

Maurício Guilherme Alves dos Reis

**Modelagem numérica de escoamentos  
compressíveis utilizando o Método da  
Fronteira Imersa**

Itajubá - M.G.

Junho de 2016

Maurício Guilherme Alves dos Reis

# Modelagem numérica de escoamentos compressíveis utilizando o Método da Fronteira Imersa

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

**Área de concentração:** Térmica, Fluidos e Máquinas de Fluxo

Universidade Federal de Itajubá

Instituto de Engenharia Mecânica

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Orientadora: Ana Lúcia Fernandes de Lima e Silva

Coorientador: Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva

Itajubá - M.G.

Junho de 2016

Maurício Guilherme Alves dos Reis

Modelagem numérica de escoamentos compressíveis utilizando o Método da Fronteira Imersa/ Maurício Guilherme Alves dos Reis. – Itajubá - M.G., Junho de 2016

120 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientadora: Ana Lúcia Fernandes de Lima e Silva

Coorientador: Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva

Tese (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá

Instituto de Engenharia Mecânica

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Junho de 2016.

1. Método de Fronteira Imersa. 2. Escoamento Compressível. 3. Modelo Físico Virtual. 4. Método de Kurganov-Tadmor.

Maurício Guilherme Alves dos Reis

## **Modelagem numérica de escoamentos compressíveis utilizando o Método da Fronteira Imersa**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

**Área de concentração:** Térmica, Fluidos e Máquinas de Fluxo

Trabalho aprovado. Itajubá - M.G., 14 de junho de 2016:

**Profa. Dra. Ana Lúcia Fernandes de Lima e Silva** - Orientadora  
**Prof. Dr. Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva** - Coorientador  
**Prof. Dr. Marcelo José Pirani** - Professor convidado  
**Prof. Dr. Felipe Pamplona Mariano** - Professor convidado

Itajubá - M.G.  
Junho de 2016

# AGRADECIMENTOS

Aos meu pais, *Marcos Antônio dos Reis* e *Elza Maria de Almeida*, pelo amor, carinho, bons exemplos e apoio total às minhas escolhas.

Aos demais familiares e amigos.

À Profa. Dra. *Ana Lúcia* (Orientadora), por sua paciência, dedicação e conhecimentos passados neste trabalho.

Ao Prof. Dr. *Sandro Metrevelle* (Coorientador), pelos conselhos e auxílio nesta dissertação.

Ao pessoal das Repúblicas Área 51 e Estábulo pelo companheirismo.

À CAPES pelo suporte financeiro e ao CNPQ e a FAPEMIG pelo apoio material.

# RESUMO

O objetivo do presente estudo foi aplicar o Método da Fronteira Imersa com o Modelo Físico Virtual para estudar escoamentos compressíveis externos. O Método da Fronteira Imersa vêm sendo cada vez mais utilizado para modelar escoamentos com objetos imersos, especialmente quando estão em movimento ou em deformação, pois este método utiliza malhas independentes para representar o domínio e os corpos imersos. O domínio é representado por uma malha euleriana, enquanto o corpo imerso é representado em 2D por um conjunto de pontos, o que é chamado de malha lagrangiana. A condição de não escorregamento do fluido em paredes é imposta através de um termo fonte de força introduzido na equação da quantidade de movimento. Outra vantagem desta abordagem é que as forças de arrasto e de sustentação podem ser calculadas diretamente utilizando o campo de forças produzido pela fronteira imersa. No Modelo Físico Virtual o campo de forças lagrangiano é calculado utilizando as leis de conservação e então é distribuído para a malha euleriana através de uma função de distribuição. No presente trabalho, uma malha cartesiana não-uniforme e um esquema central com precisão de segunda ordem foram utilizados na discretização espacial das equações de Navier-Stokes. O método de Euler foi aplicado para a integração no tempo. Escoamentos subsônicos e laminares sobre um perfil circular foram simulados para diferentes números de Reynolds, bem como o problema da difração de uma onda de choque. Parâmetros relevantes como os coeficientes de arrasto e de sustentação e o número Strouhal foram comparados com resultados numéricos e experimentais da literatura. Além disso, os mesmos problemas modelados com o Método da Fronteira Imersa são estudados utilizando o programa OpenFOAM, buscando validar a metodologia e o código computacional desenvolvido neste trabalho.

**Palavras-chave:** Método de Fronteira Imersa. Escoamento Compressível. Modelo Físico Virtual. Método de Kurganov-Tadmor.

# ABSTRACT

The objective of this study was to apply the Immersed Boundary Method with the Virtual Physical Model to study external compressible flows. The Immersed Boundary methods have been increasingly used to model flows with submerged objects, particularly when they are in movement or deformation. These methods use independent grids to represent the domain and the immersed bodies. The domain is represented by an Eulerian mesh, while the immersed body is represented in 2D by a set of points, which is called Lagrangian mesh. The no-slip condition is enforced by the force field introduced into the momentum equation. Another advantage of this approach is that the drag and lift forces can be calculated directly using the Lagrangian force field. In the Virtual Physical Model the force is first obtained in the Lagrangian grid by using the conservation laws and then it is distributed to the Eulerian grid by using a distribution function. In the present work, a non-uniform Cartesian grid and a central scheme with second order accuracy were used in the spatial discretization of the Navier-Stokes equations. The Euler method was applied for time discretization. Subsonic laminar flows over a cylinder for different Reynolds numbers, and also a problem involving a shock wave diffraction were simulated. Relevant parameters such as drag and lift forces and Strouhal number were compared with numerical and experimental results from literature. In addition, the same study was carried out by using the *OpenFOAM* program, seeking to validate the methodology and the computational code developed in this work.

**Keywords:** Immersed Boundary Method. Compressible flow. Virtual Physical Model. Kurganov-Tadmor Method.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Onda de choque formada por um escoamento supersônico a $Ma = 4,01$ sobre uma esfera. Fonte: Van Dyke (1982). . . . .	20
Figura 2.1 – Malhas euleriana e lagrangiana. Fonte: (LIMA E SILVA; SILVEIRA-NETO; DAMASCENO, 2003). . . . .	25
Figura 2.2 – Função de distribuição. Fonte: Adaptado de Peskin (1977). . . . .	25
Figura 3.1 – Malhas lagrangiana e euleriana. Malha e pontos langrangianos em vermelho. . . . .	37
Figura 4.1 – Volume finito unidimensional. . . . .	43
Figura 4.2 – Função polinomial linear por partes. . . . .	49
Figura 4.3 – Representação da malha cartesiana bidimensional. . . . .	51
Figura 4.4 – Detalhamento da discretização dos termos viscosos. . . . .	56
Figura 4.5 – Comparação entre $F_d, \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}\right)_{I_{j,i} > 0,5}$ e $\sum_{j=1, i=1}^{n_x, n_y} (f_x)_{j,i} \Delta x_j \Delta y_i$ na forma adimensional. . . . .	62
Figura 5.1 – Condição inicial de pressão ao longo do tubo de choque. . . . .	65
Figura 5.2 – Curvas de pressão exata e obtidas com o CS-ENS para o problema do tubo de choque unidimensional no tempo $3,9 \times 10^{-3}$ s. . . . .	66
Figura 5.3 – Curvas de massa específica exata e obtidas com o CS-ENS para o problema do tubo de choque unidimensional no tempo $3,9 \times 10^{-3}$ s. . . . .	66
Figura 5.4 – Curvas de velocidade exata e obtidas com o CS-ENS para o problema do tubo de choque unidimensional no tempo $3,9 \times 10^{-3}$ s. . . . .	67
Figura 5.5 – Comparação entre os perfis de temperatura obtidos pelo programa <i>OpenFOAM</i> e pelo CS-ENS, ambos no tempo $3,9 \times 10^{-3}$ s. . . . .	68
Figura 5.6 – Influência do parâmetro $\theta$ nas curvas da velocidade obtidas com o CS-ENS para o problema do tubo de choque. . . . .	68
Figura 5.7 – Problema do choque oblíquo em placa plana. . . . .	69
Figura 5.8 – Campos de pressão do problema do choque oblíquo obtidos pelo CS-ENS (a) e pelo <i>OpenFOAM</i> (b). . . . .	70
Figura 5.9 – Curvas de pressão obtidas pelo CS-ENS e pelo <i>OpenFOAM</i> na posição $y = 0,3$ m. . . . .	71
Figura 5.10 – Estado inicial do escoamento para o problema do tubo de choque bidimensional. . . . .	72
Figura 5.11 – Malha com refinamento local utilizada no problema do tubo de choque bidimensional. . . . .	72
Figura 5.12 – Contornos de massa específica obtidos em $t = 0,3$ s, com o código CS-ENS (a) e de Kurganov e Tadmor (2002) (b). . . . .	73

Figura 5.13–Curvas de temperatura obtidos pelo <i>OpenFOAM</i> e pelo CS-ENS para o problema do tubo de choque bidimensional em $t = 0,3$ s. . . . .	74
Figura 5.14–Curvas de temperatura obtidas com o CS-ENS nas simulações do tubo de choque bidimensional, para as malhas uniforme e com refinamento localizado. O perfil foi extraído na posição $y = 0,5$ m e em $t = 0,3$ s. . . . .	74
Figura 5.15–Domínio físico e condições de contorno para o problema da formação de camada limite laminar em placa plana. . . . .	75
Figura 5.16–Malha utilizada na modelagem do problema da camada limite em placa plana. . . . .	76
Figura 5.17–Curvas de $u/u_\infty$ das modelagens do problema da camada limite obtidas pelo CS-ENS e por Kim e Liu (1992). . . . .	77
Figura 5.18–Curvas de $T/T_\infty$ das modelagens do problema da camada limite obtidas pelo CS-ENS e por Kim e Liu (1992). . . . .	77
Figura 5.19–Campo de massa específica obtido com o CS-ENS para o problema da camada limite em uma placa plana, no tempo $t = 4,5$ s. . . . .	78
Figura 5.20–Malha com $\Delta x_{\min} = D/40$ utilizada nas simulações de escoamentos subsônicos usando o MFVC, o círculo em vermelho representa as fronteiras do cilindro. . . . .	80
Figura 5.21–Malha utilizada nas simulações de escoamentos subsônicos utilizando o <i>OpenFOAM</i> . . . . .	81
Figura 5.22–Campo de massa específica adimensional ( $\rho/\rho_\infty$ ) obtido através do <i>OpenFOAM</i> para $Re_D = 20$ e $Ma_\infty = 0,3$ em $\psi = 3$ . . . . .	82
Figura 5.23–Componente $x$ do vetor de força lagrangiana obtido para o escoamento com $Re_D = 20$ , em $\psi = 60$ , utilizando a malha com $\Delta x_{\min} = D/80$ . . . . .	83
Figura 5.24–Componente $y$ do campo de forças lagrangiano obtido para o escoamento a $Re_D = 20$ em $\psi = 60$ utilizando a malha com $\Delta x_{\min} = D/80$ . . . . .	83
Figura 5.25–Linhas de corrente obtidas com o MFVC para o escoamento a $Re_D = 20$ e $Ma_\infty = 0,3$ . . . . .	84
Figura 5.26–Linhas de corrente obtidas com o MFVC para o escoamento a $Re_D = 40$ e $Ma_\infty = 0,3$ . . . . .	84
Figura 5.27–Parâmetros geométricos relevantes das recirculações formadas após o cilindro. Fonte: adaptado de Palma et al. (2006). . . . .	85
Figura 5.28–Campos de pressão adimensional obtidos para os escoamento a $Re_D = 20$ e 40. MFVC (a) e (c) e <i>OpenFOAM</i> (b) e (d). . . . .	86
Figura 5.29–Campos de $Ma$ obtidos para os escoamento a $Re_D = 20$ e 40. MFVC (a) e (c) e <i>OpenFOAM</i> (b) e (d). . . . .	87
Figura 5.30–Linhas de corrente obtidas com o MFVC e com o <i>OpenFOAM</i> para os escoamentos a $Ma = 0,3$ e $Re_D = 80, 150$ e 300. MFVC (a), (c) e (e) e <i>OpenFOAM</i> (b), (d) e (f). . . . .	88

Figura 5.31–Curvas de $C_d$ em função de $\psi$ obtidas com o MFVC e com o <i>OpenFOAM</i> para os escoamentos com $Re_D = 20$ e $Re_D = 40$ e malhas com $\Delta x_{\min} = D/80$ . . . . .	90
Figura 5.32–Curva de $C_d$ e $C_l$ em função de $\psi$ obtidas com o MFVC para o escoamento com $Re_D = 80$ e malhas com $\Delta x_{\min} = D/80$ . . . . .	90
Figura 5.33–Curva de $C_d$ e $C_l$ em função de $\psi$ obtidas com o MFVC para o escoamento com $Re_D = 150$ e malhas com $\Delta x_{\min} = D/80$ . . . . .	91
Figura 5.34–Curva de $C_d$ e $C_l$ em função de $\psi$ obtidas com o MFVC para o escoamento com $Re_D = 300$ e malhas com $\Delta x_{\min} = D/80$ . . . . .	91
Figura 5.35–Campos de $p/p_\infty$ obtidos para os escoamentos a $Re_D = 80, 150$ e $300$ . MFVC (a), (c) e (e) e <i>OpenFOAM</i> (b), (d) e (f). . . . .	93
Figura 5.36–Campos de $Ma$ obtidos para os escoamentos a $Re_D = 80, 150$ e $300$ . MFVC (a), (c) e (e) e <i>OpenFOAM</i> (b), (d) e (f). . . . .	94
Figura 5.37–Curva de $L_2$ em função de $\psi$ obtidas com o MFVC para os escoamentos a $Re_D = 20$ . . . . .	95
Figura 5.38–Campos de pressão adimensional obtidos com o MFVC (a) e com o <i>OpenFOAM</i> (b) para os escoamentos subsônicos sobre um cilindro em rotação. $\Delta x_{\min} = D/80$ . . . . .	96
Figura 5.39–Campos de Mach obtidos com o MFVC (a) e com o <i>OpenFOAM</i> (b) para os escoamentos subsônicos sobre um cilindro em rotação. $\Delta x_{\min} = D/80$ . . . . .	96
Figura 5.40–Linhas de corrente obtidas com o MFVC (a) e com o <i>OpenFOAM</i> (b) para os escoamentos subsônicos sobre um cilindro em rotação. $\Delta x_{\min} = D/80$ . . . . .	97
Figura 5.41–Curvas de $C_d$ em função de $\psi$ obtidas com o MFVC e com o <i>OpenFOAM</i> para o problema do escoamento sobre um cilindro em rotação, utilizando as malhas com $\Delta x_{\min} = D/80$ . $Re_D = 200$ . . . . .	98
Figura 5.42–Curvas de $C_l$ em função de $\psi$ obtidas com o MFVC e com o <i>OpenFOAM</i> para o problema do escoamento sobre um cilindro em rotação, utilizando as malhas com $\Delta x_{\min} = D/80$ . $Re_D = 200$ . . . . .	98
Figura 5.43–Linhas de corrente obtidas para os escoamento subsônicos sobre um cilindro em rotação. Coluna da esquerda $\psi = 1, 5$ e coluna da direita $\psi = 4, 5$ . MFVC (a) e (b), <i>OpenFOAM</i> (c) e (d) e Coutanceau e Menard (1985) (e) e (f). . . . .	99
Figura 5.44–Curvas da norma $L_2$ em função de $\psi$ obtidas para o problema do escoamento sobre um cilindro em rotação, utilizando as malhas com $\Delta x_{\min} = D/40$ e $\Delta x_{\min} = D/80$ . . . . .	100
Figura 5.45–Representação do problema de difração de uma onda de choque em um perfil circular. . . . .	101

Figura 5.46–Detalhamento da malha utilizada no programa <i>OpenFOAM</i> na região próxima ao cilindro. . . . .	102
Figura 5.47–Parâmetros geométricos do problema de difração de uma onda de choque plana em um perfil circular. Fonte: Adaptado de Kaca (1988). . . . .	103
Figura 5.48–Campos de $\rho/\rho_\infty$ obtidos com o MFVC (a), (c) e (e) e com <i>OpenFOAM</i> (b), (d) e (f), para $\xi = 1$ , 1ª linha, $\xi = 2$ , 2ª linha e $\xi = 3$ , 3ª linha. . . . .	105
Figura 5.49–Contornos de $\rho/\rho_\infty$ obtidos com o MFVC (a), com o <i>OpenFOAM</i> (b) e por Kaca (1988), para o tempo adimensional $\xi = 1, 45$ . . . . .	106
Figura 5.50–Curvas de $u/u_{OC}$ para $y = 4$ m e $\xi = 3$ obtidas com o MFVC e com o <i>OpenFOAM</i> . . . . .	107
Figura 5.51–Curvas de $p/p_\infty$ para $y = 4$ m e $\xi = 3$ obtidas com o MFVC e com o <i>OpenFOAM</i> . . . . .	108
Figura 5.52–Curvas de $\rho/\rho_\infty$ para $y = 4$ m e $\xi = 3$ obtidas com o MFVC e com o <i>OpenFOAM</i> . . . . .	108
Figura 5.53–Curvas de $T/T_\infty$ para $y = 4$ m e $\xi = 3$ obtidas com o MFVC e com o <i>OpenFOAM</i> . . . . .	109
Figura 5.54–Curvas de $v/u_{OC}$ para $x = 2, 25$ m e $\xi = 3$ obtidas com o MFVC e com o <i>OpenFOAM</i> . . . . .	109
Figura 5.55–Linhas de corrente obtidos com o MFVC, em $\xi = 3$ . . . . .	110
Figura 5.56–Linhas de corrente obtidos com o <i>OpenFOAM</i> , em $\xi = 3$ . . . . .	111
Figura 5.57–Curvas de $D_{OR}$ em função de $\xi$ obtidas com o MFVC, <i>OpenFOAM</i> e experimental (KACA, 1988). . . . .	112
Figura 5.58– $C_d$ em função de $\xi$ obtidos com o MFVC, com o <i>OpenFOAM</i> e por Drikakis et al. (1997), onde foi modelada a difração de uma onda de choque a $Ma = 2, 6$ em um escoamento invíscido. . . . .	112

# LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Condições iniciais do problema do tubo de choque unidimensional. . .	65
Tabela 5.2 – Parâmetros geométricos obtidos neste trabalho e retirados da literatura para o escoamento a $Re_D = 20$ . . . . .	85
Tabela 5.3 – Parâmetros geométricos obtidos neste trabalho e retirados literatura para o escoamento a $Re_D = 40$ . . . . .	85
Tabela 5.4 – $C_d$ , $C_l$ e $St$ para os escoamentos com $Re_D$ igual a 80, 150 e 300. . . . .	89
Tabela 5.5 – Parâmetros obtidos nas simulações do escoamento subsônico sobre um cilindro em rotação usando o MFVC e o <i>OpenFOAM</i> . . . . .	97
Tabela 5.6 – Condições iniciais e da onda de choque para o problema de difração de uma onda de choque plana. . . . .	102

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CS-ENS	Código para Solução Numérica das Equações de Navier Stokes
DFC	Dinâmica de Fluidos Computacional
ENS	Equações de Navier-Stokes
GR	Grau de Refinamento de Malha
KT	Método de Kurganov-Tadmor
MFI	Método da Fronteira Imersa
MFV	Modelo Físico Virtual
MFVC	Modelo Físico Virtual Compressível
MVF	Método dos Volumes Finitos
MUSCL	Monotone Upstream-Centered Schemes For Conservation Laws
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes
ONERA	Office National D'études Et De Recherches Aerospatiales
OpenFOAM	Open Field Operation and Manipulation

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$	Termos de transporte advectivo das equações de Navier-Stokes nas direções $x$ e $y$
$\mathbf{A}_v$ e $\mathbf{B}_v$	Termos de transporte difusivo das equações de Navier-Stokes nas direções $x$ e $y$
$A_{OR}$	Distância da onda refletida
$c$	Velocidade do som
$C_d$	Coefficiente de arrasto
$C_l$	Coefficiente de sustentação
$D$	Diâmetro do cilindro
$D_{OR}$	Distância adimensional da onda refletida
$e$	Energia total específica
$\mathbf{f}$	Campo de força lagrangiano
$f_x$ e $f_y$	Componentes dos campo de força lagrangiano nas direções $x$ e $y$
$f_{osc}$	Frequência de oscilação
$\mathbf{F}$	Força em cada ponto lagrangiano
$F_d$	Força de arrasto
$F_l$	Força de sustentação
$\mathcal{F}$	Fluxo numérico
$\mathbf{G}$	Função G
$I$	Função indicadora
$L_2$	Norma $L_2$
$M$	Massa molar

$Ma$	Número de Mach
$\mathbf{n}$	Vetor normal à fronteira imersa
$n_x$ e $n_y$	Número de células nas direções $x$ e $y$ da malha
$n_p$	Número de pontos lagrangianos
$N$	Número de células das malhas unidimensionais
$p$	Pressão
$q_x$ e $q_y$	Fluxo de calor nas direções $x$ e $y$
$\mathbf{Q}$	Termo acumulativo das equações de Navier-Stokes
$R$	Constante dos gases ideais
$Re$	Número de Reynolds
$s$	Grandeza conservativa
$St$	Número de Strouhal
$\mathbf{S}$	Grandeza conservativa vetorial
$t$	Tempo
$T$	Temperatura
$u$ e $v$	Componentes do vetor velocidade nas direções $x$ e $y$
$\mathbf{U}$	Vetor campo de velocidades
$V$	Volume finito
$\mathbf{x}$	Vetor posição
$x$ e $y$	Coordenadas cartesianas

# Símbolos Gregos

$\gamma$	Segundo coeficiente de viscosidade
$\Gamma$	Malha computacional
$\delta$	Delta de Dirac
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\delta_1$	Espessura da camada limite
$\delta_2$	Espessura da quantidade de momento
$\Delta x$ e $\Delta y$	Arestas das células nas direções $x$ e $y$
$\Delta s$	Distância entre pontos lagrangianos
$\Delta t$	Passo de tempo de integração
$\theta$	Parâmetro utilizado na função limitadora <i>minmod</i>
$\kappa$	Razão de calores específicos
$\lambda$	Condutividade térmica
$\lambda^p$	Velocidade de propagação
$\mu$	Viscosidade dinâmica
$\xi$	Tempo adimensional utilizado no problema de difração de uma onda de choque plana
$\rho$	Massa específica
$\tau_{ij}$	Tensor de tensões viscosas
$\psi$	Tempo adimensional
$\omega$	Velocidade angular

# Subscritos/Sobrescritos

$a$	Força lagrangiana de aceleração
$I$	Força lagrangiana inercial
$j_i$	Posições nas direções $x$ e $y$ respectivamente
$k$	Ponto lagrangiano
$l$	Direção de propagação
$mín$	Valor mínimo
$máx$	Valor máximo
$n$	Posição no tempo
$OC$	Onda de choque
$OR$	Onda refletida
$p$	Força lagrangiana de pressão
$v$	Força lagrangiana viscosa
$\infty$	Condição do escoamento livre

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>19</b>
1.1	Motivação . . . . .	19
1.2	Objetivos . . . . .	21
1.3	Organização do trabalho . . . . .	21
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . . . . .</b>	<b>23</b>
2.1	Desenvolvimento da Dinâmica de Fluidos . . . . .	23
2.2	Método de Fronteira Imersa . . . . .	24
2.2.1	Métodos de Força Contínua . . . . .	26
2.2.1.1	Força Contínua com Fronteiras Flexíveis . . . . .	26
2.2.1.2	Força Contínua com Fronteiras Rígidas . . . . .	27
2.2.2	Métodos de Força Discreta . . . . .	28
2.2.2.1	Força Discreta com Imposição Direta . . . . .	28
2.2.2.2	Força Discreta com Imposição Indireta . . . . .	29
2.2.3	Método de Fronteira Imersa aplicado a escoamentos compressíveis	30
<b>3</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO . . . . .</b>	<b>32</b>
3.1	Equações de Navier-Stokes 2D . . . . .	32
3.2	Parâmetros do escoamento . . . . .	34
3.2.1	Número de Reynolds . . . . .	34
3.2.2	Velocidade do som e número de Mach . . . . .	35
3.2.3	Número de Strouhal . . . . .	36
3.2.4	Coefficientes de arrasto e sustentação . . . . .	36
3.2.5	Tempo adimensional . . . . .	37
3.3	Modelagem matemática da fronteira imersa . . . . .	37
3.4	Função Indicadora . . . . .	39
3.5	Condições iniciais e de contorno . . . . .	40
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA NUMÉRICA . . . . .</b>	<b>42</b>
4.1	Método dos Volumes Finitos . . . . .	42
4.1.1	Lei de conservação hiperbólica unidimensional . . . . .	42
4.1.2	Método de Lax-Friedrichs . . . . .	45
4.1.3	Critério de estabilidade e a condição de CFL . . . . .	46
4.1.4	Método de Rusanov . . . . .	47
4.1.5	Método de Kurganov-Tadmor unidimensional . . . . .	48
4.1.6	Extensão bidimensional do método KT . . . . .	51

<b>4.2</b>	<b>Discretização espacial das equações de Navier-Stokes . . . . .</b>	<b>53</b>
4.2.1	Discretização espacial dos termos advectivos utilizando o método KT	54
4.2.2	Discretização dos termos de transporte difusivo . . . . .	55
<b>4.3</b>	<b>Método de Fronteira Imersa . . . . .</b>	<b>57</b>
4.3.1	Interpolação e distribuição de variáveis na malha euleriana . . . . .	57
4.3.2	Cálculo do campo de força lagrangiano . . . . .	58
<b>4.4</b>	<b>Integração Temporal . . . . .</b>	<b>60</b>
<b>4.5</b>	<b>Cálculo de parâmetros da simulação . . . . .</b>	<b>60</b>
4.5.1	Cálculo das forças de arrasto e sustentação . . . . .	60
4.5.2	Parâmetro $L_2$ . . . . .	63
<b>5</b>	<b>RESULTADOS OBTIDOS . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>5.1</b>	<b>Validação do código de solução das equações de Navier-Stokes</b>	<b>64</b>
5.1.1	Tubo de choque unidimensional . . . . .	64
5.1.2	Choque oblíquo em placa plana . . . . .	69
5.1.3	Tubo de choque bidimensional . . . . .	71
5.1.4	Camada limite laminar sobre uma placa plana isolada em um escoamento supersônico . . . . .	75
<b>5.2</b>	<b>Validação do Modelo Físico Virtual Compressível . . . . .</b>	<b>78</b>
5.2.1	Escoamentos subsônicos sobre um cilindro . . . . .	79
5.2.2	Escoamento Subsônico Sobre um Cilindro em Rotação . . . . .	95
5.2.3	Difração de onda de choque plana . . . . .	100
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>114</b>
<b>6.1</b>	<b>Perspectivas para trabalhos futuros . . . . .</b>	<b>115</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>116</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação

Escoamentos compressíveis ocorrem quando a massa específica do fluido varia significativamente em resposta a variações de velocidade. Quando uma aeronave se desloca, as moléculas de ar se movem ao seu redor. Para baixas velocidades, menores que aproximadamente  $112 \text{ m/s}$ , a massa específica do fluido se mantém constante, entretanto quando a velocidade supera este valor, parte da energia da aeronave é utilizada na compressão do fluido e ocorrem variações locais de massa específica. Este efeito cresce com o aumento da velocidade aeronave.

O parâmetro adimensional denominado número de Mach ( $Ma$ ) é a razão entre a velocidade da aeronave e a velocidade de propagação do som no meio, e determina a magnitude dos efeitos de compressibilidade no escoamento. Para valores de  $Ma > 0,3$  os efeitos da compressibilidade no escoamento devem ser considerados. Nas condições normais de pressão e temperatura da Terra a velocidade de propagação do som nos líquidos é muito maior do que nos gases, e por isso, dificilmente ocorrem escoamentos de líquidos a  $Ma > 0,3$ . Sendo assim, na maior parte das aplicações de escoamentos compressíveis em engenharia, o fluido envolvido é um gás. Algumas destas aplicações são: aerodinâmica de aeronaves a alta velocidade, turbo compressores, turbinas a gás, motores de foguetes e gasodutos.

Os escoamentos podem ser classificados conforme o número de Mach como: subsônicos ( $Ma < 0,8$ ), transônicos ( $0,8 < Ma < 1,2$ ), supersônicos ( $1,2 < Ma < 5$ ) e hipersônicos ( $Ma > 5$ ). O fenômeno denominado onda de choque pode ocorrer em regiões onde o número de Mach é maior que 1, nas quais regiões a montante do escoamento podem não sentir perturbações a jusante do escoamento, o que produz abruptas variações nas propriedades do gás. Na Figura 1.1 é mostrado um escoamento supersônico a  $Ma = 4,01$  sobre uma esfera, no qual ocorre uma onda de choque a esquerda da esfera. A região a montante desta onda de choque não sente os efeitos das perturbações produzidas pela esfera no escoamento.

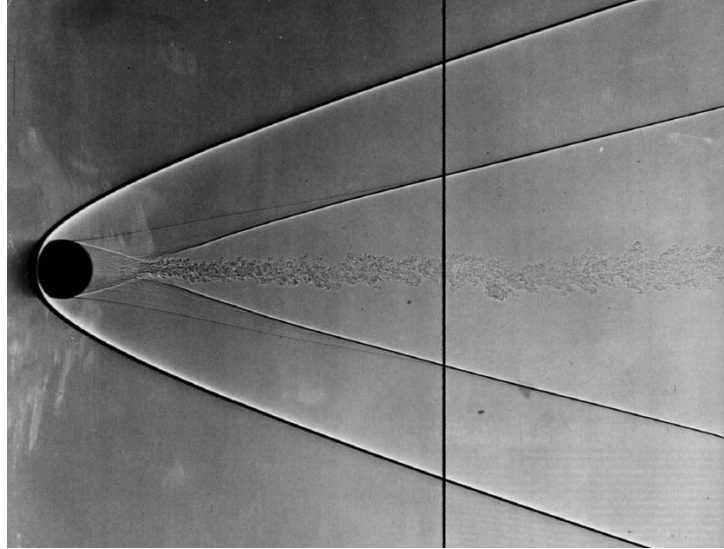


Figura 1.1 – Onda de choque formada por um escoamento supersônico a  $Ma = 4,01$  sobre uma esfera. Fonte: Van Dyke (1982).

Escoamentos compressíveis podem ser estudados de formas teórica, experimental e através da dinâmica de fluidos computacional (DFC), que é utilizada no presente trabalho. Em DFC as equações de Navier-Stokes são transformadas em um conjunto de equações algébricas através de suas discretizações espaciais e temporais. Existem diversas técnicas numéricas na DFC. Neste trabalho são aplicadas técnicas que utilizam malhas computacionais. Uma malha é composta por um número finito de volumes, ou células, que representam o espaço estudado, ou o domínio. Na maioria das aplicações da dinâmica de fluidos os domínios possuem geometrias complexas. Nestes casos malhas adaptativas são normalmente utilizadas, nas quais a geometria das células é definida de forma que a malha se ajuste à forma do domínio. Há diferentes técnicas para construção de malhas adaptativas, mas entre estas há um objetivo em comum, que é gerar uma malha com certo grau de regularidade, uma vez que a solução obtida será dependente disto (DE TULLIO, 2006). Além disso, métodos para construção de malhas adaptativas tridimensionais podem ser de difícil implementação e de grande custo computacional, principalmente quando há alterações da forma ou movimento do domínio.

Algumas abordagens surgiram como alternativa ao uso de malhas adaptativas, como por exemplo os Métodos da Fronteira Imersa (MFI) (PESKIN, 1972), que através de diferentes técnicas modelam a presença de paredes estáticas ou móveis sem necessitar que a malha se ajuste aos seus contornos. Nestes métodos são utilizadas duas malhas, uma para representar o domínio, denominada malha euleriana, e outra para representar as fronteiras imersas, denominada malha lagrangiana. Desta forma, as fronteiras imersas podem ter complexas geometrias e se moverem sem necessidade de alterações da malha euleriana. Na maioria dos MFI a malha do problema é construída utilizando células com faces ortogonais. A construção e a discretização das equações governantes do problema

para este tipo de malha são facilitadas, pois podem ser feitas em um espaço cartesiano, e por este motivo são denominadas malhas cartesianas.

Neste trabalho o MFI é utilizado com base em uma técnica denominada Modelo Físico Virtual (MFV), proposta por Lima e Silva (2002). Nesta metodologia as condições de contorno impostas pela presença de paredes imersas no escoamento atuam nas equações de Navier-Stokes através de um campo de forças, o qual é calculado a partir das equações da quantidade de movimento.

O MFV foi primeiramente aplicado para modelar escoamentos incompressíveis sobre objetos móveis ou estacionários e com paredes adiabáticas e aquecidas. Objetivou-se neste trabalho estender a metodologia para escoamentos compressíveis, visando avaliar a resposta da metodologia aos fenômenos típicos desses escoamentos, tais como os intensos gradientes de variáveis. A metodologia de MFV para escoamentos compressíveis utilizada no presente trabalho foi denominada Modelo Físico Virtual Compressível (MFVC). Neste trabalho a sigla MFVC também é utilizada para referenciar o código computacional desenvolvido.

Os casos escolhidos para avaliação do código são de escoamentos laminares, compressíveis e bidimensionais sobre um perfil cilíndrico em regimes subsônico e supersônico, para os quais existem dados de referência para validação dos resultados.

## 1.2 Objetivos

O propósito deste trabalho foi desenvolver e validar um código computacional para simulação de escoamentos compressíveis e bidimensionais sobre corpos imersos usando o MFI. Para isto, as seguintes etapas foram executadas:

- Desenvolvimento e validação de um código computacional para solução das equações de Navier-Stokes compressíveis (CS-ENS) em uma malha cartesiana bidimensional;
- Implementação e aplicação do código MFVC para simular escoamentos externos;
- Validação dos resultados obtidos com dados da literatura e com modelagens feitas utilizando o programa *OpenFOAM*.

## 1.3 Organização do trabalho

O trabalho está dividido em seis capítulos. Nesta introdução foi feita uma breve descrição da metodologia, das características dos escoamentos compressíveis, além da apresentação dos objetivos do trabalho.

No segundo capítulo é feita a revisão da literatura referente a MFI para escoamentos incompressíveis e compressíveis, destacando alguns trabalhos da literatura relevantes para o desenvolvimento do presente estudo.

No terceiro capítulo apresenta-se o modelo matemático adotado no trabalho, sendo abordados os seguintes assuntos: as equações governantes do problema, alguns parâmetros relacionados a escoamentos compressíveis, as condições de contorno e iniciais aplicadas e a metodologia de Fronteira Imersa.

No quarto capítulo são apresentados os métodos numéricos utilizados para discretização espacial das equações de Navier-Stokes, integração temporal, modelagem de fronteiras imersas via MFVC e determinação de parâmetros do escoamento.

No quinto capítulo primeiramente são mostrados os resultados da validação do código de solução das equações de Navier-Stokes a implementação da metodologia de Fronteira Imersa. Este código é referido neste trabalho como CS-ENS. Em seguida os resultados numéricos das simulações utilizando o MFVC e o *OpenFOAM* são apresentados e validados. Por fim, no capítulo 6 as conclusões e as sugestões de melhorias da metodologia e do código numérico são apresentadas.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Desenvolvimento da Dinâmica de Fluidos

O homem vem tentando descrever, entender e dominar o comportamento dos fluidos desde a antiguidade. Os primeiros registros quantitativos nesta área foram dos gregos. Arquimedes (285-212 a.C.) deu início ao estudo da estática dos fluidos com a lei do empuxo aplicada a corpos submersos. Já no período da renascença, Leonardo da Vinci (1452-1519) apresentou a lei da conservação da massa para escoamentos permanentes e unidimensionais, além de fazer observações e desenhos de diversos escoamentos. Posteriormente, Isaac Newton (1642-1727) postulou a equação da quantidade de movimento e o conceito da viscosidade newtoniana no qual a tensão e a taxa de deformação variam linearmente para os fluidos que mais tarde seriam denominados fluidos newtonianos.

A primeira tentativa de desenvolver um princípio geral para o movimento dos fluidos foi feita por Daniel Bernoulli, em 1738, em um trabalho denominado hidrodinâmica. As equações que governam o movimento dos fluidos invíscidos foram deduzidas em 1755 por Leonhard Euler com a aplicação da equação da quantidade de movimento de Newton, estas são conhecidas como equações de Euler.

Os termos de transporte viscoso foram adicionados às equação de Euler inicialmente por Marie Navier, em 1827, e Siméon Denis Poisson em, 1831, considerando hipóteses de forças intermoleculares. Posteriormente, Barré de Saint Venant, em 1843, e George Gabriel Stokes, em 1945, chegaram a estas mesmas equações considerando a hipótese de que as tensões normais e cisalhantes são funções lineares da taxa de deformação (viscosidade newtoniana). As equações da quantidade de movimento com o termo viscoso são chamadas equações de Navier-Stokes (ENS).

As ENS são de grande complexidade, possuindo inclusive termos não-lineares, e por isso, soluções analíticas só são obtidas em casos muito restritos.

A mecânica dos fluidos experimental tem desempenhado um papel importante na validação de soluções das ENS. Túneis de vento, por exemplo, são equipamentos eficazes para estudos experimentais de escoamentos. No entanto, análises de escoamentos sobre estruturas com grandes dimensões e altas velocidades de fluxo utilizando túneis de vento, como no projeto aerodinâmico de aeronaves, podem se tornar economicamente onerosos.

O crescimento da capacidade de processamento dos computadores e da memória disponível desde a década de 1950 levou ao desenvolvimento da dinâmica dos fluidos computacional, na qual aproximações de soluções das ENS são obtidas por meio de

métodos numéricos. Esta técnica oferece meios para testar avanços teóricos em condições indisponíveis no campo experimental e analítico.

Existem diferentes métodos numéricos utilizados para solução das ENS, sendo tradicionalmente classificados como: métodos eulerianos, métodos lagrangianos e métodos híbridos. Nos métodos eulerianos malhas computacionais são utilizadas para discretizar as ENS no domínio computacional. Os métodos lagrangianos podem empregar ou não malhas, e a diferença mais importante em relação à abordagem euleriana, é que as variáveis do problema são estudadas como função da partícula e do tempo. Ou seja, esta metodologia não é focada em pontos de observação das variáveis do escoamento, os quais são as células em métodos eulerianos, mas sim na trajetória e nas transformações ocorridas nas partículas do escoamento ao longo do tempo. Existem também métodos híbridos que combinam as duas abordagens, euleriana e lagrangiana.

No presente trabalho o MFI, que é uma abordagem híbrida ou mista, foi empregado. Neste método o escoamento em todo domínio é estudado através de uma formulação euleriana, enquanto que o corpo imerso (cilindros, perfis aerodinâmicos, etc) é analisado por uma formação lagrangiana.

É importante conhecer as diferentes abordagens do MFI, assim como a evolução e o surgimento destas ao longo do tempo. A seguir são citados alguns trabalhos que empregam o MFI para escoamentos incompressíveis, e em seguida para compressíveis, objetivando-se um aprofundamento nesta área de pesquisa.

## 2.2 Método de Fronteira Imersa

A metodologia da fronteira imersa foi desenvolvida e publicada pela primeira vez por Peskin (1972). Nesse trabalho o MFI foi aplicado à modelagem do escoamento de sangue em válvulas cardíacas. O efeito das paredes no escoamento é modelado através de um campo de forças agindo na região da fronteira, o qual tem valores proporcionais ao deslocamento das paredes buscando simular a elasticidade das estruturas cardíacas. O campo de forças produzido pela fronteira atua no escoamento através de um termo fonte nas equações de Navier-Stokes, as quais são resolvidas em uma malha euleriana. As superfícies imersas são representadas por um conjunto de pontos, denominados pontos lagrangianos, os quais têm suas posições definidas pelo tempo. Na Figura 2.1 é mostrado um exemplo de uma malha lagrangiana sobreposta à euleriana.

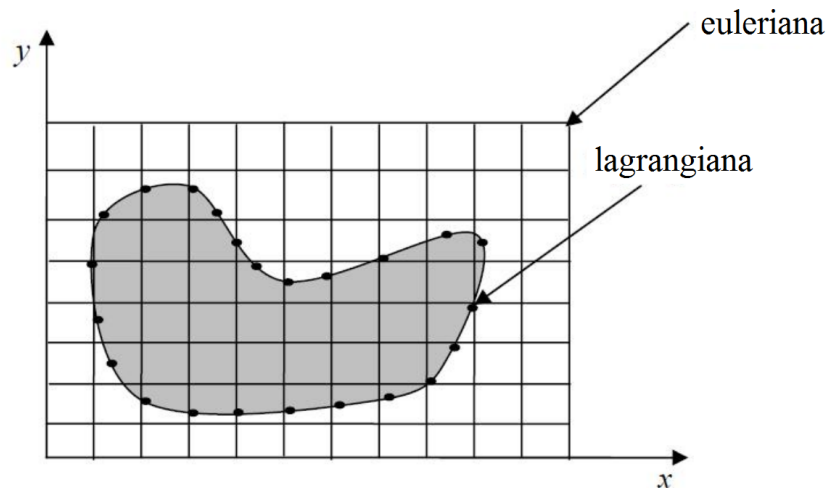


Figura 2.1 – Malhas euleriana e lagrangiana. Fonte: (LIMA E SILVA; SILVEIRA-NETO; DAMASCENO, 2003).

As forças agindo em escoamentos devido a presença de fronteiras imersas atuam somente na região de contato. Este comportamento poderia ser representado por uma função de distribuição denominada delta de Dirac, a qual assume o valor infinito sobre a fronteira e zero em outros pontos. Entretanto a função delta de Dirac não pode ser discretizada, e como alternativa, outras funções de distribuição mais suaves são utilizadas para aproximá-la em uma malha discreta. Estas funções têm formatos próximos ao mostrado na Fig. 2.2.

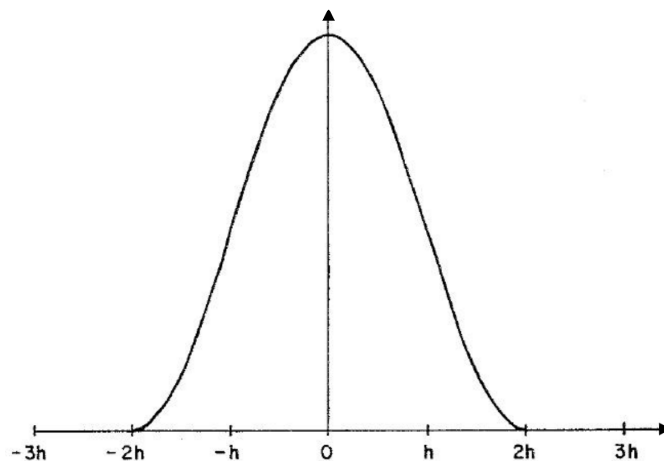


Figura 2.2 – Função de distribuição. Fonte: Adaptado de Peskin (1977).

Na Figura 2.2,  $h$  é a dimensão das arestas das células da malha euleriana e o que o valor máximo da distribuição ocorre sobre a fronteira.

Para modelar superfícies em métodos puramente eulerianos são necessárias malhas adaptativas. Além disso, a geometria da malha deve sofrer alterações caso haja movimento

das fronteiras. Nestes dois aspectos estão as principais vantagens do MFI em relação aos métodos de malha adaptativa, pois geometrias complexas fixas ou em movimento podem ser modeladas usando malhas simples, como as cartesianas. Outra vantagem do uso de malhas cartesianas é o maior grau de regularidade da geometria das células, o que produz melhores soluções.

Diferentes metodologias de fronteira imersa foram desenvolvidas. No trabalho de Mittal e Iaccarino (2005) foi proposta uma classificação para estas metodologias, que se baseia na forma de incorporação do termo fonte ao escoamento. Os autores dividiram os métodos em: métodos de força contínua e métodos de força discreta, descritos a seguir.

