

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA - IFQ

Aspectos de Integrabilidade do modelo de
Thirring acoplado

Raiane Mendes Rodrigues

Itajubá, 2026

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA - IFQ**

Raiane Mendes Rodrigues

Aspectos de Integrabilidade do modelo de Thirring acoplado

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alexis Roa Aguirre

**2026
Itajubá**

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, autor da minha vida, que sempre foi meu sustento e minha força, e que, incontáveis vezes, me lembrou que eu podia sonhar e realizar.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Alexis Roa Aguirre, pela orientação cuidadosa, pela paciência e pelo rigor que ampliaram minha forma de pensar e construir conhecimento. Levo deste percurso não apenas um trabalho concluído, mas um aprendizado que permanece.

À minha família, meu pai Armando, minha mãe Luciana e meu irmão Júnior, cujos esforços incansáveis e amor incondicional são a verdadeira razão de eu ter chegado até aqui.

Em especial, agradeço à minha querida mãe. Com você, aprendi que seguir em frente exige coragem e que desistir nunca foi uma opção. Cada passo que dou carrega a sua história. Cada conquista minha tem um pouco do seu esforço, da sua renúncia e do seu cuidado. Tudo o que eu sou, tudo o que eu conquisto, começa em você.

À minha melhor amiga Héllen, que esteve ao meu lado em todos os momentos, acreditando na minha capacidade mesmo quando eu duvidei. Seu apoio constante foi abrigo, força e certeza. Ter alguém que acredita, insiste e permanece muda o rumo das coisas. Este trabalho carrega, em silêncio, muito daquilo que você me ensinou a enxergar em mim.

Ao meu namorado, pelo apoio constante, pela paciência e pela presença firme ao longo deste percurso. Seu incentivo tornou os desafios mais leves e fortaleceu cada passo até esta conquista.

À Paloma, que atravessou comigo os dias longos da graduação e escolheu permanecer quando o caminho ficou mais denso no mestrado. Sua presença foi casa, foi pausa e foi impulso. Em muitos momentos, quando as palavras faltaram nos textos, sobraram nas conversas com você. Nada disso teria o mesmo peso, nem o mesmo sentido, sem a constância silenciosa do seu apoio e a generosidade de caminhar ao meu lado.

Agradeço à Dra. Ana Lúcia Retore e ao Dr. Alessandro Torrielli pela orientação durante minha permanência na Inglaterra, pela acolhida e pelas valiosas contribuições ao desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo apoio financeiro concedido, fundamental para a realização desta pesquisa.

“Se nada ficar destas páginas, algo, pelo menos, esperamos que permaneça: nossa confiança no povo. Nossa fé nos homens e na criação de um mundo em que seja menos difícil amar”
Paulo Freire

Resumo

Esta dissertação investiga aspectos de integrabilidade em teorias de campos em $(1+1)$ dimensões, com ênfase no modelo de Thirring Acoplado. Inicialmente, são apresentados os fundamentos da integrabilidade clássica, incluindo a integrabilidade de Liouville, o formalismo da curvatura nula e as transformações de Bäcklund. Em seguida, analisam-se o modelo de Sine-Gordon e o modelo de Thirring massivo sob a perspectiva de suas estruturas integráveis. O foco principal do trabalho recai sobre o modelo de Thirring Grassmanniano acoplado, no qual se constrói explicitamente a conexão de Lax baseada na superálgebra $sl(2,1)$, garantindo a integrabilidade clássica do sistema. As transformações de Bäcklund são generalizadas e a propriedade de permutabilidade é analisada, permitindo a construção sistemática de soluções multiparamétricas. Destaca-se que a obtenção explícita dessas soluções multiparamétricas para o modelo acoplado constitui um resultado inédito na literatura. Espera-se que tais soluções estejam relacionadas a soluções de N-sólitons da versão bosônica do modelo acoplado.

Palavras-chaves: Modelo de Thirring acoplado; modelo de sine-Gordon; integrabilidade clássica; par de Lax; transformações de Bäcklund.

Abstract

This dissertation investigates aspects of integrability in (1+1)-dimensional field theories, with emphasis on the coupled Thirring model. Initially, the foundations of classical integrability are presented, including Liouville integrability, the zero-curvature formalism, and Bäcklund transformations. Subsequently, the sine-Gordon model and the massive Thirring model are analyzed from the perspective of their integrable structures. The main focus of this work lies on the coupled Grassmannian Thirring model, in which the Lax connection based on the superalgebra $sl(2, 1)$ is explicitly constructed, ensuring the classical integrability of the system. The Bäcklund transformations are generalized and the permutability property is analyzed, allowing for the systematic construction of multiparametric solutions. It is noteworthy that the explicit attainment of these multiparametric solutions for the coupled model constitutes a novel result in the literature. It is expected that such solutions are related to N-soliton solutions of the bosonic version of the coupled model.

Key-words: Coupled Thirring model; sine-Gordon model; classical integrability; Lax pair; Bäcklund transformations.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
2	FUNDAMENTOS EM TEORIAS DE CAMPOS INTEGRÁVEIS	11
2.1	Integrabilidade de Liouville	11
2.2	O Formalismo da Curvatura Nula e o Par de Lax	13
2.3	Transformação de Bäcklund: definições e aplicações	15
3	O MODELO DE SINE-GORDON	18
3.1	Lagrangiana, equação de movimento e par de Lax	18
3.2	Soluções tipo kink e antikink	20
3.3	Transformações de Bäcklund	21
3.4	Teorema da Permutabilidade	24
4	O MODELO DE THIRRING	25
4.1	Lagrangiana, equações de movimento e par de Lax	25
4.2	Transformações de Bäcklund	28
4.3	Teorema da Permutabilidade	29
5	O MODELO DE THIRRING ACOPLADO	32
5.1	Lagrangiana do modelo	32
5.2	Representação da conexão de Lax	33
5.3	Transformação de Bäcklund	34
5.3.1	Campos de Dirac livres	34
5.3.2	Campos de Thirring acoplados	35
5.4	Permutabilidade e soluções de Bäcklund	36
6	CONCLUSÃO	41
	APÊNDICE A – A SUPERÁLGEBRA $\mathfrak{sl}(2,1)$	43
	REFERÊNCIAS	44

1 Introdução

No contexto da mecânica clássica e da teoria de campos, um sistema é dito integrável quando possui um número suficiente de quantidades conservadas em involução, no sentido da integrabilidade de Liouville. Essa propriedade garante a solubilidade exata das equações de movimento por quadraturas e está intimamente relacionada à existência de simetrias ocultas no sistema [1]. Para equações diferenciais parciais não lineares, a noção de integrabilidade é frequentemente formulada por meio do formalismo da curvatura nula ou representação de Zakharov–Shabat, no qual a dinâmica do sistema é codificada em um par de operadores lineares, conhecido como par de Lax [2].

Entre os modelos integráveis mais estudados em duas dimensões destacam-se o modelo de Sine-Gordon e o modelo de Thirring. O modelo de sine-Gordon, formulado em termos de um campo escalar real, apresenta soluções solitônicas estáveis, os kinks e antikinks, que carregam carga topológica e desempenham um papel central na dinâmica clássica e quântica da teoria [3, 4]. Por outro lado, o modelo de Thirring descreve campos fermiônicos de Dirac com uma interação local do tipo corrente–corrente e constitui um exemplo notável de teoria de campos exatamente solúvel em (1+1) dimensões [5].

Além do formalismo de Lax, que caracteriza a integrabilidade de um sistema por meio da existência de um par de operadores cuja condição de compatibilidade é equivalente às equações de movimento e que está diretamente associada à presença de uma hierarquia de quantidades conservadas, outra ferramenta essencial no estudo de sistemas integráveis é fornecida pelas transformações de Bäcklund. Essas transformações permitem relacionar diferentes soluções de uma mesma equação diferencial não linear por meio de sistemas de equações de primeira ordem, possibilitando a geração sistemática de novas soluções a partir de configurações conhecidas [6]. Associado a esse formalismo, o Teorema da Permutabilidade de Bianchi garante a consistência da aplicação sucessiva dessas transformações, permitindo a construção de soluções multiparamétricas de maneira puramente algébrica.

Neste trabalho, investigam-se aspectos de integrabilidade em teorias de campos bidimensionais, com ênfase especial no Modelo de Thirring acoplado. Inicialmente, são apresentados os fundamentos teóricos necessários, incluindo a integrabilidade de Liouville, o formalismo da curvatura nula e as transformações de Bäcklund. Em seguida, são analisados o modelo de Sine-Gordon e o modelo de Thirring massivo, destacando suas propriedades integráveis. Por fim, o foco principal do trabalho recai sobre o Modelo de Thirring Grassmanniano acoplado, no qual se constrói explicitamente a conexão de Lax baseada na superálgebra $\mathfrak{sl}(2, 1)$, bem como a generalização das transformações de Bäck-

klund e a análise da permutabilidade, evidenciando a integrabilidade clássica do sistema.

2 Fundamentos em Teorias de Campos Integráveis

Na mecânica clássica, o estado de um sistema físico é completamente definido por um ponto no espaço de fase [2]. Trata-se de um espaço com dimensão par, cujas coordenadas são as variáveis de posição q_i e de momento p_i . O Hamiltoniano, representado por $H(q_i, p_i)$, é uma função escalar definida no espaço de fase, que usualmente representa a energia total do sistema, i.e. $H = T + V$, onde T é a energia cinética e V a energia potencial do sistema. Por sua vez, as equações que descrevem a evolução temporal no formalismo Hamiltoniano são dadas pelas equações de Hamilton,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \text{onde } i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

q_i são as coordenadas generalizadas, e p_i os momentos canônicos conjugados a q_i . A partir das equações de movimento (2.1), é possível descrever a evolução temporal de qualquer variável dinâmica, $F(q_i, p_i)$, definida neste espaço de fase, da seguinte forma:

$$\dot{F} \equiv \frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right). \quad (2.2)$$

Usando as equações de movimento, temos que

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \{F, H\}, \quad (2.3)$$

onde usamos a definição do *parêntese de Poisson* entre duas variáveis dinâmicas F e G , i.e.

$$\{F, G\} \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \quad (2.4)$$

Dizemos que uma variável dinâmica F é uma *quantidade conservada* ou *constante de movimento*, quando $\dot{F} = 0$, ou equivalentemente quando $\{F, H\} = 0$.

2.1 Integrabilidade de Liouville

Um sistema descrito em um espaço de fase de dimensão $2n$ é considerado integrável segundo Liouville quando possui n quantidades conservadas independentes que estão em involução [1], ou seja, satisfazem a relação:

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

sendo o Hamiltoniano um deles [7].

Teorema de Liouville: "As equações de movimento de um sistema integrável no sentido de Liouville podem ser resolvidas por quadraturas"[2].

Isso implica que, para um sistema desse tipo, existe sempre uma transformação canônica¹ do tipo:

$$(p_i, q_i) \rightarrow (F_i, \psi_i), \quad (2.6)$$

em que uma das novas variáveis corresponde à quantidade conservada F_i . As equações de movimento nessas novas variáveis são dadas por:

$$\dot{F}_i = \{F_i, H\} = 0, \quad (2.7)$$

$$\dot{\psi}_i = \{\psi_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial F_i} = \Omega_i, \quad (2.8)$$

onde o Hamiltoniano $H = H(F_1, \dots, F_n, \Omega_1, \dots, \Omega_n)$, é uma função das n quantidades conservadas F_i , e de n constantes Ω_i . As equações (2.7) e (2.8) descrevem a dinâmica nas chamadas variáveis de Ação-Ângulo. Aqui, as variáveis de ação F_i são constantes de movimento, enquanto as variáveis de ângulo ψ_i evoluem linearmente no tempo:

$$\psi_i(t) = \Omega_i t + \psi_i(0).$$

Isso demonstra que a dinâmica do sistema, quando expressa nessas variáveis, torna-se completamente linear e desacoplada no espaço de fase, permitindo a solução exata das equações de movimento por quadraturas [2].

Exemplo: Oscilador Harmônico em 1D

O Hamiltoniano correspondente ao oscilador harmônico clássico unidimensional (assumindo massa unitária, $m = 1$), é expresso por:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} = E, \quad \text{onde} \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

A introdução das variáveis abaixo permite uma nova representação para a equação,

$$p = \rho \cos \varphi, \quad (2.10)$$

$$q = \frac{\rho}{\omega} \sin \varphi. \quad (2.11)$$

E ao realizar a substituição, obtemos a forma simplificada:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\rho^2}{2} \cos^2 \varphi + \frac{\omega^2}{2} \frac{\rho^2}{\omega^2} \sin^2 \varphi, \\ &= \frac{\rho^2}{2} = E \end{aligned} \quad (2.12)$$

¹ Uma transformação canônica consiste em modificar as coordenadas do espaço de fase e o hamiltoniano correspondente, de forma que as equações de Hamilton, mesmo após essa mudança, continuem descrevendo a mesma evolução do sistema. Em outras palavras, é uma mudança de variáveis que preserva a estrutura da dinâmica do sistema [8]

2.2 O Formalismo da Curvatura Nula e o Par de Lax

Um conceito fundamental que emergiu na formulação moderna da teoria de sistemas integráveis é o do *par de Lax*, introduzido por Peter Lax em 1968. Esse par consiste em duas matrizes quadradas L e M , que dependem das variáveis do espaço de fase do sistema. A principal característica dessa abordagem é a possibilidade de reescrever as equações de evolução hamiltoniana na forma de uma equação de comutador [9], expressa como

$$\dot{L} = [M, L], \quad (2.13)$$

em que $[M, L] = ML - LM$ representa o comutador usual entre as matrizes. Essa formulação permite uma descrição mais compacta e estruturada da dinâmica, revelando simetrias ocultas e facilitando a identificação da integrabilidade do sistema [2].

A importância da equação de Lax reside, em grande parte, na sua capacidade de fornecer uma via direta para a construção de quantidades conservadas [9]. A solução da eq. (2.13) pode ser escrita no forma

$$L(t) = g(t)L(0)g(t)^{-1}, \quad (2.14)$$

onde $g(t)$ é uma matriz inversível que satisfaz a equação

$$M = \frac{dg}{dt}g^{-1}. \quad (2.15)$$

A partir disso, conclui-se que qualquer função $I(L)$ que seja invariante sob conjugação, isto é, que satisfaça $I(L) = I(gLg^{-1})$, permanece constante ao longo da evolução temporal do sistema. Dentre essas funções invariantes, destacam-se aquelas construídas a partir dos autovalores de L , o que leva à caracterização da dinâmica como *isospectral*, uma vez que o espectro da matriz L é preservado ao longo do tempo [2].

