

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

Coordenadas Vestidas: Processos de radiação
e termalização em cavidades pequenas

Marlon Marques da Silva

Itajubá, Julho de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

Marlon Marques da Silva

Coordenadas Vestidas: Processos de radiação
e termalização em cavidades pequenas

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Física como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Física.

Área de Concentração: Teoria Quântica de Campos

Orientador: Prof. Dr. Gabriel Flores Hidalgo

Julho de 2014

Itajubá-MG

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA**

Marlon Marques da Silva

**Coordenadas Vestidas: Processos de radiação
e termalização em cavidades pequenas**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 17 de julho de 2014, conferido ao autor o título de **Mestre em Ciências em Física**.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gabriel Flores Hidalgo (Orientador)

Prof. Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel

Prof. Dr. Victor José Vasquez Otoyá

Itajubá-MG

2014

À minha mãe, Deusmira.

Ao meu pai pai, Antônio.

*Aos meus irmãos, Alexandre,
Rhayanny, Lorryne e Thayane.*

Ao meu amor, Liliane.

À Renaldo Gomes de Oliveira (In Memoriam).

Agradecimentos

- À minha família, pelo amor, carinho e compreensão durante todos esses anos.
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Gabriel Flores Hidalgo, por todos os ensinamentos na Física e na vida, pela amizade e por toda paciência (sei que não foi fácil) dedicada durante esta jornada.
- À minha tia Adriana Paula (Dri), por todo carinho, incentivo, apoio e dedicação sem fim nos momentos que eu mais precisei.
- Às minhas mães de coração, que me adotaram e sempre me deram carinho. Mãe Maria, Lena, Dri, sogrinha Cidinha, madrinha Cidinha e minha madrasta Maura, uma segunda mãe para mim. Amo vocês.
- Aos meus orientadores da graduação, os professores Fábio Scalco, Renato Klippert e Leandro Gustavo Gomes. Obrigado pela amizade e por me conduzirem nos meus primeiros passos no mundo científico.
- Agradeço a todos os professores do curso de Física, que sempre tiveram uma enorme paciência com as minhas limitações e sempre se mostraram prontos para me ajudar, fosse em Física, Matemática ou na Vida. Em especial agradeço ao professores: Newton Figueiredo, por toda atenção e dedicação. Farnézio Moreira, pelas excelentes aulas de mecânica analítica, Fabrico Barone, por ser sempre prestativo, pelas ótimas aulas e por ter me aguentado em cinco cursos diferentes. Vitorio Alberto, pelos excelentes cursos de mecânica quântica, mecânica estatística e relativida geral. Fábio Scalco, pela amizade e pelo excelente curso de cálculo. Ricardo Medina, pelos ótimo cursos de equações difirencias. José Augusto (Baêta), por todo carinho e por ter me

dado um apelido. Agenor Pina, pelo ótimo curso de mecânica, pelos conselhos e por ser sempre prestativo.

- Aos meus amigos da graduação, Helder Oliveira, Hemily Gomes, Juliana Celestino, Malu Silva, Gian Camilo, Marilia Bataglini, Marco Túlio, Marina Machado. Obrigado pela amizade e pelos muitos momentos de risadas.
- Aos meus amigos de infância, Fabrico Carvalho (Bill), Edson Lucio (Pé de Frango), Fernando Carvalho (Nando), Carlos Correa (Aguado), Bruno Vileneuve (Vileneuve), Anderson Gama (Kinha), Ricardo Hott (Leitão), Juliana Thasmo (Ju). Vocês me ensinaram a valorizar as pequenas coisas da vida e me mostraram que eu nunca estarei sozinho. Obrigado do fundo do meu coração, sem vocês eu não seria ninguém!
- Aos amigos da lendária Rep. Smurf, por onde passaram vários físicos como Gian Camilo (Bixão), Roney Fonseca (Toninho), Adriano Braga (Ceará), Paulo Henrique (PH) e grandes engenheiros como Wander Costa (Cininho) e Lucas (Piranguinho). Sempre estarão na minha memória pelos bons momentos e pelos dias de lutas das nossas graduações.
- Aos amigos da melhor República do Brasil, a Rep. Tijolinho, pois aqui até o tijolo é redondo. Aos membros da república, Marco Túlio (Babaum), Alan Ferraz (Malan), Luís Felipe (Borb's), Luis Guilherme (Gui), Igor Crabi (Tintim), Edmar Nunes (Frodo), Alex Takeo (Zaqueo), Gabriel Miranda (Toroço), Luiz Pires (Cabaça), os bixos Lucas Fernandes (Forrest) e Gabriel Machado (Migué) e a nossa querida mãezona Eliana (Lili), minha eterna gratidão. Obrigado por me deixarem entrar para esta família.
- À todos aqueles que me incentivaram e acreditaram no meu potencial.
- Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), pelo apoio financeiro.

“ Imagine que o mundo seja algo como uma gigantesca partida de xadrez sendo disputada pelos deuses, e que nós fazemos parte da audiência. Não sabemos quais são as regras do jogo; podemos apenas observar seu desenrolar. Em princípio, se observarmos por tempo suficiente, iremos descobrir algumas das regras. As regras do jogo é o que chamamos de física fundamental.”

Richard Feynman

Resumo

Neste trabalho faremos um estudo sobre as coordenadas vestidas (ou renormalizadas) e suas aplicações. Estas coordenadas permitem a construção de estados vestidos, que são definidos de tal forma a ter a correta propriedade física do estado fundamental do átomo na ausência de quantas do campo. Estas coordenadas serão introduzidas no modelo que consiste de um átomo (aproximado por um oscilador harmônico de frequência ω_0) linearmente acoplado a um campo-eletromagnético (aproximado por um campo escalar sem massa) e confinados dentro de uma cavidade esférica condutora de raio R . Desde o ponto de vista técnico, as coordenadas vestidas fornecerão uma descrição não perturbativa dos processos de radiação eletromagnética do átomo. Veremos que no limite $R \rightarrow \infty$, recuperamos a conhecida lei de decaimento exponencial de um átomo no espaço livre. Também, para cavidades suficientemente pequenas será obtida uma expressão analítica para a probabilidade de permanência do átomo no primeiro estado excitado, demonstrando a sua estabilidade.

Posteriormente, usamos as coordenadas vestidas para estudar a evolução temporal de um átomo que no instante $t = 0$ é acoplado a um campo de radiação térmica. Veremos que a evolução temporal do valor esperado do operador número de ocupação do átomo depende exclusivamente das probabilidades associadas com a emissão e absorção de quanta do campo. Para cavidades suficientemente grandes, $R \rightarrow \infty$, será mostrado que o átomo termaliza com o campo de radiação térmica, independentemente do estado inicial do átomo. Por fim, mostraremos que em cavidades suficientemente pequenas o átomo nunca termaliza com o campo de radiação térmica.

Palavras-chave: coordenadas vestidas, estados vestidos, termalização

Abstract

In this work we will do a study of the dressed (or renormalized) coordinates and their applications. These coordinates allow the construction of dressed states, which are defined in such a way to have the correct physical property of the ground state of the atom in the absence of the field quanta. These coordinates will be introduced in the model consisting of an atom (approximated by a harmonic oscillator of frequency ω_0) linearly coupled to an electromagnetic-field (approximated by a massless scalar field) and confined in a spherical conducting cavity of radius R . From a technical point of view the dressed coordinates concept will furnish a non-perturbative description of the atom electromagnetic radiation process. We will see that in the limit $R \rightarrow \infty$, the well known law of spontaneous decay of an atom in free space will be recovered. Also for sufficiently small cavities will be obtained an analytical expression for the permanency of the atom in the first excited state, showing its stability.

Later, we will use the dressed coordinates to study the evolution of an atom that at time $t = 0$ is coupled to a thermal radiation field. We will see that the time evolution of the expectation value of the occupation number operator depends exclusively on the probabilities associated with the emission and absorption of the field quanta. For sufficiently large cavities, $R \rightarrow \infty$, will be showed that the atom thermalizes with thermal radiation field, regardless of the initial state of the atom. Finally, we show that in sufficiently small cavities the atom never thermalizes with the thermal radiation field.

Keywords: dressed coordinates, dressed states, thermalization

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Índice	vii
Lista de Figuras	ix
Introdução	1
1 Acoplamento linear	4
1.1 Redução do problema a um sistema de osciladores acoplados	4
1.2 Renormalização da frequência do oscilador	7
1.3 Diagonalização da Hamiltoniana do sistema	8
1.4 O espectro de autofrequências e a distribuição de energia dos modos normais	11
2 Coordenadas vestidas e amplitudes de probabilidade	14
2.1 Introdução as coordenadas vestidas	14
2.2 Amplitudes de probabilidade	17
2.3 Amplitude de probabilidade de permanência no limite $R \rightarrow \infty$	20
2.4 Amplitude de probabilidade de decaimento no limite $R \rightarrow \infty$	27
3 Confinamento numa caixa tridimensional	30
3.1 Condições de fronteira de Dirichlet	32
3.2 Condições de fronteiras periódicas	35

4	O processo de radiação em cavidades pequenas	37
4.1	Amplitude de probabilidade de permanência em pequenas cavidades	37
4.2	Amplitude de probabilidade de decaimento em pequenas cavidades	45
5	O processo de termalização de um átomo com o campo de radiação térmica	49
5.1	O operador densidade na mecânica quântica	49
5.2	O operador densidade de estados vestido	52
5.3	O processo de termalização	53
5.4	O processo de termalização no limite contínuo	59
5.5	O processo de termalização em pequenas cavidades	61
	Conclusões e perspectivas	64
	Bibliografia	67

Lista de Figuras

1.1	Solução gráfica da equação (1.46), para $Rg = 1$ e $\omega_0 R = 1$	12
2.1	Contorno retangular que contorne todo o eixo real positivo onde estão todos os Ω_r	22
2.2	Contorno de integração para equação (2.39).	24
2.3	<i>Probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado, para $\omega_0 = 1,0/s$ e os respectivos valores de g: $\bullet\bullet\bullet g = 4,0 \times 10^{-3}/s$ $\bullet\bullet\bullet g = 3,0 \times 10^{-3}/s$ $\bullet\bullet\bullet g = 1,0 \times 10^{-2}/s$.</i>	26
3.1	Esquema ilustrativo da caixa de confinamento.	31
4.1	<i>Probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado considerando um expansão de primeira ordem em Rg, para $\omega_0 \approx 4,00 \times 10^{14}/s$ e $R \approx 1,00 \times 10^{-6} m$.</i>	39
4.2	<i>Probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado considerando um expansão de segunda ordem em Rg, para $\omega_0 \approx 4,00 \times 10^{14}/s$ e $R \approx 1,00 \times 10^{-6} m$.</i>	41
4.3	<i>Probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado considerando um expansão de terceira ordem em Rg, para $\omega_0 \approx 4,00 \times 10^{14}/s$ e $R \approx 1,00 \times 10^{-6} m$.</i>	42
4.4	<i>Probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado considerando um expansão de quarta ordem em Rg, para $\omega_0 \approx 4,00 \times 10^{14}/s$ e $R \approx 1,00 \times 10^{-6} m$.</i>	43
4.5	<i>Comparação das probabilidades em diferentes ordens de Rg e nas suas respectivas regiões de validade, para $\omega_0 \approx 4,00 \times 10^{14}/s$ e $R \approx 1,00 \times 10^{-6} m$. $\bullet\bullet\bullet(Rg)^4$ $\bullet\bullet\bullet(Rg)^3$ $\bullet\bullet\bullet(Rg)$</i>	44

4.6	<i>Probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado, para $\omega_0 \approx 2,00 \times 10^{10}/s$ e $R \approx 1,00 \times 10^{-2} m$.</i>	45
4.7	<i>Probabilidade do átomo decair do primeiro estado excitado para o estado fundamental, para $\omega_0 \approx 4,0 \times 10^{14}/s$, $R \approx 1,0 \times 10^{-6}m$ e $k = 1$.</i>	47
4.8	<i>Probabilidade do átomo decair do primeiro estado excitado para o estado fundamental, para $\omega_0 \approx 4,0 \times 10^{14}/s$, $R \approx 1,0 \times 10^{-6}m$ e $k = 10$.</i>	48
5.1	<i>Valor esperado do número de ocupação correspondente ao átomo $\langle n'_0(t) \rangle$, para $\omega_0 \approx 4,0 \times 10^{14}/s$, $R \approx 1,0 \times 10^{-6}m$ e $\langle n'_0(0) \rangle = 1$. ●●●$T=300K$ ●●●$T=10000K$</i>	62

Introdução

A inibição do decaimento espontâneo de átomos confinados em pequenas cavidades é um fenômeno observado há vários anos e a compreensão teórica deste e de outros fenômenos que envolvem equações acopladas para descrever a física de sistemas em interação, são na maioria das vezes obtidas por cálculo numérico computacional e pela teoria de perturbações. A teoria de perturbações foi originalmente introduzida para lidar com problemas orbitais em mecânica celeste, sendo extremamente bem sucedida desde então, dando resultados precisos em eletrodinâmica quântica, interações fracas, teoria de campos, física estatística, entre outros. No entanto, apesar de sua ampla aplicabilidade, há situações em que o uso da teoria de perturbação não é possível, como no domínio de baixas energias em cromodinâmica quântica. Há também outras situações, como no domínio da eletrodinâmica de cavidades e óptica quântica, onde os métodos de perturbação possuem pouca aplicabilidade. A grande dificuldade no domínio teórico destes efeitos calculados a partir de teoria de perturbação, é que geralmente requer o cálculo de termos de alta ordem na série perturbativa, o que faz com que a técnica dos diagramas de Feynman não seja prático [1]. Isto levou a comunidade científica a buscar métodos não perturbativos que foram originalmente introduzidos em [2, 3] e desde então, tem sido aplicados para investigar várias situações envolvendo a interação de átomos e campos eletromagnéticos [4, 5]. Contudo, nessas abordagens apareceram diversas dificuldades devido a não linearidade das equações, o que complica e muito a obtenção de resultados rigorosos.

Uma maneira de contornar as dificuldades matemáticas apontadas acima é assumir que sob certas condições podemos aproximar o sistema átomo-campo eletromagnético de por oscilador harmônico (átomo) linearmente acoplado aos modos do campo (conjunto infinito de osciladores harmônicos) por meio de uma adequada constante de acoplamento g . Apesar de ser um sistema linear, se tratado com as habituais coordenadas (coordenadas

nuas)¹, não é possível um cálculo analítico dos processos de radiação do oscilador. Um exemplo disto é que no caso mais simples de decaimento, não é possível o cálculo exato da probabilidade do oscilador decair espontaneamente a partir do primeiro estado excitado para o estado fundamental.

Recentemente, em analogia com os campos renormalizados em teoria quântica de campos, foi introduzido o conceito de coordenadas vestidas [6, 7, 8]. Este conceito foi apresentado para resolver o problema de um oscilador harmônico acoplado linearmente a um campo escalar sem massa, confinado numa cavidade esférica refletora de raio R . No trabalho pioneiro [6], foi estudado o comportamento de sistemas no espaço livre, tomando como limite, o raio da cavidade sendo arbitrariamente grande ($R \rightarrow \infty$). A introdução das coordenadas vestidas permitiu uma solução exata e não perturbativa para o processo de radiação do átomo (aproximado pelo oscilador harmônico) para qualquer acoplamento, fraco ou forte. No caso de acoplamento fraco, recuperou-se as expressões das fórmulas de decaimento da teoria de perturbações.

Uma segunda aplicação para as coordenadas vestidas é encontrado em [7], onde um átomo (oscilador) é confinado numa cavidade esférica de raio suficientemente pequeno. Neste trabalho foi feita uma estimativa da probabilidade de permanência do átomo no seu primeiro estado excitado e verificou-se a inibição do processo de decaimento. O conceito de coordenadas vestidas foi generalizado para o caso de interação não linear entre o oscilador e os modos do campo em [9, 10]. A evolução temporal de estados emaranhados no contexto dos estados vestidos é abordado em [11]. Em [12], as coordenadas vestidas foram introduzidas no formalismo das integrais de trajetória. Em [13] foi desenvolvido a técnica dos operadores de criação e aniquilação vestidos, a qual permite o cálculo de forma mais simples dos diferentes processos de radiação. Para mais aplicações ver as referências [14, 15].

Outra área de grande interesse para a física são os sistemas fora do equilíbrio térmico, com aplicações que vão desde a física da matéria condensada à cosmologia. Do ponto de vista teórico, em geral o estudo destes sistemas não são fáceis devido a não linearidade das interações entre as partículas e o ambiente, sendo na maioria das vezes tratado perturbativamente, o que faz com estes sistemas fora do equilíbrio ainda sejam pouco compreendidos [16, 17]. Tentativas recentes de resolver alguns problemas de sistemas fora do equilíbrio

¹No Capítulo 2 daremos uma definição clara sobre o significado de coordenadas nuas e vestidas

térmico, de maneira analítica ou numérica, para modelos específicos e gerais foram abordados em [19, 20, 21, 22]. O uso das coordenadas vestidas nesta área foi introduzido em [23], onde foi mostrado que a evolução temporal dos valores médios térmicos dependem exclusivamente das probabilidades associadas com a emissão e absorção de quantas do campo de radiação térmica. Também foi mostrado que o átomo numa cavidade infinitamente grande termaliza com o campo de radiação térmica independentemente do seu estado inicial.

A proposta deste trabalho é fazer uma revisão dos trabalhos pioneiros sobre as coordenadas vestidas, tanto para o processo de radiação quanto para o problema da termalização. Fixadas as bases da teoria, vamos aplicar o conceito das coordenadas vestidas para a situação de confinamento em cavidades pequenas e buscar por expressões analíticas que descrevam os processos de radiação e termalização nesta situação, já que na maioria dos trabalhos nesta área foram feitas apenas estimativas sobre as probabilidades. Também estudaremos como que diferentes condições de contorno para o campo afetam os diferentes processos físicos acima mencionados.

A organização da tese é a seguinte:

- nos Capítulos 1 e 2 vamos introduzir o modelo de acoplamento linear oscilador-campo confinado numa cavidade esférica e o conceito das coordenadas e estados vestidos. Em seguida calculamos, no limite $R \rightarrow \infty$, a probabilidade o átomo decair do primeiro estado excitado para o estado fundamental;
- no Capítulo 3 faremos o cálculo do processo de radiação, supondo um confinamento dentro de uma caixa, impondo distintas condições de fronteiras: Dirichlet e Periódicas;
- o Capítulo 4 é dedicado ao cálculo das probabilidades de permanência e decaimentos no limite de pequenas cavidades;
- por fim, no Capítulo 5, abordaremos o problema da termalização nos limites contínuo ($R \rightarrow \infty$) e de pequenas cavidades ($Rg \ll c$).

Capítulo 1

Acoplamento linear

Neste capítulo vamos introduzir um modelo de acoplamento linear que no decorrer do trabalho será muito útil na representação de um modelo simples de interação átomo-campo eletromagnético. Para isto, considere um oscilador harmônico q_0 de frequência ω linearmente acoplado com o campo escalar $\phi(\vec{r}, t)$. Agora vamos confinar este sistema oscilador-campo em uma cavidade esférica de raio R centrada na posição do oscilador. Assim, a Lagrangeana do nosso sistema, em unidades naturais ($c = \hbar = \kappa_B = 1$) é dada por¹

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q_0^2 + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \partial_\mu \phi(\vec{r}, t) \partial^\mu \phi(\vec{r}, t) + 2\pi\sqrt{g} \int d^3\vec{r} q_0 \phi(\vec{r}, t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (1.1)$$

onde $\partial_\mu = (\partial_t, \vec{\nabla})$, $\partial^\mu = (\partial_t, -\vec{\nabla})$, $\vec{r}_0 = 0$ é a posição do oscilador e g é uma constante de acoplamento com dimensão de frequência. Quando necessário, reintroduziremos as unidades no sistema internacional.

1.1 Redução do problema a um sistema de osciladores acoplados

Nesta seção vamos expandir o campo $\phi(\vec{r}, t)$ numa base ortonormal de funções $\{\varphi_i(\vec{r})\}$ para expressar o nosso sistema através de uma Lagrangeana de osciladores acoplados.

¹Estamos usando a reparametrização para p e q canonicamente conjugados para incorporar a massa, tal que: $p_0 = \frac{p_0}{\sqrt{m}}$ e $q_0 = \sqrt{m}q_0$.

Expandindo o campo em termos dos seus modos harmônicos, tal que

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_k q_k(t) \varphi_k(\vec{r}), \quad (1.2)$$

onde a dependência temporal é dada pelos coeficientes $q_k(t)$ e a espacial é dada por $\varphi_k(\vec{r})$. Como o sistema está confinado numa cavidade esférica de raio R , vamos impor que o campo satisfaça a seguinte condição de fronteira,

$$\phi(\vec{R}) = 0, \quad (1.3)$$

e assim temos que os $\varphi_k(\vec{r})$ devem satisfazer a mesma condição, ou seja, $\varphi_k(\vec{R}) = 0$. Podemos escolher os $\varphi_k(\vec{r})$ como sendo as soluções da equação

$$\nabla^2 \varphi_k(\vec{r}) = -\omega_k^2 \varphi_k(\vec{r}). \quad (1.4)$$

Da Lagrangeana (1.1), note que o campo interage com o oscilador através do seu valor na localização do oscilador (\vec{r}_0). Pode-se mostrar que as únicas soluções da equação (1.4) que não se anulam na origem são as soluções com simetria esférica. Logo, as únicas soluções de (1.4) que nos interessa são as soluções esfericamente simétricas que seguem a seguinte equação:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \varphi_k(r) \right) = -\omega_k^2 \varphi_k(r). \quad (1.5)$$

As soluções da equação (1.5) que não divergem na origem são as funções de Bessel esféricas de ordem 0 [24], dadas por

$$\varphi_k(r) = \frac{1}{A_k} J_0(\omega_k r) = \frac{1}{A_k} \frac{\sin(\omega_k r)}{\omega_k r}. \quad (1.6)$$

Normalizando, obtemos que

$$\begin{aligned} \int \varphi_k(r) \varphi_{k'}(r) d^3r &= \frac{1}{A_k A_{k'}} \int_0^R J_0(\omega_k r) J_0(\omega_{k'} r) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4\pi R^3}{A_k A_{k'}} \int_0^1 J_0(k\pi z) J_0(k'\pi z) z^2 dz \\ &= \frac{4\pi R^3}{A_k A_{k'}} \frac{1}{kk'\pi^2} \int_0^1 \sin(k\pi z) \sin(k'\pi z) dz \\ &= \frac{4\pi R^3}{A_k A_{k'}} \frac{1}{kk'\pi^2} \frac{1}{2} \delta_{kk'} = \frac{2\pi R^3}{k^2 \pi^2} \frac{1}{A_k^2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Fixando os fatores de normalização A_k de tal modo que o resultado de (1.7) seja igual $\delta_{kk'}$, obtemos

$$A_k = \sqrt{2\pi R} \frac{R}{k\pi}. \quad (1.8)$$

Substituindo a equação (1.8) na equação (1.6) obtemos as soluções normalizadas, dadas por

$$\varphi_k(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin(\omega_k r)}{r}, \quad (1.9)$$

onde

$$\omega_k = \frac{\pi k}{R}, \quad \text{com } k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.10)$$

Logo, o campo $\phi(\vec{r}, t)$ pode ser expresso como

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_k q_k(t) \frac{\sin(\omega_k r)}{\sqrt{2\pi R r}}. \quad (1.11)$$

Substituindo a equação (1.2) na Lagrangeana (1.1), podemos escrever

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_0^2 - \omega^2 q_0^2) + \frac{1}{2} \left[\int d^3\vec{r} \sum_{k,k'=1}^N \dot{q}_k \dot{q}_{k'} \varphi_k \varphi_{k'} - \int d^3\vec{r} \sum_{k,k'=1}^N q_k q_{k'} \nabla \varphi_k \nabla \varphi_{k'} \right] + \\ + 2\pi\sqrt{g}q_0 \int d^3\vec{r} \sum_{k=1}^N q_k \varphi_k \delta(\vec{r}).$$

Resolvendo por partes a segunda integral entre colchetes e usando a condição de fronteira $\varphi(R) = 0$, temos

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_0^2 - \omega^2 q_0^2) + \frac{1}{2} \left[\sum_{k,k'=1}^N \dot{q}_k \dot{q}_{k'} \int d^3\vec{r} \varphi_k \varphi_{k'} + \sum_{k,k'=1}^N q_k q_{k'} \int d^3\vec{r} \varphi_k \nabla^2 \varphi_{k'} \right] + \\ + 2\pi\sqrt{g}q_0 \int d^3\vec{r} \sum_{k=1}^N q_k \varphi_k \delta(\vec{r}).$$

Usando a equação (1.4) na segunda integral, ficamos com

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_0^2 - \omega^2 q_0^2) + \frac{1}{2} \left[\sum_{k,k'=1}^N \dot{q}_k \dot{q}_{k'} \int d^3\vec{r} \varphi_k \varphi_{k'} - \sum_{k,k'} \omega_{k'}^2 q_k q_{k'} \int d^3\vec{r} \varphi_k \varphi_{k'} \right] + \\ + 2\pi\sqrt{g}q_0 \int d^3\vec{r} \sum_k q_k \varphi_k \delta(\vec{r}).$$

Tendo em conta que a parte espacial do campo foi tomada numa base ortonormal, ou seja, $\int d^3\vec{r} \varphi_k(\vec{r}) \varphi_{k'}(\vec{r}) = \delta_{kk'}$ e que a última integral dá o valor da função espacial do campo $\varphi_k(r)$ no limite $r \rightarrow 0$, ou seja

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_k(r) = \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi R}}. \quad (1.12)$$

Desta forma a Lagrangeana (1.1) é reescrita como

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_0^2 - \omega^2 q_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\dot{q}_k^2 - \omega_k^2 q_k^2) + \eta q_0 \sum_{k=1}^N q_k \omega_k, \quad (1.13)$$

onde

$$\eta = \sqrt{2g\Delta\omega}, \quad (1.14)$$

e $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{\pi(k+1)}{R} - \frac{\pi k}{R} = \frac{\pi}{R}$ é o intervalo entre duas frequências vizinhas do campo.

