

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Modelos Análogos para Flutuações do Cone de Luz

Caio Cesar Holanda Ribeiro

Itajubá-MG  
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Caio Cesar Holanda Ribeiro

Modelos Análogos para Flutuações do Cone de Luz

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do título de **Mestre em Ciências em Física**.

**Área de Concentração:** Teoria Quântica de Campos.

**Orientador:** Vitorio Alberto De Lorenci

Itajubá-MG  
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Caio Cesar Holanda Ribeiro

Modelos Análogos para Flutuações do Cone de Luz

Dissertação aprovada por banca examinadora em 22 de fevereiro de 2016, conferindo ao autor o título de **Mestre em Ciências em Física**.

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci (Orientador)

Prof. Dr. Alan Bendasoli Pavan

Prof. Dr. Marcelo Batista Hott

Itajubá-MG

2016

---

# Agradecimentos

---

Quero agradecer aos meus pais, Alberto e Elba, sem os quais, nesta natureza perfeitamente causal, nada disso seria possível; aos meus irmãos, Icaro e Ada, que são fontes de inspiração cujos campos não se anulam nem no infinito. Quero agradecer a minha esposa Luana, que é a dona de todas as partículas elementares em minha vida.

Desejo registrar meus mais sinceros agradecimentos a todos os professores, propagadores do conhecimento, que participaram do meu desenvolvimento intelectual e pessoal durante esta formação. Em particular, quero explicitar os imprescindíveis conselhos dos professores Rick Rischter e Vitorio De Lorenci, que me ajudaram a vislumbrar o quão bela é a ciência.

Como não poderia faltar, agradeço à CAPES e à FAPEMIG pelo apoio financeiro.

“A man sees in the world what he carries in his heart.”

Johann Wolfgang von Goethe, Faust: First Part

---

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Prólogo</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>O Modelo</b>	<b>7</b>
2.1	Equações de Maxwell em meios dielétricos . . . . .	7
2.2	Ondas . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Aspectos Quânticos do Campo de Radiação</b>	<b>13</b>
3.1	Expansão de Fourier do Campo de Fundo . . . . .	13
3.2	Oscilador Harmônico Revisitado . . . . .	16
3.3	Estados do Campo de Radiação . . . . .	21
3.3.1	Estados Coerentes . . . . .	21
3.3.2	Estados <i>Squeezed</i> . . . . .	24
3.4	Funções de Correlação . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Flutuações do Cone de Luz</b>	<b>37</b>
4.1	Flutuações do Tempo de Vôo . . . . .	37
4.2	Funções Teste . . . . .	40
4.3	Estimativas Numéricas . . . . .	44
4.3.1	CdSe . . . . .	45
4.3.2	Si . . . . .	45
4.4	Considerações Finais . . . . .	46
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>47</b>



---

# Resumo

---

Neste trabalho nós estudamos um modelo análogo para flutuações do cone de luz baseado em sistemas de ótica quântica não linear. Motivados pelos trabalhos recentes nas Refs. [7, 8, 9], nós apresentamos uma generalização apropriada para estes resultados. O ingrediente chave nestes trabalhos é que um campo de fundo flutuante pode mudar a velocidade de fase de um campo de prova acoplado a este campo de fundo através das não-linearidades do meio. Eles consideraram materiais não-lineares tendo susceptibilidade elétrica de segunda ordem, e o campo elétrico de fundo preparado no estado de vácuo, bem como no estado de vácuo *squeezed*. Aqui nós generalizamos estes resultados e consideramos materiais que possuam susceptibilidade de segunda e terceira ordem. Isto é importante se é desejado realizar medidas usando materiais centrossimétricos como o silício, no qual a susceptibilidade de segunda ordem é nula. Nós também consideramos o campo de fundo preparado no estado de vácuo, e em um estado coerente *squeezed*. Para estudar as flutuações do vácuo, nós também propomos uma função teste fiel para realizar os cálculos, em contraste com a distribuição Lorentziana usada em [9]. Nós argumentamos que com uma função teste mais realista, as contribuições de vácuo para as flutuações do cone de luz são até 100 vezes maiores que as encontradas anteriormente.

**Palavras-chave:** Modelo análogo, Flutuações do cone de luz, ótica quântica não linear, susceptibilidade elétrica de terceira ordem, Estado coerente *squeezed*.

---

# Abstract

---

In this work we study an analog model for lightcone fluctuations based on nonlinear quantum optical systems. Motivated by the recent works in Refs. [7, 8, 9], we present a suitable generalization for these results. The key ingredient in those works is that a fluctuating background field can change the phase velocity of a probe field coupled to this background through the nonlinearities of the medium. They have considered nonlinear materials having a second order electrical susceptibility, and the background electric field prepared in the vacuum state as well as the squeezed vacuum state. Here we will generalize these results and consider materials having second and third order susceptibility. This is important if one wishes to perform measurements using centrosymmetric materials like silicon, in which the second order susceptibility vanishes. We will also consider the background field prepared in the vacuum state, and in a coherent squeezed state. In order to study vacuum fluctuations, we also propose a faithful test function to perform the calculation in contrast with the Lorentzian distribution used in [9]. We argue that with a more realistic test function, the vacuum contributions to the lightcone fluctuations are up to 100 times greater than the ones found before.

**Keywords:** Analog model, Lightcone Fluctuations, nonlinear quantum optics, Third order electrical susceptibility, Coherent squeezed state.

---

# Prólogo

---

Após um período de um século de teoria da relatividade geral e teoria quântica, o conhecimento de como é o espaço-tempo nas vizinhanças de um átomo de hidrogênio ainda permanece um mistério. Embora esta questão seja de simples formulação, e apresente-se em termos de conceitos canônicos, a sua resposta definitiva, se existir, envolve a unificação de duas das melhor estabelecidas teorias já criadas. De um lado, tem-se a teoria quântica de campos, que revolucionou a forma como a ciência interpreta a natureza. Neste cenário, é importante citar a previsão de manifestações como o efeito Casimir, e a existência de partículas como o recém medido Bóson de Higgs [1, 2]. Por outro lado, tem-se a teoria da relatividade geral, em que os fenômenos gravitacionais são encarados como manifestações da “geometria” do espaço-tempo, determinados pela distribuição de energia. Da mesma forma que a teoria quântica, a relatividade também revolucionou a interpretação da natureza, prevendo efeitos como o de curvatura de raios luminosos e correções na precessão de órbitas planetárias, além de estruturas riquíssimas como os buracos negros, buracos de minhoca e até mesmo máquinas do tempo. Nesse contexto, vemos que as duas teorias são bem estabelecidas em seus respectivos domínios de validade, e questões como a apresentada acima ainda não tem resposta por misturarem ambos os aspectos: a natureza essencialmente quântica de um átomo de hidrogênio, e a gravitação gerada por tal distribuição de energia. Entretanto, mesmo na ausência de uma teoria completa da gravitação quântica, é possível obter resultados parciais, por exemplo, estudando a quantização de campos em geometrias de fundo fixadas (gravitação semiclássica).

É bem sabido que a quantização de campos em espaços-tempos curvos resulta em efeitos marcantes. Um exemplo importante é a previsão de que buracos negros evaporam pela emissão de radiação térmica, chamada de radiação Hawking [3]. Embora tal efeito seja bem estudado na literatura, uma medida real de tal radiação não é esperada para o futuro próximo. Isso é principalmente devido a diminuta magnitude do efeito quando comparado com fenômenos astrofísicos usuais. Por exemplo, para um buraco negro com uma massa solar esta temperatura é estimada para ser da ordem de  $10^{-6}$  K, valor que deve ser comparado com a temperatura da radiação cósmica de fundo ( $T \approx 2.73K$ ). Um método possível para investigar fenômenos de gravitação semiclássica é através do modelos análogos [4]. Por exemplo, é possível criar buracos negros fotônicos análogos usando metamateriais [5], que são materiais não homogêneos manufaturados com resposta complexa a

campos eletromagnéticos. Soma-se a isto, como recentemente publicado [6], que um efeito análogo à radiação Hawking pode ser criado em sistemas baseados em condensados de Bose-Einstein através de pequenas perturbações no campo de fônons que propaga-se em tal sistema.

Em um contexto similar, um tipo de modelo análogo para efeitos de gravitação quântica envolvendo ótica quântica foi estudado nas referências [7, 8, 9]. Nele, a ideia fundamental é que um campo elétrico de fundo preparado em um estado quântico acoplado as não linearidades do meio ótico pode mudar a velocidade de propagação de um campo de prova no meio. Esse modelo análogo pode ser utilizado, por exemplo, para estudar flutuações do cone de luz [10]. De fato, foi mostrado que se o campo de fundo está preparado em um dado estado quântico, então a velocidade do campo de prova também flutua. Se, por exemplo, esse estado quântico é um estado de vácuo *squeezed*, então o desvio quadrado fracional do tempo de vôo é dada por [7]

$$\delta^2 = \frac{U}{\varepsilon_0} \left( \frac{\chi^{(2)}}{1 + \chi^{(1)}} \right)^2, \quad (1.1)$$

onde  $U$  é a densidade de energia dos modos excitados, e  $\chi^{(1)}$  e  $\chi^{(2)}$  são as susceptibilidades de primeira e segunda ordem do material escolhido, respectivamente. Sobre condições experimentais realísticas, um desvio fracional da ordem de  $10^{-9}$  é possível. Note que este modelo também permite o estudo do vácuo quântico.

É preciso mencionar que o efeito de flutuações do cone de luz deve acontecer sempre que a geometria do espaço-tempo flutua. Uma possível importante consequência de tal efeito é que algumas divergências usuais da teoria quântica de campos sejam naturalmente controladas, como conjecturado há muito tempo por Pauli [11]. Flutuações do cone de luz no regime de gravitação quântica de campos fracos foram estudadas nas referências [10, 12, 13]. Neste regime, algumas singularidades usuais da teoria quântica são suavizadas. Em adição, uma das principais previsões desses modelos é a flutuação na velocidade de propagação de sinais luminosos entre uma fonte e um detector no espaço vazio, devida as flutuações da geometria do espaço-tempo subjacente. Por razões de completeza, vamos dissertar brevemente sobre este efeito. No limite de campos fracos, podemos escrever a métrica do espaço-tempo como  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , onde  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$  é a métrica de Minkowski e  $h_{\mu\nu}$  é uma pequena perturbação tal que  $h_{0\mu} \equiv 0$ . Esta última escolha é possível pela liberdade de *gauge* da teoria. Dessa forma, a trajetória do raio luminoso satisfaz a equação  $ds^2 = 0$ , ou

$$c^2 dt^2 = d\mathbf{r}^2 - h_{ij} dx^i dx^j = (1 - h_{ij} n^i n^j) dr^2, \quad (1.2)$$

com  $dr = |d\mathbf{r}|$ , e  $n^i = dx^i/dr$  é o vetor unitário tangente à trajetória espacial. Como  $|h_{ij}| \ll 1$ , podemos tomar a expansão da raiz de (1.2)

$$cdt \approx \left( 1 - \frac{1}{2} h_{ij} n^i n^j \right) dr, \quad (1.3)$$

e se a distância entre a fonte e o detector for  $d$ , a integral de (1.3) sobre a trajetória do raio nos dá o tempo de trajeto do sinal

$$t_d = \frac{d}{c} - \frac{1}{2c} \int_0^d h_{ij} n^i n^j dr. \quad (1.4)$$

Portanto, no caso em que o campo  $h_{ij}$  é um campo quântico preparado em algum estado, o tempo

de trajeto sofre flutuações em torno do valor médio  $\langle t_d \rangle$  dadas por

$$\Delta t_d^2 = \frac{1}{4c^2} \int_0^d \int_0^d (\langle h_{ij} h'_{lk} \rangle - \langle h_{ij} \rangle \langle h'_{lk} \rangle) n^i n^j n^l n^k dr dr'. \quad (1.5)$$

Aqui, a função de correlação  $\langle h_{ij}(\mathbf{r}, t) h_{lk}(\mathbf{r}', t') \rangle$  deve aparecer devidamente renormalizada, e a aspa indica que a função deve ser avaliada nas coordenadas  $(\mathbf{r}', t')$ . Por exemplo, se o campo do gráviton está preparado em algum estado de vácuo *squeezed* e se os modos relevantes possuem comprimento de onda  $\lambda \gg d$ , então  $\langle h_{ij} \rangle \equiv 0$ , e o integrando é aproximadamente constante ao longo da trajetória, de tal forma que

$$\Delta t_d^2 \approx \frac{d^2}{4c^2} \langle h_{ij} h_{lk} \rangle n^i n^j n^l n^k. \quad (1.6)$$

Se expandirmos o campo  $h_{ij}$  em seus modos normais, e calcularmos a correlação, então é possível mostrar que o desvio fracional é dado por

$$\delta^2 \approx U l_p^2 \lambda^2, \quad (1.7)$$

onde  $l_p$  é o comprimento de Planck, e  $U$  é a correspondente densidade de energia. Note que as equações (1.1) e (1.7) tem a mesma forma funcional, e isso torna claro o modelo análogo.

Tendo por motivação estes fatos, o presente trabalho não possui pretensões de apresentar uma teoria de gravitação quântica, mas de estudar um modelo análogo para flutuações do cone de luz em sistemas de ótica quântica. Em particular, iremos generalizar o modelo estudado nas referências [7, 8, 9]. Nesses trabalhos, são considerados materiais com não linearidades de segunda ordem, e o campo de fundo preparado nos estados *squeezed* e de vácuo. Para o cálculo de valores esperados envolvendo o estado de vácuo, é utilizada a tecnologia de funções teste, e no caso, foi utilizada a distribuição Lorentziana. No presente trabalho, vamos considerar materiais com não linearidades de até terceira ordem. Conforme veremos, materiais como o silício (centrosimétricos) possuem susceptibilidades de segunda ordem nulas, e portanto, não podem ser utilizados na análise feita em [7, 8, 9]. Além disso, iremos utilizar um campo de fundo preparado em um estado coerente *squeezed* de tal forma que os efeitos de vácuo sejam também considerados. Para o cálculo das contribuições de vácuo, vamos propor uma nova função teste, determinada pela geometria do sistema. Conforme veremos, estimativas numéricas envolvendo uma função teste fiel faz com que a variância quadrada fracional seja cerca de 100 maior que a encontrada em [9], aumentando a importância experimental do modelo.

Para finalizar, o trabalho está organizado da seguinte forma. O capítulo 2 apresenta o eletromagnetismo no interior de meios materiais, e estabelece as hipóteses para a validade do modelo. No capítulo 3 são estudados alguns aspectos quânticos do campo de radiação, bem como as propriedades dos estados coerentes *squeezed*, finalizando com uma seção extensa sobre o cálculo de algumas correlações. O capítulo três apresenta a discussão sobre o requerido efeito de flutuações do cone de luz, terminando com estimativas numéricas.

---

## O Modelo

---

### 2.1 Equações de Maxwell em meios dielétricos

Nesta seção, vamos estabelecer o modelo a ser estudado. Usaremos no decorrer do trabalho o sistema internacional de unidades, e a notação será como em [14, 15, 16, 17]. Considere uma porção cúbica de material ótico, polarizável, mas não magnetizável, de comprimento característico  $d$ . Suponha que a amostra esteja mergulhada em uma região do espaço onde exista um campo elétrico de fundo  $\mathbf{E}_f$ . Queremos estudar a propagação de pequenas perturbações em tal campo de fundo, denotadas aqui simplesmente por  $\mathbf{E}_p$ . Para isso, precisamos encontrar uma equação para a dinâmica de  $\mathbf{E}_p$ .

Sabemos que o eletromagnetismo é governado pelas equações de Maxwell [14, 15]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{J}. \quad (2.4)$$

Aqui,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  são o campo elétrico, e o campo de indução magnética, respectivamente,  $\rho$  é a densidade de cargas e  $\mathbf{J}$  a densidade de corrente elétrica. O parâmetro  $\varepsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo, e  $c$  a velocidade da luz. Assim, dada uma prescrição para as fontes  $\rho$  e  $\mathbf{J}$ , os campos são determinados pelas equações acima. Além disso, note que para uma completa descrição, devemos também especificar a dinâmica das fontes, dada pela usual lei de Newton-Lorentz [15].

No interior do material ótico, como o material é composto por átomos, o efeito de um campo externo é o de provocar a separação de cargas dos átomos constituintes, formando pequenos dipolos elétricos dentro do material [16]. Suponha que não existam cargas livres na região do material. Assim, temos que

$$\int \rho dV = 0, \quad (2.5)$$

onde a integral é feita em uma região que contém o material. Esta equação integral sugere que definamos um campo de vetores  $\mathbf{P}$  tal que

$$\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (2.6)$$

e  $\mathbf{P} \equiv 0$  fora do material. Dessa forma, a equação (2.5) é automaticamente satisfeita <sup>1</sup>. O campo  $\mathbf{P}$  é chamado de vetor de polarização do material, e se  $\mathbf{P} \neq 0$ , o material é dito polarizado. A interpretação do campo  $\mathbf{P}$  é dada por

$$\int \mathbf{r} \rho dV = - \int \mathbf{r} (\nabla \cdot \mathbf{P}) dV = \oint \mathbf{r} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}) dA + \int \mathbf{P} dV = \int \mathbf{P} dV. \quad (2.7)$$

Como a primeira integral é por definição o momento de dipolo elétrico total da distribuição de cargas, o vetor  $\mathbf{P}$  é simplesmente o vetor densidade de dipolo elétrico. Usando (2.6) em (2.1), obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.8)$$

onde definimos o vetor deslocamento elétrico  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ . Note que se colocarmos cargas externas descritas por  $\rho_e$  dentro do material, então

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e. \quad (2.9)$$

Esta é a generalização da Lei de Gauss para meios dielétricos. Se a usarmos juntamente com o fato de que a carga elétrica é conservada [16], obtemos a correspondente generalização da Lei de Ampère. De fato, temos que

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho_e}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Além disso, o princípio de conservação da carga elétrica é escrito como

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_e, \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{J}_e$  é a densidade de corrente externa. Daí,

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_e \right) = 0. \quad (2.12)$$

Portanto, podemos definir um campo de vetores  $\mathbf{H}$  tal que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_e, \quad (2.13)$$

para que a equação (2.12) seja automaticamente satisfeita. O campo  $\mathbf{H}$  é chamado de campo magnético. Note que, no vácuo, a unicidade do problema requer que  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , onde  $\mu_0 = 1/(\varepsilon_0 c^2)$  é a permeabilidade magnética do vácuo. No caso geral,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \equiv \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ , onde  $\mathbf{M}$  é o vetor magnetização do material<sup>2</sup>. Se  $\mathbf{M} \neq 0$ , o material é dito magnetizado [16]. Portanto, em

<sup>1</sup>Note que a equação (2.5) não define unicamente o campo  $\mathbf{P}$ , pois, pelo Lema de Poincaré, a adição de qualquer campo rotacional a  $\mathbf{P}$  também é solução. Para cada material, é preciso especificar a relação entre  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{E}$ .

<sup>2</sup>Da mesma forma que para o vetor de polarização, é preciso especificar a dependência funcional  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$  para completar o sistema de equações.

meios dielétricos, o eletromagnetismo é dado efetivamente por

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_e, \quad (2.17)$$

junto com as relações  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  e  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ . Um aspecto importante que será preciso posteriormente em nossa análise é a questão da energia armazenada no campo eletromagnético em meios óticos. Vamos ver como obter uma integral de energia para o sistema [18]. Para isso, tomamos o produto interno de (2.16) com  $\mathbf{H}$ , o produto interno de (2.17) com  $\mathbf{E}$ , e subtraímos as duas equações resultantes para obter

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e. \quad (2.18)$$

Usando a identidade  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$  [18], obtemos

$$-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (2.19)$$

Note que esta expressão é geral. Se usarmos que  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$  e  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , obtemos

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (2.20)$$

Ou seja, a variação da energia armazenada nos campos é compensada pelo trabalho realizado pelo campo elétrico nas cargas livres, pela polarização e magnetização do meio pelos campos, e pela energia irradiada.

