UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Modelos Tipo Chern-Simons para Descrição de Fronteiras Materiais

Helder Luiz de Oliveira

Itajubá, fevereiro de 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Helder Luiz de Oliveira

Modelos Tipo Chern-Simons para Descrição de Fronteiras Materiais

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física.

Área de Concentração: Teoria Quântica de Campos.

Orientador: Fabrício Augusto Barone Rangel

Fevereiro de 2016
Itajubá - MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÌSICA

Helder Luiz de Oliveira

Modelos Tipo Chern-Simons para Descrição de Fronteiras Materiais

Dissertação aprovada por banca examinadora em 29 de fevereiro de 2016, conferindo ao autor o título de **Mestre em Ciências em Física**.

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel (Orientador)
Prof. Dr. Gabriel Flores Hidálgo
Prof. Dr. Alexis Roa Aguirre
Prof. Dr. Denis Dalmazi

Itajubá-MG
2016

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por me oferecer o sufuciente para não desanimar.
Aos meus pais Luiz e Silvana que forneceram as condições necessárias para que eu pudesse ser quem sou.
À minha irmã e amiga que está sempre ao meu lado para qualquer batalha.
À minha namorada e amiga Cláudia que sempre me inspirou ser uma pessoa cada vez melhor.
Aos meus colegas Rodrigo, Mateus, Caio e Marlon pelas discussões e apoio.
À todos os professores que contribuiram para minha formação, em especial ao meu orientador Fabricio Augusto Barone Rangel que me mostrou que ser professor é aquele que realmente acredita nos alunos.
À CAPES pelo apoio financeiro

"Milagres acontecem quando a gente vai à luta."
Fernando Antinelli

Sumário

Resumo

O estudo de potenciais concentrados ao longo de superfícies é um tema útil em Teoria de Campos, pois pode ser empregado na descrição de fronteiras materiais, no caso do campo eletromagnético, por exemplo.

Nesse trabalho iniciamos um estudo a respeito da utilização de potenciais concentrados ao longo de fronteiras com acoplamentos tipo Chern-Simons. Em específico, tomamos potenciais tipo delta de Dirac. Até o presente momento, esse tipo de potencial nunca foi explorado na literatura. Pretendemos verificar se podemos utilizar tais modelos na descrição de fronteiras materiais.

Consideramos dois modelos. O primeiro deles pode ser visto como uma modificação do modelo de Field-Carrol-Jackiw, onde o termo tipo Chern-Simons é definido apenas sob uma superfície. O segundo modelo é composto por dois campos, um de Maxwell e outro de Chern-Simons, sendo esse último definido apenas ao longo de uma superfície.

Para ambos os modelos, calculamos o propagador e as equações de movimento. Uma vez que estamos lidando com lagrangeanas quadráticas, os respectivos propagadores foram calculados exatamente. Sempre que possível consideramos a constante de acoplamento entre o campo e o potencial tendendo a infinito, de modo a verificar se recuperamos a condição de um condutor perfeito. Também para ambos os modelos obtivemos a interação entre a superfície e uma carga pontual.

Para o segundo modelo (o que envolve dois campos), obtivemos a lagrangeana efetiva para o campo eletromagnético.

Nós restringimos sempre ao caso de uma superfície plana infinita.

Palavras-chave: Chern-Simons, Fronteiras materiais, propagador, energia de interação, equações de movimento

Abstract

The study of potentials concentrated along surfaces is an useful subject in Field Theory, because these kind of models can be used to descrbe material frontiers, in the case of electromagnetic field, for instance. In this paper we initiate a study about the using of potentials concentrated along frontiers with Chern-Simons couplings. Specifically, we take Dirac delta potentials. As far as the authors know, until this moment, this type of potential had never been explored on literature. We intended to verify if it is possible to use such models for the description of material boundaries. We consider two models. The first one can be seen as a modification of Field-Carrol-Jackiw model, where the Chern-Simons term is defined just along a surface. The second model is composed by two fields, a Maxwell field and a Chern-Simons one (the last one is defined just along the surface). For both models, we calculate the corresponding propagators and dynamical equations. Once we are working with quadratic lagrangians, the respective propagators were calculated exactly. We considered the coupling constant between the field and potential tending to infinite in order to verify if the condition of a perfect conductor is recovered in this limit. For both models we obtained the interaction between the surface and a point-like charge. For the second model (involving two fields), we obtained the effective lagrangian for the electromagnetic field. We always have been restricted to the case of an infinite plane surface.

Keywords: Chern-Simons, Material Frontiers, propagator, interaction energy, dynamical equations

CAPÍTULO 1

Introdução

Um fato bem conhecido da Teoria de Campos é a presença de fronteiras materiais que pode ocasionar o surgimento de fenômenos físicos interessantes. Podemos citar como exemplo a interação entre superfícies materiais e cargas elétricas [1, 2, 3], a interação entre átomos e fronteiras materiais [13, 14, 15, 16, 17], o efeito Casimir [4, 5, 6, 7, 8], o efeito Scharnhorst [19, 20, 21], etc. Nesse contexto, torna-se importante a descrição de fronteiras materiais em teorias de campos, o que sempre se demonstrou ser uma tarefa tão importante quanto difícil sob diversos aspectos. Para esse fim, temos que ter em mente, em primeiro lugar, que um meio material é um sistema composto de diversos átomos, e uma descrição deste por meio de uma teoria de campos será sempre por meio de um modelo efetivo.

O sistema mais conhecido em Teoria de Campos com a presença de uma superfície material é aquele composto pelo campo eletromagnético e uma superfície plana infinita perfeitamente condutora. Nesse caso o campo eletromagnético é submetido as condições de contorno específicas impostas pelo condutor. Esse tipo de abordagem já foi empregado para diversos tipos de campos [6, 9, 10, 11, 12], além do campo de Maxwell [2, 3].

Uma abordagem interessante, e mais geral, utilizada em teorias de campos com a presença de superfícies materiais é a proposta de modelos onde campos se acoplam com potenciais externos espacialmente localizados. A presença de tais materiais seria, então, simulada pelos potencias que teriam o papel de alterar os modos dos campos. Esses modelos exibem parâmetros (geralmente a constante de acoplamento entre os campos e o potencial) que podem ser ajustados convenientemente. Em diversas situações, para certos valores de tais parâmetros, recuperamos os casos especiais onde os campos são submetidos as condições de contorno.

Como exemplo, vamos considerar o modelo proposto na referência [2]. Nesse caso, o campo eletromagnético é acoplado com um potencial tipo delta de Dirac, concentrado ao longo de um plano infinito. Tomando um sistema de coordenadas onde esse plano é dado por $x^3 = a$, o sistema de unidades naturais e a métrica $+,-,-,-$, a lagrangeana do modelo é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial A)^2 - \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}S^\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)^2 \delta(x^3 - a) - JA \ , \tag{1.1}$$

onde ξ é um termo de calibre, J é uma corrente externa, $S^\gamma = \eta^\gamma{}_3$ é o quadrivetor normal à superfície $\mathbf{a} = (0, 0, a)$, A^μ é o campo vetorial com $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ sendo o correspondente tensor intensidade de campo e $\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ o dual deste tensor. O parâmetro $m \geq 0$ tem dimensão de massa e nos dá o grau de transparência da superfície, como será visto.

Os tensores de permissividade elétrica e permeabilidade magnética do modelo (1.1) são dados, respectivamente, por

$$\epsilon^{ij} = \delta^{ij} + \frac{2}{m}\delta(x^3 - a)(\delta^{i1}\delta^{j1} + \delta^{i2}\delta^{j2}) \quad , \quad (\mu^{-1})^{ij} = \delta^{ij} + \frac{2}{m}\delta(x^3 - a)(\delta^{i3}\delta^{j3}) \tag{1.2}$$

e as equações de Euler-Lagrange fornecem

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\mathbf{E} + \frac{2}{m}\delta(x^3 - a)\mathbf{E}_\parallel\right] &= J_0 \ , \\ \nabla \times \left[\mathbf{B} + \frac{2}{m}\delta(x^3 - a)\mathbf{B}_\perp\right] &= \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{E} + \frac{2}{m}\delta(x^3 - a)\mathbf{E}_\parallel\right] . \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde definimos os vetores paralelos e perpendiculares à superfície, $\mathbf{E}_\parallel = (E^1, E^2, 0)$, $\mathbf{B}_\perp = (0, 0, B^3)$.

Usando as equações (1.2) temos que

$$\begin{aligned} D^i &= \sum_j \epsilon^{ij}E^j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + \frac{2}{m}\delta(x^3 - a)\mathbf{E}_\parallel \ , \\ H^i &= \sum_j (\mu^{-1})^{ij}B^j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} + \frac{2}{m}\delta(x^3 - a)\mathbf{B}_\perp \ , \end{aligned} \tag{1.4}$$

e as equações de Maxwell (1.3) se tornam

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = J^0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.5}$$

Pelas definições dos vetores de polarização e de magnetização, $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$ e $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$, respectivamente, e pela equação (1.4) vemos que

$$\mathbf{P} = \frac{2}{m}\delta(x^3 - a)\mathbf{E}_\parallel \quad , \quad \mathbf{M} = -\frac{2}{m}\delta(x^3 - a)\mathbf{B}_\perp \ , \tag{1.6}$$

o que mostra que o potencial δ equivale a uma descontinuidade nos vetores de polarização e magnetização definidos na placa.

Apesar dos vetores (1.6) exibirem descontinuidades, o propagador do modelo pode ser calculado para todo o espaço. Tomando o calibre onde ($\xi = 1$) na lagrangeana em (1.1), e efetuando integrações por partes, temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_\mu \left[\eta^{\mu\nu}\Box + \frac{2}{m}\,\delta(x^3 - a)(\eta^{\mu\nu}\Box_\parallel - \partial_\parallel^\mu \partial_\parallel^\nu)\right] A_\nu - J^\mu A_\mu \ , \tag{1.7}$$

onde definimos $\Box_\parallel = \partial_\parallel^\alpha \partial_{\parallel\alpha}$.

O propagador do modelo é a inversa do operador diferencial da equação (1.7) no sentido que

$$\left[\eta^{\mu\nu}\Box + \frac{2}{m}\,\delta(x^3 - a)(\eta^{\mu\nu}\Box_\parallel - \partial_\parallel^\mu \partial_\parallel^\nu)\right] G_{\nu\lambda}(x,y) = \eta^\mu{}_\lambda \delta^4(x-y) \ . \tag{1.8}$$

Pode-se mostrar que a inversa do operador diferencial da equação (1.7) é [2]

$$G_{\mu\nu}(x,y) = \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\left[\eta_{\mu\nu}\frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} - \frac{1}{2}\frac{e^{-\sigma(|x^3-a|+|y^3-a|)}}{m+\sigma}\left(\eta_{\parallel\mu\nu} - \frac{p_{\parallel\mu}p_{\parallel\nu}}{p_\parallel^2}\right)\right] \times e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)} \tag{1.9}$$

onde definimos $\eta_\parallel{}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \eta^{\mu 3}\eta^{\nu 3}$, $p_\parallel^\gamma = (p^0, p^1, p^2, 0)$ e $\sigma = \sqrt{-p_\parallel^2}$.

O propagador (1.9) é contínuo e bem definido em todo o espaço. No limite em que $m = 0$, o propagador (1.9) se reduz àquele obtido para uma placa perfeitamente condutora [8]. O primeiro termo do lado direito de (1.9) é o propagador do fóton sem a presença da superfície. O segundo termo é uma correção dependente não só da distância entre os pontos, mas também da localização da placa. Essa anisotropia nos impede de ter uma transformada de Fourier na coordenada perpendicular à superfície (coordenada 3).

Se tomarmos uma carga pontual estática de intensidade q na frente dessa superfície, podemos mostrar que a energia de interação resultante é [3]

$$E_{int}(R,m) = -\frac{q^2}{16\pi R}[1 - 2mRe^{2mR}\ Ei(1, 2mR)] \tag{1.10}$$

onde R é a distância entre a superfície e a carga e $Ei(u,v)$ é a função erro exponencial [31]. No limite em que $m \to 0$, obtemos a conhecida interação de Coulomb.

Se considerarmos duas placas paralelas, colocadas nos planos $x^3 = 0$ e $x^3 = a$, podemos estudar o efeito Casimir para esse tipo de superfície material [3].

No modelo (1.1), o termo de acoplamento entre o potencial delta e o campo envolve a derivada segunda do campo eletromagnético. Uma questão interessante seria investigar se podemos descrever algum tipo de fronteira material com o acoplamento de um potencial tipo delta com derivada primeira do campo eletromagnético. Essa é uma questão delicada sob diverso aspectos. Em primeiro lugar, ao propormos uma lagrangeana para o campo eletromagnético, temos que levar em conta que essa deve exibir invariância de calibre. Devemos considerar também o fato de que termos adicionais a lagrangeana de Maxwell devem existir somente ao longo da superfície material.

Modelos tipo Chern-Simons têm a interessante característica de exibir invariância de calibre assim como um pólo massivo para o propagador do campo vetorial. Nesse tipo de modelo, existe um termo lagrangeano com derivada de primeira ordem no campo vetorial. Nesse contexto, modelos tipo Cher-Simons são possíveis candidatos na tentativa de descrever superfícies materiais com modelos que envolvem derivadas em primeira ordem no campo vetorial.

Esse trabalho tem por objetivo investigar se modelos do tipo Chern-Simons poderiam servir para descrever fronteiras materiais. Para isso propomos dois modelos lagrangeanos para descrever fronteiras materais, ambos do tipo Chern-Simons. No primeiro modelo, construimos a lagrangeana com um único campo vetorial e temos um único parâmetro que descreve as propriedades eletromagnéticas da superfície. No segundo modelo, temos dois campos vetoriais e dois parâmetros.

Para ambos os modelos, calculamos o propagador e estudamos a interação entre a fronteira e uma carga pontual. No caso especial onde a constante de acoplamento e o campo tende a infinito, recuperamos o caso especial de um condutor perfeito.

No Capítulo (2) consideramos o primeiro modelo. No Capítulo (3) estudamos o segundo modelo. O Capítulo (4) é dedicado às concusões e perpectivas.

Ao longo do texto vamos usar unidades naturais e a métrica $+,-,-,-$.

CAPÍTULO 2

Lagrangeana composta de um campo

Nesse capítulo vamos propor um modelo onde o campo eletromagnético se acopla com um potencial tipo delta de Dirac concentrado ao longo de um plano infinito. O termo lagrangeano de acoplamento envolve a derivada em primeira ordem no campo eletromagnético e caracteriza-se por ter uma estrutura semelhante ao termo de Chern-Simons. Iremos obter o propagador do modelo e suas equações de movimento e verificar se esse pode ser empregado na descrição de algum meio material.

Adotaremos um sistema de coordenadas no qual a fronteria material está localizada no plano $x^3 = a$. Nesse caso, a lagrangeana para o modelo é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2}\mu v^\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\nu \partial^\alpha A^\beta \delta(x^3 - a) \tag{2.1}$$

onde A^μ é um campo vetorial, $F_{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ é o tensor intensidade de campo, α é um parâmetro de calibre e v^μ é um quadrivetor perpendicular à superfície,

$$v^\mu = \eta^\mu_3 = (0, 0, 0, 1) \ , \tag{2.2}$$

e J^μ é uma corrente externa, μ é um parâmetro de acoplamento entre o campo e o potencial tipo delta de Dirac (que está concentrado ao longo do plano $x^3 = a$ e $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor de Levi-Civita, com $\epsilon_{0123} = 1$.

O primeiro termo no lado direito em (2.1) é a lagrangeana de Maxwell. O segundo termo é o acoplamento do campo com a corrente externa. O terceiro termo tem a mesma estrutura do termo de Chern-Simons, só que nesse caso, ele está definido em $3+1$ dimensões e é não nulo somente sob o plano $x^3 = a$. Podemos ainda interpretá-lo como sendo um tipo de termo Caroll-Field-Jakiw, mas definido somente sob uma superfície.

Para investigar o tipo de superfície que podemos descrever com a lagrangeana (2.1), vamos estudar seu propagador, obter suas equações de Euler-Lagrange e estudar sua interação com uma carga pontual estática.

