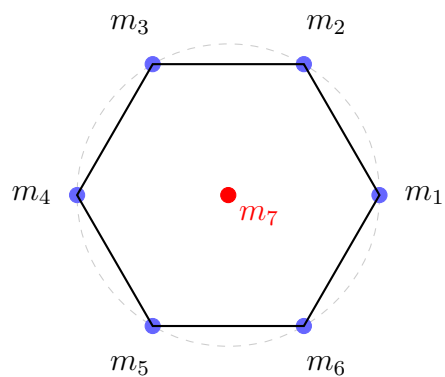


Figura 4.5: Configuração geométrica do caso $N = 7$ com m_7 central.

Devido à complexidade das expressões envolvidas, foi necessário realizar diversas sim-

plificações até se alcançar a forma final da matriz hessiana, mas ainda de forma simbólica.

$$\mathcal{H}_{f_{N=7}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{88} & 0 & a_{8,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{99} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,8} & 0 & a_{10,10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11,11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12,12} & a_{12,13} & a_{12,14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13,12} & a_{13,13} & a_{13,14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{14,12} & a_{14,13} & a_{14,14} \end{pmatrix}$$

com os elementos não nulos dados por:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 2(6 + m_7), & a_{3,3} &= a_{12,12} = \frac{15 + 23m_7 + 4m_7^2}{5 + 2m_7}, \\ a_{3,4} &= a_{4,3} = a_{12,13} = a_{13,12} = -3, \\ a_{3,5} &= a_{12,14} = -\frac{m_7(17 + 4m_7)}{5 + 2m_7}, & a_{5,3} &= a_{14,12} = -\frac{3m_7(17 + 4m_7)}{5 + 2m_7}, \\ a_{4,4} &= \frac{15 - m_7}{5 + 2m_7}, & a_{4,5} &= a_{13,14} = \frac{7m_7}{5 + 2m_7}, & a_{5,4} &= a_{14,13} = \frac{21m_7}{5 + 2m_7} \\ a_{5,5} &= a_{14,14} = 6m_7, & a_{6,6} &= \frac{9(6 + m_7)}{5 + 2m_7}, & a_{7,7} &= \frac{12 + 26m_7 + 4m_7^2}{5 + 2m_7}, \\ a_{8,8} &= \frac{78 + 25m_7 + 2m_7^2}{10 + 4m_7}, & a_{8,10} &= a_{10,8} = \frac{\sqrt{3}(-18 + 9m_7 + 2m_7^2)}{10 + 4m_7}, \\ a_{9,9} &= \frac{8(6 + m_7)}{5 + 2m_7}, & a_{10,10} &= \frac{42 + 43m_7 + 6m_7^2}{10 + 4m_7}, \\ a_{11,11} &= \frac{6 + 25m_7 + 4m_7^2}{5 + 2m_7}, & a_{13,13} &= \frac{15 - m_7}{5 + 2m_7}. \end{aligned}$$

Novamente, o primeiro autovalor positivo é o previsto pelo Lema 4.1.1, e outro é nulo, pelas simetrias do sistema. Além disso, identificamos diretamente três autovalores positivos adicionais, associados às entradas diagonais, $a_{6,6}$, $a_{7,7}$ e $a_{11,11}$.

Restam, então, três blocos de ordem 3×3 : o primeiro deles aparece duas vezes de forma idêntica, enquanto o segundo corresponde ao bloco central da matriz.

$$\mathcal{H}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{15 + 23m_7 + 4m_7^2}{5 + 2m_7} & -3 & -\frac{m_7(17 + 4m_7)}{5 + 2m_7} \\ -3 & \frac{15 - m_7}{5 + 2m_7} & \frac{7m_7}{5 + 2m_7} \\ -\frac{3m_7(17 + 4m_7)}{5 + 2m_7} & \frac{21m_7}{5 + 2m_7} & 6m_7 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{78 + 25m_7 + 2m_7^2}{10 + 4m_7} & 0 & \frac{\sqrt{3}(-18 + 9m_7 + 2m_7^2)}{10 + 4m_7} \\ 0 & \frac{8(6 + m_7)}{5 + 2m_7} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}(-18 + 9m_7 + 2m_7^2)}{10 + 4m_7} & 0 & \frac{42 + 43m_7 + 6m_7^2}{10 + 4m_7} \end{bmatrix}$$

O polinômio característico associado ao bloco 3×3 da matriz $\mathcal{H}_{3 \times 3}$ tem a forma $\lambda \cdot p(\lambda)$, com

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

onde os coeficientes dependem do parâmetro m_7 e são dados por:

$$a = (5 + 2m_7)^2 > 0,$$

$$b = -2(5 + 2m_7)^2(3 + 4m_7) < 0,$$

$$c = 7m_7(150 + m_7 - 4m_7^2).$$

O polinômio na expressão de c troca de sinal quando

$$150 + m_7 - 4m_7^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_7 = -6 \quad \text{ou} \quad m_7 = \frac{25}{4}.$$

Portanto, o termo c será negativo sempre que $m_7 > \frac{25}{4}$, com a matriz $\mathcal{H}_{3 \times 3}$ possuindo um autovalor nulo. Concluimos que há exatamente dois autovalores negativos associados a esse bloco.

Para a matriz $\tilde{\mathcal{H}}_{3 \times 3}$, o polinômio característico pode ser fatorado como

$$(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2),$$

onde os dois autovalores, claramente positivos, são dados por:

$$\lambda_1 = \frac{8(6 + m_7)}{5 + 2m_7},$$

$$\lambda_2 = \frac{2(6 + 13m_7 + 2m_7^2)}{5 + 2m_7},$$

o que implica que a matriz $\tilde{\mathcal{H}}_{3 \times 3}$ contribui com nenhum autovalor negativo para a contagem total.

Dessa forma, somando as contribuições dos dois blocos 3×3 , concluímos que a hessiana associada à configuração com $N = 7$ possui exatamente dois autovalores negativos sempre que $m_7 > \frac{25}{4}$. Portanto, o índice de Morse é 2.

Por outro lado, para $0 \leq m_7 < 25/4$ o índice de Morse fica igual a zero, como na configuração hexagonal de vórtices.

4.2.5 Heptágono com Vórtice Central

O problema do heptágono de vórtices, com vórtice central é ilustrado na Figura 4.6.

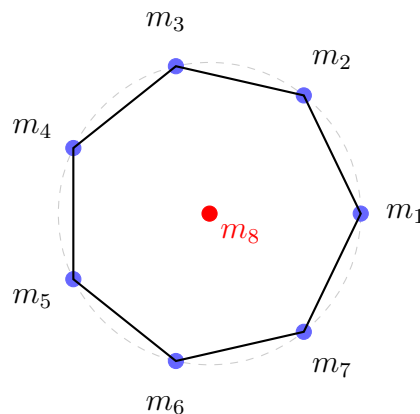


Figura 4.6: Configuração geométrica do caso $N = 8$ com m_8 central.

A análise do caso com $N = 8$ apresenta uma dificuldade adicional. De acordo com

o Teorema 3.3.3, a configuração poligonal regular com sete massas periféricas (isto é, $m_8 = 0$) é degenerada, o que significa que a matriz hessiana associada possui autovalores nulos além dos triviais.

Apesar dessas dificuldades, foi possível realizar os cálculos com cuidado e extrair uma estrutura matricial apropriada para o estudo do índice de Morse. A obtenção de uma matriz reduzida com as simetrias corretas exigiu diversos refinamentos algébricos e uma inspeção dos termos envolvidos, que apresentamos a seguir de maneira genérica:

$$\mathcal{H}_{f_{N=8}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & a_{67} & a_{68} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} & a_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{86} & a_{87} & a_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{99} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12,12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13,13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{14,14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{15,15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16,16} \end{pmatrix},$$

com os elementos não nulos dados por:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 2(7 + m_8), \\ a_{3,3} = a_{6,6} &= \frac{31.5 + 51m_8 + 19.5m_8^2 + 2m_8^3}{(3 + m_8)^2}, \\ a_{3,4} = a_{4,3} = a_{6,7} = a_{7,6} &= -\frac{31.5 + 21m_8 + 3.5m_8^2}{(3 + m_8)^2}, \\ a_{3,5} = a_{6,8} &= -\frac{m_8(10.6066 + 5.65685m_8 + 0.707107m_8^2)}{(3 + m_8)^2}, \\ a_{4,4} = a_{7,7} &= \frac{31.5 + 9m_8 - 0.5m_8^2}{(3 + m_8)^2}, \\ a_{4,5} = a_{7,8} &= \frac{m_8(4.24264 + 1.41421m_8)}{(3 + m_8)^2}, \\ a_{5,3} = a_{8,6} &= -\frac{m_8(296.985 + 158.392m_8 + 19.799m_8^2)}{(3 + m_8)^2}, \\ a_{5,4} &= \frac{39.598m_8}{3 + m_8}, \quad a_{5,5} = a_{8,8} = 7m_8, \\ a_{8,7} &= \frac{m_8(118.794 + 39.598m_8)}{(3 + m_8)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{9,9} = a_{10,10} &= \frac{105 + 50m_8 + 5m_8^2}{(3 + m_8)^2}, \\
a_{11,11} = a_{12,12} &= \frac{m_8(42 + 20m_8 + 2m_8^2)}{(3 + m_8)^2}, \\
a_{13,13} = a_{14,14} &= \frac{126 + 60m_8 + 6m_8^2}{(3 + m_8)^2}, \\
a_{15,15} = a_{16,16} &= \frac{21 + 52m_8 + 21m_8^2 + 2m_8^3}{(3 + m_8)^2}.
\end{aligned}$$

Observamos que todos os autovalores associados às entradas diagonais separadas da matriz hessiana são estritamente positivos para $m_8 > 0$. Isso inclui os elementos $a_{1,1}, a_{9,9}, a_{10,10}, a_{11,11}, a_{12,12}, a_{13,13}, a_{14,14}, a_{15,15}$ e $a_{16,16}$, os quais são funções racionais positivas de m_8 . Dessa forma, esses blocos não contribuem com o índice de Morse.