Considere o caso em que as relações funcionais  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$  e  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$  são lineares e simétricas, *i.e.*, existem matrizes simétricas  $\kappa_{ij}$  e  $\eta_{ij}$  tais que  $P_i = \kappa_{ij} E_j$  e  $M_i = \eta_{ij} H_j$ . Daí, a equação (2.20) se escreve como

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (2.21)$$

Observe que neste regime a variação temporal da quantidade definida por

$$U = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV, \quad (2.22)$$

depende apenas do trabalho sobre as cargas livres e da energia irradiada. Portanto, se não existe cargas livres no sistema e não há energia irradiada, a quantidade  $U$  é conservada. Daí, segue que  $U$  é a soma da energia armazenada nos campos com a energia usada para polarizar e magnetizar o material. Logo, é natural chamar a quantidade  $U$  de energia do sistema, e a equação (2.21) é a correspondente lei de conservação. Note que esta definição depende essencialmente da escolha das relações funcionais  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$  e  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ , e portanto, a definição matemática da energia do sistema é dependente do material. Entretanto, no contexto do presente trabalho, a relação (2.22) será válida.

## 2.2 Ondas

De agora em diante, vamos supor o sistema livre de cargas e correntes externas, e não magnetizável. Seguem, portanto, as equações de onda para os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (2.23)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{P}. \quad (2.24)$$

Vamos assumir que no meio ótico em questão o campo magnético não polariza o material, *i.e.*,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ . Logo, uma vez conhecida a relação funcional  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ , determinamos o campo  $\mathbf{E}$  como solução de (2.23), e alimentamos a equação (2.24) com esta solução para determinar  $\mathbf{B}$ . Em outras palavras, a dinâmica do problema é completamente caracterizada pela equação (2.23).

Suponha que o campo total  $\mathbf{E}$  seja tal que  $\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv 0$ . Daí, (2.23) se reduz a

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (2.25)$$

Suponha além disso que o meio ótico em questão é não dispersivo. Isto significa que as velocidades de fase das ondas elementares de (2.25) não dependem de frequência [19]. Além disso, vamos supor um meio onde não há absorção. Isto implica que a polarização depende localmente do campo. Note que nenhum meio real satisfaz estas duas hipóteses. Entretanto, podemos usar um material que possua alguma banda de frequência na qual ele seja não dispersivo e trabalhar nesse limite (valendo o mesmo para a absorção). Nestas condições, para campos de baixa magnitude, e se o meio é homogêneo, podemos tomar a expansão

$$P_i \approx \varepsilon_0 \left( \chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l \right), \quad (2.26)$$

onde definimos os tensores de susceptibilidades elétricas  $\chi^{(1)}$ ,  $\chi^{(2)}$ ,  $\chi^{(3)}$  de primeira, segunda e terceira ordem, respectivamente. Em geral,  $\chi^{(3)}/(\text{m}^2/\text{V}^2) \ll \chi^{(2)}/(\text{m}/\text{V}) \ll 1$ , e portanto, esta aproximação é ótima para campos não intensos [14, 17]. Seja  $\mathbf{E}$  uma solução de (2.23) levando em consideração apenas o termo linear em (2.26), e seja  $\mathbf{E}_p$  uma pequena perturbação de  $\mathbf{E}$ , *i.e.*,  $\mathbf{E}_T = \mathbf{E} + \mathbf{E}_p$  com  $|\mathbf{E}_p| \ll |\mathbf{E}|$ , e  $\mathbf{E}_T$  denotando o campo total. Nesse ponto, vamos estabelecer o ingrediente chave para o modelo. Vamos preparar a perturbação polarizada na direção  $\hat{z}$ , com propagação na direção  $\hat{x}$ ,  $\mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t) = E_p(x, t) \hat{z}$ . Isso garante que  $\nabla \cdot \mathbf{E}_p \equiv 0$ . Suponha que o campo de fundo  $\mathbf{E}$  tem baixa frequência característica quando comparado com  $\mathbf{E}_p$ , *i.e.*,  $\mathbf{E}$  varia lentamente em relação a  $\mathbf{E}_p$ . Em termos matemáticos, isso significa que se considerarmos as transformadas de Fourier

$$E_p(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \tilde{E}_p(\omega) \cos(\omega t + \delta_\omega), \quad (2.27)$$

$$E_j(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \tilde{E}_j(\omega) \cos(\omega t + \delta_\omega), \quad (2.28)$$

então  $\tilde{E}_p$  somente é expressivo em uma região de frequências muito maiores do que a região onde  $\tilde{E}_j$  é expressivo. Para fixar ideias, vamos assumir inicialmente que ambos os campos  $\mathbf{E}_p$  e  $\mathbf{E}$  são aproximadamente monocromáticos com frequências  $\Omega_p$  e  $\Omega$ , respectivamente. Daí, segue que

$$E_p(\mathbf{r}, t) \approx \tilde{E}_p(\mathbf{r}) \cos(\Omega_p t + \delta_p), \quad (2.29)$$

$$E_j(\mathbf{r}, t) \approx \tilde{E}_j(\mathbf{r}) \cos(\Omega t + \delta), \quad (2.30)$$

e as condições sobre as soluções ficam dadas por  $|\tilde{E}_p(\mathbf{r})| \ll |\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|$  e  $\Omega \ll \Omega_p$ . Vamos assumir que a frequência  $\Omega_p$  é suficientemente grande ao ponto de que a relação  $\Omega|\tilde{E}_j| \ll \Omega_p|\tilde{E}_p|$  seja válida. Observe que neste caso, isto equivale a

$$\left| \frac{\partial E_j}{\partial t} \right| \ll \left| \frac{\partial E_p}{\partial t} \right|. \quad (2.31)$$

Além disso, note que  $\Omega^2|\tilde{E}_j| = \Omega\Omega|\tilde{E}_j| \ll \Omega\Omega_p|\tilde{E}_p| \ll \Omega_p^2|\tilde{E}_p|$ , ou seja,  $|\ddot{E}_j| \ll |\ddot{E}_p|$ . Portanto, ao substituir o primeiro termo não linear de (2.26) em (2.25), temos, por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(E_j + E_{pj})(E_k + E_{pk}) &= (\ddot{E}_j + \ddot{E}_{pj})(E_k + E_{pk}) + 2(\dot{E}_j + \dot{E}_{pj})(\dot{E}_k + \dot{E}_{pk}) \\ &\quad + (E_j + E_{pj})(\ddot{E}_k + \ddot{E}_{pk}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Note que  $E_{pj}$  denota a  $j$ -ésima componente do vetor  $\mathbf{E}_p$ . Daí,

$$\begin{aligned} \chi_{ijk}^{(2)}(\ddot{E}_j + \ddot{E}_{pj})(E_k + E_{pk}) &= \chi_{ijk}^{(2)}E_k\ddot{E}_j + \chi_{ijz}^{(2)}E_p\ddot{E}_j + \chi_{izk}^{(2)}E_k\ddot{E}_p + \chi_{izz}^{(2)}E_p\ddot{E}_p \\ &\approx \chi_{izk}^{(2)}E_k\ddot{E}_p. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \chi_{ijk}^{(2)}(\dot{E}_j + \dot{E}_{pj})(\dot{E}_k + \dot{E}_{pk}) &= \chi_{ijk}^{(2)}\dot{E}_j\dot{E}_k + \chi_{ijz}^{(2)}\dot{E}_j\dot{E}_p + \chi_{izk}^{(2)}\dot{E}_p\dot{E}_k + \chi_{izz}^{(2)}\dot{E}_p\dot{E}_p \\ &\approx \chi_{izz}^{(2)}\dot{E}_p\dot{E}_p. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Note que neste regime as correções lineares para a dinâmica de  $E_p$  são dominantes, uma vez que  $\dot{E}_p^2$  é da ordem de  $\Omega_p^2 E_p^2$  e  $E_k\ddot{E}_p$  é da ordem de  $\Omega_p^2 E_k E_p$ . Portanto,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi_{ijk}^{(2)}E_{Tj}E_{Tk} \approx \left( \chi_{izj}^{(2)} + \chi_{ijz}^{(2)} \right) E_j \frac{\partial^2 E_p}{\partial t^2}. \quad (2.35)$$

Para o termo de ordem 3 em  $\mathbf{E}_T$ , teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}E_{Ti}E_{Tj}E_{Tk} &= \ddot{E}_{Ti}E_{Tj}E_{Tk} + E_{Ti}\ddot{E}_{Tj}E_{Tk} + E_{Ti}E_{Tj}\ddot{E}_{Tk} \\ &\quad + 2\dot{E}_{Ti}\dot{E}_{Tj}E_{Tk} + 2\dot{E}_{Ti}E_{Tj}\dot{E}_{Tk} + 2E_{Ti}\dot{E}_{Tj}\dot{E}_{Tk}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Contraindo com  $\chi^{(3)}$ , teremos, usando a mesma análise para o caso de ordem 2,

$$\begin{aligned} \chi_{ijkl}^{(3)}\ddot{E}_{Tj}E_{Tk}E_{Tl} &= \chi_{ijkl}^{(3)}\ddot{E}_jE_kE_l + \left( \chi_{ijkz}^{(3)} + \chi_{ijzk}^{(3)} \right) \ddot{E}_jE_kE_p + \chi_{ijzz}^{(3)}\ddot{E}_jE_p^2 \\ &\quad + \chi_{izkl}^{(3)}\ddot{E}_pE_kE_l + \left( \chi_{izkz}^{(3)} + \chi_{izzk}^{(3)} \right) \ddot{E}_pE_kE_p + \chi_{izzz}^{(3)}\ddot{E}_pE_p^2 \\ &\approx \chi_{izkl}^{(3)}\ddot{E}_pE_kE_l, \end{aligned} \quad (2.37)$$

e

$$\begin{aligned} \chi_{ijkl}^{(3)}\dot{E}_{Tj}\dot{E}_{Tk}E_{Tl} &= \chi_{ijkl}^{(3)}\dot{E}_j\dot{E}_kE_l + \chi_{ijkz}^{(3)}\dot{E}_j\dot{E}_kE_p + \chi_{ijzl}^{(3)}\dot{E}_jE_l\dot{E}_p + \chi_{ijzz}^{(3)}\dot{E}_j\dot{E}_pE_p \\ &\quad + \chi_{izkl}^{(3)}\dot{E}_p\dot{E}_kE_l + \chi_{izkz}^{(3)}\dot{E}_p\dot{E}_kE_p + \chi_{izzl}^{(3)}\dot{E}_pE_l\dot{E}_p + \chi_{izzz}^{(3)}\dot{E}_p^2E_p \\ &\approx \chi_{izzl}^{(3)}\dot{E}_p\dot{E}_pE_l. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Nesse caso, também, as contribuições lineares são dominantes, pela mesma razão dos termos de segunda ordem. Portanto, dos termos de terceira ordem resulta que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi_{ijkl}^{(3)}E_{Tj}E_{Tk}E_{Tl} \approx \left( \chi_{zzkl}^{(3)} + \chi_{zkzl}^{(3)} + \chi_{zklz}^{(3)} \right) E_kE_l \frac{\partial^2 E_p}{\partial t^2}. \quad (2.39)$$

Dessa forma, segue da equação (2.25) a equação que governa a dinâmica de  $E_p$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \left[ \chi_{zz}^{(1)} + \left( \chi_{zjz}^{(2)} + \chi_{zzj}^{(2)} \right) E_j + \left( \chi_{zzkl}^{(3)} + \chi_{zkzl}^{(3)} + \chi_{zklz}^{(3)} \right) E_k E_l \right] \frac{\partial^2 E_p}{\partial t^2}. \quad (2.40)$$

Além disso, se definirmos as constantes,

$$n_0 = \sqrt{1 + \chi_{zz}^{(1)}}, \quad \gamma_i = \frac{1}{n_0^2} \left( \frac{\chi_{zzi}^{(2)} + \chi_{ziz}^{(2)}}{2} \right), \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{n_0^2} \left( \frac{\chi_{zzij}^{(3)} + \chi_{zizj}^{(3)} + \chi_{zijz}^{(3)}}{3} \right), \quad (2.41)$$

então (2.40) se escreve como

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} - \frac{n_0^2}{c^2} (1 + 2\gamma_j E_j + 3\gamma_{kl} E_k E_l) \frac{\partial^2 E_p}{\partial t^2} = 0. \quad (2.42)$$

Observe que neste ponto podemos relaxar a hipótese de o campo de fundo ser monocromático. De fato, se  $\mathbf{E}$  varia lentamente em comparação com  $\mathbf{E}_p$ , então é necessário que  $|\dot{\mathbf{E}}| \ll |\dot{\mathbf{E}}_p|$  e  $|\ddot{\mathbf{E}}| \ll |\ddot{\mathbf{E}}_p|$ , pois a violação do segundo vínculo em algum instante de tempo implica na violação do primeiro em instantes posteriores. Além disso, para deduzir a (2.42) usamos este fato e também que  $|\dot{E}_p|^2 \ll |E_k| |\ddot{E}_p|$  para alguma componente  $E_k$ . Entretanto, esta última hipótese nada diz sobre o fato de o campo de fundo ser ou não monocromático, e segue de  $|\mathbf{E}_p| \ll |\mathbf{E}|$  para o caso em que a perturbação é monocromática. Em síntese, é necessário que  $|\mathbf{E}_p| \ll |\mathbf{E}|$ , com  $\mathbf{E}$  variando lentamente em relação a  $|\mathbf{E}_p|$ , e  $\mathbf{E}_p$  aproximadamente monocromático. Assim, o campo  $\mathbf{E}_p$  satisfaz uma equação de onda com velocidade de fase

$$v_p = \frac{c}{n}, \quad (2.43)$$

onde

$$n = n_0 \sqrt{1 + 2\gamma_j E_j + 3\gamma_{kl} E_k E_l} \quad (2.44)$$

é o índice de refração efetivo para o pulso  $\mathbf{E}_p$ . Dessa forma, vemos que a velocidade é modulada pelo campo de fundo  $\mathbf{E}$ . Usando o fato de que  $dx = v_p dt$ , podemos calcular por integração direta o tempo de vôo  $t_d$  que o pulso luminoso demora para atravessar o material, que supomos ter comprimento característico  $d$ . De fato,

$$t_d = \int_0^d \frac{1}{v_p} dx = \frac{n_0}{c} \int_0^d \sqrt{1 + 2\gamma_j E_j + 3\gamma_{kl} E_k E_l} dx, \quad (2.45)$$

onde a dependência temporal no integrando é para ser tomada sobre o caminho do pulso. Podemos supor que  $n$  é aproximadamente constante durante o experimento, o que é válido se o campo de fundo não é tão intenso. Daí, a dependência temporal no integrando é dada por  $ct = nx$ . Além disso, como usualmente as constantes  $\gamma_i/(m/V)$ ,  $\gamma_{jk}/(m^2/V^2) \ll 1$ , podemos expandir o radical até a segunda ordem em  $\mathbf{E}$  para obter

$$t_d = \frac{n_0}{c} \int_0^d [1 + \gamma_j E_j(x, t) + \mu_{kl} E_k(x, t) E_l(x, t)] dx, \quad (2.46)$$

onde

$$\mu_{ij} = \frac{3\gamma_{(ij)} - \gamma_i \gamma_j}{2}. \quad (2.47)$$

A equação (2.46) é a requerida expressão matemática para o modelo.

---

# Aspectos Quânticos do Campo de Radiação

---

O objetivo do presente trabalho é formular e estudar um modelo análogo para flutuações do cone de luz. Com esse fim, vimos no capítulo anterior como se comporta a velocidade de fase de uma pequena perturbação em um campo de fundo, dada pela equação (2.43). Portanto, se pensarmos nesta perturbação como um campo de prova, temos o conhecimento de como o cone de luz efetivo depende das propriedades óticas do meio e do campo de fundo. Neste capítulo, vamos investigar alguns aspectos do campo de fundo quando o mesmo está preparado em um estado quântico.

## 3.1 Expansão de Fourier do Campo de Fundo

Conforme o modelo, o campo eletromagnético de fundo tem como equações dinâmicas

$$\left( \delta_{ij} \nabla^2 - \frac{\delta_{ij} + \chi_{ij}^{(1)}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) E_j = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla^2 B_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \epsilon_{ijk} \chi_{kl}^{(1)} \frac{\partial^2 E_l}{\partial t \partial x_j}, \quad (3.2)$$

onde o último termo dentro do parênteses em (3.1) é o termo  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$  de (2.23). Como vimos, o campo  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico total, e para um material com polarização qualquer  $\mathbf{P}$ ,  $-\nabla \cdot \mathbf{P}$  age como fonte de campo por construção. Logo, não podemos desprezar o termo com o gradiente. Entretanto, podemos obter uma simplificação extra no caso em que o meio em questão é aproximadamente isotrópico. Neste caso,  $\chi_{ij}^{(1)} \equiv \chi^{(1)} \delta_{ij}$ , e portanto,  $D_i = \epsilon_0 [1 + \chi^{(1)}] E_i$ . Ou seja, o campo de deslocamento elétrico é proporcional ao próprio campo elétrico. Como estamos supondo  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ ,

o mesmo vale para  $\mathbf{E}$ , e as equações (3.1), (3.2) se reduzem a

$$\left(\nabla^2 - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E_i = 0, \quad (3.3)$$

$$\nabla^2 B_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2} = -\frac{\chi^{(1)}}{c^2} \epsilon_{ijl} \frac{\partial^2 E_l}{\partial t \partial x_j}, \quad (3.4)$$

onde  $n_0 = \sqrt{1 + \chi^{(1)}}$ . Para estudar a quantização desta teoria, podemos proceder de várias formas. No presente caso, por se tratar de um trabalho de ótica, vamos usar a quantização do oscilador harmônico unidimensional para encontrar os correspondentes operadores de campo. Conforme veremos, este caminho tem sua vantagem justificada quando estudarmos os estados coerentes e *squeezed*. Suponha que estamos estudando o campo eletromagnético em uma cavidade cúbica de lado  $L$ , e que o campo satisfaz condições de contorno periódicas nas paredes da cavidade. Neste ponto, a natureza do contorno não é importante, pois ao final do cálculo, faremos o volume da cavidade arbitrariamente grande, de tal forma que os efeitos de fronteira tornar-se-ão desprezíveis. Considere a equação para o campo elétrico (3.3). Procuramos por soluções elementares do tipo onda plana

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (3.5)$$

onde  $\mathbf{e}(t)$  é um vetor com componentes complexas, e fica subentendido que tomaremos a parte real no final do cálculo. Desta forma, usando as condições de contorno, obtemos os possíveis valores para o vetor de onda

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L}, \quad (3.6)$$

para  $n_i \in \mathbb{Z}$ , e  $i = 1, 2, 3$ . Usando (3.5) em (3.3), obtemos uma equação para  $\mathbf{e}(t)$

$$\left(\mathbf{k}^2 + \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{e}(t) = 0. \quad (3.7)$$

Portanto, observe que cada componente  $e_i(t)$  tem a dinâmica de um oscilador harmônico de frequência angular  $\omega = \frac{kc}{n_0}$ , onde  $k = |\mathbf{k}|$ . Usaremos este fato para quantizar o campo. Assim, como  $\mathbf{e}(t)$  é um oscilador tridimensional isotrópico, podemos tomar a solução

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e} e^{-i\omega t}, \quad (3.8)$$

onde  $\mathbf{e} \neq 0$  é um vetor constante. Finalmente, a condição  $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$  implica que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0. \quad (3.9)$$

Ou seja, para cada  $\mathbf{k}$ , temos duas soluções linearmente independentes para a polarização  $\mathbf{e}$ . Dessa forma, a solução geral para  $\mathbf{E}$  é

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \mathcal{E}_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (3.10)$$

onde tomamos  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$  real, e  $\lambda = 1, 2$  indica qual solução para  $\mathbf{e}$  dado um  $\mathbf{k}$ . Além disso, por razões de simplicidade, vamos escolher  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda'} = \delta_{\lambda, \lambda'}$ . As constantes  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}\lambda}$  são obtidas tomando a parte real de cada modo, *i.e.*,

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}\lambda} = a_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + a_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}, \quad (3.11)$$

com  $a_{\mathbf{k}\lambda}$  constantes complexas arbitrárias de integração. Com isso, se aplicarmos diretamente da Lei de Faraday (2.3) a cada modo, necessariamente o campo  $\mathbf{B}$  é dado por

