

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Cones Invariantes em Sistemas Lineares
por Partes Contínuos em \mathbb{R}^3**

Marcos Coutinho Mota

Orientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga

Coorientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Durante o desenvolvimento deste trabalho, o autor recebeu auxílio financeiro da
FAPEMIG

ITAJUBÁ, 13 DE DEZEMBRO DE 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Cones Invariantes em Sistemas Lineares
por Partes Contínuos em \mathbb{R}^3**

Marcos Coutinho Mota

Orientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga

Coorientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ – MG

13 DE DEZEMBRO DE 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Cones Invariantes em Sistemas Lineares por Partes Contínuos em \mathbb{R}^3

Marcos Coutinho Mota

Dissertação aprovada por banca examinadora em 13 de dezembro de 2016, conferindo ao autor o título de Mestre em Ciências em Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Enrique Ponce Nuñez, Universidad de Sevilla

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi, IBILCE – UNESP

Prof. Dr. Braulio Augusto Garcia, UNIFEI

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello (Coorientador), UNIFEI

Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga (Orientador), UNIFEI

ITAJUBÁ – MG

13 DE DEZEMBRO DE 2016

*Dedico este trabalho aos meus pais, Marta e José Luiz, às minhas irmãs, Maria das
Mercês e Elizângela e à minha avó Terezinha (in memoriam).*

Agradecimentos

Inicialmente agradeço ao bom Deus e à Nossa Senhora das Mercês por todas as bênçãos recebidas e por mais esta conquista.

Agradeço aos meus pais, Marta e José Luiz, às minhas irmãs, Maria das Mercês e Elizângela e à minha avó Terezinha (*in memoriam*), por tudo o que fizeram por mim e por sempre me incentivarem a estudar.

Agradeço a todos os meus ex-professores, pelos conhecimentos transmitidos.

Agradeço muito ao meu orientador, Professor Denis de Carvalho Braga, pelos ensinamentos, conselhos, empenho, amizade, seriedade, ajudas e paciência durante toda a orientação, sempre prestativo e disponível no decorrer da realização desta dissertação.

Agradeço muito ao meu coorientador, Professor Luis Fernando de Osório Mello, por todos os ensinamentos, sugestões, conselhos, ajudas e também pelas atividades desenvolvidas sob sua orientação durante o Mestrado.

Agradeço muito aos amigos do Mestrado: Eveline, Karine e Marco Antônio, pelo o que cada um fez por mim, pela amizade, por todo o apoio, incentivos e vários momentos de estudos!

Agradeço aos amigos da Graduação: Diánis, Rafael Casal, Raimundo e Silmara, os quais sempre me incentivaram a continuar estudando.

Agradeço ao IF Sudeste MG - Câmpus Rio Pomba e aos professores do DMAFE, em especial aos professores Liliane Martinez Antonow, Marcos Pavani de Carvalho e Paula Reis de Miranda, por todo o incentivo.

Agradeço muito ao amigo Marcelo Filardi por todo o apoio no início do Mestrado.

Agradeço ao Alexandre pela amizade e pelas ajudas durante o início do Mestrado.

Agradeço a todos que, de certa forma, contribuíram para a conclusão desta dissertação.
Agradeço à FAPEMIG pelo auxílio financeiro.

Agradeço muito aos professores participantes da Banca Examinadora pelas valiosas sugestões e correções, visando uma maior qualidade deste trabalho.

Everything should be made as simple as possible, but not simpler.

Albert Einstein

Resumo

Apresentamos um estudo sobre cones invariantes em sistemas lineares por partes contínuos e observáveis em \mathbb{R}^3 . Utilizando uma forma paramétrica, estabelecemos a aplicação de Poincaré \mathcal{P} , essencial para o estudo da estabilidade da origem e também da existência, unicidade e estabilidade de cones invariantes de duas zonas. Mostramos que a estabilidade da origem está bem definida quando o sistema estudado não possui cones invariantes de duas zonas e apresentamos um exemplo não intuitivo de um sistema linear por partes contínuo no qual as matrizes que definem os sistemas lineares envolvidos são Hurwitzianas, mas a origem é um ponto de equilíbrio instável.

Palavras-chave: Sistema linear por partes contínuo, Cone invariante, Estabilidade.

Abstract

We present a study about invariant cones in observable piecewise linear continuous systems in \mathbb{R}^3 . Using a parametric form, we established the Poincaré map \mathcal{P} , essential for the study of the stability of the origin and the existence, uniqueness and stability of two-zonal invariant cones. We have shown that the stability of the origin is well-defined when the studied system has no two-zonal invariant cones and we present a non-intuitive example of a piecewise linear continuous system in which the matrices that define the involved linear systems are Hurwitzian but the origin is an unstable equilibrium point.

Keywords: Piecewise linear continuous system, Invariant cone, Stability.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Agradecimentos | ii |
| Resumo | v |
| Abstract | vi |
| Sumário | vii |
| Lista de Figuras | ix |
| 1 Introdução | 1 |
| 1.1 Motivação | 1 |
| 1.2 Revisão de Literatura | 2 |
| 1.3 Estrutura da Dissertação | 3 |
| 2 Sistemas Lineares por Partes Contínuos e Observáveis em \mathbb{R}^3 | 5 |
| 2.1 Conceitos Iniciais | 5 |
| 2.2 Sistemas Lineares por Partes Contínuos em \mathbb{R}^3 | 16 |
| 2.3 Cones Invariantes | 22 |
| 2.4 Forma Canônica Observável de Liénard | 46 |
| 3 Aplicação de Poincaré | 54 |
| 3.1 Função Auxiliar | 54 |
| 3.2 Semiaplicações de Poincaré | 56 |
| 3.3 Prova dos itens (g) e (h) da Proposição 3.2.3 | 77 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4 | Existência, Unicidade e Estabilidade de Cones Invariantes | 104 |
| 4.1 | Existência, Unicidade e Estabilidade | 104 |
| 4.2 | Diagrama de Bifurcação de Cones Invariantes | 124 |
| 5 | Estabilidade da Origem e Dinâmica em um Cone Invariante de Duas Zonas | 127 |
| 5.1 | Dinâmica em um Cone Invariante de Duas Zonas | 127 |
| 5.2 | Estabilidade da Origem | 142 |
| 5.3 | Situações Interessantes | 150 |
| | Considerações Finais | 154 |
| | Referências Bibliográficas | 155 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Sistemas lineares hiperbólicos $x' = Ax$ e respectivos valores de λ, α e β , sendo A escrita na forma (2.2). Em vermelho apresentamos uma órbita, que se aproxima da origem nas Figuras 2.1i e 2.1ii e se afasta da origem na Figura 2.1iii. Dada uma condição inicial $x \in \mathbb{R}^3$, temos a existência de uma superfície invariante (em violeta) que contém a respectiva solução do sistema linear $x' = Ax$ com condição inicial em x | 15 |
| 2.2 | Semiaplicações de Poincaré \mathcal{P}^- e \mathcal{P}^+ associadas ao sistema (2.3). | 20 |
| 2.3 | Cone invariante de duas zonas do sistema (2.3). | 22 |
| 2.4 | Representação de um cone invariante de uma zona. Ressaltamos a semirreta r invariante pelo fluxo na zona $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0\}$ e indicamos dois pontos $x_{0_1}, x_{0_2} \in r$ | 23 |
| 2.5 | Cone invariante de duas zonas (em verde) interceptando Π (em rosa). | 26 |
| 2.6 | Figura 2.5 por um segundo ângulo. | 27 |
| 2.7 | Intersecção do cone invariante do Exemplo 2.3.1 com \mathbb{S}^2 . A curva em vermelho é a intersecção de \mathbb{S}^2 (em azul) com o plano de separação (em rosa), a superfície em verde é parte do cone invariante de duas zonas e a curva em preto é a órbita periódica de duas zonas em \mathbb{S}^2 resultante da existência do cone invariante de duas zonas. | 27 |
| 3.1 | Gráficos de $\varphi_{\pm\gamma}$, para $\gamma = 0.2$ | 55 |
| 3.2 | Gráficos da função u_0 , conforme sinal de γ | 69 |
| 3.3 | Gráficos da função u_1 , conforme sinal de γ | 70 |
| 3.4 | Gráfico de S de acordo com sinal de γ para valores fixos de $t > 0$ e $\lambda > 0$ | 76 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.5 | Intersecção do autoespaço gerado pelo autovetor v com o plano focal da matriz A | 80 |
| 3.6 | Cone invariante de duas zonas acima do plano $z = z_2$ | 82 |
| 3.7 | Representação da semirreta r_0 acima do semiplano Π_{HF}^- | 84 |
| 3.8 | Representação da semirreta r_1 com inclinação maior do que λ^+ | 84 |
| 3.9 | Representação da semirreta r_1 com inclinação menor do que λ^+ | 85 |
| 3.10 | Órbita periódica no plano $\eta\xi$ | 91 |
| 3.11 | Possível órbita periódica de duas zonas $C = C_1 \cup C_2$ para o sistema (3.19). | 96 |
| 4.1 | Diagrama de bifurcação de cones invariantes quando $t^+ < t^-$ e $\lambda^+ < \lambda^-$ | 124 |
| 4.2 | Diagrama de bifurcação de cones invariantes do sistema (2.3) quando $\lambda^+ = \lambda^-$ | 126 |
| 5.1 | Cone invariante planar de duas zonas (na cor verde), interceptando o plano de separação (em rosa) e a esfera unitária (em azul). Em preto, na região limitada pela esfera, ressaltamos que para uma dada condição inicial (ponto vermelho) no cone invariante de duas zonas, a solução tende para a origem. | 138 |
| 5.2 | Cone invariante planar de duas zonas (na cor verde), interceptando a esfera unitária (em azul). Destacamos uma condição inicial (ponto vermelho) no cone invariante e a trajetória da solução com condição inicial neste ponto. | 139 |
| 5.3 | Cone invariante de duas zonas (em verde), interceptando o plano de separação (em rosa) e a esfera unitária (em azul). Em preto, destacamos quatro órbitas periódicas no cone. | 140 |
| 5.4 | Três órbitas periódicas (em preto) no cone invariante de duas zonas (em verde). | 140 |
| 5.5 | Cone invariante de duas zonas (na cor verde), interceptando a esfera unitária (em azul) e o plano de separação (em rosa). Destacamos uma condição inicial (ponto vermelho) no cone invariante de duas zonas e a trajetória da solução com condição inicial neste ponto. | 141 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.6 | Órbita (em preto) no cone invariante de duas zonas (em verde) se afastando da origem. | 142 |
| 5.7 | Intersecção do cone invariante de duas zonas (em verde) com \mathbb{S}^2 (em azul). A curva em vermelho é a intersecção de \mathbb{S}^2 com o plano de separação (em rosa) e a curva em preto é a órbita periódica de duas zonas em \mathbb{S}^2 resultante da existência do cone invariante de duas zonas. Em preto, na região limitada pela esfera, ressaltamos uma órbita do cone invariante de duas zonas, a qual se afasta da origem. | 144 |
| 5.8 | Cone Invariante de duas zonas (em verde) do sistema (2.3) definido por duas matrizes Hurwitzianas. Em preto ressaltamos uma de suas órbitas, a qual se afasta da origem. | 145 |
| 5.9 | Órbita periódica Γ de duas zonas do sistema (5.9). | 151 |
| 5.10 | Plano $z = a$ em \mathbb{R}^3 | 151 |
| 5.11 | Cone Invariante de duas zonas (em verde) do sistema (2.3) definido por uma matriz Hurwitziana e outra não Hurwitziana. A origem é um atrator para as órbitas do cone. | 152 |
| 5.12 | Vista superior de um cone Invariante de duas zonas (em verde) do sistema (2.3) definido por duas matrizes não Hurwitzianas. Tal cone intercepta Π (em rosa) e \mathbb{S}^2 (em azul). Em preto ressaltamos uma de suas órbitas, a qual tende para a origem. | 153 |

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo apresentamos uma introdução a esta dissertação, descrevendo a estrutura do presente texto e dando uma motivação a este estudo.

1.1 Motivação

Nesta dissertação de mestrado apresentamos uma aplicação da *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias*. Mais precisamente, estudamos cones invariantes em sistemas lineares por partes contínuos e observáveis em \mathbb{R}^3 .

O interesse atual em sistemas lineares por partes advém de suas aplicações em modelos mecânicos, eletrônicos e biológicos, veja, por exemplo, [5] e as referências lá apresentadas. Dentre estes sistemas, possuem especial relevância os sistemas lineares contínuos de duas zonas, os quais possuem a origem como o único ponto de equilíbrio sobre a região de separação. Uma primeira tarefa no estudo de tais sistemas é a determinação da estabilidade e do tipo topológico da origem. A estabilidade da origem pode ser estabelecida, conforme [10], mediante o uso de funções de *Lyapunov*. Como é bem sabido, a busca de funções de *Lyapunov* não é uma tarefa simples e, ademais, a existência de uma função de *Lyapunov* não é uma condição necessária de estabilidade. Portanto, é preciso lançar mão de outras técnicas para determinar a estabilidade do ponto de equilíbrio. No caso de sistemas lineares planos com duas zonas, a estabilidade da origem está caracterizada,

conforme [8]. Agora, se considerarmos um sistema linear por partes contínuo e observável em \mathbb{R}^3 , como veremos no Capítulo 5, situações muito interessantes podem acontecer.

Para campos vetoriais suaves, o *Teorema de Hartman-Grobman* (ver [10], página 107) nos permite caracterizar a estabilidade de um ponto de equilíbrio hiperbólico analisando apenas os sinais das partes reais dos autovalores da parte linear do campo de vetores calculada neste ponto de equilíbrio. Como é bem sabido, quando as partes reais dos autovalores são negativas, o ponto de equilíbrio é localmente assintoticamente estável, conforme o **Teorema 2.1.4**. O mesmo não ocorre, em geral, para campos vetoriais suaves por partes. De fato, no estudo dos sistemas lineares por partes contínuos e observáveis em \mathbb{R}^3 que possuem um ponto de equilíbrio na região de separação, os resultados gerais acerca de sistemas suaves não podem ser aplicados diretamente. Em particular, o tipo topológico de tal ponto de equilíbrio não pode ser determinado, em geral, por métodos de linearização. Com efeito, como veremos no decorrer desta dissertação, mesmo quando as partes lineares envolvidas indicarem estabilidade assintótica, é possível obter dinâmica instável para o ponto de equilíbrio.

Neste sentido, o objetivo desta dissertação de mestrado é estudar a estabilidade de sistemas lineares por partes contínuos e observáveis em \mathbb{R}^3 com duas zonas e com um único ponto de equilíbrio sobre o plano de separação, e apresentar um exemplo não intuitivo de tais sistemas, com as matrizes que definem os sistemas lineares envolvidos possuindo todos os autovalores com partes reais negativas, mas com a origem sendo um ponto de equilíbrio instável.

1.2 Revisão de Literatura

Os resultados discutidos nesta dissertação foram elencados por meio de estudos dos materiais indicados nas Referências Bibliográficas. Apresentamos resumidamente o que aborda cada trabalho citado.

Utilizamos [1] para a demonstração do **Teorema 2.1.3**. Já em [2] é apresentada uma função auxiliar (ver Seção 3.1), a qual possibilita determinar uma forma paramétrica para as semiaplicações de Poincaré \mathcal{P}^- e \mathcal{P}^+ apresentadas no Capítulo 2. No artigo [4]

é apresentada a demonstração do **Teorema 4.2.1**, o qual foi conjecturado em [6]. Além disto, no artigo [5] e no Capítulo 1 de [3] foram estudados os conceitos acerca de sistemas observáveis e a forma canônica generalizada de Liénard, os quais podem ser vistos na Seção 2.4.

Esta dissertação está embasada nos artigos [6] e [7]. Grande parte dos conceitos aqui apresentados foram retirados destes dois artigos. A título de curiosidade, um estudo detalhado sobre sistemas lineares planos com duas zonas é apresentado em [8].

Utilizamos o *software Wolfram Mathematica* [9] para a realização de cálculos, simulações e construção de grande parte das figuras apresentadas nesta dissertação. Todos os conceitos apresentados sobre Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, presentes na Seção 2.1, foram extraídos de [10].

O livro [11] fornece a definição de matriz de Householder (ver **Definição 2.1.1**). Por fim, [12] é um livro que apresenta o *Lema do Complemento de Schur*, ver **Lema 2.1.1**, sua demonstração e também aplicações. Este livro aborda o histórico da vida e trabalhos do matemático russo Issai Schur (1875-1941).

1.3 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está constituída de cinco capítulos. Nos próximos parágrafos discorreremos sobre cada um deles.

No presente Capítulo 1 apresentamos uma introdução a esta dissertação, damos uma motivação a este estudo e falamos brevemente da estrutura deste texto. Já no Capítulo 2, iniciamos lembrando de maneira sucinta alguns conceitos essenciais para a leitura dos demais capítulos e estabelecemos algumas notações. Definimos os sistemas lineares por partes contínuos e observáveis em \mathbb{R}^3 que serão estudados ao longo da dissertação, apresentamos uma introdução à teoria dos cones invariantes e provamos dois resultados para um sistema linear por partes contínuo e observável em \mathbb{R}^3 , sendo um deles sobre a existência de cones invariantes de duas zonas (**Teorema 2.3.1**), e o outro sobre a estabilidade da origem de um sistema que não possui cones invariantes (**Proposição 2.3.6**).

Prosseguindo, no Capítulo 3, lançando mão de uma função introduzida por Andronov e colaboradores em [2], estudamos as semiaplicações de Poincaré em uma forma paramétrica. Utilizando os conceitos estabelecidos nos capítulos anteriores, no Capítulo 4 estudamos no **Teorema 4.1.1**, a existência, unicidade e também estabilidade de cones invariantes de duas zonas, resultados que nos permitiram construir diagramas de bifurcações na Seção 4.2.

No Capítulo 5 provamos um teorema que caracteriza a dinâmica das órbitas restritas a um cone invariante de duas zonas (**Teorema 5.1.1**), provamos também algumas condições suficientes para a estabilidade assintótica da origem (**Teorema 5.2.1**) e, utilizando todos os resultados anteriores, apresentamos alguns exemplos envolvendo a estabilidade da origem de sistemas lineares por partes contínuos e observáveis em \mathbb{R}^3 que possuem cones invariantes de duas zonas. Para finalizar, apresentamos nossas Considerações Finais acerca da realização desta dissertação.

Capítulo 2

Sistemas Lineares por Partes Contínuos e Observáveis em \mathbb{R}^3

Iniciaremos este capítulo com uma seção contendo alguns resultados que servirão de alicerce para o leitor e estabeleceremos algumas notações que serão utilizadas no decorrer do texto. Logo após, definiremos os *Sistemas Lineares por Partes Contínuos e Observáveis em \mathbb{R}^3* que serão estudados nesta dissertação, apresentaremos um primeiro passo para se definir duas semiaplicações de Poincaré, introduziremos a noção de cone invariante em tais sistemas, relacionaremos a existência de cones invariantes de duas zonas em \mathbb{R}^3 com a existência de órbitas periódicas em \mathbb{S}^2 e, por fim, sob certas hipóteses, provaremos um teorema sobre a existência de cones invariantes de duas zonas e uma proposição abordando a estabilidade da origem na ausência de cones invariantes, ambos os resultados válidos para sistemas lineares por partes contínuos e observáveis em \mathbb{R}^3 .

2.1 Conceitos Iniciais

Nesta seção apresentamos uma coletânea de resultados fundamentais para a leitura desta dissertação e também estabelecemos algumas notações que serão utilizadas ao longo do texto.

No decorrer desta dissertação, denotaremos por $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real das

matrizes $n \times n$ com elementos no corpo dos números reais, diremos que A é uma matriz de ordem n se A for uma matriz $n \times n$, indicaremos o produto interno canônico em \mathbb{R}^3 por

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \end{aligned}$$

sendo $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, a norma euclidiana por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

a esfera unitária por

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

\mathcal{I} indicará a matriz identidade $n \times n$, cuja ordem deve ficar clara no contexto em que a mesma aparecer e, como é usual, denotaremos a base canônica do espaço euclidiano \mathbb{R}^n por $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, sendo $e_j = (e_j^1, e_j^2, \dots, e_j^n)$, com $e_j^j = 1$ e $e_j^i = 0$, para $i \neq j$. Por fim, apesar de na Língua Portuguesa utilizarmos vírgula para separar a parte inteira da parte fracionária de um número real, nesta dissertação utilizaremos um ponto no lugar da vírgula. Assim, por exemplo, indicaremos o número 1,23 por 1.23.

Vamos relembrar rapidamente o conceito de assíntota oblíqua ao gráfico de uma função real a valores reais. Dados um ponto $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e uma reta s definida pela equação $ax + by + c = 0$, a distância entre p e s é dada por

$$d(p, s) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Assim, dados uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, um ponto $p = (x, f(x))$ e a reta s de equação $y - mx - b = 0$, temos que a distância entre o ponto p e a reta s é

$$d(p, s) = \frac{|-mx + f(x) - b|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|f(x) - mx - b|}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Dizemos que a reta $y = mx + b$, $m \neq 0$, é uma assíntota oblíqua do gráfico da função f quando a distância entre o ponto $(x, f(x))$ e tal reta tender a zero quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|f(x) - mx - b|}{\sqrt{1 + m^2}} = 0,$$

ou seja, quando

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx - b] = 0.$$

Para determinarmos uma assíntota oblíqua, inicialmente encontramos o valor de m , caso exista, através do limite

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Em seguida, calculamos

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx].$$

Como sabemos, se b for finito, então a reta $y = mx + b$ será uma assíntota oblíqua, para $x \rightarrow +\infty$. Procedemos de modo análogo para $x \rightarrow -\infty$. Este método de determinação da equação de uma assíntota oblíqua será útil a partir do Capítulo 3.

Os resultados a seguir serão utilizados na demonstração da **Proposição 2.3.2**.

Proposição 2.1.1. *Se $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$, então $\langle Bx, y \rangle = y^T Bx$, sendo y^T o transposto do vetor y .*

Demonstração. De fato, escrevendo

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

é imediato mostrar que $\langle Bx, y \rangle = y^T Bx$. ■

Definição 2.1.1. *Seja $w \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário. A matriz*

$$H = \mathcal{I} - 2ww^T$$

é chamada matriz de Householder.

Proposição 2.1.2. *Se H é matriz de Householder, então H é simétrica e ortogonal.*

Demonstração. Com efeito, basta notar que

$$H^T = (\mathcal{I} - 2ww^T)^T = \mathcal{I}^T - (2ww^T)^T = \mathcal{I} - 2(w^T)^T w^T = \mathcal{I} - 2ww^T = H$$

e, como $H^T = H$,

$$\begin{aligned}
 HH^T &= (\mathcal{I} - 2ww^T)^2 \\
 &= \mathcal{I}^2 - 4ww^T + 4(ww^T)(ww^T) \\
 &= \mathcal{I} - 4ww^T + 4w(w^T w)w^T \\
 &= \mathcal{I} - 4ww^T + 4w \langle w, w \rangle w^T \\
 &= \mathcal{I} - 4ww^T + 4ww^T \\
 &= \mathcal{I},
 \end{aligned}$$

visto que $\langle w, w \rangle = \|w\|^2 = 1$. Logo, $H = H^T = H^{-1}$. ■

Teorema 2.1.1. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ vetores unitários distintos. Existe uma matriz de Householder H tal que $Hx=y$.*

Demonstração. Sabemos que

$$Hx = (\mathcal{I} - 2ww^T)x = x - 2ww^T x = x - 2w \langle x, w \rangle = x - 2 \langle x, w \rangle w$$

para algum vetor unitário $w \in \mathbb{R}^n$. Como por hipótese temos que $x \neq y$, definindo

$$w = \frac{x - y}{\|x - y\|},$$

segue que w é vetor unitário e

$$\begin{aligned}
 Hx &= x - 2 \left\langle x, \frac{x - y}{\|x - y\|} \right\rangle \frac{x - y}{\|x - y\|} \\
 &= x - 2 \langle x, x - y \rangle \frac{x - y}{\|x - y\|^2} \\
 &= x - \frac{2(\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle)(x - y)}{\langle x - y, x - y \rangle} \\
 &= x - \frac{2(\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle)(x - y)}{\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle} \\
 &= x - \frac{2(\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle)(x - y)}{2(\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle)} \\
 &= x - (x - y) \\
 &= y.
 \end{aligned}$$

Note que usamos o fato de ser $\|x\| = \|y\| = 1$. ■

Lema 2.1.1 (Complemento de Schur). *Seja M uma matriz de ordem n escrita em blocos, a saber,*

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right),$$

com A uma matriz de ordem p e D uma matriz de ordem q , de modo que $n = p + q$. Então, se A é não singular,

$$\det(M) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)$$

e, se D é não singular,

$$\det(M) = \det(D) \det(A - BD^{-1}C).$$

Demonstração. Sugerimos a leitura de [12]. ■

Definição 2.1.2. *O conjunto dos autovalores de uma matriz A é chamado espectro de A e é denotado por $\sigma(A)$.*

Sejam A uma matriz de ordem 3 possuindo um autovalor $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e x um autovetor unitário de A associado ao autovalor β . Suponha que H é uma matriz de Householder tal que $Hx = e_1$. Assim,

$$H^{-1}AH = HAH$$

é matriz similar a A e verifica

$$HAHe_1 = HAx = H\beta x = \beta Hx = \beta e_1,$$

ou seja, e_1 é um autovetor de $H^{-1}AH$ associado ao autovalor β e, portanto, $H^{-1}AH$ tem a estrutura de blocos

$$H^{-1}AH = \left(\begin{array}{c|c} \beta & B_{12} \\ \hline O_{21} & B_{22} \end{array} \right),$$

sendo B_{12} uma matriz 1×2 , O_{21} a matriz nula 2×1 e B_{22} uma matriz de ordem 2. Resulta que

$$\sigma(A) = \{\beta\} \cup \sigma(B_{22})$$

pois, pelo **Lema do Complemento de Schur**, por um lado, sendo $\beta - r\mathcal{I}$ não singular,

$$0 = \det(H^{-1}AH - r\mathcal{I}) = \det \left(\begin{array}{c|c} \beta - r\mathcal{I} & B_{12} \\ \hline O_{21} & B_{22} - r\mathcal{I} \end{array} \right) = \det(\beta - r\mathcal{I}) \det(B_{22} - r\mathcal{I}),$$

implicando que $\det(B_{22} - r\mathcal{I}) = 0$ e, por outro lado, sendo $B_{22} - r\mathcal{I}$ não singular,

$$0 = \det(H^{-1}AH - r\mathcal{I}) = \det \left(\begin{array}{c|c} \beta - r\mathcal{I} & B_{12} \\ \hline O_{21} & B_{22} - r\mathcal{I} \end{array} \right) = \det(B_{22} - r\mathcal{I}) \det(\beta - r\mathcal{I}),$$

evidenciando que $\det(\beta - r\mathcal{I}) = 0$. Assim, os autovalores de $H^{-1}AH$ e, portanto, de A , são β e os autovalores da matriz B_{22} .

Abordaremos agora alguns resultados referentes à *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias*. Indicamos [10] como principal referência sobre este assunto.

Sejam Δ um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n e $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, em Δ . Como sabemos, para cada $x \in \Delta$ existe um intervalo aberto $I_x \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi_x : I_x &\longrightarrow \Delta \\ t &\longmapsto \varphi_x(t) \end{aligned}$$

é solução máxima única do problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = F(x), \\ x(0) = x. \end{cases}$$

Além disto, o conjunto $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Delta, t \in I_x\}$ é aberto em \mathbb{R}^{n+1} e a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : D &\longrightarrow \Delta \\ (t, x) &\longmapsto \varphi(t, x) = \varphi_x(t), \end{aligned}$$

chamada de fluxo gerado pelo campo vetorial F ou fluxo local, é de classe \mathcal{C}^k em D .

Seja agora

$$\begin{aligned} \varphi_p : I_p &\longrightarrow \Delta \\ t &\longmapsto \varphi_p(t) \end{aligned}$$

a curva integral do campo vetorial F passando pelo ponto p e definida no intervalo maximal $I_p = (\omega^-(p), \omega^+(p))$. O conjunto $\gamma_p = \{\varphi_p(t) \in \Delta : t \in I_p\}$, isto é, a imagem da curva

integral do campo vetorial F pelo ponto p , chama-se órbita de F pelo ponto p . No caso de se ter $\gamma_p = \{p\}$, então a órbita é chamada de **ponto singular** e, no caso de γ_p ser difeomorfa a um círculo, dizemos que γ_p é uma órbita fechada ou periódica.

Quando $\omega^+(p) = +\infty$, define-se o conjunto ω -limite de p , $\omega(p)$, como sendo o conjunto dos pontos $q \in \Delta$ para os quais existe uma sequência $\{t_n\}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_p(t_n) = q.$$

Analogamente, quando $\omega^-(p) = -\infty$, define-se o conjunto α -limite de p , $\alpha(p)$, como sendo o conjunto dos pontos $q \in \Delta$ para os quais existe uma sequência $\{t_n\}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_p(t_n) = q.$$

O teorema a seguir será essencial na demonstração dos **Teoremas 2.3.1** e **5.2.1** e da **Proposição 2.3.6**.

Teorema 2.1.2 (Poincaré-Bendixson em \mathbb{S}^2). *Sejam $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, em \mathbb{R}^3 , e $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ o fluxo gerado por F . Suponha que para todo $p \in \mathbb{S}^2$ vale $\varphi_p(t) \in \mathbb{S}^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e que F possui um número finito de pontos singulares em \mathbb{S}^2 . Então, existem as seguintes alternativas para o conjunto ω -limite de uma órbita por um ponto $p \in \mathbb{S}^2$:*

- (a) *Se $\omega(p)$ contém apenas pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica;*
- (b) *Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma delas tendendo a um desses pontos singulares quando $t \rightarrow \pm\infty$. Em outras palavras, $\omega(p)$ é um gráfico;*
- (c) *Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto singular.*

Demonstração. Ver ideia da demonstração na página 141 de [10]. ■

O próximo teorema, juntamente ao *Teorema de Green*, serão importantes na demonstração da **Proposição 3.3.6**.

Teorema 2.1.3 (Critério de Dulac). *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases} \quad (2.1)$$

sendo P e Q funções de classe C^∞ em um aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ e seja $\mathcal{G} \subset \Delta$ uma região simplesmente conexa. Assuma que $B = B(x, y)$ é uma função de classe C^1 definida em \mathcal{G} de tal modo que a função

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)$$

não é identicamente nula e não muda de sinal em \mathcal{G} . Então, não existem órbitas fechadas do sistema (2.1) em \mathcal{G} .

Demonstração. Suponha que exista uma órbita fechada \mathcal{L} do sistema (2.1) em \mathcal{G} e considere a integral de linha

$$I = \oint_{\mathcal{L}} -BQdx + BPdy.$$

Afirmamos que $I = 0$. De fato, sejam

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

as equações da curva \mathcal{L} , para $0 \leq t \leq T$. Então,

$$I = \int_0^T B(\varphi(t), \psi(t))[-Q(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + P(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt$$

e, além disto

$$\varphi'(t) = P(\varphi(t), \psi(t)), \quad \psi'(t) = Q(\varphi(t), \psi(t)),$$

porque (φ, ψ) é uma solução do sistema (2.1). Logo, a expressão entre colchetes no integrando verifica

$$-Q(\varphi(t), \psi(t))P(\varphi(t), \psi(t)) + P(\varphi(t), \psi(t))Q(\varphi(t), \psi(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

ou seja, $I = 0$. Por outro lado, pelo *Teorema de Green*

$$I = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) \right] dx dy,$$

sendo Ω a região limitada pela curva fechada \mathcal{L} ($\Omega \subset \mathcal{G}$). Mas esta integral não pode se anular, visto que o integrando, por hipótese, possui sinal fixo e não é identicamente nulo em \mathcal{G} . Portanto, não existem órbitas fechadas do sistema (2.1) em \mathcal{G} . ■

Sejam

$$\gamma_p = \{\varphi_p(t) \in \Delta : 0 \leq t \leq \tau_0\}$$

uma órbita periódica de F com período $\tau_0 > 0$ e Σ uma seção transversal de F em p . Pela continuidade de φ_p , se $q \in \Sigma$ é um ponto suficientemente próximo de p , então $\varphi_q(t)$ permanece próxima de γ_p para t em um intervalo compacto contendo $[0, \tau_0]$. Definimos a aplicação de Poincaré $\pi : \Sigma_0 \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$ como a aplicação de retorno do fluxo a Σ , isto é, para cada ponto de Σ_0 pertencendo a uma órbita específica, a aplicação π nos fornecerá o primeiro ponto no qual a órbita intercepta Σ em tempo positivo. Desta forma, $\pi(q)$ é o primeiro ponto no qual γ_q intercepta Σ . Sendo Σ_0 o domínio de π , então é claro que $p \in \Sigma_0$ e $\pi(p) = p$.

O **Lema 2.1.2** será utilizado para a demonstração do **Lema 5.1.3**.

Lema 2.1.2. *Se $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma_q)$, sendo Σ uma seção transversal do campo vetorial F e*

$$\gamma_q = \{\varphi_q(t) \in \Delta : t \in I_q, \omega^+(q) = +\infty\}$$

uma órbita de F , então p é o limite de uma sequência $\{\varphi_q(t_n)\}$, com $\varphi_q(t_n) \in \Sigma$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t_n \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Ver página 136 de [10]. ■

Quando $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $F(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x' = F(x)$ é chamado de **sistema linear**. Neste caso, $I_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in \Delta = \mathbb{R}^n$ e o fluxo gerado por F é um **fluxo linear**, conforme a **Definição 2.1.3**.

Definição 2.1.3. *Uma aplicação*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto \varphi(t, x) \end{aligned}$$

de classe \mathcal{C}^1 é dita ser um fluxo linear se

- (a) $\varphi(0, x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- (b) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(c) Para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi_t : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \varphi_t(x) = \varphi(t, x)\end{aligned}$$

é uma aplicação linear em \mathbb{R}^n .

Na página 47 de [10] é provado que para cada fluxo linear $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe uma única matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{aligned}\varphi_t : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \varphi_t(x) = e^{tA}x,\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Por exemplo, dado o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x, \end{cases}$$

com $x \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

resulta que

$$\varphi_t(x) = e^{tA}x = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) & e^{\alpha t} \sin(\beta t) & 0 \\ -e^{\alpha t} \sin(\beta t) & e^{\alpha t} \cos(\beta t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} x.$$

Definição 2.1.4. Um sistema linear $x' = Ax$ (ou a origem do \mathbb{R}^n) chama-se atrator (do sistema) se para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}x = 0 \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 2.1.5. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ é chamada Hurwitziana se as partes reais de todos os seus autovalores são negativas.

Teorema 2.1.4. Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. O sistema $x' = Ax$ é um atrator se, e somente se, A é matriz Hurwitziana.

Demonstração. Ver página 61 de [10]. ■

Como sabemos do estudo dos sistemas lineares hiperbólicos em \mathbb{R}^3 , dado um sistema linear $x' = Ax$, com A tendo autovalores λ e $\alpha \pm i\beta$ e escrita na forma dada em (2.2), a configuração do retrato de fase depende dos sinais de λ, α e β , ou seja, o retrato de fase é dado por uma composição de movimentos definidos pelos sinais de tais parâmetros.

Para ilustrar, na Figura 2.1 apresentamos três exemplos de sistemas da forma mencionada anteriormente, sendo que nos dois primeiros exemplos as órbitas (uma delas, indicada em vermelho) se aproximam da origem e, no terceiro exemplo, as órbitas se afastam da origem. Este comportamento é devido ao sinal do autovalor real λ .

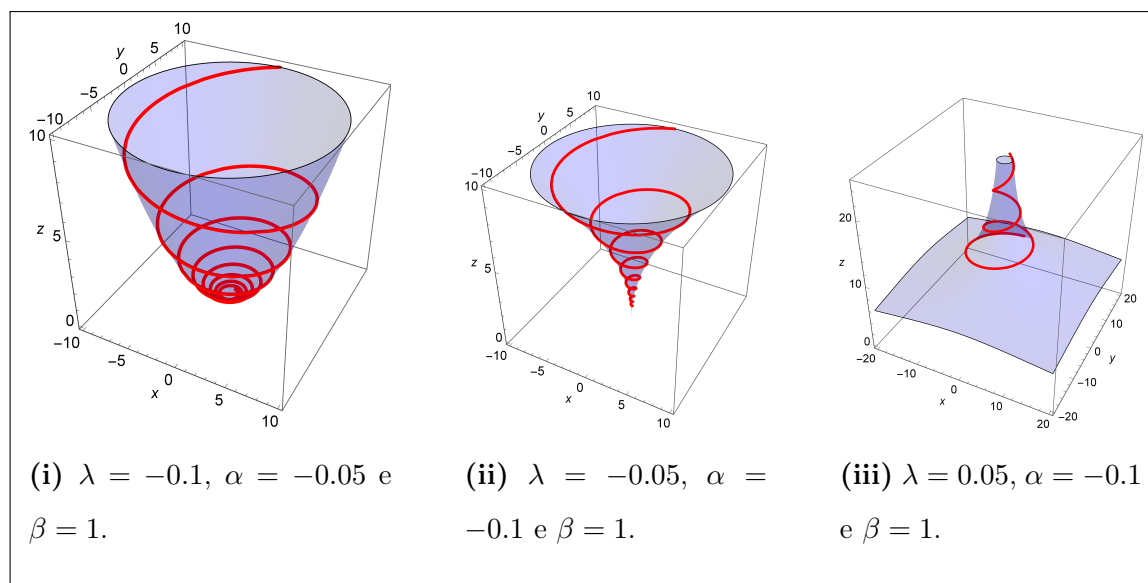


Figura 2.1: Sistemas lineares hiperbólicos $x' = Ax$ e respectivos valores de λ, α e β , sendo A escrita na forma (2.2). Em vermelho apresentamos uma órbita, que se aproxima da origem nas Figuras 2.1i e 2.1ii e se afasta da origem na Figura 2.1iii. Dada uma condição inicial $x \in \mathbb{R}^3$, temos a existência de uma superfície invariante (em violeta) que contém a respectiva solução do sistema linear $x' = Ax$ com condição inicial em x .

Ao estudarmos sistemas lineares hiperbólicos em \mathbb{R}^3 , surgem os seguintes questionamentos:

No estudo dos sistemas lineares por partes contínuos e observáveis em \mathbb{R}^3 ,

podemos aplicar diretamente o **Teorema 2.1.4**? No caso negativo, por quê?
 O que pode ocorrer neste estudo? Existe algum objeto geométrico que seja um intermediador neste estudo?

As respostas a estes questionamentos, bem como as devidas definições envolvidas, serão dadas no decorrer desta dissertação.

2.2 Sistemas Lineares por Partes Contínuos em \mathbb{R}^3

Vamos estudar os *sistemas lineares por partes contínuos* (**SLPC**) em \mathbb{R}^3 com um plano de separação, escritos na forma

$$x' = F(x) = \begin{cases} A^+x, & \text{se } x_1 \geq 0, \\ A^-x, & \text{se } x_1 < 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

com $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, x' representando a derivada de x com respeito ao parâmetro t , chamado aqui de tempo, F indicando o respectivo campo vetorial e

$$A^+ = \begin{pmatrix} t^+ & -1 & 0 \\ m^+ & 0 & -1 \\ d^+ & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^- = \begin{pmatrix} t^- & -1 & 0 \\ m^- & 0 & -1 \\ d^- & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sendo t^\pm, m^\pm e d^\pm números reais.

Note que a origem é sempre um ponto de equilíbrio do sistema (2.3) e, ainda, é único quando as matrizes A^+ e A^- são não singulares, isto é, quando

$$d^+ \neq 0, \quad d^- \neq 0,$$

sendo $d^+ = \det A^+$ e $d^- = \det A^-$. Vamos assumir que tal situação sempre ocorre.

Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

seu polinômio característico na variável y é

$$p_A(y) = \det(A - yI) = -(y^3 - ty^2 + my - d).$$

Note, então, que t^\pm, m^\pm e d^\pm são coeficientes dos polinômios característicos das matrizes A^\pm .

Estudaremos o sistema (2.3) quando os autovalores das matrizes A^\pm são da forma

$$\lambda^\pm, \quad \alpha^\pm + i\beta^\pm, \quad \alpha^\pm - i\beta^\pm,$$

com $\lambda^\pm \neq 0$ e $\beta^\pm > 0$, ou seja, quando ambas as matrizes têm um autovalor real não nulo e dois autovalores complexos conjugados com partes imaginárias positivas.

Indicaremos o plano de separação do sistema (2.3) por

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}.$$

Dado um ponto $x \in \Pi$, como

$$A^+x = (-x_2, -x_3, 0) = A^-x,$$

concluimos que o campo vetorial F é contínuo em Π .

Note que F não é diferenciável em Π porque, se fosse, então existiria uma única transformação linear $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - Bh\|}{\|h\|} = 0.$$

Desde que F é contínuo em Π , temos que

$$F(x) = A^+x = A^-x, \quad x \in \Pi.$$

Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|A^+(x+h) - A^+(x) - Bh\|}{\|h\|} = 0$$

apenas se $B = A^+$ e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|A^-(x+h) - A^-(x) - Bh\|}{\|h\|} = 0$$

somente quando $B = A^-$. Entretanto, como em geral $A^+ \neq A^-$, segue que B não é única.

Assim, o campo vetorial F não é diferenciável em Π .

Proposição 2.2.1. *Considere a equação diferencial ordinária definida em (2.3). O problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = F(x) = A^\pm x, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

com $x_0 \in \mathbb{R}^3$ possui uma única solução, a qual está definida em \mathbb{R} .

Demonstração. Conforme [10], basta provar que o campo vetorial F é uma função Lipschitziana em \mathbb{R}^3 . De fato, considere $x, y \in \mathbb{R}^3$ e $k = \max\{\|A^+\|, \|A^-\|\}$.

(a) Se $x_1 \geq 0$ e $y_1 \geq 0$, então

$$\|F(x) - F(y)\| = \|A^+x - A^+y\| \leq \|A^+\| \|x - y\| \leq k \|x - y\|;$$

(b) Se $x_1 \leq 0$ e $y_1 \leq 0$,

$$\|F(x) - F(y)\| = \|A^-x - A^-y\| \leq \|A^-\| \|x - y\| \leq k \|x - y\|;$$

(c) Se $x_1 > 0$ e $y_1 < 0$, tomamos

$$z = \frac{y_1}{y_1 - x_1}(x - y) + y.$$

Então, $z_1 = 0$ e, pela continuidade do campo vetorial F , segue que

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\| &= \|F(x) - F(z) + F(z) - F(y)\| \\ &\leq \|F(x) - F(z)\| + \|F(z) - F(y)\| \\ &= \|A^+x - A^+z\| + \|A^-z - A^-y\| \\ &\leq \|A^+\| \|x - z\| + \|A^-\| \|z - y\| \\ &\leq \max\{\|A^+\|, \|A^-\|\} (\|x - z\| + \|z - y\|) \\ &= k \|x - y\|, \end{aligned}$$

ao utilizarmos a norma da soma.

Os demais casos são análogos. Logo, F é globalmente Lipschitziana em \mathbb{R}^3 e, portanto, o problema de Cauchy em questão possui uma única solução. Como (2.3) representa uma equação diferencial ordinária linear por partes a coeficientes constantes, tal solução está definida em \mathbb{R} . ■

O sistema (2.3) é bastante geral e constitui a chamada *forma canônica generalizada de Liénard*, fortemente relacionada à *forma canônica observável* (ver **Definição 2.3.4**) presente no contexto da *Teoria de Controle Linear*. Vamos mostrar na Seção 2.4 que, assumindo algumas hipóteses, todo **SLPC** e observável com duas zonas em \mathbb{R}^3 pode ser escrito, em termos de uma mudança linear de variáveis, na forma dada em (2.3).

Para analisar o comportamento dinâmico do sistema (2.3), utilizaremos duas aplicações de transição, as quais denominaremos *semiaaplicações de Poincaré*. Tais aplicações serão definidas a seguir. Antes, observe que podemos escrever as respectivas *formas canônicas de Jordan* das matrizes A^+ e A^- , como

$$J^+ = \begin{pmatrix} \alpha^+ & \beta^+ & 0 \\ -\beta^+ & \alpha^+ & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^+ \end{pmatrix}, \quad J^- = \begin{pmatrix} \alpha^- & \beta^- & 0 \\ -\beta^- & \alpha^- & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^- \end{pmatrix}.$$

Na região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0\}$, o retrato de fase do sistema $x' = A^+x$ é descrito por uma composição de movimentos definidos pelos sinais de α^+ , β^+ e λ^+ , conforme vimos na Seção 2.1. Situação análoga ocorre na região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0\}$. Como nas duas regiões temos $\beta^\pm > 0$, uma característica comum em tais retratos de fase é que, em ambos, as soluções irão espiralar no mesmo sentido.

Vamos definir agora uma aplicação de Poincaré para o sistema (2.3). Para todo ponto $p = (x_p, y_p, z_p) \in \mathbb{R}^3$, a função φ_p , dada por

$$\varphi_p(t) = (x_p(t), y_p(t), z_p(t)), \quad t \in I_p \subseteq \mathbb{R},$$

denotará a solução do sistema (2.3) com condição inicial $\varphi_p(0) = p$. A correspondente órbita será denotada por γ_p .

Tomando $p \in \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0\}$, temos que se $x_p = 0$, isto é, $p \in \Pi$, e

$$\langle e_1, A^+p \rangle > 0,$$

então a órbita γ_p intercepta transversalmente o plano Π com $x_p(t) > 0$ e $x_p(-t) < 0$, para $t > 0$ suficientemente pequeno. Continuando por γ_p , se $x_p(t) = 0$ para algum $t \in (0, +\infty)$, então definimos $\tau_p^+ > 0$ como o menor tempo que verifica $x_p(\tau_p^+) = 0$ e $x_p(t) > 0$ em $(0, \tau_p^+)$. Neste caso, definimos a semiaplicação de Poincaré \mathcal{P}^+ no ponto $(0, y_p, z_p)$ como

$$\mathcal{P}^+(0, y_p, z_p) = (0, y_p(\tau_p^+), z_p(\tau_p^+)) \in \Pi.$$

Observe que tal semiaplicação depende apenas do fluxo do sistema linear $x' = A^+x$.

