Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Majoração, Inclusão de Imagens e Fatoração de Operadores Lineares

Raquel Maria Nogueira Wood Noronha

Orientador: Prof. Drª. Márcia Sayuri Kashimoto

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da CAPES

Itajubá, 24 de fevereiro de 2017

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Majoração, Inclusão de Imagens e Fatoração de Operadores Lineares

Raquel Maria Nogueira Wood Noronha

Orientador: Prof. Drª. Márcia Sayuri Kashimoto

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise

À minha gêmea, Priscila.

Agradecimentos

Narra o evangelho de Lucas, em seu capítulo 17 que Jesus, a destino de Jerusalém, curou dez homens leprosos, que clamavam por sua misericórdia. Contudo, apenas um deles retornou glorificando a Deus em alta voz, rendendo aos seus pés, dando-lhe graças.

Aproveito desse espaço para fazer registro imutável da minha gratidão ao Mestre dos mestres, meu soberano Criador, pela sabedoria, pelo sustento infálivel, pelo amor inigualável e pela misericórdia infinita. E, finalmente agradeço também, desejando as bençãos de Deus:

Meus amados pais, Tarcísio e Ester, minha eterna gratidão por tudo e meu eterno amor por vocês.

Meu irmão Davi, pela companhia e preciosos ensinamentos.

Minha irmã Anaci, pela companhia, fazendo os momentos mais divertidos.

Minha irmã Priscila. "O elo que há entre nós revela a dádiva da criação e o poder de Deus. Obrigada pela nobreza e perfeição da sua existência em minha vida."

Meus queridos amigos, Evandro, Guilherme, Karina e Karine. A amizade é um bem que desconhece prescrição e decadência. Em especial a que nos une. Obrigada pelo cuidado, pelo carinho e pela companhia.

Meu amado mestre, José Augusto Baêta Segundo.

Minha orientadora Márcia Kashimoto, pelo trabalho realizado.

Meus professores, Claudemir Oliveira, Luis Fernando Mello, Mariza Simsen e Jacson Simsen pela paciência, dedicação, incentivo e confiança. Obrigada por tudo.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

" Reconhecia Leibniz que a linguagem matemática poderia nos comunicar muitos dos segredos da natureza, e não foram poucas as vezes que se repetiu, na filosofia, que a matemática é a linguagem de Deus."

Mário Ferreira dos Santos

Resumo

O objetivo desta dissertação é definir e relacionar os conceitos de majoração, inclusão de imagens e fatoração para operadores lineares. Apresentamos resultados para operadores limitados e não-limitados atuando em espaços de Banach. Além disso, abordamos algumas aplicações na teoria de frames e operadores quociente.

Palavras–chave: Operadores lineares, Majoração, Inclusão de Imagem, Fatoração.

Abstract

The aim of this dissertation is to define and relate the concepts of majorization, range inclusion and factorization for linear operators. We present results for bounded and unbounded operators acting on Banach spaces. Furthermore, we discuss some applications in frames and quotient operators theory.

Keywords: Linear operators, Majorization, Range Inclusion, Factorization.

Sumário

Introdução

Em 1966, Douglas [9] definiu os conceitos de majoração, inclusão de imagens e fatoração e apresentou o seguinte resultado, o qual chamaremos de Teorema de Douglas, relacionando-os no contexto de espaços de Hilbert: Dados T, S operadores lineares limitados definidos em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e com valores em $\mathcal{H}$, tais que $\mathcal{R}(S)$ e $\mathcal{R}(T)$ denotam o conjunto imagem de S e T, as seguintes afirmações são equivalentes:
(i) $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$;
(ii) $||S^*x|| \leq M \; ||T^*x||$, para algum $M > 0$ e para todo $x \in \mathcal{H}$, isto é, o adjunto de T majora o adjunto de S;
(iii) $S = TU$, para algum operador limitado U definido em $\mathcal{H}$ a valores em $\mathcal{H}$.

A questão natural que surge, diz respeito sobre a validade deste teorema em espaços de Banach arbitrários. Em 1973, Embry [11] estendeu parcialmente o teorema. Inspirado por estes trabalhos em 2004, Bruce Barnes [3] apresentou um conjunto de resultados relacionando os conceitos de majoração, inclusão de imagens e fatoração de operadores lineares limitados entre espaços de Banach distintos.

Ainda em [9], Douglas expôs uma versão do Teorema para operadores não limitados em espaços de Hilbert. Motivado por este teorema, M. Forough [12] apresentou uma generalização para operadores lineares não limitados em espaços de Banach, e outros relevantes resultados conectando os referidos conceitos.

O objetivo desta dissertação é definir e relacionar os conceitos de majoração, inclusão de imagens e fatoração para operadores lineares.

Iniciaremos, apresentando no Capítulo 1 algumas definições e teoremas clássicos da

Análise Funcional envolvendo operadores lineares, espaços de Banach e espaços de Hilbert. Usaremos do mesmo espaço para expor outros resultados que serão utilizados ao longo do texto e estabelecer algumas notações.

No Capítulo 2, apresentaremos os resultados envolvendo majoração, inclusão de imagens e fatoração de operadores lineares limitados entre espaços de Banach distintos tendo como referência o artigo do Barnes [3].

No Capítulo 3, começaremos estudando a noção essencial de inversa generalizada e em seguida, os resultados estabelecidos por Forough [12].

Finalmente, apresentaremos duas aplicações. A primeira, no Capítulo 4, refere-se a frames para operadores em espaços de Hilbert e é baseada no artigo de Laura Gravuta [13]. A segunda aplicação, que abordaremos no Capítulo 5, refere-se ao estudo de operadores quociente limitados, compactos e de Fredholm. Conduzidos por [2] e [1] veremos por exemplo, a caracterização do operador quociente T/S limitado utilizando o Teorema de Douglas.

Capítulo 1

Preliminares

O intuito dessa dissertação é definir e relacionar os conceitos de majoração, inclusão de imagens e fatoração de operadores lineares entre espaços de Banach. Temos assim, os operadores lineares e os espaços de Banach como protagonistas dessa tarefa. Desse modo, convém iniciarmos apresentando formalmente as definições de espaço de Banach e de operador linear e também os teoremas clássicos que os envolvem. Beneficiaremos do mesmo capítulo para apresentar outros resultados que serão utilizados ao longo do texto, bem como algumas notações.

Definição 1.0.1. *Um espaço normado $(X, ||.||)$ é dito ser um espaço de Banach quando é completo com respeito a métrica induzida pela norma*

$$d(x,y) = ||x-y||,\ x,y \in X.$$

Definição 1.0.2. *Para cada número real $p \geq 1$, definimos*

$$\ell^p = \left\{ \{a_j\}_j \mid a_j \in \mathbb{K},\ j \in \mathbb{N}\ e \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty \right\}.$$

Proposição 1.0.1. *O espaço das sequências ℓ^p, $p \geq 1$ munido da norma*

$$||\{a_j\}_j||_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Demonstração. Veja [16] - Página 61. □

Definição 1.0.3. *Para $p = \infty$, definimos*

$$\ell^\infty = \left\{ \{a_j\}_j \mid a_j \in \mathbb{K},\ j \in \mathbb{N}\ e\ \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| < \infty \right\}.$$

Proposição 1.0.2. *O espaço das sequências ℓ^∞ munido da norma*

$$||\{a_j\}_j||_\infty = \sup\{|a_j| \mid j \in \mathbb{N}\}$$

é um espaço de Banach.

Demonstração. Veja [4] - Página 15. □

Proposição 1.0.3. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $a_1, .., a_n$, $b_1, ..., b_n$ escalares e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Veja [4] - Proposição 1.4.1. □

Denotamos o fecho de um subconjunto V de um espaço normado X por $\overline{V}$.

Proposição 1.0.4. *Seja X um espaço de Banach. Um subsespaço vetorial $Y \subseteq X$ é completo se, e somente se, Y é fechado em X.*

Demonstração. Veja [16] - Teorema 2.3-1. □

Definição 1.0.4. *Um operador linear T é um operador tal que*
(i) o domínio de T, denotado por $\mathcal{D}(T)$, é um espaço vetorial e a imagem de T, denotada por $\mathcal{R}(T)$, está contida em um espaço vetorial sobre o mesmo corpo;
(ii) para todo $x, y \in \mathcal{D}(T)$ e escalar λ,

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\lambda x) = \lambda Tx.$$

Sejam X e Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ tais que $\mathcal{D}(T) \subseteq X$ e $\mathcal{R}(T) \subseteq Y$. Escreve-se $T : \mathcal{D}(T) \to Y$. Sendo T um operador linear, o núcleo de T, denotado por $\mathcal{N}(T)$, é o subespaço de $\mathcal{D}(T)$ definido por

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathcal{D}(T) \mid Tx = 0\}.$$

O gráfico de T, denotado por $G(T)$, é o subespaço de $X \times Y$ definido por

$$G(T) = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in \mathcal{D}(T), y = Tx\}.$$

Definição 1.0.5. *Sejam X e Y espaços normados e $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ um operador linear. Diremos que T é limitado se existe um número real $K > 0$ tal que*

$$||Tx|| \leq K||x||, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(T).$$

Proposição 1.0.5. *Sejam X e Y espaços normados e $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ um operador linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *T é contínuo;*

(2) *T é contínuo na origem;*

(3) $\sup\{||Tx|| : x \in \mathcal{D}(T), ||x|| \leq 1\} < \infty$;

(4) *Existe uma constante $K > 0$ tal que $||Tx|| \leq K||x||$, para todo $x \in \mathcal{D}(T)$.*

Demonstração. Veja [16] - Teorema 2.7-9. □

Proposição 1.0.6. *Sejam X e Y espaços normados e $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ um operador linear limitado. Então,*

$$\begin{aligned} ||T|| &:= \sup\{||Tx|| \mid x \in \mathcal{D}(T), ||x|| = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{||Tx||}{||x||} \mid x \in \mathcal{D}(T), x \neq 0\right\} \\ &= \sup\{||Tx|| \mid x \in \mathcal{D}(T), ||x|| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Veja [16] - Página 92. □

Denotamos por $B(X, Y)$ o espaço vetorial de todos os operadores lineares limitados entre espaços normados X e Y. Quando $X = Y$, escreveremos $B(X)$.