2.1 Propagador da teoria

Escolhendo o calibre $\alpha = 1$, fazendo algumas integrações por partes e elimando termos de superfície (que não contribuem para a dinâmica do sistema), podemos reesecrever a lagrangeana proposta pela equação (2.1) na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^{\mu}[\eta_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial^{\lambda} + \mu\delta(x^3 - a)\epsilon_{3\alpha\mu\nu}\partial^{\alpha}]A^{\nu} - J_{\mu}A^{\mu} \ . \tag{2.3}$$

O propagador da teoria é a inversa do operador diferencial que aparece na equação (2.3), ou seja,

$$[\eta_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial^{\lambda} + \mu\delta(x^3 - a)\epsilon_{3\alpha\mu\nu}\partial^{\alpha}]G^{\nu\sigma}(x, y) = \eta_{\mu}^{\sigma}\delta^4(x - y) \ . \tag{2.4}$$

Por conveniência, vamos definir os seguintes operadores diferenciais:

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu}(x) &= \eta_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial^{\lambda} + \mu\delta(x^3 - a)\epsilon_{3\alpha\mu\nu}\partial^{\alpha} \\ V_{0\mu\nu}(x) &= \eta_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial^{\lambda} \\ \Delta V_{\mu\nu}(x) &= \mu\delta(x^3 - a)\epsilon_{3\alpha\mu\nu}\partial^{\alpha} \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Note que $V_{0\mu\nu}(x)$ acima citado é o operador diferencial do campo de Maxwell no calibre de Lorentz. Nesse caso, definimos também o propagador de Maxwell (nesse calibre) como

$$V_{0\mu\nu}(x)G_0^{\nu\sigma}(x, y) = \eta_{\mu}^{\sigma}\delta^4(x - y) \tag{2.6}$$

Vamos verificar que o propagador $G^{\nu\sigma}(x, y)$ satisfaz a equação integral

$$G^{\nu\sigma}(x, y) = G_0^{\nu\sigma}(x, y) - \int d^4z G^{\nu\rho}(x, z)\Delta V_{\rho\tau}(z)G_0^{\tau\sigma}(z, y) \ . \tag{2.7}$$

Substituindo (2.7) em (2.4) teremos

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu}(x)G^{\nu\sigma}(x, y) &= V_{\mu\nu}(x)G_0^{\nu\sigma}(x, y) - V_{\mu\nu}(x)\int d^4z G^{\nu\rho}(x, z)\Delta V_{\rho\tau}(z)G_0^{\tau\sigma}(z, y) \\ &= V_{\mu\nu}(x)G_0^{\nu\sigma}(x, y) - \int d^4z V_{\mu\nu}(x)G^{\nu\rho}(x, z)\Delta V_{\rho\tau}(z)G_0^{\tau\sigma}(z, y) \ . \end{aligned} \tag{2.8}$$

A atuação do operador $V_{\mu\nu}(x)$ em $G^{\nu\rho}(x,z)$ é obtida pelas equações (2.4) e (2.5), portanto

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu}(x)G^{\nu\sigma}(x,y) &= V_{\mu\nu}(x)G_0^{\nu\sigma}(x,y) - \int d^4z\eta_\mu^\rho\delta^4(x-z)\Delta V_{\rho\tau}(z)G_0^{\tau\sigma}(z,y) \\ &= V_{\mu\nu}(x)G_0^{\nu\sigma}(x,y) - \Delta V_{\mu\tau}(x)G_0^{\tau\sigma}(x,y) \\ &= V_{0\mu\nu}(x)G_0^{\nu\sigma}(x,y) = \eta_\mu{}^\sigma\delta^4(x-y) \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde na segunda linha integramos em d^4z e nas terceira e quarta linhas usamos as definições (2.5). Isso demonstra a validade da equação (2.7).

Iremos procurar por uma solução em integral de Fourier para o propagador. O operador diferencial em (2.4) exibe simetria de translação nas coordenadas paralelas à superfície $x^3 = a$. Dessa forma, vamos procurar por uma solução na forma

$$G^{\mu\nu}(x,y) = \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}^{\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)} \ , \tag{2.10}$$

onde $p_\parallel = (p^0, p^1, p^2, 0)$, $x_\parallel = (x^0, x^1, x^2, 0)$. Da mesma forma, vamos escrever o propagador do campo de Maxwell como a integral de Fourier

$$G_0^{\mu\nu}(x,y) = \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)} \ , \tag{2.11}$$

de acordo com o apêndice (A).

Substituindo (2.10) e (2.11) em (2.7) temos que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}^{\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)} &= \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)} \\ &- \int d^4z \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}^{\nu\rho}(p_\parallel; x^3, z^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel - z_\parallel)}\Delta V_{\rho\tau}(z) \\ &\times \int \frac{d^3q_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_0^{\tau\sigma}(q_\parallel; z^3, y^3)e^{-iq_\parallel(z_\parallel - y_\parallel)} \ . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Atuando com o operador $\Delta V_{\rho\tau}(z)$, definido em (2.5), e integrando em dz^3 obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}^{\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)} &= \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)} \\ &- \int d^3z_\parallel \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}^{\nu\rho}(p_\parallel; x^3, a)e^{-ip_\parallel(x_\parallel - z_\parallel)} \\ \times \int \frac{d^3q_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_0^{\tau\sigma}(q_\parallel; a, y^3)&[\mu\epsilon_{3\alpha\rho\tau}(-iq_\parallel^\alpha)]e^{-iq_\parallel(z_\parallel - y_\parallel)} \ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Integramos agora em $d^3z_\parallel$,

$$\int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)} = \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)} - \Bigg[\int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}^{\nu\rho}(p_\parallel;x^3,a)e^{-ip_\parallel x_\parallel} \times \int \frac{d^3q_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_0^{\tau\sigma}(q_\parallel;a,y^3)[\mu\epsilon_{3\alpha\rho\tau}(-iq_\parallel^\alpha)]e^{iq_\parallel y_\parallel}(2\pi)^3\delta(q_\parallel-p_\parallel)\Bigg] . \quad (2.14)$$

Por fim, integramos em $d^3q_\parallel$, o que fornece

$$\int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)} = \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\Bigg[\tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3) + i\mu\tilde{G}^{\nu\rho}(p_\parallel;x^3,a)[\epsilon_{3\alpha\rho\tau}p_\parallel^\alpha]\tilde{G}_0^{\tau\sigma}(p_\parallel;a,y^3)\Bigg]e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)} . \quad (2.15)$$

Se as duas integrais de Fourier acima são iguais, os integrandos também devem ser iguais, ou seja,

$$\tilde{G}^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3) = \tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3) + i\mu\tilde{G}^{\nu\rho}(p_\parallel;x^3,a)\epsilon_{3\alpha\rho\tau}p_\parallel^\alpha\tilde{G}_0^{\tau\sigma}(p_\parallel;a,y^3) . \quad (2.16)$$

É importante ter em mente que $\tilde{G}_0^{\tau\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)$ é conhecido, dado pela transformada do propagador de Maxwell no calibre de Lorentz.

A equação acima fornece a transformada da função de Green, $\tilde{G}^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)$, em função de $\tilde{G}^{\nu\rho}(p_\parallel;x^3,a)$. Note que (2.16) é válida para quaisquer valores de x^3 e y^3. Tomando então $y^3=a$, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,a) &= \tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,a) + i\mu\tilde{G}^{\nu\rho}(p_\parallel;x^3,a)\epsilon_{3\alpha\rho\tau}p_\parallel^\alpha\tilde{G}_0^{\tau\sigma}(p_\parallel;a,a) \\
\Rightarrow\ \tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,a) &= \tilde{G}^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,a) - i\mu\tilde{G}^{\nu\rho}(p_\parallel;x^3,a)\epsilon_{3\alpha\rho\tau}p_\parallel^\alpha\tilde{G}_0^{\tau\sigma}(p_\parallel;a,a) \\
\Rightarrow\ \tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,a) &= \tilde{G}^{\nu\rho}(p_\parallel;x^3,a)[\eta_\rho^\sigma - i\mu\epsilon_{3\alpha\rho\tau}p_\parallel^\alpha\tilde{G}_0^{\tau\sigma}(p_\parallel;a,a)] . \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Por conveniência, definimos a matriz

$$\mathcal{M}_\rho^\sigma = \eta_\rho^\sigma - i\mu\epsilon_{3\alpha\rho\tau}p_\parallel^\alpha\tilde{G}_0^{\tau\sigma}(p_\parallel;a,a) \quad (2.18)$$

e sua inversa

$$\mathcal{M}_\rho^\sigma(\mathcal{M}_\sigma^\gamma)^{-1} = \eta_\rho^\gamma , \quad (2.19)$$

de modo a manipular a última linha da equação (2.17) como segue,

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,a) &= \tilde{G}^{\nu\rho}(p_\parallel;x^3,a)\mathcal{M}_\rho^\sigma \\
\Rightarrow\ \tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,a)(\mathcal{M}_\sigma^\gamma)^{-1} &= \tilde{G}^{\nu\rho}(p_\parallel;x^3,a)\mathcal{M}_\rho^\sigma(\mathcal{M}_\sigma^\gamma)^{-1} \\
\Rightarrow\ \tilde{G}^{\nu\gamma}(p_\parallel;x^3,a) &= \tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,a)(\mathcal{M}_\sigma^\gamma)^{-1} \\
\Rightarrow\ \tilde{G}^{\nu\rho}(p_\parallel;x^3,a) &= \tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,a)(\mathcal{M}_\sigma^\rho)^{-1}\ .
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Substituindo a última linha da equação acima no segundo termo do lado direito da equação (2.16), temos finalmente

$$\tilde{G}^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3) = \tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3) + i\mu\tilde{G}_0^{\nu\lambda}(p_\parallel;x^3,a)(\mathcal{M}_\lambda^\rho)^{-1}\epsilon_{3\alpha\rho\tau}p_\parallel^\alpha\tilde{G}_0^{\tau\sigma}(p_\parallel;a,y^3)\ . \tag{2.21}$$

Na equação acima, que nos fornece $\tilde{G}^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)$, temos como conhecido a função $\tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)$. Devemos então encontrar a inversa de (2.18), $(\mathcal{M}_\sigma^\rho)^{-1}$, para obter o propagador sob a presença da superfície.

A transformada do propagador de Maxwell, $\tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)$, é calculada no apêndice (A),

$$\tilde{G}_0^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3) = \frac{\eta^{\nu\sigma}}{2\sqrt{-p_\parallel^2}}e^{-\sqrt{-p_\parallel^2}|x^3-y^3|}\ . \tag{2.22}$$

Inserindo o resultado (2.22), com $x^3 = y^3 = a$, na definição (2.18) temos que

$$\mathcal{M}_\rho^\sigma = \eta_\rho^\sigma - i\mu\epsilon_{3\alpha\rho}{}^\sigma p_\parallel^\alpha\frac{1}{2\sqrt{-p_\parallel^2}}. \tag{2.23}$$

Para calcularmos $(\mathcal{M}_\sigma^\gamma)^{-1}$ usaremos o seguinte ansatz

$$(\mathcal{M}_\sigma^\gamma)^{-1} = R\eta_\sigma^\gamma + V\eta_{\parallel\sigma}^\gamma + Sp_{\parallel\sigma}p_\parallel^\gamma + U\epsilon_{3\lambda\sigma}^\gamma p_\parallel^\lambda\ , \tag{2.24}$$

onde R, V, S e U são funções de $p_\parallel$ a serem determinadas e usamos a definição da métrica paralela $\eta_\parallel^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \eta^\mu{}_3\eta^\nu{}_3$ (note que se $\mu = 3$ e/ou $\nu = 3$, temos que $\eta_\parallel^{3\nu} = \eta_\parallel^{\mu 3} = \eta_\parallel^{33} = 0$).

Substituindo (2.24) e (2.23) em (2.19), e efetuando algumas manipulações simples, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\eta_\rho^\gamma R = \eta_\rho^\gamma$$

$$\eta^{\gamma}_{\parallel\rho}\left[V+\frac{i\mu}{2\sqrt{-p^2_\parallel}}p^2_\parallel U\right]=0$$
$$p_{\parallel\rho}p^{\gamma}_{\parallel}\left[S-\frac{i\mu}{2\sqrt{-p^2_\parallel}}U\right]=0$$
$$\epsilon_{3\lambda\rho}{}^{\gamma}p^{\lambda}_{\parallel}\left[U-\frac{i\mu}{2\sqrt{-p^2_\parallel}}(V+R)\right]=0\ . \tag{2.25}$$

Resolvendo o sistema (2.25) encontramos

$$\begin{aligned} R &= 1 \\ V &= -\frac{\mu^2}{4+\mu^2} \\ S &= \frac{\mu^2}{p^2_\parallel(4+\mu^2)} \\ U &= \frac{2i\mu}{\sqrt{-p^2_\parallel}(4+\mu^2)}\ . \end{aligned} \tag{2.26}$$

Substituindo os coeficientes (2.26) em (2.24), temos a inversa da matriz $\mathcal{M}$,

$$(\mathcal{M}^{\gamma}_{\sigma})^{-1}=\eta^{\gamma}_{\sigma}-\frac{\mu^2}{4+\mu^2}\eta^{\gamma}_{\parallel\sigma}+\frac{\mu^2}{p^2_\parallel(4+\mu^2)}p_{\parallel\sigma}p^{\gamma}_{\parallel}+\frac{2i\mu}{\sqrt{-p^2_\parallel}(4+\mu^2)}\epsilon_{3\lambda\sigma}{}^{\gamma}p^{\lambda}_{\parallel} \tag{2.27}$$

Substituindo (2.22) e (2.27) em (2.20), somos levados ao resultado

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{\nu\gamma}(p_\parallel;x^3,a)=&\frac{e^{-\sqrt{-p^2_\parallel}|x^3-a|}}{2\sqrt{-p^2_\parallel}}\\ &\times\left[\eta^{\nu\gamma}-\frac{\mu^2}{4+\mu^2}\eta^{\nu\gamma}_{\parallel}+\frac{\mu^2}{p^2_\parallel(4+\mu^2)}p^{\nu}_{\parallel}p^{\gamma}_{\parallel}+\frac{2i\mu}{\sqrt{-p^2_\parallel}(4+\mu^2)}\epsilon_{3\lambda}{}^{\nu\gamma}p^{\lambda}_{\parallel}\right]\ .\end{aligned} \tag{2.28}$$

Agora basta substituir (2.28) na equação (2.16) para encontrar o propagador do campo vetorial com a presença da superfície

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)=&\frac{\eta^{\nu\sigma}}{2\sqrt{-p^2_\parallel}}e^{-\sqrt{-p^2_\parallel}|x^3-y^3|}\\ &-\frac{4}{4+\mu^2}\left[\frac{\mu^2}{8\sqrt{-p^2_\parallel}}\left(\eta^{\nu\sigma}_{\parallel}-\frac{p^{\nu}_{\parallel}p^{\sigma}_{\parallel}}{p^2_\parallel}\right)+\frac{i\mu}{p^2_\parallel}\epsilon_{3\alpha}{}^{\nu\sigma}p^{\alpha}_{\parallel}\right]e^{-\sqrt{-p^2_\parallel}(|x^3-a|+|y^3-a|)}\end{aligned} \tag{2.29}$$

Ao tomarmos o limite da constante de acoplamento μ tendendo a infinito, podemos mostrar que a transformada de Fourier do propagador (2.29) se reduz à transformada de Fourier do propagador do campo eletromagnético com a presença de uma placa perfeitamente condutora,

$$\lim_{\mu\to\infty} \tilde{G}^{\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, y^3) = \frac{\eta^{\nu\sigma}}{2\sqrt{-p_\parallel^2}} e^{-\sqrt{-p_\parallel^2}|x^3-y^3|} - \frac{1}{2\sqrt{-p_\parallel^2}}\left(\eta_\parallel^{\nu\sigma} - \frac{p_\parallel^\nu p_\parallel^\sigma}{p_\parallel^2}\right) e^{-\sqrt{-p_\parallel^2}(|x^3-a|+|y^3-a|)} , \tag{2.30}$$

ou seja, o limite $\mu \to \infty$ corresponde ao caso de um condutor perfeito.