Analogamente definimos a semiaplicação de Poincaré \mathcal{P}^- . Considerando um ponto $p = (x_p, y_p, z_p) \in \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0\}$, se $x_p = 0$, isto é, $p \in \Pi$, e

$$\langle e_1, A^-p \rangle < 0,$$

então a órbita γ_p intercepta transversalmente o plano Π com $x_p(t) < 0$ e $x_p(-t) > 0$, para $t > 0$ suficientemente pequeno. Continuando por γ_p , se $x_p(t) = 0$ para algum $t \in (0, +\infty)$, então definimos $\tau_p^- > 0$ como o menor tempo que verifica $x_p(\tau_p^-) = 0$ e $x_p(t) < 0$ em $(0, \tau_p^-)$. Neste caso, definimos a semiaplicação de Poincaré \mathcal{P}^- no ponto $(0, y_p, z_p)$ como

$$\mathcal{P}^-(0, y_p, z_p) = (0, y_p(\tau_p^-), z_p(\tau_p^-)) \in \Pi.$$

Veja que tal semiaplicação depende apenas do fluxo do sistema linear $x' = A^-x$. Para ilustrar, considere a Figura 2.2.

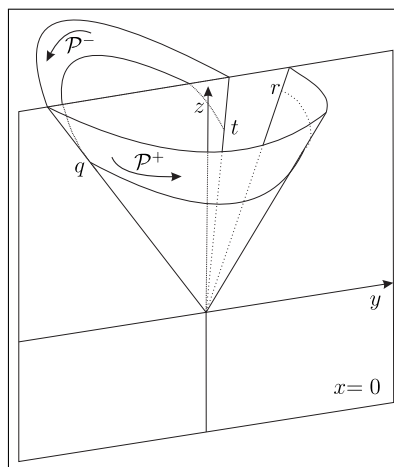


Figura 2.2: Semiaplicações de Poincaré \mathcal{P}^- e \mathcal{P}^+ associadas ao sistema (2.3).

Ressaltamos que \mathcal{P}^+ e \mathcal{P}^- estão bem definidas, porque o fluxo do sistema (2.3) só é tangente ao plano de separação no eixo z . De fato, vale esta afirmação se, e somente se, o fluxo é ortogonal ao vetor e_1 . Mas isto acontece, pois dado um ponto $p = (0, y, z) \in \Pi$, temos que

$$A^+(p) = (-y, -z, 0) = A^-(p)$$

e, daí,

$$\langle e_1, A^\pm(p) \rangle = -y,$$

o qual é zero se, e somente se, $y = 0$, donde p está sobre o eixo z .

Logo, podemos definir a aplicação de Poincaré \mathcal{P} por

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \circ \mathcal{P}^-.$$

Daqui em diante, sempre que nos referirmos à aplicação e às semiaplicações de Poincaré, consideraremos que as mesmas estão definidas no plano de separação Π .

Observe que o campo vetorial F satisfaz

$$F(\mu x) = \mu F(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e $\mu \geq 0$, porque

$$F(\mu x) = \begin{cases} A^+(\mu x), & \text{se } x_1 \geq 0, \\ A^-(\mu x), & \text{se } x_1 < 0, \end{cases} = \begin{cases} \mu(A^+x), & \text{se } x_1 \geq 0, \\ \mu(A^-x), & \text{se } x_1 < 0, \end{cases} = \mu F(x).$$

Assim, se x é uma solução do sistema (2.3), então μx , $\mu \geq 0$, também é solução.

Proposição 2.2.2. *Cada uma das aplicações \mathcal{P}^+ , \mathcal{P}^- e \mathcal{P} leva uma semirreta partindo da origem e contida no plano de separação em uma semirreta partindo da origem e também contida no plano de separação.*

Demonstração. Como o campo vetorial F do sistema (2.3) é homogêneo, isto é,

$$F(\mu x) = \mu F(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e $\mu \geq 0$, o mesmo ocorre para as aplicações \mathcal{P}^+ , \mathcal{P}^- e \mathcal{P} . Com efeito, provaremos apenas para \mathcal{P}^- , visto que as outras demonstrações são análogas.

O caso em que $\mu = 0$ é imediato. Sejam, então, $\mu > 0$ e $x \in \Pi$ tal que $x_2 > 0$. Logo, $\mu x \in \Pi$ e, em termos do fluxo do sistema $x' = A^-x$, existe um menor $\tau^- > 0$ tal que $\mathcal{P}^-(\mu x) \in \Pi$. Assim,

$$\mathcal{P}^-(\mu x) = e^{\tau^- A^-}(\mu x) = \mu e^{\tau^- A^-} x = \mu \mathcal{P}^-(x).$$

Logo, \mathcal{P}^+ , \mathcal{P}^- e \mathcal{P} transformam semirretas contidas no plano de separação e partindo da origem em semirretas contidas no plano de separação também partindo da origem. ■

2.3 Cones Invariantes

Definição 2.3.1. *Uma variedade $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ é chamada de cone se para todo $x \in \mathcal{C}$ tivermos $\mu x \in \mathcal{C}$, para todo $\mu \geq 0$.*

Definição 2.3.2. *Se existir uma semirreta em Π , partindo da origem e invariante pela aplicação de Poincaré \mathcal{P} , então o sistema (2.3) tem um cone invariante de duas zonas.*

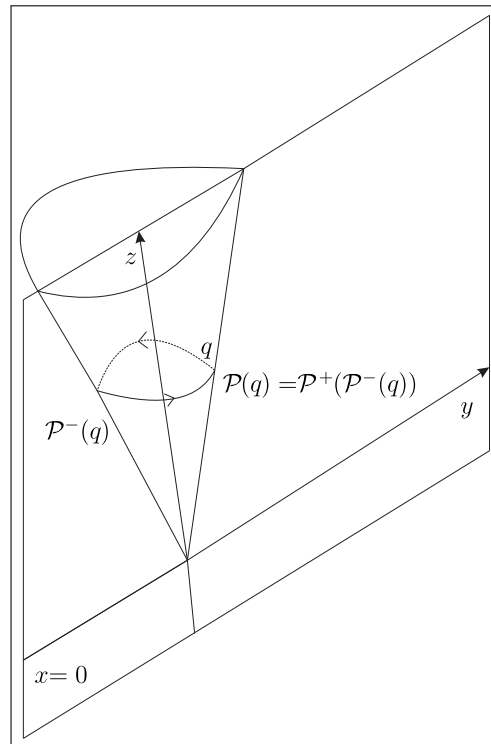


Figura 2.3: Cone invariante de duas zonas do sistema (2.3).

Em outras palavras, se a aplicação de Poincaré \mathcal{P} possui uma semirreta invariante que parte da origem, então o sistema (2.3) possui um cone invariante de duas zonas que é gerado pela transformação, mediante o fluxo do sistema, de tal semirreta.

Da **Definição 2.3.2**, vemos, então, que um plano invariante (de duas zonas e contendo a origem) para o fluxo do sistema (2.3) é um cone invariante de duas zonas.

A hipótese da existência de autovalores complexos em ambas as zonas é crucial, pois, caso contrário, as variedades invariantes lineares não possibilitariam a definição da aplicação de Poincaré no plano de separação Π e, conseqüentemente, a **Definição 2.3.2**.

Para definir o conceito de **cone invariante de uma zona**, considere r uma semirreta em \mathbb{R}^3 partindo da origem e fora do plano de separação. Suponha que exista $\bar{t} > 0$ de tal modo que a solução φ_{x_0} do sistema (2.3) com condição inicial $(0, x_0)$, sendo $x_0 \in r$, retorna à semirreta r em $t = \bar{t}$, ou seja, $\varphi_{x_0}(\bar{t}) \in r$. Veremos na Seção 3.2 que \bar{t} verifica $\varphi_{x_0}(\bar{t}) \in r$ para todo ponto $x_0 \in r$.

Definição 2.3.3. A superfície \mathcal{C} em \mathbb{R}^3 definida pelo conjunto

$$\varphi_r(\bar{t}) = \{\varphi_{x_0}(\bar{t}) : x_0 \in r\}$$

e que não intercepta transversalmente o plano de separação é chamada cone invariante de uma zona.

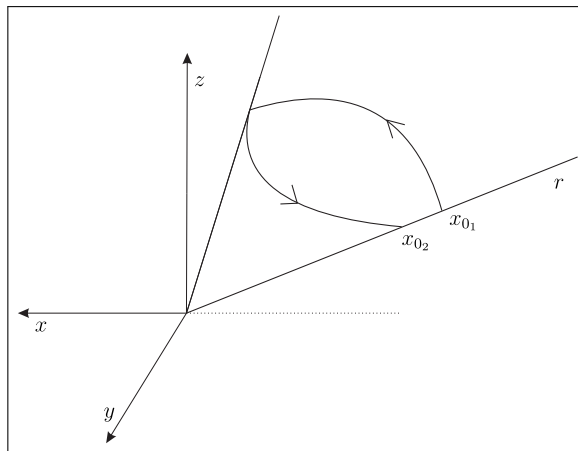


Figura 2.4: Representação de um cone invariante de uma zona. Ressaltamos a semirreta r invariante pelo fluxo na zona $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0\}$ e indicamos dois pontos $x_{0_1}, x_{0_2} \in r$.

Vamos agora caminhar para demonstrar um teorema que nos fornece condições para a existência de cones invariantes de duas zonas para o sistema (2.3). Para isto, estudaremos tal sistema projetado em \mathbb{S}^2 .

Dado $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, considerando a mudança de variáveis

$$u = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|}(x_1, x_2, x_3) =: (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{S}^2,$$

pela homogeneidade do campo vetorial F , resulta que

$$\begin{aligned} u' &= \frac{x' \|x\| - x(\|x\|)'}{\|x\|^2} \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} \left(F(x) \|x\| - x \left(\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \right)' \right) \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} \left(F(x) \|x\| - x \left(\frac{1}{2} 2 \langle x', x \rangle \frac{1}{\|x\|} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} \left(F(x) \|x\| - \frac{x}{\|x\|} \langle x', x \rangle \right) \\ &= \frac{F(x) \|x\|}{\|x\| \|x\|} - \frac{x}{\|x\|} \left\langle \frac{x'}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \\ &= F \left(\frac{x}{\|x\|} \right) - \frac{x}{\|x\|} \left\langle F \left(\frac{x}{\|x\|} \right), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \\ &= F(u) - u \langle F(u), u \rangle \\ &= F(u) - \langle F(u), u \rangle u, \end{aligned}$$

isto é,

$$u' = \begin{cases} A^+ u - \langle A^+ u, u \rangle u, & \text{se } u_1 \geq 0, \\ A^- u - \langle A^- u, u \rangle u, & \text{se } u_1 < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

O sistema (2.4) será chamado aqui de **sistema projetado** e o mesmo pode ser pensado como a projeção central das órbitas do sistema (2.3) sobre \mathbb{S}^2 .

A projeção sobre \mathbb{S}^2 de uma solução não nula x do sistema (2.3) é uma órbita u do sistema projetado (2.4). Reciprocamente, toda órbita do sistema projetado (2.4) se corresponde com um conjunto de órbitas do sistema (2.3).

Note que o campo vetorial associado ao sistema (2.4) é, de fato, tangente à \mathbb{S}^2 , já que

$$\langle u', u \rangle = \langle F(u) - \langle F(u), u \rangle u, u \rangle = \langle F(u), u \rangle - \langle F(u), u \rangle \langle u, u \rangle = 0,$$

porque $\|u\| = 1$.

Observe também que a projeção das órbitas do sistema (2.3) sobre \mathbb{S}^2 não nos fornece informações sobre a evolução das órbitas de tal sistema. Entretanto, considerando a variável adicional

$$r = \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

temos que, ao deslocar sobre uma órbita do sistema (2.3), r indicará se tal órbita se aproxima, se afasta ou se permanece a uma distância fixa da origem.

Para $x \neq 0$, derivando, obtemos

$$r' = \langle x', x \rangle \frac{1}{\|x\|} = \langle F(x), x \rangle \frac{1}{\|x\|} \frac{\|x\|}{\|x\|} = \left\langle \frac{F(x)}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \|x\| = \langle F(u), u \rangle r,$$

isto é,

$$r' = \langle F(u), u \rangle r, \quad u \in \mathbb{S}^2,$$

o qual, juntamente a (2.4), define o sistema

$$\begin{cases} u' = F(u) - \langle F(u), u \rangle u, & u \in \mathbb{S}^2, \\ r' = \langle F(u), u \rangle r, & r \geq 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

que é então, por sua vez, equivalente ao sistema (2.3).

Como a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ x &\longmapsto \pi(x) = \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

é a projeção radial, segue que existe uma correspondência biunívoca entre semirretas partindo da origem e pontos em \mathbb{S}^2 .

Sabemos que o sistema (2.3) possui um cone invariante de duas zonas se existir uma semirreta partindo da origem que é invariante pela aplicação de Poincaré \mathcal{P} . Então, se existe um cone invariante de duas zonas para o sistema (2.3), pela projeção radial existe uma órbita periódica de duas zonas em \mathbb{S}^2 para o sistema (2.4). Reciprocamente, se existe

uma órbita periódica de duas zonas em \mathbb{S}^2 para o sistema (2.4), pela homogeneidade do campo vetorial F , existe um cone invariante de duas zonas para o sistema (2.3). Logo, concluímos a existência de uma correspondência biunívoca entre cones invariantes de duas zonas do sistema (2.3) e órbitas periódicas de duas zonas do sistema projetado (2.4).

Assim, destas considerações, a procura de cones invariantes de duas zonas para o sistema (2.3) pode ser transferida para a procura de órbitas periódicas de duas zonas do sistema cúbico por partes contínuo (2.4).

Exemplo 2.3.1. *Considere o sistema (2.3) definido pelas matrizes*

$$A^+ = \begin{pmatrix} -0.18 & -1 & 0 \\ 1.0096 & 0 & -1 \\ -0.10016 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^- = \begin{pmatrix} -0.62 & -1 & 0 \\ 0.9456 & 0 & -1 \\ -0.70112 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A^+ são $\lambda^+ = -0.1$ e $\alpha^+ \pm i\beta^+ = -0.04 \pm i$ e os autovalores de A^- são $\lambda^- = -0.7$ e $\alpha^- \pm i\beta^- = 0.04 \pm i$. Sugerimos que o leitor, utilizando o item (a) do Teorema 4.1.1, verifique que este sistema possui um único cone invariante de duas zonas. Nas Figuras 2.5 e 2.6, apresentamos, sob dois ângulos (para uma melhor visualização), uma parte deste cone invariante de duas zonas (em verde) interceptando o plano de separação (em rosa).

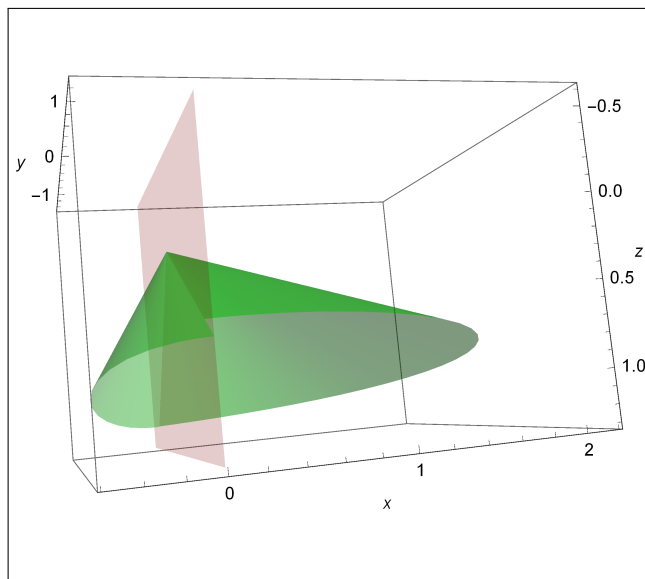


Figura 2.5: Cone invariante de duas zonas (em verde) interceptando Π (em rosa).

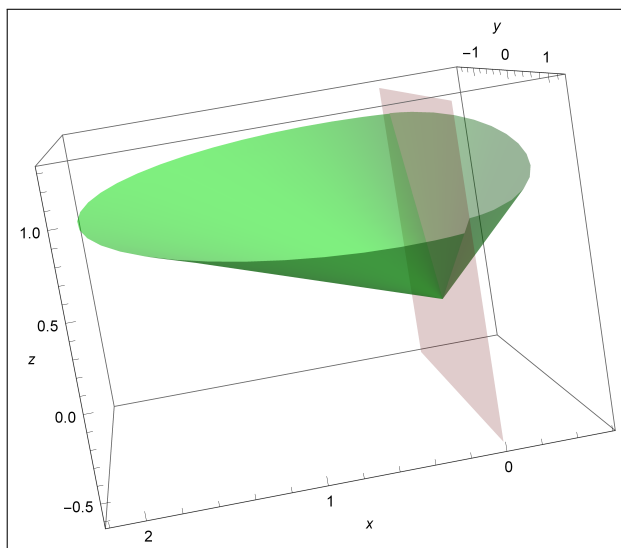


Figura 2.6: Figura 2.5 por um segundo ângulo.

Na Figura 2.7, apresentamos parte do cone invariante de duas zonas em questão interceptando a esfera unitária em \mathbb{R}^3 e o plano de separação Π .

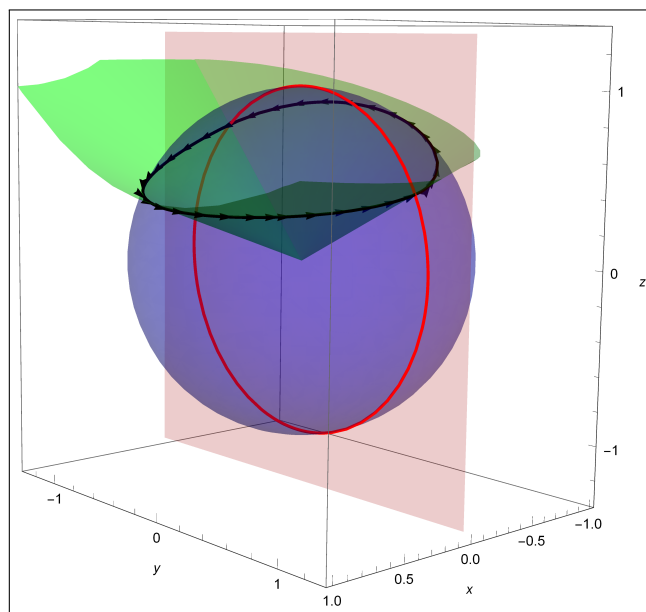


Figura 2.7: Intersecção do cone invariante do Exemplo 2.3.1 com \mathbb{S}^2 . A curva em vermelho é a intersecção de \mathbb{S}^2 (em azul) com o plano de separação (em rosa), a superfície em verde é parte do cone invariante de duas zonas e a curva em preto é a órbita periódica de duas zonas em \mathbb{S}^2 resultante da existência do cone invariante de duas zonas.

Veremos agora um resultado que relaciona soluções dos sistemas (2.3) e (2.4).

Proposição 2.3.1. *Se o sistema projetado (2.4) tem uma solução y que é ω -periódica, então o sistema (2.3) tem uma solução x , definida por*

$$x(t) = y(t) \exp \left(\int_0^t \langle F(y(s)), y(s) \rangle ds \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

sendo $s \mapsto \langle F(y(s)), y(s) \rangle$ ω -periódica. Reciprocamente, se x é solução ω -periódica do sistema (2.3), com $x(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y(t) = \frac{x(t)}{\|x(t)\|} \end{aligned}$$

é solução ω -periódica do sistema (2.4).

Demonstração. Que $s \mapsto \langle F(y(s)), y(s) \rangle$ é ω -periódica é imediato, visto que y o é, ou seja,

$$\langle F(y(s + \omega)), y(s + \omega) \rangle = \langle F(y(s)), y(s) \rangle, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Vamos mostrar que x , definida por

$$x(t) = y(t) \exp \left(\int_0^t \langle F(y(s)), y(s) \rangle ds \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

é solução do sistema (2.3), sendo y solução do sistema (2.4). De fato, pelo *Teorema Fundamental do Cálculo*,

$$\begin{aligned} x'(t) &= y'(t) \exp \left(\int_0^t \langle F(y(s)), y(s) \rangle ds \right) + x(t) \langle F(y(t)), y(t) \rangle \\ &= (F(y(t)) - \langle F(y(t)), y(t) \rangle y(t)) \exp \left(\int_0^t \langle F(y(s)), y(s) \rangle ds \right) + x(t) \langle F(y(t)), y(t) \rangle \\ &= F(y(t)) \exp \left(\int_0^t \langle F(y(s)), y(s) \rangle ds \right) - \langle F(y(t)), y(t) \rangle x(t) + x(t) \langle F(y(t)), y(t) \rangle \\ &= F \left(y(t) \exp \left(\int_0^t \langle F(y(s)), y(s) \rangle ds \right) \right) \\ &= F(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

em virtude da homogeneidade do campo vetorial F , como queríamos provar.

Por outro lado, sendo x solução ω -periódica, então claramente y será ω -periódica. Vamos mostrar que y , dada por

$$y(t) = \frac{x(t)}{\|x(t)\|}, \quad t \in \mathbb{R},$$

com $x(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, é solução do sistema (2.4), sendo x solução do sistema (2.3). Com efeito, como

$$\|x(t)\|' = \frac{\langle x'(t), x(t) \rangle}{\|x(t)\|},$$

vem que

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{x'(t)\|x(t)\| - x(t)\frac{\langle x'(t), x(t) \rangle}{\|x(t)\|}}{\|x(t)\|^2} \\ &= \frac{x'(t)}{\|x(t)\|} - \frac{x(t)}{\|x(t)\|^2} \frac{\langle x'(t), x(t) \rangle}{\|x(t)\|} \\ &= \frac{F(x(t))}{\|x(t)\|} - \frac{x(t)}{\|x(t)\|} \left\langle \frac{F(x(t))}{\|x(t)\|}, \frac{x(t)}{\|x(t)\|} \right\rangle \\ &= F\left(\frac{x(t)}{\|x(t)\|}\right) - \frac{x(t)}{\|x(t)\|} \left\langle F\left(\frac{x(t)}{\|x(t)\|}\right), \frac{x(t)}{\|x(t)\|} \right\rangle \\ &= F(y(t)) - y(t) \langle F(y(t)), y(t) \rangle, \end{aligned}$$

como esperado. ■

Desde que o sistema (2.3) restrito ou à região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0\}$ ou à região $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0\}$ é linear, estudaremos inicialmente o sistema

$$u' = Au - \langle Au, u \rangle u, \quad u \in \mathbb{S}^2, \quad (2.6)$$

associado ao sistema linear $x' = Ax$.

A próxima proposição fornece os autovalores da parte linear do campo de vetores associado com o sistema (2.6) e calculada nos pontos de equilíbrio, os quais também são dados.

Proposição 2.3.2. *Um ponto $\bar{u} \in \mathbb{S}^2$ é ponto de equilíbrio do sistema (2.6) se, e somente se, \bar{u} é autovetor de A associado a um autovalor real. Adicionalmente, se λ_1, λ_2 e λ_3*

são autovalores de A , com $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ possuindo $\bar{u} \in \mathbb{S}^2$ como respectivo autovetor, isto é, $A\bar{u} = \lambda_1\bar{u}$, então os autovalores da parte linear do campo de vetores associado com o sistema (2.6) e calculada no ponto de equilíbrio \bar{u} são

$$\mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1, \quad \mu_3 = \lambda_3 - \lambda_1.$$

Demonstração. Suponha inicialmente que $\bar{u} \in \mathbb{S}^2$ é ponto de equilíbrio do sistema (2.6). Então,

$$A\bar{u} - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle \bar{u} = 0,$$

isto é,

$$A\bar{u} = \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle \bar{u},$$

onde \bar{u} é autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, se $\bar{u} \in \mathbb{S}^2$ é autovetor de A associado a um autovalor real λ , então \bar{u} é ponto de equilíbrio do sistema (2.6), pois,

$$A\bar{u} - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle \bar{u} = \lambda\bar{u} - \langle \lambda\bar{u}, \bar{u} \rangle \bar{u} = \lambda\bar{u} - \lambda\bar{u} = 0,$$

e a primeira parte está provada.

Vamos provar agora a segunda parte. Para estabelecermos os autovalores da parte linear do campo de vetores associado com o sistema (2.6) e calculada no ponto de equilíbrio \bar{u} , estenderemos tal sistema para o seguinte sistema em \mathbb{R}^3

$$x' = G(x) = Ax - \langle Ax, x \rangle x, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.7)$$

Note que se $\bar{u} \in \mathbb{S}^2$ é ponto de equilíbrio do sistema (2.6), então \bar{u} é ponto de equilíbrio do sistema (2.7), isto é, dentre os pontos de equilíbrio do sistema (2.7) estão os pontos de equilíbrio do sistema (2.6). Desta forma, a parte linear do campo de vetores associado com o sistema (2.6) e calculada no ponto de equilíbrio \bar{u} será a parte linear do campo de vetores associado com o sistema (2.7) e calculada no ponto de equilíbrio \bar{u} , a qual é dada pelo sistema

$$x' = DG(\bar{u})x. \quad (2.8)$$

Observe que

$$\begin{aligned}
DG(\bar{u})x &= \left. \frac{\partial}{\partial t} G(\bar{u} + tx) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial t} (A(\bar{u} + tx) - \langle A(\bar{u} + tx), \bar{u} + tx \rangle (\bar{u} + tx)) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial t} (A\bar{u} + Atx - (\langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle + \langle A\bar{u}, tx \rangle + \langle Atx, \bar{u} \rangle + \langle Atx, tx \rangle)(\bar{u} + tx)) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial t} (A\bar{u} + Atx - (\langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle + t \langle A\bar{u}, x \rangle + t \langle Ax, \bar{u} \rangle + t^2 \langle Ax, x \rangle)(\bar{u} + tx)) \right|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$DG(\bar{u})x = \left. \frac{\partial}{\partial t} G(\bar{u} + tx) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} (A\bar{u} + Atx - M(t)\bar{u} - tM(t)x) \right|_{t=0}, \quad (2.9)$$

com

$$\begin{aligned}
M(t) &= \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle + t \langle A\bar{u}, x \rangle + t \langle Ax, \bar{u} \rangle + t^2 \langle Ax, x \rangle \\
&= \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle + t(\langle A\bar{u}, x \rangle + \langle Ax, \bar{u} \rangle) + t^2 \langle Ax, x \rangle \\
&= \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle + t \langle (A + A^T)\bar{u}, x \rangle + t^2 \langle Ax, x \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, em (2.9),

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} G(\bar{u} + tx) \right|_{t=0} = Ax - M'(t)\bar{u} - M(t)x - tM'(t)x \Big|_{t=0} = Ax - M'(0)\bar{u} - M(0)x.$$

Como

$$M'(t) = \langle (A + A^T)\bar{u}, x \rangle + 2t \langle Ax, x \rangle,$$

segue que

$$M(0) = \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle, \quad M'(0) = \langle (A + A^T)\bar{u}, x \rangle$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
DG(\bar{u})x &= \left. \frac{\partial}{\partial t} G(\bar{u} + tx) \right|_{t=0} \\
&= Ax - \langle (A + A^T)\bar{u}, x \rangle \bar{u} - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle x \\
&= Ax - \bar{u} \langle \bar{u}, (A + A^T)x \rangle - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle x \\
&= Ax - \bar{u} \langle (A + A^T)x, \bar{u} \rangle - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle x \\
&= Ax - L(\bar{u})(A + A^T)x - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle x \\
&= (A - L(\bar{u})(A + A^T) - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle \mathcal{I})x,
\end{aligned}$$

sendo L a aplicação

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto L(x) = xx^T. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Então, em (2.8), temos

$$x' = DG(\bar{u})x = (A - L(\bar{u})(A + A^T) - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle \mathcal{I})x.$$

Vamos, então, calcular os autovalores da matriz

$$DG(\bar{u}) = A - L(\bar{u})(A + A^T) - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle \mathcal{I}.$$

Sendo λ_1, λ_2 e λ_3 autovalores de A com $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $\bar{u} \in \mathbb{S}^2$ o respectivo autovetor, $\bar{u} \neq e_1$, conforme o **Teorema 2.1.1**, existe uma matriz de Householder H (ver **Definição 2.1.1** e **Proposição 2.1.2**) tal que

$$H\bar{u} = e_1.$$

Portanto, como vimos anteriormente, a matriz

$$B = HAH^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & B_{12} \\ \hline O_{21} & B_{22} \end{array} \right)$$

possui os mesmos autovalores que a matriz A , sendo O_{21} a matriz nula de ordem 2×1 , $B_{12} \in \mathcal{M}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$ e B_{22} uma matriz de ordem 2 que possui os autovalores λ_2 e λ_3 .

Tendo em vista que H é matriz de Householder,

$$\begin{aligned} DG(\bar{u}) &= A - L(\bar{u})(A + A^T) - \langle A\bar{u}, \bar{u} \rangle \mathcal{I} \\ &= H^{-1}BH - (H^{-1}e_1)(H^{-1}e_1)^T[H^{-1}BH + (H^{-1}BH)^T] - \langle \lambda_1\bar{u}, \bar{u} \rangle \mathcal{I} \\ &= H^{-1}BH - H^{-1}L(e_1)(H^{-1})^T[H^{-1}BH + H^T B^T (H^{-1})^T] - \lambda_1 \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \mathcal{I} \\ &= H^{-1}[BH - L(e_1)(BH + B^T H)] - \lambda_1 H^{-1}H \\ &= H^{-1}[B - L(e_1)(B + B^T) - \lambda_1 \mathcal{I}]H \\ &= H^{-1}NH, \end{aligned}$$

donde vemos que os autovalores de $DG(\bar{u})$ são os autovalores de N , já que tais matrizes são similares.

Note que

$$\begin{aligned}
N &= B - L(e_1)(B + B^T) - \lambda_1 \mathcal{I} \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & B_{12} \\ \hline O_{21} & B_{22} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c|c} 1 & O_{12} \\ \hline O_{21} & O_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 2\lambda_1 & B_{12} \\ \hline B_{12}^T & 2B_{22} \end{array} \right) - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & B_{12} \\ \hline O_{21} & B_{22} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c|c} 2\lambda_1 & B_{12} \\ \hline O_{21} & O_{22} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & O_{12} \\ \hline O_{21} & \lambda_1 \mathcal{I} \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} -2\lambda_1 & O_{12} \\ \hline O_{21} & B_{22} - \lambda_1 \mathcal{I} \end{array} \right),
\end{aligned}$$

a qual claramente possui os autovalores

$$\mu_1 = -2\lambda_1, \quad \mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1, \quad \mu_3 = \lambda_3 - \lambda_1.$$

Assim, os autovalores de $DG(\bar{u})$ são μ_1, μ_2 e μ_3 , com $\mu_1 \in \mathbb{R}$ e $\mu_2, \mu_3 \in \mathbb{C}$.

Consideremos o plano tangente à \mathbb{S}^2 em \bar{u} , a saber,

$$T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \perp \bar{u}\}.$$

Afirmamos que $T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2$ é invariante para o sistema (2.8). Com efeito, dada uma condição inicial $x \in T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2$, temos que o fluxo por x permanece em $T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$ se

$$\langle \exp(tDG(\bar{u}))x, \bar{u} \rangle = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vamos mostrar isto. Como $DG(\bar{u}) = HNH$, então

$$\exp(tDG(\bar{u})) = He^{tN}H$$

e, daí, visto que $H\bar{u} = e_1$,

$$\langle \exp(tDG(\bar{u}))x, \bar{u} \rangle = \langle He^{tN}Hx, \bar{u} \rangle = \langle e^{tN}Hx, e_1 \rangle. \quad (2.11)$$

Sendo

$$H = \mathcal{I} - \frac{2(\bar{u} - e_1)^T(\bar{u} - e_1)}{\|\bar{u} - e_1\|^2},$$

temos que H é matriz de Householder e

$$\begin{aligned}
Hx &= x - \frac{2(\bar{u} - e_1)^T(\bar{u} - e_1)}{\|\bar{u} - e_1\|^2}x \\
&= x - 2\langle x, \bar{u} - e_1 \rangle \frac{\bar{u} - e_1}{\|\bar{u} - e_1\|^2} \\
&= x - 2(\langle x, \bar{u} \rangle - \langle x, e_1 \rangle) \frac{\bar{u} - e_1}{\|\bar{u} - e_1\|^2} \\
&= x + 2\langle x, e_1 \rangle \frac{\bar{u} - e_1}{\|\bar{u} - e_1\|^2}.
\end{aligned}$$

Assim, em (2.11),

$$\begin{aligned}
\langle \exp(tDG(\bar{u}))x, \bar{u} \rangle &= \langle e^{tN}Hx, e_1 \rangle \\
&= \left\langle e^{tN} \left(x + 2\langle x, e_1 \rangle \frac{\bar{u} - e_1}{\|\bar{u} - e_1\|^2} \right), e_1 \right\rangle \\
&= \langle e^{tN}x, e_1 \rangle + 2\frac{\langle x, e_1 \rangle}{\|\bar{u} - e_1\|^2} \langle e^{tN}(\bar{u} - e_1), e_1 \rangle \\
&= e^{-2\lambda_1 t}x_1 + \frac{2x_1}{1 - 2u_1 + 1} (\langle e^{tN}\bar{u}, e_1 \rangle - \langle e^{tN}e_1, e_1 \rangle) \\
&= e^{-2\lambda_1 t}x_1 + \frac{x_1}{1 - u_1} (e^{-2\lambda_1 t}u_1 - e^{-2\lambda_1 t}) \\
&= e^{-2\lambda_1 t}x_1 - \frac{e^{-2\lambda_1 t}x_1}{1 - u_1} (1 - u_1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como podemos escrever

$$\mathbb{R}^3 = T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2 \oplus E_{\bar{u}},$$

sendo $E_{\bar{u}} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha\bar{u}, \alpha \in \mathbb{R}\}$, então, dado $x \in \mathbb{R}^3$, escrevemos $x = w + z$, com $w \in T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2$ e $z \in E_{\bar{u}}$. Logo,

$$\begin{aligned}
DG(\bar{u}) : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
x &\longmapsto DG(\bar{u})x = DG(\bar{u})w + DG(\bar{u})z.
\end{aligned}$$

Para analisar $DG(\bar{u})|_{T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2}$, observamos que

$$\begin{aligned}
 DG(\bar{u}) \Big|_{T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2} &: T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2 \longrightarrow T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2 \\
 w &\longmapsto DG(\bar{u}) \Big|_{T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2} w = DG(\bar{u})x - DG(\bar{u})z.
 \end{aligned}$$

Como $DG(\bar{u}) = HNH$, com

$$N = \left(\begin{array}{c|c} -2\lambda_1 & O_{12} \\ \hline O_{21} & B_{22} - \lambda_1\mathcal{I} \end{array} \right),$$

segue que

$$DG(\bar{u}) \Big|_{T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2} w = HNHx - HNHx = HNHw.$$

Pela definição de N , vemos claramente que

$$Ne_1 = -2\lambda_1 e_1$$

e, como H é matriz de Householder que verifica $H\bar{u} = e_1$, temos da equação acima que

$$NH\bar{u} = -2\lambda_1 H\bar{u} = H(-2\lambda_1\bar{u}).$$

Tomando H^{-1} , obtemos

$$HNH\bar{u} = -2\lambda_1\bar{u},$$

ou seja, $\mu_1 = -2\lambda_1$ é autovalor de HNH associado ao autovetor $\bar{u} \in \mathbb{S}^2$.

Assim, os autovalores da aplicação linear $DG(\bar{u})|_{T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2}$ são os autovalores do bloco $B_{22} - \lambda_1\mathcal{I}$, a saber,

$$\mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1, \quad \mu_3 = \lambda_3 - \lambda_1$$

e a demonstração está completa, visto que \mathbb{S}^2 é invariante para o sistema (2.7) e $T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2$ é invariante para o sistema (2.8). ■

Agora, a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema (2.6) pode ser caracterizada.

Corolário 2.3.1. *Se λ_1, λ_2 e λ_3 são autovalores de A e $\bar{u} \in \mathbb{S}^2$ é um autovetor de A associado com o autovalor $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, então \bar{u} é um ponto de equilíbrio do sistema (2.6) que é assintoticamente estável se as partes reais de*

$$\mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1, \quad \mu_3 = \lambda_3 - \lambda_1$$

são negativas, e instável se a parte real de μ_2 ou a parte real de μ_3 é positiva.

Demonstração. Que $\bar{u} \in \mathbb{S}^2$ é ponto de equilíbrio, decorre da primeira parte da **Proposição 2.3.2**. Agora, resulta da segunda parte desta mesma proposição que μ_2 e μ_3 são autovalores da parte linear do campo de vetores associado com o sistema (2.6) e calculada no ponto de equilíbrio \bar{u} . Sobre a estabilidade, é imediato, pois, sendo $\operatorname{Re}(\mu_2) \neq 0$ e $\operatorname{Re}(\mu_3) \neq 0$, vemos que o sistema $x' = DG(\bar{u})x$ restrito à $T_{\bar{u}}\mathbb{S}^2$ é hiperbólico e, portanto, podemos aplicar o *Teorema de Hartman-Grobman*. ■

Provaremos agora que os pontos de equilíbrio do sistema (2.6) são do tipo centro quando os autovalores da matriz A são da forma λ e $\lambda \pm i\beta$, com $\beta > 0$, ou seja, quando os três autovalores da matriz A tiverem as mesmas partes reais.

Proposição 2.3.3. *Suponha que os autovalores da matriz A são λ e $\alpha \pm i\beta$, sendo $\beta > 0$. Então, toda solução do sistema (2.6) é periódica se, e somente se, $\alpha = \lambda$.*

Demonstração. Como por hipótese os autovalores da matriz A são λ e $\alpha \pm i\beta$, com $\beta > 0$, existe uma matriz não singular P que reduz a matriz A à sua *forma canônica de Jordan* J , isto é,

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definindo

$$v = \frac{Pu}{\|Pu\|}, \quad u \in \mathbb{S}^2,$$

segue que

$$\begin{aligned} v' &= \frac{Pu' \langle Pu, Pu \rangle^{1/2} - Pu \frac{\langle Pu, Pu' \rangle}{\langle Pu, Pu \rangle^{1/2}}}{\langle Pu, Pu \rangle} \\ &= \frac{\langle Pu, Pu \rangle Pu' - \langle Pu, Pu' \rangle Pu}{\langle Pu, Pu \rangle^{3/2}} \\ &= \frac{\langle Pu, Pu \rangle P(Au - \langle Au, u \rangle u) - \langle Pu, P(Au - \langle Au, u \rangle u) \rangle Pu}{\|Pu\|^3} \\ &= \frac{\langle Pu, Pu \rangle PAu - \langle Au, u \rangle \langle Pu, Pu \rangle Pu - (\langle Pu, PAu \rangle Pu - \langle Au, u \rangle \langle Pu, Pu \rangle Pu)}{\|Pu\|^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\langle Pu, Pu \rangle PAu - \langle Pu, PAu \rangle Pu}{\|Pu\|^3} \\
&= \frac{PAu}{\|Pu\|} - \left\langle \frac{Pu}{\|Pu\|}, \frac{PAu}{\|Pu\|} \right\rangle \frac{Pu}{\|Pu\|}.
\end{aligned}$$

Como

$$v = \frac{Pu}{\|Pu\|},$$

então

$$\frac{u}{\|Pu\|} = P^{-1}v,$$

donde

$$\begin{aligned}
v' &= \frac{PAu}{\|Pu\|} - \left\langle \frac{Pu}{\|Pu\|}, \frac{PAu}{\|Pu\|} \right\rangle \frac{Pu}{\|Pu\|} \\
&= PAP^{-1}v - \langle PAP^{-1}v, v \rangle v \\
&= Jv - \langle Jv, v \rangle v, \quad v \in \mathbb{S}^2.
\end{aligned}$$

Resulta que

$$\begin{aligned}
v' &= Jv - \langle Jv, v \rangle v \\
&= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha v_1 + \beta v_2 \\ -\beta v_1 + \alpha v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} \alpha v_1 + \beta v_2 \\ -\beta v_1 + \alpha v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha v_1 + \beta v_2 \\ -\beta v_1 + \alpha v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix} - (\alpha v_1^2 + \beta v_2 v_1 - \beta v_1 v_2 + \alpha v_2^2 + \lambda v_3^2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha v_1 + \beta v_2 \\ -\beta v_1 + \alpha v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix} - (\alpha v_1^2 + \alpha v_2^2 + \lambda v_3^2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \alpha v_1 + \beta v_2 - \alpha v_1^3 - \alpha v_2^2 v_1 - \lambda v_3^2 v_1 \\ -\beta v_1 + \alpha v_2 - \alpha v_1^2 v_2 - \alpha v_2^3 - \lambda v_3^2 v_2 \\ \lambda v_3 - \alpha v_1^2 v_3 - \alpha v_2^2 v_3 - \lambda v_3^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta v_2 - \lambda v_3^2 v_1 + \alpha(v_1 - v_1^3 - v_2^2 v_1) \\ -\beta v_1 - \lambda v_3^2 v_2 + \alpha(v_2 - v_1^2 v_2 - v_2^3) \\ \lambda v_3 - \lambda v_3^3 - \alpha(v_1^2 v_3 + v_2^2 v_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta v_2 - \lambda v_3^2 v_1 + \alpha(1 - v_1^2 - v_2^2)v_1 \\ -\beta v_1 - \lambda v_3^2 v_2 + \alpha(1 - v_1^2 - v_2^2)v_2 \\ \lambda v_3 - \lambda v_3^3 - \alpha(v_1^2 + v_2^2)v_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como $v \in \mathbb{S}^2$, temos $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ e, daí,

$$\begin{aligned}
v' &= \begin{pmatrix} \beta v_2 - \lambda v_3^2 v_1 + \alpha v_3^2 v_1 \\ -\beta v_1 - \lambda v_3^2 v_2 + \alpha v_3^2 v_2 \\ \lambda v_3 - \lambda v_3^3 - \alpha(1 - v_3^2)v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta v_2 \\ -\beta v_1 \\ \lambda v_3 - \alpha v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda v_3^2 v_1 - \alpha v_3^2 v_1 \\ \lambda v_3^2 v_2 - \alpha v_3^2 v_2 \\ \lambda v_3^3 - \alpha v_3^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta v_2 \\ -\beta v_1 \\ \lambda v_3 - \alpha v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\lambda - \alpha)v_3^2 v_1 \\ (\lambda - \alpha)v_3^2 v_2 \\ (\lambda - \alpha)v_3^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - (\lambda - \alpha)v_3^2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \alpha \end{pmatrix} v - (\lambda - \alpha)v_3^2 v,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$v' = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \alpha \end{pmatrix} v - (\lambda - \alpha)v_3^2 v. \quad (2.12)$$

Agora, pela última equação do sistema (2.12), a saber,

$$v_3' = (\lambda - \alpha)v_3 - (\lambda - \alpha)v_3^3 = (\lambda - \alpha)v_3(1 - v_3^2), \quad (2.13)$$

decorre que toda solução do sistema (2.12) é periódica se, e somente se, $\lambda = \alpha$.

Vamos provar a última condição necessária e suficiente mencionada. Vejamos que se $\alpha = \lambda$, então as soluções de (2.13) são constantes e, daí, toda solução do sistema (2.12) é periódica. Reciprocamente, suponha que toda solução do sistema (2.12) seja periódica e mostremos que $\alpha = \lambda$.

De fato, dada uma condição inicial v_{3_0} , temos que

$$v_3(t) = e^{(\lambda-\alpha)t}v_{3_0} - (\lambda - \alpha)e^{(\lambda-\alpha)t} \int_0^t e^{-(\lambda-\alpha)s}v_3^3(s)ds$$

é solução de (2.13), pois

$$\begin{aligned} v_3'(t) &= (\lambda - \alpha)e^{(\lambda-\alpha)t}v_{3_0} - (\lambda - \alpha)^2e^{(\lambda-\alpha)t} \left[\int_0^t e^{-(\lambda-\alpha)s}v_3^3(s)ds \right] - \\ &\quad - (\lambda - \alpha)e^{(\lambda-\alpha)t}e^{-(\lambda-\alpha)t}v_3^3(t) \\ &= (\lambda - \alpha) \left[e^{(\lambda-\alpha)t}v_{3_0} - (\lambda - \alpha)e^{(\lambda-\alpha)t} \int_0^t e^{-(\lambda-\alpha)s}v_3^3(s)ds \right] - (\lambda - \alpha)v_3^3(t) \\ &= (\lambda - \alpha)v_3(t) - (\lambda - \alpha)v_3^3(t). \end{aligned}$$

Logo, pela hipótese, esta solução é periódica, digamos de período $\tau > 0$. Então, em particular,

$$v_{3_0} = v_3(\tau) = e^{(\lambda-\alpha)\tau}v_{3_0} - (\lambda - \alpha)e^{(\lambda-\alpha)\tau} \int_0^\tau e^{-(\lambda-\alpha)s}v_3^3(s)ds$$

o que fornece $\alpha = \lambda$.

Portanto, toda solução do sistema (2.12) é periódica se, e somente se, $\alpha = \lambda$ e, como os sistemas (2.12) e (2.6) são equivalentes, segue o resultado. ■

Veremos agora que os pontos de equilíbrio do sistema (2.4) podem ser obtidos da **Proposição 2.3.2**.

Proposição 2.3.4. *O ponto $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \in \mathbb{S}^2$ é um ponto de equilíbrio do sistema (2.4) se uma das seguintes condições é verdadeira:*

- (a) \bar{u} é autovetor de A^+ associado a um autovalor real e $\bar{u}_1 \geq 0$;
- (b) \bar{u} é autovetor de A^- associado a um autovalor real e $\bar{u}_1 \leq 0$.

Demonstração. Basta notar que, neste caso, a matriz A da primeira parte da **Proposição 2.3.2** será ou A^+ ou A^- . ■

Definição 2.3.4. *Um sistema de controle da forma*

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu + a, \\ y = C^T x, \end{cases}$$

com $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $a, B, C \in \mathbb{R}^n$, é observável se a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} := \begin{pmatrix} C^T \\ C^T A \\ C^T A^2 \\ \vdots \\ C^T A^{n-1} \end{pmatrix}$$

tem posto completo, ou seja, $\text{Po}(\mathcal{O}) = n$.

Da **Definição 2.3.4** resulta que o sistema (2.3) é observável, pois

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ e_1^T A^- \\ e_1^T (A^-)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t^- & -1 & 0 \\ (t^-)^2 - m^- & -t^- & 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

tem posto completo. Na Seção 2.4 ficará claro do porquê de se considerar somente a matriz A^- e $C = e_1$ em (2.14).