Proposição 1.0.7. *Sejam X e Y espaços normados e $T \in B(X,Y)$.*

(1) *A expressão*

$$||T|| = \sup\{||Tx|| \mid x \in \mathcal{D}(T), ||x|| \leq 1\}$$

define uma norma no espaço $B(X,Y)$.

(2) $||Tx|| \leq ||T||\,||x||$, *para todos $T \in B(X,Y)$ e $x \in \mathcal{D}(T)$.*

(3) *Se Y for Banach, então $B(X,Y)$ também será Banach.*

Demonstração. Veja [4] - Proposição 2.1.4. □

Proposição 1.0.8. *Sejam X e Y espaços normados, $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ um operador linear limitado e $\{x_n\}_n$ uma sequência em $\mathcal{D}(T)$. Então,*

(1) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *implica* $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$.

(2) *O núcleo de T, $\mathcal{N}(T)$, é um subespaço fechado de X.*

Demonstração. Veja [16] - Corolário 2.7-10 □

Teorema 1.0.1. *Sejam X um espaço normado, Y um espaço de Banach e $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ um operador linear limitado. Então T tem uma única extensão, $\widetilde{T} : \overline{\mathcal{D}(T)} \to Y$, tal que $\widetilde{T}$ é um operador linear limitado de norma $||\widetilde{T}|| = ||T||$.*

Demonstração. Veja [16] - Teorema 2.7-11. □

Proposição 1.0.9. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in B(X,Y)$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$||Tx|| \geq C||x||, \ \forall x \in X$$

se, e somente se, $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e $\mathcal{R}(T)$ é fechado em Y.

Demonstração. Veja [7] - Proposição 6.4, página 208. □

Definição 1.0.6. *Um funcional linear limitado φ é um operador linear limitado com domínio $\mathcal{D}(\varphi)$ em um espaço normado X e imagem no corpo de escalares $\mathbb{K}$. Assim*

$$\varphi : \mathcal{D}(\varphi) \to \mathbb{K},$$

onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se X é real e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se X é complexo, é limitado se existe um número real $K > 0$ tal que

$$|\varphi(x)| \leq K||x||, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(\varphi).$$

O conjunto de todos os funcionais lineares limitados definidos em um espaço vetorial X é denotado por X^* e denominado espaço dual. O espaço dual de X^*, o chamado bidual de X, é denotado por X^{**}.

Definição 1.0.7. *Sejam X um espaço normado e*

$$\begin{aligned} J_X : X &\to X^{**} \\ x &\mapsto J_X(x) = g_x : X^* \to \mathbb{K} \\ &\qquad\qquad\qquad \varphi \mapsto g_x(\varphi) = \varphi(x), \end{aligned}$$

a aplicação canônica de X em X^{**}. Diremos que X é reflexivo se $\mathcal{R}(J_X) = X^{**}$.

Definição 1.0.8. *Seja X um espaço vetorial e M um subespaço vetorial de X. O espaço quociente de X por M, é o espaço vetorial X/M, formado pelas classes de equivalência*

$$x + M = \{x + m \mid m \in M\}, x \in X$$

munido de duas operações, dadas por:

- $(x + M) + (y + M) = (x + y) + M;$
- $\lambda(x + M) = (\lambda x) + M.$

Proposição 1.0.10. *Seja X um espaço normado e M um subespaço de X. Então a função definida em X/M por $||x + M|| = \inf\{||x + m|| \mid m \in M\}$ é uma semi-norma. Se M for um subespaço fechado, então $||.||$ é uma norma.*

Demonstração. Veja [7] - Página 70. $\square$

Proposição 1.0.11. *Sejam X um espaço de Banach e M um subespaço fechado de X. Então X/M é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [7] - Teorema 4.2, página 70. $\square$

Teorema 1.0.2. *Sejam X um espaço normado e M um subespaço fechado de X. A aplicação quociente*

$$\pi : X \to X/M$$

$$x \mapsto \pi(x) = x + M$$

tem as seguintes propriedades:

(1) *π é linear e contínua;*

(2) *π leva a bola unitária de X em X/M;*

(3) *π é uma aplicação aberta;*

(4) *$\mathcal{N}(\pi) = M$.*

Demonstração. Veja [7] - Teorema 4.2, página 70. □

Teorema 1.0.3. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ linear. Suponha que M seja um subespaço fechado de X contido em $\mathcal{N}(T)$. Então existe uma única função $S : X/M \to Y$ tal que $T = S \circ \pi$, onde $\pi : X \to X/M$, $\pi(x) = x + M$. Tal função S é linear e $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T)$. Se $M = \mathcal{N}(T)$, então S será injetora. S é contínua se, e somente se, T é contínua. Nesse caso, $||S|| = ||T||$.*

Demonstração. Veja [7] - Página 370. □

Proposição 1.0.12. *(Desigualdade de Schwarz) Seja X um espaço vetorial munido de um produto interno $< .,. >$. Então*

$$| < x, y > | \leq ||x||.||y||,$$

para quaisquer $x, y \in X$.

Demonstração. Veja [16] - Lema 3.2-1. □

Definição 1.0.9. *Sejam X um espaço vetorial com produto interno e $S \subseteq X$. Denominamos o subconjunto*

$$S^{\perp} = \{y \in X \mid < x, y >= 0, \forall x \in S\}$$

de complemento ortogonal de S.

Definição 1.0.10. *Seja X um espaço vetorial com produto interno. Um conjunto $S \subseteq X$ é dito ortonormal se para todos $x, y \in S$,*

$$< x, y >= \begin{cases} 0, & se \quad x \neq y, \\ 1, & se \quad x = y. \end{cases}$$

Um conjunto ortonormal S *tal que* $S^{\perp} = \{0\}$ *é chamado de sistema ortonormal completo. Nesse caso diremos que* S *é uma base ortonormal.*

Teorema 1.0.4. *Sejam* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert e*

$$S = \{x_i \mid i \in I\}$$

um conjunto ortonormal em $\mathcal{H}$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *Para cada* $x \in \mathcal{H}$*,* $x = \sum_{i \in I} < x, x_i > x_i$*;*

(2) S *é um sistema ortonormal completo;*

(3) $\overline{[S]} = \mathcal{H}$*;*

(4) *Para cada* $x \in \mathcal{H}$*,* $||x||^2 = \sum_{i \in I} | < x, x_i > |^2$*; (Identidade de Parseval)*

(5) *Para todos* $x, y \in \mathcal{H}$*,* $< x, y >= \sum_{i \in I} < x, x_i > \overline{< y, x_i >}$*.*

Demonstração. Veja [4] - Teorema 5.3.10 □

Teorema 1.0.5. *Um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *de dimensão infinita é separável se, e somente se, existe em* $\mathcal{H}$ *um sistema ortonormal completo enumerável.*

Demonstração. Veja [4] - Teorema 5.4.3. □

Teorema 1.0.6. *(Critério da Compacidade) Sejam* X *e* Y *espaços normados e* $T : X \to Y$ *um operador linear. Então* T *é compacto se, e somente se, dada uma sequência limitada* $\{x_n\}_n$ *em* X*, a sequência* $\{Tx_n\}_n$ *em* Y *possuir subsequência convergente.*

Demonstração. Veja [16] - Teorema 8.1-3. □

Teorema 1.0.7. *Seja* $\{T_n\}_n$ *uma sequência de operadores lineares compactos definidos em um espaço normado* X *a valores em um espaço de Banach* Y*. Se* $\{T_n\}_n$ *converge uniformemente, digamos* $\lim_{n\to\infty} ||T_n - T|| = 0$*, então o operador* T *é compacto.*

Demonstração. Veja [16] - Teorema 8.1-5. □

Teorema 1.0.8. *Seja* X *um espaço normado. Se* $T : X \to X$ *é um operador linear compacto e* $S : X \to X$ *um operador linear limitado, então* TS *e* ST *são compactos.*

Demonstração. Veja [16] - Página 422. □

Teorema 1.0.9. *(Teorema de Schauder) Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear limitado. Então T é compacto se, e somente se, o operador adjunto de T, $T^* : Y^* \to X^*$, é compacto.*

Demonstração. Veja [4] - Teorema 7.2.7. □

Definição 1.0.11. *Sejam X e Y espaços de Banach. Então, $T \in B(X, Y)$ é dito ser um operador de Fredholm se valem as seguintes condições:*
(i) $\mathcal{R}(T)$ é fechado;
(ii) $dim \mathcal{N}(T) < \infty$;
(iii) $dim Y/\mathcal{R}(T) < \infty$.

O conjunto de todos os operadores de Fredholm de X em Y é denotado por $Fred(X, Y)$. Quando $X = Y$, escreve-se $Fred(X)$.

Concluíremos o capítulo enunciando alguns relevantes teoremas da Análise Funcional, dos quais faremos uso no decorrer do texto.

Teorema 1.0.10. *(Princípio da Limitação Uniforme) Seja $\{T_n\}_n$ uma sequência de operadores lineares limitados $T_n : X \to Y$ de um espaço de Banach X em um espaço normado Y, tal que $\{||T_n x||\}_n$ é limitada para todo $x \in X$, digamos, $||T_n x|| \leq C_x$, $n = 1, 2, ...$ onde $C_x > 0$. Então a sequência de normas $\{||T_n||\}_n$ é limitada, isto é, existe $C > 0$ tal que $||T_n|| \leq C$, $n = 1, 2, ...$*

Demonstração. Veja [16] - Teorema 4.7-3. □

Teorema 1.0.11. *Se X é um espaço de Banach, Y um espaço normado e T_n: $X \to Y$ uma sequência de operadores lineares contínuos que converge pontualmente para uma aplicação T, isto é,*

$$T : X \to Y, \quad Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x,$$

então T é um operador linear e contínuo.