Em conformidade com a integrabilidade de Liouville, as cargas conservadas podem ser construídas através do traço das potências da matriz L , definidas por:

$$Q_n = \text{Tr}(L^n). \quad (2.16)$$

A demonstração de que $\dot{Q}_n = 0$ via ciclicidade do traço, conforme desenvolvido por [1], baseia-se em tomar a derivada temporal da equação (2.16)

$$\begin{aligned} \dot{Q}_n &= \text{Tr}(\dot{L}L^{n-1}) + \text{Tr}(L\dot{L}L^{n-2}) + \cdots + \text{Tr}(L^{n-2}\dot{L}L) + \text{Tr}(L^{n-1}\dot{L}), \\ &= n \text{Tr}(\dot{L}L^{n-1}), \\ &= n \text{Tr}([M, L]L^{n-1}), \\ &= n \text{Tr}(MLL^{n-1} - LML^{n-1}), \\ &= n \text{Tr}(ML^n) - n \text{Tr}(ML^n), \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Exemplo: Modelo do Oscilador de Calogero

O modelo do oscilador de Calogero é descrito pelo seguinte Hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} + \frac{\nu^2}{2q^2}. \quad (2.18)$$

Notamos que, nos limites $\nu \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow 0$, recuperamos o oscilador harmônico usual e o modelo de Calogero racional, respectivamente [10]. Para este sistema adotamos o seguinte par de lax:

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p & \omega q - \frac{\nu}{q} \\ \omega q - \frac{\nu}{q} & -p \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega - \frac{\nu}{q^2} \\ \omega + \frac{\nu}{q^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Ao utilizarmos esse par de Lax, observamos que o hamiltoniano conservado pode ser expresso em termos do traço da matrix L como:

$$H = \text{Tr } L^2 + \nu\omega. \quad (2.20)$$

Esta formulação é ideal para sistemas que evoluem apenas no tempo, como na mecânica clássica. Uma generalização poderosa dessa abordagem torna-se necessária para tratar a integrabilidade de equações diferenciais parciais (EDPs), que dependem tanto da variável espacial x quanto da temporal t . Esta generalização é a formulação da curvatura nula (também conhecida como representação de Zakharov-Shabat)[2].

Nesta formulação, as EDPs integráveis são escritas como a condição de compatibilidade de um problema linear auxiliar associado. Em vez de L e M , introduz-se um novo par de Lax composto por duas matrizes (ou conexões), $U(x, t, \lambda)$ e $V(x, t, \lambda)$. Estas matrizes definem duas equações lineares para uma função auxiliar $\Psi(x, t; \lambda)$, onde λ é um parâmetro espectral:

$$\partial_x \Psi(x, t; \lambda) = U(x, t; \lambda) \Psi(x, t; \lambda), \quad (2.21)$$

$$\partial_t \Psi(x, t; \lambda) = V(x, t; \lambda) \Psi(x, t; \lambda). \quad (2.22)$$

A condição de compatibilidade para o sistema linear exige que as derivadas cruzadas da função de auxiliar comutem, ou seja, $\partial_x(\partial_t \Psi) = \partial_t(\partial_x \Psi)$. Matematicamente, isso é expresso por:

$$(\partial_x \partial_t - \partial_t \partial_x) \Psi(x, t; \lambda) = 0. \quad (2.23)$$

Ao substituir as equações do par de Lax nesta condição, obtemos a chamada equação de curvatura nula:

$$\partial_t U - \partial_x V + [U, V] = 0. \quad (2.24)$$

A consistência do método exige que esta equação matricial seja equivalente às equações de movimento não lineares do sistema físico em estudo, garantindo assim a sua integrabilidade.

Uma vez estabelecida a equação da curvatura nula, que garante a integrabilidade do sistema, podemos utilizar a estrutura do par de Lax para construir uma função geradora para um conjunto infinito de leis de conservação. Para realizar essa construção, define-se, para cada componente de campo auxiliar Ψ_j ($j = 1, \dots, m$), um conjunto de $(m - 1)$ funções auxiliares $\Gamma_{ij} = \Psi_i \Psi_j^{-1}$ com $i \neq j$ [3].

Ao manipular as equações lineares do sistema, identifica-se a j -ésima equação de conservação:

$$\partial_t \left[U_{jj} + \sum_{i \neq j} U_{ji} \Gamma_{ij} \right] = \partial_x \left[V_{jj} + \sum_{i \neq j} V_{ji} \Gamma_{ij} \right]. \quad (2.25)$$

Nesta estrutura, as funções auxiliares Γ_{ij} satisfazem equações de Riccati acopladas para as partes espacial e temporal, respectivamente:

$$\partial_x \Gamma_{ij} = (U_{ij} - U_{jj} \Gamma_{ij}) + \sum_{k \neq j} [U_{ik} - \Gamma_{ij} U_{jk}] \Gamma_{kj}, \quad (2.26)$$

$$\partial_t \Gamma_{ij} = (V_{ij} - V_{jj} \Gamma_{ij}) + \sum_{k \neq j} [V_{ik} - \Gamma_{ij} V_{jk}] \Gamma_{kj}. \quad (2.27)$$

Considerando soluções que se anulam rapidamente quando $|x| \rightarrow \infty$, a correspondente j -ésima função geradora das quantidades conservadas é expressa pela integral:

$$I_j = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[U_{jj} + \sum_{i \neq j} U_{ji} \Gamma_{ij} \right]. \quad (2.28)$$

A obtenção do conjunto infinito de cargas baseia-se nas propriedades analíticas das soluções em relação ao parâmetro espectral. O conjunto infinito de cargas conservadas é derivado expandindo as funções Γ_{ij} em potências positivas e negativas do parâmetro espectral λ (ou seja, em termos de λ e $1/\lambda$) e resolvendo as equações de Riccati de forma recursiva para cada coeficiente.

2.3 Transformação de Bäcklund: definições e aplicações

As transformações de Bäcklund foram introduzidas no final do século XIX no contexto da geometria diferencial com o objetivo de investigar superfícies pseudoesféricas, isto é, superfícies caracterizadas por possuírem curvatura negativa constante [11]. De forma geral, a ideia central dessas transformações é converter uma equação diferencial de ordem superior envolvendo uma função $u(x, t)$ em um sistema de equações de primeira ordem, facilitando a análise ou obtenção de soluções [6].

Suponha que tenhamos uma equação diferencial complexa da forma:

$$P(u(x, t)) = 0. \quad (2.29)$$

A transformação de Bäcklund propõe a introdução de uma nova função $v(x, t)$, conectada à uma função original $u(x, t)$ por meio de duas equações diferenciais mais simples:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(u, v) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = r(u, v). \quad (2.30)$$

As funções f e r são escolhidas de maneira que, ao serem compatibilizada, recupera-se naturalmente a equação original de ordem superior como uma condição de Integrabilidade [6].

Exemplo: Equação de Liouville em 1+1 dimensões

Para ilustrar este formalismo, aplicamos o método à equação de Liouville em 1 + 1 dimensões, descrita como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = e^{u(x,t)}. \quad (2.31)$$

Para facilitar o tratamento matemático, introduzimos as variáveis de cone de luz:

$$x^\pm = t \pm x, \quad (2.32)$$

e definimos os operadores diferenciais como:

$$\partial_\pm \equiv \frac{\partial}{\partial x^\pm} \quad (2.33)$$

A equação de Liouville assume então a forma compacta:

$$\partial_+ \partial_- u = e^u. \quad (2.34)$$

Agora vamos definir a transformação de Bäcklund para a variável $v(x^+, x^-)$ através de:

$$\partial_+ u = -\partial_+ v + \alpha e^{\frac{1}{2}(u-v)}, \quad (2.35)$$

$$\partial_- u = \partial_- v + \frac{2}{\alpha} e^{\frac{1}{2}(u+v)}, \quad (2.36)$$

onde α é uma constante arbitrária. Para verificar a integrabilidade, tomamos as derivadas cruzadas. Derivando a equação (2.35) em relação a x^- e a (2.36) em relação a x^+ , obtemos as condições:

$$\partial_+ \partial_- u = e^u, \quad (2.37)$$

$$\partial_+ \partial_- v = 0. \quad (2.38)$$

A primeira dessas equações corresponde à conhecida equação de Liouville, enquanto a segunda representa a equação de ondas em duas dimensões, cuja solução geral é amplamente estabelecida. Nesse contexto, a transformação de Bäcklund atua como um elo entre os conjuntos de soluções dessas duas equações diferenciais.

Para tornar explícito o procedimento de obtenção das soluções, observa-se que a solução geral da equação de ondas pode ser expressa como

$$v(x^+, x^-) = f(x^+) + r(x^-), \quad (2.39)$$

onde f e r descrevem modos de propagação independentes em direções opostas. Substituindo essa decomposição na relação diferencial original (2.35), obtém-se

$$\partial_+(u + f) = \alpha e^{\frac{1}{2}(u-f-r)}. \quad (2.40)$$

Como $r(x^-)$ não depende de x^+ , a equação pode ser reorganizada na forma:

$$e^{-\frac{1}{2}(u+f-r)} \partial_+(u+f-r) = \alpha e^{-f(x^+)}. \quad (2.41)$$

Integrando com respeito a x^+ , obtemos

$$e^{-\frac{1}{2}(u+f-r)} = -\frac{\alpha}{2} \int^{x^+} dx'^+ e^{-f(x'^+)} + a(x^-) = \alpha P(x^+) + a(x^-). \quad (2.42)$$

Neste passo, introduzimos a função $a(x^-)$ como a constante de integração e passamos a denotar por $P(x^+)$ o negativo da metade da integral que aparece no lado direito da equação. De maneira análoga, o mesmo procedimento pode ser aplicado à eq (2.36).

$$e^{-\frac{1}{2}(u+f-r)} = -\frac{1}{\alpha} \int^{x^-} dx'^- e^{-r(x'^-)} + b(x^+) = \frac{2}{\alpha} Q(x^-) + b(x^+). \quad (2.43)$$

A comparação entre essas duas expressões nos mostra que

$$a(x^-) = \frac{2}{\alpha} Q(x^-), \quad b(x^+) = \alpha P(x^+). \quad (2.44)$$

Com isso, a expressão exponencial pode ser escrita como

$$e^{-\frac{1}{2}(u+f-r)} = \alpha P(x^+) + \frac{2}{\alpha} Q(x^-), \quad (2.45)$$

o que implica que

$$-\frac{1}{2}(u+f-r) = \log\left(\alpha P(x^+) + \frac{2}{\alpha} Q(x^-)\right). \quad (2.46)$$

Finalmente, a solução para $u(x^+, x^-)$ assume a forma

$$u(x^+, x^-) = -f(x^+) + r(x^-) - 2 \log\left(\alpha P(x^+) + \frac{2}{\alpha} Q(x^-)\right). \quad (2.47)$$

Portanto, as transformações de Bäcklund (2.35) e (2.36) conectam de forma exata um sistema não linear a um linear. A Equação (2.47) demonstra que, a partir das funções $f(x^+)$ e $r(x^-)$ da equação de ondas livre, constrói-se diretamente uma família contínua de soluções para a equação de Liouville, parametrizada pela constante arbitrária α .

3 O modelo de sine-Gordon

O modelo de sine-Gordon é considerado uma das representações mais acessíveis de uma teoria de campos integrável em duas dimensões, tanto em contextos clássicos quanto quânticos. Assim como outros sistemas integráveis, ele admite soluções solitônicas associadas a cargas topológicas [3]. Devido à sua relevância teórica e aplicações, esse modelo destaca-se como uma das teorias de campo integráveis mais reconhecidas e amplamente estudadas [4].

3.1 Lagrangiana, equação de movimento e par de Lax

A Lagrangiana clássica associada ao modelo de sine-Gordon em (1+1) dimensões pode ser expressa como:

$$\mathcal{L}_{sG} = \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + \frac{m_s^2}{\beta^2} \cos(\beta\phi) \quad (3.1)$$

onde $\phi(x, t)$ é um campo escalar real, m_s é o parâmetro de massa e β representa a constante de acoplamento. No contexto clássico, é comum redefinir o campo como $\phi \rightarrow \frac{\phi}{\beta}$, de forma que o parâmetro β seja absorvido e a análise se torne mais simples. A aplicação do princípio de mínima ação sobre esta Lagrangiana resulta na seguinte equação de movimento:

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi + m_s^2 \sin(\phi) = 0, \quad (3.2)$$

Conforme estabelecido na seção 2.2, a integrabilidade do modelo pode ser garantida pela existência de um par de operadores lineares que satisfazem a condição de curvatura nula (2.24). Para o modelo de sine-Gordon, o par de Lax é construído utilizando a representação fundamental da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$. Os geradores desta álgebra, denotados por $\{H, E_+, E_-\}$, satisfazem as relações de comutação

$$[H, E_{\pm}] = \pm 2E_{\pm}, \quad [E_+, E_-] = H, \quad (3.3)$$

e sua representação fundamental 2×2 , é dada explicitamente por :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

As conexões de Lax $U(x, t; \lambda)$ e $V(x, t; \lambda)$ são decompostas nesta base da álgebra, acoplando as derivadas do campo ϕ e as funções do parâmetro espectral λ , da seguinte forma:

$$U = \frac{1}{4i}(\partial_t\phi)H + q(\lambda)E_+ + r(\lambda)E_- \quad (3.4)$$

$$V = \frac{1}{4i}(\partial_x \phi)H + A(\lambda)E_+ + B(\lambda)E_- \quad (3.5)$$

As funções auxiliares q, r, A e B , dependem de potências do parâmetro espectral λ , e carregam a dependência espectral necessária para garantir a conservação das cargas e são definidas por:

$$q(\lambda) = -\frac{m_s}{4} \left(\lambda e^{\frac{i\phi}{2}} - \lambda^{-1} e^{-\frac{i\phi}{2}} \right), \quad r(\lambda) = \frac{m_s}{4} \left(\lambda e^{-\frac{i\phi}{2}} - \lambda^{-1} e^{\frac{i\phi}{2}} \right) \quad (3.6)$$

$$A(\lambda) = -\frac{m_s}{4} \left(\lambda e^{\frac{i\phi}{2}} + \lambda^{-1} e^{-\frac{i\phi}{2}} \right), \quad B(\lambda) = \frac{m_s}{4} \left(\lambda e^{-\frac{i\phi}{2}} + \lambda^{-1} e^{\frac{i\phi}{2}} \right) \quad (3.7)$$

Ao substituir estas matrizes U e V na equação de curvatura nula $\partial_t U - \partial_x V + [U, V] = 0$, os termos dependentes de λ se cancelam identicamente devido à estrutura da álgebra $\mathfrak{sl}(2)$, restando apenas a equação de movimento do modelo de sine-Gordon.