Quando o sistema (2.3) é observável, então os pontos de equilíbrio do sistema (2.4), os quais podem ser determinados pela **Proposição 2.3.2**, verificam $\bar{u}_1 \neq 0$. Com efeito,

suponha que $\bar{u} \in \mathbb{S}^2$ seja um ponto de equilíbrio do sistema (2.4) tal que $\bar{u}_1 = 0$. Então, pela **Proposição 2.3.4**, existe $\lambda^- \in \mathbb{R}$ tal que \bar{u} é autovetor de A^- associado a λ^- , isto é,

$$A^- \bar{u} = \lambda^- \bar{u}$$

e segue que

$$e_1^T \bar{u} = 0,$$

$$e_1^T (A^-) \bar{u} = e_1^T \lambda^- \bar{u} = \lambda^- e_1^T \bar{u} = \lambda^- 0 = 0,$$

$$e_1^T (A^-)^2 \bar{u} = e_1^T A^- A^- \bar{u} = e_1^T A^- \lambda^- \bar{u} = e_1^T \lambda^- A^- \bar{u} = e_1^T \lambda^- \lambda^- \bar{u} = (\lambda^-)^2 e_1^T \bar{u} = (\lambda^-)^2 0 = 0.$$

Logo, a matriz de observabilidade do sistema (2.3) satisfaz $\mathcal{O} \bar{u} = 0 \in \mathbb{R}^3$, com $\bar{u} \neq 0 \in \mathbb{R}^3$, isto é, existe um vetor não nulo \bar{u} no núcleo de \mathcal{O} . Desta forma, \mathcal{O} não tem posto completo, o que diz que o sistema (2.3) não é observável. Provamos, assim, a contrapositiva.

Sabendo que as matrizes A^\pm têm um par de autovalores complexos conjugados, podemos deduzir do **Corolário 2.3.1** e da **Proposição 2.3.3** a estrutura topológica local destes pontos de equilíbrio, como segue.

Proposição 2.3.5. *Suponha que o sistema (2.3) é observável e as matrizes A^\pm têm autovalores λ^\pm e $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$, com $\beta^\pm > 0$. Então, o sistema (2.4) tem exatamente dois pontos de equilíbrio, a saber \bar{u}^+ e \bar{u}^- , com $\bar{u}_1^+ > 0$ e $\bar{u}_1^- < 0$. Além disto, valem as seguintes afirmações:*

- (a) *Se $\alpha^+ - \lambda^+ < 0$ (respectivamente $\alpha^- - \lambda^- < 0$), então \bar{u}^+ (respectivamente \bar{u}^-) é assintoticamente estável;*
- (b) *Se $\alpha^+ - \lambda^+ > 0$ (respectivamente $\alpha^- - \lambda^- > 0$), então \bar{u}^+ (respectivamente \bar{u}^-) é instável;*
- (c) *Se $\alpha^+ - \lambda^+ = 0$ (respectivamente $\alpha^- - \lambda^- = 0$), então \bar{u}^+ (respectivamente \bar{u}^-) é um ponto de equilíbrio do tipo centro.*

Demonstração. Decorre do **Corolário 2.3.1**, das **Proposições 2.3.3** e **2.3.4** e do fato que \bar{u}_1^\pm são não nulos. ■

Veremos agora um primeiro resultado sobre a existência de cones invariantes de duas zonas para um **SLPC** e observável em \mathbb{R}^3 .

Teorema 2.3.1. *Suponha que o sistema (2.3) é observável e as matrizes A^\pm têm autovalores λ^\pm e $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$, com $\beta^\pm > 0$. Então, tal sistema tem pelo menos um cone invariante de duas zonas quando*

$$(\alpha^+ - \lambda^+)(\alpha^- - \lambda^-) > 0.$$

Demonstração. Do Teorema de Poincaré-Bendixson em \mathbb{S}^2 , sabemos que os conjuntos α -limite e ω -limite do sistema (2.4) são ou pontos de equilíbrio, ou órbitas periódicas ou gráficos.

Pela **Proposição 2.3.5**, o sistema (2.4) tem exatamente dois pontos de equilíbrio, a saber, \bar{u}^+ e \bar{u}^- , os quais não estão no plano de separação, pois $\bar{u}_1^+ \neq 0$ e $\bar{u}_1^- \neq 0$.

Da **Proposição 2.3.2**, os autovalores da parte linear do campo de vetores associado com o sistema (2.4) e calculada nos pontos de equilíbrio \bar{u}^+ e \bar{u}^- são, respectivamente,

$$\mu_2 = \alpha^+ - \lambda^+ \pm i\beta^+, \quad \mu_3 = \alpha^- - \lambda^- \pm i\beta^-.$$

Queremos mostrar que, quando

$$\text{sign}(\alpha^+ - \lambda^+) = \text{sign}(\alpha^- - \lambda^-)$$

e ambos são não-nulos, então o sistema (2.3) tem pelo menos um cone invariante de duas zonas.

Com efeito, suponha que $\alpha^+ - \lambda^+ > 0$ e $\alpha^- - \lambda^- > 0$. Então, resulta da **Proposição 2.3.5** que \bar{u}^+ e \bar{u}^- são focos instáveis, donde o sistema (2.4) não tem gráficos. Logo, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson em \mathbb{S}^2 , os conjuntos ω -limite devem formar pelo menos uma órbita periódica de duas zonas (porque $\alpha^+ - \lambda^+ > 0$ e $\alpha^- - \lambda^- > 0$), isto é, o sistema (2.3) tem pelo menos um cone invariante de duas zonas.

Agora, se $\alpha^+ - \lambda^+ < 0$ e $\alpha^- - \lambda^- < 0$, então os pontos de equilíbrio \bar{u}^+ e \bar{u}^- são focos estáveis e, aplicando novamente o Teorema de Poincaré-Bendixson em \mathbb{S}^2 , os conjuntos α -limite devem formar pelo menos uma órbita periódica de duas zonas (porque $\alpha^+ - \lambda^+ < 0$ e $\alpha^- - \lambda^- < 0$), donde o sistema (2.3) tem pelo menos um cone invariante de duas zonas. ■

O próximo resultado aborda a estabilidade da origem quando o sistema (2.3) não tem cones invariantes.

Proposição 2.3.6. *Suponha que o sistema (2.3) é observável, não tem cones invariantes e as matrizes A^\pm têm os autovalores λ^\pm e $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$, com $\beta^\pm > 0$. Então, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se, e somente se, os dois autovalores reais λ^+ e λ^- são negativos.*

Demonstração. Como o sistema (2.3) é equivalente ao sistema (2.4), segue que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema (2.3) se, e somente se, a solução trivial da equação

$$r' = \langle F(u(\tau)), u(\tau) \rangle r, \quad r \geq 0 \quad (2.15)$$

é assintoticamente estável, para toda solução u do sistema projetado (2.4).

Como a função $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$r(t) = \exp \left(\int_0^t \langle F(u(\tau)), u(\tau) \rangle d\tau \right) r_0,$$

pelo *Teorema Fundamental do Cálculo*, é solução da equação (2.15), segue que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema (2.3) se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0,$$

isto é, se, e somente se,

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau \langle F(u(s)), u(s) \rangle ds = -\infty \quad (2.16)$$

para toda solução u do sistema projetado (2.4).

Desta equivalência, resulta que devemos provar que vale (2.16) se, e somente se, $\lambda^\pm < 0$. Com efeito, suponha inicialmente que vale (2.16) para toda solução u do sistema (2.4). Pela **Proposição 2.3.5**, o sistema (2.4) tem exatamente dois pontos de equilíbrio, a saber, \bar{u}^+ e \bar{u}^- , os quais não estão localizados no plano de separação. Pelo *Teorema de Poincaré-Bendixson em \mathbb{S}^2* , o conjunto ω -limite de uma órbita passando por um ponto regular $p \in \mathbb{S}^2$ será ou uma órbita periódica, ou um gráfico, ou um ponto de equilíbrio.

Como por hipótese o sistema (2.3) não tem cones invariantes, segue que o sistema (2.4) não tem órbitas periódicas.

No **Teorema 2.3.1** vimos que se $(\alpha^+ - \lambda^+)(\alpha^- - \lambda^-) > 0$, então o sistema (2.3) tem pelo menos um cone invariante de duas zonas. Entretanto, como o sistema (2.3), por hipótese, não tem cones invariantes, vem que

$$(\alpha^+ - \lambda^+)(\alpha^- - \lambda^-) \leq 0.$$

Como o sistema (2.4) não tem órbitas periódicas, os pontos de equilíbrio não são do tipo centro. Logo, pela **Proposição 2.3.5**, temos, então, que

$$(\alpha^+ - \lambda^+)(\alpha^- - \lambda^-) < 0$$

e, daí, decorre que

$$\text{sign}(\alpha^+ - \lambda^+) = -\text{sign}(\alpha^- - \lambda^-).$$

Assim, pela **Proposição 2.3.5**, um ponto de equilíbrio é instável e o outro é assintoticamente estável.

Dado um ponto regular $p \in \mathbb{S}^2$, temos que $\omega(p)$ será o ponto de equilíbrio que é assintoticamente estável, isto é, $\omega(p)$ não será um gráfico. Portanto, pelo *Teorema de Poincaré-Bendixson em \mathbb{S}^2* , segue que toda solução u do sistema projetado tende ou à \bar{u}^+ ou à \bar{u}^- quando $\tau \rightarrow +\infty$.

Então, se $u(\tau) \rightarrow \bar{u}^+$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \langle F(u(\tau)), u(\tau) \rangle &= \left\langle F \left(\lim_{\tau \rightarrow +\infty} u(\tau) \right), \lim_{\tau \rightarrow +\infty} u(\tau) \right\rangle \\ &= \langle F(\bar{u}^+), \bar{u}^+ \rangle \\ &= \langle A^+ \bar{u}^+, \bar{u}^+ \rangle \\ &= \langle \lambda^+ \bar{u}^+, \bar{u}^+ \rangle \\ &= \lambda^+ \langle \bar{u}^+, \bar{u}^+ \rangle \\ &= \lambda^+ \end{aligned}$$

e, analogamente, se $u(\tau) \rightarrow \bar{u}^-$, temos

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \langle F(u(\tau)), u(\tau) \rangle = \lambda^-.$$

Para concluir, afirmamos que $\lambda^+ < 0$ e $\lambda^- < 0$. De fato, por hipótese temos que vale (2.16) para toda solução u do sistema projetado (2.4). Logo, como \bar{u}^+ é ponto de equilíbrio de tal sistema, tomando a solução constante $u(s) = \bar{u}^+, s \in \mathbb{R}$, segue que

$$-\infty = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau \langle A^+ \bar{u}^+, \bar{u}^+ \rangle ds = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau \lambda^+ ds = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \lambda^+ \tau,$$

implicando que $\lambda^+ < 0$. Analogamente mostramos que $\lambda^- < 0$.

Reciprocamente, se $\lambda = \lambda^\pm < 0$, então para toda solução u do sistema (2.4), temos

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \langle F(u(\tau)), u(\tau) \rangle = \lambda < 0.$$

Vamos mostrar que vale (2.16). Com efeito, como vale o limite anterior, existe $T > 0$ tal que

$$\langle F(u(\tau)), u(\tau) \rangle < \frac{\lambda}{2}, \quad \tau \geq T.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau \langle F(u(s)), u(s) \rangle ds &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle F(u(s)), u(s) \rangle ds + \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_T^\tau \langle F(u(s)), u(s) \rangle ds \\ &< \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle F(u(s)), u(s) \rangle ds + \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_T^\tau \frac{\lambda}{2} ds \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle F(u(s)), u(s) \rangle ds + \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{2} (\tau - T). \end{aligned}$$

Como u e F são, em particular, contínuas, temos que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^T \langle F(u(s)), u(s) \rangle ds < k.$$

Então, sendo $\lambda < 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau \langle F(u(s)), u(s) \rangle ds &< k + \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{2} (\tau - T) \\ &= -\infty, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

No **Lema 2.3.1** temos uma informação sobre o comportamento assintótico das órbitas em \mathbb{S}^2 .

Lema 2.3.1. *Assuma que as matrizes do sistema (2.3) são Hurwitzianas, isto é, que $\alpha^\pm < 0$ e $\lambda^\pm < 0$. Se uma órbita γ_p do sistema projetado (2.4) se aproxima de um ponto de equilíbrio, então as órbitas do sistema (2.3), que projetadas sobre γ_p , permanecem em uma única zona e, portanto, tendem para a origem assintoticamente.*

Demonstração. Como os pontos de equilíbrio em \mathbb{S}^2 não estão sobre o plano de separação, temos, então, que quando uma órbita γ_p do sistema projetado (2.4) se aproxima de um ponto de equilíbrio, todas as órbitas do sistema (2.3), que projetadas sobre γ_p , permanecem em uma única zona, em virtude da projeção radial.

Sabemos que o sistema projetado (2.4) tem exatamente dois pontos de equilíbrio em \mathbb{S}^2 , digamos u^+ e u^- , os quais estão fora do plano de separação. Pela **Proposição 2.3.2**, os autovalores da parte linear do campo de vetores do sistema projetado (2.4) calculada em u^+ (respectivamente u^-) são $\alpha^+ - \lambda^+ \pm i\beta^+$ (respectivamente $\alpha^- - \lambda^- \pm i\beta^-$), donde, pela **Proposição 2.3.5**, os pontos de equilíbrio são do tipo foco ou do tipo centro.

Agora, se em \mathbb{S}^2 uma órbita γ_p se aproxima de um ponto de equilíbrio do sistema projetado (2.4), digamos $u^+ \in \mathbb{S}^2$, então este ponto de equilíbrio não pode ser do tipo centro, logo o mesmo é um foco atrator e, daí, pela **Proposição 2.3.5**, segue que $\alpha^+ - \lambda^+ < 0$. Esta conclusão, juntamente com a hipótese de que a matriz A^+ é Hurwitziana e com o fato de que o sistema $x' = A^+x$ é linear, implicam que as órbitas do sistema (2.3), que projetadas sobre γ_p , tendem para a origem assintoticamente. ■

2.4 Forma Canônica Observável de Liénard

Nesta seção, provaremos um resultado mencionado anteriormente, a saber, que todo **SLPC** e observável pode ser escrito, por meio de uma mudança linear de variáveis, na forma descrita em (2.3).

Considere inicialmente a seguinte definição.

Definição 2.4.1. *A equação diferencial ordinária autônoma*

$$x' = F(x),$$

com $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, define um sistema linear por partes contínuo em \mathbb{R}^n com duas zonas se existem $a_1, a_2, v \in \mathbb{R}^n$, com $v \neq 0$, $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$F(x) = \begin{cases} A_1x + a_1, & \text{se } \langle x, v \rangle + \delta \leq 0, \\ A_2x + a_2, & \text{se } \langle x, v \rangle + \delta > 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

e, se $\langle x, v \rangle + \delta = 0$,

$$A_1x + a_1 = A_2x + a_2.$$

O hiperplano $\langle x, v \rangle + \delta = 0$ é chamado de região de separação, o qual divide o espaço em duas regiões lineares.

Proposição 2.4.1. *Qualquer sistema linear por partes contínuo em \mathbb{R}^n com duas zonas pode ser escrito na forma*

$$x' = F(x) = \begin{cases} A^-x + a, & \text{se } x_1 \leq 0, \\ A^+x + a, & \text{se } x_1 > 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

com $a \in \mathbb{R}^n$ e as matrizes $A^+, A^- \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ verificando a relação

$$(A^-)_{ij} = (A^+)_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

isto é, as $n - 1$ últimas colunas das matrizes A^+ e A^- coincidem.

Demonstração. Conforme a **Definição 2.4.1**, seja $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Assim,

$$\frac{v}{\|v\|} \in \mathbb{S}^{n-1}$$

e, daí, existe uma matriz de Householder H tal que

$$H \frac{v}{\|v\|} = e_1$$

ou, equivalentemente, $Hv = (\|v\|, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Considere a mudança de variáveis

$$y = H \left(x + \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right). \quad (2.19)$$

Então, sendo $Hx = x - 2\langle x, w \rangle w$, para algum vetor unitário $w \in \mathbb{R}^n$, temos

$$y = \left(x + \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right) - 2w \left\langle x + \delta \frac{v}{\|v\|^2}, w \right\rangle$$

e, daí,

$$\begin{aligned} y' &= x' - 2w \langle x', w \rangle \\ &= F(x) - 2w \langle F(x), w \rangle \\ &= HF(x). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Sendo $\langle x, v \rangle + \delta \leq 0$, vem que $\langle x, v \rangle \leq -\delta$. Como H é de Householder, $H = H^{-1} = H^T$ e, daí, em (2.19), temos que

$$x = H(y) - \delta \frac{v}{\|v\|^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\delta &\geq \langle x, v \rangle \\ &= \left\langle H(y) - \delta \frac{v}{\|v\|^2}, v \right\rangle \\ &= \langle H(y), v \rangle - \frac{\delta}{\|v\|^2} \langle v, v \rangle \\ &= \langle H(y), v \rangle - \delta, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle H(y), v \rangle \\ &= \langle y, H(v) \rangle \\ &= \langle (y_1, y_2, \dots, y_n), (\|v\|, 0, \dots, 0) \rangle, \end{aligned}$$

donde concluímos que $y_1 \|v\| \leq 0$, o que fornece $y_1 \leq 0$, pois, por hipótese, temos que $v \neq 0$, o que implica em $\|v\| > 0$. Analogamente, se $\langle x, v \rangle + \delta > 0$, obtemos $y_1 > 0$.

Agora, para simplificar a escrita, escrevemos $A = A_{1,2}$ e $a = a_{1,2}$. Assim, dos sistemas (2.20) e (2.17), resulta que

$$\begin{aligned}
y' &= HF(x) \\
&= H(Ax + a) \\
&= (Ax + a) - 2w \langle Ax + a, w \rangle \\
&= Ax + a - 2w \langle Ax, w \rangle - 2w \langle a, w \rangle \\
&= HAx + Ha \\
&= HA \left(Hy - \delta \frac{v}{\|v\|^2} \right) + Ha \\
&= HAHy + H \left(a - A\delta \frac{v}{\|v\|^2} \right).
\end{aligned}$$

Logo, chegamos ao sistema

$$y' = \begin{cases} HA_1Hy + H \left(a_1 - A_1\delta \frac{v}{\|v\|^2} \right), & y_1 \leq 0, \\ HA_2Hy + H \left(a_2 - A_2\delta \frac{v}{\|v\|^2} \right), & y_1 > 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Como o campo vetorial é contínuo, temos que as matrizes HA_1H e HA_2H são idênticas em suas $n - 1$ últimas colunas e

$$H \left(a_1 - A_1\delta \frac{v}{\|v\|^2} \right) = H \left(a_2 - A_2\delta \frac{v}{\|v\|^2} \right).$$

Então, tomando

$$A^- = HA_1H, \quad A^+ = HA_2H, \quad a = H \left(a_{1,2} - A_{1,2}\delta \frac{v}{\|v\|^2} \right).$$

concluimos a demonstração chamando y de x . ■

Observamos que, se no sistema (2.18), fizermos $a = 0 \in \mathbb{R}^n$, obtemos seu sistema homogêneo associado

$$x' = \begin{cases} A^-x, & \text{se } x_1 \leq 0, \\ A^+x, & \text{se } x_1 > 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

o qual pode ser escrito na forma

$$x' = A^-x + B\eta(\langle x, e_1 \rangle), \quad (2.23)$$

com

$$B = (A^+ - A^-)e_1, \quad \eta(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u < 0, \\ u, & \text{se } u \geq 0. \end{cases}$$

De fato, se $x_1 \leq 0$, então $\eta(\langle x, e_1 \rangle) = \eta(x_1) = 0$ e, daí, temos que

$$x' = A^-x + B\eta(\langle x, e_1 \rangle) = A^-x.$$

Agora, se $x_1 > 0$, então $\eta(\langle x, e_1 \rangle) = \langle x, e_1 \rangle$, donde

$$x' = A^-x + (A^+ - A^-)e_1 \langle x, e_1 \rangle = A^-x + (A^+ - A^-)e_1 e_1^T x = A^+x$$

porque como vimos na proposição anterior, A^+ e A^- compartilham as $n - 1$ últimas colunas e

$$e_1 e_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, podemos escrever o sistema (2.18) na forma

$$x' = A^-x + B\eta(\langle x, e_1 \rangle) + a. \quad (2.24)$$

Conforme [5], página 612, uma observação interessante é que sistemas do tipo (2.24) para $a = 0$ são casos particulares de sistemas de controle da forma

$$\begin{cases} x' = A^-x + Bu, \\ y = e_1^T x, \end{cases} \quad (2.25)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $A^- \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$, $u = \eta(y)$ o qual é chamado **signal de controle** ou **entrada** do sistema e y é a **saída** do sistema. Reveja a **Definição 2.3.4**.

Como o posto de uma matriz é preservado após uma mudança linear (invertível) de variáveis, sendo a matriz

$$\mathcal{O} = \left(e_1 | (A^-)^T e_1 | ((A^-)^T)^2 e_1 | \cdots | ((A^-)^T)^{n-1} e_1 \right)^T$$

de tal modo que $\text{Po}(\mathcal{O}) = n$, então a matriz

$$\left(((-A^-)^T)^{n-1} e_1 | ((-A^-)^T)^{n-2} e_1 | \cdots | (-A^-)^T e_1 | e_1 \right)$$

é não singular.

Teorema 2.4.1. *Se o sistema (2.18) é observável, existe uma mudança linear de variáveis que o transforma na forma canônica generalizada de Liénard*

$$y' = \begin{cases} M^- y + a, & \text{se } y_1 \leq 0, \\ M^+ y + a, & \text{se } y_1 > 0, \end{cases} \quad (2.26)$$

com

$$M^\pm = \begin{pmatrix} \delta_1^\pm & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_2^\pm & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n-1}^\pm & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \delta_n^\pm & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

sendo $\delta_1^\pm, \delta_2^\pm, \dots, \delta_{n-1}^\pm, \delta_n^\pm \in \mathbb{R}$ os coeficientes do polinômio característico de A^\pm e $a_n \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Se o sistema (2.22) é observável, então sua matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} = \left(e_1 | (A^-)^T e_1 | ((A^-)^T)^2 e_1 | \cdots | ((A^-)^T)^{n-1} e_1 \right)^T$$

tem posto completo, donde temos a existência de um único vetor $z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$z^T \left(((-A^-)^T)^{n-1} e_1 | ((-A^-)^T)^{n-2} e_1 | \cdots | (-A^-)^T e_1 | e_1 \right) = e_1^T. \quad (2.27)$$

Assim, considerando a matriz não singular

$$P := \left((-A^-)^{n-1} z | (-A^-)^{n-2} z | \cdots | -A^- z | z \right),$$

temos que

$$\begin{aligned} A^- P &= -(-A^-) P \\ &= \left(-(-A^-)^n z | -(-A^-)^{n-1} z | -(-A^-)^{n-2} z | \cdots | -(-A^-)^2 z | -(-A^-) z \right). \end{aligned}$$

Pelo *Teorema de Cayley-Hamilton*, considerando

$$p_{A^-}(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \delta_1^- \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} \delta_2^- \lambda^{n-2} + \cdots + (-1) \delta_{n-1}^- \lambda + \delta_n^-,$$

o polinômio característico de A^- , temos que A^- satisfaz $p_{A^-}(A^-) = 0$ e, daí,

$$-(-A^-)^n z = \left(\delta_1^- (-A^-)^{n-1} + \delta_2^- (-A^-)^{n-2} + \cdots + \delta_{n-1}^- (-A^-) + \delta_n^- \mathcal{I} \right) z.$$

Logo, A^-P será da forma

$$((-A^-)^{n-1}\delta_1^-z + \dots + (-A^-)\delta_{n-1}^-z + \delta_n^-z | -(-A^-)^{n-1}z | \dots | -(-A^-)^2z | -(-A^-z)),$$

o que é equivalente ao produto

$$((-A^-)^{n-1}z | (-A^-)^{n-2}z | \dots | -A^-z | z) \begin{pmatrix} \delta_1^- & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_2^- & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n-1}^- & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \delta_n^- & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

sendo este último igual a PM^- . Portanto, temos que $PM^- = A^-P$ ou, equivalentemente,

$$P^{-1}A^-P = M^-.$$

Da equação (2.27), vemos que

$$z^T ((-A^-)^T)^{n-1} e_1 = 1, \quad z^T ((-A^-)^T)^{n-j} e_1 = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Então,

$$e_1^T (-A^-)^{n-1} z = (z^T ((-A^-)^T)^{n-1} e_1)^T = 1$$

e

$$e_1^T (-A^-)^{n-j} z = (z^T ((-A^-)^T)^{n-j} e_1)^T = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

ou seja,

$$e_1^T ((-A^-)^{n-1}z | (-A^-)^{n-2}z | \dots | -A^-z | z) = (1, 0, \dots, 0) = e_1^T,$$

isto é,

$$e_1^T P = e_1^T. \tag{2.28}$$

Agora, escrevendo o sistema (2.18) na forma (2.24) e realizando a mudança de variáveis $X = P^{-1}x$, obtemos

$$\begin{aligned}
X' &= P^{-1}x' \\
&= P^{-1}(A^-x + b\eta(\langle x, e_1 \rangle) + a) \\
&= P^{-1}(A^-PX + b\eta(\langle x, e_1 \rangle) + a) \\
&= P^{-1}A^-PX + P^{-1}b\eta(\langle x, e_1 \rangle) + P^{-1}a \\
&= M^-X + \tilde{b}\eta(\langle x, e_1 \rangle) + \tilde{a},
\end{aligned}$$

com $M^- = P^{-1}A^-P$, $\tilde{b} = P^{-1}b$ e $\tilde{a} = P^{-1}a := (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Fazendo a mudança

$$\begin{aligned}
y &= X - E\tilde{a} \\
&= X - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= X - (0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}),
\end{aligned}$$

temos

$$M^-E\tilde{a} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_{n-1}, 0).$$

Utilizando esta última equação e também a equação (2.28), chegamos a

$$\begin{aligned}
y' &= X' \\
&= M^-X + \tilde{b}\eta(\langle x, e_1 \rangle) + \tilde{a} \\
&= M^-y + M^-E\tilde{a} + \tilde{b}\eta(\langle Py + PE\tilde{a}, e_1 \rangle) + \tilde{a} \\
&= M^-y + \tilde{b}\eta(\langle Py, e_1 \rangle) + M^-E\tilde{a} + \tilde{a} \\
&= M^-y + \tilde{b}\eta(\langle y, e_1 \rangle) + a,
\end{aligned}$$

com $a = (0, 0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, expressão que coincide com (2.26), lembrando que o sistema (2.24) é equivalente ao sistema (2.18). Sobre os cálculos acima, vale ressaltar que

$$\langle PE\tilde{a}, e_1 \rangle = e_1^T PE\tilde{a} = e_1^T E\tilde{a} = \langle E\tilde{a}, e_1 \rangle = 0, \quad \langle Py, e_1 \rangle = e_1^T Py = e_1^T y = \langle y, e_1 \rangle.$$

■

Capítulo 3

Aplicação de Poincaré

Neste capítulo estudaremos as aplicações de transição (chamadas aqui de semiaplicações de Poincaré) \mathcal{P}^- e \mathcal{P}^+ em uma forma paramétrica. Desde que o fluxo do sistema (2.3) é formado pela composição de dois fluxos lineares, estudaremos cada semiaplicação de Poincaré separadamente como um primeiro passo para calcular a aplicação de Poincaré $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \circ \mathcal{P}^-$.

3.1 Função Auxiliar

Para descrevermos as semiaplicações de Poincaré \mathcal{P}^- e \mathcal{P}^+ , apresentadas no capítulo anterior, utilizaremos a função auxiliar

$$\varphi_\gamma(\tau) = 1 - e^{\gamma\tau}(\cos \tau - \gamma \operatorname{sen} \tau), \quad \gamma, \tau \in \mathbb{R},$$

a qual, conforme consta em [6], foi introduzida na literatura por Andronov e colaboradores em [2], para estudar sistemas planares lineares por partes. Veja na Figura 3.1 os gráficos das funções φ_γ e $\varphi_{-\gamma}$, para $\gamma = 0.2$.

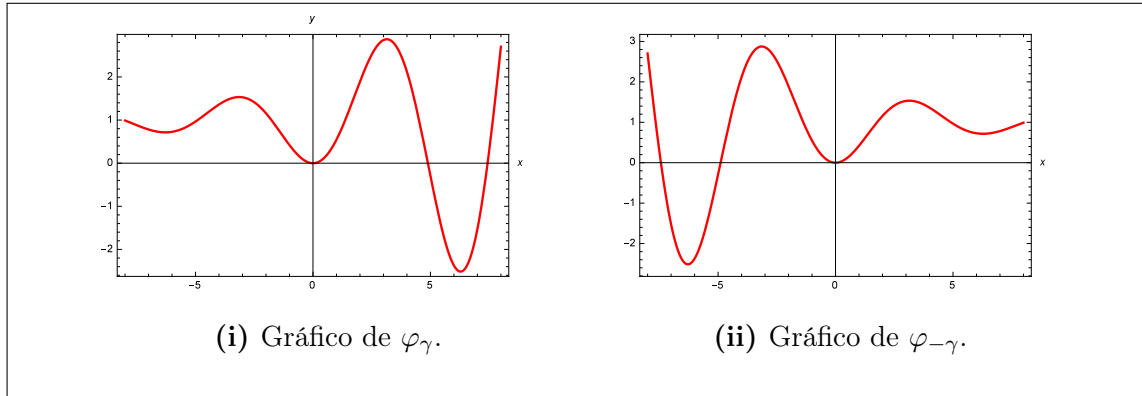


Figura 3.1: Gráficos de $\varphi_{\pm\gamma}$, para $\gamma = 0.2$.

Note que φ_γ satisfaz

$$\varphi_{-\gamma}(-\tau) = \varphi_\gamma(\tau), \quad \tau, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Com efeito,

$$\varphi_{-\gamma}(-\tau) = 1 - e^{(-\gamma)(-\tau)}(\cos(-\tau) - (-\gamma)\sin(-\tau)) = 1 - e^{\gamma\tau}(\cos \tau - \gamma \sin \tau) = \varphi_\gamma(\tau).$$

Além disto, para cada $\gamma \geq 0$, existe um único valor $\hat{\tau} \in (\pi, 2\pi]$ tal que

$$\varphi_\gamma(\hat{\tau}) = 0.$$

De fato, sendo $\gamma = 0$, então

$$\varphi_0(\tau) = 1 - \cos(\tau)$$

e a afirmação vale para $\tau = 2\pi$. Agora, tomando $\gamma > 0$, veremos que existe um único $\hat{\tau} \in (\pi, 2\pi)$ verificando $\varphi_\gamma(\hat{\tau}) = 0$. Com efeito, claramente φ_γ é contínua em $(\pi, 2\pi)$,

$$\varphi_\gamma(\pi) = 1 - e^{\pi\gamma}(\cos \pi - \gamma \sin \pi) = 1 + e^{\pi\gamma} > 0$$

e

$$\varphi_\gamma(2\pi) = 1 - e^{2\pi\gamma}(\cos(2\pi) - \gamma \sin(2\pi)) = 1 - e^{2\pi\gamma} < 0$$

donde, pelo *Teorema do Valor Intermediário*, temos a existência de $\hat{\tau} \in (\pi, 2\pi)$ tal que $\varphi_\gamma(\hat{\tau}) = 0$. Como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\varphi_\gamma(\tau) &= \frac{d}{d\tau}(1 - e^{\gamma\tau}(\cos \tau - \gamma \operatorname{sen} \tau)) \\
&= -\gamma e^{\gamma\tau}(\cos \tau - \gamma \operatorname{sen} \tau) - e^{\gamma\tau}(-\operatorname{sen} \tau - \gamma \cos \tau) \\
&= -\gamma e^{\gamma\tau} \cos \tau + \gamma^2 e^{\gamma\tau} \operatorname{sen} \tau + e^{\gamma\tau} \operatorname{sen} \tau + \gamma e^{\gamma\tau} \cos \tau \\
&= e^{\gamma\tau}(\gamma^2 + 1) \operatorname{sen} \tau \\
&< 0, \quad \tau \in (\pi, 2\pi), \quad \gamma > 0,
\end{aligned}$$

segue que $\hat{\tau}$ é único. Temos também que $\varphi_\gamma(\tau) > 0$ para todo $\tau \in (0, \hat{\tau})$ e $\varphi_\gamma(\tau) < 0$ para todo $\tau \in (\hat{\tau}, 2\pi)$.

3.2 Semiaplicações de Poincaré

O próximo resultado estabelece o comportamento angular das semiaplicações de Poincaré \mathcal{P}^- e \mathcal{P}^+ em uma forma paramétrica, usando os respectivos parâmetros

$$\gamma^- = \frac{\alpha^- - \lambda^-}{\beta^-}, \quad \gamma^+ = \frac{\alpha^+ - \lambda^+}{\beta^+}.$$

Proposição 3.2.1. *Suponha que as matrizes A^\pm do sistema (2.3) tenham autovalores λ^\pm e $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$, com $\beta^\pm > 0$. Então, são válidas as seguintes afirmações:*

(a) *Se a semiaplicação de Poincaré \mathcal{P}^- do sistema (2.3) transforma o ponto $(0, y_0, z_0)$ no ponto $(0, y_1, z_1)$, com $y_0 y_1 \neq 0$, então existe um único $\tau^- \in (0, \hat{\tau}^-)$, com $\hat{\tau}^-$ a menor solução positiva de $\varphi_{|\gamma^-|}(\tau) = 0$, tal que*

$$\begin{cases} \frac{z_0}{y_0} = \lambda^- + \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{e^{\gamma^- \tau^-} \operatorname{sen}(\tau^-)}{\varphi_{\gamma^-}(\tau^-)}, \\ \frac{z_1}{y_1} = \lambda^- - \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{e^{-\gamma^- \tau^-} \operatorname{sen}(\tau^-)}{\varphi_{-\gamma^-}(\tau^-)} \end{cases} \quad (3.1)$$

e

$$\frac{y_1}{y_0} = -\exp \left[\left(2\gamma^- + \frac{\lambda^-}{\beta^-} \right) \tau^- \right] \frac{\varphi_{-\gamma^-}(\tau^-)}{\varphi_{\gamma^-}(\tau^-)}; \quad (3.2)$$

(b) *Se a semiaplicação de Poincaré \mathcal{P}^+ do sistema (2.3) transforma o ponto $(0, y_1, z_1)$ no ponto $(0, y_2, z_2)$, com $y_1 y_2 \neq 0$, então existe um único $\tau^+ \in (0, \hat{\tau}^+)$, com $\hat{\tau}^+$ a*

menor solução positiva de $\varphi_{|\gamma^+|}(\tau) = 0$, tal que

$$\begin{cases} \frac{z_1}{y_1} = \lambda^+ + \beta^+[(\gamma^+)^2 + 1] \frac{e^{\gamma^+\tau^+} \operatorname{sen}(\tau^+)}{\varphi_{\gamma^+}(\tau^+)}, \\ \frac{z_2}{y_2} = \lambda^+ - \beta^+[(\gamma^+)^2 + 1] \frac{e^{-\gamma^+\tau^+} \operatorname{sen}(\tau^+)}{\varphi_{-\gamma^+}(\tau^+)} \end{cases} \quad (3.3)$$

e

$$\frac{y_2}{y_1} = -\exp\left[\left(2\gamma^+ + \frac{\lambda^+}{\beta^+}\right)\tau^+\right] \frac{\varphi_{-\gamma^+}(\tau^+)}{\varphi_{\gamma^+}(\tau^+)}. \quad (3.4)$$

Demonstração. Provaremos somente o item **(a)**, visto que o item **(b)** é totalmente análogo.

Como a semiaplicação de Poincaré \mathcal{P}^- transforma o ponto $(0, y_0, z_0)$ no ponto $(0, y_1, z_1)$, com $y_1 y_2 \neq 0$, isto é, $y_1 \neq 0$ e $y_2 \neq 0$, então existe $t_1 > 0$ tal que

$$e^{t_1 A^-}(0, y_0, z_0) = (0, y_1, z_1). \quad (3.5)$$

No que segue, desconsideraremos todos os índices sobrescritos, para simplificar a escrita.

Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com $d = \det A$ e t o traço de A , sendo λ e $\alpha \pm i\beta$ seus autovalores, podemos escrever

$$d = \lambda(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \lambda(\alpha^2 + \beta^2)$$

e

$$t = \lambda + (\alpha + i\beta) + (\alpha - i\beta) = \lambda + 2\alpha.$$

Além disto, como vimos no Capítulo 2 que

$$p_A(x) = d - mx + tx^2 - x^3$$

é o polinômio característico de A , sendo λ autovalor, então

$$p_A(\lambda) = d - m\lambda + t\lambda^2 - \lambda^3 = 0.$$

Substituindo os respectivos valores de t e d , temos que

$$\lambda(\alpha^2 + \beta^2) - m\lambda + (\lambda + 2\alpha)\lambda^2 - \lambda^3 = 0.$$

Como $\lambda \neq 0$, encontramos

$$(\alpha^2 + \beta^2) - m + (\lambda + 2\alpha)\lambda - \lambda^2 = 0$$

e, daí,

$$m = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda.$$

Vamos obter uma matriz P que nos possibilitará escrever a matriz A em sua *forma canônica de Jordan*.

Como λ é autovalor de A , afirmamos que $v_2 = (1, t - \lambda, d/\lambda)$ é autovetor associado. De fato,

$$Av_2 - \lambda v_2 = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t - \lambda \\ d/\lambda \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ t - \lambda \\ d/\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{d}{\lambda} + m + \lambda(\lambda - t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$-\frac{d}{\lambda} + m + \lambda(\lambda - t) = -\frac{\lambda(\alpha^2 + \beta^2)}{\lambda} + (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda) + \lambda(\lambda - \lambda - 2\alpha) = 0.$$

Vamos calcular agora um autovetor associado ao autovalor $\alpha + i\beta$. Afirmamos que $v_1 = (1, t - \alpha - i\beta, d/(\alpha + i\beta))$ é autovetor associado. Com efeito,

$$\begin{aligned} Av_1 - (\alpha + i\beta)v_1 &= \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t - \alpha - i\beta \\ d/(\alpha + i\beta) \end{pmatrix} - (\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ t - \alpha - i\beta \\ d/(\alpha + i\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{d}{\alpha + i\beta} + m - (\alpha + i\beta)(-\alpha - i\beta + t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e, sendo

$$\eta = -\frac{d}{\alpha + i\beta} + m - (\alpha + i\beta)(-\alpha - i\beta + t),$$

temos

$$\begin{aligned}
\eta &= -\frac{\lambda(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha + i\beta} + (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda) - (\alpha + i\beta)(-\alpha - i\beta + \lambda + 2\alpha) \\
&= -\frac{\lambda(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)}{\alpha + i\beta} + (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda) - (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta + \lambda) \\
&= -\lambda(\alpha - i\beta) + (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda) - (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) - \lambda(\alpha + i\beta) \\
&= -\lambda\alpha + \lambda i\beta + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda - \alpha^2 - \beta^2 - \lambda\alpha - \lambda i\beta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como sabemos, sendo

$$v_1 = \left(1, t - \alpha - i\beta, \frac{d}{\alpha + i\beta}\right),$$

autovetor associado ao autovalor complexo $\alpha + i\beta$, então

$$\operatorname{Re}(v_1) = \left(1, t - \alpha, \frac{\alpha d}{\alpha^2 + \beta^2}\right), \quad \operatorname{Im}(v_1) = \left(0, -\beta, -\frac{\beta d}{\alpha^2 + \beta^2}\right)$$

são linearmente independentes.

A matriz P será definida da seguinte maneira

$$P = (\operatorname{Re}(v_1) | \operatorname{Im}(v_1) | v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t - \alpha & -\beta & t - \lambda \\ \frac{\alpha d}{\alpha^2 + \beta^2} & -\frac{\beta d}{\alpha^2 + \beta^2} & \frac{d}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Atribuindo os respectivos valores de d e t , obtemos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha + \lambda & -\beta & 2\alpha \\ \alpha\lambda & -\beta\lambda & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Invertendo P e substituindo os valores de d e t em P^{-1} , encontramos

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2 - 2\lambda\alpha + \beta^2}{\beta^2 + (\alpha - \lambda)^2} & \frac{\lambda}{\beta^2 + (\alpha - \lambda)^2} & -\frac{1}{\beta^2 + (\alpha - \lambda)^2} \\ \frac{\alpha^3 - \lambda\alpha^2 + \beta^2\alpha + \beta^2\lambda}{\beta(\beta^2 + (\alpha - \lambda)^2)} & \frac{\alpha(\lambda - \alpha) - \beta^2}{\beta(\beta^2 + (\alpha - \lambda)^2)} & \frac{\alpha - \lambda}{\beta(\beta^2 + (\alpha - \lambda)^2)} \\ \frac{\lambda^2}{\beta^2 + (\alpha - \lambda)^2} & -\frac{\lambda}{\beta^2 + (\alpha - \lambda)^2} & \frac{1}{\beta^2 + (\alpha - \lambda)^2} \end{pmatrix}.$$

A matriz A pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + \lambda & -1 & 0 \\ \alpha^2 + 2\lambda\alpha + \beta^2 & 0 & -1 \\ (\alpha^2 + \beta^2)\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

é a *forma canônica de Jordan* de A , implicando que $A = PJP^{-1}$.

Dado $(0, y_0, z_0)$, temos de (3.5) que

$$e^{t_1 A}(0, y_0, z_0) = Pe^{t_1 J}P^{-1}(0, y_0, z_0) = (0, y_1, z_1). \quad (3.6)$$

Resultam as três seguintes equações

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{y_0 \left(-e^{\alpha t_1} (\alpha^2 - \alpha\lambda + \beta^2) \sin(\beta t_1) + \beta\lambda e^{\alpha t_1} \cos(\beta t_1) - \beta\lambda e^{\lambda t_1} \right)}{\beta (\alpha^2 - 2\alpha\lambda + \beta^2 + \lambda^2)} + \\ &+ \frac{z_0 \left((\alpha - \lambda)e^{\alpha t_1} \sin(\beta t_1) - \beta e^{\alpha t_1} \cos(\beta t_1) + \beta e^{\lambda t_1} \right)}{\beta (\alpha^2 - 2\alpha\lambda + \beta^2 + \lambda^2)}, \\ y_1 &= \frac{y_0 \left(-\alpha (e^{\alpha t_1} (\alpha^2 + \beta^2 - \lambda^2) \sin(\beta t_1) + 2\beta\lambda e^{\lambda t_1}) + \beta e^{\alpha t_1} (\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2) \cos(\beta t_1) \right)}{\beta (\alpha^2 - 2\alpha\lambda + \beta^2 + \lambda^2)} + \\ &+ \frac{z_0 \left(e^{\alpha t_1} (\alpha^2 - \beta^2 - \lambda^2) \sin(\beta t_1) + 2\alpha\beta e^{\lambda t_1} - 2\alpha\beta e^{\alpha t_1} \cos(\beta t_1) \right)}{\beta (\alpha^2 - 2\alpha\lambda + \beta^2 + \lambda^2)}, \\ z_1 &= \frac{\lambda y_0 (\alpha^2 + \beta^2) \left(-(\alpha - \lambda)e^{\alpha t_1} \sin(\beta t_1) + \beta e^{\alpha t_1} \cos(\beta t_1) - \beta e^{\lambda t_1} \right)}{\beta (\alpha^2 - 2\alpha\lambda + \beta^2 + \lambda^2)} + \\ &+ \frac{z_0 \left(\beta (\alpha^2 + \beta^2) e^{\lambda t_1} - \lambda e^{\alpha t_1} (-\alpha^2 + \alpha\lambda + \beta^2) \sin(\beta t_1) - \beta\lambda(2\alpha - \lambda)e^{\alpha t_1} \cos(\beta t_1) \right)}{\beta (\alpha^2 - 2\alpha\lambda + \beta^2 + \lambda^2)}. \end{aligned}$$

Resolvendo a primeira equação, segue que

$$z_0 = \frac{y_0 \left(e^{\alpha t_1} \left((\alpha^2 - \alpha\lambda + \beta^2) \sin(\beta t_1) - \beta\lambda \cos(\beta t_1) \right) + \beta\lambda e^{\lambda t_1} \right)}{\beta e^{\lambda t_1} + e^{\alpha t_1} \left((\alpha - \lambda) \sin(\beta t_1) - \beta \cos(\beta t_1) \right)}.$$

Fazendo algumas simplificações e usando que $y_0 \neq 0$, chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{z_0}{y_0} &= \lambda + \frac{e^{\alpha t_1} (\beta^2 + (\alpha - \lambda)^2) \operatorname{sen}(\beta t_1)}{e^{\lambda t_1} \beta + e^{\alpha t_1} (-\beta \cos(\beta t_1) + (\alpha - \lambda) \operatorname{sen}(\beta t_1))} \frac{\beta^{-1} e^{-\lambda t_1}}{\beta^{-1} e^{-\lambda t_1}} \\ &= \lambda + \frac{e^{(\alpha - \lambda) t_1} \left(\beta + \frac{(\alpha - \lambda)^2}{\beta} \right) \operatorname{sen}(\beta t_1)}{1 - e^{(\alpha - \lambda) t_1} (\cos(\beta t_1) - \gamma \operatorname{sen}(\beta t_1))} \\ &= \lambda + \frac{e^{(\alpha - \lambda) t_1} \beta (\gamma^2 + 1) \operatorname{sen}(\beta t_1)}{1 - e^{(\alpha - \lambda) t_1} (\cos(\beta t_1) - \gamma \operatorname{sen}(\beta t_1))}. \end{aligned}$$

Na verdade, como suprimimos todos os índices sobrescritos, temos

$$\frac{z_0}{y_0} = \lambda^- + \frac{e^{(\alpha^- - \lambda^-) t_1} \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \operatorname{sen}(\beta^- t_1)}{1 - e^{(\alpha^- - \lambda^-) t_1} (\cos(\beta^- t_1) - \gamma^- \operatorname{sen}(\beta^- t_1))}.$$

Considerando $\tau^- = \beta^- t_1$, vem que

$$\frac{z_0}{y_0} = \lambda^- + \frac{e^{\gamma^- \tau^-} \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \operatorname{sen}(\tau^-)}{1 - e^{\gamma^- \tau^-} (\cos(\tau^-) - \gamma^- \operatorname{sen}(\tau^-))} = \lambda^- + \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{e^{\gamma^- \tau^-} \operatorname{sen}(\tau^-)}{\varphi_{\gamma^-}(\tau^-)}$$

donde temos, assim, a primeira parte de (3.1).