Demonstração. Veja [4] - Corolário 2.3.3. □

Teorema 1.0.12. *(Teorema do Gráfico Fechado) Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear. Então, T é contínuo se, e somente se, o gráfico de T é fechado.*

Demonstração. Veja [18] - Teorema 9.9. □

Teorema 1.0.13. *(Teorema de Hahn-Banach - Espaços Normados) Sejam Y um subespaço de um espaço normado X sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\varphi : Y \to \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então, existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi} : X \to \mathbb{K}$ cuja restrição a Y coincide com φ e $||\widetilde{\varphi}|| = ||\varphi||$.*

Demonstração. Veja [4] - Página 60. □

O próximo resultado é uma aplicação do Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 1.0.14. *Seja X um espaço normado não trivial.*
(1) *Se $\varphi(x) = \varphi(y)$ para todo $\varphi \in X^*$, então $x = y$.*
(2) *Se $0 \neq x \in X$, então existe $f \in X^*$ tal que $f(x) = ||x||$ e $||f|| = 1$.*

Demonstração. Veja [18] - Página 66.

Teorema 1.0.15. *(Teorema da Representação de Riesz) Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e φ um funcional linear limitado em $\mathcal{H}$. Então φ pode ser representado em termos de produto interno,*

$$\varphi(x) = < x, z >, x \in \mathcal{H},$$

onde z é unicamente determinado por φ e tem norma

$$||z|| = ||\varphi||.$$

Demonstração. Veja [16] - Teorema 3.8-1. □

Capítulo 2

Majoração, Inclusão de Imagens e Fatoração de Operadores Lineares Limitados

Definiremos neste capítulo os conceitos de majoração, inclusão de imagens e fatoração no contexto dos operadores lineares limitados em espaços de Banach. Apresentaremos os relevantes resultados obtidos por Barnes [3] relacionando esses conceitos. No que segue, salvo menção contrária, X, Y, Z e W serão espaços de Banach, $B(X,Y)$ o espaço dos operadores lineares limitados definidos em X com valores em Y. Sendo $T \in B(X,Y)$, denotaremos por $\mathcal{D}(T)$, $\mathcal{R}(T)$ e $\mathcal{N}(T)$ o domínio, a imagem e o núcleo de T, respectivamente.

Antes de iniciarmos, é conveniente registrar o teorema que Barnes buscou generalizar e que desse modo o inspirou na realização de [3]. R. Douglas [9] estabeleceu o seguinte resultado:

Teorema. (Douglas - 1966) Sejam S e T operadores lineares limitados definidos em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e a valores em $\mathcal{H}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$;

(ii) $||S^*x|| \leq M||T^*x||$, para algum $M > 0$ e para todo $x \in \mathcal{H}$, isto é, T^* majora S^*;

(iii) $S = TU$, para algum operador $U \in B(\mathcal{H})$.

Observação 2.0.1. *Se $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}$ são espaços de Hilbert e $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ e $S : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}$ operadores lineares limitados, o Teorema de Douglas continua válido considerando $U \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$.*

2.1 Majoração

Nesta seção, apresentaremos algumas consequências da propriedade " T majora S. "

Definição 2.1.1. *Sejam $T \in B(X,Y)$ e $S \in B(X,Z)$. Diremos que T majora S, se existe $M > 0$ tal que*

$$||Sx|| \leq M||Tx||, \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Observação 2.1.1. *i) Seja $T \in B(X,Y)$. Suponhamos que $V \in B(Y,Z)$ e $S = VT$. Então, T majora S:*

$$||Sx|| \leq ||V||\,||Tx||, \quad \textit{para todo } x \in X.$$

ii) Sejam $T \in B(X,Y)$ e $S \in B(Z,Y)$. Note que, quando $U \in B(Z,X)$ com $S = TU$, então $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$. De fato,

$$\mathcal{R}(S) = \{Sz \mid z \in Z\} = \{(TU)z \mid z \in Z\} \subseteq \{T(Uz) \mid Uz \in X\} \subseteq \{Tx \mid x \in X\} = \mathcal{R}(T).$$

iii) Seja $T \in B(X,Y)$. Se $S_1, S_2 \in B(X,Z)$ e T majora S_1 e S_2, então T majora $S_1 + S_2$. De fato, como T majora S_1, existe $M_1 > 0$ tal que

$$||Sx|| \leq M_1||Tx||, \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Analogamente, existe $M_2 > 0$ tal que

$$||Sx|| \leq M_2||Tx||, \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Então,

$$||(S_1+S_2)x|| = ||S_1x+S_2x|| \leq ||S_1x||+||S_2x|| \leq M_1||Tx||+M_2||Tx|| = (M_1+M_2)||Tx||.$$

Logo, T majora $S_1 + S_2$.
iv) Se $S \in B(X,Z)$, $R \in B(Z,W)$ e T majora S, então T majora RS.

De fato, como T majora S, existe $M_1 > 0$ tal que $||Sx|| \leq M_1||Tx||$, para todo $x \in X$. Segue que

$$||RSx|| \leq ||R||\,||Sx|| \leq ||R||M_1||Tx||, x \in X.$$

Portanto, T majora RS.

Proposição 2.1.1. *Sejam $T \in B(X,Y)$ e $S \in B(X,Z)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *T majora S;*

(2) *Existe $V \in B(\overline{\mathcal{R}(T)}, Z)$ tal que $S = VT$;*

(3) *Se $\{x_n\}_n$ é uma sequência em X com $\lim_{n\to\infty} ||Tx_n|| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} ||Sx_n|| = 0$.*

Demonstração. **(1)** $\Rightarrow$ **(3)** Suponhamos que T majora S. Então, existe $M > 0$ tal que

$$||Sx|| \leq M||Tx||, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Seja $\{x_n\}_n$ uma sequência em X, tal que $\lim_{n\to\infty} ||Tx_n|| = 0$. Como $||Sx_n|| \leq M||Tx_n||$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então temos que $\lim_{n\to\infty} ||Sx_n|| = 0$.

(1) $\Rightarrow$ **(2)** Suponhamos que T majora S. Então, existe $M > 0$ tal que

$$||Sx|| \leq M||Tx||, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Defina

$$V_0 : \mathcal{R}(T) \to Z$$

$$Tx \mapsto V_0(Tx) = Sx,$$

e notemos que dados $Tx, Ty \in \mathcal{R}(T)$ com $Tx = Ty$, então $x - y \in \mathcal{N}(T)$. Por hipótese, $x - y \in \mathcal{N}(S)$, e assim $Sx = Sy$. Portanto, $V_0(Tx) = V_0(Ty)$ mostrando que V_0 está bem definido. Além disso, V_0 é um operador linear limitado, pois se α é um escalar, então

$$V_0(\alpha Tx+Ty) = V_0(T(\alpha x+y)) = S(\alpha x+y) = S(\alpha x)+Sy = \alpha Sx+Sy = \alpha V_0(Tx)+V_0(Ty),$$

e V_0 é limitado, pois

$$||V_0(Tx)|| = ||Sx|| \leq M||Tx||, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Sendo $\mathcal{R}(T)$ um espaço normado e Z um espaço de Banach, pelo Teorema 1.0.1, existe uma única extensão linear e limitada de V_0,

$$V : \overline{\mathcal{R}(T)} \to Z,$$

satisfazendo $S = VT$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Seja $V \in B(\overline{\mathcal{R}(T)}, Z)$ tal que $S = VT$. Então,

$$||Sx|| = ||VTx|| \leq ||V||\ ||Tx||, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Logo, T majora S.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sejam $V \in B(\overline{\mathcal{R}(T)}, Z)$ tal que $S = VT$ e $\{x_n\}_n$ em X com $\lim_{n\to\infty} ||Tx_n|| = 0$. Assim,

$$||Sx_n|| = ||VTx_n|| \leq ||V||\ ||Tx_n|| \to 0.$$

Logo, $\lim_{n\to\infty} ||Sx_n|| = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Suponhamos válida a afirmação (3), e notemos que isso implica $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(S)$. Defina $V_0 : \mathcal{R}(T) \to Z$ por $V_0(Tx) = Sx$ e seja $\{Tx_n\}_n$ uma sequência em $\mathcal{R}(T)$ tal que $\lim_{n\to\infty} ||Tx_n|| = 0$. Como, por hipótese, $\lim_{n\to\infty} ||Sx_n|| = 0$ e $V_0(Tx_n) = Sx_n$, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} ||V_0(Tx_n)|| = 0.$$

Isso mostra que V_0 é um operador limitado. Sendo assim, V_0 possui uma extensão

$$V : \overline{\mathcal{R}(T)} \to Z$$

também contínua, e tal que $S = VT$. $\square$

Proposição 2.1.2. *Seja $T \in B(X,Y)$ e suponha $\mathcal{R}(T)$ fechado. Se $S \in B(X,Z)$ é tal que $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(S)$, então T majora S.*

Demonstração. Defina

$$\widetilde{S} : X/\mathcal{N}(T) \to Z$$
$$(x + \mathcal{N}(T)) \mapsto \widetilde{S}(x + \mathcal{N}(T)) = Sx$$

e

$$\begin{aligned}\widetilde{T}: X/\mathcal{N}(T) &\to Y \\ (x+\mathcal{N}(T)) &\mapsto \widetilde{T}(x+\mathcal{N}(T)) = Tx.\end{aligned}$$

• $\widetilde{T}$ e $\widetilde{S}$ estão bem definidos.

Mostraremos a afirmação para $\widetilde{S}$, e de forma análoga mostra-se para $\widetilde{T}$. Sejam $x_1+\mathcal{N}(T)$, $x_2+\mathcal{N}(T) \in X/\mathcal{N}(T)$ tais que $x_1+\mathcal{N}(T) = x_2+\mathcal{N}(T)$. Devemos mostrar que

$$\widetilde{S}(x_1+\mathcal{N}(T)) = \widetilde{S}(x_2+\mathcal{N}(T)).$$

Como $x_1+\mathcal{N}(T) = x_2+\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(S)$, vem que $x_1 - x_2 \in \mathcal{N}(S)$. Da linearidade de S, segue que $Sx_1 = Sx_2$.

• $\widetilde{S}$ é limitado.