Utilizando a equação de Euler-Lagrange para q_0 e q_k , as equações de movimento são dadas por

$$\ddot{q}_0(t) + \omega^2 q_0(t) = \sum_{k=1}^N \eta \omega_k q_k(t) \quad (1.15)$$

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \eta \omega_k q_0(t). \quad (1.16)$$

A Hamiltoniana do sistema pode ser obtida a partir dos momentos canonicamente conjugados p_0 e p_k , dados por

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} = \dot{q}_0 \quad (1.17)$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \dot{q}_k. \quad (1.18)$$

Da equação

$$H = \sum_{\mu=0}^N p_\mu \dot{q}_\mu - L = \sum_{\mu=0}^N \dot{q}_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - L,$$

obtemos

$$H = \frac{1}{2}(p_0^2 + \omega^2 q_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) - \eta q_0 \sum_{k=1}^N \omega_k q_k, \quad (1.19)$$

que é a Hamiltoniana de um sistema de osciladores linearmente acoplados e representa o nosso sistema constituído do oscilador harmônico acoplado ao campo escalar dentro de uma cavidade esférica de raio R .

1.2 Renormalização da frequência do oscilador

Para renormalizar a frequência do oscilador harmônico q_0 , devemos ter em mente que a frequência ω que aparece na Hamiltoniana (1.19) é a frequência do oscilador harmônico quando este não encontra-se em interação com o campo e esta não é a situação do nosso sistema, já que o oscilador harmônico encontra-se acoplado com o campo. Para obter a frequência física do oscilador quando este está em interação com o campo, vamos calcular

a energia efetiva mínima do oscilador $q_0(t)$ levando em conta a interação com os modos do campo. Para isto, vamos calcular os valores de q_k e p_k que minimizam a energia do sistema. Da Hamiltoniana (1.19), devemos ter

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0. \quad (1.21)$$

De onde temos

$$p_k = 0 \quad (1.22)$$

$$q_k = \eta \frac{q_0}{\omega_k}. \quad (1.23)$$

Substituindo as equações acima em (1.19), obtemos

$$H_{min} = \frac{1}{2} \left[p_0^2 + q_0^2 \left(\omega^2 - \sum_{k=1}^N \eta^2 \right) \right], \quad (1.24)$$

e concluímos que a frequência efetiva do oscilador devido a interação com os modos do campo é dada por

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \sum_{k=1}^N \eta^2. \quad (1.25)$$

Substituindo ω^2 na Hamiltoniana (1.19), temos

$$H = \frac{1}{2} (p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) - \eta q_0 \sum_{k=1}^N \omega_k q_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \eta^2 q_0^2. \quad (1.26)$$

A Hamiltoniana (1.26) é a Hamiltoniana renormalizada do nosso sistema. Modelos como este, foram usados ao longo do tempo para descrever o movimento Browniano quântico [25, 26, 27] e em problemas relacionados a decoerência entre outros [28, 29]. Este último termo evitará problemas de divergência após a diagonalização da Hamiltoniana e ainda garante a sua positividade [30, 31].

1.3 Diagonalização da Hamiltoniana do sistema

Nesta seção vamos diagonalizar Hamiltoniano (1.26), ou seja, encontrar uma transformação para que o nosso sistema oscilador-campo seja expresso pela Hamiltoniana de um sistema

de osciladores desacoplados. Para isto usaremos a seguinte transformação

$$q_\mu = \sum_{r=0}^N t_\mu^r Q_r \quad (1.27)$$

$$p_\mu = \sum_{r=0}^N t_\mu^r P_r, \quad (1.28)$$

onde Q_r e P_r são respectivamente a posição e momento normais e t_μ^r é uma matriz ortogonal, que satisfaz

$$\sum_{r=0}^N t_\mu^r t_\nu^r = \delta_{\mu\nu} \quad (1.29)$$

$$\sum_{\mu=0}^N t_\mu^r t_\mu^s = \delta_{rs}, \quad (1.30)$$

sendo o índice $\mu, \nu = (0, k)$: 0 para denotar o oscilador, $k = 1, 2, 3, \dots, N$ para denotar os modos harmônicos do campo e $r = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ denota os modos normais. Utilizando as transformações acima, vamos encontrar uma Hamiltoniana diagonalizada para o sistema oscilador-campo em termos de $(N + 1)$ osciladores livres, sendo $N \rightarrow \infty$ o número de osciladores do campo. Tal Hamiltoniana diagonalizada tem a forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N (P_r^2 + \Omega_r^2 Q_r^2). \quad (1.31)$$

Esta Hamiltoniana representa um conjunto de osciladores desacoplados, onde os Ω_r são as frequências dos modos normais de oscilação coletivas destes osciladores. Substituindo as transformações (1.27) e (1.28) na Hamiltoniana (1.48), resulta em

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \sum_{r,s=0}^N (t_0^r P_r t_0^s P_s + \omega_0^2 t_0^r Q_r t_0^s Q_s) + \frac{1}{2} \sum_{r,s=0}^N \sum_{k=1}^N (t_k^r P_r t_k^s P_s + \omega_k^2 t_k^r Q_r t_k^s Q_s) \\ & - \sum_{r,s=0}^N \eta \sum_{k=1}^N \omega_k^2 t_0^r Q_r t_k^s Q_s + \frac{1}{2} \sum_{r,s=0}^N \sum_{k=1}^N \eta^2 t_0^r Q_r t_0^s Q_s, \end{aligned} \quad (1.32)$$

e reagrupando os termos da equação, toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \sum_{r,s=0}^N \sum_{\mu=0}^N t_\mu^r t_\mu^s P_r P_s + \frac{1}{2} \sum_{r,s=0}^N \left[\omega_0^2 t_0^s + \sum_{k=1}^N (\eta^2 t_0^s - \eta \omega_k t_k^s) \right] t_0^r Q_r Q_s \\ & + \frac{1}{2} \sum_{r,s=0}^N \sum_{k=1}^N (\omega_k^2 t_k^r - \eta \omega_k t_0^r) t_k^s Q_r Q_s. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Observe que no primeiro termo da equação acima temos uma soma sobre o índice μ e de acordo com (1.30), a soma sobre μ resulta numa δ_{rs} . Comparando a equação (1.33) com a equação (1.31), podemos concluir que

$$\omega_0^2 t_0^s + \sum_{k=1}^N (\eta^2 t_0^s - \eta \omega_k t_k^s) = \Omega_r^2 t_0^s \quad (1.34)$$

$$\omega_k^2 t_k^r - \eta \omega_k t_0^r = \Omega_r^2 t_k^r. \quad (1.35)$$

Devemos agora determinar t_k^r e t_0^r para dar consistência para as transformações. Da equação (1.35), segue que

$$t_k^r = \frac{\eta \omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} t_0^r. \quad (1.36)$$

Da equação (1.30), temos

$$\sum_{k=1}^N (t_k^r)^2 + (t_0^r)^2 = 1,$$

e para obter t_0^r , substituímos (1.36) na equação acima e encontramos

$$t_0^r = \left[1 + \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.37)$$

Substituindo (1.36) na equação (1.34), temos

$$\eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\omega_k^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} = \omega_0^2 - \Omega_r^2 + \sum_{k=1}^N \eta^2. \quad (1.38)$$

Observe que o último termo do lado direito da igualdade é justamente devido a renormalização da Hamiltoniana e evita divergências quando tomamos o limite $N \rightarrow \infty$. Isto fica claro quando reescrevemos o lado esquerdo da equação acima

$$\sum_{k=1}^N \eta^2 \left[1 + \frac{\Omega_r^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} \right] = \omega_0^2 - \Omega_r^2 + \sum_{k=1}^N \eta^2,$$

resultando em

$$\sum_{k=1}^N \eta^2 + \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_r^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} = \omega_0^2 - \Omega_r^2 + \sum_{k=1}^N \eta^2.$$

O primeiro termo do lado esquerdo e o último termo do lado direito da equação se cancelam, eliminando assim o problema de divergência. Assim temos

$$\omega_0^2 - \Omega_r^2 = \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_r^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2}. \quad (1.39)$$

Esta equação relaciona as frequências dos modos normais Ω_r com as frequências dos modos harmônicos ω_μ . Vamos agora analisar as possíveis soluções da equação (1.39). Se considerarmos $\omega_0^2 \geq 0$ e $\Omega_r^2 < 0$, o lado esquerdo da igualdade é positivo enquanto o lado direito da mesma é negativo. Logo, se $\omega_0^2 \geq 0$ teremos raízes estritamente positivas para Ω_r^2 , o que significa que o sistema oscila harmonicamente em todos os seus modos. Para analisar a situação $\omega_0^2 < 0$, vamos introduzir a seguinte função

$$F(\Omega_r^2) = \omega_0^2 - \Omega_r^2 - \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_r^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2}. \quad (1.40)$$

Temos que

$$\begin{aligned} F(\Omega_r^2 = 0) &= \omega_0^2 < 0, \text{ por hipótese} \\ F(\Omega_r^2 \rightarrow +\infty) &= -\infty \\ F(\Omega_r^2 \rightarrow -\infty) &= +\infty, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $F(\Omega_r^2)$ possui pelo menos uma raiz negativa. Analisando a sua derivada

$$\frac{dF}{d\Omega_r^2} = -1 - \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2} < 0,$$

vemos que para qualquer valor de Ω_r^2 a derivada da função $F(\Omega_r^2)$ é sempre negativa. Assim, a função (1.40) é monotonicamente decrescente e portanto possui uma única raiz. Esta situação não é de interesse físico pois não admite estados estacionários e assim, assumiremos daqui para frente que $\omega_0^2 > 0$.

1.4 O espectro de autofrequências e a distribuição de energia dos modos normais

Depois de termos introduzido a frequência física (renormalizada) ω_0 do oscilador e tendo encontrado uma relação com as frequências normais Ω_r , podemos agora encontrar o espectro de autofrequências do nosso sistema. Para isto, vamos procurar por expressões semelhantes a (1.10). Definimos que

$$\Omega_r = x \frac{\pi}{R}, \quad (1.41)$$

onde x é um número real e positivo. Das equações (1.10) e (1.41), temos

$$\sum_{k=1}^N \frac{\Omega_r^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} = \sum_{k=1}^N \frac{x^2}{k^2 - x^2}. \quad (1.42)$$

Usando a identidade

$$\sum_{k=1}^N \frac{x^2}{k^2 - x^2} = \frac{1}{2} [1 - x\pi \cot(x\pi)], \quad (1.43)$$

na equação anterior, temos

$$\sum_{k=1}^N \frac{\Omega_r^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} = \frac{1}{2} \left[1 - (\Omega_r R) \cot(\Omega_r R) \right]. \quad (1.44)$$

Das equação (1.39) e lembrando que $\eta = \sqrt{2g\Delta\omega}$, com $\Delta\omega = \pi/R$, obtemos

$$\cot(\Omega_r R) = \frac{\Omega_r}{g\pi} + \frac{1}{\Omega_r R} \left(1 - \frac{R\omega_0^2}{g\pi} \right), \quad (1.45)$$

ou

$$\cot(x\pi) = \frac{x}{gR} + \frac{1}{x\pi} \left(1 - \frac{R\omega_0^2}{g\pi} \right), \quad (1.46)$$

cujas soluções, para $Rg = 1$ e $\omega_0 R = 1$ são dadas pelas interseções da Figura 1.1.

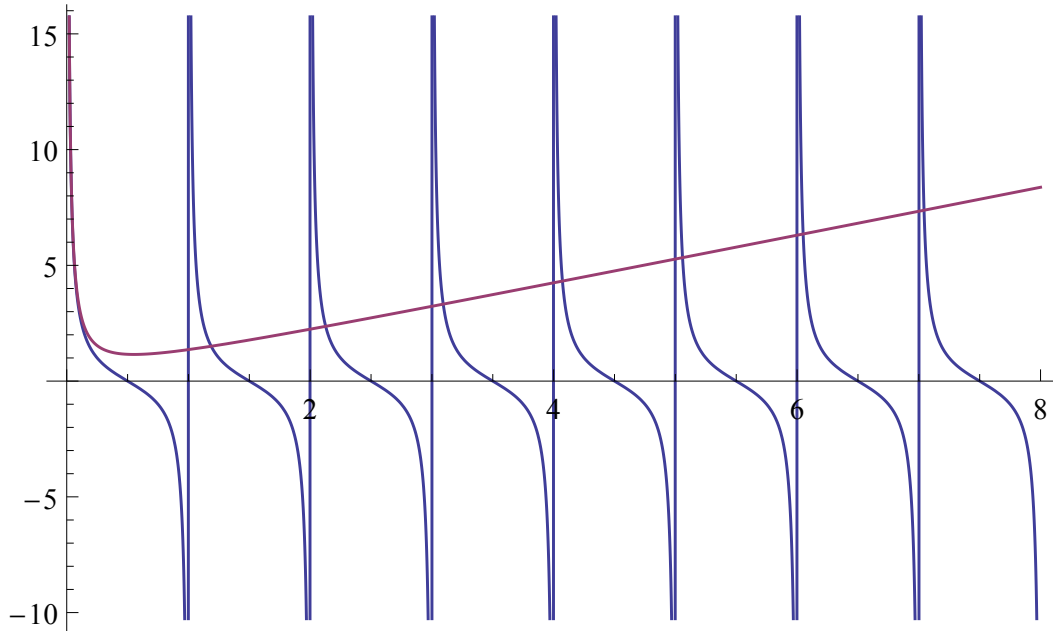


Figura 1.1: Solução gráfica da equação (1.46), para $Rg = 1$ e $\omega_0 R = 1$.

As interseções acontecem somente uma vez em cada ramo da função cotangente, tal que podemos escrever as soluções para as autofrequências coletivas como

$$\Omega_r = (r + \epsilon_r) \frac{\pi}{R}, \quad (1.47)$$

onde $r = 0, 1, 2, \dots$ e $0 < \epsilon_r < 1$. Podemos observar que quando R é suficientemente pequeno, quase todas as suas soluções serão aproximadamente iguais aos valores das frequências correspondentes às assíntotas da cotangente, ou seja, as soluções serão aproximadamente iguais as frequências ω_k do campo e quando $R \rightarrow \infty$ as soluções ocuparão todo o eixo real positivo, já que neste limite $\Delta\Omega = \Delta\omega \rightarrow 0$.

Para determinar a distribuição de energia dos modos normais do nosso sistema, vamos elevar as coordenadas e momentos da Hamiltoniana (1.26) a categoria de operadores. Assim, o Hamiltoniano quantizado do sistema é

$$H = \frac{1}{2}(p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) - \eta q_0 \sum_{k=1}^N \omega_k q_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \eta^2 q_0^2, \quad (1.48)$$

onde q_μ e p_μ devem ser agora considerados como operadores de posição e momento. Vimos que este Hamiltoniano pode ser diagonalizada fazendo uma transformação linear das coordenadas (1.27) e dos momentos canonicamente conjugados(1.28), de forma que o nosso sistema passa a ser descrito por um conjunto de osciladores desacoplados. Para encontrar os autovalores de energia vamos definir os operadores de criação e aniquilação coletivos, dados por

$$A_r = \sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} \left(Q_r + i \frac{P_r}{\Omega_r} \right) \quad (1.49)$$

$$A_r^\dagger = \sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} \left(Q_r - i \frac{P_r}{\Omega_r} \right) \quad (1.50)$$

Reescrevendo a Hamiltoniana (1.31), temos

$$H = \sum_{r=0}^N \Omega_r \left(A_r^\dagger A_r + \frac{1}{2} \right), \quad (1.51)$$

cujos autovalores de energia e autovetores são dados por

$$E_{n_0, n_1, \dots, n_N} = \sum_{r=0}^N \Omega_r \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \quad \text{com } n_r = 0, 1, 2, \dots \quad (1.52)$$

e

$$|n_0, n_1, \dots, n_N\rangle_c = |n_0\rangle_c \otimes |n_1\rangle_c \otimes \dots \otimes |n_N\rangle_c \quad (1.53)$$

sendo $N_r = A_r^\dagger A_r$ o operador número com autovetores $|n_r\rangle_c$, onde o índice c denota os estados coletivos. Estes operadores de criação e aniquilação coletivos, juntamente com o Hamiltoniano (1.51) e seus respectivos autovalores de energia serão muito importantes e utilizados nos Capítulos (2) e (5).

Capítulo 2

Coordenadas vestidas e amplitudes de probabilidade

Neste capítulo vamos redefinir as coordenadas físicas do nosso sistema oscilador-campo, introduzindo as coordenadas e momentos renormalizados (coordenadas vestidas) e com estas coordenadas fazer uma descrição não perturbativa do sistema oscilador-campo. Veremos que estas novas coordenadas não são uma simples mudança de variáveis e sim as reais coordenadas físicas do sistema, ou seja, aquelas que garantem a consistência física do modelo.

2.1 Introdução as coordenadas vestidas

O oscilador harmônico simples é um dos problemas mais importantes da mecânica quântica. Além de ilustrar muitos dos conceitos básicos e métodos da mecânica quântica, ele é também de grande valor prático, pois alguns potenciais podem ser aproximados por um potencial do tipo oscilador harmônico simples; ele descreve, portanto, fenômenos que vão de vibrações moleculares a estrutura nuclear. Seguindo esta linha, vamos utilizar o nosso sistema, dado pela hamiltoniana (1.48) para descrever, de maneira aproximada, um átomo em interação com um campo eletromagnético confinados numa cavidade esférica de raio R . Para isto, considere um átomo sendo representado pelo oscilador de frequência ω_0 e os modos do campo eletromagnético representado pelos demais osciladores. Numa situação sem interação, em que temos o átomo no seu n_0 -ésimo estado excitado e n_k fótons de

frequência ω_k , as autofunções da Hamiltoniana livre são [32, 33]

$$\psi_{n_0, n_1, \dots, n_N}(q) = \langle q | n_0, n_1, \dots, n_N \rangle = \prod_{\mu=0}^N \left[\left(\frac{\omega_\mu}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^{n_\mu} n_\mu!}} H_{n_\mu}(\sqrt{\omega_\mu} q_\mu) e^{-\frac{1}{2} \omega_\mu q_\mu^2} \right]. \quad (2.1)$$

Assim, $\psi_{n_0, 0, \dots, 0}(q)$ representa um átomo no seu n_0 -ésimo estado excitado no vácuo quântico (ausência de fótons). A experiência nos diz que um sistema representado pelo estado $\psi_{n_0, 0, \dots, 0}(q)$ é instável, ou seja, qualquer que seja o nível excitado de um átomo, ele pode, eventualmente, decair para estados de menor energia, distribuindo a energia liberada entre os modos do campo através de uma emissão espontânea de fótons, pelo fato do átomo não estar isolado da interação com o campo eletromagnético. No nosso modelo aproximado temos que a interação átomo-campo eletromagnético é dada através do acoplamento linear de q_0 e q_k , ou seja, os termos cruzados na Hamiltoniana (1.48). Porém, um problema surge quando analisamos o estado de vácuo $\psi_{0, 0, \dots, 0}(q)$ que representa o átomo no seu estado fundamental e na ausência de fótons (campo em estado de vácuo), que pelo fato de também não estar isolado da interação com o campo eletromagnético, é instável, o que contradiz o fato experimental da estabilidade do átomo no seu estado fundamental e na ausência de fótons. Poderíamos pensar que o modelo não é o mais correto para descrever o fenômeno, pois sabemos que o modelo correto para abordar esse problema é a eletrodinâmica quântica, que é extremamente complicada, além de limitar-se a resultados aproximados e abordados perturbativamente.

A motivação para introduzir as coordenadas vestidas consiste, justamente, em contornar o impasse apontado acima e foram introduzidas numa série de artigos [6, 7, 8]. Para manter o nosso modelo o mais simples possível e ainda sendo descrito pela Hamiltoniana com interação (1.48), buscaremos um novo conjunto de coordenadas, as coordenadas “vestidas”, denotadas por q'_μ , que descreva corretamente, no lugar das coordenadas “nuas”¹ q_μ , os estados individuais do oscilador e do campo. Vamos desconsiderar as coordenadas nuas como sendo as coordenadas físicas do sistema e sim as coordenadas vestidas que descrevem o oscilador e o campo, quando estes interagem entre si de acordo com o nosso modelo de acoplamento linear. Nesta nova representação, o estado de vácuo deve ser autoestado do Hamiltoniano com interação, para assim permanecer estável.

Para introduzir as coordenadas vestidas (renormalizadas) q'_μ que serão as coordenadas

¹Chamaremos de coordenadas nuas, as coordenadas q_μ da Hamiltoniana (1.48)

fisicamente mensuráveis e não violarão a estabilidade do átomo em seu estado fundamental, vamos definir as autofunções vestidas, que descreve o átomo no seu n_0 -ésimo nível excitado e n_k fótons de frequência ω_k , como

$$\psi_{n_0, n_1, \dots, n_N}(q') =_d \langle q' | n_0, n_1, \dots, n_N \rangle_d = \prod_{\mu=0}^N \left[\left(\frac{\omega_\mu}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^{n_\mu} n_\mu!}} H_{n_\mu}(\sqrt{\omega_\mu} q'_\mu) e^{-\frac{1}{2} \omega_\mu q'^2_\mu} \right]. \quad (2.2)$$

onde o índice d refere-se a estado vestido. Vamos agora definir as coordenadas vestidas com o intuito de relacioná-las com as coordenadas “nuas”, e vamos impor as seguintes condições:

- a função de onda do vácuo $\psi_{0,0,\dots,0}(q')$ deve
 1. ser uma das autofunções do Hamiltoniano com interação (exigir a estabilidade física do estado fundamental vestido);
 2. corresponder a um estado de energia mínima (exigir que seja igual ou proporcional ao estado fundamental do sistema com interação);
- na ausência de interação ($g = 0$), as coordenadas vestidas devem ser iguais às coordenadas nuas.

Vimos que a Hamiltoniana com interação pode ser diagonalizada através das transformações (1.27) e (1.28) de tal forma que esta represente um conjunto de osciladores desacoplados (1.31), onde Ω_r são as frequências dos modos de oscilação coletivas destes osciladores. Assim, vamos representar as autofunções da Hamiltoniana com interação através dos seus modos normais,

$$\Psi_{n_0, n_1, \dots, n_N}(Q) =_c \langle Q | n_0, n_1, \dots, n_N \rangle_c = \prod_{r=0}^N \left[\left(\frac{\Omega_r}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^{n_r} n_r!}} H_{n_r}(\sqrt{\Omega_r} Q_r) e^{-\frac{1}{2} \Omega_r Q_r^2} \right], \quad (2.3)$$

onde as auto-energias correspondente à essas autofunções são dadas em (1.52). Para satisfazer as condições 1 e 2 acima, devemos ter:

$$\psi_{0,0,\dots,0}(q') \propto \Psi_{0,0,\dots,0}(Q). \quad (2.4)$$

Usando as equações (2.2) e (2.3) em (2.4), temos

$$e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^N \omega_\mu q'^2_\mu} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{r=0}^N \Omega_r Q_r^2}, \quad (2.5)$$

onde obtemos

$$q'_\mu = \sum_{r=0}^N \sqrt{\frac{\Omega_r}{\omega_\mu}} t_\mu^r Q_r. \quad (2.6)$$

que pode ser verificado substituindo a equação (2.6) na equação (2.5) e usando a propriedade da ortogonalidade da matriz t_μ^r . Observe que em princípio, qualquer matriz ortogonal pode ser usada na equação (2.6) a fim de satisfazer a equação (2.5), mas por causa que no limite $g \rightarrow 0$ as coordenadas vestidas devem ser iguais às coordenadas nuas ($q'_\mu \rightarrow q_\mu$), é natural escolher a matriz t_μ^r na equação (2.6), já que quando $g \rightarrow 0$, $t_\mu^r \rightarrow \delta_{\mu r}$. Usando $Q_r = \sum_\nu t_\nu^r q_\nu$ na equação (2.6) encontramos a relação entre as coordenadas vestidas e as coordenadas nuas, dada por

$$q'_\mu = \sum_{\nu=0}^N \sum_{r=0}^N \sqrt{\frac{\Omega_r}{\omega_\mu}} t_\mu^r t_\nu^r q_\nu. \quad (2.7)$$

Devemos enfatizar que as novas coordenadas q'_μ não são uma mera mudança de variáveis, elas são as coordenadas físicas que dão a consistência física ao modelo. Nas próximas seções e capítulos vamos utilizar as coordenadas vestidas para representar e descrever sistemas físicos de forma analítica e mostrar como ela nos conduz a resultados experimentalmente observados.