O propagador é dado pela integral (2.10) com a função (2.29),

$$G^{\mu\nu}(x,y) = \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3} \frac{\eta^{\nu\sigma}}{2\sqrt{-p_\parallel^2}} e^{-\sqrt{-p_\parallel^2}|x^3-y^3|} e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)} + \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3} - \frac{4}{4+\mu^2}\left[\frac{\mu^2}{8\sqrt{-p_\parallel^2}}\left(\eta_\parallel^{\nu\sigma} - \frac{p_\parallel^\nu p_\parallel^\sigma}{p_\parallel^2}\right) + \frac{i\mu}{p_\parallel^2}\epsilon_{3\alpha}{}^{\nu\sigma} p_\parallel^\alpha\right] \times e^{-\sqrt{-p_\parallel^2}(|x^3-a|+|y^3-a|)} e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)} \tag{2.31}$$

O primeiro termo do lado direito da equação (2.31) é o propagador do campo eletromagnético no calibre de Lorentz sem a presença da placa, $G_{(0)}^{\mu\nu}(x,y)$. O segundo termo é uma correção dada pela presença da fronteira. Vamos definir essa correção por

$$\Delta G^{\mu\nu}(x,y) = \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3} - \frac{4}{4+\mu^2}\left[\frac{\mu^2}{8\sqrt{-p_\parallel^2}}\left(\eta_\parallel^{\nu\sigma} - \frac{p_\parallel^\nu p_\parallel^\sigma}{p_\parallel^2}\right) + \frac{i\mu}{p_\parallel^2}\epsilon_{3\alpha}{}^{\nu\sigma} p_\parallel^\alpha\right] \times e^{-\sqrt{-p_\parallel^2}(|x^3-a|+|y^3-a|)} e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)} \tag{2.32}$$

e escrever o propagador (2.31) na forma compacta

$$G^{\mu\nu}(x,y) = G_{(0)}^{\mu\nu}(x,y) + \Delta G^{\mu\nu}(x,y) \tag{2.33}$$

De posse do propagador (2.33) podemos, encontrar algumas quantidades físicas do sistema, clássica ou quântica.

2.2 Interação carga-superfície

Para termos uma idéia melhor do papel desempenhado pela superfície descrita pelo modelo (2.1), vamos estudar nessa seção como se dá a interação dessa superfície com uma carga pontual estacionária.

Dado o fato de que a lagrangeana (2.3) é quadrática no campo, o funcional gerador da função de Green é dado por

$$\mathcal{Z}[J] = \mathcal{Z}[0] \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J^\mu(x) G_{\mu\nu}(x,y) J^\nu(y)\right) , \tag{2.34}$$

onde o intervalo de integração temporal deve ser tomado de $-T/2$ até $T/2$, ficando implícito o limite $T \to \infty$ ao final dos cálculos.

Um fato bem conhecido da literatura [28], é que o funcional gerador se relaciona com a energia de vácuo do campo, E_0, (menor valor de energia do campo) da seguinte forma

$$\mathcal{Z} = e^{-iE_0 T} , \tag{2.35}$$

onde está implícito o limite $T \to \infty$.

Combinando as equações (2.34) e (2.35) temos

$$E_0 = \frac{i}{T}\ln(\mathcal{Z}[0]) + \frac{1}{2T}\int d^4x d^4y J^\mu(x) G_{\mu\nu}(x,y) J^\nu(y) . \tag{2.36}$$

O primeiro termo do lado direito de (2.36) é a contribuição de energia de vácuo livre, ou seja, sem a presença de fontes externas ($J^\mu = 0$). Esse termo tem relevância no cálculo do efeito Casimir. O segundo termo do lado direito é uma contribuição da fonte externa [28, 29, 30] e é com ele que vamos obter a interação entre a superfície e a carga pontual

$$E_{fontes} = \frac{1}{2T}\int d^4x d^4y J^\mu(x) G_{\mu\nu}(x,y) J^\nu(y) . \tag{2.37}$$

Substituindo o propagador (2.33) na equação (2.37) temos que

$$E_{fontes} = \frac{1}{2T}\int d^4x d^4y J_\mu(x) G^{\mu\nu}_{(0)}(x,y) J_\nu(y) + \frac{1}{2T}\int d^4x d^4y J_\mu(x) \Delta G^{\mu\nu}(x,y) J_\nu(y) . \tag{2.38}$$

O primeiro termo do lado direito da equação (2.38) é uma contribuição que existiria mesmo sem a presença da superfície. Ele não dependerá da posição da superfície e será descartado daqui por diante. O segundo termo é uma contribuição para a energia oriunda da interação entre a fonte e a superfície. É nesse termo que estamos interessados e vamos defini-lo por

$$E_{int} = \frac{1}{2T}\int d^4x d^4y J^\mu(x) \Delta G_{\mu\nu}(x,y) J^\nu(y) . \tag{2.39}$$

Agora iremos especificar a corrente de acordo com os nossos propósitos. Uma carga pontual estacionária, de intensidade λ e localizada no ponto $\vec{b}$ é descrita por uma quadricorrente

$$J^\mu(x) = \Big(\lambda\delta^3(\vec{x}-\vec{b}),0,0,0\Big) = \lambda\eta^{\mu 0}\delta^3(\vec{x}-\vec{b}) \tag{2.40}$$

Substituindo (2.40) em (2.39) obtemos

$$\begin{aligned} E_{int} &= \frac{1}{2T}\int d^4xd^4y\lambda\eta^{\mu 0}\delta^3(\vec{x}-\vec{b})\Delta G_{\mu\nu}(x,y)\lambda\eta^{\nu 0}\delta^3(\vec{y}-\vec{b}) \\ &= \frac{1}{2T}\int d^4xd^4y\lambda^2\delta^3(\vec{x}-\vec{b})\delta^3(\vec{y}-\vec{b})\Delta G_{00}(x,y)\ . \end{aligned} \tag{2.41}$$

Agora usamos a definição (2.32) em (2.41),

$$\begin{aligned} E_{int} &= \frac{\lambda^2}{2T}\int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}d^0xd^0yd^3\vec{x}d^3\vec{y}\delta^3(\vec{x}-\vec{b})\delta^3(\vec{y}-\vec{b}) \\ &\quad -\frac{4}{4+\mu^2}\left[\frac{\mu^2}{8\sqrt{-p_\parallel^2}}\left(1-\frac{p_0^2}{p_\parallel^2}\right)\right]e^{-\sqrt{-p_\parallel^2}(|x^3-a|+|y^3-a|)}e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)}\ . \end{aligned} \tag{2.42}$$

Integrando em dx^3 e dy^3 temos que

$$\begin{aligned} E_{int} &= \frac{\lambda^2}{2T}\int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}d^0xd^0yd^2\vec{x}_\parallel d^2\vec{y}_\parallel\delta^2(\vec{x}-\vec{b})\delta^2(\vec{y}-\vec{b}) \\ &\quad -\frac{4}{4+\mu^2}\left[\frac{\mu^2}{8\sqrt{-p_\parallel^2}}\left(1-\frac{p_0^2}{p_\parallel^2}\right)\right]e^{-2\sqrt{-p_\parallel^2}|b^3-a|}e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)}\ , \end{aligned} \tag{2.43}$$

onde definimos $\vec{x}_\parallel = (x^1,x^2,0)$ e $\vec{y}_\parallel = (x^1,x^2,0)$. Podemos também integrar facilmente em $d^2\vec{x}$ e $d^2\vec{y}$,

$$\begin{aligned} E_{int} &= \frac{\lambda^2}{2T}\int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}d^0xd^0y \\ &\quad -\frac{4}{4+\mu^2}\left[\frac{\mu^2}{8\sqrt{-p_\parallel^2}}\left(1-\frac{p_0^2}{p_\parallel^2}\right)\right]e^{-2\sqrt{-p_\parallel^2}|b^3-a|}e^{-ip_0(x_0-y_0)} \end{aligned} \tag{2.44}$$

Agora integramos em x^0 e usamos o fato de que $\int dx^0e^{-ip^0x^0} = (2\pi)\delta(p^0)$, o que nos fornece

$$E_{int} = \frac{\lambda^2}{2T}\int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}d^0y - \frac{4}{4+\mu^2}\left[\frac{\mu^2}{8\sqrt{-p_\parallel^2}}\left(1-\frac{p_0^2}{p_\parallel^2}\right)\right]e^{-2\sqrt{-p_\parallel^2}|b^3-a|}(2\pi)\delta(p_0)e^{ip^0y^0}\ . \tag{2.45}$$

A integração em dp^0 resulta em

$$E_{int} = -\frac{\lambda^2}{2T}\Big(\int_{T/2}^{T/2} d^0y\Big)\int \frac{d^2\vec{p}_{\|}}{(2\pi)^2}\frac{4}{4+\mu^2}\left[\frac{\mu^2}{8\sqrt{\vec{p}_{\|}^{2}}}\right] e^{-2\sqrt{\vec{p}_{\|}^{2}}|b^3-a|} , \tag{2.46}$$

onde separamos a integral em dy^0, pois o integrando não depende de y^0.

Usando o fato de que $\int_{T/2}^{T/2} d^0y = T$ e identificando a distância entre a superfície e a carga como

$$\mathcal{R} = |b^3 - a| , \tag{2.47}$$

temos que

$$E_{int} = -\frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^2\vec{p}_{\|}}{(2\pi)^2}\frac{1}{4+\mu^2}\left[\frac{\mu^2}{2\sqrt{\vec{p}_{\|}^{2}}}\right] e^{-2\sqrt{\vec{p}_{\|}^{2}}\mathcal{R}} \tag{2.48}$$

A integração acima pode ser feita em coordenadas polares. A integral na parte angular resulta em um fator 2π, restando apenas a parte radial

$$\begin{aligned} E_{int} &= -\frac{\lambda^2}{8\pi}\frac{\mu^2}{4+\mu^2}\int_0^\infty dr e^{-2r\mathcal{R}} \\ &= -\frac{\lambda^2}{16\pi}\frac{\mu^2}{4+\mu^2}\frac{1}{\mathcal{R}} . \end{aligned} \tag{2.49}$$

A energia de interação acima tem o comportamento Coulombiano. O sinal negativo indica que a interação é atrativa (a carga e a superfície se atraem) e a energia cai com o inverso da distância entre a superfície e a carga. No limite em que $\mu \to \infty$, recuperamos a energia obtida pelo método das imagens [3]

$$\lim_{\mu\to\infty} E_{int} = -\frac{\lambda^2}{16\pi}\frac{1}{\mathcal{R}} , \tag{2.50}$$

como já esperávamos.

Nesse sentido é interessante perceber que o papel da constante de acoplamento é apenas atenuar a carga imagem por um fator multiplicativo uniforme $\frac{\mu^2}{4+\mu^2}$.

2.3 Equações de movimento

Nessa seção estudamos as equações de Euler-Lagrange do modelo (2). Para isso, vamos iniciar com a ação correspondente,

$$S = \int d^4x - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu - \frac{1}{2}\mu v^\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\nu\partial^\alpha A^\beta \delta(x^3 - a) . \tag{2.51}$$

Variando a ação (2.51) obtemos

$$\delta S = \int d^4x \delta A^\mu [-\partial^\nu F_{\mu\nu} - \mu\epsilon_{3\mu\alpha\beta}\delta(x^3 - a)\partial^\alpha A^\beta - J_\mu] \ , \tag{2.52}$$

portanto, a configuração de campos que minimiza a ação deve ser tal que $\delta S = 0$, ou seja,

$$\int d^4x \delta A^\mu [-\partial^\nu F_{\mu\nu} - \mu\epsilon_{3\mu\alpha\beta}\delta(x^3 - a)\partial^\alpha A^\beta - J_\mu] = 0 \ . \tag{2.53}$$

Sendo δA^μ pequeno mas arbitrário, devemos ter que

$$-\partial^\nu F_{\mu\nu} - \mu\epsilon_{3\mu\alpha\beta}\delta(x^3 - a)\partial^\alpha A^\beta - J_\mu = 0$$

$$\Rightarrow \ -\partial^\nu F_{\mu\nu} - \mu\epsilon_{3\mu\alpha\beta}\delta(x^3 - a)\partial^\alpha A^\beta = J_\mu \ , \tag{2.54}$$

onde $\mathcal{F}_{3\mu} = \epsilon_{3\lambda\mu\nu}\partial^\lambda A^\nu$ é o tensor dual de $F_{3\mu}$.

Para interpretarmos melhor as equações (2.54), vamos tomar os casos onde $\mu = 0$ e $\mu = i$ $(i = 1, 2, 3)$, respectivamente

$$-\partial^\nu F_{0\nu} + \mu\delta(x^3 - a)\mathcal{F}_{30} - J_0 = 0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \rho - \mu\delta(x^3 - a)\vec{B}.\hat{z} \tag{2.55}$$

$$-\partial^\nu F_{i\nu} + \mu\delta(x^3 - a)\mathcal{F}_{3i} - J_i = 0$$

$$-\partial^0 F_{i0} + \partial^j F_{ij} = -\mu\delta(x^3 - a)\mathcal{F}_{3i} + J_i$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\delta(x^3 - a)(\vec{E} \times \hat{z}) \tag{2.56}$$

É interessante notar que as equações de Maxwell com fontes apresentam uma dependência nos campos e não somente em suas derivadas. Mais especificamente, as componentes do campo elétrico paralelas à superfície a componente do campo magnético perpendicular à superfície, sob a superfície, são fontes para o rotacional do campo magnético e para o divergente do campo elétrico, respectivamente.

CAPÍTULO 3

Lagrangeana com dois campos

Nesse capítulo estudaremos um modelo tipo Chern-Simons composto por dois campos para descrever superfícies materiais. Como fizemos no capítulo anterior, vamos nos restringir para o caso de uma superfície plana infinita. Vamos adotar um sistema de coordenadas onde essa superfície se localiza no plano $x^3 = a$. O campo eletromagnético será designado por A^μ, sendo definido em todo o espaço. Nesse modelo consideramos um segundo campo de natureza vetorial, porém definido apenas sob a superfície. Designamos esse segundo campo por B^μ com $\mu = 0, 1, 2$. Note que B^μ só deve depender das coordenadas paralelas à superfície x^0, x^1, x^2.

A lagrangeana do modelo proposto é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2$$
$$+\left(-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha 3}B_\mu\partial_\nu B_\alpha - I_\mu B^\mu - \frac{1}{2\beta}(\partial_\mu B^\mu)^2\right)\delta(x^3 - a)$$
$$-\left(\frac{\mu}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha 3}A_\mu(\partial_\nu B_\alpha) + \frac{\mu}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha 3}B_\mu(\partial_\nu A_\alpha)\right)\delta(x^3 - a)\ , \qquad (3.1)$$

onde definimos o tensor intensidade de campo para o campo B^μ,

$$G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = (\partial_{\parallel\mu}B_\nu - \partial_{\parallel\nu}B_\mu)(\partial_{\parallel\nu}B_\mu - \partial_{\parallel\mu}B_\nu) \qquad (3.2)$$

O primeiro termo do lado direito de (3.1) é a lagrangiana de Maxwell, o segundo termo dá o acoplamento do campo de Maxwell com sua fonte externa e o terceiro é o termo de fixação de calibre para o campo de Maxwell, no o calibre de Lorentz.

O quarto, quinto, sexto e sétimo termos da lagrangiana (3.1) envolvem somente o campo B^μ e estão definidos apenas sobre a superfície $x^3 = a$. Com eles, podemos perceber que B^μ se caracteriza por ser um campo tipo Chern-Simons de massa m e definido somente no plano $x^3 = a$. O sétimo termo é apenas para fixação do calibre de Lorentz para o campo B^μ.

Os dois últimos termos fornecem um acoplamento entre o campo eletromagnético A^μ e o campo de Chern-Simons B^μ. Com uma integração por partes, podemos mostrar que esses termos são iguais. Por conveniência futura, vamos deixar a lagrangiana do modelo escrita na forma (3.1). Os últimos termos também estão definidos somente sobre a superfície $x^3 = a$.