Devemos exibir uma constante real $C > 0$ tal que

$$||\widetilde{S}(x+\mathcal{N}(T))|| \leq C||x+\mathcal{N}(T)|| = C\inf\{||x+\eta|| \mid \eta \in \mathcal{N}(T)\},$$

para todo $x+\mathcal{N}(T) \in X/\mathcal{N}(T)$. Se $S = 0$, não há o que provar. Supondo $S \neq 0$, então temos

$$||\widetilde{S}(x+\mathcal{N}(T))|| = ||Sx|| = ||S(x+\eta)|| \leq ||S||\,||x+\eta||,\ \eta \in \mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(S).$$

Daí,

$$\frac{||\widetilde{S}(x+\mathcal{N}(T))||}{||S||} \leq ||x+\eta||.$$

Segue que, $\dfrac{||\widetilde{S}(x+\mathcal{N}(T))||}{||S||}$ é cota inferior do conjunto $\{||x+\eta|| \mid \eta \in \mathcal{N}(T)\}$, e

$$\frac{||\widetilde{S}(x+\mathcal{N}(T))||}{||S||} \leq \inf\{||x+\eta|| \mid \eta \in \mathcal{N}(T)\}.$$

Portanto,

$$||\widetilde{S}(x+\mathcal{N}(T))|| \leq ||S||\inf\{||x+\eta|| \mid \eta \in \mathcal{N}(T)\}.$$

• $\widetilde{T}^{-1}$: $\mathcal{R}(T) \to X/\mathcal{N}(T)$ é um operador linear fechado.

Mostraremos que o conjunto

$$G = \{(u, \widetilde{T}^{-1}u) \mid u \in \mathcal{R}(T)\}$$

é fechado.

Seja $(a,b) \in \overline{G}$. Então existe uma sequência $\{u_n\}_n$ em $\mathcal{R}(T)$, $u_n = Tx_n$, com $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ e $\lim_{n\ to\infty} \widetilde{T}^{-1}u_n = b = x + \mathcal{N}(T)$. Devemos mostrar que $\widetilde{T}^{-1}a = b$. Temos que

$$\widetilde{T}^{-1}u_n = \widetilde{T}^{-1}(Tx_n) = x_n + \mathcal{N}(T) \to b = x + \mathcal{N}(T).$$

Por outro lado, $\widetilde{T}(x_n + \mathcal{N}(T)) = Tx_n = u_n \to a$. Como $\widetilde{T}$ é limitado,

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{T}(x_n + \mathcal{N}(T)) = \widetilde{T}b.$$

Logo, $\widetilde{T}b = a$, o que implica que $\widetilde{T}^{-1}a = b$. Temos que $X/\mathcal{N}(T)$ é um espaço de Banach e como $\mathcal{R}(T) \subseteq Y$ é fechado, $\mathcal{R}(T)$ também é Banach. Portanto, pelo Teorema do Gráfico Fechado $\widetilde{T}^{-1}$ é limitado em $\mathcal{R}(T)$.

Agora, seja $\{x_n\}_n$ uma sequência em X, com $\lim_{n\to\infty} ||Tx_n|| = 0$. Temos que mostrar que $\lim_{n\to\infty} ||Sx_n|| = 0$, e assim, pela Proposição 2.1.1 concluir que T majora S. Notemos que

$$||Sx_n|| = ||\widetilde{S}(x_n + \mathcal{N}(T))||$$

e

$$||x_n + \mathcal{N}(T)|| = ||\widetilde{T}^{-1}(Tx_n)|| \to 0,$$

pois $\lim_{n\to\infty} ||Tx_n|| = 0$ e $\widetilde{T}^{-1}$ é contínuo. Logo, como $\widetilde{S}$ é contínuo, temos que

$$\lim_{n\to\infty} ||\widetilde{S}(x_n + \mathcal{N}(T))|| = 0,$$

e portanto $\lim_{n\to\infty} ||Sx_n|| = 0$. □

Lema 2.1.1. *Sejam $L \in B(X,Y)$ e $Q_L\colon X \to X/\mathcal{N}(L)$ dada por $Q_L(x) = x + \mathcal{N}(L)$. Então $\mathcal{R}(L)$ é fechado se, e somente se, existe $M > 0$ tal que*

$$M||Q_L(x)|| \leq ||Lx||, \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Demonstração. Como $L \in B(X,Y)$, pela demonstração da proposição anterior temos que

$$\widetilde{L}^{-1} : \mathcal{R}(L) \to X/\mathcal{N}(L)$$

é um operador fechado. Se $\mathcal{R}(L)$ é fechado, temos que $\mathcal{R}(L)$ é um espaço de Banach, e portanto, pelo Teorema do Gráfico Fechado, $\widetilde{L}^{-1}$ é limitado, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||\widetilde{L}^{-1}y|| \leq C||y||,\ y \in \mathcal{R}(L).$$

Como para cada $y \in \mathcal{R}(L)$ existe $x \in X$ tal que $y = Lx$, vem que

$$||\widetilde{L}^{-1}(Lx)|| \leq C||Lx||$$

$$||x + \mathcal{N}(L)|| \leq C||Lx||$$

$$\frac{1}{C}||Q_L(x)|| \leq ||Lx||$$

$$M||Q_L(x)|| \leq ||Lx||,\ \ \forall x \in X,\ M = \frac{1}{C}.$$

Reciprocamente, suponhamos que existe $M > 0$ tal que

$$M||Q_L(x)|| \leq ||Lx||,\ x \in X.$$

Queremos mostrar que $\mathcal{R}(L)$ é fechado, isto é, $\mathcal{R}(L) = \overline{\mathcal{R}(L)}$. Seja $z \in \overline{\mathcal{R}(L)}$. Logo, existe $\{z_n\}_n = \{Lx_n\}_n$ em $\mathcal{R}(L)$, com $\{x_n\}_n$ em X e tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Segue da hipótese que

$$||Q_L(x_n)|| \leq \frac{1}{M}||z_n||,\ n \in \mathbb{N}.$$

Notemos que $\{z_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||z_m - z_n|| < M\varepsilon,\ \forall m, n \geq N_0.$$

Segue que

$$||Q_L(x_m) - Q_L(x_n)|| < \frac{1}{M}M\varepsilon = \varepsilon,\ \forall m, n \geq N_0,$$

ou seja, $\{Q_L(x_n)\}_n$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach $X/\mathcal{N}(L)$. Logo, existe $u + \mathcal{N}(L) \in X/\mathcal{N}(L)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} Q_L(x_n) = x_n + \mathcal{N}(L) = u + \mathcal{N}(L).$$

Em virtude da linearidade e continuidade de L, o operador

$$P : X/\mathcal{N}(L) \to Y$$
$$(x + \mathcal{N}(L)) \mapsto P(x + \mathcal{N}(L)) = Lx.$$

também é linear e contínuo. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n + \mathcal{N}(L)) = P(u + \mathcal{N}(L)).$$

Pela unicidade do limite, $z = L(u)$, isto é, $z \in \mathcal{R}(L)$. Portanto, $\mathcal{R}(L) = \overline{\mathcal{R}(L)}$. □

Para $T \in B(X)$, denotemos por $r(T)$ o raio espectral de T. Sabemos que

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}.$$

Recordemos que T é quasinilpotente se, e somente se, $r(T) = 0$.

Proposição 2.1.3. *Sejam $T \in B(X,Y)$, $S \in B(X,Z)$ e suponhamos que T majora S.*
(1) *Se $\mathcal{R}(S)$ é fechado e $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(S)$, então $\mathcal{R}(T)$ é fechado.*
(2) *Se $T, S \in B(X)$ e $ST = TS$, então T^n majora S^n para $n \geq 1$. Também*

$$r(S) \leq Mr(T),$$

onde M é uma constante positiva. Assim, se T é quasinilpotente, então S é quasinilpotente.

Demonstração. **(1)** Seja $U \in B(X,Y)$ e defina

$$Q_U : X \to X/\mathcal{N}(U)$$
$$x \mapsto Q_U(x) = x + \mathcal{N}(U).$$

Suponhamos que $\mathcal{R}(S)$ é fechado e que $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(S)$. Definindo,

$$Q_S : X \to X/\mathcal{N}(S)$$
$$x \mapsto Q_S(x) = x + \mathcal{N}(S),$$

temos, pelo Lema 2.1.1, que S majora Q_S. Como $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(S)$, vem que $Q_S = Q_T$.

Além disso, concluímos que T majora Q_T. Usando novamente o lema anterior, $\mathcal{R}(T)$ é fechado.

(2) Mostraremos que para todo $n \geq 1$,

$$||S^n x|| \leq M^n ||T^n x||, \ \ \forall x \in X.$$

Faremos a prova por indução.

• Se $n = 1$, então a desigualdade $||Sx|| \leq M||Tx||$ é válida por hipótese.

• Hipótese de Indução

Suponhamos que $||S^m x|| \leq M^m ||T^m x||$ é verdadeira para todo $x \in X$. Vamos mostrar que também é verdadeira para $m+1$. De fato,

$$||S^{m+1}x|| = ||S^m(Sx)|| \leq M^m ||T^m(Sx)|| = M^m ||S(T^m x)|| \leq M^m M ||T(T^m x)|| = M^{m+1}||T^{m+1}x||.$$

Logo, T^n majora S^n, $\forall n \geq 1$. Além disso,

$$||S^n||^{\frac{1}{n}} \leq M||T^n||^{\frac{1}{n}}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $r(S) \leq Mr(T)$. □

Proposição 2.1.4. *Sejam $T \in B(X,Y)$, $S \in B(X,Z)$ e suponhamos que T majora S. Se T é compacto, então S é compacto.*

Demonstração. Suponhamos que T é compacto e que T majora S. Segue da Proposição 2.1.1 que existe $V \in B(\overline{\mathcal{R}(T)}, Z)$ tal que $S = VT$. Pelo Teorema 1.0.8, o operador S é compacto. □

2.2 Propriedades do Dual

Sejam $T \in B(X,Y)$ e $T^* \in B(Y^*, X^*)$ o adjunto de T. Nesta seção apresentaremos dois resultados que envolvem os conceitos de majoração e inclusão de imagens no contexto de espaço dual.

Teorema 2.2.1. *(1) Sejam $T \in B(X,Y)$ e $S \in B(X,Z)$. Se T majora S, então $\mathcal{R}(S^*) \subseteq \mathcal{R}(T^*)$.*

(2) Sejam $T \in B(X,Y)$ e $S \in B(X,Z)$. Se $\mathcal{R}(S^*) \subseteq \mathcal{R}(T^*)$, então T majora S.

(3) Sejam $T \in B(X,Y)$ e $S \in B(Z,Y)$. Se $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$, então T^* majora S^*.

(4) Sejam $T \in B(X,Y)$, $S \in B(Z,Y)$ e suponhamos X reflexivo. Se T^* majora S^*, então $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$.