2.2 Amplitudes de probabilidade

Seja $|n_0, n_1, \dots, n_N\rangle_d$ o estado vestido do sistema em $t = 0$, a amplitude de probabilidade de encontrar $|n_0, n_1, \dots, n_N\rangle_d$, num tempo t posterior, no estado $|m_0, m_1, \dots, m_N\rangle_d$ é dada por

$$A_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{m_0, m_1, \dots, m_N}(t) = {}_d \langle m_0, m_1, \dots, m_N | e^{-iHt} | n_0, n_1, \dots, n_N \rangle_d. \quad (2.8)$$

Com o auxílio da relação de completude

$$\sum_{l_0, l_1, \dots, l_N=0}^{\infty} |l_0, l_1, \dots, l_N\rangle_c {}_c \langle l_0, l_1, \dots, l_N| = \mathbb{I}, \quad (2.9)$$

podemos reescrever a amplitude (2.8) da seguinte forma

$$A_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{m_0, m_1, \dots, m_N}(t) = \sum_{l_0, l_1, \dots, l_N=0}^{\infty} T_{m_0, m_1, \dots, m_N}^{l_0, l_1, \dots, l_N} T_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{l_0, l_1, \dots, l_N} e^{-itE_{l_0, l_1, \dots, l_N}} \quad (2.10)$$

sendo E_{l_0, l_1, \dots, l_N} os autovalores de energia dos estados coletivos definidos na equação (1.52)

e

$$T_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{l_0, l_1, \dots, l_N} = {}_c \langle l_0, l_1, \dots, l_N | n_0, n_1, \dots, n_N \rangle_d = \int dQ \Psi_{l_0, l_1, \dots, l_N}(Q) \psi_{n_0, n_1, \dots, n_N}(q'). \quad (2.11)$$

Usando as respectivas autofunções, dadas pelas equações (2.3) e (2.2), obtemos

$$T_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{l_0, l_1, \dots, l_N} = \int dQ \left[\prod_{r=0}^N \left(\frac{\Omega_r}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^{l_r} l_r!}} H_{l_r}(\sqrt{\Omega_r} Q_r) e^{-\frac{1}{2} \Omega_r Q_r^2} \right] \times \left[\prod_{\mu=0}^N \left(\frac{\omega_\mu}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^{n_\mu} n_\mu!}} H_{n_\mu}(\sqrt{\omega_\mu} q'_\mu) e^{-\frac{1}{2} \omega_\mu q_\mu'^2} \right], \quad (2.12)$$

e usando a equação (2.6), encontramos

$$T_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{l_0, l_1, \dots, l_N} = \int dQ \prod_{\mu, r=0}^N \left(\frac{\Omega_r}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2^{l_r} l_r!}} \frac{1}{\sqrt{2^{n_\mu} n_\mu!}} H_{l_r}(\sqrt{\Omega_r} Q_r) \times H_{n_\mu} \left(\sum_{s=0}^N \sqrt{\omega_s} t_\mu^s Q_s \right) e^{-\sum_{r=0}^N \Omega_r Q_r^2}. \quad (2.13)$$

Note que para calcular os coeficiente $T_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{l_0, l_1, \dots, l_N}$, devemos em geral, resolver integrais envolvendo o produto de mais de dois polinômios de Hermite, a qual é uma tarefa de extrema dificuldade. O que pode ser feito é considerar certas situações especiais em que se podem calcular as integrais em (2.13). Assim, vamos explorar um pouco destas situações e resolver de forma exata algumas das amplitudes de probabilidade do sistema [12]. Vamos considerar a situação em que no tempo inicial $t = 0$ temos apenas o μ -ésimo oscilador vestido q'_μ no seu n -ésimo estado excitado e os demais osciladores vestidos estão no estado fundamental. Tal estado em $t = 0$ é dado por $|0, 0, \dots, n_\mu, \dots, 0\rangle_d$. Nesta contexto vamos determinar a amplitude de probabilidade de um estado inicial $|0, 0, \dots, n_\mu, \dots, 0\rangle_d$ em $t = 0$ ser encontrado no estado $|0, 0, \dots, m_\nu, \dots, 0\rangle_d$ em um instante t posterior. Assim, de (2.10) temos

$$A_{0, 0, \dots, n_\mu, \dots, 0}^{0, 0, \dots, m_\nu, \dots, 0}(t) = \sum_{l_0, l_1, \dots, l_N=0}^{\infty} T_{0, 0, \dots, m_\nu, \dots, 0}^{l_0, l_1, \dots, l_N} T_{0, 0, \dots, n_\mu, \dots, 0}^{l_0, l_1, \dots, l_N} e^{-itE_{l_0, l_1, \dots, l_N}}. \quad (2.14)$$

Logo, a equação (2.13) é escrita da seguinte forma

$$T_{0, 0, \dots, n_\mu, \dots, 0}^{l_0, l_1, \dots, l_N} = \int dQ \prod_{r=0}^N \left(\frac{\Omega_r}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2^{l_r} l_r!}} \frac{1}{\sqrt{2^{n_\mu} n_\mu!}} H_{l_r}(\sqrt{\Omega_r} Q_r) \times H_{n_\mu} \left(\sum_{s=0}^N \sqrt{\omega_s} t_\mu^s Q_s \right) e^{-\sum_{r=0}^N \Omega_r Q_r^2}, \quad (2.15)$$

e usando o teorema [34]

$$\frac{1}{n_\mu!} \left(\sum_{s=0}^N (t_\mu^s)^2 \right) H_{n_\mu} \left(\frac{\sum_{s=0}^N t_\mu^s \sqrt{\Omega_s} Q_s}{\sqrt{\sum_{s=0}^N (t_\mu^s)^2}} \right) = \sum_{s_0+s_1+\dots+n_\mu}^N \prod_{r=0}^N \frac{(t_\mu^r)^{s_r}}{s_r!} H_{s_r}(\sqrt{\Omega_r} Q_r), \quad (2.16)$$

encontramos

$$T_{0,0,\dots,n_\mu,\dots,0}^{l_0,l_1,\dots,l_N} = \int dQ \prod_{r=0}^N \left(\frac{\Omega_r}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2^{l_r} l_r!}} \frac{1}{\sqrt{2^{n_\mu} n_\mu!}} H_{l_r}(\sqrt{\Omega_r} Q_r) \times \\ n_\mu! \sum_{s_0+s_1+\dots+n_\mu}^N \prod_{r=0}^N \frac{(t_\mu^r)^{s_r}}{s_r!} H_{s_r}(\sqrt{\Omega_r} Q_r) e^{-\sum_{r=0}^N \Omega_r Q_r^2}. \quad (2.17)$$

Com um pouco de algebrismo encontramos a forma final para $T_{0,0,\dots,n_\mu,\dots,0}^{l_0,l_1,\dots,l_N}$, dada por

$$T_{0,0,\dots,n_\mu,\dots,0}^{l_0,l_1,\dots,l_N} = \sqrt{\frac{n_\mu!}{2^{n_\mu}}} \sum_{s_0+s_1+\dots+n_\mu}^N \prod_{r=0}^N \frac{(t_\mu^r)^{s_r}}{s_r!} \sqrt{2^{l_r} l_r!} \delta_{l_r s_r}. \quad (2.18)$$

Substituindo (2.18) na amplitude de probabilidade (2.14) e fazendo algumas manipulações, encontramos

$$A_{0,0,\dots,n_\mu,\dots,0}^{0,0,\dots,m_\nu,\dots,0}(t) = e^{-itE_{0,0,\dots,0}} n_\mu! \sum_{s_0+s_1+\dots+n_\mu}^N \prod_{r=0}^N \left[\frac{(t_\mu^r t_\nu^r e^{-i\Omega_r t})^{s_r}}{s_r!} \right], \quad (2.19)$$

que resulta em

$$A_{0,0,\dots,n_\mu,\dots,0}^{0,0,\dots,m_\nu,\dots,0}(t) = e^{-itE_{0,0,\dots,0}} \delta_{n_\mu m_\nu} [f_{\mu\nu}(t)]^{n_\mu}, \quad (2.20)$$

onde

$$f_{\mu\nu}(t) = \sum_{r=0}^N t_\mu^r t_\nu^r e^{-i\Omega_r t}. \quad (2.21)$$

A existência da $\delta_{n_\nu m_\mu}$ na equação (2.20) nos diz que este modelo de acoplamento linear prevê uma espécie de regra de seleção que proíbe, por exemplo, que um átomo no seu terceiro estado excitado decaia para o estado fundamental emitindo um único fóton.

Vemos, de (2.20), que $|f_{\mu\nu}(t)|^2$ é a probabilidade de ocorrer a transição de um quantum de energia do modo μ para o modo ν . Isto é fortalecido pela seguinte propriedade de $f_{\mu\nu}(t)$:

$$\sum_{\nu=0}^N |f_{\mu\nu}(t)|^2 = \sum_{\nu=0}^N \left(\sum_{s=0}^N t_\mu^s t_\nu^s e^{i\Omega_s t} \right) \left(\sum_{r=0}^N t_\mu^r t_\nu^r e^{-i\Omega_r t} \right) \\ = \sum_{r,s=0}^N e^{i(\Omega_s - \Omega_r)t} t_\mu^r t_\nu^s \sum_{\nu=0}^N t_\nu^r t_\nu^s = \sum_{r=0}^N (t_\mu^r)^2 = 1, \quad (2.22)$$

ou seja, quando somamos sobre todas as possibilidades, encontramos 1. A equação (2.20) também nos diz que o número de quantas é conservado, por exemplo, se o átomo estiver no n -ésimo estado excitado, ele pode decair para o estado fundamental somente se forem emitidos n fótons.

2.3 Amplitude de probabilidade de permanência no limite $R \rightarrow \infty$

Nesta seção vamos considerar que o nosso sistema átomo-campo eletromagnético está confinado numa cavidade arbitrariamente grande ($R \rightarrow \infty$) e que o campo está no seu estado de vácuo. Da equação (2.20), vemos que a amplitude de probabilidade de que o oscilador vestido q'_0 (átomo) permaneça no seu n -ésimo estado excitado, é

$$A_{n,0,\dots,0}^{n,0,\dots,0}(t) = [f_{00}(t)]^n \quad (2.23)$$

Observe que estamos omitindo o fator $e^{-itE_{0,0,\dots,0}}$ por não contribuir com a probabilidade. Vamos analisar a probabilidade do átomo vestido ($\mu, \nu = 0$) permanecer no seu primeiro estado excitado, isto é, vamos tomar $n = 1$ na equação para a amplitude de probabilidade (2.23). Assim, para determinar a amplitude de probabilidade do átomo permanecer no seu primeiro estado excitado, devemos determinar $f_{00}(t)$, dado na equação (2.21):

$$A_{1,0,\dots,0}^{1,0,\dots,0}(t) = f_{00}(t) = \sum_{r=0}^N (t_0^r)^2 e^{-i\Omega_r t}. \quad (2.24)$$

Para calcular a soma anterior, temos que determinar as autofrequências Ω_r que como vimos em (1.45) não pode ser determinado de forma exata e também teríamos que determinar os elementos de matriz t_0^r [6, 35]. Uma maneira alternativa e que iremos abordar encontra-se em [14] e trata-se de passar das somas encontradas em (2.24) para integrais no plano complexo. Para isto, considere a função

$$R_{\mu\nu} = \sum_{r=0}^N t_\mu^r t_\nu^r M_{\mu\nu}(\Omega_r), \quad (2.25)$$

onde $M_{\mu\nu}(\Omega_r)$ é uma função analítica de Ω_r . Agora vamos definir a função $W(z)$ como

$$W(z) = z^2 - \omega_0^2 + \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 z^2}{\omega_k^2 - z^2}. \quad (2.26)$$

onde z é uma variável complexa. Das equações (1.39) e (2.26) observamos que $z = \Omega_r$ são raízes de $W(z) = 0$. Derivando $W(z)$ em relação a z encontramos

$$\frac{dW(z)}{dz} = W'(z) = 2z \left[1 + \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - z^2)^2} \right]. \quad (2.27)$$

Comparando com a equação (1.37) e tomando $z = \Omega_r$, temos

$$W'(z) \Big|_{z=\Omega_r} = 2\Omega_r (t_0^r)^{-2}, \quad (2.28)$$

de onde

$$(t_0^r)^2 = \frac{2\Omega_r}{W'(\Omega_r)} \quad (2.29)$$

e podemos desta forma reescrever (2.25) com $\mu = 0 = \nu$:

$$R_{00} = \sum_{r=0}^N \frac{2\Omega_r}{W'(\Omega_r)} M_{00}(\Omega_r). \quad (2.30)$$

Recorrendo ao estudo das variáveis complexas [24, 36], sabemos que para uma função

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (2.31)$$

onde $P(z)$ e $Q(z)$ são funções analíticas. As raízes de $Q(z) = 0$ são os pólos de $f(z)$. Nesse caso, se z_0 é um pólo de ordem um, o resíduo $res.f(z_0)$ é dado por

$$res.f(z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}, \quad (2.32)$$

onde $Q'(z)$ é a derivada de $Q(z)$ em relação de z . Se z_0, z_1, \dots, z_N são os pólos simples de $f(z)$ contidos no interior de C e $res.f(z_r)$ são os resíduos associados a cada pólo z_r , o Teorema dos Resíduos nos fornece

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{r=0}^N res.f(z_r) = 2\pi i \sum_{r=0}^N \frac{P(z_r)}{Q'(z_r)}, \quad (2.33)$$

onde C é um contorno fechado que contenha todos os pólos simples z_r .

Das equações (2.33) e (2.30), concluímos que

$$R_{00} = \frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{zM_{00}(z, t)}{W(z)} dz, \quad (2.34)$$

onde o contorno C é um contorno fechado que contém o eixo real positivo no plano complexo. Já que os pólos são os zeros da função $W(z)$, que por definição, coincidem com as

frequências normais. Conforme discutido na seção (1.4) estas frequências estão ao longo do eixo real e no limite $R \rightarrow \infty$, ocupam todo o eixo real. Tomando $M_{00} = e^{-izt}$, na equação (2.25), vemos que a equação (2.24) pode ser reescrita, usando a equação (2.34), como

$$f_{00}(t) = \frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{ze^{-izt}}{W(z)} dz. \quad (2.35)$$

Logo, este método nos permite calcular as amplitudes de probabilidades sem a necessidade de efetuar as somas encontradas em (2.24) e sem determinar de forma explícita as matrizes de transformação t_μ^r .

Para calcular as amplitudes de probabilidade, necessitamos determinar a função $W(z)$. Note que até o momento não fizemos nenhuma restrição em relação ao raio R da cavidade. Porém, neste capítulo vamos nos limitar ao caso $R \rightarrow \infty$, onde na equação (2.26), podemos substituir a soma por uma integral, fazendo o uso de que $\eta^2 = 2g\Delta\omega = 2gd\omega$, já que $\Delta\omega = \frac{\pi}{R}$. Conseqüentemente, no limite $R \rightarrow \infty$, temos para a equação (2.26)

$$W(z) = z^2 - \omega_0^2 + 2gz^2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2 - z^2}. \quad (2.36)$$

Podemos calcular a integral acima, usando o teorema dos resíduos, obtendo

$$W(z) = \begin{cases} z^2 + ig\pi z - \omega_0^2, & \text{se } \text{Im}(z) > 0 \\ z^2 - ig\pi z - \omega_0^2, & \text{se } \text{Im}(z) < 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Para resolver (2.35) vamos escolher C da Figura (2.1).

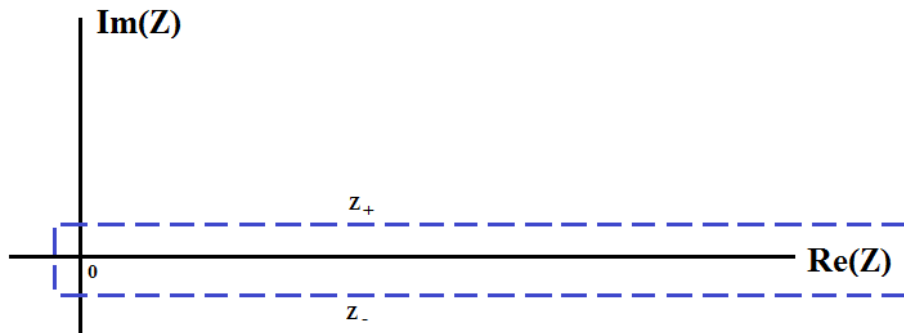


Figura 2.1: Contorno retangular que contorne todo o eixo real positivo onde estão todos os Ω_r .

Este contorno se encontra logo abaixo e acima do eixo real positivo. Abaixo do eixo real

positivo temos $z_- = \alpha - i\epsilon$ e acima $z_+ = \alpha + i\epsilon$, onde α é real e positivo e $\epsilon \rightarrow 0^+$. Podemos assim reescrever (2.35) como

$$f_{00}(t) = \frac{1}{\pi i} \left[\int_0^\infty d\alpha \frac{(\alpha - i\epsilon)e^{-i(\alpha - i\epsilon)t}}{W(\alpha - i\epsilon)} + \int_\infty^0 d\alpha \frac{(\alpha + i\epsilon)e^{-i(\alpha + i\epsilon)t}}{W(\alpha + i\epsilon)} \right]. \quad (2.38)$$

Tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0^+$ e usando a equação (2.37), ficamos com

$$f_{00}(t) = 2g \int_0^\infty \frac{\alpha^2 e^{-i\alpha t} d\alpha}{(\alpha^2 - \omega_0^2)^2 + g^2 \pi^2 \alpha^2}. \quad (2.39)$$

Podemos verificar a validade desta equação tomando $t = 0$ na equação (2.24), resultando em $\sum_r (t_0^r)^2$ que é igual a 1 pela ortogonalidade da matriz t_μ^r , ou seja, $f_{00}(t = 0) = 1$. Para verificar isto, considere a função

$$f(z) = \frac{2gz^2}{(z^2 - \omega_0^2)^2 + g^2 \pi^2 z^2}. \quad (2.40)$$

Os pólos desta função são

$$\begin{aligned} z_1 &= +i\frac{\pi g}{2} + \tilde{\omega} & z_3 &= -i\frac{\pi g}{2} + \tilde{\omega} \\ z_2 &= +i\frac{\pi g}{2} - \tilde{\omega} & z_4 &= -i\frac{\pi g}{2} - \tilde{\omega}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\pi^2 g^2}{4}}$. Escolhendo como contorno fechado um semicírculo no sentido horário do semiplano com $Im(z) \geq 0$, de raio B com centro na origem. Pela paridade da função $f(z)$, podemos escrever (2.39) como

$$f_{00}(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{g\alpha^2 d\alpha}{(\alpha^2 - \omega_0^2)^2 + g^2 \pi^2 \alpha^2}. \quad (2.42)$$

Dentro do contorno escolhido estão apenas os pólos z_1 e z_2 , e os resíduos não nulos associados a estes pólos são

$$res.f(z_1) = \frac{+i\pi g + 2\tilde{\omega}}{4\pi i \tilde{\omega}} \quad res.f(z_2) = \frac{-i\pi g + 2\tilde{\omega}}{4\pi i \tilde{\omega}}.$$

Pelo teorema dos resíduos, temos

$$f_{00}(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{g\alpha^2 d\alpha}{(\alpha^2 - \omega_0^2)^2 + g^2 \pi^2 \alpha^2} = \frac{1}{2} \left[2\pi i \sum_{r=1}^2 res.f(z_r) \right] = 1. \quad (2.43)$$

Isto nos diz que a probabilidade de encontrar o oscilador vestido q'_0 no seu primeiro estado excitado em $t = 0$ é igual a 1, resultado esperado já que estamos no tempo $t = 0$ o átomo

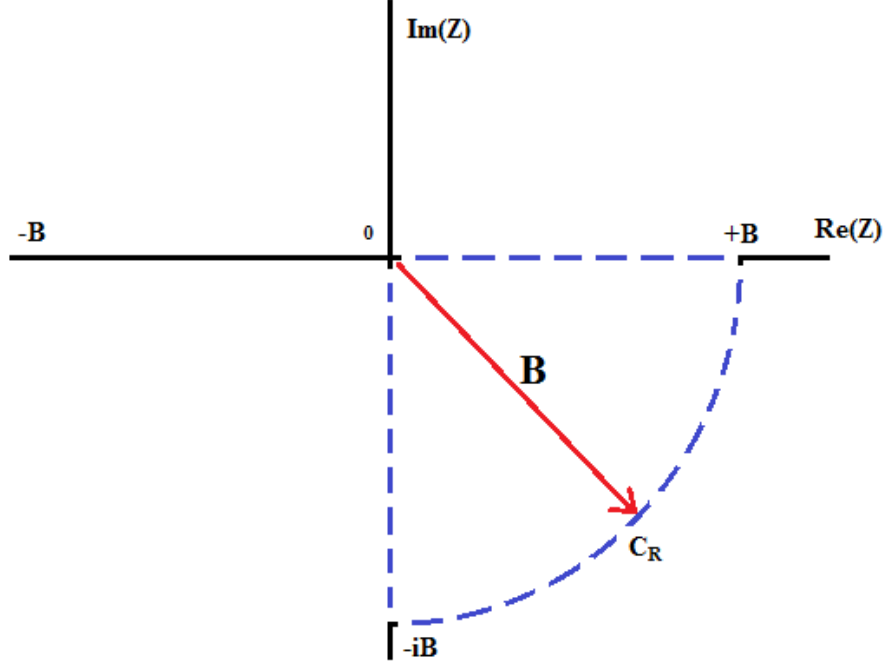


Figura 2.2: Contorno de integração para equação (2.39).

foi preparado no primeiro estado excitado. Voltando a amplitude de permanência $f_{00}(t)$, devemos calcular a integral na equação (2.39). Para tal efeito, vamos definir a função

$$F(z) = \frac{2gz^2}{(z^2 - \omega_0^2)^2 + g^2\pi^2 z^2} e^{-izt}. \quad (2.44)$$

Integrando $F(z)$ ao longo do contorno C' da Figura (2.2) no sentido horário, temos

$$\oint_{C'} F(z)dz = \int_{-iB}^0 \frac{2gz^2 e^{-izt}}{(z^2 - \omega_0^2)^2 + g^2\pi^2 z^2} dz + \int_0^B F(z)dz + \int_{C_R} F(z)dz, \quad (2.45)$$

de onde temos

$$\int_0^B F(z)dz = \oint_{C'} F(z)dz - \int_{-iB}^0 \frac{2gz^2 e^{-izt}}{(z^2 - \omega_0^2)^2 + g^2\pi^2 z^2} dz - \int_{C_R} F(z)dz. \quad (2.46)$$

No limite $B \rightarrow \infty$, a última integral da equação anterior é nula, e $\int_0^B F(z)dz = f_{00}(t)$ e para a integral ao longo do contorno fechado C' , obtemos

$$\int_C F(z)dz = \left(1 - \frac{i\pi g}{2\tilde{\omega}}\right) e^{-i(\tilde{\omega} - \frac{i\pi g}{2})t}. \quad (2.47)$$

Consequentemente, obtemos para a amplitude de permanência $f_{00}(t)$, dada por

$$f_{00}(t) = \left(1 - \frac{i\pi g}{2\tilde{\omega}}\right) e^{-i(\tilde{\omega} - \frac{i\pi g}{2})t} + 2igJ(t), \quad (2.48)$$

onde

$$J(t) = \int_0^\infty \frac{y^2 e^{-yt}}{(y^2 + \omega_0^2)^2 - g^2 \pi^2 y^2} dy. \quad (2.49)$$

A equação (2.48) é a amplitude de probabilidade do átomo vestido permanecer no primeiro estado excitado, onde consideramos $\tilde{\omega}^2 > 0$, mas devemos nos atentar para as possibilidade de $\tilde{\omega}^2 = 0$ e $\tilde{\omega}^2 < 0$ quando for o caso, ver a referência [8]. Observe que a partir de $t \approx \frac{1}{y}$, o fator e^{-yt} converge em $J(t)$. Então, se tomarmos y suficientemente pequeno, tal que $y \ll \omega_0$, teremos que a integral (2.49) converge na aproximação $t \gg \frac{1}{\omega_0}$. Neste caso, podemos aproximar a integral $J(t)$ por

$$J(t) \approx \int_0^\infty \frac{y^2 e^{-yt}}{\omega_0^4} dy, \quad (2.50)$$

que pode ser reescrita como

$$J(t) \approx \frac{1}{\omega_0^4} \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_0^\infty e^{-yt} \right) dy, \quad (2.51)$$

de onde obtemos

$$J(t) \approx \frac{2}{\omega_0^4 t^3}. \quad (2.52)$$

Substituindo este resultado na equação (2.52), obtemos

$$f_{00}(t) \approx \left(1 - \frac{i\pi g}{2\tilde{\omega}} \right) e^{-i(\tilde{\omega} - \frac{i\pi g}{2})t} + \frac{4ig}{\omega_0^4 t^3}, \quad (2.53)$$

de onde a probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado é dada por

$$|f_{00}(t)|^2 = \left[\left(1 - \frac{i\pi g}{2\tilde{\omega}} \right) e^{-i(\tilde{\omega} - \frac{i\pi g}{2})t} + \frac{4ig}{\omega_0^4 t^3} \right] \left[\left(1 + \frac{i\pi g}{2\tilde{\omega}} \right) e^{i(\tilde{\omega} + \frac{i\pi g}{2})t} - \frac{4ig}{\omega_0^4 t^3} \right]. \quad (2.54)$$

Efetuada a multiplicação, obtemos

$$|f_{00}(t)|^2 = \left(1 + \frac{\pi^2 g^2}{4\tilde{\omega}^2} \right) e^{-\pi g t} - \frac{8g}{\omega_0^4 t^3} \sin(\tilde{\omega} t) e^{-\frac{\pi}{2} g t} - \frac{4\pi g^2}{\tilde{\omega} \omega_0^4 t^3} \cos(\tilde{\omega} t) e^{-\frac{\pi}{2} g t} + \frac{16g^2}{\omega_0^8 t^6} \quad (2.55)$$

Analisando numericamente a equação (2.55), as soluções numéricas para a probabilidade do átomo permanecer no seu primeiro estado excitado são apresentadas na Figura (2.3), onde a frequência tem um valor fixo, da ordem $\omega_0 = 1,0/s$ e variamos a constante de acoplamento, sendo $g = 4,0 \times 10^{-3}/s$, $g = 3,0 \times 10^{-3}/s$ e $g = 1,0 \times 10^{-2}/s$ representadas pelas respectivas curvas em roxo, azul e verde. Observe que mesmo existindo termos

oscilantes, a exponencial domina na probabilidade. Nesta análise, todos os valores para a constante de acoplamento são pequenos comparados a ω_0 , o que caracteriza um acoplamento fraco ($g \ll \omega_0$), que na teoria eletromagnética corresponde ao fato de a constante de estrutura fina ser pequena quando comparada a 1. Logo, considerando um acoplamento fraco ($g \ll \omega_0$) na equação (2.55), obtemos

$$|f_{00}(t)|^2 \approx e^{-\pi g t}, \quad (2.56)$$

que é a conhecida lei de decaimento exponencial para o átomo [37]. Outra observação é devido a magnitude do acoplamento, pois quanto maior for a magnitude da constante de acoplamento, mais rápido será o decaimento, como pode ser visto na Figura (2.3).