Os dois blocos 3×3 restantes da matriz hessiana possuem estruturas quase idênticas. A única diferença entre eles está nas entradas $a_{5,4}$ e $a_{8,7}$, que apesar de distintas, não afetam a forma geral do polinômio característico. De fato, a análise realizada no Mathematica mostra que ambos os blocos compartilham exatamente os mesmos autovalores. Assim,

$$\mathcal{H}_1 = \begin{bmatrix} \frac{31.5+51m_8+19.5m_8^2+2m_8^3}{(3+m_8)^2} & -\frac{31.5+21m_8+3.5m_8^2}{(3+m_8)^2} & -\frac{m_8(10.6066+5.65685m_8+0.707107m_8^2)}{(3+m_8)^2} \\ -\frac{31.5+21m_8+3.5m_8^2}{(3+m_8)^2} & \frac{31.5+9m_8-0.5m_8^2}{(3+m_8)^2} & \frac{m_8(4.24264+1.41421m_8)}{(3+m_8)^2} \\ -\frac{m_8(296.985+158.392m_8+19.799m_8^2)}{(3+m_8)^2} & \frac{39.598m_8}{3+m_8} & 7m_8 \end{bmatrix},$$

O termo constante do polinômio $p(\lambda)$, associado ao determinante dos blocos, é dado por

$$-8(m_8 + 7)(m_8 + 3)^4(m_8 - 9),$$

o que revela que o sinal do termo constante muda quando $m_8 = 9$. Isso implica que para $m_8 > 9$ o polinômio $p(\lambda)$ possui uma raiz positiva e uma negativa. Como cada bloco também possui um autovalor nulo, concluímos que ambos apresentam exatamente um autovalor positivo, um negativo e um nulo. Concluímos que, para $m_8 > 9$, os dois blocos contribuem juntos com dois autovalores negativos, obtendo novamente índice de Morse igual a 2. Para $0 < m_8 < 9$, todos autovalores são positivos, exceto os nulos devido às

simetrias, resultando no índice Morse nulo.

Por outro lado, ao considerarmos $m_8 = 0$, verifica-se a presença de cinco autovalores nulos na matriz hessiana, dois a mais do que o esperado com base apenas nas simetrias do sistema, devido ao anulamento dos coeficientes $a_{11,11} = a_{12,12} = 0$. Tal fato reforça a degenerescência da configuração, em conformidade com o Teorema 3.3.3.

4.2.6 Octógono com Vórtice Central

O caso do octógono de vórtices, com vórtice central, foi o último que consideramos. O motivo é que este é o primeiro caso de configuração poligonal não degenerada, do Capítulo 3. A configuração é ilustrada na Figura 4.7.

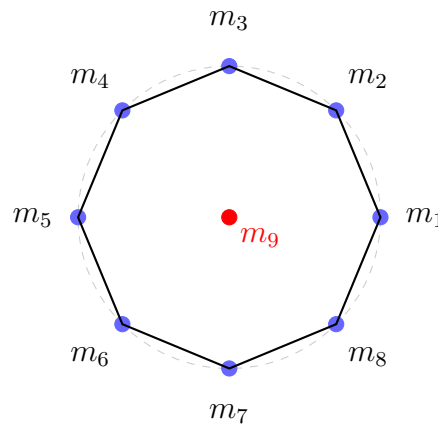


Figura 4.7: Configuração geométrica do caso $N = 9$ com m_9 central.

Após a mudança de bases adequada, a matriz hessiana resultante é de ordem 18×18 ,

e pode ser representada genericamente na forma simbólica a seguir.

$$\mathcal{H}_{f_{N=9}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,6} & a_{6,7} & a_{6,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,6} & a_{7,7} & a_{7,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,6} & a_{8,7} & a_{8,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,9} & a_{9,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12,12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{14,14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{15,15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16,16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{17,17} & a_{17,18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{18,17} & a_{18,18} \end{pmatrix},$$

com os elementos não nulos dados por:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 2(8 + m_9), & a_{3,3} = a_{7,7} &= \frac{28 + 31m_9 + 4m_9^2}{7 + 2m_9}, & a_{3,4} = a_{7,6} &= -\frac{m_9(23 + 4m_9)}{7 + 2m_9}, \\ a_{3,5} = a_{5,3} = a_{7,8} = a_{8,7} &= -4, & a_{4,4} = a_{6,6} = 8m_9, & a_{4,5} = a_{6,8} &= \frac{36m_9}{7 + 2m_9}, \\ a_{5,5} = a_{8,8} &= \frac{28 - m_9}{7 + 2m_9}, & a_{6,7} = a_{4,3} &= -\frac{4m_9(23 + 4m_9)}{7 + 2m_9}, & a_{9,9} &= \frac{12(8 + m_9)}{7 + 2m_9}, \\ a_{9,10} &= \frac{\sqrt{2}(-40 + 11m_9 + 2m_9^2)}{7 + 2m_9}, & a_{10,10} &= \frac{16 + 34m_9 + 4m_9^2}{7 + 2m_9}, \\ a_{11,11} = a_{12,12} &= \frac{-8 + 31m_9 + 4m_9^2}{7 + 2m_9}, & a_{13,13} = a_{14,14} &= \frac{15(8 + m_9)}{7 + 2m_9}, \\ a_{15,15} &= \frac{2(-8 + 15m_9 + 2m_9^2)}{7 + 2m_9}, & a_{16,16} &= \frac{16(8 + m_9)}{7 + 2m_9}, & a_{17,17} = a_{18,18} &= 8 + m_9, \\ a_{17,18} = a_{18,17} &= -\frac{(8 + m_9)(-5 + 2m_9)}{7 + 2m_9}. \end{aligned}$$

Assim, identificamos três autovalores negativos na matriz hessiana total, dados por

$$\lambda_1 = a_{15,15} = \frac{2(-8 + 15m_9 + 2m_9^2)}{7 + 2m_9}, \lambda_{2,3} = a_{11,11} = a_{12,12} = \frac{-8 + 31m_9 + 4m_9^2}{7 + 2m_9}.$$

Todos são negativos para $m_9 \in [0, 1/4)$, o que inclui o caso $m_9 = 0$. Os autovalores λ_2 e λ_3 passam a ser positivos para $m_9 > 1/4$ e λ_1 passa a ser positivo apenas para $m_9 > 1/2$.

Além disso, observamos que a matriz hessiana possui dois blocos 3×3 que, embora não sejam idênticos (pois suas entradas estão organizadas de forma distinta), compartilham o

mesmo polinômio característico. Um desses blocos é dado por:

$$\mathcal{H}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{28 + 31m_9 + 4m_9^2}{7 + 2m_9} & -\frac{m_9(23 + 4m_9)}{7 + 2m_9} & -4 \\ -\frac{4m_9(23 + 4m_9)}{7 + 2m_9} & 8m_9 & \frac{36m_9}{7 + 2m_9} \\ -4 & \frac{9m_9}{7 + 2m_9} & \frac{28 - m_9}{7 + 2m_9} \end{pmatrix}$$

O polinômio característico associado a esse bloco tem a forma $-\frac{\lambda}{(7+2m_9)^2} \cdot p(\lambda)$, com

$$p(\lambda) = \lambda^2(2m_9 + 7)^2 - 2\lambda(5m_9 + 4)(2m_9 + 7)^2 - 9m_9(m_9 + 8)(4m_9 - 49).$$

Dessa forma, um dos autovalores desse bloco é nulo. Os demais são as raízes do polinômio quadrático $p(\lambda)$ com coeficientes dependentes de m_9 . A mesma análise dos casos anteriores se aplica a este polinômio, de onde concluimos que uma das raízes é sempre positiva, e a segunda é nula para $m_9 = 0$, positiva para $0 < m_9 < 49/4$ e negativa para $m_9 > 49/4$.

Concluimos que o índice de Morse dessa configuração não tem um comportamento tão simples quanto os anteriores, sendo

- $Ind_M(8 + 1) = 3$ para $0 \leq m_9 < 1/4$,
- $Ind_M(8 + 1) = 1$ para $1/4 < m_9 < 1/2$
- $Ind_M(8 + 1) = 0$ para $1/2 < m_9 < 49/4$
- $Ind_M(8 + 1) = 2$ para $m_9 > 49/4$.

Com os exemplos analisados, observamos um padrão recorrente no comportamento do índice de Morse após a introdução de um vórtice central. Isso nos leva à seguinte conjectura.

Conjectura 2. *Para $A = 2$, considere uma configuração formada por N corpos de massas iguais dispostas nos vértices de um polígono regular e um corpo com massa m_{N+1} no centro. Existe uma massa crítica $m_{N+1}^{\text{crit}} > 0$ tal que se $m_{N+1} > m_{N+1}^{\text{crit}}$, então $Ind_M(N + 1) = 2$.*

Dessa forma, a conjectura prevê que a introdução de um vórtice central, estabiliza o índice de Morse da configuração para o valor 2, uniformizando o comportamento das configurações para todo $N \geq 3$. Esse fenômeno é análogo à ideia de massa dominante, discutida por Moeckel no Problema 15 de (ALBOUY; CABRAL; SANTOS, 2012), onde se conjectura que a presença de uma massa muito maior que as demais pode estabilizar configurações de equilíbrio.

4.3 Configurações com Massa Central para $A > 2$

Nesta seção, estendemos a análise para configurações que incluem uma massa central e interações determinadas por um potencial homogêneo com potência arbitrária $A > 2$.

Conforme a complexidade da configuração aumenta, o processo de obtenção explícita da matriz hessiana se torna mais desafiador. Para casos como o triângulo, quadrado e hexágono com massa central, conseguimos obter e estudar detalhadamente a matriz e seus autovalores. No entanto, configurações como o pentágono e o heptágono com massa central apresentaram grandes dificuldades algébricas, mesmo com o uso do *Mathematica*, tanto de forma simbólica quanto numérica. Por isso, optamos por não apresentar esses casos individuais, mas registramos aqui a limitação enfrentada.