Demonstração. **(1)** Suponhamos que T majora S. Então, pela Proposição 2.1.1, existe um operador

$$V : \overline{\mathcal{R}(T)} \to Z$$

linear e limitado tal que $S = VT$. Seja $\alpha \in Z^*$, e consideremos $S^*\alpha$. Assim, para todo $x \in X$

$$(S^*\alpha)(x) = \alpha(Sx) = \alpha(VTx) = V^*\alpha(Tx),$$

onde

$$V^* : Z^* \to \overline{\mathcal{R}(T)}^*$$

$$\alpha \mapsto V^*\alpha : \overline{\mathcal{R}(T)} \to \mathbb{K}$$

é um funcional linear contínuo em $\overline{\mathcal{R}(T)}$.

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe uma extensão linear e contínua, $\beta \in Y^*$, $\beta : Y \to \mathbb{K}$, de $V^*\alpha$. Então, para todo $x \in X$

$$(S^*\alpha)(x) = (V^*\alpha)(Tx) = \beta(Tx) = (T^*\beta)(x).$$

Assim, dado $S^*\alpha \in \mathcal{R}(S^*)$, resulta que $S^*\alpha \in \mathcal{R}(T^*)$, já que $S^*\alpha = T^*\beta$. Portanto,

$$\mathcal{R}(S^*) \subseteq \mathcal{R}(T^*).$$

(2) Suponhamos que

$$\mathcal{R}(S^*) = \{S^*\alpha \mid \alpha \in Z^*\} \subseteq \mathcal{R}(T^*) = \{T^*\beta \mid \beta \in Y^*\}. \tag{2.1}$$

Notemos que $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(S)$. De fato, seja $x \in \mathcal{N}(T)$. Então, para qualquer $\beta \in Y^*$ tem-se que

$$0 \ = \ \beta(Tx) \ = \ (T^*\beta)(x).$$

Por outro lado,

$$\alpha(Sx) \;=\; (S^*\alpha)x, \text{ para todo } \alpha \in Z^*.$$

Por (2.1) temos que $S^*\alpha = T^*\beta$ para $\beta \in Y^*$, o que resulta

$$\alpha(Sx) \;= (S^*\alpha)(x) = (T^*\beta)(x) = \beta(Tx) = 0, \text{ para todo } \alpha \in Z^*.$$

Logo, segue do Teorema 1.0.14, que $Sx = 0$. Portanto, $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(S)$. Sendo assim, a aplicação linear

$$\mathcal{W} : \mathcal{R}(T) \to Z$$

$$Tx \mapsto \mathcal{W}(Tx) = Sx,\ x \in X$$

está bem definida. Observe ainda que $S = \mathcal{W}T$, e suponhamos $\mathcal{W}$ ilimitado. Então existe uma sequência $\{x_n\}_n$ em X com $||Tx_n|| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} ||Sx_n| = \infty$. Seja $\alpha \in Z^*$ arbitrário e escolha $\beta \in Y^*$ tal que $S^*\alpha = T^*\beta$. (Lembrando que tal $\beta \in Y^*$ existe pois $\mathcal{R}(S^*) \subseteq \mathcal{R}(T^*)$). Então,

$$|\alpha(Sx_n)| = |S^*\alpha(x_n)| = |T^*\beta(x_n)| = |\beta(Tx_n)| \leq ||Tx_n||\;||\beta|| = ||\beta||.$$

Logo, $|\alpha(Sx_n)| \leq ||\beta||$, $n \geq 1$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$\varphi_n : Z^* \to \mathbb{K}$$

$$\alpha \mapsto \varphi_n(\alpha) = \alpha(Sx_n).$$

Então temos que para cada $\alpha \in Z^*$, $|\varphi_n(\alpha)| = |\alpha(Sx_n)| \leq ||\beta||$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Princípio da Limitação Uniforme, existe $C > 0$ tal que $||\varphi_n|| \leq C$, para todo $n \geq 1$.

Do Teorema de Hahn-Banach resulta que existe $\psi \in Z^*$, com $||\psi|| = 1$, tal que

$$||\varphi_n|| = \sup\left\{\frac{|\varphi_n(\alpha)|}{||\alpha||} \mid \alpha \in Z^*, \alpha \neq 0\right\} \leq ||Sx_n|| = \frac{\psi(Sx_n)}{||\psi||} =$$

$$= \frac{\varphi_n(\psi)}{||\psi||} \leq \sup\left\{\frac{|\varphi_n(\alpha)|}{||\alpha||} \mid \alpha \in Z^*, \alpha \neq 0\right\} = ||\varphi_n||.$$

Logo, $||\varphi_n|| = ||Sx_n||$, $\forall n \geq 1$, e segue que $||Sx_n|| \leq C$, para todo $n \geq 1$. Obtemos assim, que $||Sx_n||$ é limitada, o que é uma contradição. Assim, $\mathcal{W} \in B(\mathcal{R}(T), Z)$, $S = \mathcal{W}T$ e existe uma extensão $V \in B(\overline{\mathcal{R}(T)}, Z)$ tal que

$$S = VT.$$

Portanto, pela Proposição 2.1.1, T majora S.

(3) Suponhamos $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$ e notemos que $\mathcal{N}(T^*) \subseteq \mathcal{N}(S^*)$. De fato, seja $f \in \mathcal{N}(T^*)$. Segue que

$$T^*f = 0 \Rightarrow (T^*f)(x) = f(Tx) = 0,\ \forall x \in X.$$

Como $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$, para todo $z \in Z$ existe $u_z \in X$, tal que $f(Sz) = f(Tu_z)$. Assim,

$$(S^*f)(z) = f(Sz) = f(Tu_z) = 0 \Rightarrow (S^*f)(z) = 0, \forall z \in Z \Rightarrow (S^*f) = 0.$$

Logo, $f \in \mathcal{N}(S^*)$.

Segue disso que o operador

$$U : \mathcal{R}(T^*) \to Z^*$$

$$T^*\alpha \mapsto U(T^*\alpha) = S^*\alpha,\ \forall \alpha \in Y^*$$

está bem definido. Se U é ilimitado, então existe $\{\alpha_n\}_n \subseteq Y^*$ tal que $||T^*\alpha_n|| = 1$, para todo n, e $\lim_{n\to\infty} ||U(T^*\alpha_n)|| = \infty$. Logo, $\lim_{n\to\infty} ||S^*\alpha_n|| = \infty$. Como $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$, dado $z \in Z$ arbitrário, podemos tomar $x \in X$, tal que $Tx = Sz$. Então

$$|(S^*\alpha_n)(z)| = |\alpha_n(Sz)| = |\alpha_n(Tx)| = |T^*\alpha_n(x)| \leq ||x||\, ||T^*\alpha_n|| = ||x||.$$

Logo, $|S^*\alpha_n(z)| \leq ||x||$, $\forall n \geq 1$. Para cada $n \geq 1$, seja

$$\varphi_n : Z \to \mathbb{K}$$

$$z \mapsto \varphi_n(z) = \alpha_n(Sz).$$

Então temos que para cada $z \in Z$

$$|\varphi_n(z)| = |\alpha_n(Sz)| = |S^*\alpha_n(z)| \leq ||x||, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Pelo Princípio da Limitação Uniforme, existe $C > 0$ tal que $||\varphi_n|| \leq C$, para todo $n \geq 1$. Além disso, $||\varphi_n|| = ||S^*\alpha_n||$. Logo, $||S^*\alpha_n||$ é limitada, contradizendo o que supomos.

Assim, $U : \mathcal{R}(T^*) \to Z^*$ é linear e limitado e $S^* = UT^*$. Pelo Teorema 1.0.1, existe uma extensão linear e limitada de U, $V : \overline{\mathcal{R}(T^*)} \to Z^*$, tal que $||U|| = ||V||$ e $S^* = VT^*$. Portanto, pela Proposição 2.1.1, T^* majora S^*.

(4) Como T^* majora S^*, pela Proposição 2.1.1, $S^* = VT^*$, onde

$$V : \overline{\mathcal{R}(T^*)} \to Z^*$$

é um operador linear limitado. Então, para cada $z \in Z$ fixado, o operador adjunto de V, V^*, é dado por

$$V^* : Z^{**} \to \overline{\mathcal{R}(T^*)}^* \subseteq X^{**}.$$

Considere a aplicação canônica

$$\begin{aligned} J_Z : Z &\to Z^{**} \\ z &\mapsto g_z, \\ g_z : Z^* &\to \mathbb{K} \\ f &\mapsto g_z(f) = f(z). \end{aligned}$$

Para cada $z \in Z$, $V^*(g_z) \in \overline{\mathcal{R}(T^*)}^*$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\beta : X^* \to \mathbb{K}$, uma extensão linear e limitada de $V^*(g_z)$. Como X é reflexivo, a aplicação canônica

$$\begin{aligned} J_X : X &\to X^{**} \\ x &\mapsto g_x \end{aligned}$$

é tal que $\mathcal{R}(J_X) = X^{**}$. Logo, existe $y \in X$ tal que $J_X(y) = \beta$ e assim $\psi(y) = \beta(\psi)$ para todo $\psi \in X^*$. Então, para todo $\alpha \in Y^*$,

$$\begin{aligned} \alpha(Sz) = (S^*\alpha)(z) = ((VT^*)(\alpha))(z) = g_z((VT^*)(\alpha)) = g_z(V(T^*\alpha)) \\ = (V^*(g_z))(T^*\alpha) = \beta(T^*\alpha) = (T^*\alpha)(y) = \alpha(Ty). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 1.0.14, $Sz = Ty$, o que implica em $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$. □

Proposição 2.2.1. *Sejam $T \in B(X, Y)$ e $S \in B(Z, Y)$. Se $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$ e T é compacto, então S é compacto.*

Demonstração. Como $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$, temos pelo teorema anterior que T^* majora S^*. Como T é compacto, pelo Teorema de Schauder T^* também é compacto. Segue da Proposição 2.1.4 que S^* é compacto, e novamente o Teorema de Schauder garante a compacidade de S. □

2.3 Operadores Quasinilpotentes e Operadores de Riesz

Nesta seção apresentaremos teoremas que envolvem os conceitos de majoração e inclusão de imagens para a classe dos operadores quasinilpotentes e operadores de Riesz. Faremos uso de um resultado sobre operadores de Riesz (Proposição 2.3.2) cuja demonstração, bem como mais detalhes sobre tais operadores, podem ser encontrados em [5].