### 2.2.1 Métodos de Força Contínua

Nesta categoria um termo fonte é incorporado às equações governantes do escoamento, e portanto age sobre todo o domínio e é incluído antes da discretização espacial do problema (MITTAL; IACCARINO, 2005). Esta categoria ainda pode ser subdividida em fronteiras elásticas ou flexíveis e fronteiras rígidas

#### 2.2.1.1 Força Contínua com Fronteiras Flexíveis

Os métodos de força contínua com fronteira flexível são derivados do modelo apresentado por Peskin (1972). Nestes métodos a força é calculada através de leis constitutivas, como a lei de Hooke, sendo contínua e agindo sobre a região de fronteira através de funções de distribuição.

Usando a metodologia de fronteiras flexíveis Fogelson e Peskin (1988) modelaram escoamentos com partículas suspensas em domínios tridimensionais. As partículas são representadas por conjuntos de pontos com a mesma velocidade do fluido em suas posições, e sobre elas agem forças de origem viscosa e gravitacional. Os processos de agregação das plaquetas durante a coagulação do sangue e de sedimentação na presença de uma ou mais partículas foram modelados. Bons resultados foram obtidos indicando a aplicabilidade da metodologia para simulação de escoamentos com partículas em suspensão.

Unverdi e Tryggvason (1992) apresentaram um estudo de escoamentos multifásicos usando o MFI. Uma função denominada indicadora foi utilizada para localizar as fases do escoamento, além de suas transições. A força elástica foi substituída por uma função que representa a tensão superficial entre os fluidos. Escoamentos bifásicos de líquidos com a presença de bolhas em domínios bidimensionais e tridimensionais para diferentes viscosidades e massa específica foram modelados.

Beyer (1992) incluiu algumas alterações à metodologia de Peskin (1972) e estudou o comportamento das estruturas auriculares, obtendo resultados concordantes com dados

da literatura. Outro estudo envolvendo fronteiras elásticas foi publicado por Zhu e Peskin (2003) simulando escoamentos sobre filamentos flexíveis.

### 2.2.1.2 Força Contínua com Fronteiras Rígidas

Os métodos citados anteriormente são bem aplicados a casos com fronteiras elásticas, porém apresentam dificuldades para modelar fronteiras rígidas, pois as forças calculadas por equação constitutivas elásticas não são geralmente bem definidas no limite rígido (MITTAL; IACCARINO, 2005).

Goldstein, Handler e Sirovich (1993) apresentaram um método para escoamentos sobre corpos rígidos submersos. O campo de força local é calculado com base na diferença de velocidade entre o fluido e a fronteira, sendo modelado pela seguinte equação:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t) = \alpha \int_0^t (\mathbf{V}(\mathbf{x}_k, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}_k, t)) dt + \beta (\mathbf{V}(\mathbf{x}_k, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}_k, t)), \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t)$  é o campo de força produzido na posição  $\mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{V}(\mathbf{x}_k, t)$  a velocidade da fronteira imersa neste local e  $\mathbf{U}(\mathbf{x}_k, t)$  a velocidade do fluido calculada a partir da malha euleriana.  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes negativas que devem ser ajustadas conforme o caso estudado. Observa-se que o termo integral da Eq. (2.1) força o fluido a assumir a velocidade da parede na posição  $\mathbf{x}_k$ , e o segundo termo tem a função de amortecimento, o que evita oscilações na região próxima à fronteira.

Saiki e Biringen (1996) aplicaram a metodologia apresentada por Goldstein, Handler e Sirovich (1993) a escoamentos sobre cilindros móveis e estacionários. Uma discretização espacial em diferenças finitas centradas com quarta ordem de precisão foi aplicada para reduzir oscilações próximas à fronteira. Bons resultados foram obtidos para regime permanente e transiente a baixos números de Reynolds ( $Re < 400$ ).

Seguindo a classificação de forças contínuas com fronteiras rígidas, Lima e Silva (2002) propôs o Modelo Físico Virtual (MFV). Nesta metodologia calcula-se o campo de força em cada volume de fluido centrado nos pontos lagrangianos através das equações de Navier-Stokes. Este campo é distribuído para a malha euleriana através de um termo fonte adicionado às equações de conservação de momento. As variáveis do escoamento necessárias para o cálculo do campo produzido pela fronteira imersa são determinadas através de interpolações com dados da malha euleriana. Nos primeiros trabalhos utilizando o MFV as discretizações espaciais foram feitas através do método das Diferenças Finitas e a metodologia foi aplicada na modelagem de escoamentos incompressíveis bidimensionais. Simulou-se um escoamento de Poiseuille e escoamentos sobre um perfil circular a baixos números de Reynolds. Os números de Strouhal e os coeficientes de arrasto obtidos foram validados com trabalhos de diferentes autores obtendo boa conformidade.

O MFV também foi aplicado para modelagem de escoamentos laminares e tur-

bulentos sobre geometrias móveis ou deformáveis por Oliveira (2006). Foram modelados escoamentos laminares sobre um cilindro com diâmetro variável, além de escoamentos turbulentos sobre o perfil NACA 0012. Três diferentes modelos de turbulência foram estudados e comparados. Os resultados obtidos foram validados obtendo boa concordância com a literatura.

Lima e Silva, Silva e Silveira-Neto (2007) aplicaram o MFV para o estudo de escoamentos incompressíveis bidimensionais sobre cilindros em diversas configurações e sobre colunas *off-shore*. Os coeficientes de arrasto e sustentação e o número de Strouhal obtidos foram validados com dados da literatura. O autores concluíram que o MFV é adequado à modelagem múltiplos corpos imersos no escoamento.

Outros trabalhos nos quais bons resultados foram obtidos utilizando o MFV foram apresentados por: Arruda (2004), que modelou escoamentos internos forçados; Remigio (2005), que estudou a interação entre fluido e estrutura, e Bornschlegell (2008), que aplicou o MFV a escoamentos em torno de cilindros estacionários e em rotação utilizando o MFV para discretização espacial.

No trabalho de Santos (2014) o MFV foi aplicado para simulação de escoamentos incompressíveis, bidimensionais sobre cilindros aquecidos e rotativos. O cálculo das forças exercidas sobre o cilindro assim como a imposição indireta do aquecimento do cilindro foram baseados nas equações da quantidade de movimento e da conservação da energia. Foram analisados os coeficientes de arrasto e de sustentação e os números de Strouhal e Nusselt obtidos, obtendo-se concordância com a literatura.

## 2.2.2 Métodos de Força Discreta

Nesta categoria as equações governantes são discretizadas sem levar em conta a fronteira imersa. Em seguida, a discretização é ajustada para contabilizá-la (MITTAL; IACCARINO, 2005). Isto pode ser feito por meios diretos ou indiretos, assim esta categoria pode ser subdividida em métodos de imposição direta ou indireta do termo fonte.

### 2.2.2.1 Força Discreta com Imposição Direta

Nos métodos com imposição direta do termo fonte os dados da malha computacional próximo à região da fronteira imersa são modificados para que as condições de contorno sejam impostas diretamente (MITTAL; IACCARINO, 2005). Duas abordagens se destacam nesta categoria: o método das células fantasmas (*Ghost-cells*) e o método das células cortadas (*cut-cells*).

No método das células fantasmas, todas as células pelas quais a fronteira imersa percorre são classificadas como células fantasmas. Para se determinar as propriedades nestas células são utilizados esquemas de interpolação que implicitamente incorporam a

condição de contorno. Existem diversas formas de se fazer estas interpolações, obtendo-se diferentes graus de aproximação.

Alguns trabalhos utilizaram a abordagem de células fantasmas, como em: Tseng e Ferziger (2003), onde escoamentos viscosos foram modelados empregando um método de solução com precisão de segunda ordem. Palma et al. (2006) simularam escoamentos compressíveis externos viscosos e bidimensionais; e no trabalho de Zhang e Zhou (2014) escoamentos externos compressíveis, invíscidos, bidimensionais e tridimensionais sobre corpos fixos e móveis foram modelados.

Nenhum dos métodos de fronteira imersa discutidos anteriormente foi projetado para satisfazer completamente as leis de conservação nas proximidades da fronteira imersa. Estas leis podem ser obedecidas através de uma discretização espacial feita pelo método de Volumes Finitos<sup>1</sup>, sendo esta a motivação do desenvolvimento da abordagem de fronteira imersa *cut-cells* (MITTAL; IACCARINO, 2005). Esta metodologia foi apresentada por Clarke, Hassan e Salas (1986) simulando escoamentos invíscidos e mais tarde foi estendida à escoamentos viscosos nos trabalhos de Udaykumar, Shyy e Rao (1996) e de Ye et al. (1999).

No método *cut-cells* as células sobre a fronteira são cortadas acompanhando seu formato. Em soluções via o método do volumes finitos é necessário determinar fluxos convectivos e difusivos sobre as faces de cada célula, e como o corte feito sob a fronteira torna-se uma nova face, estimá-los neste local é a parte mais importante do método. Em problemas tridimensionais a abordagem *cut-cells* produz células com geometrias complexas, o que dificulta sua implementação.

#### 2.2.2.2 Força Discreta com Imposição Indireta

Em métodos classificados como de força discreta com imposição indireta, um termo fonte que age sobre o espaço discretizado é introduzido, e que, indiretamente, faz com que o escoamento atenda às condições de contorno de parede.

Mohd-Yusof (1997) desenvolveu um método que permite calcular o campo de forças necessário para que o escoamento atenda às condições de fronteira a partir das equações do movimento. A vantagem deste em relação ao proposto por Goldstein, Handler e Sirovich (1993) é não necessitar de constantes a serem ajustadas. Dados do escoamento sobre a superfície imersa são calculados através de interpolações e a força é calculada com base na diferença entre as propriedades do escoamento obtidas por interpolação e nas propriedades esperadas na fronteira. Este método foi aplicado por Mohd-Yusof (1997) para modelagem de escoamentos sobre fronteiras fixas.

Verzicco et al. (1998) estenderam a metodologia de Mohd-Yusof (1997) para

---

<sup>1</sup> O método dos Volumes Finitos será detalhado na seção 4.1.

modelagem de superfícies moveis. Neste trabalho foi incluído um modelo de turbulência e foi simulado o escoamento em uma câmara de combustão com um pistão móvel. Os resultados foram comparados aos de modelagens anteriores e apresentaram boa concordância.

Kim, Kim e Choi (2001) aplicaram o método proposto por Mohd-Yusof (1997) em uma discretização espacial por volumes finitos, incluindo um termo fonte na equação da continuidade para que as células sobre a fronteira imersa atendessem à conservação da massa. A interpolação das variáveis é feita com um esquema de segunda ordem para aumentar a estabilidade numérica. O método foi aplicado à escoamentos bidimensionais e tridimensionais e comparações com dados da literatura mostraram bons resultados.

### 2.2.3 Método de Fronteira Imersa aplicado a escoamentos compressíveis

Ghias, Mittal e Lund (2004) publicaram um trabalho usando o MFI para escoamentos compressíveis, onde foi aplicada a abordagem das células fantasmas com um esquema de interpolação de segunda ordem. A discretização espacial foi feita por diferenças finitas centrais e a integração no tempo com um esquema implícito para os termos viscosos e explícito para os demais. Foram modelados escoamentos subsônicos viscosos bidimensionais sobre um perfil circular e sobre o aerofólio NACA 0012 e escoamentos tridimensionais sobre um cilindro e uma asa.

Palma et al. (2006) aplicaram o MFI com a abordagem proposta por Mohd-Yusof (1997) na modelagem de escoamentos compressíveis viscosos bidimensionais. As equações médias de Reynolds (RANS) foram utilizadas com um modelo de turbulência de duas equações, além de um esquema de integração que apresenta acurácia e eficiência para uma ampla faixa de números de Mach. A metodologia foi aplicada a escoamentos bidimensionais em regime permanente e transiente sobre cilindros e o perfil NACA 0012 em diferentes números de Reynolds. Para baixos números de Mach as soluções apresentaram boa conformidade com a literatura, sendo avaliados o número de Strouhal, para regime transiente, e a dinâmica dos vórtices, para regime estacionário. Também simulou-se um escoamento supersônico sobre o perfil NACA 0012 com  $Ma = 2$  e ângulo de ataque igual a  $10^\circ$ , onde se demonstrou a convergência da solução através de diferentes níveis de refinamento da malha. Por fim, foram feitas simulações de um escoamento supersônico sobre um perfil cilíndrico, usando  $Re = 2 \times 10^5$  e números de Mach iguais a 1,3 e 1,7. Mostrou-se que para altos números de Reynolds o método necessitou de um maior refinamento na malha para se obter resultados adequados tornando-o menos competitivo.

No trabalho de Miserda et al. (2009) foi desenvolvido um método de fronteira imersa de quarta ordem para estudar escoamentos compressíveis e viscosos, este foi aplicado para o cálculo do ruído produzido por escoamentos sobre geometrias complexas. As equações de Navier-Stokes são discretizadas através do método dos Volumes Finitos, e a integração no tempo através do esquema de Runge-Kutta de terceira ordem. O método de fronteira imersa

baseia-se na abordagem de forças discretas. Os problemas estudados foram a formação de camada limite em um escoamento subsônico e laminar, o escoamento supersônico e laminar sobre um perfil losangular, o escoamento supersônico turbulento sobre um cilindro e o escoamento subsônico e turbulento sobre dois cilindros em tandem. Todos os resultados obtidos mostraram boa concordância com os resultados de referência.

Farooq (2012) utilizou o MFI com a técnica das células fantasmas para simular escoamentos externos e compressíveis, nas condições invíscida e viscosa. O método de Rusanov com o esquema MUSCL<sup>2</sup> foi aplicado para precisão espacial de segunda ordem. A integração no tempo foi feita com o método de Runge-Kutta de terceira ordem. Escoamentos bidimensionais com número de Mach igual a 3 sobre um cilindro foram estudados, e para o caso viscoso utilizou-se Reynolds igual a 500.

Zhang e Zhou (2014) aplicaram o MFI com a abordagem de células fantasmas para a simulação de escoamentos externos compressíveis invíscidos. A pressão, massa específica e velocidade tangencial sobre a fronteira imersa foram determinados usando a conservação do momento linear, juntamente com condições de entropia e entalpia total constantes na direção normal às superfícies. Foram modelados escoamentos bidimensionais subsônicos sobre uma geometria circular e escoamentos transônicos sobre o aerofólio NACA 0012 fixo e com oscilação angular. O método foi estendido a problemas tridimensionais e um escoamento subsônico sobre a asa ONERA M6 foi simulado. Os resultados apresentaram boa concordância com dados experimentais e numéricos da literatura.

Tran e Plourde (2014) utilizaram o MFI com o modelo de células fantasmas para solução de escoamentos compressíveis internos, objetivando modelar propulsores de foguetes. O espaço foi discretizado aplicando-se o método de volumes finitos com o esquema MUSCL para obtenção de segunda ordem. Utilizou-se refinamento de malha na região próxima à fronteira e a integração no tempo foi feita com o método de Runge-Kutta de terceira ordem. Na fronteira imersa foram modeladas condições de contorno de paredes adiabáticas, aquecidas e com injeção de fluido. Os escoamentos modelados foram: subsônico sobre um perfil circular, transônico em um bocal convergente-divergente, supersônico com choque oblíquo e em um tubo com injeção de fluido, obtendo-se bons resultados quando comparados com a literatura.

Como observado nesta revisão bibliográfica, o MFI é uma metodologia bastante estudada e promissora dentro da DFC. Neste trabalho, o MFV, que é uma abordagem dos MFI e já foi aplicado satisfatoriamente para diversos casos de escoamentos incompressíveis, é estendido para escoamentos compressíveis.

A seguir a modelagem matemática empregada neste trabalho é apresentada.

---

<sup>2</sup> Ver subseção 4.1.4.

### 3 MODELO MATEMÁTICO

#### 3.1 Equações de Navier-Stokes 2D

A equação de Navier-Stokes é o resultado da aplicação da segunda lei de Newton para um fluido no qual as tensões normais e cisalhantes são funções lineares da taxa de deformação. Esta equação juntamente com as equações de conservação da massa (continuidade) e da energia podem ser utilizadas para o estudo de diversos problemas de fluidodinâmica. Neste trabalho as equações de conservação da massa e da energia e a equação da quantidade de movimento são abreviadas por ENS.

Considerando um escoamento bidimensional e compressível, as ENS podem ser escritas na forma vetorial e em coordenadas cartesianas como:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{A}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}_v}{\partial y} + \mathbf{f}, \quad (3.1)$$

onde os vetores  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}_v$ ,  $\mathbf{B}_v$  e  $\mathbf{f}$  são dados por:

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho e + p) \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho e + p) \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A}_v = \begin{vmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B}_v = \begin{vmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} - q_y \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{f} = \begin{vmatrix} 0 \\ f_x \\ f_y \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (3.7)$$

sendo:  $\rho$  a massa específica,  $u$  e  $v$  as componentes do vetor velocidade,  $e$  a energia total específica,  $p$  a pressão e  $f_x$  e  $f_y$  as forças de campo nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. No vetor  $\mathbf{Q}$  estão as grandezas conservativas em suas formas intensivas: massa, momento linear e energia; assim o termo à esquerda da equação (3.1) representa suas taxas de variação com o tempo. Os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são termos de transporte advectivo destas variáveis, enquanto  $\mathbf{A}_v$  e  $\mathbf{B}_v$  são termos de transporte difusivo. Em  $\mathbf{f}$  estão os termos fonte das equações de conservação do momento linear, que representam um campo de forças atuando no escoamento.

Os termos  $\tau_{ij}$ , que aparecem nas Eqs. (3.5) e (3.6), são do tensor de tensões viscosas. Sendo o fluido newtoniano e não polar podem ser calculados por:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial x_j} \right) + \gamma \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial x_i} \delta_{ij}. \quad (3.8)$$

Na Equação (3.8),  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido, também chamada de primeiro coeficiente de viscosidade, e  $\gamma$  é o segundo coeficiente de viscosidade. Devido ao divergente da velocidade, o último termo da Eq. (3.8) só é diferente de zero quando existem efeitos de compressibilidade no escoamento. A seguinte hipótese, que foi proposta por Stokes, relaciona os dois coeficientes de viscosidade:

$$3\gamma + 2\mu = 0. \quad (3.9)$$

Aplicando-se a Eq. (3.9) à Eq. (3.8), tem-se:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \quad (3.10)$$

Nas Equações (3.5) e (3.6),  $q_x$  e  $q_y$  são os fluxos de calor em cada uma das coordenadas. Considerando um meio isotrópico que atenda à Lei de Fourier (1822), a

condução de calor é proporcional ao gradiente de temperatura, logo:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (3.11)$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (3.12)$$

onde  $\lambda$  é uma propriedade de transporte do meio denominada condutividade térmica, e  $T$  é a temperatura do fluido. Os sinais negativos nas Eqs. (3.11) e (3.12) indicam que o fluxos de calor têm sentidos contrários aos gradientes de temperatura, ou seja, ocorrem da região de maior para a de menor temperatura.

Neste trabalho o meio é considerado um gás ideal, assim a sua temperatura pode ser determinada usando a lei dos gases ideais:

$$p = \rho \frac{R}{M} T, \quad (3.13)$$

onde  $R$  é a constante dos gases ideais e  $M$  a massa molar do gás estudado.

A lei dos gases ideais também pode ser expressa pela seguinte equação (ZHANG; ZHOU, 2014):

$$p = \rho (\kappa - 1) \left( e - \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \quad (3.14)$$

onde  $\kappa$  é a razão dos calores específicos.

Os parâmetros adimensionais mais relevantes para o presente trabalho são definidos a seguir.

## 3.2 Parâmetros do escoamento

### 3.2.1 Número de Reynolds

O número de Reynolds ( $Re$ ) é definido como a razão entre as forças inerciais e viscosas atuantes no escoamento.  $Re$  pode ser definido para diferentes situações nas quais um fluido se move em relação a uma superfície. O número de Reynolds característico de um escoamento é calculado usando suas propriedades e um comprimento ou uma dimensão característica. Esta dimensão é definida, por exemplo, para escoamentos sobre um cilindro, como o seu diâmetro ( $D$ ), e  $Re_D$  é calculado usando a Eq. (3.15).

$$Re_D = \frac{\rho_\infty |\mathbf{U}_\infty| D}{\mu} \quad (3.15)$$

O subscrito  $\infty$  representa que estas propriedades são de uma região onde o escoamento não é perturbado pela presença do cilindro. ( $|\mathbf{U}_\infty|$ ) é o módulo da velocidade do fluido, denominada velocidade da corrente livre.

### 3.2.2 Velocidade do som e número de Mach

A velocidade do som ( $c$ ) é a velocidade na qual perturbações de pressão se propagam pelo fluido. A velocidade do som é uma das propriedades mais importantes em escoamentos compressíveis.

Para gases ideais, a velocidade local do som pode ser calculada pela Eq. (3.16).

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} \quad (3.16)$$

Observa-se que para um gás ideal a velocidade do som é proporcional à raiz quadrada da temperatura, da mesma forma que a velocidade molecular média, que é prevista pela teoria cinética como igual a  $\sqrt{8RT/(M\pi)}$ , mostrando a ligação entre estes dois fenômenos. De fato a propagação de perturbações de pressão em um fluido ocorre por transferência de energia em nível molecular, e sua velocidade é cerca de 3/4 da velocidade molecular média (ANDERSON, 1990).

O número de Mach ( $Ma$ ) é a razão entre as velocidades do escoamento e do som. Estas velocidades podem ser definidas localmente tendo-se o número de Mach local, conforme Eq. (3.17), ou considerando as propriedades da corrente livre, conforme Eq. (3.18), obtendo-se o número de Mach característico do escoamento ( $Ma_\infty$ ).

$$Ma = \frac{|\mathbf{U}|}{c} \quad (3.17)$$

$$Ma_\infty = \frac{|\mathbf{U}_\infty|}{c_\infty} \quad (3.18)$$

O número de Mach é importante para escoamentos compressíveis uma vez que é relacionado à capacidade do fluido de sofrer compressão por meio de forças inerciais, o que pode ser demonstrado observando a razão entre as energias específicas cinética e interna. Considerando um caso unidimensional de um escoamento com velocidade livre igual a  $u_\infty$ , a sua energia cinética específica é calculada por  $\mathbf{U}_\infty^2/2$ . Para um gás ideal a energia interna específica é calculada por  $c_v T_\infty$ , sendo  $c_v$  o calor específico a volume constante. Desta forma a razão entre estas duas energias é igual a  $\mathbf{U}_\infty^2/(2c_v T_\infty)$ . Usando a relação  $c_v = (R/M)/(\kappa - 1)$ , a Eq. (3.16) e a definição de  $Ma_\infty$  apresentada na Eq. (3.18), tem-se:

$$\frac{\mathbf{U}_\infty^2/2}{c_v T_\infty} = \frac{\kappa(\kappa - 1)}{2} Ma_\infty^2 \quad (3.19)$$

Através da Equação (3.19) pode-se observar que a razão entre a energia cinética e a energia interna do escoamento é proporcional a  $Ma_\infty$  ao quadrado. Assim, para  $Ma_\infty \ll 1$  a energia cinética do fluido é muito baixa se comparada à energia interna, logo transformações de energia cinética em interna resultarão em pequenas variações nas propriedades do escoamento, e a consideração de incompressibilidade é válida. Por outro lado, para escoamentos com  $Ma_\infty > 0,3$  os efeitos de compressibilidade devem ser considerados.

### 3.2.3 Número de Strouhal

Alguns escoamentos têm um padrão oscilatório dependente do número de Reynolds. Para determinados valores do número de Reynolds, vórtices alternados se desprendem dos perfis imersos no escoamento e produzem um padrão denominado esteira de vórtices. O número de Strouhal ( $St$ ) é relacionado à frequência de desprendimentos destes vórtices. A determinação deste parâmetro é importante na avaliação de forças alternadas agindo sobre estruturas. Para se calcular  $St$  nestes escoamentos usa-se a frequência destes desprendimentos, um comprimento característico do perfil e a velocidade de corrente livre. Assim, para um escoamento sobre um cilindro o número de Strouhal é calculado conforme:

$$St = \frac{f_{osc} D}{|\mathbf{U}_\infty|}. \quad (3.20)$$

O número de Strouhal para escoamentos sobre perfis com geometrias básicas, como cilindros ou aerofólios, é bastante estudado, sendo um bom parâmetro para validação de resultados numéricos.

### 3.2.4 Coeficientes de arrasto e sustentação

A força de arrasto ( $F_d$ ) produzida pelo escoamento sobre um corpo imerso provém de forças de pressão e viscosas atuando no corpo na direção da corrente livre. A força de sustentação ( $F_l$ ) por sua vez surge da componente atuando na direção perpendicular à corrente livre. A determinação de  $F_d$  e  $F_l$  é muito importante em aerodinâmica, pois estas são as forças que o escoamento impõe aos corpos imersos. As forças  $F_d$  e  $F_l$  podem ser definidas de maneira adimensional usando o produto da pressão dinâmica característica do escoamento,  $\rho_\infty |\mathbf{U}_\infty|^2 / 2$ , por uma área de referência ( $A$ ). Assim, obtêm-se os coeficientes de arrasto ( $C_d$ ) e de sustentação ( $C_l$ ) do corpo imerso, conforme as Eqs. (3.21) e (3.22).

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2} \rho_\infty |\mathbf{U}_\infty|^2 A} \quad (3.21)$$

$$C_l = \frac{F_l}{\frac{1}{2} \rho_\infty |\mathbf{U}_\infty|^2 A}. \quad (3.22)$$

### 3.2.5 Tempo adimensional

Os resultados das modelagens com MFVC são apresentados em função do tempo adimensional ( $\psi$ ), o qual é calculado conforme a Eq. (3.23).

$$\psi = \frac{t |\mathbf{U}_\infty|}{D} \quad (3.23)$$

## 3.3 Modelagem matemática da fronteira imersa

Como já mencionado, nos MFI são usadas duas malhas: uma euleriana, onde as equações governantes do problema são discretizadas, e outra lagrangiana, a qual representa a posição das fronteiras imersas. No espaço bidimensional, a malha lagrangiana é formada por um conjunto de pontos, que são denominados pontos lagrangianos, estes pontos são representados usando o sub-índice  $k$ , e estão posicionados em  $\mathbf{x}_k$ . Na Figura 3.1 a malha lagrangiana e os pontos lagrangianos são mostrados em vermelho.

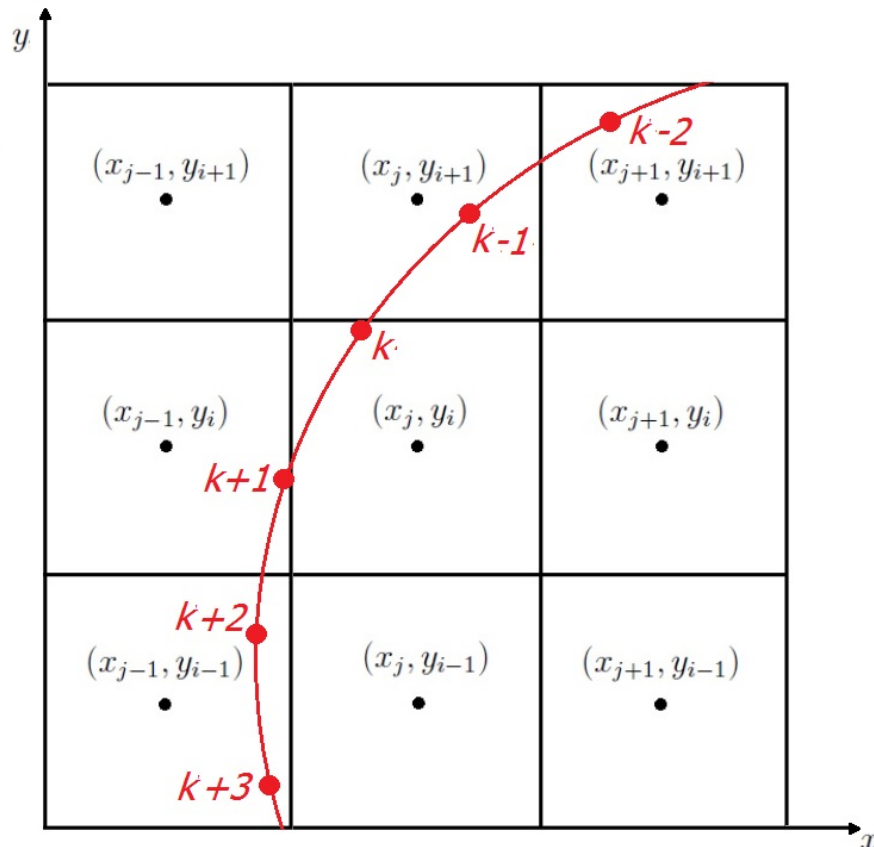


Figura 3.1 – Malhas lagrangiana e euleriana. Malha e pontos langrangianos em vermelho.

Nas abordagens de força contínua, o conjunto de pontos lagrangianos produz um campo de forças que atua nas ENS para que o escoamento atenda às condições de não

escorregamento e de não penetração do fluido nas paredes dos objetos imersos. No MVF o campo de forças é calculado em cada ponto lagrangiano utilizando as equações de conservação do momento linear. Este campo é então distribuído na malha euleriana através de uma função de distribuição (LIMA E SILVA, 2002).

Esta distribuição pode ser feita com o uso da função Delta de Dirac ( $\delta$ ), como:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t) = \int \mathbf{F}(\mathbf{x}_k, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) d\mathbf{x}. \quad (3.24)$$

A função Delta de Dirac não pode ser discretizada, e é substituída por outra função de distribuição mais suave, a qual é melhor detalhada na seção 4.3.

No MFVC, a força lagrangiana é calculada utilizando as equações de conservação do momento linear nas direções  $x$  e  $y$ , estas são apresentadas a seguir:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} - \frac{\partial \rho uv}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = -\frac{\partial \rho uv}{\partial x} - \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}. \quad (3.26)$$

Os termos das Eq. (3.25) e (3.26) são classificados como: força de aceleração ( $\mathbf{F}_a$ ), força inercial ( $\mathbf{F}_I$ ), força de pressão ( $\mathbf{F}_p$ ) e força viscosa ( $\mathbf{F}_v$ ). E a força total em cada ponto lagrangiano ( $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k, t)$ ) é igual ao somatório destes termos.

Utilizando os termos das Eq. (3.25) e (3.26), as componentes  $F_x(\mathbf{x}_k, t)$  e  $F_y(\mathbf{x}_k, t)$  do campo de força gerado no ponto lagrangiano  $\mathbf{x}_k$  são calculadas conforme as Eqs. (3.27) e (3.28), respectivamente.

$$F_x(\mathbf{x}_k, t) = \underbrace{\frac{\partial \rho u}{\partial t}(\mathbf{x}_k, t)}_{F_{a,x}} + \underbrace{\frac{\partial \rho u^2}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t) + \frac{\partial \rho uv}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t)}_{F_{I,x}} + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t)}_{F_{p,x}} - \underbrace{\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t) - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t)}_{F_{v,x}} \quad (3.27)$$

$$F_y(\mathbf{x}_k, t) = \underbrace{\frac{\partial \rho v}{\partial t}(\mathbf{x}_k, t)}_{F_{a,y}} + \underbrace{\frac{\partial \rho uv}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t) + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t)}_{F_{I,y}} + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t)}_{F_{p,y}} - \underbrace{\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t) - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t)}_{F_{v,y}} \quad (3.28)$$

Desta forma, tem-se:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_k, t) = \mathbf{F}_a(\mathbf{x}_k, t) + \mathbf{F}_I(\mathbf{x}_k, t) + \mathbf{F}_p(\mathbf{x}_k, t) + \mathbf{F}_v(\mathbf{x}_k, t). \quad (3.29)$$

Por conveniência os termos inerciais, de pressão e viscosos das Eqs. (3.27) e (3.28) são agrupados em duas variáveis. Adotando-se a mesma nomenclatura utilizada por Mohd-Yusof (1997), estas variáveis são denominadas  $RHS_x(\mathbf{x}_k, t)$  e  $RHS_y(\mathbf{x}_k, t)$ , obtendo-se:

$$F_x(\mathbf{x}_k, t) = \frac{\partial \rho u}{\partial t}(\mathbf{x}_k, t) - RHS_x(\mathbf{x}_k, t), \quad (3.30)$$

$$F_y(\mathbf{x}_k, t) = \frac{\partial \rho v}{\partial t}(\mathbf{x}_k, t) - RHS_y(\mathbf{x}_k, t), \quad (3.31)$$

sendo:

$$RHS_x(\mathbf{x}_k, t) = -\frac{\partial \rho u^2}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t) - \frac{\partial \rho uv}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t) - \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t), \quad (3.32)$$

$$RHS_y(\mathbf{x}_k, t) = -\frac{\partial \rho uv}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t) - \frac{\partial \rho v^2}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t) - \frac{\partial p}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t) + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t). \quad (3.33)$$

$RHS_x(\mathbf{x}_k, t)$  e  $RHS_y(\mathbf{x}_k, t)$  são determinados através de interpolação de dados da malha euleriana na posição  $\mathbf{x}_k$  em cada instante de tempo. Enquanto que para determinar os termos de aceleração ( $(\partial \rho u / \partial t(\mathbf{x}_k, t))$  e  $(\partial \rho v / \partial t(\mathbf{x}_k, t))$ ), são utilizadas, além de variáveis interpoladas da malha euleriana, a velocidade do ponto lagrangiano, ou seja, a velocidade local da fronteira imersa. Na seção 4.3 o cálculo destas forças é melhor detalhado.

Uma ideia para se obter a exata localização de bolhas/gotas em um escoamento foi proposta por Unverdi e Tryggvason (1992). O método *front-tracking* (captura de interface) consiste em utilizar uma função denominada indicadora, que permite localizar dinamicamente a interface. No caso de escoamentos bifásicos esta função também pode ser utilizada para o cálculo de propriedades físicas como a viscosidade e massa específica nas diferentes fases.

No presente trabalho a função indicadora é utilizada para localização das fronteiras do corpo imerso, e seu cálculo é apresentado a seguir.

### 3.4 Função Indicadora

A função indicadora ( $I(\mathbf{x}, t)$ ) assume valores entre 0 e 1. Externamente à malha lagrangiana a função indicadora tem valor nulo, na interface do corpo imerso assume valores entre 0 e 1 crescendo gradualmente até atingir o valor unitário, que é constante na região interna à malha lagrangiana. Desta forma, a interface da fronteira imersa apresenta-se como uma região de transição, e a malha lagrangiana pode ser localizada em  $I(\mathbf{x}, t) \approx 0,5$ .

No presente trabalho a função indicadora é calculada conforme sugerido por Unverdi e Tryggvason (1992):

$$\nabla^2 I(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}, t). \quad (3.34)$$

Para determinação da função indicadora é necessário solucionar a Eq. (3.34), que é uma equação de Poisson.

A função  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$  é calculada como:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \sum \mathbf{D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \mathbf{n}(\mathbf{x}_k) \Delta s(\mathbf{x}_k), \quad (3.35)$$

onde  $\mathbf{D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$  é uma função de distribuição,  $\mathbf{n}(\mathbf{x}_k)$  é o vetor normal à fronteira imersa sobre o ponto lagrangiano  $\mathbf{x}_k$ , e  $\Delta s(\mathbf{x}_k)$  o comprimento de um segmento de reta que representa a distância entre dois pontos lagrangianos.

Até este ponto foram apresentadas as principais equações empregadas neste trabalho. Iniciando pelas equações governantes da dinâmica dos fluidos, que são as ENS, e a determinação de propriedades do fluido. Em seguida foram estudados parâmetros que caracterizam o escoamento e que serão utilizados para sua análise. Por fim, a metodologia de cálculo do campo de forças produzido pela fronteira imersa foi apresentada. Falta agora o estudo das condições iniciais e de contorno do problema, que são apresentadas a seguir.

### 3.5 Condições iniciais e de contorno

Para se obter a solução transiente de uma equação diferencial é necessário que seja especificado o estado do problema em um tempo de referência, denominado condição inicial do problema.

Além da condição inicial, há necessidade conhecer as condições que representam o comportamento das variáveis nas fronteiras do domínio. Estas são denominadas condições de contorno ou de fronteira e são restrições adicionais que a solução deve atender. Há diversos tipos de condições de contorno usadas para as ENS dependendo do caso estudado. No presente trabalho são usadas as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann.

A condição de contorno de Dirichlet fixa valores de variáveis na fronteira. Um exemplo de aplicação desta condição de contorno é a imposição da velocidade do fluido nula em paredes, o que representa o não escorregamento e a não penetração do fluido.

A condição de contorno de Neumann fixa valores das derivadas das variáveis na fronteira. Esta condição de contorno é aplicada por exemplo na modelagem de paredes adiabáticas. Conforme as Eqs. (3.11) e (3.12), há proporcionalidade entre a transferência de calor e o gradiente de temperatura em determinada direção. Assim, para se modelar

uma parede adiabática, o gradiente de temperatura normal à esta é imposto como igual a 0 usando a condição de contorno de Neumann.

Combinações das condições de contorno de Dirichlet e de Neumann são utilizadas no presente trabalho para se especificar a pressão, a temperatura e as componentes do vetor velocidade nas fronteiras do domínio. A massa específica é calculada usando a lei dos gases ideais.

No próximo capítulo são discutidos os métodos numéricos empregados para o cálculo das equações até então apresentadas.

## 4 METODOLOGIA NUMÉRICA

Dentre os métodos numéricos utilizados para solução de equações diferenciais ordinárias parciais os mais conhecidos são: diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos e espectrais. Neste trabalho o método de volumes finitos é adotado, e na seção a seguir sua metodologia é detalhada.

### 4.1 Método dos Volumes Finitos

O método dos volumes finitos (MVF) vem sendo bastante utilizado para aproximar soluções de equações de conservação (RIBEIRO, 2007). Neste método o domínio é dividido em volumes com dimensões finitas, e as equações de conservação na forma integral são aplicadas à cada um deles. A variação das grandezas é calculada pelos seus fluxos através das fronteiras de cada um dos volumes, e como o fluxo que sai de determinada face é igual ao que entra na face partilhada, há conservação das grandezas, sendo esta uma das principais vantagens do método.

No MVF a malha é definida apenas pelas fronteiras dos volumes de controle não necessitando estar relacionada a um sistema de coordenadas, essa característica traz facilidades quando se trabalha com geometrias e malhas complexas (GONÇALVES, 2007). Outras vantagens do MVF é o fato de ser de fácil compreensão e de ter base física, ou seja, equações de balanço, tornando-o muito popular entre engenheiros.

A seguir a aplicação do MVF para solução numérica de leis de conservação é apresentada.

#### 4.1.1 Lei de conservação hiperbólica unidimensional

A solução numérica de uma lei de conservação hiperbólica, escalar e unidimensional (1D) utilizando o MVF é ilustrada primeiramente. Assim, considerando determinada grandeza conservativa ( $s$ ), tem-se a Eq. 4.1.

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial f(s)}{\partial x} = 0, \quad (4.1)$$

sujeito à condição inicial:

$$s(x, 0) = s_0(x), x \in \mathfrak{R}. \quad (4.2)$$

Na Equação (4.1),  $f(s)$  é relacionada ao transporte advectivo da grandeza  $s$ , sendo denominada função de fluxo.

No MVF o espaço estudado é dividido em volumes com dimensões finitas, estes são denominados volumes finitos, ou células, os quais são indicados por  $V$  no presente trabalho, vide Fig. 4.1. A malha computacional é o conjunto de todos os volumes finitos e será representada por  $\Gamma$ .

Para o caso unidimensional cada volume finito é associado a um índice, sendo a letra  $j$  adotada neste trabalho. Sendo  $x$  a dimensão espacial,  $x_j$  é a localização do centroide do volume finito  $V_j$ .

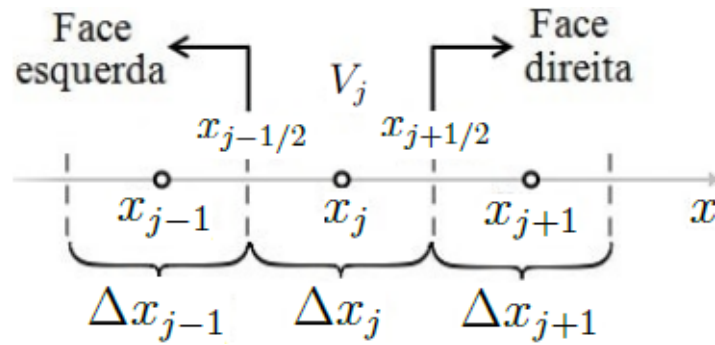


Figura 4.1 – Volume finito unidimensional.

Na Figura 4.1 pode-se observar que as faces direita e esquerda do volume de controle  $V_j$  estão localizadas nas posições  $x_{j+1/2}$  e  $x_{j-1/2}$  respectivamente, e que a largura da célula  $\Delta x_j$  pode ser calculada por:

$$\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}. \quad (4.3)$$

Deseja-se obter uma forma integral da lei de conservação, assim integrando a Eq. (4.1) no intervalo  $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ , tem-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} s(x, t) dx = f(s(x_{j-1/2}, t)) - f(s(x_{j+1/2}, t)). \quad (4.4)$$

O índice  $n$  será utilizado na representação discreta da dimensão temporal. Integrando-se a lei de conservação entre os tempos  $t^n$  e  $t^{n+1}$ , e dividindo-a por  $\Delta x_j$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} s(x, t^{n+1}) dx - \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} s(x, t^n) dx \\ &= \frac{1}{\Delta x_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s(x_{j-1/2}, t)) dt - \frac{1}{\Delta x_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s(x_{j+1/2}, t)) dt. \end{aligned} \quad (4.5)$$

O valor médio da grandeza  $s$  no tempo  $t^n$  em um volume finito  $V_j$  é definido como:

$$\bar{S}_j^n \equiv \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} s(x, t^n) dx. \quad (4.6)$$

Observa-se que os dois termos a esquerda da Eq. (4.5) são os valores médios da variável  $s$  em seus respectivos tempos, logo:

$$\bar{S}_j^{n+1} = \bar{S}_j^n + \frac{1}{\Delta x_j} \left( \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s(x_{j-1/2}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s(x_{j+1/2}, t)) dt \right). \quad (4.7)$$

Os valores de  $s(x_{j+1/2}, t)$  e  $s(x_{j-1/2}, t)$  variam com o tempo. Desta forma, não se pode obter uma solução exata para  $s$ , portanto não é possível calcular diretamente as soluções dos termos integrais no lado direito da Eq. (4.7) (LEVEQUE, 2002).

Uma alternativa é trabalhar com valores médios da função de fluxo ( $F_{j+1/2}^n$  e  $F_{j-1/2}^n$ ) durante o intervalo de integração. Assim,  $F_{j+1/2}^n$  pode ser aproximado por:

$$F_{j+1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s(x_{j+1/2}, t)) dt, \quad (4.8)$$

onde:

$$\Delta t = t^{n+1} - t^n. \quad (4.9)$$

Substituindo os termos integrais na Eq. (4.7) por seus valores médios obtém-se uma expressão discreta para a lei de conservação integral, dada por:

$$\bar{S}_j^{n+1} = \bar{S}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} [F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n]. \quad (4.10)$$

Observa-se que a Eq. (4.10) foi discretizada tanto espacialmente quanto no tempo, sendo este método denominado totalmente discreto. É possível obter uma equação na forma semidiscreta, onde somente o espaço é discretizado. Para isto a lei de conservação discreta pode ser rearranjada como:

$$\frac{\bar{S}_j^{n+1} - \bar{S}_j^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta x_j} [F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n], \quad (4.11)$$

No limite, quando  $\Delta t$  tende a zero, tem-se a forma semi-discreta da lei de conservação integral unidimensional:

$$\frac{\partial \bar{S}_j}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x_j} [F_{j+1/2}(t) - F_{j-1/2}(t)]. \quad (4.12)$$

No presente trabalho o método proposto por Kurganov e Tadmor (2000) (KT) é aplicado para discretizar os termos advectivos e de pressão das ENS. Porém, antes desta metodologia ser apresentada, é feito um estudo dos métodos de Lax-Friedrichs e de Rusanov (ou local Lax-Friedrichs). O que ajuda a compreensão da metodologia, pois o método KT é a aplicação do método de Rusanov com a reconstrução espacial não oscilatória de segunda ordem proposta por Van Leer (1979).