Por conveniência de notação, vamos usar as seguintes definições:

- $\mathcal{L}_{Max} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2$: lagrangeana de Maxwell;
- $\mathcal{L}_{CS} = \Big(-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha 3}B_\mu\partial_\nu B_\alpha - I_\mu B^\mu - \frac{1}{2\beta}(\partial_\mu B^\mu)^2\Big)\delta(x^3 - a)$: lagrangeana localizada em $x^3 = a$ para o campo $B^\mu(x^0, x^1, x^2)$;
- $\mathcal{L}_{Int}\Big(-\frac{\mu}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha 3}A_\mu(\partial_\nu B_\alpha) - \frac{\mu}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha 3}B_\mu(\partial_\nu A_\alpha)\Big)\delta(x^3 - a)$: lagrangeana de acoplamento entre os campos A e B.

Com isso, podemos reescrever a lagrangeana (3.1) como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Max} + \mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_{Int}\ . \tag{3.3}$$

Ressaltamos também o papel de cada um dos parâmetros da lagrangeana (3.1):

- m representa a massa do campo de Chern-Simons;
- μ é a constante de acoplamento entre os campos A e B;
- J_μ é a fonte externa do campo A;
- I_μ é a fonte externa do campo B;
- α é o parâmetro de fixação de calibre do campo A;
- β é o parâmetro de fixação de calibre do campo B;

O modelo (3.1) é mais rico do que aquele apresentado no capítulo (2), pois temos agora dois parâmetros ajustáveis: a constante de acoplamento μ e a massa do campo de Chern-Simons m.

Vamos agora investigar alguns aspectos do modelo proposto para ver que tipo de fronteira ele poderia descrever.

3.1 Lagrangeana Efetiva

O campo B no modelo (3.1) exerce um papel coadjuvante, sendo sua presença utilizada na tentativa de descrever efetivamente o comportamento de uma superfície material. Nesse contexto, vamos buscar por uma lagrangeana efetiva para o campo eletromagnético A^μ a partir de (3.1). Vamos começar considerando o funcional gerador [33, 22]

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}A \;\; \mathcal{D}B \quad \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathcal{L}\right] \\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}A \;\; \mathcal{D}B \quad \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathcal{L}_{Max}+\mathcal{L}_{CS}+\mathcal{L}_{Int}\right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sendo $\mathcal{L}_{Max}$ dependente somente do campo A, $\mathcal{L}_{CS}$ dependente somente do campo B e $\mathcal{L}_{Int}$ dependente dos campos A e B. Podemos reescrever 3.4 da seguinte maneira

$$\mathcal{Z}_{[J]} = \mathcal{N}\int \mathcal{D}A \;\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathcal{L}_{Max}\right)\int \mathcal{D}B \;\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathcal{L}_{CS}+\mathcal{L}_{Int}\right) \tag{3.5}$$

Se efetuarmos a segunda integral funcional em (3.5) (a integral em B), vamos ficar com um integrando que depende apenas de A e poderemos identificar uma lagrangeana efetiva para esse campo.

O integrando da segunda exponencial pode ser manipulado como segue:

$$\begin{aligned} &\int d^4x\mathcal{L}_{CS}+\mathcal{L}_{Int} = \\ &\int d^4x\left[-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}+\frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha 3}B_\mu\partial_\nu B_\alpha - I_\mu B^\mu - \frac{1}{2\beta}(\partial_\mu B^\mu)^2\right]\delta(x^3-a) \\ &-\int d^4x\left[\frac{\mu}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha 3}A_\mu(\partial_\nu B_\alpha)+\frac{\mu}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha 3}B_\mu(\partial_\nu A_\alpha)\right]\delta(x^3-a) \\ &= \int d^4x\left[\frac{1}{2}B_\mu\partial_\lambda\partial^\lambda\eta^{\mu\nu}B_\nu+\frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}B_\mu\partial_\alpha B_\nu - \right. \\ &\left. I_\mu B^\mu - \frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha 3}B_\mu\partial_\nu A_\alpha\right]\delta(x^3-a) \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde escolhemos o termo de calibre $\beta = 1$ e eliminamos os termos de superfície.

Podemos integrar (3.6) em dx^3, o que fornece

$$\begin{aligned} &\int d^4x\mathcal{L}_{CS}+\mathcal{L}_{Int} = \\ &= \int d^3x_\parallel\left[\frac{1}{2}B_\mu(\partial_\lambda\partial^\lambda\eta_\parallel^{\mu\nu}+m\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\partial_\alpha)B_\nu - B_\mu\left(I^\mu+\frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\partial_\alpha A_\nu(x_\parallel,a)\right)\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

Vamos definir agora o operador diferencial

$$O^{\mu\nu}(x_{\|}) = \partial_\lambda \partial^\lambda \eta_{\|}^{\mu\nu} + m\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\partial_\alpha \ , \tag{3.8}$$

e a quantidade

$$K^\mu(x_{\|}, a) = I^\mu + \frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\partial_\alpha A_\nu(x_{\|}, a) \ , \tag{3.9}$$

para reescrever a integral (3.7) na forma compacta

$$\int d^4x \mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_{Int} = \int d^3x \frac{1}{2} B_\mu(x) O^{\mu\nu}(x_{\|}) B_\nu(x) - B_\mu(x) K^\mu(x_{\|}, a) \ . \tag{3.10}$$

Levando (3.10) na segunda integral funcional em (3.6) obtemos

$$\int \mathcal{D}B \ \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int d^4x \mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_{Int}\right) =$$

$$= \int \mathcal{D}B \ \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^3x \frac{1}{2} B_\mu(x) O^{\mu\nu}(x_{\|}) B_\nu(x) - B_\mu(x) K^\mu(x_{\|}, a)\right] . \tag{3.11}$$

É importante observar que o operador (3.8) é o operador diferencial de Chern-Simons, seu propagador deve satisfazer a equação diferencial

$$O^{\mu\nu} G_{(CS)\nu\lambda}(x_{\|} - y_{\|}) = \eta^\mu_{\|\lambda} \delta^3(x_{\|} - y_{\|}) \ . \tag{3.12}$$

No espaço dos momentos a equação acima se torna

$$\tilde{G}_{(CS)\nu\lambda}(p_{\|})[-p_{\|}^2 \eta_{\|}^{\mu\nu} - im\epsilon^{\mu\alpha\nu 3} p_{\|\alpha}] = \eta^\mu_{\|\lambda} \tag{3.13}$$

Para resolvermos, lançaremos mão do seguinte ansatz

$$\tilde{G}_{(CS)\mu\kappa}(p_{\|}) = A\eta_{\|\mu\kappa} + Bp_{\|\mu}p_{\|\kappa} - iC\epsilon_{\mu\rho\kappa 3} p_{\|}^\rho \ , \tag{3.14}$$

sendo A, B e C funções do momento $p_{\|}$ a serem determinadas.

Substituindo (3.14) em (3.13) devemos ter que

$$[-p_{\|}^2 \eta_{\|}^{\mu\nu} - im\epsilon^{\mu\alpha\nu 3} p_{\|\alpha}][A\eta_{\|\mu\kappa} + Bp_{\|\mu}p_{\|\kappa} - iC\epsilon_{\mu\rho\kappa 3} p_{\|}^\rho] = \eta^\kappa_{\|\nu} \ . \tag{3.15}$$

Efetuando as operações do lado esquerdo da equação acima e comparando, termo a termo, com o lado direito, somos levados ao sistema

$$\eta^\nu_{\|\kappa}(-p_{\|}^2 A + mCp_{\|}^2) = \eta^\nu_{\|\kappa}$$

$$p_{\|}^\nu p_{\|}^\kappa(-p_{\|}^2 B - mC) = 0$$

$$i\epsilon^{\nu}_{\rho\kappa 3}p^{\rho}_{\|}(p^2_{\|}C - mA) = 0 \ , \tag{3.16}$$

que tem a seguinte solução

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{p^2_{\|} - m^2} \\ B &= \frac{m^2}{(p^2_{\|})^2(p^2_{\|} - m^2)} \\ C &= -\frac{m}{p^2_{\|}(p^2_{\|} - m^2)} \ . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Levando os coeficientes (3.17) em (3.14) obtemos o propagador de Chern-Simons no espaço dos momentos

$$\tilde{G}^{\mu\kappa}_{(CS)}(p_{\|}) = -\frac{\eta^{\mu\kappa}_{\|}}{p^2_{\|} - m^2} + m^2\frac{p^{\mu}_{\|}p^{\kappa}_{\|}}{(p^2_{\|})^2(p^2_{\|} - m^2)} + im\frac{\epsilon^{\mu\rho\kappa 3}p_{\|\rho}}{(p^2_{\|})(p^2_{\|} - m^2)} \ . \tag{3.18}$$

Portanto, o propagador de Chern-Simons no espaço de coordenadas é:

$$\begin{aligned} G^{\mu\kappa}_{(CS)}(x_{\|} - y_{\|}) &= \int \frac{d^3p_{\|}}{(2\pi)^3}\tilde{G}^{\mu\kappa}_{(CS)}(p_{\|})e^{-ip_{\|}(x_{\|} - y_{\|})} \\ &= \int \frac{d^3p_{\|}}{(2\pi)^3}\left(-\frac{\eta^{\mu\kappa}_{\|}}{p^2_{\|} - m^2} + m^2\frac{p^{\mu}_{\|}p^{\kappa}_{\|}}{(p^2_{\|})^2(p^2_{\|} - m^2)} \right. \\ &\qquad \left. + im\frac{\epsilon^{\mu\rho\kappa 3}p_{\|\rho}}{(p^2_{\|})(p^2_{\|} - m^2)}\right)e^{-ip_{\|}(x_{\|} - y_{\|})} \ . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Seguimos agora o procedimento padrão no cálculo da integral funcional (3.11). Efetuamos a translação no campo B

$$B_{\mu}(x_{\|}) \longrightarrow B_{\mu}(x_{\|}) + \int d^3y_{\|}G_{(CS)\mu\psi}(x_{\|} - y_{\|})K^{\psi}(y_{\|}, a) \ , \tag{3.20}$$

o que faz com que

$$\begin{aligned} &\int d^3x_{\|}\frac{1}{2}B_{\mu}(x_{\|})O^{\mu\nu}(x_{\|})B_{\nu}(x_{\|}) - B_{\mu}(x_{\|})K^{\mu}(x_{\|}, a) \longrightarrow \\ &\qquad \longrightarrow \frac{1}{2}\int d^3x_{\|}B_{\mu}(x_{\|})O^{\mu\nu}(x_{\|})B_{\nu}(x_{\|}) \\ &-\frac{1}{2}\int d^3y_{\|}K^{\mu}(x_{\|}, a)G_{(CS)\mu\psi}(x_{\|} - y_{\|})K^{\psi}(y_{\|}, a) \ , \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde efetuamos algumas manipulações simples e usamos a propriedade satisfeita pelo propagador de Chern-Simons $G_{(CS)\mu\psi}(x_{\|} - y_{\|}) = G_{(CS)\psi\mu}(y_{\|} - x_{\|})$.

Na integral acima vemos que somente o termo $K^{\mu}(x_{\parallel}, a)G_{\mu\psi}(x_{\parallel} - y_{\parallel})K^{\psi}(y_{\parallel}, a)$ depende do campo A. Substituindo a equação (3.21) na integral funcional (3.11) e levando o resultado no funcional gerador (3.6), podemos escrever

$$\mathcal{Z}[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}B \ \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^3x_{\parallel}\frac{1}{2}B_{\mu}(x_{\parallel})O^{\mu\nu}(x_{\parallel})B_{\nu}(x_{\parallel})\right]$$
$$\int \mathcal{D}A \ \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathcal{L}_{Max}\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\int d^4y_{\parallel}K^{\mu}(x)G_{(CS)\mu\psi}(x_{\parallel} - y_{\parallel})K^{\psi}(y)\delta(x^3 - a)\delta(y^3 - a)\right) . \quad (3.22)$$

A integral funcional $\int \mathcal{D}B \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^3x_{\parallel}\frac{1}{2}B_{\mu}(x_{\parallel})O^{\mu\nu}(x_{\parallel})B_{\nu}(x_{\parallel})\right]$ não depende de A e será englobada em uma redefinição da constante $\mathcal{N}$. Assim ficamos com

$$\mathcal{Z}[J] = \bar{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}A \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathcal{L}_{Max}\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\int d^4yK^{\mu}(x)G_{(CS)\mu\psi}(x_{\parallel} - y_{\parallel})K^{\psi}(y)\delta(x^3 - a)\delta(y^3 - a)\right) . \quad (3.23)$$

Da expressão acima podemos identificar uma ação efetiva para o campo A

$$\begin{aligned} S_{ef} &= \int d^4x \ d^4y \ \ \mathcal{L}_{Max} - \frac{1}{2}K^{\mu}(x)G_{(CS)\mu\psi}(x_{\parallel} - y_{\parallel})K^{\psi}(y)\delta(x^3 - a)\delta(y^3 - a) \\ &= \int d^4x \ d^4y \ \ \mathcal{L}_{Max} - \frac{1}{2}\left[I^{\mu}(x_{\parallel}) + \frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta 3}\partial_{\alpha}A_{\beta}(x)\right]G_{(CS)\mu\psi}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \\ &\quad \times \left[I^{\psi}(y_{\parallel}) + \frac{\mu}{2}\epsilon^{\psi\kappa\lambda 3}\partial_{\kappa}A_{\lambda}(y)\right]\delta(x^3 - a)\delta(y^3 - a) \\ &= \int d^4x \ d^4y \ \ \mathcal{L}_{Max} - \frac{1}{2}\left[I^{\mu}(x_{\parallel}) + \frac{\mu}{2}\mathcal{F}^{\mu 3}(x)\right]G_{(CS)\mu\psi}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \\ &\quad \times \left[I^{\psi}(y_{\parallel}) + \frac{\mu}{2}\mathcal{F}^{\psi 3}(y)\right]\delta(x^3 - a)\delta(y^3 - a) \ , \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde na segunda e terceira linha usamos a definição (3.9) e na quarta e quinta linha usamos o fato de que $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta\nu}F_{\alpha\beta} = \epsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\partial_{\alpha}A_{\beta}$.

Podemos também identificar uma lagrangeana efetiva para o campo A, com $S_{ef} = \int d^4x\mathcal{L}_{ef}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} &= \mathcal{L}_{Max} - \frac{1}{2}\int d^4y\left[I^{\mu}(x_{\parallel}) + \frac{\mu}{2}\mathcal{F}^{\mu 3}(x)\right]G_{(CS)\mu\psi}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \\ &\quad \times \left[I^{\psi}(y_{\parallel}) + \frac{\mu}{2}\mathcal{F}^{\psi 3}(y)\right]\delta(x^3 - a)\delta(y^3 - a) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Daqui por diante vamos considerar que não temos fontes externas para o campo B, ou seja, vamos tomar $I^{\mu}(x_{\parallel}) = I^{\psi}(y_{\parallel}) = 0$.

As equações de movimento podem ser obtidas tomando a variação da ação nula, $\delta S_{ef} = 0$, para pequenas variações de A. Assim sendo, da equação (3.24) obtemos

$$\delta S_{ef} = \int d^4x \; d^4y \; \delta\mathcal{L}_{Max}$$
$$-\frac{\mu^2}{8}\delta[\mathcal{F}^{\mu 3}(x)G_{(CS)\mu\psi}(x_\parallel - y_\parallel)\mathcal{F}^{\psi 3}(y)]\delta(x^3-a)\delta(y^3-a)\;. \tag{3.26}$$

Variando a ação acima, usando a propriedade $G_{\mu\psi}(x_\parallel - y_\parallel) = G_{\psi\mu}(y_\parallel - x_\parallel)$ e efetuando algumas manipulações simples temos as equações de Euler-Lagrange

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} - J^\mu + \delta(x^3-a)\int d^4y\frac{\mu^2}{4}\epsilon^{\sigma\rho\mu 3}[\partial_\rho G_{(CS)\sigma\psi}(x_\parallel - y_\parallel)]\mathcal{F}^{\psi 3}(y)\delta(y^3-a) = 0 \tag{3.27}$$

Da equação (3.27) podemos ver que o tensor intensidade de campo dual $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ é fonte para o tensor intensidade de campo. Essa contribuição se dá somente sob a superfície e se caracteriza por ser não local, ou seja, as derivadas de $F^{\mu\nu}$ em um dado ponto do espaço dependem de $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ avaliado em toda a extensão da superfície $x^3 = a$. A característica da não localidade é comum quando estamos lidando com teorias efetivas.