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}}{\omega} \mathcal{E}_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (3.12)$$

É fácil ver que (3.12) é solução de (3.4). Note que estas expressões para os campos são gerais, bastando uma especificação dos  $\{a_{\mathbf{k}\lambda}\}$  para determinar a solução clássica. A conexão com o campo quantizado em todo o espaço é obtida ao se fazer  $V \rightarrow \infty$ . Neste limite, vemos que  $\mathbf{k}$  toma valores em  $\mathbb{R}^3$ ,  $a_{\mathbf{k}\lambda}$  torna-se uma função de variável contínua  $a_\lambda(\mathbf{k})$ , e se  $dN = dn_x dn_y dn_z$  é o número de modos em um elemento de volume no espaço dos  $\mathbf{k}$ , então

$$\sum_{\mathbf{k}, \lambda} \rightarrow \int dN \sum_{\lambda} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \sum_{\lambda} \quad (3.13)$$

quando  $V \rightarrow \infty$ . Além disso, a escolha da terna  $\{\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}, \hat{\mathbf{k}}\}$ , para cada  $\mathbf{k}$ , implica que estes vetores satisfazem uma propriedade que será útil nas seções posteriores. De fato, seja  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  um vetor qualquer. Como  $\{\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}, \hat{\mathbf{k}}\}$  é, por construção, uma base ortonormal, então podemos expandir o vetor  $\mathbf{x}$  em relação a esta base

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e}_{\mathbf{k}1} + (\mathbf{e}_{\mathbf{k}2} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e}_{\mathbf{k}2} + (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x})\hat{\mathbf{k}}. \quad (3.14)$$

Daí, tomando o produto interno de  $\mathbf{x}$  com ele mesmo, e usando que  $\{\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}, \hat{\mathbf{k}}\}$  é ortogonal

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} &= \sum_{i,j} x_i \delta_{ij} x_j = (\mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \cdot \mathbf{x})^2 + (\mathbf{e}_{\mathbf{k}2} \cdot \mathbf{x})^2 + (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x})^2 \\ &= \sum_{i,j} x_i x_j \left[ e_{\mathbf{k}1,i} e_{\mathbf{k}1,j} + e_{\mathbf{k}2,i} e_{\mathbf{k}2,j} + \frac{k_i k_j}{k^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como o vetor  $\mathbf{x}$  é arbitrário, segue que

$$e_{\mathbf{k}1,i} e_{\mathbf{k}1,j} + e_{\mathbf{k}2,i} e_{\mathbf{k}2,j} + \frac{k_i k_j}{k^2} = \delta_{ij}. \quad (3.16)$$

Para concluir o processo de quantização, vamos fazer a conexão com o oscilador harmônico. Pela equação (2.22), como  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 n_0^2 \mathbf{E}$  e  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  no nosso caso, a energia armazenada no campo é dada por

$$\begin{aligned} U &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V [n_0^2 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)] dV \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda, \mathbf{k}', \lambda'} \left( n_0^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}'\lambda'} + c^2 \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{k}' \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}'\lambda'}}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}} \right) \int_V dV \mathcal{E}_{\mathbf{k}\lambda} \mathcal{E}_{\mathbf{k}'\lambda'}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Usando que

$$\int_V dV \mathcal{E}_{\mathbf{k}\lambda} \mathcal{E}_{\mathbf{k}'\lambda'} = V \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} \left[ a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})t} + c.c. \right] + V \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left[ a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}'\lambda'}^* e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} + c.c. \right], \quad (3.18)$$

onde c.c. significa complexo conjugado, e  $\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\pm \mathbf{k}\lambda'} = k^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\pm \mathbf{k}\lambda'}$ ,

$$\begin{aligned} U &= \frac{V \varepsilon_0}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda, \lambda'} \left( n_0^2 - \frac{c^2 \mathbf{k}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \right) \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{-\mathbf{k}\lambda'} \left[ a_{\mathbf{k}\lambda} a_{-\mathbf{k}\lambda'} e^{-2i\omega_{\mathbf{k}} t} + c.c. \right] \\ &\quad + \frac{V \varepsilon_0}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda, \lambda'} \left( n_0^2 + \frac{c^2 \mathbf{k}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \right) \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda'} \left[ a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda'}^* + c.c. \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Portanto, pela definição de  $\omega$ ,

$$U = V\varepsilon_0 n_0^2 \sum_{\mathbf{k}, \lambda, \lambda'} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda'} [a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda'}^* + c.c.]. \quad (3.20)$$

Finalmente, usando a relação de ortogonalidade  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda'} = \delta_{\lambda, \lambda'}$ , podemos efetuar a soma em  $\lambda'$  para obter

$$U = V\varepsilon_0 n_0^2 \sum_{\mathbf{k}, \lambda} [a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}^* + a_{\mathbf{k}\lambda}^* a_{\mathbf{k}\lambda}]. \quad (3.21)$$

Ou seja, a energia é composta pela soma das energias de cada modo. Vamos tratar agora cada modo usando mecânica quântica. Por razões de completeza, uma revisão sistemática do oscilador harmônico quântico é importante para compreendermos futuramente mais sobre os estados do campo de radiação.

## 3.2 Oscilador Harmônico Revisitado

Considere uma partícula de massa  $m = 1$  sujeita a um potencial harmônico e com frequência angular  $\omega$ . A Hamiltoniana do sistema é, pois,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2 \hat{x}^2}{2}, \quad (3.22)$$

onde  $\hat{x}$  é o operador de posição,  $\hat{p}$  é o momento canônico, e vale a relação canônica de comutação

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (3.23)$$

No tratamento do oscilador harmônico, é conveniente trabalhar com o operador

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} + i\hat{p}) \quad (3.24)$$

e seu adjunto  $\hat{a}^\dagger$ , chamados respectivamente de operadores de aniquilação e criação. Daí,

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (3.25)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (3.26)$$

Além disso,

$$\hbar\omega\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{2}(\omega\hat{x} + i\hat{p})(\omega\hat{x} - i\hat{p}) = \frac{1}{2}(\omega^2\hat{x}^2 + \hat{p}^2 - i\omega[\hat{x}, \hat{p}]) = \hat{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad (3.27)$$

$$\hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2}(\omega\hat{x} - i\hat{p})(\omega\hat{x} + i\hat{p}) = \frac{1}{2}(\omega^2\hat{x}^2 + \hat{p}^2 + i\omega[\hat{x}, \hat{p}]) = \hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (3.28)$$

A subtração de (3.27) e (3.28) resulta em

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (3.29)$$

enquanto a soma resulta em

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (3.30)$$

Com o auxílio dos operadores de criação e aniquilação, podemos diagonalizar a Hamiltoniana da seguinte forma. Seja  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ . Então, como  $\hat{H}$  é uma função linear de  $\hat{n}$ , ambos podem ser diagonalizados simultaneamente. Seja  $|n\rangle$  um autoestado normalizado de  $\hat{n}$  com autovalor  $n$

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (3.31)$$

Então,

$$\hat{H} |n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \equiv E_n |n\rangle. \quad (3.32)$$

Ou seja, os autovalores de energia são dados por  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ . A interpretação física dos operadores  $\hat{n}, \hat{a}, \hat{a}^\dagger$  é estabelecida quando usamos que

$$[\hat{n}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} = -\hat{a}, \quad (3.33)$$

$$[\hat{n}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] \hat{a} = \hat{a}^\dagger. \quad (3.34)$$

Daí,

$$\hat{n} \hat{a}^\dagger |n\rangle = ([\hat{n}, \hat{a}^\dagger] + \hat{a}^\dagger \hat{n}) |n\rangle = (n+1) \hat{a}^\dagger |n\rangle, \quad (3.35)$$

$$\hat{n} \hat{a} |n\rangle = ([\hat{n}, \hat{a}] + \hat{a} \hat{n}) |n\rangle = (n-1) \hat{a} |n\rangle. \quad (3.36)$$

Logo,  $\hat{a}^\dagger |n\rangle$  é um autoestado de  $\hat{n}$  com autovalor  $n+1$ , e  $\hat{a} |n\rangle$  é um autoestado de  $\hat{n}$  com autovalor  $n-1$ . Usando que os autoestados de  $\hat{n}$  são normalizados, podemos escrever

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (3.37)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (3.38)$$

para ter  $\hat{a} |n\rangle, \hat{a}^\dagger |n\rangle$  também normalizados. Finalmente, observe que, como a norma de  $\hat{a} |n\rangle$  é sempre não negativa,

$$n = \langle n | \hat{n} | n \rangle = \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle \geq 0, \quad (3.39)$$

de onde os autovalores de  $\hat{n}$  são maiores ou iguais a zero. Considere portanto a aplicação do operador de destruição  $j$  vezes em um ket arbitrário  $|n\rangle$ . Pela (3.37), segue que

$$\hat{a}^j |n\rangle = \sqrt{n(n-1)\dots(n-j+1)} |n-j\rangle. \quad (3.40)$$

Portanto, se  $n$  é inteiro, então para  $j > n$ , a sequência termina. Caso contrário, a sequência não termina e para  $j > n$ , teremos autoestados de  $\hat{n}$  com autovalores negativos, o que é um absurdo pela (3.39). Logo,  $n$  é um inteiro não negativo. O estado de menor energia, para  $n = 0$ , é definido por

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad (3.41)$$

e é chamado de estado de vácuo do sistema, para o qual  $E_0 = \hbar\omega/2$ . Além disso, segue por indução da equação (3.38) que um estado genérico de energia  $|n\rangle$  é obtido a partir do estado de vácuo por

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (3.42)$$

Vemos assim que um autoestado qualquer de energia é obtido a partir do estado de vácuo adicionando a ele um múltiplo inteiro não negativo de  $\hbar\omega$ . Cada pacote elementar de energia é chamado de um quantum de energia, e os autovalores de  $\hat{n}$  medem portanto o número de quanta de energia no sistema. Por isso,  $\hat{n}$  é chamado de operador número. Podemos usar os estados  $\{|n\rangle\}$  para estudar a evolução de um estado qualquer. Seja  $|\Psi(0)\rangle$  um ket arbitrário no instante  $t = 0$ . Como  $|n\rangle$  é uma base, temos que

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (3.43)$$

para constantes apropriadas  $c_n$ . Daí, o estado do sistema em um instante de tempo qualquer é obtido através do operador de evolução  $e^{-i\hat{H}t/\hbar}$  por

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} |\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} |n\rangle. \quad (3.44)$$

Podemos também usar este desenvolvimento para obter informação sobre as autofunções na representação de posição. De fato, se denotarmos as autofunções por  $\phi_n(x) = \langle x|n\rangle$ , então a equação (3.41) se torna

$$\left(\omega x + \hbar \frac{d}{dx}\right) \phi_0(x) = 0, \quad (3.45)$$

onde usamos que  $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$  e  $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ . Integrando (3.45), obtemos que

$$\phi_0(x) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\omega x^2}{2\hbar}}, \quad (3.46)$$

onde a constante de normalização foi escolhida para que  $\phi_0$  tenha norma 1. Daí, usando a (3.42), temos que

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{(2\hbar\omega)^{\frac{n}{2}}} \left(\omega x - \hbar \frac{d}{dx}\right)^n \phi_0(x) \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} x\right) \phi_0(x), \end{aligned} \quad (3.47)$$

e as funções  $H_n(x)$  são os polinômios de Hermite. Desta forma, as autofunções satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x) \phi_m(x) dx = \delta_{nm}. \quad (3.48)$$

Em termos das autofunções, a equação (3.44) é

$$\Psi(x, t) = \langle x|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \langle x|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \phi_n(x). \quad (3.49)$$

Para finalizar esta revisão, outros dois operadores importantes em ótica quântica são os operadores de quadratura, definidos pelas formas adimensionais dos operadores de posição e momento

$$\hat{X} = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (3.50)$$

$$\hat{Y} = \frac{i}{2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (3.51)$$

Daí,

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = \frac{i}{2}. \quad (3.52)$$

Segue portanto que, em termos dos operadores de quadratura, o princípio de incerteza é escrito como

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{Y} \geq \frac{1}{4}. \quad (3.53)$$

Estes operadores serão importantes quando formos estudar estados quânticos do campo de radiação na próxima seção. Estaremos interessados principalmente nas variâncias destes operadores. Para os estados  $|n\rangle$ , temos claramente que  $\langle\hat{X}\rangle = \langle\hat{Y}\rangle = 0$  pelas equações (3.37) e (3.38). Além disso,

$$\langle\hat{X}^2\rangle = \frac{1}{4}\langle n|(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)|n\rangle = \frac{1}{4}\langle n|(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)|n\rangle = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (3.54)$$

$$\langle\hat{Y}^2\rangle = -\frac{1}{4}\langle n|(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger)|n\rangle = \frac{1}{4}\langle n|(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)|n\rangle = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (3.55)$$

Ou seja,  $\Delta\hat{X} = \Delta\hat{Y}$ , e

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{Y} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (3.56)$$

Note que, em particular, o estado de vácuo  $|0\rangle$  é um estado de incerteza mínima de acordo com (3.53).

Podemos agora concluir a quantização do campo eletromagnético da seguinte forma. Quando expandimos o campo elétrico em termos dos modos normais na seção anterior, identificamos que a parte temporal de cada modo tem a dinâmica clássica de um oscilador harmônico dada pela equação (3.7). Além disso, vemos que a energia do campo em termos dos modos normais, (3.21), é a soma de várias energias da forma (3.30). Portanto, para quantizar o campo, fazemos a exigência de que cada modo normal tenha a dinâmica de um oscilador quântico, junto com a identificação

$$a_{\mathbf{k}\lambda} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V\varepsilon_0 n_0^2}} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (3.57)$$

$$a_{\mathbf{k}\lambda}^* \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V\varepsilon_0 n_0^2}} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger, \quad (3.58)$$

para garantir as unidades corretas. Como cada oscilador é independente, a relação de comutação (3.29) correspondente é

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}. \quad (3.59)$$

Daí as quantidades clássicas  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $U$  se tornam operadores

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V\varepsilon_0 n_0^2}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right], \quad (3.60)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_{\mathbf{k}}\varepsilon_0 n_0^2}} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right], \quad (3.61)$$

$$\hat{U} = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( \hat{n}_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.62)$$

onde escrevemos a energia em termos dos operadores números  $\hat{n}_{\mathbf{k}\lambda} = \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ . Como estamos usando o formalismo de várias partículas para descrever a quantização do campo, então um autoestado da Hamiltoniana  $\hat{U}$  é dado pelo produto tensorial dos autoestados de cada modo. Isto é, para uma dada lista  $\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}$ ,

$$|\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle = \cdots |n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle \otimes |n_{\mathbf{k}'\lambda'}\rangle \otimes |n_{\mathbf{k}''\lambda''}\rangle \cdots, \quad (3.63)$$

e

$$\hat{U} |\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( \hat{n}_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) |\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) |\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle. \quad (3.64)$$

A cada quantum de energia no modo  $(\mathbf{k}, \lambda)$  damos o nome de um fóton com vetor de onda  $\mathbf{k}$  e polarização  $\lambda$ . O estado de menor energia do sistema é chamado de estado de vácuo, e é definido por

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} |0\rangle = 0 \quad (3.65)$$

para todo  $\mathbf{k}$  e  $\lambda$ . Ou seja, o estado de vácuo é o estado no qual não há nenhum fóton nos vários modos. A energia correspondente  $U_0$  é dada por

$$\hat{U} |0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} |0\rangle \equiv U_0 |0\rangle. \quad (3.66)$$

Vemos assim que a soma diverge, como é esperado uma vez que cada modo é um oscilador, e portanto, possui energia mínima positiva. Em experimentos reais, entretanto, medimos sempre diferenças de energia, e logo, desde que o vácuo do sistema não seja alterado, o valor de  $U_0$  não deve aparecer nos resultados finais. Dessa forma, podemos trabalhar, sem perda de generalidade, com o operador  $:\hat{U}:$  definido pela diferença

$$:\hat{U}:= \hat{U} - U_0 = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \hat{n}_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (3.67)$$

Note que  $:\hat{U}:$  é obtido formalmente a partir da expressão (3.21) fazendo  $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \rightarrow \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ . Vamos definir a operação linear, chamada de ordenamento normal, pela sua ação sobre produtos de operadores de criação e aniquilação. O ordenamento normal de um produto qualquer de operadores de criação e aniquilação é um novo operador obtido formalmente a partir do primeiro passando-se todos os operadores de criação para a esquerda dos operadores de aniquilação. Por exemplo, o ordenamento normal de  $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$  é

$$:\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger := \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (3.68)$$

No eletromagnetismo, as quantidades fundamentais são os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , e portanto, todos os observáveis relevantes são escritos como funções dos campos, *e.g.*, a energia total. A experimentação mostra que o protocolo correto é tal que devemos partir das quantidades clássicas em termos dos campos e, ao quantizar, tomar o ordenamento normal dos observáveis uma única vez. Este procedimento é chamado de renormalização.

Para finalizar esta seção, é importante fazer uma observação sobre o limite  $V \rightarrow \infty$ . Note que, de acordo com a (3.13), no limite do volume de quantização tendendo a infinito, a variável contínua  $\alpha_{\lambda}(\mathbf{k})$  está relacionada com a variável discreta  $\alpha_{\mathbf{k}\lambda}$  por

$$\alpha_{\mathbf{k}\lambda} \rightarrow \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \alpha_{\lambda}(\mathbf{k}). \quad (3.69)$$

Isso pode ser concluído a partir da inspeção das equações (3.60), (3.61) e (3.62), onde vamos fazer a exigência de que no caso contínuo, a dependência funcional dos operadores seja a mesma [15]. Dessa forma, vemos que (3.59) tende corretamente a

$$[\hat{a}_\lambda(\mathbf{k}), \hat{a}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')] = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta_{\lambda,\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.70)$$

### 3.3 Estados do Campo de Radiação

Na seção anterior, vimos de que forma podemos estudar os aspectos quânticos do campo eletromagnético com base no oscilador harmônico. Como resultado, obtemos que os estados  $\{|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle\}$  diagonalizam a Hamiltoniana do sistema. Nesta seção, vamos estudar dois estados do campo de radiação que possuem grande relevância experimental, uma vez que o método de preparação é bem estabelecido; são eles os estados coerentes e *squeezed*.