#### 4.1.2 Método de Lax-Friedrichs

O método de Lax-Friedrichs é um esquema central de primeira ordem para solução de equações diferenciais hiperbólicas, proposto por Lax (1954) e Friedrichs (1954). O método de Lax-Friedrichs é a base para todos os outros esquemas centrados de solução de leis hiperbólicas e é originalmente um método Diferenças Finitas, mas que também pode ser utilizado com o MVF (RIBEIRO, 2007).

É razoável fazer uma primeira suposição de que no tempo  $t^n$  os fluxos médios nas faces de  $V_j$  sejam funções apenas das propriedades médias de suas células adjacentes (LEVEQUE, 2002), logo:

$$F_{j+1/2}^n = \mathcal{F}(\bar{S}_j^n, \bar{S}_{j+1}^n) \quad (4.13)$$

$$F_{j-1/2}^n = \mathcal{F}(\bar{S}_j^n, \bar{S}_{j-1}^n). \quad (4.14)$$

As funções  $\mathcal{F}(\bar{S}_j^n, \bar{S}_{j+1}^n)$  e  $\mathcal{F}(\bar{S}_j^n, \bar{S}_{j-1}^n)$  são denominadas fluxos numéricos. Aplicando-as as Eqs. (4.13) e (4.14) na Eq. (4.10) tem-se:

$$\bar{S}_j^{n+1} = \bar{S}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} [\mathcal{F}(\bar{S}_j^n, \bar{S}_{j+1}^n) - \mathcal{F}(\bar{S}_j^n, \bar{S}_{j-1}^n)]. \quad (4.15)$$

Neste estudo uma malha uniforme é considerada para simplificar as equações, assim uma primeira aproximação para o fluxo numérico em uma face é o valor médio entre suas células adjacentes.

$$F_{j+1/2}^n = \mathcal{F}(\bar{S}_j^n, \bar{S}_{j+1}^n) = \frac{1}{2} [f(\bar{S}_j^n) + f(\bar{S}_{j+1}^n)] \quad (4.16)$$

$$F_{j-1/2}^n = \mathcal{F}(\bar{S}_j^n, \bar{S}_{j-1}^n) = \frac{1}{2} [f(\bar{S}_j^n) + f(\bar{S}_{j-1}^n)] \quad (4.17)$$

Substituindo as Eqs. (4.16) e (4.17) na Eq. (4.10) tem-se:

$$\bar{S}_j^{n+1} = \bar{S}_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x_j} [f(\bar{S}_{j+1}^n) - f(\bar{S}_{j-1}^n)] \quad (4.18)$$

Pode-se demonstrar que soluções de leis de conservação hiperbólicas obtidas através da Eq. (4.18) são instáveis (LEVEQUE, 2002; RIBEIRO, 2007). Para se obter estabilidade o termo  $\bar{S}_j^n$  pode ser substituído por seu valor médio, que é calculado usando suas células adjacentes ( $V_{j+1}$  e  $V_{j-1}$ ), conforme a Eq. (4.19).

$$\bar{S}_j^n = \frac{\bar{S}_{j+1}^n + \bar{S}_{j-1}^n}{2}. \quad (4.19)$$

Assim, a Eq. (4.18) torna-se:

$$\bar{S}_j^{n+1} = \frac{\bar{S}_{j+1}^n + \bar{S}_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x_j} \left[ f(\bar{S}_{j+1}^n) - f(\bar{S}_{j-1}^n) \right]. \quad (4.20)$$

No método de Lax-Friedrichs a Eq. (4.20) é aplicada para obtenção da soluções numéricas de equações diferenciais. É conveniente que o método fique na forma da Eq. (4.10), para isso os fluxos numéricos são calculado como:

$$\mathcal{F}(\bar{S}_j^n, \bar{S}_{j+1}^n) = \frac{1}{2} \left[ f(\bar{S}_j^n) + f(\bar{S}_{j+1}^n) \right] - \frac{\Delta x_j}{2\Delta t} (\bar{S}_{j+1}^n - \bar{S}_j^n) \quad (4.21)$$

$$\mathcal{F}(\bar{S}_j^n, \bar{S}_{j-1}^n) = \frac{1}{2} \left[ f(\bar{S}_j^n) + f(\bar{S}_{j-1}^n) \right] - \frac{\Delta x_j}{2\Delta t} (\bar{S}_j^n - \bar{S}_{j-1}^n) \quad (4.22)$$

Os fluxos numéricos calculados pelas Eqs. (4.21) e (4.22) são parecidos com os calculados pelas Eqs. (4.16) e (4.17) com a adição de um termo, o qual é denominado difusão numérica ou viscosidade artificial. A difusão numérica amortece intensos gradientes nas soluções.

As principais vantagens do método de Lax-Friedrichs são a simplicidade e o rápido processamento. Porém, é um método de primeira ordem e muito difusivo, principalmente quando são utilizados pequenos passos de tempo (RIBEIRO, 2007). A difusão numérica do método tem a ordem de  $O(\Delta x^2/\Delta t)$  (TEIXEIRA, 2011).

### 4.1.3 Critério de estabilidade e a condição de CFL

Devido à suposição que os fluxos nas faces sejam funções apenas das propriedades médias de suas células adjacentes (subseção 4.1.2), espera-se que propagações de dados na malha ocorram a velocidades finitas (LEVEQUE, 2002). Além disso, o intervalo de tempo entre ( $t^n$  e  $t^{n+1}$ ), ou  $\Delta t$ , deve ser controlado para que fluxos nas faces de  $V_j$  não sofram perturbações provenientes de células não adjacentes.

Para exemplificar esta limitação no  $\Delta t$ , considera-se as ENS para o caso invíscido e unidimensional. Conforme será detalhado na subseção 4.2.1, a velocidade de propagação para este sistema de equações é igual a  $|u| + c$ . Considerando a velocidade máxima

de propagação na célula  $V_j$ ,  $máx(|u| + c)_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]}$ ,  $\Delta t$  deve ser limitado conforme a seguinte relação:

$$máx(|u| + c)_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]} \Delta t \leq \Delta x_j, \quad (4.23)$$

a qual pode ser reorganizada obtendo-se:

$$\frac{máx(|u| + c)_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]} \Delta t}{\Delta x_j} \leq 1 \quad (4.24)$$

Esta é a condição de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL), ou condição de Courant, que deve ser satisfeita em todo o domínio para que haja estabilidade e convergência das soluções de leis de conservação (LEVEQUE, 2002). Para o caso exemplificado, o número de Courant em cada célula  $CFL_j$  é calculado conforme relação a seguir:

$$CFL_j = \frac{máx(|u| + c)_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]} \Delta t}{\Delta x_j}. \quad (4.25)$$

A partir da condição de Courant, chega-se a conclusão que para uma mesma velocidade de propagação máxima, ao se refinar a malha,  $\Delta t$  deve ser reduzido para que CFL seja mantido.

Sistemas de equações diferenciais possuem um conjunto de velocidades características de propagação ( $\lambda^p$ ), que são iguais aos autovalores de sua matriz característica. Dessa forma, o valor de  $CFL_j$  pode ser definido para o caso unidimensional como:

$$CFL_j = \frac{máx(|\lambda^p|)_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]} \Delta t}{\Delta x_j}, \quad (4.26)$$

onde  $máx(|\lambda^p|)$  é denominado o raio espectral da matriz característica do sistema de equações diferenciais e representa o maior valor absoluto dos autovalores do sistema de equações.

É importante observar que a condição de Courant é necessária para estabilidade do método de volumes finitos, porém nem sempre é o suficiente para garanti-la (LEVEQUE, 2002).

#### 4.1.4 Método de Rusanov

Rusanov (1961) alterou o método de Lax-Friedrichs, o que reduziu sua difusividade numérica. Esta modificação pode ser compreendida observando que a viscosidade artificial adicionada pelo método de Lax-Friedrichs é proporcional à razão ( $\Delta x_j/\Delta t$ ) (Eqs. (4.21) e (4.22)) e que esta razão representa uma velocidade característica da célula.

No método de Rusanov esta velocidade característica da célula ( $\Delta x_j / \Delta t$ ) é substituída por velocidades de propagação máxima nas faces ( $(\lambda_{j+1/2})$  e  $(\lambda_{j-1/2})$ ). Assim, os fluxos numéricos são calculados como:

$$\mathcal{F}(\bar{S}_j^n, \bar{S}_{j+1}^n) = \frac{1}{2} [f(\bar{S}_j^n) + f(\bar{S}_{j+1}^n)] - \frac{\lambda_{j+1/2}}{2} (\bar{S}_{j+1}^n - \bar{S}_j^n), \quad (4.27)$$

$$\mathcal{F}(\bar{S}_j^n, \bar{S}_{j-1}^n) = \frac{1}{2} [f(\bar{S}_j^n) + f(\bar{S}_{j-1}^n)] - \frac{\lambda_{j-1/2}}{2} (\bar{S}_j^n - \bar{S}_{j-1}^n), \quad (4.28)$$

No método de Rusanov  $\lambda_{j+1/2}$  e  $\lambda_{j-1/2}$  são determinados conforme:

$$\lambda_{j+1/2} = \max \left[ \max(|\lambda_{j+1}^p|), \max(|\lambda_j^p|) \right] \quad (4.29)$$

$$\lambda_{j-1/2} = \max \left[ \max(|\lambda_{j-1}^p|), \max(|\lambda_j^p|) \right]. \quad (4.30)$$

Uma vez que a condição de Courant deve ser atendida em toda a malha, a viscosidade artificial introduzida pelo métodos de Rusanov é sempre menor ou igual à do método de Lax-Friedrichs.

A difusividade numérica do método de Rusanov é independente de  $\Delta t$ , porém ainda é alta, sendo proporcional a  $O(\Delta x_j)$  (TEIXEIRA, 2011).

#### 4.1.5 Método de Kurganov-Tadmor unidimensional

O método proposto por Kurganov e Tadmor (2000) (KT) é uma extensão do método de Rusanov, na qual o esquema MUSCL (*Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws*), proposto por Van Leer (1979), é aplicado para interpolação das variáveis obtendo-se precisão espacial de segunda ordem.

No esquema MUSCL as variáveis são interpoladas através de uma função polinomial linear por partes ( $\tilde{s}(x, t) \approx s(x, t)$ ). Para o caso unidimensional esta função é definida como:

$$\tilde{s}(x, t) \equiv \sum_j \left[ \bar{S}_j(t) + (s_x(t))_j (x - x_j) \right] \cdot \chi_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]}. \quad (4.31)$$

Na Equação (4.31)  $s_x(t)$  é a aproximação da derivada na direção  $x$  da variável  $s(x, t)$ , sendo determinada na posição  $x_j$ , e  $\chi_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]}$  é uma função que tem valor unitário no intervalo entre  $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  e é nula nas outras regiões.

Na Figura 4.2 é exemplificada uma reconstrução polinomial linear por partes da grandeza  $s(x, t)$ .

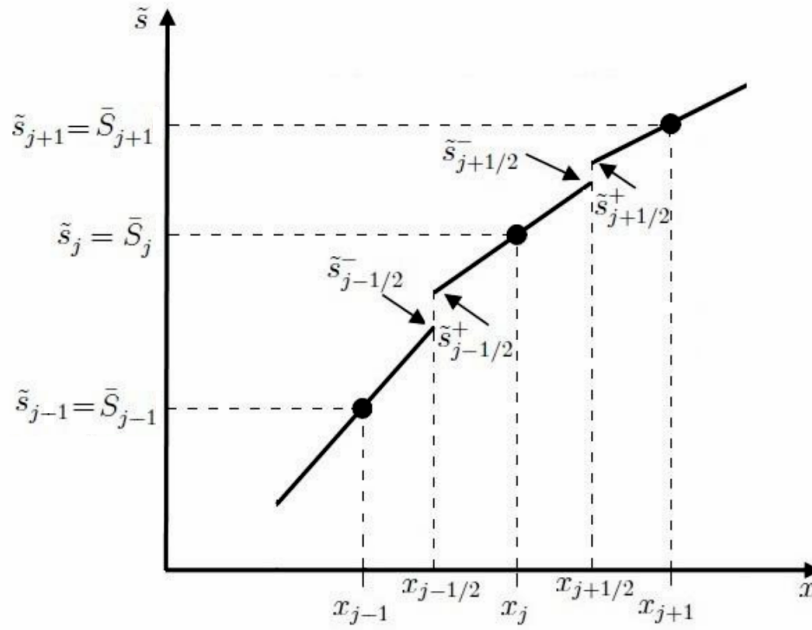


Figura 4.2 – Função polinomial linear por partes.

Na Figura 4.2 observam-se que a reconstrução polinomial linear por partes da variável  $s(x, t)$  é igual ao seu valor médio ( $\tilde{s}(x_j, t) = \bar{S}(x_j, t)$ ) nos centroides dos volumes de controle, e que a reconstrução é descontínua nas faces da célula  $V_j$ . Assim,  $\tilde{s}$  pode tender a valores diferentes dependendo do sentido que se percorre na coordenada  $x$ , e considera-se que estes valores estão posicionados em faces auxiliares, que são indicadas pelos sinais de + e -.

Em cada face do volume de controle os fluxos numéricos são para as suas duas faces auxiliares e o fluxo efetivo será o valor médio. Assim, para o caso unidimensional os fluxos numéricos nas faces  $x_{j+1/2}$  e  $x_{j-1/2}$  são calculados conforme as Eqs. (4.32) e (4.33).

$$F_{j+1/2}(t) = \frac{f(\tilde{s}_{j+1/2}^+(t)) + f(\tilde{s}_{j+1/2}^-(t))}{2} - \frac{\lambda_{j+1/2}}{2} (\tilde{s}_{j+1/2}^+(t) - \tilde{s}_{j+1/2}^-(t)) \quad (4.32)$$

$$F_{j-1/2}(t) = \frac{f(\tilde{s}_{j-1/2}^+(t)) + f(\tilde{s}_{j-1/2}^-(t))}{2} - \frac{\lambda_{j-1/2}}{2} (\tilde{s}_{j-1/2}^+(t) - \tilde{s}_{j-1/2}^-(t)). \quad (4.33)$$

Fazendo-se a reconstrução linear por partes, as variáveis nas faces auxiliares são calculadas conforme equações a seguir:

$$\tilde{s}_{j+1/2}^+ = \bar{S}_{j+1}(t) - (s_x(t))_{j+1} \frac{\Delta x_{j+1}}{2} \quad (4.34)$$

$$\tilde{s}_{j+1/2}^- = \bar{S}_j(t) + (s_x(t))_j \frac{\Delta x_j}{2} \quad (4.35)$$

$$\tilde{s}_{j-1/2}^+ = \bar{S}_j(t) - (s_x(t))_j \frac{\Delta x_j}{2} \quad (4.36)$$

$$\tilde{s}_{j-1/2}^- = \bar{S}_{j-1}(t) + (s_x(t))_{j-1} \frac{\Delta x_{j-1}}{2} \quad (4.37)$$

O comportamento não oscilatório do método depende de uma escolha adequada das derivadas numéricas,  $s_x(t)$  (RIBEIRO, 2007). Ademais, estas devem garantir que o método seja de segunda ordem incluindo informações de células não adjacentes, ou seja, pelo menos dados das células  $V_{j+2}$  e  $V_{j-2}$  devem ser utilizados para integração da célula  $V_j$ .

As derivadas numéricas são calculadas com o uso de funções limitadoras de fluxo. Neste trabalho é aplicada a função *minmod*, que foi proposta por Van Leer (1979), e que também é utilizada em Kurganov e Tadmor (2000). A função limitadora de fluxo *minmod* tem a vantagem de ser de fácil implementação, além de também estar disponível no programa OpenFOAM. Para o caso unidimensional a função *minmod* na célula  $V_j$  é calculada como:

$$(s_x(t))_j = \minmod \left( \theta \frac{\bar{S}_j(t) - \bar{S}_{j-1}(t)}{x_j - x_{j-1}}, \frac{\bar{S}_{j+1}(t) - \bar{S}_{j-1}(t)}{x_{j+1} - x_{j-1}}, \theta \frac{\bar{S}_{j+1}(t) - \bar{S}_j(t)}{x_{j+1} - x_j} \right). \quad (4.38)$$

O operador multivariável *minmod* é definido como:

$$\minmod(q_1, q_2, \dots) = \begin{cases} \min_w \{q_w\}, & \text{se } q_w > 0 \quad \forall w, \\ \max_w \{q_w\}, & \text{se } q_w < 0 \quad \forall w, \\ 0, & \text{para outros casos.} \end{cases} \quad (4.39)$$

O parâmetro  $\theta$  pode estar entre  $[1, 2]$ , sendo que para maiores valores as soluções são menos difusivas. Em modelagens matemáticas realizadas por Kurganov e Tadmor (2002), os valores ótimos de  $\theta$  obtidos para solução das ENS estão na faixa entre 1 a 1,5.

A velocidade local de propagação em cada face será igual à máxima em módulo entre suas faces auxiliares, logo:

$$\lambda_{j+1/2} = \max \left( \left| \lambda_{j+1/2}^+ \right|, \left| \lambda_{j+1/2}^- \right| \right) \quad (4.40)$$

$$\lambda_{j-1/2} = \max \left( \left| \lambda_{j-1/2}^+ \right|, \left| \lambda_{j-1/2}^- \right| \right) \quad (4.41)$$

A viscosidade artificial introduzida na solução pelo método KT é independente de  $\Delta t$ , e é proporcional  $O(\Delta x_j^3)$ .

### 4.1.6 Extensão bidimensional do método KT

Uma lei de conservação hiperbólica bidimensional pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{S})}{\partial x} + \frac{\partial g(\mathbf{S})}{\partial y} = 0, \quad (4.42)$$

sujeita à condição inicial:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{S}_0(\mathbf{x}), (\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.43)$$

$\mathbf{S}$  é uma grandeza conservativa vetorial, e  $f(\mathbf{S})$  e  $g(\mathbf{S})$  são funções relacionadas ao transporte advectivo de  $\mathbf{S}$ .

Conforme mostrado na Fig. 4.3, para o caso bidimensional cada volume finito será representado por dois índices,  $j$  e  $i$ , e assim,  $x_j$  e  $y_i$  são as coordenadas do seu centroide.

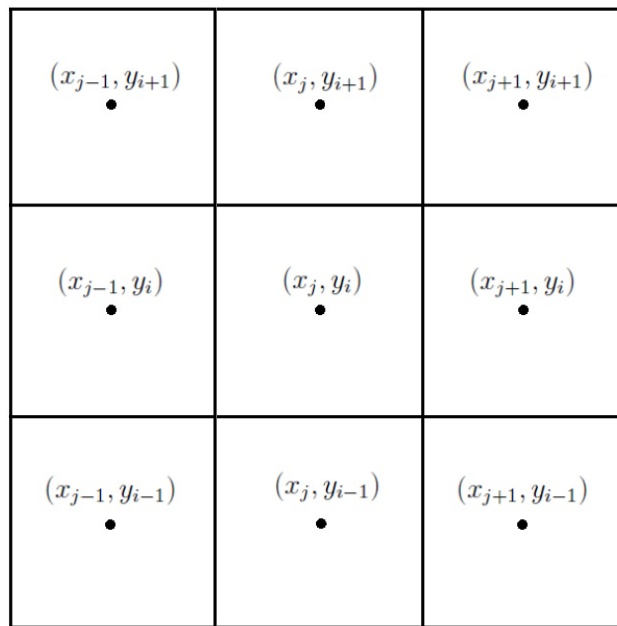


Figura 4.3 – Representação da malha cartesiana bidimensional.

O valor médio da grandeza  $\mathbf{S}$  no volume finito  $V_{j,i}$  no tempo  $t$  é calculado como:

$$\bar{\mathbf{S}}_{j,i}(t) \equiv \frac{1}{\Delta x_j \Delta y_i} \int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) dx dy. \quad (4.44)$$

Conforme Van Leer (1979), a reconstrução polinomial bilinear por partes da

grandeza  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$  é feita usando a seguinte equação :

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{j,i} \left[ \bar{\mathbf{S}}_{j,i}(t) + (\mathbf{S}_x(t))_{j,i}(x - x_j) + (\mathbf{S}_y(t))_{j,i}(y - y_i) \right] \cdot \chi_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [y_{i-1/2}, y_{i+1/2}]} \quad (4.45)$$

Na Equação (4.45),  $(\mathbf{S}_x(t))_{j,i}$  e  $(\mathbf{S}_y(t))_{j,i}$  são as derivadas numéricas da grandeza  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$  nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente, e são determinadas na posição  $(x_j, y_i)$ .  $\chi_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [y_{i-1/2}, y_{i+1/2}]}$  é uma função que tem valor unitário na região delimitada por  $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [y_{i-1/2}, y_{i+1/2}]$  e é nula em outros pontos.

A lei de conservação integral semidiscreta unidimensional, Eq. (4.12), é estendida para o espaço bidimensional conforme equação a seguir (KURGANOV; TADMOR, 2000):

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_{j,i}}{\partial t} = - \frac{\mathbf{F}_{j+1/2,i}(t) - \mathbf{F}_{j-1/2,i}(t)}{\Delta x_j} - \frac{\mathbf{G}_{j,i+1/2}(t) - \mathbf{G}_{j,i-1/2}(t)}{\Delta y_i}, \quad (4.46)$$

sendo  $\mathbf{G}_{j,i+1/2}(t)$  e  $\mathbf{G}_{j,i-1/2}(t)$  o fluxos numéricos médios na direção  $y$ , e  $\mathbf{F}_{j+1/2,i}(t)$  e  $\mathbf{F}_{j-1/2,i}(t)$ , na direção  $x$ . Estes fluxos são calculados como:

$$\mathbf{F}_{j\pm 1/2,i}(t) = \frac{f(\tilde{\mathbf{S}}_{j\pm 1/2,i}^+(t)) + f(\tilde{\mathbf{S}}_{j\pm 1/2,i}^-(t))}{2} - \frac{\lambda_{j\pm 1/2,i}}{2} (\tilde{\mathbf{S}}_{j\pm 1/2,i}^+(t) - \tilde{\mathbf{S}}_{j\pm 1/2,i}^-(t)) \quad (4.47)$$

$$\mathbf{G}_{j,i\pm 1/2}(t) = \frac{g(\tilde{\mathbf{S}}_{j,i\pm 1/2}^+(t)) + g(\tilde{\mathbf{S}}_{j,i\pm 1/2}^-(t))}{2} - \frac{\lambda_{j,i\pm 1/2}}{2} (\tilde{\mathbf{S}}_{j,i\pm 1/2}^+(t) - \tilde{\mathbf{S}}_{j,i\pm 1/2}^-(t)). \quad (4.48)$$

As velocidades de propagação nas faces,  $\lambda_{j\pm 1/2,i}$  e  $\lambda_{j,i\pm 1/2}$ , são determinadas usando as Eqs. (4.49) e (4.50).

$$\lambda_{j\pm 1/2,i} = \max(|\lambda_{j\pm 1/2,i}^+|, |\lambda_{j\pm 1/2,i}^-|) \quad (4.49)$$

$$\lambda_{j,i\pm 1/2} = \max(|\lambda_{j,i\pm 1/2}^+|, |\lambda_{j,i\pm 1/2}^-|) \quad (4.50)$$

A interpolação da variável  $\mathbf{S}$  nas faces auxiliares é feita utilizando as Eqs. (4.51) a (4.58).

$$\tilde{\mathbf{S}}_{j+1/2,i}^+ = \bar{\mathbf{S}}_{j+1,i}(t) - (\mathbf{S}_x(t))_{j+1,i} \frac{\Delta x_{j+1}}{2} \quad (4.51)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{j+1/2,i}^- = \bar{\mathbf{S}}_{j,i}(t) + (\mathbf{S}_x(t))_{j,i} \frac{\Delta x_j}{2} \quad (4.52)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{j-1/2,i}^+ = \bar{\mathbf{S}}_{j,i}(t) - (\mathbf{S}_x(t))_{j,i} \frac{\Delta x_j}{2} \quad (4.53)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{j-1/2,i}^- = \bar{\mathbf{S}}_{j-1,i}(t) + (\mathbf{S}_x(t))_{j-1,i} \frac{\Delta x_{j-1}}{2} \quad (4.54)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{j,i+1/2}^+ = \bar{\mathbf{S}}_{j,i+1}(t) - (\mathbf{S}_y(t))_{j,i+1} \frac{\Delta y_{i+1}}{2} \quad (4.55)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{j,i+1/2}^- = \bar{\mathbf{S}}_{j,i}(t) + (\mathbf{S}_y(t))_{j,i} \frac{\Delta y_i}{2} \quad (4.56)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{j,i-1/2}^+ = \bar{\mathbf{S}}_{j,i}(t) - (\mathbf{S}_y(t))_{j,i} \frac{\Delta y_i}{2} \quad (4.57)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{j,i-1/2}^- = \bar{\mathbf{S}}_{j,i-1}(t) + (\mathbf{S}_y(t))_{j,i-1} \frac{\Delta y_{i-1}}{2} \quad (4.58)$$

As derivadas numéricas  $(\mathbf{S}_x(t))_{j,i}$  e  $(\mathbf{S}_y(t))_{j,i}$  são calculadas usando a função limitadora *minmod*, conforme:

$$(\mathbf{S}_x(t))_{j,i} = \minmod \left( \theta \frac{\bar{\mathbf{S}}_{j,i}(t) - \bar{\mathbf{S}}_{j-1,i}(t)}{x_j - x_{j-1}}, \frac{\bar{\mathbf{S}}_{j+1,i}(t) - \bar{\mathbf{S}}_{j-1,i}(t)}{x_{j+1} - x_{j-1}}, \theta \frac{\bar{\mathbf{S}}_{j+1,i}(t) - \bar{\mathbf{S}}_{j,i}(t)}{x_{j+1} - x_j} \right) \quad (4.59)$$

$$(\mathbf{S}_y(t))_{j,i} = \minmod \left( \theta \frac{\bar{\mathbf{S}}_{j,i}(t) - \bar{\mathbf{S}}_{j,i-1}(t)}{y_i - y_{i-1}}, \frac{\bar{\mathbf{S}}_{j,i+1}(t) - \bar{\mathbf{S}}_{j,i-1}(t)}{y_{i+1} - y_{i-1}}, \theta \frac{\bar{\mathbf{S}}_{j,i+1}(t) - \bar{\mathbf{S}}_{j,i}(t)}{y_{i+1} - y_i} \right). \quad (4.60)$$

Na próxima seção, a aplicação do método KT para discretização espacial dos termos advectivos das ENS é detalhada, e em seguida como foi feita a discretização espacial dos termos difusivos das ENS.

## 4.2 Discretização espacial das equações de Navier-Stokes

Neste trabalho, soluções aproximadas das ENS são obtidas numericamente utilizando o MVF e o método KT é aplicado apenas na discretização espacial dos termos de transporte advectivo destas equações. A seguir é feita uma discussão sobre as técnicas de discretização espacial dos termos advectivos e difusivos.

### 4.2.1 Discretização espacial dos termos advectivos utilizando o método KT

No método KT o primeiro passo é interpolar as variáveis do problema nas faces usando uma função polinomial bilinear por partes. Esta fase é denominada reconstrução. As equações (4.51) a (4.58) e as derivadas numéricas  $\mathbf{S}_x(t)$  e  $\mathbf{S}_y(t)$  são utilizadas para estas interpolações.

As variáveis interpoladas são: a massa específica ( $\rho$ ), o momento linear nas direções  $x$  e  $y$  ( $\rho u$  e  $\rho v$ ) e a energia total por unidade de volume ( $\rho e$ ). Assim:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Após interpolação das variáveis  $\rho$ ,  $\rho u$ ,  $\rho v$  e  $\rho e$  nas faces dos volumes finitos, a pressão ( $p$ ) nestes locais pode ser determinada através da lei dos gases ideais.

Determinadas as variáveis nas faces dos volumes de controle, os fluxos numéricos dos termos de transporte advectivo das ENS podem ser calculados utilizando as Eqs. (4.47) e (4.48). Para isto é necessário determinar as velocidades de propagação nas direções  $x$  e  $y$ . Conforme observado na subseção 4.1.3, estas velocidades de propagação são iguais aos autovalores do sistema de equações diferenciais. No presente trabalho, são determinados os autovalores das equações de Euler, pois somente os termos advectivos das ENS são discretizados espacialmente utilizando o método KT. Conforme Rohde (2001), os autovalores das equações de Euler são calculados como:

$$\lambda_l^p = (\mathbf{U}_l - c \quad \mathbf{U}_l \quad \mathbf{U}_l \quad \mathbf{U}_l \quad \mathbf{U}_l + c). \quad (4.62)$$

Para cada  $\lambda_l^p$  há um autovetor associado. O subscrito  $l$  indica as direções de propagação, que são  $x$  e  $y$  para uma malha cartesiana bidimensional. Desta forma, têm-se:

$$\lambda_x^p = (u - c \quad u \quad u \quad u \quad u + c), \quad (4.63)$$

$$\lambda_y^p = (v - c \quad v \quad v \quad v \quad v + c). \quad (4.64)$$

Conforme as Eqs. (4.49) e (4.50), as velocidades de propagação são calculadas nas

faces auxiliares dos volumes finitos, logo:

$$\lambda_{j\pm 1/2,i} = \text{máx} \left( \left| u_{j\pm 1/2,i}^+ + c_{j\pm 1/2,i}^+ \right|, \left| u_{j\pm 1/2,i}^+ - c_{j\pm 1/2,i}^+ \right|, \left| u_{j\pm 1/2,i}^- + c_{j\pm 1/2,i}^- \right|, \left| u_{j\pm 1/2,i}^- - c_{j\pm 1/2,i}^- \right| \right) \quad (4.65)$$

$$\lambda_{j,i\pm 1/2} = \text{máx} \left( \left| v_{j,i\pm 1/2}^+ + c_{j,i\pm 1/2}^+ \right|, \left| v_{j,i\pm 1/2}^+ - c_{j,i\pm 1/2}^+ \right|, \left| v_{j,i\pm 1/2}^- + c_{j,i\pm 1/2}^- \right|, \left| v_{j,i\pm 1/2}^- - c_{j,i\pm 1/2}^- \right| \right) \quad (4.66)$$

.

Pode-se observar nas Eqs. (4.65) e (4.66), que no método KT a velocidade do som deve ser calculada em todas as faces auxiliares dos volumes de controle, o que é feito após as interpolações.

## 4.2.2 Discretização dos termos de transporte difusivo

Os termos difusivos das ENS,  $\mathbf{A}_v$  e  $\mathbf{B}_v$ , são discretizados espacialmente utilizando o MVF, através da Eq. (4.46).

Os fluxos médios  $\mathbf{F}_{j+1/2,i}(t)$  e  $\mathbf{F}_{j-1/2,i}(t)$  são determinados utilizando  $\mathbf{A}_v$ , enquanto  $\mathbf{G}_{j+1/2,i}(t)$  e  $\mathbf{G}_{j-1/2,i}(t)$  com  $\mathbf{B}_v$ . Desta forma, o fluxo médio  $\mathbf{F}_{j+1/2,i}(t)$  será igual a:

$$\mathbf{F}_{j+1/2,i}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ (\tau_{xx})_{j+1/2,i}(t) \\ (\tau_{yx})_{j+1/2,i}(t) \\ (u\tau_{xx} + v\tau_{yx} - q_x)_{j+1/2,i}(t) \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Utilizando a Eq. (3.10), a qual permite determinar os termos do tensor de tensões viscosas para um fluido não newtoniano e não polar,  $\tau_{xx}$  pode ser calculado em função de  $u$ ,  $v$  e  $\mu$ , conforme a equação a seguir:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (4.68)$$

Os termos de  $(\tau_{xx})_{j+1/2,i}(t)$  são aproximados por meio de diferenças finitas centradas. Na Figura 4.4 são mostradas as variáveis utilizadas neste cálculo.

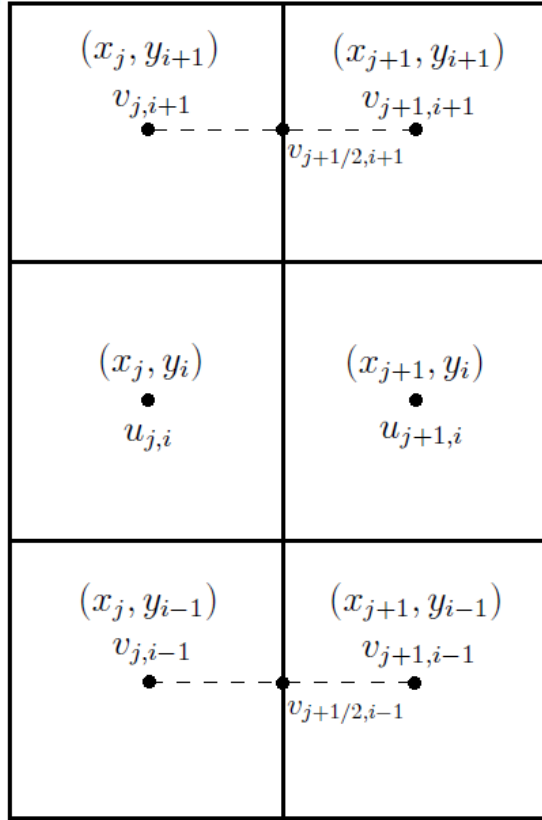


Figura 4.4 – Detalhamento da discretização dos termos viscosos.

Utilizando diferenças finitas a Eq. 4.68 é aproximada na posição  $(x_{j+1/2}, y_i)$  por:

$$(\tau_{xx})_{j+1/2,i}(t) = 2\mu \left( \frac{u_{j+1,i} - u_{j,i}}{x_{j+1} - x_j} \right) - \frac{2}{3}\mu \left[ \left( \frac{u_{j+1,i} - u_{j,i}}{x_{j+1} - x_j} \right) + \left( \frac{v_{j+1/2,i+1} - v_{j+1/2,i-1}}{y_{i+1} - y_{i-1}} \right) \right]. \quad (4.69)$$

Na Equação (4.69),  $v_{j+1/2,i+1}$  e  $v_{j+1/2,i-1}$  são calculados por interpolação linear.

De forma análoga ao que foi feito para  $(\tau_{xx})_{j+1/2,i}(t)$ , o  $(\tau_{yx})_{j+1/2,i}(t)$  é aproximado por Diferenças Finitas através da Eq. (4.70).

$$(\tau_{yx})_{j+1/2,i}(t) = \mu \left[ \left( \frac{v_{j+1,i} - v_{j,i}}{x_{j+1} - x_j} \right) + \left( \frac{u_{j+1/2,i+1} - u_{j+1/2,i-1}}{y_{i+1} - y_{i-1}} \right) \right] \quad (4.70)$$

Para discretizar a equação de conservação da energia,  $u_{j+1/2,i}$  e  $v_{j+1/2,i}$  também devem ser calculados, o que é feito por interpolação linear. Além disso, a aproximação do valor de  $(q_x)_{j+1/2,i}(t)$  foi feita por Diferenças Finitas através da lei de Fourier, Eq. (3.11), por:

$$(q_x)_{j+1/2,i}(t) = -k \left( \frac{T_{j+1,i} - T_{j,i}}{x_{j+1} - x_j} \right). \quad (4.71)$$

Utilizando a lei dos gases ideais, Eq. (3.13),  $(q_x)_{j+1/2,i}(t)$  pode ser calculado como:

$$(q_x)_{j+1/2,i}(t) = -k \frac{M}{R} \left[ \frac{\left( \frac{p_{j+1,i}}{\rho_{j+1,i}} \right) - \left( \frac{p_{j,i}}{\rho_{j,i}} \right)}{x_{j+1} - x_j} \right]. \quad (4.72)$$

A discretização espacial dos termos viscosos das ENS nas demais faces dos volumes finitos foi feita utilizando a mesma técnica apresentada.

## 4.3 Método de Fronteira Imersa

### 4.3.1 Interpolação e distribuição de variáveis na malha euleriana

As interpolações e distribuições de variáveis na malha euleriana são feitas usando uma função de distribuição ( $\mathbf{D}$ ) proposta por Peskin (1977) e modificada por Unverdi e Tryggvason (1992). Esta função distribuição se baseia na seguinte equação:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = \frac{g(r_x)g(r_y)}{h^2}, \quad (4.73)$$

onde:

$$g(r) = \begin{cases} g_1(r) & \text{se } \|r\| < 1 \\ \frac{1}{2} - g_1(2 - \|r\|) & \text{se } 1 < \|r\| < 2 \\ 0 & \text{se } \|r\| > 2 \end{cases} \quad (4.74)$$

A função  $g_1(r)$ ,  $r_x$  e  $r_t$  são calculadas por:

$$g_1(r) = \frac{\left( 3 - 2\|r\| + \sqrt{1 + 4\|r\| - 4\|r\|^2} \right)}{8}, \quad (4.75)$$

$$r_x = \frac{(x - x_k)}{h}, \quad (4.76)$$

$$r_y = \frac{(y - y_k)}{h}, \quad (4.77)$$

sendo  $h$  o comprimento das arestas das células próximas na região da fronteira imersa. Na região da malha euleriana próxima à fronteira imersa a malha é uniforme, assim:  $h = \Delta x = \Delta y$ . Pode-se observar que para distâncias maiores que  $2h$  do ponto de interpolação, a função distribuição é nula.

A função distribuição é utilizada para a interpolação de variáveis da malha euleriana, a Eq. 4.78 exemplifica este cálculo para a determinação da massa específica na posição  $\mathbf{x}_k$ .

$$\rho(\mathbf{x}_k, t) = \sum_{j=1, i=1}^{n_x, n_y} \mathbf{D}(\mathbf{x}_{j,i} - \mathbf{x}_k) \rho(\mathbf{x}_{j,i}, t) \Delta x \Delta y. \quad (4.78)$$

Na Equação 4.78  $n_x$  e  $n_y$  são os números totais de células nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. O custo computacional destas contas pode ser reduzido ao se considerar que  $\mathbf{D}$  só é não nula para distância menores que  $2h$  do ponto de interpolação, o que também é válido para distribuição de  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k, t)$ .

### 4.3.2 Cálculo do campo de força lagrangiano

Conforme apresentado na seção 3.3, o campo de força lagrangiano é calculado explicitamente utilizando dados da malha euleriana. As componentes nas direções  $x$  e  $y$  deste campo são determinadas em cada ponto lagrangiano através das Eqs. (4.79) e (4.80), respectivamente.

$$F_x(\mathbf{x}_k, t) = \frac{\partial \rho u}{\partial t}(\mathbf{x}_k, t) - RHS_x(\mathbf{x}_k, t), \quad (4.79)$$

$$F_y(\mathbf{x}_k, t) = \frac{\partial \rho v}{\partial t}(\mathbf{x}_k, t) - RHS_y(\mathbf{x}_k, t). \quad (4.80)$$

As variáveis necessárias para a solução das Eqs. (4.79) e (4.80) são calculadas por interpolação de dados da malha euleriana nos pontos lagrangianos,  $\mathbf{x}_k$ .

Em todos os pontos  $\mathbf{x}_k$ , as forças lagrangianas de aceleração nas direções  $x$  e  $y$ ,  $F_{a,x}$  e  $F_{a,y}$ , são calculadas utilizando as Eqs. (4.81) e (4.82).

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}(\mathbf{x}_k, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}_k, t) u_{IB}(\mathbf{x}_k, t) - \rho(\mathbf{x}_k, t) u(\mathbf{x}_k, t)}{\Delta t} \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t}(\mathbf{x}_k, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}_k, t) v_{IB}(\mathbf{x}_k, t) - \rho(\mathbf{x}_k, t) v(\mathbf{x}_k, t)}{\Delta t}. \quad (4.82)$$

Nas equações (4.81) e (4.82),  $u_{IB}(\mathbf{x}_k, t)$  e  $v_{IB}(\mathbf{x}_k, t)$  são as componentes do vetor velocidade da malha lagrangiana em  $\mathbf{x}_k$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.  $\rho(\mathbf{x}_k, t)$ ,  $u(\mathbf{x}_k, t)$  e  $v(\mathbf{x}_k, t)$  são determinados através de interpolação da malha euleriana.  $\Delta t$  é o passo de integração temporal.

Nos pontos  $\mathbf{x}_k$ , a força de aceleração impulsiona o fluido fazendo sua velocidade se aproximar da velocidade da fronteira imersa. Para fronteiras fixas consideram-se  $u_{IB}(\mathbf{x}_k, t) = 0$  m/s e  $v_{IB}(\mathbf{x}_k, t) = 0$  m/s.

Conforme apresentado na seção 3.3,  $RHS_x(\mathbf{x}_k, t)$  e  $RHS_y(\mathbf{x}_k, t)$  são calculados através das seguintes equações:

$$RHS_x(\mathbf{x}_k, t) = -\frac{\partial \rho u^2}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t) - \frac{\partial \rho uv}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t) - \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t), \quad (4.83)$$

$$RHS_y(\mathbf{x}_k, t) = -\frac{\partial \rho v}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t) - \frac{\partial \rho v^2}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t) - \frac{\partial p}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}(\mathbf{x}_k, t) + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}(\mathbf{x}_k, t). \quad (4.84)$$

Pode-se observar que os termos à direita das Eqs. 4.83 e 4.84 são iguais aos termos de transporte advectivo e viscoso das equações de conservação do momento nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Valendo-se desta característica o cálculo de  $RHS_x(\mathbf{x}_k, t)$  e  $RHS_y(\mathbf{x}_k, t)$  pode ser feito por interpolação, conforme as Eqs. (4.85) e (4.86).

$$RHS_x(\mathbf{x}_k, t) = \sum_{j=1, i=1}^{n_x, n_y} \mathbf{D}(\mathbf{x}_{j,i} - \mathbf{x}_k) \frac{\partial \rho u}{\partial t}(\mathbf{x}_{j,i}, t) \Delta x \Delta y, \quad (4.85)$$

$$RHS_y(\mathbf{x}_k, t) = \sum_{j=1, i=1}^{n_x, n_y} \mathbf{D}(\mathbf{x}_{j,i} - \mathbf{x}_k) \frac{\partial \rho v}{\partial t}(\mathbf{x}_{j,i}, t) \Delta x \Delta y. \quad (4.86)$$

$\frac{\partial \rho u}{\partial t}(\mathbf{x}_{j,i}, t)$  e  $\frac{\partial \rho v}{\partial t}(\mathbf{x}_{j,i}, t)$  são as taxas de variação da quantidade de movimento nas direções  $x$  e  $y$  e são calculadas em cada volume finito utilizando os fluxos numéricos dos termos advectivos e difusivos das ENS, ou seja, a discretização espacial destes termos no tempo  $t$ . Nas Equações 4.85 e 4.86, somente são considerados os termos advectivos e difusivos das ENS, pois o campo de forças lagrangiano não é conhecido até este ponto.

Com todos os termos necessários para o cálculo das Eqs. (4.79) e (4.80), a força lagrangiana em cada ponto lagrangiano,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k, t)$ , pode ser determinada.

Após o cálculo de  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k, t)$  nos pontos lagrangianos, estas forças devem ser distribuídas para a malha euleriana. Para isto a função distribuição é empregada, conforme a Eq. (4.87).

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{j,i}, t) = \sum_{k=1}^{n_p} \mathbf{D}(\mathbf{x}_{j,i} - \mathbf{x}_k) \mathbf{F}(\mathbf{x}_k, t) \Delta s^2, \quad (4.87)$$

sendo  $n_p$  o número de pontos lagrangianos e  $\Delta s$  a distância entre dois pontos consecutivos. Neste trabalho, a única força de campo que atua no escoamento é a produzida pela fronteira imersa, e assim,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{j,i}, t)$  é o termo fonte das ENS.