4.3.1 Triângulo Equilátero com Massa Central para $A > 2$

Mantendo a configuração geométrica ilustrada na Figura 4.2, agora analisamos o sistema sob a ação de um potencial homogêneo com expoente $A > 2$. A estrutura triangular simétrica com uma massa central permanece a mesma, mas o novo regime de interação altera significativamente o comportamento dos equilíbrios, especialmente em relação aos autovalores da matriz hessiana.

Seguindo a mesma linha de raciocínio adotada anteriormente para o caso $A = 2$, conduzimos uma investigação sobre os autovalores da matriz hessiana da função f . Como o foco está nos regimes com $A > 2$, os cálculos tornam-se mais complexos e exigem maior cuidado na manipulação algébrica.

A matriz Hessiana diagonalizada por blocos fica

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} A(3 + m_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,6} & a_{6,7} & a_{6,8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,6} & a_{7,7} & a_{7,8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,6} & a_{8,7} & a_{8,8} & 0 \end{pmatrix}$$

Os blocos 3×3 são idênticos com as entradas:

$$\begin{aligned} a_{3,3} = a_{6,6} &= \frac{9A + 3(2 - 2 \cdot 3^{\frac{A}{2}} + A + 4 \cdot 3^{\frac{A}{2}} A)m_4 + 4 \cdot 3^{\frac{A}{2}} Am_4^2}{4(3 + 3^{\frac{A}{2}} m_4)}, \\ a_{3,4} = a_{6,7} &= -\frac{3(3A + (-2 + 2 \cdot 3^{\frac{A}{2}} + A)m_4)}{4(3 + 3^{\frac{A}{2}} m_4)}, \\ a_{3,5} = a_{6,5} &= -\frac{m_4(3(1 - 3^{\frac{A}{2}} + 3^{\frac{A}{2}} A) + 3^{\frac{A}{2}} Am_4)}{3 + 3^{\frac{A}{2}} m_4}, \\ a_{4,3} = a_{7,6} &= -\frac{3(3A + (-2 + 2 \cdot 3^{\frac{A}{2}} + A)m_4)}{4(3 + 3^{\frac{A}{2}} m_4)}, \\ a_{4,4} = a_{7,7} &= \frac{9A + 3(2 - 2 \cdot 3^{\frac{A}{2}} + A)m_4}{4(3 + 3^{\frac{A}{2}} m_4)}, \\ a_{4,5} = a_{7,8} &= \frac{3(-1 + 3^{\frac{A}{2}})m_4}{3 + 3^{\frac{A}{2}} m_4}, \\ a_{5,3} = a_{8,6} &= -\frac{3m_4(3(1 - 3^{\frac{A}{2}} + 3^{\frac{A}{2}} A) + 3^{\frac{A}{2}} Am_4)}{6 + 2 \cdot 3^{\frac{A}{2}} m_4}, \\ a_{5,4} = a_{8,7} &= \frac{9(-1 + 3^{\frac{A}{2}})m_4}{6 + 2 \cdot 3^{\frac{A}{2}} m_4}, \\ a_{5,5} = a_{8,8} &= \frac{3m_4(3 + m_4) \left(-2 + A + \frac{2(3^{(1-\frac{A}{2})} + m_4)}{3 + m_4} \right)}{2(3^{(1-\frac{A}{2})} + m_4)}. \end{aligned}$$

O polinômio característico associado ao bloco 3×3 dessa matriz pode ser fatorado

como

$$\frac{\lambda}{2(3 + 3^{\frac{A}{2}}m_4)} \cdot p(\lambda),$$

onde $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, e os coeficientes a, b, c dependem do parâmetro A e da massa central m_4 . Esses coeficientes podem ser reescritos na forma

$$\begin{aligned} a &= 2(3 + 3^{\frac{A}{2}}m_4)^2 > 0, \\ b &= - \left(9A + 3(8 + (5A - 8)3^{\frac{A}{2}} + A)m_4 + 5 \cdot 3^{\frac{A}{2}}Am_4^2 \right), \\ c &= 6Am_4(3 + m_4) \left(3(2 - 2 \cdot 3^{\frac{A}{2}} + 3^{\frac{A}{2}}A) - 3^{\frac{A}{2}}(-2 + 2 \cdot 3^{\frac{A}{2}} - A)m_4 \right). \end{aligned}$$

Observamos que $a > 0$ e $b < 0$ para todo $A > 2$. A análise do sinal de c é mais sutil e depende da escolha de A e m_4 . Para determinar os valores de m_4 que tornam $c = 0$, resolvemos:

$$3(2 - 2 \cdot 3^{\frac{A}{2}} + 3^{\frac{A}{2}}A) - 3^{\frac{A}{2}}(-2 + 2 \cdot 3^{\frac{A}{2}} - A)m_4 = 0.$$

A solução dessa equação fornece:

$$m_4 = \frac{3(2 \cdot 3^{-\frac{A}{2}} - 2 + A)}{-2 + 2 \cdot 3^{\frac{A}{2}} - A}. \quad (4.6)$$

O gráfico da função (4.6), ilustrado na Figura 4.8, mostra os valores de m_4 em função de A onde o termo c muda de sinal.

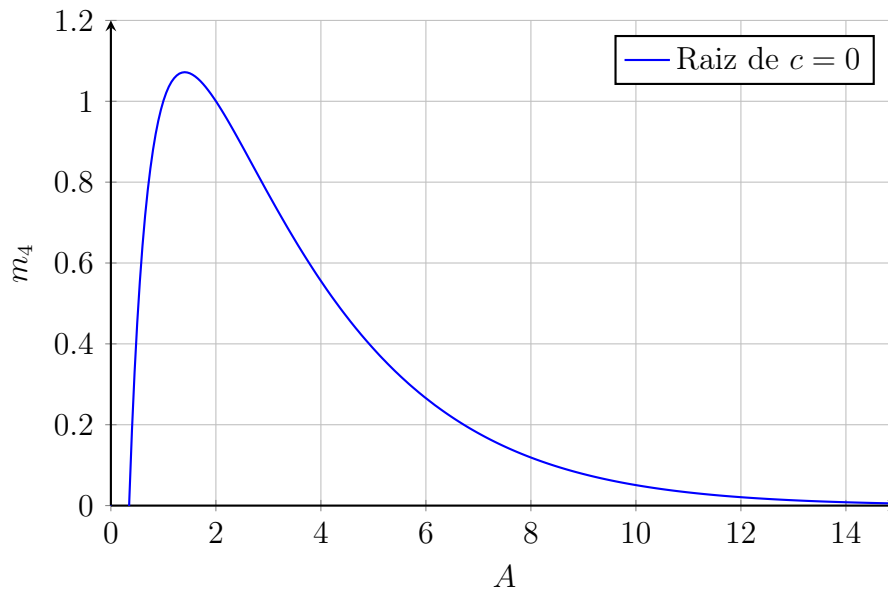


Figura 4.8: Valor crítico de m_4 para o qual o coeficiente c muda de sinal, em função do parâmetro A .

Notamos que na região acima da curva, o coeficiente c torna-se negativo. Isso implica que o polinômio $p(\lambda)$ possui uma raiz positiva e uma negativa. Como o polinômio característico possui um fator λ , concluímos que esse bloco contribui com exatamente um autovalor negativo e um nulo para a matriz hessiana. Portanto, para valores de m_4 situados acima da curva da Figura 4.8, o índice de Morse é igual a 2 nessa região, pois esse bloco aparece duas vezes na matriz.

4.3.2 Quadrado com Massa Central para $A > 2$

O quadrado com massa central está ilustrado na Figura 4.3.

A decomposição em subespaços invariantes segue a mesma linha de raciocínio aplicada

nas seções anteriores. Logo, a matriz resultante é

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} A(4 + m_5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,8} & a_{8,9} & a_{8,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,8} & a_{9,9} & a_{9,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com as entradas não nulas

$$\begin{aligned} a_{3,3} = a_{8,8} &= \frac{5m_5(1 + 2^{(1+\frac{A}{2})}) + 2^{(3+A)} + 2^{(3+A)}A + 2^{(1+A)}(2 + A)m_5}{1 + 2^{(1+\frac{A}{2})} + 2^{(1+A)}m_5}, \\ a_{3,4} = a_{8,9} &= \frac{1}{1 + 2^{(1+\frac{A}{2})} + 2^{(1+A)}m_5} \cdot \left(-2(1 + 2^{(1+\frac{A}{2})}) + 2^{(1+\frac{A}{2})}A \right) \\ &\quad + (2 + 2^{(2+\frac{A}{2})}) + 3 \cdot 2^{(2+A)} + (-2^{\frac{A}{2}} + 2^{(4+A)})A)m_5 + 2^{(2+A)}(2 + A)m_5^2, \\ a_{3,5} = a_{8,10} &= -\frac{m_5(1 + 2^{(1+\frac{A}{2})}) + 2^{(3+A)} + 2^{(3+A)}A + 2^{(1+A)}(2 + A)m_5}{1 + 2^{(1+\frac{A}{2})} + 2^{(1+A)}m_5}, \\ a_{4,3} = a_{9,8} &= -\frac{5 \cdot 2^{(1+A)}(2 + A)m_5(4 + m_5)}{1 + 2^{(1+\frac{A}{2})} + 2^{(1+A)}m_5}, \\ a_{4,4} = a_{9,9} &= -\frac{(4 + m_5)(1 + 2^{(1+\frac{A}{2})}) + 2^{(1+\frac{A}{2})}A - 2^{(2+A)}(2 + A)m_5}{1 + 2^{(1+\frac{A}{2})} + 2^{(1+A)}m_5}, \\ a_{4,5} = a_{9,10} &= \frac{2^{(1+A)}(2 + A)m_5(4 + m_5)}{1 + 2^{(1+\frac{A}{2})} + 2^{(1+A)}m_5}, \\ a_{6,6} &= \frac{2^{(1+\frac{A}{2})}(2 + A)(4 + m_5)}{(1 + 2^{1+\frac{A}{2}}) + 2^{(1+A)}m_5}, \\ a_{7,7} &= \frac{(2 + A)(4 + m_5)(1 + 2^{(1+A)}m_5)}{1 + 2^{(1+\frac{A}{2})} + 2^{(1+A)}m_5}. \end{aligned}$$

A matriz 3×3 a seguir representa um dos blocos idênticos extraídos da matriz hessiana.