Agora, substituindo o valor de z_0 na terceira equação e usando que $y_1 \neq 0$, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{y_1} &= \lambda + \frac{-e^{\lambda t_1} (\beta^2 + (\alpha - \lambda)^2) \operatorname{sen}(\beta t_1)}{e^{\alpha t_1} \beta + e^{\lambda t_1} (-\beta \cos(\beta t_1) + (-\alpha + \lambda) \operatorname{sen}(\beta t_1))} \frac{\beta^{-1} e^{-\alpha t_1}}{\beta^{-1} e^{-\alpha t_1}} \\ &= \lambda + \frac{-e^{(\lambda - \alpha) t_1} \left(\beta + \frac{(\alpha - \lambda)^2}{\beta} \right) \operatorname{sen}(\beta t_1)}{1 - e^{(\lambda - \alpha) t_1} \left(\cos(\beta t_1) + \frac{\alpha - \lambda}{\beta} \operatorname{sen}(\beta t_1) \right)} \\ &= \lambda + \frac{-e^{(\lambda - \alpha) t_1} \beta (\gamma^2 + 1) \operatorname{sen}(\beta t_1)}{1 - e^{(\lambda - \alpha) t_1} (\cos(\beta t_1) + \gamma \operatorname{sen}(\beta t_1))}. \end{aligned}$$

Novamente, como suprimimos todos os índices sobrescritos, temos

$$\frac{z_1}{y_1} = \lambda^- + \frac{-e^{(\lambda^- - \alpha^-) t_1} \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \operatorname{sen}(\beta^- t_1)}{1 - e^{(\lambda^- - \alpha^-) t_1} (\cos(\beta^- t_1) + \gamma^- \operatorname{sen}(\beta^- t_1))}.$$

Sendo $\tau^- = \beta^- t_1$, segue que

$$\frac{z_1}{y_1} = \lambda^- - \frac{e^{-\gamma^- \tau^-} \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \operatorname{sen}(\tau^-)}{1 - e^{-\gamma^- \tau^-} (\cos(\tau^-) + \gamma^- \operatorname{sen}(\tau^-))} = \lambda^- - \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{e^{-\gamma^- \tau^-} \operatorname{sen}(\tau^-)}{\varphi_{-\gamma^-}(\tau^-)},$$

donde resulta a segunda parte de (3.1).

Por fim, vamos obter y_1/y_0 conforme descrito em (3.2). De fato, substituindo z_0 na segunda equação e usando que $y_0 \neq 0$, chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{y_0} &= \frac{e^{2\alpha t_1} \beta - e^{(\alpha+\lambda)t_1} (\beta \cos(\beta t_1) + (\alpha - \lambda) \operatorname{sen}(\beta t_1))}{-e^{\lambda t_1} \beta + e^{\alpha t_1} (\beta \cos(\beta t_1) + (-\alpha + \lambda) \operatorname{sen}(\beta t_1))} \frac{-e^{-\lambda t_1} \beta^{-1}}{-e^{-\lambda t_1} \beta^{-1}} \\ &= \frac{-e^{(2\alpha-\lambda)t_1} + e^{\alpha t_1} (\cos(\beta t_1) + \gamma \operatorname{sen}(\beta t_1))}{1 - e^{(\alpha-\lambda)t_1} (\cos(\beta t_1) - \gamma \operatorname{sen}(\beta t_1))} \\ &= -e^{(2\alpha-\lambda)t_1} \frac{1 - e^{(\lambda-\alpha)t_1} (\cos(\beta t_1) + \gamma \operatorname{sen}(\beta t_1))}{1 - e^{(\alpha-\lambda)t_1} (\cos(\beta t_1) - \gamma \operatorname{sen}(\beta t_1))}. \end{aligned}$$

Na verdade, temos

$$\frac{y_1}{y_0} = -e^{(2\alpha^- - \lambda^-)t_1} \frac{1 - e^{(\lambda^- - \alpha^-)t_1} (\cos(\beta^- t_1) + \gamma^- \operatorname{sen}(\beta^- t_1))}{1 - e^{(\alpha^- - \lambda^-)t_1} (\cos(\beta^- t_1) - \gamma^- \operatorname{sen}(\beta^- t_1))}.$$

Fazendo $\tau^- = \beta^- t_1$ e observando que

$$(2\alpha^- - \lambda^-)t_1 = \frac{(2\alpha^- - \lambda^-)\beta^- t_1}{\beta^-} = \frac{(2\alpha^- - 2\lambda^- + \lambda^-)\tau^-}{\beta^-} = \left(2\gamma^- + \frac{\lambda^-}{\beta^-}\right) \tau^-,$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{y_0} &= -\exp \left[\left(2\gamma^- + \frac{\lambda^-}{\beta^-}\right) \tau^- \right] \frac{1 - e^{-\gamma^- \tau^-} (\cos(\tau^-) + \gamma^- \operatorname{sen}(\tau^-))}{1 - e^{\gamma^- \tau^-} (\cos(\tau^-) - \gamma^- \operatorname{sen}(\tau^-))} \\ &= -\exp \left[\left(2\gamma^- + \frac{\lambda^-}{\beta^-}\right) \tau^- \right] \frac{\varphi_{-\gamma^-}(\tau^-)}{\varphi_{\gamma^-}(\tau^-)}, \end{aligned}$$

como queríamos provar em (3.2).

A unicidade de τ^- é imediata, pois $\tau^- = \beta^- t_1$, com $\beta^- > 0$ e $t_1 > 0$ fixos. ■

Vimos na **Proposição 2.2.2** que as semiaplicações de Poincaré do sistema (2.3), quando estão definidas, transformam semirreta contida no plano de separação que parte da origem, em semirreta contida no plano de separação que também parte da origem. Neste sentido, fixando uma semirreta s que é levada em uma semirreta r pela aplicação \mathcal{P}^- , por exemplo, vemos que todo ponto $p \in s$ é levado para a semirreta r com o mesmo tempo de percurso, digamos t_1 . De fato, consideremos a equação (3.5) e seja $\kappa > 0$. O vetor $(0, \kappa y_0, \kappa z_0)$ está sobre a mesma semirreta que contém o vetor $(0, y_0, z_0)$. Logo, na equação (3.5), tomando $(0, \kappa y_0, \kappa z_0)$ no lugar de $(0, y_0, z_0)$, encontraremos, como na

equação (3.6),

$$0 = \kappa \frac{y_0 \left(-e^{\alpha t_1} (\alpha^2 - \alpha\lambda + \beta^2) \operatorname{sen}(\beta t_1) + \beta\lambda e^{\alpha t_1} \cos(\beta t_1) - \beta\lambda e^{\lambda t_1} \right)}{\beta (\alpha^2 - 2\alpha\lambda + \beta^2 + \lambda^2)} + \\ + \kappa \frac{z_0 \left((\alpha - \lambda) e^{\alpha t_1} \operatorname{sen}(\beta t_1) - \beta e^{\alpha t_1} \cos(\beta t_1) + \beta e^{\lambda t_1} \right)}{\beta (\alpha^2 - 2\alpha\lambda + \beta^2 + \lambda^2)},$$

donde resulta exatamente a primeira equação obtida por (3.6), isto é, t_1 é o tempo de percurso de todo ponto $p \in s$.

Das considerações anteriores, podemos muito bem perguntar o porquê de se utilizar a função auxiliar de Andronov para estudar cones invariantes de duas zonas. A resposta é imediata. Seja $p = (0, 0, z_0)$ uma dada condição inicial sobre o eixo z (fora da origem, a qual é ponto de equilíbrio). Como $p \in \Pi$, então, em termos do fluxo do sistema $x' = A^+x$, p é levado em um ponto $(0, y_1, z_1) \in \Pi$. Assim, existe um menor tempo $t_1 > 0$ que verifica

$$e^{t_1 A^+} (0, 0, z_0) = (0, y_1, z_1). \quad (3.7)$$

Resolvendo este sistema, chegamos, em particular, à equação

$$(\alpha^+ - \lambda^+) e^{\alpha^+ t_1} \operatorname{sen}(\beta^+ t_1) - \beta^+ e^{\alpha^+ t_1} \cos(\beta^+ t_1) + \beta^+ e^{\lambda^+ t_1} = 0.$$

Como $\beta^+ > 0$, multiplicando esta última equação por $(\beta^+)^{-1} e^{-\lambda^+ t_1}$, obtemos

$$\gamma^+ e^{(\alpha^+ - \lambda^+) t_1} \operatorname{sen}(\beta^+ t_1) - e^{(\alpha^+ - \lambda^+) t_1} \cos(\beta^+ t_1) + 1 = 0,$$

ou seja,

$$\gamma^+ e^{\gamma^+ \beta^+ t_1} \operatorname{sen}(\beta^+ t_1) - e^{\gamma^+ \beta^+ t_1} \cos(\beta^+ t_1) + 1 = 0.$$

Fazendo $\tau_1^+ = \beta^+ t_1 > 0$, segue que

$$1 - e^{\gamma^+ \tau_1^+} (\cos \tau_1^+ - \gamma^+ \operatorname{sen} \tau_1^+) = 0,$$

isto é, τ_1^+ é a menor solução positiva de $\varphi_{\gamma^+}(\tau) = 0$, já que t_1 é o menor tempo positivo que verifica (3.7). Desta forma, sabendo que $\hat{\tau}^+$ é a menor solução positiva de $\varphi_{\gamma^+}(\tau) = 0$, resulta que $\tau_1^+ = \hat{\tau}^+$, o qual pertence a $(\pi, 2\pi)$.

Por outro lado, supondo (3.7) válido, sendo $t_1 < 0$, então

$$e^{t_1 A^+} (0, y_1, z_1) = (0, 0, z_0).$$

Resolvendo este sistema, segue em particular que

$$-e^{2\alpha^+t_1}\beta^+ + e^{(\alpha^++\lambda^+)t_1}(\beta^+ \cos(\beta^+t_1) + (\alpha^+ - \lambda^+) \operatorname{sen}(\beta^+t_1)) = 0$$

e, daí,

$$1 - e^{-\gamma^+\beta^+t_1}(\cos(\beta^+t_1) + \gamma^+ \operatorname{sen}(\beta^+t_1)) = 0.$$

Definindo $\tau_2^+ = \beta^+t_1$, temos

$$1 - e^{-\gamma^+\tau_2^+}(\cos \tau_2^+ + \gamma^+ \operatorname{sen} \tau_2^+) = 0,$$

donde τ_2^+ é a menor solução não nula de $\varphi_{-\gamma^+}(\tau) = 0$ e $|\tau_2^+| = \hat{\tau}^+ \in (\pi, 2\pi)$.

Portanto, os dois últimos parágrafos justificam a utilização da função auxiliar de Andronov neste estudo.

Prosseguindo com nossa discussão acerca da **Proposição 3.2.1**, analisando as expressões (3.1) e (3.3), vemos que as mesmas fornecem, na forma paramétrica, o comportamento angular das semiaplicações de Poincaré \mathcal{P}^- e \mathcal{P}^+ , respectivamente, para o sistema (2.3). Deste modo, se denotamos por S^- a aplicação que transforma a inclinação u_0 da semirreta $z = u_0y$, com $y > 0$, a qual parte da origem e passa pelo ponto $(0, y_0, z_0)$, na inclinação u_1 da semirreta $z = u_1y$, com $y < 0$, que parte da origem e passa pelo ponto $(0, y_1, z_1) = \mathcal{P}^-(0, y_0, z_0)$, $y_1 < 0$, então $u_1 = S^-(u_0)$ e S^- é dada na forma paramétrica pela expressão (3.1). Similarmente, uma aplicação S^+ que envolve as inclinações das semirretas contidas no plano Π e relacionadas por \mathcal{P}^+ pode também ser definida na forma paramétrica em termos da expressão (3.3). Desta forma, a aplicação $S^+ \circ S^-$ pode ser definida.

Pela **Proposição 3.2.1**, quando a igualdade

$$\frac{z_0}{y_0} = \frac{z_2}{y_2}$$

é satisfeita para valores τ^+ e τ^- , então $S^+ \circ S^-$ tem um ponto fixo e, daí, o sistema (2.3) tem claramente um cone invariante de duas zonas.

Definição 3.2.1. *O quociente*

$$\frac{y_2}{y_0} = \frac{z_2}{z_0}$$

é chamado de *medida de contração ou expansão nas órbitas do cone invariante de duas zonas*.

A **Proposição 3.2.2** a seguir apresenta algumas equivalências acerca da existência de cones invariantes de duas zonas para o sistema (2.3).

Proposição 3.2.2. *Suponha que as matrizes A^\pm do sistema (2.3) tenham autovalores λ^\pm e $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$ com $\beta^\pm > 0$ e considere o sistema projetado (2.4). São equivalentes:*

- (a) *O sistema (2.3) tem um cone invariante de duas zonas;*
- (b) *O sistema projetado (2.4) tem uma órbita periódica de duas zonas;*
- (c) *A aplicação $S^+ \circ S^-$ tem um ponto fixo;*
- (d) *Existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que ambas as funções*

$$d(k) = (S^+ \circ S^-)(k) - k, \quad q(k) = (S^+)^{-1}(k) - S^-(k)$$

para $k \in \mathbb{R}$, se anulam em $k = \eta$.

Demonstração. As implicações

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$$

são imediatas por tudo o que já estudamos até aqui. Vamos provar a equivalência entre (c) e (d).

De fato, basta notar que $\eta \in \mathbb{R}$ é ponto fixo de $S^+ \circ S^-$, isto é,

$$(S^+ \circ S^-)(\eta) = \eta,$$

se, e somente se,

$$d(\eta) = (S^+ \circ S^-)(\eta) - \eta = 0$$

e

$$q(\eta) = (S^+)^{-1}(\eta) - S^-(\eta) = 0.$$

■

Graças à **Proposição 3.2.2**, os conceitos de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade para os cones invariantes de duas zonas do sistema (2.3) podem ser definidos a partir dos respectivos conceitos envolvendo órbitas periódicas do sistema projetado (2.4) e pontos fixos da aplicação $S^+ \circ S^-$.

Definição 3.2.2. *Diremos que um cone invariante de duas zonas para o sistema (2.3) é estável (respectivamente hiperbólico) quando o correspondente ponto fixo de $S^+ \circ S^-$ ou a órbita periódica do sistema projetado (2.4) é estável (respectivamente hiperbólico).*

Definição 3.2.3. *Diremos que p é ponto fixo hiperbólico da aplicação $S^+ \circ S^-$ se $|(S^+ \circ S^-)'(p)| \neq 1$. Neste caso, um cone invariante de duas zonas \mathcal{C} será dito ser hiperbólico e assintoticamente estável se $|(S^+ \circ S^-)'(p)| < 1$ e será chamado de hiperbólico e instável se $|(S^+ \circ S^-)'(p)| > 1$.*

Em (3.1), colocando

$$u_0(\tau) = \frac{z_0}{y_0} = \lambda^- + \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{e^{\gamma^- \tau} \text{sen}(\tau)}{\varphi_{\gamma^-}(\tau)}, \quad \tau \in (0, \hat{\tau}^-),$$

e

$$u_1(\tau) = \frac{z_1}{y_1} = \lambda^- - \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{e^{-\gamma^- \tau} \text{sen}(\tau)}{\varphi_{-\gamma^-}(\tau)}, \quad \tau \in (0, \hat{\tau}^-),$$

para $\hat{\tau}^- \in (\pi, 2\pi]$ de modo que $\varphi_{|\gamma^-|}(\hat{\tau}^-) = 0$, temos a representação paramétrica da aplicação S^- que, neste caso, verifica $u_1 = S^-(u_0)$.

No **Lema 3.2.1** adiante são apresentadas algumas propriedades das funções u_0 e u_1 . Lembramos que $\hat{\tau}^-$ é a menor solução positiva de $\varphi_{|\gamma^-|}(\tau) = 0$.

Lema 3.2.1. *Para as funções u_0 e u_1 definidas acima, valem as seguintes afirmações:*

(a) *A função u_0 verifica*

$$u_0(\pi) = \lambda^-, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} u_0(\tau) = +\infty, \quad \frac{du_0}{d\tau}(\tau) < 0, \quad \tau \in (0, \hat{\tau}^-);$$

(b) *A função u_1 verifica*

$$u_1(\pi) = \lambda^-, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} u_1(\tau) = -\infty, \quad \frac{du_1}{d\tau}(\tau) > 0, \quad \tau \in (0, \hat{\tau}^-);$$

(c) Se $\gamma^- > 0$, então

$$\lim_{\tau \rightarrow \hat{\tau}^-} u_0(\tau) = -\infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow \hat{\tau}^-} u_1(\tau) = \alpha^- - \beta^- \cot(\hat{\tau}^-) =: u_H^-;$$

(d) Se $\gamma^- < 0$, então

$$\lim_{\tau \rightarrow \hat{\tau}^-} u_1(\tau) = +\infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow \hat{\tau}^-} u_0(\tau) = \alpha^- + \beta^- \cot(\hat{\tau}^-) =: u_V^-.$$

Demonstração.

(a) Colocando $\tau = \pi$, segue que $\sin(\tau) = 0$ e, daí, $u_0(\pi) = \lambda^-$. Além disto, quando $\tau \rightarrow 0$, temos que $\sin(\tau) \rightarrow 0$ e $\varphi_{\gamma^-}(\tau) \rightarrow 0$. Aplicando a *Regra de L'Hôpital*, resulta que $\lim_{\tau \rightarrow 0} u_0(\tau) = +\infty$. Por fim,

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{d\tau}(\tau) &= -\frac{\beta^- ((\gamma^-)^2 + 1) e^{\gamma^- \tau} \left(e^{\gamma^- \tau} - \gamma^- \sin(\tau) - \cos(\tau) \right)}{(\gamma^- e^{\gamma^- \tau} \sin(\tau) - e^{\gamma^- \tau} \cos(\tau) + 1)^2} \\ &= -\frac{\beta^- ((\gamma^-)^2 + 1) e^{\gamma^- \tau} e^{\gamma^- \tau} \left(1 - e^{-\gamma^- \tau} (\gamma^- \sin(\tau) + \cos(\tau)) \right)}{(\gamma^- e^{\gamma^- \tau} \sin(\tau) - e^{\gamma^- \tau} \cos(\tau) + 1)^2} \\ &= -\frac{\beta^- ((\gamma^-)^2 + 1) e^{\gamma^- \tau} e^{\gamma^- \tau} \varphi_{-\gamma^-}(\tau)}{(\gamma^- e^{\gamma^- \tau} \sin(\tau) - e^{\gamma^- \tau} \cos(\tau) + 1)^2} \\ &< 0, \end{aligned}$$

porque $\beta^- > 0$ e $\varphi_{-\gamma^-}(\tau) > 0$ em $(0, \hat{\tau}^-)$.

(b) Colocando $\tau = \pi$, segue que $\sin(\tau) = 0$ e, daí, $u_1(\pi) = \lambda^-$. Ademais, quando $\tau \rightarrow 0$, temos que $\sin(\tau) \rightarrow 0$ e $\varphi_{-\gamma^-}(\tau) \rightarrow 0$. Aplicando a *Regra de L'Hôpital*, resulta que $\lim_{\tau \rightarrow 0} u_1(\tau) = -\infty$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau}(\tau) &= \frac{\beta^- ((\gamma^-)^2 + 1) \left(\gamma^- e^{\gamma^- \tau} \sin(\tau) - e^{\gamma^- \tau} \cos(\tau) + 1 \right)}{(-e^{\gamma^- \tau} + \gamma^- \sin(\tau) + \cos(\tau))^2} \\ &= \frac{\beta^- ((\gamma^-)^2 + 1) \left(1 - e^{\gamma^- \tau} (\cos(\tau) - \gamma^- \sin(\tau)) \right)}{(-e^{\gamma^- \tau} + \gamma^- \sin(\tau) + \cos(\tau))^2} \\ &= \frac{\beta^- ((\gamma^-)^2 + 1) \varphi_{\gamma^-}(\tau)}{(-e^{\gamma^- \tau} + \gamma^- \sin(\tau) + \cos(\tau))^2} \\ &> 0, \end{aligned}$$

porque $\beta^- > 0$ e $\varphi_{\gamma^-}(\tau) > 0$ em $(0, \hat{\tau}^-)$.

(c) Se $\gamma^- > 0$, então $\hat{\tau}^-$ é solução de $\varphi_{\gamma^-}(\tau) = 0$. Assim, quando $\tau \rightarrow \hat{\tau}^-$, o denominador tende a zero e o numerador é negativo, pois $\hat{\tau}^- \in (\pi, 2\pi)$, intervalo em que a função seno é negativa. Portanto, o limite será $-\infty$. Agora, sendo $\gamma^- > 0$, então $\varphi_{|\gamma^-|}(\tau) = \varphi_{\gamma^-}(\tau)$ e $\varphi_{\gamma^-}(\hat{\tau}^-) = 0$, isto é,

$$1 - e^{\gamma^- \hat{\tau}^-} (\cos(\hat{\tau}^-) - \gamma^- \text{sen}(\hat{\tau}^-)) = 0,$$

ou seja,

$$e^{\gamma^- \hat{\tau}^-} (\cos(\hat{\tau}^-) - \gamma^- \text{sen}(\hat{\tau}^-)) = 1,$$

donde

$$e^{-\gamma^- \hat{\tau}^-} = \cos(\hat{\tau}^-) - \gamma^- \text{sen}(\hat{\tau}^-).$$

Como $\gamma^- > 0$, temos $\varphi_{-\gamma^-}(\hat{\tau}^-) > 0$. Logo, u_1 é contínua em $\hat{\tau}^-$ e, daí,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \hat{\tau}^-} u_1(\tau) &= u_1(\hat{\tau}^-) \\ &= \lambda^- - \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{e^{-\gamma^- \hat{\tau}^-} \text{sen}(\hat{\tau}^-)}{\varphi_{-\gamma^-}(\hat{\tau}^-)} \\ &= \lambda^- - \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{(\cos(\hat{\tau}^-) - \gamma^- \text{sen}(\hat{\tau}^-)) \text{sen}(\hat{\tau}^-)}{1 - e^{-\gamma^- \hat{\tau}^-} (\cos(\hat{\tau}^-) + \gamma^- \text{sen}(\hat{\tau}^-))} \\ &= \lambda^- - \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{(\cos(\hat{\tau}^-) - \gamma^- \text{sen}(\hat{\tau}^-)) \text{sen}(\hat{\tau}^-)}{1 - (\cos(\hat{\tau}^-) - \gamma^- \text{sen}(\hat{\tau}^-))(\cos(\hat{\tau}^-) + \gamma^- \text{sen}(\hat{\tau}^-))} \\ &= \lambda^- - \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{(\cos(\hat{\tau}^-) - \gamma^- \text{sen}(\hat{\tau}^-)) \text{sen}(\hat{\tau}^-)}{(\text{sen}^2(\hat{\tau}^-) + \cos^2(\hat{\tau}^-)) - (\cos^2(\hat{\tau}^-) - (\gamma^-)^2 \text{sen}^2(\hat{\tau}^-))} \\ &= \lambda^- - \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{(\cos(\hat{\tau}^-) - \gamma^- \text{sen}(\hat{\tau}^-)) \text{sen}(\hat{\tau}^-)}{(1 + (\gamma^-)^2) \text{sen}^2(\hat{\tau}^-)} \\ &= \lambda^- - \beta^- \frac{\cos(\hat{\tau}^-) - \gamma^- \text{sen}(\hat{\tau}^-)}{\text{sen}(\hat{\tau}^-)} \\ &= \lambda^- - \beta^- \left(\cot(\hat{\tau}^-) - \frac{\alpha^- - \lambda^-}{\beta^-} \right) \\ &= \lambda^- - \beta^- \left(\frac{\beta^- \cot(\hat{\tau}^-) - \alpha^- + \lambda^-}{\beta^-} \right) \\ &= \alpha^- - \beta^- \cot(\hat{\tau}^-). \end{aligned}$$

(d) Se $\gamma^- < 0$, então $\hat{\tau}^-$ é solução de $\varphi_{-\gamma^-}(\tau) = 0$. Assim, quando $\tau \rightarrow \hat{\tau}^-$, o denominador tende a zero e o numerador é negativo, pois $\hat{\tau}^- \in (\pi, 2\pi)$, intervalo em que a função seno é negativa. Porém, como temos $-\beta$ multiplicando o numerador, resulta que o limite será $+\infty$. Agora, se $\gamma^- < 0$, então $|\gamma^-| = -\gamma^-$ e, daí, $\varphi_{|\gamma^-|}(\tau) = \varphi_{-\gamma^-}(\tau)$, donde $\varphi_{-\gamma^-}(\hat{\tau}^-) = 0$, isto é,

$$1 - e^{-\gamma^- \hat{\tau}^-} (\cos(\hat{\tau}^-) + \gamma^- \text{sen}(\hat{\tau}^-)) = 0,$$

ou seja,

$$e^{\gamma^- \hat{\tau}^-} = \cos(\hat{\tau}^-) + \gamma^- \text{sen}(\hat{\tau}^-).$$

Como $\gamma^- < 0$, temos $\varphi_{\gamma^-}(\hat{\tau}^-) > 0$, logo u_0 é contínua em $\hat{\tau}^-$, o que implica

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \hat{\tau}^-} u_0(\tau) &= u_0(\hat{\tau}^-) \\ &= \lambda^- + \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{e^{\gamma^- \hat{\tau}^-} \text{sen}(\hat{\tau}^-)}{\varphi_{\gamma^-}(\hat{\tau}^-)} \\ &= \lambda^- + \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{(\cos(\hat{\tau}^-) + \gamma^- \text{sen}(\hat{\tau}^-)) \text{sen}(\hat{\tau}^-)}{\varphi_{\gamma^-}(\hat{\tau}^-)} \\ &= \alpha^- + \beta^- \cot(\hat{\tau}^-), \end{aligned}$$

em virtude que $\gamma^- = (\alpha^- - \lambda^-)/\beta^-$, conforme fizemos no item anterior. ■

Omitindo o índice sobrescrito $-$, vejamos os gráficos das funções u_0 e u_1 , os quais podem ser obtidos do **Lema 3.2.1**, conforme os itens indicados nas respectivas figuras.

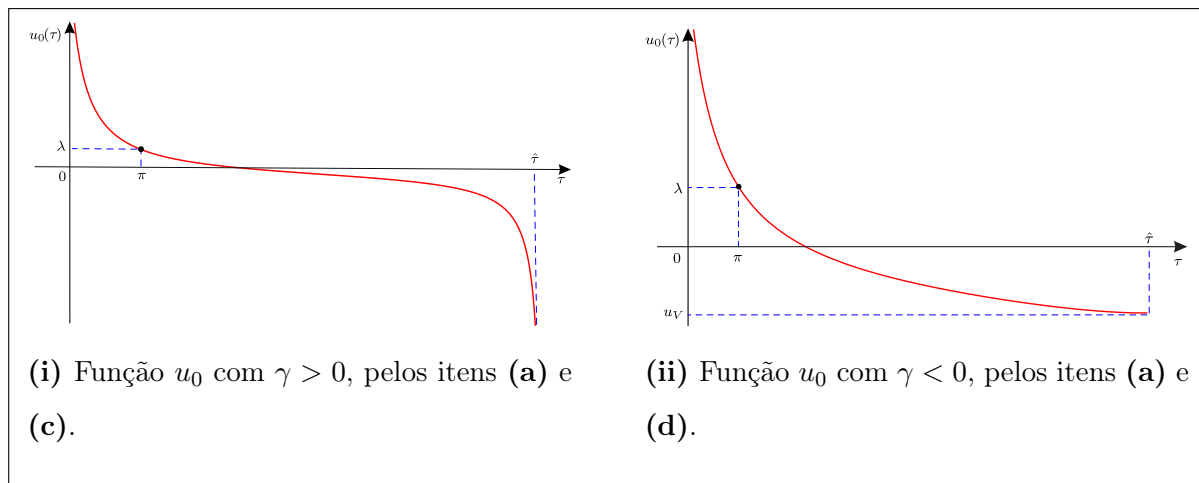


Figura 3.2: Gráficos da função u_0 , conforme sinal de γ .

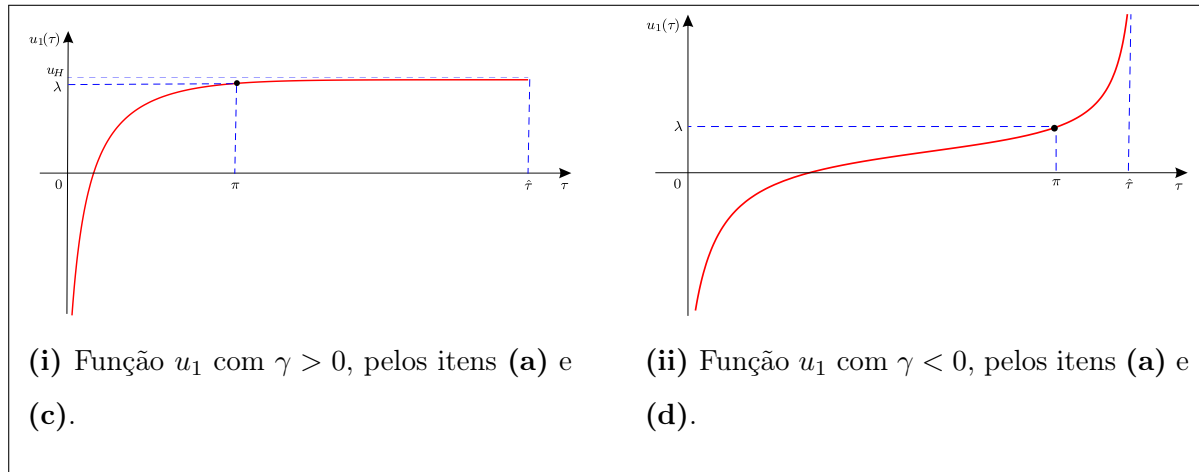


Figura 3.3: Gráficos da função u_1 , conforme sinal de γ .

Note que podemos escrever a equação (3.2) como

$$\frac{y_1}{y_0} = -\frac{\varphi_{-\gamma^-}(\tau)}{\varphi_{\gamma^-}(\tau)} e^{(\gamma^- + \frac{\alpha^-}{\beta^-})\tau}, \quad \tau \in (0, \hat{\tau}^-), \quad (3.8)$$

visto que

$$2\gamma^- + \frac{\lambda^-}{\beta^-} = \gamma^- + \frac{\alpha^- - \lambda^-}{\beta^-} + \frac{\lambda^-}{\beta^-} = \gamma^- + \frac{\alpha^-}{\beta^-}.$$

Além disto, quando $\tau \neq \pi$, dividindo $u_0(\tau) = z_0/y_0$ por $u_1(\tau) = z_1/y_1$, valores dados em (3.1), temos

$$\frac{u_0(\tau) - \lambda^-}{u_1(\tau) - \lambda^-} = -\frac{\frac{e^{\gamma^- \tau}}{\varphi_{\gamma^-}(\tau)}}{\frac{e^{-\gamma^- \tau}}{\varphi_{-\gamma^-}(\tau)}} = -\frac{e^{\gamma^- \tau} \varphi_{-\gamma^-}(\tau)}{e^{-\gamma^- \tau} \varphi_{\gamma^-}(\tau)} = -\frac{\varphi_{-\gamma^-}(\tau)}{\varphi_{\gamma^-}(\tau)} e^{2\gamma^- \tau}$$

e, como

$$2\gamma^- \tau = \left(\gamma^- + \frac{\alpha^-}{\beta^-} - \frac{\lambda^-}{\beta^-} \right) \tau = \left(\gamma^- + \frac{\alpha^-}{\beta^-} \right) \tau - \frac{\lambda^-}{\beta^-} \tau,$$

encontramos

$$\begin{aligned} \frac{u_0(\tau) - \lambda^-}{u_1(\tau) - \lambda^-} &= -\frac{\varphi_{-\gamma^-}(\tau)}{\varphi_{\gamma^-}(\tau)} e^{(\gamma^- + \frac{\alpha^-}{\beta^-})\tau} e^{-\frac{\lambda^-}{\beta^-} \tau} \\ &= \frac{y_1(\tau)}{y_0(\tau)} e^{-\frac{\lambda^-}{\beta^-} \tau}. \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{y_1(\tau)}{y_0(\tau)} = \frac{u_0(\tau) - \lambda^-}{u_1(\tau) - \lambda^-} e^{\frac{\lambda^-}{\beta^-} \tau}, \quad \tau \in (0, \hat{\tau}^-), \quad \tau \neq \pi. \quad (3.9)$$

Agora, quando $\tau = \pi$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{y_1(\pi)}{y_0(\pi)} &= -\frac{\varphi_{-\gamma^-}(\pi)}{\varphi_{\gamma^-}(\pi)} e^{(\gamma^- + \frac{\alpha^-}{\beta^-})\pi} \\
&= -\frac{1 - e^{-\gamma^- \pi}(-1)}{1 - e^{\gamma^- \pi}(-1)} e^{\gamma^- \pi} e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-} \pi} \\
&= -\frac{e^{\gamma^- \pi} + 1}{1 + e^{\gamma^- \pi}} e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-} \pi} \\
&= -e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-} \pi}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Trocando o índice sobrescrito $-$ por $+$, as funções $u_1(\tau) = z_1/y_1$ e $u_2(\tau) = z_2/y_2$, definidas pela equação (3.3), satisfazem as propriedades mostradas no **Lema 3.2.1** para u_0 e u_1 , respectivamente. Assim, claramente, expressões similares a (3.9) e (3.10) podem ser obtidas para a razão y_2/y_1 dada na equação (3.4), ou seja,

$$\frac{y_2(\tau)}{y_1(\tau)} = \begin{cases} \frac{u_1(\tau) - \lambda^+}{u_2(\tau) - \lambda^+} e^{\frac{\lambda^+}{\beta^+} \tau}, & \tau \in (0, \hat{\tau}^+), \quad \tau \neq \pi, \\ -e^{\frac{\alpha^+}{\beta^+} \pi}, & \tau = \pi. \end{cases} \tag{3.11}$$

Além disto, temos que $u_2(\tau) < u_H^+$, para $\gamma^+ > 0$ e $\tau \in (0, \hat{\tau}^+)$, sendo

$$u_H^+ = \lim_{\tau \rightarrow \hat{\tau}^+} u_2(\tau) = \alpha^+ - \beta^+ \cot(\hat{\tau}^+),$$

pelos itens (b) e (c) do **Lema 3.2.1** para u_2 .

Vimos na **Proposição 3.2.2** que se existe um ponto \bar{u} de tal modo que $S^+(S^-(\bar{u})) = \bar{u}$, então existe uma semirreta invariante para a aplicação de Poincaré \mathcal{P} e, conseqüentemente, existe um cone invariante de duas zonas para o sistema (2.3). Ademais, a existência de pontos fixos para a aplicação $S^+ \circ S^-$ corresponde à existência de soluções para a equação $S^-(u) = (S^+)^{-1}(u)$ ou, o que significa o mesmo, corresponde à existência de soluções para as equações

$$\begin{aligned}
u_0(\tau^-) &= u_2(\tau^+), \\
u_1(\tau^-) &= u_1(\tau^+),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

porque, pela **Definição 3.2.1**, temos que $z_0/y_0 = z_2/y_2$, isto é, $u_0(\tau^-) = u_2(\tau^+)$, e também, sendo $S^-(u_0) = u_1$ e $S^+(u_1) = u_2$, então $S^+(S^-(u_0)) = u_2$, donde temos $S^-(u_0) = (S^+)^{-1}(u_2)$, ou seja, $u_1(\tau^-) = u_1(\tau^+)$.

Para analisarmos os pontos fixos da composição $S^+ \circ S^-$, observando a semelhança das aplicações S^+ e S^- (veja **Proposição 3.2.1**), introduzimos a aplicação

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto S(u) = v, \end{aligned}$$

definida por

$$S \equiv \begin{cases} u(\tau) = \lambda + \beta[\gamma^2 + 1] \frac{e^{\gamma\tau} \operatorname{sen} \tau}{\varphi_\gamma(\tau)}, \\ v(\tau) = \lambda - \beta[\gamma^2 + 1] \frac{e^{-\gamma\tau} \operatorname{sen} \tau}{\varphi_{-\gamma}(\tau)}, \end{cases} \quad (3.13)$$

sendo $\gamma = (\alpha - \lambda)/\beta$, $\beta > 0$, $\tau \in (0, \hat{\tau})$ e $\hat{\tau}$ verifica a condição $\varphi_{|\gamma|}(\hat{\tau}) = 0$.

A **Proposição 3.2.3** traz algumas propriedades da função S .

Proposição 3.2.3. *A função S definida em (3.13) possui as seguintes propriedades:*

(a) $S(\lambda) = \lambda$;

(b) S é decrescente e sua primeira derivada é dada por

$$S'(u) = -e^{-4\gamma\tau} \left(\frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)} \right)^3,$$

com

$$S'(\lambda) = -e^{-\gamma\pi}; \quad (3.14)$$

(c) S tem a reta

$$v = OA(u) = -u + \frac{2}{3}t, \quad t = 2\alpha + \lambda,$$

como uma assíntota oblíqua quando $u \rightarrow +\infty$;

(d) Se $\gamma = 0$, então $S(u) = OA(u) = -u + (2/3)t$, para $t = 2\alpha + \lambda$;

(e) Se $\gamma > 0$, então S é definida em \mathbb{R} e a reta

$$v = v_H = \alpha - \beta \cot \hat{\tau}$$

é uma assíntota horizontal quando $u \rightarrow -\infty$;

(f) Se $\gamma < 0$, então S é definida em $(u_V, +\infty)$, sendo

$$u_V = \alpha + \beta \cot \hat{\tau},$$

e a reta $u = u_V$ é uma assíntota vertical;

(g) Se $\gamma \neq 0$, então

$$\gamma[1 + S'(u)] > 0;$$

(h) Se $\gamma \neq 0$, então a segunda derivada da função S verifica

$$\gamma S''(u) < 0.$$

Demonstração. Provaremos aqui os itens (a) até (f). Os dois últimos itens serão deixados para a Seção 3.3, pois os mesmos requerem alguns resultados preliminares que ainda não discutimos.

(a) Basta observar que, como $u(\pi) = v(\pi) = \lambda$, segue que $S(\lambda) = \lambda$.

(b) Como $S(u(\tau)) = v(\tau)$, pela *Regra da Cadeia*,

$$S'(u(\tau))u'(\tau) = v'(\tau),$$

donde

$$S'(u) = \frac{v'(\tau)}{u'(\tau)}, \quad u'(\tau) \neq 0.$$

Após alguns cálculos, encontramos

$$S'(u) = -e^{-4\gamma\tau} \left(\frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)} \right)^3$$

e, para termos $u(\tau) = \lambda$, pelo item (a), devemos ter $\tau = \pi$, o que implica

$$S'(\lambda) = -e^{-\gamma\pi}.$$

(c) Como queremos determinar uma reta de equação

$$v = mu + b$$

que seja assíntota oblíqua de S , sabemos que podemos facilmente obter tal reta, pois

$$m = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{S(u)}{u}, \quad b = \lim_{u \rightarrow +\infty} (S(u) - mu),$$

desde que estes limites existam, conforme vimos na Seção 2.1.

Pelo **Lema 3.2.1** e pela definição de S vemos que $u_0(\tau) = u(\tau)$ e $u_1(\tau) = v(\tau)$. Além disto, pelo lema mencionado, temos que se $\tau \rightarrow 0$, então $u = u(\tau) \rightarrow +\infty$ e $v = v(\tau) \rightarrow -\infty$.

Assim,

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{S(u)}{u} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{v}{u} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u_1(\tau)}{u_2(\tau)},$$

uma indeterminação. Logo, pela *Regra de L'Hôspital* e pelo item **(b)** desta proposição, temos

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{S(u)}{u} = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} S'(u) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} -e^{-4\gamma\tau} \left(\frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)} \right)^3 = -1,$$

ou seja, $m = -1$.

Para obtermos o valor de b , calculamos

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} (S(u) - mu) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} (v(\tau) + u(\tau))$$

o qual fornece uma indeterminação. Entretanto, tomando as expressões das funções u e v e aplicando sucessivamente a *Regra de L'Hôspital*, encontramos

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} (S(u) - mu) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (S(u) + u) = \frac{2}{3}(2\alpha + \lambda) = \frac{2}{3}t.$$

Resulta que $b = (2/3)t$ e, daí,

$$v = -u + \frac{2}{3}t$$

é uma assíntota oblíqua de S quando $u \rightarrow +\infty$.

(d) Se $\gamma = 0$, então

$$u = \lambda + \frac{\beta \operatorname{sen} \tau}{1 - \cos \tau}, \quad v = \lambda - \frac{\beta \operatorname{sen} \tau}{1 - \cos \tau}, \quad \alpha = \lambda.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S(u) &= v \\ &= \lambda - \frac{\beta \operatorname{sen} \tau}{1 - \cos \tau} \\ &= -\lambda - \frac{\beta \operatorname{sen} \tau}{1 - \cos \tau} + \frac{2}{3}(2\lambda + \lambda) \\ &= -\lambda - \frac{\beta \operatorname{sen} \tau}{1 - \cos \tau} + \frac{2}{3}(2\alpha + \lambda) \\ &= -u + \frac{2}{3}t, \end{aligned}$$

para todo $\tau \in (0, 2\pi)$.

(e) Vimos no item (c) do **Lema 3.2.1** que $u \rightarrow -\infty$ quando $\tau \rightarrow \hat{\tau}$, pois, por hipótese, $\gamma > 0$. Assim, pelo item (c) do lema mencionado,

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} S(u) = \lim_{\tau \rightarrow \hat{\tau}} v = \alpha - \beta \cot \hat{\tau},$$

isto é, $v = v_H = \alpha - \beta \cot \hat{\tau}$ é assíntota horizontal de S quando $u \rightarrow -\infty$.

Note que S está definida em \mathbb{R} pois dado $\tau \in (0, \hat{\tau})$, temos que u é contínua neste conexo,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u(\tau) = +\infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow \hat{\tau}} u(\tau) = -\infty.$$

(f) Sendo $\gamma < 0$ e $\hat{\tau}$ tal que $\varphi_{-\gamma}(\hat{\tau}) = 0$, segue então do item (d) do **Lema 3.2.1** que

$$\lim_{\tau \rightarrow \hat{\tau}} u(\tau) = \alpha + \beta \cot \hat{\tau} =: u_V$$

e, do item (a) do mesmo lema, vem que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u(\tau) = +\infty,$$

donde S está definida em $(u_V, +\infty)$.

Além disto, u_V é assíntota vertical de S , pois

$$\lim_{u \rightarrow u_V} S(u) = \lim_{\tau \rightarrow \hat{\tau}} v(\tau) = +\infty.$$

■

Como dissemos no início da demonstração, deixaremos as provas dos itens (g) e (h) para a Seção 3.3.

Pelos itens (c), (d), (e) e (f) da **Proposição 3.2.3**, a posição relativa do gráfico da função S e sua assíntota oblíqua pode ser facilmente analisada. A saber, se $\gamma > 0$, então $S(u) < OA(u)$, isto é, o gráfico de S está abaixo de sua assíntota oblíqua. Se $\gamma = 0$, então S coincide com sua assíntota oblíqua e, quando $\gamma < 0$, então $S(u) > OA(u)$, ou seja, o gráfico de S está acima de sua assíntota oblíqua.

Na Figura 3.4, dependendo do sinal do parâmetro γ , aparece o gráfico de S e sua correspondente assíntota oblíqua quando $t > 0$ e $\lambda > 0$. Tal figura é imediata pela **Proposição 3.2.3** e pelas considerações feitas no parágrafo anterior.

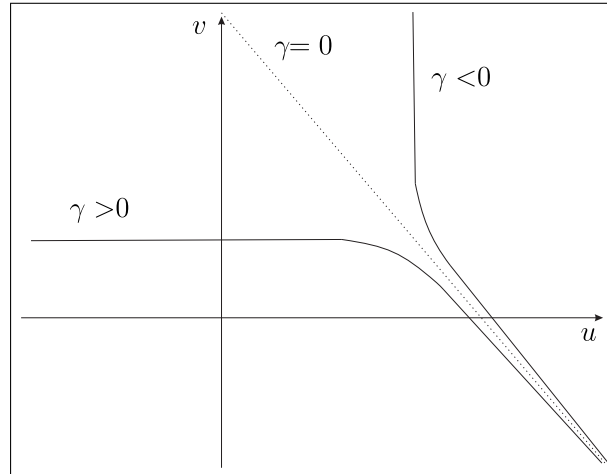


Figura 3.4: Gráfico de S de acordo com sinal de γ para valores fixos de $t > 0$ e $\lambda > 0$.

Observe que o gráfico e a assíntota oblíqua de S coincidem ao mantermos fixo o valor de $t = 2\alpha + \lambda$, sendo este o caso quando $\gamma = 0$.

Vejam agora o último resultado desta seção. A **Proposição 3.2.4** apresenta três propriedades da função S^- , as quais serão utilizadas adiante.

Proposição 3.2.4. *Para a função S^- , são válidas as seguintes afirmações:*

- (a) *O intervalo $[\lambda^-, +\infty)$ é aplicado por S^- sobre o intervalo $(-\infty, \lambda^-]$. As representações paramétricas $u_0(\tau)$ e $u_1(\tau)$ para estes pontos estão definidas para $\tau \in (0, \pi]$;*
- (b) *Se $\gamma^- > 0$, então $S''(u_0) < 0$ para todo u_0 e a imagem de $(-\infty, \lambda^-]$ por S^- é $(u_H^-, \lambda^-]$, sendo u_H^- definida no **Lema 3.2.1**. Para estes pontos, a representação paramétrica de S^- verifica $\tau \in [\pi, \hat{\tau}^-)$;*
- (c) *Se $\gamma^- < 0$, então $S''(u_0) > 0$, quando definida. Tomando u_V^- como aparece no **Lema 3.2.1**, a imagem por S^- do intervalo $(u_V^-, \lambda^-]$ é o intervalo $[\lambda^-, +\infty)$. Para estes pontos, a representação paramétrica de S^- verifica $\tau \in [\pi, \hat{\tau}^-)$.*

Demonstração. Estes resultados são imediatos.

- (a) Segue dos itens (a) e (b) do **Lema 3.2.1**.

(b) Segue dos itens (b) e (c) do **Lema 3.2.1** e dos itens (e) e (h) da **Proposição 3.2.3**.