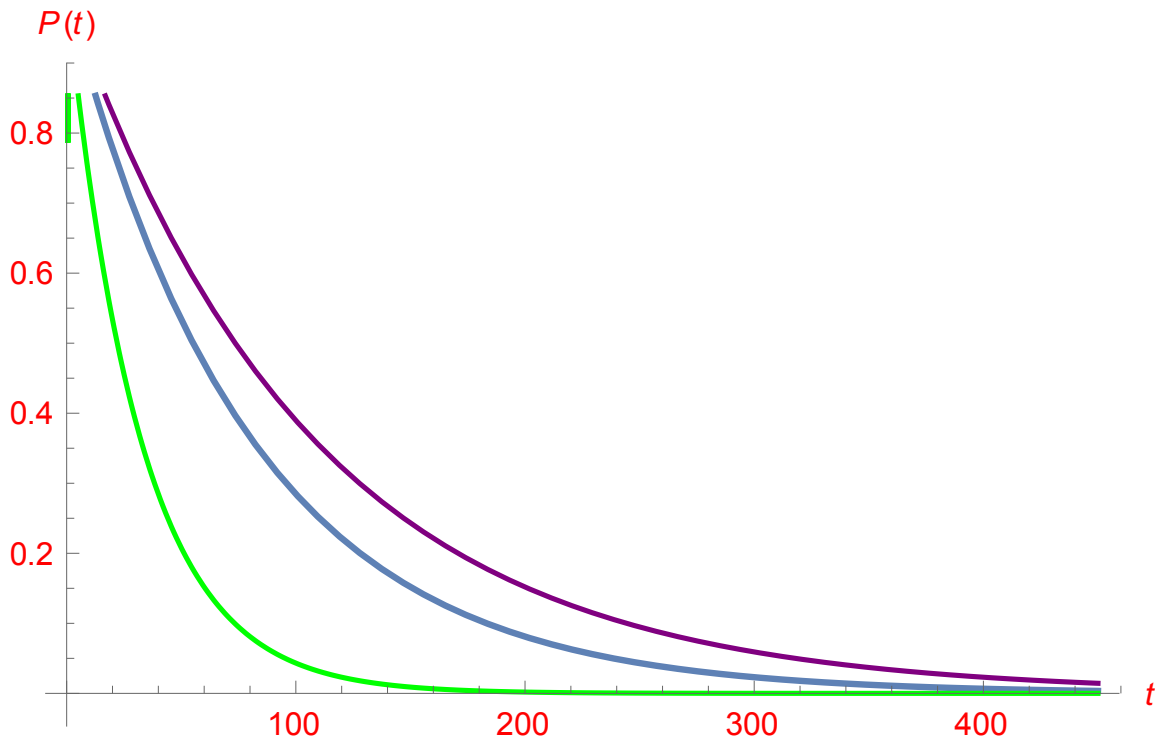


Figura 2.3: Probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado, para $\omega_0 = 1,0/s$ e os respectivos valores de g : $\bullet \bullet \bullet g = 4,0 \times 10^{-3}/s$ $\bullet \bullet \bullet g = 3,0 \times 10^{-3}/s$ $\bullet \bullet \bullet g = 1,0 \times 10^{-2}/s$.

2.4 Amplitude de probabilidade de decaimento no limite $R \rightarrow \infty$

Tomando $\mu = 0$ e $\nu = k$ na equação (2.20) obtemos a amplitude de probabilidade do oscilador vestido (átomo) decair do n -ésimo estado excitado para o estado fundamental emitindo n quanta do campo, com frequência ω_k . Nesta seção vamos calcular a amplitude de probabilidade de decaimento do oscilador vestido q'_0 decair do primeiro estado excitado para o estado fundamental pela emissão de um quanta do campo de frequência ω_k . Fazendo $n_0 = 1$ e $m_k = 1$ na equação (2.20), temos

$$A_{1,0,\dots,0,\dots,0}^{0,0,\dots,1_k,\dots,0}(t) = f_{0k}(t), \quad (2.57)$$

onde $f_{0k}(t)$ é dado por

$$f_{0k}(t) = \sum_{r=0}^N t_0^r t_k^r e^{-i\Omega_r t}. \quad (2.58)$$

O cálculo de $f_{0k}(t)$ é da forma:

$$R_{0k} = \sum_{r=0}^N t_0^r t_k^r M_{0k}(\Omega_r), \quad (2.59)$$

a qual pode ser escrita, usando a equação (1.36) e a função $W(z)$ definida pela equação (2.26), como

$$\begin{aligned} R_{0k} &= \eta\omega_k \sum_{r=0}^N \frac{(t_0^r)^2 M_{0k}(\Omega_r, t)}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} \\ &= \frac{\eta\omega_k}{\pi i} \oint_C \frac{z M_{0k}(z, t)}{W(z)(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} dz. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Usando a equação (2.60) com $M_{0k} = e^{-i\Omega_r t}$, obtemos para f_{0k} :

$$f_{0k}(t) = \frac{\eta\omega_k}{\pi i} \oint_C \frac{z e^{-izt}}{W(z)(\omega_k^2 - z^2)} dz. \quad (2.61)$$

Para resolver esta integral, vamos escolher o mesmo contorno C da Figura (2.1), obtendo

$$f_{0k}(t) = \frac{\eta\omega_k}{\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{(\alpha - i\epsilon)e^{-i(\alpha - i\epsilon)t}}{W(\alpha - i\epsilon)[(\alpha - i\epsilon)^2 - \omega_k^2]} - \frac{(\alpha + i\epsilon)e^{-i(\alpha + i\epsilon)t}}{W(\alpha + i\epsilon)[(\alpha + i\epsilon)^2 - \omega_k^2]} \right] d\alpha. \quad (2.62)$$

No limite $R \rightarrow \infty$, usando a função $W(z)$ dada pela equação (2.37) na equação (2.62), obtemos

$$\begin{aligned} f_{0k}(t) &= + \frac{\eta\omega_k}{\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{\alpha e^{-i\alpha t}}{(\alpha + \frac{i\pi g}{2} - \tilde{\omega})(\alpha + \frac{i\pi g}{2} + \tilde{\omega})(\alpha + i\epsilon - \omega_k)(\alpha + i\epsilon + \omega_k)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha e^{-i\alpha t}}{(\alpha - \frac{i\pi g}{2} - \tilde{\omega})(\alpha - \frac{i\pi g}{2} + \tilde{\omega})(\alpha - i\epsilon - \omega_k)(\alpha - i\epsilon + \omega_k)} \right] d\alpha. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Novamente podemos verificar a validade da equação (2.63) tomando $t = 0$ e usando o teorema de de Cauchy. Mostra-se que a integral se anula de acordo com a ortogonalidade da matriz t_μ^ν ($\sum_r t_\mu^r t_r^\nu = \delta_{\mu\nu}$), o qual é de se esperar, já que em $t = 0$ o átomo foi preparado no primeiro estado excitado. Para resolver a equação (2.63) para $t \neq 0$, usaremos o mesmo contorno utilizado para resolver a equação (2.44). Devemos observar que dentro desse contorno de integração estão somente os pólos $z_3 = -i\frac{\pi g}{2} + \tilde{\omega}$ e $z_5 = -i\epsilon + \omega_k$. Assim, obtemos

$$f_{0k}(t) = \eta\omega_k \left[\frac{(1 - \frac{i\pi g}{2\tilde{\omega}})e^{-i(\tilde{\omega} - \frac{i\pi g}{2})t}}{\omega_k^2 - (\tilde{\omega} - \frac{i\pi g}{2})^2} - \frac{e^{-i\omega_k t}}{\omega_k^2 - \omega_0^2 + i\pi g\omega_k} \right] + 2ig\eta\omega_k I(\omega_k, t) \quad (2.64)$$

onde

$$I(\omega_k, t) = \int_0^\infty \frac{y^2 e^{-yt}}{[(y^2 + \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 y^2](y^2 + \omega_k^2)} dy. \quad (2.65)$$

Tomando o módulo ao quadrado da equação (2.64)

$$\begin{aligned} |f_{0k}(t)|^2 = & + \frac{\eta^2 \omega_k^2}{\tilde{\omega}} \left\{ \frac{\tilde{\omega}^2 + \omega_0^2 e^{-\pi g t}}{\tilde{\omega} K(\omega_k)} - \frac{e^{-\frac{\pi g t}{2}}}{K^2(\omega_k)} \left([2\tilde{\omega}(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k(\omega_k^2 + \omega_0^2)] \right. \right. \\ & \times \cos[(\omega_k - \tilde{\omega})t] + \pi g(\omega_k^2 - \omega_0^2)(\omega_k^2 + \omega_0^2 - 2\tilde{\omega}\omega_k) \sin[(\omega_k - \tilde{\omega})t] \\ & + \left. \left. 2gI(\omega_k, t)K(\omega_k)[2\tilde{\omega}(\omega_k^2 - \omega_0^2) \sin(\tilde{\omega}t) + \pi g(\omega_k^2 + \omega_0^2) \cos(\tilde{\omega}t)] \right) \right\} + 4g\tilde{\omega} \\ & \times \frac{I(\omega_k, t)}{K(\omega_k)} [(\omega_k^2 - \omega_0^2) \sin(\omega_k t) + \pi g\omega_k \cos(\omega_k t)] + 4\tilde{\omega}g^2 I^2(\omega_k, t) \Big\}, \quad (2.66) \end{aligned}$$

onde

$$K(\omega_k) = (\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2. \quad (2.67)$$

Devemos enfatizar que o equação (2.66) é um resultado exato, a menos da integral que define $I(\omega_k, t)$, a qual pode ser obtida numericamente. Este resultado representa a probabilidade em qualquer instante de tempo, do átomo decair do seu primeiro estado excitado para o estado fundamental, por emissão de um fóton de frequência ω_k . Analisemos esta probabilidade para tempos longos, no limite $t \rightarrow \infty$ tal como fizemos para obter a equação (2.36), podemos escrever a probabilidade do átomo decair do seu primeiro estado excitado para o estado fundamental, emitindo um fóton com frequência entre ω e $\omega + d\omega$,

$$|f_{0k}(\infty)|^2 = 2g \frac{\omega^2 d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega^2}. \quad (2.68)$$

Vale observar que a equação (2.68) quando integrada para todo $\omega \geq 0$ é igual à integral dada pela equação (2.42), isto é, igual a um. Resultado esperado já que para $t \rightarrow \infty$

a probabilidade de permanência é nula, portanto, a probabilidade do átomo decair por emissão de um fóton de frequência arbitrária será 1, para $t \rightarrow \infty$.

Devemos notar que a probabilidade de decaimento dada pela equação (2.66) como função da frequência emitida ω_k , possui um máximo quando a função $K(\omega_k)$, definida pela equação (2.67), for mínima, ou seja, quando

$$\omega_k^2 = \omega_0^2 - \frac{\pi^2 g^2}{2}, \quad (2.69)$$

de onde concluímos que, para acoplamento fraco ($g \ll \omega_0$), o fóton com mais chance de ser emitido, será aquele com a frequência mais próxima da frequência do oscilador. Isto condiz com o resultado amplamente usados nos livros textos, para a frequência de emissão

$$\omega_k = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}, \quad (2.70)$$

onde E_0 e E_1 são as energias do estado fundamental e do primeiro estado excitado do átomo.

Capítulo 3

Confinamento numa caixa tridimensional

No capítulo anterior consideramos o sistema oscilador-campo, confinado numa cavidade esférica de raio R , impondo condição de fronteira nula para o campo (cavidade refletora). Nesse capítulo vamos considerar duas situações distintas. Primeiro consideramos o sistema confinado em uma caixa tridimensional de arestas a , b e c , onde impomos uma condição nula para o campo ao longo das paredes da caixa. Posteriormente consideraremos a situação onde o sistema se encontra em uma caixa tridimensional com as dimensões acima, onde condições de fronteiras periódicas são impostas para o campo ao longo das paredes desta caixa. Finalmente, demonstraremos o resultado, não óbvio, de que no limite de quando os lados da caixa tendem para o infinito, as duas situações são fisicamente equivalentes ao caso tratado anteriormente. É de se esperar que no limite de espaço livre, tanto a esfera como a caixa retangular, ambos com condição de fronteira nula, sejam equivalentes, o que não é óbvio é que diferentes condições de contorno deem os mesmos resultados.

Consideremos uma caixa limitada por planos, tal que três de suas arestas estão sobre os eixos do sistema de coordenadas, sendo que suas faces estão em $x = 0$ e $x = a$, $y = 0$ e $y = b$, $z = 0$ e $z = c$ (Ver Figura (3.1)) e o oscilador q_0 no centro da caixa, isto é, na posição, $r_0 = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2})$. A Lagrangeana do sistema é dada pela equação

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q_0^2 + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \partial_\mu \phi(\vec{r}, t) \partial^\mu \phi(\vec{r}, t) + 2\pi\sqrt{g} \int d^3\vec{r} q_0 \phi(\vec{r}, t) \delta(x - \frac{a}{2}) \delta(y - \frac{b}{2}) \delta(z - \frac{c}{2}). \quad (3.1)$$

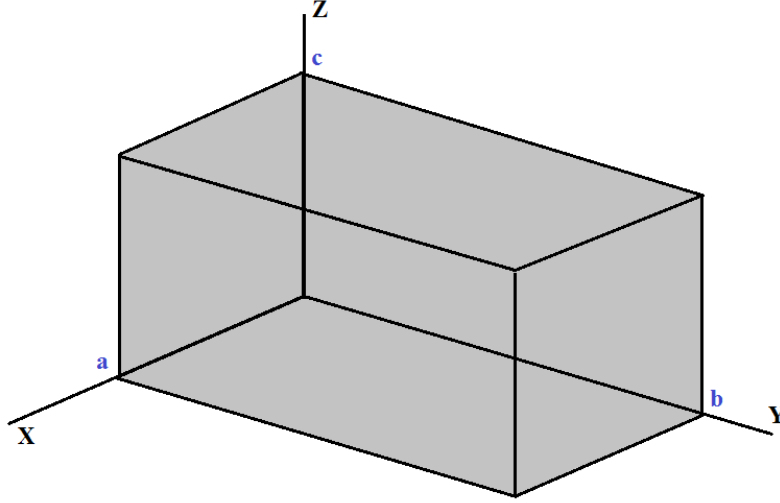


Figura 3.1: Esquema ilustrativo da caixa de confinamento.

Expandindo o campo $\phi(\vec{r}, t)$ numa base ortogonal de funções $\{\varphi(\vec{r})\}$, temos que

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{k,l,m=1}^N q_{klm}(t) \varphi_{klm}(\vec{r}), \quad (3.2)$$

onde os índices k , l e m serão justificados a posteriori. A dependência espacial dos modos do campo ($\varphi_{klm}(\vec{r})$) pode ser expressa como

$$\varphi_{klm}(x, y, z) = A_k(x) B_l(y) C_m(z). \quad (3.3)$$

Escolhemos a base de funções, $\varphi_{klm}(x, y, z)$, como soluções da equação, (1.4). Substituindo (3.3) e resolvendo por separação de variáveis, obtemos

$$\frac{1}{A_k(x)} \frac{d^2 A_k(x)}{dx^2} = -\frac{1}{B_l(y)} \frac{d^2 B_l(y)}{dy^2} - \frac{1}{C_m(z)} \frac{d^2 C_m(z)}{dz^2} - \omega^2. \quad (3.4)$$

Da igualdade acima, temos que estas equações devem ser iguais a uma constante que chamaremos de $-\alpha^2$. Assim, a equação para a componente $A_k(x)$ é dada por

$$\frac{d^2 A_k(x)}{dx^2} + \alpha^2 A_k(x) = 0, \quad (3.5)$$

cuja solução é

$$A_k(x) = a_1 \cos(\alpha x) + a_2 \sin(\alpha x). \quad (3.6)$$

Da mesma forma para $B_l(y)$, temos

$$\frac{1}{B_l(y)} \frac{d^2 B_l(y)}{dy^2} = -\frac{1}{C(z)} \frac{d^2 C(z)}{dz^2} - \omega^2 + \alpha^2 = -\beta^2, \quad (3.7)$$

tal que

$$\frac{d^2 B_l(y)}{dy^2} + \beta^2 B_l(y) = 0 \quad (3.8)$$

cuja solução é

$$B_l(y) = b_1 \cos(\beta y) + b_2 \sin(\beta y). \quad (3.9)$$

Finalmente para $C_m(z)$, temos

$$-\frac{1}{C_m(z)} \frac{d^2 C_m(z)}{dz^2} = -\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2 = -\gamma^2 \quad (3.10)$$

e sua solução é dada por

$$C_m(z) = c_1 \cos(\gamma z) + c_2 \sin(\gamma z), \quad (3.11)$$

sendo $\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. A seguir, analisaremos duas situações, uma com a condição de fronteira de Dirichlet, tal que o campo seja nulo nas paredes da caixa e a outra com condições de fronteiras periódicas ao longo das paredes da caixa.

3.1 Condições de fronteira de Dirichlet

Para o sistema confinado na caixa tal que o campo se anule nas paredes, temos as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} \varphi_{klm}(0, y, z) = 0 & \quad \varphi_{klm}(a, y, z) = 0 \\ \varphi_{klm}(x, 0, z) = 0 & \quad \varphi_{klm}(x, b, z) = 0 . \\ \varphi_{klm}(x, y, 0) = 0 & \quad \varphi_{klm}(x, y, c) = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Das condições de contorno para $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ encontramos $a_1 = b_1 = c_1 = 0$. Para as demais condições temos $\alpha_k = \frac{k\pi}{a}$, $\beta_l = \frac{l\pi}{b}$ e $\gamma_m = \frac{m\pi}{c}$ com $k, l, m = 1, 2, 3, \dots$, o que justifica os índices k, l e m da equação (3.2). As soluções normalizadas de $\varphi_{klm}(x, y, z)$ são

$$\varphi_{klm}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin(\alpha_k x) \sin(\beta_l y) \sin(\gamma_m z), \quad (3.13)$$

tal que o campo pode ser representado por

$$\phi(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sum_{k,l,m=1}^N q_{klm}(t) \sin(\alpha_k x) \sin(\beta_l y) \sin(\gamma_m z) \quad (3.14)$$

e a Lagrangeana do sistema é então

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_0^2 - \omega^2 q_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{k,l,m=1}^N (\dot{q}_{klm}^2 - \omega_{klm}^2 q_{klm}^2) + q_0 \sum_{k,l,m=1}^N q_{klm} c_{klm}, \quad (3.15)$$

onde

$$c_{klm} = 2\pi \sqrt{\frac{8g}{abc}} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \quad (3.16)$$

e

$$\omega_{klm}^2 = \alpha_k^2 + \beta_l^2 + \gamma_m^2. \quad (3.17)$$

Assim, a Hamiltoniana do sistema é dada por

$$H = \frac{1}{2}(p_0^2 + \omega^2 q_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{k,l,m=1}^N (p_{klm}^2 + \omega_{klm}^2 p_{klm}^2) - q_0 \sum_{k,l,m=1}^N q_{klm} c_{klm} \quad (3.18)$$

Renormalizando a frequência do oscilador assim como fizemos em (1.20, 1.21), encontramos

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \sum_{k,l,m=1}^N \frac{c_{klm}^2}{\omega_{klm}^2}, \quad (3.19)$$

tal que a Hamiltoniana renormalizada é dada por

$$H = \frac{1}{2}(p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{k,l,m=1}^N (p_{klm}^2 + \omega_{klm}^2 q_{klm}^2 - 2q_0 q_{klm} c_{klm}) + \frac{1}{2} \sum_{k,l,m=1}^N \frac{c_{klm}^2}{\omega_{klm}^2} q_0^2. \quad (3.20)$$

Para diagonalizar a Hamiltoniana vamos novamente usar as transformações dadas em (1.27) e (1.28), com $\mu = (0; k, l, m)$. Substituindo na Hamiltoniana (3.20), temos

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{3N} P_r^2 + \frac{1}{2} \sum_{r,s=0}^{3N} \left[\omega_0^2 t_0^s + \sum_{k,l,m=1}^N \left(\frac{c_{klm}^2}{\omega_{klm}^2} t_0^s - c_{klm} t_{klm}^s \right) \right] t_0^r Q_r Q_s \\ & + \frac{1}{2} \sum_{r,s=0}^{3N} \sum_{k,l,m=1}^N \left(\omega_{klm}^2 t_{klm}^r - c_{klm} t_0^r \right) t_{klm}^s Q_r Q_s, \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para que a Hamiltoniana seja diagonalizada, devemos ter

$$\omega_0^2 t_0^s + \sum_{k,l,m=1}^N \left(\frac{c_{klm}^2}{\omega_{klm}^2} t_0^s - c_{klm} t_{klm}^s \right) = \Omega_r^2 t_0^s \quad (3.22)$$

$$\omega_{klm}^2 t_{klm}^r - c_{klm} t_0^r = \Omega_r^2 t_{klm}^r. \quad (3.23)$$

Da equação (3.23), encontramos

$$t_{klm}^r = \frac{c_{klm}}{\omega_{klm}^2 - \Omega_r^2} t_0^r. \quad (3.24)$$

Lembrando que

$$\sum_{\mu=0}^N (t_{\mu}^r)^2 = (t_0^r)^2 + \sum_{k,l,m=1}^N (t_{klm}^r)^2 = 1, \quad (3.25)$$

temos

$$t_0^r = \left[1 + \sum_{k,l,m=1}^N \frac{c_{klm}^2}{(\omega_{klm}^2 - \Omega_r^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.24) em (3.22), encontramos

$$\omega_0^2 - \Omega_r^2 = \sum_{k,l,m=1}^N \frac{\Omega_r^2 c_{klm}^2}{\omega_{klm}^2 (\omega_{klm}^2 - \Omega_r^2)}. \quad (3.27)$$

Para calcular as amplitudes, definimos, como no capítulo anterior, a função $W(z)$ como

$$W(z) = z^2 - \omega_0^2 + \sum_{k,l,m=1}^N \frac{z^2 c_{klm}^2}{\omega_{klm}^2 (\omega_{klm}^2 - z^2)} \quad (3.28)$$

tal que a sua derivada é

$$W'(z) \Big|_{z=\Omega_r} = 2\Omega_r \left[1 + \sum_{k,l,m=1}^N \frac{c_{klm}^2}{(\omega_{klm}^2 - \Omega_r^2)^2} \right] = 2\Omega_r (t_0^r)^{-2}, \quad (3.29)$$

Onde agora, t_0^r , vem dado pela equação (3.26). Vimos no Capítulo (2) que as amplitudes de probabilidade de permanência e decaimento podem ser obtidas a partir da determinação da função $W(z)$. De (3.16) vemos que os coeficientes c_{klm} são diferentes de zero somente quando k, l e m são ímpares. Como $\Delta\alpha = \frac{\pi}{a}$, $\Delta\beta = \frac{\pi}{b}$ e $\Delta\gamma = \frac{\pi}{c}$, no limite $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ e $c \rightarrow \infty$, temos que $\Delta\alpha \rightarrow d\alpha$, $\Delta\beta \rightarrow d\beta$ e $\Delta\gamma \rightarrow d\gamma$ e podemos passar de uma soma discreta em (3.28) para uma integral, onde cada termo de *seno* ao quadrado contribui com o fator $\frac{1}{2}$. Logo a função $W(z)$ é, no limite de espaço livre, dada por

$$W(z) = z^2 - \omega_0^2 + \frac{4}{\pi} g z^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{[(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - z^2](\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}. \quad (3.30)$$

Utilizando coordenadas esféricas, obtemos

$$W(z) = z^2 - \omega_0^2 + \frac{4}{\pi} g z^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega \sin(\theta) d\theta d\varphi}{(\omega^2 - z^2)\omega^2}, \quad (3.31)$$

de onde

$$W(z) = z^2 - \omega_0^2 + 2g z^2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 - z^2}. \quad (3.32)$$

Esta função $W(z)$ é idêntica à que encontramos no Capítulo 2, equação (2.36). Logo, as expressões para as amplitudes e probabilidade de permanência e decaimento serão as mesmas como já era esperado, devido ao fato de que no limite infinito, uma esfera é equivalente a uma caixa retangular. Na seção seguinte iremos explorar esta geometria da caixa e analisar como é o comportamento da radiação em condições periódicas de contorno para o campo.