O processo de obtenção das cargas conservadas no modelo sine-Gordon fundamenta-se na estrutura do problema linear associado, onde as funções auxiliares são definidas como as razões entre as componentes da função de onda Ψ [3]:

$$\Gamma_{21} = \Psi_2 \Psi_1^{-1} \quad \text{e} \quad \Gamma_{12} = \Psi_1 \Psi_2^{-1}. \quad (3.8)$$

A partir do sistema linear, derivam-se as seguintes equações de conservação que regem o sistema:

$$\partial_t \left[q\Gamma_{21} - \frac{i}{4}(\partial_t \phi) \right] = \partial_x \left[A\Gamma_{21} - \frac{i}{4}(\partial_x \phi) \right] \quad (3.9)$$

$$\partial_t \left[r\Gamma_{12} + \frac{i}{4}(\partial_t \phi) \right] = \partial_x \left[B\Gamma_{12} + \frac{i}{4}(\partial_x \phi) \right] \quad (3.10)$$

Essas funções permitem converter o sistema linear em duas equações independentes de Riccati, que descrevem a evolução espacial em cada setor:

$$\partial_x \Gamma_{21} = r + \frac{i}{2}(\partial_t \phi)\Gamma_{21} - q(\Gamma_{21})^2, \quad (3.11)$$

$$\partial_x \Gamma_{12} = q - \frac{i}{2}(\partial_t \phi)\Gamma_{12} - r(\Gamma_{12})^2. \quad (3.12)$$

A partir dessas equações, as leis de conservação são obtidas expandindo as funções Γ em potências do parâmetro espectral λ . Para o setor Γ_{21} , as expansões nos limites $\lambda \rightarrow \infty$ e $\lambda \rightarrow 0$ são dados reespectivamente por:

$$\Gamma_{21} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{21}^{(n)}}{\lambda^n}, \quad (3.13)$$

$$\Gamma_{21} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\Gamma}_{21}^{(n)} \lambda^n. \quad (3.14)$$

Essas expansões geram os coeficientes que compõem a carga I_1 :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[q\Gamma_{21} - \frac{i}{4}(\partial_t \phi) \right]. \quad (3.15)$$

Como as cargas resultantes deste primeiro setor, como $I_1^{(-)}$ e $\hat{I}_1^{(+)}$, não são reais (conforme demonstrado na referência [3]), torna-se necessário buscar as contribuições que restam para obter quantidades reais. Estas contribuições surgem de forma independente ao resolver a equação (3.12) para o outro setor, o de Γ_{12} , resultando na carga I_2 :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{i}{4} (\partial_t \phi) + r \Gamma_{12} \right]. \quad (3.16)$$

Através das relações $I_2^{(-)} = I_1^{\dagger(-)}$ e $\hat{I}_2^{(+)} = \hat{I}_1^{\dagger(+)}$, definimos as quantidades conservadas reais $\mathbb{I}^{(-)}$ e $\hat{\mathbb{I}}^{(+)}$:

$$\mathbb{I}^{(-)} = i(I_1^{(-)} - I_2^{(-)}) \quad \text{e} \quad \hat{\mathbb{I}}^{(+)} = i(\hat{I}_1^{(+)} - \hat{I}_2^{(+)}) \quad (3.17)$$

A combinação final destes termos permite recuperar os resultados principais para a Energia E e o Momento P do sistema:

$$E = m_s (\mathbb{I}^{(-)} - \hat{\mathbb{I}}^{(+)}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \{ (\partial_t \phi)^2 + (\partial_x \phi)^2 \} - m_s^2 \cos \phi \right], \quad (3.18)$$

$$P = m_s (\mathbb{I}^{(-)} + \hat{\mathbb{I}}^{(+)}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial_t \phi) (\partial_x \phi). \quad (3.19)$$

3.2 Soluções tipo kink e antikink

No estudo clássico da equação de sine-Gordon, destacam-se as chamadas soluções topológicas do tipo kink e antikink, que representam transições entre vácuos distintos do potencial periódico do modelo. Essas soluções são estáveis, possuem energia finita e se caracterizam por uma estrutura solitônica [4].

O potencial associado a ϕ possui um conjunto infinito de mínimos, localizados em $\phi_n = \frac{2\pi n}{\beta}$, com $n \in \mathbb{Z}$. Para observar a estrutura periódica deste potencial, veja Figura 1.

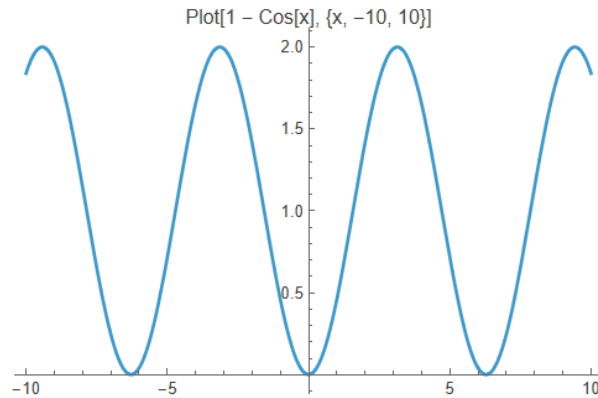


Figura 1 – Representação do potencial periódico do modelo de sine-Gordon [4].

As soluções do tipo *kink* conectam vácuos adjacentes, por exemplo, de $\phi = 0$ para $\phi = \frac{2\pi}{\beta}$, enquanto as soluções *antikink* realizam o caminho inverso. As expressões explícitas para

as soluções estáticas são:

$$\phi(x) = \frac{4}{\beta} \arctan \left(e^{\pm m_s(x-x_0)} \right), \quad (3.20)$$

onde o sinal positivo corresponde ao *kink* e o negativo ao *antikink*. O parâmetro x_0 define a posição central da solução. Estas também podem ser generalizadas para soluções em movimento através de uma transformação de Lorentz, mantendo a forma invariável no tempo [12], veja Figura 2.

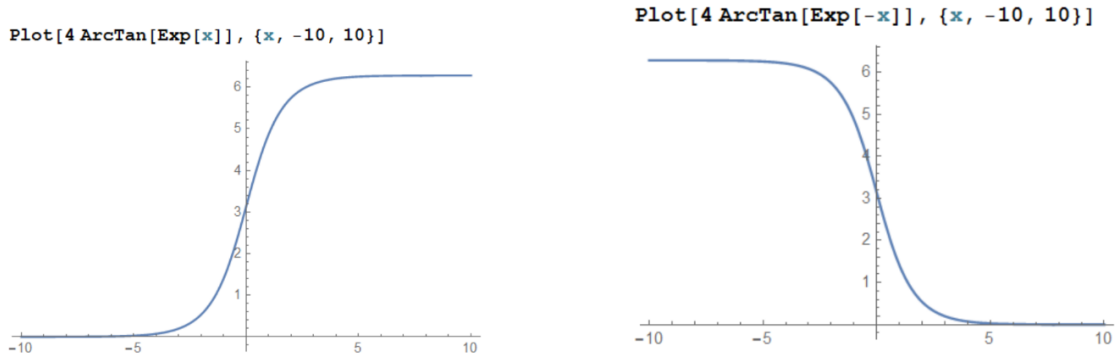


Figura 2 – O *kink* estático de sine-Gordon e, respectivamente, o *antikink*, para $x_0 = 0$ [4].

Essas soluções carregam uma **carga topológica** quantizada, dada por:

$$Q = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{dx} dx = \pm 1, \quad (3.21)$$

indicando o número de vezes que o campo percorre o intervalo fundamental do potencial periódico. Essa carga é conservada e imune a perturbações contínuas, garantindo a estabilidade das soluções.

Fisicamente, os *kinks* e *antikinks* se comportam como partículas clássicas localizadas. Após quantização, correspondem aos sólitons e antissólitons do espectro da teoria. Observa-se também que duas soluções do mesmo tipo (dois *kinks* ou dois *antikinks*) interagem de forma repulsiva no regime clássico, o que está relacionado com o comportamento fermiônico dessas excitações no contexto quântico [13].

3.3 Transformações de Bäcklund

A equação de sine-Gordon é um dos exemplos clássicos mais antigos na teoria das transformações de Bäcklund. Essa transformação permite gerar uma nova solução a partir de uma conhecida. Além disso esse modelo também serve como exemplo de outras propriedades associadas às transformações de Bäcklund.

Vamos considerar a equação de sine-Gordon (com $m_s = 1$):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\sin \phi \quad (3.22)$$

Para simplificar o tratamento da equação, é comum realizar uma mudança de variáveis para coordenadas de cone de luz, definidas por:

$$x^\pm = t \pm x. \quad (3.23)$$

Nessas novas variáveis, as equações acima se transforma em:

$$\partial_- \partial_+ \phi = -\sin \phi, \quad (3.24)$$

onde as derivadas parciais em relação a essas variáveis são dadas por:

$$\partial_+ = \frac{\partial}{\partial x^+}, \quad \partial_- = \frac{\partial}{\partial x^-}. \quad (3.25)$$

Aplicando agora as transformações de Bäcklund a uma nova função $\phi_1(x^+, x^-)$, obtemos o sistema [6]:

$$\partial_+ \phi = \partial_+ \phi_1 + 2a \sin \left(\frac{\phi_1 + \phi}{2} \right), \quad (3.26)$$

$$\partial_- \phi = -\partial_- \phi_1 + \frac{2}{a} \sin \left(\frac{\phi_1 - \phi}{2} \right). \quad (3.27)$$

Agora, para verificar a consistência dessas transformações, derivamos respectivamente com respeito a x^- e x^+ .

$$\partial_- \partial_+ \phi = \partial_- \partial_+ \phi_1 + 2 \cos \left(\frac{\phi_1 + \phi}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_1 - \phi}{2} \right), \quad (3.28)$$

$$\partial_+ \partial_- \phi = -\partial_+ \partial_- \phi_1 - 2 \cos \left(\frac{\phi_1 - \phi}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_1 + \phi}{2} \right). \quad (3.29)$$

Da segunda equação acima, é possível reescrever:

$$\partial_+ \partial_- \phi = -\partial_+ \partial_- \phi_1 - (\sin \phi_1 + \sin \phi). \quad (3.30)$$

Para que essa relação seja válida, é necessário que ϕ_1 também satisfaça a equação de sine-Gordon:

$$\partial_+ \partial_- \phi_1 = -\sin \phi_1. \quad (3.31)$$

Portanto, ao considerarmos $\phi = 0$ como solução conhecida, as equações de Bäcklund se reduzem às formas:

$$\partial_+ \phi_1 = -2a \sin \left(\frac{\phi_1}{2} \right), \quad (3.32)$$

$$\partial_- \phi_1 = +\frac{2}{a} \sin \left(\frac{\phi_1}{2} \right). \quad (3.33)$$

Vamos agora definir novas variáveis.

$$\tilde{x}^+ = ax^+, \quad \tilde{\partial}_+ = \frac{1}{a} \partial_+, \quad \tilde{x}^- = \frac{1}{a} x^-, \quad \tilde{\partial}_- = a \partial_-. \quad (3.34)$$

Com essas transformações, as equações (3.32) e (3.33) assumem a forma:

$$\tilde{\partial}_+ \phi_1 = -2 \sin\left(\frac{\phi_1}{2}\right) = -\tilde{\partial}_- \phi_1$$

O que implica que ϕ_1 depende apenas da combinação $\tilde{x}^+ - \tilde{x}^-$:

$$\phi_1 = \phi_1(\tilde{x}^+ - \tilde{x}^-). \quad (3.35)$$

A partir dessa dependência funcional, temos:

$$\tilde{\partial}_+ \phi_1 = -2 \sin\left(\frac{\phi_1}{2}\right) = -4 \sin\left(\frac{\phi_1}{4}\right) \cos\left(\frac{\phi_1}{4}\right).$$

Aplicando identidades trigonométricas, obtemos:

$$\sec^2\left(\frac{\phi_1}{4}\right) \tilde{\partial}_+ \phi_1 = -4 \tan\left(\frac{\phi_1}{4}\right) \longrightarrow \tilde{\partial}_+ \left(\tan\left(\frac{\phi_1}{4}\right)\right) = -\tan\left(\frac{\phi_1}{4}\right), \quad (3.36)$$

e essa equação é facilmente integrável, resultando em:

$$\tan\left(\frac{\phi_1}{4}\right) = c \exp\left(-(\tilde{x}^+ - \tilde{x}^-)\right).$$

Substituindo as variáveis originais:

$$\tan\left(\frac{\phi_1}{4}\right) = c \exp\left(-ax^+ + \frac{1}{a}x^-\right),$$

sabendo que $x^\pm = t \pm x$, podemos reescrever:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\phi_1}{4}\right) &= c \exp\left(-t\left(a - \frac{1}{a}\right) - x\left(a + \frac{1}{a}\right)\right) \\ &= c \exp\left(-\frac{1}{a}\left[t(a^2 - 1) + x(a^2 + 1)\right]\right) \end{aligned}$$

Introduzindo a velocidade da solução como:

$$v = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}, \quad (3.37)$$

a solução final é então expressa por:

$$\phi_1 = 4 \tan^{-1}\left(c \exp\left(\frac{-2(x + vt)}{\sqrt{1 - v^2}}\right)\right). \quad (3.38)$$

3.4 Teorema da Permutabilidade

O teorema da Permutabilidade estabelece que o caminho percorrido para alcançar uma nova solução a partir de uma solução inicial ϕ_0 não altera o resultado final, desde que os parâmetros utilizados sejam os mesmos [6], isto é,

$$\phi_0 \xrightarrow{a_1} \phi_1 \xrightarrow{a_2} \phi_{12}, \quad (3.39)$$

e

$$\phi_0 \xrightarrow{a_2} \phi_2 \xrightarrow{a_1} \phi_{21}, \quad (3.40)$$

então

$$\phi_{12} = \phi_{21}. \quad (3.41)$$

Ao utilizarmos este teorema no contexto da equação de sine-Gordon, as fórmulas (3.26) e (3.27) nos mostram que:

$$\partial_+(\phi_1 - \phi_0) = -2a_1 \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_0}{2}\right), \quad (3.42)$$

$$\partial_+(\phi_{12} - \phi_1) = -2a_2 \sin\left(\frac{\phi_{12} + \phi_1}{2}\right), \quad (3.43)$$

$$\partial_+(\phi_2 - \phi_0) = -2a_2 \sin\left(\frac{\phi_2 + \phi_0}{2}\right), \quad (3.44)$$

$$\partial_+(\phi_{12} - \phi_2) = -2a_1 \sin\left(\frac{\phi_{12} + \phi_2}{2}\right). \quad (3.45)$$

Ao manipular as equações anteriores, realizando somas e subtrações estratégicas entre elas, chega-se à seguinte equação:

$$a_1 \sin\left(\frac{\phi_{12} - \phi_0 + \phi_2 - \phi_1}{4}\right) - a_2 \sin\left(\frac{\phi_{12} - \phi_0 - \phi_2 + \phi_1}{4}\right) = 0 \quad (3.46)$$

Utilizando as propriedades das funções trigonométricas, podemos simplificar ainda mais para:

$$\tan\left(\frac{\phi_{12} - \phi_0}{4}\right) = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{4}\right), \quad (3.47)$$

ou equivalentemente,

$$\phi_{12} = \phi_0 + 4 \tan^{-1} \left[\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{4}\right) \right]. \quad (3.48)$$

A Equação (3.48) expressa a superposição não linear do modelo de sine-Gordon. Esse resultado demonstra que é possível construir a solução exata de dois sólitons (ϕ_{12}) de forma puramente algébrica a partir do vácuo, evidenciando a consistência do Teorema da Permutabilidade e a integrabilidade do modelo.