Suas entradas são expressões racionais que dependem explicitamente de A e da massa central m_5

$$\mathcal{H}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A estrutura da matriz mostra a existência de um autovalor nulo. Os demais autovalores podem ser analisados a partir do polinômio característico

$$\frac{\lambda}{\left(2 + 2^{(1+\frac{A}{2})} + 2^A m_5\right)^2} \cdot p(\lambda),$$

onde $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, e os coeficientes a, b, c são:

$$\begin{aligned} a &= \left(2 + 2^{(1+\frac{A}{2})} + 2^A m_5\right)^2, \\ b &= -\left(2 + 2^{(1+\frac{A}{2})} + 2^A m_5\right) \left[8\left(1 + (A-1)2^{\frac{A}{2}}\right) + 2\left(6 + 2^{(2+\frac{A}{2})}\right) \right. \\ &\quad \left. + (3A-5) \cdot 2^{(1+A)} + 2^{\frac{A}{2}} A\right] m_5 + 3 \cdot 2^A A m_5^2, \\ c &= -5 m_5 (4 + m_5) \left[-4\left(1 - 3 \cdot 2^A + 2^{(1+\frac{3A}{2})}\right) + \left(2^{\frac{A}{2}} - 3 \cdot 2^{\frac{3A}{2}} + 2^{(1+A)}\right) A + 2^{\frac{3A}{2}} A^2\right] \\ &\quad + 2^A A \left(-2 + 2^{(1+A)} - 2^{\frac{A}{2}} A\right) m_5. \end{aligned}$$

Então os sinais $a > 0$ e $b < 0$ independem dos parâmetros $A > 2$ e $m_5 > 0$, enquanto o sinal do termo independente c pode variar. Para identificar a mudança de sinal de c , basta resolver:

$$c = 0 \iff m_5 = \frac{2^{2-A} \left(-1 + \cdot 2^A (3 - 2A) + 2^{\frac{3A}{2}} (-2 - 2^{-A} A + 3A - A^2)\right)}{A \left(2^{\frac{A}{2}} (2 \cdot 2^{\frac{A}{2}} - A) - 2\right)}.$$

A Figura 4.9 mostra o gráfico da função crítica que separa as regiões onde $c > 0$ (todas as raízes reais positivas) e $c < 0$ (uma raiz negativa).

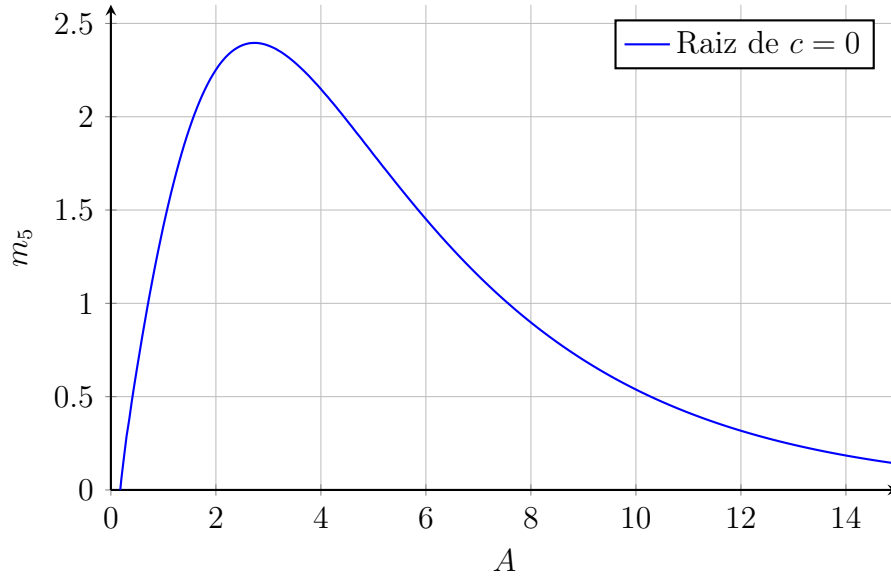


Figura 4.9: Valor crítico de m_5 para o qual o coeficiente c do polinômio característico muda de sinal, em função do parâmetro A .

Concluimos que abaixo da curva todas as raízes são positivas e o índice de Morse é zero. Acima da curva, o termo c se torna negativo, logo o índice de Morse total é 2 pela multiplicidade do bloco.

4.3.3 Hexágono com Massa Central para $A > 2$

O hexágono com massa central está ilustrado na Figura 4.5. A seguir, apresentamos a matriz hessiana associada a essa configuração, já diagonalizada por blocos.

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} A(m_7+6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,7} & a_{7,8} & a_{7,9} & a_{7,10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,7} & a_{8,8} & a_{8,9} & a_{8,10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,7} & a_{9,8} & a_{9,9} & a_{9,10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,7} & a_{10,8} & a_{10,9} & a_{10,10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11,11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12,12} & a_{12,13} & a_{12,14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13,12} & a_{13,13} & a_{13,14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{14,12} & a_{14,13} & a_{14,14} \end{pmatrix},$$

Com as entradas não nulas:

$$\begin{aligned}
a_{3,3} = a_{12,12} &= \frac{1}{4 \left(3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7)) \right)} \cdot \left(3 \cdot 2^A (6A + (2 + A)m_7) \right. \\
&\quad \left. + 3^{\frac{A}{2}} (8(3 + m_7) + 2^A (6(-4 + 3A) + m_7(-14 + 27A + 4Am_7))) \right), \\
a_{3,4} = a_{4,3} = a_{12,13} = a_{13,12} &= -\frac{1}{4 \left(3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7)) \right)} \\
&\quad \times \left(3 \left(2^A (6A + (-2 + A)m_7) + 3^{\frac{A}{2}} (8 + 2^A (-8 + 6A + (2 + A)m_7)) \right) \right), \\
a_{3,5} = a_{12,14} &= \frac{m_7 \left(-3 \cdot 2^A - 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A (-5 + 6A + Am_7)) \right)}{3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7))}, \\
a_{4,4} = a_{13,13} &= \frac{1}{4 \left(3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7)) \right)} \cdot \left(3 \cdot 2^A (6A + (2 + A)m_7) \right. \\
&\quad \left. + 3^{\frac{A}{2}} (6 (4 + 2^A(-4 + 3A)) + (8 + 2^A(-14 + 3A)) m_7) \right), \\
a_{4,5} = a_{13,14} &= \frac{\left(-3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (-2 + 5 \cdot 2^A) \right) m_7}{3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7))}, \\
a_{5,3} = a_{14,12} &= \frac{3m_7 \left(-3 \cdot 2^A - 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(-5 + 6A + Am_7)) \right)}{3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7))}, \\
a_{5,4} = a_{14,13} &= \frac{3 \left(-3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (-2 + 5 \cdot 2^A) \right) m_7}{3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7))}, \\
a_{5,5} = a_{14,14} &= \frac{3m_7 \left(3 \cdot 2^{1+A} + 3^{\frac{A}{2}} (4 + 2^A(-10 + 6A + Am_7)) \right)}{3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7))}, \\
a_{6,6} &= \frac{3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(-2 + 3A)) (6 + m_7)}{3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7))}, \\
a_{7,7} &= \frac{(6 + m_7) \left(3 \cdot 2^A(2 + A) + 3^{\frac{A}{2}} (8A + 2^A(-6 + A + 4Am_7)) \right)}{4 \left(3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7)) \right)}, \\
-a_{7,8} = -a_{7,9} = -a_{8,7} = a_{9,7} = a_{9,10} = a_{10,9} &= \frac{3\sqrt{3} \left(-1 + 3^{\frac{A}{2}} \right) (-2 + A)(6 + m_7)}{4 \left(3 + 2^{-A} \cdot 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7)) \right)}, \\
a_{7,10} = a_{8,9} = a_{9,8} = a_{10,7} &= \frac{3 \left(-1 + 3^{\frac{A}{2}} \right) (-2 + A)(6 + m_7)}{4 \left(3 + 2^{-A} \cdot 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7)) \right)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{8,8} &= \frac{(6 + m_7) \left(3 \cdot 2^A(2 + A) + 3^{\frac{A}{2}} (2A + 2^A(-6 + 7A + Am_7)) \right)}{4 \left(3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7)) \right)}, \\
a_{8,10} &= \frac{\sqrt{3}(6 + m_7) \left(3 \cdot 2^A(-2 + A) + 3^{\frac{A}{2}} (2A + 2^A(6 - 5A + Am_7)) \right)}{4 \left(3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7)) \right)}, \\
a_{9,9} &= \frac{3 \left(2 + A + 3^{\frac{A}{2}}(-2 + 3A) \right) (6 + m_7)}{4 \left(3 + 2^{-A} \cdot 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7)) \right)}, \\
a_{10,8} &= \frac{\sqrt{3}(6 + m_7)}{4 \left(3 \cdot 2^A + 2 \cdot 3^{\frac{A}{2}} + 2^A \cdot 3^{\frac{A}{2}} + 2^A \cdot 3^{\frac{A}{2}} m_7 \right)} \\
&\quad \times \left(-3 \cdot 2^{1+A}(-1 + 3^{\frac{A}{2}}) + (-3 \cdot 2^A + 2 \cdot 3^{\frac{A}{2}} + 2^A \cdot 3^{\frac{A}{2}})A + 2^A \cdot 3^{\frac{A}{2}} Am_7 \right), \\
a_{10,10} &= \frac{3(6 + m_7) \left(2^A(2 + A) + 3^{\frac{A}{2}} (2A + 2^A(-2 + A + Am_7)) \right)}{4 \left(3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7)) \right)}, \\
a_{11,11} &= \frac{(6 + m_7) \left(3 \cdot 2^A A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(-2 + Am_7)) \right)}{3 \cdot 2^A + 3^{\frac{A}{2}} (2 + 2^A(1 + m_7))}.
\end{aligned}$$

Neste caso, diferente dos anteriores, o autovalor $a_{11,11}$ muda de sinal à medida que a massa m_7 varia de 0 a $+\infty$. Este autovalor se anula exatamente quando

$$m_7 = \frac{2 \cdot 3^{\frac{A}{2}}(2^A - 1) - 3A \cdot 2^A}{2^A 3^{\frac{A}{2}} A}, \quad (4.7)$$

cujo gráfico está na Figura 4.10. Essa função se anula num único ponto $A_1 \approx 2.96721 > 2$, o mesmo indicado na Figura 3.4. Esta mudança de sinal explica a primeira variação do índice de Morse do hexágono regular que observamos no Capítulo 3.