(c) Segue do item (d) do **Lema 3.2.1** e dos itens (f) e (h) da **Proposição 3.2.3**.

■

3.3 Prova dos itens (g) e (h) da Proposição 3.2.3

O objetivo desta seção é apresentar as demonstrações das afirmações (g) e (h) da **Proposição 3.2.3**.

Da afirmação (b) de tal proposição, podemos escrever

$$S'(u) = -\vartheta_\gamma^3(\tau),$$

sendo

$$\vartheta_\gamma(\tau) = e^{-\frac{4}{3}\gamma\tau} \frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)}, \quad \vartheta_\gamma(0) = 1, \quad (3.15)$$

a qual está definida para $\tau \in [0, \hat{\tau})$, com $\hat{\tau} \in (\pi, 2\pi]$ de modo que $\varphi_{|\gamma|}(\hat{\tau}) = 0$. Logo, as derivadas S' e S'' podem ser estudadas em termos da função ϑ_γ .

A princípio, tal estudo parece imediato, mas é necessário determinar o sinal de algumas expressões, o que é uma tarefa não muito simples, devido à presença de algumas funções envolvidas. Neste sentido, um argumento diferente será utilizado. Um sistema específico sem cones invariantes de duas zonas será construído, o qual implicará algumas propriedades da função ϑ_γ e, daí, as afirmações (g) e (h) da **Proposição 3.2.3** serão deduzidas. A não existência de cones invariantes de duas zonas deste sistema específico será mostrada diretamente.

Antes de proceder, apresentamos algumas propriedades de superfícies planas invariantes para o sistema (2.3) e sua posição relativa com os cones invariantes de duas zonas do sistema, caso existam.

Definição 3.3.1. *Seja A uma matriz real de ordem 3 com autovalores λ e $\alpha \pm i\beta$, sendo $\beta > 0$. O plano invariante do sistema $x' = Ax$ contendo a origem é chamado de Plano Focal da matriz A , o qual indicaremos por Π_F .*

Note que se $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possui um autovalor real λ e dois autovalores complexos conjugados $\alpha \pm i\beta$, então os autovalores complexos possuem autovetores da forma $w \pm iz$, com $w, z \in \mathbb{R}^3$. Neste caso, o plano focal de A é o plano gerado pelos vetores w e z , o qual indicaremos por $\Pi_F = [w, z]$.

Lema 3.3.1. *Seja A uma matriz real de ordem 3 que possui autovalores λ e $\alpha \pm i\beta$, com $\beta > 0$. Se v é autovetor de A^T associado ao autovalor real λ , então v é ortogonal ao plano focal de A .*

Demonstração. Sabemos que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tem os autovalores λ , $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$, com $\beta > 0$, logo todos distintos. Como sabemos da Álgebra Linear, tais autovalores também o são de A^T , porque dada uma matriz quadrada N , como $\det N = \det N^T$, segue que se colocarmos $N = A - \lambda\mathcal{I}$, temos

$$(A - \lambda\mathcal{I})^T = A^T - \lambda\mathcal{I}^T = A^T - \lambda\mathcal{I},$$

donde $\det(A - \lambda\mathcal{I}) = \det(A^T - \lambda\mathcal{I})$.

Pela hipótese, v é autovetor de A^T associado ao autovalor real λ , isto é, $A^T v = \lambda v$. Afirmamos que $v = (\lambda^2, -\lambda, 1)$. De fato,

$$A^T v - \lambda v = \begin{pmatrix} t & m & d \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 t - m\lambda + d - \lambda^3 \\ -\lambda^2 + \lambda^2 \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

já que $p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 t - m\lambda + d$ é o polinômio característico de A^T e λ é raiz de tal polinômio. Logo, $v = (\lambda^2, -\lambda, 1)$ é autovetor de A^T associado ao autovalor real λ .

Como $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ são autovalores complexos de A , fixemos o autovalor $\alpha + i\beta$. No decorrer da demonstração da **Proposição 3.2.1**, vimos que

$$\left(1, t - \alpha, \frac{\alpha d}{\alpha^2 + \beta^2}\right) + i \left(0, -\beta, -\frac{\beta d}{\alpha^2 + \beta^2}\right) = w + iz$$

é autovetor associado a este autovalor. Como $t = 2\alpha + \lambda$ e $d = \lambda(\alpha^2 + \beta^2)$, é imediato verificar que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, z \rangle = 0,$$

donde v é ortogonal aos vetores w e z . Logo, v é ortogonal a toda combinação linear de w e z , pois, para todos $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\langle v, aw + bz \rangle = a \langle v, w \rangle + b \langle v, z \rangle = 0,$$

isto é, v é ortogonal ao plano $\Pi_F = [w, z]$. ■

Veremos agora que quando o sistema $x' = Ax$ está escrito na forma canônica observável de Liénard, a equação do plano focal da matriz A pode ser facilmente encontrada.

Lema 3.3.2. *Se a matriz A tem a forma*

$$A = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e seus autovalores são λ e $\alpha \pm i\beta$, com $\beta > 0$, então seu plano focal é descrito pela equação

$$\lambda^2 x - \lambda y + z = 0.$$

Demonstração. Dada uma matriz quadrada A , vimos que A e A^T têm os mesmos autovalores e que $v = (\lambda^2, -\lambda, 1)$ é autovetor de A^T associado ao autovalor real λ . Pelo **Lema 3.3.1**, v é ortogonal ao plano focal Π_F de A .

Considerando $p = (0, 0, 0)$, o qual pertence a Π_F por definição e $q = (x, y, z) \in \Pi_F$, segue que o vetor $pq = q - p = q \in \Pi_F$ e é ortogonal ao vetor v , isto é,

$$0 = \langle v, pq \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ -\lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda^2 x - \lambda y + z,$$

implicando que $\lambda^2 x - \lambda y + z = 0$ é a equação de Π_F . ■

Analisando o **Lema 3.3.1**, vale ressaltar que nem sempre o autoespaço gerado pelo autovetor associado ao autovalor real λ de A é ortogonal ao plano focal de A . Com efeito, dados os autovalores λ , $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$, com $\beta > 0$, sabemos que o plano focal da matriz A tem equação

$$\lambda^2 x - \lambda y + z = 0.$$

Logo, o vetor normal ao plano focal é

$$n = (\lambda^2, -\lambda, 1).$$

Vimos no decorrer da demonstração da **Proposição 3.2.1** que se v é autovetor associado ao autovalor real λ de A , então

$$v = \left(1, t - \lambda, \frac{d}{\lambda}\right).$$

Vamos mostrar que, nem sempre, o autoespaço gerado por v é ortogonal ao plano focal de A . Note inicialmente que o autoespaço não está contido no plano focal, porque, sendo os três autovalores distintos, os respectivos autovetores são linearmente independentes. Como o plano focal contém a origem e como o autoespaço passa pela origem, temos, então, que a intersecção do autoespaço com o plano focal contém a origem. Para ilustrar, considere a Figura 3.5.

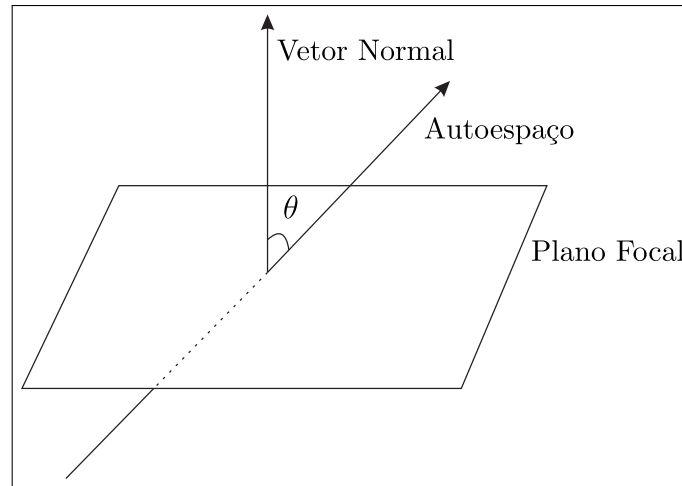


Figura 3.5: Intersecção do autoespaço gerado pelo autovetor v com o plano focal da matriz A .

Vamos determinar o ângulo θ na Figura 3.5. De fato, sabemos que

$$\langle n, v \rangle = \|n\| \|v\| \cos \theta$$

e, fazendo alguns cálculos, vemos que

$$\theta = \arccos \left(\frac{\beta^2 + (\alpha - \lambda)^2}{\sqrt{1 + \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2(2 + \beta^2)} \sqrt{1 + \lambda^2 + \lambda^4}} \right).$$

Por exemplo, tomando $\alpha = -0.1$, $\beta = 1$ e $\lambda = 0.05$, encontramos $\theta = 0.78$ com duas casas decimais. Assim, como $\theta \neq 0$, temos que o autoespaço não é ortogonal ao plano focal da matriz A .

Agora, dado o sistema (2.3), como as matrizes A^\pm têm autovalores λ^\pm e $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$, com $\beta^\pm > 0$, então existem dois planos focais, a saber, Π_F^+ e Π_F^- . Estes planos nos permitirão identificar as regiões do \mathbb{R}^3 nas quais podem ser encontrados, caso existam, os cones invariantes de duas zonas de tal sistema. Uma vez localizadas essas regiões do espaço, veremos que a busca de cones invariantes de duas zonas do sistema em questão se reduz ao estudo da existência de órbitas periódicas em alguns sistemas planos por partes contínuos.

Vamos definir *semiplano focal* a partir da noção de plano focal.

Definição 3.3.2. *Assuma que as matrizes do sistema (2.3) têm autovalores λ^\pm e $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$, com $\beta^\pm > 0$. Então, o semiplano*

$$\Pi_{HF}^- = \Pi_F^- \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0\}$$

é chamado de semiplano focal à esquerda do sistema (2.3) e o semiplano

$$\Pi_{HF}^+ = \Pi_F^+ \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$$

é chamado de semiplano focal à direita do sistema (2.3).

Pelo **Lema 3.3.2**, as equações dos semiplanos focais Π_{HF}^+ e Π_{HF}^- são

$$(\lambda^+)^2 x - \lambda^+ y + z = 0, \quad x \geq 0$$

e

$$(\lambda^-)^2 x - \lambda^- y + z = 0, \quad x \leq 0,$$

respectivamente.

Desde que o semiplano focal à esquerda Π_{HF}^- do sistema (2.3) é invariante para o sistema $x' = A^-x$, todo ponto $(0, y_0, z_0)$ no domínio de \mathcal{P}^- e localizado acima de Π_{HF}^- , ou seja, $z_0 > \lambda^- y_0$, é transformado, pelo fluxo, no ponto $(0, y_1, z_1)$, o qual também está

localizado acima de Π_{HF}^- , isto é, $z_1 > \lambda^- y_1$. Analogamente, quando $z_0 < \lambda^- y_0$, obtemos $z_1 < \lambda^- y_1$. Considerações análogas envolvendo o sistema $x' = A^+ x$ são claramente válidas.

Além disto, quando $\lambda^+ = \lambda^-$, a união dos semiplanos focais constitui um plano invariante para o sistema (2.3) e, conseqüentemente, um cone invariante planar de duas zonas para tal sistema. Neste caso, o sistema (3.12) trivialmente tem a solução $\tau^- = \tau^+ = \pi$, desde que $S(\lambda) = \lambda$.

Agora será estabelecida a posição relativa dos semiplanos focais e dos cones invariantes de duas zonas, se existirem, para **SLPC** e observáveis.

Diremos que um cone \mathcal{C} está acima de um plano se, para todo ponto $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{C}$ fora da origem, existir um outro ponto (x_1, y_1, z_2) pertencente ao plano tal que $z_1 > z_2$. Veja a Figura 3.6.

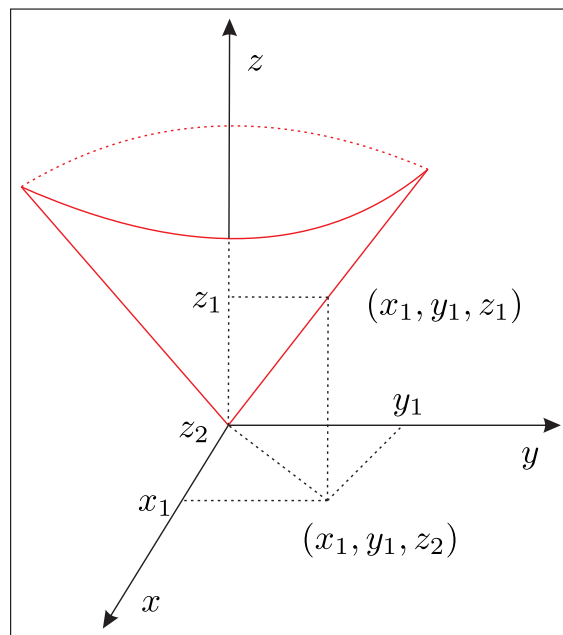


Figura 3.6: Cone invariante de duas zonas acima do plano $z = z_2$.

Analogamente, dizemos que um cone \mathcal{C} está abaixo de um plano se, para todo ponto $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{C}$ fora da origem, existir um ponto (x_1, y_1, z_2) pertencente ao plano tal que $z_1 < z_2$.

Lema 3.3.3. *Assuma que as matrizes A^\pm no sistema (2.3) têm autovalores λ^\pm e $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$, com $\beta^\pm > 0$. Se o sistema (2.3) tem um cone invariante não planar de duas zonas \mathcal{C} , então \mathcal{C} está ou acima ou abaixo de ambos os semiplanos focais Π_{HF}^+ e Π_{HF}^- .*

Demonstração. Note que se $\lambda^+ = \lambda^-$, então o sistema (2.3) tem um plano invariante de duas zonas e, conseqüentemente, um cone invariante planar de duas zonas. Logo, no que segue, consideraremos o caso

$$\lambda^+ \neq \lambda^-.$$

Os semiplanos focais

$$(\lambda^+)^2 x - \lambda^+ y + z = 0, \quad x \geq 0$$

e

$$(\lambda^-)^2 x - \lambda^- y + z = 0, \quad x \leq 0,$$

interceptarão o plano de separação $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\} =: \{x = 0\}$ nas retas

$$r^+ = \{z = \lambda^+ y\} \cap \Pi$$

e

$$r^- = \{z = \lambda^- y\} \cap \Pi.$$

Sabemos que $\Pi \setminus \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$ constitui uma seção transversal para o campo vetorial F subjacente ao sistema (2.3). Logo, sabemos que o fluxo adentra a região $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0\}$ para $y > 0$ e adentra a região $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ para $y < 0$. Assuma que o sistema (2.3) tem um cone invariante não planar de duas zonas \mathcal{C} e que a semirreta

$$r_0 = \{z = \lambda_0 y, y \geq 0\} \cap \Pi$$

gere \mathcal{C} (gerar no sentido de ser invariante pela aplicação de Poincaré \mathcal{P}).

Então, r_0 é transformada na semirreta

$$r_1 = \mathcal{P}^-(r_0) = \{z = \lambda_1 y, y \leq 0\} \cap \Pi$$

por meio do fluxo da região $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0\}$ e, como r_0 gera \mathcal{C} , temos $r_0 = \mathcal{P}^+(r_1)$ por meio do fluxo da região $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$.

Como tomamos $\lambda^- \neq \lambda^+$, assumamos que $\lambda^- > \lambda^+$. O caso $\lambda^+ > \lambda^-$ é análogo. Queremos provar que \mathcal{C} está ou acima ou abaixo dos semiplanos focais Π_{HF}^- e Π_{HF}^+ , isto é, se \mathcal{C} está acima de Π_{HF}^- , então \mathcal{C} está acima de Π_{HF}^+ e, se \mathcal{C} está abaixo de Π_{HF}^- , então \mathcal{C} está abaixo de Π_{HF}^+ . Vamos mostrar que se \mathcal{C} está acima de Π_{HF}^- , então \mathcal{C} está acima de Π_{HF}^+ . O outro caso segue raciocínio análogo, logo não faremos aqui.

Como a semirreta r_0 gera \mathcal{C} , assumamos que \mathcal{C} está acima do semiplano Π_{HF}^- . Logo, estamos assumindo que $\lambda_0 > \lambda^-$. Veja a Figura 3.7.

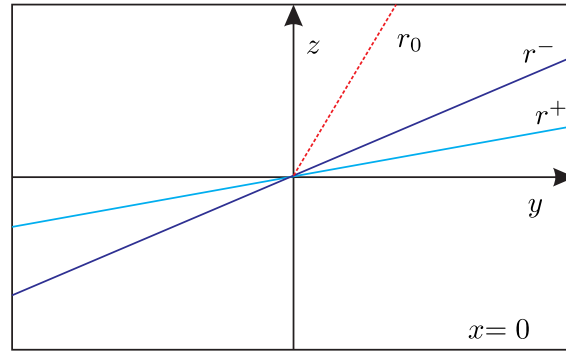


Figura 3.7: Representação da semirreta r_0 acima do semiplano Π_{HF}^- .

As posições das retas r^+ e r^- advém da hipótese $\lambda^- > \lambda^+$. Vamos mostrar que \mathcal{C} está acima de Π_{HF}^+ , isto é, que $r_1 = \mathcal{P}^-(r_0)$ está acima de r^+ , ou seja, que $\lambda_1 < \lambda^+$.

Caso 1: $\lambda_1 > \lambda^+$.

Neste caso, a Figura 3.8 descreve a presente situação.

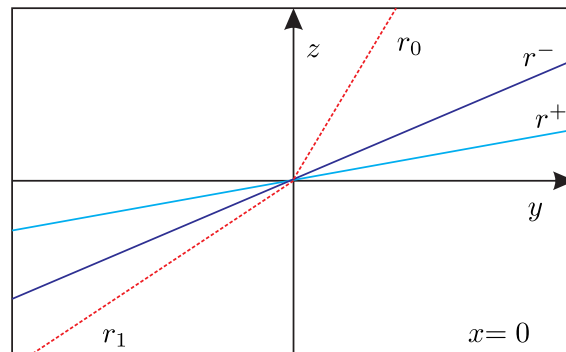


Figura 3.8: Representação da semirreta r_1 com inclinação maior do que λ^+ .

Segue que r_1 está abaixo de r^+ , pois $r^+ = \{z = \lambda^+ z\} \cap \Pi$ e $r_1 = \{z = \lambda_1 y, y \leq 0\} \cap \Pi$, com $\lambda_1 > \lambda^+$.

Afirmamos que $\mathcal{P}^+(r_1)$ está abaixo de r^+ . De fato, se $\mathcal{P}^+(r_1)$ coincidissem com r^+ , então r_1 seria invariante pelo fluxo e, daí, r_1 coincidiria com r^+ , o que é uma contradição. Além disto, se $\mathcal{P}^+(r_1)$ estivesse acima de r^+ , o fluxo do sistema $x' = A^+x$ seria transversal ao semiplano Π_{HF}^+ , contradizendo a definição de semiplano focal. Logo, vale a afirmação e, então, $\mathcal{P}^+(r_1) \neq r_0$, porque r_0 está acima de r^+ , donde r_0 não gera \mathcal{C} , contradição.

Caso 2: $\lambda_1 = \lambda^+$.

Neste caso, r_1 coincide com r^+ e, daí, $\mathcal{P}^+(r_1)$ coincide com r^+ , pois Π_{HF}^+ é invariante pelo fluxo do sistema $x' = A^+x$. Então, novamente encontramos $\mathcal{P}^+(r_1) \neq r_0$.

Portanto, como os dois casos anteriores nos levaram a uma contradição, pela *Lei da Tricotomia*, devemos ter que $\lambda^+ > \lambda_1$, ou seja, \mathcal{C} está acima de Π_{HF}^+ . Veja a Figura 3.9.

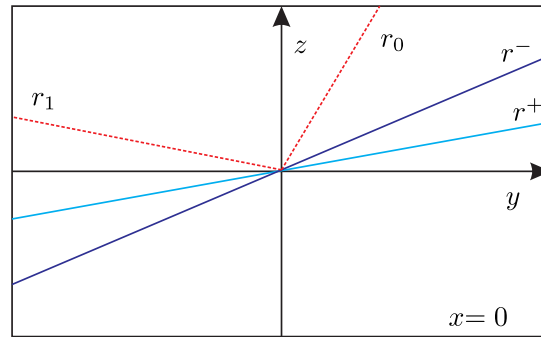


Figura 3.9: Representação da semirreta r_1 com inclinação menor do que λ^+ .

■

A seguir, provaremos que os cones invariantes não planares de duas zonas do sistema (2.3), se existirem, não compartilham pontos (além da origem) com os planos focais das matrizes A^\pm .

Proposição 3.3.1. *Assuma que as matrizes A^\pm no sistema (2.3) têm autovalores λ^\pm e $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$, com $\beta^\pm > 0$. Se o sistema (2.3) tem um cone invariante não planar de duas zonas \mathcal{C} , então \mathcal{C} está ou acima ou abaixo de ambos os planos focais Π_F^+ e Π_F^- .*

Demonstração. Observe que se tivermos $\lambda^+ = \lambda^-$, então $\Pi_F^+ \cup \Pi_F^-$ forma um plano focal para o sistema (2.3) e, como tal plano é invariante, segue que se o sistema (2.3) tem um cone invariante não planar de duas zonas \mathcal{C} , o mesmo deve estar ou acima ou abaixo de ambos os planos focais Π_F^+ e Π_F^- .

Seja, então, $\lambda^+ \neq \lambda^-$. Suprimindo os índices sobrescritos no sistema (2.3), escrevemos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e, daí,

$$\begin{cases} x' = tx - y, \\ y' = mx - z, \\ z' = dx. \end{cases} \quad (3.16)$$

Vamos provar inicialmente que se o sistema (2.3) tem um cone invariante não planar de duas zonas \mathcal{C} , então ele não intercepta Π_F^+ e Π_F^- . De fato, supondo que o sistema em questão possua um cone invariante não planar de duas zonas \mathcal{C} , para mostrarmos que \mathcal{C} não intercepta Π_F^+ , consideremos a mudança linear de variáveis

$$Z = (\lambda^+)^2 x - \lambda^+ y + z.$$

Assim, $z = Z - (\lambda^+)^2 x + \lambda^+ y$ e, do sistema (3.16), temos

$$\begin{aligned} Z' &= (\lambda^+)^2 x' - \lambda^+ y' + z' \\ &= (\lambda^+)^2 (tx - y) - \lambda^+ (mx - z) + dx \\ &= (\lambda^+)^2 (tx - y) - \lambda^+ (mx - Z + (\lambda^+)^2 x - \lambda^+ y) + dx \\ &= (\lambda^+)^2 tx - (\lambda^+)^2 y - \lambda^+ mx + \lambda^+ Z - (\lambda^+)^3 x + (\lambda^+)^2 y + dx \\ &= (-(\lambda^+)^3 + t(\lambda^+)^2 - \lambda^+ m + d)x + \lambda^+ Z \\ &= p_A(\lambda^+)x + \lambda^+ Z, \end{aligned}$$

sendo $p_A(\lambda^+)$ o polinômio característico de A avaliado em λ^+ . Além disto, temos também que

$$y' = mx - z = mx - Z + (\lambda^+)^2 x - \lambda^+ y = (m + (\lambda^+)^2)x - \lambda^+ y - Z.$$

Portanto, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} x' = tx - y, \\ y' = (m + (\lambda^+)^2)x - \lambda^+y - Z, \\ Z' = p_A(\lambda^+)x + \lambda^+Z, \end{cases}$$

e, como suprimimos todos os índices sobrescritos, na verdade, temos

$$\begin{cases} x' = t^\pm x - y, \\ y' = (m^\pm + (\lambda^+)^2)x - \lambda^+y - Z, \\ Z' = p_{A^\pm}(\lambda^+)x + \lambda^+Z. \end{cases} \quad (3.17)$$

Pela mudança de variáveis realizada, segue que o semiplano focal à direita do sistema (3.17) é $\{Z = 0\} \cap \{x \geq 0\}$, ou seja,

$$(\lambda^+)^2x - \lambda^+y + z = 0, \quad x \geq 0.$$

Se o sistema (2.3) tem um cone invariante de duas zonas \mathcal{C} , então o sistema (3.17) tem também um cone invariante de duas zonas $\tilde{\mathcal{C}}$, visto que a mudança

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (\lambda^+)^2 & -\lambda^+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

além de preservar o plano de separação, nos diz que tais sistemas são topologicamente equivalentes. O cone $\tilde{\mathcal{C}}$ não intercepta o semiplano focal

$$\{Z = 0\} \cap \{x \geq 0\},$$

porque o cone \mathcal{C} , pelo **Lema 3.3.3**, não intercepta o semiplano focal à direita Π_{HF}^+ do sistema (2.3). Logo, o cone $\tilde{\mathcal{C}}$ pode apenas interceptar o plano $Z = 0$ para $x < 0$. Vamos mostrar que isto também não acontece.

Como $\lambda^+ \neq \lambda^-$, pelo sistema (3.17) temos que Z' restrito ao semiplano $\{Z = 0\} \cap \{x < 0\}$ é dado por

$$Z' = p_{A^-}(\lambda^+)x \neq 0,$$

isto é, a derivada Z' não muda de sinal neste semiplano, porque $x < 0$ e $p_{A^-}(\lambda^+) \neq 0$. Logo, todas as órbitas do sistema (3.17) restritas ao semiplano $\{Z = 0\} \cap \{x < 0\}$ têm o mesmo sentido, donde concluimos que o cone invariante $\tilde{\mathcal{C}}$ não pode interceptar tal semiplano, porque se $\tilde{\mathcal{C}}$ cruzasse este semiplano, então cada órbita tangente ao cone $\tilde{\mathcal{C}}$ cruzaria este semiplano em dois pontos com sentidos distintos, o que contraria o fato de que todas as órbitas do sistema (3.17) interceptam tal semiplano no mesmo sentido. Portanto, \mathcal{C} não intercepta Π_F^+ .

Analogamente mostramos que o cone invariante não planar de duas zonas \mathcal{C} não pode interceptar o plano Π_F^- . Com efeito, consideremos a mudança linear de variáveis

$$Z = (\lambda^-)^2 x - \lambda^- y + z.$$

Assim, $z = Z - (\lambda^-)^2 x + \lambda^- y$ e, pelo sistema (3.16),

$$\begin{aligned} Z' &= (\lambda^-)^2 x' - \lambda^- y' + z' \\ &= (\lambda^-)^2 (tx - y) - \lambda^- (mx - z) + dx \\ &= (\lambda^-)^2 (tx - y) - \lambda^- (mx - Z + (\lambda^-)^2 x - \lambda^- y) + dx \\ &= (\lambda^-)^2 tx - (\lambda^-)^2 y - \lambda^- mx + \lambda^- Z - (\lambda^-)^3 x + (\lambda^-)^2 y + dx \\ &= (-(\lambda^-)^3 + t(\lambda^-)^2 - \lambda^- m + d)x + \lambda^- Z \\ &= p_A(\lambda^-)x + \lambda^- Z, \end{aligned}$$

sendo $p_A(\lambda^-)$ o polinômio característico de A avaliado em λ^- .

Temos também que

$$y' = mx - z = mx - Z + (\lambda^-)^2 x - \lambda^- y = (m + (\lambda^-)^2)x - \lambda^- y - Z.$$

Portanto, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} x' = tx - y, \\ y' = (m + (\lambda^-)^2)x - \lambda^- y - Z, \\ Z' = p_A(\lambda^-)x + \lambda^- Z, \end{cases}$$

e, como suprimimos todos os índices sobrescritos, na verdade, temos

$$\begin{cases} x' = t^\pm x - y, \\ y' = (m^\pm + (\lambda^-)^2)x - \lambda^- y - Z, \\ Z' = p_{A^\pm}(\lambda^-)x + \lambda^- Z, \end{cases} \quad (3.18)$$

e o resultado segue conforme fizemos no caso anterior. ■

Projetando o sistema (2.3) sobre os planos focais Π_F^+ e Π_F^- , o próximo resultado mostra que a procura de cones invariantes de duas zonas do sistema (2.3) pode ser transferida para a procura de órbitas periódicas de duas zonas em alguns sistemas planos.

Proposição 3.3.2. *Se λ^+ é um autovalor real da matriz A^+ , então os cones invariantes de duas zonas do sistema (2.3) que estão acima do plano*

$$(\lambda^+)^2 - \lambda^+ y + z = 0$$

correspondem injetivamente com as órbitas periódicas de duas zonas do sistema planar quadrático por partes

$$\begin{cases} \eta' = (t^\pm - \lambda^+) \eta - \xi - p_{A^\pm}(\lambda^+) \eta^2, \\ \xi' = (m^\pm + (\lambda^+)^2) \eta - 2\lambda^+ \xi - p_{A^\pm}(\lambda^+) \eta \xi - 1, \end{cases} \quad (3.19)$$

sendo $p_{A^\pm}(\lambda^+)$ o polinômio característico de A^\pm avaliado em λ^+ .

Demonstração. Vimos na **Proposição 3.3.1** que a mudança de variáveis

$$Z = (\lambda^+)^2 - \lambda^+ y + z$$

transforma o sistema (2.3) no sistema (3.17) e o plano focal Π_F^+ , invariante para o sistema $x' = A^+ x$, no plano $Z = 0$.

Considere

$$\eta = \frac{x}{Z}, \quad \xi = \frac{y}{Z},$$

para $Z > 0$, isto é, a mudança de variáveis mencionada é válida para órbitas do sistema (3.17) que se encontram acima do plano focal $Z = 0$. Omitindo os índices sobrescritos, temos

$$\begin{aligned}
\eta' &= \frac{x'Z - xZ'}{Z^2} \\
&= \frac{(tx - y)Z - x(p_A(\lambda^+)x + \lambda^+Z)}{Z^2} \\
&= t\frac{x}{Z} - \frac{y}{Z} - \frac{x^2}{Z^2}p_A(\lambda^+) - \frac{x}{Z}\lambda^+ \\
&= t\eta - \xi - \eta^2p_A(\lambda^+) - \eta\lambda^+ \\
&= (t - \lambda^+)\eta - \xi - p_A(\lambda^+)\eta^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\xi' &= \frac{y'Z - yZ'}{Z^2} \\
&= \frac{(m + (\lambda^+)^2)x - \lambda^+y - Z}{Z} - \frac{y}{Z^2}(p_A(\lambda^+)x + \lambda^+Z) \\
&= m\frac{x}{Z} + (\lambda^+)^2\frac{x}{Z} - \lambda^+\frac{y}{Z} - 1 - \frac{y}{Z}\frac{x}{Z}p_A(\lambda^+) - \lambda^+\frac{y}{Z} \\
&= m\eta + (\lambda^+)^2\eta - \lambda^+\xi - 1 - \eta\xi p_A(\lambda^+) - \lambda^+\xi \\
&= (m + (\lambda^+)^2)\eta - 2\lambda^+\xi - p_A(\lambda^+)\eta\xi - 1.
\end{aligned}$$

Como suprimimos todos os índices sobrescritos, encontramos

$$\begin{cases} Z' = p_{A^\pm}(\lambda^+)x + \lambda^+Z, \\ \eta' = (t^\pm - \lambda^+)\eta - \xi - p_{A^\pm}(\lambda^+)\eta^2, \\ \xi' = (m^\pm + (\lambda^+)^2)\eta - 2\lambda^+\xi - p_{A^\pm}(\lambda^+)\eta\xi - 1. \end{cases}$$

Assim, obtemos os sistemas planares

$$\begin{cases} \eta' = (t^- - \lambda^+)\eta - \xi - p_{A^-}(\lambda^+)\eta^2 \\ \xi' = (m^- + (\lambda^+)^2)\eta - 2\lambda^+\xi - p_{A^-}(\lambda^+)\eta\xi - 1 \end{cases}, \quad \eta \leq 0,$$

e

$$\begin{cases} \eta' = (t^+ - \lambda^+)\eta - \xi \\ \xi' = (m^+ + (\lambda^+)^2)\eta - 2\lambda^+\xi - 1 \end{cases}, \quad \eta > 0.$$

Observe que se $\lambda^+ = \lambda^-$, então os sistemas acima são lineares em cada semiplano. Além disto, se $\lambda^+ \neq \lambda^-$, então o sistema (3.19) é linear no semiplano $\eta \geq 0$ e quadrático no semiplano $\eta \leq 0$. Observe também que na reta de separação $\eta = 0$, o respectivo campo

vetorial é claramente contínuo.

Agora, assumamos que o sistema (2.3) possui um cone invariante de duas zonas. Logo, $u_0 = y_0/z_0$ é levado pela função S^- em $u_1 = y_1/z_1$, o qual é levado pela função S^+ em u_0 . Então, temos a seguinte representação na Figura 3.10.

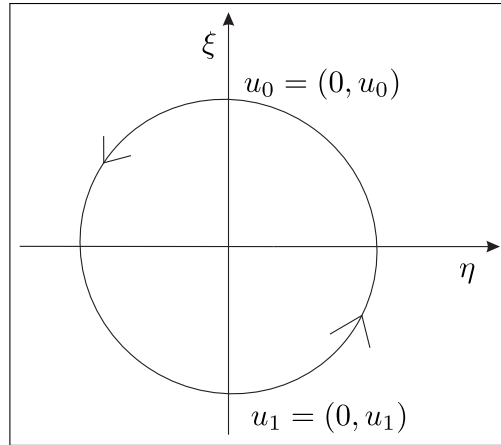


Figura 3.10: Órbita periódica no plano $\eta\xi$.

Como mencionamos anteriormente que o campo vetorial associado ao sistema (3.19) é contínuo, temos que este sistema possui uma órbita periódica. Por outro lado, dada uma órbita periódica para o sistema (3.19), segue imediatamente que o sistema (2.3) tem um cone invariante de duas zonas. Portanto, existe uma correspondência injetiva entre órbitas periódicas do sistema (3.19) e cones invariantes de duas zonas do sistema (2.3). ■

Proposição 3.3.3. *Se λ^+ é um autovalor real da matriz A^+ , então os cones invariantes de duas zonas do sistema (2.3) que estão abaixo do plano*

$$(\lambda^+)^2 - \lambda^+y + z = 0$$

correspondem injetivamente com as órbitas periódicas de duas zonas do sistema planar quadrático por partes

$$\begin{cases} \eta' = (t^\pm - \lambda^+)\eta - \xi + p_{A^\pm}(\lambda^+)\eta^2, \\ \xi' = (m^\pm + (\lambda^+)^2)\eta - 2\lambda^+\xi + p_{A^\pm}(\lambda^+)\eta\xi + 1, \end{cases} \quad (3.20)$$

sendo $p_{A^\pm}(\lambda^+)$ o polinômio característico de A^\pm avaliado em λ^+ .

Demonstração. Consideremos

$$Z = (\lambda^+)^2 x - \lambda^+ y + z.$$

Como antes, obtemos

$$Z' = p_{A^\pm}(\lambda^+)x + \lambda^+ Z,$$

e chegamos ao sistema (3.17). Fazendo a mudança de variáveis

$$\eta = -\frac{x}{Z}, \quad \xi = -\frac{y}{Z}, \quad Z < 0,$$

chegamos ao sistema (3.20) e o resultado segue. ■

Proposição 3.3.4. *Se λ^- é um autovalor real da matriz A^- , então os cones invariantes de duas zonas do sistema (2.3) que estão acima do plano*

$$(\lambda^-)^2 - \lambda^- y + z = 0$$

correspondem injetivamente com as órbitas periódicas de duas zonas do sistema planar quadrático por partes

$$\begin{cases} \eta' = (t^\pm - \lambda^-)\eta - \xi - p_{A^\pm}(\lambda^-)\eta^2, \\ \xi' = (m^\pm + (\lambda^-)^2)\eta - 2\lambda^- \xi - p_{A^\pm}(\lambda^-)\eta\xi - 1, \end{cases} \quad (3.21)$$

sendo $p_{A^\pm}(\lambda^-)$ o polinômio característico de A^\pm avaliado em λ^- .

Demonstração. Análoga à demonstração da **Proposição 3.3.2**. ■

Proposição 3.3.5. *Se λ^- é um autovalor real da matriz A^- , então os cones invariantes de duas zonas do sistema (2.3) que estão abaixo do plano*

$$(\lambda^-)^2 - \lambda^- y + z = 0$$

correspondem injetivamente com as órbitas periódicas de duas zonas do sistema planar quadrático por partes

$$\begin{cases} \eta' = (t^\pm - \lambda^-)\eta - \xi + p_{A^\pm}(\lambda^-)\eta^2, \\ \xi' = (m^\pm + (\lambda^-)^2)\eta - 2\lambda^- \xi + p_{A^\pm}(\lambda^-)\eta\xi + 1, \end{cases} \quad (3.22)$$

sendo $p_{A^\pm}(\lambda^-)$ o polinômio característico de A^\pm avaliado em λ^- .

Demonstração. Análoga à demonstração da **Proposição 3.3.3**. ■

Observe que os sistemas (3.19) até (3.22) sempre têm uma região linear, desde que $p_{A^+}(\lambda^+) = p_{A^-}(\lambda^-) = 0$.

Proposição 3.3.6. *Assuma que os autovalores das matrizes do sistema (2.3) são λ^\pm e $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$, com $\beta^\pm > 0$. Considere também que uma das seguintes condições é verificada:*

(a) $\gamma^- = 0, \gamma^+ \neq 0$ e $\gamma^+(t^+ - t^-) \leq 0$;

(b) $\gamma^+ = 0, \gamma^- \neq 0$ e $\gamma^-(t^- - t^+) \leq 0$.

Então, o sistema (2.3) não tem cones invariantes de duas zonas.

Demonstração. De acordo com a **Proposição 3.3.1**, os possíveis cones invariantes não planares de duas zonas do sistema (2.3) estão ou abaixo ou acima de ambos os planos focais Π_F^+ e Π_F^- . Em particular, estes cones estão ou acima de Π_F^+ ou abaixo de Π_F^- . Portanto, pelas **Proposições 3.3.2** e **3.3.5**, o sistema (2.3) tem cones invariantes de duas zonas quando ou o sistema (3.19) ou o sistema (3.22) tem órbitas periódicas de duas zonas.

Sejam F_1 o campo vetorial associado ao sistema (3.19) e F_2 o campo vetorial associado ao sistema (3.22). Então, resulta que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F_1(\eta, \xi) &= \frac{\partial}{\partial \eta} ((t^\pm - \lambda^+) \eta - \xi - p_{A^\pm}(\lambda^+) \eta^2) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \xi} ((m^\pm + (\lambda^+)^2) \eta - 2\lambda^+ \xi - p_{A^\pm}(\lambda^+) \eta \xi - 1) \\ &= (t^\pm - \lambda^+ - 2p_{A^\pm}(\lambda^+) \eta) + (-2\lambda^+ - p_{A^\pm}(\lambda^+) \eta) \\ &= t^\pm - 3\lambda^+ - 3p_{A^\pm}(\lambda^+) \eta. \end{aligned}$$

Como $t^\pm = \lambda^\pm + 2\alpha^\pm$, segue que

$$\operatorname{div} F_1(\eta, \xi) = \lambda^\pm + 2\alpha^\pm - 3\lambda^+ - 3p_{A^\pm}(\lambda^+) \eta.$$

Assim, se $\eta > 0$,

$$\operatorname{div} F_1(\eta, \xi) = \lambda^+ + 2\alpha^+ - 3\lambda^+ - 3p_{A^+}(\lambda^+) \eta = 2(\alpha^+ - \lambda^+)$$

e, se $\eta < 0$,

$$\operatorname{div}F_1(\eta, \xi) = \lambda^- + 2\alpha^- - 3\lambda^+ - 3p_{A^-}(\lambda^+)\eta = (2\alpha^- + \lambda^- - 3\lambda^+) - 3p_{A^-}(\lambda^+)\eta,$$

isto é,

$$\operatorname{div}F_1(\eta, \xi) = \begin{cases} 2(\alpha^+ - \lambda^+), & \eta > 0, \\ (2\alpha^- + \lambda^- - 3\lambda^+) - 3p_{A^-}(\lambda^+)\eta, & \eta < 0. \end{cases}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}F_2(\eta, \xi) &= \frac{\partial}{\partial \eta}((t^\pm - \lambda^-)\eta - \xi + p_{A^\pm}(\lambda^-)\eta^2) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi}((m^\pm + (\lambda^-)^2)\eta - 2\lambda^-\xi + p_{A^\pm}(\lambda^-)\eta\xi + 1) \\ &= (t^\pm - \lambda^- + 2p_{A^\pm}(\lambda^-)\eta) + (-2\lambda^- + p_{A^\pm}(\lambda^-)\eta) \\ &= t^\pm - 3\lambda^- + 3p_{A^\pm}(\lambda^-)\eta. \end{aligned}$$

Como $t^\pm = \lambda^\pm + 2\alpha^\pm$, temos

$$\operatorname{div}F_2(\eta, \xi) = \lambda^\pm + 2\alpha^\pm - 3\lambda^- + 3p_{A^\pm}(\lambda^-)\eta.$$

Assim, se $\eta > 0$,

$$\operatorname{div}F_2(\eta, \xi) = \lambda^+ + 2\alpha^+ - 3\lambda^- + 3p_{A^+}(\lambda^-)\eta = (2\alpha^+ + \lambda^+ - 3\lambda^-) + 3p_{A^+}(\lambda^-)\eta$$

e, se $\eta < 0$,

$$\operatorname{div}F_2(\eta, \xi) = \lambda^- + 2\alpha^- - 3\lambda^- + 3p_{A^-}(\lambda^-)\eta = 2(\alpha^- - \lambda^-),$$

ou seja,

$$\operatorname{div}F_2(\eta, \xi) = \begin{cases} (2\alpha^+ + \lambda^+ - 3\lambda^-) + 3p_{A^+}(\lambda^-)\eta, & \eta > 0, \\ 2(\alpha^- - \lambda^-), & \eta < 0. \end{cases}$$

Vamos supor que vale o item **(a)** desta proposição. O caso de supormos válido o item **(b)** é análogo, por isso não faremos aqui.

No item **(a)**, consideremos inicialmente o caso em que $\gamma^- = 0$, $\gamma^+ > 0$ e $t^+ - t^- \leq 0$.

Assim,

(i) Se $\gamma^- = 0$, então $\alpha^- = \lambda^-$;

(ii) Se $\gamma^+ > 0$, então $\alpha^+ > \lambda^+$;

(iii) Sendo $t^\pm = 2\alpha^\pm + \lambda^\pm$, então

$$\begin{aligned}
 0 &\geq t^+ - t^- \\
 &= (2\alpha^+ + \lambda^+) - (2\alpha^- + \lambda^-) \\
 &= 2\alpha^+ + \lambda^+ - 2\alpha^- - \alpha^- \\
 &= 2\alpha^+ + \lambda^+ - 3\alpha^- \\
 &> 2\lambda^+ + \lambda^+ - 3\alpha^- \\
 &= 3(\lambda^+ - \alpha^-),
 \end{aligned}$$

ou seja, $\lambda^+ - \alpha^- < 0$, donde $\lambda^+ < \lambda^-$.

(iv) Como $p_{A^-}(\lambda^-) = 0$ e p_{A^-} é decrescente, sendo $\lambda^+ < \lambda^-$, então $p_{A^-}(\lambda^+) > 0$.

(v) Como $p_{A^+}(\lambda^+) = 0$ e p_{A^+} é decrescente, sendo $\lambda^+ < \lambda^-$, então $p_{A^+}(\lambda^-) < 0$.

Esta análise detalhada nos possibilita determinar o sinal das divergências

$$\operatorname{div}F_1(\eta, \xi), \quad \operatorname{div}F_2(\eta, \xi).$$

Com efeito, para todo $\eta \neq 0$, temos que $\operatorname{div}F_1(\eta, \xi) > 0$, pois, se $\eta > 0$,

$$2(\alpha^+ - \lambda^+) > 0$$

e, se $\eta < 0$,

$$(2\alpha^- + \lambda^- - 3\lambda^+) - 3p_{A^-}(\lambda^+)\eta = 3(\alpha^- - \lambda^+) - 3p_{A^-}(\lambda^+)\eta > 0.$$

Além disto, sendo $\eta > 0$, temos que $\operatorname{div}F_2(\eta, \xi) < 0$, porque

$$(2\alpha^+ + \lambda^+ - 3\lambda^-) + 3p_{A^+}(\lambda^-)\eta < 0,$$

visto que $(2\alpha^+ + \lambda^+ - 3\lambda^-) \leq 0$ e, sendo $\eta < 0$, temos que $\operatorname{div}F_2(\eta, \xi) = 0$, pois

$$2(\alpha^- - \lambda^-) = 0.$$

Note que se mostrarmos que os sistemas (3.19) e (3.22) não têm órbitas periódicas de duas zonas, concluímos, então, que o sistema (2.3) não tem cones invariantes de duas zonas. De fato, suponha que o sistema (3.19) possua uma órbita periódica de duas zonas C (o caso de supor que (3.22) possua uma órbita periódica de duas zonas é analisado de maneira semelhante). Considere a representação dada na Figura 3.11, na qual A_1 indica a área delimitada pela curva $C_1 \cup C_3$ e A_2 indica a área delimitada pela curva $C_3 \cup C_2$.

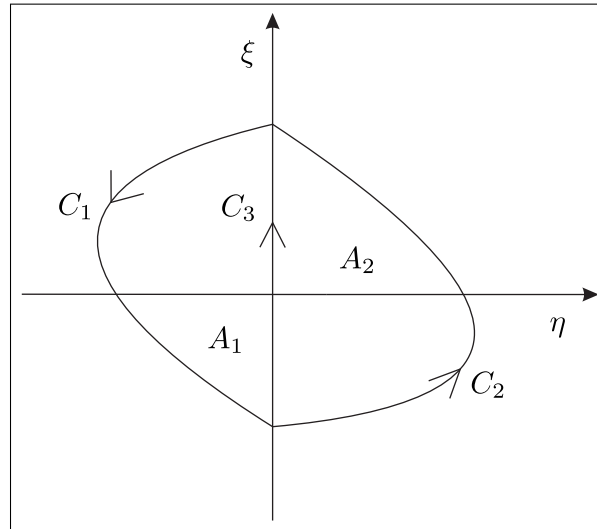


Figura 3.11: Possível órbita periódica de duas zonas $C = C_1 \cup C_2$ para o sistema (3.19).

Escrevemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} &= F_1(\xi, \eta) \\ &= (P(\xi, \eta), Q(\xi, \eta)). \end{aligned}$$

Pelo *Teorema de Green*, para $A = A_1 \cup A_2$, temos

$$\oint_C (P d\eta - Q d\xi) = \iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = \iint_A \operatorname{div} F_1(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Como a curva C deve estar orientada no sentido anti-horário, pela Figura 3.11, temos que

$$\begin{aligned} \oint_C (Pd\eta - Qd\xi) &= \int_{C_1} (Pd\eta - Qd\xi) + \int_{C_3} (Pd\eta - Qd\xi) + \\ &\quad + \int_{C_2} (Pd\eta - Qd\xi) - \int_{C_3} (Pd\eta - Qd\xi) \\ &= \int_{C_1} (Pd\eta - Qd\xi) + \int_{C_2} (Pd\eta - Qd\xi). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por um lado, sendo C órbita periódica do campo vetorial F_1 , conforme fizemos na demonstração do **Teorema 2.1.3**, temos que

$$\oint_C (Pd\eta - Qd\xi) = 0.$$

Por outro lado, sendo

$$\int_{C_1} (Pd\eta - Qd\xi) + \int_{C_3} (Pd\eta - Qd\xi) = \iint_{A_1} \operatorname{div} F_1(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

e

$$\int_{C_2} (Pd\eta - Qd\xi) - \int_{C_3} (Pd\eta - Qd\xi) = \iint_{A_2} \operatorname{div} F_1(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

como $\operatorname{div} F_1(\xi, \eta) < 0$ para todo $\eta \neq 0$, segue de (3.23) que

$$0 = \oint_C (Pd\eta - Qd\xi) = \iint_{A_1} \operatorname{div} F_1(\xi, \eta) d\xi d\eta + \iint_{A_2} \operatorname{div} F_1(\xi, \eta) d\xi d\eta \neq 0,$$

o que é um absurdo.

Agora, supondo $\gamma^+ < 0$ e $t^+ - t^- \geq 0$, analogamente se mostra que $\operatorname{div} F_1(\eta, \xi) < 0$ para todo $\eta \neq 0$, $\operatorname{div} F_2(\eta, \xi) > 0$ para todo $\eta > 0$ e $\operatorname{div} F_2(\eta, \xi) = 0$ para todo $\eta < 0$. A conclusão segue utilizando os mesmos argumentos aplicados para o caso anterior. ■

Prosseguindo com o nosso estudo, no **Lema 3.3.4** são elencadas algumas propriedades da função ϑ_γ definida pela equação (3.15).

Lema 3.3.4. *Para todo $\gamma \neq 0$ e $\tau \in (0, \hat{\tau})$, a função ϑ_γ verifica*

$$\gamma \vartheta'_\gamma(\tau) < 0, \quad \gamma(\vartheta_\gamma(\tau) - 1) < 0.$$

Demonstração. Suponha inicialmente que $\gamma > 0$. Como $\vartheta_\gamma(0) = 1$, $\vartheta_\gamma(\hat{\tau}) = 0$ pois $\gamma > 0$ e ϑ_γ é contínua em $[0, \hat{\tau})$ e não se anula em $[0, \hat{\tau})$, segue que $0 < \vartheta_\gamma(\tau) < 1$ para todo $\tau \in (0, \hat{\tau})$.

Considere, então, a função $\tilde{\vartheta}_\gamma : [0, \hat{\tau}) \rightarrow (-\infty, 0)$, definida por

$$\begin{aligned}\tilde{\vartheta}_\gamma(\tau) &= \log(\vartheta_\gamma(\tau)) \\ &= \log\left(\exp\left(-\frac{4}{3}\gamma\tau\right) \frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)}\right) \\ &= \log\left(\exp\left(-\frac{4}{3}\gamma\tau\right)\right) + \log\left(\frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)}\right) \\ &= \log\left(\frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)}\right) - \frac{4}{3}\gamma\tau, \quad \tau \in (0, \hat{\tau}).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\tilde{\vartheta}_\gamma(\tau) &= \frac{d}{d\tau}\log(\vartheta_\gamma(\tau)) \\ &= \frac{1}{\vartheta_\gamma(\tau)} \frac{d}{d\tau}\vartheta_\gamma(\tau) \\ &= \frac{1}{\vartheta_\gamma(\tau)} \frac{d}{d\tau}\left(\exp\left(-\frac{4}{3}\gamma\tau\right) \frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)}\right) \\ &= -\frac{4}{3}\gamma + \left(\frac{(\gamma^2 + 1)\operatorname{sen}(\tau)}{e^{-\gamma\tau} - \cos\tau + \gamma\operatorname{sen}\tau} + \frac{(\gamma^2 + 1)\operatorname{sen}(\tau)}{-e^{\gamma\tau} + \cos\tau + \gamma\operatorname{sen}\tau}\right) \\ &= -\frac{4}{3}\gamma + \left(\frac{e^{\gamma\tau}(\gamma^2 + 1)\operatorname{sen}(\tau)}{1 - e^{\gamma\tau}(\cos\tau - \gamma\operatorname{sen}\tau)} - \frac{e^{-\gamma\tau}(\gamma^2 + 1)\operatorname{sen}(\tau)}{1 - e^{-\gamma\tau}(\cos\tau + \gamma\operatorname{sen}\tau)}\right) \\ &= (\gamma^2 + 1) \left(\frac{e^{\gamma\tau}}{\varphi_\gamma(\tau)} - \frac{e^{-\gamma\tau}}{\varphi_{-\gamma}(\tau)}\right) \operatorname{sen}(\tau) - \frac{4}{3}\gamma,\end{aligned}\tag{3.24}$$

para todo $\tau \in (0, \hat{\tau})$.

Vamos determinar o sinal da equação (3.24). Para isto, fixemos $\gamma > 0$ e consideremos um sistema (2.3) bem específico, a saber, no qual as matrizes A^\pm têm os autovalores λ^\pm e $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$, com $\beta^\pm > 0$, verificando

$$\gamma = \gamma^+ = \frac{\alpha^+ - \lambda^+}{\beta^+}, \quad \lambda^- = \alpha^- = \frac{2\alpha^+ + \lambda^+}{3}.$$

Logo, $\gamma^- = 0$, $\gamma^+ = \gamma > 0$ e

$$\begin{aligned}
 t^+ - t^- &= (2\alpha^+ + \lambda^+) - (2\alpha^- + \lambda^-) \\
 &= (2\alpha^+ + \lambda^+) - 3\lambda^- \\
 &= (2\alpha^+ + \lambda^+) - 3\frac{2\alpha^+ + \lambda^+}{3} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Desta forma, pela **Proposição 3.3.6**, deduzimos que o nosso sistema específico não possui cones invariantes de duas zonas.

Assim, a função q introduzida no item **(d)** da **Proposição 3.2.2** verifica $q(u) \neq 0$, para todo $u \in \mathbb{R}$.

Como $\gamma^- = 0$, pelo item **(d)** da **Proposição 3.2.3**, temos que

$$\begin{aligned}
 S^-(u) &= -u + \frac{2}{3}t^- \\
 &= -u + \frac{2}{3}(2\alpha^- + \lambda^-) \\
 &= -u + \frac{2}{3}3\lambda^- \\
 &= -u + 2\lambda^-.
 \end{aligned}$$

Então, sendo $S^+(\lambda^+) = \lambda^+$ e $\lambda^+ = u(\pi)$,

$$\begin{aligned}
 q(\lambda^+) &= (S^+)^{-1}(\lambda^+) - S^-(\lambda^+) \\
 &= \lambda^+ - (-\lambda^+ + 2\lambda^-) \\
 &= 2(\lambda^+ - \lambda^-).
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Como $\gamma^+ > 0$, temos que $\alpha^+ > \lambda^+$ e, sendo $t^+ - t^- = 0$, resulta que

$$\begin{aligned}
 0 &= t^+ - t^- \\
 &= (2\alpha^+ + \lambda^+) - (2\alpha^- + \lambda^-) \\
 &= 2\alpha^+ + \lambda^+ - 3\lambda^- \\
 &> 2\lambda^+ + \lambda^+ - 3\lambda^- \\
 &= 3(\lambda^+ - \lambda^-),
 \end{aligned}$$

donde vemos que $\lambda^+ - \lambda^- < 0$, ou seja, $\lambda^+ < \lambda^-$.

Logo, na equação (3.25), temos

$$q(\lambda^+) = (S^+)^{-1}(\lambda^+) - S^-(\lambda^+) < 0.$$

Como o sistema não tem cones invariantes de duas zonas, a aplicação $S^+ \circ S^-$ não tem ponto fixo, donde segue que $q(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$ e, desde que $q(\lambda^+) = q(u(\pi)) < 0$, resulta que

$$\begin{aligned} q(u) &= (S^+)^{-1}(u) - S^-(u) \\ &= (S^+)^{-1}(u) - (-u + 2\lambda^-) \\ &= (S^+)^{-1}(u) + u - 2\lambda^- \\ &< 0, \quad u \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Como $S^+(v) = u$, da equação (3.3) que define z_1/y_1 e z_2/y_2 , temos que

$$(S^+)^{-1}(u) + u = v + u = 2\lambda^+ + \beta^+(\gamma^2 + 1) \left(\frac{e^{\gamma\tau} \operatorname{sen} \tau}{\varphi_\gamma(t)} - \frac{e^{-\gamma\tau} \operatorname{sen} \tau}{\varphi_{-\gamma}(t)} \right).$$

Então, pela desigualdade obtida em (3.26),

$$(S^+)^{-1}(u) + u - 2\lambda^- = 2(\lambda^+ - \lambda^-) + \beta^+(\gamma^2 + 1) \left(\frac{e^{\gamma\tau}}{\varphi_\gamma(t)} - \frac{e^{-\gamma\tau}}{\varphi_{-\gamma}(t)} \right) \operatorname{sen}(\tau) < 0.$$

Como $\beta^+ > 0$,

$$\frac{2}{\beta^+}(\lambda^+ - \lambda^-) + (\gamma^2 + 1) \left(\frac{e^{\gamma\tau}}{\varphi_\gamma(t)} - \frac{e^{-\gamma\tau}}{\varphi_{-\gamma}(t)} \right) \operatorname{sen}(\tau) < 0.$$

Mas

$$\frac{2}{\beta^+}(\lambda^+ - \lambda^-) = \frac{2}{\beta^+} \left(\lambda^+ - \frac{2\alpha^+ + \lambda^+}{3} \right) = \frac{2}{\beta^+} \frac{3\lambda^+ - 2\alpha^+ - \lambda^+}{3} = -\frac{4}{3} \frac{\alpha^+ - \lambda^+}{\beta^+} = -\frac{4}{3} \gamma^+.$$

Logo,

$$(\gamma^2 + 1) \left(\frac{e^{\gamma\tau}}{\varphi_\gamma(\tau)} - \frac{e^{-\gamma\tau}}{\varphi_{-\gamma}(\tau)} \right) \operatorname{sen}(\tau) - \frac{4}{3} \gamma < 0, \tag{3.27}$$

para $\tau \in (0, \hat{\tau})$, com $\varphi_\gamma(\hat{\tau}) = 0$.

Portanto, em (3.24), temos

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{\vartheta}_\gamma(\tau) < 0,$$

isto é,

$$\frac{1}{\vartheta_\gamma(\tau)} \frac{d}{d\tau} \vartheta_\gamma(\tau) < 0,$$

pois $0 < \vartheta_\gamma(\tau) < 1$, donde

$$\frac{d}{d\tau} \vartheta_\gamma(\tau) < 0, \quad \tau \in (0, \hat{\tau}).$$

Resulta que, para $\gamma > 0$,

$$\gamma \vartheta'_\gamma < 0, \quad \tau \in (0, \hat{\tau}).$$

Além disto, sendo $\vartheta_\gamma(\tau)$ decrescente, para todo $\tau \in (0, \hat{\tau})$ temos

$$1 = \vartheta_\gamma(0) > \vartheta_\gamma(\tau),$$

implicando que

$$\vartheta_\gamma(\tau) - 1 < 0$$

e, daí,

$$\gamma(\vartheta_\gamma(\tau) - 1) < 0, \quad \tau \in (0, \hat{\tau}), \quad \gamma > 0.$$

Concluimos, então, a demonstração para $\gamma > 0$.

Agora, observando que

$$\vartheta_{-\gamma}(\tau) = \exp\left(\frac{4}{3}\gamma\tau\right) \frac{\vartheta_{-\gamma}(\tau)}{\vartheta_\gamma(\tau)} = \frac{1}{\vartheta_\gamma(\tau)}, \quad \tau \in [0, \hat{\tau}),$$

temos que

$$\vartheta_\gamma(\tau) = \frac{1}{\vartheta_{-\gamma}(\tau)}, \quad \tau \in [0, \hat{\tau}).$$

Sendo $\gamma < 0$, então $-\gamma > 0$, valendo, assim, o resultado provado anteriormente para $\vartheta_{-\gamma}(\tau)$.

Logo, sendo $\vartheta'_{-\gamma}(\tau) < 0$, segue que

$$\vartheta'_\gamma(\tau) = -\frac{\vartheta'_{-\gamma}}{(\vartheta_{-\gamma}(\tau))^2} > 0$$

e, para $\gamma < 0$, temos $\gamma \vartheta'_\gamma(\tau) < 0$.

E também, como $\vartheta_{-\gamma}(\tau) - 1 < 0$, isto é, $\vartheta_{-\gamma}(\tau) < 1$, temos $(\vartheta_{-\gamma}(\tau))^{-1} > 1$, o que fornece

$$\vartheta_\gamma(\tau) - 1 = \frac{1}{\vartheta_{-\gamma}(\tau)} - 1 > 0$$

e, sendo $\gamma < 0$,

$$\gamma(\vartheta_\gamma(\tau) - 1) < 0.$$

Portanto, a função ϑ_γ verifica o **Lema 3.3.4**. ■

Veremos, enfim, as provas dos itens **(g)** e **(h)** da **Proposição 3.2.3**.

Demonstração do item (g). Como pelo item **(b)** da **Proposição 3.2.3**, vale

$$S'(u) = -\vartheta_\gamma^3(\tau),$$

resulta que

$$\begin{aligned} \gamma(1 + S'(u)) &= \gamma(1 - \vartheta_\gamma^3(\tau)) \\ &= -\gamma(\vartheta_\gamma^3(\tau) - 1) \\ &= -\gamma(\vartheta_\gamma(\tau) - 1)(\vartheta_\gamma^2(\tau) + \vartheta_\gamma(\tau) + 1). \end{aligned}$$

Temos dois casos para analisar.

Caso 1: $\gamma < 0$.

Pelo **Lema 3.3.4**, $\gamma(\vartheta_\gamma(\tau) - 1) < 0$ e, como $\vartheta_\gamma^2(\tau) + \vartheta_\gamma(\tau) + 1 > 0$, segue que

$$\gamma(1 + S'(u)) > 0.$$

Caso 2: $\gamma > 0$.

Pelo **Lema 3.3.4**, sendo $\gamma > 0$, segue em particular que $\vartheta_\gamma(\tau) - 1 < 0$. Além disto, como $\vartheta_\gamma^2(\tau) + \vartheta_\gamma(\tau) + 1 > 0$ e $-\gamma < 0$, resulta que

$$\gamma(1 + S'(u)) > 0.$$

Portando, vale o item **(g)**. ■

Demonstração do item (h). Temos que

$$\gamma S''(u) = \gamma(-\vartheta_\gamma^3(\tau))' = -3\gamma(\vartheta_\gamma(\tau))^2 \vartheta_\gamma'(\tau) \frac{d}{du} \tau.$$

Pelo item **(a)** do **Lema 3.2.1**, segue que se $du/d\tau < 0$, então $d\tau/du < 0$. Como $\vartheta_\gamma^2(\tau) > 0$, basta analisar o sinal de $-\gamma\vartheta_\gamma'(\tau)$.

Temos dois casos para serem analisados.

Caso 1: $\gamma < 0$.

Pelo **Lema 3.3.4**, $\gamma\vartheta'_\gamma(\tau) < 0$ e, daí, $-3\gamma\vartheta'_\gamma(\tau) > 0$, donde concluimos que $\gamma S''(u) < 0$.

Caso 2: $\gamma > 0$.

Pelo **Lema 3.3.4**, sendo $\gamma > 0$, segue em particular que $\vartheta'_\gamma(\tau) < 0$ e, daí, $-3\gamma\vartheta'_\gamma(\tau) > 0$, implicando que $\gamma S''(u) < 0$.

Logo, vale o item **(h)**. ■

Os conceitos desenvolvidos neste capítulo, que agora se encerra, serão essenciais para estudarmos, no Capítulo 4, a existência, unicidade e estabilidade de cones invariantes do sistema (2.3).

Capítulo 4

Existência, Unicidade e Estabilidade de Cones Invariantes

O objetivo deste capítulo é estudar a existência, unicidade e estabilidade de cones invariantes quando o sistema (2.3) é observável e as matrizes A^\pm têm um par de autovalores complexos conjugados. Finalizaremos este capítulo com uma seção na qual apresentamos diagramas de bifurcações de cones invariantes.

4.1 Existência, Unicidade e Estabilidade

O principal resultado deste capítulo é o **Teorema 4.1.1** desta seção. Antes de enunciarmos e demonstrarmos tal teorema, precisamos fazer algumas considerações sobre as funções v_H e u_V introduzidas, respectivamente, nas afirmações (e) e (f) da **Proposição 3.2.3**.

Como já sabemos, para cada $\gamma > 0$ existe um único $\hat{\tau} \in (\pi, 2\pi)$ que verifica

$$\varphi_\gamma(\hat{\tau}) = 0.$$

Logo, $\hat{\tau}$ é (implicitamente) função de γ e escrevemos

$$\begin{aligned} \hat{\tau} : (0, +\infty) &\longrightarrow (\pi, 2\pi) \\ \gamma &\longmapsto \hat{\tau}(\gamma). \end{aligned}$$

Provamos na página 56 que

$$\frac{d}{d\tau}\varphi_\gamma(\tau) < 0, \quad \tau \in (\pi, 2\pi), \quad \gamma > 0. \quad (4.1)$$

Sendo φ_γ de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, e como $\varphi_\gamma(\hat{\tau}) = 0$, pelo *Teorema da Função Implícita*, $\hat{\tau}$ é função de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$. Além disto, tendo em vista que $\varphi_\gamma(\hat{\tau}) = 0$, obtemos

$$e^{\gamma\hat{\tau}(\gamma)} (\cos(\hat{\tau}(\gamma)) - \gamma \operatorname{sen}(\hat{\tau}(\gamma))) = 1.$$

Assim, quando $\gamma \rightarrow 0^+$, temos que $\cos(\hat{\tau}(\gamma)) \rightarrow 1$ e, daí,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \hat{\tau} = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \hat{\tau}(\gamma) = 2\pi.$$

Como $\hat{\tau} \in (\pi, 2\pi)$, vale (4.1) e, do limite acima, resulta que

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \hat{\tau} = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \hat{\tau}(\gamma) = \pi.$$

Os fatos mencionados no último parágrafo serão fortemente utilizados na demonstração dos **Lemas 4.1.1** e **4.1.2** a seguir.

Lema 4.1.1. *Considere $\gamma > 0$ e seja λ um número real fixo em (3.13). Então, sendo $\varphi_\gamma(\hat{\tau}) = 0$, $v_H = \alpha - \beta \cot \hat{\tau}$ verifica as seguintes propriedades:*

(a) *Para todo $\beta > 0$ fixado, temos*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \lambda} v_H = +\infty, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} v_H = \lambda;$$

(b) *Para todo valor $\alpha > \lambda$ fixado, temos*

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} v_H = +\infty, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0^+} v_H = \lambda.$$

Demonstração. (a) Assuma que $\beta > 0$ é um valor fixado. Assim, se $\alpha \rightarrow \lambda$, então

$$\gamma = \frac{\alpha - \lambda}{\beta} \rightarrow 0$$

e, daí,

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}(\gamma) \rightarrow 2\pi.$$

Logo, $\cot \hat{\tau} \rightarrow -\infty$, implicando que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \lambda} v_H = \lim_{\hat{\tau} \rightarrow 2\pi} (\alpha - \beta \cot \hat{\tau}) = +\infty.$$

Além disto, se $\alpha \rightarrow +\infty$, então $\gamma \rightarrow +\infty$ e, daí, $\hat{\tau} = \hat{\tau}(\gamma) \rightarrow \pi$, o que implica em $\cot \hat{\tau} \rightarrow +\infty$, já que $\hat{\tau} \in (\pi, 2\pi)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} v_H &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} (\alpha - \beta \cot \hat{\tau}) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\alpha - \frac{\alpha - \lambda}{\gamma} \frac{1}{\operatorname{tg} \hat{\tau}} \right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\alpha \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau} - \alpha + \lambda}{\gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\lambda - \alpha(1 - \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau})}{\gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sabendo que $\varphi_\gamma(\hat{\tau}) = 0$, isto é, $1 - e^{\gamma \hat{\tau}}(\cos \hat{\tau} - \gamma \operatorname{sen} \hat{\tau}) = 0$, segue que

$$(1 - \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}) e^{\gamma \hat{\tau}} \cos \hat{\tau} = 1$$

donde

$$e^{-\gamma \hat{\tau}} = (1 - \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}) \cos \hat{\tau}.$$

Resulta que

$$1 - \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau} = \frac{e^{-\gamma \hat{\tau}}}{\cos \hat{\tau}}.$$

Assim,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha(1 - \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\alpha e^{-\gamma \hat{\tau}}}{\cos \hat{\tau}} = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\cos \hat{\tau}} \frac{1}{e^{\gamma \hat{\tau}}} = 0$$

e

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau} = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{e^{-\gamma \hat{\tau}}}{\cos \hat{\tau}} \right) = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\cos \hat{\tau} e^{\gamma \hat{\tau}}} \right) = 1.$$

Logo, em (4.2),

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} v_H = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda}{\gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}} - \frac{\alpha(1 - \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau})}{\gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}} \right) = \lambda,$$

terminando, assim, a demonstração do item **(a)**.

(b) Assuma que $\alpha > \lambda$ é um valor fixo. Então, se $\beta \rightarrow +\infty$, segue que $\gamma \rightarrow 0$ e, daí, $\hat{\tau} \rightarrow 2\pi$, implicando que

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} v_H = \lim_{\hat{\tau} \rightarrow 2\pi} (\alpha - \beta \cot \hat{\tau}) = +\infty.$$

Agora, se $\beta \rightarrow 0^+$, então $\gamma \rightarrow +\infty$, e, como fizemos na demonstração do item (a),

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} v_H = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(\alpha - \frac{\alpha - \lambda}{\gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}} \right) = \alpha - \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\alpha - \lambda}{\gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}} = \alpha - \alpha + \lambda = \lambda,$$

como queríamos provar. ■

O **Lema 4.1.2** a seguir apresenta para u_V propriedades análogas às de v_H , elencadas no **Lema 4.1.1**.

Lema 4.1.2. *Considere $\gamma < 0$ e assumo que λ é um número real fixado em (3.13). Então, $u_V = \alpha + \beta \cot \hat{\tau}$, sendo $\varphi_{-\gamma}(\hat{\tau}) = 0$, verifica as seguintes propriedades:*

(a) *Para todo valor $\beta > 0$ fixado, temos*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \lambda} u_V = -\infty, \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} u_V = \lambda;$$

(b) *Para todo valor fixado $\alpha < \lambda$, temos*

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} u_V = -\infty, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0^+} u_V = \lambda.$$

Demonstração. Seguiremos os mesmos passos descritos na demonstração do **Lema 4.1.1**.

Como $\gamma < 0$ e $\hat{\tau} \in (\pi, 2\pi)$ é tal que $\varphi_{-\gamma}(\hat{\tau}) = 0$, então, como antes

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^-} \hat{\tau} = 2\pi, \quad \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \hat{\tau} = \pi.$$

(a) Seja $\beta > 0$ valor fixado. Assim, se $\alpha \rightarrow \lambda$, então $\gamma \rightarrow 0^-$ e, daí, $\hat{\tau} = \hat{\tau}(\gamma) \rightarrow 2\pi$.

Logo, $\cot \hat{\tau} \rightarrow -\infty$ o que implica em

$$\lim_{\alpha \rightarrow \lambda} u_V = \lim_{\hat{\tau} \rightarrow 2\pi} (\alpha + \beta \cot \hat{\tau}) = -\infty.$$

Além disto, se $\alpha \rightarrow -\infty$, então $\gamma \rightarrow -\infty$ e $\hat{\tau} = \hat{\tau}(\gamma) \rightarrow \pi$. Então, $\cot \hat{\tau} \rightarrow +\infty$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} u_V &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (\alpha + \beta \cot \hat{\tau}) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left(\alpha + \frac{\alpha - \lambda}{\gamma} \frac{1}{\operatorname{tg} \hat{\tau}} \right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{\alpha \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau} + \alpha - \lambda}{\gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-\lambda + \alpha(1 + \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau})}{\gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Sabendo que $\varphi_{-\gamma}(\hat{\tau}) = 0$, isto é, $1 - e^{-\gamma\hat{\tau}}(\cos \hat{\tau} + \gamma \operatorname{sen} \hat{\tau}) = 0$, segue que

$$(1 + \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau})e^{-\gamma\hat{\tau}} \cos \hat{\tau} = 1,$$

donde

$$e^{\gamma\hat{\tau}} = (1 + \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}) \cos \hat{\tau}.$$

Resulta que

$$1 + \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau} = \frac{e^{\gamma\hat{\tau}}}{\cos \hat{\tau}}.$$

Assim,

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \alpha(1 + \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}) = \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \frac{\alpha e^{\gamma\hat{\tau}}}{\cos \hat{\tau}} = 0$$

e

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \gamma \operatorname{tg} \hat{\tau} = \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{\gamma\hat{\tau}}}{\cos \hat{\tau}} - 1 \right) = -1.$$

Logo, em (4.3),

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} u_V = \frac{-\lambda}{-1} = \lambda.$$

(b) Sendo $\alpha < \lambda$, então

$$\gamma = \frac{\alpha - \lambda}{\beta} < 0.$$

Note que se $\beta \rightarrow +\infty$, então $\gamma \rightarrow 0^-$ e, daí, $\hat{\tau} \rightarrow 2\pi$, o que implica

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} u_V = \lim_{\hat{\tau} \rightarrow 2\pi} (\alpha + \beta \cot \hat{\tau}) = -\infty.$$

Agora, se $\beta \rightarrow 0^+$ e $\alpha - \lambda < 0$, então $\gamma \rightarrow -\infty$. Assim, como antes, temos

$$\alpha + \beta \cot \hat{\tau} = \alpha + \frac{\alpha - \lambda}{\gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}}$$

e, daí,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} u_V = \alpha + \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \frac{\alpha - \lambda}{\gamma \operatorname{tg} \hat{\tau}} = \alpha + \frac{\alpha - \lambda}{-1} = \lambda.$$

■

A **Definição 4.1.1** estabelece um conceito que será discutido no **Teorema 4.1.1**, o qual é o principal teorema deste capítulo e, indubitavelmente, da dissertação.

Definição 4.1.1. Dizemos que o sistema (2.3) tem um contínuo de cones invariantes de uma zona quando o sistema projetado (2.4) possuir um ponto de equilíbrio do tipo centro cujas órbitas periódicas não interceptam transversalmente o plano de separação.

Teorema 4.1.1. Suponha que o sistema (2.3) é observável e os autovalores das matrizes A^\pm são λ^\pm e $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$, com $\beta^\pm > 0$. Então, são válidas as seguintes afirmações:

- (a) Se $\gamma^+\gamma^- > 0$, então o sistema (2.3) tem um único cone invariante de duas zonas hiperbólico, sendo que tal cone é assintoticamente estável se $\gamma^+ + \gamma^- > 0$ e instável se $\gamma^+ + \gamma^- < 0$;
- (b) Se $\gamma^+ = \gamma^- = 0$, então valem as seguintes afirmações:
- (b1) Se $t^+ = t^-$, então \mathbb{R}^3 é folheado por cones invariantes do sistema (2.3);
- (b2) Se $t^+ \neq t^-$, então o sistema (2.3) tem dois contínuos de cones invariantes de uma zona e não possui cones invariantes de duas zonas;
- (c) Se $\gamma^+\gamma^- = 0$ e $\gamma^+ + \gamma^- \neq 0$, então o sistema (2.3) tem um contínuo de cones invariantes de uma zona e surgem os seguintes casos:
- (c1) Se $\gamma^+ = 0$ e $(t^+ - t^-)\gamma^- < 0$, então o sistema (2.3) tem um único cone invariante de duas zonas hiperbólico, sendo tal cone assintoticamente estável se $\gamma^- > 0$ e instável se $\gamma^- < 0$;
- (c2) Se $\gamma^+ = 0$ e $(t^+ - t^-)\gamma^- \geq 0$, então o sistema (2.3) não tem cones invariantes de duas zonas;
- (c3) Se $\gamma^- = 0$ e $(t^+ - t^-)\gamma^+ > 0$, então o sistema (2.3) tem um único cone invariante de duas zonas hiperbólico, sendo tal cone assintoticamente estável se $\gamma^+ > 0$ e instável se $\gamma^+ < 0$;
- (c4) Se $\gamma^- = 0$ e $(t^+ - t^-)\gamma^+ \leq 0$, então o sistema (2.3) não tem cones invariantes de duas zonas;
- (d) Se $\gamma^+\gamma^- < 0$, então o sistema (2.3) tem, no máximo, dois cones invariantes de duas zonas. Quando o sistema (2.3) tem dois cones invariantes de duas zonas distintos,

então ambos os cones são hiperbólicos, sendo que um deles é assintoticamente estável e o outro é instável. Além disto, ocorrem as seguintes afirmações:

(d1) Se $(t^+ - t^-)\gamma^+ \leq 0$, então o sistema (2.3) não tem cones invariantes;

(d2) Se $(t^+ - t^-)\gamma^+ > 0$, valem os seguintes casos:

(d2.1) Se $(\lambda^+ - \lambda^-)\gamma^+ > 0$, então o sistema (2.3) tem dois cones invariantes de duas zonas;

(d2.2) Se $\lambda^+ = \lambda^-$, então o sistema (2.3) tem dois cones invariantes de duas zonas para $\gamma^+ + \gamma^- \neq 0$ e tem um único cone invariante de duas zonas quando $\gamma^+ + \gamma^- = 0$, o qual não é hiperbólico;

(d2.3) Se $(\lambda^+ - \lambda^-)\gamma^+ < 0$, então o sistema (2.3) tem dois cones invariantes de duas zonas se ou $|\gamma^+|$ ou $|\gamma^-|$ é suficientemente pequeno. Além disto, assumindo que λ^+ e λ^- estão fixados, são válidas:

(i) Para todos os valores fixados de α^+ e α^- , o sistema (2.3) não tem cones invariantes quando β^+ e β^- são suficientemente pequenos;

(ii) Para todos os valores fixados de β^+ e β^- , o sistema (2.3) não tem cones invariantes quando $|\alpha^+|$ e $|\alpha^-|$ são suficientemente grandes.

Demonstração. **(a)** Sendo $\gamma^+\gamma^- > 0$, então

$$(\alpha^+ - \lambda^+)(\alpha^- - \lambda^-) > 0.$$

Pelo **Teorema 2.3.1**, o sistema (2.3) tem pelo menos um cone invariante \mathcal{C} de duas zonas. Vamos mostrar que \mathcal{C} é único. De fato, suponha inicialmente que $\gamma^\pm > 0$. Vimos anteriormente que

$$S'(u) = -e^{-4\gamma\tau} \left(\frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)} \right)^3 = -\vartheta_\gamma^3(\tau),$$

sendo

$$\vartheta_\gamma(\tau) = \exp\left(-\frac{4}{3}\gamma\tau\right) \frac{\varphi_\gamma(\tau)}{\varphi_{-\gamma}(\tau)}, \quad \vartheta_\gamma(0) = 1, \quad \tau \in (0, \hat{\tau}).$$

Assim, pela *Regra da Cadeia*,

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}(S^+ \circ S^-)(u) &= (S^+)'(S^-(u))(S^-)'(u) \\ &= (S^+)'(v)(S^-)'(u) \\ &= \vartheta_{\gamma^+}^3(\tau^+) \vartheta_{\gamma^-}^3(\tau^-) \\ &< 1, \end{aligned}$$

porque, pelo **Lema 3.3.4**, $0 < \vartheta_{\gamma^\pm}^3(\tau^\pm) < 1$, para todo $\tau^\pm \in (0, \hat{\tau}^\pm)$ e todo $\gamma^\pm > 0$. Como o sistema (2.3) tem um cone invariante de duas zonas, então a função d introduzida no item (d) da **Proposição 3.2.2** se anula em um ponto, digamos k , isto é,

$$d(k) = (S^+ \circ S^-)(k) - k = 0.$$

Como para todo $u \in \mathbb{R}$ temos

$$d'(u) = (S^+ \circ S^-)'(u) - u' < 1 - 1 = 0,$$

pelo resultado provado anteriormente, segue que a função d é estritamente decrescente e se anula em um ponto. Sendo d diferenciável, a mesma é contínua e, daí, pelo *Teorema do Valor Intermediário*, o ponto no qual d se anula é único, donde concluímos que o sistema (2.3) tem um único cone invariante de duas zonas. Neste caso, como $0 < (S^+ \circ S^-)'(u) < 1$, temos que tal cone invariante é hiperbólico e assintoticamente estável, porque $|(S^+ \circ S^-)'(u)| < 1$.

Supondo agora o caso em que $\gamma^\pm < 0$, encontramos que

$$(S^+ \circ S^-)'(u) > 1,$$

para todo u no domínio de $S^+ \circ S^-$ pois, neste caso, pelo **Lema 3.3.4**, $\vartheta_{\gamma^\pm}(\tau) > 1$ para $\gamma^\pm < 0$. Como fizemos anteriormente, é fácil mostrar que a função d é crescente ($d'(u) > 0$) e que existe um único cone invariante de duas zonas, o qual é hiperbólico e instável porque $|(S^+ \circ S^-)'(u)| > 1$.

(b) Se $\gamma^+ = \gamma^- = 0$, então

$$\alpha^+ - \lambda^+ = \alpha^- - \lambda^- = 0$$

e, daí,

$$\alpha^+ = \lambda^+, \quad \alpha^- = \lambda^-,$$

donde

$$t^+ = 2\alpha^+ + \lambda^+ = 3\lambda^+, \quad t^- = 2\alpha^- + \lambda^- = 3\lambda^-.$$

Segundo o item (d) da **Proposição 3.2.3**, se $\gamma^\pm = 0$, então

$$S^\pm(u) = -u + \frac{2}{3}t^\pm.$$

Logo, para todo u no domínio de $S^+ \circ S^-$, temos que

$$\begin{aligned} (S^+ \circ S^-)(u) &= S^+(S^-(u)) \\ &= S^+\left(-u + \frac{2}{3}t^-\right) \\ &= -\left(-u + \frac{2}{3}t^-\right) + \frac{2}{3}t^+ \\ &= u + \frac{2}{3}(t^+ - t^-). \end{aligned}$$

Surgem os seguintes casos:

- (b1) Se $t^+ = t^-$, então a função d introduzida no item (d) da **Proposição 3.2.2** é identicamente nula. Além disto, pelas **Proposições 2.3.3** e **2.3.5**, temos que o sistema projetado possui órbitas periódicas de uma zona, desde que $\alpha^+ = \lambda^+$ e $\alpha^- = \lambda^-$. Portanto, todas as soluções do sistema projetado são periódicas e, então, \mathbb{R}^3 é folheado por cones invariantes, tanto de uma quanto de duas zonas, do sistema (2.3).
- (b2) Se $t^+ \neq t^-$, então $d(u) \neq 0$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Desta forma, o sistema (2.3) não tem cones invariante de duas zonas. Entretanto, como $\gamma^+ = \gamma^- = 0$, pelas **Proposições 2.3.3** e **2.3.5**, segue que o sistema (2.3) possui dois contínuos de cones invariantes de uma zona.
- (c) Neste caso, como ou γ^+ ou γ^- é zero, segue das **Proposições 2.3.3** e **2.3.5** que o sistema (2.3) possui um contínuo de cones invariantes de uma zona.

(c1) Temos por hipótese que $\gamma^+ = 0$ e $(t^+ - t^-)\gamma^- < 0$, sendo $\gamma^- \neq 0$. Assuma que $\gamma^- > 0$, logo $t^+ - t^- < 0$. A função d introduzida no item (d) da **Proposição 3.2.2**, verifica

$$\begin{aligned} d(u) &= (S^+ \circ S^-)(u) - u \\ &= S^+(S^-(u)) - u \\ &= -S^-(u) + 2\lambda^+ - u \end{aligned}$$

pelo item (d) da **Proposição 3.2.3**, visto que $\gamma^+ = 0$, o que implica $\alpha^+ = \lambda^+$. Logo, utilizando o item (c) da **Proposição 3.2.3**,

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} d(u) &= \lim_{u \rightarrow +\infty} (-S^-(u) + 2\lambda^+ - u) \\ &= - \lim_{u \rightarrow +\infty} (S^-(u) + u) + \lim_{u \rightarrow +\infty} 2\lambda^+ \\ &= -\frac{2}{3}t^- + 2\lambda^+ \\ &= -\frac{2}{3}t^- + \frac{2}{3}t^+ \\ &= \frac{2}{3}(t^+ - t^-) \end{aligned}$$

e, pelo item (e) da referida proposição,

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -\infty} d(u) &= \lim_{u \rightarrow -\infty} (-S^-(u) + 2\lambda^+ - u) \\ &= - \lim_{u \rightarrow -\infty} S^-(u) + \lim_{u \rightarrow -\infty} 2\lambda^+ - \lim_{u \rightarrow -\infty} u \\ &= -(\alpha^- - \beta^- \cot \hat{\tau}^-) + 2\lambda^+ - \lim_{u \rightarrow -\infty} u \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Note que se $t^+ - t^- < 0$, pelo *Teorema do Valor Intermediário*, temos a existência de um valor $\bar{u} \in \mathbb{R}$ tal que $d(\bar{u}) = 0$, donde vemos que o sistema (2.3) possui pelo menos um cone invariante de duas zonas.

Agora, no caso em que $\gamma^+ = 0$, $\gamma^- < 0$ e $t^+ - t^- > 0$, pelo item (f) da **Proposição 3.2.3**, S^- tem uma assíntota vertical $u_V = \alpha^- + \beta^- \cot \hat{\tau}^-$ quando $u \rightarrow u_V$, com

$$\lim_{u \rightarrow u_V} S^-(u) = +\infty.$$

Com isto, vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow u_V} d(u) &= - \lim_{u \rightarrow u_V} S^-(u) + \lim_{u \rightarrow u_V} 2\lambda^+ - \lim_{u \rightarrow u_V} u \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Como antes,

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} d(u) = \frac{2}{3}(t^+ - t^-) > 0.$$

Assim, aplicamos novamente o *Teorema do Valor Intermediário* para termos a existência de pelo menos um cone invariante de duas zonas para o sistema (2.3).

Para concluir, conforme fizemos no item (a) deste teorema, sendo $\gamma^- > 0$ (respectivamente $\gamma^- < 0$), então a derivada da aplicação $S^+ \circ S^-$, em valor absoluto, é menor do que um (respectivamente maior do que um), tendo em vista que se $\gamma^+ = 0$, então $\vartheta_0(\tau) = 1$ para $\tau \in (0, \hat{\tau}^+)$. Isto nos permite concluir, como no item (a), que o cone invariante de duas zonas é único, sendo assintoticamente estável (respectivamente instável) e hiperbólico.

(c2) Temos por hipótese que $\gamma^+ = 0$ e $(t^+ - t^-)\gamma^- \geq 0$. Observe que o caso $\gamma^- = 0$ não acontece, porque, pela hipótese do item (c), $\gamma^+ + \gamma^- \neq 0$.

Sejam $\gamma^+ = 0$, $\gamma^- > 0$ e $t^+ - t^- \geq 0$. Assim, para $\gamma^+ = 0$, o item (d) da **Proposição 3.2.3** nos diz que $S^+(u) = -u + 2\lambda^+$, e isto nos permite concluir que

$$(S^+)^{-1}(u) = -u + 2\lambda^+,$$

bastando notar que

$$((S^+)^{-1} \circ S^+)(u) = u, \quad (S^+ \circ (S^+)^{-1})(u) = u.$$

Como $t^+ - t^- \geq 0$, a assíntota oblíqua de S^- verifica

$$-u + \frac{2}{3}t^- \leq -u + \frac{2}{3}t^+ = -u + \frac{2}{3}(2\alpha^+ + \lambda^+) = -u + 2\lambda^+,$$

ou seja, o gráfico de $(S^+)^{-1}$ é uma reta paralela à assíntota oblíqua de S^- , situado acima ou coincidente com esta assíntota.

Vimos anteriormente que se $\gamma^- > 0$, então o gráfico de S^- está sempre abaixo de sua assíntota oblíqua. Logo, as curvas $(S^+)^{-1}$ e S^- não se interceptam e, daí, o sistema (2.3) não possui cones invariantes de duas zonas, visto que, neste caso, a função q introduzida no item (d) da **Proposição 3.2.2** não se anula. Observe que, quando $\gamma^+ = 0$, $\gamma^- < 0$ e $t^+ - t^- \leq 0$, seguindo estes mesmos passos, concluímos que o sistema (2.3) também não possui cones invariantes de duas zonas. No entanto, pelas **Proposições 2.3.3** e **2.3.5**, o sistema (2.3) tem um contínuo de cones invariantes de uma zona, pois $\gamma^+ = 0$.

(c3) Segue análoga à demonstração do item (c1).

(c4) Segue análoga à demonstração do item (c2).

(d) Temos por hipótese que $\gamma^+\gamma^- < 0$. Para mostrarmos que o sistema (2.3) tem, no máximo, dois cones invariantes de duas zonas, basta mostrar que a função d introduzida no item (d) da **Proposição 3.2.3** tem, no máximo, duas raízes. De fato, assumamos que $\gamma^+ < 0$ e $\gamma^- > 0$. Então, pelo item (b) da **Proposição 3.2.3**, segue que

$$\frac{d}{du}S^-(u) < 0, \quad \frac{d}{dv}S^+(v) < 0$$

e, sendo $S'(u) = -\vartheta_{\gamma^-}^3(\tau)$, como vimos na demonstração do item (h) da **Proposição 3.2.3**,

$$\frac{d}{du}\tau < 0, \quad \frac{d}{d\tau}\vartheta_{\gamma^-}(\tau) < 0, \quad \tau \in (0, \hat{\tau}),$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{du^2}S^-(u) &= \frac{d}{du}(-\vartheta_{\gamma^-}^3(\tau)) \\ &= -3\vartheta_{\gamma^-}^2(\tau)\frac{d}{d\tau}(\vartheta_{\gamma^-}(\tau))\frac{d}{du}\tau \\ &< 0 \end{aligned}$$

e, pelo **Lema 3.2.1**, sendo

$$\frac{d}{dv}\tau > 0,$$

resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dv^2}S^+(u) &= \frac{d}{dv}(-\vartheta_{\gamma^+}^3(\tau)) \\
&= -3\vartheta_{\gamma^+}^2(\tau)\frac{d}{d\tau}(\vartheta_{\gamma^+}(\tau))\frac{d}{dv}\tau \\
&> 0,
\end{aligned}$$

em seus respectivos domínios de definição. Logo, sendo $d(u) = (S^+ \circ S^-)(u) - u$, segue que

$$\frac{d}{du}(d(u)) = \frac{d}{dv}(S^+(S^-(u)))\frac{d}{du}(S^-(u)) - 1$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{du^2}(d(u)) &= \frac{d^2}{dv^2}(S^+(S^-(u)))\frac{d}{du}(S^-(u))\frac{d}{du}(S^-(u)) + \frac{d}{dv}(S^+(S^-(u)))\frac{d^2}{du^2}(S^-(u)) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

para todo u no domínio de $S^+ \circ S^-$.

Agora, para $\gamma^- < 0$ e $\gamma^+ > 0$, raciocinando de maneira análoga, temos que $d''(u) < 0$ em seu domínio de definição. Como o sinal da derivada segunda fornece a concavidade do gráfico da função, temos que d possui, no máximo, duas raízes. Logo, o sistema (2.3) tem, no máximo, dois cones invariantes de duas zonas.

Prosseguindo com a demonstração do item **(d)**, vamos provar agora que quando o sistema (2.3) tem exatamente dois cones invariantes de duas zonas distintos, então ambos os cones são hiperbólicos, sendo que um deles é assintoticamente estável e o outro é instável.

Com efeito, suponhamos $\gamma^+ < 0$ e $\gamma^- > 0$. O caso $\gamma^+ > 0$ e $\gamma^- < 0$ é análogo. Quando o sistema (2.3) tem dois cones invariantes de duas zonas distintos, então a função

$$d(u) = (S^+ \circ S^-)(u) - u, \quad u \in \mathbb{R},$$

tem dois zeros distintos, digamos p e q , com $p < q$.

Nestas mesmas hipóteses, vimos que a segunda derivada da função d é positiva. Assim, decorre que

$$d(p) = 0, \quad d'(p) < 0, \quad d(q) = 0, \quad d'(q) > 0.$$

Como

$$d'(u) = (S^+ \circ S^-)'(u) - 1,$$

segue que ambos os pontos p e q são hiperbólicos, sendo que p é assintoticamente estável e q é instável.

(d1) Temos por hipótese que $(t^+ - t^-)\gamma^+ \leq 0$, com $\gamma^+ \neq 0$. Assuma que $\gamma^+ < 0$. Logo, $t^+ - t^- \geq 0$. Dos resultados discutidos anteriormente acerca das posições relativas entre o gráfico de S e sua assíntota oblíqua, concluímos que se $\gamma^+ < 0$, então $S^+(u) > OA^+(u)$ e, sendo $\gamma^- > 0$, temos $S^-(u) < OA^-(u)$, com

$$OA^\pm(u) = -u + \frac{2}{3}t^\pm.$$

Destas inequações, concluímos que a função q introduzida no item **(d)** da **Proposição 3.2.2** verifica

$$\begin{aligned} q(u) &= (S^+)^{-1}(u) - S^-(u) \\ &> \left(-u + \frac{2}{3}t^+\right) - \left(-u + \frac{2}{3}t^-\right) \\ &= \frac{2}{3}(t^+ - t^-) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

ou seja, $q(u) > 0$, donde o sistema (2.3) não tem cones invariantes de duas zonas. O caso $\gamma^+ > 0$ é analisado de maneira similar.

Note ainda que, pela **Proposição 2.3.5**, o sistema (2.3) não tem cones invariantes de uma zona.