Teorema 2.3.1. *Sejam $T, S \in B(X)$. Suponhamos que $TS = ST$ e T quasinilpotente.*
(1) Se T majora S, então S é quasinilpotente.
(2) Se $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$, então S é quasinilpotente.

Demonstração. **(1)** Segue imediatamente da Proposição 2.1.3.
(2) Suponhamos que $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$. Então pelo Teorema 2.2.1, T^* majora S^*. Além disso,
$i)$ $T^*S^* = S^*T^*$, já que $T^*S^* = (ST)^* = (TS)^* = S^*T^*$.
$ii)$ $||T|| = ||T^*||$.
$iii)$ $(T^n)^* = (T^*)^n$, para todo $n \geq 2$. De fato, usando indução temos que para $n = 2$,

$$(T^2)^* = (TT)^* = T^*T^* = (T^*)^2.$$

Suponhamos que a afimação é válida também para $n = j$, isto é,

$$(T^j)^* = (T^*)^j.$$

Então,

$$(T^{j+1})^* = (T^jT)^* = T^*(T^j)^* = T^*(T^*)^j = (T^*)^{j+1}.$$

$iv)$ Resulta que T^* é quasinilpotente, pois T é quasinilpotente e

$$||T^n||^{\frac{1}{n}} = ||(T^n)^*||^{\frac{1}{n}} = ||(T^*)^n||^{\frac{1}{n}}.$$

Com isso, usando o item **(1)** temos que S^* é quasinilpotente. Pelo mesmo argumento acima, S é quasinilpotente. $\square$

Sejam $T \in B(X)$ e $\ell^\infty(X)$ o espaço de todas as sequências limitadas $\{x_n\}_n$ em X munido da norma do supremo,

$$||\{x_n\}_n||_\infty = \sup\{||x_n|| \mid n \geq 1\}.$$

Definindo

$$T_\infty : \ell^\infty(X) \to \ell^\infty(X)$$
$$\{x_n\}_n \mapsto T_\infty(\{x_n\}_n) = \{Tx_n\}_n,$$

resulta que:

- T_∞ é linear, pois T é linear.
- T_∞ está bem definido, ou seja, $\{Tx_n\}_n \in \ell^\infty(X)$.

De fato, $||Tx_n|| \leq ||T||\ ||x_n|| \leq ||T||C$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onde $C > 0$ é constante. Logo, $\{Tx_n\}_n \in \ell^\infty(X)$.

- T_∞ é limitado.

De fato, $||T_\infty(\{x_n\}_n)||_\infty = ||\{Tx_n\}_n||_\infty = \sup\{||Tx_n|| \mid n \geq 1\}$
$\leq ||T|| \sup\{||x_n|| \mid n \geq 1\} = ||T||\ ||\{x_n\}_n||_\infty.$

Observação 2.3.1. *O subespaço M de $\ell^\infty(X)$, formado pelas sequências $\{x_n\}_n$ tal que toda subsequência de $\{x_n\}_n$ tem subsequência convergente, é fechado. De fato, sejam $\{y_n\}_n \in \overline{M}$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $\{x_n\}_n$ em M tal que*

$$||\{x_n\}_n - \{y_n\}_n||_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\{x_n\}_n \in M$, toda subsequência $\{x_{n_k}\}_k$ de $\{x_n\}_n$ tem subsequência $\{x_{n_{k_j}}\}_j$ convergente, digamos

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_{k_j}} = L.$$

Ou seja, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq J$,

$$||x_{n_{k_j}} - L|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $\{y_{n_k}\}_k$ uma subsequência arbitrária de $\{y_n\}_n$. (Note que tal subsequência tem os mesmos índices de $\{x_{n_k}\}_k$). Devemos provar que $\{y_n\}_n \in M$. Para isso, vamos mostrar que $\{y_{n_{k_j}}\}_j$ é uma subsequência de $\{y_{n_k}\}_k$ que converge para L. Temos que

$$||x_n - y_n|| \leq \sup\{||x_n - y_n|| \mid n \geq 1\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$||y_{n_{k_j}} - L|| \leq ||y_{n_{k_j}} - x_{n_{k_j}}|| + ||x_{n_{k_j}} - L|| < \varepsilon, \text{ para todo } j \geq J.$$

Logo, $\lim_{n\to\infty} y_{n_{k_j}} = L$ *e* M *é fechado.*

Notemos que para todo $T \in B(X)$, tem-se que $T_\infty(M) \subseteq M$, e denotemos por $\widehat{X}$ o espaço quociente $\ell^\infty(X)/M$. Como M é fechado e $\ell^\infty(X)$ é Banach, $\widehat{X}$ é Banach. Defina

$$\begin{aligned} \widehat{T}\colon\ &\widehat{X} \to \widehat{X} \\ &(\{x_n\}_n + M) \mapsto \widehat{T}(\{x_n\}_n + M) = \{Tx_n\}_n + M. \end{aligned}$$

Tome $\{x_n\}_n + M$, $\{y_n\}_n + M \in \widehat{X}$, tais que $\{x_n\}_n + M = \{y_n\}_n + M$, isto é

$$\{x_n\}_n - \{y_n\}_n \in M.$$

Seja $z_n = x_n - y_n$. Então,

$$Tz_n = T(x_n - y_n) \Rightarrow Tx_n = Tz_n + Ty_n.$$

Assim, como $\{Tz_n\}_n \in M$, temos que

$$\widehat{T}(\{x_n\}_n + M) = \{Tx_n\}_n + M = \{Tz_n\}_n + \{Ty_n\}_n + M = \{Ty_n\}_n + M = \widehat{T}(\{y_n\}_n + M),$$

o que mostra que $\widehat{T}$ está bem definido. Além disso, $\widehat{T}$ é limitado, pois

$$\begin{aligned} ||\widehat{T}(x_n + M)|| = ||\{Tx_n\}_n + M|| &= \inf\{||\{Tx_n\}_n + \{m_n\}_n||_\infty \mid \{m_n\}_n \in M, n \geq 1\} \\ &\leq ||\{Tx_n\}_n + \{Tm_n\}_n||_\infty \\ &= ||\{Tx_n + Tm_n\}_n||_\infty = ||\{T(x_n + m_n)\}_n||_\infty \\ &= \sup\{||T(x_n + m_n)|| \mid n \geq 1\} \leq ||T|| \sup\{||x_n + m_n|| \mid n \geq 1\} \\ &= ||T||\, ||\{x_n + m_n\}_n||_\infty. \end{aligned}$$

Logo,

$$||\widehat{T}(x_n + M)|| \leq ||T|| \inf\{||\{x_n + m_n\}_n|| \mid n \geq 1\} = ||T|| \inf\{||\{x_n\}_n + \{m_n\}_n|| \mid n \geq 1\}.$$

Em vista disso, para cada $T \in B(X)$ podemos associar $\widehat{T} \in B(\widehat{X})$, de modo que fica bem definida a aplicação linear

$$\varphi : B(X) \to B(\widehat{X})$$
$$T \mapsto \varphi(T) = \widehat{T}.$$

Seja $\mathcal{K}(X)$ o espaço dos operadores lineares compactos em X. Mostremos que $\mathcal{N}(\varphi) = \mathcal{K}(X)$.

$i)$ $\mathcal{N}(\varphi) \subseteq \mathcal{K}(X)$.

Sejam $T \in \mathcal{N}(\varphi)$ e $\{x_n\}_n \in \ell^\infty(X)$. Então, $\varphi(T) = \widehat{0} \Rightarrow \widehat{T} = \widehat{0} \Rightarrow \{Tx_n\}_n + M = M \Rightarrow \{Tx_n\}_n \in M \Rightarrow$ Toda subsequência de $\{Tx_n\}_n$ tem subsequência convergente $\Rightarrow \{Tx_n\}_n$ tem subsequência convergente $\Rightarrow T$ é compacto. Logo, $T \in \mathcal{K}(X)$.

$ii)$ $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{N}(\varphi)$.

Sejam $T \in \mathcal{K}(X)$, $\{x_n\}_n \in \ell^\infty(X)$ e $\{Tx_{n_k}\}_k$ uma subsequência de $\{Tx_n\}_n$. Como $\{x_{n_k}\}_k$ é limitada e T é compacto, $\{Tx_{n_k}\}_k$ tem subsequência convergente. Logo, $\{Tx_n\}_n \in M$ e assim, $T \in \mathcal{N}(\varphi)$.

Proposição 2.3.1. *Sejam $T, S \in B(X)$ com $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$. Então, $\mathcal{R}(\widehat{S}) \subseteq \mathcal{R}(\widehat{T})$.*

Demonstração. Consideremos os operadores

$$\widehat{S}\colon\ \widehat{X} \to \widehat{X}$$
$$\{x_n\} + M \mapsto \widehat{S}(\{x_n\} + M) = \{Sx_n\} + M = S_\infty(x_n) + M$$

e

$$\widehat{T}\colon\ \widehat{X} \to \widehat{X}$$
$$\{x_n\} + M \mapsto \widehat{T}(\{x_n\} + M) = \{Tx_n\} + M = T_\infty(x_n) + M.$$

É suficiente mostrar que $\mathcal{R}(S_\infty) \subseteq \mathcal{R}(T_\infty)$. Seja

$$\widetilde{T} : X/\mathcal{N}(T) \to X$$
$$(x + \mathcal{N}(T)) \mapsto \widetilde{T}(x + \mathcal{N}(T)) = Tx.$$

Então,

$$\widetilde{T}^{-1} : \mathcal{R}(T) \to X/\mathcal{N}(T)$$

$$Tx_n \mapsto x_n + \mathcal{N}(T)$$

é um operador linear fechado. Como $\widetilde{T}$ é linear, temos que $\widetilde{T}^{-1}$ é linear.
Para mostrar que $\widetilde{T}^{-1}$ é fechado, verificaremos que o gráfico de $\widetilde{T}^{-1}$ é fechado, isto é, mostraremos que o conjunto

$$G = \{(u, \widetilde{T}^{-1}u) \mid u \in \mathcal{R}(T)\}$$

é fechado. Seja $(a, b) \in \overline{G}$. Então existe uma sequência $\{u_n\}_n$ em $\mathcal{R}(T)$, $u_n = Tx_n$, com $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} \widetilde{T}^{-1}u_n = b = x + \mathcal{N}(T)$. Devemos mostrar que $\widetilde{T}^{-1}a = b$. Temos que

$$\widetilde{T}^{-1}u_n = \widetilde{T}^{-1}(Tx_n) = x_n + \mathcal{N}(T) \to b = x + \mathcal{N}(T).$$