Substituindo a equação (3.19) para $G_{\sigma\psi}(x_\parallel - y_\parallel)$ em (3.27) e efetuando algumas manipulações simples, que vamos suprimir nesse texto, obtemos

$$\partial_\nu F^{\nu\mu}(x) - J^\mu(x)$$
$$-\delta(x^3-a)\int d^4y\;\frac{\mu^2}{4}\int\frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\left[m\mathcal{F}^{\mu 3}(y) + \frac{mp_\parallel^\mu p_{\parallel\psi}\mathcal{F}^{\psi 3}(y)}{p_\parallel^2} + i\epsilon_\psi^{\rho\mu 3}p_{\parallel\rho}\mathcal{F}^{\psi 3}(y)\right]$$
$$\times\frac{e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)}}{p_\parallel^2 - m^2}\delta(y^3-a) = 0\;. \tag{3.28}$$

A integração sobre o segundo termo do integrando é nula. Isso pode ser visto como segue,

$$\int d^4y\int\frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\frac{mp_\parallel^\mu p_{\parallel\psi}\mathcal{F}^{\psi 3}(y)}{p_\parallel^2}\frac{e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)}}{p_\parallel^2 - m^2}\delta(y^3-a) =$$
$$= \int d^4y\int\frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\frac{mp_\parallel^\mu\mathcal{F}^{\psi 3}(y)}{p_\parallel^2}\frac{1}{p_\parallel^2 - m^2}(-i)\partial_{\parallel\psi(y)}e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)}\delta(y^3-a)$$
$$= \int d^4y\int\frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\frac{mp_\parallel^\mu(\partial_{\parallel\psi(y)}\mathcal{F}^{\psi 3}(y))}{p_\parallel^2(p_\parallel^2 - m^2)}ie^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)}\delta(y^3-a) = 0\;, \tag{3.29}$$

onde efetuamos uma integração por partes na terceira linha e usamos o fato de que $\partial_{\parallel\psi(y)}\mathcal{F}^{\psi 3}(y) = \partial_{\parallel\psi(y)}\partial^\alpha_{\parallel(y)}\epsilon^{\psi}{}_{3\alpha\beta}A^\beta(y) = 0$.

A integração do último termo em (3.28) pode ser escrita em uma forma mais conveniente, da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&\int d^4y \int \frac{d^3p_\|}{(2\pi)^3} i\epsilon_\psi^{\rho\mu 3} p_{\|\rho} \mathcal{F}^{\psi 3}(y) \frac{e^{-ip_\|(x_\|-y_\|)}}{p_\|^2 - m^2}\delta(y^3-a) = \\
&= \int d^4y \int \frac{d^3p_\|}{(2\pi)^3} \epsilon_\psi^{\rho\mu 3} \mathcal{F}^{\psi 3}(y) \partial_{\|\rho(y)} \frac{e^{-ip_\|(x_\|-y_\|)}}{p_\|^2 - m^2}\delta(y^3-a) = \\
&= -\int d^4y \int \frac{d^3p_\|}{(2\pi)^3} \epsilon_\psi^{\rho\mu 3} (\partial_{\|\rho(y)} \mathcal{F}^{\psi 3}(y)) \frac{e^{-ip_\|(x_\|-y_\|)}}{p_\|^2 - m^2}\delta(y^3-a)\ , \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

onde na terceira linha efetuamos uma intgração por partes.

Levando os resultados (3.29) e (3.30) na equação (3.28) obtemos

$$\begin{aligned}
&\partial_\nu F^{\nu\mu}(x) - J^\mu(x) \\
&-\delta(x^3-a)\int d^4y\ \frac{\mu^2}{4}\int \frac{d^3p_\|}{(2\pi)^3}\left[m\mathcal{F}^{\mu 3}(y) + \epsilon_{\psi\rho}{}^{\mu 3}\partial^\rho_{\|(y)}\mathcal{F}^{\psi 3}(y)\right] \\
&\times \frac{e^{-ip_\|(x_\|-y_\|)}}{p_\|^2 - m^2}\delta(y^3-a) = 0\ . \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

O termo entre colchetes na equação acima não depende de $p_\|$. Sendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\partial_\nu F^{\nu\mu}(x) - J^\mu(x) \\
&-\delta(x^3-a)\int d^4y\ \frac{\mu^2}{4}\delta(y^3-a)\left[m\mathcal{F}^{\mu 3}(y) + \epsilon_{\psi\rho}{}^{\mu 3}\partial^\rho_{\|(y)}\mathcal{F}^{\psi 3}(y)\right] \\
&\times \int \frac{d^3p_\|}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ip_\|(x_\|-y_\|)}}{p_\|^2 - m^2} = 0\ . \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Integrando em $d^3p_\|$ na equação acima, teremos

$$\int d^3p_\| \frac{e^{-ip_\| z_\|}}{p_\|^2 - m^2} = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-m\sqrt{z_\|^2}}}{\sqrt{z_\|^2}}\ . \qquad (3.33)$$

Com isso, temos finalmente, as equações de movimento

$$\begin{aligned}
&\delta(x^3-a)\int d^4y\ \frac{\mu^2}{128\pi^4}\delta(y^3-a)\frac{e^{-m\sqrt{(x_\|-y_\|)^2}}}{\sqrt{(x_\|-y_\|)^2}}\left[m\mathcal{F}^{\mu 3}(y) + \epsilon_{\psi\rho}{}^{\mu 3}\partial^\rho_{\|(y)}\mathcal{F}^{\psi 3}(y)\right] \\
&+\partial_\nu F^{\nu\mu}(x) - J^\mu(x) = 0 \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Note que fica explícito a não localidade do modelo, pois as derivadas de $F^{\mu\nu}(x)$ têm como fonte os valores de $\mathcal{F}^{\mu 3}(y)$ avaliados ao longo de toda a superfície.

Para ser mais explícito, vamos escrever a equações acima separando o caso onde $\mu = 0$ e o caso de $\mu = i$.

Vamos iniciar com o caso $\mu = 0$, como segue,

$$\delta(x^3-a)\int d^4y\ \frac{\mu^2}{128\pi^4}\delta(y^3-a)\frac{e^{-m\sqrt{(x_\parallel-y_\parallel)^2}}}{\sqrt{(x_\parallel-y_\parallel)^2}}\left[m\mathcal{F}^{03}(y)+\epsilon_{\psi\rho}{}^{03}\partial^{\rho}_{\parallel(y)}\mathcal{F}^{\psi 3}(y)\right]$$
$$+\partial_\nu F^{\nu 0}(x)-J^0(x)=0\Rightarrow$$
$$\delta(x^3-a)\int d^4y\ \frac{\mu^2}{128\pi^4}\delta(y^3-a)\frac{e^{-m\sqrt{(x_\parallel-y_\parallel)^2}}}{\sqrt{(x_\parallel-y_\parallel)^2}}\left[-mB^3(y)+\vec{\nabla}_{\parallel(y)}\cdot\vec{E}_\parallel(y)\right]$$
$$\vec{\nabla}.\vec{E}(x)-\rho(x)=0 \tag{3.35}$$

Para as componentes espaciais, $\mu = i$, em (3.34) procedemos da seguinte forma

$$\delta(x^3-a)\int d^4y\ \frac{\mu^2}{128\pi^4}\delta(y^3-a)\frac{e^{-m\sqrt{(x_\parallel-y_\parallel)^2}}}{\sqrt{(x_\parallel-y_\parallel)^2}}\left[m\mathcal{F}^{i3}(y)+\epsilon_{\psi\rho}{}^{i3}\partial^{\rho}_{\parallel(y)}\mathcal{F}^{\psi 3}(y)\right]$$
$$+\partial_\nu F^{\nu i}(x)-J^i(x)=0\Rightarrow$$
$$\delta(x^3-a)\int d^4y\ \Bigg[\frac{\mu^2}{128\pi^4}\delta(y^3-a)\frac{e^{-m\sqrt{(x_\parallel-y_\parallel)^2}}}{\sqrt{(x_\parallel-y_\parallel)^2}}\times$$
$$\left[m(\hat{z}\times\vec{E}(y))-\partial_0\vec{E}(y)-(\hat{z}\times\vec{\nabla}_\parallel)(\vec{B}(y)\cdot\hat{z})\right]\Bigg]$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(x)-\partial_0\vec{E}(x)-\vec{J}(x)=0 \tag{3.36}$$

3.2 Propagador da teoria

Na seção anterior consideramos a teoria efetiva para o modelo (3.1), na qual fizemos a integração funcional no campo B.

Nessa seção vamos considerar o modelo (3.1) completo e calcular o propagador correspondente. Desconsiderando termos de superfície e usando o calibre no qual $\alpha = \beta = 1$, podemos reescrever a lagrangeana (3.1) como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}A_\mu\eta^{\mu\nu}\partial_\lambda\partial^\lambda A_\nu+\left[\frac{1}{2}B_\mu(\eta^{\mu\nu}_\parallel\partial_{\parallel\lambda}\partial^\lambda_\parallel+m\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\partial_{\parallel\alpha})B_\nu-I_\mu B^\mu\right]\delta(x^3-a)\\ &- J_\mu A^\mu+\frac{1}{2}\left[A_\mu\left(-\frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\partial_{\parallel\alpha}\right)B_\nu+B_\mu\left(-\frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\partial_{\parallel\alpha}\right)A_\nu\right]\delta(x^3-a)\end{aligned} \tag{3.37}$$

A equação acima contém termos quadráticos em A e em B assim como termos de acoplamento entre A eB, todos lineares tanto em A como em B. Por conveniência, vamos escrever a equação (3.37) em uma estrutura matricial, como segue

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} A_\mu & B_\mu \end{bmatrix}\times \\
&\begin{bmatrix} \eta^{\mu\nu}\partial_\lambda\partial^\lambda & -\frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\delta(x^3-a)\partial_{\|\alpha} \\ -\frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\delta(x^3-a)\partial_{\|\alpha} & \delta(x^3-a)(\eta^{\mu\nu}\partial_{\|_\lambda}\partial_\|^\lambda + m\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\partial_{\|\alpha}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_\nu \\ B_\nu \end{bmatrix} \\
&-\begin{bmatrix} A^\mu & B^\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_\mu \\ I_\mu\delta(x^3-a) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Note que a equação (3.38) contém apenas um termo quadrático e um termo linear na matriz $\begin{bmatrix} A_\mu & B_\mu \end{bmatrix}$. Portanto, o modelo pode ser resolvido exatamente. Para isso, vamos começar definindo os seguintes operadores diferenciais matriciais:

$$
\begin{aligned}
V^{\mu\nu}(x) &= \begin{bmatrix} \eta^{\mu\nu}\partial_\lambda\partial^\lambda & -\frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\delta(x^3-a)\partial_{\|\alpha} \\ -\frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\delta(x^3-a)\partial_{\|\alpha} & \delta(x^3-a)(\eta^{\mu\nu}\partial_{\|_\lambda}\partial_\|^\lambda + m\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\partial_{\|\alpha}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x) \\ v_{21}(x) & v_{22}(x) \end{bmatrix} \\
V_0^{\mu\nu}(x) &= \begin{bmatrix} \eta^{\mu\nu}\partial_\lambda\partial^\lambda & 0 \\ 0 & \delta(x^3-a)(\eta^{\mu\nu}\partial_{\|_\lambda}\partial_\|^\lambda + m\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\partial_{\|\alpha}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_{11}(x) & 0 \\ 0 & v_{22}(x) \end{bmatrix} \\
\Delta V^{\mu\nu}(x) &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\delta(x^3-a)\partial_{\|\alpha} \\ -\frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\delta(x^3-a)\partial_{\|\alpha} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & v_{12}(x) \\ v_{21}(x) & 0 \end{bmatrix} .
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

onde definimos os operadores

$$
\begin{aligned}
v_{11}(x) &= \eta^{\mu\nu}\partial_\lambda\partial^\lambda \\
v_{22}(x_\|) &= \delta(x^3-a)(\eta^{\mu\nu}\partial_{\|_\lambda}\partial_\|^\lambda + m\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\partial_{\|\alpha}) \\
v_{12}(x_\|) &= v_{21}(x_\|) = -\frac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\delta(x^3-a)\partial_{\|\alpha} \, .
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

O operador $V^{\mu\nu}(x)$ é aquele encontrado na lagrangeana (3.38). O operador $V_0^{\mu\nu}(x)$ contém apenas os termos sem interação entre os campos A e B. Como esperado, $V_0^{\mu\nu}(x)$ é diagonal e seus termos são dados pelo operador de Maxwell e o de Chern-Simons (definidos, respectivamente, por v_{11} e v_{22}). O operador $\Delta V^{\mu\nu}(x)$ envolve somente os termos de interação entre os campos A e B. Note que com as definições (3.39) temos que

$$V^{\mu\nu} = V_0^{\mu\nu} + \Delta V^{\mu\nu} \tag{3.41}$$

O propagador do modelo é dado pela inversa do operador $V^{\mu\nu}(x)$, ou seja

$$V^{\mu\nu}(x)G_{\nu\sigma}(x,y) = \begin{bmatrix} \eta^{\mu}_{\sigma}\delta^4(x-y) & 0 \\ 0 & \eta^{\mu}_{\|\sigma}\delta^3(x_\| - y_\|)\delta(x^3-a) \end{bmatrix} . \tag{3.42}$$

É importante ter em mente que $G_{\nu\sigma}(x,y)$ deve ter uma estrutura matricial. Por conveniência, vamos definir a inversa do operador $V_0^{\mu\nu}$ como

$$V_0^{\mu\nu}(x)G_{0\nu\sigma}(x,y) = \begin{bmatrix} \eta^{\mu}_{\sigma}\delta^4(x-y) & 0 \\ 0 & \eta^{\mu}_{\|\sigma}\delta^3(x_\| - y_\|)\delta(x^3-a) \end{bmatrix} . \tag{3.43}$$

Vamos mostrar que a função de Green, definida em (3.42), satisfaz a relação

$$G_{\nu\sigma}(x,y) = G_{0\nu\sigma}(x,y) - \int d^4z G_{\nu\beta}(x,z)\Delta V^{\beta\kappa}(z)G_{0\kappa\sigma}(z,y) \ , \tag{3.44}$$

o que pode ser feito ao aplicarmos o operador $V^{\mu\nu}(x)$ definido em (3.39) em ambos os lados da equação (3.44),

$$\begin{aligned} V^{\mu\nu}(x)G_{\nu\sigma}(x,y) &= V^{\mu\nu}(x)G_{0\nu\sigma}(x,y) - V^{\mu\nu}(x)\int d^4z G_{\nu\beta}(x,z)\Delta V^{\beta\kappa}(z_\|)G_{0\kappa\sigma}(z,y) \\ &= V^{\mu\nu}(x)G_{0\nu\sigma}(x,y) - \int d^4z V^{\mu\nu}(x)G_{\nu\beta}(x,z)\Delta V^{\beta\kappa}(z)G_{0\kappa\sigma}(z,y) \end{aligned} \tag{3.45}$$

Na integral da última linha da equação acima temos a atuação de $V^{\mu\nu}(x)$ sob a função $G_{\nu\beta}(x,z)$, cujo resultado pode ser obtido pela equação (3.42), assim

$$\begin{aligned} &V^{\mu\nu}(x)G_{\nu\sigma}(x,y) = V^{\mu\nu}(x)G_{0\nu\sigma}(x,y) \\ &- \int d^4z \begin{bmatrix} \eta^{\mu}_{\beta}\delta^4(x-z) & 0 \\ 0 & \eta^{\mu}_{\|\beta}\delta^3(x_\| - z_\|)\delta(x^3-a) \end{bmatrix} \Delta V^{\beta\kappa}(z)G_{0\kappa\sigma}(z,y) \end{aligned} \tag{3.46}$$