4 O modelo de Thirring

O modelo de Thirring massivo constitui uma teoria quântica de campos em duas dimensões que é exatamente solúvel. Este sistema descreve férmions de Dirac sujeitos a uma autointeração local, caracterizada pelo acoplamento entre correntes[5]. No regime clássico, ele é descrito por um campo espinorial de Dirac de duas componentes $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ com propriedades de anticomutatividade [14].

4.1 Lagrangiana, equações de movimento e par de Lax

O modelo de Thirring massivo [5] fundamenta-se como uma teoria quântica de campos em um espaço-tempo bi-dimensional (1 + 1), descrevendo campos espinoriais de Dirac que apresentam auto-acoplamento fermiônico. A dinâmica fundamental deste sistema é descrita pela seguinte densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \psi - \frac{g}{2} j^\mu j_\mu. \quad (4.1)$$

Nesta expressão, g é a constante de acoplamento característica da interação e $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ identifica a corrente fermiônica do sistema. No espaço-tempo bi-dimensional, as matrizes de Dirac (γ^μ) são construídas a partir das matrizes de Pauli (σ_i), assumindo a forma $\gamma^0 = \sigma_1$, $\gamma^1 = i\sigma_2$ e $\gamma_5 = \sigma_3$. A geometria do espaço-tempo é regida pelo tensor métrico diagonal com assinatura (1, -1), onde $g^{00} = -g^{11} = 1$. Ao representarmos o espinor em termos de suas componentes fundamentais, $\psi = (\psi_1(x, t), \psi_2(x, t))$, a densidade Lagrangiana toma a seguinte representação

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2}\psi_1(\partial_t - \partial_x)\psi_1^\dagger + \frac{i}{2}\psi_1^\dagger(\partial_t - \partial_x)\psi_1 + \frac{i}{2}\psi_2(\partial_t + \partial_x)\psi_2^\dagger + \frac{i}{2}\psi_2^\dagger(\partial_t + \partial_x)\psi_2 \\ & - m(\psi_1^\dagger\psi_2 + \psi_2^\dagger\psi_1) - g(\psi_1^\dagger\psi_1\psi_2^\dagger\psi_2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

As equações de movimento são obtidas a partir dessa lagrangiana e tem a seguinte forma:

$$i(\partial_t - \partial_x)\psi_1 = m\psi_2 + g\psi_2^\dagger\psi_2\psi_1, \quad (4.3)$$

$$i(\partial_t + \partial_x)\psi_2 = m\psi_1 + g\psi_1^\dagger\psi_1\psi_2, \quad (4.4)$$

$$i(\partial_t - \partial_x)\psi_1^\dagger = -m\psi_2^\dagger - g\psi_2^\dagger\psi_2\psi_1^\dagger, \quad (4.5)$$

$$i(\partial_t + \partial_x)\psi_2^\dagger = -m\psi_1^\dagger - g\psi_1^\dagger\psi_1\psi_2^\dagger. \quad (4.6)$$

A integrabilidade clássica do modelo é assegurada pela existência de uma representação de curvatura nula. Para uma função de onda auxiliar $\Psi(x, t; \lambda) = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)^T$, as equações do sistema linear auxiliar são:

$$\partial_x \Psi = U \Psi, \quad (4.7)$$

$$\partial_t \Psi = V \Psi. \quad (4.8)$$

As conexões de Lax U e V , inicialmente propostas em [15], pertencem à superálgebra $\mathfrak{sl}(2, 1)$, descrita em [16] (ver apêndice A), e dependem do parâmetro espectral λ e das densidades $\rho_{\pm} = (\psi_2^\dagger \psi_2 \pm \psi_1^\dagger \psi_1)$:

$$U = \frac{ig\rho_-}{2}h_1 + \frac{im}{2}(\lambda^2 - \lambda^{-2})(h_1 + 2h_2) + r_1E_{-(\alpha_1+\alpha_2)} + r_2E_{-\alpha_2} + q_1E_{\alpha_1+\alpha_2} + q_2E_{\alpha_2} \quad (4.9)$$

$$V = -\frac{ig\rho_+}{2}h_1 + \frac{im}{2}(\lambda^{-2} + \lambda^2)(h_1 + 2h_2) - q_2E_{-(\alpha_1+\alpha_2)} - q_1E_{-\alpha_2} - r_2E_{\alpha_1+\alpha_2} - r_1E_{\alpha_2}, \quad (4.10)$$

onde as funções auxiliares são dadas por:

$$q_1 = -i\sqrt{\frac{mg}{2}}(\lambda\psi_1 + \lambda^{-1}\psi_2), \quad q_2 = i\sqrt{\frac{mg}{2}}(\lambda\psi_1^\dagger - \lambda^{-1}\psi_2^\dagger), \quad (4.11)$$

$$r_1 = -i\sqrt{\frac{mg}{2}}(\lambda\psi_1^\dagger + \lambda^{-1}\psi_2^\dagger), \quad r_2 = i\sqrt{\frac{mg}{2}}(\lambda\psi_1 - \lambda^{-1}\psi_2). \quad (4.12)$$

A construção matricial do par de Lax fundamenta-se nos geradores da superálgebra $\mathfrak{sl}(2, 1)$ (a representação fundamental 3×3 é apresentada no apêndice A). Conforme estabelecido anteriormente, a consistência deste sistema é garantida pela condição de compatibilidade entre os operadores lineares. Ao aplicarmos a condição de curvatura nula às matrizes U e V aqui definidas, as relações de comutação e as derivadas parciais resultam exatamente nas equações de movimento não-lineares fermiônicas apresentadas nas equações (4.3)-(4.6).

A construção das grandezas conservadas no modelo de Thirring fundamenta-se na análise do problema linear associado, cuja estrutura permite identificar uma hierarquia infinita de cargas por meio do formalismo do par de Lax. O ponto de partida é o sistema de equações diferenciais que rege as componentes da função de onda Ψ . A evolução espacial em relação à coordenada x é definida por:

$$\partial_x \Psi_1 = \left[\frac{ig}{2}\rho_- + \frac{im}{2}(\lambda^2 - \lambda^{-2}) \right] \Psi_1 + q_1 \Psi_3 \quad (4.13)$$

$$\partial_x \Psi_2 = - \left[\frac{ig}{2}\rho_- - \frac{im}{2}(\lambda^2 - \lambda^{-2}) \right] \Psi_2 + q_2 \Psi_3 \quad (4.14)$$

$$\partial_x \Psi_3 = r_1 \Psi_1 + r_2 \Psi_2 + im(\lambda^2 - \lambda^{-2}) \Psi_3 \quad (4.15)$$

Simultaneamente, a evolução temporal do sistema é descrita pelas equações:

$$\partial_t \Psi_1 = - \left[\frac{ig}{2}\rho_+ - \frac{im}{2}(\lambda^2 + \lambda^{-2}) \right] \Psi_1 - r_2 \Psi_3 \quad (4.16)$$

$$\partial_t \Psi_2 = \left[\frac{ig}{2}\rho_+ + \frac{im}{2}(\lambda^2 + \lambda^{-2}) \right] \Psi_2 - r_1 \Psi_3 \quad (4.17)$$

$$\partial_t \Psi_3 = -q_2 \Psi_1 - q_1 \Psi_2 + im(\lambda^2 + \lambda^{-2}) \Psi_3 \quad (4.18)$$

A partir desse sistema, introduzem-se as funções auxiliares $\Gamma_{21} = \Psi_2 \Psi_1^{-1}$ e $\Gamma_{31} = \Psi_3 \Psi_1^{-1}$. Elas permitem converter o problema linear em equações do tipo Riccati:

$$\partial_x \Gamma_{21} = -(ig\rho_-)\Gamma_{21} + q_2\Gamma_{31} - q_1\Gamma_{21}\Gamma_{31} \quad (4.19)$$

$$\partial_x \Gamma_{31} = r_1 + r_2\Gamma_{21} - \frac{i}{2} \left[g\rho_- - m(\lambda^2 - \lambda^{-2}) \right] \Gamma_{31} \quad (4.20)$$

Dessas relações, emerge a lei de conservação fundamental

$$\partial_t \left[q_1 \Gamma_{31} + \frac{ig}{2} \rho_- \right] + \partial_x \left[r_2 \Gamma_{31} + \frac{ig}{2} \rho_+ \right] = 0, \quad (4.21)$$

cuja carga associada a esse setor é definida da seguinte forma:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[q_1 \Gamma_{31} + \frac{ig}{2} \rho_- \right] \quad (4.22)$$

Para extrair as infinitas cargas, as funções auxiliares são expandidas em potências do parâmetro espectral λ . Para $\lambda \rightarrow \infty$, utiliza-se a expansão em potências inversas:

$$\Gamma_{ij}(x, t; \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{ij}^{(k)}(x, t)}{\lambda^k} \quad (4.23)$$

enquanto para $\lambda \rightarrow 0$, a expansão ocorre em potências positivas:

$$\Gamma_{ij}(x, t; \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\Gamma}_{ij}^{(k)}(x, t) \lambda^k \quad (4.24)$$

As cargas obtidas apenas pelo setor I_1 não são puramente reais. Para garantir a consistência física, é necessário as contribuições de outros setores provenientes das funções auxiliares Γ_{12} , Γ_{32} , Γ_{13} e Γ_{23} . Os cálculos detalhados para a obtenção dessas funções auxiliares e seus respectivos coeficientes encontram-se apresentados em [3]. Elas geram as cargas I_2 e I_3 :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[q_2 \Gamma_{32} - \frac{ig}{2} \rho_- \right], \quad (4.25)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dx [r_1 \Gamma_{13} + r_2 \Gamma_{23}]. \quad (4.26)$$

As quantidades conservadas reais são estabelecidas por meio das combinações:

$$\mathbb{I}^{(0)} = (I_1^{(0)} - I_2^{(0)} - I_3^{(0)}), \quad \hat{\mathbb{I}}^{(0)} = (\hat{I}_1^{(0)} - \hat{I}_2^{(0)} - \hat{I}_3^{(0)}) \quad (4.27)$$

$$\mathbb{I}^{(2)} = (I_1^{(2)} + I_2^{(2)} + I_3^{(2)}), \quad \hat{\mathbb{I}}^{(2)} = (\hat{I}_1^{(2)} + \hat{I}_2^{(2)} + \hat{I}_3^{(2)}) \quad (4.28)$$

Finalmente, essas somas permitem recuperar os observáveis físicos do modelo a saber, a energia E

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{8ig} [\mathbb{I}^{(2)} - \hat{\mathbb{I}}^{(2)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{i}{2} (\psi_1 \partial_x \psi_1^\dagger + \psi_1^\dagger \partial_x \psi_1 - \psi_2 \partial_x \psi_2^\dagger - \psi_2^\dagger \partial_x \psi_2) + m (\psi_2^\dagger \psi_1 + \psi_1^\dagger \psi_2) + g \psi_2^\dagger \psi_2 \psi_1^\dagger \psi_1 \right], \end{aligned} \quad (4.29)$$

e o Momento P

$$P = \frac{m}{8ig} [\mathbb{I}^{(2)} + \hat{\mathbb{I}}^{(2)}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{i}{2} (\psi_1 \partial_x \psi_1^\dagger + \psi_1^\dagger \partial_x \psi_1 + \psi_2 \partial_x \psi_2^\dagger + \psi_2^\dagger \partial_x \psi_2). \quad (4.30)$$

4.2 Transformações de Bäcklund

Para construir as transformações de Bäcklund, é conveniente reescrever as equações de movimento (4.3)-(4.6) em coordenadas de cone de luz, definidas por

$$x^+ = \frac{1}{2}(x^0 + x^1) \quad , \quad x^- = \frac{1}{2}(x^0 - x^1).$$

Nessas coordenadas, as equações assumem a seguinte forma:

$$i\partial_- \psi_1 = m\psi_2 + g\psi_2^\dagger \psi_2 \psi_1, \quad (4.31)$$

$$i\partial_+ \psi_2 = m\psi_1 + g\psi_1^\dagger \psi_1 \psi_2, \quad (4.32)$$

$$i\partial_- \psi_1^\dagger = -m\psi_2^\dagger - g\psi_2^\dagger \psi_2 \psi_1^\dagger, \quad (4.33)$$

$$i\partial_+ \psi_2^\dagger = -m\psi_1^\dagger - g\psi_1^\dagger \psi_1 \psi_2^\dagger. \quad (4.34)$$

Quando o termo de interação é nulo ($g = 0$), a transformação de Bäcklund simplifica-se em um conjunto de relações lineares que vinculam a solução original ψ à solução transformada $\psi^{(a)}$, na seguinte forma

$$\partial_+(\psi_1^{(a)} + \psi_1) = ma^{-1}(\psi_1^{(a)} - \psi_1) \quad (4.35)$$

$$\partial_-(\psi_2^{(a)} - \psi_2) = -ma(\psi_2^{(a)} + \psi_2) \quad (4.36)$$

$$\psi_2^{(a)} - \psi_2 = -ia(\psi_1^{(a)} + \psi_1) \quad (4.37)$$

Para a obtenção de funções independentes, a transformação de Bäcklund é dividida em duas partes através da função auxiliar $X^{(a)}$:

$$X^{(a)} = \psi_1^{(a)} + \psi_1 = ia^{-1}(\psi_2^{(a)} - \psi_2) \quad (4.38)$$

No regime de campo livre ($g = 0$), a evolução de $X^{(a)}$ é regida pelo sistema de equações:

$$\partial_+ X^{(a)} = ma^{-1}X^{(a)} - 2ma^{-1}\psi_1, \quad (4.39)$$

$$\partial_- X^{(a)} = -maX^{(a)} - 2mi\psi_2. \quad (4.40)$$

Podemos verificar a consistência do formalismo observando que a integrabilidade das relações (4.39) e (4.40) assegura que os campos originais, ψ_i , obedecem às equações de movimento (4.31) e (4.32), quando o termo de interação é nulo.