(d2) Temos por hipótese que $(t^+ - t^-)\gamma^+ > 0$, sendo $\gamma^+\gamma^- < 0$. Suponhamos que $\gamma^+ < 0$ (o caso $\gamma^+ > 0$ é análogo). Assim, $t^+ - t^- < 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} t^+ - t^- &= (2\alpha^+ + \lambda^+) - (2\alpha^- + \lambda^-) \\ &= 2(\alpha^+ - \alpha^-) + (\lambda^+ - \lambda^-) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Vamos analisar o sinal de $\lambda^+ - \lambda^-$.

(d2.1) Temos por hipótese que $(\lambda^+ - \lambda^-)\gamma^+ > 0$. Como assumimos que $\gamma^+ < 0$, temos, então, que $\lambda^+ - \lambda^- < 0$, ou ainda, $\lambda^+ < \lambda^-$.

Como $\gamma^- > 0$, então $S^-(u)$ está abaixo de sua assíntota oblíqua, o que fornece

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} S^-(u) = -\infty.$$

Além disto, pelo item (e) da **Proposição 3.2.3**,

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} S^-(u) = v_H.$$

Prosseguindo, como $\gamma^+ < 0$, então $S^+(u)$ está acima de sua assíntota oblíqua e S^+ tem assíntota vertical para $u \rightarrow u_V$ (veja a Figura 3.4).

Logo,

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} (S^+)^{-1}(u) = u_V.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} q(u) &= \lim_{u \rightarrow +\infty} (S^+)^{-1}(u) - \lim_{u \rightarrow +\infty} S^-(u) \\ &= u_V - (-\infty) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Por outro lado, como pela **Proposição 3.2.3** podemos concluir que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} S^+(u) = -\infty,$$

então

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} (S^+)^{-1}(u) = +\infty$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -\infty} q(u) &= \lim_{u \rightarrow -\infty} (S^+)^{-1}(u) - \lim_{u \rightarrow -\infty} S^-(u) \\ &= +\infty - v_H \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} q(\lambda^+) &= (S^+)^{-1}(\lambda^+) - S^-(\lambda^+) \\ &= \lambda^+ - S^-(\lambda^-). \end{aligned}$$

Pelo item **(b)** da **Proposição 3.2.3**, S^- é decrescente e, sendo $\lambda^+ < \lambda^-$, então $S^-(\lambda^+) > S^-(\lambda^-)$, donde $-S^-(\lambda^+) < -S^-(\lambda^-) = -\lambda^-$. Assim,

$$\begin{aligned} q(\lambda^+) &= \lambda^+ - S^-(\lambda^-) \\ &< \lambda^+ - \lambda^- \\ &< 0. \end{aligned}$$

Portanto, a função q se anula em um ponto $u_1 \in (-\infty, \lambda^+)$ e em um ponto $u_2 \in (\lambda^+, +\infty)$. Portanto, o sistema (2.3) tem dois cones invariantes de duas zonas.

(d2.2) Sendo $\lambda^+ = \lambda^- = \lambda$, então

$$q(\lambda) = (S^+)^{-1}(\lambda) - S^-(\lambda) = \lambda - \lambda = 0$$

e o sistema (2.3) tem um cone invariante de duas zonas. Na verdade, este cone invariante é o plano focal de equação $\lambda^2 x - \lambda y + z = 0$. Vamos mostrar que existe outro cone invariante de duas zonas.

Vimos no item anterior que a função q verifica

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} q(u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} q(u) = +\infty.$$

Além disto, como sabemos do item **(b)** da **Proposição 3.2.3** que S^+ é decrescente, segue que

$$\begin{aligned} q'(\lambda) &= ((S^+)^{-1})'(\lambda) - (S^-)'(\lambda) \\ &= \frac{1}{(S^+)'(\lambda)} - (S^-)'(\lambda) \\ &= \frac{1}{-e^{-\gamma^+\pi}} + e^{-\gamma^-\pi} \\ &= \frac{1}{e^{\gamma^-\pi}} - e^{\gamma^+\pi} \\ &= \frac{1 - e^{(\gamma^+ + \gamma^-)\pi}}{e^{\gamma^-\pi}}, \end{aligned}$$

donde surgem os seguintes casos:

Caso 1: $\gamma^+ + \gamma^- < 0$.

Neste caso, temos que $q'(\lambda) > 0$, isto é, q é estritamente crescente em λ e, como $q(u) \rightarrow +\infty$ quando $u \rightarrow \pm\infty$ e $q(\lambda) = 0$, existe $\bar{u} < \lambda$ tal que

$$q(\bar{u}) = 0, \quad q'(\bar{u}) < 0.$$

Portanto, o sistema (2.3) tem dois cones invariantes de duas zonas.

Caso 2: $\gamma^+ + \gamma^- > 0$.

Neste caso, temos que $q'(\lambda) < 0$ e, como $q(u) \rightarrow +\infty$ quando $u \rightarrow \pm\infty$ e $q(\lambda) = 0$, existe $\bar{u} > \lambda$ tal que

$$q(\bar{u}) = 0, \quad q'(\bar{u}) > 0.$$

Logo, o sistema (2.3) tem dois cones invariantes de duas zonas.

Caso 3: $\gamma^+ + \gamma^- = 0$.

Neste caso, temos que $q(\lambda) = q'(\lambda) = 0$, e q não tem mais zeros, visto que $q(u) \rightarrow +\infty$ quando $u \rightarrow \pm\infty$. Então, o sistema (2.3) tem um único cone invariante de duas zonas. Como $\gamma^+ + \gamma^- = 0$, segue que $\gamma^+ = -\gamma^-$ e, disto, resulta que

$$\begin{aligned} (S^+ \circ S^-)'(u) &= (S^+)'(S^-(u))(S^-)'(u) \\ &= (-\vartheta_{\gamma^+}^3(\tau))(-\vartheta_{\gamma^-}^3(\tau)) \\ &= \left(\exp\left(-\frac{4}{3}\gamma^+\tau\right) \frac{\varphi_{\gamma^+}(\tau)}{\varphi_{-\gamma^+}(\tau)} \right)^3 \left(\exp\left(-\frac{4}{3}\gamma^-\tau\right) \frac{\varphi_{\gamma^-}(\tau)}{\varphi_{-\gamma^-}(\tau)} \right)^3 \\ &= \exp(4\gamma^-\tau - 4\gamma^-\tau) \\ &= 1, \end{aligned}$$

implicando que $|(S^+ \circ S^-)'(u)| = 1$, ou seja, o único cone invariante de duas zonas não é hiperbólico.

(d2.3) Vamos analisar o caso $|\gamma^+|$ suficientemente pequeno. O caso $|\gamma^-|$ suficientemente pequeno é similar. Assuma, a princípio, que $\gamma^+ = 0$ e $\gamma^- > 0$. Então, pelo item (c1), existe um único cone invariante de duas zonas, o qual é hiperbólico e assintoticamente estável. Logo, existe \bar{u}_0 tal que

$q(\bar{u}_0) = 0$ e

$$\begin{aligned}
 q'(\bar{u}_0) &= ((S^+)^{-1})'(\bar{u}_0) - (S^-)'(\bar{u}_0) \\
 &= \frac{1}{(S^+)'(\bar{u}_0)} - (S^-)'(\bar{u}_0) \\
 &= -e^{4\gamma^+\tau} \left(\frac{\varphi_{\gamma^+}(\tau)}{\varphi_{-\gamma^+}(\tau)} \right)^{-3} - (-\vartheta_{\gamma^-}^3(\tau)) \\
 &= -1 + \vartheta_{\gamma^-}^3(\tau) \\
 &< 0,
 \end{aligned}$$

tendo em vista que $\gamma^+ = 0$ e, sendo $\gamma^- > 0$, então $0 < \vartheta_{\gamma^-}^3(\tau) < 1$, para $\tau \in (0, \hat{\tau})$.

Afirmamos que um ponto \bar{u}_1 com $q(\bar{u}_1) = 0$ e $q'(\bar{u}_1) < 0$ também existe quando $|\gamma^+|$ é suficientemente pequeno.

De fato, escrevendo

$$\begin{aligned}
 q : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (u, \gamma) &\longmapsto q(u, \gamma)
 \end{aligned}$$

temos que $q(\bar{u}_0, 0) = 0$ e $(d/du)q(\bar{u}_0, 0) < 0$. Assim, pelo *Teorema da Função Implícita*, existe $\varepsilon > 0$ tal que podemos escrever u como função de γ em uma vizinhança de $\gamma = 0$, isto é,

$$\begin{aligned}
 u : (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 \gamma &\longmapsto u(\gamma)
 \end{aligned}$$

de modo que

$$q(u(\gamma), \gamma) = 0, \quad \gamma \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Assim, para cada $|\gamma| < \varepsilon$, existe um único $\bar{u}_1 = u(\gamma)$ tal que

$$q(\bar{u}_1, \gamma) = 0.$$

Adicionalmente, na vizinhança de \bar{u}_1 temos que $(d/du)q(\bar{u}_1, 0) < 0$, pelo *Teorema da Conservação do Sinal*, como queríamos mostrar.

Como estamos considerando $\gamma^+ < 0$, em virtude do item **(d2.1)**, temos que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} q(u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} q(u) = +\infty,$$

e, como existe \bar{u}_1 verificando $q(\bar{u}_1) = 0$ e $q'(\bar{u}_1) < 0$, existe $\bar{u}_2 > \bar{u}_1$ tal que $q(\bar{u}_2) = 0$ e $q'(\bar{u}_2) > 0$, pela continuidade de q . Portanto, o sistema **(2.3)** tem dois cones invariantes de duas zonas quando $|\gamma^+|$ é suficientemente pequeno. Como assumimos $\gamma^+ < 0$ e temos pela hipótese do item **(d2.3)** que $(\lambda^+ - \lambda^-)\gamma^+ < 0$, segue que $\lambda^+ > \lambda^-$.

(i) Assuma que α^+ e α^- são valores fixados. Como $\gamma^+ < 0$, pelo item **(f)** da **Proposição 3.2.3**, S^+ está definida em $(u_V, +\infty)$ e, do item **(b)** do **Lema 4.1.2**,

$$\lim_{\beta^+ \rightarrow 0^+} u_V = \lambda^+ > \lambda^-.$$

Não obstante,

$$(S^+)^{-1}(u) > u_V \geq \lambda^+ > \lambda^- = S^-(\lambda^-),$$

ou seja, a assíntota horizontal de $(S^+)^{-1}$ é maior do que λ^- . Ainda, como S^- é decrescente,

$$S^-(\lambda^-) > S^-(u), \quad u \geq \lambda^+ > \lambda^-.$$

Logo,

$$(S^+)^{-1}(u) > \lambda^- > S^-(u), \quad u \geq \lambda^+ > \lambda^-,$$

donde segue que $q(u) > 0$, para todo $u \geq \lambda^+$, implicando que o sistema **(2.3)** não tem cones invariantes de duas zonas.

Vamos provar agora que o mesmo acontece para todo $u < \lambda^+$. Com efeito, como $\gamma^- > 0$, pelo item **(e)** da **Proposição 3.2.3**, S^- está definida em \mathbb{R} e $v_H = \alpha^- - \beta^- \cot \hat{\tau}^-$ é uma assíntota horizontal quando $u \rightarrow -\infty$. Como S^- é decrescente, é claro que

$$S^-(u) < v_H, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Pelo item **(b)** do **Lema 4.1.1**,

$$\lim_{\beta^- \rightarrow 0^+} v_H = \lambda^- < \lambda^+.$$

Logo, $S^-(u) < \lambda^+$, para $u < \lambda^+$ e, daí, como vimos anteriormente,

$$S^-(u) < \lambda^+ < (S^+)^{-1}(u), \quad u < \lambda^+.$$

Então, $q(u) > 0$, para todo $u \in \mathbb{R}$ e, portanto, o sistema (2.3) não tem cones invariantes de duas zonas.

(ii) Suponhamos agora que β^+ e β^- são valores fixados. Como $\gamma^+ < 0$, dos resultados discutidos anteriormente sobre as posições relativas entre o gráfico de S e sua assíntota oblíqua, concluímos que

$$S^+(\lambda^+) > OA^+(\lambda^+)$$

e, pelo item **(f)** da **Proposição 3.2.3**, S^+ está definida em $(u_V, +\infty)$. Como S^+ é decrescente e, pelo item **(a)** do **Lema 4.1.2**,

$$\lim_{\alpha^+ \rightarrow -\infty} u_V = \lambda^+,$$

é imediato que

$$(S^+)^{-1}(u) > u_V \geq \lambda^+ > \lambda^-, \quad u \geq \lambda^+.$$

Agora, como $\gamma^- > 0$, das posições relativas entre o gráfico de S e sua assíntota oblíqua, segue que $S^-(\lambda^-) < OA^-(\lambda^-)$ e, como no caso anterior, $S^-(u) < v_H$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Pelo item **(a)** do **Lema 4.1.1**,

$$\lim_{\alpha^- \rightarrow +\infty} v_H = \lambda^- < \lambda^+,$$

donde concluímos, como antes, que

$$S^-(u) < \lambda^+ < (S^+)^{-1}(u), \quad u < \lambda^+.$$

Logo, $q(u) > 0$, $u \in \mathbb{R}$, e o sistema (2.3) não possui cones invariantes de duas zonas.

■

4.2 Diagrama de Bifurcação de Cones Invariantes

Nesta seção, veremos rapidamente algumas bifurcações de cones invariantes que podem ser deduzidas do **Teorema 4.1.1**.

Começamos apresentando um resultado conjecturado em [6] e demonstrado posteriormente em [4].

Teorema 4.2.1. *Se $t^+ \neq t^-$ e $\lambda^+ \neq \lambda^-$, então existe uma função $\gamma^+ = SN(\gamma^-)$ definida no intervalo infinito $\text{sign}(\gamma^-) = \text{sign}(t^- - t^+)$ e verificando $\gamma^+\gamma^- < 0$ de tal modo que o sistema (2.3) tem um cone invariante semiestável para cada ponto*

$$(\gamma^-, \gamma^+) = (\gamma^-, SN(\gamma^-)).$$

Note que, sendo $\text{sign}(\gamma^-) = \text{sign}(t^- - t^+) = -1$, então o intervalo infinito é $(-\infty, 0)$ e, se $\text{sign}(\gamma^-) = \text{sign}(t^- - t^+) = +1$, o intervalo infinito é $(0, +\infty)$.

Quando $t^+ < t^-$ e $\lambda^+ < \lambda^-$, o conjunto de bifurcação dos cones invariantes de duas zonas do sistema (2.3) é mostrado na Figura 4.1 a seguir, sendo que, em cada região do plano $\gamma^-\gamma^+$, o índice j em $C_j, j \in \{0, 1, 2\}$, indica o número de cones invariantes de duas zonas.

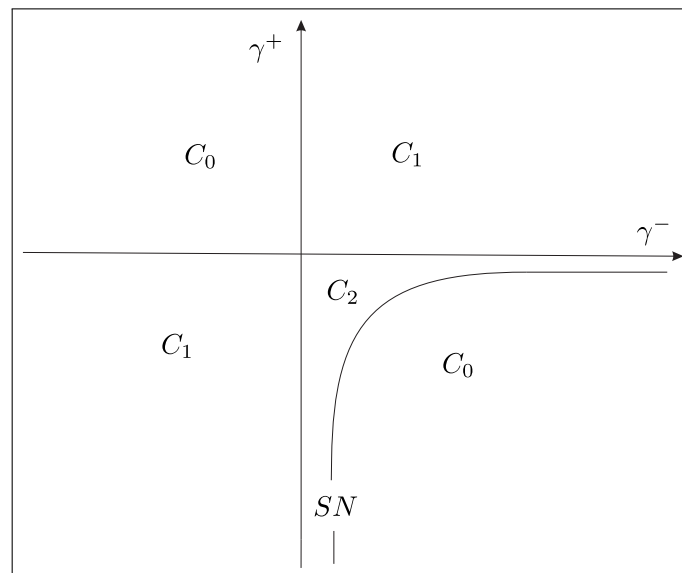


Figura 4.1: Diagrama de bifurcação de cones invariantes quando $t^+ < t^-$ e $\lambda^+ < \lambda^-$.

Note que a Figura 4.1 foi construída com base no **Teorema 4.1.1**, o qual faz considerações acerca dos valores de γ^+ e γ^- , e também conforme o **Teorema 4.2.1**. Indicaremos os respectivos itens do teorema mencionado que foram utilizados para construir o diagrama de bifurcações apresentado. Utilizando o termo *quadrante*, como em um plano cartesiano, temos que o índice $j = 1$ do primeiro e terceiro quadrantes é garantido pelo item **(a)**, o índice $j = 0$ do segundo quadrante existe em virtude do item **(d1)**, o índice $j = 2$ do quarto quadrante existe pelo item **(d2.1)** e o índice $j = 0$ no quarto quadrante é garantido pelo item **(d2.3)**. A curva SN está no quarto quadrante porque, neste caso, sendo $t^- - t^+ > 0$, então $\text{sign}(\gamma^-) = +1$ e, como $\gamma^+\gamma^- < 0$, segue que $\text{sign}(\gamma^+) = -1$.

Podemos observar que as retas $\gamma^+ = 0$, $\gamma^- = 0$ e a curva SN são curvas de bifurcação que separam algumas regiões abertas com diferentes números de cones invariantes. Conforme a Figura 4.1, vemos que na região

$$C_0 = \{(\gamma^-, \gamma^+) : \gamma^- < 0 < \gamma^+\} \cup \{(\gamma^-, \gamma^+) : \gamma^+ < SN(\gamma^-) < 0 < \gamma^-\}$$

o sistema (2.3) não tem cones invariantes de duas zonas, na região

$$C_1 = \{(\gamma^-, \gamma^+) : \gamma^-\gamma^+ > 0\}$$

o sistema (2.3) tem um cone invariante de duas zonas e na região

$$C_2 = \{(\gamma^-, \gamma^+) : SN(\gamma^-) < \gamma^+ < 0 < \gamma^-\},$$

o sistema (2.3) tem dois cones invariantes nas duas zonas.

Ainda com respeito à Figura 4.1, vejamos que nas retas $\gamma^+ = \gamma^- = 0$, o sistema passa por uma bifurcação consistindo do aparecimento ou desaparecimento de um cone invariante de duas zonas vindo de um contínuo de cones invariantes de uma zona que existe pelo item **(b2)** do **Teorema 4.1.1**, nos valores críticos de bifurcação.

A seguir, faremos alguns comentários para estender o diagrama de bifurcações descrito na Figura 4.1 para outros casos. Para isto, vamos analisar SN conforme definição dada no **Teorema 4.2.1**.

Quando $t^+ = t^-$, temos que $t^- - t^+ = 0$ e, daí, $\text{sign}(\gamma^-) = 0$. Logo, o diagrama de bifurcações do sistema (2.3) pode ser obtido colapsando a curva SN nos eixos coordenados, donde a região C_2 desaparece.

Quando $t^+ < t^-$ e $\lambda^+ > \lambda^-$, o diagrama de bifurcações pode também ser obtido da Figura 4.1 movendo a curva SN para o infinito (pois se $t^+ < t^-$, então $t^- - t^+ > 0$ e daí, $\text{sign}(\gamma^-) = +1$), logo todo o quarto quadrante corresponde a uma zona C_2 .

Quando $t^+ > t^-$ e $\lambda^+ \neq \lambda^-$, o diagrama de bifurcações pode ser obtido do último diagrama por meio da mudança de variáveis $x \rightarrow -x$ (porque, neste caso, $t^- - t^+ < 0$ e $\text{sign}(\gamma^-) = -1$).

No caso de se ter $\lambda^+ = \lambda^-$, toda a informação pode ser coletada em um único diagrama de bifurcações, conforme a Figura 4.2, a qual foi construída utilizando os itens (a) e (b2.2) do Teorema 4.1.1.

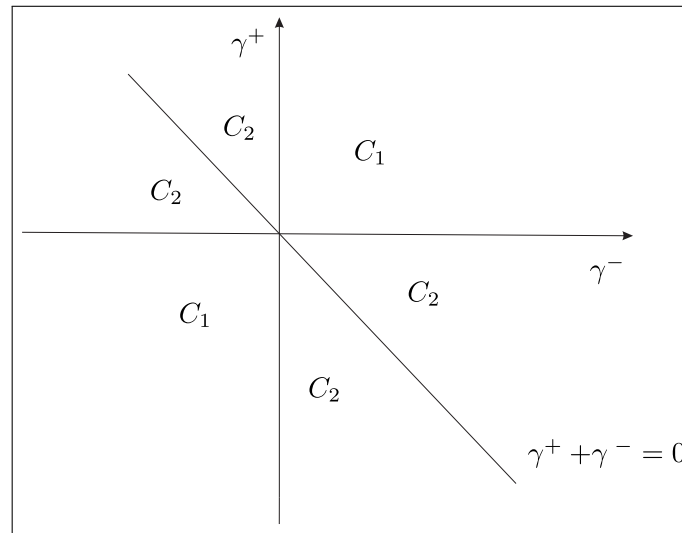


Figura 4.2: Diagrama de bifurcação de cones invariantes do sistema (2.3) quando $\lambda^+ = \lambda^-$.

Na região C_1 temos 1 cone invariante de duas zonas, na região C_2 temos 2 cones invariantes de duas zonas e, na reta $\gamma^+ + \gamma^- = 0$, existe um único cone invariante de duas zonas não hiperbólico, em virtude do item (d2.2) do Teorema 4.1.1.

Temos também um contínuo de cones invariantes de uma zona nas retas $\gamma^+ = 0$ e $\gamma^- = 0$, o que produz dois contínuos destes cones invariantes no ponto $\gamma^+ = \gamma^- = 0$.

Finalizamos aqui este capítulo. No próximo capítulo estudaremos a estabilidade da origem quando o sistema (2.3) possui um cone invariante de duas zonas. Estudaremos também comportamento das órbitas de um cone invariante de duas zonas.

Capítulo 5

Estabilidade da Origem e Dinâmica em um Cone Invariante de Duas Zonas

Quando as matrizes de cada parte linear de um **SLPC** são Hurwitzianas, parece razoável esperar estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio localizado no plano de separação. Neste sentido, foi provado em [8] que para **SLPC** planares com duas zonas e possuindo matrizes Hurwitzianas, o ponto de equilíbrio na reta de separação é globalmente assintoticamente estável. Estes resultados são bem naturais e sugerem que dado um **SLPC** geral com matrizes Hurwitzianas, o ponto de equilíbrio deve também ser globalmente assintoticamente estável. No entanto, seguindo [6], na Seção 5.2 apresentamos um **SLPC** e observável de duas zonas em \mathbb{R}^3 constituído por matrizes Hurwitzianas e que possui a origem como único ponto de equilíbrio, o qual é instável. Isto induz um exemplo não intuitivo que mostra que o comportamento de um **SLPC** e observável pode ser bem complexo. Neste capítulo, estudaremos a estabilidade da origem do sistema (2.3) na presença de cones invariantes de duas zonas e apresentaremos os possíveis comportamentos das órbitas restritas a um cone invariante de duas zonas de tal sistema.

5.1 Dinâmica em um Cone Invariante de Duas Zonas

Consideremos um lema técnico que será útil adiante.

Lema 5.1.1. *Seja $\tau > 0$. Assim, se $\gamma < 0$, então $\sinh(\gamma\tau) < \gamma \sin(\tau)$ e, se $\gamma > 0$, $\sinh(\gamma\tau) > \gamma \sin(\tau)$.*

Demonstração. De fato, definindo

$$F_\gamma(\tau) = \sinh(\gamma\tau) - \gamma \sin(\tau),$$

para $\gamma < 0$ fixo e $\tau > 0$, temos, para $\tau = 0$, que $F_\gamma(\tau) = 0$ e

$$\frac{d}{d\tau}F_\gamma(\tau) = -\gamma \cos(\tau) + \gamma \cosh(\gamma\tau), \quad \tau \geq 0.$$

Como $|-\gamma \cos(\tau)| \leq |\gamma| = -\gamma$, porque $\gamma < 0$, temos que

$$\gamma \leq -\gamma \cos(\tau) \leq -\gamma$$

e, sabendo que para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $\cosh(x) \in [1, +\infty)$, sendo $\gamma < 0$ é claro que

$$\gamma \cosh(\gamma\tau) \leq \gamma.$$

Assim,

$$-\gamma \cos(\tau) + \gamma \cosh(\gamma\tau) \leq 0, \quad \tau \geq 0,$$

donde

$$\frac{d}{d\tau}F_\gamma(\tau) = -\gamma \cos(\tau) + \gamma \cosh(\gamma\tau) < 0, \quad \tau > 0.$$

Logo, $F_\gamma(\tau) < 0$ para todo $\tau > 0$, ou seja, $\sinh(\gamma\tau) < \gamma \sin(\tau)$, $\tau > 0$ e $\gamma < 0$, como queríamos mostrar.

Agora, observando que

$$\begin{aligned} F_{-\gamma}(\tau) &= \sinh(-\gamma\tau) + \gamma \sin(\tau) \\ &= -\sinh(\gamma\tau) + \gamma \sin(\tau) \\ &= -F_\gamma(\tau), \end{aligned}$$

isto é,

$$F_{-\gamma}(\tau) = -F_\gamma(\tau),$$

então, se $\gamma > 0$, $-\gamma < 0$ e, daí, vale para $F_{-\gamma}(\tau)$ o resultado provado anteriormente para $F_\gamma(\tau)$, ou seja,

$$\frac{d}{d\tau}F_{-\gamma}(\tau) < 0$$

e, portanto,

$$\frac{d}{d\tau} F_\gamma(\tau) > 0, \quad \gamma > 0,$$

e o resultado segue. ■

O próximo lema relaciona as razões y_1/y_0 e y_2/y_1 estudadas no Capítulo 3, as quais possuem papel importante na determinação do comportamento assintótico das órbitas dos possíveis cones invariantes de duas zonas.

Lema 5.1.2. *Assuma que $\alpha < 0$, $\lambda < 0$ e $\beta > 0$. Seja $\hat{\tau}$ a menor solução positiva de $\varphi_{|\gamma|}(\tau) = 0$, sendo $\gamma = (\alpha - \lambda)/\beta$. Então, a função contínua $\Psi : [0, \hat{\tau}) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\Psi(\tau) = \begin{cases} \frac{\varphi_{-\gamma}(\tau)}{\varphi_\gamma(\tau)} e^{(\gamma + \frac{\alpha}{\beta})\tau}, & \text{se } 0 < \tau < \hat{\tau}, \\ 1, & \text{se } \tau = 0, \end{cases}$$

verifica a equação

$$\text{sign} \left(\Psi(\tau) - e^{\frac{\lambda}{\beta}\tau} \right) = \text{sign}(\gamma), \quad 0 < \tau < \hat{\tau}.$$

Demonstração. Claramente, Ψ é contínua. Agora, como

$$\gamma + \frac{\alpha}{\beta} = \gamma + \frac{\alpha - \lambda + \lambda}{\beta} = \gamma + \gamma + \frac{\lambda}{\beta},$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \Psi(\tau) &= \frac{\varphi_{-\gamma}(\tau) e^{\gamma\tau}}{\varphi_\gamma(\tau) e^{-\gamma\tau}} e^{\frac{\lambda}{\beta}\tau} \\ &= \frac{(1 - e^{-\gamma\tau}(\cos \tau + \gamma \text{sen } \tau)) e^{\gamma\tau}}{(1 - e^{\gamma\tau}(\cos \tau - \gamma \text{sen } \tau)) e^{-\gamma\tau}} e^{\frac{\lambda}{\beta}\tau} \\ &= \frac{e^{\gamma\tau} - \cos \tau - \gamma \text{sen } \tau}{e^{-\gamma\tau} - \cos \tau + \gamma \text{sen } \tau} e^{\frac{\lambda}{\beta}\tau}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Note que se $\gamma = 0$, então

$$\Psi(\tau) = \frac{1 - \cos \tau}{1 - \cos \tau} e^{\frac{\lambda}{\beta}\tau} = e^{\frac{\lambda}{\beta}\tau}$$

e, daí,

$$\text{sign} \left(\Psi(\tau) - e^{\frac{\lambda}{\beta}\tau} \right) = \text{sign}(\gamma),$$

concluindo a demonstração. Por outro lado, se $\gamma < 0$, pelo **Lema 5.1.1**, temos válida a desigualdade

$$\sinh(\gamma\tau) < \gamma \operatorname{sen}(\tau), \quad \tau > 0,$$

isto é,

$$\frac{e^{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau}}{2} < \gamma \operatorname{sen} \tau,$$

donde

$$e^{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} < 2\gamma \operatorname{sen} \tau. \quad (5.2)$$

Em (5.1), como para $0 < \tau < \hat{\tau}$, temos $\Psi(\tau) > 0$, usando (5.2) encontramos

$$\begin{aligned} \Psi(\tau) &= \frac{e^{\gamma\tau} - \cos \tau - \gamma \operatorname{sen} \tau}{e^{-\gamma\tau} - \cos \tau + \gamma \operatorname{sen} \tau} e^{\frac{\lambda}{\beta}\tau} \\ &< \frac{e^{-\gamma\tau} + 2\gamma \operatorname{sen} \tau - \cos \tau - \gamma \operatorname{sen} \tau}{e^{-\gamma\tau} - \cos \tau + \gamma \operatorname{sen} \tau} e^{\frac{\lambda}{\beta}\tau} \\ &= e^{\frac{\lambda}{\beta}\tau}. \end{aligned}$$

Assim, $\operatorname{sign} \left(\Psi(\tau) - e^{\frac{\lambda}{\beta}\tau} \right) = \operatorname{sign}(\gamma)$.

Analogamente, para $\gamma > 0$, pelo **Lema 5.1.1**,

$$\sinh(\gamma\tau) > \gamma \operatorname{sen}(\tau), \quad \tau > 0,$$

donde segue que

$$e^{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} > 2\gamma \operatorname{sen} \tau,$$

permitindo-nos concluir novamente que

$$\operatorname{sign} \left(\Psi(\tau) - e^{\frac{\lambda}{\beta}\tau} \right) = \operatorname{sign}(\gamma).$$

■

Vamos introduzir coordenadas polares no plano de separação $\Pi = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\}$, colocando

$$y = r \cos \theta, \quad z = r \operatorname{sen} \theta.$$

Então, identificando o ponto $(0, \cos \theta, \sin \theta)$ como sendo $(\cos \theta, \sin \theta)$, temos que se $(\cos \theta, \sin \theta)$ pertence ao domínio da aplicação de Poincaré \mathcal{P} , sua imagem pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\cos \theta, \sin \theta) &= \|\mathcal{P}(\cos \theta, \sin \theta)\| (\cos \Theta, \sin \Theta) \\ &= G(\theta)(\cos \Theta, \sin \Theta),\end{aligned}$$

sendo Θ o argumento do ponto $\mathcal{P}(\cos \theta, \sin \theta)$. Decorre da definição das aplicações S^+ e S^- que

$$\operatorname{tg} \Theta = S^+(S^-(\operatorname{tg} \theta)).$$

Agora, se em termos do fluxo, o ponto $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ é transformado no ponto $(R \cos \Theta, R \sin \Theta)$, então, usando a homogeneidade do campo vetorial e, conseqüentemente, da aplicação \mathcal{P} , podemos concluir que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= rG(\theta)(\cos \Theta, \sin \Theta) \\ &= R(\cos \Theta, \sin \Theta),\end{aligned}$$

sendo $R = rG(\theta)$. Note que os pontos (y, z) na intersecção de um cone invariante de duas zonas com o semiplano $\Pi^+ = \Pi \cap \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0, z \in \mathbb{R}\}$ compartilham seu argumento θ . Assim, dado um ponto $(y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ pertencente à intersecção de um cone invariante de duas zonas com o semiplano Π^+ , temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(y, z) &= \mathcal{P}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= rG(\theta)(\cos \Theta, \sin \Theta) \\ &= R(\cos \Theta, \sin \Theta) \\ &= (Y, Z),\end{aligned}$$

tendo em vista que a imagem de um ponto do cone pela aplicação de Poincaré \mathcal{P} ainda pertence ao cone. Então, $\mathcal{P}(y, z) = (Y, Z)$ e, como $y \neq 0$

$$\frac{Y}{y} = \frac{R \cos \Theta}{r \cos \theta} = \frac{R}{r} = G(\theta). \quad (5.3)$$

Este número indica a razão entre a distância da origem até um ponto (x, y) e a distância entre a origem até o ponto $\mathcal{P}(x, y)$, imagem do ponto (x, y) pela aplicação de Poincaré \mathcal{P}

após uma volta no cone. Claramente, se $G(\theta) < 1$ as órbitas no cone estão se aproximando da origem, se $G(\theta) = 1$ todas as órbitas no cone são periódicas e, se $G(\theta) > 1$, as órbitas no cone estão se afastando da origem.

Utilizando os últimos conceitos discutidos, no **Lema 5.1.3** a seguir descrevemos o comportamento assintótico das órbitas do sistema (2.3), as quais projetadas sobre órbitas do sistema (2.4) têm uma curva fechada como conjunto ω -limite.

Lema 5.1.3. *Assuma que as matrizes do sistema (2.3) são Hurwitzianas e suponha que alguma órbita periódica C seja o conjunto ω -limite de uma órbita γ_p do sistema projetado (2.4). Considere o cone invariante do sistema (2.3) determinado por C . Se uma órbita no cone converge para a origem, então todas as órbitas do sistema (2.3) projetadas sobre γ_p também convergem para a origem.*

Demonstração. Pela equação (5.3), é claro que quando uma órbita no cone converge para a origem, então todas as órbitas no cone também convergem para a origem, pois, neste caso, $R < r$.

Suponha que γ_p não está em uma única zona, logo, temos a existência de um cone invariante de duas zonas para o sistema (2.3). Considere $q \in \omega(\gamma_p) \cap \Pi$. Pelo **Lema 2.1.2**, como o plano de separação constitui uma seção transversal para o campo vetorial F , existe uma sequência $\{\varphi_p(t_n)\}$ de elementos de $\Pi \cap \mathbb{S}^2$ tal que

$$q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_p(t_n),$$

ou seja, $\{\varphi_p(t_n)\}$ intercepta a curva $(0, y(t), z(t)) = \Pi \cap \mathbb{S}^2$ infinitas vezes, se aproximando da órbita periódica $C = \omega(\gamma_p)$. Logo, todas as órbitas do sistema (2.3) projetadas sobre γ_p também interceptam o plano Π infinitas vezes, aproximando do cone invariante de duas zonas determinado por C .

Para analisarmos o comportamento das órbitas do sistema (2.3), utilizamos coordenadas polares. Sabemos que os pontos $(r \cos \bar{\theta}, r \sin \bar{\theta})$ na intersecção do cone invariante determinado por C com o semiplano Π^+ , definido anteriormente, verificam

$$\mathcal{P}(r \cos \bar{\theta}, r \sin \bar{\theta}) = (R \cos \bar{\theta}, R \sin \bar{\theta}),$$

sendo $R = rG(\bar{\theta})$, com

$$G(\bar{\theta}) = \frac{R}{r} < 1,$$

porque as órbitas no cone invariante convergem para a origem. Observe que $\bar{\theta}$ não muda devido à existência de um cone invariante de duas zonas para o sistema (2.3).

Por outro lado, um ponto $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ na intersecção de uma órbita projetada sobre γ_p com o semiplano Π^+ verifica

$$\mathcal{P}(r \cos \theta, r \sin \theta) = (R \cos \Theta, R \sin \Theta), \quad R = rG(\theta).$$

Agora, tomando o ponto $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ como condição inicial, para sucessivas iteradas por meio da aplicação de Poincaré \mathcal{P} , obtemos, então, uma sequência de argumentos $\{\theta_n\}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = \bar{\theta}.$$

Como G é claramente contínua, vale o limite acima e $G(\bar{\theta}) < 1$, dado $\varepsilon > 0$ tal que $G(\bar{\theta}) + \varepsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|G(\theta_n) - G(\bar{\theta})| < \varepsilon, \quad n \geq N,$$

em particular,

$$G(\theta_n) < G(\bar{\theta}) + \varepsilon = 1, \quad n \geq N.$$

Logo, para todo $n \geq N$, temos que $R/r < 1$, donde segue que as órbitas projetadas sobre γ_p também tendem para a origem.

Por fim, se γ_p permanece em uma única zona e se C é uma órbita periódica de uma zona que é o conjunto ω -limite de γ_p , então, nesta zona existe um ponto de equilíbrio do tipo centro e, conseqüentemente, um contínuo de cones invariantes de uma zona. Neste caso, γ_p é a própria órbita periódica C e, assim, se uma órbita no cone invariante de uma zona gerado por C converge para a origem, então todas as órbitas projetadas sobre γ_p também convergem para a origem. ■

Utilizaremos as ideias discutidas até agora para demonstrar o **Teorema 5.1.1**, o qual aborda as possíveis dinâmicas em um cone invariante de duas zonas quando $\gamma^+ > 0$ e $\gamma^- > 0$.

Teorema 5.1.1. *Assuma que as matrizes no sistema (2.3) são Hurwitzianas e possuem um par de autovalores complexos. Assuma também que $\gamma^+ > 0$ e $\gamma^- > 0$. Valem as seguintes afirmações:*

- (a) *A origem tem uma variedade unidimensional estável e uma variedade bidimensional invariante, a qual é um cone atrator de duas zonas. Genericamente, ambas as variedades não são suaves;*
- (b) *A dinâmica no cone é ou do tipo foco atrator, ou do tipo centro, ou do tipo foco repulsor, e existem sistemas específicos para os três casos.*

Demonstração. (a) Pela hipótese do teorema, temos que os vetores

$$v^\pm = (1, 2\alpha^\pm, (\alpha^\pm)^2 + (\beta^\pm)^2)$$

são autovetores associados aos autovalores reais λ^\pm , porque, omitindo os índices sobrescritos,

$$\begin{aligned} Av - \lambda v &= \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\alpha \\ \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2\alpha \\ \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t - (2\alpha + \lambda) \\ m - (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\lambda) \\ d - \lambda(\alpha^2 + \beta^2) \end{pmatrix} \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Logo, a variedade estável unidimensional da origem é a união de duas semirretas (autoespaços gerados pelos autovetores v^\pm). Claramente, como o campo vetorial não é diferenciável no plano de separação, então, a menos que $\alpha^+ = \alpha^-$ e $\beta^+ = \beta^-$, isto é, a menos que $v^+ = v^-$, esta variedade não é suave.

Pelo item (a) do **Teorema 4.1.1**, como $\gamma^+ > 0$ e $\gamma^- > 0$, o sistema (2.3) possui um único cone invariante de duas zonas, o qual é assintoticamente estável e hiperbólico. A menos que $A^+ = A^-$, este cone não é suave, visto que o mesmo não é suave no plano de separação. Portanto, em geral, ambas as variedades não são suaves.

(b) Vamos provar aqui a primeira parte. Veremos posteriormente um exemplo para cada situação. Como $(y_1, z_1) = \mathcal{P}^-(y_0, z_0)$, $(y_2, z_2) = \mathcal{P}^+(y_1, z_1)$ e o sistema (2.3) tem um cone invariante de duas zonas, então $(y_2, z_2) = \mathcal{P}(y_0, z_0)$ e, daí,

$$\frac{R}{r} = \frac{y_2}{y_0} = \frac{y_1 y_2}{y_0 y_1}. \quad (5.4)$$

Como R/r indica o quociente das distâncias da origem entre o ponto (y_0, z_0) e sua imagem (y_2, z_2) , então, temos um comportamento do tipo foco atrator para $R < r$, do tipo centro se $R = r$ e do tipo foco repulsor quando $R > r$. Para verificar que todos os três casos são possíveis, vamos começar considerando o caso degenerado $\lambda^+ = \lambda^- = \lambda$ no qual, como já vimos, existe um cone invariante plano de duas zonas. Nestas condições, o sistema (3.12) tem a solução $\tau^- = \tau^+ = \pi$. Como

$$\frac{y_1(\pi)}{y_0(\pi)} = -e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-}\pi}, \quad \frac{y_2(\pi)}{y_1(\pi)} = -e^{\frac{\alpha^+}{\beta^+}\pi},$$

por (5.4), temos que

$$\frac{R}{r} = \frac{y_1(\pi) y_2(\pi)}{y_0(\pi) y_1(\pi)} = \exp\left(\pi \frac{\alpha^+}{\beta^+} + \pi \frac{\alpha^-}{\beta^-}\right) < 1$$

porque, por hipótese, as matrizes são Hurwitzianas, ou seja, $\alpha^+ < 0$ e $\alpha^- < 0$. Logo, a dinâmica no cone planar é do tipo foco atrator.

Note que se perturbarmos esta situação, obtemos dinâmica similar para um cone não planar, visto que o cone invariante de duas zonas planar é hiperbólico, em virtude do item (a) do **Teorema 4.1.1**.

Para mostrar a possibilidade de dinâmica instável no cone, seja $\lambda^- < \lambda^+$ e consideremos o quociente descrito em (5.4). Então, pela afirmação (a) da **Proposição 3.2.4**, temos que $0 < \tau^- < \pi$, sendo τ^- associado à aplicação S^- no ponto fixo \bar{u} . Pelo **Lema 5.1.2**, para as órbitas no cone, sendo $\gamma^- > 0$, temos $\Psi(\tau^-) - e^{\frac{\lambda^-}{\beta^-}\tau^-} > 0$ e, daí, usando a equação (3.8), encontramos

$$\left| \frac{y_1}{y_0} \right| = \frac{\varphi_{-\gamma^-}(\tau^-)}{\varphi_{\gamma^-}(\tau^-)} e^{(\gamma^- + \frac{\alpha^-}{\beta^-})\tau^-} = \Psi(\tau^-) > e^{\frac{\lambda^-}{\beta^-}\tau^-} > e^{\frac{\lambda^-}{\beta^-}\pi}, \quad (5.5)$$

sendo esta última desigualdade válida devido ao fato de ser $\lambda^- < 0$, visto que A^- é matriz Hurwitziana e $0 < \tau^- < \pi$. Vimos logo após a equação (3.11) que $0 < \bar{u} < u_H^+$

e τ^+ verifica $\pi < \tau^+ < \hat{\tau}^+ < 2\pi$. Além disto, pela hipótese de ser $\lambda^- < \lambda^+$ e pelo item (a) da **Proposição 3.2.4**, temos que, no cone invariante,

$$u_1(\tau^+) < \lambda^- < \lambda^+ < 0.$$

Sendo $\bar{u} = S^+(S^-(\bar{u}))$, segue que $\bar{u} = u_2$ e, daí, por (3.11), temos, para as órbitas no cone, que

$$\begin{aligned} \left| \frac{y_2}{y_1} \right| &= \left| \frac{u_1(\tau^+) - \lambda^+}{u_2(\tau^+) - \lambda^+} e^{\frac{\lambda^+}{\beta^+} \tau^+} \right| \\ &= \left| \frac{u_1(\tau^+) - \lambda^+}{\bar{u}(\tau^+) - \lambda^+} e^{\frac{\lambda^+}{\beta^+} \tau^+} \right| \\ &> \frac{|u_1(\tau^+) - \lambda^+|}{u_H^+ - \lambda^+} e^{\frac{\lambda^+}{\beta^+} \tau^+} \\ &> \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{u_H^+ - \lambda^+} e^{\frac{\lambda^+}{\beta^+} \tau^+} \\ &> \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{u_H^+ - \lambda^+} e^{\frac{\lambda^+}{\beta^+} 2\pi}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

sendo a última desigualdade válida porque $\tau^+ < 2\pi$ e $\lambda^+ < 0$.

Agora, tomando $\beta^+ = -\lambda^+ > 0$ e impondo que

$$-\beta^- = \lambda^- < \lambda^+ - (u_H^+ - \lambda^+)e^{3\pi},$$

por (5.4), (5.5) e (5.6), concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{R}{r} &= \frac{y_1 y_2}{y_0 y_1} \\ &> e^{\frac{\lambda^-}{\beta^-} \pi} \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{u_H^+ - \lambda^+} e^{\frac{\lambda^+}{\beta^+} 2\pi} \\ &= e^{-\pi} \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{u_H^+ - \lambda^+} e^{-2\pi} \\ &> e^{-\pi} \frac{\lambda^+ - \lambda^+ + (u_H^+ - \lambda^+)e^{3\pi}}{u_H^+ - \lambda^+} e^{-2\pi} \\ &= e^{-\pi} e^{3\pi} e^{-2\pi} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, as órbitas no cone invariante satisfazem $R > r$ e, portanto, as mesmas se afastam da origem.

Finalmente, considerando o caso analisado para $\lambda^+ = \lambda^-$, e usando a continuidade, também existe um certo valor de λ^- tal que $R = r$ e, então, temos que todas as órbitas no cone são periódicas. Note que esta última consideração é válida porque, por continuidade, se iniciarmos mudando o caso estável para o caso instável fixando λ^+ e mudando λ^- , por exemplo, então existe um valor de λ^- de tal modo que $R = r$. ■

Vamos apresentar agora um sistema proposto em [7] que ilustra as possíveis situações descritas no item (b) do **Teorema 5.1.1**. Note que sem o conhecimento adicional dos valores dos parâmetros, não é possível discriminar os três casos em questão.

Considere

$$A^+ = \begin{pmatrix} -0.18 & -1 & 0 \\ 1.0096 & 0 & -1 \\ -0.10016 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são $\lambda^+ = -0.1$ e $\alpha^+ \pm i\beta^+ = -0.04 \pm i$. Sendo $\alpha^- \pm i\beta^- = -0.03 \pm 9i$, temos que

$$t^- = \lambda^- + 2\alpha^- = \lambda^- - 0.06,$$

$$m^- = 2\alpha^-\lambda^- + (\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2 = 81.0009 - 0.06\lambda^-,$$

$$d^- = \lambda^-[(\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2] = 81.0009\lambda^-.$$

Logo, para $\lambda^- = -0.1$, temos

$$A^- = \begin{pmatrix} -0.16 & -1 & 0 \\ 81.0069 & 0 & -1 \\ -8.10009 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e ambas as matrizes são Hurwitzianas, com $\gamma^+ = 0.06 > 0$ e $\gamma^- = 7/900 > 0$. Pelo item (a) do **Teorema 4.1.1**, o sistema correspondente possui um único cone invariante de duas zonas e, com alguns cálculos, obtemos

$$\frac{R}{r} = 0.872724 < 1,$$

donde segue que as órbitas no cone invariante de duas zonas tendem para a origem. Nas Figuras 5.1 e 5.2 apresentamos esta situação. Observamos que, como $\lambda^+ = \lambda^- = -0.1$, o cone invariante de duas zonas é planar.