Usando a definição de $\Delta V^{\beta\kappa}$ em (3.39) temos

$$V^{\mu\nu}(x)G_{\nu\sigma}(x,y) = V^{\mu\nu}(x)G_{0\nu\sigma}(x,y)$$

$$-\int d^4z \begin{bmatrix} \eta^{\mu}_{\beta}\delta^4(x-z) & 0 \\ 0 & \eta^{\mu}_{\|\beta}\delta^3(x_\| - z_\|)\delta(x^3-a) \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} 0 & \epsilon^{\kappa\alpha\beta 3}\delta(z^3-a)\Big(-\frac{\mu}{2}\Big)\partial_{\|\alpha(z)} \\ \epsilon^{\kappa\alpha\beta 3}\delta(z^3-a)\Big(-\frac{\mu}{2}\Big)\partial_{\|\alpha(z)} & 0 \end{bmatrix}$$
$$\times G_{0\kappa\sigma}(z,y)\ . \tag{3.47}$$

Vamos agora usar o fato de que $\delta^3(x_\| - z_\|)\delta(x^3-a)\delta(z^3-a) = \delta^4(x-z)\delta(x^3-a)$, $\delta^4(x-z)\delta(z^3-a) = \delta^4(x-z)\delta(x^3-a)$ para reescrever a equação (3.47) como

$$V^{\mu\nu}(x)G_{\nu\sigma}(x,y) = V^{\mu\nu}(x)G_{0\nu\sigma}(x,y)$$

$$-\int d^4z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \eta^{\mu}_{\beta}\delta^4(x-z)\epsilon^{\kappa\alpha\beta 3}\delta(x^3-a)\Big(-\frac{\mu}{2}\Big)\partial_{\|\alpha(z)}G_{0\kappa\sigma}(z,y)\ . \tag{3.48}$$

Integrando em d^4z e fazendo as manupulações necessárias, podemos identificar o operador $\Delta V^{\mu}_{\kappa}(x)$, dado pela definição (3.39). Assim, obtemos que

$$V^{\mu\nu}(x)G_{\nu\sigma}(x,y) = V^{\mu\nu}(x)G_{0\nu\sigma}(x,y) - \Delta V^{\mu\kappa}(x)G_{0\kappa\sigma}(x)\ . \tag{3.49}$$

Usando a equação (3.43) e que $V^{\mu\nu}(x) = V_0^{\mu\nu}(x) + \Delta V^{\mu\nu}(x)$ no lado direito da equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned} V^{\mu\nu}(x)G_{\nu\sigma}(x,y) &= V_0^{\mu\nu}(x)G_{0\nu\sigma}(x,y) + \Delta V^{\mu\nu}(x)G_{0\nu\sigma}(x,y) - \Delta V^{\mu\kappa}(x)G_{0\kappa\sigma}(x) \\ &= V_0^{\mu\nu}(x)G_{0\nu\sigma}(x,y) \end{aligned} \tag{3.50}$$

Comparando as equações 3.42 e 3.43, vemos que elas são iguais, o que demonstra a validade da equação (3.44).

Nosso modelo (3.1) tem simetria de translação nas coordenadas paralelas $x_\|$, sendo assim, vamos propor uma solução em integral de Fourier da seguinte forma

$$G_{\nu\sigma}(x,y) = \int \frac{d^3p_\|}{(2\pi)^3}\tilde{G}_{\nu\sigma}(p_\|; x^3, y^3)e^{-ip_\|(x_\| - y_\|)}\ . \tag{3.51}$$

A função de Green $G_{0\nu\sigma}(x,y)$ para o operador $V^{\mu\nu}(x)$ sem a interação é conhecida. Por conveniência, vamos escrevê-la como uma integral de Fourier

$$G_{0\kappa\sigma}(x,y) = \int \frac{d^3q_\|}{(2\pi)^3}\tilde{G}_{0\kappa\sigma}(q_\|; z^3, y^3)e^{-iq_\|(z_\| - y_\|)}\ . \tag{3.52}$$

Susbtituindo as equações (3.51) e (3.52) em (3.44) temos que

$$\int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)} = \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_{0\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)}$$
$$-\int d^4z \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_{\nu\beta}(p_\parallel;x^3,z^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel-z_\parallel)}\Delta V^{\beta\kappa}(z)$$
$$\times \int \frac{d^3q_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_{0\kappa\sigma}(q_\parallel;z^3,y^3)e^{-iq_\parallel(z_\parallel-y_\parallel)} \ . \tag{3.53}$$

Atuando com o operador $\Delta V^{\beta\kappa}(z)$ definido em (3.39) obtemos

$$\int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)} = \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_{0\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)}$$
$$-\int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\frac{d^3q_\parallel}{(2\pi)^3}\int dz^3\tilde{G}_{\nu\beta}(p_\parallel;x^3,z^3)e^{-ip_\parallel x_\parallel}e^{iq_\parallel y_\parallel}\delta(z^3-a)$$
$$\times \begin{bmatrix} 0 & \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3}q_{\parallel\alpha} \\ \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3}q_{\parallel\alpha} & 0 \end{bmatrix} \tilde{G}_{0\kappa\sigma}(q_\parallel;z^3,y^3)\Big(\int d^3z_\parallel e^{i(p_\parallel-q_\parallel)z_\parallel}\Big) \ . \tag{3.54}$$

Usando o fato de que $\int d^3z_\parallel e^{i(p_\parallel-q_\parallel)z_\parallel} = (2\pi)^3\delta^3(p_\parallel-q_\parallel)$ e integrando em $d^3q_\parallel$ e em dz^3 podemos finalmente escrever

$$\int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)} = \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_{0\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)}$$
$$-\int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3}\tilde{G}_{\nu\beta}(p_\parallel;x^3,a)\begin{bmatrix} 0 & \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3}p_{\parallel\alpha} \\ \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3}p_{\parallel\alpha} & 0 \end{bmatrix}\tilde{G}_{0\kappa\sigma}(p_\parallel;a,y^3)e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)}. \tag{3.55}$$

Da equação acima, podemos concluir que

$$\tilde{G}_{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3) = \tilde{G}_{0\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)$$
$$-\tilde{G}_{\nu\beta}(p_\parallel;x^3,a)\begin{bmatrix} 0 & \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3}p_{\parallel\alpha} \\ \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3}p_{\parallel\alpha} & 0 \end{bmatrix}\tilde{G}_{0\kappa\sigma}(p_\parallel;a,y^3) \ . \tag{3.56}$$

A equação acima é válida para quaisquer valores de x^3 e y^3. Vamos tomá-la no ponto $y^3 = a$,

$$\tilde{G}_{\nu\beta}(p_\parallel;x^3,a)\eta^\beta_\sigma = \tilde{G}_{0\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,a)$$
$$-\tilde{G}_{\nu\beta}(p_\parallel;x^3,a)\begin{bmatrix} 0 & \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3}p_{\parallel\alpha} \\ \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3}p_{\parallel\alpha} & 0 \end{bmatrix}\tilde{G}_{0\kappa\sigma}(p_\parallel;a,a) \ , \tag{3.57}$$

onde, no lado esquerdo, usamos que $\tilde{G}_{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3) = \tilde{G}_{\nu\beta}(p_\parallel;x^3,a)\eta^\beta_\sigma$.

Isolando $\tilde{G}_{0\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, a)$ podemos escrever

$$\tilde{G}_{0\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, a) = \tilde{G}_{\nu\beta}(p_\parallel; x^3, a) \times \begin{bmatrix} \eta^\beta_\sigma & \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3} p_{\parallel\alpha} \tilde{G}_{(CS)\kappa\sigma}(p_\parallel, a, a) \\ \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3} p_{\parallel\alpha} \tilde{G}_{(M)\kappa\sigma}(p_\parallel, a, a) & \eta^\beta_\sigma \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

Pela definição (3.43) e a definição do operador $V^{\mu\nu}(x)$ em (3.39), podemos mostrar que a matriz $G_{0\kappa\sigma}(x, y)$ é dada por

$$G_{0\kappa\sigma}(x, y) = \begin{bmatrix} G_{(M)\kappa\sigma}(x, y) & 0 \\ 0 & G_{(CS)\kappa\sigma}(x_\parallel, y_\parallel) \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

Onde

$$G_{(M)\kappa\sigma}(x, y) = \int \frac{d^3 p_\parallel}{(2\pi)^3} \frac{\eta_{\kappa\sigma}}{2\sqrt{-p_\parallel^2}} e^{-\sqrt{-p_\parallel^2}|x^3 - y^3|} \tag{3.60}$$

é a função de Green do operador de Maxwell, $\eta^{\mu\nu}\partial_\lambda\partial^\lambda$, discutido no capítulo anterior, e $G_{(CS)\kappa\sigma}(x_\parallel, y_\parallel)$ é o propagador de Chern-Simons, obtido na equação (3.19).

Vamos definir a matriz

$$\mathcal{M}^\beta{}_\sigma = \begin{bmatrix} \eta^\beta_\sigma & \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3} p_{\parallel\alpha} \tilde{G}_{(CS)\kappa\sigma}(p_\parallel, a, a) \\ \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3} p_{\parallel\alpha} \tilde{G}_{(M)\kappa\sigma}(p_\parallel, a, a) & \eta^\beta_\sigma \end{bmatrix} , \tag{3.61}$$

e reescrever a equação (3.58) como

$$\tilde{G}_{0\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, a) = \tilde{G}_{\nu\beta}(p_\parallel; x^3, a)\mathcal{M}^\beta{}_\sigma \; . \tag{3.62}$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima pela inversa de $\mathcal{M}^\beta{}_\sigma$ e usando o fato de que

$$\mathcal{M}^\beta{}_\sigma(\mathcal{M}^{-1})^\sigma{}_\alpha = \begin{bmatrix} \eta^\beta{}_\alpha & 0 \\ 0 & \eta^\beta{}_\alpha \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

podemos mostrar que

$$\tilde{G}_{\nu\alpha}(p_\parallel; x^3, a) = \tilde{G}_{0\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, a)(\mathcal{M}^{-1})^\sigma{}_\alpha \; . \tag{3.64}$$

Substituimos agora (3.64) em (3.56), o que resulta em

$$\tilde{G}_{\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, y^3) = \tilde{G}_{0\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, y^3)$$

$$-\tilde{G}_{0\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,a)(\mathcal{M}^{-1})^{\sigma}{}_{\beta}\begin{bmatrix} 0 & \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3}p_{\parallel\alpha} \\ \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3}p_{\parallel\alpha} & 0 \end{bmatrix}\tilde{G}_{0\kappa\sigma}(p_\parallel;a,y^3) \quad (3.65)$$

Pela equação (3.65) podemos ver que para encontrarmos $\tilde{G}_{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)$ devemos obter primeiro a função $\tilde{G}_{0\kappa\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)$ e posteriormente a matriz inversa $(\mathcal{M}^{-1})^{\sigma}{}_{\beta}$. Vamos iniciar com o cálculo de $\tilde{G}_{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)$.

Com as equações (3.59), (3.60) e a representação de Fourier (3.52), obtemos

$$\tilde{G}_{\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)=\begin{bmatrix} \tilde{G}_{(M)\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3) & 0 \\ 0 & \tilde{G}_{(CS)\nu\sigma}(p_\parallel) \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

onde $\tilde{G}_{(CS)\nu\sigma}(p_\parallel)$ é dado por (3.18) e

$$\tilde{G}_{(M)\nu\sigma}(p_\parallel;x^3,y^3)=\frac{\eta_{\nu\sigma}}{2\sqrt{-p_\parallel^2}}e^{-\sqrt{-p_\parallel^2}|x^3-y^3|} \quad (3.67)$$

Usando as equações (3.63), (3.66) e (3.61) e definindo os elementos da matriz inversa de $\mathcal{M}$ como

$$(\mathcal{M}^{-1})^{\sigma}_{\gamma}=\begin{bmatrix} A^{\sigma}_{\gamma} & B^{\sigma}_{\gamma} \\ C^{\sigma}_{\gamma} & D^{\sigma}_{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

podemos escrever

$$\mathcal{M}^{\beta}_{\sigma}(\mathcal{M}^{\sigma}_{\gamma})^{-1}=\begin{bmatrix} \eta^{\beta}_{\gamma} & 0 \\ 0 & \eta^{\beta}_{\gamma} \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \eta^{\beta}_{\sigma} & \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3}p_{\parallel\alpha}\tilde{G}_{(CS)\kappa\sigma}(p_\parallel) \\ \frac{i\mu}{2}\epsilon^{\beta\alpha\kappa 3}p_{\parallel\alpha}\tilde{G}_{(M)\kappa\sigma}(p_\parallel;a,a) & \eta^{\beta}_{\sigma} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{\sigma}_{\gamma} & B^{\sigma}_{\gamma} \\ C^{\sigma}_{\gamma} & D^{\sigma}_{\gamma} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \eta^{\beta}_{\gamma} & 0 \\ 0 & \eta^{\beta}_{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Os fatores A^{σ}_{γ}, B^{σ}_{γ}, C^{σ}_{γ} e D^{σ}_{γ} da definição (3.68) podem ser obtidos impondo-se a validade da equação (3.69). Vamos suprimir esses cálculos desse texto para facilitar a leitura. Os resultados são

$$A^{\sigma}{}_{\gamma}=\eta^{\sigma}{}_{\gamma}+\frac{(1+\chi_{(p_\parallel)}p_\parallel^2)\chi_{(p_\parallel)}p_\parallel^2-m^2\chi_{(p_\parallel)}^2p_\parallel^2}{m^2\chi_{(p_\parallel)}^2p_\parallel^2-(1+\chi_{(p_\parallel)}p_\parallel^2)^2}\eta^{\sigma}_{\parallel\gamma}$$
$$\frac{m^2\chi_{(p_\parallel)}^2-(1+\chi_{(p_\parallel)}p_\parallel^2)\chi_{(p_\parallel)}}{m^2\chi_{(p_\parallel)}^2p_\parallel^2-(1+\chi_{(p_\parallel)}p_\parallel^2)^2}p_\parallel^{\sigma}p_{\parallel\gamma}+\frac{im\chi_{(p_\parallel)}\epsilon^{\sigma}{}_{\kappa\gamma}{}^{3}p_\parallel^{\kappa}}{m^2\chi_{(p_\parallel)}^2p_\parallel^2-(1+\chi_{(p_\parallel)}p_\parallel^2)^2}\ , \quad (3.70)$$

$$C^{\sigma}{}_{\gamma} = \frac{i\mu}{4\sqrt{-p_{\parallel}^2}[m^2\chi_{(p_{\parallel})}^2 p_{\parallel}^2 - (1+\chi_{(p_{\parallel})}p_{\parallel}^2)^2]}$$
$$\times[im\chi_{(p_{\parallel})}(p_{\parallel}^{\sigma}p_{\parallel\gamma} - p_{\parallel}^2\eta_{\parallel\gamma}^{\sigma} - (1+\chi_{(p_{\parallel})}p_{\parallel}^2)\epsilon^{\sigma\alpha}{}_{\gamma}{}^{3}p_{\parallel\alpha}] \;, \tag{3.71}$$

$$D^{\sigma}{}_{\gamma} = \eta^{\sigma}{}_{\gamma} + \frac{(1+\chi_{(p_{\parallel})}p_{\parallel}^2)\chi_{(p_{\parallel})}p_{\parallel}^2 - m^2\chi_{(p_{\parallel})}^2 p_{\parallel}^2}{m^2\chi_{(p_{\parallel})}^2 p_{\parallel}^2 - (1+\chi_{(p_{\parallel})}p_{\parallel}^2)^2}\eta_{\parallel\gamma}^{\sigma} +$$
$$\frac{m^2\chi_{(p_{\parallel})}^2 - (1+\chi_{(p_{\parallel})}p_{\parallel}^2)\chi_{(p_{\parallel})}}{m^2\chi_{(p_{\parallel})}^2 p_{\parallel}^2 - (1+\chi_{(p_{\parallel})}p_{\parallel}^2)^2}p_{\parallel}^{\sigma}p_{\parallel\gamma} + \frac{im\chi_{(p_{\parallel})}\epsilon^{\sigma}{}_{\kappa\gamma}{}^{3}p_{\parallel}^{\kappa}}{m^2\chi_{(p_{\parallel})}^2 p_{\parallel}^2 - (1+\chi_{(p_{\parallel})}p_{\parallel}^2)^2} \;, \tag{3.72}$$

$$B^{\sigma}{}_{\gamma} = -\frac{i\mu}{2[m^2\chi_{(p_{\parallel})}^2 p_{\parallel}^2 - (1+\chi_{(p_{\parallel})}p_{\parallel}^2)^2](p_{\parallel}^2 - m^2)}$$
$$\times\left[im\left(-\eta_{\parallel\gamma}^{\sigma} + \frac{p_{\parallel}^{\sigma}p_{\parallel\gamma}}{p_{\parallel}^2}\right) + (1+\chi_{(p_{\parallel})}p_{\parallel}^2 - m\chi_{(p_{\parallel})})\epsilon^{\sigma\alpha}{}_{\gamma}{}^{3}p_{\parallel\alpha}\right] \;, \tag{3.73}$$

onde definimos a função

$$\chi_{(p_{\parallel})} = \frac{\mu^2}{8\sqrt{-p_{\parallel}^2}(p_{\parallel}^2 - m^2)} \;. \tag{3.74}$$