Agora iremos generalizar para o caso interagente ($g \neq 0$), assumindo que não haja derivadas de ordens superiores na formulação.

$$\partial_+ X^{(a)} = ma^{-1}X^{(a)} - 2ma^{-1}\psi_1 + g f(X^{(a)}, X^{(a)\dagger}, \psi, \psi^\dagger), \quad (4.41)$$

$$\partial_- X^{(a)} = -maX^{(a)} - 2mi\psi_2 + g h(X^{(a)}, X^{(a)\dagger}, \psi, \psi^\dagger). \quad (4.42)$$

A condição de integrabilidade necessária para a consistência destas equações é dada pela igualdade das derivadas cruzadas:

$$\partial_-(\partial_+ X^{(a)}) = \partial_+(\partial_- X^{(a)}). \quad (4.43)$$

Considerando a anticomutatividade dos campos, onde o quadrado de qualquer campo se anula, as funções de correção f e h assumem uma forma simplificada:

$$f(X^{(a)}, X^{(a)\dagger}, \psi, \psi^\dagger) = a_1 \psi_1^\dagger \psi_1 X^{(a)} + b_1 X^{(a)\dagger} X^{(a)} \psi_1, \quad (4.44)$$

$$h(X^{(a)}, X^{(a)\dagger}, \psi, \psi^\dagger) = a_2 \psi_2^\dagger \psi_2 X^{(a)} + b_2 X^{(a)\dagger} X^{(a)} \psi_2. \quad (4.45)$$

A partir do cálculo da condição de integrabilidade, as equações finais para a função auxiliar são:

$$\partial_+ X^{(a)} = ma^{-1} X^{(a)} - 2ma^{-1} \psi_1 - ig \psi_1^\dagger \psi_1 X^{(a)} - ig X^{(a)\dagger} X^{(a)} \psi_1, \quad (4.46)$$

$$\partial_- X^{(a)} = -ma X^{(a)} - 2mi \psi_2 - ig \psi_2^\dagger \psi_2 X^{(a)} - ga X^{(a)\dagger} X^{(a)} \psi_2. \quad (4.47)$$

Para que os campos $\psi_i^{(a)}$ resolvam as equações diferenciais que se reduzem ao caso livre, a única possibilidade para transformação de Bäcklund é dada por,

$$\psi_1^{(a)} = X^{(a)} - \psi_1 - \frac{iga}{2m} X^{(a)\dagger} X^{(a)} \psi_1, \quad (4.48)$$

$$\psi_2^{(a)} = \psi_2 - ia X^{(a)} - \frac{iga}{2m} X^{(a)\dagger} X^{(a)} \psi_2. \quad (4.49)$$

Os campos assim definidos são, de fato, solução das equações de movimento para qualquer valor da constante de acoplamento g .

4.3 Teorema da Permutabilidade

Por meio da aplicação sucessiva de transformações de Bäcklund, é possível obter novas soluções para o modelo de Thirring de forma puramente algébrica [17]. Para explicitar essa construção, consideram-se duas sequências de transformações caracterizadas pelos parâmetros a_1 e a_2 . Na primeira sequência, parte-se do campo ψ , aplica-se a transformação associada a a_1 , obtendo-se $\psi^{(1)}$, e em seguida aplica-se a transformação associada a a_2 , chegando ao campo composto $\psi^{(1,2)}$, isto é:

$$\psi \xrightarrow{a_1} X^{(1)} \iff \psi^{(1)} = B(a_1) \psi \xrightarrow{a_2} X^{(1,2)} \iff \psi^{(1,2)} = B(a_2) B(a_1) \psi. \quad (4.50)$$

De modo análogo, invertendo-se a ordem das transformações, obtém-se:

$$\psi \xrightarrow{a_2} X^{(2)} \iff \psi^{(2)} = B(a_2) \psi \xrightarrow{a_1} X^{(2,1)} \iff \psi^{(2,1)} = B(a_1) B(a_2) \psi. \quad (4.51)$$

O objetivo é demonstrar a **comutatividade** (ou **permutabilidade**) dessas duas transformações, isto é, que as aplicações sucessivas em ordens trocadas conduzem ao mesmo campo final:

$$\psi^{(1,2)} = \psi^{(2,1)}. \quad (4.52)$$

Para isso, constrói-se $\psi^{(1,2)}$ e $\psi^{(2,1)}$ diretamente a partir de ψ , $\psi^{(1)}$ e $\psi^{(2)}$. A manipulação algébrica torna-se consideravelmente mais simples quando se expressa $\psi^{(i)}$ em termos das variáveis auxiliares $X^{(i)}$. A partir da suposição $\psi^{(1,2)} = \psi^{(2,1)}$, juntamente com as equações (4.48) e (4.49), segue que:

$$\begin{aligned}\psi_1^{(1,2)} &= X^{(1,2)} - \psi_1^{(1)} - \frac{iga_2}{2m} X^{(1,2)\dagger} X^{(1,2)} \psi_1^{(1)} \\ &= X^{(2,1)} - \psi_1^{(2)} - \frac{iga_1}{2m} X^{(2,1)\dagger} X^{(2,1)} \psi_1^{(2)} \\ &= \psi_1^{(2,1)},\end{aligned}\tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}\psi_2^{(1,2)} &= \psi_2^{(1)} - ia_2 X^{(1,2)} - \frac{iga_2}{2m} X^{(1,2)\dagger} X^{(1,2)} \psi_2^{(1)} \\ &= \psi_2^{(2)} - ia_1 X^{(2,1)} - \frac{iga_1}{2m} X^{(2,1)\dagger} X^{(2,1)} \psi_2^{(2)} \\ &= \psi_2^{(2,1)}.\end{aligned}\tag{4.54}$$

Em seguida, eliminando $\psi^{(1)}$ e $\psi^{(2)}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}X^{(1,2)} - X^{(2,1)} &= X^{(1)} - X^{(2)} - \frac{iga_1}{2m} X^{(1)\dagger} X^{(1)} \psi_1 + \frac{iga_2}{2m} X^{(2)\dagger} X^{(2)} \psi_1 \\ &\quad + \frac{iga_2}{2m} X^{(1,2)\dagger} X^{(1,2)} \left(X^{(1)} - \psi_1 - \frac{iga_1}{2m} X^{(1)\dagger} X^{(1)} \psi_1 \right) \\ &\quad - \frac{iga_1}{2m} X^{(2,1)\dagger} X^{(2,1)} \left(X^{(2)} - \psi_1 - \frac{iga_2}{2m} X^{(2)\dagger} X^{(2)} \psi_1 \right),\end{aligned}\tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}ia_2 X^{(1,2)} - ia_1 X^{(2,1)} &= ia_2 X^{(2)} - ia_1 X^{(1)} + \frac{iga_2}{2m} X^{(2)\dagger} X^{(2)} \psi_2 - \frac{iga_1}{2m} X^{(1)\dagger} X^{(1)} \psi_2 \\ &\quad + \frac{iga_1}{2m} X^{(2,1)\dagger} X^{(2,1)} \left(\psi_2 - ia_2 X^{(2)} - \frac{i\lambda a_2}{2m} X^{(2)\dagger} X^{(2)} \psi_2 \right) \\ &\quad - \frac{iga_2}{2m} X^{(1,2)\dagger} X^{(1,2)} \left(\psi_2 - ia_1 X^{(1)} - \frac{iga_1}{2m} X^{(1)\dagger} X^{(1)} \psi_2 \right).\end{aligned}\tag{4.56}$$

Resolvendo o sistema obtido para $X^{(1,2)}$ e $X^{(2,1)}$ encontra-se:

$$\begin{aligned}X^{(1,2)} &= \frac{1}{a_1 - a_2} \left\{ 2a_1 X^{(1)} - (a_1 + a_2) X^{(2)} \right\} \\ &\quad - \frac{ig(a_1 + a_2)}{2m(a_1 - a_2)^2} \left\{ a_1(a_1 + a_2) X^{(1)\dagger} X^{(1)} X^{(2)} + 2a_1 a_2 X^{(2)\dagger} X^{(2)} X^{(1)} \right\}.\end{aligned}\tag{4.57}$$

Além disso,

$$X^{(2,1)} = (1 \leftrightarrow 2),\tag{4.58}$$

isto é, $X^{(2,1)}$ é obtido trocando-se simultaneamente os índices 1 e 2 na expressão anterior. Vamos agora derivar algumas soluções a partir da solução de vácuo $\psi = 0$. Das equações (4.46) e (4.47), obtemos:

$$\partial_+ X^{(j)} = m a_j^{-1} X^{(j)},\tag{4.59}$$

$$\partial_- X^{(j)} = -m a_j X^{(j)},\tag{4.60}$$

e conseqüentemente,

$$X^{(j)} = \Sigma^{(j)} \exp \left(m a_j^{-1} x^+ - m a_j x^- \right). \quad (4.61)$$

Neste ponto, $\Sigma^{(j)}$ denota uma constante arbitrária de natureza anticomutante, pertencente a uma álgebra de Grassmann. A partir da relação expressa na equação (4.48)-(4.49), pode-se identificar diretamente os componentes do espinor $\psi^{(j)}$ como

$$\psi_1^{(j)} = X^{(j)}, \quad \psi_2^{(j)} = -i a_j X^{(j)}. \quad (4.62)$$

Usando as Eqs. (4.53)-(4.54) e (4.57)-(4.58), obtemos

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1,2)} &= \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right) (X^{(1)} - X^{(2)}) - \frac{ig}{2m} \left(\frac{a_1(a_1 + a_2)(a_1 + 3a_2)}{(a_1 - a_2)^2} \right) X^{(1)\dagger} X^{(1)} X^{(2)} \\ &\quad - \frac{ig}{2m} \left(\frac{a_2(a_1 + a_2)(a_2 + 3a_1)}{(a_1 - a_2)^2} \right) X^{(2)\dagger} X^{(2)} X^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

bem como

$$\begin{aligned} \psi_2^{(1,2)} &= \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right) (i a_2 X^{(2)} - i a_1 X^{(1)}) - \frac{g}{2m} \left(\frac{a_1 a_2 (a_1 + a_2)(a_2 + 3a_1)}{(a_1 - a_2)^2} \right) X^{(1)\dagger} X^{(1)} X^{(2)} \\ &\quad - \frac{g}{2m} \left(\frac{a_1 a_2 (a_1 + a_2)(a_1 + 3a_2)}{(a_1 - a_2)^2} \right) X^{(2)\dagger} X^{(2)} X^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Com as Equações (4.63) e (4.64), obtemos as componentes explícitas da nova solução para o modelo de Thirring. Esse resultado ilustra na prática a grande vantagem do Teorema da Permutabilidade, conseguimos construir uma solução complexa e não trivial que carrega toda a dependência da interação g e dos parâmetros a_1 e a_2 de forma puramente algébrica, partindo apenas da solução mais simples de vácuo.