Identificamos dois blocos idênticos 3×3 , localizados nas extremidades da matriz, e um bloco 4×4 central cujas entradas também apresentam padrões de simetria e relações semelhantes.

O bloco 4×4 concentra boa parte da interação entre a massa central m_7 e as massas periféricas. Seu polinômio característico é simplesmente o quadrado de um polinômio

quadrático, $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, cujos coeficientes são

$$\begin{aligned} a &= 4 \left(3 \cdot 2^A + 3^{A/2} (2 + 2^A(1 + m_7)) \right)^2, \\ b &= -2(6 + m_7) \left(3 \cdot 2^A + 3^{A/2} (2 + 2^A(1 + m_7)) \right) \\ &\quad \times \left(3 \cdot 2^A(2 + A) + 3^{A/2} (4A + 2^A(-6 + 5A + 2Am_7)) \right), \\ c &= 3 \cdot 2^A A(6 + m_7)^2 \cdot \left(3 \cdot 2^{1+A} + 3^{A/2} (2(2 + A) + 2^A(4(-1 + A) + (2 + A)m_7)) \right. \\ &\quad \left. + 3^A (-4 + 6A + 2^A(-2 + (-2 + 3A)m_7)) \right). \end{aligned}$$

Notamos que $a > 0$ e $b < 0$, enquanto o sinal de c depende de m_7 . Isso permite determinar regiões em que o índice de Morse muda. A equação para o valor crítico de m_7 onde $c = 0$ é dada por

$$m_7 = \frac{2 \left(-3 + \left(\frac{3}{2}\right)^A (2 + 2^A - 3A) - 2^{-A} \cdot 3^{A/2} (2 + 2^{1+A}(-1 + A) + A) \right)}{3^{A/2}(2 + A) + 3^A(-2 + 3A)}.$$

Essa função é representada graficamente na Figura 4.10, onde observamos que também há uma mudança de sinal em $A_2 \approx 4.85683 > A_1$, o mesmo indicado na Figura 3.4. Esta mudança de sinal também explica a segunda variação do índice de Morse do hexágono regular no Capítulo 3, reforçando que a Conjectura 1 não é verdadeira. Na Figura 4.10, para cada $A > 2$ fixado, se o valor de m_7 está abaixo da curva vermelha pontilhada, o autovalor $a_{11,11}$ é negativo. Se o valor de m_7 está abaixo da curva azul, o bloco 4×4 contribui com dois autovalores negativos, repetidos.

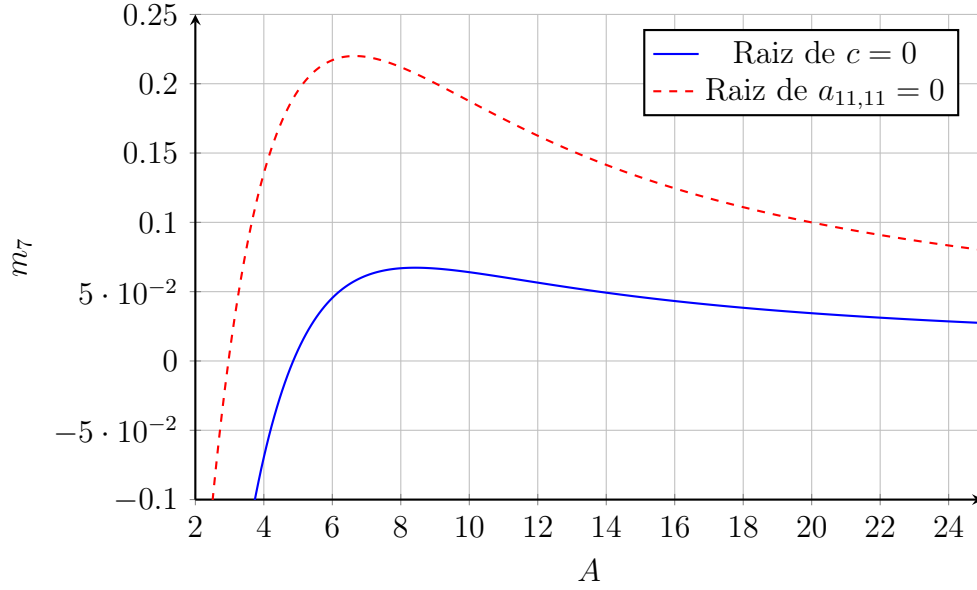


Figura 4.10: Valores críticos de m_7 para os quais os coeficientes c e $a_{11,11}$ mudam de sinal, em função do parâmetro A .

Dando continuidade, extraímos os coeficientes do polinômio $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ em relação ao bloco 3×3 , que dependem dos parâmetros A e da massa central m_7 .

$$\begin{aligned}
 a &= 4 \left(3 \cdot 2^A + 3^{A/2} (2 + 2^A(1 + m_7)) \right)^2, \\
 b &= -2 \left(3 \cdot 2^A + 3^{A/2} (2 + 2^A(1 + m_7)) \right) \cdot \left(3 \cdot 2^A(6A + (14 + A)m_7) \right. \\
 &\quad \left. + 3^{A/2} (6(4 + 2^A(-4 + 3A)) + m_7(32 + 2^A(-74 + 51A + 8Am_7))) \right), \\
 c &= 7m_7(6 + m_7)(f_1(A) + m_7f_2(A)),
 \end{aligned}$$

onde

$$f_1(A) = 2 \left(2^A 3^{\frac{A}{2}+1} A - 5 \cdot 2^A 3^{A/2} + 2 \cdot 3^{A/2} + 3 \cdot 2^A \right) \left(2^A 3^{\frac{A}{2}+1} A + 3 \cdot 2^A A - 2^{A+2} 3^{A/2} + 4 \cdot 3^{A/2} \right),$$

$$f_2(A) = 2^A 3^{A/2} A \left(2^A 3^{\frac{A}{2}+1} A + 3 \cdot 2^A A - 7 \cdot 2^{A+1} 3^{A/2} + 8 \cdot 3^{A/2} + 3 \cdot 2^{A+1} \right),$$

sendo que $f_1(A) > 0$ para todo $A > 2$, $f_2(A) < 0$ para todo $2 < A < A_3 \approx 3.72528$ e $f_2(A) > 0$ para todo $A > A_3$.

Os coeficientes revelam que $a > 0$ e $b < 0$, enquanto o sinal de c depende de m_7 .

Para cada $2 < A < A_3$, existe um valor crítico de $m_7 = -f_2(A)/f_1(A)$ tal que ambos autovalores são positivos para m_7 abaixo desse valor crítico, pois nesse caso $c > 0$, e exatamente um deles é negativo para m_7 acima desse valor crítico. O gráfico da função $m_7 = -f_2(A)/f_1(A)$ é apresentado na Figura 4.11. Para todo $A > A_3$ e todo $m_7 > 0$, $c > 0$, e portanto os autovalores são positivos.

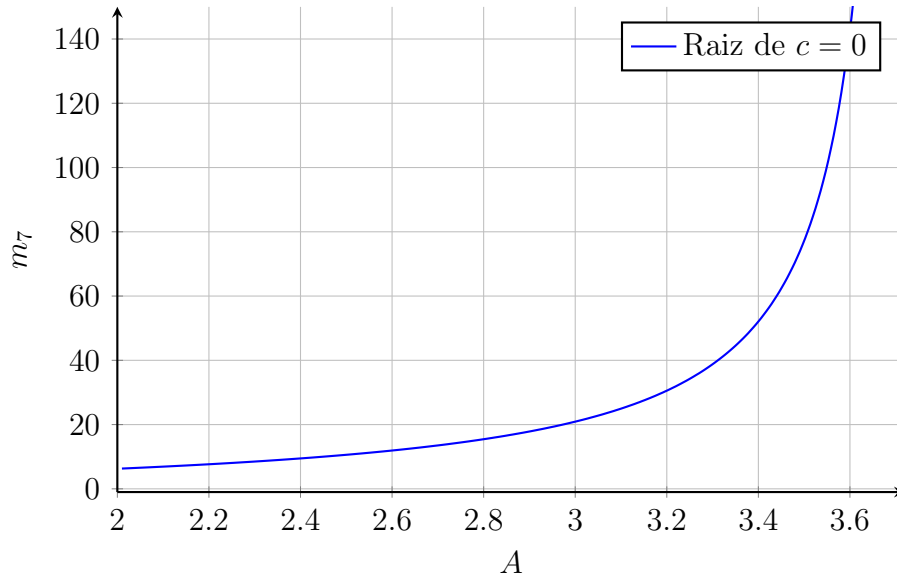


Figura 4.11: Valor crítico de m_7 para o qual o coeficiente c do bloco 3×3 muda de sinal, em função de $A \in (2, A_3)$.