De posse dos coeficientes A, B, C e D e, portanto, da matriz inversa (3.68), usando as equações (3.18), (3.66) e (3.67) e efetuando diversas manipulações simples, porém longas, obtemos finalmente a transformada de Fourier do propagador

$$\tilde{G}_{\nu\sigma}(p_{\parallel};x^3,y^3) = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{(M)\nu\sigma}(p_{\parallel};x^3,y^3) & 0 \\ 0 & \tilde{G}_{(CS)\nu\sigma}(p_{\parallel}) \end{bmatrix}$$
$$-\begin{bmatrix} a_{11\nu\sigma}(p_{\parallel};x^3,y^3) & a_{12\nu\sigma}(p_{\parallel};x^3) \\ a_{21\nu\sigma}(p_{\parallel};y^3) & a_{22\nu\sigma}(p_{\parallel}) \end{bmatrix} \;, \tag{3.75}$$

onde definimos as funções

$$a_{11}(p_{\parallel};x^3,y^3) = \frac{\mu^2 e^{-\sqrt{-p_{\parallel}^2}(|x^3-a|+|a-y^3|)}}{16p_{\parallel}^2[m^2\chi_{(p_{\parallel})}^2 p_{\parallel}^2 - (1+\chi_{(p_{\parallel})}p_{\parallel}^2)^2](p_{\parallel}^2 - m^2)}$$
$$\times[(1+\chi_{(p_{\parallel})}p_{\parallel}^2 - m^2\chi_{(p_{\parallel})})(\eta_{\parallel\nu\sigma}p_{\parallel}^2 - p_{\parallel\nu}p_{\parallel\sigma}) - im\epsilon_{\nu\psi\sigma3}p_{\parallel}^{\psi}] \;, \tag{3.76}$$

$$a_{12}(p_\parallel; x^3) = -\frac{i\mu e^{-\sqrt{-p_\parallel^2}|x^3-a|}}{2\sqrt{-p_\parallel^2}[m^2\chi_{(p_\parallel)}^2 p_\parallel^2 - (1+\chi_{(p_\parallel)}p_\parallel^2)^2](p_\parallel^2 - m^2)}$$
$$\times \left[im\eta_{\parallel\nu\sigma} - \frac{im}{p_\parallel^2} p_{\parallel\nu} p_{\parallel\sigma} + (1 + p_\parallel^2 \chi_{(p_\parallel)} - m\chi_{(p_\parallel)})\epsilon_{\nu\psi\sigma 3} p_\parallel^\psi \right] , \quad (3.77)$$

$$a_{21}(p_\parallel; y^3) = -\frac{i\mu e^{-\sqrt{-p_\parallel^2}|a-y^3|}}{2\sqrt{-p_\parallel^2}[m^2\chi_{(p_\parallel)}^2 p_\parallel^2 - (1+\chi_{(p_\parallel)}p_\parallel^2)^2](p_\parallel^2 - m^2)}$$
$$\times \left[im\eta_{\parallel\nu\sigma} - \frac{im}{p_\parallel^2} p_{\parallel\nu} p_{\parallel\sigma} + (1 + p_\parallel^2 \chi_{(p_\parallel)} - m\chi_{(p_\parallel)})\epsilon_{\nu\psi\sigma 3} p_\parallel^\psi \right] , \quad (3.78)$$

$$a_{22}(p_\parallel) = -\frac{\mu^2}{4\sqrt{-p_\parallel^2}[m^2\chi_{(p_\parallel)}^2 p_\parallel^2 - (1+\chi_{(p_\parallel)}p_\parallel^2)^2](p_\parallel^2 - m^2)^2}$$
$$\times \Bigg[\eta_{\parallel\nu\sigma}[m^2(1-\chi_{(p_\parallel)}p_\parallel^2) + (1+\chi_{(p_\parallel)}p_\parallel^2)p_\parallel^2]$$
$$+ p_{\parallel\nu} p_{\parallel\sigma} \left(\frac{m^2}{p_\parallel^2}(\chi_{(p_\parallel)}p_\parallel^2 - 1) - (1+\chi_{(p_\parallel)}p_\parallel^2) \right)$$
$$+ im(m^2\chi_{(p_\parallel)} - 2 - \chi_{(p_\parallel)}p_\parallel^2)\epsilon_{\nu\psi\sigma 3} p_\parallel^\psi \Bigg] . \quad (3.79)$$

O propagador será dado pela integral (3.51) com (3.75), ou seja,

$$G_{\nu\sigma}(x,y) = \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3} \left[\begin{array}{cc} \tilde{G}_{(M)\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, y^3) & 0 \\ 0 & \tilde{G}_{(CS)\nu\sigma}(p_\parallel) \end{array} \right]$$
$$- \left[\begin{array}{cc} a_{11\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, y^3) & a_{12\nu\sigma}(p_\parallel; x^3) \\ a_{21\nu\sigma}(p_\parallel; y^3) & a_{22\nu\sigma}(p_\parallel) \end{array} \right] e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)} . \quad (3.80)$$

Note que o propagador (3.80) é dado pelo propagador sem o termo de interação acrescido de uma contribuição na qual se leva em conta a presença da fronteira. Vamos denotar essa contribuição por $\Delta G(x,y)$

$$\Delta G_{\nu\sigma}(x,y) = -\int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3} \left[\begin{array}{cc} a_{11\nu\sigma}(p_\parallel; x^3, y^3) & a_{12\nu\sigma}(p_\parallel; x^3) \\ a_{21\nu\sigma}(p_\parallel; y^3) & a_{22\nu\sigma}(p_\parallel) \end{array} \right] e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)} . \quad (3.81)$$

Se tomarmos o limite de acoplamanto nulo, ou seja, $\mu \to 0$, temos que $a_{11} = a_{22} = a_{12} = a_{21} = 0$ (e $\Delta G = 0$), e recuperamos o caso onde os campos de Maxwell e de Chern-Simons estão desacoplados.

De posse do propagador do modelo, podemos encontrar qualquer quantidade física relacionada ao sistema, clássica ou quântica.

3.3 Interação carga-superfície

Com o propagador devidamente calculado, na seção anterior, vamos estudar como se dá a interação entre uma carga pontual estacionária a superfície descrita pelo modelo (3.1).

Usando os mesmos argumentos empregados no capítulo anterior, podemos mostrar, para o modelo (3.1), que a energia de interação entre uma fonte externa e a superfície é dada por

$$E_{int} = \frac{1}{2T} \int d^4x d^4y (\mathcal{J}^{\mu})^t(x) \Delta G_{\mu\nu}(x,y) \mathcal{J}^{\nu}(y) \tag{3.82}$$

onde está implícito o limite $T \to \infty$, $\Delta G_{\mu\nu}(x,y)$ está definido em (3.81) e $\mathcal{J}^{\mu}(x)$ é a fonte externa, dada por

$$\mathcal{J}^{\mu}(x) = \begin{bmatrix} J^{\mu}(x) \\ I^{\mu}(x)\delta(x^3 - a) \end{bmatrix} \tag{3.83}$$

sendo $J^{\mu}(x)$ a fonte para o campo de Maxwell e $I^{\mu}(x)$ a fonte para o campo de Chern-Simons.

Para um sistema sem fontes para o campo de Chern-Simons e com uma carga pontual estacionária para o campo de Maxwell, localizada na posição $\vec{b}$, devemos tomar $I^{\mu}(x) = 0$ e $J^{\mu}(x) = q\eta_0^{\mu}\delta^3(\vec{x} - \vec{b})$. Com isso a equação (3.83) fica

$$\mathcal{J}^{\mu}(x) = \begin{bmatrix} J^{\mu}(x) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

e a energia (3.82) se torna

$$E_{int} = \frac{1}{2T} \int d^4x d^4y \begin{bmatrix} q\eta_0^{\mu}\delta^3(\vec{x} - \vec{b}) & 0 \end{bmatrix} \Delta G_{\mu\nu}(x,y) \begin{bmatrix} q\eta_0^{\nu}\delta^3(\vec{y} - \vec{b}) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

Substituindo a definição (3.81) em (3.85) temos que

$$\begin{aligned} E_{int} &= -\frac{1}{2T} \int d^4x d^4y \int \frac{d^3p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \begin{bmatrix} q\eta_0^{\mu}\delta^3(\vec{x} - \vec{b}) & 0 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} a_{11\nu\sigma}(p_{\parallel}; x^3, y^3) & a_{12\nu\sigma}(p_{\parallel}; x^3) \\ a_{21\nu\sigma}(p_{\parallel}; y^3) & a_{22\nu\sigma}(p_{\parallel}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q\eta_0^{\nu}\delta^3(\vec{y} - \vec{b}) \\ 0 \end{bmatrix} e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})} \end{aligned} \tag{3.86}$$

Efetuando o produto matricial e as integrais $d^3\vec{x}$, $d^3\vec{y}$ obtemos

$$E_{int} = -\frac{q^2}{2T} \int dx^0 dy^0 \int \frac{d^2\vec{p}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{dp^0}{2\pi} a_{1100}(p_{\parallel}; b^3, b^3) e^{-ip^0(x^0 - y^0)} \ . \tag{3.87}$$

Usamos agora o fato de que $\int dx^0 e^{-ip^0 x^0} = (2\pi)\delta(p^0)$, integrando em dp^0 e levando em conta que $\int dy^0 = T$, estando implícto o limite $T \to \infty$, reescrevemos a energia de interação como

$$E_{int} = -\frac{q^2}{2} \int \frac{d^2\vec{p}_\parallel}{(2\pi)^2} a_{1100}(p^0 = 0, \vec{p}_\parallel; b^3, b^3) \ . \tag{3.88}$$

Pela definição (3.76) podemos escrever que

$$\begin{aligned} a_{1100}(p^0 = 0, \vec{p}_\parallel; x^3, y^3) &= -\frac{\mu^2(1 + \chi_{(p_\parallel)} p_\parallel^2 - m^2 \chi_{(p_\parallel)})(p_\parallel^2 - p_0^2)}{16 p_\parallel^2 [m^2 \chi^2_{(p_\parallel)} p_\parallel^2 - (1 + \chi_{(p_\parallel)} p_\parallel^2)^2](p_\parallel^2 - m^2)} \\ &\quad \times e^{-\sqrt{-p_\parallel^2}(|x^3 - a| + |a - y^3|)} \ . \end{aligned} \tag{3.89}$$

Substituindo o resultado acima em (3.88) chegamos a seguinte integral

$$E_{int} = -\frac{q^2\mu^2}{32} \int \frac{d^2\vec{p}_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{(1 - \chi_{(-\vec{p}_\parallel)} \vec{p}_\parallel^2 - m^2 \chi_{(-\vec{p}_\parallel)}) e^{-2\sqrt{\vec{p}_\parallel^2}|b^3 - a|}}{16[m^2 \chi^2_{(-\vec{p}_\parallel)} \vec{p}_\parallel^2 + (1 - \chi_{(-\vec{p}_\parallel)} \vec{p}_\parallel^2)^2](\vec{p}_\parallel^2 + m^2)} \ . \tag{3.90}$$

A função χ está definida em (3.74). Para $p^0 = 0$ temos então $\chi_{(-\vec{p}_\parallel)} = \frac{-\mu^2}{8\sqrt{\vec{p}_\parallel^2}(\vec{p}_\parallel^2 + m^2)}$ e a equação (3.90) toma a forma

$$E_{int} = -\frac{q^2\mu^2}{32} \int \frac{d^2\vec{p}_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{8}{\sqrt{\vec{p}_\parallel^2}} \left[\frac{8\sqrt{\vec{p}_\parallel^2} + \mu^2}{64\vec{p}_\parallel^2 + 16\sqrt{\vec{p}_\parallel^2}\mu^2 + \mu^4 + 64m^2} \right] e^{-2\sqrt{\vec{p}_\parallel^2}|b^3 - a|} \tag{3.91}$$

A integral acima pode ser resolvida em coordenadas polares. Tomando como r a coordenada radial, ou seja, $r = \sqrt{\vec{p}_\parallel^2}$ e integrando na parte angular, podemos escrever

$$E_{int} = -\frac{q^2\mu^2}{8\pi} \int_0^\infty dr \frac{8r + \mu^2}{64r^2 + 16r\mu^2 + \mu^4 + 64m^2} e^{-2r|b^3 - a|} \tag{3.92}$$

Para resolvermos a integral acima vamos fazer a decomposição por frações parciais. As raízes do polinômio do denominador $(64r^2 + 16r\mu^2 + \mu^4 + 64m^2)$ são

$$r_1 = -\frac{\mu^2}{8} + im \quad , \quad r_2 = -\frac{\mu^2}{8} - im \ , \tag{3.93}$$

e a equação (3.92) pode ser escrita como

$$E_{int} = -\frac{q^2\mu^2}{2^{10} im\pi} \int_0^\infty dr \left[\frac{8r + \mu^2}{r - r_1} e^{-2r|b^3 - a|} - \frac{8r + \mu^2}{r - r_2} e^{-2r|b^3 - a|} \right] \tag{3.94}$$

O resultado da integral acima pode ser feito com o auxílio da referência [32] ou com o auxílio do software Maple. Vamos definir a distância entre a superfície e a carga como sendo $\mathcal{R} = |b^3 - a|$. Com isso a energia (3.94) pode ser finalmente calculada

$$\begin{aligned} E_{int} &= -\frac{q^2\mu^2}{2^7\pi}\left[Ei\left(1, \left(\frac{\mu^2}{4} - 2im\right)\mathcal{R}\right)\exp\left(\left(\frac{\mu^2}{4} - 2im\right)\mathcal{R}\right)\right. \\ &\left. +Ei\left(1, \left(\frac{\mu^2}{4} + 2im\right)\mathcal{R}\right)\exp\left(\left(\frac{\mu^2}{4} + 2im\right)\mathcal{R}\right)\right] , \end{aligned} \tag{3.95}$$

onde $Ei(1, x)$ é a função erro integral definida como

$$Ei(a, z) = \int_1^\infty dp \exp(-pz)p^{-a} \ . \tag{3.96}$$

Apesar da presença da unidade imaginária i no resultado (3.95), a energia é real, pois temos a soma de uma quantidade complexa com seu conjugado.

Podemos perceber que a energia (3.95) decresce com a distância $\mathcal{R}$. Apesar da presença das funções exponenciais, o decréscimo da função Ei supera o crescimento da exponencial nesse caso.