A metodologia aplicada no presente trabalho para determinação de  $RHS_x(\mathbf{x}_k, t)$  e  $RHS_y(\mathbf{x}_k, t)$ , ou seja, as forças inerciais, de pressão e viscosas do campo de força lagrangiano, é diferente da proposta por Lima e Silva (2002), onde essas forças são calculadas utilizando dados interpolados de pontos sobre a fronteira imersa e de posições definidas em relação aos pontos lagrangianos. Esta modificação é possível de fácil implementação devido à integração explícita das equações das ENS.

As vantagens observadas ao se calcular a força lagrangiana conforme apresentado no presente trabalho são: redução do custo computacional para determinação de  $\mathbf{f}$  para

aproximadamente 1/3 da técnica tradicional, pois o número de pontos interpolados é reduzido, e simplificação da metodologia.

Após o cálculo de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{j,i}, t)$ ,  $\frac{\partial \rho u}{\partial t}(\mathbf{x}_{j,i}, t)$  e  $\frac{\partial \rho v}{\partial t}(\mathbf{x}_{j,i}, t)$ , que foram previamente calculados, são corrigidos com a adição do termo fonte, ou seja,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{j,i}, t)$ .

Após determinação da variação temporal de  $\rho$ ,  $\rho u$ ,  $\rho v$  e  $\rho e$  em todo o domínio, dadas por  $\frac{\partial \mathbf{Q}_{j,i}}{\partial t}(t)$ , a integração temporal é feita conforme descrito na próxima seção.

## 4.4 Integração Temporal

Com as taxas de variação das variáveis do vetor  $\mathbf{Q}$  em todo o domínio, dadas por  $\frac{\partial \mathbf{Q}_{j,i}}{\partial t}(t)$ . A integração temporal é feita explicitamente utilizando o método de Euler conforme a Eq. (4.88).

$$\mathbf{Q}_{j,i}(t + \Delta t) = \mathbf{Q}_{j,i}(t) + \frac{\partial \mathbf{Q}_{j,i}}{\partial t}(t) \Delta t \quad (4.88)$$

Tendo-se  $\mathbf{Q}_{j,i}(t + \Delta t)$ , calculam-se  $u_{j,i}(t + \Delta t)$  e  $v_{j,i}(t + \Delta t)$ , e por fim,  $p_{j,i}(t + \Delta t)$  é determinado através da Eq. (3.14).

O intervalo de tempo de integração é limitado pelo número de Courant máximo ( $CFL_{máx}$ ), assim a seguinte condição deve ser válida para todo o domínio:

$$\left( \frac{|u| + c}{\Delta x} + \frac{|v| + c}{\Delta y} \right) \Delta t \leq CFL_{máx}. \quad (4.89)$$

Neste trabalho a integração temporal é feita com um método de primeira ordem, porém esquemas de ordem superior a 1, como o Runge-Kutta, podem ser aplicados juntamente com o MFVC. Uma integração de segunda ordem, por exemplo, pode ser feita com a Eq. (4.90).

$$\mathbf{Q}_{j,i}(t + \Delta t) = \mathbf{Q}_{j,i}(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{Q}_{j,i}}{\partial t}(t) + \frac{\partial \mathbf{Q}_{j,i}}{\partial t}(t + \Delta t) \right) \Delta t, \quad (4.90)$$

sendo que,  $\frac{\partial \mathbf{Q}_{j,i}}{\partial t}(t + \Delta t)$  é calculado através da discretização espacial de  $\mathbf{Q}_{j,i}(t + \Delta t)$ , que é determinado utilizando a Eq. (4.88).

## 4.5 Cálculo de parâmetros da simulação

### 4.5.1 Cálculo das forças de arrasto e sustentação

Para determinar os coeficientes de arrasto ( $C_d$ ) e de sustentação ( $C_l$ ), as forças de arrasto ( $F_d$ ) e sustentação ( $F_l$ ) devem ser determinadas. No MFV  $F_d$  e  $F_l$  são calculadas

utilizando o campo de forças lagrangiano ( $\mathbf{f}$ ), desta forma têm-se:

$$F_d = \sum_{j=1, i=1}^{n_x, n_y} (f_x)_{j,i} \Delta x_j \Delta y_i \quad (4.91)$$

$$F_l = \sum_{j=1, i=1}^{n_x, n_y} (f_y)_{j,i} \Delta x_j \Delta y_i. \quad (4.92)$$

Entretanto, observou-se que, para os escoamentos compressíveis estudados, ao se calcular  $F_d$  e  $F_l$  através das Eqs. (4.91) e (4.92), ocorrem oscilações na fase transiente inicial. Isto ocorre devido à intensa desaceleração do fluido na região interna à fronteira imersa no início das simulações, comprimindo o fluido, que posteriormente alivia e é acelerado na direção contrária, o que produz um padrão alternado nas propriedades desta região, que é reduzido por efeitos difusivos e à medida que o escoamento interno à fronteira imersa desenvolve um padrão permanente. Vale observar que o campo de força lagrangiano é responsável por controlar o escoamento tanto internamente quanto externamente à fronteira.

Calculando a taxa de variação do momento na região interna à fronteira imersa, a qual é referenciada por  $\left(\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t}\right)_{I_{j,i} > 0,5}$ , é possível aproximar a parcela da força lagrangiana que atua nesta área. Como critério para definição desta região, utiliza-se  $I_{j,i} > 0,5$ , assim:

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}\right)_{I_{j,i} > 0,5} = \sum_{j=1, i=1}^{n_x, n_y} - \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}\right)_{j,i} \Delta x_j \Delta y_i \text{loc}_{j,i} \quad (4.93)$$

$$\left(\frac{\partial \rho v}{\partial t}\right)_{I_{j,i} > 0,5} = \sum_{j=1, i=1}^{n_x, n_y} - \left(\frac{\partial \rho v}{\partial t}\right)_{j,i} \Delta x_j \Delta y_i \text{loc}_{j,i} \quad (4.94)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \text{loc}_{j,i} &= 1 & \text{se } I_{j,i} > 0,5 \\ \text{loc}_{j,i} &= 0 & \text{caso contrário.} \end{aligned} \quad (4.95)$$

Nas Equações (4.93) e (4.94),  $\left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}\right)_{j,i}$  e  $\left(\frac{\partial \rho v}{\partial t}\right)_{j,i}$  podem ser aproximados por:

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}\right)_{j,i} \approx \left(\frac{\rho_{j,i}^{t+\Delta t} u_{j,i}^{t+\Delta t} - \rho_{j,i}^t u_{j,i}^t}{\Delta t}\right)_{j,i} \quad (4.96)$$

$$\left(\frac{\partial \rho v}{\partial t}\right)_{j,i} \approx \left(\frac{\rho_{j,i}^{t+\Delta t} v_{j,i}^{t+\Delta t} - \rho_{j,i}^t v_{j,i}^t}{\Delta t}\right)_{j,i} \quad (4.97)$$

Observou-se melhora e redução de oscilação na fase transiente inicial das curvas de  $F_d$  e  $F_l$  ao subtrair  $\left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}\right)_{I_{j,i}>0,5}$  e  $\left(\frac{\partial \rho v}{\partial t}\right)_{I_{j,i}>0,5}$ , respectivamente. Desta forma,  $F_d$  e  $F_l$  são calculadas conforme as seguintes equações:

$$F_d = \sum_{j=1, i=1}^{n_x, n_y} (f_x)_{j,i} \Delta x_j \Delta y_i - \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}\right)_{I_{j,i}>0,5}, \quad (4.98)$$

$$F_l = \sum_{j=1, i=1}^{n_x, n_y} (f_y)_{j,i} \Delta x_j \Delta y_i - \left(\frac{\partial \rho v}{\partial t}\right)_{I_{j,i}>0,5}. \quad (4.99)$$

Na Figura 4.5, são mostrados resultados obtidos na subseção 5.2.3 para observação dos valores de  $F_d$ ,  $\left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}\right)_{I_{j,i}>0,5}$  e  $\sum_{j=1, i=1}^{n_x, n_y} (f_x)_{j,i} \Delta x_j \Delta y_i$  ao longo do tempo.

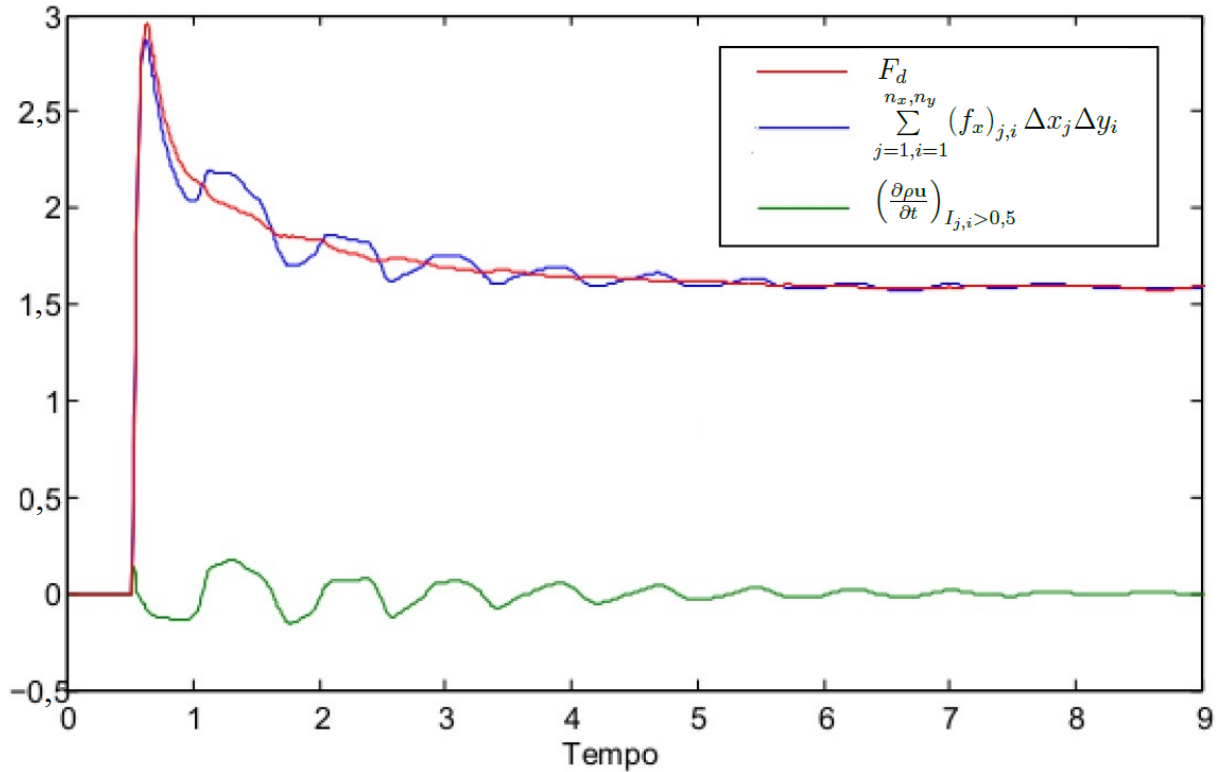


Figura 4.5 – Comparação entre  $F_d$ ,  $\left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}\right)_{I_{j,i}>0,5}$  e  $\sum_{j=1, i=1}^{n_x, n_y} (f_x)_{j,i} \Delta x_j \Delta y_i$  na forma adimensional.

Na Figura 4.5 todas as variáveis mostradas estão adimensionalizadas por  $\frac{1}{2} \rho_\infty |\mathbf{U}_\infty|^2 A$  da mesma forma que na Eq. (3.21). Observa-se que as oscilações em  $\sum_{j=1, i=1}^{n_x, n_y} (f_x)_{j,i} \Delta x_j \Delta y_i$  coincidem com as de  $\left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}\right)_{I_{j,i}>0,5}$ , o que mostra que são influenciadas pelo escoamento interno à fronteira imersa.

Devido aos melhores resultados, as Eqs. (4.98) e (4.99) são utilizadas neste trabalho para o cálculo  $F_d$  e  $F_l$ . Importante observar que  $F_d$  e  $F_l$  também podem ser calculados

com o balanço de quantidade de movimento no escoamento externo a fronteira imersa, entretanto, para isto, também há necessidade de classificar as regiões em internas ou externas através da função indicadora, e os resultados são os mesmos.

#### 4.5.2 Parâmetro $L_2$

O parâmetro  $L_2$  mede a norma do erro da velocidade adimensional do fluido sobre a fronteira imersa, considerando que o valor teórico é igual ao da fronteira imersa.  $L_2$  indica o quanto a metodologia atende à condição de contorno de não escorregamento do fluido em paredes, e é calculado utilizando a Eq. (4.100).

$$L_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n_p} \frac{(u(\mathbf{x}_k) - u_{IB}(\mathbf{x}_k))^2 + (v(\mathbf{x}_k) - v_{IB}(\mathbf{x}_k))^2}{n_p |\mathbf{U}_\infty|^2}}. \quad (4.100)$$

## 5 RESULTADOS OBTIDOS

### 5.1 Validação do código de solução das equações de Navier-Stokes

Nesta seção é feita a validação das soluções obtidas com o código de solução das ENS (CS-ENS) desenvolvido neste trabalho. Para isto foram utilizados os resultados das simulações numéricas com o programa *OpenFOAM*, dados da literatura e soluções exatas. O objetivo desta seção é avaliar a implementação, robustez e parâmetros dos métodos de discretização espacial e integração numérica utilizados. Os resultados das simulações após a implementação do MFVC são mostrados na seção 5.2.

O *solver rhoCentralFoam* do programa *OpenFOAM* é adequado para modelagem de escoamentos compressíveis, e nele também está implementado o método KT. O código desenvolvido neste trabalho e o do *rhoCentralFoam* se diferenciam na aplicação do método de Euler para integração numérica, que é de forma explícita no primeiro e implícita no segundo. Como é mostrado nesta seção, os resultados do CS-ENS e do *OpenFOAM* são muito próximos, e por isso, o programa *OpenFOAM* é uma boa alternativa para validação dos resultados do MFVC.

Em todas as simulações feitas nesta seção o fluido estudado é o ar e é considerado um gás ideal, sendo a razão de calores específicos  $\kappa = 1,4$ . Para os casos viscosos, a viscosidade do ar foi calculada para se obter o número de Reynolds desejado em cada problema. O número de Courant usado em todas as validações do CS-ENS foi 0,1. Este valor é menor que o suportado pelo método de integração, entretanto maior que o requerido pelo MFVC, e por isso não há necessidade de testar os limites que o método suporta. É importante observar que no programa *OpenFOAM* as equações governantes do problema são integradas de forma implícita, e por esse motivo suporta maiores valores do número de Courant do que o código desenvolvido neste trabalho.

Quatro problemas foram estudados na validação do CS-ENS, sendo os três primeiros invíscidos, objetivando avaliar a implementação da discretização dos termos advectivos, e o último, viscoso, objetivando avaliar a solução numérica das equações ENS. A influência do refinamento local e do parâmetro  $\theta$  da função *minmod* também foi avaliada.

#### 5.1.1 Tubo de choque unidimensional

O primeiro problema estudado é o do tubo de choque unidimensional, também conhecido como problema de Riemann, que é um caso invíscido e transiente, visando validar a implementação do método de KT, para solução numérica das equações de Euler. Este problema é muito utilizado na validação de códigos para solução de escoamentos

compressíveis, pois possui solução exata. Além disso, requer resolução de regiões com ondas de choque e rarefações, o que permite avaliar o grau de viscosidade artificial do método e instabilidades na solução numérica.

Na configuração inicial o fluido está em repouso e é separado em duas partes por uma membrana localizada no centro do tubo. A temperatura nas duas regiões do fluido é a mesma, porém o lado esquerdo está a alta pressão, enquanto o lado direito a baixa pressão. No tempo  $t = 0$  s a membrana deixa de existir e as duas porções de fluido entram em contato. A condição de contorno de Neumann é aplicada para todas as variáveis nas duas extremidades do tubo.

Hirsch (1990) apresentou a solução exata deste problema no tempo  $t = 3,9 \times 10^{-3}$  s, considerando um tubo com 10 m de comprimento e aplicando as condições iniciais apresentadas na Tab. (5.1). Na Figura 5.1 o estado inicial de pressão ao longo do tubo de choque é mostrado.

Tabela 5.1 – Condições iniciais do problema do tubo de choque unidimensional.

Propriedade em $t = 0$ s	Lado esquerdo	Lado direito
Pressão (Pa)	100.000	1.000
Massa específica ( $kg/m^3$ )	1,0	0,01
Velocidade (m/s)	0	0

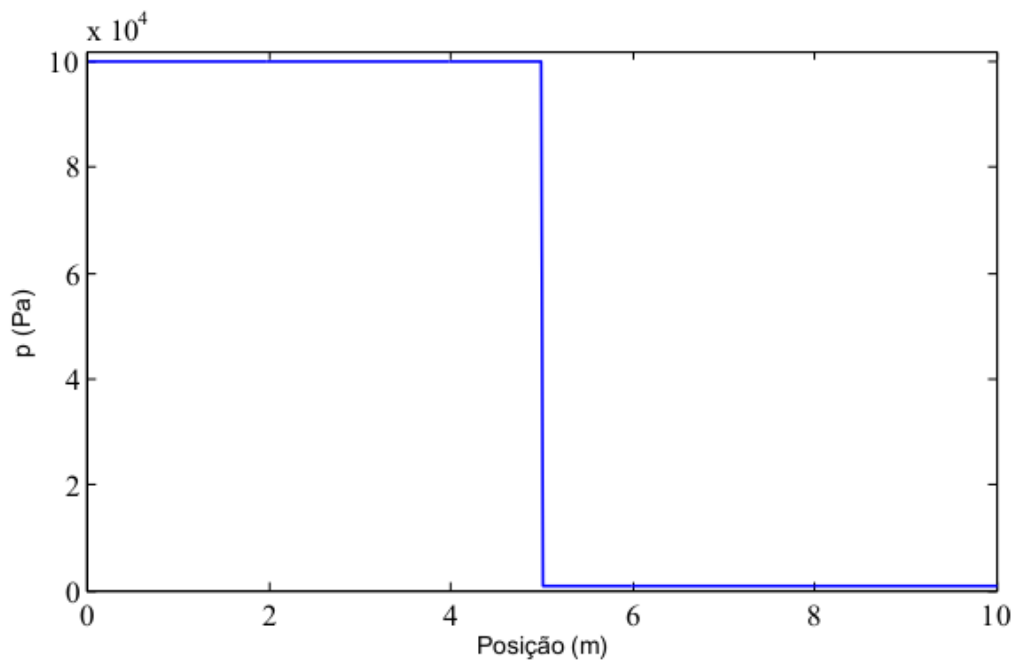


Figura 5.1 – Condição inicial de pressão ao longo do tubo de choque.

As malhas utilizadas são uniformes e  $N$  representa o número de células. Para a

função limitadora *minmod* foi utilizado o valor  $\theta = 1,0$ . As simulações foram feitas até o tempo  $t = 3,9 \times 10^{-3}$  s.

Nas Figuras 5.2, 5.3 e 5.4 são mostradas as curvas de pressão, massa específica e velocidade obtidas com o CS-ENS, utilizando malhas com 200, 400 e 800 células, e também a solução exata.

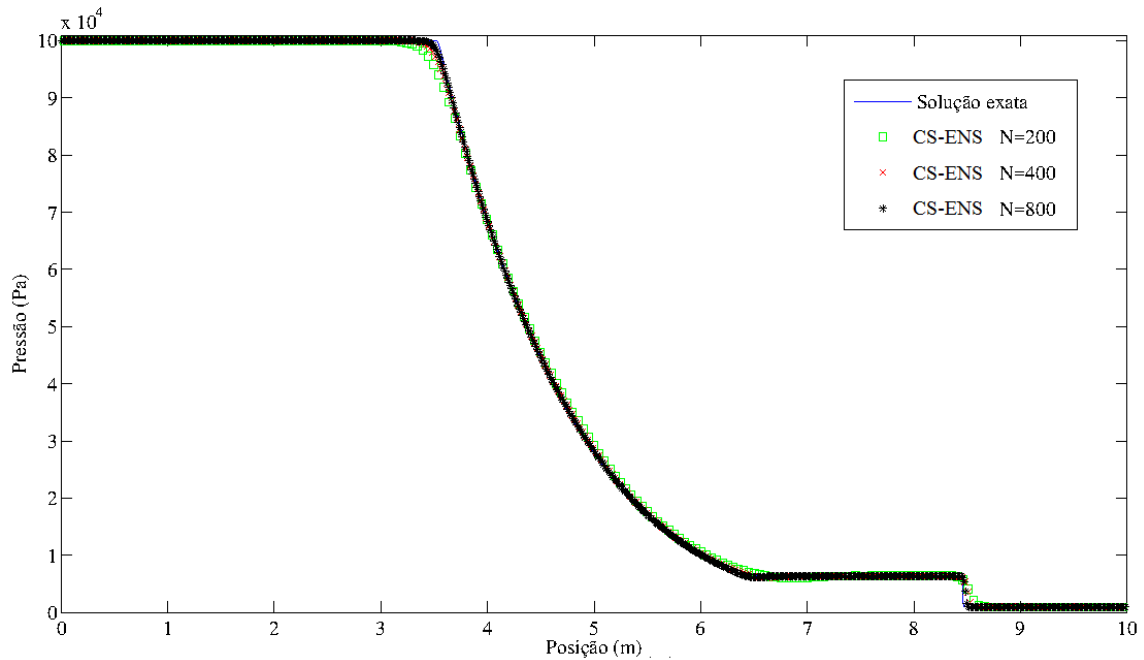


Figura 5.2 – Curvas de pressão exata e obtidas com o CS-ENS para o problema do tubo de choque unidimensional no tempo  $3,9 \times 10^{-3}$  s.

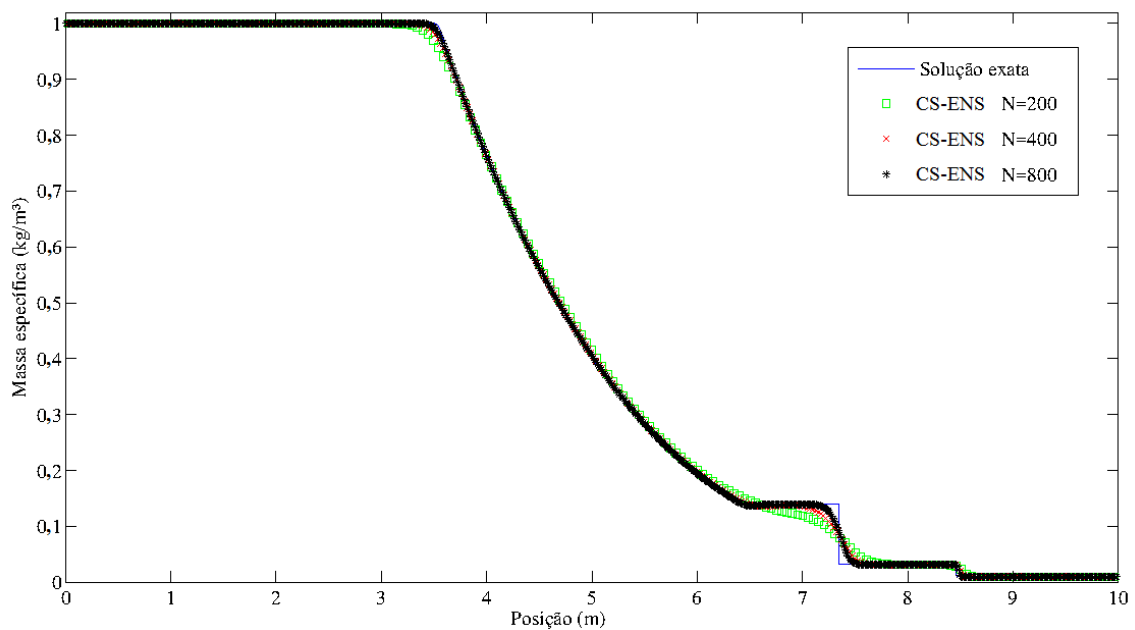


Figura 5.3 – Curvas de massa específica exata e obtidas com o CS-ENS para o problema do tubo de choque unidimensional no tempo  $3,9 \times 10^{-3}$  s.

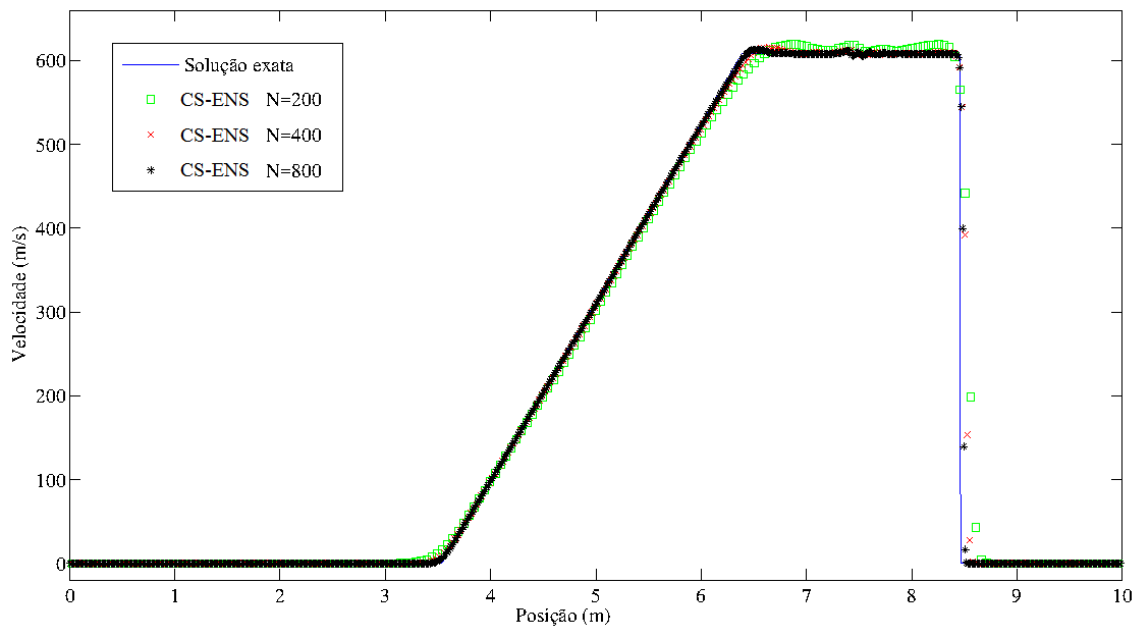


Figura 5.4 – Curvas de velocidade exata e obtidas com o CS-ENS para o problema do tubo de choque unidimensional no tempo  $3,9 \times 10^{-3}$  s.

Observa-se boa concordância entre as curvas de  $p$ ,  $\rho$  e  $u$  obtidas com o CS-ENS e a solução exata, além de convergência e redução de oscilações com o aumento do número de células. Nas Figuras 5.2, 5.3 e 5.4 também pode ser observada a redução da difusividade na região de choque ( $x \approx 8,5$  m) com o aumento do refinamento, e boa captura da região de expansão do gás, a qual ocorre aproximadamente entre as posições  $x = 3,5$  m e  $x = 6,35$  m.

O problema do tubo de choque também foi modelado com o *OpenFOAM*. Na Figura 5.5 comparam-se os perfis de temperatura calculados pelo *OpenFOAM* e pelo CS-ENS. Em ambas as simulações utilizou-se  $\theta = 1,0$ , o qual é o valor de  $\theta$  que está implementado no *OpenFOAM*.

Na Figura 5.5 pode-se observar que as curvas de temperatura obtidas pelo CS-ENS e pelo programa *OpenFOAM* são bastante próximas. A mesma inclinação das curvas na região de choque indica o mesmo grau de viscosidade artificial das soluções.

Na Figura 5.6 é estudada a influência do parâmetro  $\theta$ , da função limitadora *minmod*, na curva de velocidade.

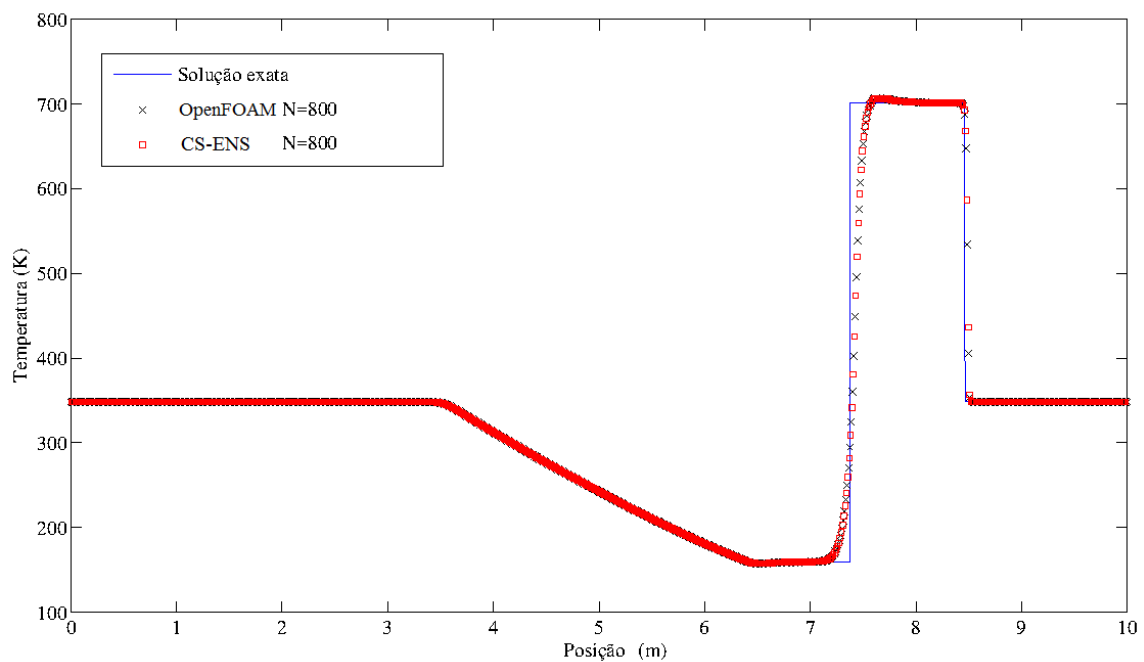


Figura 5.5 – Comparação entre os perfis de temperatura obtidos pelo programa *OpenFOAM* e pelo CS-ENS, ambos no tempo  $3,9 \times 10^{-3}$  s.

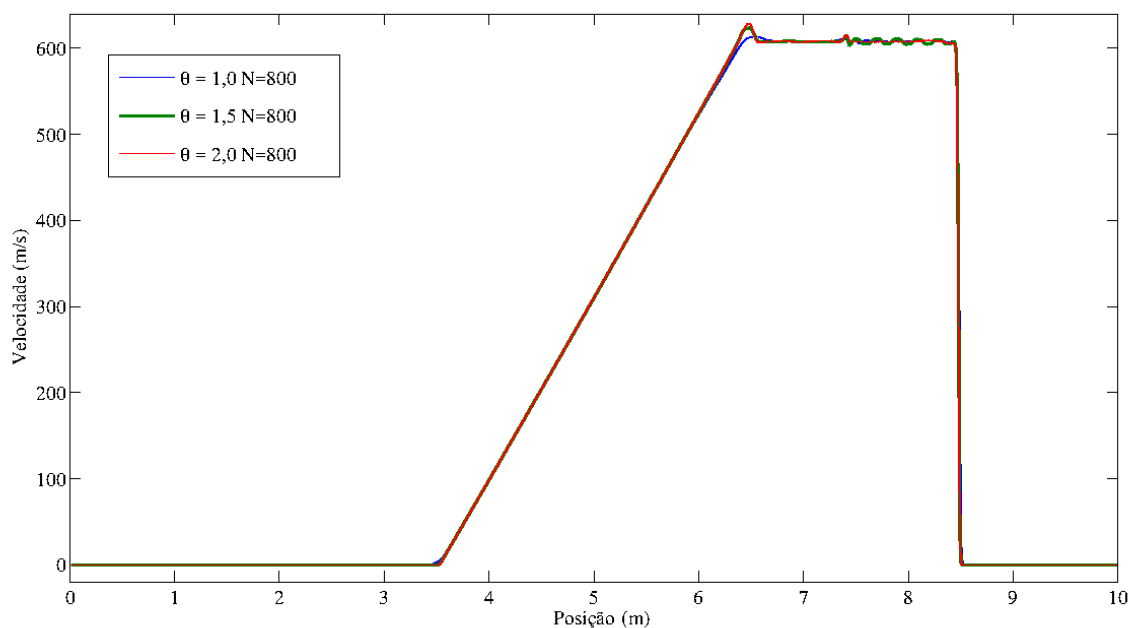


Figura 5.6 – Influência do parâmetro  $\theta$  nas curvas da velocidade obtidas com o CS-ENS para o problema do tubo de choque.

Observa-se a redução da difusividade numérica e melhor resolução na captura de discontinuidades com o crescimento do parâmetro  $\theta$ . Porém, houve um aumento na amplitude das oscilações, o que pode ser visto no final da fase de expansão do gás, em  $x \approx 6,4$  m. A influência deste parâmetro foi também estudada nas validações bidimensionais.

### 5.1.2 Choque oblíquo em placa plana

O segundo problema estudado é do choque oblíquo em uma placa plana, que é um caso invíscido, bidimensional e transiente. Neste problema um escoamento supersônico e invíscido de um gás ideal choca-se com uma placa plana que está inclinada em relação a direção inicial do escoamento. O problema do choque oblíquo em placa plana é ilustrado na Fig. 5.7, onde pode ser observado que a placa altera a direção do escoamento, o que comprime o fluido e produz uma onda de choque oblíqua.

Conhecendo as propriedades do escoamento a montante do choque oblíquo e considerando as equações do momento linear e das conservações de massa e energia, pode-se determinar as propriedades do escoamento na região após o choque, dessa forma a solução exata em regime permanente é conhecida.

O escoamento estudado possui número de Mach igual a 2, o ângulo entre a direção inicial do escoamento e a inclinação da placa é de  $10^\circ$  e a razão de calores específicos é  $\kappa = 1,4$ . Nestas condições, quando o escoamento entra em regime permanente o ângulo entre o choque oblíquo e a trajetória inicial do escoamento deve ser de  $39,314^\circ$ . As razões entre a pressão, a temperatura e o número de Mach antes e após o choque devem ser 1,70658, 1,17015 e 0,82026, respectivamente.

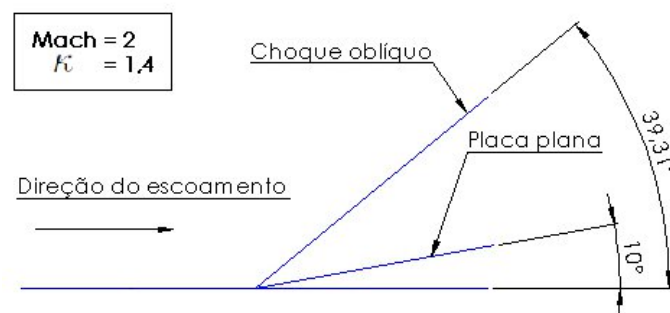


Figura 5.7 – Problema do choque oblíquo em placa plana.

O domínio deste problema é um quadrado com aresta de 1 m. Duas malhas cartesianas uniformes foram utilizadas na discretização do domínio, sendo uma composta por 40.000 células e a outra por 160.000 células. A placa plana é representada pela sua fronteira inferior onde é imposta a condição de contorno de não penetração do fluido, ou seja, a velocidade normal à parede é nula. Para as outras propriedades a condição de contorno de Neumann foi imposta representando o escorregamento do fluido sobre a placa e a ausência de troca de calor. Nas fronteiras esquerda e superior do domínio considera-se a condição de contorno de Dirichlet para todas as variáveis, e na fronteira direita é usada a condição de contorno de Neumann para todas as variáveis. As condições iniciais do escoamento são:  $\rho = 1,4 \text{ kg/m}^3$ ,  $p = 1,0 \text{ Pa}$ ,  $u = 1,96962 \text{ m/s}$  e  $v = -0,347296 \text{ m/s}$ .

O problema do choque oblíquo foi também modelado através do *OpenFOAM*, utilizando as mesmas condições e considerando  $\theta = 1, 0$ .

As simulações foram feitas até  $t = 2, 5$  s, após este instante o escoamento entra em regime permanente. Nas Figuras 5.8a e 5.8b são mostrados os campos de pressão obtidos pelo código CS-ENS e pelo *OpenFOAM* utilizando as malhas com 40.000 células. Qualitativamente os campos de pressão são bastante similares.

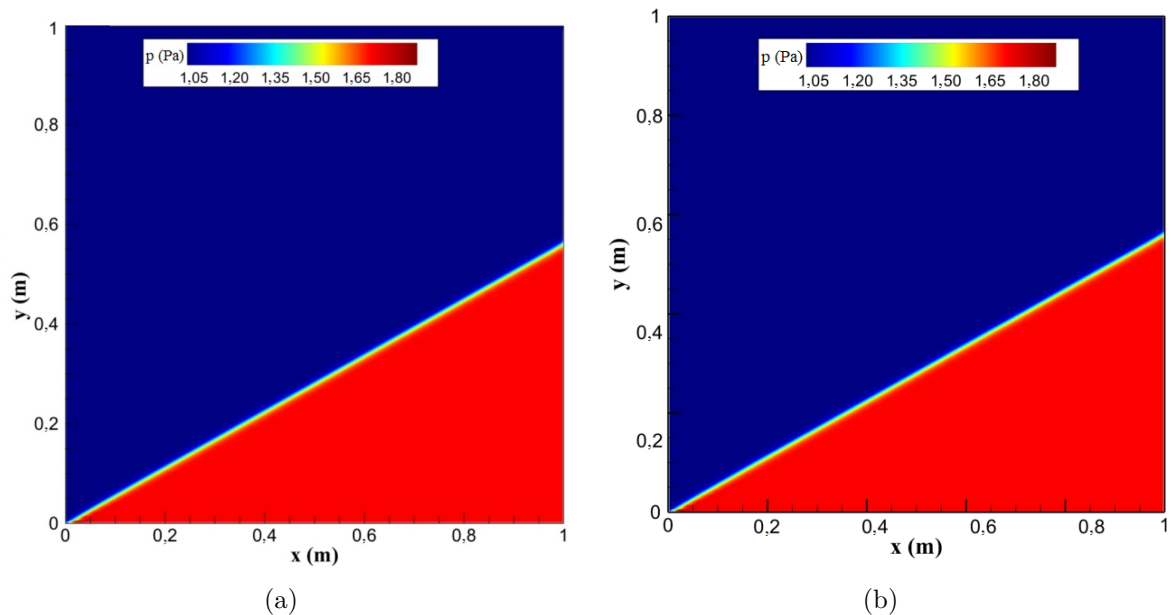


Figura 5.8 – Campos de pressão do problema do choque oblíquo obtidos pelo CS-ENS (a) e pelo *OpenFOAM* (b).

O ângulo entre a placa plana e o choque oblíquo obtido com o CS-ENS e com o *OpenFOAM* é de aproximadamente  $29,3^\circ$  próximo ao exato. Na Figura 5.9 são mostradas as curvas de pressão extraídas paralelamente ao eixo  $x$  na posição  $y = 0, 3$  m.

Conforme mostrado na Fig. 5.9 os resultados obtidos pelo CS-ENS foram muito próximos aos obtidos pelo *OpenFOAM*. Ambas as soluções apresentaram a mesma viscosidade artificial, o que pode ser observada pela inclinação da curva de pressão na região do choque. O aumento do refinamento de malha reduziu a viscosidade artificial da solução através do CS-ENS. As demais variáveis calculadas também apresentaram boa concordância com os valores exatos, e os seus gráficos não são mostrados neste trabalho por serem parecidos com os da pressão.

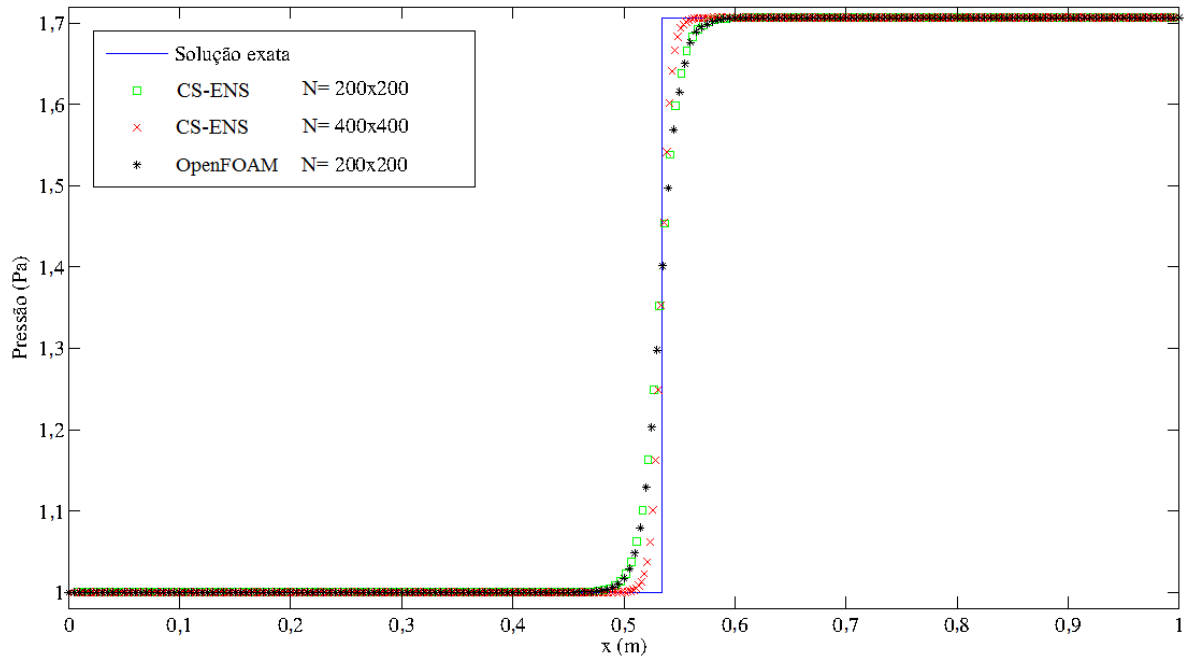


Figura 5.9 – Curvas de pressão obtidas pelo CS-ENS e pelo *OpenFOAM* na posição  $y = 0,3$  m.

### 5.1.3 Tubo de choque bidimensional

O problema do tubo de choque bidimensional também é um caso transiente e invíscido. Este é representado por um quadrado com arestas de um metro, que é dividido por membranas em quadrantes. Em cada um dos quadrantes há o mesmo fluido, porém em condições iniciais diferentes. No instante inicial as membranas são retiradas e há contato entre as quatro regiões. Para todas as variáveis do escoamento utiliza-se a condição de contorno de Neumann. Este problema foi estudado por vários autores, dois deles são Lax e Liu (1995) e por Kurganov e Tadmor (2002).

Na Figura 5.10 o estado inicial do tubo de choque bidimensional é apresentado.

O problema do tubo de choque bidimensional foi simulado usando uma malha uniforme e outra com refinamento local, para avaliar sua influência na solução. A malha com refinamento local é mostrada na Fig. 5.11, esta possui taxa de crescimento de 3 % nas arestas das células partindo do centro do domínio, tanto na direção  $x$  quanto na direção  $y$ . Ambas as malhas são formadas por 160.000 células em todo o domínio.