5 O modelo de Thirring acoplado

5.1 Lagrangiana do modelo

A densidade Lagrangiana para o modelo de Thirring massivo Grassmanniano (GMTM) acoplado pode ser escrita da seguinte forma [18] ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\bar{\chi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\chi - \frac{1}{2}\bar{\chi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m)\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m)\chi \\ & - \frac{g}{4}[(\bar{\chi}\gamma_\mu\psi)(\bar{\chi}\gamma^\mu\psi) + (\bar{\psi}\gamma_\mu\chi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\chi)], \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $\chi = (\chi_1, \chi_2)^T$, $\bar{\chi} = \chi^\dagger\gamma^0$ (e de modo análogo para ψ), as matrizes gama bidimensionais são escolhidas como $\gamma^0 = \sigma_1$, $\gamma^1 = i\sigma_2$, e o tensor métrico do espaço-tempo é $\text{diag}(1, -1)$. O último termo representa a interação entre os campos ψ e χ , sendo g a constante de acoplamento (real). Neste caso, os campos χ_i e ψ_j (com $i, j = 1, 2$) são funções que tomam valores no setor ímpar (fermiônico) de uma álgebra de Grassmann, isto é eles anticomutam entre si e com seus conjugados χ_i^\dagger e ψ_j^\dagger . Em termos das componentes, a Lagrangiana ela toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2}\chi_1^\dagger(\partial_t + \partial_x)\psi_1 + \frac{i}{2}\psi_1(\partial_t + \partial_x)\chi_1^\dagger + \frac{i}{2}\chi_2^\dagger(\partial_t - \partial_x)\psi_2 + \frac{i}{2}\psi_2(\partial_t - \partial_x)\chi_2^\dagger \\ & + \frac{i}{2}\psi_1^\dagger(\partial_t + \partial_x)\chi_1 + \frac{i}{2}\chi_1(\partial_t + \partial_x)\psi_1^\dagger + \frac{i}{2}\psi_2^\dagger(\partial_t - \partial_x)\chi_2 + \frac{i}{2}\chi_2(\partial_t - \partial_x)\psi_2^\dagger \\ & - m(\chi_1^\dagger\psi_2 + \chi_2^\dagger\psi_1 + \psi_1^\dagger\chi_2 + \psi_2^\dagger\chi_1) - g(\chi_1^\dagger\psi_1\chi_2^\dagger\psi_2 + \psi_1^\dagger\chi_1\psi_2^\dagger\chi_2). \end{aligned} \quad (5.2)$$

de modo que as equações de movimento são dadas por

$$i\partial_+\psi_1 = m\psi_2 + g(\chi_2^\dagger\psi_2)\psi_1, \quad (5.3)$$

$$i\partial_-\psi_2 = m\psi_1 + g(\chi_1^\dagger\psi_1)\psi_2, \quad (5.4)$$

$$i\partial_+\chi_1^\dagger = -m\chi_2^\dagger - g(\chi_2^\dagger\psi_2)\chi_1^\dagger, \quad (5.5)$$

$$i\partial_-\chi_2^\dagger = -m\chi_1^\dagger - g(\chi_1^\dagger\psi_1)\chi_2^\dagger, \quad (5.6)$$

e

$$i\partial_+\chi_1 = m\chi_2 + g(\psi_2^\dagger\chi_2)\chi_1, \quad (5.7)$$

$$i\partial_-\chi_2 = m\chi_1 + g(\psi_1^\dagger\chi_1)\chi_2, \quad (5.8)$$

$$i\partial_+\psi_1^\dagger = -m\psi_2^\dagger - g(\psi_2^\dagger\chi_2)\psi_1^\dagger, \quad (5.9)$$

$$i\partial_-\psi_2^\dagger = -m\psi_1^\dagger - g(\psi_1^\dagger\chi_1)\psi_2^\dagger. \quad (5.10)$$

Introduzindo um par de novos campos

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \xi), \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \xi), \quad (5.11)$$

obtemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Th}(\eta, m, -g/4) - \mathcal{L}_{Th}(\xi, m, g/4) + \mathcal{L}_{Int}, \quad (5.12)$$

onde a Lagrangian para um campo de Thirring Grassmanniano é

$$\mathcal{L}_{Th}(\psi, m, -g) = \frac{1}{2}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi), \quad (5.13)$$

e a Lagrangiana de interação é dada por

$$\mathcal{L}_{Int} = -\frac{g}{8} \left[(\bar{\eta}\gamma_\mu\xi)(\bar{\eta}\gamma^\mu\xi) + (\bar{\xi}\gamma_\mu\eta)(\bar{\xi}\gamma^\mu\eta) - 2(\bar{\eta}\gamma_\mu\eta)(\bar{\xi}\gamma^\mu\xi) - 2(\bar{\eta}\gamma_\mu\xi)(\bar{\xi}\gamma^\mu\eta) \right]. \quad (5.14)$$

Uma questão relevante ao analisarmos a densidade lagrangiana do modelo de Thirring acoplado é a sua semelhança formal com a estrutura de modelos do tipo $SU(N)$. No entanto, como demonstrado em [18], essa similaridade não se traduz em uma invariância $SU(N)$ convencional. A análise detalhada revela que o sistema é, na verdade, uma variante do modelo de Thirring Grassmanniano ligada ao grupo $SU(1, 1)$. Conforme exposto pelos autores, através de uma rotação no espaço interno dos campos, o modelo pode ser interpretado como um sistema de dois modelos de Thirring massivos, com a mesma massa m , com interação não trivial dada pela eq. (5.14), e constantes de acoplamento de sinais opostos.

5.2 Representação da conexão de Lax

As equações de campo para o (GMTM) acoplado podem ser obtidas partindo do problema linear auxiliar

$$\partial_\pm \mathcal{V}(x^\pm, \lambda) = \mathcal{A}_\pm(x^\pm, \lambda)\mathcal{V}(x^\pm, \lambda), \quad (5.15)$$

onde estamos usando a notação de coordenadas de cone de luz $x^\pm = \frac{1}{2}(t \pm x)$, $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3)^T$ é um vetor auxiliar de três componentes, e $\lambda \in \mathbb{C}$ é o parâmetro espectral. As conexões de Lax (ou potenciais de calibre) \mathcal{A}_\pm têm valores na superálgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, 1)$, e podem ser escritas na seguinte forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+ &= ig(\chi_2^*\psi_2)h_1 + im\lambda(h_1 + 2h_2) - i\kappa\psi_2 \left(\lambda^{1/2}E_{\alpha_2} - \lambda^{1/2}E_{-(\alpha_1+\alpha_2)} \right) \\ &\quad - i\kappa\chi_2^* \left(\lambda^{1/2}E_{-\alpha_2} - \lambda^{1/2}E_{\alpha_1+\alpha_2} \right), \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_- &= ig(\chi_1^*\psi_1)h_1 + im\lambda^{-1}(h_1 + 2h_2) + i\kappa\psi_1 \left(\lambda^{-1/2}E_{\alpha_2} + \lambda^{-1/2}E_{-(\alpha_1+\alpha_2)} \right) \\ &\quad + i\kappa\chi_1^* \left(\lambda^{-1/2}E_{-\alpha_2} + \lambda^{-1/2}E_{\alpha_1+\alpha_2} \right), \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde h_1, h_2 são os geradores da subálgebra de Cartan, e $E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}$ são os geradores associados às raízes fermiônicas, e o parâmetro constante $\kappa = \sqrt{2mg}$ foi definido. Usando a representação matricial 3×3 das conexões de Lax (Veja o apêndice A), temos

$$\mathcal{A}_+ = \begin{pmatrix} ig(\chi_2^*\psi_2) + im\lambda & 0 & i\kappa\lambda^{1/2}\chi_2^* \\ 0 & -ig(\chi_2^*\psi_2) + im\lambda & -i\kappa\lambda^{1/2}\psi_2 \\ i\kappa\lambda^{1/2}\psi_2 & -i\kappa\lambda^{1/2}\chi_2^* & 2im\lambda \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

$$\mathcal{A}_- = \begin{pmatrix} ig(\chi_1^* \psi_1) + im\lambda^{-1} & 0 & i\kappa\lambda^{-1/2}\chi_1^* \\ 0 & -ig(\chi_1^* \psi_1) + im\lambda^{-1} & i\kappa\lambda^{-1/2}\psi_1 \\ i\kappa\lambda^{-1/2}\psi_1 & i\kappa\lambda^{-1/2}\chi_1^* & 2im\lambda^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Ao exigir a condição de compatibilidade no problema linear auxiliar, $\partial_+ \partial_- \mathcal{V} = \partial_- \partial_+ \mathcal{V}$, obtemos a condição de curvatura zero

$$\partial_- \mathcal{A}_+ - \partial_+ \mathcal{A}_- + [\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_-] = 0, \quad (5.20)$$

que gera o primeiro conjunto de equações de campo do GMTM acoplado, a saber

$$i\partial_+ \psi_1 = m\psi_2 + g(\chi_2^* \psi_2)\psi_1, \quad (5.21)$$

$$i\partial_- \psi_2 = m\psi_1 + g(\chi_1^* \psi_1)\psi_2, \quad (5.22)$$

$$i\partial_+ \chi_1^* = -m\chi_2^* - g(\chi_2^* \psi_2)\chi_1^*, \quad (5.23)$$

$$i\partial_- \chi_2^* = -m\chi_1^* - g(\chi_1^* \psi_1)\chi_2^*. \quad (5.24)$$

Note que as equações de campo correspondentes para χ_1, χ_2 e ψ_1^* e ψ_2^* podem ser obtidas respectivamente a partir das matrizes de Lax complexas conjugadas $\mathcal{A}_\pm^*(x^\pm; \lambda^*)$. Explicitamente, elas são

$$i\partial_+ \chi_1 = m\chi_2 + g(\psi_2^* \chi_2)\chi_1, \quad (5.25)$$

$$i\partial_- \chi_2 = m\chi_1 + g(\psi_1^* \chi_1)\chi_2, \quad (5.26)$$

$$i\partial_+ \psi_1^* = -m\psi_2^* - g(\psi_2^* \chi_2)\psi_1^*, \quad (5.27)$$

$$i\partial_- \psi_2^* = -m\psi_1^* - g(\psi_1^* \chi_1)\psi_2^*. \quad (5.28)$$

Além disso, vale mencionar que os termos de grau zero da condição de curvatura zero levam à seguinte equação de compatibilidade,

$$i\partial_+(\chi_1^* \psi_1) - i\partial_-(\chi_2^* \psi_2) = 2m(\chi_1^* \psi_2 - \chi_2^* \psi_1). \quad (5.29)$$

5.3 Transformação de Bäcklund

É bem conhecido que as transformações de Bäcklund para campos fermiônicos são dadas por relações algébricas de primeira ordem entre as componentes zdos campos e exigem a existência de um campo auxiliar fermiônico, que pode ser interpretado como uma função geradora para o conjunto infinito de correntes conservadas [17]. Como o GMTM acoplado possui dois campos fermiônicos, espera-se que existam dois campos auxiliares fermiônicos para escrever uma transformação de Bäcklund bem definida para o modelo.

5.3.1 Campos de Dirac livres

Vamos começar com o caso de dois campos de Dirac livres ($g = 0$). Neste caso, a transformação de Bäcklund pode ser definida introduzindo dois campos grassmannianos

auxiliares X e Y , satisfazendo as seguintes relações,

$$X = (\psi_1^{(1)} + \psi_1^{(0)}) = ia^{-1}(\psi_2^{(1)} - \psi_2^{(0)}), \quad (5.30)$$

$$Y = (\chi_1^{(1)} + \chi_1^{(0)}) = ib^{-1}(\chi_2^{(1)} - \chi_2^{(0)}), \quad (5.31)$$

e as derivadas correspondentes

$$\partial_- X = ma^{-1}(\psi_1^{(1)} - \psi_1^{(0)}) = ma^{-1}X - 2ma^{-1}\psi_1^{(0)}, \quad (5.32)$$

$$\partial_+ X = -im(\psi_2^{(1)} + \psi_2^{(0)}) = -maX - 2im\psi_2^{(1)}, \quad (5.33)$$

e

$$\partial_- Y = mb^{-1}(\chi_1^{(1)} - \chi_1^{(0)}) = mb^{-1}Y - 2mb^{-1}\chi_1^{(0)}, \quad (5.34)$$

$$\partial_+ Y = -im(\chi_2^{(1)} + \chi_2^{(0)}) = -mbY - 2im\chi_2^{(0)}. \quad (5.35)$$

Aqui, os parâmetros de Bäcklund a e b são constantes reais. A partir das condições de compatibilidade das relações acima, isto é, $\partial_+\partial_-X = \partial_-\partial_+X$ e $\partial_+\partial_-Y = \partial_-\partial_+Y$, podemos verificar que se os campos $\psi^{(1)}$ e $\chi^{(1)}$ satisfazem as equações de movimento, então os campos $\psi^{(2)}$ e $\chi^{(2)}$ também satisfazem. É claro que podemos facilmente escrever as transformações de Bäcklund correspondentes para os campos complexos conjugados, em termos de X^* e Y^* .

5.3.2 Campos de Thirring acoplados

Agora, consideremos a generalização da transformação de Bäcklund para os campos de Thirring acoplados ($g \neq 0$). Por consistência, descobrimos que os parâmetros de Bäcklund devem ser os mesmos, $a = b$. Então, ao assumirmos que os campos $\psi^{(1)}$ e $\chi^{(1)}$ são soluções das equações de campo do GMTM acoplado, propomos a seguinte transformação de Bäcklund para o modelo de Thirring Grassmanniano acoplado,

$$X = (\psi_1^{(1)} + \psi_1^{(0)}) + \frac{ia g}{2m} Y^* X \psi_1^{(0)} = ia^{-1}(\psi_2^{(1)} - \psi_2^{(0)}) - \frac{g}{2m} Y^* X \psi_2^{(0)}, \quad (5.36)$$

$$Y = (\chi_1^{(1)} + \chi_1^{(0)}) + \frac{ia g}{2m} X^* Y \chi_1^{(0)} = ia^{-1}(\chi_2^{(1)} - \chi_2^{(0)}) - \frac{g}{2m} X^* Y \chi_2^{(0)}, \quad (5.37)$$

$$X^* = (\psi_1^{*(1)} + \psi_1^{*(0)}) - \frac{ia g}{2m} X^* Y \psi_1^{*(0)} = -ia^{-1}(\psi_2^{*(1)} - \psi_2^{*(0)}) - \frac{g}{2m} X^* Y \psi_2^{*(0)}, \quad (5.38)$$

$$Y^* = (\chi_1^{*(1)} + \chi_1^{*(0)}) - \frac{ia g}{2m} Y^* X \chi_1^{*(0)} = -ia^{-1}(\chi_2^{*(1)} - \chi_2^{*(0)}) - \frac{g}{2m} Y^* X \chi_2^{*(0)}, \quad (5.39)$$

juntamente com as derivadas correspondentes dos campos auxiliares,

$$\partial_- X = ma^{-1}X - 2ma^{-1}\psi_1^{(0)} - ig(\chi_1^{*(0)}\psi_1^{(0)})X - ig(Y^*X)\psi_1^{(0)}, \quad (5.40)$$

$$\partial_+ X = -maX - 2im\psi_2^{(0)} - ig(\chi_2^{*(0)}\psi_2^{(0)})X - ga(Y^*X)\psi_2^{(0)}, \quad (5.41)$$

$$\partial_- X^* = ma^{-1}X^* - 2ma^{-1}\psi_1^{*(0)} + ig(\psi_1^{*(0)}\chi_1^{(0)})X^* + ig(X^*Y)\psi_1^{*(0)}, \quad (5.42)$$

$$\partial_+ X^* = -maX^* + 2im\psi_2^{*(0)} + ig(\psi_2^{*(0)}\chi_2^{(0)})X^* - ga(X^*Y)\psi_2^{*(0)}, \quad (5.43)$$

e

$$\partial_- Y = ma^{-1}Y - 2ma^{-1}\chi_1^{(0)} - ig(\psi_1^{*(0)}\chi_1^{(0)})Y - ig(X^*Y)\chi_1^{(0)}, \quad (5.44)$$

$$\partial_+ Y = -maY - 2im\chi_2^{(0)} - ig(\psi_2^{*(0)}\chi_2^{(0)})Y - ga(X^*Y)\chi_2^{(0)}, \quad (5.45)$$

$$\partial_- Y^* = ma^{-1}Y^* - 2ma^{-1}\chi_1^{*(0)} + ig(\chi_1^{*(0)}\psi_1^{(0)})Y^* + ig(Y^*X)\chi_1^{*(0)}, \quad (4.17)$$

$$\partial_+ Y^* = -maY^* + 2im\chi_2^{*(0)} + ig(\chi_2^{*(0)}\psi_2^{(0)})Y^* - ga(Y^*X)\chi_2^{*(0)}. \quad (5.46)$$

A partir disto, pode-se verificar facilmente que os campos auxiliares X e Y satisfazem as condições de compatibilidade $\partial_+\partial_-X = \partial_-\partial_+X$ e $\partial_+\partial_-Y = \partial_-\partial_+Y$, e os campos de Thirring transformados $\psi^{(1)}$ e $\chi^{(1)}$ definidos pelas transformações de Bäcklund (5.36)-(5.37) são, de fato, também soluções das equações do GMTM acoplado.