O caso especial onde a massa do campo de Chern-Simons é nula pode ser fácilmente resolvido, tomando $m = 0$ em (3.94), como segue

$$\begin{aligned} E_{int} &= -\frac{q^2\mu^2}{8\pi}\int_0^\infty dr\frac{e^{-2r\mathcal{R}}}{8r + \mu^2} \\ E_{int} &= -\frac{q^2\mu^2}{64\pi}e^{\frac{\mu^2}{4}\mathcal{R}}Ei(1, \frac{\mu^2}{4}\mathcal{R}) \ , \end{aligned} \tag{3.97}$$

onde a integração foi feita utilizando o software Maple

CAPÍTULO 4

Conclusões e Perspectivas

Nesse trabalho iniciamos um estudo a respeito de potenciais tipo delta de Dirac para o campo eletromagnético onde esse exibe acoplamentos com estrutura de Chern-Simons. Consideramos dois modelos. No primeiro temos somente o campo eletromagnético, estando esse submetido a um potencial externo concentrado ao longo de uma superfíce. No segundo modelo, temos dois campos, o eletromagnético e um campo de Chern-Simons definido ao longo de uma superfície. Os campos se acoplam por um potencial delta de Dirac concentrado ao longo da superfície com um termo de interação com a estrutura de Chern-Simons. O primeiro modelo tem um único parâmetro, a constante de acoplamento entre o campo eletromagnético e o potencial, e o segundo modelo tem dois parâmetros, a mesma constante de acoplamento e a massa do campo de Chern-Simons.

Restringimos ao caso onde a superfície é um plano infinito estacionário e os modelos estudados são definidos em $3+1$ dimensões. Sendo ambos os modelos quadráticos nos campos, podemos encontrar nossos resultados exatamente, sem a necessidade de apelar para teoria de perturbação.

Para o primeiro modelo, calculamos o propagador e estudamos a interação da fronteira com uma carga pontual estacionária. Mostramos que, no limite quando a constante de acoplamento tende a infinito, recuperamos os resultados obtidos para um condutor perfeito.

No segundo modelo obtivemos o propagador e a lagrangeana efetiva para o campo eletromagnético, após integrar funcionalmente no campo de Chern-Simons. Essa lagrangeana se mostrou não local. Obtivemos também o propagador da teoria completa, isto é, com os dois campos, assim como a interação entre a superfície e uma carga pontual estacionária.

Existem algumas lacunas no estudo abordado nesse texto, que estamos considerando no momento e pretendemos concluir. A primeira delas diz respeito ao segundo modelo (com dois campos), quando tomamos o limite da constante de acoplamento entre os campos tendendo a infinito. Nesse caso pretendemos comparar nossos resultados com aqueles obtidos quando temos a presença de uma placa plana perfeitamente condutora.

Para o primeiro modelo, vamos considerar a presença de duas superfícies plana estáticas e paralelas, com constantes de acoplamento diferentes. Dessa forma, devemos obter a energia de Casimir para esse sistema. O problema de duas superfícies para o segundo modelo deve envolver cálculos muito longos, e não devemos abordá-lo tão cedo.

Vamos procurar por meios materiais que possam, de forma efetiva, ser descritos pelas superfícies que estudamos nessa Dissertação. Vamos concentrar nossa atenção nos chamados meta-materiais, que podem exibir propriedades eletromagnéticas interessantes e bem diferentes das usuais.

Como possibilidads futuras, podemos estudar como as fronteiras tratadas nessa Dissertação podem interagir com sistemas atômicos, quando colocados em suas proximidades. Nesse contexto, estudaríamos o Lamb-Shift e a interação átomo-superfície, com os modelos propostos. Também seriam um assunto interessante estudar a reflexão e transmissão de ondas eletromagnéticas por essas superfícies.

No caso do primeiro modelo, ao considerarmos duas placas paralelas, seria uma possibilidade também estudar o chamado Efeito Scharnhorst, que se trata da alteração da velocidade de propagação da luz dentro de cavidades.

APÊNDICE A

Cálculo do propagador de Maxwell

Temos que a lagrangeana de Maxwell é:

$$\mathcal{L}_{Max} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{A.1}$$

Podemos reescrevê-la, escolhendo o calibre $\alpha = 1$ e elimando os termos de superfície, da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_{Max} = \frac{1}{2}A_\mu(\eta^{\mu\nu}\partial^\lambda\partial_\lambda)A_\nu - J_\mu A^\mu \tag{A.2}$$

Queremos encontrar o propagador para essa equação. Portanto, teremos que calcular:

$$(\eta^{\mu\nu}\partial^\lambda\partial_\lambda)G_{\nu\sigma}(x,y) = \eta^\mu_\sigma\delta^4(x-y) \tag{A.3}$$

Utilizando o método de Fourier [25], teremos:

$$\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(\eta^{\mu\nu}\partial^\lambda\partial_\lambda)\tilde{G}_{\nu\sigma}(p)e^{-ip(x-y)} = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\eta^\mu_\sigma e^{-ip(x-y)} \tag{A.4}$$

Desta obtemos:

$$\eta^{\mu\nu}(-p^2)\tilde{G}_{\nu\sigma}(p) = \eta^\mu_\sigma \Rightarrow \tilde{G}^\mu_\sigma(p) = -\frac{\eta^\mu_\sigma}{p^2} \tag{A.5}$$

Então:

$$G^\mu_\sigma(x,y) = -\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\eta^\mu_\sigma}{p^2}e^{-ip(x-y)} \tag{A.6}$$

Para as equações utilizadas nesse trabalho, faremos uma integração em dp^3. Assim, teremos que resolver

$$G^\mu_\sigma(x,y) = -\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{dp^3}{(2\pi)}\frac{\eta^\mu_\sigma}{p_\parallel^2-(p^3)^2}e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)}e^{ip^3(x^3-y^3)}$$

$$G^\mu_\sigma(x,y) = -\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{dp^3}{(2\pi)}\eta^\mu_\sigma e^{-ip_\parallel(x_\parallel-y_\parallel)}\frac{e^{ip^3(x^3-y^3)}}{p_\parallel^2-(p^3)^2} \tag{A.7}$$

Para integrarmos em dp^3 usaremos o método dos resíduos [34]. Para isso acrescentaremos uma parte imaginária na equação como segue:

$$lim_{\chi\to 0}\int \frac{dp^3}{(2\pi)}\frac{e^{ip^3(x^3-y^3)}}{p_\|^2-(p^3)^2+i\chi} \tag{A.8}$$

calculando os polos da equação e os resíduos obteremos:

$$lim_{\chi\to 0}\int \frac{dp^3}{(2\pi)}\frac{e^{ip^3(x^3-y^3)}}{p_\|^2-(p^3)^2+i\chi}=\eta^\mu_\sigma\frac{e^{-\sqrt{-p_\|^2}|x^3-y^3|}}{2\sqrt{-p_\|}} \tag{A.9}$$

Assim, chamaremos:

$$\tilde{G}^\mu_\sigma(p_\|;x^3,y^3)=\eta^\mu_\sigma\frac{e^{-\sqrt{-p_\|^2}|x^3-y^3|}}{2\sqrt{-p_\|}} \tag{A.10}$$

APÊNDICE B

Cálculo do propagador de Chern-Simons

Temos que a lagrangeana de Chern-Simons é:

$$\mathcal{L}_{CS} = [-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha 3}B_\mu\partial_\nu B_\alpha - I_\mu B^\mu - \frac{1}{2\beta}(\partial_\mu B^\mu)^2] \tag{B.1}$$

Podemos reescrevê-la, escolhendo o calibre $\beta = 1$ e elimando os termos de superfície, da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_{Max} = \frac{1}{2}B_\mu\left(\eta_\parallel^{\mu\nu}\partial_\parallel^\lambda\partial_{\parallel\lambda} + m\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\partial_{\parallel\alpha}\right)B_\nu - I_\mu B^\mu \tag{B.2}$$

Queremos encontrar o propagador para esse caso. Portanto, teremos que calcular:

$$\left(\eta_\parallel^{\mu\nu}\partial_\parallel^\lambda\partial_{\parallel\lambda} + m\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\partial_{\parallel\alpha}\right)G_{\nu\sigma}(x_\parallel, y_\parallel) = \eta_\sigma^\mu\delta^3(x_\parallel - y_\parallel) \tag{B.3}$$

Utilizando o método de Fourier, teremos:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\eta_\parallel^{\mu\nu}\partial_\parallel^\lambda\partial_{\parallel\lambda} + m\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}\partial_{\parallel\alpha}\right)G_{\nu\sigma}(p_\parallel)e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)} =$$
$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\eta_{\parallel\sigma}^\mu e^{-ip_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)} \tag{B.4}$$

Desta obtemos:

$$\left(\eta_\parallel^{\mu\nu}(-p_\parallel)^2 - im\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}p_{\parallel\alpha}\right)G_{\nu\sigma}(p_\parallel) = \eta_{\parallel\sigma}^\mu \tag{B.5}$$

Para resolvermos essa equação lançaremos mão do seguinte ansatz:

$$G_{\nu\sigma}(p_\parallel) = A\eta_{\parallel\mu\sigma} + BP_{\parallel\mu}P_{\parallel\sigma} - iC\epsilon_{\mu\rho\sigma 3}P_\parallel^\rho \tag{B.6}$$

Então:

$$[-p_{\parallel}^2\eta_{\parallel}^{\mu\nu} - im\epsilon^{\mu\alpha\nu 3}p_{\parallel\alpha}][A\eta_{\parallel\mu\sigma} + BP_{\parallel\mu}P_{\parallel\sigma} - iC\epsilon_{\mu\rho\sigma 3}P_{\parallel}^{\rho}] = \eta_{\parallel\nu}^{\sigma} \tag{B.7}$$

Com essa proposta, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
&\eta_{\parallel\kappa}^{\nu}(-p_{\parallel}^2 A + mCp_{\parallel}^2) = \eta_{\parallel\kappa}^{\nu} \\
&p_{\parallel}^{\nu}p_{\parallel}^{\kappa}(-p_{\parallel}^2 B - mC) = 0 \\
&i\epsilon_{\rho\kappa 3}^{\nu}p_{\parallel}^{\rho}(p_{\parallel}^2 C - mA) = 0
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Desse sistema obtemos que:

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{p_{\parallel}^2 - m^2} \\
B &= \frac{m^2}{(p_{\parallel}^2)^2(p_{\parallel}^2 - m^2)} \\
C &= -\frac{m}{p_{\parallel}^2(p_{\parallel}^2 - m^2)}
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Então teremos:

$$\tilde{G}_{\mu\sigma}(p_{\parallel}) = -\frac{\eta_{\parallel}^{\mu\sigma}}{p_{\parallel}^2 - m^2} + m^2\frac{p_{\parallel}^{\mu}p_{\parallel}^{\sigma}}{(p_{\parallel}^2)^2(p_{\parallel}^2 - m^2)} + im\frac{\epsilon^{\mu\rho\sigma 3}p_{\parallel\rho}}{(p_{\parallel}^2)(p_{\parallel}^2 - m^2)} \tag{B.10}$$

Sendo este o propagador de Chern-Simons.

APÊNDICE C

Cálculo da integral U

Vemos que a integral $U = \int d^3p_{\|}\frac{e^{-ip_{\|}z_{\|}}}{p_{\|}^2}$ contém polos. Para eliminar os polos, faremos uma mudança de variável, utilizaremos coordenadas euclidianas definidas em [22], como se segue: chamaremos $p^0 \to ip^0 = p^3$ e $z^0 \to iz^0 = z^3$. Assim nossa integral fica:

$$\int d^3p_{\|}\frac{e^{-ip_{\|}z_{\|}}}{p_{\|}^2} = \int d^3p_{\|} - i\frac{e^{-ip_{\|E}z_{\|E}}}{p_{\|E}^2} \tag{C.1}$$

Em coordenadas eféricas teremos:

$$-i\int dr \quad d\phi \quad d\theta r^2 sen\theta\frac{e^{-ir \quad z_{\|E}}}{r^2} \tag{C.2}$$

Integrando em $d\phi$ teremos:

$$-2\pi i\int dr \quad d\theta sen\theta e^{-ir \quad z_{\|E}} \tag{C.3}$$

Para intergrarmos em $d\theta$ faremos:

$$-2\pi i\int dr \quad d\theta sen\theta e^{-ir \quad |z_{\|E}|cos\theta} \tag{C.4}$$

Fazendo a seguite mudança de variável $u = cos\theta$ e integrando em du teremos:

$$\frac{2\pi}{-i|z_{\|E}|}\int_0^\infty dr \quad \frac{1}{r}[e^{ir|z_{\|E}} - e^{-ir|z_{\|E}}] \tag{C.5}$$

Fazendo mais uma mudança de variável $v = r|z_{\|E}|$ obteremos:

$$\frac{4\pi}{-|z_{\|E}|}\int_0^\infty dv \quad \frac{1}{v}\left[\frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}\right] \tag{C.6}$$

Utilizando o método dos resíduos teremos:

$$\frac{4\pi}{-|z_{\|E}|}\int_0^\infty dv \quad \frac{1}{v}\left[\frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}\right] = \frac{-2\pi^2}{|z_{\|}|} \tag{C.7}$$

Referências Bibliográficas

[1] G.T. Camilo, F.A. Barone and F.E. Barone, Phys. Rev. D. **87**, 025011 (2013).

[2] F.A. Barone and F.E. Barone, Eur. Phys. J. C **74**, 3113 (2014).

[3] F.A. Barone and F.E. Barone, Phys. Rev. D **89**, 065020 (2014).

[4] H.B.G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).

[5] P.W. Milonni, *The Quantum Vaccum: An Introduction to Quantum Electrodynamics*, AcademicPress, NewYork (1994).

[6] K. A. Milton, *The Casimir Effect, Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, World Scientific, Singapore (2001).

[7] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko *Advances in the Casimir Effect*, Oxford Science Publications, Oxford (2009).

[8] M. Bordag, D. Robaschik and E. Wieczorek, Ann. Phys. (N.Y.) **165**, 192 (1985).

[9] R. M. Cavalcanti, arXiv:hep-th/0201150.

[10] A. Scardicchio, Phys. Rev. D **72**, 065004 (2005).

[11] C.D. Fosco and E.L. Losada, Phys. Rev. D **78**, 025017 (2008).

[12] C.C. Ttira, C.D. Fosco, and E. Losada, Phys. Rev. D **82**, 085008 (2010).

[13] G. Barton, Proc. Roy. Soc. Lond. A **320**, 251(1970).

[14] G. Barton, Proc. Roy. Soc. Lond. A **410**, 141 (1987).

[15] G. Barton, Proc. Roy. Soc. Lond. A **410**, 175 (1987).

[16] C.A. LÄutkeneF. Ravndal, Phys. Rev. A **31**, 2082 (1985).

[17] D.T. Alves, F.A. Barone, C. Farina and A.C. Tort, Phys. Rev. A **67**, 022103 (2003).

[18] G. V. Dunnel. Aspects of Chern-Simons Theory.Department of Physics University of Connecticut.

[19] K. Scharnhorst, Phys. Lett. B **236**, 354 (1990).

[20] G. Barton, Phys. Lett. B **237**, 559(1990).

[21] F.A. Barone, C. Farina, Phys. Rev. D **71**, 067701 (2005).

[22] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field e Quantization*, SPRINGER.

[23] W. Greiner and J. Reinhardt; *Quantum Electrodynamic*, SPRINGER, (2003).

[24] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, ; *The Classical Theory of Fields* , Butterworth-Heinemann, USA: Burlington (1984).

[25] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, WILEY.

[26] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory*, World Scientific.

[27] M. Kaku, *Quantum Field Theory A Modern Introduction*, Oxford University Press, USA: New York (1993).

[28] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, Princeton, NJ, (2003).

[29] F. A. Barone and G. Flores-Hidalgo, Phys. Rev. D **78**, 125003 (2008).

[30] F.A. Barone, G. Flores Hidalgo and A. A. Nogueira, Phys. Rev. D **91**, 027701 (2015).

[31] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York (1995).

[32] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products, seventh edition*, Academic Press, USA (2007).

[33] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press.

[34] E. Butkov, *Mathematical Phisics*, Addison - Wesley.