3.2 Condições de fronteiras periódicas

Nesta seção analisaremos o comportamento do sistema quando este está sob as seguintes condições periódicas de fronteiras :

$$\begin{aligned}\varphi_{klm}(x, y, z) &= \varphi_{klm}(x + a, y, z) \Rightarrow A_k(x) = A_k(x + a) \\ \varphi_{klm}(x, y, z) &= \varphi_{klm}(x, y + b, z) \Rightarrow B_l(y) = B_l(y + b) \\ \varphi_{klm}(x, y, z) &= \varphi_{klm}(x, y, z + c) \Rightarrow C_m(z) = C_m(z + c)\end{aligned}\tag{3.33}$$

Sabemos que tanto as funções *seno* e *co-seno* são soluções da equação (1.4) como também são a soma das duas. Analisando separadamente uma por uma das soluções, temos da primeira condição de contorno para a função *co-seno*, que

$$\frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} = \frac{e^{i\alpha x} e^{i\alpha a} + e^{-i\alpha x} e^{-i\alpha a}}{2}.\tag{3.34}$$

Istó ocorre quando

$$e^{i\alpha a} = e^{-i\alpha a} = 1.\tag{3.35}$$

Utilizando a fórmula de Euler, encontramos $\alpha a = 2\pi k$, ou seja

$$\alpha_k = \frac{2\pi k}{a},\tag{3.36}$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots$. O mesmo é obtido para a função *seno*. De modo análogo, analisando as demais condições de contorno, obtemos $\beta_l = \frac{2\pi l}{b}$ e $\gamma_m = \frac{2\pi m}{c}$, com $l, m = 0, 1, 2, \dots$. Devemos observar que como o oscilador q_0 está centrado no centro da caixa, toda a parte de $\varphi_{klm}(x, y, z)$ que tenha *seno* de α_k, β_l e γ_m não contribui em nada na Lagrangeana (3.1) devido a função $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - \frac{a}{2})\delta(y - \frac{b}{2})\delta(z - \frac{c}{2})$. Então podemos escrever soluções normalizadas dos modos do campo $\varphi_{klm}(x, y, z)$ como

$$\varphi_{klm}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \cos(\alpha_k x) \cos(\beta_l y) \cos(\gamma_m z),\tag{3.37}$$

tal que o campo é dado por

$$\phi(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sum_{k,l,m=1}^N q_{klm}(t) \cos(\alpha_k x) \cos(\beta_l y) \cos(\gamma_m z). \quad (3.38)$$

Assim, a Hamiltoniana do sistema é idêntica a Hamiltoniana (3.18), agora com os coeficientes c_{klm} dados por

$$c_{klm} = 2\pi \sqrt{\frac{8g}{abc}} \cos(k\pi) \cos(l\pi) \cos(m\pi). \quad (3.39)$$

Usando a equação (3.19) na Hamiltoniana (3.18), obtemos a Hamiltoniana renormalizada do sistema:

$$H = \frac{1}{2}(p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{k,l,m=1}^N (p_{klm}^2 + \omega_{klm}^2 q_{klm}^2 - 2q_0 q_{klm} c_{klm}) + \frac{1}{2} \sum_{k,l,m=1}^N \frac{c_{klm}^2}{\omega_{klm}^2} q_0^2. \quad (3.40)$$

A diagonalização do Hamiltoniano (3.40) é obtida seguindo os mesmos procedimentos da seção anterior e iremos encontrar expressões idênticas as encontradas desde (3.21) a (3.27), mas com os coeficientes c_{klm} desta seção, dados na equação (3.39). A definição da função $W(z)$ também é a mesma da equação (3.28) e verifica-se facilmente a equação (3.29). Neste ponto devemos tomar o seguinte cuidado com o intervalo entre duas frequências vizinhas, que são dadas por $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{a}$, $\Delta\beta = \frac{2\pi}{b}$ e $\Delta\gamma = \frac{2\pi}{c}$. Assim, o coeficiente c_{klm}^2 pode ser escrito como

$$c_{klm}^2 = \frac{4}{\pi} g \Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma \cos^2(k\pi) \cos^2(l\pi) \cos^2(m\pi). \quad (3.41)$$

Tomando o limite $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ e $c \rightarrow \infty$ obtemos

$$W(z) = z^2 - \omega_0^2 + \frac{4}{\pi} g z^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{[(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - z^2](\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}, \quad (3.42)$$

e usando coordenadas esféricas, temos

$$W(z) = z^2 - \omega_0^2 + 2g z^2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2 - z^2}. \quad (3.43)$$

Mesmos utilizando condições periódicas de fronteira encontramos a mesma expressão dadas em (2.36) e (3.32). Isto nos diz que a radiação de um sistema que segue estas mesmas condições de contorno tem um comportamento igual ao caso do espaço livre.

Capítulo 4

O processo de radiação em cavidades pequenas

Neste capítulo vamos empregar o conceito de coordenadas vestidas para estudar o processo de radiação em pequenas cavidades, considerando o oscilador vestido localizado no centro de uma cavidade esférica de raio muito pequeno ($Rg \ll 1$). Como fizemos anteriormente, analisaremos a amplitude de probabilidade do oscilador vestido q'_0 permanecer no seu primeiro estado excitado e também a amplitude de probabilidade do oscilador vestido decair do seu primeiro estado excitado para o estado fundamental.

4.1 Amplitude de probabilidade de permanência em pequenas cavidades

Vimos no capítulo 2 que a amplitude de probabilidade do átomo permanecer no seu primeiro estado excitado é dada pela equação (2.24) e que esta amplitude pode ser trabalhado no plano complexo através da equação (2.35). Neste contexto de pequenas cavidades, novamente iremos utilizar a função $W(z)$ dada pela equação (2.26), mas desta vez, teremos que resolver a soma existente em $W(z)$. Usando a identidade

$$\sum_{k=1}^N \frac{\alpha^2}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2}(1 - \pi\alpha \cot(\pi\alpha)) \quad (4.1)$$

na equação (2.26), podemos escrever a função $W(z)$ como

$$W(z) = z^2 - \omega_0^2 + \frac{g\pi}{R}[1 - zR \cot(zR)]. \quad (4.2)$$

Da equação (2.35), a amplitude de probabilidade do oscilador vestido permanecer no seu primeiro estado excitado é

$$f_{00}(t) = \frac{1}{\pi i} \oint \frac{ze^{-izt}}{z^2 - \omega_0^2 + \frac{g\pi}{R}[1 - zR \cot(zR)]} dz. \quad (4.3)$$

Para resolver esta integral, faremos a seguinte mudança de variável: $y = zR$. Assim

$$f_{00}(t) = \frac{1}{\pi i} \oint \frac{ye^{-iyt/R}}{y^2 - R^2\omega_0^2 + \pi Rg[1 - y \cot(y)]} dy, \quad (4.4)$$

que pode ser reescrita como

$$f_{00}(t) = \frac{1}{\pi i} \oint \frac{ye^{-iyt/R}}{y^2 - R^2\omega_0^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi Rg[1 - y \cot(y)]}{y^2 - R^2\omega_0^2}\right)} dy. \quad (4.5)$$

Como estamos interessados na situação onde $Rg \ll 1$, vamos expandir (4.5) em séries de potências de Rg , obtendo

$$f_{00}(t) = \frac{1}{\pi i} \oint \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-iyt/R} y (-\pi Rg)^j (1 - y \cot(y))^j}{(y^2 - R^2\omega_0^2)^{j+1}} \right] dy. \quad (4.6)$$

A expansão acima é estritamente válida somente se

$$\frac{\pi Rg[1 - y \cot(y)]}{y^2 - R^2\omega^2} < 1.$$

Para determinar a amplitude de probabilidade, vamos calcular os primeiros termos da expansão e usar o teorema dos resíduos tomando apenas os polos positivos $R\omega_0$ e $k\pi$, com $k = 0, 1, 2, \dots$. A solução da integral acima para as primeiras ordens de Rg , é dada pela equação

$$\begin{aligned} f_{00}(t) = & e^{-it\omega_0} + Rg \left(\frac{e^{-it\omega_0} \pi (it - R^2\omega_0 + (R - iRt\omega_0) \cot(R\omega_0) - R^2\omega_0 \cot(R\omega_0)^2)}{2R^2\omega_0} \right. \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2e^{-\frac{ik\pi t}{R}} k^2 \pi^3}{(k^2 \pi^2 - R^2\omega_0^2)^2} \left. + (Rg)^2 \left(\frac{1}{8R^4\omega_0^3} e^{-it\omega_0} \pi^2 (it + 2R^2\omega_0 - t^2\omega_0 - 4iR^2t\omega_0^2 \right. \right. \\ & + 2R^4\omega_0^3 + 2R(1 - 5R^2\omega_0^2 + t^2\omega_0^2 + it(\omega_0 + 2R^2\omega_0^3)) \cot(R\omega_0) + R^2\omega_0(2 - 7it\omega_0 \\ & + 8R^2\omega_0^2 - t^2\omega_0^2) \cot(R\omega_0)^2 + 2iR^3\omega_0^2(5i + 2t\omega_0) \cot(R\omega_0)^3 + 6R^4\omega_0^3 \cot(R\omega_0)^4) \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2ie^{-\frac{ik\pi t}{R}} k^2 \pi^4 (-5ik^2\pi^2 R + k^3\pi^3 t - iR^3\omega_0^2 - k\pi R^2t\omega_0^2)}{R(k^2\pi^2 - R^2\omega_0^2)^4} \left. \right) \\ & - (Rg)^3 \left(\frac{\pi^3 e^{-it\omega_0}}{48R^6\omega_0^5} (it^3\omega_0^2 + t^2(3\omega_0 - 9R^2\omega_0^3) + 3R^2\omega_0(-3 + 8R^2\omega_0^2 + 2R^4\omega_0^4) \right. \\ & - 3it(1 + 6R^4\omega_0^4) + 3R(-3 + 6R^2\omega_0^2 - it^3\omega_0^3 - 28R^4\omega_0^4 + 6R^2t^2\omega_0^4 + 3it\omega_0(-1 \\ & + 6R^2\omega_0^2 + 2R^4\omega_0^4)) \cot(R\omega_0) + 3R^2\omega_0(-3 + 35R^2\omega_0^2 + it^3\omega_0^3 + 20R^4\omega_0^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 3t^2\omega_0^2(2 + R^2\omega_0^2) - 3it\omega_0(-1 + 12R^2\omega_0^2)) \cot(R\omega_0)^2 + R^3\omega_0^2(21 - 228R^2\omega_0^2 \\
& + 24t^2\omega_0^2 - it^3\omega_0^3 + 3it\omega_0(19 + 18R^2\omega_0^2)) \cot(R\omega_0)^3 + 3R^4\omega_0^3(27 - 30it\omega_0 \\
& + 38R^2\omega_0^2 - 3t^2\omega_0^2) \cot(R\omega_0)^4 + 36iR^5\omega_0^4(4i + t\omega_0) \cot(R\omega_0)^5 + 60R^6\omega_0^5 \\
& \times \cot(R\omega_0)^6) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R^2(k^2\pi^2 - R^2\omega_0^2)^6} e^{-\frac{ik\pi t}{R}} k^3\pi^6(-56k^3\pi^3R^2 + 2k^5\pi^5R^2 \\
& - 14ik^4\pi^4Rt + k^5\pi^5t^2 - 24k\pi R^4\omega_0^2 - 4k^3\pi^3R^4\omega_0^2 + 12ik^2\pi^2R^3t\omega_0^2 - 2k^3\pi^3 \\
& \times R^2t^2\omega_0^2 + 2k\pi R^6\omega_0^4 + 2iR^5t\omega_0^4 + k\pi R^4t^2\omega_0^4) + \dots
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Vamos analisar esta expressão em partes, onde primeiramente vamos tomar somente termos de primeira ordem em Rg , tal que a probabilidade é dada por

$$|f_{00}(t)|^2 = 1 - \pi Rg \left(1 + \cot^2(R\omega_0) - \frac{\cot(R\omega_0)}{R\omega_0} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi^2 n^2 \cos \left[\frac{t}{R} (R\omega_0 - n\pi) \right]}{(\pi^2 n^2 - (R\omega_0)^2)^2} \right) \tag{4.8}$$

Podemos analisar numericamente a probabilidade de permanência e comparar o nosso resultado com alguns resultados experimentais e teóricos encontrados na literatura.

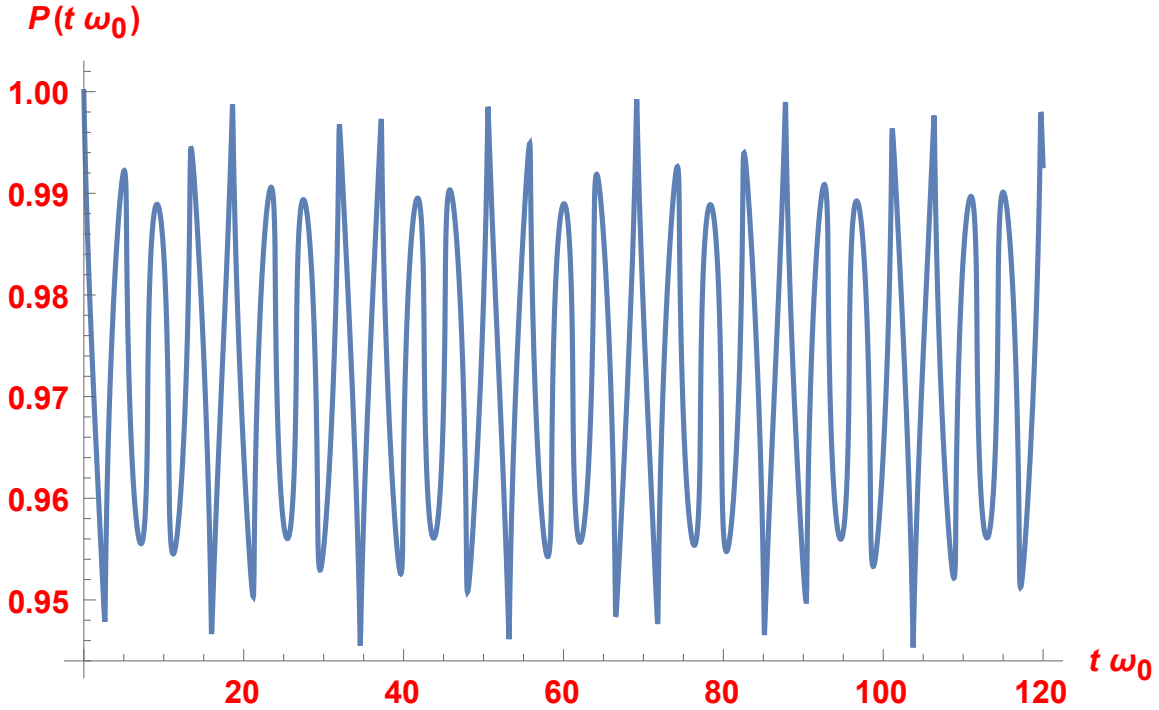


Figura 4.1: Probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado considerando uma expansão de primeira ordem em Rg , para $\omega_0 \approx 4,00 \times 10^{14}/s$ e $R \approx 1,00 \times 10^{-6} m$.

Para isto, vamos definir a constante de acoplamento $g = \alpha\omega_0$, sendo $\alpha = 1/137$ a constante de estrutura fina, $\omega_0 \approx 4,0 \times 10^{14}/s$ (luz vermelha visível) e o raio da cavidade da ordem

de $R \approx 1,0 \times 10^{-6}m$. Deste ponto em diante, todos os cálculos numéricos serão dados no sistema internacional de unidades. Nestas condições, a amplitude de probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado é dada na Figura (4.1).

Da Figura (4.1) vemos que a probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado oscila em torno de 97% por todo t . O que acontece se calcularmos a probabilidade de permanência numa ordem mais alta em Rg ? Vamos fazer esta análise e verificar que a probabilidade continua oscilando em torno do mesmo valor e com as mesmas amplitudes, pelo menos para os tempos iniciais. Assim, tomando somente termos de segunda ordem em Rg , a probabilidade fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
|f_{00}(t)|^2 &= 1 + e^{i\omega_0 t} Rg \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi^3 n^2 e^{-\frac{i\pi n t}{R}}}{(\pi^2 n^2 - (R\omega_0)^2)^2} \right. \\
&+ \left. \frac{\pi e^{-i\omega_0 t} ((R\omega_0 - i\omega_0 t R\omega_0) \cot(R\omega_0) + i\omega_0 t - (R\omega_0)^2 + (R\omega_0)^2 (-\cot^2(R\omega_0)))}{2(R\omega_0)^2} \right] \\
&+ e^{-it\omega_0} Rg \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi^3 n^2 e^{\frac{i\pi n t}{R}}}{(\pi^2 n^2 - (R\omega_0)^2)^2} \right. \\
&+ \left. \frac{\pi e^{it} ((R\omega_0 + it\omega_0 R\omega_0) \cot(R\omega_0) - it\omega_0 - (R\omega_0)^2 + (R\omega_0)^2 (-\cot^2(R\omega_0)))}{2R\omega_0^2} \right] \\
&+ (Rg)^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi^3 n^2 e^{-\frac{i\pi n t}{R}}}{(\pi^2 n^2 - (R\omega_0)^2)^2} \right. \\
&+ \left. \frac{\pi e^{-it\omega_0} ((R\omega_0 - it\omega_0 R\omega_0) \cot(R\omega_0) + it\omega_0 - (R\omega_0)^2 + (R\omega_0)^2 (-\cot^2(R\omega_0)))}{2(R\omega_0)^2} \right] \\
&\times \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi^3 n^2 e^{\frac{i\pi n t}{R}}}{(\pi^2 n^2 - (R\omega_0)^2)^2} \right. \\
&+ \left. \frac{\pi e^{it\omega_0} ((R\omega_0 + it\omega_0 R\omega_0) \cot(R\omega_0) - it\omega_0 - (R\omega_0)^2 + (R\omega_0)^2 (-\cot^2(R\omega_0)))}{2(R\omega_0)^2} \right] \\
&+ e^{-it\omega_0} (Rg)^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2i\pi^4 n^2 e^{\frac{i\pi n t}{R}} \left(\frac{\pi^3 n^3 t}{R} + 5i\pi^2 n^2 - \pi n t \omega_0 R\omega_0 + i(R\omega_0)^2 \right)}{(\pi^2 n^2 - (R\omega_0)^2)^4} \right. \\
&+ \frac{\pi^2 e^{it\omega_0}}{8(R\omega_0)^4} (2R\omega_0((t\omega_0)^2 - i(2t\omega_0(R\omega_0)^2 + t\omega_0) - 5(R\omega_0)^2 + 1) \cot(R\omega_0) \\
&- (t\omega_0)^2 + 4it\omega_0(R\omega_0)^2 - it\omega_0 + 2(R\omega_0)^4 + 2(R\omega_0)^2 + (R\omega_0)^2(-(t\omega_0)^2 + 7it\omega_0 \\
&+ 8(R\omega_0)^2 + 2) \cot^2(R\omega_0) - 2i(2t\omega_0 - 5i)(R\omega_0)^3 \cot^3(R\omega_0) + 6(R\omega_0)^4 \\
&\times \cot^4(R\omega_0)) \left. + e^{it\omega_0} (Rg)^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(- \frac{\left(\frac{\pi^3 n^3 t}{R} - 5i\pi^2 n^2 - \pi n t \omega_0 R\omega_0 - i(R\omega_0)^2 \right)}{(\pi^2 n^2 - (R\omega_0)^2)^4} \right) \right. \right. \\
&\times \left. \left. 2i\pi^4 n^2 e^{-\frac{i\pi n t}{R}} \right) + \frac{\pi^2 e^{-it\omega_0}}{8(R\omega_0)^4} (2R\omega_0((t\omega_0)^2 + i(2t\omega_0(R\omega_0)^2 + t\omega_0) - 5(R\omega_0)^2) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1) \cot(R\omega_0) - (t\omega_0)^2 - 4it\omega_0(R\omega_0)^2 + it\omega_0 + 2(R\omega_0)^4 + 2(R\omega_0)^2 + (R\omega_0)^2 \\
& \times (- (t\omega_0)^2 - 7it\omega_0 + 8(R\omega_0)^2 + 2) \cot^2(R\omega_0) + 2i(2t\omega_0 + 5i)(R\omega_0)^3 \\
& \times \cot^3(R\omega_0) + 6(R\omega_0)^4 \cot^4(R\omega_0) \Big] \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Analisando numericamente o resultado acima usando os mesmos parâmetros do cálculo de ordem Rg , obtemos os dados mostrados na Figura (4.2).

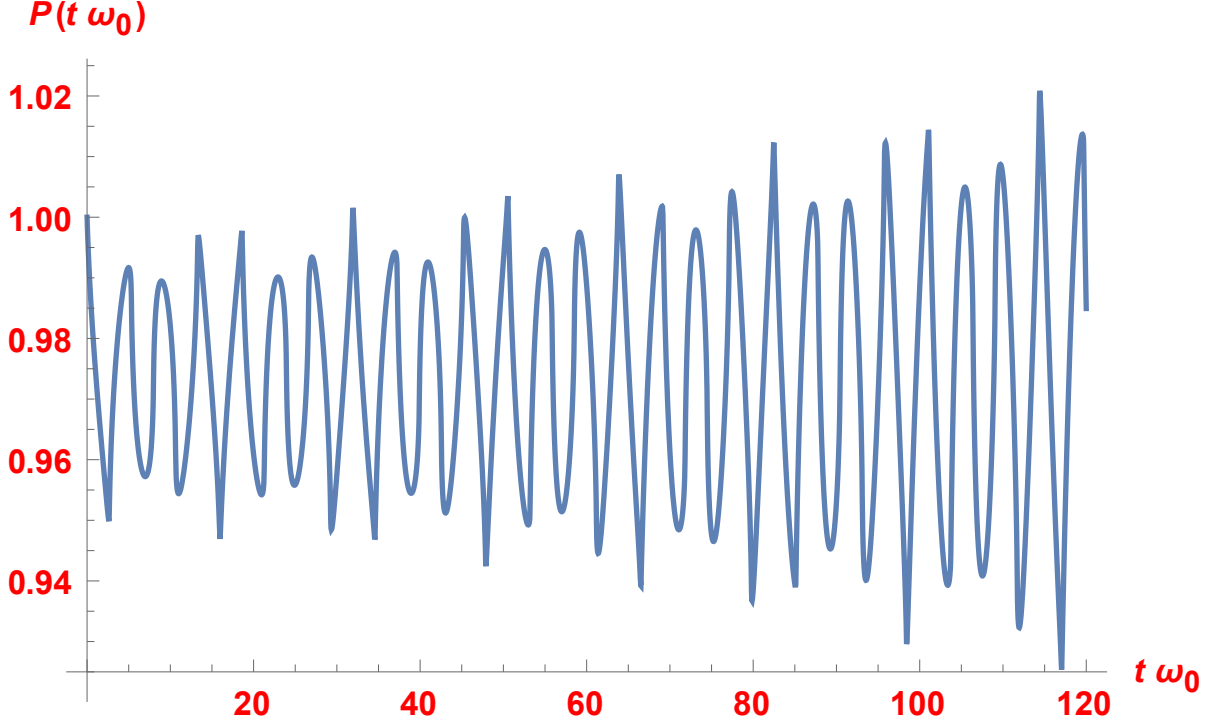


Figura 4.2: Probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado considerando um expansão de segunda ordem em Rg , para $\omega_0 \approx 4,00 \times 10^{14}/s$ e $R \approx 1,00 \times 10^{-6} m$.

A probabilidade oscila em torno de 97% e permanece durante os primeiros intervalos de tempo com a mesma amplitude de oscilação da Figura (4.1). Com o tempo aumentando temos que a amplitude de oscilação começa a ter picos mais acentuados tanto para cima quanto para baixo, mas permanece simétrico em relação a oscilação em torno dos 97%. Claramente observa-se que esta aproximação deixa de ser válida e a probabilidade torna-se maior que um (e até mesmo negativa) a partir de um certo valor de tempo. Isto se deve por causa da aproximação e por estar desconsiderando termos da probabilidade para manter a consistência na expansão em Rg . Para comprovar este fato, vamos mostrar que em ordens mais altas de Rg , por exemplo $(Rg)^3$, a validade temporal da expressão para a probabilidade aumenta. Calculando a probabilidade e tomando termos até a terceira

ordem em Rg , obtemos a Figura (4.3), que comparada com a Figura (4.2), mostram-se aproximadamente iguais nos primeiros instantes de tempo.

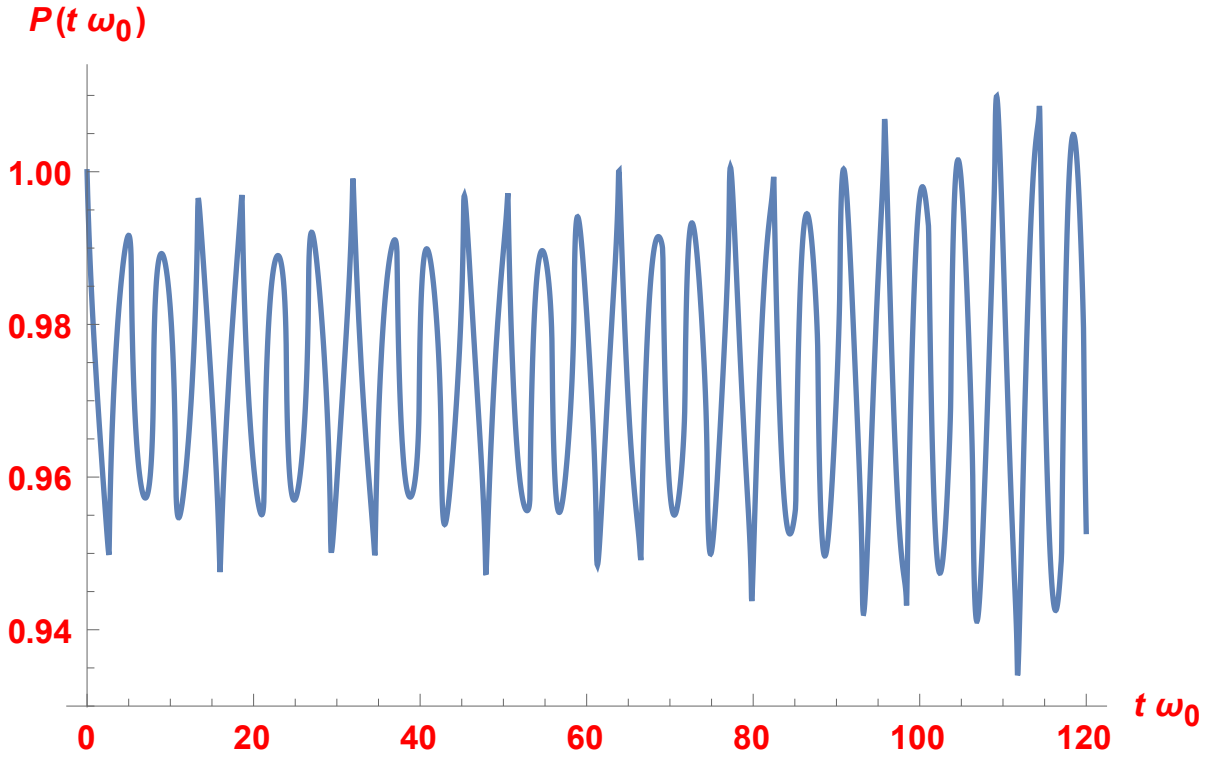


Figura 4.3: Probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado considerando uma expansão de terceira ordem em Rg , para $\omega_0 \approx 4,00 \times 10^{14}/s$ e $R \approx 1,00 \times 10^{-6} m$.