<p>2º Quadrante</p> <p><math>\rho_2 = 2 \text{ kg/m}^3</math></p> <p><math>P_2 = 1 \text{ Pa}</math></p> <p><math>u_2 = 0 \text{ m/s}</math></p> <p><math>v_2 = 0,3 \text{ m/s}</math></p>	<p>1º Quadrante</p> <p><math>\rho_1 = 1 \text{ kg/m}^3</math></p> <p><math>P_1 = 1 \text{ Pa}</math></p> <p><math>u_1 = 0 \text{ m/s}</math></p> <p><math>v_1 = -0,3 \text{ m/s}</math></p>
<p>3º Quadrante</p> <p><math>\rho_3 = 1,0625 \text{ kg/m}^3</math></p> <p><math>P_3 = 0,4 \text{ Pa}</math></p> <p><math>u_3 = 0 \text{ m/s}</math></p> <p><math>v_3 = 0,8145 \text{ m/s}</math></p>	<p>4º Quadrante</p> <p><math>\rho_4 = 0,5313 \text{ kg/m}^3</math></p> <p><math>P_4 = 0,4 \text{ Pa}</math></p> <p><math>u_4 = 0 \text{ m/s}</math></p> <p><math>v_4 = 0,4276 \text{ m/s}</math></p>

Figura 5.10 – Estado inicial do escoamento para o problema do tubo de choque bidimensional.

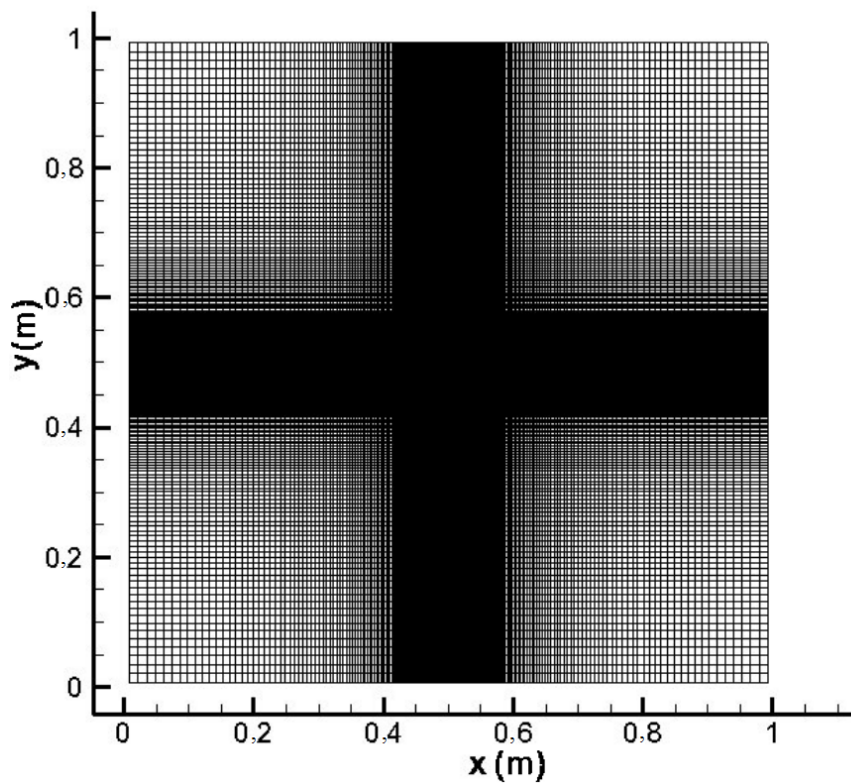


Figura 5.11 – Malha com refinamento local utilizada no problema do tubo de choque bidimensional.

Utilizando também uma malha cartesiana uniforme com 160.000 células, Kurganov e Tadmor (2002) estudaram este problema aplicando o método KT, integração temporal pelo o método de Euler de segunda ordem e parâmetro  $\theta = 1,3$ . Os contornos de massa específica obtidos por estes autores em  $t = 0,3$  s são mostrados na Fig. 5.12b. Os contornos de massa específica obtidos através do CS-ENS usando a malha uniforme são mostrados na Fig. 5.12a.

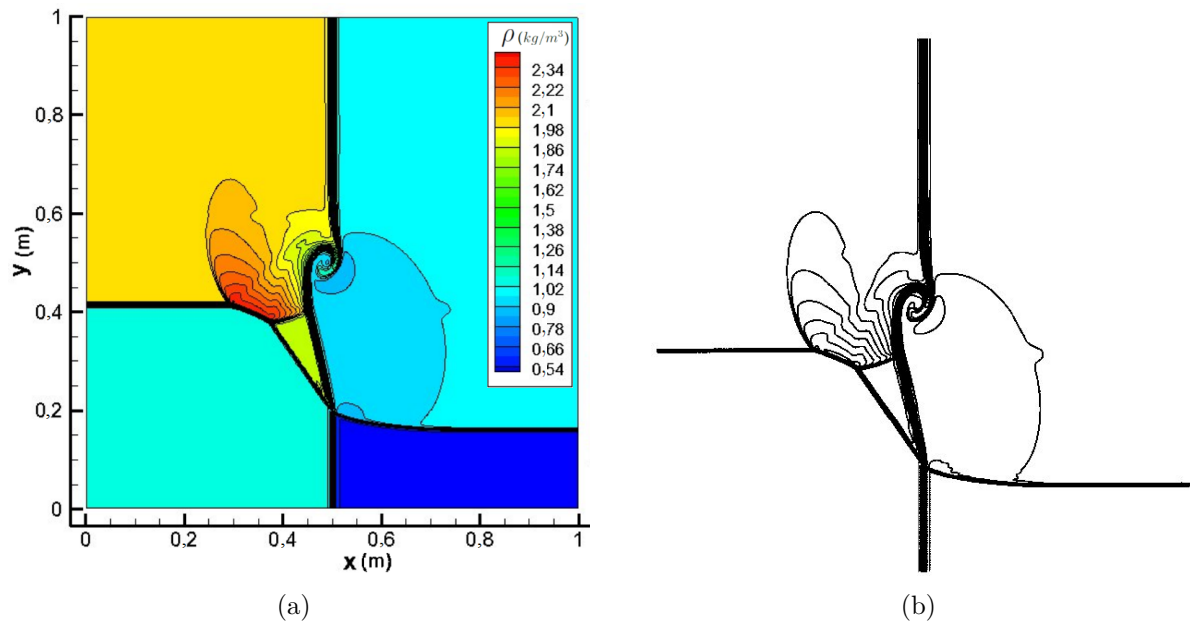


Figura 5.12 – Contornos de massa específica obtidos em  $t = 0,3$  s, com o código CS-ENS (a) e de Kurganov e Tadmor (2002) (b).

É possível observar grande similaridade entre as Fig. 5.12a e 5.12b, mostrando a correta implementação do código.

O problema do tubo de choque bidimensional também foi simulado no programa *OpenFOAM*. Na Figura 5.13 são mostradas curvas de temperatura obtidas pelo CS-ENS e pelo *OpenFOAM*. Estas curvas foram extraídas paralelamente ao eixo  $x$ , na posição  $y = 0,5$  m e em  $t = 0,3$  s. Na Figura 5.14 são apresentadas as curvas de temperatura obtidas com o CS-ENS utilizando as malhas uniformes e a malha com refinamento local, mostrada na Fig. 5.11.

Conforme observado na Fig. 5.13 as curvas de temperaturas através do CS-ENS foram muito próximos às do *OpenFOAM*.

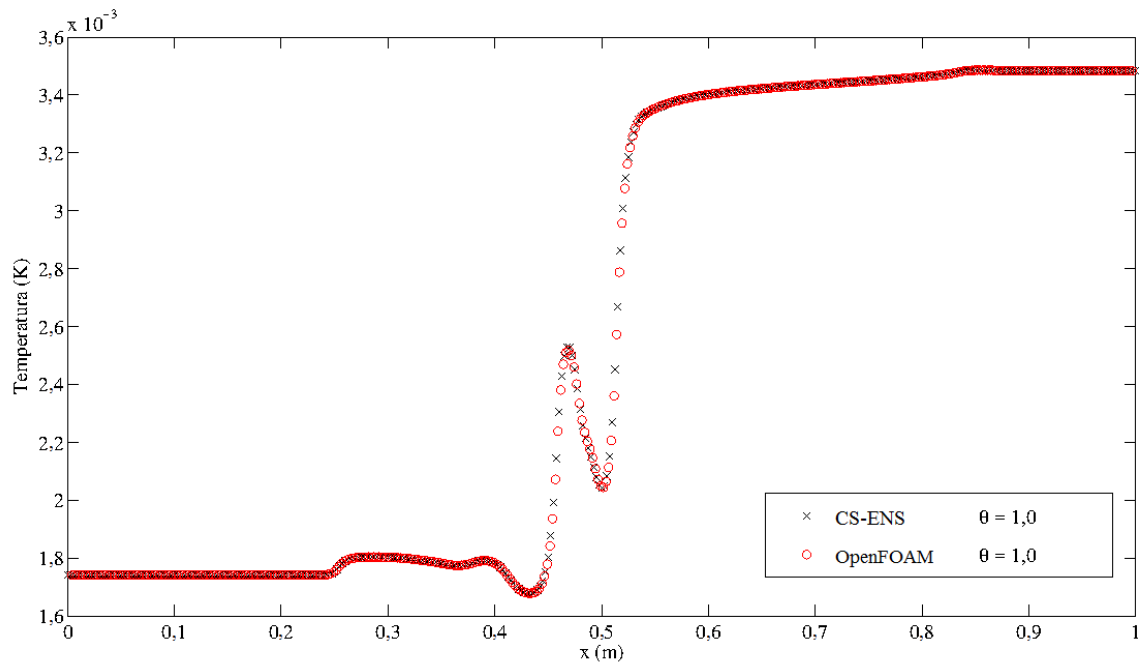


Figura 5.13 – Curvas de temperatura obtidos pelo *OpenFOAM* e pelo CS-ENS para o problema do tubo de choque bidimensional em  $t = 0,3$  s.

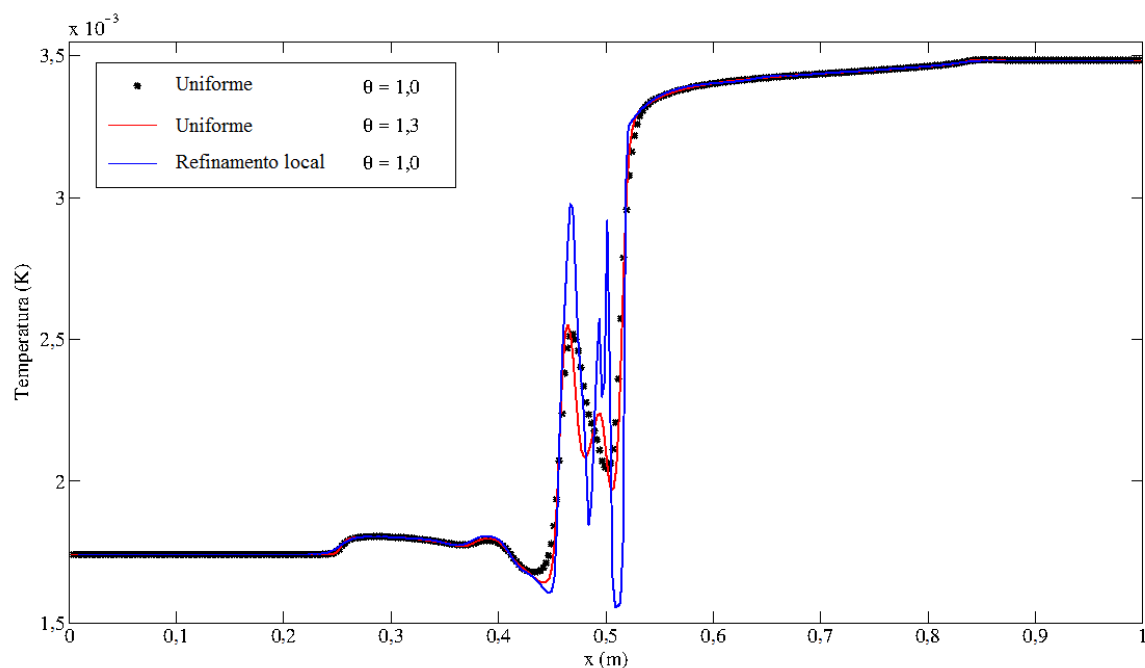


Figura 5.14 – Curvas de temperatura obtidas com o CS-ENS nas simulações do tubo de choque bidimensional, para as malhas uniforme e com refinamento localizado. O perfil foi extraído na posição  $y = 0,5$  m e em  $t = 0,3$  s.

Através do gráfico mostrado na Fig. 5.14, pode-se observar que o nível de detalhamento cresce na região de maior refinamento local. Também faz-se uma comparação do aumento no valor do parâmetro  $\theta$  na malha uniforme, mostrando que a solução aproxima-se

da obtida com a malha refinada localmente, mostrando melhoria nos resultados e redução de difusividade artificial.

#### 5.1.4 Camada limite laminar sobre uma placa plana isolada em um escoamento supersônico

A formação de uma camada limite laminar sobre uma placa plana isolada também foi estudada para avaliar a solução numérica das equações de Navier-Stokes no espaço bidimensional. Neste problema considera-se um escoamento supersônico inicialmente paralelo a placa, com  $Ma_\infty = 2,2$  e  $Re_\infty = 9,8645 \times 10^4$ , o qual é calculado usando um comprimento de referência igual a 0,08 m. Este problema também foi estudado por Kim e Liu (1992).

O domínio é retangular com base de 2,2 m e altura de 1,06 m. Em sua fronteira inferior e até a posição  $x = 0,2$  m, é utilizada a condição de contorno de simetria, na qual considera-se a velocidade normal à fronteira nula e a condição de contorno de Neumann para as demais propriedades. A partir da posição  $x = 0,2$  m a fronteira inferior do domínio é uma parede isolada. Para representá-la são impostas: velocidade nula do fluido e a condição de contorno de Neumann para pressão e temperatura. A fronteira esquerda do domínio é uma entrada supersônica, e utiliza-se a condição de contorno de Dirichlet em todas as variáveis. Nas fronteiras superior e direita aplica-se a condição de contorno de Neumann para todas as propriedades. Na Figura 5.15 o domínio físico do problema e as condições de contorno são mostrados.

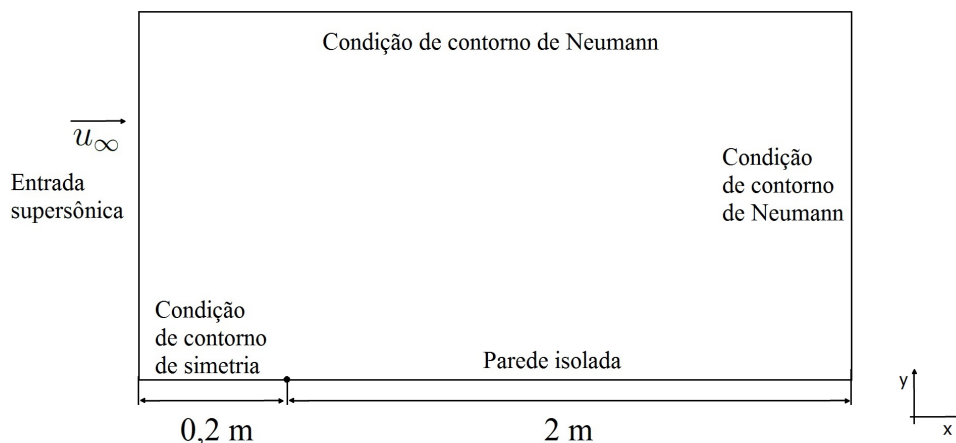


Figura 5.15 – Domínio físico e condições de contorno para o problema da formação de camada limite laminar em placa plana.

Na direção  $x$  a malha possui 220 células igualmente espaçadas, e na direção  $y$ , 146 células, sendo as quatro mais próximas à parede com espessura de  $1,5 \times 10^{-4}$  m e as

restantes com taxa de crescimento constante igual a 4 %. A malha utilizada é mostrada na Fig. 5.16.

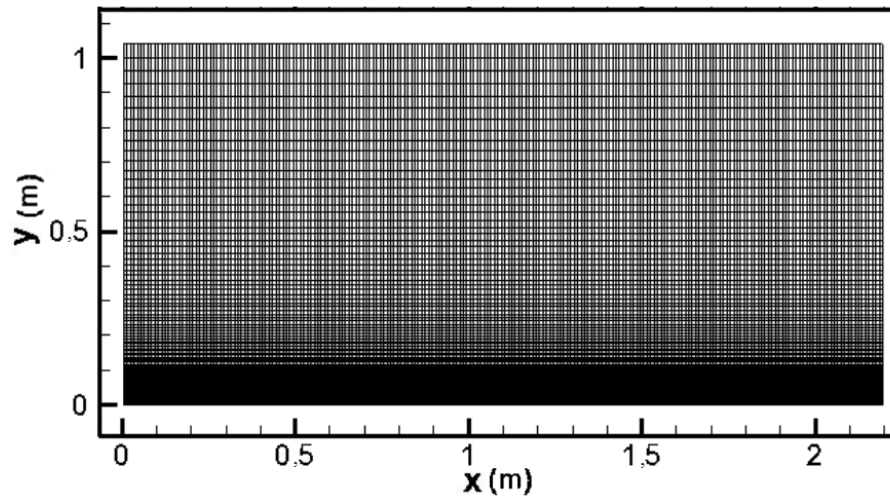


Figura 5.16 – Malha utilizada na modelagem do problema da camada limite em placa plana.

Outros parâmetros usados na modelagem foram:  $p_\infty = 1$  Pa,  $\rho_\infty = 1,4$  kg/m<sup>3</sup>,  $Pr = 0,75$ , e  $\theta = 1,5$ . O problema foi simulado até o tempo 4,5 s, onde observou-se o regime permanente.

As curvas de  $u/u_\infty$  e  $T/T_\infty$  normais a placa plana na posição  $x = 2,2$  m são mostradas nas Fig. 5.17 e 5.18, respectivamente. A direção normal à placa é representada como  $y/\delta_2$ , onde  $\delta_2$  é a espessura da quantidade de movimento, que pode ser calculada através da Eq. (5.1)

$$\delta_2 = \int_0^{\delta_1} \frac{\rho(y) u(y)}{\rho_{\delta_1} u_{\delta_1}} \left( 1 - \frac{u(y)}{u_{\delta_1}} \right) dy. \quad (5.1)$$

Na Equação (5.1),  $\delta_1$  é a espessura da camada limite, que foi definida onde  $u = 0,995u_\infty$ , esta condição também foi adotada por Kim e Liu (1992).  $\rho_{\delta_1}$  e  $u_{\delta_1}$  são a massa específica e a velocidade obtidas na borda da camada limite. Para o problema ilustrado obteve-se  $\delta_1 = 8,5 \times 10^{-3}$  m e  $\delta_2 = 7,23 \times 10^{-4}$  m.

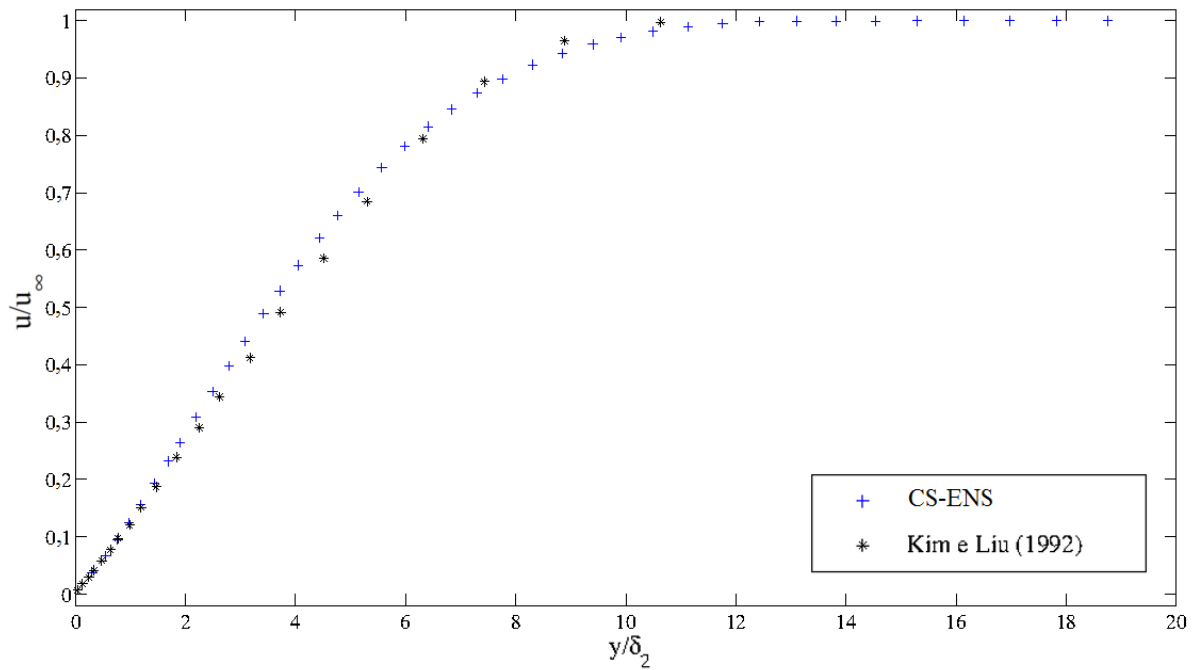


Figura 5.17 – Curvas de  $u/u_\infty$  das modelagens do problema da camada limite obtidas pelo CS-ENS e por Kim e Liu (1992).

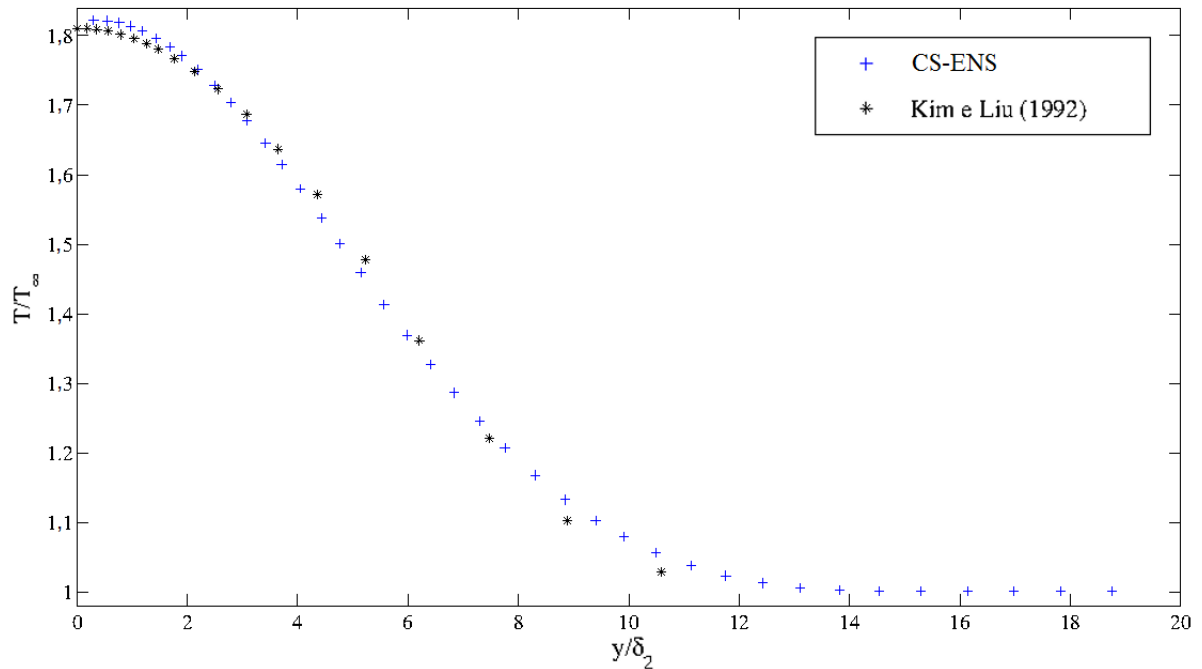


Figura 5.18 – Curvas de  $T/T_\infty$  das modelagens do problema da camada limite obtidas pelo CS-ENS e por Kim e Liu (1992).

Os resultados obtidos apresentaram boa concordância com os de Kim e Liu (1992),

mostrando a capacidade do método para simular problemas de camada limite. Observou-se também que a viscosidade artificial introduzida não causou alterações significativas em locais onde os efeitos viscosos do escoamento ocorrem com maior intensidade.

Na Figura 5.19 é mostrado o campo de massa específica obtido no tempo 4,5 s, onde podem ser observadas a espessura da camada limite e a queda da massa específica nessa região.

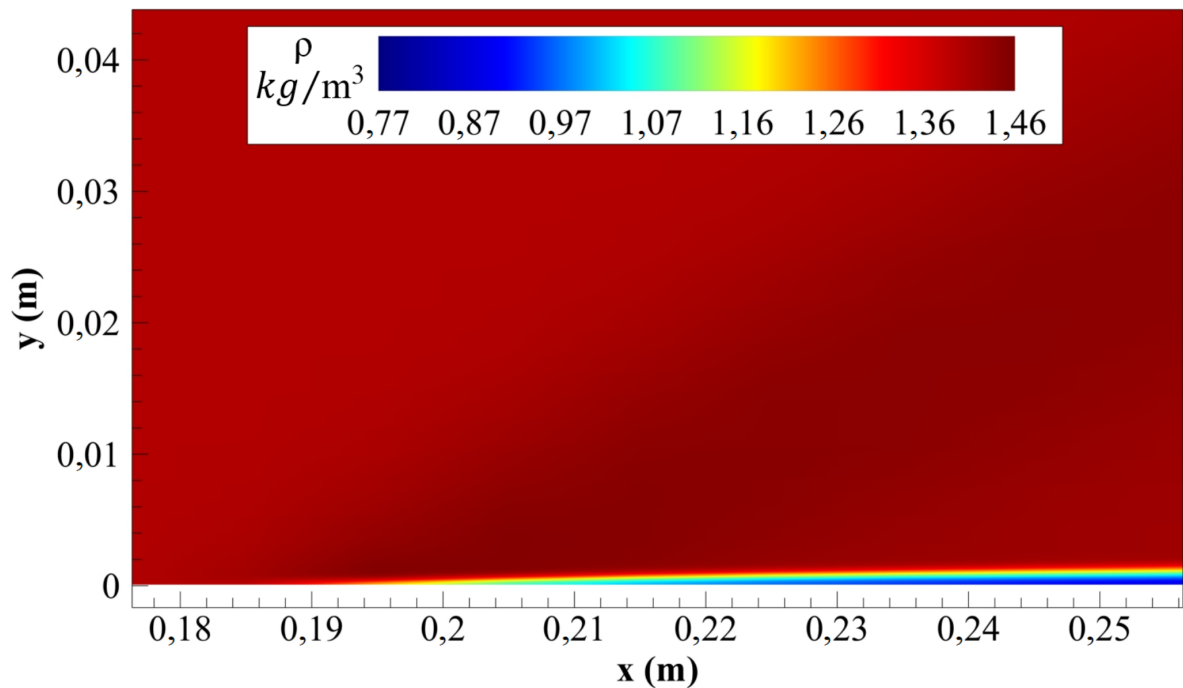


Figura 5.19 – Campo de massa específica obtido com o CS-ENS para o problema da camada limite em uma placa plana, no tempo  $t = 4,5$  s.

Conforme os estudos apresentados nesta seção, as soluções obtidas através do CS-ENS foram próximas às de referência. A partir deste ponto a modelagem da fronteira imersa é implementada ao código CS-ENS, o qual passa a ser denominado MFVC, e na próxima seção os resultados obtidos por esta metodologia são apresentados e validados.

## 5.2 Validação do Modelo Físico Virtual Compressível

Para a simulação dos escoamentos sobre corpos imersos utilizando a metodologia da Fronteira Imersa, foi construído um código computacional em linguagem C denominado MFVC. O MFVC e o *OpenFOAM* foram aplicados no estudo de cinco casos envolvendo escoamentos bidimensionais sobre um cilindro. Para todas as simulações consideram-se as seguintes propriedades para o gás: massa molecular  $M = 28,96$  g/mol, razão de calores específicos  $\kappa = 1,4$  e o número de Prandtl igual a 0,71. A pressão e a massa específica em todo o domínio no tempo inicial são 1 Pa e  $1,4$  kg/m<sup>3</sup>, respectivamente. Estas condições

foram definidas para que a velocidade do som do escoamento não perturbado,  $c_\infty$ , fosse igual a 1 m/s. A velocidade do escoamento livre tem direção paralela à coordenada  $x$ , assim  $v_\infty = 0$  m/s e  $u_\infty$  é calculada para que se tenha o número de Mach desejado em cada escoamento ( $Ma_\infty$ ).

Em todos os estudos realizados, um cilindro com diâmetro de 1 m é considerado. O número de Reynolds é calculado com base neste diâmetro, no valor de  $u_\infty$  e a viscosidade do gás é determinada em cada caso para se obter o valor de  $Re_D$  desejado.

Os pontos lagrangianos são igualmente espaçados e este espaçamento é determinado em cada caso em função do nível de refinamento da malha euleriana na região da fronteira imersa. Para isso a relação  $\Delta s/\Delta x \approx 1,57$  é utilizada em todos os escoamentos.  $\Delta s$  é aproximado por  $\Delta s = \pi D/n_p$  e  $\Delta x$  é o comprimento das arestas das células próximas à fronteira imersa.

No programa *OpenFOAM* existe um utilitário denominado *snappyHexMesh*, que gera malhas adaptativas com possibilidade de refinamento localizado. Esta ferramenta foi aqui utilizada para construção das malhas usadas nas simulações com o *OpenFOAM*. Conforme apresentado por Marcantoni, Tamagno e Elaskar (2012), o *solver rhoCentralFoam* do programa *OpenFOAM* apresenta melhores soluções com o uso da função limitadora *vanLeer* (VAN LEER, 1979). Por este motivo esta função foi adotada nesta seção para todas as simulações com o programa *OpenFOAM*.

No presente trabalho não é dado um tratamento especial à troca de calor na fronteira do cilindro, e assim, permite-se que haja transferência calor entre os escoamentos externo e interno à fronteira imersa. Conseqüentemente, esta é uma fonte de erros. Um melhor tratamento para o efeito da troca de calor nas fronteiras imersas foi empregado por Santos (2014), sendo esta uma alternativa para implementação em futuros trabalhos. Nas simulações utilizando o *OpenFOAM*, as paredes do cilindro são consideradas adiabáticas.

Como observado na seção 5.1 as soluções são bastante dependentes do parâmetro  $\theta$ . Nas validações do MFVC definiu-se  $\theta = 1,4$ , este valor foi escolhido por ter apresentado melhores resultados na seção 5.1.

Para as modelagens através do MFVC, o passo de tempo de integração foi limitado por  $CFL_{máx} = 0,02$ . O que foi definido tendo-se como base o valor de  $L_2$  aceitável. Para o *OpenFOAM* utilizou-se  $CFL_{máx} = 0,2$ .

### 5.2.1 Escoamentos subsônicos sobre um cilindro

Escoamentos bidimensionais e subsônicos sobre um cilindro foram estudados com o MFVC e com o *OpenFOAM*. Em todos os casos definiu-se  $Ma_\infty = 0,3$ , e assim,  $u_\infty = 0,3$  m/s e  $v_\infty = 0$  m/s. Os valores de  $Re_D$  estudados são: 20, 40, 80, 150 e 300.

O domínio escolhido é retangular com arestas de  $60D$  e  $50D$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. As coordenadas do centroide do cilindro são  $x = 19,9D$  e  $y = 25D$ .

Duas malhas foram utilizadas nas simulações com o MFVC, ambas possuem refinamento local máximo ( $\Delta x_{\min}$ ) na região interna e próxima à fronteira imersa. A malha refinada possui  $380 \times 372$  células e  $\Delta x_{\min} = D/80$ , e a outra mais grosseira possui  $288 \times 276$  células e  $\Delta x_{\min} = D/40$ . Na Figura 5.20 a malha com refinamento máximo igual a  $\Delta x_{\min} = D/40$  é mostrada.

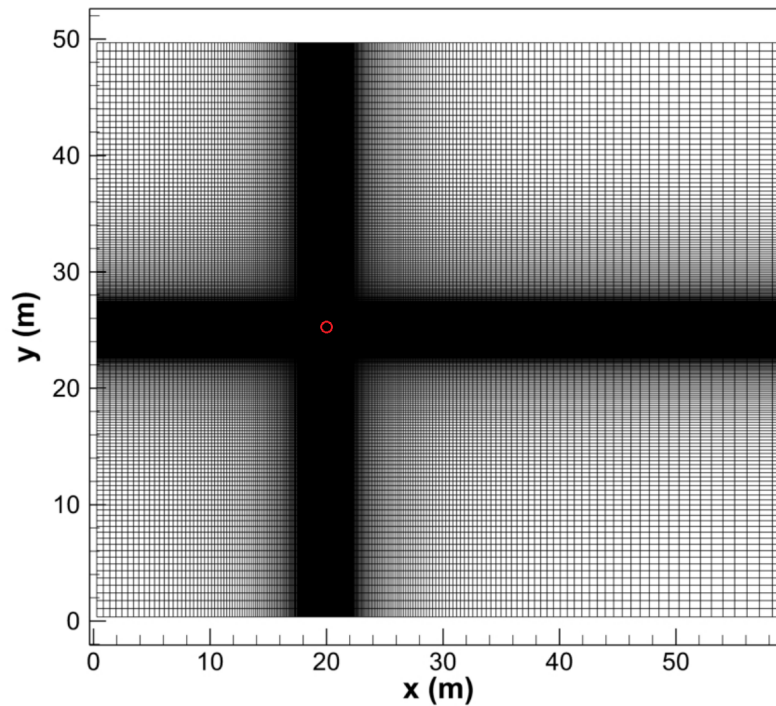


Figura 5.20 – Malha com  $\Delta x_{\min} = D/40$  utilizada nas simulações de escoamentos subsônicos usando o MFVC, o círculo em vermelho representa as fronteiras do cilindro.

Nas simulações com *OpenFoam* uma malha adaptativa com  $\Delta x_{\min} = D/80$  na superfície do cilindro e com um total de 132.265 células foi utilizada. Um parâmetro utilizado pelo *snappyHexMesh* para construção desta malha é o grau de refinamento de malha ( $GR$ ), que indica a razão entre os comprimentos característicos mínimos e máximos das células da malha, através da relação  $\Delta x_{\max}/\Delta x_{\min} = 2^{GR}$ . Para os escoamentos subsônicos considerou-se  $GR = 5$ , e a malha gerada é mostrada na Fig. 5.21.

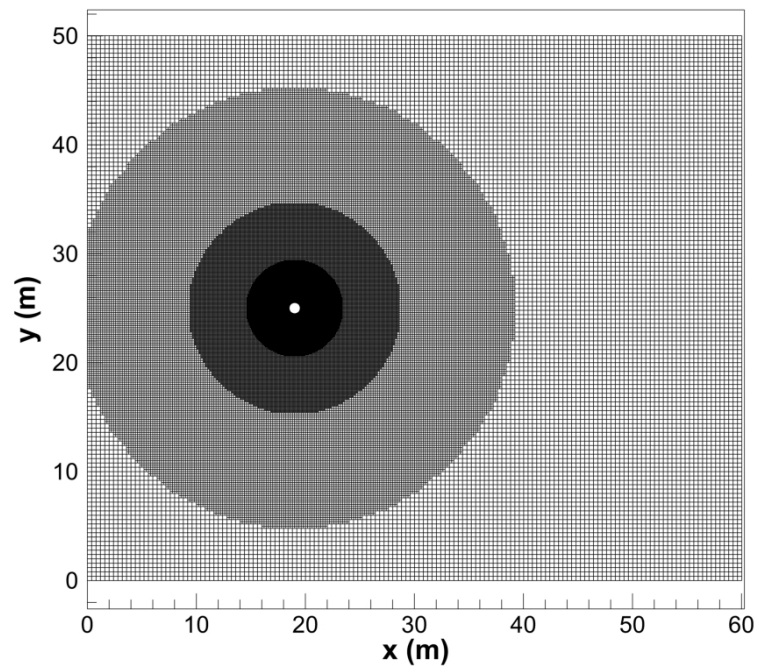


Figura 5.21 – Malha utilizada nas simulações de escoamentos subsônicos utilizando o *OpenFOAM*.

No estado inicial o escoamento tem velocidade uniforme em todo o domínio, e por isso no início das simulações ao se considerar a presença do cilindro, o fluido próximo é desacelerado bruscamente. Assim, formam-se regiões de compressão à esquerda do cilindro e de rarefação à sua direita. Estas perturbações se propagam pelo fluido até alcançarem as fronteiras do domínio, e são ilustradas na Fig. 5.22.

Condições de contorno mais realísticas para escoamentos compressíveis e subsônicos são não refletivas, permitindo que ondas deixem o domínio, além de não fixarem valores ou derivadas nas fronteiras, mas sim em uma região além do domínio, na qual as propriedades do escoamento não são perturbadas. Um exemplo destas condições de fronteiras é proposto na metodologia apresentada por Poinso e Lele (1992) e por Chen e Zha (2006).

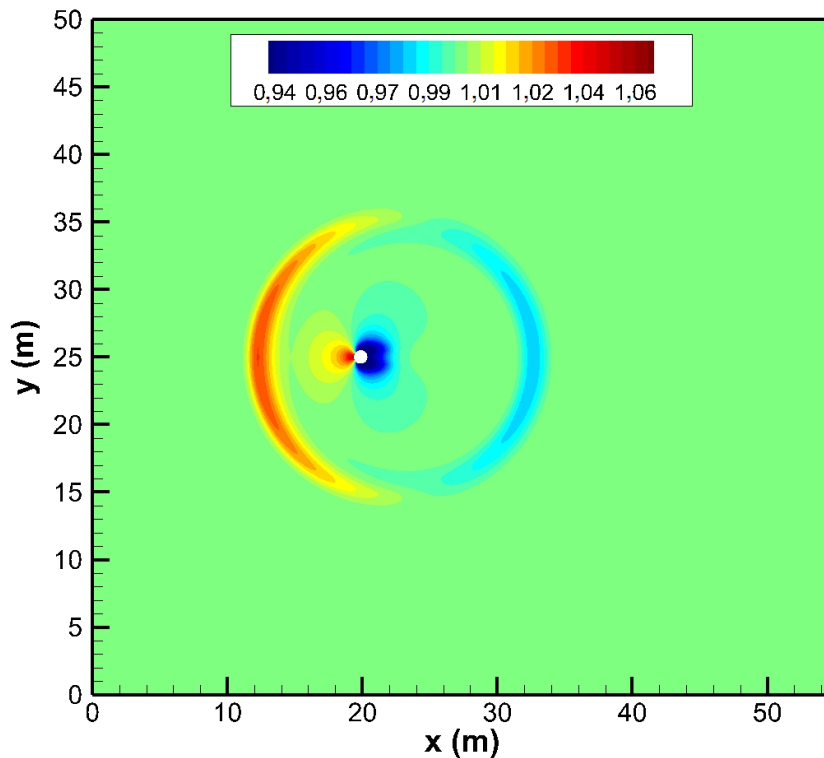


Figura 5.22 – Campo de massa específica adimensional ( $\rho/\rho_\infty$ ) obtido através do *Open-FOAM* para  $Re_D = 20$  e  $Ma_\infty = 0,3$  em  $\psi = 3$ .

No presente trabalho optou-se por uma abordagem simplificada onde apenas condições de contorno de Dirichlet e de Neumann são utilizadas. Neste caso as fronteiras são tratadas como entradas ou saídas de fluido no domínio. Para as entradas aplicam-se as seguintes condições de contorno: Dirichlet para a temperatura e a velocidade e Neumann para a pressão. E para as saídas são utilizadas: Neumann para a temperatura e a velocidade e Dirichlet para a pressão. O código utiliza a direção do vetor velocidade na fronteira para definir se esta é uma entrada ou uma saída. Caso não haja fluxo líquido ela é tratada como uma entrada. Uma vez que são prescritas propriedades nas fronteiras estas são refletivas. Observou-se a redução da influência destas reflexões ao longo da simulação, e as soluções obtidas foram satisfatórias.

O máximo do tempo adimensional,  $\psi$ , adotado em cada um dos casos de escoamentos subsônicos estudados foi o necessário para se calcular os parâmetros do escoamento.

As simulações com  $Re_D = 20$  foram até  $\psi = 60$ . O tempo necessário para realizar esta simulação com o MFVC foi de 194 horas utilizando um processador Intel i7.

Os componentes  $x$  e  $y$  do vetor de força lagrangiana para este instante são apresentados nas Figs. 5.23 e 5.24.

O sinal negativo do componente  $x$  do vetor de força indica que este tem sentido contrário a  $u_\infty$ , opondo-se ao escoamento. Na Figura 5.23 pode-se observar que a região

onde o campo apresenta maior intensidade ou resistência ao escoamento é no ponto de estagnação do fluido. Na Figura 5.24 observa-se simetria do campo de força na direção  $y$  em relação aos quadrantes inferiores e superiores do cilindro.

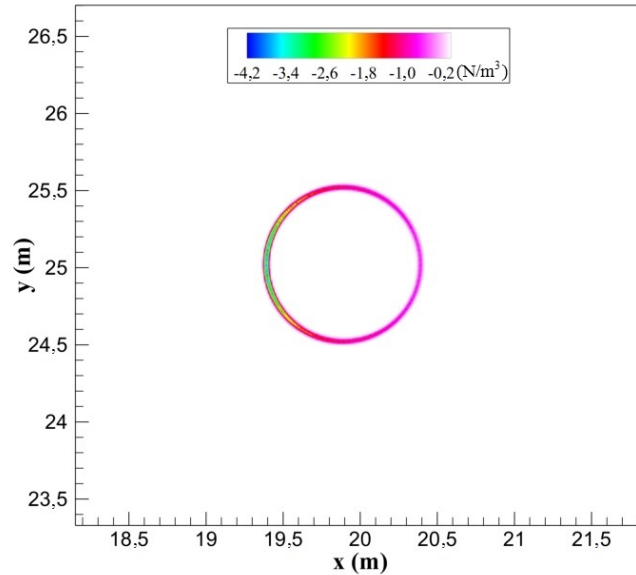


Figura 5.23 – Componente  $x$  do vetor de força lagrangiana obtido para o escoamento com  $Re_D = 20$ , em  $\psi = 60$ , utilizando a malha com  $\Delta x_{mín} = D/80$ .

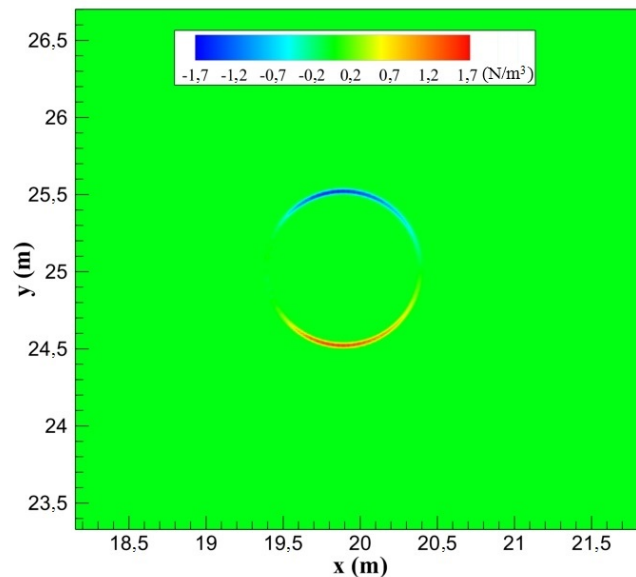


Figura 5.24 – Componente  $y$  do campo de forças lagrangiano obtido para o escoamento a  $Re_D = 20$  em  $\psi = 60$  utilizando a malha com  $\Delta x_{mín} = D/80$ .