Neste exemplo, vemos que a variação do índice de Morse é mais complexa que nos casos vistos anteriormente, como esperado. Na Figura 4.12 resumimos todas as conclusões, exibindo diagramas com a partição do quadrante $A > 2$ e $m_7 > 0$ de acordo com a variação do índice de Morse.

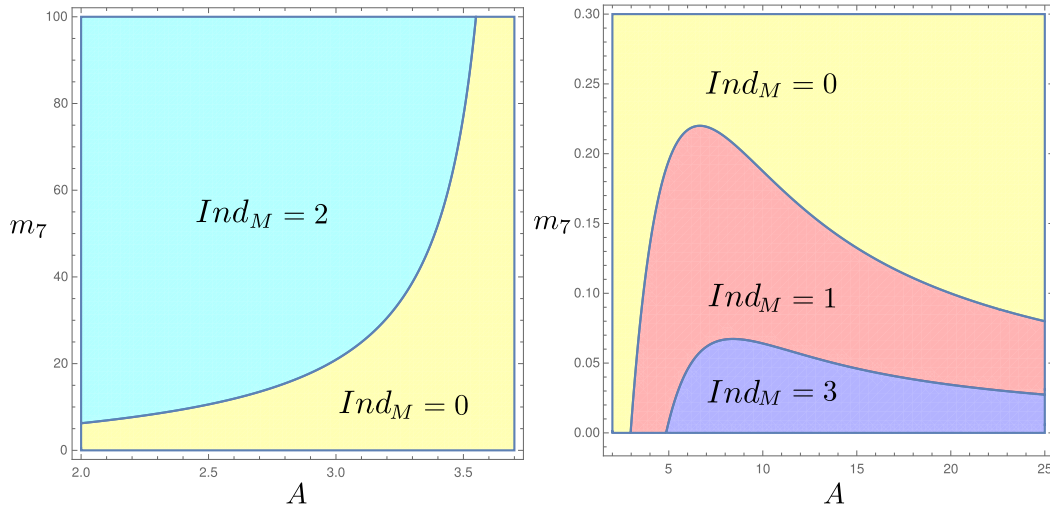


Figura 4.12: Índice de Morse do hexágono com massa central, para $A > 2$.

Notamos que este exemplo se difere muito dos anteriores. Como antes, sobre o eixo $A = 2$ observamos o índice de Morse que obtivemos na seção 4.2.4. Sobre o eixo $m_7 = 0$, obtemos a variação do índice de Morse ilustrada na Figura 3.4. No entanto, observamos em todos os casos anteriores que para cada massa central $m_N > 0$ fixada, no limite $A \rightarrow +\infty$ o índice de Morse resulta em 2, que é o índice de Morse da configuração de vórtices com vorticidade central grande o suficiente, segundo a Conjectura 2.

Nos casos anteriores, vimos também que eram equivalentes os limites $A \rightarrow +\infty$, com $m_N > 0$ fixo, e $m_N \rightarrow +\infty$, com $A > 2$ fixo. No exemplo do hexágono centrado, no entanto, vemos que para cada $2 < A < A_3$ no limite $m_7 \rightarrow +\infty$ o índice resulta em 2, para $A > A_3$ o limite resulta nulo. Ainda, para cada $m_N > 0$ fixado, no limite $A \rightarrow +\infty$ obtemos o índice zero. Dessa forma, deixamos uma conjectura mais fraca para o caso $A > 2$.

Conjectura 3. *No problema de N -corpos com N massas iguais dispostas nos vértices de um polígono regular e uma massa central fixa $m_{N+1} > 0$, sob um potencial homogêneo, o índice de Morse da configuração central tende a um valor constante quando $A \rightarrow +\infty$, dependendo apenas de N .*

4.4 Configurações com Dois Triângulos Equiláteros Encaixados

Nesta seção, investigamos duas configurações simétricas compostas por seis massas, dispostas nos vértices de dois triângulos equiláteros no plano. As massas m_1, m_2, m_3 correspondem ao triângulo maior, sendo todas unitárias, enquanto $m_4 = m_5 = m_6$ representam as massas do triângulo menor, que são iguais entre si. Nosso principal objetivo é determinar, para quais valores de m_4 , a configuração apresenta instabilidade no sentido do índice de Morse, utilizando métodos algébricos e numéricos.

A primeira configuração consiste em dois triângulos equiláteros concêntricos, com raios L_1 e L_2 , centrados na origem e com vértices alinhados em direções coincidentes, como ilustrado na Figura 4.13.

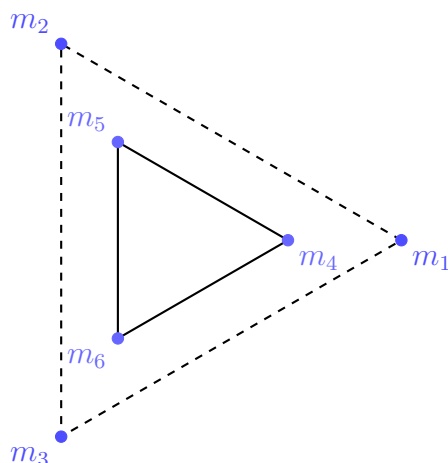


Figura 4.13: Configuração com dois triângulos equiláteros concêntricos e alinhados.

Já a segunda configuração também possui dois triângulos equiláteros de raios L_1 e L_2 , mas agora um deles está rotacionado e deslocado em relação ao outro, formando uma estrutura mais assimétrica, como ilustrado na Figura 4.14.

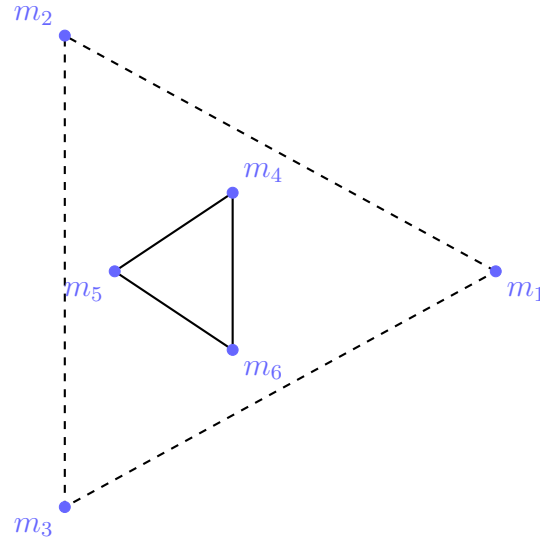


Figura 4.14: Configuração com dois triângulos equiláteros rotacionado.

Assim como no primeiro caso, as proporções geométricas L_1 e L_2 influenciam diretamente na estabilidade da configuração, no sentido do índice de Morse. Todas as análises foram realizadas numericamente, por meio do *software Mathematica*. Em ambos os casos, fixamos apenas a interação newtoniana entre as partículas, correspondente ao potencial atrativo homogêneo de grau $A = 3$.

4.4.1 Configuração com Dois Triângulos Equiláteros Concêntricos e Alinhados

Para analisar este caso, utilizamos as equações de Andoyer, conforme definidas no Capítulo 1. Com essas definições, construímos os termos das equações de Andoyer:

$$f_{i,j} = \sum_{k=1}^6 m_k (R_{i,k} - R_{j,k}) \Delta_{i,j,k}, \quad \text{para } i < j.$$

A parametrização geométrica envolve os raios dos dois triângulos, L_1 para o raio maior e L_2 para o raio menor. Procedemos então à simplificação das expressões para todas as combinações $f_{i,j}$. Obtivemos que a maioria das equações de Andoyer se anulam

identicamente, devido à simetria da configuração, como ilustrado a seguir:

$$f_{1,2} = 0, \quad f_{1,3} = 0, \quad f_{1,4} = 0, \quad f_{2,3} = 0, \quad \dots, \quad f_{5,6} = 0.$$

As únicas expressões não triviais que surgiram correspondem aos pares (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4) e (3, 5). Entretanto, ao verificar combinações lineares dessas expressões, concluímos que:

$$f_{1,5} + f_{1,6} = 0, \quad f_{1,5} + f_{2,4} = 0, \quad f_{1,5} - f_{2,6} = 0, \quad f_{1,5} - f_{3,4} = 0, \quad f_{1,5} + f_{3,5} = 0,$$

ou seja, o sistema se reduz a uma única equação independente: $f_{1,5} = 0$.

A expressão para $f_{1,5}$, após simplificação e mediante a reparametrização que introduz a razão $x \in (0, 1)$, com $L_2 = xL_1$, resultou na seguinte forma:

$$f_{1,5} = \frac{1}{2\sqrt{3}L_1} \left[\frac{3x^2}{(1-x)^2} + x^3\sqrt{3} - \frac{3x^2 - 6x^3}{(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \left(-\sqrt{3} + \frac{x^3}{(1-x)^2} + \frac{x^4 + 2x^3}{(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) m_4 \right] = 0. \quad (4.8)$$

A partir desta equação, estabelecemos uma relação direta entre a razão dos lados, $x = \frac{L_2}{L_1} \in (0, 1)$, e a massa $m_4 > 0$.

Em seguida, isolamos m_4 na Equação (4.8), obtendo a função

$$m_4(x) = \frac{-\frac{3x^2}{(1-x)^2} - x^3\sqrt{3} + \frac{3x^2 + 6x^3}{(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}}}{-\sqrt{3} + \frac{x^3}{(1-x)^2} + \frac{x^4 + 2x^3}{(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}}}, \quad (4.9)$$

cujos gráficos constam na Figura 4.15.