Por outro lado, $\widetilde{T}(x_n + \mathcal{N}(T)) = Tx_n = u_n \to a$. Como $\widetilde{T}$ é limitado,

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{T}(x_n + \mathcal{N}(T)) = \widetilde{T}b.$$

Logo, $\widetilde{T}b = a$, o que implica que $\widetilde{T}^{-1}a = b$.
O operador $\widetilde{T}^{-1}S : X \to X/\mathcal{N}(T)$ é fechado. De fato, seja $\{z_n\}_n$ uma sequência em X tal que $z_n \to z_0 \in X$ e $\widetilde{T}^{-1}S(z_n) \to x_0 + \mathcal{N}(T) \in X/\mathcal{N}(T)$. Como $S \in B(X)$ e $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$, temos que $\lim_{n\to\infty} S(z_n) = S(z_0)$ em $\mathcal{R}(T)$. Como $\widetilde{T}^{-1}$ é fechado, obtemos que $x_0 + \mathcal{N}(T) = \widetilde{T}^{-1}S(z_0)$. Logo, $\widetilde{T}^{-1}S$ é fechado, e pelo Teorema do Gráfico Fechado, $\widetilde{T}^{-1}S$ é limitado.
Seja $\{z_n\}_n$ uma sequência em X com $||z_n|| \leq C$, para todo n, onde $C > 0$ é constante. Então $\widetilde{T}^{-1}S(z_n) = y_n + \mathcal{N}(T)$, para todo n e

$$||y_n + \mathcal{N}(T)|| = ||\widetilde{T}^{-1}S(z_n)|| \leq ||\widetilde{T}^{-1}S|| \, ||z_n|| \leq ||\widetilde{T}^{-1}S||C.$$

Tomando $||\widetilde{T}^{-1}S|| = A$, vem que $||y_n + \mathcal{N}(T)|| \leq AC$. Ou seja,

$$\inf\{||y_n + m|| \mid m \in \mathcal{N}(T)\} \leq AC, \, \forall n.$$

Pela definição de ínfimo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in \mathcal{N}(T)$ tal que $||y_n + w_n|| < AC + 1$. Então, $T(y_n + w_n) = \widetilde{T}(y_n + w_n + \mathcal{N}(T))$. Como $\widetilde{T}^{-1}S(z_n) = y_n + \mathcal{N}(T)$ e $w_n \in \mathcal{N}(T)$, vem que $T(y_n + w_n) = \widetilde{T}(\widetilde{T}^{-1}S(z_n)) = S(z_n)$, para todo n. Isso mostra que $\mathcal{R}(S_\infty) \subseteq \mathcal{R}(T_\infty)$. □

Recordemos que um operador $T \in B(X)$ é um operador de Riesz se para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda I - T \in Fred(X)$.

Proposição 2.3.2. *Seja $T \in B(X)$.*

(1) *T é um operador de Riesz se, e somente se, $\widehat{T}$ é quasinilpotente.*

(2) *T é um operador de Riesz se, e somente se, T^* é um operador de Riesz.*

Demonstração. Veja [5]. □

Teorema 2.3.2. *Sejam $T, S \in B(X)$ tais que T é um operador de Riesz e $TS - ST$ é compacto.*

(1) *Se $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$, então S é um operador de Riesz.*

(2) *Se T majora S, então S é um operador de Riesz.*

Demonstração. **(1)** Como $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$, pela Proposição 2.3.1 temos que $\mathcal{R}(\widehat{S}) \subseteq \mathcal{R}(\widehat{T})$. Segue da compacidade de $TS - ST$ que $\widehat{T}\widehat{S} = \widehat{S}\widehat{T}$. Além disso, como T é um operador de Riesz, vem que $\widehat{T}$ é quasinilpotente. Assim, usando o Teorema 2.3.1 obtemos que $\widehat{S}$ é quasinilpotente e portanto, S é um operador de Riesz.

(2) Suponhamos que T majora S. Então, pelo Teorema 2.2.1 $\mathcal{R}(S^*) \subseteq \mathcal{R}(T^*)$. Como $TS - ST$ é compacto, segue que $T^*S^* - S^*T^*$ é um operador compacto. Já pela Proposição 2.3.2 T^* é um operador de Riesz. Aplicando o item **(1)** obtemos que S^* é um operador de Riesz e portanto, S é um operador de Riesz. □

2.4 Fatoração

Sejam $T \in B(X, Y)$, $S \in B(X, Z)$. Diremos que S é múltiplo a esquerda de T se existe $V \in B(Y, Z)$ tal que $S = VT$. Similarmente, escreveremos $S = TU$ quando S é um múltiplo a direita de T. Em ambos os casos diremos que S fatora com respeito a

T. Mostraremos nesta seção (Teorema 2.4.1) sob quais condições podemos afirmar que S fatora com respeito a T. Tais condições envolvem os conceitos de majoração, inclusão de imagens e de subespaço complementado. Recordemos que um subespaço fechado E de X é complementado se existe um subespaço fechado F de X tal que $X = E \oplus F$. Por fim, apresentaremos uma aplicação deste resultado em $B(X)$.

Teorema 2.4.1. *Seja $T \in B(X,Y)$. Então:*

(1) *Se $S \in B(X,Z)$ é majorado por T e $\overline{\mathcal{R}(T)}$ é complementado, então existe $V \in B(Y,Z)$ tal que $S = VT$.*

(2) *Se $S \in B(Z,Y)$ com $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$ e $\mathcal{N}(T)$ é complementado, então existe $U \in B(Z,X)$ tal que $S = TU$.*

(3) *Se $S \in B(X,Z)$ com $\mathcal{R}(S^*) \subseteq \mathcal{R}(T^*)$ e $\overline{\mathcal{R}(T)}$ é complementado, então existe $V \in B(Y,Z)$ tal que $S = VT$.*

(4) *Suponhamos X reflexivo. Se $S \in B(Z,Y)$, T^* majora S^* e $\mathcal{N}(T)$ é complementado, então existe $U \in B(Z,X)$ tal que $S = TU$.*

Demonstração. **(1)** Sejam $T \in B(X,Y)$, $S \in B(X,Z)$ e suponha que T majora S. Pela Proposição 2.1.1, existe $V_1 \in B(\overline{\mathcal{R}(T)}, Z)$ tal que $S = V_1T$. Como $\overline{\mathcal{R}(T)}$ é complementado, existe um subespaço fechado N de Y tal que $Y = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus N$. Então, basta tomar $V : Y \to Z$, $V \in B(Y,Z)$ a extensão de V_1 tal que $V\mid_N = 0$.

(2) Assuma as hipóteses de **(2)**. Como $\mathcal{N}(T)$ é complementado, existe um subespaço fechado W de X tal que $X = \mathcal{N}(T) \oplus W$. Assim, dado $x \in X$ arbitrário existem únicos $u \in \mathcal{N}(T)$ e $w \in W$ tais que $x = w + u$. Logo,

$$Tx = Tw + Tu = Tw,$$

e portanto

$$T(W) = \mathcal{R}(T).$$

Seja $T_W : W \to Y$. Resulta que

$$\begin{aligned} T_W^{-1}\colon \mathcal{R}(T) &\to W \\ Tx &\mapsto T_W^{-1}(Tx) = x \end{aligned}$$

é uma aplicação linear fechada.

De fato, sejam $G = \{(u, T_W^{-1}u) \mid u \in \mathcal{R}(T)\}$ e $(a, b) \in \overline{G}$. Então, existe uma sequência $\{u_n\}_n$ em $\mathcal{R}(T)$, $u_n = Tx_n = Tw_n$ tal que

$$u_n = Tx_n = Tw_n \to a,$$

e $\{T_W^{-1}u_n\}_n$ converge para $b \in W$. Devemos mostrar que $T_W^{-1}a = b$. Temos que

$$T_W^{-1}u_n = T_W^{-1}(Tw_n) = T_W^{-1}(T_W w_n) = w_n \to b.$$

Como T_W é limitado, tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} T_W(w_n) = T_W(b).$$

Por outro lado,

$$T_W(w_n) = Tw_n = u_n \to a.$$

Logo, $T_W b = a$ e $T_W^{-1}a = b$.

Seja

$$\begin{aligned} T_W^{-1}S : Z &\to W \\ z &\mapsto T_W^{-1}S(z) \end{aligned}$$

e mostremos que $T_W^{-1}S$ é um operador linear fechado. Com efeito, sejam

$$G(T_W^{-1}S) = \{(z, T_W^{-1}Sz) \mid z \in Z\}$$

e $(u, v) \in \overline{G(T_W^{-1}S)}$. Logo, existe uma sequência $\{z_n\}_n$ em Z tal que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = u$$

e

$$\lim_{n\to\infty} T_W^{-1}Sz_n = v.$$

Como S é limitado e $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$, vem que

$$Tv_n = Sz_n \to Su = Tx_0,$$

com $\{v_n\}_n \in \mathcal{D}(T)$ e $x_0 \in \mathcal{D}(T)$. Assim, $T_W^{-1}(Tv_n) = T_W^{-1}(Sz_n) \to v$ e segue que

$$(Tv_n, T_W^{-1}(Tv_n)) \in G(T_W^{-1})$$

e

$$(Tx_0, v) \in \overline{G(T_W^{-1})} = G(T_W^{-1}),$$

já que T_W^{-1} é fechado. Portanto, $v = T_W^{-1}(Tx_0) = T_W^{-1}Su$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado, $T_W^{-1}S$ é limitado. Tomando $U = T_W^{-1}S$, temos que $U \in B(Z, X)$ e

$$S = TT_W^{-1}S = TU,$$

pois como $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$, então para todo $z \in Z$ existe $x \in X$ tal que $Sz = Tx$ e

$$TT_W^{-1}Sz = TT_W^{-1}Tx = TT_W^{-1}Tw = TT_W^{-1}T_W w = Tw = Tx = Sz, \;\; z \in Z, w \in W.$$

(3) Pelo Teorema 2.2.1 (2), temos que T majora S. Usando a afirmação (1) obtemos o resultado.