Nas simulações considerando  $Re_D = 20$  e 40 aparecem regiões de recirculação simétricas após o cilindro, como mostrado nas Figs. 5.25 e 5.26.

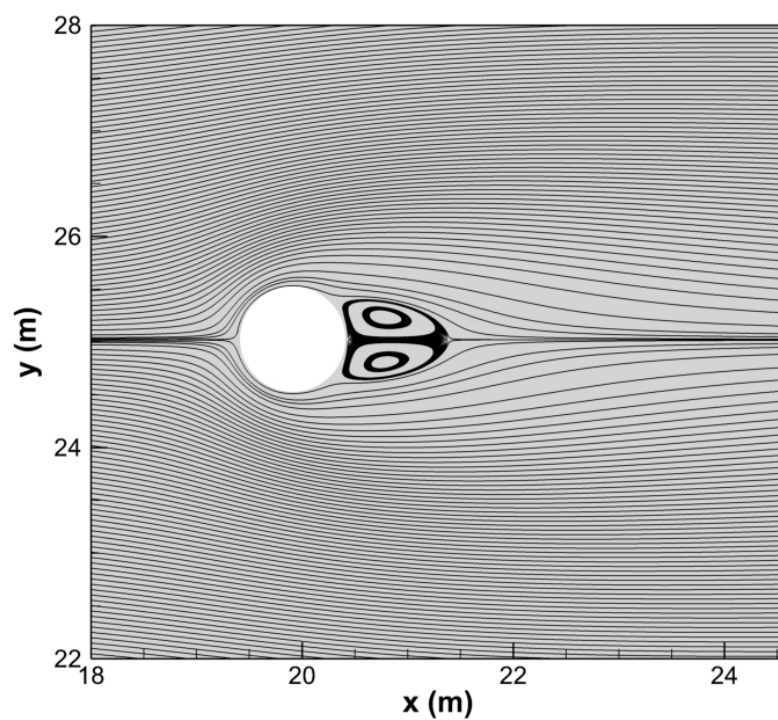


Figura 5.25 – Linhas de corrente obtidas com o MFVC para o escoamento a  $Re_D = 20$  e  $Ma_\infty = 0,3$ .

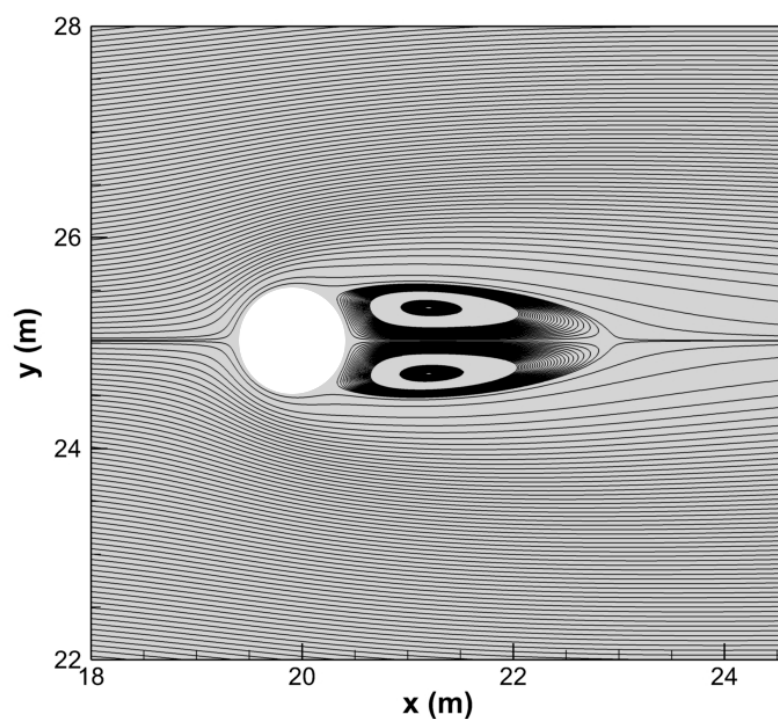


Figura 5.26 – Linhas de corrente obtidas com o MFVC para o escoamento a  $Re_D = 40$  e  $Ma_\infty = 0,3$ .

Alguns parâmetros geométricos estudados na região de recirculação são apresentados na Fig. 5.27.

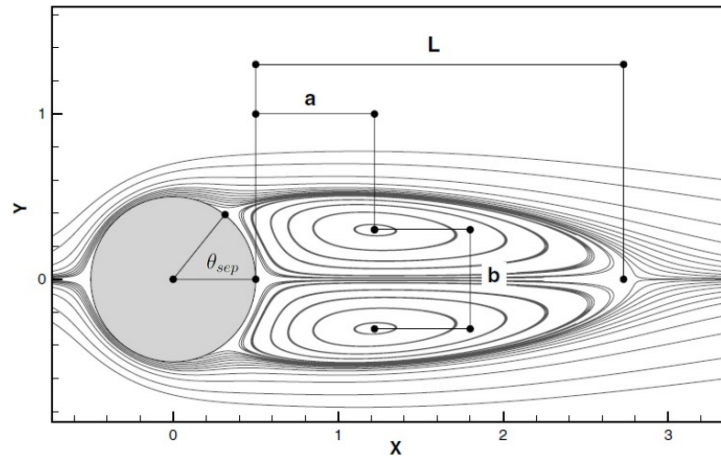


Figura 5.27 – Parâmetros geométricos relevantes das recirculações formadas após o cilindro.  
Fonte: adaptado de Palma et al. (2006).

Os parâmetros geométricos das bolhas de recirculação e os coeficientes de arrasto obtidos são apresentados nas Tabs. 5.2 e 5.3, juntamente com os resultados das simulações através do *OpenFOAM* e dados de referência.

Tabela 5.2 – Parâmetros geométricos obtidos neste trabalho e retirados da literatura para o escoamento a  $Re_D = 20$ .

	L/D	a/D	b/D	$\theta_{sep}$ (°)	$C_d$
MFVC $\Delta x_{mín} = D/40$	1,05	0,42	0,44	43,5	2,17
MFVC $\Delta x_{mín} = D/80$	0,99	0,38	0,43	44,0	2,16
<i>OpenFOAM</i> $\Delta x_{mín} = D/80$	0,96	0,37	0,43	44,5	2,12
Lima e Silva (2002) - numérico	1,04	-	-	-	2,04
Palma et al. (2006) - numérico	0,93	0,36	0,43	44,6	2,05
Tritton (1959) - experimental	-	-	-	-	2,12

Tabela 5.3 – Parâmetros geométricos obtidos neste trabalho e retirados literatura para o escoamento a  $Re_D = 40$ .

	L/D	a/D	b/D	$\theta_{sep}$ (°)	$C_d$
MFVC $\Delta x_{mín} = D/40$	2,62	0,97	0,84	51,4	1,63
MFVC $\Delta x_{mín} = D/80$	2,51	0,77	0,62	52,6	1,61
<i>OpenFOAM</i> $\Delta x_{mín} = D/80$	2,34	0,75	0,61	52,6	1,58
Lima e Silva (2002) - numérico	2,54	-	-	-	1,49
Palma et al. (2006) - numérico	2,28	0,72	0,60	53,8	1,55
Tritton (1959) - experimental	-	-	-	-	1,58

Conforme observado nas Tabs. 5.2 e 5.3 as bolhas de recirculação obtidas com o MFVC têm comprimentos ( $L/D$ ) um pouco maiores que os das simulações utilizando o *OpenFOAM* e que os resultados apresentados por Palma et al. (2006), sendo próximos aos obtidos por Lima e Silva (2002).

Os valores de  $C_d$  obtidos com MFVC tenderam a ser um pouco superiores aos do *OpenFOAM*. Observa-se que com o aumento no nível de refinamento os resultados do MFVC se aproximam dos obtidos com o *OpenFOAM*.

A influência de  $Ma_\infty$  deve ser melhor estudada neste escoamento já que todos os dados numéricos de referência utilizados são de códigos escritos para escoamentos incompressíveis ( $Ma_\infty \ll 1$ ).

Os campos de pressão adimensional ( $p/p_\infty$ ) e de Mach obtidos com o MFVC (malha com  $\Delta x_{\min} = D/80$ ) e com o *OpenFOAM* são mostrados nas Figs. 5.28 e 5.29, respectivamente.

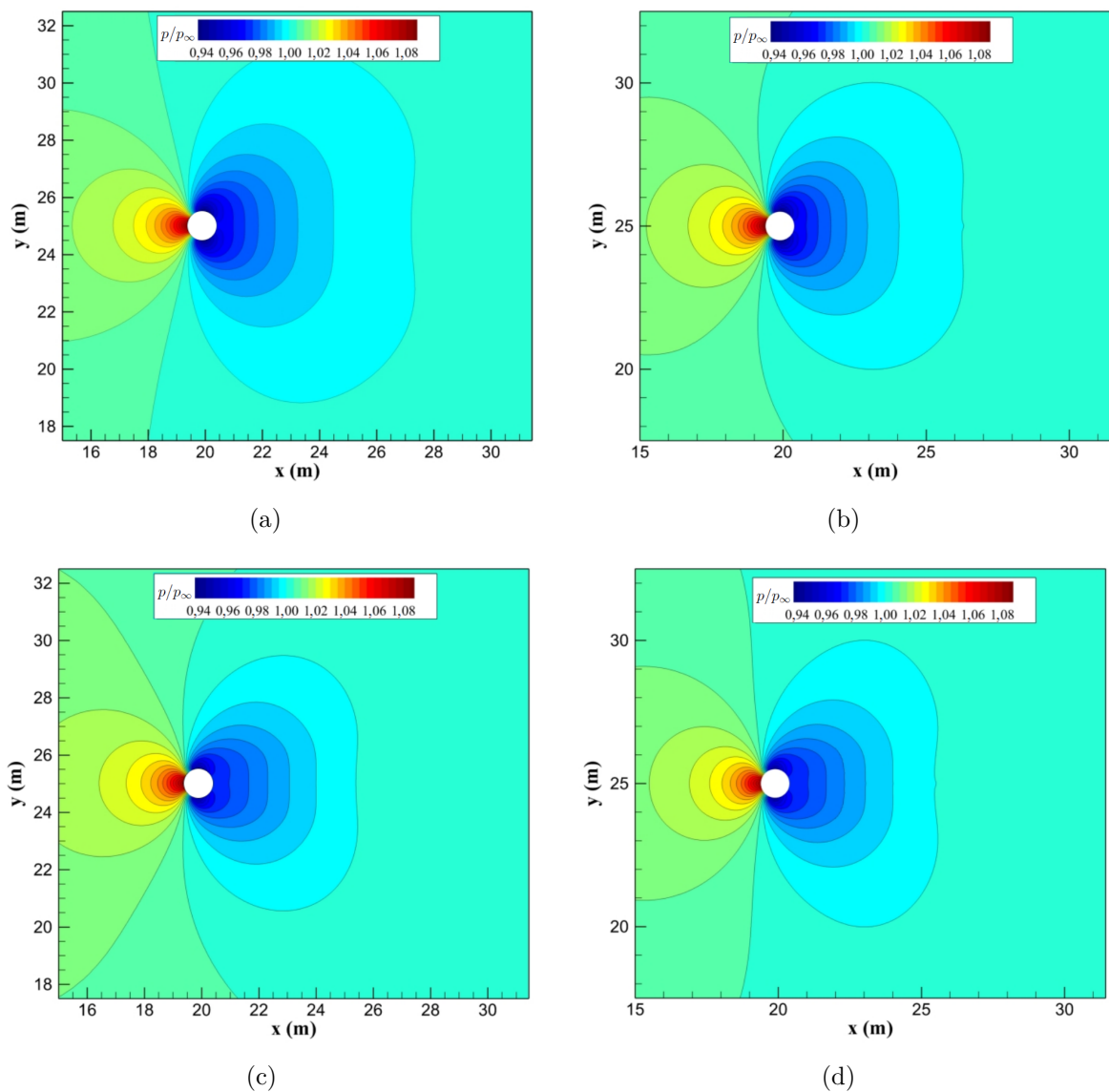


Figura 5.28 – Campos de pressão adimensional obtidos para os escoamento a  $Re_D = 20$  e 40. MFVC (a) e (c) e *OpenFOAM* (b) e (d).

Os campos de pressão adimensional obtidos com os dois códigos foram bastante

próximos. A máxima pressão adimensional em todos os casos ocorre no ponto de estagnação e seus valores são próximos de 1,08.

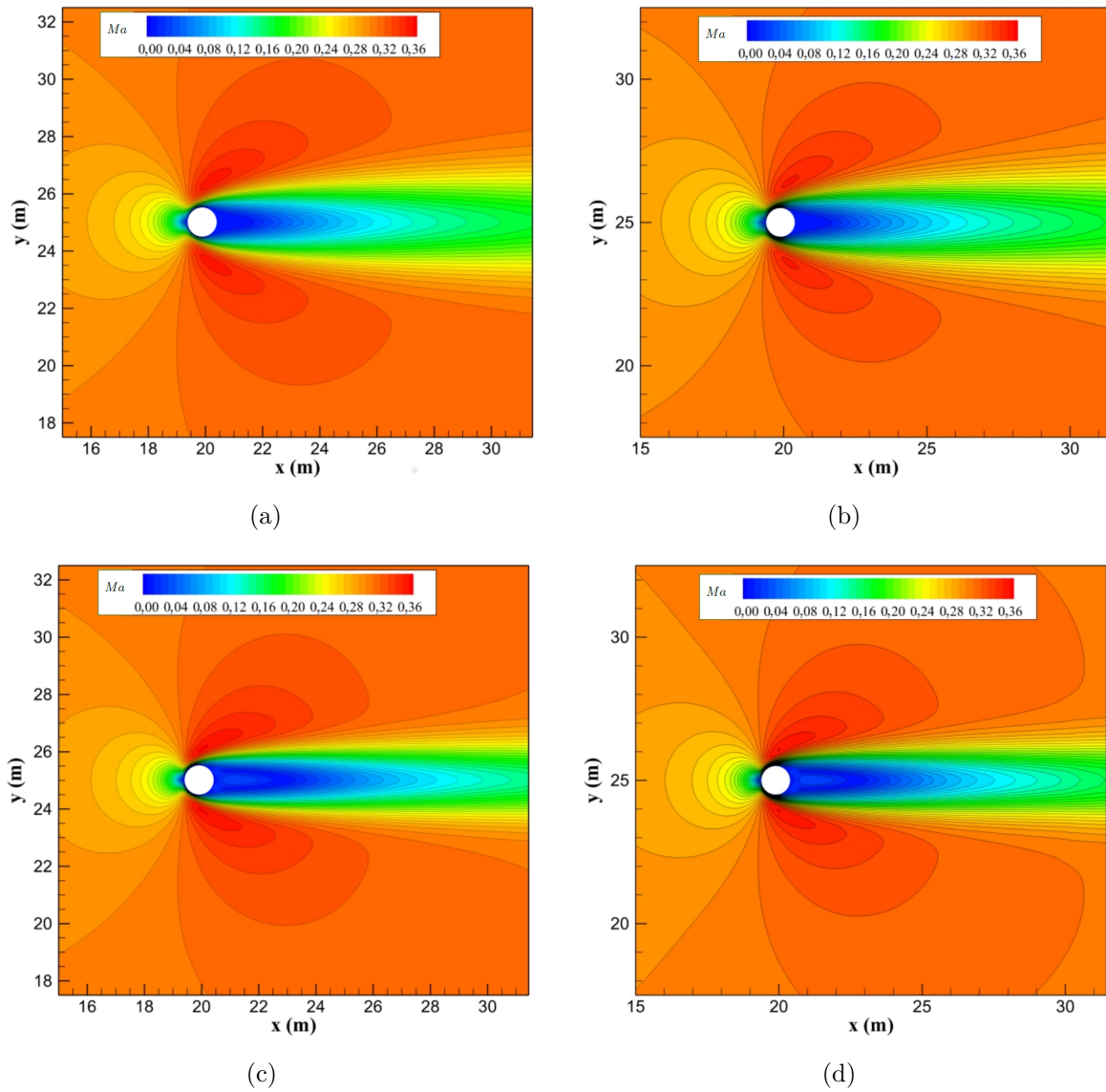


Figura 5.29 – Campos de  $Ma$  obtidos para os escoamento a  $Re_D = 20$  e 40. MFVC (a) e (c) e *OpenFOAM* (b) e (d).

Pode-se observar pelos campos de Mach apresentados na Fig. 5.29 que a região das bolhas de circulação possui número de Mach baixo ( $Ma < 0,04$ ), tornando-se um local de maiores imprecisões numéricas, devido ao método de solução com base na massa específica. O método de solução implícito implementado no *OpenFOAM* apresentou melhores resultados para estas regiões.

Na Figura 5.30 são mostradas as linhas de corrente obtidas com o MFVC e com o *OpenFOAM* para os escoamentos a  $Re_D = 80$ , 150 e 300 utilizando as malhas com maior refinamento.

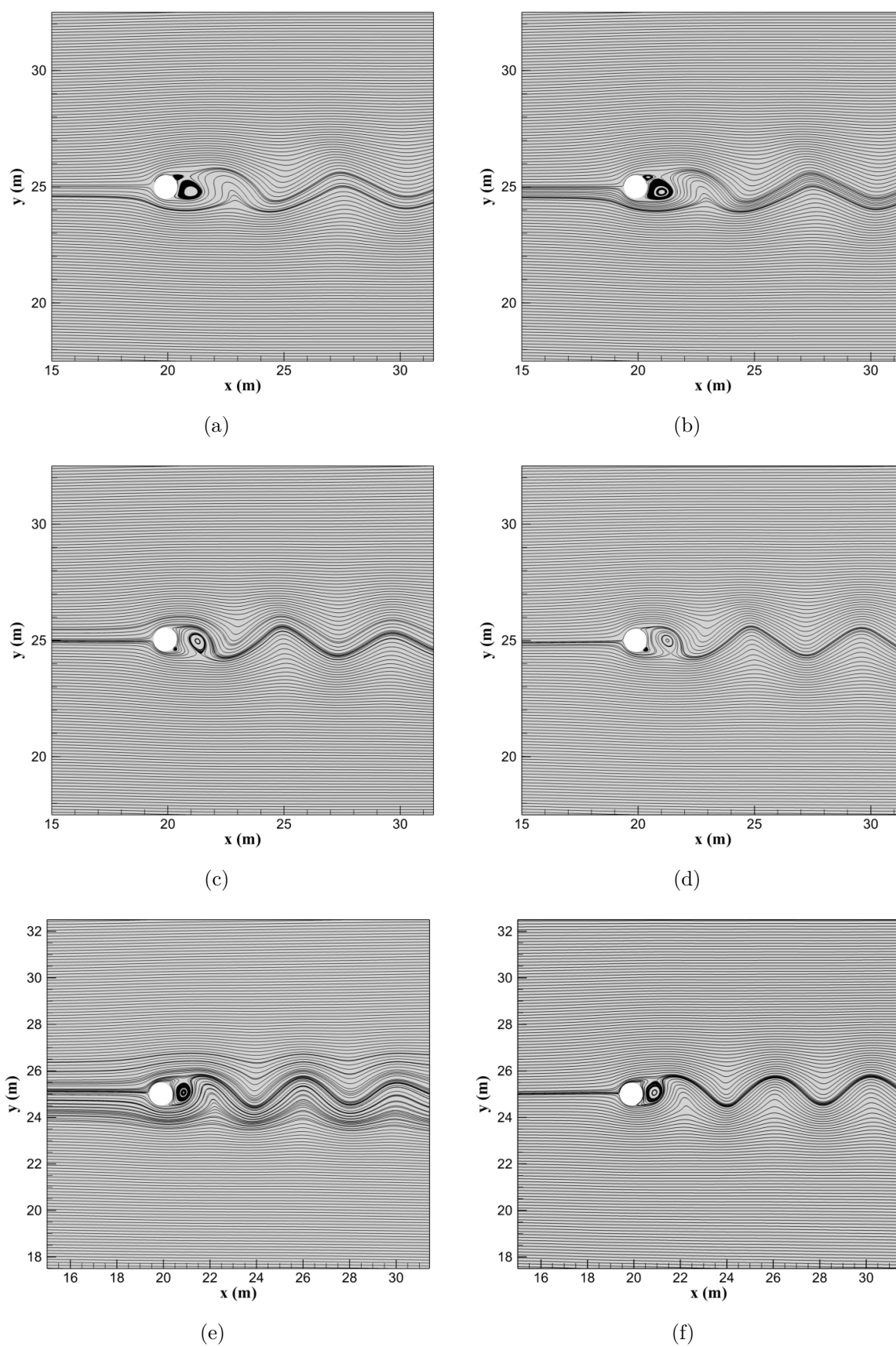


Figura 5.30 – Linhas de corrente obtidas com o MFVC e com o *OpenFOAM* para os escoamentos a  $Ma = 0,3$  e  $Re_D = 80, 150$  e  $300$ . MFVC (a), (c) e (e) e *OpenFOAM* (b), (d) e (f).

Observa-se na Fig. 5.30 que as linhas de corrente obtidas com MFVC e com *OpenFOAM* têm geometrias bastante próximas entre si para todos os valores de  $Re_D$ . Os parâmetros  $C_d$ ,  $C_l$  e  $St$  obtidos nestas simulações são sumarizados na Tab. 5.4, na qual também são apresentados dados da literatura.

Tabela 5.4 –  $C_d$ ,  $C_l$  e  $St$  para os escoamentos com  $Re_D$  igual a 80, 150 e 300.

$Re_D$		$C_d$	$C_l$	$St$
80	MVFC $\Delta x_{min} = D/40$	1,49	$\pm 0,27$	0,15
	MVFC $\Delta x_{min} = D/80$	1,45	$\pm 0,26$	0,15
	<i>OpenFOAM</i>	1,42	$\pm 0,24$	0,15
	Lima e Silva (2002) - numérico	1,40	$\pm 0,25$	0,15
	Williamson (1988) - experimental	-	-	0,15
150	MVFC $\Delta x_{min} = D/40$	1,44	$\pm 0,56$	0,18
	MVFC $\Delta x_{min} = D/80$	1,43	$\pm 0,53$	0,18
	<i>OpenFOAM</i>	1,40	$\pm 0,55$	0,18
	Lima e Silva (2002) - numérico	1,37	$\pm 0,41$	0,18
	Williamson (1988) - experimental	-	-	0,18
300	MVFC $\Delta x_{min} = D/40$	1,57	$\pm 0,89$	0,20
	MVFC $\Delta x_{min} = D/80$	1,53	$\pm 0,98$	0,21
	<i>OpenFOAM</i>	1,45	$\pm 0,89$	0,21
	Williamson (1988) - experimental	-	-	0,22

Os  $C_d$  e  $C_l$  apresentados na Tab. 5.4 são determinados utilizando a média temporal destes coeficientes, e os valores obtidos através do MFVC e do *OpenFOAM* foram próximos. Para  $Re_D = 300$ , ocorreu maior discrepância entre os coeficientes, podendo ser explicado pela influência dos efeitos tridimensionais já existentes a partir de  $Re_D = 300$ .

Os valores de  $St$  obtidos concordaram com as referências para  $Re_D = 80$  e 150. Para  $Re_D = 300$  maiores diferenças foram encontradas, principalmente para a malha com  $\Delta x_{min} = D/40$ , que apresentou características de um escoamento mais viscoso.

Na Tabela 5.4 pode-se observar que os resultados obtidos pelo MFVC se aproximam dos valores de referência com o aumento do nível de refinamento.

As curvas de  $C_d$  em função do tempo adimensional,  $\psi$ , obtidas com o MFVC e com o *OpenFOAM* para os escoamentos a  $Re_D = 20$  e 40 são mostradas na Fig. 5.31. Já as curvas de  $C_d$  e  $C_l$  obtidas com o MFVC para os escoamentos com  $Re_D = 80, 150$  e 300 são mostradas nas Figs. 5.32, 5.33 e 5.34.

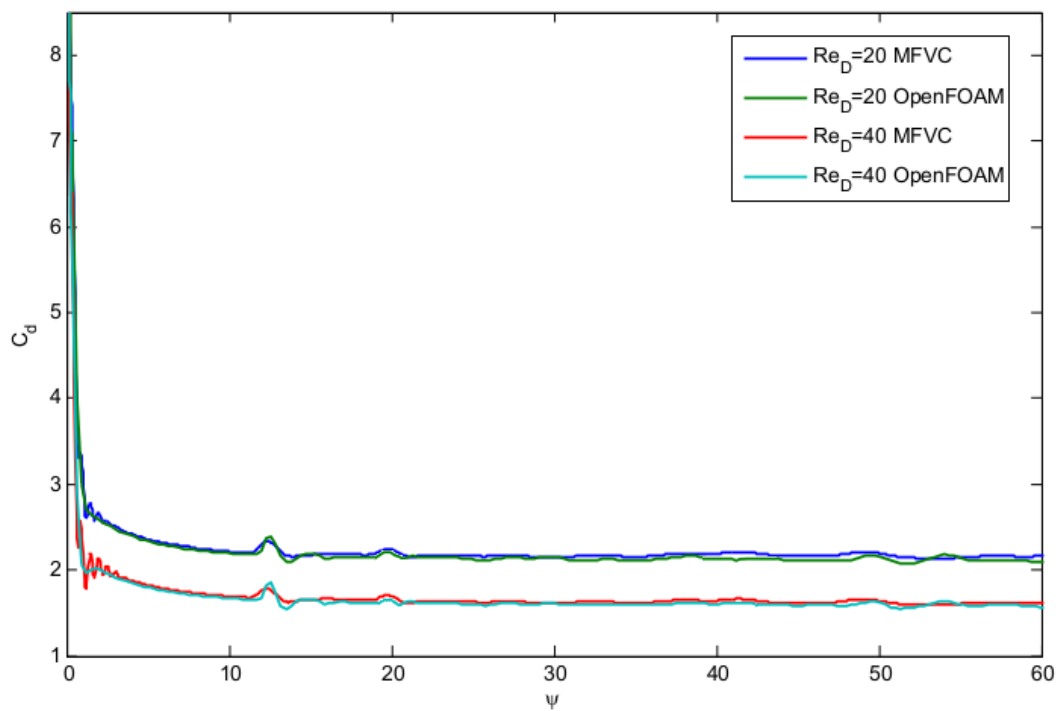


Figura 5.31 – Curvas de  $C_d$  em função de  $\psi$  obtidas com o MFVC e com o *OpenFOAM* para os escoamentos com  $Re_D = 20$  e  $Re_D = 40$  e malhas com  $\Delta x_{\min} = D/80$ .

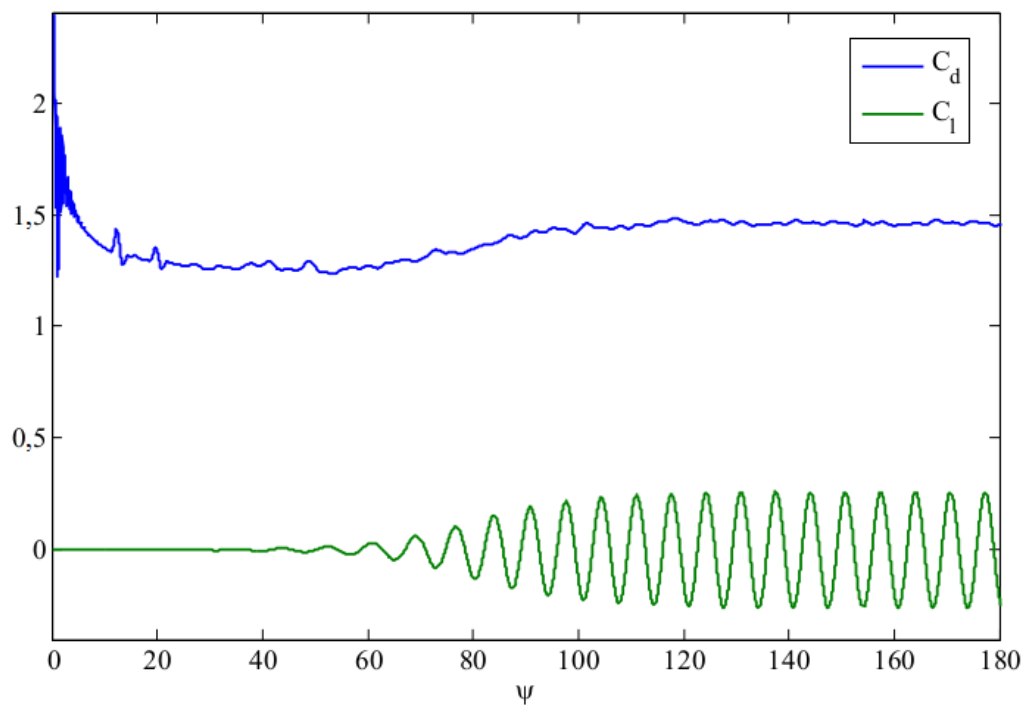


Figura 5.32 – Curva de  $C_d$  e  $C_l$  em função de  $\psi$  obtidas com o MFVC para o escoamento com  $Re_D = 80$  e malhas com  $\Delta x_{\min} = D/80$ .

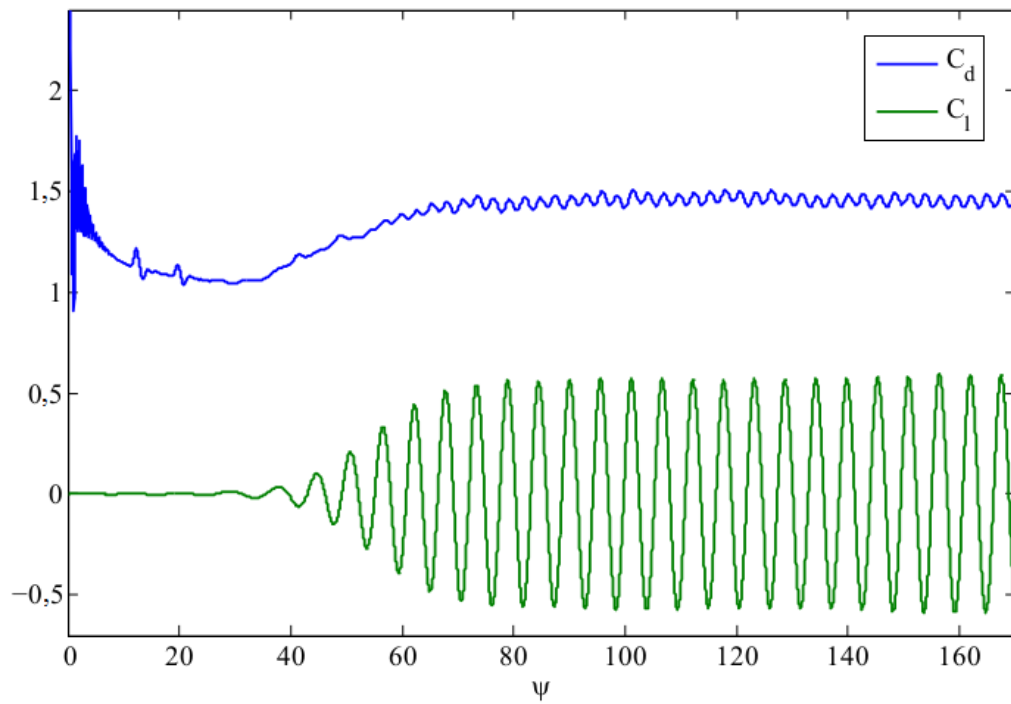


Figura 5.33 – Curva de  $C_d$  e  $C_l$  em função de  $\psi$  obtidas com o MFVC para o escoamento com  $Re_D = 150$  e malhas com  $\Delta x_{\min} = D/80$ .

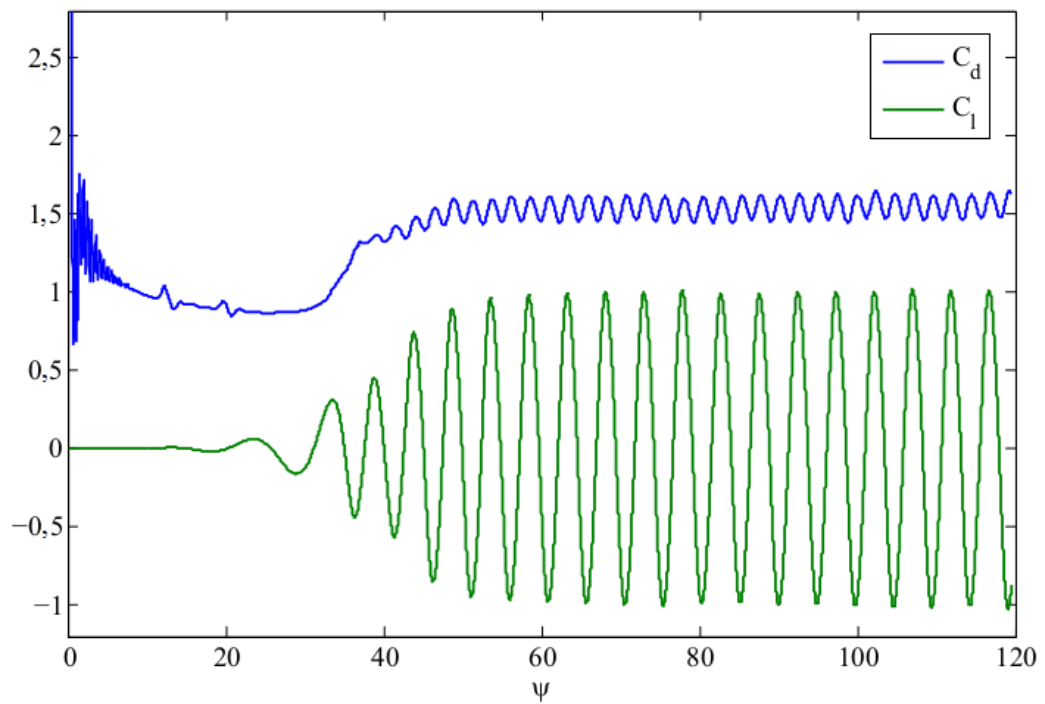


Figura 5.34 – Curva de  $C_d$  e  $C_l$  em função de  $\psi$  obtidas com o MFVC para o escoamento com  $Re_D = 300$  e malhas com  $\Delta x_{\min} = D/80$ .

Pode-se observar nas Fig. 5.31 boa concordância entre as curvas de  $C_d$  obtidas pelo MFVC e pelo *OpenFOAM*. Notam-se também pequenas ondulações nas curvas, como em  $\psi \approx 13$ , causadas por ondas refletidas das fronteiras que retornam ao cilindro. Altos valores de  $C_d$  próximos à  $\psi = 0$  foram obtidos devido à desaceleração do fluido próximo ao cilindro no início das simulações.

Nas Figuras 5.32, 5.33 e 5.34 é possível observar o início do desprendimento de vórtices, quando  $C_d$  e  $C_l$  tornam-se oscilatórios.

Nas Figuras 5.35 e 5.36 são apresentados os campos de pressão adimensional e de Mach obtidos para os escoamentos a  $Ma_\infty = 0,3$  e  $Re_D = 80, 150$  e  $300$ .

Observa-se na Fig. 5.35 similaridade entre os campos de pressão obtidos com o MFVC e com o *OpenFOAM*. Pelos campos de pressão adimensional, é possível notar que os vórtices das soluções com o MFVC deformam-se mais que os do *OpenFOAM* à medida que se distanciam do cilindro, o que acontece devido a alta razão de aspecto ( $\Delta x/\Delta y$ ) das células. Os campos de Mach obtidos com o MFVC e com o *OpenFOAM* também foram próximos, conforme mostrado na Fig. 5.36.

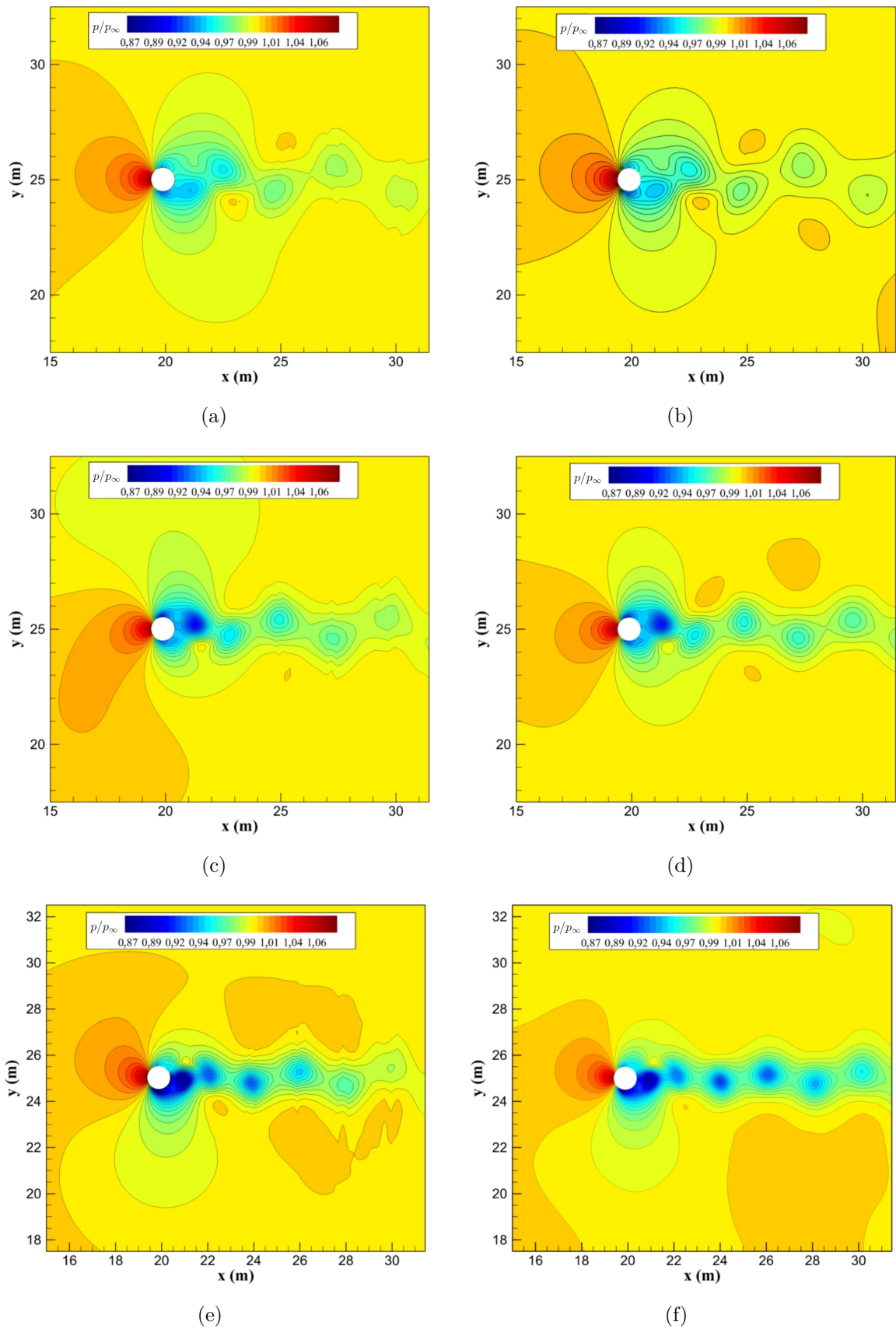


Figura 5.35 – Campos de  $p/p_\infty$  obtidos para os escoamentos a  $Re_D = 80, 150$  e  $300$ . MFVC (a), (c) e (e) e *OpenFOAM* (b), (d) e (f).

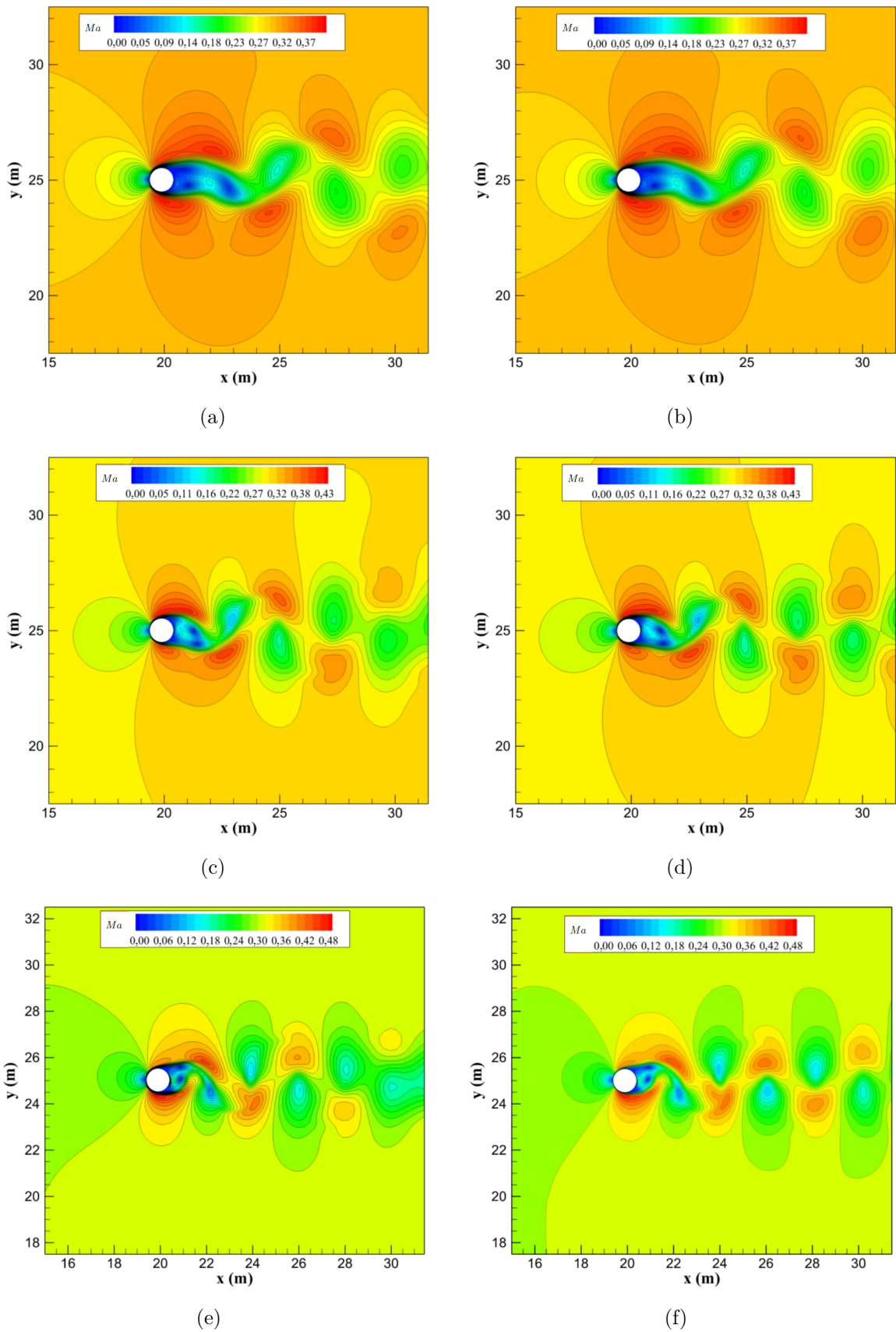


Figura 5.36 – Campos de  $Ma$  obtidos para os escoamentos a  $Re_D = 80, 150$  e  $300$ . MFVC (a), (c) e (e) e *OpenFOAM* (b), (d) e (f).

As curvas da norma  $L_2$ , definida no item 4.5.2, em função de  $\psi$  para os escoamentos a  $Re_D = 20$  são mostrados na Fig. 5.37.