Temos também que a probabilidade continua oscilando em torno de 97% e permanece com a mesma amplitude de oscilação da Figura (4.1) por um tempo maior do que quando tomamos a probabilidade com termos até a segunda ordem em Rg , ou seja, houve um aumento na validade temporal da expressão para a probabilidade. Quanto mais aumentamos a ordem da expansão mais a nossa expressão se aproxima do valor exato, ou seja, melhor representará o nosso sistema. Sendo assim, podemos esperar que quanto mais termos de alta ordem forem tomados na expansão, mais o gráfico vai se estabilizando e teremos assim uma probabilidade sempre em torno de 97% e com uma oscilação estável.

Isto pode ser visto tomando termos de ordens mais altas na expansão da amplitude, como é mostrado da Figura (4.4), onde tomamos termos até a quarta ordem em Rg para a probabilidade. Claramente podemos ver que a validade temporal da nossa expressão para a probabilidade aumenta conforme aumentamos as ordens de Rg . Concluímos que este aumento repentino nos picos da oscilação realmente se deve as baixas ordens da expansão

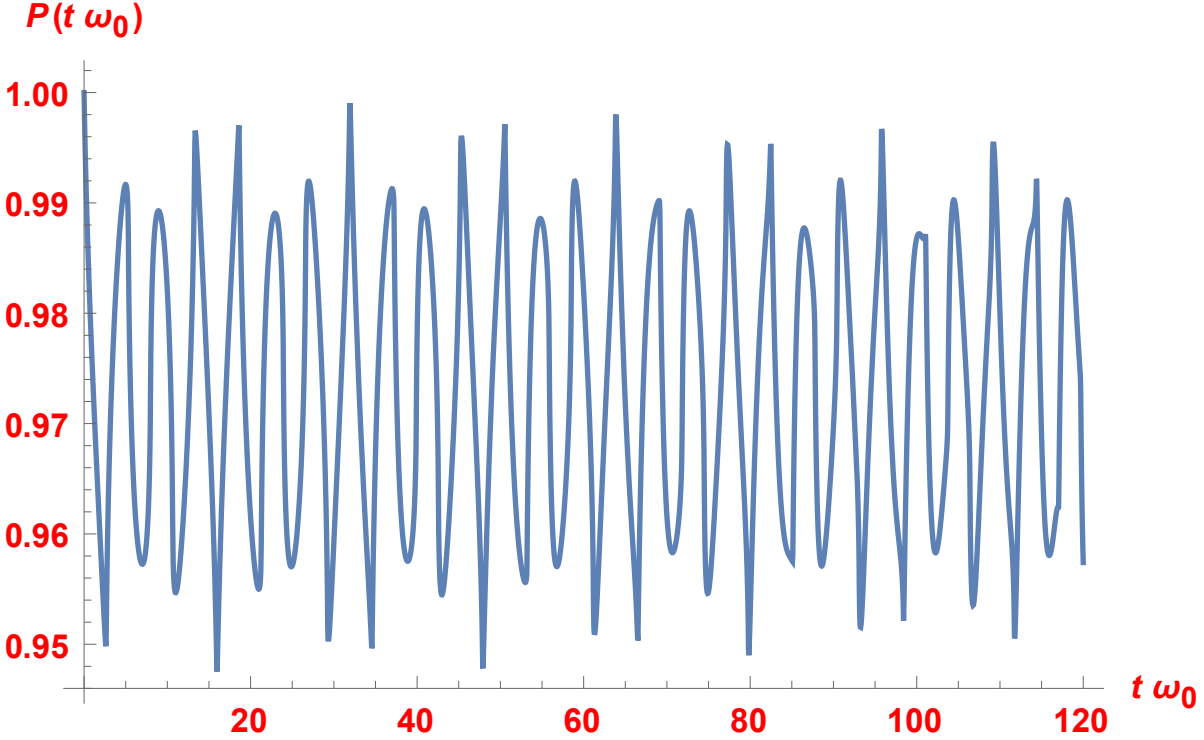


Figura 4.4: *Probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado considerando uma expansão de quarta ordem em Rg , para $\omega_0 \approx 4,00 \times 10^{14}/s$ e $R \approx 1,00 \times 10^{-6} m$.*

e que em ordens muito altas teríamos toda a oscilação estável e próxima dos 97%, exatamente como é no começo de cada gráfico. Lembrando que esta probabilidade com termos de quarta ordem em Rg deixa de ser válida depois de um certo intervalo de tempo que está omitido na Figura (4.4). Todas as aproximações são praticamente equivalentes quando tomadas em suas respectivas regiões de validade, como é mostrada na Figura (4.5), onde as probabilidades em primeira, terceira e quarta ordem em Rg são as curvas em amarelo, vermelho e azul, respectivamente. Observe que a curva em vermelho praticamente fica escondida atrás das outras curvas e as demais curvas são muito próximas uma das outras.

Este resultado torna-se mais interessante quando comparado com os resultados experimentais encontrados em [38, 39], no qual se verifica a estabilidade de átomos excitados com frequência de emissão no vermelho visível colocados entre duas placas separadas por uma distância da ordem de $1,1 \times 10^{-6}m$. Em trabalhos teóricos mais recentes [35, 7] são feitas estimativas da probabilidade do átomo (confinado numa cavidade pequena) permanecer no seu primeiro estado excitado e encontram resultados da ordem de 98% e 97%

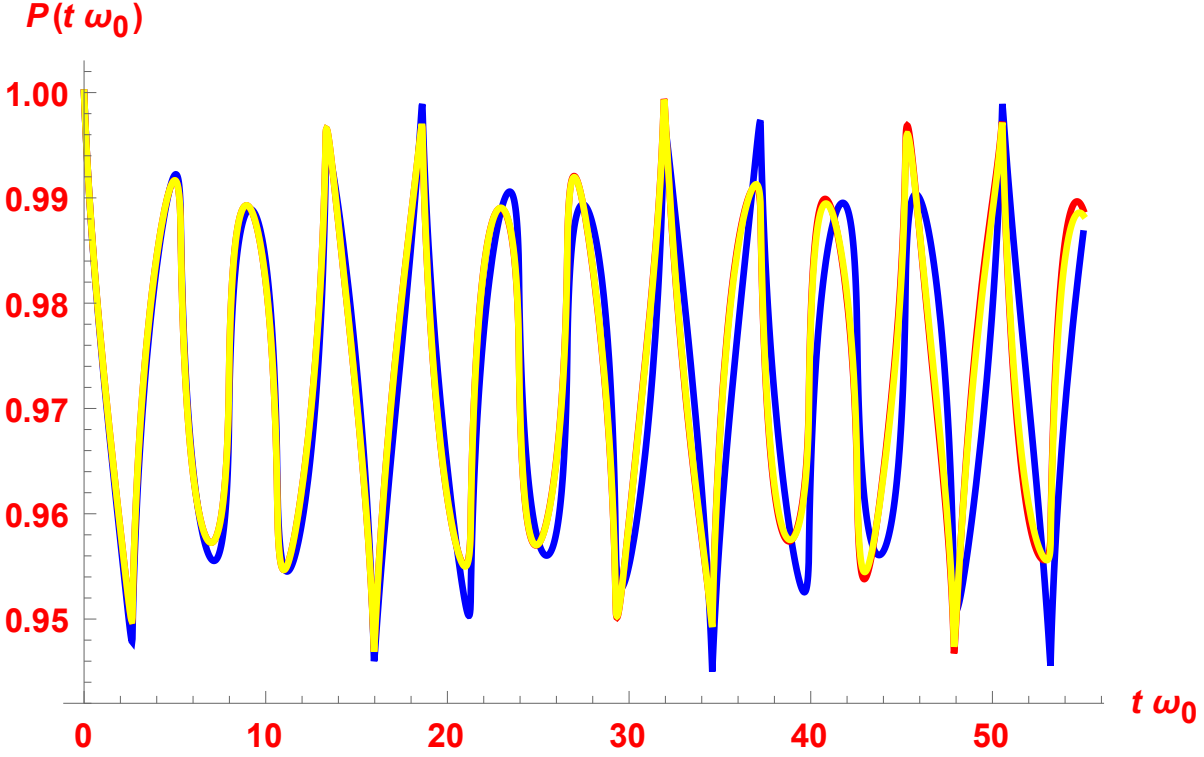


Figura 4.5: Comparação das probabilidades em diferentes ordens de Rg e nas suas respectivas regiões de validade, para $\omega_0 \approx 4,00 \times 10^{14}/s$ e $R \approx 1,00 \times 10^{-6} m$. ●●● $(Rg)^4$
●●● $(Rg)^3$

respectivamente, ambos considerando o átomo com frequência de emissão no vermelho visível e o raio da cavidade da ordem de $R \approx 10^{-6}m$. Podemos concluir que os átomos no primeiro estado excitado tendo tais frequências de emissão, quando colocados no interior de pequenas cavidades terão uma estabilidade da ordem de 97% e é ainda maior quando se diminui o raio da cavidade. Neste modelo de acoplamento que estamos usando $g = \alpha\omega_0$, para aumentar a estabilidade do sistema podemos diminuir o raio da cavidade de confinamento ou diminuir a frequência de emissão do átomo, em outras palavras, quanto menor for Rg , maior será a estabilidade do sistema. Diminuindo Rg , além de aumentar a probabilidade do átomo permanece no primeiro estado excitado, menores serão as amplitude de oscilação da probabilidade, resultando em máximos e mínimos cada vez mais próximos. Por exemplo, para um átomo com frequência de emissão $\omega_0 \approx 2,00 \times 10^{10}/s$ (micro-ondas) confinado numa cavidade de raio $R \approx 1,00 \times 10^{-2} m$, a probabilidade de permanência no primeiro estado excitado é dado na Figura (4.6). Nesta situação o raio da cavidade foi aumentado 10^4 vezes e a frequência de emissão foi reduzida 2×10^4 vezes, tal que Rg caiu

pela metade. Isto nos garante uma maior probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado, uma redução nas amplitudes de oscilação da probabilidade e com isto um aumento da frequência de oscilação da probabilidade, o que quer dizer que as transições entre máximos e mínimos da probabilidade são mais rápidas.

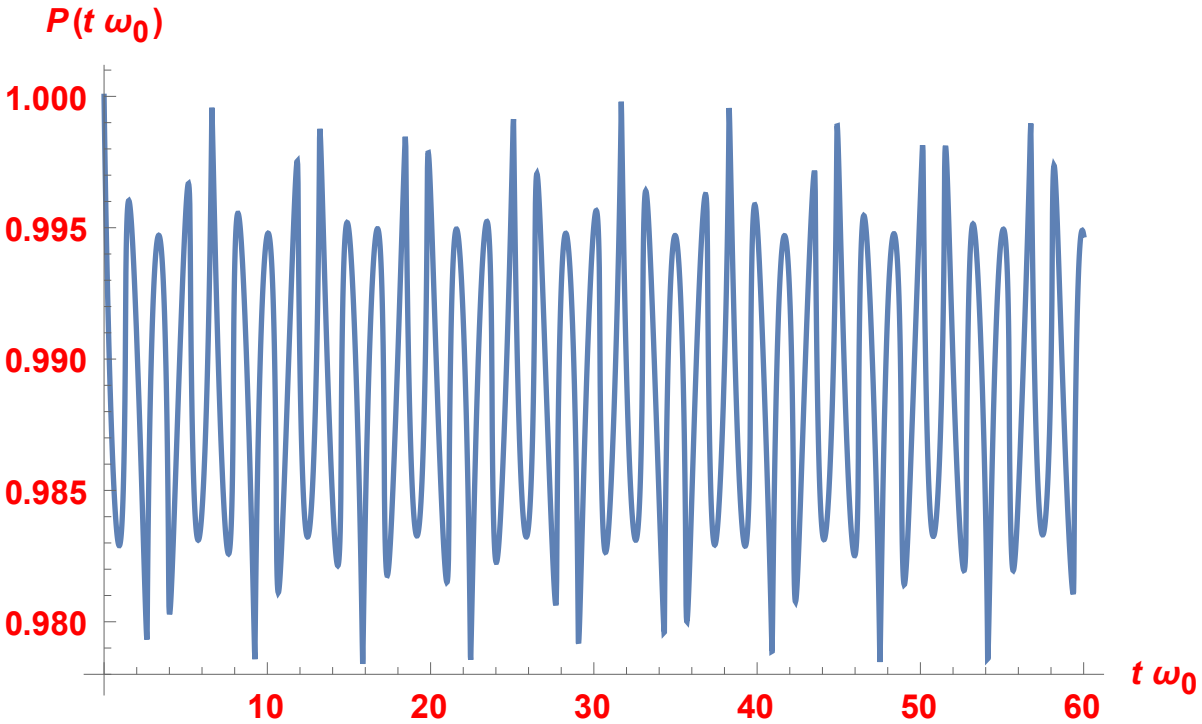


Figura 4.6: Probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado, para $\omega_0 \approx 2,00 \times 10^{10}/s$ e $R \approx 1,00 \times 10^{-2} m$.

Na seção seguinte vamos calcular a amplitude de probabilidade para o átomo vestido decair do primeiro estado excitado para o estado fundamental e posteriormente utilizaremos estas amplitudes para o estudo do processo de termalização.

4.2 Amplitude de probabilidade de decaimento em pequenas cavidades

Vamos agora determinar a amplitude de probabilidade do oscilador vestido (átomo) decair do primeiro estado excitado para o estado fundamental emitindo um quantum de frequência ω_k . Do Capítulo 2 temos que tal amplitude de probabilidade de decaimento é dada pela equação (2.61) e como argumentado na seção anterior, não usaremos a função

$W(z)$ no limite contínuo e sim a função $W(z)$ da equação (4.2), tal que a amplitude de decaimento é dada por

$$f_{0k} = \frac{\eta\omega_k}{\pi i} \oint \frac{ze^{-izt}}{[z^2 - \omega_0^2 + \frac{g\pi}{R}(1 - zR \cot(zR))](\omega_k - z^2)} dz. \quad (4.10)$$

Utilizando a mesma mudança de variável da seção anterior podemos reescrever a amplitude de decaimento como

$$f_{0k}(t) = -\frac{\eta\omega_k R^2}{\pi i} \oint \frac{ye^{-iyt/R}}{(y^2 - R^2\omega_0^2)(y^2 - \omega_k^2)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi Rg[1-y \cot(y)]}{y^2 - R^2\omega_0^2}\right)} dy. \quad (4.11)$$

Expandindo em potências de Rg , a amplitude de probabilidade acima é dada por

$$f_{0k}(t) = \frac{1}{\pi i} \oint \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-ity/R} y (-\pi Rg)^j (1 - y \cot(y))^j}{(y^2 - \omega_k^2 R^2)(y^2 - R^2\omega_0^2)^{j+1}} \right] dy. \quad (4.12)$$

A integral acima é resolvida de forma análoga ao que fizemos na seção anterior. Usando que $\omega_k = \frac{k\pi}{R}$, a probabilidade de segunda ordem em Rg , é

$$\begin{aligned} f_{0k}(t) = & \sqrt{Rg} \left((-\sqrt{2}\pi^{3/2}k) \left(\frac{e^{-\frac{i\pi kt}{R}}}{\pi^2 k^2 - (R\omega_0)^2} - \frac{e^{-it\omega_0}}{\pi^2 k^2 - (R\omega_0)^2} \right) \right) \\ & + \sqrt{Rg} Rg \left((-\sqrt{2}\pi^{3/2}k) \left(\frac{e^{-it\omega_0} \pi}{2((R\omega_0)^2 - R\omega_0(k\pi)^2)^2} (\pi^2 k^2 ((R\omega_0)^2 - it\omega_0)) \right. \right. \\ & + iR\omega_0 \cot(R\omega_0) (\pi^2 k^2 (t\omega_0 + i) - (t\omega_0 - i)(R\omega_0)^2) + (R\omega_0)^2 (\pi^2 k^2 - (R\omega_0)^2) \\ & \times \cot^2(R\omega_0) + (t\omega_0)^2 (it\omega_0 - (R\omega_0)^2 + 2) \left. \right) - \frac{e^{-i\frac{k\pi t}{R}} \pi}{2R\omega_0 (\pi^2 k^2 - (R\omega_0)^2)^3} (2(\pi k)^3 \\ & \times t\omega_0 - 7i(\pi k)^2 R\omega_0 - 2\pi k t\omega_0 (R\omega_0)^2 - i(R\omega_0)^3) \\ & - \left. \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\pi m^2 e^{-\frac{i\pi m t}{R}}}{(k^2 - m^2) (\pi^2 m^2 - (R\omega_0)^2)^2} \right) \right) \\ & + \sqrt{Rg} (Rg)^2 \left((-\sqrt{2}\pi^{3/2}k) \left(\frac{\pi^2 e^{-it\Omega_0}}{8(R\omega_0)^4 ((R\omega_0)^2 - \pi^2 k^2)^3} ((R\omega_0)^4 (8 + 5it\omega_0 \right. \right. \\ & - (t\omega_0)^2 - 6(R\omega_0)^2 - 4it\omega_0 (R\omega_0)^2 + 2(R\omega_0)^4) + 2k^2 \pi^2 (R\omega_0)^2 ((t\omega_0)^2 - 2(R\omega_0)^2) \\ & \times (-1 + (R\omega_0)^2) + it\omega_0 (-3 + 4(R\omega_0)^2)) + k^4 \pi^4 (- (t\omega_0)^2 - it\omega_0 (-1 + 4(R\omega_0)^2) \\ & + 2((R\omega_0)^2 + (R\omega_0)^4)) + 2R\omega_0 (2k^2 \pi^2 (R\omega_0)^2 (-3 + it\omega_0 - (t\omega_0)^2 + 3(R\omega_0)^2 \\ & - 2it\omega_0 (R\omega_0)^2) + (R\omega_0)^4 (-3 + (t\omega_0)^2 - (R\omega_0)^2 + it\omega_0 (-3 + 2(R\omega_0)^2)) + k^4 \pi^4 \\ & \times (1 + (t\omega_0)^2 - 5(R\omega_0)^2 + it\omega_0 (1 + 2(R\omega_0)^2)) \cot(R\omega_0) + (R\omega_0)^2 (2k^2 \pi^2 (R\omega_0)^2 \\ & \times (6 + 5it\omega_0 + (t\omega_0)^2 - 8(R\omega_0)^2) - k^4 \pi^4 (-2 + 7it\omega_0 + (t\omega_0)^2 - 8(R\omega_0)^2) \\ & + (R\omega_0)^4 (-6 - 3it\omega_0 - (t\omega_0)^2 + 8(R\omega_0)^2)) \cot^2(R\omega_0) + 2(R\omega_0)^3 (-k^2 \pi^2 \\ & + (R\omega_0)^2) (k^2 \pi^2 (5 - 2it\omega_0) + (-1 + 2it\omega_0) (R\omega_0)^2) \cot^3(R\omega_0) + 6(R\omega_0)^4 (-k^2 \pi^2 \\ & + (R\omega_0)^2)^2 \cot(R\omega_0) \left. \right) - \frac{\pi^2 e^{-\frac{i\pi kt}{R}}}{12(\omega_0)^2 (\pi^2 k^2 - (R\omega_0)^2)^5} \left(6\pi^6 k^6 (t\omega_0)^2 + 8\pi^6 k^6 (R\omega_0)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 66i\pi^5 k^5 t\omega_0 R\omega_0 - 12\pi^4 k^4 (t\omega_0)^2 (R\omega_0)^2 - 16\pi^4 k^4 (R\omega_0)^4 - 213\pi^4 k^4 (R\omega_0)^2 \\
& + 60i\pi^3 k^3 t\omega_0 (R\omega_0)^3 + 6\pi^2 k^2 (t\omega_0)^2 (R\omega_0)^4 + 8\pi^2 k^2 (R\omega_0)^6 - 78\pi^2 k^2 (R\omega_0)^4 \\
& + 6i\pi k t\omega_0 (R\omega_0)^5 + 3(R\omega_0)^6 \Big) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\pi^2 m^2 e^{-\frac{i\pi m t}{R}}}{R\omega_0 (k^2 - m^2)^2 (\pi^2 m^2 - (R\omega_0)^2)^4} \\
& \times \left(i\pi^3 k^2 m^3 t\omega_0 + 5\pi^2 k^2 m^2 R\omega_0 - i\pi k^2 m t\omega_0 (R\omega_0)^2 + k^2 (R\omega_0)^3 - i\pi^3 m^5 t\omega_0 \right. \\
& \left. - 7\pi^2 m^4 R\omega_0 + i\pi m^3 x (R\omega_0)^2 + m^2 (R\omega_0)^3 \right) \Big). \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Não apresentaremos a amplitude de probabilidade em ordens mais altas pois é muito extensa e como já vimos que a validade temporal para as nossas expressões de amplitude em cavidades pequenas depende diretamente da ordem da expansão e vimos que dentro da região de validade, as aproximações são quase equivalentes. Para efeito de comparação com a análise numérica que fizemos na probabilidade de permanência, vamos usar uma expansão de terceira ordem em Rg na integral (4.12), com $g = \alpha\omega_0$, $\omega_0 \approx 4,0 \times 10^{14}/s$ e $R \approx 1,0 \times 10^{-6}m$. Numéricamente, a probabilidade de decaimento em terceira ordem de Rg é dada na Figura (4.7), com $k = 1$.

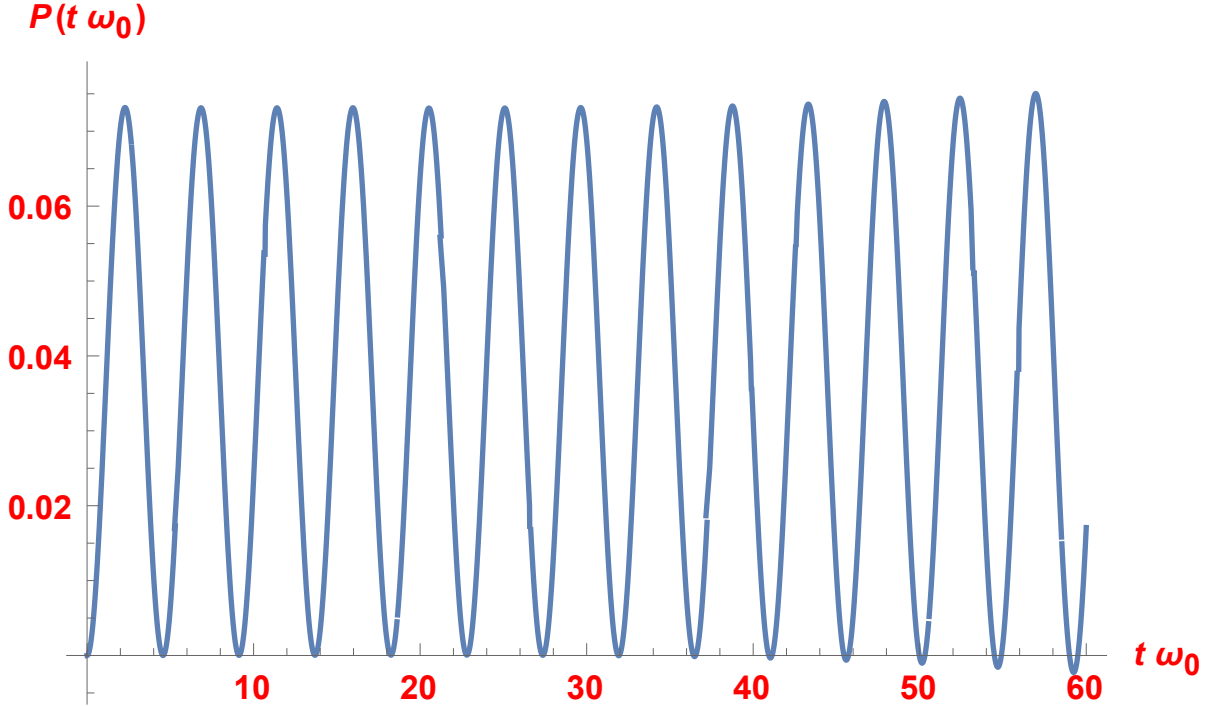


Figura 4.7: Probabilidade do átomo decair do primeiro estado excitado para o estado fundamental, para $\omega_0 \approx 4,0 \times 10^{14}/s$, $R \approx 1,0 \times 10^{-6}m$ e $k = 1$.

Uma análise minuciosa, demonstra que de todos os valores de k , somente $k = 1$ tem

um valor significativo para a probabilidade de decaimento e já os demais valores de k tem valores de probabilidades quase desprezíveis. Isto se deve ao fato de que estamos considerando o caso de acoplamento fraco ($g \ll \omega_0$) e como vimos no final do Capítulo 2, num processo de decaimento do primeiro estado excitado para o estado fundamental, o fóton com mais chance de ser emitido é aquele com a frequência mais próxima da frequência do oscilador. Lembrando que no sistema internacional de unidades, $\omega_k = \frac{k\pi c}{R}$, temos para $k = 1$, que ω_1 é da ordem de $10^{14}/s$, ou seja, é uma frequência da mesma ordem da frequência do oscilador e a mais próxima, o que justifica o fato de apenas ω_1 ter uma probabilidade significativa de ser emitido neste processo de decaimento.