Vale a pena notar que, ao usar as propriedades Grassmannianas dos campos, as transformações de Bäcklund podem ser reescritas em diversas formas equivalentes diferentes. Nas próximas seções, as seguintes formas simples serão de interesse particular,

$$X = (\psi_1^{(1)} + \psi_1^{(0)}) - \frac{ig}{2m}Y^*X\psi_1^{(1)} = ia^{-1}(\psi_2^{(1)} - \psi_2^{(0)}) - \frac{g}{2m}Y^*X\psi_2^{(1)}, \quad (5.47)$$

$$Y = (\chi_1^{(1)} + \chi_1^{(0)}) - \frac{ig}{2m}X^*Y\chi_1^{(1)} = ia^{-1}(\chi_2^{(1)} - \chi_2^{(0)}) - \frac{g}{2m}X^*Y\chi_2^{(1)}, \quad (5.48)$$

e

$$\partial_- X = ma^{-1}(\psi_1^{(1)} - \psi_1^{(0)}) - \frac{ig}{2}(\chi_1^{*(0)}\psi_1^{(0)} + \chi_1^{*(1)}\psi_1^{(1)})X, \quad (5.49)$$

$$\partial_+ X = -im(\psi_2^{(1)} + \psi_2^{(0)}) - \frac{ig}{2}(\chi_2^{*(0)}\psi_2^{(0)} + \chi_2^{*(1)}\psi_2^{(1)})X, \quad (5.50)$$

$$\partial_- Y = ma^{-1}(\chi_1^{(1)} - \chi_1^{(0)}) - \frac{ig}{2}(\psi_1^{*(0)}\chi_1^{(0)} + \psi_1^{*(1)}\chi_1^{(1)})Y, \quad (5.51)$$

$$\partial_+ Y = -im(\chi_2^{(1)} + \chi_2^{(0)}) - \frac{ig}{2}(\psi_2^{*(0)}\chi_2^{(0)} + \psi_2^{*(1)}\chi_2^{(1)})Y. \quad (5.52)$$

5.4 Permutabilidade e soluções de Bäcklund

Descobrimos que, a partir de uma solução inicial conhecida $(\psi^{(i)}, \chi^{*(i)})$ do GMTM acoplado, podemos obter outra solução $(\psi^{(j)}, \chi^{*(j)})$ usando a transformação de Bäcklund com o parâmetro a_j e campos auxiliares $X^{(j)}$ e $Y^{*(j)}$, a saber

$$\psi_1^{(j)} = X^{(j)} - \psi_1^{(i)} - i\hat{g}a_jY^{*(j)}X^{(j)}\psi_1^{(i)}, \quad (5.53)$$

$$\psi_2^{(j)} = \psi_2^{(i)} - ia_jX^{(j)} - i\hat{g}a_jY^{*(j)}X^{(j)}\psi_2^{(i)}, \quad (5.54)$$

$$\chi_1^{*(j)} = Y^{*(j)} - \chi_1^{*(i)} + i\hat{g}a_jY^{*(j)}X^{(j)}\chi_1^{*(i)}, \quad (5.55)$$

$$\chi_2^{*(j)} = \chi_2^{*(i)} + ia_jY^{*(j)} + i\hat{g}a_jY^{*(j)}X^{(j)}\chi_2^{*(i)}. \quad (5.56)$$

onde definimos $\hat{g} = \frac{g}{2m}$ por conveniência. Então, é possível construir diversas novas soluções do modelo aplicando sucessivamente várias transformações de Bäcklund com diferentes parâmetros e campos auxiliares. Essa é a ideia principal do teorema de permutabilidade de Bianchi das transformações de Bäcklund.

Vamos construir as soluções $(\psi^{(1,2)}, \chi^{*(1,2)})$ e $(\psi^{(2,1)}, \chi^{*(2,1)})$ a partir de uma solução inicial $(\psi^{(0)}, \chi^{*(0)})$ (veja a Figura 3).

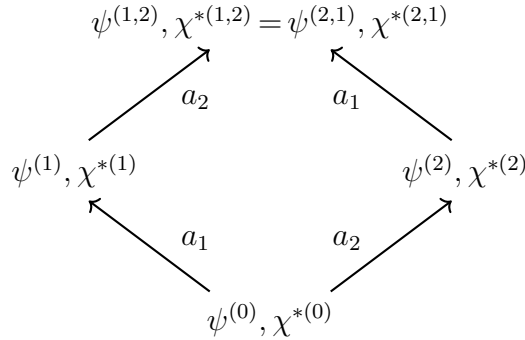


Figura 3 – Representação diagramática da permutabilidade das transformações de Bäcklund.

Usando as expressões (5.53) – (5.56), e assumindo que $\psi^{(1,2)} = \psi^{(2,1)}$ e $\chi^{*(1,2)} = \chi^{*(2,1)}$, encontramos que

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1,2)} &= X^{(1,2)} - \psi_1^{(1)} - i\hat{g}a_2 Y^{*(1,2)} X^{(1,2)} \psi_1^{(1)} \\ &= X^{(1,2)} - X^{(1)} + \psi_1^{(0)} + i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \psi_1^{(0)} \\ &\quad - i\hat{g}a_2 Y^{*(1,2)} X^{(1,2)} \left(X^{(1)} - \psi_1^{(0)} - i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \psi_1^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \psi_1^{(2,1)} &= X^{(2,1)} - \psi_1^{(2)} - i\hat{g}a_1 Y^{*(2,1)} X^{(2,1)} \psi_1^{(2)} \\ &= X^{(2,1)} - X^{(2)} + \psi_1^{(0)} + i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \psi_1^{(0)} \\ &\quad - i\hat{g}a_1 Y^{*(2,1)} X^{(2,1)} \left(X^{(2)} - \psi_1^{(0)} - i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \psi_1^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \psi_2^{(1,2)} &= \psi_2^{(1)} - ia_2 X^{(1,2)} - i\hat{g}a_2 Y^{*(1,2)} X^{(1,2)} \psi_2^{(1)} \\ &= \psi_2^{(0)} - ia_1 X^{(1)} - i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \psi_2^{(0)} - ia_2 X^{(1,2)} \\ &\quad - i\hat{g}a_2 Y^{*(1,2)} X^{(1,2)} \left(\psi_2^{(0)} - ia_1 X^{(1)} - i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \psi_2^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \psi_2^{(2,1)} &= \psi_2^{(2)} - ia_1 X^{(2,1)} - i\hat{g}a_1 Y^{*(2,1)} X^{(2,1)} \psi_2^{(2)} \\ &= \psi_2^{(0)} - ia_2 X^{(2)} - i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \psi_2^{(0)} - ia_1 X^{(2,1)} \\ &\quad - i\hat{g}a_1 Y^{*(2,1)} X^{(2,1)} \left(\psi_2^{(0)} - ia_2 X^{(2)} - i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \psi_2^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \chi_1^{*(1,2)} &= Y^{*(1,2)} - \chi_1^{*(1)} + i\hat{g}a_2 Y^{*(1,2)} X^{(1,2)} \chi_1^{*(1)} \\ &= Y^{*(1,2)} - Y^{*(1)} + \chi_1^{*(0)} - i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \chi_1^{*(0)} \\ &\quad + i\hat{g}a_2 Y^{*(1,2)} X^{(1,2)} \left(Y^{*(1)} - \chi_1^{*(0)} + i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \chi_1^{*(0)} \right), \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned}
\chi_1^{*(2,1)} &= Y^{*(2,1)} - \chi_1^{*(2)} + i\hat{g}a_1 Y^{*(2,1)} X^{(2,1)} \chi_1^{*(2)} \\
&= Y^{*(2,1)} - Y^{*(2)} + \chi_1^{*(0)} - i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \chi_1^{*(0)} \\
&\quad + i\hat{g}a_1 Y^{*(2,1)} X^{(2,1)} \left(Y^{*(2)} - \chi_1^{*(0)} + i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \chi_1^{*(0)} \right), \quad (5.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_2^{*(1,2)} &= \chi_2^{*(1)} + ia_2 Y^{*(1,2)} + i\hat{g}a_2 Y^{*(1,2)} X^{(1,2)} \chi_2^{*(1)} \\
&= \chi_2^{*(0)} + ia_1 Y^{*(1)} + i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \chi_2^{*(0)} + ia_2 Y^{*(1,2)} \\
&\quad + i\hat{g}a_2 Y^{*(1,2)} X^{(1,2)} \left(\chi_2^{*(0)} + ia_1 Y^{*(1)} + i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \chi_2^{*(0)} \right), \quad (5.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_2^{*(2,1)} &= \chi_2^{*(2)} + ia_1 Y^{*(2,1)} + i\hat{g}a_1 Y^{*(2,1)} X^{(2,1)} \chi_2^{*(2)} \\
&= \chi_2^{*(0)} + ia_2 Y^{*(2)} + i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \chi_2^{*(0)} + ia_1 Y^{*(2,1)} \\
&\quad + i\hat{g}a_1 Y^{*(2,1)} X^{(2,1)} \left(\chi_2^{*(0)} + ia_2 Y^{*(2)} + i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \chi_2^{*(0)} \right). \quad (5.64)
\end{aligned}$$

Das relações acima, obtemos

$$\begin{aligned}
X^{(1,2)} - X^{(2,1)} &= X^{(1)} - X^{(2)} - i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \psi_1^{(0)} + i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \psi_1^{(0)} \\
&\quad + i\hat{g}a_2 Y^{*(1,2)} X^{(1,2)} \left(X^{(1)} - \psi_1^{(0)} - i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \psi_1^{(0)} \right) \\
&\quad - i\hat{g}a_1 Y^{*(2,1)} X^{(2,1)} \left(X^{(2)} - \psi_1^{(0)} - i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \psi_1^{(0)} \right), \quad (5.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ia_2 X^{(1,2)} - ia_1 X^{(2,1)} &= ia_2 X^{(2)} - ia_1 X^{(1)} - i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \psi_2^{(0)} + i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \psi_2^{(0)} \\
&\quad - i\hat{g}a_2 Y^{*(1,2)} X^{(1,2)} \left(\psi_2^{(0)} - ia_1 X^{(1)} - i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \psi_2^{(0)} \right) \\
&\quad + i\hat{g}a_1 Y^{*(2,1)} X^{(2,1)} \left(\psi_2^{(0)} - ia_2 X^{(2)} - i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \psi_2^{(0)} \right), \quad (5.66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y^{*(1,2)} - Y^{*(2,1)} &= Y^{*(1)} - Y^{*(2)} + i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \chi_1^{*(0)} - i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \chi_1^{*(0)} \\
&\quad - i\hat{g}a_2 Y^{*(1,2)} X^{(1,2)} \left(Y^{*(1)} - \chi_1^{*(0)} + i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \chi_1^{*(0)} \right) \\
&\quad + i\hat{g}a_1 Y^{*(2,1)} X^{(2,1)} \left(Y^{*(2)} - \chi_1^{*(0)} + i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \chi_1^{*(0)} \right), \quad (5.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ia_2 Y^{*(1,2)} - ia_1 Y^{*(2,1)} &= ia_2 Y^{*(2)} - ia_1 Y^{*(1)} - i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \chi_2^{*(0)} + i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \chi_2^{*(0)} \\
&\quad - i\hat{g}a_2 Y^{*(1,2)} X^{(1,2)} \left(\chi_2^{*(0)} + ia_1 Y^{*(1)} + i\hat{g}a_1 Y^{*(1)} X^{(1)} \chi_2^{*(0)} \right) \\
&\quad + i\hat{g}a_1 Y^{*(2,1)} X^{(2,1)} \left(\chi_2^{*(0)} + ia_2 Y^{*(2)} + i\hat{g}a_2 Y^{*(2)} X^{(2)} \chi_2^{*(0)} \right) \quad (5.68)
\end{aligned}$$

Após realizar um cálculo extenso, descobrimos que os campos auxiliares $X^{(1,2)}$, $X^{(2,1)}$, $Y^{*(1,2)}$ e $Y^{*(2,1)}$ são dados pelas seguintes expressões

$$X^{(1,2)} = 2\alpha_{12}X^{(1)} - \beta_{12}X^{(2)} - i\hat{g} \left(\gamma_{12}Y^{*(1)}X^{(1)}X^{(2)} + 2\sigma_{12}Y^{*(2)}X^{(2)}X^{(1)} \right) \quad (5.69)$$

$$X^{(2,1)} = \beta_{12}X^{(1)} + 2\alpha_{21}X^{(2)} - i\hat{g} \left(2\sigma_{12}Y^{*(1)}X^{(1)}X^{(2)} + \gamma_{21}Y^{*(2)}X^{(2)}X^{(1)} \right) \quad (5.70)$$

$$Y^{*(1,2)} = 2\alpha_{12}Y^{*(1)} - \beta_{12}Y^{*(2)} + i\hat{g} \left(\gamma_{12}Y^{*(2)}Y^{*(1)}X^{(1)} + 2\sigma_{12}Y^{*(1)}Y^{*(2)}X^{(2)} \right) \quad (5.71)$$

$$Y^{*(2,1)} = \beta_{12}Y^{*(1)} + 2\alpha_{21}Y^{*(2)} + i\hat{g} \left(2\sigma_{12}Y^{*(2)}Y^{*(1)}X^{(1)} + \gamma_{21}Y^{*(1)}Y^{*(2)}X^{(2)} \right) \quad (5.72)$$

onde definimos os coeficientes

$$\alpha_{kl} = \frac{a_k}{a_k - a_l}, \quad \beta_{kl} = \frac{a_k + a_l}{a_k - a_l}, \quad \gamma_{kl} = \frac{a_k(a_k + a_l)^2}{(a_k - a_l)^2}, \quad \sigma_{kl} = \frac{a_k a_l (a_k + a_l)}{(a_k - a_l)^2}. \quad (5.73)$$

Note que nenhuma das expressões acima depende da solução inicial $(\psi^{(0)}, \chi^{*(0)})$. Esta característica foi notada anteriormente no contexto da transformação de Bäcklund para o GMTM. Além disso, pode-se também verificar que estes campos auxiliares satisfazem as equações de derivadas (5.40)–(5.70), respectivamente. Estes resultados mostram que estes campos auxiliares definem transformações de Bäcklund adequadas para o modelo.