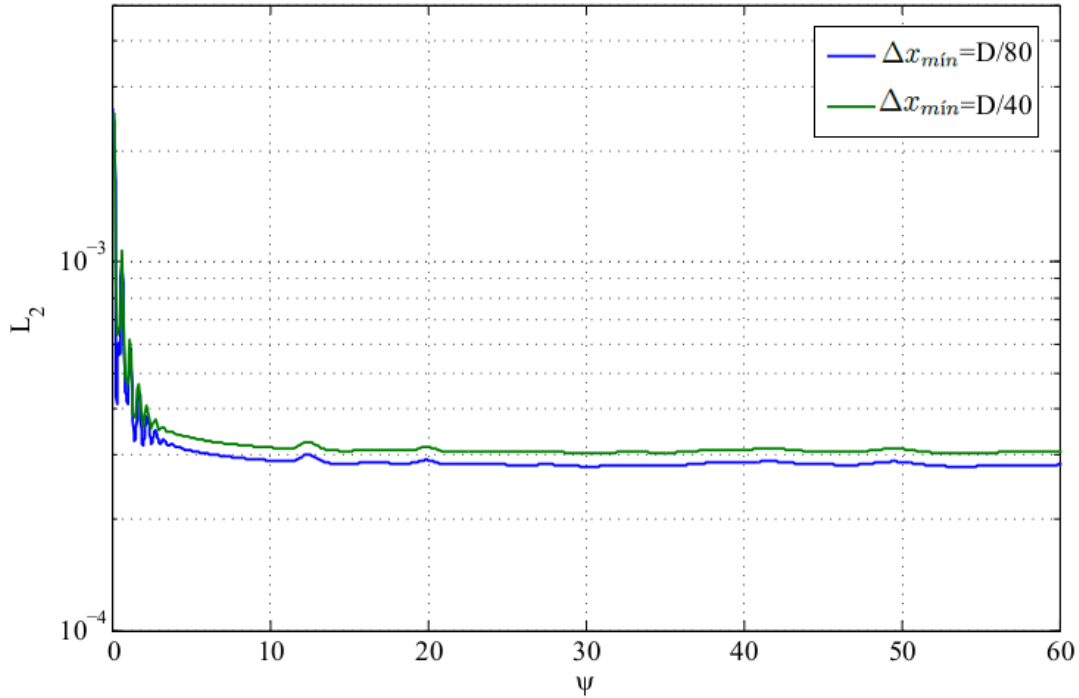


Figura 5.37 – Curva de  $L_2$  em função de  $\psi$  obtidas com o MFVC para os escoamentos a  $Re_D = 20$ .

Observam-se maiores valores de  $L_2$  no início da modelagem com queda e estabilização ao longo do tempo, e redução de  $L_2$  com o aumento do refinamento da malha. Os valores de  $L_2$  finais obtidos para os escoamentos a  $Ma_\infty = 0,3$  são próximos de  $3 \times 10^{-4}$ , o que mostra que a condição de contorno na parede do cilindro é obedecida de forma aceitável através do MFVC.

### 5.2.2 Escoamento Subsônico Sobre um Cilindro em Rotação

Para as simulações de escoamentos subsônicos sobre um cilindro em rotação foram utilizadas as mesmas malhas e as mesmas condições de contorno e iniciais da subseção anterior, considerando  $Re_D = 200$ .

A velocidade angular do cilindro ( $\omega$ ) é igual a  $0,3 \text{ rad/s}$  e a sua rotação é no sentido horário. Esta velocidade angular foi escolhida para que a razão entre os módulos da velocidade tangencial do cilindro e da velocidade de corrente livre fosse igual a  $0,5$ .

Utilizando esta mesma configuração, porém em regime incompressível ( $Ma_\infty \ll 1$ ), este escoamento foi estudado de formas: experimental (COUTANCEAU; MENARD, 1985)

e numérica (SILVA et al., 2011). Os resultados apresentados nestes trabalhos são utilizados para validação das simulações com o MFVC e com o *OpenFOAM*.

As simulações foram realizadas até  $\psi = 75$ . Os campos de pressão adimensional ( $p/p_\infty$ ), do número de Mach e as linhas de corrente obtidos com o MFVC e com o *OpenFOAM*, em  $\psi = 75$ , são mostrados nas Figs. 5.38, 5.39 e 5.40, respectivamente.

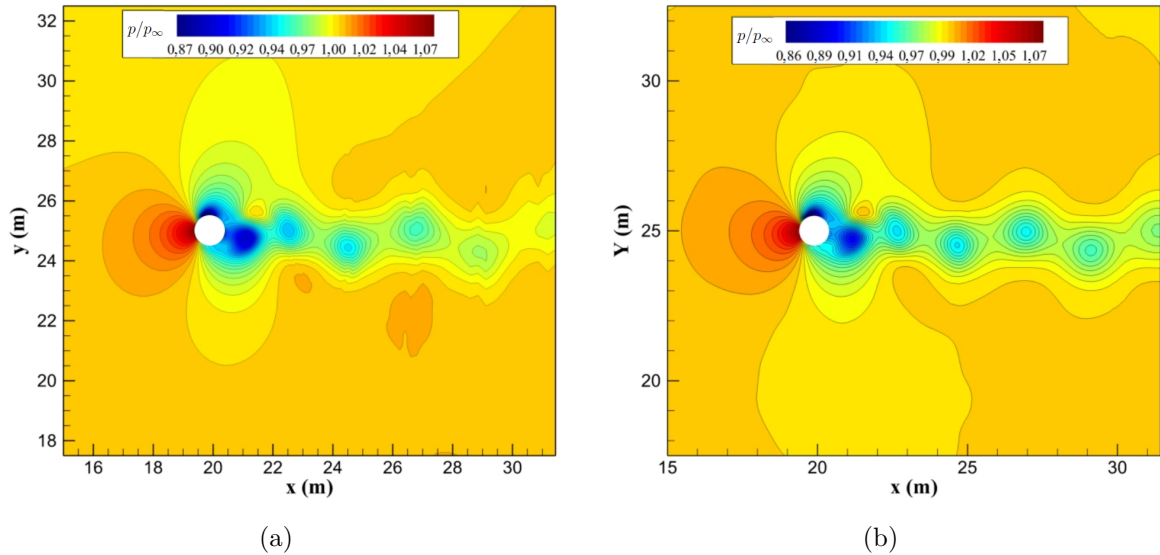


Figura 5.38 – Campos de pressão adimensional obtidos com o MFVC (a) e com o *OpenFOAM* (b) para os escoamentos subsônicos sobre um cilindro em rotação.  $\Delta x_{\min} = D/80$ .

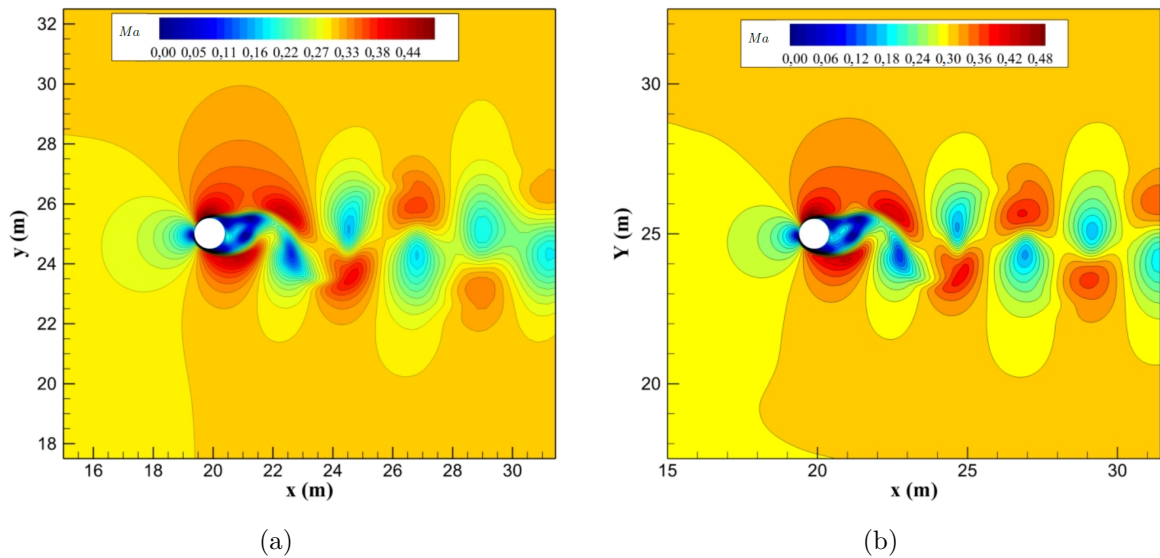


Figura 5.39 – Campos de Mach obtidos com o MFVC (a) e com o *OpenFOAM* (b) para os escoamentos subsônicos sobre um cilindro em rotação.  $\Delta x_{\min} = D/80$ .

Os campos de pressão adimensional e de Mach obtidos com o MFVC e com o

*OpenFOAM* foram semelhantes. Observa-se na Fig. 5.40 que também houve proximidade entre as linhas de corrente.

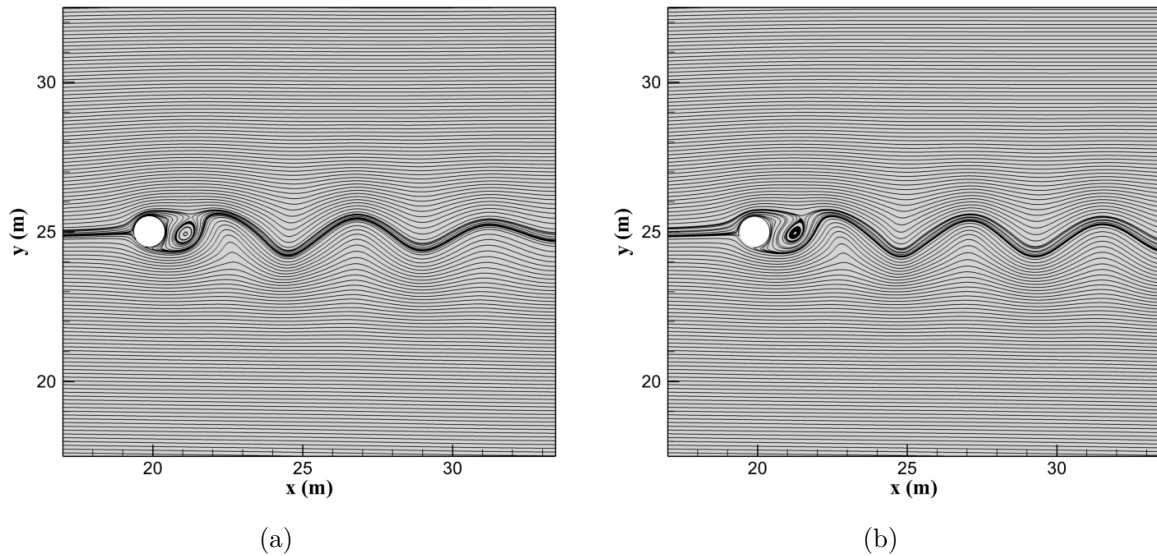


Figura 5.40 – Linhas de corrente obtidas com o MFVC (a) e com o *OpenFOAM* (b) para os escoamentos subsônicos sobre um cilindro em rotação.  $\Delta x_{\min} = D/80$ .

Na Tabela 5.5 os parâmetros  $C_d$ ,  $C_l$  e  $St$  obtidos nestas simulações e da literatura são mostrados.

Tabela 5.5 – Parâmetros obtidos nas simulações do escoamento subsônico sobre um cilindro em rotação usando o MFVC e o *OpenFOAM*.

	$C_d$	$C_l$	$St$
MFVC $\Delta x_{\min} = D/40$	1,50	1,16	0,19
MFVC $\Delta x_{\min} = D/80$	1,42	1,09	0,19
<i>OpenFOAM</i> $\Delta x_{\min} = D/80$	1,36	1,11	0,19
Silva et al. (2011) - Numérico	1,35	1,17	0,19

Os parâmetros  $C_d$  e  $C_l$  mostrados na Tab. 5.5 foram também calculados por médias temporais. Nas Figuras 5.41 e 5.42, respectivamente, as curvas  $C_d$  e  $C_l$  em função de  $\psi$  são apresentadas.

Na Figura 5.41 os picos de  $C_d$  localizados próximos a  $\psi = 0$  não são mostrados para melhor detalhamento das demais regiões. Observa-se nesta figura que os valores de  $C_d$  obtidos utilizando com o MFVC são ligeiramente superiores aos obtidos com o *OpenFOAM*. As curvas de  $C_l$  apresentadas na Fig. 5.42 foram próximas, a diferença entre os valores de  $St$  obtidos com o MFVC e com o *OpenFOAM* é de aproximadamente 2 % e não aparecem na Tab. 5.5 por ter ordem de  $10^{-3}$ .

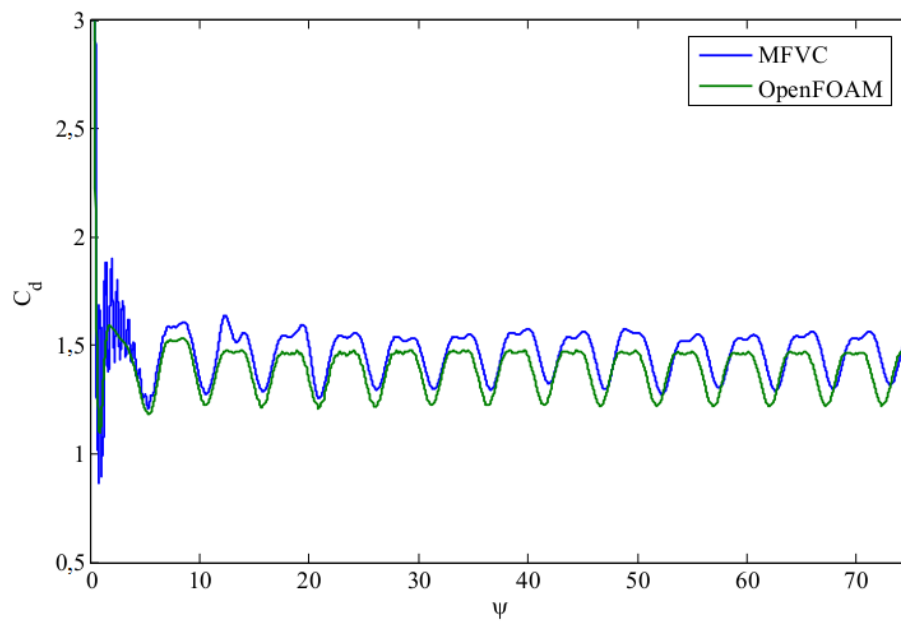


Figura 5.41 – Curvas de  $C_d$  em função de  $\psi$  obtidas com o MFVC e com o *OpenFOAM* para o problema do escoamento sobre um cilindro em rotação, utilizando as malhas com  $\Delta x_{\min} = D/80$ .  $Re_D = 200$ .

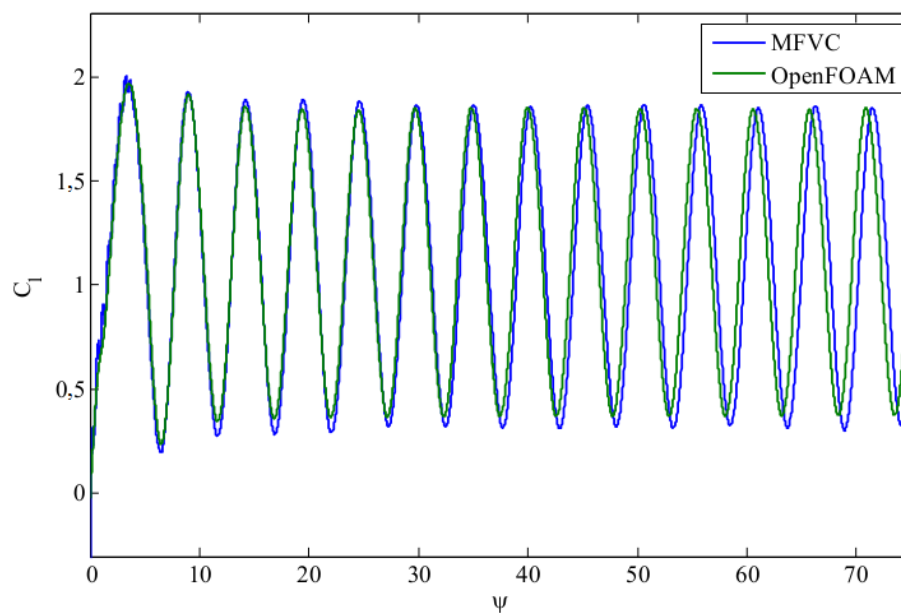


Figura 5.42 – Curvas de  $C_l$  em função de  $\psi$  obtidas com o MFVC e com o *OpenFOAM* para o problema do escoamento sobre um cilindro em rotação, utilizando as malhas com  $\Delta x_{\min} = D/80$ .  $Re_D = 200$ .

Na Figura 5.43 são mostradas as linhas de corrente obtidas utilizando as malhas com  $\Delta x_{\min} = D/80$ , para  $\psi = 1,5$  e  $\psi = 4,5$ , respectivamente, e também o resultado experimental de Coutanceau e Menard (1985).

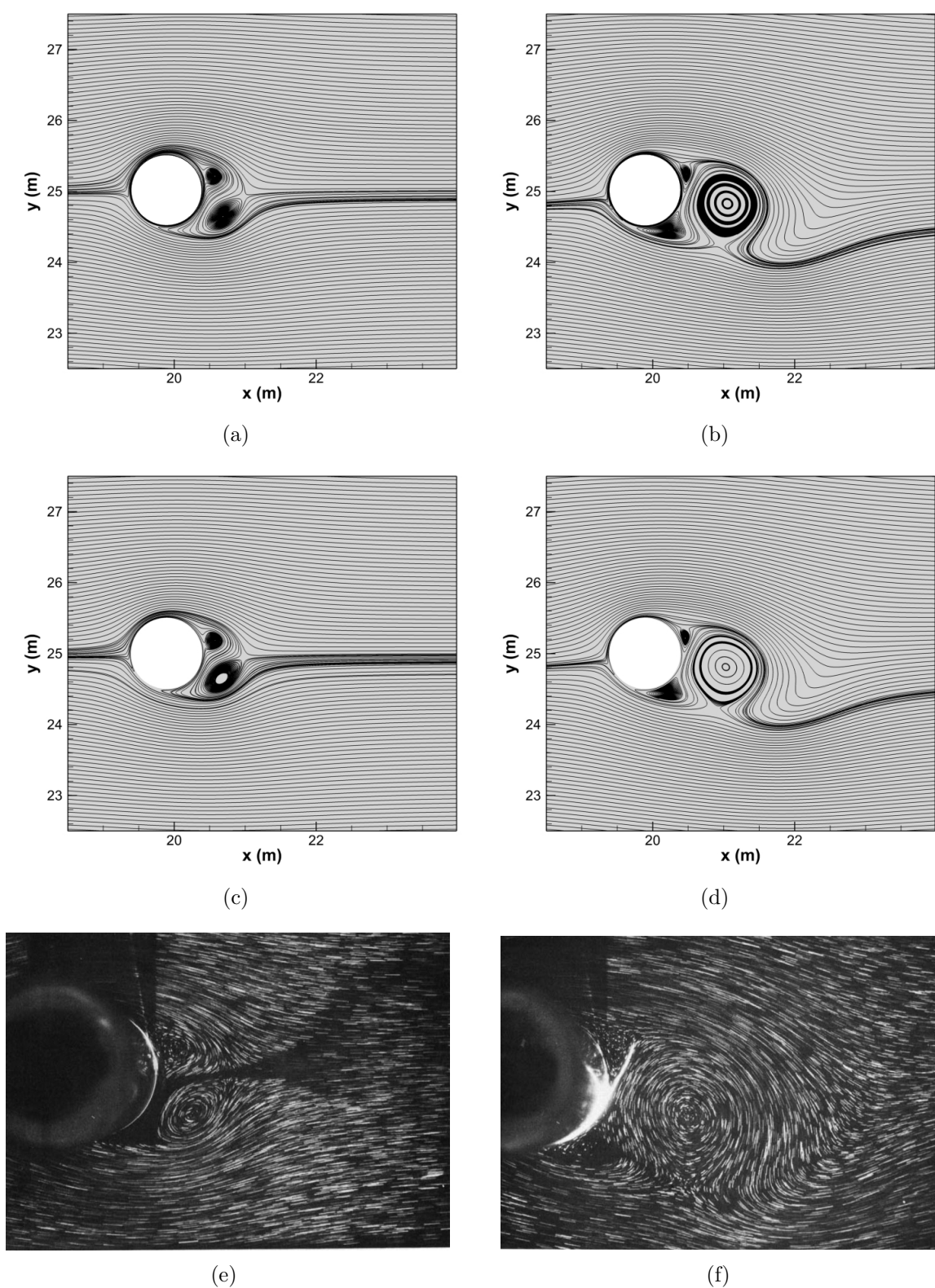


Figura 5.43 – Linhas de corrente obtidas para os escoamento subsônicos sobre um cilindro em rotação. Coluna da esquerda  $\psi = 1,5$  e coluna da direita  $\psi = 4,5$ . MFVC (a) e (b), *OpenFOAM* (c) e (d) e Coutanceau e Menard (1985) (e) e (f).

Através da Fig. 5.43 é possível observar boa concordância entre os dados experimentais e os obtidos neste trabalho. O que mostra que o MFVC tem capacidade de modelar a fase transiente inicial de escoamentos.

Na Figura 5.44 é mostrado o gráfico da norma  $L_2$  em função de  $\psi$ , para os dois refinamentos de malha utilizados no código MFVC.

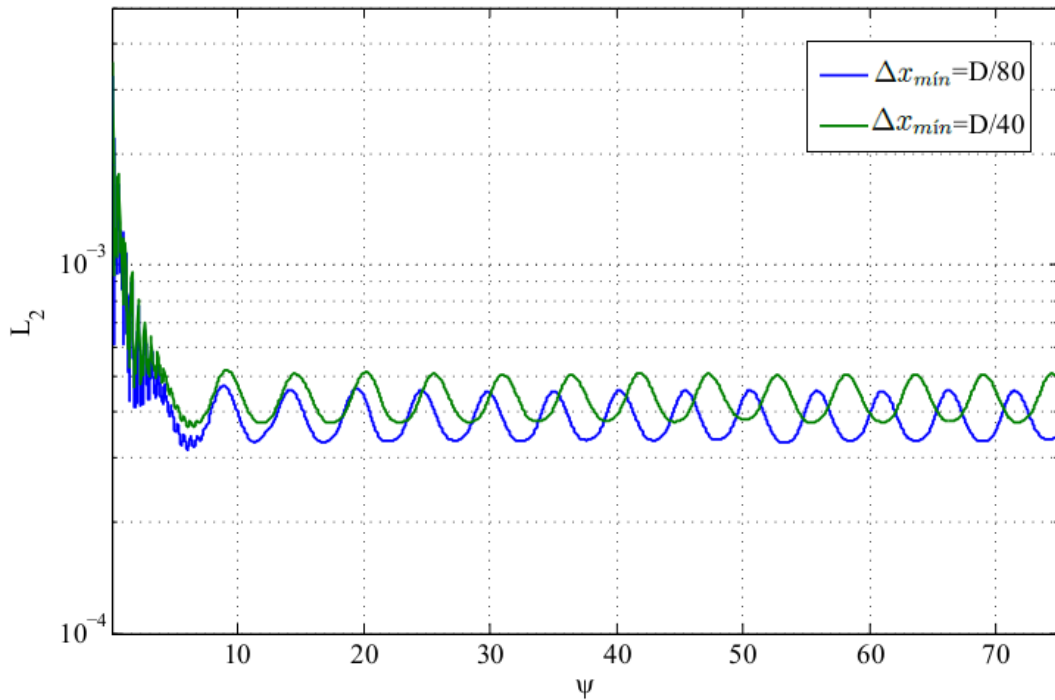


Figura 5.44 – Curvas da norma  $L_2$  em função de  $\psi$  obtidas para o problema do escoamento sobre um cilindro em rotação, utilizando as malhas com  $\Delta x_{\min} = D/40$  e  $\Delta x_{\min} = D/80$ .

Observa-se na Fig. 5.44 valores finais na ordem de  $4 \times 10^{-4}$ , e sua queda com o aumento do refinamento de malha. Como observado nesta subseção e o valor de  $\Delta x_{\min} = D/80$  apresentou resultados satisfatórios..

### 5.2.3 Difração de onda de choque plana

A difração de uma onda de choque ocorre quando ela encontra um obstáculo imerso no fluido. Neste problema é estudada a difração de uma onda de choque plana, a  $Ma = 2,81$ , por um cilindro, com o objetivo de avaliar a aplicação do MFVC em um caso transiente e com o fluido em repouso no tempo inicial.

Há diversos trabalhos na literatura estudando a interação entre perfis circulares ou semicirculares e ondas de choque a  $Ma = 2,81$ , sendo citados aqui: um experimental, publicado por Kaca (1988), e outro numérico, publicado por Drikakis et al. (1997). Na

Figura 5.45 o problema é ilustrado. As propriedades da onda de choque plana ainda não perturbada são indicadas pelo subscrito  $OC$  e as condições iniciais do problema pelo subscrito  $\infty$ .

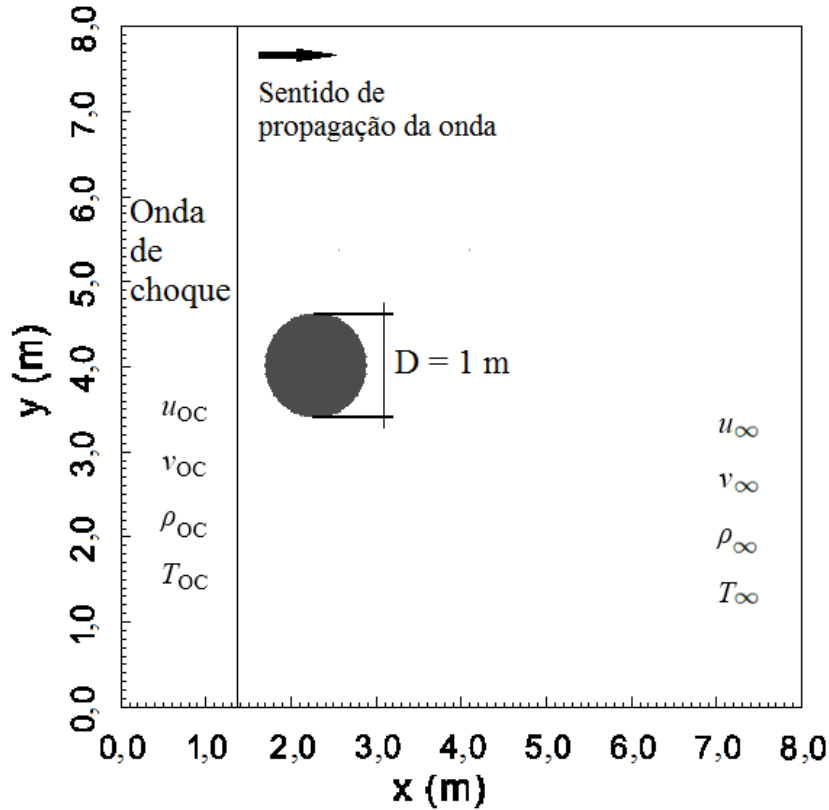


Figura 5.45 – Representação do problema de difração de uma onda de choque em um perfil circular.

Como mostrado na Fig. 5.45 o domínio é quadrado com arestas de 8 m e o centro do cilindro está localizado em  $x = 2,25$  m e  $y = 4$  m. A onda de choque plana propaga-se na direção positiva do eixo  $x$  e em  $t = 0$  s encontra-se em  $x = 0$  m.

Considerou-se  $Re_D = 1000$ , mas como  $u_\infty = 0$  m/s, este valor foi calculado com base nas propriedades da onda de choque, ou seja,  $Re_D = \frac{\rho_{OC} u_{OC} D}{\mu}$ .

Para o estudo deste problema pelo MFVC foram utilizadas duas malhas uniformes, uma com  $300 \times 300$  células e a outra com  $600 \times 600$  células. Estas malhas possuem  $\Delta x = \Delta y = D/37,5$  e  $\Delta x = \Delta y = D/75$ , respectivamente. Para a simulação com o *OpenFOAM* utilizou-se a ferramenta *SnappyHexMesh* para gerar uma malha adaptativa com 355.594 células. Na Figura 5.46 é apresentada a região da malha próxima ao cilindro, utilizada com o *OpenFOAM*.

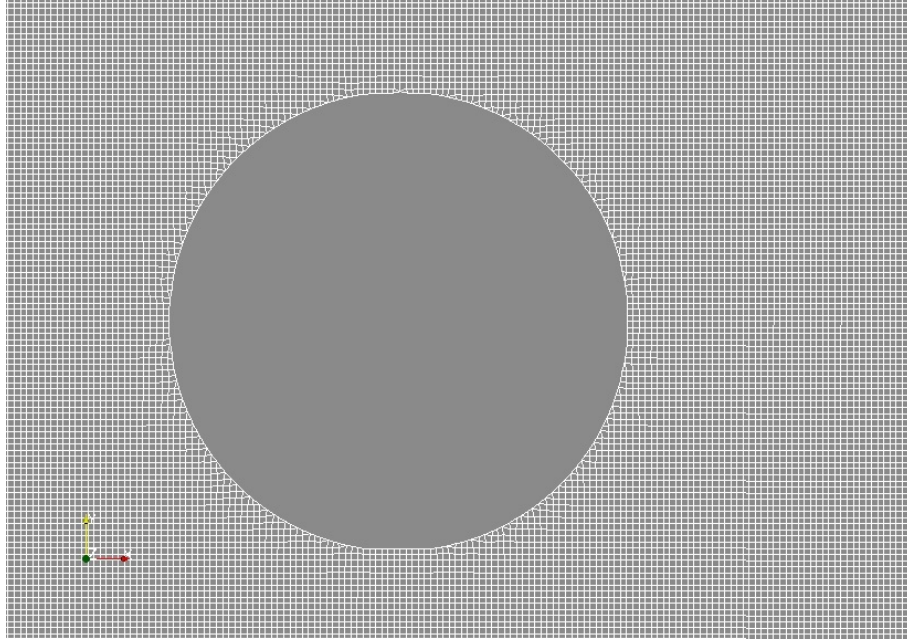


Figura 5.46 – Detalhamento da malha utilizada no programa *OpenFOAM* na região próxima ao cilindro.

Pode-se observar na Fig. 5.46, que a malha adaptativa utilizada no programa *OpenFOAM* é construída a partir de uma malha cartesiana.

A fronteira esquerda do domínio é uma entrada supersônica e para este tipo de fronteira foi utilizada a condição de contorno de Dirichlet para todas as variáveis, pois é esperado que as perturbações no escoamento provenientes do domínio não afetem as suas propriedades. Para isso, é necessário que exista uma distância suficiente para que a onda de choque se forme entre a entrada supersônica e o corpo imerso ou que o tempo máximo de simulação seja limitado até o instante no qual a onda de choque chegue na entrada supersônica. Para todas as outras fronteiras foram utilizadas as condições de contorno de Neumann para todas as variáveis, exceto a fronteira do cilindro no *OpenFOAM*, onde a velocidade é nula.

Na Tabela 5.6 as condições iniciais do domínio e as variáveis do escoamento na onda de choque são apresentadas.

Tabela 5.6 – Condições iniciais e da onda de choque para o problema de difração de uma onda de choque plana.

Onda de choque		Condição inicial	
$\rho_{OC}$	$5,143 \text{ kg/m}^3$	$\rho_\infty$	$1,4 \text{ kg/m}^3$
$u_{OC}$	$2,045 \text{ m/s}$	$u_\infty$	$0 \text{ m/s}$
$v_{OC}$	$0 \text{ m/s}$	$v_\infty$	$0 \text{ m/s}$
$p_{OC}$	$9,046 \text{ Pa}$	$p_\infty$	$1 \text{ Pa}$

Para este problema o tempo adimensional é indicado por  $\xi$ . Este valor é calculado

da mesma forma que por Kaca (1988) como uma função da posição da onda de choque na coordenada  $x$  e do diâmetro do cilindro, pela seguinte equação:

$$\xi = \frac{L}{D} \quad (5.2)$$

sendo  $L$  a distância na coordenada  $x$  entre as posições da onda de choque e da borda esquerda do cilindro. Desta forma,  $\xi = 0$  quando a onda de choque atinge o cilindro e  $\xi$  é negativo antes deste momento. Na Figura 5.47 a dimensão  $L$  e a posição da onda de choque são apresentadas.

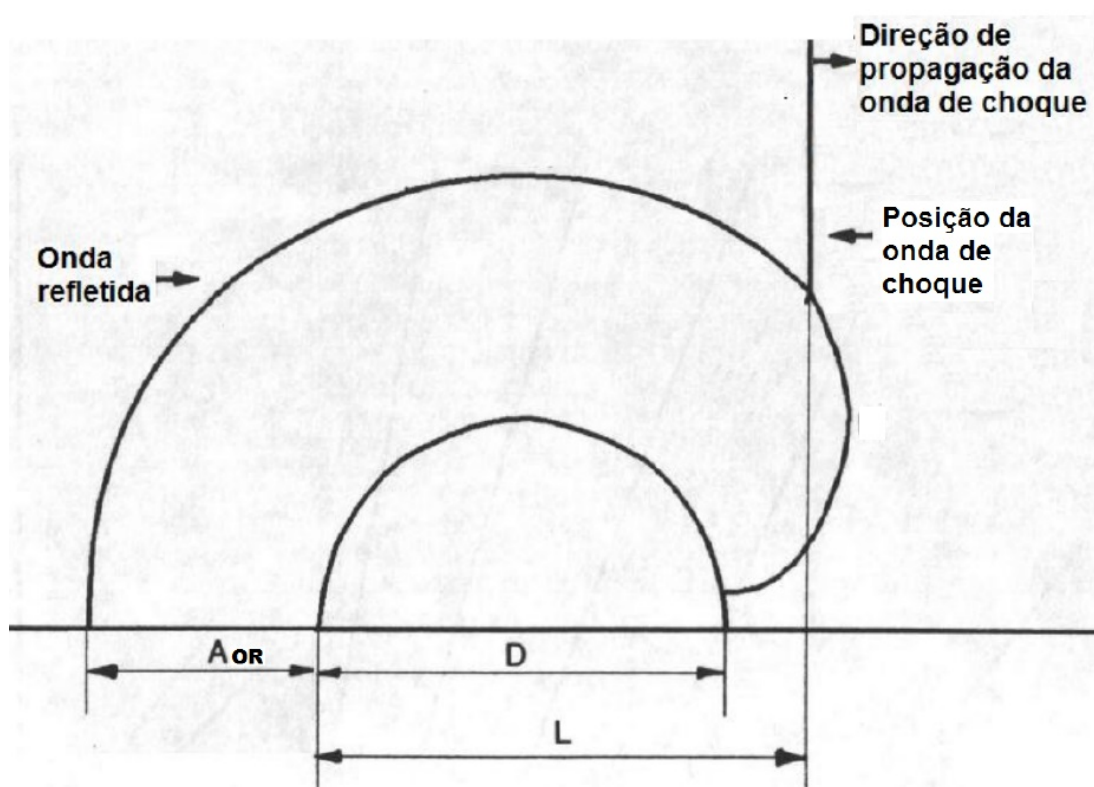


Figura 5.47 – Parâmetros geométricos do problema de difração de uma onda de choque plana em um perfil circular. Fonte: Adaptado de Kaca (1988).

A distância adimensional da onda refletida,  $D_{OR}$ , é um parâmetro comumente estudado em problemas de difração de ondas de choque e seu cálculo é feito através da Eq. (5.3), sendo a dimensão  $A_{OR}$  apresentada na Fig. 5.47.

$$D_{OR} = \frac{A_{OR}}{D} \quad (5.3)$$

Todas as simulações deste problema foram realizadas até  $\xi = 22$ . A partir deste tempo as condições de contorno começam a interferir nos resultados, devido ao tamanho restrito do domínio. O tempo necessário para executar esta simulação com o MFVC foi de 28 horas utilizando um processador Intel i7.

Na Figura 5.48 são mostrados os campos de  $\rho/\rho_\infty$  obtidos pelo o MFVC e com o *OpenFOAM* em três instantes de tempo adimensional diferentes,  $\xi = 1, 2$  e  $3$ , utilizando as malhas com  $600 \times 600$  células.

Observa-se na Fig. 5.48 a proximidade entre os valores máximos e mínimos de  $\rho/\rho_\infty$  obtidos com o MFVC e com o *OpenFOAM*, para todos os instantes de  $\xi$ , e também boa concordância entre as geometrias das ondas refletidas.

Nas Figuras 5.49a, 5.49b e 5.49c são apresentadas as isolinhas de  $\rho/\rho_\infty$  obtidas pelo MFVC, pelo *OpenFOAM* e da literatura, respectivamente, para o tempo adimensional  $\xi = 1, 45$ .

Observa-se nas Figs. 5.49a, 5.49b e 5.49c boa proximidade entre os dados da literatura e os obtidos pelo MFVC e *OpenFOAM*, que apresentaram valores máximos de  $\rho/\rho_\infty$  iguais a 7,99 e 7,98 respectivamente. A posição das isolinhas também é similar nas três figuras. Na Figura 5.49c as linhas contínuas representam resultados experimentais de Kaca (1988) e as linhas tracejadas resultados numéricos apresentados pelo mesmo autor para um caso invíscido.

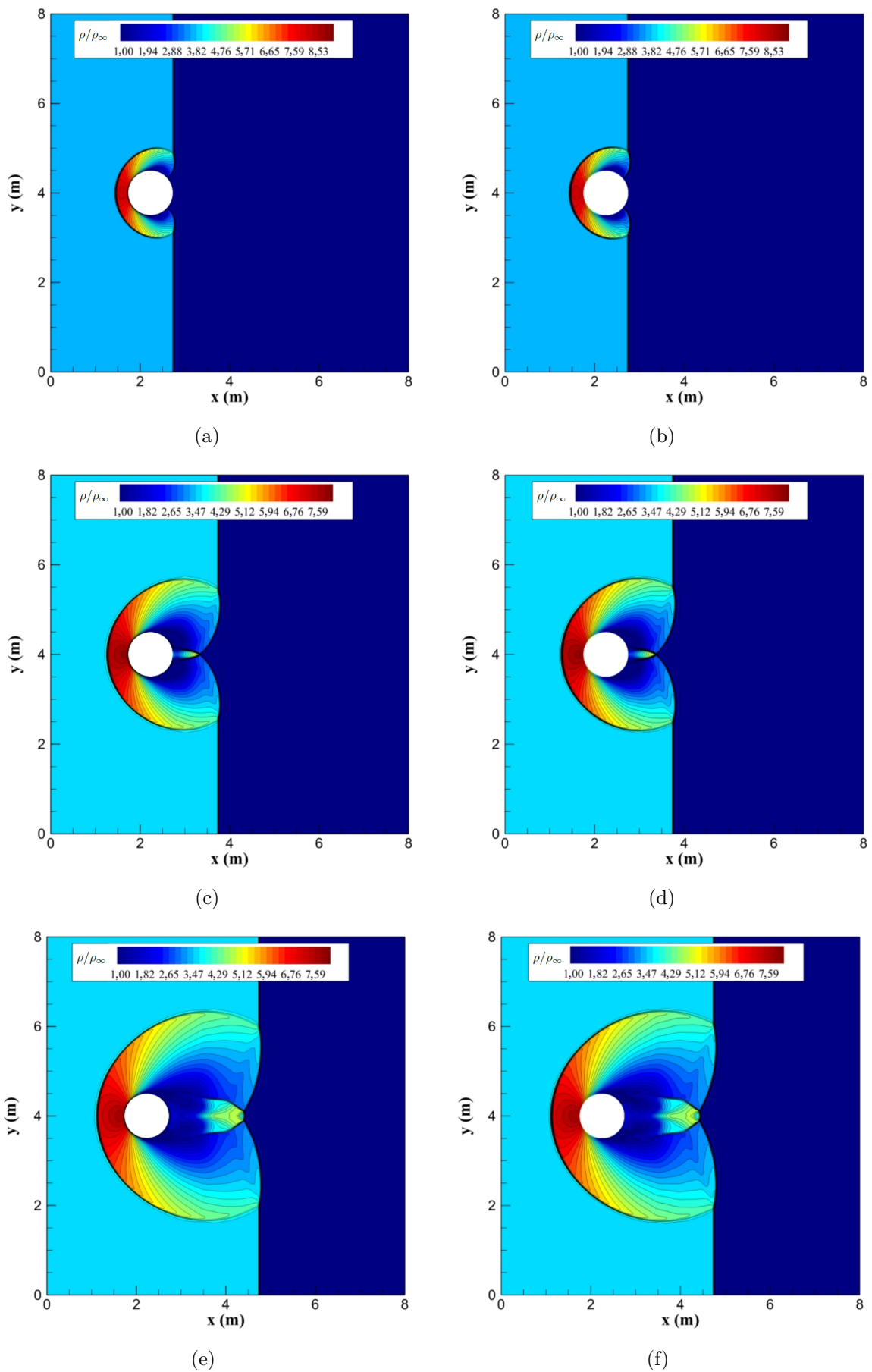
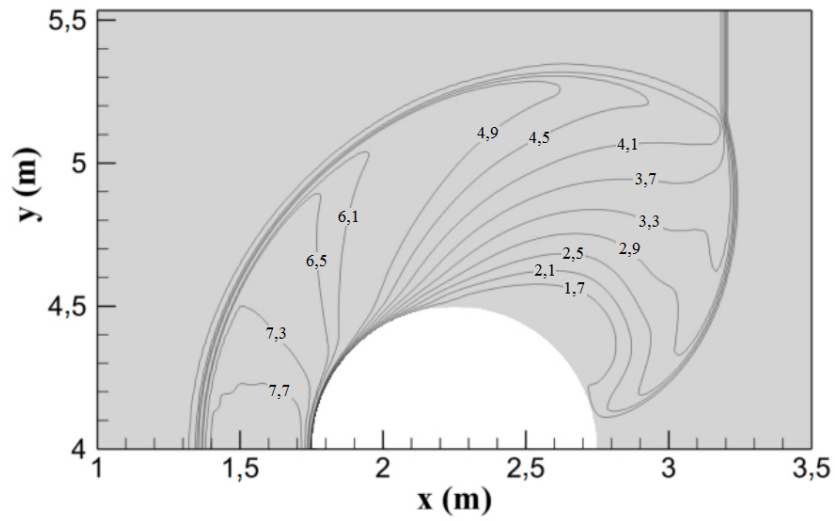
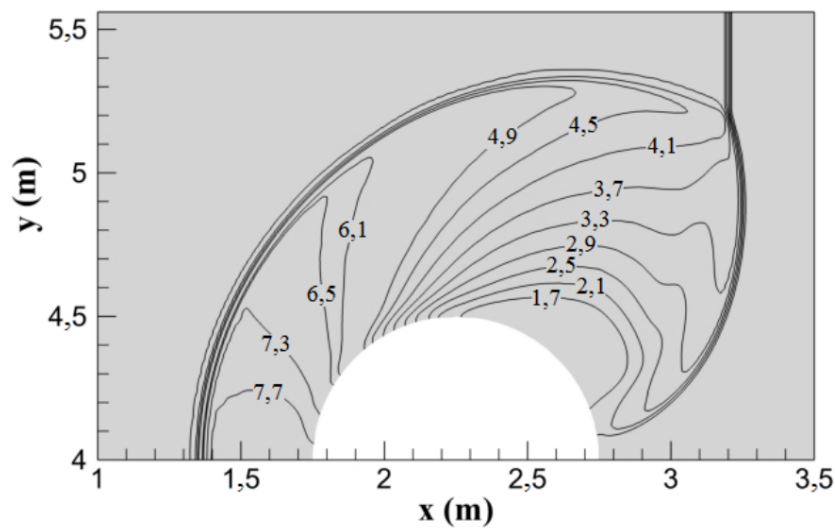


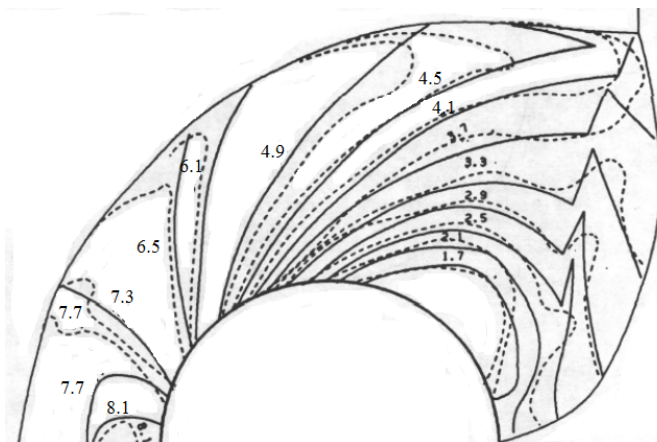
Figura 5.48 – Campos de  $\rho/\rho_\infty$  obtidos com o MFVC (a), (c) e (e) e com *OpenFOAM* (b), (d) e (f), para  $\xi = 1$ , 1ª linha,  $\xi = 2$ , 2ª linha e  $\xi = 3$ , 3ª linha.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.49 – Contornos de  $\rho/\rho_\infty$  obtidos com o MFVC (a), com o *OpenFOAM* (b) e por Kaca (1988), para o tempo adimensional  $\xi = 1,45$ .