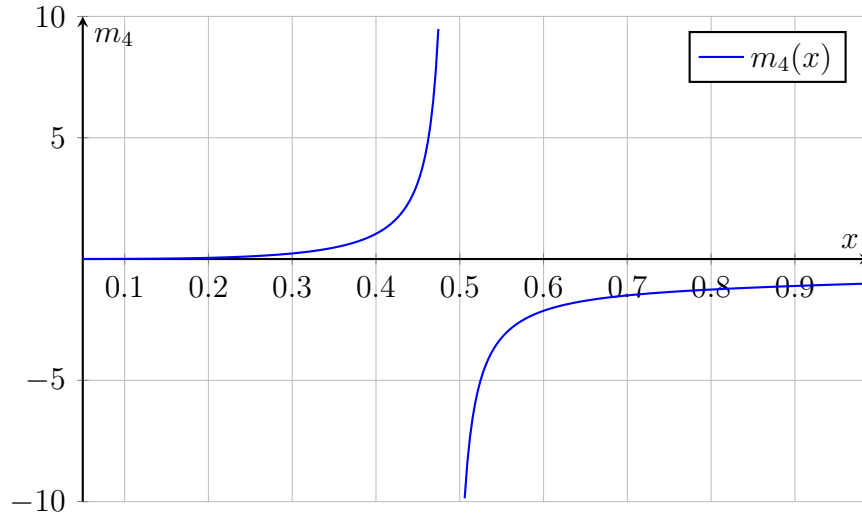


Figura 4.15: Comportamento da função $m_4(x)$ no intervalo $x \in (0, 1)$.

Concluimos que as configurações centrais desse tipo só existem para um intervalo de razão de comprimentos, $x \in (0, 0.48928)$, a partir do qual as equações impõem que a massa m_4 seja negativa.

Como foram apresentados anteriormente os cálculos completos envolvendo a matriz hessiana, nesta parte do trabalho optamos por não repetir todos os detalhes, concentrando apenas nas etapas e resultados mais relevantes para a análise numérica da configuração.

Para o caso das configurações de triângulos equiláteros concêntricos e alinhados, investigamos o ponto crítico da função, previamente definida na Equação (3.4). Ao realizar essa análise, obtivemos que o gradiente de f se anula exatamente quando uma única equação escalar é satisfeita:

$$F(x, L_1, m_4) = 0.$$

Como determinado anteriormente, substituímos a expressão da função $m_4 = m_4(x)$ nas equações obtidas, o que permitiu reduzir o sistema a expressões envolvendo apenas as variáveis x e L_1 . A partir dessa redução, conseguimos determinar uma expressão que relaciona diretamente o parâmetro geométrico L_1 com a razão x . Denotamos essa relação por uma função $L_1 = L_1(x)$.

Apesar de ser possível explicitar essa função, a sua expressão é demasiadamente ex-

tensa e, portanto, pouco esclarecedora para os propósitos desta dissertação.

Dessa forma, concluímos que a configuração central está completamente caracterizada pelas funções $m_4 = m_4(x)$ e $L_1 = L_1(x)$, permitindo que toda a análise do sistema seja conduzida exclusivamente em termos do parâmetro livre $x \in (0, 1)$, obtendo assim a matriz hessiana

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, L_1(x), m_4(x)). \quad (4.10)$$

Devido à complexidade simbólica da matriz hessiana e à dificuldade computacional de obter simbolicamente seus autovalores e determinante, procedemos com a análise numérica.

Para investigar o comportamento global dos autovalores da matriz hessiana ao longo do intervalo de interesse, realizamos uma varredura numérica de $x \in (0, 0.48928)$. Fixamos um número total de pontos $\mathcal{N}_{\max} = 1000$, de forma a definir um passo:

$$\Delta = \frac{0.48928}{1000},$$

calculando numericamente todos os autovalores em cada um dos pontos.

Dessa forma, como pode ser visto na Figura 4.16, obtemos que o índice de Morse começa valendo 1 para valores pequenos de x , mas em um certo ponto ocorre uma mudança repentina, passando a 3. Isso indica uma variação na estabilidade da configuração, com o surgimento de duas novas direções de instabilidade.

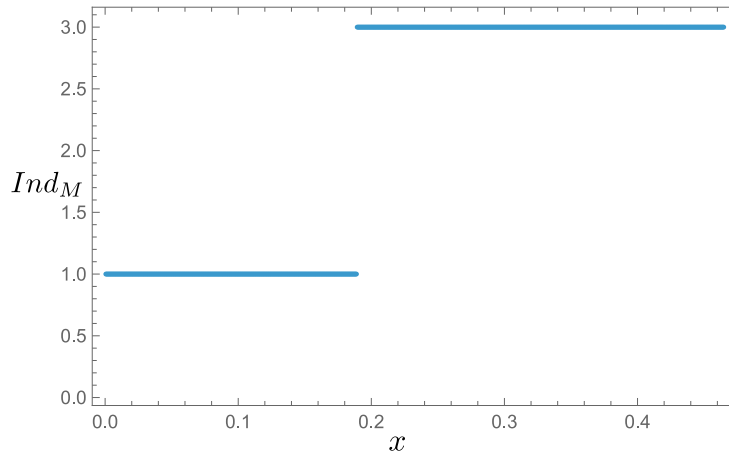


Figura 4.16: Índice de Morse de triângulos empilhados e alinhados.

Com isso, concluímos que a análise da configuração composta por dois triângulos equiláteros concêntricos e alinhados pode ser caracterizada completamente pelo sistema em função do parâmetro geométrico x , determinando as funções $m_4(x)$ e $L_1(x)$, e investigando o comportamento espectral da matriz hessiana. Esses resultados confirmam a sensibilidade do sistema à razão entre os lados dos triângulos, assim como o índice dos polígonos centrados possui grande dependência do valor da massa central.

4.4.2 Configuração com Dois Triângulos Equiláteros Rotacionados

Neste caso, como antes, a análise foi conduzida por meio das equações de Andoyer, conforme definidas no Capítulo 1.

A parametrização geométrica envolve novamente os comprimentos dos lados, L_1 e $L_2 = xL_1$, mas agora com um deslocamento de rotação comparado ao anterior, resultando em mais termos não triviais nas equações de Andoyer.

A análise das expressões $f_{i,j}$ revelou que muitas delas ainda se anulam, enquanto outras apresentam formas não triviais. Como exemplo representativo, destacamos a equação de Andoyer $f_{1,4}$, que, após simplificação e reparametrização pela razão x , resultou na

expressão:

$$f_{1,4} = \frac{1}{3L_1^2} \left[x\sqrt{3} - \frac{3}{(1+x)^2} + \frac{3-6x}{(1-x+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{x^2} - \frac{3x^2+6x}{(1-x+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x}{(1+x)^2} \right) m_4 \right] = 0.$$

Assim, foi possível expressar a massa central como uma função da razão x :

$$m_4 = m_4(x) = \frac{-x\sqrt{3} + \frac{3}{(1+x)^2} - \frac{3+6x}{(1-x+x^2)^{\frac{3}{2}}}}{-\frac{\sqrt{3}}{x^2} - \frac{3x^2+6x}{(1-x+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x}{(1+x)^2}}.$$

A função $m_4(x)$ foi representada graficamente para o intervalo $x \in (0, 1)$, conforme ilustrado nas Figuras 4.17 e 4.18. Na Figura 4.17, a reta pontilhada destaca um ponto de máximo da função $m_4(x)$. Notamos que para cada valor de m_4 entre zero e esse máximo, existem exatamente duas configurações centrais distintas que realizam esse valor, ou seja, duas configurações com mesma simetria e mesmo conjunto de corpos, mas com raios distintos.

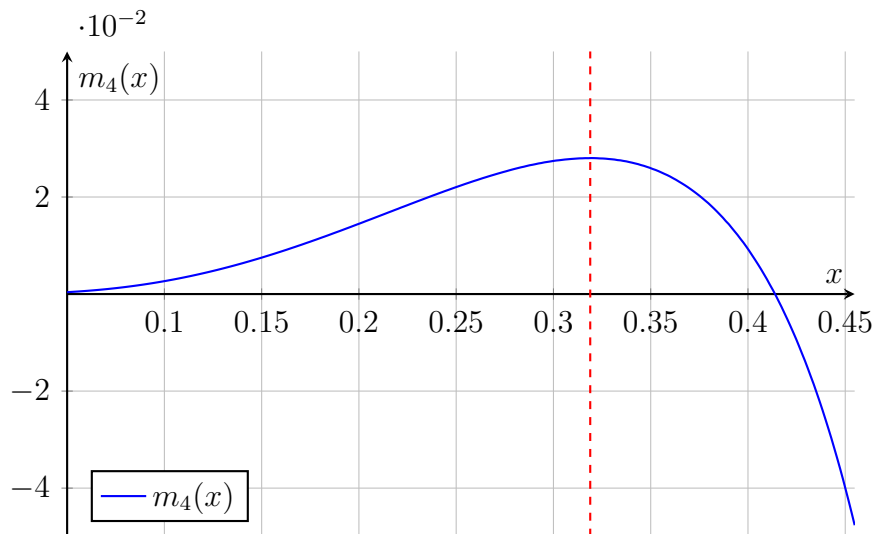


Figura 4.17: Comportamento da função $m_4(x)$ no intervalo $x \in (0, 0.5)$.

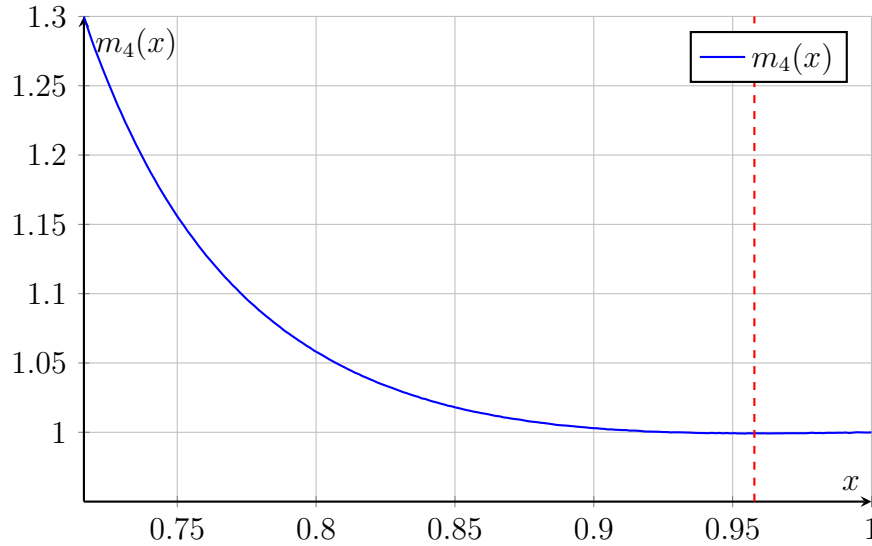


Figura 4.18: Comportamento da função $m_4(x)$ no intervalo $x \in (0.6, 1)$.