#### 3.3.1 Estados Coerentes

Seja  $\mathbf{E}^{cl}$  uma configuração clássica de campo. Pela equação (3.10), e com as unidades corretas (3.57), pois,

$$\mathbf{E}^{cl}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V\varepsilon_0 n_0^2}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \left[ \alpha_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right], \quad (3.71)$$

onde usamos  $\alpha$  ao invés de  $a$  para enfatizar a diferença entre o valor clássico e o operador  $\hat{a}$ . A energia correspondente é dada pela (3.21)

$$U^{cl} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^* \alpha_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (3.72)$$

Dessa forma, podemos perguntar naturalmente se existe algum estado  $|\psi\rangle$  do campo de radiação tal que  $\langle \hat{\mathbf{E}} \rangle = \mathbf{E}^{cl}$  e  $\langle : \hat{U} : \rangle = U^{cl}$ . De fato, isto é equivalente a

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle = \alpha_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (3.73)$$

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle = \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^* \alpha_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (3.74)$$

para todo par  $(\mathbf{k}, \lambda)$ . Se definirmos o operador  $\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} = \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} - \alpha_{\mathbf{k}\lambda}$ , então estas equações são equivalentes a

$$\langle \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle = 0, \quad (3.75)$$

$$\langle \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle = 0. \quad (3.76)$$

Note que esta última equação nos diz que a norma do vetor  $\hat{c}|\psi\rangle$  é zero, de onde  $\hat{c}|\psi\rangle = 0$ . Portanto,

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} |\psi\rangle = \alpha_{\mathbf{k}\lambda} |\psi\rangle, \quad (3.77)$$

para todo par  $(\mathbf{k}, \lambda)$ , ou seja, o estado  $|\psi\rangle$  é autoestado de todos os operadores de destruição  $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ . Reciprocamente, se um estado satisfaz a (3.77), então existe uma configuração clássica de campo

associada aos autovalores  $\{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\}$ , conforme vimos nas seções anteriores. Dessa forma, os estados caracterizados pela equação (3.77) são estados que reproduzem configurações clássicas a nível de valores esperados. Por esta razão, tais estados são chamados de estados quasi-clássicos, ou estados coerentes. Note que para tais estados, os modos são completamente independentes. Dessa forma, podemos restringir nossa atenção ao caso em que apenas um modo do campo é excitado. Suponha que somente o oscilador  $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \equiv \hat{a}$  seja excitado. Pela equação (3.77),

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (3.78)$$

Daí, podemos expandir  $|\alpha\rangle$  em termos dos kets  $|n\rangle$  como

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (3.79)$$

Usando esta expansão em (3.78), temos que, pela (3.37),

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha |n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1} |n\rangle, \quad (3.80)$$

de onde segue a relação de recorrência

$$c_{n+1} = \frac{\alpha c_n}{\sqrt{n+1}} \equiv g_n c_n. \quad (3.81)$$

Vemos assim que esta é uma relação de recorrência de primeira ordem homogênea com coeficientes variáveis. Para resolvê-la, vamos dividir a equação por  $\prod_{k=0}^n g_k$  para obter

$$\frac{c_{n+1}}{\prod_{k=0}^n g_k} - \frac{c_n}{\prod_{k=0}^{n-1} g_k} = 0. \quad (3.82)$$

Se  $C_n = \frac{c_n}{\prod_{k=0}^{n-1} g_k}$ , com  $C_0 = \alpha c_0$ , então a equação acima é simplesmente  $C_{n+1} - C_n = 0$ . Como

$$C_n - C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} [C_{k+1} - C_k] = 0, \quad (3.83)$$

obtemos finalmente que

$$c_{n+1} = \alpha c_0 \prod_{k=0}^n g_k = \alpha c_0 \prod_{k=0}^n \frac{\alpha}{\sqrt{k+1}} = c_0 \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}. \quad (3.84)$$

Portanto, um estado coerente arbitrário é dado por

$$|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (3.85)$$

onde  $c_0$  é uma constante de normalização. Se exigirmos que  $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ , segue que  $c_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$ . Daí,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.86)$$

Vamos analisar o que há de coerente nestes estados. Para isso, é suficiente lembrar que no processo de quantização, identificamos a dinâmica temporal de cada modo do campo com a dinâmica de um oscilador harmônico com coordenada generalizada  $x$ , momento conjugado  $p$  e Hamiltoniana

(3.22). Primeiro, vamos calcular as incertezas dos operadores de quadratura associados no estado (3.86). Temos que

$$\langle \hat{X} \rangle = \frac{1}{2} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) | \alpha \rangle = \frac{\alpha^* + \alpha}{2} = \text{Re } \alpha, \quad (3.87)$$

$$\langle \hat{Y} \rangle = \frac{i}{2} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) | \alpha \rangle = i \frac{\alpha^* - \alpha}{2} = \text{Im } \alpha. \quad (3.88)$$

Além disso,

$$\langle \hat{X}^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) | \alpha \rangle = \frac{1}{4} [(\alpha^*)^2 + \alpha^2 + 2|\alpha|^2 + 1], \quad (3.89)$$

$$\langle \hat{Y}^2 \rangle = -\frac{1}{4} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a} - 2\hat{a}^\dagger \hat{a} - 1) | \alpha \rangle = -\frac{1}{4} [(\alpha^*)^2 + \alpha^2 - 2|\alpha|^2 - 1]. \quad (3.90)$$

Logo,

$$(\Delta \hat{X})^2 = \langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2 = \frac{1}{4} [(\alpha^*)^2 + \alpha^2 + 2|\alpha|^2 + 1] - \frac{1}{4} [(\alpha^*)^2 + \alpha^2 + 2|\alpha|^2] = \frac{1}{4}, \quad (3.91)$$

$$(\Delta \hat{Y})^2 = \langle \hat{Y}^2 \rangle - \langle \hat{Y} \rangle^2 = -\frac{1}{4} [(\alpha^*)^2 + \alpha^2 - 2|\alpha|^2 - 1] + \frac{1}{4} [(\alpha^*)^2 + \alpha^2 - 2|\alpha|^2] = \frac{1}{4}. \quad (3.92)$$

Ou seja, os estados coerentes são estados de incerteza mínima, da mesma forma que o estado de vácuo  $|0\rangle$ . Relembre que na representação de posição, o estado de vácuo é dado pela distribuição gaussiana  $\phi_0(x)$  dada pela (3.46). Suponha que inicialmente o sistema está preparado no estado deslocado  $\Psi(x) = \phi_0(x - x_0)$ . Como as autofunções  $\phi_n(x)$  formam uma base, podemos expandir  $\Psi(x)$  como

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \phi_n(x). \quad (3.93)$$

Daí, usando a relação de ortogonalidade (3.48),

$$\begin{aligned} d_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \Psi(x) dx = \left( \frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n \left( \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{\omega}{2\hbar} [(x-x_0)^2 + x^2]} dx \\ &= \left( \frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{\omega x_0^2}{4\hbar}}}{\sqrt{2^n n!}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n \left( \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{\omega}{\hbar} (x - \frac{x_0}{2})^2} dx \\ &= \frac{e^{-\frac{\omega x_0^2}{4\hbar}}}{\sqrt{\pi 2^n n!}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(y) e^{-(y - \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} \frac{x_0}{2})^2} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{\omega x_0^2}{4\hbar}}}{\sqrt{n!}} \left( \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} x_0 \right)^n, \end{aligned} \quad (3.94)$$

onde, no último passo, fizemos uso de [20]

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) e^{-(x-y)^2} dx = \sqrt{\pi} y^n 2^n. \quad (3.95)$$

Note que se fizermos  $\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} x_0$ , então a (3.93) se escreve como

$$\Psi(x) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \phi_n(x), \quad (3.96)$$

que possui exatamente a mesma forma de (3.86) na representação de posição. Isso sugere que os estados coerentes são estados gaussianos deslocados. Além disso, a evolução do estado ocorre de acordo com (3.49)

$$\Psi(x, t) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} \phi_n(x) = e^{-i \frac{\omega t}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\alpha e^{-i\omega t}]^n}{\sqrt{n!}} \phi_n(x), \quad (3.97)$$

com  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ . Com isso, é fácil mostrar que

$$|\Psi(x, t)|^2 = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega}{\hbar}[x-x_0 \cos \omega t]^2}. \quad (3.98)$$

Assim, a evolução do estado preserva a forma do pacote de ondas, daí a razão do nome coerente. Como corolário, considere um estado coerente arbitrário dado por (3.78). Se fizermos  $\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x_0 e^{i\theta}$ , então o pacote de ondas  $\Psi(x) = \langle x|\alpha\rangle$  é

$$\Psi(x) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}[|\alpha|^2 - \alpha^2]} e^{-\frac{\omega}{2\hbar}[x-x_0 e^{i\theta}]^2}, \quad (3.99)$$

*i.e.*, é um estado de vácuo deslocado. Para finalizar a análise dos estados coerentes, vamos mostrar que a interpretação de estado de vácuo deslocado ganha mais força quando definimos o chamado operador de deslocamento. Para isso, a combinação das equações (3.86) e (3.42) implica que

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \left[ e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} \right] |0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.100)$$

onde escrevemos  $|0\rangle = e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle$  para obter a correta definição do operador. Daí, usando a relação

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} \quad (3.101)$$

válida quando  $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ , segue que

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} |0\rangle \equiv \hat{D}(\alpha) |0\rangle, \quad (3.102)$$

com  $\hat{D}(\alpha)$  sendo o requerido operador de descolamento. Note que  $\hat{D}(\alpha)$  é unitário. Além disso, temos a relação

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \quad (3.103)$$

que será útil no desenvolvimento que se segue. Para provar (3.103), vamos usar a fórmula [17]

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (3.104)$$

cuja demonstração segue imediatamente da expansão das exponenciais em série de MacLaurin. Tomando  $\hat{B} = \hat{a}$  e  $-\hat{A} = \alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}$ , segue que  $[\hat{A}, \hat{B}] = \alpha$ , e portanto, (3.103).

### 3.3.2 Estados *Squeezed*

Na subseção anterior, revisamos algumas características físicas dos estados coerentes do campo de radiação. Vimos que tais estados realizam a menor cota para o princípio de incerteza escrito em relação aos operadores de quadratura, e que fisicamente são estados que diferem do estado de vácuo por terem sua posição de equilíbrio deslocada. Note que isto equivale ao estado de vácuo do sistema obtido pela adição de um termo linear em  $\hat{x}$  na Hamiltoniana (3.22)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2 \hat{x}^2}{2} - \omega^2 x_0 \hat{x} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} (\hat{x} - x_0)^2 - \frac{\omega^2 x_0^2}{2}, \quad (3.105)$$

onde a constante  $x_0$  faz o papel do deslocamento. Tal sistema corresponde simplesmente a uma partícula carregada em um potencial harmônico e na presença de um campo elétrico externo constante. Podemos ir além e supor um processo que equivalha a adicionar um termo proporcional a  $\hat{x}^2$  à Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2 \hat{x}^2}{2} + \frac{\Omega^2 \hat{x}^2}{2} - \omega^2 x_0 \hat{x} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{(\omega^2 + \Omega^2) \hat{x}^2}{2} - \omega^2 x_0 \hat{x}. \quad (3.106)$$

Como  $\Omega^2 > 0$ , observe que o termo adicionado comprime o estado de vácuo em relação ao estado original conforme representado na figura 3.1. Dizemos assim que o estado obtido é um estado

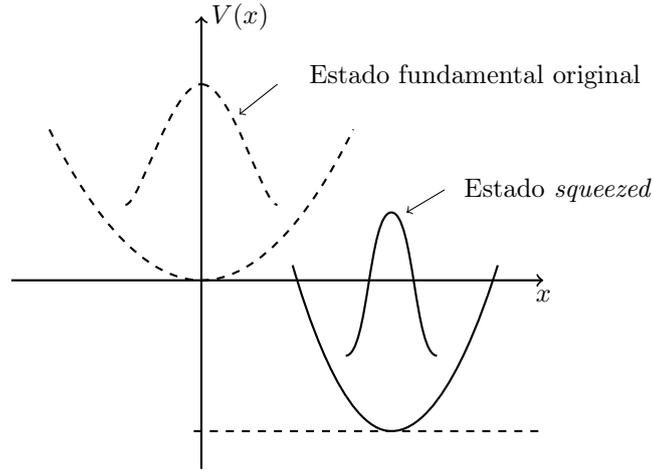


Figura 3.1: Representação do efeito de *squeezing*.

*squeezed*. A presença do quadrado  $\hat{x}^2$  deve ser cotejada com o termo linear para o caso de deslocamento. Isso sugere que este processo está relacionado a produtos  $\hat{a}^2$ ,  $(\hat{a}^\dagger)^2$ , etc. De fato, estados *squeezed* são gerados principalmente em amplificadores paramétricos degenerados [14, 17]. Estes são materiais com não linearidades de segunda ordem  $\chi^{(2)}$  em que um campo coerente de fundo intenso de frequência  $2\omega$  decai em dois sinais *squeezed* de frequência  $\omega$ . Por razões de simplicidade, vamos apenas utilizar o fato de que a Hamiltoniana de interação neste caso é da forma

$$\hat{H}_I = i\hbar[g(\hat{a}^\dagger)^2 - g^* \hat{a}^2], \quad (3.107)$$

onde  $g$  é uma constante complexa que depende de  $\chi^{(2)}$  e da amplitude do campo de fundo que gera o sinal. Uma discussão detalhada deste processo pode ser encontrada em [14, 17]. Logo, trabalhando no quadro de interação, se inicialmente o sistema se encontra no estado  $|\Psi\rangle$ , então em um instante de tempo qualquer, teremos

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}_I t}{\hbar}} |\Psi\rangle = e^{tg(\hat{a}^\dagger)^2 - tg^* \hat{a}^2} |\Psi\rangle. \quad (3.108)$$

Note que dessa forma obtemos o estado em um instante qualquer atuando sobre  $|\Psi\rangle$  com um operador cuja a forma é análoga a do operador deslocamento. Portanto, vamos definir o operador de *squeezing* por

$$\hat{S}(\zeta) = e^{\frac{1}{2}[\zeta^* \hat{a}^2 - \zeta(\hat{a}^\dagger)^2]}, \quad (3.109)$$

onde  $\zeta$  é uma constante complexa arbitrária, e verificar se ele satisfaz as propriedades requeridas. Para isso, precisaremos de um critério para classificar os estados *squeezed* do campo de radiação.

Note que para os estados número  $|n\rangle$  e coerentes  $|\alpha\rangle$ , as variâncias dos operadores de quadratura são iguais. Por isso, diremos que estes estados são simétricos. Além disso, o princípio de incerteza (3.53) impõe um valor mínimo para o produto das variâncias, neste caso,  $\frac{1}{16}$ . Diremos que um estado do campo é um estado *squeezed* se

$$\Delta\hat{X}^2 < \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad \Delta\hat{Y}^2 < \frac{1}{4}. \quad (3.110)$$

Se em adição a isto o produto das variâncias satisfaz a cota mínima do princípio de incerteza, diremos que o estado *squeezed* é ideal. De forma geral, note que não precisamos usar necessariamente os operadores de quadratura para descrever as quantidades físicas relevantes do problema. De fato, considere os operadores de quadratura rotacionados definidos por

$$\hat{X}_\theta + i\hat{Y}_\theta = [\hat{X} + i\hat{Y}]e^{-i\theta}, \quad (3.111)$$

onde usamos a notação complexa para a rotação. Dessa forma,

$$[\hat{X}_\theta, \hat{Y}_\theta] = [\hat{X} \cos \theta + \hat{Y} \sin \theta, -\hat{X} \sin \theta + \hat{Y} \cos \theta] = [\hat{X}, \hat{Y}]. \quad (3.112)$$

Assim, diremos que um estado do campo é *squeezed* se ele satisfaz as propriedades acima para algum par de operadores de quadratura rotacionados. Vamos agora estudar algumas propriedades e verificar o critério acima. Claramente,  $\hat{S}(\zeta)$  é unitário. Além disso, se  $\zeta = qe^{i\eta}$ , então segue da equação (3.104) que

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta) &= \hat{a} - \zeta\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2!}|\zeta|^2\hat{a} - \frac{1}{3!}|\zeta|^2\zeta\hat{a}^\dagger + \frac{1}{4!}|\zeta|^4\hat{a} - \frac{1}{5!}|\zeta|^4\zeta\hat{a}^\dagger - \dots \\ &= \hat{a} \left( 1 + \frac{1}{2!}q^2 + \frac{1}{4!}q^4 + \dots \right) - \hat{a}^\dagger e^{i\eta} \left( q + \frac{1}{3!}q^3 + \frac{1}{5!}q^5 + \dots \right) \\ &= \hat{a} \cosh q - \hat{a}^\dagger e^{i\eta} \sinh q. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Esta relação é suficiente para calcular todas as quantidades relevantes. Note que podemos aplicar o operador  $\hat{S}(\zeta)$  em qualquer estado. Entretanto, os valores esperados, como vemos pela equação (3.113) sempre vão ficar escritos em termos do estado, o que é necessário. Daí, vamos nos restringir a fazer o *squeezing* de dois estados, o vácuo e o estado coerente. Dessa forma, basta considerar o estado

$$|\zeta, \alpha\rangle = \hat{S}(\zeta)|\alpha\rangle = \hat{S}(\zeta)\hat{D}(\alpha)|0\rangle \quad (3.114)$$

uma vez que o estado de vácuo é o estado coerente com  $\alpha = 0$ . Logo, temos que, usando a equação (3.113)

$$\langle \hat{a} \rangle = \langle \alpha | \hat{S}^\dagger(\zeta) \hat{a} \hat{S}(\zeta) | \alpha \rangle = \alpha \cosh q - \alpha^* e^{i\eta} \sinh q. \quad (3.115)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}^2 \rangle &= \langle \alpha | (\hat{a} \cosh q - \hat{a}^\dagger e^{i\eta} \sinh q) (\hat{a} \cosh q - \hat{a}^\dagger e^{i\eta} \sinh q) | \alpha \rangle \\
&= \langle \alpha | [\hat{a}^2 \cosh^2 q - e^{i\eta} \sinh q \cosh q (\hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}) + (\hat{a}^\dagger)^2 e^{2i\eta} \sinh^2 q] | \alpha \rangle \\
&= \alpha^2 \cosh^2 q + (\alpha^*)^2 e^{2i\eta} \sinh^2 q - 2|\alpha|^2 e^{i\eta} \sinh q \cosh q - e^{i\eta} \sinh q \cosh q \\
&= \langle \hat{a} \rangle^2 - e^{i\eta} \sinh q \cosh q.
\end{aligned} \tag{3.116}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle &= \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \cosh q - \hat{a} e^{-i\eta} \sinh q) (\hat{a} \cosh q - \hat{a}^\dagger e^{i\eta} \sinh q) | \alpha \rangle \\
&= \langle \alpha | \{ \hat{a}^\dagger \hat{a} \cosh^2 q + \hat{a} \hat{a}^\dagger \sinh^2 q - \cosh q \sinh q [(\hat{a}^\dagger)^2 e^{i\eta} + \hat{a}^2 e^{-i\eta}] \} | \alpha \rangle \\
&= |\alpha|^2 (\cosh^2 q + \sinh^2 q) - \cosh q \sinh q [(\alpha^*)^2 e^{i\eta} + \alpha^2 e^{-i\eta}] + \sinh^2 q \\
&= \langle \hat{a}^\dagger \rangle \langle \hat{a} \rangle + \sinh^2 q.
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Com isso, as variâncias dos operadores de quadratura são

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{X}^2 &= \langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2 = \frac{1}{4} \langle \hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 \rangle - \frac{1}{4} (\langle \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a} \rangle)^2 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sinh q (\sinh q - \cos \eta \cosh q),
\end{aligned} \tag{3.118}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{Y}^2 &= \langle \hat{Y}^2 \rangle - \langle \hat{Y} \rangle^2 = -\frac{1}{4} \langle \hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 - 2\hat{a}^\dagger \hat{a} - 1 \rangle + \frac{1}{4} (\langle \hat{a}^\dagger \rangle - \langle \hat{a} \rangle)^2 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sinh q (\sinh q + \cos \eta \cosh q).
\end{aligned} \tag{3.119}$$

Portanto, o produto das variâncias é simplesmente

$$\Delta \hat{X}^2 \Delta \hat{Y}^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cosh^2 q \sinh^2 q \sin^2 \eta. \tag{3.120}$$

Note que para  $\eta = 0$ ,  $\Delta \hat{X}^2 = \frac{e^{-2q}}{4}$ ,  $\Delta \hat{Y}^2 = \frac{e^{2q}}{4}$  e  $\Delta \hat{X}^2 \Delta \hat{Y}^2 = \frac{1}{16}$ , ou seja, trata-se de um estado *squeezed* ideal. Mais ainda, nenhuma informação sobre o deslocamento  $\alpha$  entra nas flutuações, e portanto o resultado é o mesmo para  $\alpha \equiv 0$ , ou seja, o vácuo *squeezed*. De forma geral, vamos mostrar que os estados (3.114) são todos *squeezed* ideais. Para isso, considere os operadores de quadratura rotacionados por um ângulo  $\frac{\eta}{2}$ . Usando a definição (3.111) junto com a definição dos operadores de quadratura em termos dos operadores de criação e aniquilação, temos que

$$\hat{X}_{\frac{\eta}{2}} + i\hat{Y}_{\frac{\eta}{2}} = \hat{a} e^{-i\frac{\eta}{2}}, \tag{3.121}$$

o que implica em

$$\hat{X}_{\frac{\eta}{2}} = \frac{1}{2} (\hat{a} e^{-i\frac{\eta}{2}} + \hat{a}^\dagger e^{i\frac{\eta}{2}}), \tag{3.122}$$

$$\hat{Y}_{\frac{\eta}{2}} = \frac{i}{2} (\hat{a}^\dagger e^{i\frac{\eta}{2}} - \hat{a} e^{-i\frac{\eta}{2}}). \tag{3.123}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{X}_{\frac{\eta}{2}}^2 &= \langle \hat{X}_{\frac{\eta}{2}}^2 \rangle - \langle \hat{X}_{\frac{\eta}{2}} \rangle^2 = \frac{1}{4} \langle \hat{a}^2 e^{-i\eta} + (\hat{a}^\dagger)^2 e^{i\eta} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 \rangle - \frac{1}{4} (\langle \hat{a}^\dagger \rangle e^{i\frac{\eta}{2}} + \langle \hat{a} \rangle e^{-i\frac{\eta}{2}})^2 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sinh q (\sinh q - \cosh q) = \frac{e^{-2q}}{4},
\end{aligned} \tag{3.124}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{Y}_{\frac{\eta}{2}}^2 &= \langle \hat{Y}_{\frac{\eta}{2}}^2 \rangle - \langle \hat{Y}_{\frac{\eta}{2}} \rangle^2 = -\frac{1}{4} \langle \hat{a}^2 e^{-i\eta} + (\hat{a}^\dagger)^2 e^{i\eta} - 2\hat{a}^\dagger \hat{a} - 1 \rangle + \frac{1}{4} (\langle \hat{a}^\dagger \rangle e^{i\frac{\eta}{2}} - \langle \hat{a} \rangle e^{-i\frac{\eta}{2}})^2 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sinh q (\sinh q + \cosh q) = \frac{e^{2q}}{4}.
\end{aligned} \tag{3.125}$$

Ou seja, a família de estados (3.114) satisfaz os critérios adotados, sendo estados coerentes *squeezed* ideais do campo de radiação. Vamos concluir esta subseção com uma observação em relação à definição do estado coerente *squeezed*. Alguns autores, como por exemplo, [14], definem o estado (3.114) invertendo a ordem com que os operadores são aplicados, *i.e.*,

$$|\widetilde{\zeta, \alpha}\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle, \quad (3.126)$$

e claramente estes estados são diferentes, pois, em particular,

$$\langle \hat{a} \rangle = \langle 0|\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle = \langle 0|(\hat{a}\cosh q - \hat{a}^\dagger e^{i\eta}\sinh q + \alpha)|0\rangle = \alpha, \quad (3.127)$$

que em geral é diferente do valor esperado de  $\hat{a}$  no estado (3.114). Isto implica, também, que os operadores de deslocamento e *squeezing* não comutam. Entretanto, isto é apenas um problema de parametrização, e a família de estados obtida em qualquer uma das prescrições é idêntica. De fato, observe que todos os valores esperados calculados com o estado (3.114) são reproduzidos se repetirmos os cálculos com o estado  $|\widetilde{\zeta, \beta}\rangle$  para  $\beta \equiv \alpha \cosh q - \alpha^* e^{i\eta} \sinh q$ . Portanto, as duas definições são completamente equivalentes.