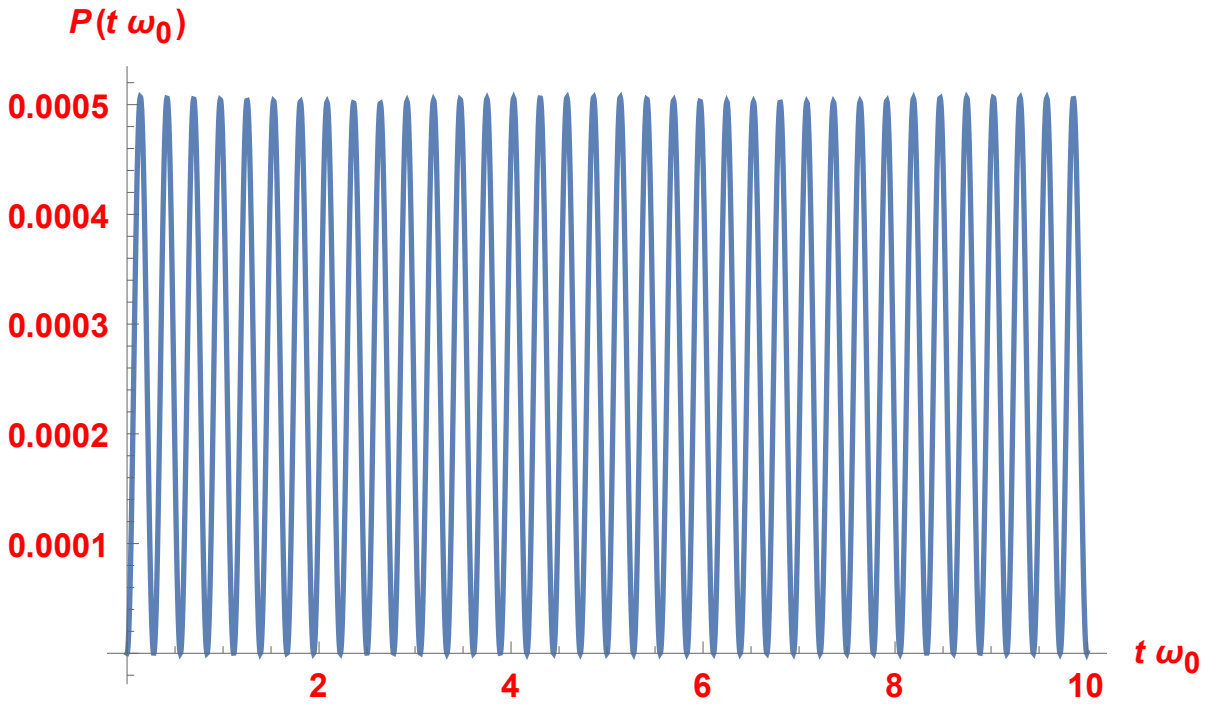


Figura 4.8: Probabilidade do átomo decair do primeiro estado excitado para o estado fundamental, para $\omega_0 \approx 4,0 \times 10^{14}/s$, $R \approx 1,0 \times 10^{-6}m$ e $k = 10$.

Por exemplo, a probabilidade do átomo decair e emitir um fóton com frequência ω_5 é $|f_{05}(t)|^2 \approx 0,001$. Para outras frequências temos $|f_{010}(t)|^2 \approx 2,5 \times 10^{-4}$, $|f_{0100}(t)|^2 \approx 2,5 \times 10^{-6}$, isto é, oscilam muito próximo destes valores (Ver Figura (4.8)). Quanto maior for o valor de k , menores são as probabilidades e menores são as amplitudes de oscilação.

Estas probabilidades de decaimento em pequenas cavidades são baixas ou quase nulas e de certa forma já eram esperadas já que vimos na seção anterior que o átomo no primeiro estado excitado tem uma alta estabilidade.

Capítulo 5

O processo de termalização de um átomo com o campo de radiação térmica

Neste capítulo estudaremos a evolução temporal de um oscilador, inicialmente em qualquer estado excitado e o campo num estado de equilíbrio térmico. Consideraremos um átomo (novamente sendo aproximado por um oscilador harmônico), inicialmente em um estado arbitrário e acoplado a um campo de radiação térmica (aproximado por um conjunto de osciladores harmônicos em equilíbrio térmico). Algumas questões que vamos analisar são: o átomo atinge um estado de equilíbrio final? E se o sistema evolui para um estado de equilíbrio final, este estado é o de equilíbrio térmico? Para responder a estas questões vamos usar o contexto das coordenadas vestidas apresentadas no Capítulo 2.

5.1 O operador densidade na mecânica quântica

Na mecânica quântica, os observáveis são representados por operadores Hermitianos e os possíveis resultados de uma medida são os autovalores (sempre reais) destes operadores. Os postulados da mecânica quântica foram enunciados para ensembles puros (sistemas fechados), onde podemos representar todos os membros do sistema por um mesmo ket. Mas em algumas situações não temos como representar, sem ambiguidade, todos os membros do sistema simplesmente usando os postulados da mecânica quântica e dizemos que estamos

num ensemble misto (sistema aberto), onde não podemos representar todos os membros do sistema por um mesmo ket. Para descrever esta situação, J. Von Neumann introduziu o formalismo do operador densidade, em 1927 [32].

Primeiramente vamos introduzir algumas quantidades para depois definir o operador densidade. Dado um estado qualquer da base $\{|v_n\rangle\}$, o operador projeção sobre este estado é definido como

$$P_n = |v_n\rangle\langle v_n| \quad (5.1)$$

tendo as seguintes propriedades

$$P_n^2 = P_n = P_n^\dagger. \quad (5.2)$$

Um observável B pode ser representado por

$$B = \sum_m b_m |b_m\rangle\langle b_m|, \quad (5.3)$$

tal que

$$B = \sum_m b_m P_m. \quad (5.4)$$

A probabilidade de, na medida de B num estado $|v\rangle$, se obter um autovalor b_m , é dada por

$$p_m = |\langle b_m|v\rangle|^2 = \langle v|P_m|v\rangle. \quad (5.5)$$

O valor médio de B no estado $|v\rangle$

$$\begin{aligned} \langle v|B|v\rangle &= \langle v|\sum_m |b_m\rangle\langle b_m|B|v\rangle \\ &= \sum_m b_m |\langle b_m|v\rangle|^2 = \sum_m b_m p_m. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Da Mecânica estatística quântica, um ensemble misto pode ser considerado com uma coleção de estados, com w_n representando a fração de sistemas no estado $|v_n\rangle$, ou seja, podemos apenas associar certas probabilidades w_1, w_2, \dots, w_n , de que um particular sistema do ensemble, escolhido ao acaso, esteja nos estados quânticos descritos pelos kets $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle$, respectivamente. Logo, a probabilidade de que a medida no ket $|v_n\rangle$ do ensemble de uma quantidade física representada pelo operador B , forneça o resultado b , é

$$p_b^n = \langle v_n|P_b|v_n\rangle \quad (5.7)$$

onde, $P_b = |b\rangle\langle b|$ é o operador projeção associado com o autovalor $|b\rangle$. Definindo a probabilidade de que uma medida no ensemble forneça o resultado b como sendo a média ponderada:

$$\begin{aligned}
 p_b &= \sum_m w_m p_b^m \\
 &= \sum_m w_m \langle v_m | P_b | v_m \rangle \\
 &= \sum_m w_m \text{Tr} \left(|v_m\rangle\langle v_m | P_b \right) \\
 &= \text{Tr} \left[\left(\sum_m w_m |v_m\rangle\langle v_m| \right) P_b \right].
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Observe que o termo entre parênteses é um operador e contém toda a informação sobre o ensemble. Este operador é definido como operador densidade ρ :

$$\rho = \sum_m w_m |v_m\rangle\langle v_m|. \tag{5.9}$$

Usando o operador densidade, a probabilidade de que uma medida de B no ensemble forneça o resultado b é

$$p_b = \text{Tr}(\rho P_b), \tag{5.10}$$

e o valor esperado da medida de B no ensemble é

$$\begin{aligned}
 \langle B \rangle &= \sum_b b p_b \\
 &= \text{Tr} \left(\sum_b b P_b \rho \right) \\
 &= \text{Tr}(\rho B)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Observem que dado o operador densidade, a média e a probabilidade acima são tomadas sem a necessidade de se escrever o ket que representa o ensemble. Como mencionamos, um ensemble puro é especificado por $w_m = 1$ para algum ket $|v_m\rangle = |v\rangle$ e $w_m = 0$ para todos os outros kets.

A evolução temporal do operador densidade é feita de tal forma a não perturbar o ensemble, não alterando a população fracionária de w_m . Portanto, a mudança de ρ é governada unicamente pela evolução temporal dos kets de estado $|v_m\rangle$ da equação (5.9) e satisfazem a equação de Schrodinger, tal que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i[H, \rho]. \tag{5.12}$$

Esta equação é semelhante à equação de Heisenberg, exceto pelo sinal contrário e é conhecida como equação de Liouville-Von Neumann. Note-se que a equação de Liouville-Von Neumann vem da evolução temporal dos vetores de estado na representação de Schrodinger. Então, se considerarmos a representação de Heisenberg, o operador densidade permanecerá constante no tempo e todos os outros operadores (relacionados aos observáveis físicos) serão dependentes do tempo. No que segue adotamos a representatação de Heisenberg.

5.2 O operador densidade de estados vestido

Para um átomo acoplado a um campo de radiação térmica, o sistema é descrito pelo seguinte operador densidade

$$\rho = \rho_0 \otimes \rho_\beta, \quad (5.13)$$

onde ρ_0 é o operador densidade para o átomo, que pode ser um estado puro ou misto, e ρ_β é o operador densidade para o campo de radiação em equilíbrio térmico numa dada temperatura β^{-1} . Digamos que no tempo $t = 0$, acoplamos o átomo ao campo de radiação térmica e depois o sistema total evolui no tempo. Usando o quadro de Heisenberg, vamos manter o operador densidade constante no tempo e calcular a evolução temporal dos operadores relacionados aos observáveis físicos do sistema. Estes operadores evoluem no tempo de acordo com a equação de movimento de Heisenberg

$$\frac{\partial}{\partial t} O(t) = i[H, O(t)], \quad (5.14)$$

onde O é um operador dependente do tempo associado a alguma observável físico e H é a Hamiltoniana do sistema átomo campo e é dada pela equação (1.48). O operador densidade de estados (nu) do campo de radiação em equilíbrio térmico na equação (5.13) é dado por

$$\rho_\beta = Z_\beta^{-1} \exp \left[-\beta \sum_{k=1}^N \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (5.15)$$

onde os operadores a_k^\dagger e a_k são os operadores de criação e aniquilação (nus) e são das por

$$a_\mu^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_\mu}{2}} \left(q_\mu - i \frac{p_\mu}{\omega_\mu} \right) \quad (5.16)$$

$$a_\mu = \sqrt{\frac{\omega_\mu}{2}} \left(q_\mu + i \frac{p_\mu}{\omega_\mu} \right), \quad (5.17)$$

e $Z_\beta = \prod_{k=1}^N z_\beta^k$ é a função partição do campo de radiação térmico, onde

$$\begin{aligned} z_\beta^k &= \text{Tr}_k[e^{-\beta\omega_k(a_k^\dagger a_k + 1/2)}] \\ &= \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\beta\omega_k}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Vimos nos capítulos anteriores que em um sistema descrito pela Hamiltoniana (1.48) era necessário redefinir o que são coordenadas físicas para o átomo e para os modos do campo. Desta forma vamos redefinir o operador densidade de estados dado na equação (5.15), onde vamos considerar as coordenadas vestidas q'_k . Chamaremos tal operador de operador densidade de estados vestido e é dado por

$$\rho'_\beta = Z_\beta^{-1} \exp\left[-\beta \sum_{k=1}^N \omega_k \left(a_k^\dagger a'_k + \frac{1}{2}\right)\right], \quad (5.19)$$

onde a_k^\dagger e a'_k são os operadores de criação e aniquilação vestidos e são dados por

$$a'_\mu{}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_\mu}{2}} \left(q'_\mu - i \frac{p'_\mu}{\omega_\mu} \right) \quad (5.20)$$

$$a'_\mu = \sqrt{\frac{\omega_\mu}{2}} \left(q'_\mu + i \frac{p'_\mu}{\omega_\mu} \right), \quad (5.21)$$

sendo $p'_\mu = -i \frac{\partial}{\partial q'_\mu}$ o operador momento vestido. O mesmo é feito com o operador densidade para o átomo, sendo este reescrito em termos das coordenadas vestidas q'_0 .

5.3 O processo de termalização

Agora vamos analisar a evolução temporal do valor esperado térmico do operador número de ocupação associado com o oscilador vestido $a_0^\dagger(t)a_0(t)$. Consideraremos que o estado inicial do sistema átomo-campo eletromagnético dado pela equação (5.13), onde ρ'_0 é um estado arbitrário para o átomo, puro ou misto, e ρ'_β dado pela equação (5.19), descreve o campo de radiação térmica em uma dada temperatura β^{-1} . Um vez que o nosso sistema pode ser escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação vestido, podemos resolver o problema do equilíbrio térmico usando a equação de Heinsenberg para estes operadores e determinar a evolução temporal do nosso sistema. A equação de movimento de Heinsenberg (5.14) para o operador aniquilação vestido é

$$\frac{\partial}{\partial t} a'_\mu(t) = i[H, a'_\mu(t)]. \quad (5.22)$$

Temos que em $t = 0$, $a'_\mu(0)$ é dado pela equação (5.21). Vimos no Capítulo 2 que podemos relacionar as coordenadas vestidas com as coordenadas nuas através da equação (2.7) e o mesmo pode ser feito para obter o momento vestido. Temos que

$$p'_\mu = -i \frac{\partial}{\partial q'_\mu} = -i \sum_{r=0}^N \frac{\partial Q_r}{\partial q'_\mu} \frac{\partial}{\partial Q_r} = \sum_{r=0}^N \frac{\partial Q_r}{\partial q'_\mu} P_r. \quad (5.23)$$

Da equação (2.6), temos

$$Q_r = \sum_{\nu=0}^N \sqrt{\frac{\omega_\nu}{\Omega_r}} t_\nu^r q'_\nu. \quad (5.24)$$

Substituindo a equação (5.24) em (5.23), obtemos

$$p'_\mu = \sum_{r=0}^N \sqrt{\frac{\omega_\mu}{\Omega_r}} t_\mu^r P_r. \quad (5.25)$$

Como $P_r = \sum_{\nu=0}^N t_\nu^r p_\nu$, podemos obter assim uma expressão que relaciona os momentos vestidos com os momentos nus, dado por

$$p'_\mu = \sum_{r=0}^N \sum_{\nu=0}^N \sqrt{\frac{\omega_\mu}{\Omega_r}} t_\mu^r t_\nu^r p_\nu. \quad (5.26)$$

Usando as equações (2.7) e (5.26) na equação (5.21), temos

$$\begin{aligned} a'_\mu(0) &= \sqrt{\frac{\omega_\mu}{2}} \left(\sum_{r=0}^N \sum_{\nu=0}^N \sqrt{\frac{\Omega_r}{\omega_\mu}} t_\mu^r t_\nu^r q_\nu + i \frac{1}{\omega_\mu} \sum_{r=0}^N \sum_{\nu=0}^N \sqrt{\frac{\omega_\mu}{\Omega_r}} t_\mu^r t_\nu^r p_\nu \right) \\ &= \sum_{r=0}^N \sum_{\nu=0}^N \sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} \left(t_\mu^r t_\nu^r q_\nu + i \frac{t_\mu^r t_\nu^r}{\Omega_r} p_\nu \right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Para resolver a equação (5.22) vamos escrever a'_μ como

$$a'_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^N \left(B_{\mu\nu}(t) p_\nu + \dot{B}_{\mu\nu}(t) q_\nu \right), \quad (5.28)$$

tal que

$$a'_\mu(0) = \sum_{\nu=0}^N \left(B_{\mu\nu}(0) p_\nu + \dot{B}_{\mu\nu}(0) q_\nu \right) = \sum_{r=0}^N \sum_{\nu=0}^N \sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} \left(t_\mu^r t_\nu^r q_\nu + i \frac{t_\mu^r t_\nu^r}{\Omega_r} p_\nu \right). \quad (5.29)$$

Temos então que as condições iniciais são dadas por

$$B_{\mu\nu}(0) = i \sum_{r=0}^N \frac{t_\mu^r t_\nu^r}{\sqrt{2\Omega_r}} \quad (5.30)$$

$$\dot{B}_{\mu\nu}(0) = \sum_{r=0}^N \sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} t_\mu^r t_\nu^r \quad (5.31)$$

Da equação de Heisenber, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} a'_\mu(t) &= i[H, a'_\mu(t)] \\
&= \sum_{\mu=0}^N \frac{1}{2} [p_\mu^2 + \omega_\mu^2 q_\mu^2, a'_\mu] - \sum_{k=1}^N c_k [q_k q_0, a'_\mu] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{c_k^2}{\omega_k^2} [q_0^2, a'_\mu] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^N ([p_\mu^2, a'_\mu] + \omega_\mu^2 [q_\mu^2, a'_\mu]) - \sum_{k=1}^N c_k ([q_k, a'_\mu] q_0 + q_k [q_0, a'_\mu]) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{c_k^2}{\omega_k^2} [q_0^2, a'_\mu], \tag{5.32}
\end{aligned}$$

onde $c_k = \eta \omega_k$. Usando a equação (5.28) e tomando somente os termos não nulos nas regras de comutação ($[q_\mu, p_\nu] = \delta_{\mu\nu}$), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^N (\dot{B}_{\mu\nu}(t) p_\nu + \ddot{B}_{\mu\nu}(t) q_\nu) &= + \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^N \sum_{\nu=0}^N ([p_\mu^2, \dot{B}_{\mu\nu}(t) q_\nu] + \omega_\mu^2 [q_\mu^2, B_{\mu\nu}(t) p_\nu]) \\
&\quad - \sum_{k=1}^N \sum_{\nu=0}^N c_k ([q_k, B_{\mu\nu}(t) p_\nu] q_0 + q_k [q_0, B_{\mu\nu}(t) p_\nu]) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\nu=0}^N \frac{c_k^2}{\omega_k^2} [q_0^2, B_{\mu\nu}(t) p_\nu]. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Usando as relações de comutação, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^N (\dot{B}_{\mu\nu}(t) p_\nu + \ddot{B}_{\mu\nu}(t) q_\nu) &= + \sum_{\nu=0}^N \dot{B}_{\mu\nu}(t) p_\nu - \sum_{\nu=0}^N B_{\mu\nu}(t) \omega_\nu^2 q_\nu + \sum_{k=1}^N c_k B_{\mu k}(t) q_0 \\
&\quad + \sum_{k=1}^N c_k B_{\mu 0}(t) q_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{c_k^2}{\omega_k^2} B_{\mu 0}(t) q_0 \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Comparando o lado direito com o lado esquerdo da equação acima, obtemos

$$\ddot{B}_{\mu 0}(t) + \left[\omega_0^2 + \sum_{k=1}^N \frac{c_k^2}{\omega_k^2} \right] B_{\mu 0}(t) - \sum_{k=1}^N c_k B_{\mu k}(t) = 0 \tag{5.35}$$

$$\ddot{B}_{\mu k}(t) + \omega_k^2 B_{\mu k}(t) - c_k B_{\mu 0}(t) = 0. \tag{5.36}$$

Estas equações são idênticas as equações de movimento para as coordenadas nuas que são obtidas usando a equação de movimento Hamilton para a Hamiltoniana dada na equação (1.48). Então, para desacoplar as equações (5.35) e (5.36), podemos usar as mesmas matrizes t_μ^r que usamos para diagonalizar a Hamiltoniana (1.48), ou seja

$$B_{\mu\nu}(t) = \sum_{r=0}^N t_\mu^r C_\nu^r(t). \tag{5.37}$$

Substituindo a equação (5.37) nas equações (5.35) e (5.36), estas equações desacopladas são

$$\ddot{C}_\mu^r(t) + \Omega_r^2 C_\mu^r(t) = 0, \quad (5.38)$$

cuja solução é

$$C_\mu^r(t) = a_\mu^r e^{i\Omega_r t} + b_\mu^r e^{-i\Omega_r t}. \quad (5.39)$$

Substituindo (5.39) em (5.37), obtemos

$$B_{\mu\nu}(t) = \sum_{r=0}^N t_\nu^r (a_\mu^r e^{i\Omega_r t} + b_\mu^r e^{-i\Omega_r t}). \quad (5.40)$$

Os coeficientes a_μ^r e b_μ^r podem ser obtidos das condições iniciais dada pelas equações (5.30) e (5.31), onde temos

$$i \sum_{r=0}^N \frac{t_\mu^r t_\nu^r}{\sqrt{2\Omega_r}} = \sum_{r=0}^N t_\mu^r (a_\mu^r + b_\mu^r) \quad (5.41)$$

$$\sum_{r=0}^N \sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} t_\mu^r t_\nu^r = i \sum_{r=0}^N t_\mu^r \Omega_r (a_\mu^r - b_\mu^r). \quad (5.42)$$

Multiplicando a equação (5.41) por $i\Omega_r$ e somando com a equação (5.42), encontramos $a_\mu^r = 0$. Multiplicando a equação (5.41) por $i\Omega_r$ e subtraindo a equação (5.42), concluímos que $b_\mu^r = i \frac{t_\mu^r}{\sqrt{2\Omega_r}}$. Da (5.40), podemos escrever

$$B_{\mu\nu}(t) = i \sum_{r=0}^N \frac{t_\mu^r t_\nu^r}{\sqrt{2\Omega_r}} e^{-i\Omega_r t} \quad (5.43)$$

$$\ddot{B}_{\mu\nu}(t) = \sum_{r=0}^N \sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} t_\mu^r t_\nu^r e^{-i\Omega_r t}, \quad (5.44)$$

de forma que

$$a'_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^N \sum_{r=0}^N t_\mu^r t_\nu^r \sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} \left(q_\nu + \frac{i}{\Omega_r} p_\nu \right) e^{-i\Omega_r t}. \quad (5.45)$$

Usando as relações inversas para as equações (1.27) e (1.28), podemos escrever $a'_\mu(t)$ em função das coordenadas coletivas, da seguinte forma:

$$a'_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^N \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N t_\mu^r t_\nu^r t_\nu^s \sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} \left(Q_s + \frac{i}{\Omega_r} P_s \right) e^{-i\Omega_r t}. \quad (5.46)$$

Podemos agora realizar a soma sobre os índices ν e usar a equação (1.30) para obtermos

$$a'_\mu(t) = \sum_{r=0}^N t_\mu^r \left[\sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} \left(Q_r + \frac{i}{\Omega_r} P_r \right) \right] e^{-i\Omega_r t}. \quad (5.47)$$

Observe na equação acima que o operador entre colchetes é exatamente o operador aniquilação coletivo (1.49). Desta forma temos

$$a'_\mu(t) = \sum_{r=0}^N t_\mu^r A_r e^{-i\Omega_r t}. \quad (5.48)$$

Da equação (5.25) podemos obter que $P_r = \sum_\nu t_\nu^r \sqrt{\frac{\Omega_r}{\omega_\nu}} p'_\nu$ e usando a equação (5.24) podemos escrever $a'_\mu(t)$ em termos das coordenadas vestidas

$$a'_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^N \sum_{r=0}^N t_\mu^r t_\nu^r \left[\sqrt{\frac{\omega_\nu}{2}} \left(q'_\nu + \frac{i}{\omega_\nu} p'_\nu \right) \right] e^{-i\Omega_r t}. \quad (5.49)$$

Desta forma o operador entre colchetes é exatamente o operador aniquilação vestido dado pela equação (5.21), ou seja

$$a'_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^N \sum_{r=0}^N t_\mu^r t_\nu^r a'_\nu e^{-i\Omega_r t}. \quad (5.50)$$

Comparando a equação acima com a equação (5.48), podemos concluir que

$$A_r = \sum_{\nu=0}^N t_\nu^r a'_\nu \quad \Leftrightarrow \quad a'_\mu = \sum_{r=0}^N t_\mu^r A_r \quad (5.51)$$

$$A_r^\dagger = \sum_{\nu=0}^N t_\nu^r a_\nu^\dagger \quad \Leftrightarrow \quad a_\mu^\dagger = \sum_{r=0}^N t_\mu^r A_r^\dagger \quad (5.52)$$

Com o intuito de determinar a evolução temporal do valor esperado do operador número de ocupação e relacionar o processo de termalização com as amplitudes de probabilidade calculadas nos capítulos anteriores, podemos escrever a equação (5.50) da seguinte forma

$$a'_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^N f_{\mu\nu}(t) a'_\nu, \quad (5.53)$$

onde

$$f_{\mu\nu}(t) = \sum_{r=0}^N t_\mu^r t_\nu^r e^{-i\Omega_r t}, \quad (5.54)$$

como já vimos no Capítulo 2 representa uma amplitude de probabilidade.

Agora vamos determinar a evolução temporal do valor esperado térmico do operador número de ocupação vestido $n'_\mu(t) = a'^\dagger_\mu(t)a'_\mu(t)$ para em seguida relacionar com o número de ocupação correspondente átomo vestido. O valor esperado do operador número de ocupação vestido é dado por

$$\langle n'_\mu(t) \rangle = Tr[\rho n'_\mu(t)] = Tr[\rho'_0 \otimes \rho'_\beta a'^\dagger_\mu(t)a'_\mu(t)]. \quad (5.55)$$

Da equação (5.53) temos que

$$\begin{aligned} a'^\dagger_\mu(t)a'_\mu(t) &= \sum_{\nu=0}^N \sum_{\alpha=0}^N f_{\mu\alpha}^*(t)f_{\mu\nu}(t)a'^\dagger_\alpha a'_\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^N |f_{\mu\nu}(t)|^2 a'^\dagger_\nu a'_\nu + \sum_{\nu \neq \alpha} f_{\mu\alpha}^*(t)f_{\mu\nu}(t)a'^\dagger_\nu a'_\alpha. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Para calcular o traço da equação (5.55) vamos utilizar as bases vestidas $|n_o, n_1, \dots, n_N\rangle_d$. Das propriedades dos operadores de criação e aniquilação, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ e $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ [32], temos que o segundo termo da equação acima não contribui para o valor esperado da equação (5.55), logo

$$\begin{aligned} \langle n'_\mu(t) \rangle &= Tr \left[\sum_{\nu=0}^N |f_{\mu\nu}(t)|^2 a'^\dagger_\nu a'_\nu \rho'_0 \otimes \rho'_\beta \right] \\ &= |f_{\mu 0}(t)|^2 Tr \left[a'^\dagger_0 a'_0 \rho'_0 \right] + \sum_{k=1}^N |f_{\mu k}(t)|^2 Tr \left[a'^\dagger_k a'_k \rho'_\beta \right] \\ &= |f_{\mu 0}(t)|^2 \langle n'_0(0) \rangle + \sum_{k=1}^N |f_{\mu k}(t)|^2 \langle n'_k(0) \rangle, \end{aligned} \quad (5.57)$$

onde $\langle n'_0(0) \rangle$ e $\langle n'_k(0) \rangle$ são as distribuições iniciais para o átomo vestido e os modos do campo vestido, dados por

$$\langle n'_0(0) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n_d \langle n|\rho'|n\rangle_d \quad (5.58)$$

$$\langle n'_k(0) \rangle = \frac{Tr_k [a'^\dagger_k a'_k e^{-\beta\omega_k(a'^\dagger_k a'_k + \frac{1}{2})}]}{Tr_k [e^{-\beta\omega_k(a'^\dagger_k a'_k + \frac{1}{2})}]} = \frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1}. \quad (5.59)$$

Tomando $\mu = 0$, obtemos a dependência temporal do valor esperado do operador número de ocupação correspondente ao átomo,

$$\langle n'_0(t) \rangle = |f_{00}(t)|^2 \langle n'_0(0) \rangle + \sum_{k=1}^N |f_{0k}(t)|^2 \langle n'_k(0) \rangle. \quad (5.60)$$

No Capítulo 2 vimos que $|f_{00}(t)|^2$ é a probabilidade do átomo permanecer no primeiro nível excitado e $|f_{0k}(t)|^2$ é a probabilidade do átomo decair do primeiro nível excitado para o estado fundamental emitindo um fóton de frequência ω_k . Isto quer dizer que todo processo de termalização é descrito em termos destas probabilidades. Na seção seguinte determinaremos o valor esperado da equação (5.60) no limite $R \rightarrow \infty$ e posteriormente no regime de pequenas cavidades.