Da mesma forma, na Figura 4.18, a reta pontilhada destaca um ponto de mínimo de $m_4(x)$, que satisfaz o limite $\lim_{x \rightarrow 1} m_4(x) = 1$. Neste caso, existem duas configurações centrais distintas que realizam valores de m_4 ligeiramente maiores que esse mínimo.

Para investigar o comportamento global dos autovalores ao longo dos intervalos de interesse, realizamos uma varredura numérica com $\mathcal{N}_{\max} = 1000$ pontos.

Construímos dois gráficos distintos com base na análise numérica dos autovalores da matriz hessiana. No primeiro intervalo, para $x \in (0, 0.41389)$, verificamos que o número de autovalores negativos varia de 0 para 2 e, posteriormente, atinge 3. Esse comportamento é ilustrado na Figura 4.19, onde vemos que a instabilidade da configuração aumenta em determinados pontos do parâmetro x . Em particular, a última variação do índice se dá exatamente no ponto de mínimo local de $m_4(x)$, destacado pela reta pontilhada.

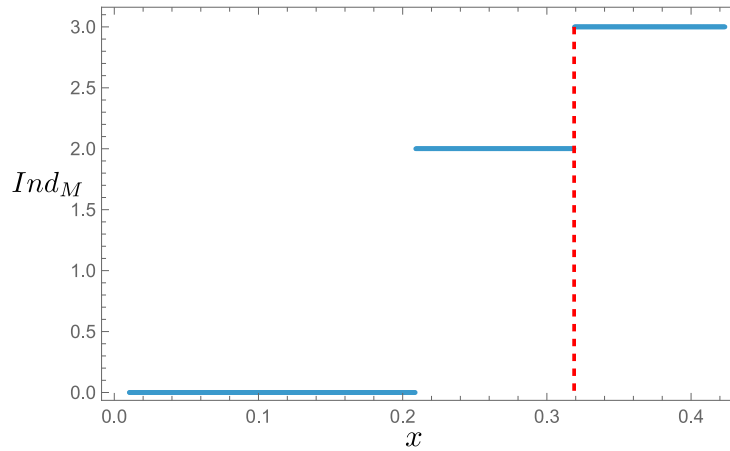


Figura 4.19: Índice de Morse de triângulos empilhados e rotacionados no intervalo $x \in (0, 0.41389)$.

No segundo intervalo, para $x \in (0.61737, 1)$, construímos um novo gráfico, mostrado na Figura 4.20. Nele, observamos que o índice é nulo antes do ponto de mínimo de $m_4(x)$ e igual 1 após ele. Esse resultado indica que as configurações centrais distintas, com mesmos valores de massa, admitem uma configuração central estável e uma instável, tão próximas quanto m_4 estiver próximo do valor mínimo, e com a mesma simetria. Acreditamos que esta característica possa ter uma consequência dinâmica interessante, que o caso de triângulos alinhados e configurações poligonais centradas não possuam, servindo de motivação para pesquisa futura.

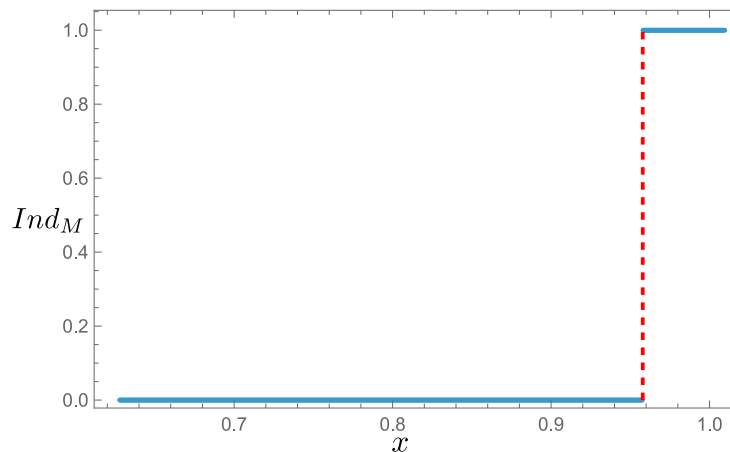


Figura 4.20: Índice de Morse triângulos empilhados e rotacionados no intervalo $x \in (0.61737, 1)$.

Conclusões

Neste trabalho, estudamos a estabilidade no sentido do índice de Morse, de configurações simétricas em sistemas de N corpos com a interação de um potencial homogêneo de grau $A > 2$. Analisamos configurações centrais poligonais regulares, tanto no caso clássico com $A = 3$, quanto no caso de vórtices com $A = 2$, e no caso geral com $A > 2$ qualquer. Mostramos que essas configurações são pontos críticos de uma função associada à combinação do potencial generalizado e momento de inércia. Devido à simetria do sistema, a matriz hessiana associada a essa função possui uma estrutura de matriz circulante por blocos, permitindo o cálculo explícito dos seus autovalores e, conseqüentemente, do índice de Morse. Dependendo do número de corpos N e do grau do potencial A , observamos variações significativas no índice, permitindo interpretar o grau de instabilidade dessas configurações em diferentes regimes.

Como consequência, estendemos os resultados para configurações simétricas com um corpo no centro de cada configuração, a fim de entender a estabilidade nesses casos. Mesmo com a dificuldade encontrada em cada matriz hessiana, conseguimos calcular explicitamente seus autovalores em diversos exemplos. Os resultados obtidos indicaram que, ao encontrar certos valores de massas centrais, o índice de Morse varia de forma não trivial em comparação aos casos sem nenhum corpo central, o que nos levou a propor duas conjecturas sobre esse comportamento.

Finalmente, estudamos duas configurações empilhadas, formadas por dois triângulos equiláteros, tanto concêntricos e alinhados quanto rotacionados, sobre as quais a dependência da estabilidade está em função do parâmetro geométrico e das massas relacionadas. Por meio de análise numérica, identificamos valores críticos para os quais os autovalores

da matriz Hessiana mudam de sinal, delimitando regiões de estabilidade e instabilidade. Estes resultados sugerem que pequenas variações geométricas ou na distribuição de massas podem ter impacto significativo no comportamento do sistema, dando indícios de que o índice de Morse pode ser um importante indicativo na análise de estabilidade em configurações centrais.

Referências Bibliográficas

ALBOUY, A.; CABRAL, H. E.; SANTOS, A. A. Some problems on the classical n -body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer, v. 113, n. 4, p. 369–375, 2012.

BARREIRA, L.; VALLS, C. *Equações diferenciais: teoria qualitativa*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2012.

CABRAL, H. E.; SCHMIDT, D. S. Stability of relative equilibria in the problem of $N+1$ vortices. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, SIAM, v. 31, n. 2, p. 231–250, 1999.

FERNANDES, A. C. *Sobre configurações centrais do problema de n -corpos. Configurações centrais planares, espaciais e empilhadas*. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: URL, <<https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45132/tde-04062012-103241/>>.

FERNANDES, A. C.; SILVA, A. M.; VIDAL, C. Some planar $(n, 1)$ -stacked central configurations. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, Springer, v. 56, n. 1, p. 1–15, 2025.

GRAY, R. M. Toeplitz and circulant matrices: A review. *Foundations and Trends® in Communications and Information Theory*, Now Publishers, Inc., v. 2, n. 3, p. 155–239, 2006.

HAMPTON, M. Stacked central configurations: new examples in the planar five-body problem. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 18, n. 5, p. 2299, 2005.

HAMPTON, M. Planar N -body central configurations with a homogeneous potential. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer, v. 131, n. 5, p. 20, 2019.

LEANDRO, E. S. Factorization of the stability polynomials of ring systems. *arXiv preprint arXiv:1705.02701*, 2017.

MASON, J. C.; HANDSCOMB, D. C. *Chebyshev polynomials*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2002.

MEYER, K. R.; SCHMIDT, D. S. Bifurcations of relative equilibria in the N -body and Kirchhoff problems. *SIAM journal on mathematical analysis*, SIAM, v. 19, n. 6, p. 1295–1313, 1988.

- MILNOR, J. W. *Morse Theory*. [S.l.]: Princeton University Press, 1963. (Annals of Mathematics Studies, 51).
- MOECKEL, R. Linear stability analysis of some symmetrical classes of relative equilibria. In: *Hamiltonian Dynamical Systems: History, Theory, and Applications*. [S.l.]: Springer, 1995. p. 291–317.
- NEWTON, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. [S.l.]: London Royal Society, 1687.
- ROBERTS, G. E. A continuum of relative equilibria in the five-body problem. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 127, n. 3-4, p. 141–145, 1999.
- SLAMINKA, E. E.; WOERNER, K. D. Central configurations and a theorem of Palmore. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer, v. 48, p. 347–355, 1990.
- SMALE, S. Mathematical problems for the next century. *The mathematical intelligencer*, Springer, v. 20, p. 7–15, 1998.
- WOERNER, K. D. The N-gon is not a local minimum of U^2I for $N > 7$. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer, v. 49, p. 413–421, 1990.
- ZHANG, S.; ZHOU, Q. Double pyramidal central configurations for the newtonian $n + 2$ -body problem. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 281, n. 4, p. 240–246, 2001.