### 3.4 Funções de Correlação

Para finalizar a discussão sobre os aspectos quânticos do campo eletromagnético necessários para o modelo, esta seção é dedicada ao cálculo das funções de correlação pertinentes. Note que quando o campo de fundo  $\mathbf{E}$  é preparado em um estado quântico, o tempo de vôo do campo de teste,  $t_d$ , que se acopla com  $\mathbf{E}$  pela equação (2.46) também sofre flutuações que serão estudadas no próximo capítulo. Dessa forma, antecipando um pouco a discussão, no cálculo da variância do operador  $\hat{t}_d$  aparecerão as funções

$$\begin{aligned} &\langle \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) \rangle, \langle \hat{E}_i(\mathbf{r}, t)\hat{E}_j(\mathbf{r}', t') \rangle, \langle : \hat{E}_i(\mathbf{r}, t)\hat{E}_j(\mathbf{r}', t') : \rangle, \langle \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) : \hat{E}_j(\mathbf{r}', t')\hat{E}_k(\mathbf{r}', t') : \rangle, \\ &\langle : \hat{E}_i(\mathbf{r}, t)\hat{E}_j(\mathbf{r}, t) : \hat{E}_k(\mathbf{r}', t') \rangle, \langle : \hat{E}_i(\mathbf{r}, t)\hat{E}_j(\mathbf{r}, t) :: \hat{E}_k(\mathbf{r}', t')\hat{E}_l(\mathbf{r}', t') : \rangle, \end{aligned} \quad (3.128)$$

onde o estado é um estado *squeezed* coerente de apenas um modo (3.126). Em condições experimentais reais, é razoável esperar que sempre exista uma incerteza na determinação de qual modo do campo está excitado. Dessa forma, vamos supor que o vetor de onda associado ao problema seja concentrado em  $\bar{\mathbf{k}} = \bar{k}\hat{x}$ , e vamos denotar por  $\Delta\mathbf{k}$  a sua incerteza experimental. Além disso, podemos escolher a polarização  $\mathbf{e}_{\bar{\mathbf{k}}, \lambda} = \hat{z}$ . Logo, podemos tomar

$$|\psi\rangle = \prod_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{D}(\alpha_{\mathbf{k}\lambda})\hat{S}(\zeta_{\mathbf{k}\lambda})|0\rangle \quad (3.129)$$

onde todos os modos relevantes estão centrados em  $\bar{k}\hat{x}$  dentro de um volume  $\Delta^3 k = \bar{k}^2 \Delta k \Delta \Omega$ , onde  $\Delta k, \Delta \Omega$  são as incertezas no módulo de  $\mathbf{k}$  e no ângulo sólido, respectivamente. Por questões de notação, vamos escrever o campo elétrico na seguinte forma

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}, t) \right], \quad (3.130)$$

onde

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V\varepsilon_0 n_0^2}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}. \quad (3.131)$$

Além disso, podemos definir o operador  $\hat{b}_{\mathbf{k}\lambda} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$ , e usar uma aspa  $\hat{b}'_{\mathbf{k}\lambda}$  para indicar que a função  $f_{\mathbf{k}}$  na definição de  $\hat{b}_{\mathbf{k}\lambda}$  está avaliada nas coordenadas  $(\mathbf{r}', t')$ . A primeira correlação que vamos calcular é o valor esperado

$$\begin{aligned}
\langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}', t') \rangle_v &\equiv \langle 0 | E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}', t') | 0 \rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}, \lambda, \mathbf{p}, \sigma} e_{\mathbf{k}\lambda, i} e_{\mathbf{p}\sigma, j} \langle 0 | (\hat{b}_{\mathbf{k}\lambda} + \hat{b}'_{\mathbf{k}\lambda}) (\hat{b}'_{\mathbf{p}\sigma} + \hat{b}_{\mathbf{p}\sigma}) | 0 \rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}, \lambda, \mathbf{p}, \sigma} e_{\mathbf{k}\lambda, i} e_{\mathbf{p}\sigma, j} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}'_{\mathbf{p}\sigma} | 0 \rangle f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) f_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}', t') \\
&= \sum_{\mathbf{k}, \lambda, \mathbf{p}, \sigma} e_{\mathbf{k}\lambda, i} e_{\mathbf{p}\sigma, j} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} \delta_{\lambda, \sigma} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) f_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}', t') \\
&= \sum_{\mathbf{k}, \lambda} e_{\mathbf{k}\lambda, i} e_{\mathbf{k}\lambda, j} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}', t') \\
&= \sum_{\mathbf{k}} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}', t') \\
&= \frac{\hbar c}{2(2\pi)^3 \varepsilon_0 n_0^3} \int \frac{d^3 k}{k} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) e^{-i[\omega_{\mathbf{k}}(t-t') - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] } \\
&= -\frac{\hbar c}{2(2\pi)^3 \varepsilon_0 n_0^3} \left( \delta_{ij} \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \int \frac{d^3 k}{k} e^{-i[\omega_{\mathbf{k}}(t-t') - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }, \quad (3.132)
\end{aligned}$$

onde usamos a relação de comutação para os operadores de criação e aniquilação (3.59), a propriedade de soma dos vetores de polarização (3.16), e tomamos o limite  $V \rightarrow \infty$ . O subscrito  $v$  indica que o estado em questão é o estado de vácuo. A integral pode ser facilmente calculada usando coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^3 k}{k} e^{-i[\omega_{\mathbf{k}} \Delta t - \mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r}]} &= 2\pi \int dk d\theta k \sin \theta e^{-i[\omega_{\mathbf{k}} \Delta t - k |\Delta \mathbf{r}| \cos \theta]} \\
&= \frac{2\pi i}{|\Delta \mathbf{r}|} \int_0^\infty dk \left[ e^{-ik(c\Delta t/n_0 + |\Delta \mathbf{r}|)} - e^{-ik(c\Delta t/n_0 - |\Delta \mathbf{r}|)} \right] \\
&= \frac{2\pi i}{|\Delta \mathbf{r}|} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty dk e^{-\epsilon k} \left[ e^{-ik(c\Delta t/n_0 + |\Delta \mathbf{r}|)} - e^{-ik(c\Delta t/n_0 - |\Delta \mathbf{r}|)} \right] \\
&= \frac{2\pi i}{|\Delta \mathbf{r}|} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{\epsilon + i(c\Delta t/n_0 + |\Delta \mathbf{r}|)} - \frac{1}{\epsilon + i(c\Delta t/n_0 - |\Delta \mathbf{r}|)} \right] \\
&= -\frac{4\pi}{c^2 \Delta t^2 / n_0^2 - \Delta \mathbf{r}^2}, \quad (3.133)
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que a integração em  $\mathbf{k}$  é feita em todo o  $\mathbb{R}^3$  para escolher o eixo  $k_z$  coincidindo com  $\Delta \mathbf{r}$ , e identificamos  $\omega_{\mathbf{k}} = ck/n_0$ . Portanto,

$$\langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}', t') \rangle_v = \frac{\hbar c}{(2\pi)^2 \varepsilon_0 n_0^3} \left( \delta_{ij} \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{1}{v_0^2 \Delta t^2 - \Delta \mathbf{r}^2}, \quad (3.134)$$

onde  $v_0 = c/n_0$  é a velocidade de fase do campo de fundo. Considere agora o valor esperado do produto renormalizado  $\langle : E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}', t') : \rangle$  no estado (3.129). Para fazer todos os cálculos, é suficiente usar a relação (3.127)

$$\hat{S}^\dagger(\zeta_{\mathbf{k}\lambda}) \hat{D}^\dagger(\alpha_{\mathbf{k}\lambda}) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{D}(\alpha_{\mathbf{k}\lambda}) \hat{S}(\zeta_{\mathbf{k}\lambda}) = \hat{S}^\dagger(\zeta_{\mathbf{k}\lambda}) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{S}(\zeta_{\mathbf{k}\lambda}) + \alpha_{\mathbf{k}\lambda} \equiv \hat{s}_{\mathbf{k}\lambda} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (3.135)$$

onde definimos o operador  $\hat{s}_{\mathbf{k}\lambda} = \hat{S}^\dagger(\zeta_{\mathbf{k}\lambda}) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{S}(\zeta_{\mathbf{k}\lambda})$ , e o fato de que podemos escrever a identidade como

$$\hat{I} = \prod_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{D}(\alpha_{\mathbf{k}\lambda}) \hat{S}(\zeta_{\mathbf{k}\lambda}) \prod_{\mathbf{k}', \lambda'} \hat{S}^\dagger(\zeta_{\mathbf{k}'\lambda'}) \hat{D}^\dagger(\alpha_{\mathbf{k}'\lambda'}). \quad (3.136)$$

Usando estas duas equações, segue que

$$\begin{aligned}
& \prod_{\mathbf{k}'\lambda'} \hat{S}^\dagger(\alpha_{\mathbf{k}'\lambda'}) \hat{D}^\dagger(\zeta_{\mathbf{k}'\lambda'}) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \prod_{\mathbf{p}',\sigma'} \hat{D}(\alpha_{\mathbf{p}'\sigma'}) \hat{S}(\zeta_{\mathbf{p}'\sigma'}) = \\
& = \prod_{\mathbf{k}'\lambda'} \hat{S}^\dagger(\alpha_{\mathbf{k}'\lambda'}) \hat{D}^\dagger(\zeta_{\mathbf{k}'\lambda'}) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \prod_{\mathbf{k}''\lambda''} \hat{D}(\alpha_{\mathbf{k}''\lambda''}) \hat{S}(\zeta_{\mathbf{k}''\lambda''}) \times \\
& \quad \times \prod_{\mathbf{p}'',\sigma''} \hat{S}^\dagger(\zeta_{\mathbf{p}''\sigma''}) \hat{D}^\dagger(\alpha_{\mathbf{p}''\sigma''}) \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \prod_{\mathbf{p}',\sigma'} \hat{D}(\alpha_{\mathbf{p}'\sigma'}) \hat{S}(\zeta_{\mathbf{p}'\sigma'}) \\
& = \hat{S}^\dagger(\alpha_{\mathbf{k}\lambda}) \hat{D}^\dagger(\zeta_{\mathbf{k}\lambda}) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{D}(\alpha_{\mathbf{k}\lambda}) \hat{S}(\zeta_{\mathbf{k}\lambda}) \hat{S}^\dagger(\zeta_{\mathbf{p}\sigma}) \hat{D}^\dagger(\alpha_{\mathbf{p}\sigma}) \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \hat{D}(\alpha_{\mathbf{p}\sigma}) \hat{S}(\zeta_{\mathbf{p}\sigma}) \\
& = [\hat{s}_{\mathbf{k}\lambda} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}] [\hat{s}_{\mathbf{p}\sigma} + \alpha_{\mathbf{p}\sigma}] = \hat{s}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{s}_{\mathbf{p}\sigma} + \alpha_{\mathbf{p}\sigma} \hat{s}_{\mathbf{k}\lambda} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda} \hat{s}_{\mathbf{p}\sigma} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda} \alpha_{\mathbf{p}\sigma}. \tag{3.137}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, vemos que

$$\begin{aligned}
& \prod_{\mathbf{k}'\lambda'} \hat{S}^\dagger(\alpha_{\mathbf{k}'\lambda'}) \hat{D}^\dagger(\zeta_{\mathbf{k}'\lambda'}) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \prod_{\mathbf{p}',\sigma'} \hat{D}(\alpha_{\mathbf{p}'\sigma'}) \hat{S}(\zeta_{\mathbf{p}'\sigma'}) = \\
& = [\hat{s}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*] [\hat{s}_{\mathbf{p}\sigma} + \alpha_{\mathbf{p}\sigma}] = \hat{s}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{s}_{\mathbf{p}\sigma} + \alpha_{\mathbf{p}\sigma} \hat{s}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^* \hat{s}_{\mathbf{p}\sigma} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^* \alpha_{\mathbf{p}\sigma}. \tag{3.138}
\end{aligned}$$

Agora, usando a (3.113), obtemos

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \rangle = -e^{i\eta_{\mathbf{k}\lambda}} \sinh q_{\mathbf{k}\lambda} \cosh q_{\mathbf{k}\lambda} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{p}} \delta_{\lambda,\sigma} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda} \alpha_{\mathbf{p}\sigma}, \tag{3.139}$$

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \rangle = \sinh^2 q_{\mathbf{k}\lambda} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{p}} \delta_{\lambda,\sigma} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^* \alpha_{\mathbf{p}\sigma}. \tag{3.140}$$

Além disso, como fixamos a escolha da polarização dos estados excitados na direção  $\hat{z}$ , segue que somente  $\langle : E_z(\mathbf{r}, t) E_z(\mathbf{r}', t') : \rangle$  será diferente de zero. Logo, usando que  $\zeta_{\mathbf{k}\lambda} = q_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\eta_{\mathbf{k}\lambda}}$ ,  $\alpha_{\mathbf{k}\lambda} = r_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\theta_{\mathbf{k}\lambda}}$ ,

$$\begin{aligned}
\langle : E_z(\mathbf{r}, t) E_z(\mathbf{r}', t') : \rangle &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} \langle : (\hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger) (\hat{b}_{\mathbf{p}} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger) : \rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} \langle : \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger : \rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \rangle \\
&= 2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}', t') + \langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) f_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}', t') \\
&= 2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}} \sinh q_{\mathbf{k}} [\sinh q_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}, t) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}', t') - \cosh q_{\mathbf{k}} e^{i\eta_{\mathbf{k}}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}', t')] \\
&+ 2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \alpha_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}', t') + \alpha_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \alpha_{\mathbf{p}}^* f_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}', t') \\
&= \frac{\hbar c}{\varepsilon_0 n_0^3} \text{Re} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} k \sinh q_{\mathbf{k}} [\sinh q_{\mathbf{k}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} \Delta t - \mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r})} - \cosh q_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} \Delta t + t - \mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r} - \eta_{\mathbf{k}})}] \\
&+ \frac{2\hbar c}{\varepsilon_0 n_0^3} \text{Re} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{k} \alpha_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{p} r_{\mathbf{p}} \cos(\omega_{\mathbf{p}} t' - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}' - \theta_{\mathbf{p}}) \\
&= \frac{\hbar c}{(2\pi)^3 \varepsilon_0 n_0^3} \text{Re} \int d^3 k k \sinh q_{\mathbf{k}} [\sinh q_{\mathbf{k}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} \Delta t - \mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r})} - \cosh q_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} \Delta t + t - \mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r} - \eta_{\mathbf{k}})}] \\
&+ \frac{2\hbar c}{(2\pi)^3 \varepsilon_0 n_0^3} \text{Re} \int d^3 k \sqrt{k} \alpha(\mathbf{k}) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \int d^3 p \sqrt{p} r(\mathbf{p}) \cos[\omega_{\mathbf{p}} t' - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}' - \theta(\mathbf{p})].
\end{aligned}$$

Usando agora a hipótese de que os modos relevantes estão concentrados em  $\bar{\mathbf{k}} = \bar{k}\hat{x}$ , podemos usar o teorema do valor médio e obter

$$\begin{aligned} \langle : E_z(\mathbf{r}, t) E_z(\mathbf{r}', t') : \rangle &= \\ &= \frac{\hbar c \bar{k}^3 \Delta k \Delta \Omega}{(2\pi)^3 \varepsilon_0 n_0^3} \left\{ \sinh q [\sinh q \cos(\bar{\omega} \Delta t - \bar{k} \Delta x) - \cosh q \cos(\bar{\omega} \Delta_+ t - \bar{k} \Delta_+ x - \eta)] \right. \\ &\quad \left. + 2\bar{k}^2 \Delta k \Delta \Omega r^2 \cos(\bar{\omega} t - \bar{k} x - \theta) \cos(\bar{\omega} t' - \bar{k} x' - \theta) \right\}, \end{aligned} \quad (3.141)$$

onde  $\bar{\omega}$  é a frequência de pico dos modos excitados, *i.e.*,  $n_0 \bar{\omega} = \bar{k} c$ ,  $q$  é o respectivo parâmetro de *squeezing* com fase  $\eta$ , e  $r$  é o parâmetro de deslocamento com fase  $\theta$ . Com estas duas correlações, a saber, (3.134) e (3.141), sabemos também  $\langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}', t') \rangle$ , uma vez que

$$\langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \langle : E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}', t') : \rangle + \langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}', t') \rangle_v. \quad (3.142)$$

Considere agora  $\langle \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) : \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') \hat{E}_k(\mathbf{r}'', t'') : \rangle$  e  $\langle : \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') : \hat{E}_k(\mathbf{r}'', t'') \rangle$ . Por simplicidade na notação, vamos englobar o índice de polarização dentro do índice do vetor de onda. Temos que

$$\begin{aligned} \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) : \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') \hat{E}_k(\mathbf{r}'', t'') : &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{r}} e_{\mathbf{k}, i} e_{\mathbf{p}, j} e_{\mathbf{r}, k} (\hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger) : (\hat{b}_{\mathbf{p}}' + \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger) (\hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger) : \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{r}} e_{\mathbf{k}, i} e_{\mathbf{p}, j} e_{\mathbf{r}, k} (\hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger) (\hat{b}_{\mathbf{p}}' \hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}' + \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger) \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{r}} e_{\mathbf{k}, i} e_{\mathbf{p}, j} e_{\mathbf{r}, k} (\hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}}' \hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}' + \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger \\ &\quad + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}' \hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}' + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger). \end{aligned} \quad (3.143)$$