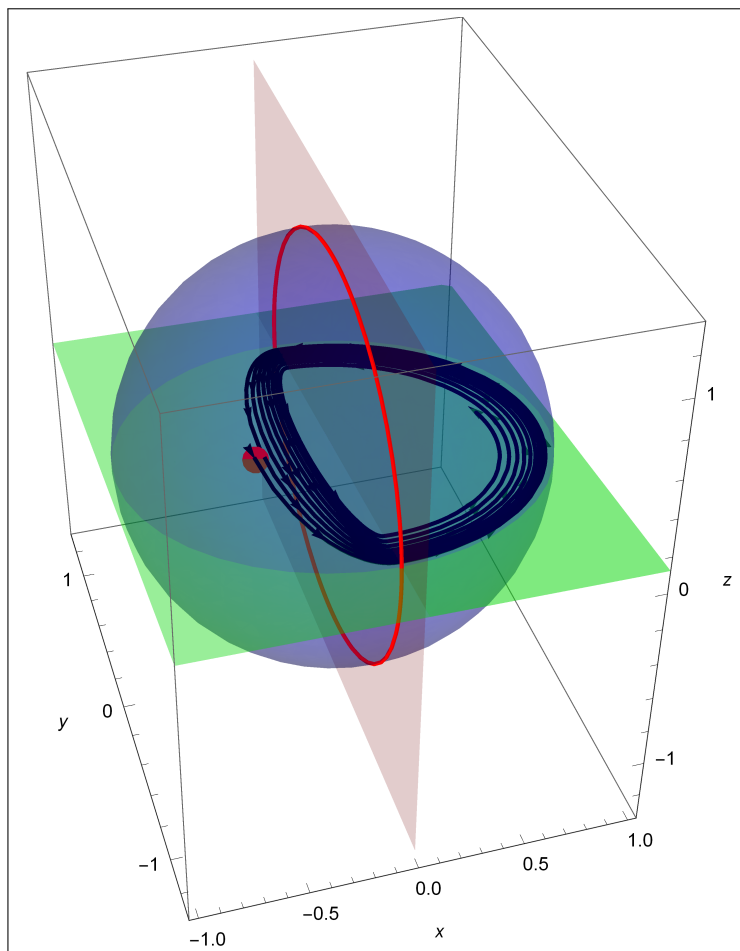


Figura 5.1: Cone invariante planar de duas zonas (na cor verde), interceptando o plano de separação (em rosa) e a esfera unitária (em azul). Em preto, na região limitada pela esfera, ressaltamos que para uma dada condição inicial (ponto vermelho) no cone invariante de duas zonas, a solução tende para a origem.

Para uma melhor visualização de que para uma dada condição inicial sobre o cone invariante planar de duas zonas, a solução tende para a origem, apresentamos novamente a Figura 5.1 sob um segundo ângulo.

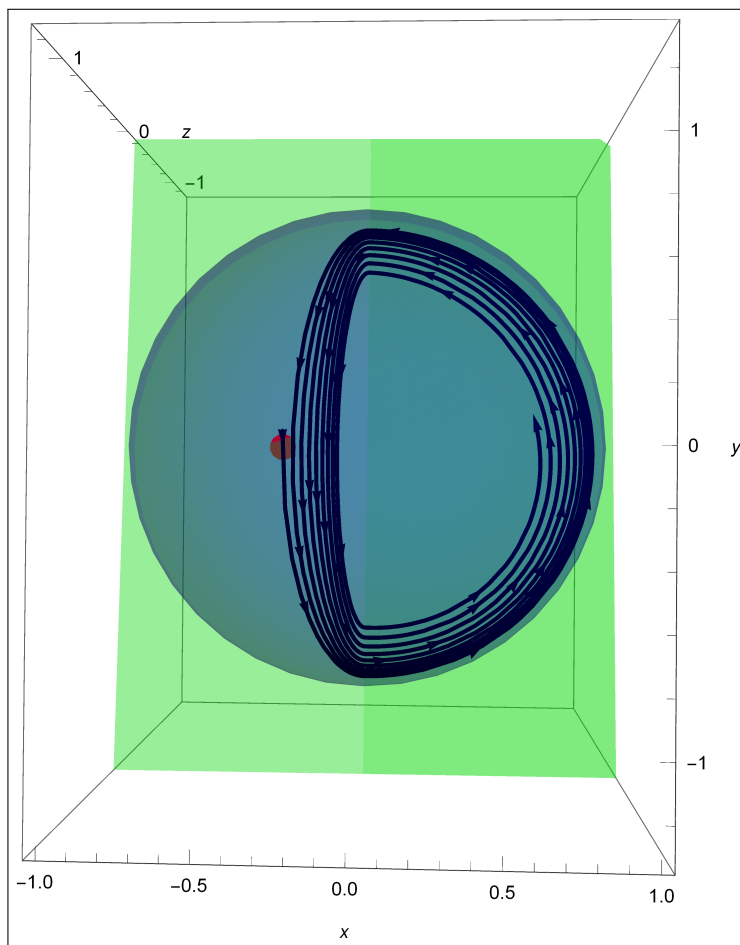


Figura 5.2: Cone invariante planar de duas zonas (na cor verde), interceptando a esfera unitária (em azul). Destacamos uma condição inicial (ponto vermelho) no cone invariante e a trajetória da solução com condição inicial neste ponto.

Agora, colocando $\lambda^- = \lambda_c^- = -0.26949$, obtemos

$$\frac{R}{r} = 1,$$

ou seja, todas as órbitas no cone invariante de duas zonas são periódicas, conforme vemos nas Figuras 5.3 e 5.4 a seguir.

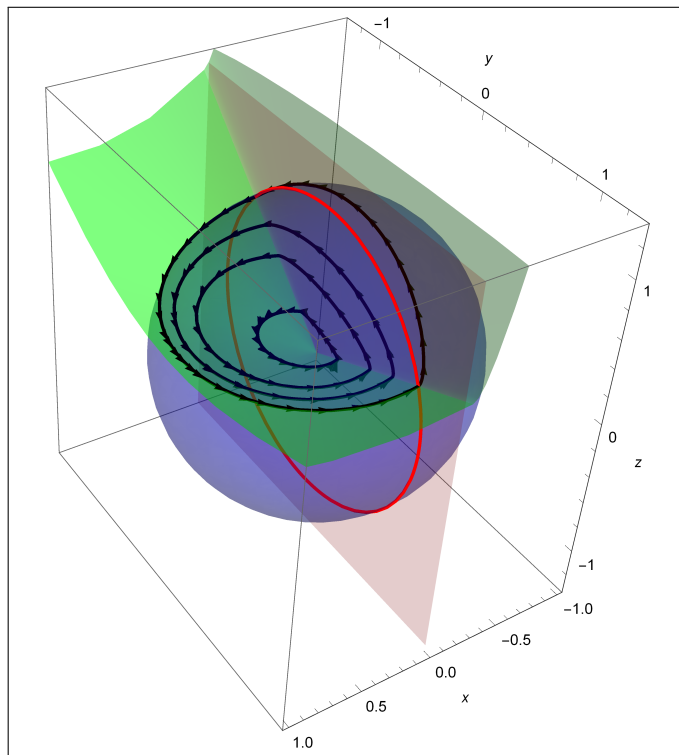


Figura 5.3: Cone invariante de duas zonas (em verde), interceptando o plano de separação (em rosa) e a esfera unitária (em azul). Em preto, destacamos quatro órbitas periódicas no cone.

Para uma melhor visualização das órbitas periódicas no cone, considere a Figura 5.4.

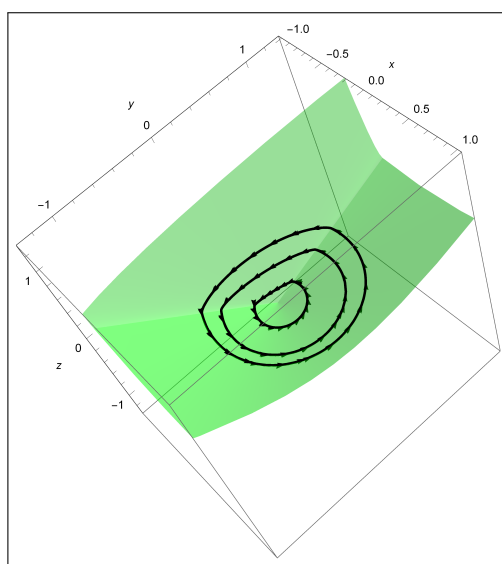


Figura 5.4: Três órbitas periódicas (em preto) no cone invariante de duas zonas (em verde).

Por fim, para $\lambda^- < \lambda_c^-$, digamos $\lambda^- = -0.4$, encontramos

$$\frac{R}{r} = 1.10707 > 1,$$

isto é, as órbitas do cone invariante de duas zonas se afastam da origem, veja as Figuras 5.5 e 5.6.

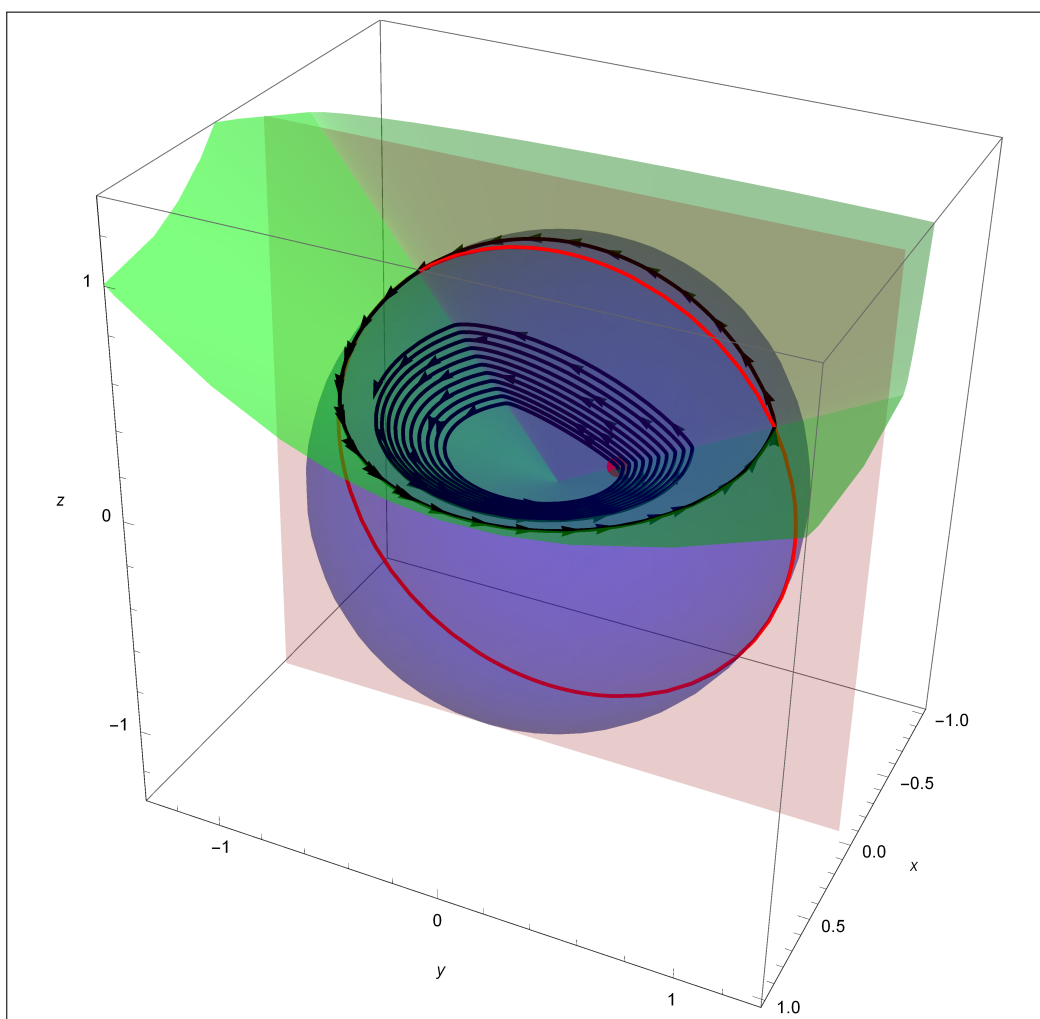


Figura 5.5: Cone invariante de duas zonas (na cor verde), interceptando a esfera unitária (em azul) e o plano de separação (em rosa). Destacamos uma condição inicial (ponto vermelho) no cone invariante de duas zonas e a trajetória da solução com condição inicial neste ponto.

Para melhor visualizar que uma órbita no cone invariante de duas zonas se afasta da origem, veja a Figura 5.6.

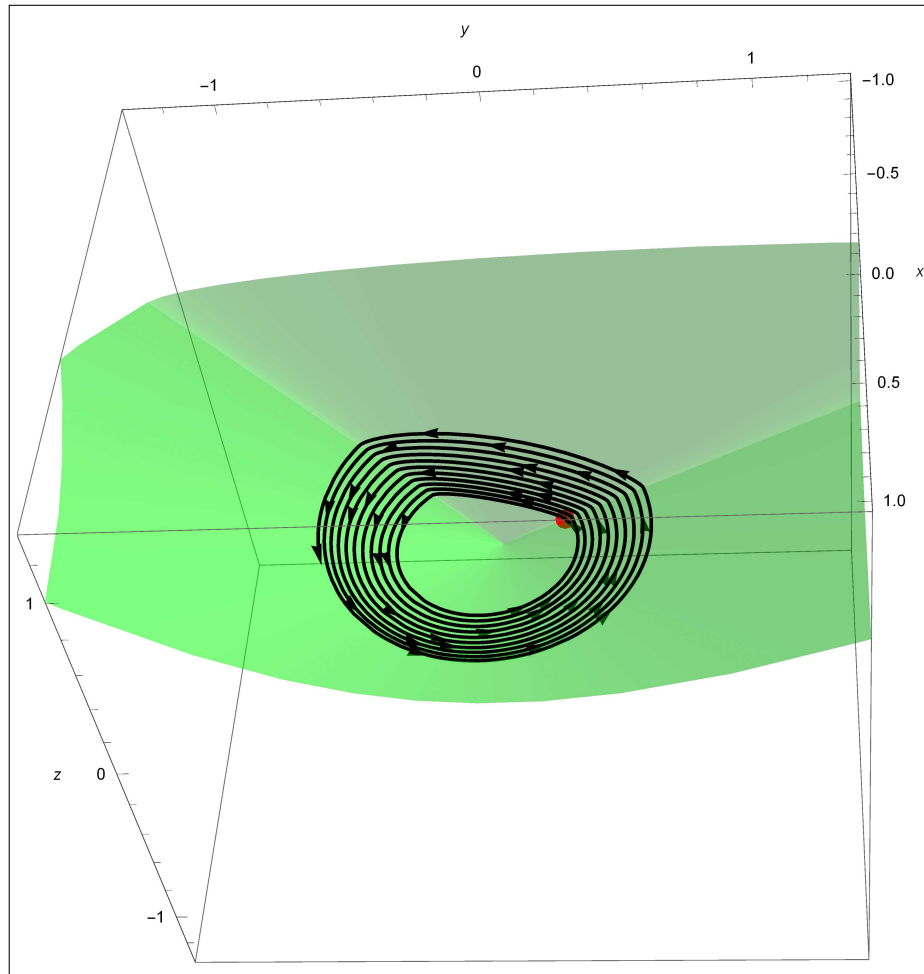


Figura 5.6: Órbita (em preto) no cone invariante de duas zonas (em verde) se afastando da origem.

A estabilidade da origem pode ser garantida em alguns casos, como veremos na próxima seção.

5.2 Estabilidade da Origem

Na **Proposição 2.3.6** do Capítulo 2 vimos que se o sistema (2.3) é observável e não tem cones invariantes de duas zonas então a origem é assintoticamente estável se, e somente se, os autovalores reais λ^\pm das matrizes A^\pm são negativos. Entretanto, na presença de cones invariantes de duas zonas a história é outra.

Considere o sistema (2.3) definido pelas matrizes

$$A^+ = \begin{pmatrix} -3.2 & -1 & 0 \\ 25.61 & 0 & -1 \\ -75.03 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1.28 & 0 & -1 \\ -0.624 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que os autovalores de A^+ são -3 e $-0.1 \pm 5i$ e os autovalores de A^- são -0.6 e $-0.2 \pm i$, donde as matrizes são Hurwitzianas. Pelo item (a) do **Teorema 4.1.1**, sendo

$$\gamma^+ = \frac{\alpha^+ - \lambda^+}{\beta^+} = 0.58 > 0, \quad \gamma^- = \frac{\alpha^- - \lambda^-}{\beta^-} = 0.4 > 0,$$

o sistema tem um único cone invariante de duas zonas, o qual é hiperbólico e assintoticamente estável. Vamos mostrar que as órbitas no cone se afastam da origem, ou seja, a origem é instável. De fato, já vimos que a expansão ou contração das órbitas no cone invariante é dada pelo quociente y_2/y_0 . Então, usando as expressões (3.2) e (3.4), temos que

$$\begin{aligned} \frac{y_2}{y_0} &= \frac{y_2}{y_1} \frac{y_1}{y_0} \\ &= \left(-\exp \left[\left(2\gamma^- + \frac{\lambda^-}{\beta^-} \right) \bar{\tau}^- \right] \frac{\varphi_{-\gamma^-}(\bar{\tau}^-)}{\varphi_{\gamma^-}(\bar{\tau}^-)} \right) \left(-\exp \left[\left(2\gamma^+ + \frac{\lambda^+}{\beta^+} \right) \bar{\tau}^+ \right] \frac{\varphi_{-\gamma^+}(\bar{\tau}^+)}{\varphi_{\gamma^+}(\bar{\tau}^+)} \right), \end{aligned}$$

sendo

$$(\bar{\tau}^+, \bar{\tau}^-) \in (0, \hat{\tau}^+) \times (0, \hat{\tau}^-)$$

a única solução positiva do sistema obtido pelas equações (3.1) e (3.3), a saber,

$$\begin{cases} \frac{z_0}{y_0} = \frac{z_2}{y_2}, \\ \frac{z_1}{y_1} = \frac{z_1}{y_1}, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} \lambda^- + \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{e^{\gamma^- \bar{\tau}^-} \text{sen}(\bar{\tau}^-)}{\varphi_{\gamma^-}(\bar{\tau}^-)} = \lambda^+ - \beta^+ [(\gamma^+)^2 + 1] \frac{e^{-\gamma^+ \bar{\tau}^+} \text{sen}(\bar{\tau}^+)}{\varphi_{-\gamma^+}(\bar{\tau}^+)}, \\ \lambda^- - \beta^- [(\gamma^-)^2 + 1] \frac{e^{-\gamma^- \bar{\tau}^-} \text{sen}(\bar{\tau}^-)}{\varphi_{-\gamma^-}(\bar{\tau}^-)} = \lambda^+ + \beta^+ [(\gamma^+)^2 + 1] \frac{e^{\gamma^+ \bar{\tau}^+} \text{sen}(\bar{\tau}^+)}{\varphi_{\gamma^+}(\bar{\tau}^+)}. \end{cases}$$

Substituindo todos os valores fornecidos anteriormente e resolvendo numericamente este sistema, encontramos

$$(\bar{\tau}^+, \bar{\tau}^-) = (2.5843, 4.2017).$$

Com estes valores, obtemos

$$\frac{y_2}{y_0} = 1.1815 > 1,$$

donde segue que as órbitas do cone se afastam da origem.

Além disto, como o sistema tem duas variedades estáveis associadas aos autovalores reais e negativos λ^+ e λ^- , concluímos que a origem é uma sela-foco em \mathbb{R}^3 , sendo o cone invariante de duas zonas a variedade bidimensional instável.

Nas Figuras 5.7 e 5.8 apresentamos o cone invariante de duas zonas em questão.

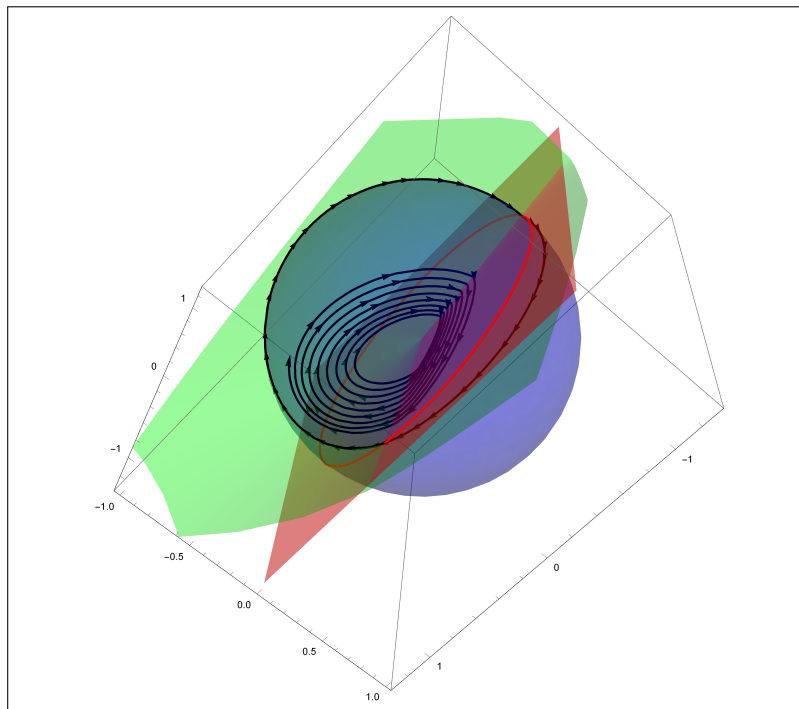


Figura 5.7: Intersecção do cone invariante de duas zonas (em verde) com \mathbb{S}^2 (em azul). A curva em vermelho é a intersecção de \mathbb{S}^2 com o plano de separação (em rosa) e a curva em preto é a órbita periódica de duas zonas em \mathbb{S}^2 resultante da existência do cone invariante de duas zonas. Em preto, na região limitada pela esfera, ressaltamos uma órbita do cone invariante de duas zonas, a qual se afasta da origem.

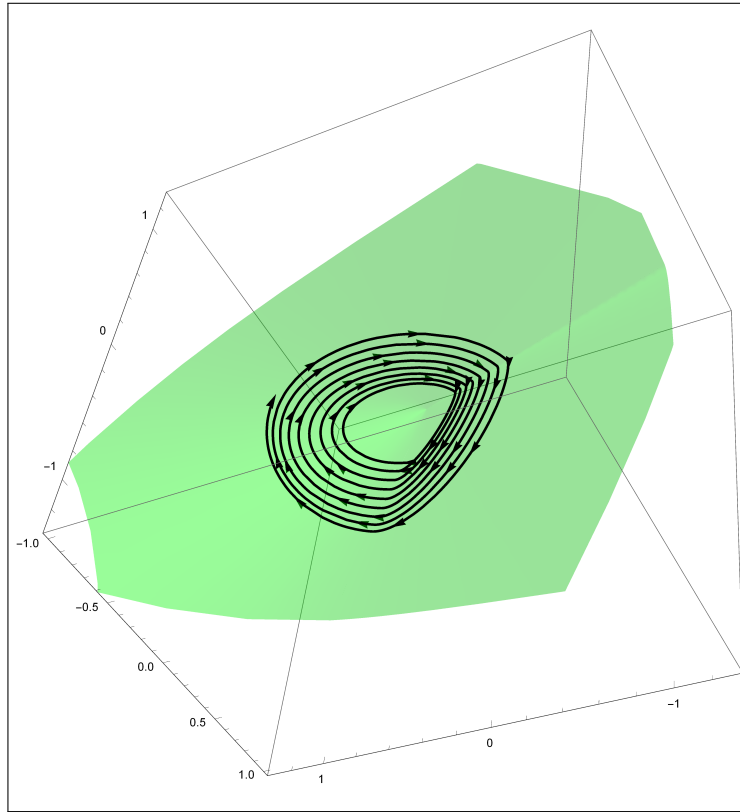


Figura 5.8: Cone Invariante de duas zonas (em verde) do sistema (2.3) definido por duas matrizes Hurwitzianas. Em preto ressaltamos uma de suas órbitas, a qual se afasta da origem.

Vemos, assim, que quando sistemas do tipo (2.3) possuem um ponto de equilíbrio no plano que separa duas zonas lineares, os resultados gerais sobre sistemas suaves não podem ser aplicados diretamente. Em particular, o tipo topológico de tal ponto de equilíbrio localizado no plano de separação não pode ser determinado, em geral, por métodos de linearização. De fato, como vimos anteriormente, mesmo quando as partes reais envolvidas indicam estabilidade assintótica, pode-se obter uma dinâmica instável para o ponto de equilíbrio. Observe que isto é possível devido ao **Teorema 5.1.1**, o qual garante uma dinâmica sela-foco para a origem mesmo quando o campo vetorial é formado por dois sistemas lineares com matrizes Hurwitzianas.

No próximo teorema apresentamos algumas condições que garantem a estabilidade assintótica da origem quando o sistema (2.3) é constituído por matrizes Hurwitzianas.

Teorema 5.2.1. *Suponha que as matrizes A^\pm do sistema (2.3) são Hurwitzianas e possuem os autovalores λ^\pm e $\alpha^\pm \pm i\beta^\pm$, com $\beta^\pm > 0$. Assuma também que tal sistema cumpra uma das seguintes condições:*

- (a) *O sistema (2.3) não tem cones invariantes de duas zonas;*
- (b) *As desigualdades $\gamma^+ < 0$ e $\gamma^- < 0$ são válidas;*
- (c) *Ambas as matrizes têm os mesmos autovalores reais, isto é, $\lambda^+ = \lambda^-$;*
- (d) *Ambas as matrizes possuem os mesmos autovalores complexos, ou seja, $\alpha^+ = \alpha^-$ e $\beta^+ = \beta^-$.*

Então, a origem do sistema (2.3) é globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Como o sistema projetado (2.4) tem exatamente dois pontos de equilíbrio, pelo *Teorema de Poincaré-Bendixson* em \mathbb{S}^2 e dos **Lemas 2.3.1** e **5.1.3**, acontece que, para se provar a estabilidade assintótica da origem é suficiente provar que as órbitas nos cones invariantes do sistema (2.3), quando existem, tendem à origem, já que as matrizes A^\pm são Hurwitzianas. Vamos, então, provar que quando o sistema (2.3) verifica uma das condições mencionadas no teorema, a origem é assintoticamente estável.

- (a) Se o sistema (2.3) não tem cones invariantes de duas zonas, então o conjunto ω -limite de uma órbita do sistema projetado (2.4) é ou um ponto de equilíbrio ou uma órbita periódica de uma zona, neste último caso o sistema (2.3) possui um cone invariante de uma zona. Para o primeiro caso, o **Lema 2.3.1** se aplica e, no segundo caso, as órbitas no cone se aproximam da origem porque, nesta zona, a respectiva matriz é Hurwitziana, logo podemos aplicar o **Lema 5.1.3**. Portanto, em ambos os casos, toda solução do sistema (2.3) tende assintoticamente para a origem.
- (b) Sendo $\gamma^+ < 0$ e $\gamma^- < 0$, então, pelo item (a) do **Teorema 4.1.1**, o sistema (2.3) tem um único cone invariante de duas zonas, o qual é instável. Logo, temos a existência de um único ponto fixo \bar{u} para a aplicação $S^+ \circ S^-$. Assim, as órbitas no cone verificam

$$\begin{aligned}
\frac{R}{r} &= \frac{y_1(\tau^-) y_2(\tau^+)}{y_0(\tau^-) y_1(\tau^+)} \\
&= \frac{\varphi_{-\gamma^-}(\tau^-)}{\varphi_{\gamma^-}(\tau^-)} e^{(\gamma^- + \frac{\alpha^-}{\beta^-})\tau^-} \frac{\varphi_{-\gamma^+}(\tau^+)}{\varphi_{\gamma^+}(\tau^+)} e^{(\gamma^+ + \frac{\alpha^+}{\beta^+})\tau^+} \\
&= \Psi(\tau^-)\Psi(\tau^+) \\
&< \exp\left(\frac{\lambda^-}{\beta^-}\tau^- + \frac{\lambda^+}{\beta^+}\tau^+\right) \\
&< 1,
\end{aligned}$$

pois $\lambda^\pm < 0$, visto que as matrizes são Hurwitzianas. Então, como as órbitas no cone convergem para a origem, podemos concluir, pelos **Lemas 2.3.1 e 5.1.3** que todas as órbitas do sistema (2.3) tendem para a origem assintoticamente.

- (c) Se $\lambda^+ = \lambda^- = \lambda$, então o sistema (3.12) tem a solução $\tau^+ = \tau^- = \pi$ e, possivelmente, em alguns casos, tem uma solução adicional $\tau^+ \neq \pi$ e $\tau^- \neq \pi$. Vamos analisar os dois casos separadamente.

Inicialmente, se $\tau^+ = \tau^- = \pi$, então $S^-(\lambda) = S^+(\lambda) = \lambda$ e o plano $\lambda^2 x - \lambda y + z = 0$ é um cone invariante de duas zonas. Logo, pelas equações (3.10) e (3.11), as órbitas no cone verificam

$$\begin{aligned}
\frac{R}{r} &= \frac{y_2(\pi)}{y_0(\pi)} \\
&= \frac{y_1(\pi) y_2(\pi)}{y_0(\pi) y_1(\pi)} \\
&= \left(-e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-}\pi}\right) \left(-e^{\frac{\alpha^+}{\beta^+}\pi}\right) \\
&= \exp\left(\left(\frac{\alpha^-}{\beta^-} + \frac{\alpha^+}{\beta^+}\right)\pi\right) \\
&< 1,
\end{aligned}$$

visto que $\alpha^\pm < 0$ porque, por hipótese, as matrizes A^\pm são Hurwitzianas. Então, as soluções no plano invariante de duas zonas tendem para a origem.

Agora, assuma que o sistema (3.12) tenha uma solução $\tau^+ \neq \pi$ e $\tau^- \neq \pi$. Então, o sistema (2.3) tem um cone invariante de duas zonas e, daí, existe um ponto fixo

para a aplicação $S^+ \circ S^-$, donde, pelas equações (3.9) e (3.11), as órbitas no cone verificam

$$\begin{aligned} \frac{R}{r} &= \frac{y_1(\tau^-) y_2(\tau^+)}{y_0(\tau^-) y_1(\tau^+)} \\ &= \frac{u_0(\tau^-) - \lambda^-}{u_1(\tau^-) - \lambda^-} e^{\frac{\lambda^-}{\beta^-} \tau^-} \frac{u_1(\tau^+) - \lambda^+}{u_2(\tau^+) - \lambda^+} e^{\frac{\lambda^+}{\beta^+} \tau^+} \\ &= \frac{u_2(\tau^+) - \lambda^+}{u_1(\tau^+) - \lambda^+} e^{\frac{\lambda^-}{\beta^-} \tau^-} \frac{u_1(\tau^+) - \lambda^+}{u_2(\tau^+) - \lambda^+} e^{\frac{\lambda^+}{\beta^+} \tau^+} \\ &= \exp \left(\frac{\lambda^-}{\beta^-} \tau^- + \frac{\lambda^+}{\beta^+} \tau^+ \right) \\ &< 1, \end{aligned}$$

lembrando que, por hipótese, $\lambda^+ = \lambda^- < 0$. Assim, as soluções no cone invariante não planar de duas zonas também tendem para a origem. Pelos **Lemas 2.3.1** e **5.1.3**, a conclusão segue.

(d) Assuma que $\alpha = \alpha^+ = \alpha^-$, $\beta = \beta^+ = \beta^-$ e considere a mudança de variáveis

$$x \rightarrow X, \quad y \rightarrow 2\alpha X + Y, \quad z \rightarrow (\alpha^2 + \beta^2)X + Z.$$

Em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'.$$

Pelo sistema (2.3) e da equação (5.7), segue que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t^\pm & -1 & 0 \\ m^\pm & 0 & -1 \\ d^\pm & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t^\pm & -1 & 0 \\ m^\pm & 0 & -1 \\ d^\pm & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda^\pm & -1 & 0 \\ 0 & 2\alpha & -1 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Logo, temos o sistema

$$x' = M^\pm x = \begin{pmatrix} \lambda^\pm & -1 & 0 \\ 0 & 2\alpha & -1 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 & 0 \end{pmatrix} x, \quad (5.8)$$

ou seja,

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda^\pm x_1 - x_2, \\ x'_2 = 2\alpha x_2 - x_3, \\ x'_3 = (\alpha^2 + \beta^2)x_2, \end{cases}$$

segue que as variáveis x_2 e x_3 estão desacopladas e definem o sistema linear planar

$$\begin{cases} x'_2 = 2\alpha x_2 - x_3, \\ x'_3 = (\alpha^2 + \beta^2)x_2, \end{cases}$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha & -1 \\ \alpha^2 + \beta^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz que define este último sistema planar possui os autovalores $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$, sendo $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ segue que a origem deste sistema planar é um foco atrator.

Portanto, o sistema (5.8) tem um plano invariante de duas zonas que contém a origem, isto é, tal sistema tem um cone invariante de duas zonas no qual as órbitas tendem para a origem. Além disto, como as matrizes A^\pm são Hurwitzianas, temos que $\lambda^\pm < 0$, implicando que a origem é globalmente assintoticamente estável.

■

5.3 Situações Interessantes

Nesta última seção, apresentamos mais alguns tópicos interessantes envolvendo o estudo de cones invariantes em **SLPC** em \mathbb{R}^3 .

Inicialmente, segundo [5], um **SLPC** e observável planar de duas zonas pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} x' = t^\pm x - y, \\ y' = d^\pm x - a, \end{cases} \quad (5.9)$$

sendo a um número real. Estes sistemas podem ser inseridos na classe dos **SLPC** observáveis em \mathbb{R}^3 de duas zonas considerando uma terceira variável z de tal modo que (5.9) assumam a forma

$$\begin{cases} x' = t^\pm x - y, \\ y' = d^\pm x - z, \\ z' = 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

pois, integrando $z' = 0$, obtemos $z = c \in \mathbb{R}$. Logo, tomando $c = a$, chegamos ao sistema (5.9). Podemos escrever este último sistema na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^\pm & -1 & 0 \\ d^\pm & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e, com um simples cálculo, vemos que os autovalores das duas matrizes de ordem 3 acima são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(t^\pm - \sqrt{-4d^\pm + (t^\pm)^2} \right), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} \left(t^\pm + \sqrt{-4d^\pm + (t^\pm)^2} \right),$$

ou seja, $\lambda_1 = 0$ é um autovalor comum das matrizes do sistema (5.10). Logo, o plano focal $z = 0$ de ambas as matrizes coincide e tal plano é um cone invariante de duas zonas do sistema. Conseqüentemente, as órbitas periódicas de duas zonas do sistema planar (5.9) para $a > 0$ (respectivamente $a < 0$), se correspondem de forma injetiva com os cones invariantes de duas zonas do sistema (5.10) que se encontram acima (respectivamente abaixo) do plano invariante $z = 0$. De fato, suponha que $a > 0$ (o caso $a < 0$ é análogo) e considere que o sistema (5.9) tenha uma órbita periódica de duas zonas Γ , conforme a Figura 5.9.

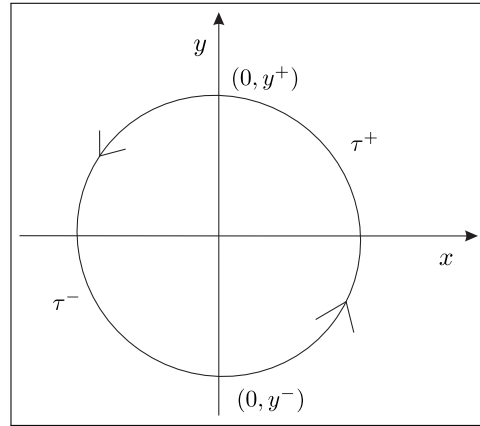


Figura 5.9: Órbita periódica Γ de duas zonas do sistema (5.9).

Temos no plano $z = a$ a respectiva órbita periódica de duas zonas Γ , veja a Figura 5.10.

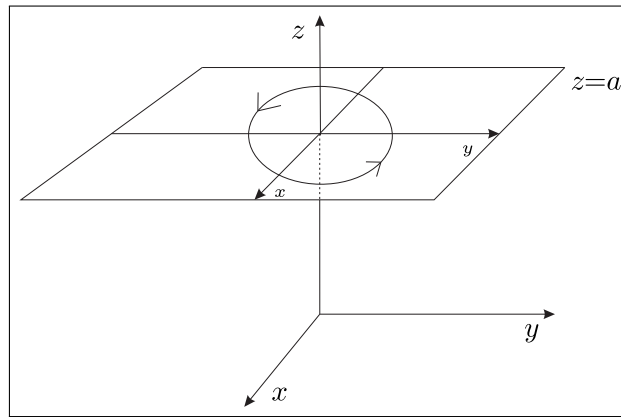


Figura 5.10: Plano $z = a$ em \mathbb{R}^3 .

Como o plano $z = a$ é invariante, dado um ponto σ pertencendo a Γ sobre o plano de separação, ou seja, σ é um ponto da forma

$$\sigma = (0, y^+, a), \quad y^+ > 0,$$

então, pela aplicação \mathcal{P}^- , σ é levado em um ponto

$$\kappa = (0, y^-, a), \quad y^- < 0$$

com o tempo τ^- , o qual, como sabemos, é o mesmo para todos os pontos no domínio da aplicação \mathcal{P}^- . Prosseguindo, pela aplicação \mathcal{P}^+ , κ é levado em σ com o tempo τ^+ . Logo,

a semirreta que parte da origem e passa pelo ponto σ , por meio da composição $\mathcal{P}^+ \circ \mathcal{P}^-$, gera um cone invariante de duas zonas \mathcal{C} , o qual está acima do plano invariante $z = 0$. Note também que se o sistema (5.10) possui um cone invariante de duas zonas \mathcal{C} situado acima do plano $z = 0$, então, tomando $z = a$, neste plano existe uma órbita periódica de duas zonas do sistema (5.9). Além disto, se as matrizes do sistema (5.9) têm autovalores complexos, isto é, quando $-4d^\pm + (t^\pm)^2 < 0$, então seu comportamento dinâmico pode ser deduzido do item (d2.2) do Teorema 4.1.1. O sistema (5.9) é estudado em [8].

Considere agora o sistema (2.3) definido pelas matrizes

$$A^+ = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 9 & 0 & -1 \\ -10 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 44 & 0 & -1 \\ -150 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

as quais possuem os autovalores $-2, -1 \pm 2i$ e $-3, 1 \pm 7i$, respectivamente, ou seja, a matriz A^+ é Hurwitziana e a matriz A^- não é Hurwitziana. Resulta que $\gamma^- = 4/7$ e $\gamma^+ = 1/2$. Logo, pelo item (a) do Teorema 4.1.1, tal sistema possui um único cone invariante de duas zonas assintoticamente estável. É possível mostrar que $R/r = 0.325796 < 1$, donde segue que as órbitas neste cone tendem para a origem. Na Figura 5.11 apresentamos parte do respectivo cone e uma de suas órbitas, a qual tende para a origem.

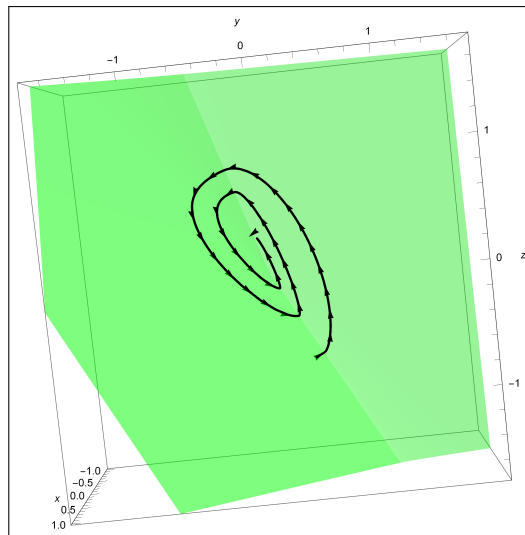


Figura 5.11: Cone Invariante de duas zonas (em verde) do sistema (2.3) definido por uma matriz Hurwitziana e outra não Hurwitziana. A origem é um atrator para as órbitas do cone.

Para concluir esta seção, veremos agora um caso de um sistema do tipo (2.3) que possui um único cone invariante de duas zonas, ambas as matrizes que o definem não são Hurwitzianas, mas as órbitas no cone tendem para a origem. De fato, considere

$$A^- = \begin{pmatrix} 0.081 & -1 & 0 \\ 0.06058 & 0 & -1 \\ 0.0063226 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^+ = \begin{pmatrix} -0.1 & -1 & 0 \\ 0.03 & 0 & -1 \\ 0.005 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

as quais possuem os autovalores $0.101, -0.01 \pm 0.25i$ e $0.1, -0.1 \pm 0.2i$, respectivamente. Temos que $\gamma^- = -0.444$ e $\gamma^+ = -1$, implicando que o sistema possui um único cone invariante de duas zonas instável, pelo item (a) do **Teorema 4.1.1**. Com alguns cálculos, mostra-se que $R/r = 0.182817 < 1$, donde segue que as órbitas neste cone invariante de duas zonas tendem para a origem. Na Figura 5.12 a seguir, apresentamos o respectivo cone invariante de duas zonas e uma de suas órbitas, a qual tende para a origem.

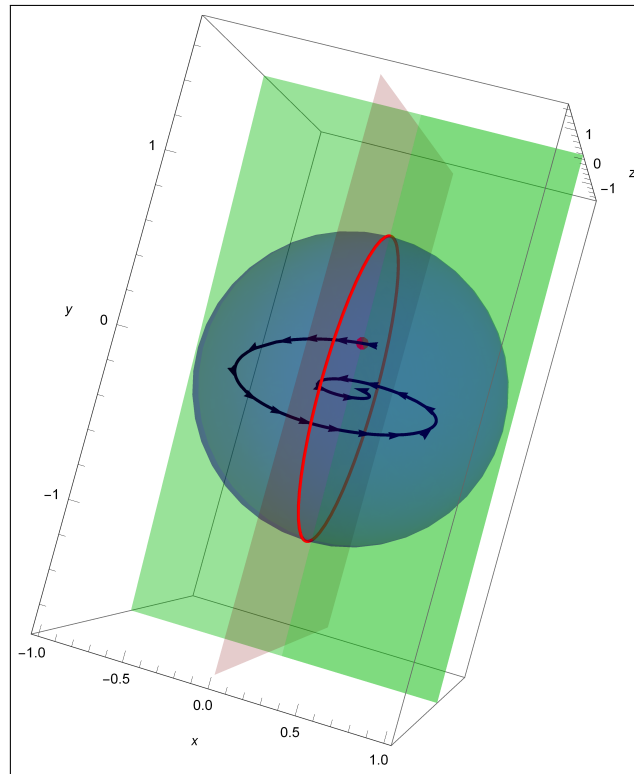


Figura 5.12: Vista superior de um cone Invariante de duas zonas (em verde) do sistema (2.3) definido por duas matrizes não Hurwitzianas. Tal cone intercepta Π (em rosa) e \mathbb{S}^2 (em azul). Em preto ressaltamos uma de suas órbitas, a qual tende para a origem.

Considerações Finais

Por meio da realização desta dissertação confirmamos que nem sempre é possível aplicar diretamente a teoria dos sistemas suaves para se estudar sistemas suaves por partes, pois, como vimos, dado um sistema do tipo (2.3) possuindo matrizes Hurwitzianas, a origem pode ser um ponto de equilíbrio instável.

Vimos também a importância de se exibir as semiaplicações de Poincaré em uma forma paramétrica, algo que nos permitiu realizar todo este estudo.

Os **Teoremas 4.1.1** e **4.2.1** nos permitiram construir os diagramas de bifurcação para os cones invariantes de duas zonas do sistema (2.3), diagramas que ilustram a variação do número e também da estabilidade de cones invariantes de duas zonas. O **Teorema 4.1.1** é, sem dúvida, o principal resultado desta dissertação. Ainda sobre o teorema em questão, cabe aqui mencionar o fato de que um cone invariante de uma zona não é isolado e que o número máximo de cones invariantes de duas zonas de um **SLPC** é observável é dois.

Vimos que estão bem definidas a dinâmica das órbitas de um cone invariante de duas zonas e também a estabilidade da origem quando o sistema (2.3) não tem cones invariantes de duas zonas. Entretanto, conforme [4] e, até onde sabemos, não está determinada a estabilidade da origem quando o sistema possui um cone invariante de duas zonas.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRONOV, A. A.; LEONTOVICH, E. A.; GORDON, I. I.; MAIER, A.G. *Qualitative theory of second-order dynamic systems*. Israel: John Wiley & Sons, 1973. p. 205–206.
- [2] ANDRONOV, A. A.; VITT, A.; KHAIKIN, S. *Theory of oscillations*. Oxford: Pergamon Press, 1966. p. 451.
- [3] CARMONA, V. *Bifurcaciones en sistemas dinámicos lineales a trozos*. Ph. D. Dissertation. Universidad de Sevilla, 2002. p. 3–21.
- [4] CARMONA, V.; FERNÁNDEZ-GARCÍA, S.; FREIRE, E. *Saddle-node bifurcation of invariant cones in 3D piecewise linear systems*, Phys. D. **241**, 2012. p. 623–635.
- [5] CARMONA, V.; FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. *On simplifying and classifying piecewise linear systems*, IEEE. T. Circuits-I. **49**, 2002, p. 609–620.
- [6] CARMONA, V.; FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. *Bifurcation of invariant cones in piecewise linear homogeneous systems*, Int. J. Bifurcat. Chaos. **15**, 2005, p. 2469–2484.
- [7] CARMONA, V.; FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. *The continuous matching of two stable linear systems can be unstable*, Discrete Cont. Dyn. Syst. **16**, 2006, p. 689–703.
- [8] FREIRE, E.; PONCE, E.; RODRIGO, F.; TORRES, F. *Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones*, Int. J. Bifurcat. Chaos. **8**, 1998, p. 2073–2097.

- [9] Software **WOLFRAM MATHEMATICA**: www.wolfram.com/mathematica/.
- [10] SOTOMAYOR, J. *Equações diferenciais ordinárias*. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- [11] SUNDARAPANDIAN, V. *Numerical linear algebra*. 2. ed. Delhi: PHI Learning Private Limited, 2014. p. 393.
- [12] ZHANG, F. *The Schur complement and its applications*. New York: Springer, 2005.