Nas Figuras 5.50, 5.51, 5.52 e 5.53 são mostradas as curvas de  $u/u_{OC}$ , de  $p/p_\infty$ , de  $\rho/\rho_\infty$  e de  $T/T_\infty$ , respectivamente, extraídas ao longo da reta horizontal que passa pelo centro do cilindro, em  $y = 4$  m. Na Figura 5.54, a curva de  $v/u_{OC}$  foi extraída de uma reta vertical passando pelo centro do cilindro, em  $x = 2,25$  m. Todas as curvas são para o tempo adimensional  $\xi = 3$ .

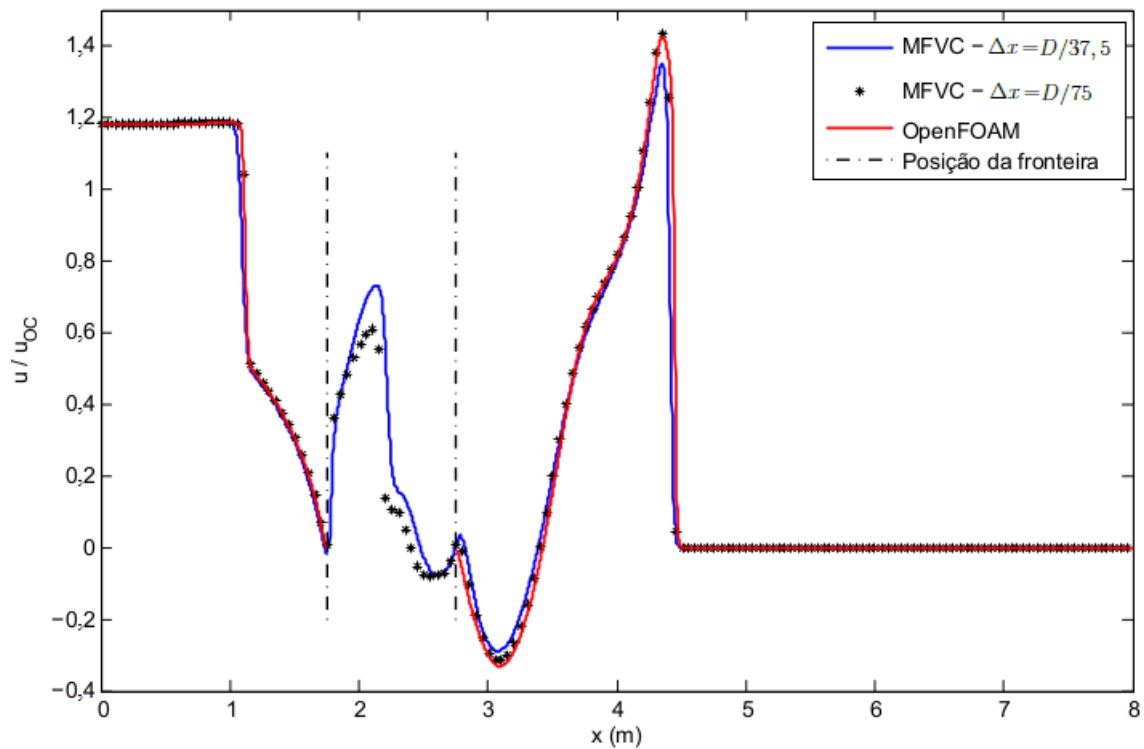


Figura 5.50 – Curvas de  $u/u_{OC}$  para  $y = 4$  m e  $\xi = 3$  obtidas com o MFVC e com o *OpenFOAM*.

Os resultados das simulações utilizando o MFVC e o *OpenFOAM* apresentados nas Figs. 5.50 a 5.53 foram próximos. Observou-se, que com o aumento do refinamento da malha, a solução obtida através do MFVC aproximou-se da apresentada pelo *OpenFOAM*.

Nas Figuras 5.51 e 5.52 são visíveis intensos gradientes nas curvas de pressão e massa específica próximas às fronteiras imersas, evidenciando que estes locais são de transição entre as propriedades dos escoamentos interno e externo e que há necessidade de métodos numéricos de baixa viscosidade artificial para permitir a ocorrência destes gradientes e a rápida transição das propriedades. Por este mesmo motivo, foi observado que as soluções obtidas com o MFVC são melhoradas com a redução do grau de difusividade numérica da função limitadora.

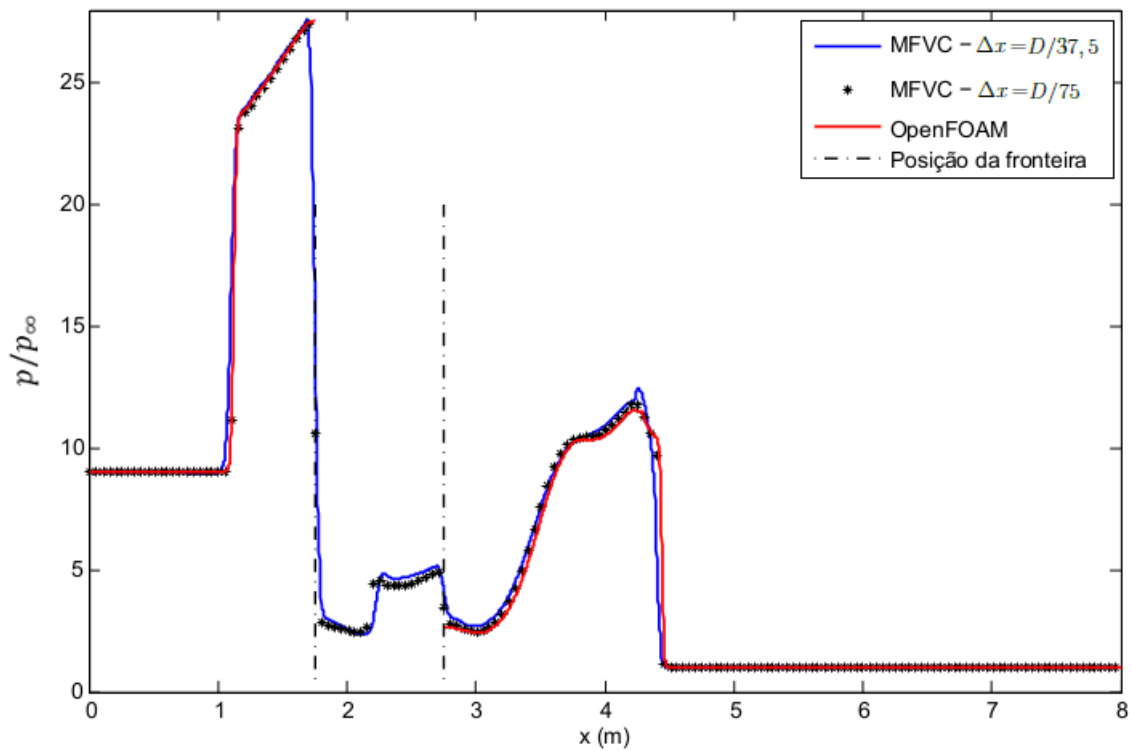


Figura 5.51 – Curvas de  $p/p_\infty$  para  $y = 4$  m e  $\xi = 3$  obtidas com o MFVC e com o *OpenFOAM*.

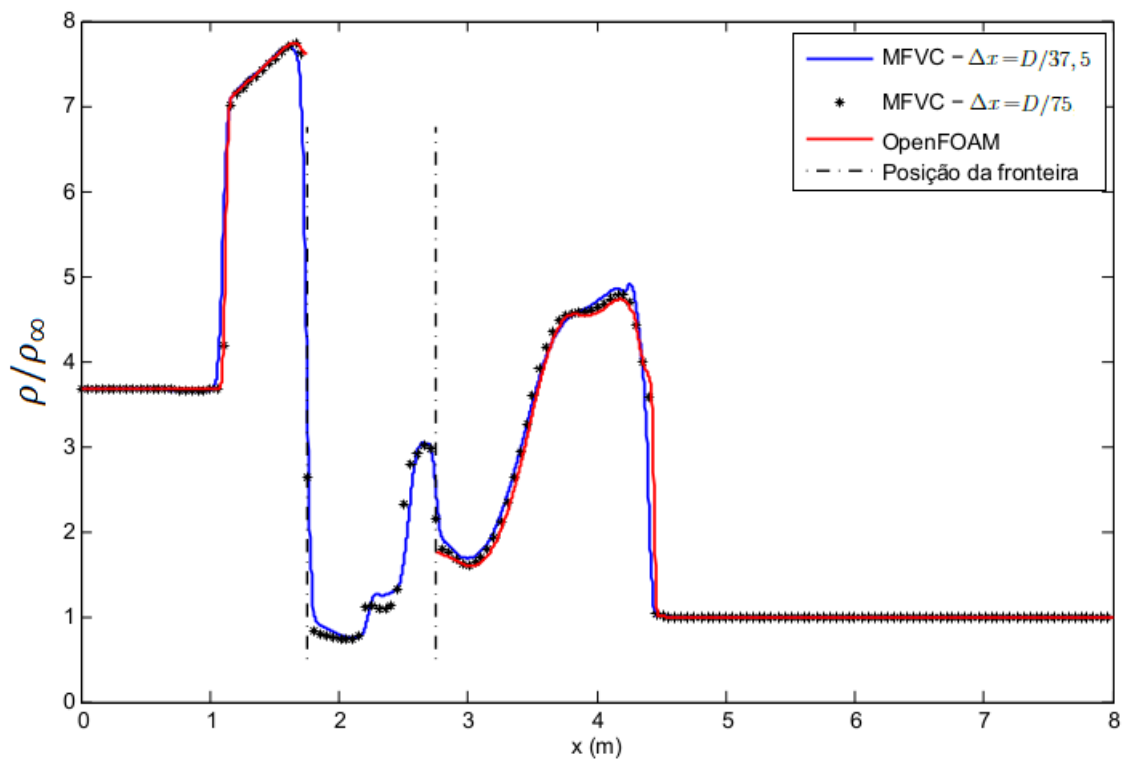


Figura 5.52 – Curvas de  $\rho/\rho_\infty$  para  $y = 4$  m e  $\xi = 3$  obtidas com o MFVC e com o *OpenFOAM*.

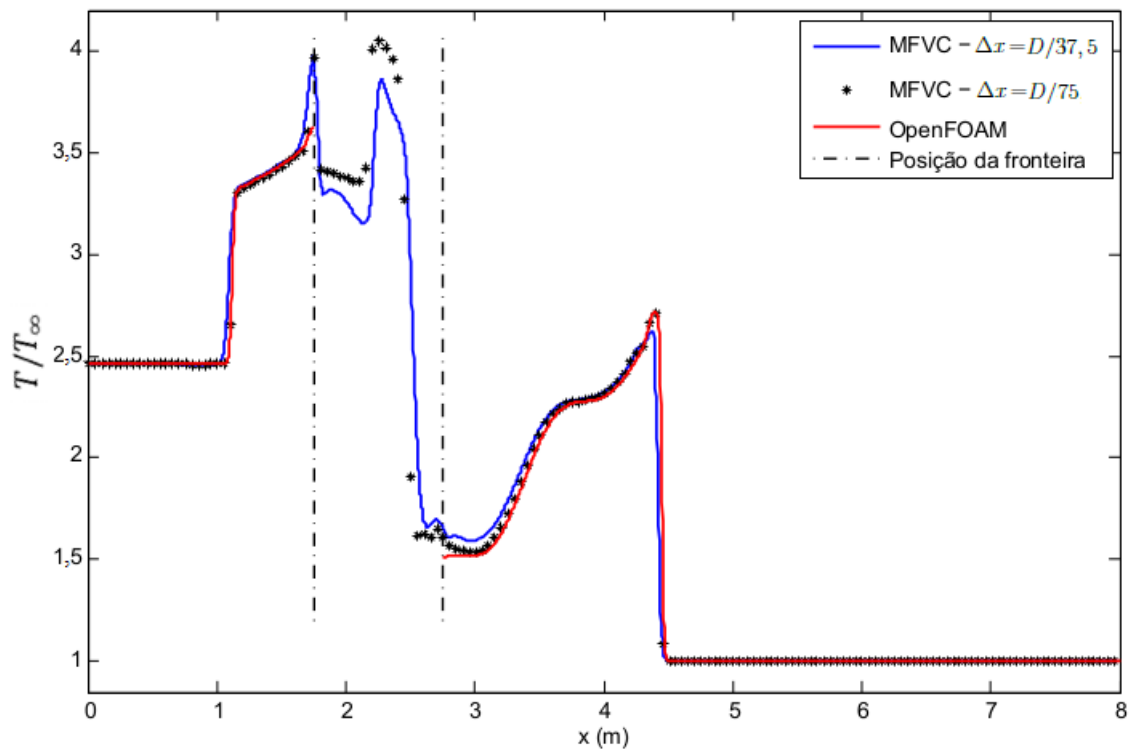


Figura 5.53 – Curvas de  $T/T_{\infty}$  para  $y = 4$  m e  $\xi = 3$  obtidas com o MFVC e com o *OpenFOAM*.

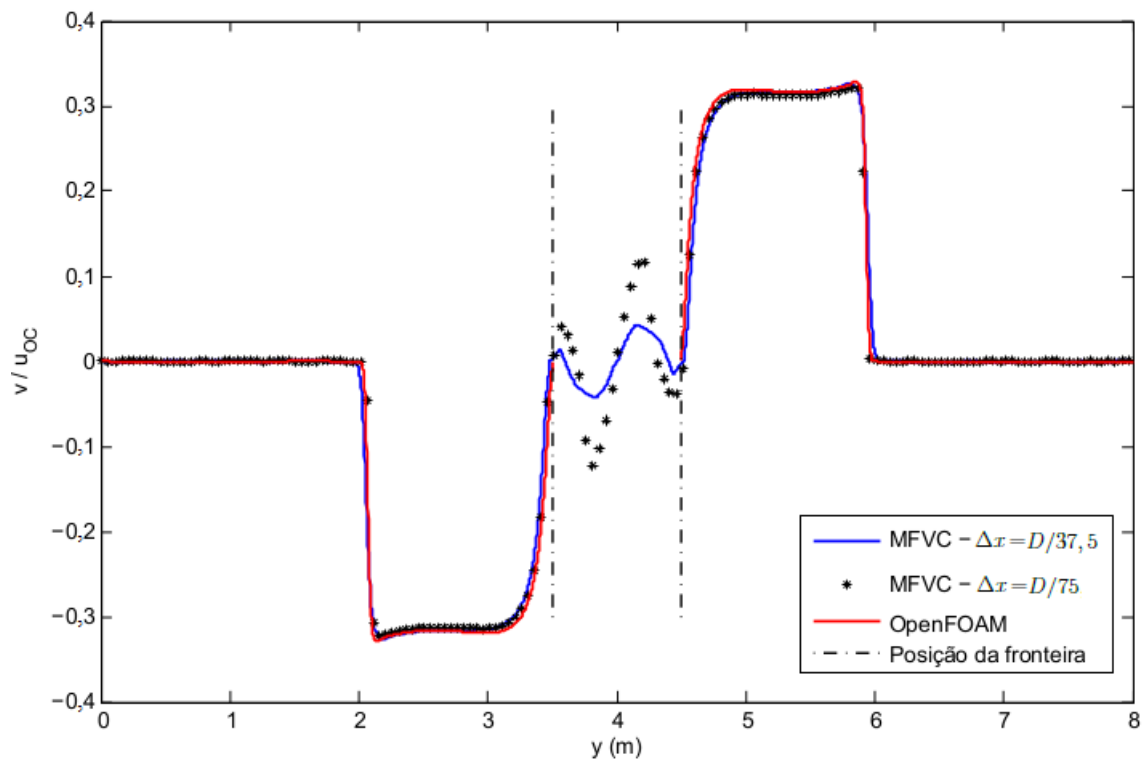


Figura 5.54 – Curvas de  $v/u_{OC}$  para  $x = 2,25$  m e  $\xi = 3$  obtidas com o MFVC e com o *OpenFOAM*.

Caso os gradientes de pressão na região das fronteiras não sejam intensos o suficiente para transição das magnitudes das variáveis do escoamento, a solução com o MFVC é prejudicada. O que pode ser observado nas Figs. 5.51 e 5.52 próximo a  $x = 2,75$  m, onde na região logo atrás do cilindro a pressão e a massa específica ainda são um pouco superiores aos seus patamares externos. Desta forma o gás tem capacidade de se expandir criando um fluxo local, que tem como fonte a própria região da fronteira imersa.

Este fluxo de gás pode ser observado na Fig. 5.50, particularmente para  $\Delta x = D/37,5$ , onde há uma região com velocidade positiva logo após a fronteira imersa, o que não ocorreu com o *OpenFOAM*. Em regime permanente, por haver expansão de gás da fronteira imersa, na região de baixa pressão do escoamento, deverá haver compressão de gás na região de alta pressão, entretanto, como a massa específica do gás é alta nesta região, o efeito volumétrico desta compressão é pequeno, e assim é pouco visível nas linhas de corrente. Devido a este efeito, as bolhas de recirculação se distanciam um pouco do cilindro, o que pode ser observado pelas linhas de corrente mostradas nas Figs. 5.55 e 5.56.

Na Figura 5.53, próximo à fronteira localizada em  $x = 1,75$  m há um aumento não físico de temperatura, o que mostra necessidade de melhorias no modelo voltadas à equação da conservação de energia e à troca de calor nas fronteiras.

As curvas de  $v/u_{OC}$ , mostradas na Fig. 5.54, obtidas com o MFVC e com o *OpenFOAM* foram muito próximas. Pode ser observada também simetria no escoamento considerando uma linha horizontal que passa pelo centro do cilindro.

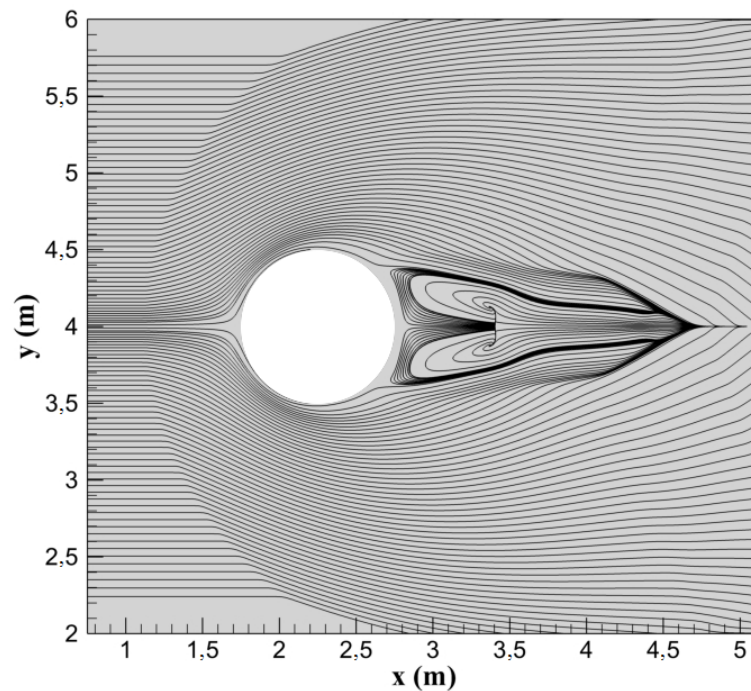


Figura 5.55 – Linhas de corrente obtidos com o MFVC, em  $\xi = 3$ .

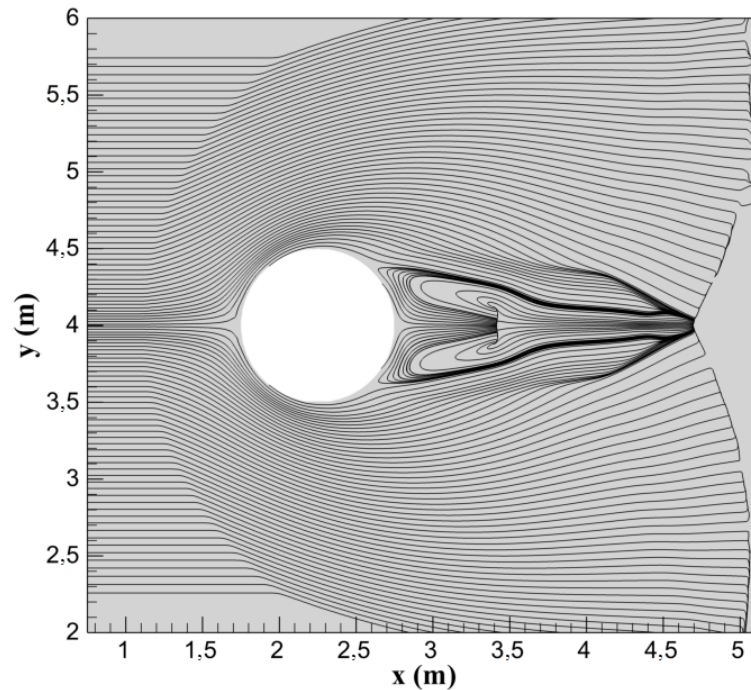


Figura 5.56 – Linhas de corrente obtidos com o *OpenFOAM*, em  $\xi = 3$ .

Como observado na Fig. 5.55 as bolhas de recirculação obtidas com o MFVC afastaram-se do cilindro cerca de  $0,04D$ , sendo este espaço preenchido por um fluxo de gás proveniente da região interna do cilindro, o que não ocorre na solução através do *OpenFOAM*. Importante observar que ao se aumentar o nível de refinamento este fluxo de gás é reduzido, porém isto não ocorre quando é reduzido o número de Courant e consequentemente o valor de  $L_2$ .

Os resultados da distância adimensional da onda refletida,  $D_{OR}$ , em função de  $\xi$  obtidas com o MFVC, com o *OpenFOAM* e da literatura são mostrados na Fig. 5.57. A solução experimental é uma correlação empírica calculada por Kaca (1988).

Os pontos de  $D_{OR}$  em função de  $\xi$  obtidos com o MFVC e com o *OpenFOAM* foram próximos da correlação experimental. Na faixa de tempo adimensional analisada existe uma relação quase linear entre  $D_{OR}$  e  $\xi$ .

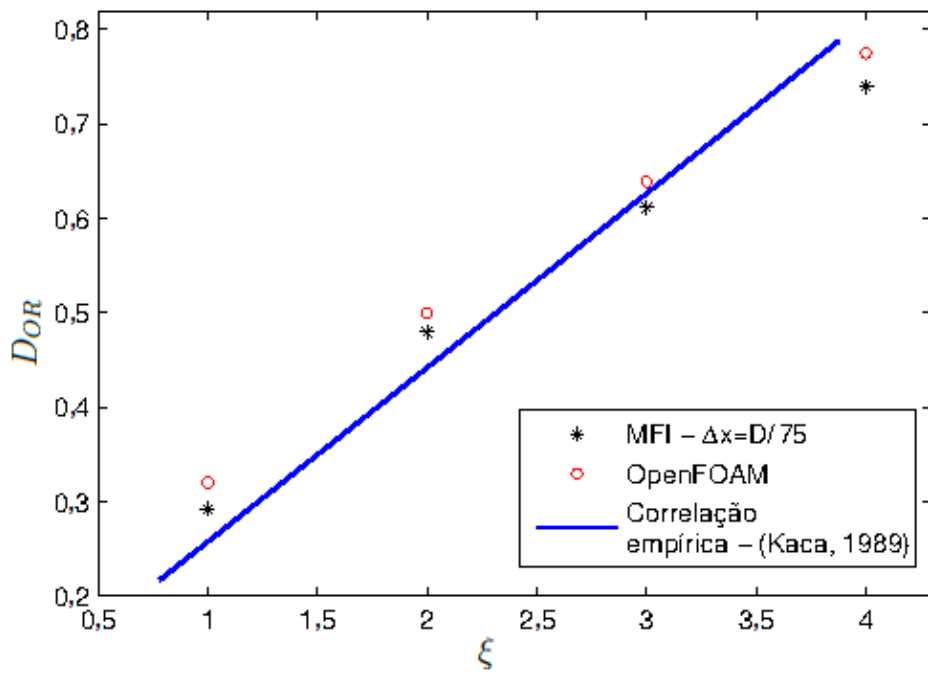


Figura 5.57 – Curvas de  $D_{OR}$  em função de  $\xi$  obtidas com o MFVC, *OpenFOAM* e experimental (KACA, 1988).

Na Figura 5.58 são mostradas curvas de  $C_d$  em função de  $\xi$  obtidas com os dois programas.

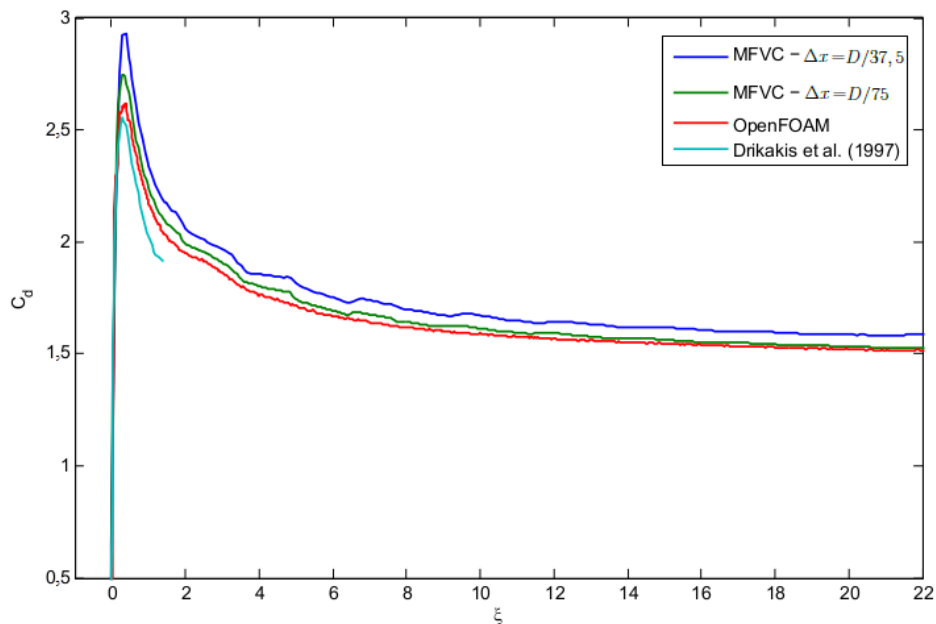


Figura 5.58 –  $C_d$  em função de  $\xi$  obtidos com o MFVC, com o *OpenFOAM* e por Drikakis et al. (1997), onde foi modelada a difração de uma onda de choque a  $Ma = 2,6$  em um escoamento invíscido.

Os resultados de  $C_d$  obtidos com o MFVC apresentaram tendência a valores médios

fnais um pouco superiores aos do *OpenFOAM*. As oscilações observadas na fase transiente inicial tendem a diminuir com o aumento do refinamento da malha. A curva de  $C_d$  obtida numericamente por Drikakis et al. (1997), considerando uma escoamento invíscido e uma onda de choque plana a  $Ma = 2,6$ , também é mostrada na Fig. 5.58. Apesar de haver diferenças nas propriedades do escoamento, a curva de  $C_d$  apresentada por Drikakis et al. (1997) é bastante próxima das obtidas no presente trabalho.

Após análise dos três últimos casos apresentados observa-se que a metodologia de cálculo da força lagrangiana apresentada, na qual é subtraída a taxa de variação da quantidade de movimento na região interna à fronteira imersa, consegue prever com boa exatidão os valores médios dos coeficientes aerodinâmicos. As curvas obtidas com o MFVC ainda apresentaram oscilações, mas observou-se grande redução da amplitude destas, o que pode ser visualizado ao se comparar a Fig. 4.5 com a Fig. 5.58. Isto indica que, para os escoamentos compressíveis, existe grande influência do escoamento interno ao corpo e desta forma é necessário melhorar o cálculo de  $C_d$  e  $C_l$  através do campo de forças lagrangiano.

Através dos problemas estudados nesta seção, concluiu-se que os resultados obtidos com a aplicação do MFVC para simulação de escoamentos compressíveis, viscosos e laminares foram satisfatórios. Destaca-se também os bons resultados apresentados pelo *OpenFOAM*.

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido e avaliado um código computacional para solução numérica de escoamentos compressíveis, bidimensionais e externos utilizando o MFI para representação de objetos imersos. O código e metodologia desenvolvido foi denominado MFVC e aplicado para solução de problemas de escoamentos laminares subsônicos e supersônicos a diversos valores de  $Re_D$  sobre um perfil cilíndrico.

No código computacional desenvolvido foi implementado um esquema centrado de segunda ordem de precisão, com base no MVF para discretização espacial das ENS, e a integração numérica foi feita explicitamente utilizando o método de Euler. As soluções numéricas obtidas por este código foram validadas com soluções obtidas através do *OpenFOAM* e com dados da literatura.

Utilizando o MFVC e o *OpenFOAM* foram estudados escoamentos subsônicos e laminares a  $Ma_\infty = 0,3$  e com  $Re_D$  variando entre 20 e 300 sobre cilindros fixos e em rotação. Nestes casos foram avaliados parâmetros como o  $C_d$ ,  $C_l$ ,  $St$  e  $L_2$ , além das linhas de corrente e dos campos de  $p/p_\infty$  e de  $Ma$  obtidos.

Em regime supersônico foi estudado o problema da difração de uma onda de choque plana a  $Ma = 2,81$  por um cilindro. Neste caso foram analisados os campos de massa específica, os coeficientes de arrasto e curvas de variáveis, como a pressão, a temperatura e a velocidade no domínio.

Os resultados obtidos com o MFVC e com o *OpenFOAM* foram comparados entre si e com dados da literatura. Resultados satisfatórios foram obtidos mostrando a capacidade do MFVC para modelagem de escoamentos compressíveis em regimes subsônico e supersônico. As soluções obtidas nas modelagens com o *OpenFOAM* foram validadas e apresentaram bastante concordância com dados da literatura.

Características observadas nas modelagens utilizando o MFVC, especialmente para os casos a altos valores de  $Ma_\infty$ , foram os intensos gradientes de pressão e massa específica na região das fronteiras imersas, que ocorrem devido às diferentes condições dos escoamentos internos e externos em relação às fronteiras dos cilindros. Estes gradientes crescem com o valor de  $Ma_\infty$  e podem produzir compressão e expansão de gás na região da fronteira imersa.

O número de Courant nas modelagens utilizando o MFVC teve que ser limitado a 0,02 para obtenção de valores de  $L_2$  aceitáveis, sendo esta a maior restrição observada no MFVC.

Conclui-se que o MFVC é uma metodologia de fácil implementação e que produz

resultados satisfatórios para escoamentos compressíveis e laminares sobre fronteiras estacionárias e em rotação, entretanto o custo computacional é grande devido à limitação no número de Courant, o qual foi 10 vezes menor que para os casos simulados no *OpenFOAM*.

## 6.1 Perspectivas para trabalhos futuros

A seguir são sugeridas possíveis melhorias para o código computacional desenvolvido (MFVC) no presente trabalho.

- Controle da temperatura na fronteira imersa, por exemplo, conforme apresentado por Santos (2014);
- Modelagem de turbulência para permitir estudos de escoamentos a maiores números de Reynolds;
- Implementação de um esquema de integração no tempo de ordem superior;
- Implementação de condições de contorno não refletivas nas quais não são impostos valores ou gradientes de variáveis nas fronteiras, conforme proposto por Poinot e Lele (1992) e por Chen e Zha (2006);
- Implementação de esquemas de segunda ordem ou superior para interpolações de variáveis nos pontos lagrangianos da malha euleriana;
- Aplicação de diferentes funções limitadoras de fluxo, tais como: Van Leer, Van Abalda e Super Bee;
- Testar outros tipos de malhas para refinamento local, como por exemplo, malhas compostas/sobrepostas com diferentes níveis de refinamento;
- Implementação de diferentes funções de distribuição do campo de forças lagrangiano;
- Melhoria das soluções nas regiões de baixo Mach através de um esquema implícito de solução e com uso de uma matriz pré-condicionadora da mesma forma que foi aplicado no trabalho de Palma et al. (2006).

## REFERÊNCIAS

ANDERSON, J. D. *Modern Compressible Flow: With Historical Perspective*. 2nd. ed. New York, NY, USA: Mc Graw-Hill, 1990. Citado na página 35.

ARRUDA, J. M. *Modelagem matemática de escamentos internos forçados utilizando o Método da Fronteira Imersa e o Modelo Físico Virtual*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2004. Citado na página 28.

BEYER, R. P. A computational model of the cochlea using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 98, n. 1, p. 145–162, 1992. Citado na página 26.

BORNSCHLEGELL, A. S. *Implementação e teste do método da fronteira imersa para a simulação do escoamento em torno de cilindro estacionário e rotativos*. Dissertação (Mestrado) — UNESP – Campus de Ilha Solteira, Ilha Solteira, SP, 2008. Citado na página 28.

CHEN, X.; ZHA, G.-C. Implicit application of non-reflective boundary conditions for navier–stokes equations in generalized coordinates. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 50, n. 7, p. 767–793, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 115.

CLARKE, D. K.; HASSAN, H.; SALAS, M. Euler calculations for multielement airfoils using cartesian grids. *AIAA journal*, v. 24, n. 3, p. 353–358, 1986. Citado na página 29.

COUTANCEAU, M.; MENARD, C. Influence of rotation on the near-wake development behind an impulsively started circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 158, p. 399–446, 1985. Citado 4 vezes nas páginas 9, 95, 98 e 99.

DE TULLIO, M. D. *Development of an Immersed Boundary method for the solution of the preconditioned Navier-Stokes equations*. Tese (Doutorado) — Polytechnic University of Bari, Bari, 2006. Citado na página 20.

DRIKAKIS, D.; OFENGEIM, D.; TIMOFEEV, E.; VOIONOVICH, P. Computation of non-stationary shock-wave/cylinder interaction using adaptive-grid methods. *Journal of fluids and structures*, Elsevier, v. 11, n. 6, p. 665–692, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 10, 100, 112 e 113.

FAROOQ, M. A. *Cartesina Grid Method for Compressible Flow Simulation*. Tese (Doutorado) — Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Noruega, 2012. Citado na página 31.

FOGELSON, A. L.; PESKIN, C. S. A fast numerical method for solving the three-dimensional stokes' equations in the presence of suspended particles. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 79, n. 1, p. 50–69, 1988. Citado na página 26.

FRIEDRICHS, K. O. Symmetric hyperbolic linear differential equations. *Communications on pure and applied Mathematics*, Wiley Online Library, v. 7, n. 2, p. 345–392, 1954. Citado na página 45.

- GHIAS, R.; MITTAL, R.; LUND, T. S. A non-body conformal grid method for simulation of compressible flows with complex immersed boundaries. *AIAA paper*, v. 80, p. 2004, 2004. Citado na página 30.
- GOLDSTEIN, D.; HANDLER, R.; SIROVICH, L. Modeling a no-slip flow boundary with an external force field. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 105, n. 2, p. 354–366, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.
- GONÇALVES, N. D. F. *Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-Estruturadas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2007. Citado na página 42.
- HIRSCH, C. *Numerical computation of internal and external flows*. 1. ed. Chichester, Reino Unido: John Wiley & Sons, 1990. v. 2. Citado na página 65.
- KACA, J. An interferometric investigation of the diffraction of a planar shock wave over a semicircular cylinder. *NASA STI/Recon Technical Report N*, v. 89, set. 1988. Citado 7 vezes nas páginas 10, 100, 103, 104, 106, 111 e 112.
- KIM, H. D.; LIU, N.-S. A time-accurate high-resolution tvd scheme for solving the navier-stokes equations. *Computers & fluids*, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 517–528, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 8, 75, 76 e 77.
- KIM, J.; KIM, D.; CHOI, H. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 171, n. 1, p. 132–150, 2001. Citado na página 30.
- KURGANOV, A.; TADMOR, E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection–diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 160, n. 1, p. 241–282, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 45, 48, 50 e 52.
- KURGANOV, A.; TADMOR, E. Solution of two-dimensional riemann problems for gas dynamics without riemann problem solvers. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Wiley Online Library, v. 18, n. 5, p. 584–608, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 7, 50, 71 e 73.
- LAX, P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Communications on pure and applied mathematics*, Wiley Online Library, v. 7, n. 1, p. 159–193, 1954. Citado na página 45.
- LAX, P. D.; LIU, X. dong. Solution of two dimensional riemann problem of gas dynamics by positive schemes. *SIAM J. Sci. Comput*, v. 19, p. 319–340, 1995. Citado na página 71.
- LEVEQUE, R. J. *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems*. 1. ed. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 44, 45, 46 e 47.
- LIMA E SILVA, A. L. F. *Desenvolvimento e Implementação de uma Nova Metodologia para Modelagem de Escoamentos Sobre Geometrias Complexas: Método da Fronteira Imersa com Modelo Físico virtual*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 38.

- LIMA E SILVA, A. L. F.; SILVA, A. R.; SILVEIRA-NETO, A. Numerical simulation of two-dimensional complex flows around bluff bodies using the immersed boundary method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, SciELO Brasil, v. 29, n. 4, p. 379–387, 2007. Citado na página 28.
- LIMA E SILVA, A. L. F.; SILVEIRA-NETO, A.; DAMASCENO, J. J. R. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 189, n. 2, p. 351–370, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 25.
- MARCANTONI, L. F. G.; TAMAGNO, J. P.; ELASKAR, S. A. High speed flow simulation using openfoam. Salta, Argentina, v. 31, p. 2939–2959, 2012. Citado na página 79.
- MISERDA, R. F. B.; QUEIROZ, R. L.; MALDONADO, A. L.; RIBEIRO, I. D.; GODOY, K.; NETO, O. G. Direct computation of noise generated by complex geometries using a high-order immersed boundary method. 2009. Citado na página 30.
- MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Annual Reviews, v. 37, p. 239–261, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 26, 27, 28 e 29.
- MOHD-YUSOF, J. Combined immersed-boundary/b-spline methods for simulations of ow in complex geometries. *Annual Research Briefs. NASA Ames Research Center= Stanford University Center of Turbulence Research: Stanford*, p. 317–327, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 39.
- OLIVEIRA, J. E. S. *Método da Fronteira Imersa Aplicado à Modelagem Matemática e simulação Numérica de escoamentos Tubulentos sobre Geometrias Móveis e Deformáveis*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2006. Citado na página 28.
- PALMA, P. D.; TULLIO, M. D.; PASCAZIO, G.; NAPOLITANO, M. An immersed-boundary method for compressible viscous flows. *Computers & fluids*, Elsevier, v. 35, n. 7, p. 693–702, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 8, 29, 30, 85 e 115.
- PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: a numerical method. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972. Citado 3 vezes nas páginas 20, 24 e 26.
- PESKIN, C. S. Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 25, n. 3, p. 220–252, 1977. Citado 3 vezes nas páginas 7, 25 e 57.
- POINSOT, T. J.; LELE, S. K. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 101, n. 1, p. 104–129, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 115.
- REMIGIO, S. A. E. *Simulação numérica bidimensional da interação fluido-estrutura através do Modelo Físico Virtual*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2005. Citado na página 28.
- RIBEIRO, S. S. *Novos esquemas centrais de diferenças finitas para a simulação de escoamentos multifásicos em reservatórios de petróleo*. Tese (Doutorado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto Politécnico, Nova Friburgo, RJ, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 42, 45, 46 e 50.

- ROHDE, A. Eigenvalues and eigenvectors of the euler equations in general geometries. *AAIA*, v. 2609, 2001. Citado na página 54.
- RUSANOV, V. V. Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles. *J. Comput. Math. Phys.*, USSR, v. 1, p. 267–279, 1961. Citado na página 47.
- SAIKI, E.; BIRINGEN, S. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: application of a virtual boundary method. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 123, n. 2, p. 450–465, 1996. Citado na página 27.
- SANTOS, R. D. C. dos. *Análise Bidimensional Termo-Fluido Dinâmica de Cilindros Rotativos com o Método da Fronteira Imersa / Modelo Físico Virtual*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 28, 79 e 115.
- SILVA, A. R. d.; NETO, A. d. S.; LIMA, A. M. G. d.; RADE, D. A. Numerical simulations of flows over a rotating circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of the brazilian society of mechanical sciences and engineering*, SciELO Brasil, v. 33, n. 1, p. 99–106, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 96 e 97.
- TEIXEIRA, G. M. *Métodos numéricos para a solução de escoamentos bifásicos de fluidos incompressíveis em meios porosos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 48.
- TRAN, P. H.; PLOURDE, F. Computing compressible internal flows by means of an immersed boundary method. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 97, p. 21–30, 2014. Citado na página 31.
- TRITTON, D. Experiments on the flow past a circular cylinder at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 6, n. 04, p. 547–567, 1959. Citado na página 85.
- TSENG, Y.-H.; FERZIGER, J. H. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 192, n. 2, p. 593–623, 2003. Citado na página 29.
- UDAYKUMAR, H.; SHYY, W.; RAO, M. Elafint: a mixed eulerian–lagrangian method for fluid flows with complex and moving boundaries. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 22, n. 8, p. 691–712, 1996. Citado na página 29.
- UNVERDI, S. O.; TRYGGVASON, G. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 100, n. 1, p. 25–37, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 26, 39, 40 e 57.
- VAN DYKE, M. An album of fluid motion. Parabolic Press Stanford, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 20.
- VAN LEER, B. Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to godunov’s method. *Journal of computational Physics*, Elsevier, v. 32, n. 1, p. 101–136, 1979. Citado 4 vezes nas páginas 45, 48, 50 e 51.

- VERZICCO, R.; MOHD-YUSOF, J.; ORLANDI, P.; HAWORTH, D. Les in complex geometries using boundary body forces. *Center for Turbulence Research Proceedings of the Summer Program, NASA Ames= Stanford University*, p. 171–186, 1998. Citado na página 29.
- WILLIAMSON, C. H. Defining a universal and continuous strouhal–reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder. *Physics of Fluids (1958-1988)*, AIP Publishing, v. 31, n. 10, p. 2742–2744, 1988. Citado na página 89.
- YE, T.; MITTAL, R.; UDAYKUMAR, H.; SHYY, W. An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 156, n. 2, p. 209–240, 1999. Citado na página 29.
- ZHANG, Y.; ZHOU, C. An immersed boundary method for simulation of inviscid compressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 74, n. 11, p. 775–793, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31 e 34.
- ZHU, L.; PESKIN, C. S. Interaction of two flapping filaments in a flowing soap film. *Physics of Fluids (1994-present)*, AIP Publishing, v. 15, n. 7, p. 1954–1960, 2003. Citado na página 27.