Usando a relação de comutação (3.59), segue que

$$\hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}}'' = \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}}' + \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{r}} f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{r}}^* \hat{b}_{\mathbf{p}}', \quad (3.144)$$

$$\hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}}'' = \hat{b}_{\mathbf{p}}' \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{p}}^* \hat{b}_{\mathbf{r}}'', \quad (3.145)$$

$$\hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}}'' = \hat{b}_{\mathbf{p}}' \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{r}} f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{r}}^* \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger + \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{p}}^* \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger. \quad (3.146)$$

Com isso, podemos reescrever

$$\begin{aligned} \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) : \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') \hat{E}_k(\mathbf{r}'', t'') : &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{r}} e_{\mathbf{k}, i} e_{\mathbf{p}, j} e_{\mathbf{r}, k} (\hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}}' \hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}}' + \hat{b}_{\mathbf{p}}' \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \\ &\quad + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}' \hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}' + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger) \\ &\quad + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{r}} e_{\mathbf{k}, i} e_{\mathbf{p}, j} e_{\mathbf{r}, k} [\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{r}} f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{r}}^* (\hat{b}_{\mathbf{p}}' + \hat{b}_{\mathbf{p}}'^\dagger) + \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{p}}^* (\hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \hat{b}_{\mathbf{r}}''^\dagger)]. \end{aligned} \quad (3.147)$$

Reconhecemos assim, com a ajuda da (3.134), que

$$\begin{aligned} \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) : \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') \hat{E}_k(\mathbf{r}'', t'') : &= \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') \hat{E}_k(\mathbf{r}'', t'') : + \langle \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) \hat{E}_k(\mathbf{r}'', t'') \rangle_v \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') \\ &\quad + \langle \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') \rangle_v \hat{E}_k(\mathbf{r}'', t''). \end{aligned} \quad (3.148)$$

A mesma análise para  $: \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') : \hat{E}_k(\mathbf{r}'', t'')$  resulta em

$$\begin{aligned} : \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') : \hat{E}_k(\mathbf{r}'', t'') &= \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') \hat{E}_k(\mathbf{r}'', t'') : + \langle \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) \hat{E}_k(\mathbf{r}'', t'') \rangle_v \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') \\ &\quad + \langle \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') \hat{E}_k(\mathbf{r}'', t'') \rangle_v \hat{E}_i(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (3.149)$$

Ou seja, precisamos apenas conhecer o valor esperado de  $\langle \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') \hat{E}_k(\mathbf{r}'', t'') \rangle$  : no estado  $|\psi\rangle$ . Conforme vimos, somente os modos concentrados em  $\bar{\mathbf{k}}$  são relevantes, e a polarização escolhida exige que esta correlação seja não nula apenas para  $i = j = k = z$ . Daí,

$$\langle \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \rangle = 2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{r}} \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \hat{b}_{\mathbf{r}}'' \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{r}}'' + \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{r}}'' \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle. \quad (3.150)$$

Vamos agora calcular os valores esperados de  $\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}}$  e  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}}$ , suficientes para completar o cálculo. Pelo mesmo argumento da equação (3.137), vemos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle &= \langle 0 | (\hat{s}_{\mathbf{k}} + \alpha_{\mathbf{k}}) (\hat{s}_{\mathbf{p}} + \alpha_{\mathbf{p}}) (\hat{s}_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{r}}) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{s}_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{p}} \hat{s}_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{p}} \hat{s}_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{p}} \hat{s}_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{r}} \hat{s}_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{p}} \\ &\quad + \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{p}} \hat{s}_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{r}} \hat{s}_{\mathbf{p}} + \alpha_{\mathbf{r}} \alpha_{\mathbf{p}} \hat{s}_{\mathbf{k}} + \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} | 0 \rangle \\ &= \alpha_{\mathbf{k}} \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{r}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (3.151)$$

onde o subscrito  $s$  indica que o valor esperado é tomado em relação ao estado em que somente o efeito de *squeezing* é considerado. A mesma análise nos leva a

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle = \alpha_{\mathbf{k}}^* \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{r}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}}. \quad (3.152)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \rangle &= \\ &= 2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{r}} (\alpha_{\mathbf{k}} \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{r}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}}) f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{p}}' f_{\mathbf{r}}'' \\ &\quad + (\alpha_{\mathbf{k}}^* \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{r}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}}) f_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{p}}' f_{\mathbf{r}}'' \\ &\quad + (\alpha_{\mathbf{k}} \langle \hat{a}_{\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{r}}^* \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}}^*) f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{p}}' f_{\mathbf{r}}'' \\ &\quad + (\alpha_{\mathbf{k}}^* \langle \hat{a}_{\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{r}}^* \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}}^*) f_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{p}}' f_{\mathbf{r}}'' \\ &= \langle \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \rangle 2\text{Re} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{r}} [(\langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}}) f_{\mathbf{p}}' f_{\mathbf{r}}'' + (\langle \hat{a}_{\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{r}}^* \alpha_{\mathbf{p}}) f_{\mathbf{p}}' f_{\mathbf{r}}''] \\ &\quad + \langle \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \rangle 2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{r}} [(\langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{r}}'' + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s f_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{r}}'')] \\ &\quad + \langle \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \rangle 2\text{Re} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} [(\langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle_s f_{\mathbf{p}}' f_{\mathbf{k}} + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s f_{\mathbf{p}}' f_{\mathbf{k}}^*)]. \end{aligned} \quad (3.153)$$

Assim, reconhecemos a partir da análise para o cálculo de (3.141) que

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \rangle &= \langle \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \rangle \\ &\quad + \langle \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \rangle \langle \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \rangle_s \\ &\quad + \langle \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \rangle \langle \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \rangle_s. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Vamos agora nos concentrar na última correlação  $\langle \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) \hat{E}_j(\mathbf{r}', t') \rangle :: \hat{E}_l(\mathbf{r}'', t'') \hat{E}_m(\mathbf{r}''', t''') \rangle$ . Procedendo exatamente da mesma forma usada no caso anterior, *i.e.*, usando as relações de comutação e o ordenamento normal, podemos reescrever o operador

$$\begin{aligned} : \hat{E}_i \hat{E}_j :: \hat{E}_l \hat{E}_m &:= : \hat{E}_i \hat{E}_j \hat{E}_l \hat{E}_m : + \langle \hat{E}_i \hat{E}_m \rangle_v : \hat{E}_j \hat{E}_l : + \langle \hat{E}_j \hat{E}_m \rangle_v : \hat{E}_i \hat{E}_l : \\ &\quad + \langle \hat{E}_i \hat{E}_l \rangle_v : \hat{E}_j \hat{E}_m : + \langle \hat{E}_j \hat{E}_l \rangle_v : \hat{E}_i \hat{E}_m : + \langle \hat{E}_j \hat{E}_m \rangle_v \langle \hat{E}_i \hat{E}_l \rangle_v \\ &\quad + \langle \hat{E}_l \hat{E}_j \rangle_v \langle \hat{E}_i \hat{E}_m \rangle_v, \end{aligned} \quad (3.155)$$

onde, por razões de simplicidade, omitimos a dependência funcional dos operadores, e a equação é para ser interpretada de tal forma que  $\hat{E}_i$  do lado esquerdo tem a mesma dependência funcional do  $\hat{E}_i$  aparecendo do lado direito. Desta forma, somente resta calcular o valor esperado de  $\langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle$ . Temos que

$$\begin{aligned} \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle = \\ = 2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r}} \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}'_{\mathbf{q}} \hat{b}''_{\mathbf{p}} \hat{b}'''_{\mathbf{r}} + \hat{b}'_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}''_{\mathbf{p}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}'_{\mathbf{r}} \hat{b}''_{\mathbf{q}} \hat{b}'''_{\mathbf{r}} + \hat{b}'''_{\mathbf{p}} \hat{b}'_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}''_{\mathbf{r}} + \\ + \hat{b}'_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}''_{\mathbf{p}} \hat{b}'''_{\mathbf{r}} + \hat{b}'_{\mathbf{r}} \hat{b}'_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}''_{\mathbf{p}} + \hat{b}'_{\mathbf{q}} \hat{b}'_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}''_{\mathbf{p}} + \hat{b}'_{\mathbf{q}} \hat{b}'_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}''_{\mathbf{p}} \rangle. \end{aligned} \quad (3.156)$$

Note que essencialmente só há três valores esperados a serem calculados, a saber,  $\langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle$ ,  $\langle \hat{a}_{\mathbf{r}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle$  e  $\langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle$ . Usando novamente a mesma ideia da (3.137), temos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle &= \langle 0 | (\hat{s}_{\mathbf{k}} + \alpha_{\mathbf{k}}) (\hat{s}_{\mathbf{q}} + \alpha_{\mathbf{q}}) (\hat{s}_{\mathbf{p}} + \alpha_{\mathbf{p}}) (\hat{s}_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{r}}) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{s}_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{q}} \hat{s}_{\mathbf{p}} \hat{s}_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{r}} \hat{s}_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{q}} \hat{s}_{\mathbf{p}} + \alpha_{\mathbf{p}} \hat{s}_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{q}} \hat{s}_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} \hat{s}_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{q}} \\ &\quad + \alpha_{\mathbf{q}} \hat{s}_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{p}} \hat{s}_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{r}} \hat{s}_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{p}} + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{p}} \hat{s}_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} \hat{s}_{\mathbf{k}} \\ &\quad + \alpha_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{q}} \hat{s}_{\mathbf{p}} \hat{s}_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{r}} \hat{s}_{\mathbf{q}} \hat{s}_{\mathbf{p}} + \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{p}} \hat{s}_{\mathbf{q}} \hat{s}_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} \hat{s}_{\mathbf{q}} \\ &\quad + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{p}} \hat{s}_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{r}} \hat{s}_{\mathbf{p}} + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} \alpha_{\mathbf{k}} | 0 \rangle \\ &= \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{r}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \\ &\quad + \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{r}} \langle \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{k}} \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} \alpha_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle &= \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{r}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \\ &\quad + \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{r}} \langle \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} \alpha_{\mathbf{k}}^*, \end{aligned} \quad (3.158)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle &= \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \rangle_s + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{r}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \\ &\quad + \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{r}} \langle \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{k}}^* \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} \alpha_{\mathbf{k}}^*. \end{aligned} \quad (3.159)$$

Logo, cada valor esperado se escreve como a soma de uma parte que só depende do *squeezing*, uma parte que só depende do estado coerente, e uma parte mista. Vamos calculá-las separadamente. Para a parte *squeezed*, então

$$\begin{aligned} \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_s = \\ = 2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r}} \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{r}} + \hat{b}'_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{r}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}'_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{r}} + \\ + \hat{b}'_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{r}} + \hat{b}'_{\mathbf{r}} \hat{b}'_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + \hat{b}'_{\mathbf{q}} \hat{b}'_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + \hat{b}'_{\mathbf{q}} \hat{b}'_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s, \end{aligned} \quad (3.160)$$

onde fizemos mais um abuso de notação ao omitir as aspas e colocar as informações sobre a dependência funcional nos índices da soma de maneira óbvia. Daí, é suficiente conhecer  $\langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s$ ,

$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s$  e  $\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s$ . Usando a equação (3.113),

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s &= \langle 0 | (\hat{a}_{\mathbf{k}} \cosh q_{\mathbf{k}} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\eta_{\mathbf{k}}} \sinh q_{\mathbf{k}}) (\hat{a}_{\mathbf{q}} \cosh q_{\mathbf{q}} - \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger e^{i\eta_{\mathbf{q}}} \sinh q_{\mathbf{q}}) \\
&\quad \times (\hat{a}_{\mathbf{p}} \cosh q_{\mathbf{p}} - \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\eta_{\mathbf{p}}} \sinh q_{\mathbf{p}}) (\hat{a}_{\mathbf{r}} \cosh q_{\mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{r}}^\dagger e^{i\eta_{\mathbf{r}}} \sinh q_{\mathbf{r}}) | 0 \rangle \\
&= -e^{i\eta_{\mathbf{r}}} \sinh q_{\mathbf{r}} \cosh q_{\mathbf{p}} \cosh q_{\mathbf{k}} \cosh q_{\mathbf{q}} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}}^\dagger | 0 \rangle \\
&\quad + e^{i(\eta_{\mathbf{p}} + \eta_{\mathbf{r}})} \sinh q_{\mathbf{p}} \sinh q_{\mathbf{r}} \cosh q_{\mathbf{k}} \cosh q_{\mathbf{q}} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}}^\dagger | 0 \rangle \\
&\quad + e^{i(\eta_{\mathbf{q}} + \eta_{\mathbf{r}})} \sinh q_{\mathbf{q}} \cosh q_{\mathbf{k}} \sinh q_{\mathbf{r}} \cosh q_{\mathbf{p}} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}}^\dagger | 0 \rangle \\
&\quad - e^{i(\eta_{\mathbf{p}} + \eta_{\mathbf{r}} + \eta_{\mathbf{q}})} \sinh q_{\mathbf{q}} \cosh q_{\mathbf{k}} \sinh q_{\mathbf{p}} \sinh q_{\mathbf{r}} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}}^\dagger | 0 \rangle. \tag{3.161}
\end{aligned}$$

Daí, como  $\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}}^\dagger | 0 \rangle = 0$ ,  $\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}}^\dagger | 0 \rangle = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \delta_{\mathbf{p},\mathbf{r}}$ , e  $\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}}^\dagger | 0 \rangle = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{p}} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{r}} + \delta_{\mathbf{k},\mathbf{r}} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ , segue que

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s \langle \hat{a}_{\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle_s + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle_s \langle \hat{a}_{\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle_s. \tag{3.162}$$

Os outros valores esperados são obtidos exatamente da mesma forma, e são dados por

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s \langle \hat{a}_{\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle_s + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle_s \langle \hat{a}_{\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle_s, \tag{3.163}$$

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s \langle \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \rangle_s \langle \hat{a}_{\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \langle \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s. \tag{3.164}$$

Usando estes resultados na (3.160), temos que

$$\begin{aligned}
\langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_s &= \\
&= 2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r}} \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s \\
&\quad + \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s \\
&\quad + \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s \\
&\quad + \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s \\
&\quad + \langle \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s \\
&\quad + \langle \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s \\
&\quad + \langle \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s. \tag{3.165}
\end{aligned}$$

Uma contabilidade cuidadosa revela que podemos separar a soma na forma

$$\begin{aligned}
\langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_s &= \\
&= 2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r}} (\langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s) (\langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s) \\
&\quad + (\langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s) (\langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s) \\
&\quad + (\langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s) (\langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s) \\
&= \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') : \rangle_s \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_s \\
&\quad + \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') : \rangle_s \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_s \\
&\quad + \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_s \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') : \rangle_s. \tag{3.166}
\end{aligned}$$

Portanto, vemos que é possível escrever o resultado em termos das correlações já calculadas. Para o termo somente com contribuição do estado coerente, o cálculo é direto, e a substituição dos

valores esperados na (3.156) resulta em

$$\begin{aligned}
\langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_c &= \\
&= 2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r}} \alpha_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}} (\alpha_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}}^* f_{\mathbf{r}}^* + \alpha_{\mathbf{p}}^* f_{\mathbf{p}}^* \alpha_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{p}}^* f_{\mathbf{p}}^* \alpha_{\mathbf{r}}^* f_{\mathbf{r}}^*) \\
&\quad + \alpha_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{q}}^* f_{\mathbf{q}}^* (\alpha_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}}^* f_{\mathbf{r}}^* + \alpha_{\mathbf{p}}^* f_{\mathbf{p}}^* \alpha_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{p}}^* f_{\mathbf{p}}^* \alpha_{\mathbf{r}}^* f_{\mathbf{r}}^*) \\
&= \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') : \rangle_c \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_c, \tag{3.167}
\end{aligned}$$

onde o subscrito  $c$  indica que o valor esperado é para ser tomado somente considerando a parte coerente do estado. Finalmente, vamos considerar a parte mista. Note que se substituirmos as equações (3.157), (3.158) e (3.159) na equação (3.156), a série resultante possui 64 termos, dos quais, 8 são referentes a parte *squeezed* e 8 a parte coerente. Portanto, os demais 48 termos são referentes a contribuição mista. Dessa forma, precisamos de uma maneira alternativa para fazer o cálculo. Vamos relembrar que a parte mista das equações (3.157), (3.158) e (3.159) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_m &= \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{r}} + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{p}} \\
&\quad + \langle \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{r}} + \langle \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{p}} + \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{k}}, \tag{3.168}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_m &= \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{r}} + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{p}} \\
&\quad + \langle \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{r}} + \langle \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{p}} + \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{k}}^*, \tag{3.169}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_m &= \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \rangle_s \alpha_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{q}}^* \alpha_{\mathbf{r}} + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{q}}^* \alpha_{\mathbf{p}} \\
&\quad + \langle \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{r}} + \langle \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{p}} + \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{r}} \rangle_s \alpha_{\mathbf{q}}^* \alpha_{\mathbf{k}}^*. \tag{3.170}
\end{aligned}$$

Daí, note que temos a seguinte regra para escrever estes valores esperados: somamos os valores esperados de todas as combinações duas a duas dos operadores, respeitando o ordenamento normal, no estado *squeezed*, e cada valor esperado deve estar multiplicado pelo produto dos alfas cujos índices não aparecem no valor esperado, respeitando a operação de conjugado complexo se o operador correspondente for adjunto. Com esta regra, vemos que da primeira e segunda linha da (3.156), podemos, por exemplo, agrupar o conjunto de termos

$$(\langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s) (\alpha_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{p}}^* f_{\mathbf{p}}^* \alpha_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} + c.c.), \tag{3.171}$$

que quando somado é o produto de duas correlações já calculadas. Logo, usando a regra, é possível ver que a contribuição mista é dada por

$$\begin{aligned}
\langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_m &= \\
&= 2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r}} ((\hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{q}})_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s) (\alpha_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{p}}^* f_{\mathbf{p}}^* \alpha_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} + c.c.) \\
&\quad + ((\hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{p}})_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s) (\alpha_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{q}}^* f_{\mathbf{q}}^* \alpha_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} + c.c.) \\
&\quad + ((\hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{r}})_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{r}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle_s) (\alpha_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}} + \alpha_{\mathbf{p}}^* f_{\mathbf{p}}^* \alpha_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}} + c.c.) \\
&\quad + ((\hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{q}})_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s) (\alpha_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} + c.c.) \\
&\quad + ((\hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{r}})_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{r}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle_s) (\alpha_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} + \alpha_{\mathbf{p}}^* f_{\mathbf{p}}^* \alpha_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} + c.c.) \\
&\quad + ((\hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{r}})_s + \langle \hat{b}_{\mathbf{r}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle_s) (\alpha_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} + \alpha_{\mathbf{q}}^* f_{\mathbf{q}}^* \alpha_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} + c.c.). \tag{3.172}
\end{aligned}$$

Note que há exatamente 48 termos no somatório. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_m = \\
= \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') : \rangle_s \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_c \\
+ \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') : \rangle_s \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_c \\
+ \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_s \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') : \rangle_c \\
+ \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') : \rangle_s \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_c \\
+ \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_s \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') : \rangle_c \\
+ \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}'', t'') \hat{E}_z(\mathbf{r}''', t''') : \rangle_s \langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') : \rangle_c \quad (3.173)
\end{aligned}$$

onde  $\langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') : \rangle_s$  e  $\langle : \hat{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{E}_z(\mathbf{r}', t') : \rangle_c$  são dados pela (3.141) fazendo o parâmetro de deslocamento igual a zero, e o parâmetro de *squeezing* igual a zero, respectivamente.