Vamos agora derivar algumas soluções partindo das soluções de vácuo triviais, $\psi^{(0)} = 0$, e $\chi^{*(0)} = 0$. Das equações (5.40)–(5.70), obtemos

$$\partial_- X^{(k)} = ma_k^{-1} X^{(k)}, \quad \partial_+ X^{(k)} = -ma_k X^{(k)}, \quad (5.74)$$

$$\partial_- Y^{*(k)} = ma_k^{-1} Y^{*(k)}, \quad \partial_+ Y^{*(k)} = -ma_k Y^{*(k)}. \quad (5.75)$$

Então, as soluções podem ser escritas na seguinte forma simples,

$$X^{(k)} = \Sigma^{(k)} \exp(ma_k^{-1} x^+ - ma_k x^-), \quad Y^{*(k)} = \Delta^{*(k)} \exp(ma_k^{-1} x^+ - ma_k x^-) \quad (5.76)$$

onde $\Sigma^{(k)}$ e $\Delta^{(k)}$ são geradores anticomutativos complexos arbitrários da álgebra de Grassmann. Agora, substituindo nas equações (5.53)–(5.56), encontramos

$$\psi_1^{(k)} = X^{(k)}, \quad \psi_2^{(k)} = -ia_k X^{(k)}, \quad \chi_1^{*(k)} = Y^{*(k)}, \quad \chi_2^{*(k)} = ia_k Y^{*(k)}. \quad (5.77)$$

Utilizando as eqs. (5.69)–(5.72), e substituindo nas eqs (5.57)–(5.64), finalmente obtemos que as novas soluções são dadas por

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1,2)} &= \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right) (X^{(1)} - X^{(2)}) - i\hat{g} \left(\frac{a_1(a_1 + a_2)(a_1 + 3a_2)}{(a_1 - a_2)^2} \right) Y^{*(1)} X^{(1)} X^{(2)} \\ &\quad - i\hat{g} \left(\frac{a_2(a_1 + a_2)(a_2 + 3a_1)}{(a_1 - a_2)^2} \right) Y^{*(2)} X^{(2)} X^{(1)}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} \psi_2^{(1,2)} &= \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right) (ia_2 X^{(2)} - ia_1 X^{(1)}) - \hat{g} \left(\frac{a_1 a_2 (a_1 + a_2)(3a_1 + a_2)}{(a_1 - a_2)^2} \right) Y^{*(1)} X^{(1)} X^{(2)} \\ &\quad - \hat{g} \left(\frac{a_1 a_2 (a_1 + a_2)(a_1 + 3a_2)}{(a_1 - a_2)^2} \right) Y^{*(2)} X^{(2)} X^{(1)}, \end{aligned} \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned} \chi_1^{*(1,2)} &= \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right) (Y^{*(1)} - Y^{*(2)}) + i\hat{g} \left(\frac{a_1(a_1 + a_2)(a_1 + 3a_2)}{(a_1 - a_2)^2} \right) Y^{*(2)} Y^{*(1)} X^{(1)} \\ &\quad + i\hat{g} \left(\frac{a_2(a_1 + a_2)(a_2 + 3a_1)}{(a_1 - a_2)^2} \right) Y^{*(1)} Y^{*(2)} X^{(2)}, \end{aligned} \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} \chi_2^{*(1,2)} &= \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right) (ia_1 Y^{*(1)} - ia_2 Y^{*(2)}) - \hat{g} \left(\frac{a_1 a_2 (a_1 + a_2)(3a_1 + a_2)}{(a_1 - a_2)^2} \right) Y^{*(2)} Y^{*(1)} X^{(1)} \\ &\quad - \hat{g} \left(\frac{a_1 a_2 (a_1 + a_2)(a_1 + 3a_2)}{(a_1 - a_2)^2} \right) Y^{*(1)} Y^{*(2)} X^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Vale a pena notar que estes resultados são consistentes com as soluções encontradas para o GMTM [17], isto é, no caso de $\chi = \psi$ e $Y = X$. Ressalta-se que as soluções analíticas explícitas obtidas neste capítulo, em particular as dadas pelas equações (5.78)–(5.81), representam uma contribuição original deste trabalho, sendo inéditas na literatura até o

presente momento. Este procedimento nos permite construir sistematicamente soluções mais gerais com N parâmetros a_k , que dependem de polinômios de ordem superior nos campos auxiliares $X^{(k)}$ e $Y^{*(k)}$. Espera-se que tais soluções multiparamétricas estejam estreitamente relacionadas com soluções de N -solitons para a versão bosônica do GMTM acoplado. Este tópico será considerado em investigações futuras.

Embora neste trabalho não tenham sido realizados explicitamente os cálculos das cargas conservadas para o modelo de Thirring acoplado, tais cálculos já foram apresentados em [18]. Nesse estudo, os autores empregam o mesmo formalismo utilizado aqui, de modo que a construção das cargas conservadas é compatível com a abordagem adotada no presente trabalho.

6 Conclusão

Esta dissertação investigou detalhadamente as propriedades de integrabilidade no contexto de teorias de campos em $(1+1)$ dimensões, com foco central no modelo de Thirring Acoplado. Inicialmente, estabeleceu-se uma base teórica fundamentada na integrabilidade de Liouville e no formalismo do par de Lax, demonstrando como a representação de curvatura nula permite identificar quantidades conservadas em sistemas dinâmicos. Nesse contexto, o papel das transformações de Bäcklund foi discutido como um método sistemático para a geração de novas soluções a partir de configurações conhecidas, em conjunto com o estudo do modelo de sine-Gordon e do modelo de Thirring massivo sob a perspectiva de suas estruturas integráveis, fornecendo a preparação conceitual para a análise do modelo acoplado desenvolvida ao longo do trabalho.

A análise avançou para o Modelo de Thirring Grassmanniano acoplado, onde a integrabilidade foi garantida pela construção de conexões de Lax baseadas na superálgebra $\mathfrak{sl}(2, 1)$. Um dos resultados mais significativos deste trabalho foi a generalização das transformações de Bäcklund para este sistema acoplado, formuladas a partir das equações de compatibilidade associadas às conexões de Lax. Através da aplicação do Teorema da Permutabilidade de Bianchi, demonstrou-se a consistência do formalismo ao obter soluções de dois parâmetros a partir do vácuo. A construção analítica e explícita dessas soluções representa a principal contribuição original desta dissertação, uma vez que tais resultados ainda não haviam sido reportados na literatura para o modelo de Thirring Grassmanniano acoplado. Estes resultados que se mostraram consistentes com os limites conhecidos para o modelo de Thirring simples.

Dessa forma, o trabalho consolidou a compreensão de como estruturas algébricas de sistemas integráveis podem ser exploradas para gerar soluções exatas e descrever interações complexas entre campos fermiônicos, contribuindo para o estudo de modelos acoplados em teorias de campos bidimensionais.

As perspectivas de continuação deste trabalho são diversas. Uma extensão natural consiste em desenvolver de forma completa o procedimento de bosonização do modelo de Thirring Grassmanniano Acoplado, cuja análise foi iniciada, mas não pode ser concluída no escopo desta dissertação devido às limitações de tempo. Espera-se que, após a aplicação da dualidade bosônico-fermiônica, seguindo como referência o tratamento apresentado por Zinn-Justin em [19] para o modelo de Thirring $SU(2)$, e adaptando esse método ao caso associado ao grupo $SU(1, 1)$, o modelo acoplado possa conduzir a uma teoria bosônica equivalente envolvendo essencialmente dois modelos do tipo sine-Gordon com interação não trivial, refletindo os dois setores fermiônicos presentes na formulação original.

Além disso, seria de grande interesse construir explicitamente as transformações de Bäcklund para a versão bosônica do modelo, o que permitiria aprofundar a análise integrável e ampliar a geração sistemática de soluções exatas, bem como investigar soluções de N-sólitons e possíveis defeitos integráveis que preservem a integrabilidade da teoria. Tais desenvolvimentos permanecem como direções promissoras para trabalhos futuros

APÊNDICE A – A superálgebra $\mathfrak{sl}(2, 1)$

A superálgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, 1)$ admite uma decomposição graduada

$$\mathfrak{sl}(2|1) = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \quad (\text{A.1})$$

onde o setor par é

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{u}(1), \quad (\text{A.2})$$

e o setor ímpar contém quatro geradores fermiônicos. O sistema de raízes contém uma raiz bosônica α_1 , e duas fermiônicas α_2 e $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$. A superálgebra contém dois geradores de Cartan h_1 e h_2 , e seis geradores de Weyl, 2 Bosônicos $E_{\pm\alpha_1}$, e 4 Fermiônicos, $E_{\pm\alpha_2}$ e $E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}$. As relações de comutação e anticomutação da superálgebra são dadas por:

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, E_{\pm\alpha_j}] = \pm(\alpha_j)_i E_{\pm\alpha_j}, \quad (\text{A.3})$$

$$[E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}] = h_1, \quad [H_1, E_{\pm\alpha_1}] = \pm 2E_{\pm\alpha_1}, \quad (\text{A.4})$$

$$[E_{\pm\alpha_1}, E_{\mp\alpha_2}] = \pm E_{\mp\alpha_3}, \quad [E_{\pm\alpha_1}, E_{\mp\alpha_3}] = \pm E_{\mp\alpha_2}, \quad (\text{A.5})$$

$$\{E_{\alpha_2}, E_{-\alpha_2}\} = h_2, \quad \{E_{\alpha_3}, E_{-\alpha_3}\} = h_1 + h_2, \quad (\text{A.6})$$

$$\{E_{\alpha_2}, E_{\alpha_3}\} = E_{\alpha_1}, \quad \{E_{-\alpha_2}, E_{-\alpha_3}\} = E_{-\alpha_1}. \quad (\text{A.7})$$

Todos os demais anticomutadores são nulos. A representação fundamental de $\mathfrak{sl}(2, 1)$ é dada por matrizes 3×3 , com duas entradas bosônicas e uma fermiônica. Explicitamente, podemos escreve-la da seguinte forma:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

$$E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

$$E_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

$$E_{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Referências

- 1 RETORE, A. L. Introduction to classical and quantum integrability. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 55, n. 17, p. 173001, 2022. [9](#), [11](#), [13](#)
- 2 BABELON, O.; BERNARD, D.; TALON, M. *Introduction to classical integrable systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. [9](#), [11](#), [12](#), [13](#), [14](#)
- 3 AGUIRRE, A. R. Type-ii defects in integrable classical field theories. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2012. [15](#), [18](#), [19](#), [20](#), [27](#)
- 4 TORRIELLI, A. Lonti lectures on sine-gordon and thirring. *arXiv preprint arXiv:2211.01186*, 2022. [9](#), [18](#), [20](#), [21](#)
- 5 THIRRING, W. E. A soluble relativistic field theory. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 3, n. 1, p. 91–112, 1958. [9](#), [25](#)
- 6 DAS, A. *Integrable models*. [S.l.]: World scientific, 1989. v. 30. [9](#), [15](#), [16](#), [22](#), [24](#)
- 7 TORRIELLI, A. Classical integrability. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 49, n. 32, p. 323001, 2016. [11](#)
- 8 SUSSMAN, G. J.; WISDOM, J. *Structure and interpretation of classical mechanics*. [S.l.]: The MIT Press, 2015. [12](#)
- 9 KRISHNASWAMI, G. S.; VISHNU, T. An introduction to lax pairs and the zero curvature representation. *arXiv preprint arXiv:2004.05791*, 2020. [13](#)
- 10 ARUTYUNOV, G. *Elements of Classical and Quantum Integrable Systems*. [S.l.]: Springer, 2019. [14](#)
- 11 CUENDA, S.; QUINTERO, N. R.; SÁNCHEZ, A. Sine-gordon wobbles through bäcklund transformations. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, v. 4, n. 5, p. 1047–1056, 2011. [15](#)
- 12 LIÃO, M. A. et al. Soluções localizadas em teoria clássica de campos. Universidade Federal da Paraíba, 2024. [21](#)
- 13 COLEMAN, S. Quantum sine-gordon equation as the massive thirring model. *Physical Review D*, APS, v. 11, n. 8, p. 2088, 1975. [21](#)
- 14 BURDMAN, G. *Lecture 11: Functional Integral for Fermions*. Lecture notes (Quantum Field Theory I), University of São Paulo (USP). Disponível em: https://fma.if.usp.br/~burdman/QFT1/lecture_11.pdf. [25](#)
- 15 IZERGIN, A.; KULISH, P. On the inverse scattering method for the classical massive thirring model with anticommuting variables. *Letters in Mathematical Physics*, Springer, v. 2, n. 4, p. 297–302, 1978. [26](#)
- 16 LOBO, G. V. Hierarquias integráveis supersimétricas. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2018. [26](#)

-
- 17 IZERGIN, A.; STEHR, J. et al. *A Bäcklund transformation for the classical anticommuting massive Thirring model in one space dimension*. [S.l.], 1976. [29](#), [34](#), [39](#)
- 18 BASU-MALLICK, B. et al. Integrable coupled massive thirring model with field values in a grassmann algebra. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2023, n. 11, p. 1–34, 2023. [32](#), [33](#), [40](#)
- 19 ZINN-JUSTIN, J. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. 4. ed. Oxford: Clarendon Press, 2002. [41](#)