5.4 O processo de termalização no limite contínuo

A equação (5.60) nos dá o valor esperado do operador número de ocupação no tempo t e para ser resolvida devemos determinar $|f_{00}(t)|^2$ e $|f_{0k}(t)|^2$ no limite contínuo ($R \rightarrow \infty$), o que já foi feito no Capítulo 2. Então, tomando o limite contínuo $\Delta\omega \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ nós obtemos o valor esperado do número de ocupação correspondente ao átomo,

$$\langle n'_0(t) \rangle = |f_{00}(t)|^2 \langle n'_0(0) \rangle + \int_0^\infty \frac{|f_{0\omega}(t)|^2}{e^{\beta\omega} - 1} d\omega, \quad (5.61)$$

onde $|f_{00}(t)|^2$ é dada pela equação (2.48) e $|f_{0\omega}(t)|^2$ é

$$\begin{aligned} |f_{0\omega}(t)|^2 = & + \frac{\eta^2 \omega^2}{\tilde{\omega}} \left\{ \frac{\tilde{\omega}^2 + \omega_0^2 e^{-\pi g t}}{\tilde{\omega} K(\omega)} - \frac{e^{-\frac{\pi g t}{2}}}{K^2(\omega)} \left([2\tilde{\omega}(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega(\omega^2 + \omega_0^2)] \right. \right. \\ & \times \cos[(\omega - \tilde{\omega})t] + \pi g(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 + \omega_0^2 - 2\tilde{\omega}\omega) \sin[(\omega - \tilde{\omega})t] \\ & + \left. \left. 2gI(\omega, t)K(\omega)[2\tilde{\omega}(\omega^2 - \omega_0^2) \sin(\tilde{\omega}t) + \pi g(\omega^2 + \omega_0^2) \cos(\tilde{\omega}t)] \right) + 4g\tilde{\omega} \right. \\ & \times \left. \frac{I(\omega, t)}{K(\omega)} [(\omega^2 - \omega_0^2) \sin(\omega t) + \pi g\omega \cos(\omega t)] + 4\tilde{\omega}g^2 I^2(\omega, t) \right\}, \quad (5.62) \end{aligned}$$

sendo

$$I(\omega, t) = \int_0^\infty \frac{y^2 e^{-yt}}{[(y^2 + \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 y^2](y^2 + \omega^2)} dy \quad (5.63)$$

e

$$K(\omega) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega^2. \quad (5.64)$$

Quando tomamos um tempo muito grande ($t \rightarrow \infty$), o primeiro termo da equação (5.61) não contribui para o valor esperado do operador $n'_0(t)$ pois neste limite $|f_{00}(\infty)|^2$ tende a zero. Já o segundo termo da equação (5.61) é bem definido e não nulo neste limite, o que mostra que o valor esperado correspondente ao átomo tende a um estado equilíbrio final

e é independente do operador densidade para o átomo ρ'_0 , ou seja, depende apenas dos graus de liberdade do campo térmico.

Tomando o limite $t \rightarrow \infty$ na equação (5.62), a equação (5.61) toma a forma

$$\langle n'_0(\infty) \rangle = 2g \int_0^\infty \frac{\omega^2}{[(\omega^2 - \omega_0)^2 + \pi^2 g^2 \omega^2](e^{\beta\omega} - 1)} d\omega \quad (5.65)$$

e representa o valor de equilíbrio do operador número de ocupação correspondente ao átomo. Para encontrar o significado físico do valor de equilíbrio dado pela equação acima, vamos determinar o valor esperado do operador número de ocupação $a_0^\dagger a'_0$ no caso em que o sistema átomo-campo eletromagnético está em equilíbrio térmico em uma temperatura θ^{-1} . Nesta situação, o operador densidade é dado por

$$\rho_\theta = \frac{e^{-\theta H}}{\text{Tr}[e^{-\theta H}]} \quad (5.66)$$

onde H é dado pela equação (1.48). Assim

$$\langle a_0^\dagger a'_0 \rangle = n_0 = \frac{\text{Tr}[a_0^\dagger a'_0 e^{-\theta H}]}{\text{Tr}[e^{-\theta H}]} \quad (5.67)$$

Escrevendo a Hamiltoniana em termos das coordenadas coletivas dada pela equação (1.51) usando as equações (5.51) e (5.52), temos

$$\langle a_0^\dagger a'_0 \rangle = n_0 = \frac{\text{Tr}[\sum_r t_0^r A_r \sum_s t_0^s A_s e^{-\theta H}]}{\text{Tr}[e^{-\theta H}]}, \quad (5.68)$$

Usando a base coletiva $|n_0, n_1, \dots, n_N\rangle_c$ e tendo que os termos cruzados não contribuem no valor esperado, encontramos

$$\langle a_0^\dagger a'_0 \rangle = n_0 = \sum_{r=0}^N (t_0^r)^2 \frac{\text{Tr}[A_r^\dagger A_r e^{-\theta \Omega_r (A_r^\dagger A_r - \frac{1}{2})}]}{\text{Tr}[e^{-\theta \Omega_r (A_r^\dagger A_r - \frac{1}{2})}]} = \sum_{r=0}^N \frac{(t_0^r)^2}{e^{\theta \Omega_r} - 1}. \quad (5.69)$$

Comparando esta equação com a equação (2.24) e procedendo de maneira análoga (com $M_{00} = (e^{\theta \Omega_r} - 1)^{-1}$) até a equação (2.39), obtemos o valor esperado do operador número de ocupação $a_0^\dagger a'_0$ no caso em que o sistema átomo-campo eletromagnético estão em equilíbrio térmico em uma dada temperatura θ^{-1} ,

$$\langle a_0^\dagger a'_0 \rangle = 2g \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{[(\alpha^2 - \omega_0)^2 + \pi^2 g^2 \alpha^2](e^{\beta\alpha} - 1)} d\alpha. \quad (5.70)$$

No caso em que $\theta = \beta$, as equações (5.70) e (5.65) são idênticas. Isto significa que o átomo atinge uma distribuição de equilíbrio térmico final e termaliza com o campo de radiação térmica, a temperatura β^{-1} .

5.5 O processo de termalização em pequenas cavidades

Para analisar o processo de termalização em pequenas cavidades ($Rg \ll c$), partiremos da equação do valor esperado do operador número de ocupação correspondente ao átomo (5.60) que é descrito em termos das probabilidades de permanência e decaimento. Como vimos no Capítulo 4 as probabilidades de permanência e decaimento oscilam em torno de um valor fixo e tem este comportamento ao longo de todo o tempo. Logo, para efeito de cálculo e para uma análise numérica mais simples, vamos utilizar as amplitudes de probabilidades dadas nas equações (4.5) e (4.11) e expandir em séries de potências em torno de Rg e tomar termos até a primeira ordem. Assim, as amplitudes de probabilidade de permanência e decaimento são dadas respectivamente por

$$f_{00}(t) = e^{-it\omega_0} + Rg \left(\frac{\pi e^{-it\omega_0} (-R^2\omega_0 - R^2\omega_0 \cot^2(R\omega_0) + (R - iRt\omega_0) \cot(R\omega_0) + it)}{2R^2\omega_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi^3 n^2 e^{-\frac{i\pi n t}{R}}}{(\pi^2 n^2 - R^2\omega_0^2)^2} \right) \quad (5.71)$$

e

$$f_{0k}(t) = \sqrt{Rg} \left((-\sqrt{2}\pi^{3/2}k) \left(\frac{e^{-\frac{i\pi k t}{R}}}{\pi^2 k^2 - (R\omega_0)^2} - \frac{e^{-it\omega_0}}{\pi^2 k^2 - (R\omega_0)^2} \right) + \sqrt{Rg} Rg \left((-\sqrt{2}\pi^{3/2}k) \left(\frac{e^{-it\omega_0} \pi}{2((R\omega_0)^2 - R\omega_0(k\pi)^2)^2} (\pi^2 k^2 ((R\omega_0)^2 - it\omega_0) + iR\omega_0 \cot(R\omega_0) (\pi^2 k^2 (t\omega_0 + i) - (t\omega_0 - i)(R\omega_0)^2) + (R\omega_0)^2 (\pi^2 k^2 - (R\omega_0)^2) \times \cot^2(R\omega_0) + (t\omega_0)^2 (it\omega_0 - (R\omega_0)^2 + 2)) - \frac{e^{-i\frac{k\pi t}{R}} \pi}{2R\omega_0 (\pi^2 k^2 - (R\omega_0)^2)^3} (2(\pi k)^3 \times t\omega_0 - 7i(\pi k)^2 R\omega_0 - 2\pi k t\omega_0 (R\omega_0)^2 - i(R\omega_0)^3) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\pi m^2 e^{-\frac{i\pi m t}{R}}}{(k^2 - m^2) (\pi^2 m^2 - (R\omega_0)^2)^2} \right) \right). \quad (5.72)$$

Das equações acima, as respectivas probabilidades em primeira ordem em Rg são dadas por

$$|f_{00}(t)|^2 = 1 - \pi Rg \left(1 + \cot^2(R\omega_0) - \frac{\cot(R\omega_0)}{R\omega_0} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi^2 n^2 \cos \left[\frac{t}{R} (R\omega_0 - n\pi) \right]}{(\pi^2 n^2 - (R\omega_0)^2)^2} \right) \quad (5.73)$$

e

$$|f_{0k}(t)|^2 = 8\pi^3 k^2 Rg \frac{\sin^2 \left(\frac{t(R\omega_0 - \pi k)}{2R} \right)}{((R\omega_0)^2 - \pi^2 k^2)^2} \quad (5.74)$$

Da equação (5.60), o valor esperado do operador número de ocupação no regime de pequenas cavidades é dado por

$$\langle n'_0(t) \rangle = \left[1 - \pi Rg \left(1 + \cot^2(R\omega_0) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi^2 n^2 \cos \left[\frac{t}{R} (R\omega_0 - n\pi) \right]}{(\pi^2 n^2 - (R\omega_0)^2)^2} - \frac{\cot(R\omega_0)}{R\omega_0} \right) \right] \langle n'_0(0) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi^3 k^2 Rg \frac{\sin^2 \left(\frac{t(R\omega_0 - \pi k)}{2R} \right)}{((R\omega_0)^2 - \pi^2 k^2)^2} \langle n'_k(0) \rangle. \quad (5.75)$$

A equação acima nos traz uma diferença com relação a termalização para grandes cavidades. Neste regime de pequenas cavidade a dependência temporal do valor esperado do operador número de ocupação está toda contida nas funções trigonométricas e em nenhum instante de tempo ela converge para um valor final de equilíbrio. Para verificar este fato podemos fazer uma análise numérica usando os mesmos parâmetros anteriores: $\omega_0 \approx 4,00 \times 10^{-14}/s$, $R \approx 1,00 \times 10^{-6}m$, fixar $\langle n'_0(0) \rangle = 1$ (átomo inicialmente no primeiro estado excitado) e variar a temperatura como mostra a Figura (5.1).

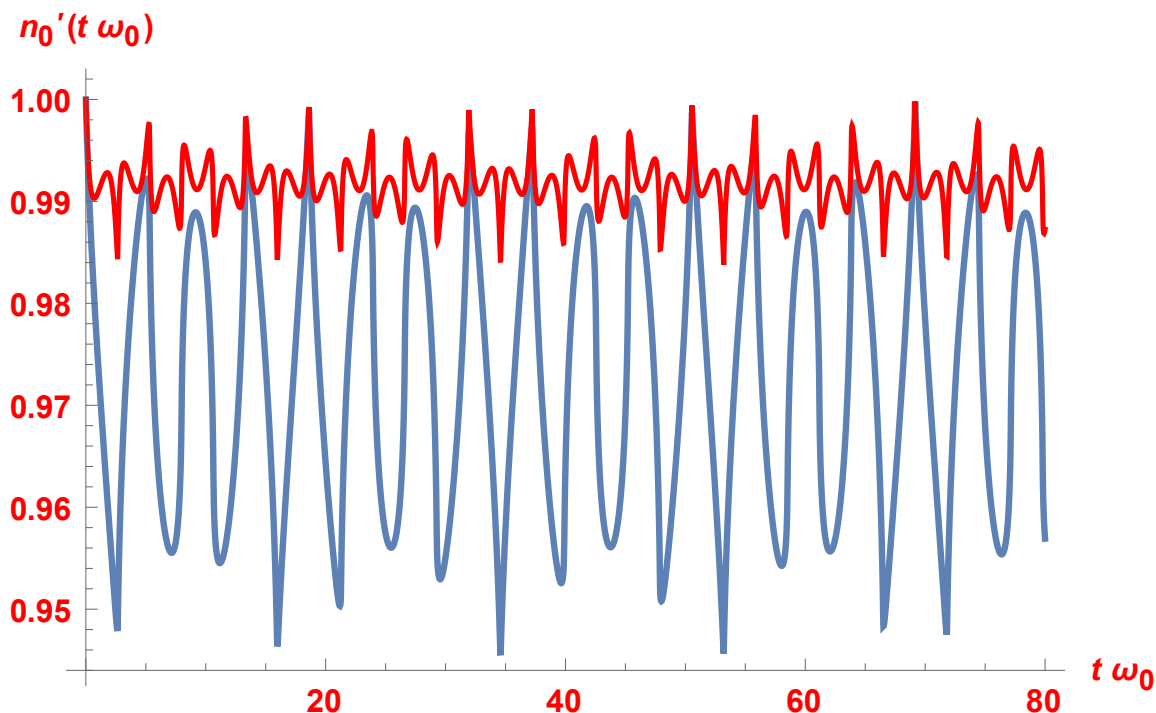


Figura 5.1: Valor esperado do número de ocupação correspondente ao átomo $\langle n'_0(t) \rangle$, para $\omega_0 \approx 4,0 \times 10^{14}/s$, $R \approx 1,0 \times 10^{-6}m$ e $\langle n'_0(0) \rangle = 1$. ●●● $T=300K$ ●●● $T=10000K$

Na Figura (5.1) verifica-se claramente que um aumento considerável na temperatura aumenta (na média) o valor esperado do número de ocupação. Este aumento no valor

esperado é ainda mais acentuado em temperaturas mais elevadas. Por exemplo, para temperaturas da ordem de $T = 10^5 K$, o número de ocupação (na média) é aproximadamente 3 vezes maior do que na temperatura ambiente. Para esta frequência de emissão, variações na temperatura próximas a temperatura ambiente são pouco significativas para valor esperado, não aumentando e nem diminuindo os pontos de máximo e mínimos da oscilação, tal que o número de ocupação a temperatura ambiente e próximo do zero são praticamente idênticos.

Vemos que à temperatura zero, um átomo no espaço livre, inicialmente no primeiro estado excitado ou estados de maior excitação somente pode decair, desde que todos os modos do campo estejam no estado fundamental. Mas quando confinado numa cavidade suficientemente pequena, este decaimento praticamente desaparece. Agora, numa temperatura finita (alta), os modos do campo dentro da cavidade podem ser excitados com uma probabilidade finita implementada pela função distribuição $\langle n'_k(0) \rangle$. Quando calculamos o número de ocupação térmico e verificamos que ele aumenta com a temperatura, podemos pensar que nesta situação o átomo vestido pode trocar quanta com o campo.

Conclusões e perspectivas

Apresentamos aqui um modelo simplificado de um sistema átomo-campo eletromagnético confinado numa cavidade esférica refletora. Aproximamos o átomo por um oscilador harmônico linearmente acoplado a um campo escalar dentro de uma cavidade esférica de raio arbitrário. Usamos o conceito das coordenadas vestidas para estudar o processo de radiação do átomo numa cavidade. Quando consideramos que apenas o μ -ésimo oscilador vestido estava excitado e os demais osciladores vestidos estavam no estado fundamental, encontramos uma expressão analítica para o processo de radiação. Estudamos em detalhes o caso em que o átomo (q'_0) estava no seu primeiro estado excitado e o campo estava no estado de vácuo, e encontramos que para o caso de uma cavidade muito grande (espaço livre) os nossos resultados de decaimento estão de acordo com os resultados experimentais e previstos pela teoria de perturbações, para acoplamento fraco. Para sistemas confinados numa cavidade suficientemente pequena, encontramos uma expressão analítica para o processo de inibição da emissão espontânea do átomo, mostrando que nestas condições, o átomo é praticamente estável. Verificamos que um átomo com emissão na frequência de luz vermelha visível confinado numa cavidade de raio da ordem de $10^{-6}m$, tem a probabilidade de aproximadamente 97% de permanecer no primeiro estado excitado que está de acordo com os resultados experimentais.

Os resultados obtidos para cavidades pequenas são mais rigorosos do que as estimativas dos trabalhos anteriores e permitem uma análise mais clara do que está acontecendo com o sistema. As expressões obtidas nos permitem determinar as frequências dos fótons com mais chances de serem emitidos num processo de decaimento de um átomo que inicialmente estava no primeiro estado excitado e também saber qual é a probabilidade de qualquer frequência de fótons que podem ser emitidos. Também possibilitou verificar que quanto menor o raio da cavidade, maior será a estabilidade de um estado excitado do átomo, menor

serão as amplitudes de oscilação da probabilidade e mais rápidas serão as transições entre os máximos e mínimos da probabilidade.

Apesar deste trabalho ter se limitado a estudar as amplitudes de probabilidades de permanência e a amplitude de probabilidade de decaimento do átomo no seu primeiro estado excitado para o estado fundamental, todas os outros processo de radiação podem ser calculados conhecendo-se somente estas duas amplitudes ($f_{00}(t)$ e $f_{0k}(t)$), além $f_{kk'}(t)$, a amplitude de espalhamento fóton \rightarrow fóton [12, 13].

Estudamos o processo de decaimento dentro de uma caixa refletora arbitrariamente grande e recuperamos o resultado do espaço livre obtido na cavidade esférica refletora e mostramos que nesse limite, mesmo se impormos uma condição de fronteira periódica para o campo ao longo das paredes da caixa, as duas situações são fisicamente equivalentes. Ainda nestas condições de contorno mas no limite de cavidades pequenas, fizemos algumas tentativas de determinar as amplitudes de probabilidade de decaimento e permanência, mas às somas existentes nas expressões da função $W(z)$ deixaram os cálculos muito complicados.

Analisando o processo de termalização encontramos que o valor esperado do número de ocupação é descrito em termos das probabilidade de emissão e absorção. Mostramos que o valor esperado do número de ocupação correspondente ao átomo é totalmente descrito em termos das probabilidades do átomo permanecer no seu primeiro estado excitado, e em termos da probabilidade do átomo decair do seu primeiro estado excitado para o estado fundamental. Para uma cavidade arbitrariamente grande, mostramos analiticamente que o valor esperado correspondente ao átomo atinge um estado de equilíbrio final e termaliza com o campo de radiação térmica, independentemente do estado inicial do átomo. Para o regime de pequenas cavidades, mostramos que o valor esperado do número de ocupação não converge para um estado de equilíbrio final, e que mudanças consideráveis no valor esperado do número de ocupação ocorrem a temperaturas muito elevadas.

Como perspectivas de trabalho nesta área, deixamos em aberto o estudo do processo de radiação e termalização em pequenas cavidades, quando aplicadas condições de contorno periódicas nas paredes da cavidade. Outra ideia que inicialmente tivemos é usar o conceito das coordenadas vestidas para o estudar o movimento Browniano, onde podemos modelar a partícula Browniana pelo oscilador vestido e o campo vestido representando o

banho térmico. Também seria interessante estudar a influencia da dimensão do espaço nos processos de radiação e termalização no modelo abordado. Estudos nessa direção já foram iniciados [40].

Bibliografia

- [1] C. Cohen-Tannoudji, *Atoms in Electromagnetic Fields*, World Scientific, (1994).
- [2] N. Polonsky, Tese de doutorado, Ecole Normale Supérieure, Paris, (1964).
- [3] S. Haroche, Doctoral thesis, Ecole Normale Supérieure, Paris, (1964).
- [4] C. Audoin, C. Cohen-Tannoudji, S. Haroche, J. P. Schermann, *Phys. Rev. Lett.*, 24, 861, (1970).
- [5] C. Cohen-Tannoudji and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, 24, 974, (1970).
- [6] N. P. Andion, A. P. C. Malbouisson, A. Mattos Neto, *J. Phys. A*, 34, 3735 (2001).
- [7] G. Flores-Hidalgo, A. P. C. Malbouisson, Y. W. Milla, *Phys. Rev. A*, 65, 063414 (2002).
- [8] G. Flores Hidalgo, A. P. C. Malbouisson, *Phys. Rev. A*, 66, 042118, (2002).
- [9] G. Flores-Hidalgo, A. P. C. Malbouisson, *Phys. Lett. A*, 311, 82, (2003).
- [10] G. Flores-Hidalgo and Y. W. Milla, *J. Phys. A*, 38, 7527, (2005).
- [11] E. G. Figueiredo, C. A. Linhares, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, *Phys. Rev. A*, 84, 04802, (2011).
- [12] R. Casana, G. Flores Hidalgo, B. M. Pimentel, *Physica A*, 374, 600 (2007).
- [13] Paulo Henrique Teixeira da Silva, *Coordenadas renormalizadas: O formalismo dos operadores de criação e aniquilação*, UNIFEI, Tese de Mestrado, Minas Gerais, (2013).
- [14] G. Flores-Hidalgo, R. O. Ramos, *Physica A*, 326, 159, (2003).

- [15] G. Flores-Hidalgo and A. P. C. Malbouisson, *Phys. Lett. A* 337, 37, (2005).
- [16] J. S. Langer, *Solids Far from Equilibrium* ed C Godreche (Cambridge: Cambridge University Press), (1992).
- [17] D. J. Evans, G. P. Morriss, *Statistical Mechanics of Non-Equilibrium Liquids* (Edinburgh: Scottish Academic Press), (1990).
- [18] G. Flores-Hidalgo, *J. Phys. A*, 40, 13217, (2007).
- [19] M. Salle, J. Smit, J. C. Vink, *Phys. Rev. D*, 64, 025016, (2001),
- [20] G. Parisi G, *Europhys. Lett.*, 40, 357, (1997).
- [21] G. Aarts, G. F. Bonini, C. Wetterich, *Nucl. Phys. B*, 587, 403, (2000).
- [22] G. Aarts, G. F. Bonini, C. Wetterich, *Phys. Rev. D*, 63, 025012, (2001).
- [23] G. Flores-Hidalgo, *J. Phys. A*, 40, 13217, (2007).
- [24] E. Butkov, *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company/ World Student Series Edition, California, (1973).
- [25] R. P. Feynman, F. L. Vernon, *Ann. Phys.*, NY 24, 118, (1963).
- [26] P. Ullersma, *Physical*, 32, 27 (1966).
- [27] A. O. Caldeira, A. J. Leggett, *Phys. A.*, 121, 587, (1983).
- [28] W. H. Zurek, *Phys. Today*, 44, 36, (1991).
- [29] B. L. Hu, J. P Paz, Y. Zhang, *Phys. Rev. D*, 45, 2843, (1992).
- [30] W. Thirring, F. Schwabl, *Ergeb. Exakt. Naturw.* 36, 219 (1964)
- [31] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, World Scientific, Singapore (1993)
- [32] J. J. Sakurai, J. Napolitano *Modern quantum mechanics*, 2^a ed., Addison-Wesley, San Francisco, (2011).
- [33] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization*, 1^a ed., Springer, New York, (1996).

- [34] H. Ederlyi, et al., Higher Transcendental Functions, McGraw-Hill, New York, pg. 196, equação (40), (1953).
- [35] Yony Walter Milla Gonzales, Distribuição de Energia de Átomos Excitados em Cavidades, CBPF, Tese de Mestrado, Rio de Janeiro, (2002).
- [36] R. V. Churchill, J. W. Brown, R. F. Verhey, Complex Variables and Applications, McGraw-Hill Book Company, New York, (1974).
- [37] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F.Laloe *Mécanique Quantique*, Volume II, Hermann, Paris, (1973).
- [38] W. Jhe, A. Anderson, E. A. Hinds, D. Meschede, L. Moi, S. Haroche, Phys. Rev. Lett., 58, 666 (1987).
- [39] R. G. Hulet, E. S. Hifler, D. Kleppner, Phys. Rev. Lett., 55, 2137 (1985).
- [40] G. Flores-Hidalgo, M. M. Silva (*Trabalho em andamento*).