# Flutuações do Cone de Luz

## 4.1 Flutuações do Tempo de Vôo

Conforme vimos no capítulo 2, a equação (2.46) é a expressão matemática para o tempo de vôo de um campo de teste em um material de dimensão característica  $d$ , na presença de um campo de fundo  $\mathbf{E}$  que varia lentamente em comparação com o campo de prova, *id est*, no limite da ótica geométrica. Vimos assim que este é um modelo análogo para propagação luminosa em um espaço-tempo em que o papel do campo gravitacional é exercido, de certa forma, pelo campo elétrico de fundo. Suponha agora que o campo de fundo está preparado em um dado estado quântico, e portanto, sofre flutuações. Daí, a expressão (2.46) mostra que o tempo de vôo do campo de teste também sofrerá flutuações. Logo, como os pulsos de teste viajam uma distância fixa  $d$ , tal efeito sobre o tempo de vôo mede também flutuações no cone de luz efetivo dado por  $ct = nx$ . Isto é, se repetirmos o experimento várias vezes, alguns pulsos serão detectados com velocidade “superluminal”, e outros com velocidade subluminal na geometria efetiva. A região destacada na figura 4.1 ilustra a região de flutuação do cone de luz. Note que a figura salienta o fato de que

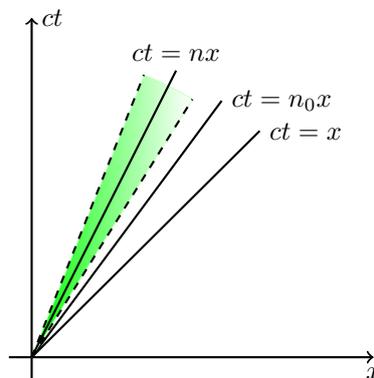


Figura 4.1: Flutuação do cone de luz efetivo.

no sistema há pelo menos três cones de luz, a saber, o cone real  $ct = x$ , o cone efetivo para o

campo de fundo  $ct = n_0x$ , e o cone efetivo para o campo de teste  $ct = nx$ . Dessa forma, estamos interessados em estudar a variância do operador tempo de vôo

$$\hat{t}_d = \frac{n_0}{c} \int_0^d \left[ 1 + \gamma_j \hat{E}_j(x, t) + \mu_{kl} : \hat{E}_k(x, t) \hat{E}_l(x, t) \right] dx, \quad (4.1)$$

onde usamos a prescrição do ordenamento normal. Daí,

$$\begin{aligned} \hat{t}_d^2 &= \frac{n_0^2}{c^2} \int_0^d \int_0^d dx dx' \left( 1 + \gamma_j \hat{E}_j + \mu_{kl} : \hat{E}_k \hat{E}_l : \right) \left( 1 + \gamma_m \hat{E}'_m + \mu_{np} : \hat{E}'_n \hat{E}'_p : \right) \\ &= \frac{n_0^2}{c^2} \int_0^d \int_0^d dx dx' \left[ 1 + \gamma_j \hat{E}_j + \gamma_m \hat{E}'_m + \gamma_j \gamma_m \hat{E}_j \hat{E}'_m + \mu_{kl} \left( : \hat{E}_k \hat{E}_l : + : \hat{E}'_k \hat{E}'_l : \right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_j \mu_{kl} \left( : \hat{E}_k \hat{E}_l : \hat{E}'_j + \hat{E}_j : \hat{E}'_k \hat{E}'_l : \right) + \mu_{kl} \mu_{np} : \hat{E}_k \hat{E}_l :: \hat{E}'_n \hat{E}'_p : \right], \quad (4.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{t}_d \rangle^2 &= \frac{n_0^2}{c^2} \int_0^d \int_0^d dx dx' \left( 1 + \gamma_j \langle \hat{E}_j \rangle + \mu_{kl} \langle : \hat{E}_k \hat{E}_l : \rangle \right) \left( 1 + \gamma_m \langle \hat{E}'_m \rangle + \mu_{np} \langle : \hat{E}'_n \hat{E}'_p : \rangle \right) \\ &= \frac{n_0^2}{c^2} \int_0^d \int_0^d dx dx' \left[ 1 + \gamma_j \langle \hat{E}_j \rangle + \gamma_m \langle \hat{E}'_m \rangle + \gamma_j \gamma_m \langle \hat{E}_j \rangle \langle \hat{E}'_m \rangle + \mu_{kl} \left( \langle : \hat{E}_k \hat{E}_l : \rangle + \langle : \hat{E}'_k \hat{E}'_l : \rangle \right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_j \mu_{kl} \left( \langle : \hat{E}_k \hat{E}_l : \rangle \langle \hat{E}'_j \rangle + \langle \hat{E}_j \rangle \langle : \hat{E}'_k \hat{E}'_l : \rangle \right) + \mu_{kl} \mu_{np} \langle : \hat{E}_k \hat{E}_l : \rangle \langle : \hat{E}'_n \hat{E}'_p : \rangle \right]. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Portanto, a variância do operador  $\hat{t}_d$  é

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{t}_d)^2 &= \langle \hat{t}_d^2 \rangle - \langle \hat{t}_d \rangle^2 \\ &= \frac{n_0^2}{c^2} \int_0^d \int_0^d dx dx' \left[ \gamma_i \gamma_j \left( \langle \hat{E}_i \hat{E}'_j \rangle - \langle \hat{E}_i \rangle \langle \hat{E}'_j \rangle \right) + \gamma_i \mu_{jk} \left( \langle : \hat{E}'_j \hat{E}'_k : \hat{E}_i \rangle + \langle \hat{E}_i : \hat{E}'_j \hat{E}'_k : \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \langle \hat{E}_i \rangle \langle : \hat{E}'_j \hat{E}'_k : \rangle \right) + \mu_{ij} \mu_{kl} \left( \langle : \hat{E}_i \hat{E}_j :: \hat{E}'_k \hat{E}'_l : \rangle - \langle \hat{E}_i \hat{E}_j \rangle \langle : \hat{E}'_k \hat{E}'_l : \rangle \right) \right]. \quad (4.4) \end{aligned}$$

Observe a analogia entre a equação (4.4) e a equação (1.5) apresentada no prólogo. Conforme adiantado na seção anterior, vamos preparar o campo de fundo em um estado coerente *squeezed* dado por (3.129). Precisamos, portanto, colecionar as várias correlações calculadas para obter uma forma definitiva para a variância do tempo de vôo. Daí, podemos identificar três contribuições de acordo com a presença da correlação (3.134) por  $(\Delta \hat{t}_d)_r^2$ ,  $(\Delta \hat{t}_d)_m^2$  e  $(\Delta \hat{t}_d)_v^2$ , onde

$$(\Delta \hat{t}_d)_r^2 = \frac{n_0^2}{c^2} \int_0^d \int_0^d dx dx' \langle : \hat{E}_z \hat{E}'_z : \rangle_s \left[ \gamma_z^2 + 4\gamma_z \mu_{zz} \langle \hat{E}'_z \rangle + 2\mu_{zz}^2 \left( \langle : \hat{E}_z \hat{E}'_z : \rangle_s + 2 \langle \hat{E}_z \rangle \langle \hat{E}'_z \rangle \right) \right], \quad (4.5)$$

$$(\Delta \hat{t}_d)_v^2 = \frac{n_0^2}{c^2} \int_0^d \int_0^d dx dx' \langle \hat{E}_i \hat{E}'_k \rangle_v \left( \gamma_i \gamma_k + 2\mu_{ij} \mu_{kl} \langle \hat{E}_j \hat{E}'_l \rangle_v \right), \quad (4.6)$$

$$(\Delta \hat{t}_d)_m^2 = 4 \frac{n_0^2}{c^2} \int_0^d \int_0^d dx dx' \langle \hat{E}_j \hat{E}'_i \rangle_v \left( \gamma_i \mu_{jz} \langle \hat{E}_z \rangle + \mu_{jz} \mu_{zi} \langle : \hat{E}_z \hat{E}'_z : \rangle \right), \quad (4.7)$$

e  $(\Delta \hat{t}_d)^2 = (\Delta \hat{t}_d)_r^2 + (\Delta \hat{t}_d)_m^2 + (\Delta \hat{t}_d)_v^2$ . Note que o primeiro termo aparece quando tomamos o ordenamento normal do operador  $\hat{t}_d^2$ . Por outro lado, o último termo aparece mesmo se fizermos o parâmetro de *squeezing* e de deslocamento iguais a zero, ou seja, quando fazemos os cálculos usando o estado de vácuo do campo de fundo. O segundo termo é o acoplamento entre os efeitos de *squeezing*, deslocamento e o vácuo. Portanto, só nos resta calcular as integrais. Neste ponto

temos que elaborar mais o modelo. De fato, note que tanto  $(\Delta\hat{t}_d)_v$  como  $(\Delta\hat{t}_d)_m$  são divergentes, pois, usando a correlação (3.134), para  $y = y'$ ,  $z = z'$ , temos que

$$\langle E_i(x, t)E_j(x', t') \rangle_v = 0, \quad i \neq j, \quad (4.8)$$

$$\langle E_x(x, t)E_x(x', t') \rangle_v = \frac{\hbar c}{\pi^2 \epsilon_0 n_0^3} \frac{1}{(v_0^2 \Delta t^2 - \Delta x^2)^2}, \quad (4.9)$$

$$\langle E_y(x, t)E_y(x', t') \rangle_v = \langle E_z(x, t)E_z(x', t') \rangle_v = \frac{\hbar c}{\pi^2 \epsilon_0 n_0^3} \frac{\Delta x^2 + v_0^2 \Delta t^2}{(v_0^2 \Delta t^2 - \Delta x^2)^3}. \quad (4.10)$$

Em particular, usando que a dependência de  $t$  nos integrandos é dada por  $v_p t = x$ , onde  $v_p$  é a velocidade do pulso (2.43), então dentro dos integrandos aparecerão funções do tipo

$$\langle E_x(x, x/v_p)E_x(x', x'/v_p) \rangle_v = \frac{\hbar c}{\pi^2 \epsilon_0 n_0^3} \frac{v_p^4}{(v_0^2 - v_p^2)^2} \frac{1}{(x - x')^4}, \quad (4.11)$$

que claramente diverge ao ser integrada no quadrado de lado  $d$ . Podemos argumentar que tal fenômeno aparece devido à consistência da teoria, mesmo ela tendo sido renormalizada. De fato, como classicamente  $v_p < c$ , considere o modelo análogo de uma partícula de massa unitária com velocidade exatamente  $v_p$  que pode se movimentar livremente na direção  $x$ . Dessa forma,  $v_p$  é essencialmente o momento da partícula. Portanto, em um cenário de mecânica quântica,  $v_p$  se torna um operador, que é incompatível com o operador de posição. Daí, se sabemos com certeza a posição da partícula em um ponto, então o princípio de incerteza exige uma flutuação infinita para a velocidade. Além disso, o mesmo deve acontecer para o inverso da velocidade, definido como série de potências. Note que isto é completamente análogo ao que acontece com o operador tempo de vôo, pois quando realizamos a integral, sempre avaliamos o inverso da velocidade em uma posição específica.

Por outro lado, em uma situação experimental real, a intuição nos diz que os tempos de vôo dos pulsos enviados estarão bastante concentrados em torno do tempo médio, que é dado aproximadamente por  $v_p t_d = d$ . Portanto, existe um problema de idealização no modelo que deu origem a estas flutuações divergentes, e o argumento heurístico acima sugere que este problema está relacionado com a integração no operador  $\hat{t}_d$ . Veremos agora como o modelo oferece uma solução elegante para o problema ao analisar a expansão do vetor de polarização feito na (2.26). Como supomos o material homogêneo, os tensores de suscetibilidade são todos constantes. Note que isto é aproximadamente verdade no *bulk* da amostra, longe das fronteiras. Entretanto, se analisamos os tensores na medida em que nos aproximamos do bordo, claramente eles não serão mais constantes, pois os efeitos de borda se tornam cada vez mais importantes, e as susceptibilidades devem ir para zero fora do material. Isto deve ser cotejado com a estrutura integral do operador  $\hat{t}_d$ . Na sua dedução, supomos dois detectores, nas posições  $x = 0$  e  $x = d$ , respectivamente, e as susceptibilidades são supostas constantes entre os detectores. Dessa forma, podemos implementar a mudança  $dx \rightarrow F(x)dx$ , onde  $F(x)$  é uma função teste, ou função amostra, que modela as propriedades requeridas. Com isso, o operador tempo de vôo é formalmente

$$\hat{t}_d = \frac{n_0}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 + \gamma_j \hat{E}_j(x, t) + \mu_{kl} : \hat{E}_k(x, t) \hat{E}_l(x, t) : \right] F(x) dx, \quad (4.12)$$

e as contribuições separadas são dadas por

$$(\Delta \hat{t}_d)_r^2 = \frac{n_0^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' F(x) F(x') \langle : \hat{E}_z \hat{E}'_z : \rangle_s \left[ \gamma_z^2 + 4\gamma_z \mu_{zz} \langle \hat{E}'_z \rangle + 2\mu_{zz}^2 \left( \langle : \hat{E}_z \hat{E}'_z : \rangle_s + 2 \langle \hat{E}_z \rangle \langle \hat{E}'_z \rangle \right) \right], \quad (4.13)$$

$$(\Delta \hat{t}_d)_v^2 = \frac{n_0^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' F(x) F(x') \langle \hat{E}_i \hat{E}'_k \rangle_v \left( \gamma_i \gamma_k + 2\mu_{ij} \mu_{kl} \langle \hat{E}_j \hat{E}'_l \rangle_v \right), \quad (4.14)$$

$$(\Delta \hat{t}_d)_m^2 = 4 \frac{n_0^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' F(x) F(x') \langle \hat{E}_j \hat{E}'_i \rangle_v \left( \gamma_i \mu_{jz} \langle \hat{E}_z \rangle + \mu_{jz} \mu_{zi} \langle : \hat{E}_z \hat{E}'_z : \rangle \right). \quad (4.15)$$

## 4.2 Funções Teste

Nesta seção, vamos propor e estudar uma função teste para o modelo. Conforme vimos, no presente caso, a geometria do sistema fixa as propriedades de uma tal função. Em primeiro lugar, procuramos uma versão suave da função

$$F(x) = \Theta(x)\Theta(d-x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } 0 < x < d, \\ 0 & \text{se } x > d, \end{cases} \quad (4.16)$$

que representa a função teste original do modelo, e  $\Theta(x)$  é a função degrau unitário. Como possibilidade de função teste, seguindo os resultados de [12], poderíamos usar a distribuição Lorentziana

$$\frac{F_d(x)}{d} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{x^2 + d^2}. \quad (4.17)$$

A escolha dos parâmetros garante a normalização correta

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_d(x) dx = d. \quad (4.18)$$

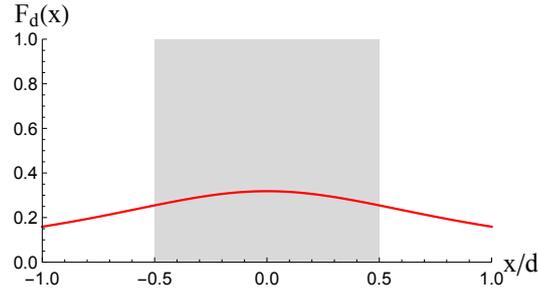
Vamos analisar se a função  $F_d(x)$  satisfaz as propriedades requeridas. Note que o valor máximo de  $F_d(x)$  ocorre quando  $x = 0$  e é dado por

$$F_d(0) = \frac{1}{\pi}. \quad (4.19)$$

Usando que  $\frac{d}{\pi} \arctan \frac{x}{d}$  é uma primitiva de  $F_d$ , temos que

$$\frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} F_d(x) dx = 2 \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1}{2} \approx 0,30. \quad (4.20)$$

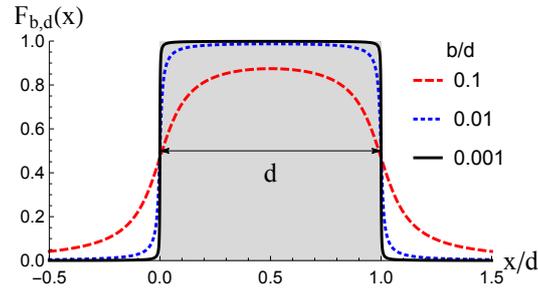
Ou seja, somente 30% da área total do gráfico está compreendida na região onde está o cristal. Dessa forma, como estamos supondo um cristal de distância característica  $d$ , esperamos que uma função teste fiel seja aproximadamente zero fora para  $|x| > \frac{d}{2}$ , e valha aproximadamente 1 quando  $x = 0$ . Isso mostra que a Lorentziana não possui qualquer compromisso com a real geometria do sistema, conforme mostrado na figura 4.2. Entretanto, a função  $F_d$  possui a grande vantagem de ser analítica e de fácil integração. Vamos ver então como fazer uso da Lorentziana para construir uma função teste apropriada. Primeiro, note que o tamanho do cristal não pode interferir nos

Figura 4.2: Esquema da função teste  $F_d$ .

efeitos do bordo. Isso sugere que o tamanho do cristal não é um parâmetro bom para descrever a função teste. Devemos procurar portanto por uma função com dois parâmetros, um relativo ao tamanho do cristal, e o outro que mede o quão rápido o efeito é ligado. Considere a função

$$F_{b,d}(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \arctan \frac{x}{b} + \arctan \frac{d-x}{b} \right]. \quad (4.21)$$

Note que  $F_{b,d}$  é a integral de menos infinito até  $x$  da função definida pela diferença de duas Lorentzianas, uma centrada na origem com parâmetro  $b$  e a outra deslocada de uma distância  $d$  da origem também com parâmetro  $b$ . A figura 4.3 mostra gráficos da função  $F_{b,d}$ . Temos que

Figura 4.3: Gráficos da função  $F_{b,d}$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{b,d}(x) = d. \quad (4.22)$$

Além disso, precisamos de uma interpretação para o parâmetro  $b$ . A análise da figura 4.3 sugere que calculemos por exemplo a distância entre os dois primeiros pontos de máxima curvatura do gráfico. Daí, mantendo somente o primeiro arcotangente, encontramos que esta distância é dada por  $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ . Ou seja, o parâmetro  $b$  mede o quão rápido a função  $F_{b,d}$  liga o efeito. Um outro aspecto importante na escolha da função teste está relacionado com a hipótese feita no estabelecimento do modelo sobre o regime de que o material é sem dispersão. Para o estado coerente *squeezed*, é fácil controlar em laboratório a frequência do mesmo de tal forma que estejamos trabalhando na banda desejada. Para as contribuições que envolvem a correlação (3.134), a situação é delicada. Isto acontece porque na estrutura da correlação, todos os modos do campo são importantes, o que claramente viola o regime de validade do modelo. Desta forma, precisamos de conhecer o mecanismo pelo qual a função teste filtra os modos do campo. Na estrutura do operador  $\hat{t}_d$

aparece, por exemplo, o termo

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{b,d}(x) \hat{E}_i(x) dx, \quad (4.23)$$

que sugere o uso da identidade de Parseval para transformar a integral do espaço de configuração para o espaço recíproco. Desta forma, os modos do campo ficam modulados pela transformada de Fourier de  $F_{b,d}$ , e assim, a análise da transformada carrega a informação relevante sobre os regimes de validade do modelo. Por motivo de completeza, vamos apresentar o cálculo da transformada

$$\tilde{F}_{b,d}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} F_{b,d}(x) e^{-ikx}. \quad (4.24)$$

Usando que

$$f_{b,d}(x) = \frac{d}{dx} F_{b,d}(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{b}{b^2 + x^2} - \frac{b}{b^2 + (x-d)^2} \right], \quad (4.25)$$

nós podemos, com uma integração por partes, reescrever  $\tilde{F}_{b,d}$  como

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{b,d}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} F_{b,d}(x) e^{-ikx} \\ &= \frac{iF_{b,d}(x)e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}k} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}k} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_{b,d}(x) e^{-ikx} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}k} \frac{b}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{b^2 + x^2} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{b^2 + (x-d)^2} \right] \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}k} \frac{b}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{b^2 + x^2} - e^{-ikd} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{b^2 + x^2} \right] \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}k} \frac{b}{\pi} (1 - e^{-ikd}) \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{b^2 + x^2}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Esta integral pode ser calculada usando o Teorema dos Resíduos. Para isto, é suficiente considerar os casos em que  $k \geq 0$  e  $k < 0$  separadamente. O resultado é

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{b^2 + x^2} = \frac{\pi}{b} e^{-|k|b}. \quad (4.27)$$

Finalmente,

$$\tilde{F}_{b,d}(k) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}k} (1 - e^{-ikd}) e^{-|k|b}, \quad (4.28)$$

e o módulo é dado por

$$|\tilde{F}_{b,d}(k)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|\text{sen} \frac{kd}{2}|}{|k|} e^{-|k|b}. \quad (4.29)$$

Vemos portanto como o parâmetro  $b$  age como filtro sobre os modos do campo através do atenuamento exponencial. A figura 4.4 mostra um gráfico de  $|\tilde{F}_{b,d}|$  para  $b = 0.01d$ . Para o valor fixado de  $b = 0.01d$ , uma análise numérica revela que aproximadamente 90% da área total do gráfico ocorre para  $0 \leq kd \leq 18\pi$ . Isto significa que modos com  $\lambda < \frac{d}{9}$  são filtrados pela função teste. Agora, precisamos calcular as integrais em  $(\Delta \hat{t}_d)_r^2$ ,  $(\Delta \hat{t}_d)_m^2$  e  $(\Delta \hat{t}_d)_v^2$ . Para isso, faremos uso de mais uma aproximação. Note que nas correlações envolvendo o estado *squeezed* coerente,

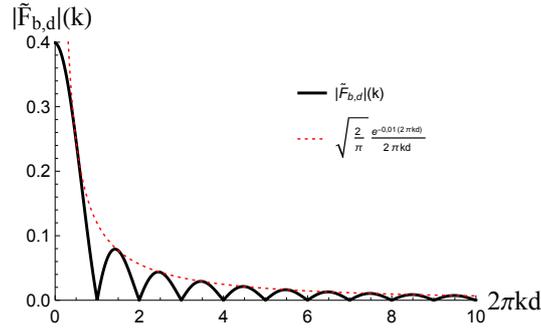


Figura 4.4: Módulo da transformada de Fourier de  $|\tilde{F}_{b,d}|$ .

a dependência com a fase sempre aparece na forma  $\bar{\omega}t - \bar{k}x$ , e quando usamos a relação  $v_p t = x$ , obtemos uma dependência da forma

$$\left(\frac{n}{n_0} - 1\right) \bar{k}x \quad (4.30)$$

nos integrandos. Adiantando um pouco a discussão da próxima seção, nas estimativas numéricas que faremos, usaremos  $d = 10\mu\text{m}$ ,  $\bar{k} \approx 10^6\text{m}$ , e  $\frac{n}{n_0} - 1 \approx 10^{-2}$ , de tal forma que as fases começam a variar de forma apreciável para  $x \approx 10^{-4}\text{m}$ . Entretanto, para estes valores de  $x$ , a função teste atenua o integrando, e assim, podemos tomar as fases constantes e iguais a zero. Com isso,

$$(\Delta \hat{t}_d)_r^2 = \frac{n_0^2 d^2}{c^2} \langle : \hat{E}_z^2 : \rangle_s \left[ \gamma_z^2 + 4\gamma_z \mu_{zz} \langle \hat{E}_z \rangle + 2\mu_{zz}^2 \left( \langle : \hat{E}_z^2 : \rangle_s + 2 \langle \hat{E}_z \rangle^2 \right) \right], \quad (4.31)$$

$$(\Delta \hat{t}_d)_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' F(x) F(x') \left[ \frac{A_1}{(\Delta x)^4} + \frac{A_2}{(\Delta x)^8} \right], \quad (4.32)$$

$$(\Delta \hat{t}_d)_m^2 = (B_1 + B_2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' F(x) F(x') \frac{1}{(\Delta x)^4}, \quad (4.33)$$

onde nós definimos as constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$  como

$$A_1 = \frac{\hbar n_0^3}{\pi^2 \epsilon_0 c (n^2 - n_0^2)^2} \left[ \gamma_x^2 + (\gamma_y^2 + \gamma_z^2) \frac{(n^2 + n_0^2)}{(n^2 - n_0^2)} \right], \quad (4.34)$$

$$A_2 = \frac{2\hbar^2 n_0^4}{\pi^4 \epsilon_0^2 (n^2 - n_0^2)^4} \left[ \mu_{xx}^2 + (\mu_{yy}^2 + \mu_{zz}^2 + 2\mu_{zy}^2) \frac{(n^2 + n_0^2)^2}{(n^2 - n_0^2)^2} + 2(\mu_{xy}^2 + \mu_{xz}^2) \frac{(n^2 + n_0^2)}{(n^2 - n_0^2)} \right], \quad (4.35)$$

$$B_1 = \frac{4\hbar n_0^3}{\pi^2 c \epsilon_0} \frac{\langle E_z \rangle}{(n_p^2 - n_0^2)^2} \left[ \gamma_x \mu_{xz} + \frac{n_p^2 + n_0^2}{n_p^2 - n_0^2} (\gamma_y \mu_{yz} + \gamma_z \mu_{zz}) \right], \quad (4.36)$$

$$B_2 = \frac{4\hbar n_0^3}{\pi^2 c \epsilon_0} \frac{\langle : E_z^2 : \rangle}{(n_p^2 - n_0^2)^2} \left[ \mu_{xz}^2 + \frac{n_p^2 + n_0^2}{n_p^2 - n_0^2} (\mu_{yz}^2 + \mu_{zz}^2) \right]. \quad (4.37)$$

Finalmente, as integrais podem ser calculadas exatamente com a mesma estratégia do cálculo para a transformada de Fourier, e o resultado é sintetizado em

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' \frac{F_{b,d}(x) F_{b,d}(x')}{(x - x')^n} = \frac{-1}{(n-1)(n-2)} \left[ \frac{2}{(2ib)^{n-2}} - \frac{1}{(2ib-d)^{n-2}} - \frac{1}{(2ib+d)^{n-2}} \right]. \quad (4.38)$$

Portanto, para  $n = 4$  e  $n = 8$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' \frac{F_{b,d}(x) F_{b,d}(x')}{(x-x')^4} = \frac{1}{12} \frac{d^2(d^2 + 12b^2)}{b^2(d^2 + 4b^2)^2}, \quad (4.39)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' \frac{F_{b,d}(x) F_{b,d}(x')}{(x-x')^8} = \frac{1}{1344} \frac{d^2(21504b^{10} + 1344b^6d^4 + 240b^4d^6 + 24b^2d^8 + d^{10})}{b^6(4b^2 + d^2)^6}. \quad (4.40)$$

Note que para  $b \ll d$ , temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' \frac{F_{b,d}(x) F_{b,d}(x')}{(x-x')^4} \approx \frac{1}{12} \frac{1}{b^2}, \quad (4.41)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' \frac{F_{b,d}(x) F_{b,d}(x')}{(x-x')^8} \approx \frac{1}{1344} \frac{1}{b^6}. \quad (4.42)$$

Desta forma, conseguimos obter uma expressão fechada para as flutuações  $(\Delta \hat{t}_d)^2$

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{t}_d)^2 &= \frac{n_0^2 d^2}{c^2} \langle : \hat{E}_z^2 : \rangle_s \left[ \gamma_z^2 + 4\gamma_z \mu_{zz} \langle \hat{E}_z \rangle + 2\mu_{zz}^2 \left( \langle : \hat{E}_z^2 : \rangle_s + 2 \langle \hat{E}_z \rangle^2 \right) \right] \\ &+ \frac{A_1 + B_1 + B_2}{12b^2} + \frac{A_2}{1344b^6}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

### 4.3 Estimativas Numéricas

Nesta seção, vamos fazer estimativas numéricas para determinar a magnitude do efeito de flutuação do cone de luz. Para isso, vamos utilizar a variância fracionária

$$\delta^2 = \frac{(\Delta \hat{t}_d)^2}{\langle \hat{t}_d \rangle^2} \equiv \delta_r^2 + \delta_m^2 + \delta_v^2. \quad (4.44)$$

Além disso, vamos tomar o cristal com tamanho  $d = 10 \mu\text{m}$ , e  $b = 0,01d$ , conforme acordado na seção anterior. Daí, os modos relevantes são tais que  $\frac{d}{9} \approx 1 \mu\text{m} \leq \lambda \leq \infty$ , e da figura 4.4, vemos que a maior contribuição ocorre para  $\lambda \approx 10 \mu\text{m}$ . Portanto, devemos procurar por materiais não dispersivos nesta faixa. Finalmente, como o modelo vale para campos não tão intensos, e as susceptibilidades de segunda e terceira ordem são em geral bastante pequenas, o tempo de vôo é aproximadamente  $\langle \hat{t}_d \rangle \approx \frac{nad}{c}$ . Note que este limite equivale a definir a variância fracional em termos do tempo de vôo para o campo de fundo. Vamos analisar dois cristais, o seleneto de cádmio, e o silício. Neste ponto, é preciso relembrar que o modelo é baseado nas hipóteses de que  $|E_p| \ll |\mathbf{E}|$  e  $|\dot{\mathbf{E}}| \ll |\dot{\mathbf{E}}_p|$ , e por simplicidade, assumimos o campo de prova aproximadamente monocromático. Para o caso em que há sinal coerente, então  $\langle \hat{\mathbf{E}} \rangle \neq 0$ , de onde basta preparar o campo de teste suficientemente fraco. Entretanto, no caso em que não há sinal coerente, temos que  $\langle \hat{\mathbf{E}} \rangle = 0$ . Precisamos de um critério para justificar então a dominância do campo de fundo em relação à perturbação. Note que  $\langle \hat{\mathbf{E}} \rangle = 0$  significa que a média das medidas de  $\hat{\mathbf{E}}$  é nula. Para obter uma estimativa da intensidade média de  $\hat{\mathbf{E}}$  no interior do material, podemos portanto utilizar a raiz quadrada da média quadrada do operador

$$\bar{\mathbf{E}} \equiv \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} dx F_{b,d}(x) \hat{\mathbf{E}}(x, t) \quad (4.45)$$

no estado em questão. Daí, para o estado *squeezed*, segue que  $\langle \bar{\mathbf{E}}^2 \rangle \approx C/(b^2 d^2) + \langle : \hat{E}^2 : \rangle_s$ , onde  $C$  é uma constante positiva. Dessa forma, basta tomar  $|E_p| \ll \sqrt{\langle \bar{\mathbf{E}}^2 \rangle}$  para que o modelo seja válido.

Note que no caso em que somente há vácuo, mesmo que o campo de prova seja composto de modos mais energéticos que o campo de fundo, esta condição significa que a quantidade de modos que contribui para o campo de fundo é suficientemente grande.

### 4.3.1 CdSe

O seleneto de cádmio (CdSe) é um cristal hexagonal, com simetria 6mm. O material possui um índice de refração de  $n = 2,43$  e susceptibilidade de segunda ordem de  $\chi_{zzz}^{(2)} = 6,4 \times 10^{-11} \text{ mV}^{-1}$  em  $\lambda = 10,6 \text{ } \mu\text{m}$  [21, 22, 23]. Além disso, possui  $\chi_{zzzz}^{(3)} \approx 7,4 \times 10^{-23} \text{ m}^2\text{V}^{-2}$  neste comprimento de onda [24], e  $n = 2,54$  [21] para  $\lambda \approx 1 \text{ } \mu\text{m}$ . Com isso,

$$\delta_r^2 \approx \left[ 10^{-21} \text{ m}^2\text{V}^{-2} - 10^{-32} \text{ m}^3\text{V}^{-3} \langle E_z \rangle + 10^{-43} \text{ m}^4\text{V}^{-4} \left( \langle : E_z^2 : \rangle + 2 \langle E_z \rangle^2 \right) \right] \langle : E_z^2 : \rangle_s, \quad (4.46)$$

$$\delta_m^2 \approx -10^{-20} \text{ mV}^{-1} \langle E_z \rangle + 10^{-31} \text{ m}^2\text{V}^{-2} \langle : E_z^2 : \rangle, \quad (4.47)$$

$$\delta_v^2 \approx 10^{-14}. \quad (4.48)$$

Primeiro, note que se não há *squeezing*, então  $\delta^2 \approx 10^{-14} (1 - 10^{-6} \text{ mV}^{-1} \langle E_z \rangle)$ . Daí, para campo coerente da ordem de  $10^6 \text{ Vm}^{-1}$ , a variância pode tornar-se negativa. Seguindo a mesma estratégia de [9], podemos preparar campos em laboratório com densidades de energia dadas por  $\epsilon_0 \langle : E_z^2 : \rangle = \epsilon_0 \langle E_z \rangle^2 \approx 10^{-3} \text{ Jm}^{-3}$ . Isto equivale a  $\langle : E_z^2 : \rangle = \langle E_z \rangle^2 \approx 10^8 \text{ V}^2\text{m}^{-2}$ . Note que neste regime, obtemos  $\delta \approx 10^{-6}$ . Além disso, se  $\langle : E_z^2 : \rangle < 10^7 \text{ V}^2\text{m}^{-2}$ , então a variação fracionária no tempo de vôo medida será de  $\delta \approx 10^{-7}$ , devida exclusivamente a efeitos de flutuação intrínseca do campo de radiação. Este resultado deve ser cotejado com o desvio de  $10^{-9}$  citado no prólogo [10].

### 4.3.2 Si

O silício (Si) é um cristal com simetria m3m, centrosimétrico. Isto significa que o material possui simetria de inversão espacial. Dessa forma, todas as susceptibilidades de ordem par são nulas. O cristal possui um índice de refração  $n = 3,418$  e susceptibilidade de terceira ordem  $\chi_{zzzz}^{(3)} = 2,80 \times 10^{-19} \text{ m}^2\text{V}^{-2}$  em  $\lambda = 11,8 \text{ } \mu\text{m}$  [25, 26], o qual usaremos para preparar o campo de fundo. Além disso, possui  $n = 3,484$  em  $\lambda = 1,4 \text{ } \mu\text{m}$  [26]. Com estes dados,

$$\delta_r^2 \approx 10^{-39} \text{ m}^4\text{V}^{-4} \left( \langle : E_z^2 : \rangle + 2 \langle E_z \rangle^2 \right) \langle : E_z^2 : \rangle_s, \quad (4.49)$$

$$\delta_m^2 \approx 10^{-28} \text{ m}^2\text{V}^{-2} \langle : E_z^2 : \rangle, \quad (4.50)$$

$$\delta_v^2 \approx 10^{-15}. \quad (4.51)$$

Vemos assim que os efeitos de flutuação intrínseca são mais importantes para campos da ordem de  $10^4 \text{ Vm}^{-1}$ , ou mais fracos. Neste caso,  $\delta \approx 10^{-8}$ . Além disso, para campos da ordem de  $10^6 \text{ Vm}^{-1}$ ,  $\delta_r \approx \delta_v$ , ou seja, a contribuição do estado coerente *squeezed* é comparável a das flutuações intrínsecas. Note a grande diferença deste caso para o caso do cristal de CdSe.

## 4.4 Considerações Finais

Nas seções anteriores, vimos como modelar o efeito de flutuação do cone de luz previsto pela gravitação quântica usando ótica quântica. No modelo apresentado, um campo de fundo preparado em um estado coerente *squeezed* se acopla com a velocidade de fase de uma perturbação do campo de fundo, descrita no limite da ótica geométrica. Vimos assim que o campo de prova se comporta analogamente a certos raios de luz se propagando em um campo gravitacional, em que a velocidade de fase efetiva determina o cone de luz. Dessa forma, o campo de fundo faz o papel de campo gravitacional, e assim, podemos obter o efeito desejado a partir da natureza quântica do campo de fundo.

O modelo apresentado é uma generalização dos resultados estudados em [7, 8, 9], em que apenas materiais com susceptibilidade de segunda ordem, e estados *squeezed*/vácuo foram considerados. Aqui, utilizamos um estado coerente *squeezed*, e trabalhamos com susceptibilidades de até terceira ordem [27, 28]. Além disso, mostramos como implementar melhorias na técnica de funções teste utilizada no trabalho [9] para estudar o efeito do estado de vácuo do campo de fundo sobre o tempo de voo [27]. Vimos que é possível aprimorar as estimativas numéricas em até 100 vezes. Em relação ao sinal coerente, observamos que o mesmo pode dar origem a desvios fracionais negativos, tornando o modelo mais rico do ponto de vista experimental [28].

Para finalizar, um aspecto importante que deve ser investigado futuramente diz respeito a forma da distribuição de probabilidades do tempo de voo. Note que no presente trabalho, estivemos interessados principalmente em calcular os desvios, interpretados como a expressão matemática para a flutuação do cone de luz efetivo. Entretanto, não é necessário que o desvio caracterize completamente a distribuição, sendo este o caso para a distribuição gaussiana. De fato, nas referências [29, 30, 31] são estudados aspectos da forma destas distribuições de probabilidades. Em particular, é argumentado que apesar de as contribuições de terceira ordem terem menor magnitude, as mesmas são mais prováveis de acontecer em medidas reais.

---

# Referências Bibliográficas

---

- [1] H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Nederland. Akad. Wetensch. **B51**, (1948) 793-795.
- [2] G. Aad et al. (ATLAS Collaboration, CMS Collaboration), Phys. Rev. Lett. **114**, 191803 (2015).
- [3] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [4] M. Visser, Lect. Notes Phys. **870**, 31 (2013).
- [5] D. A. Genov, S. Zhang, X. Zhang, Nature Phys. **5** (2009) 687-692.
- [6] J. Steinhauer, Nature Phys. **10** (2014) 864-869.
- [7] L. H. Ford, V. A. De Lorenci, G. Menezes, and N. F. Svaiter, Ann. Phys. **329**, 80 (2013); arXiv:1202.3099.
- [8] C. H. G. Bessa, V. A. De Lorenci, and L. H. Ford, Phys. Rev. D **90**, 024036 (2014); arXiv:1402.6285.
- [9] C. H. G. Bessa, V. A. De Lorenci, L. H. Ford, and N. F. Svaiter, Ann. Phys. **361**, (2015) 293-302, arXiv:1408.6805.
- [10] L. H. Ford, Phys. Rev. D **51** (1995) 1692-1700, arXiv:gr-qc/9410047.
- [11] W. Pauli, Helv. Phys. Acta. Suppl. **4**, 69 (1956). This reference consists of some remarks made by Pauli during the discussion of a talk by O. Klein at the 1955 conference in Bern, on the 50th anniversary of relativity theory.
- [12] L. H. Ford and N. F. Svaiter, Phys. Rev. D **54** (1996) 2640-2646, arXiv:gr-qc/9604052.
- [13] L. H. Ford and N. F. Svaiter, Phys. Rev. D **56** (1997) 2226-2275, arXiv:gr-qc/9704050.
- [14] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light, Third Edition*, OUP, USA: New York (2000).
- [15] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg; *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*, Wiley, USA: New York (1989).

- 
- [16] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii; *Electrodynamics of Continuous Media, 2nd edition*, Butterworth-Heinemann, USA: Burlington (1984).
- [17] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, CUP, UK: Cambridge (1997).
- [18] W. K. H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism, second edition*, Addison-Wesley, USA: Reading (1962).
- [19] L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic Press, USA: New York (1960).
- [20] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products, seventh edition*, Academic Press, USA (2007).
- [21] G. C. Bhar, Appl. Opt. **15**, 305 (1976).
- [22] J. Jerphagnon, Phys. Rev. B **2**, 1091 (1970).
- [23] G. D. Boyd, E. Buehler, F. G. Storz, Appl. Phys. Lett. **18**, 301-304 (1971).
- [24] J. T. Seo et al, Jour. Kor. Phys. Soc. **48**, 6 (2006).
- [25] J. J. Wyne, G. D. Boyd, Appl. Phys. Lett. **12**, 191 (1968).
- [26] B. Tatian, Appl. Opt. **23**, 4477-4485 (1984).
- [27] C. H. G. Bessa, V. A. De Lorenci, L. H. Ford, and C. C. H. Ribeiro, Phys. Rev. D **93**, 064067 (2016), , arXiv:1602.03857.
- [28] C. H. G. Bessa, V. A. De Lorenci, L. H. Ford, and C. C. H. Ribeiro, (fase de redação).
- [29] C. J. Fewster, L. H. Ford, and T. A. Roman, Phys. Rev. D **81**, 121901(R) (2010), arXiv:1004.0179.
- [30] C. J. Fewster, L. H. Ford, and T. A. Roman, Phys. Rev. D **85**, 125038 (2012), arXiv:1204.3570.
- [31] C. J. Fewster and L. H. Ford, Phys. Rev. D **92**, 105008 (2015), arXiv:1508.02359.