(4) Pelo Teorema 2.2.1 (4), temos que $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$. Usando a afirmação (2) o resultado segue imediatamente. $\square$

Estudaremos agora, uma aplicação de fatoração em $B(X)$. Sejam

$$X_m = \underbrace{X \oplus X \oplus ... \oplus X}_{m \text{ cópias de } X}, \quad \mathbf{x} \in X_m.$$

Então, $\mathbf{x}$ é da forma

$$\mathbf{x} = x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_m,$$

e é fácil ver que a aplicação

$$\begin{aligned} ||.|| : X_m &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto ||\mathbf{x}|| = ||x_1 \oplus ... \oplus x_m|| = \textstyle\sum_{k=1}^m ||x_k|| \end{aligned}$$

é uma norma.

Seja $V \in B(X_m, X)$, dado por

$$\begin{aligned} V : X_m &\to X \\ \mathbf{x} &\mapsto V(\mathbf{x}) = V(x_1 \oplus ... \oplus x_m) = \textstyle\sum_{k=1}^m V_k(x_k), \end{aligned}$$

onde $V_k \in B(X)$, $\forall k$.

Proposição 2.4.1. *Sejam $S \in B(X)$ e $T_k \in B(X)$, $1 \leq k \leq m$. Suponhamos que $\overline{\mathcal{R}(T_k)}$ é complementado para todo k e que uma das condições **(1)** ou **(2)**, dadas abaixo, vale:*
(1) *Existe $M > 0$ tal que $||Sx|| \leq M \sum_{k=1}^m ||T_k x||$, para todo $x \in X$.*
(2) *$\mathcal{R}(S^*) \subseteq \sum_{k=1}^m \mathcal{R}(T_k^*)$.*
Então, existe $V_k \in B(X)$, $1 \leq k \leq m$, tal que

$$S = V_1 T_1 + V_2 T_2 + ... + V_m T_m.$$

Demonstração. Defina $T \in B(X, X_m)$ por

$$T(x) = T_1(x) \oplus T_2(x) \oplus ... \oplus T_m(x), x \in X.$$

Note que, como $\overline{\mathcal{R}(T_k)}$ é complementado para todo k, então $\overline{\mathcal{R}(T)}$ é complementado. Suponhamos que **(1)** vale. Então, existe $M > 0$ tal que

$$||Sx|| \leq M \sum_{k=1}^m ||T_k x||, \text{ para todo } x \in X.$$

Agora, notemos que
$||Tx||_{X_m} = ||T_1 x \oplus ... \oplus T_m x|| = \sum_{k=1}^m ||T_k x||$. Logo, T majora S. Assim, aplicando o Teorema 2.4.1 (1), existe $V \in B(X_m, X)$ tal que $S = VT$. Pelo que vimos, V tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} V : X_m &\to X \\ \mathbf{x} &\mapsto V(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m V_k(x_k), \end{aligned}$$

onde $V_k \in B(X)$, para todo $k = 1, ..., m$. Além disso, para todo $x \in X$
$Sx = (VT)x = V(Tx) = V(T_1 x \oplus ... \oplus T_m x) = \sum_{k=1}^m V_k(T_k x) = V_1 T_1 x + ... + V_m T_m x.$
Supondo **(2)** válida, segue que $\mathcal{R}(S^*) \subseteq \sum_{k=1}^m \mathcal{R}(T_k^*)$. Além disso, sendo $T^* \in B(X_m^*, X^*)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(T^*) &= \{T^*\varphi \mid \varphi \in X_m^*\} = \{\textstyle\sum_{k=1}^m T_k^*(\varphi_k) \mid \varphi_k \in X^*\} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^m \{T_k^*(\varphi_k) \mid \varphi_k \in X^*\} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^m \mathcal{R}(T_k^*). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{R}(S^*) \subseteq \mathcal{R}(T^*)$. Aplicando o Teorema 2.4.1 (3), existe $V \in B(X_m, X)$ tal que $S = VT$. Analogamente ao caso anterior, existe $V_k \in B(X)$, $k = 1, ..., m$ tal que para

$x \in X$,

$$Sx = VTx = V(T_1x \oplus ... \oplus T_mx) = V_1T_1x + ... + V_mT_mx,$$

ou seja, $S = V_1T_1 + ... + V_mT_m$. $\square$

Definição 2.4.1. *Seja $T_k \in B(X)$, $1 \leq k \leq m$. Então o conjunto $\{T_1, ..., T_m\}$ é dito ser mutuamente limitado inferiormente se existe $M > 0$ tal que*

$$||x|| \leq M \sum_{k=1}^{m} ||T_kx||, \text{ para todo } x \in X.$$

Corolário 2.4.1. *Suponha que $T_k \in B(X)$, para $1 \leq k \leq m$, e que $\overline{\mathcal{R}(T_k)}$ é complementado para todo k. Se $\{T_1, ..., T_m\}$ é mutuamente limitado inferiormente, então existe $V_k \in B(X)$, $1 \leq k \leq m$, tal que*

$$I = V_1T_1 + ... + V_mT_m.$$

Demonstração. Basta tomar $S = I$ na proposição anterior. $\square$

Capítulo 3

Majoração, Inclusão de Imagens e Fatoração de Operadores Lineares não Limitados

Em [9] tem-se uma versão do Teorema de Douglas no contexto de operadores não limitados em espaços de Hilbert. Com essa motivação, Forough apresenta em [12] uma generalização para espaços de Banach. Assim como Barnes, Forough expõe resultados que relacionam os conceitos de majoração, inclusão de imagens e fatoração. Em detrimento da hipótese da limitação dos operadores assumiremos que eles são fechados e densamente definidos. Iniciaremos o capítulo definindo tais operadores e apresentando outros conceitos que serão úteis ao longo do capítulo, como por exemplo, o conceito de operador fechável e fecho de operador.

Definição 3.0.1. *Sejam X e Y espaços normados. Diremos que um operador linear*

$$T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$$

é densamente definido se $\mathcal{D}(T)$ é denso em X, isto é, $\overline{\mathcal{D}(T)} = X$.

A norma do espaço vetorial $X \times Y$ é definida por $||(x, y)|| = \sqrt{||x||^2 + ||y||^2}$.

Definição 3.0.2. *Sejam X e Y espaços normados. Diremos que um operador linear $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ é fechado se o gráfico de T, $G(T)$, é um subespaço fechado de $X \times Y$.*

Ou seja, T é fechado quando dada qualquer sequência $\{x_n\}_n$ em $\mathcal{D}(T)$ com $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ e $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = y \in Y$ tem-se que $x \in \mathcal{D}(T)$ e $y = Tx$. Evidentemente, todo operador contínuo é fechado, quando o seu domínio é fechado.

Teorema 3.0.1. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear. Então o gráfico de T é fechado se, e somente se, para qualquer sequência $\{x_n\}_n$ em $\mathcal{D}(T)$ com $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$, tem-se que $y = 0$.*

Demonstração. Veja [7] - Proposição 12.7, página 92. □

Definição 3.0.3. *Sejam X e Y espaços normados. Diremos que um operador linear $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ é fechável quando dada uma sequência $\{x_n\}_n$ em $\mathcal{D}(T)$ com $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e $\{Tx_n\}_n$ convergente em Y, tem-se que $\lim_{n\to\infty} Tx_n = 0$.*

Definição 3.0.4. *Sejam X e Y espaços normados. Seja $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ um operador linear fechável. O operador fecho de T é a aplicação $\overline{T}$ com domínio*

$$\mathcal{D}(\overline{T}) = \{x \in X \mid \exists \, \{x_n\}_n \subseteq \mathcal{D}(T), x_n \to x, Tx_n \to y \in Y\}$$

e definido como

$$\overline{T}x = \lim_{n\to\infty} Tx_n.$$

3.1 Inversas Generalizadas

O conceito de inversa generalizada será essencial no cenário de operadores não limitados. Em vista disso, reservamos esta primeira seção, a qual será baseada em [17] para definir este conceito e apresentar alguns resultados relevantes ao desenvolvimento do capítulo.

Definição 3.1.1. *Seja X um espaço de Banach. Sejam T e T' operadores fechados densamente definidos em X a valores em X. Então T' é uma inversa generalizada de T se*

$$\mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{D}(T'), \; \mathcal{R}(T') \subseteq \mathcal{D}(T),$$

$$Tu = TT'Tu, \text{ para todo } u \in \mathcal{D}(T),$$

$$T'v = T'TT'v, \text{ para todo } v \in \mathcal{D}(T')$$

e será denotada por $T(inv)T'$*.*

Observação 3.1.1. *A relação acima definida é simétrica, isto é,* $T(inv)T' \Leftrightarrow T'(inv)T$*.*

Definição 3.1.2. *Seja* X *um espaço de Banach. Uma projeção* P *em* X *é um operador linear*

$$P : \mathcal{D}(P) \subseteq X \to X$$

tal que $P^2 = P$*, isto é,* $Px \in \mathcal{D}(P)$ *e* $P^2x = Px$ *para todo* $x \in \mathcal{D}(P)$*. Se* P *é uma projeção em* X*, então*

$$\mathcal{R}(P) = \{Px \mid x \in \mathcal{D}(P)\} = \{x \in \mathcal{D}(P) \mid Px = x\}$$

e

$$\mathcal{N}(P) = \{x \in \mathcal{D}(P) \mid Px = 0\}$$

são subespaços de X *tais que* $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$*.*

Proposição 3.1.1. *Sejam* T *e* T' *operadores fechados densamente definidos em um espaço de Banach* X *a valores em* X *com* $T(inv)T'$*. Então,*
(1) TT' *é uma projeção de* $\mathcal{D}(T')$ *sobre* $\mathcal{R}(T)$ *de núcleo* $\mathcal{N}(T')$*.*
(2) $T'T$ *é uma projeção de* $\mathcal{D}(T)$ *sobre* $\mathcal{R}(T')$ *de núcleo* $\mathcal{N}(T)$*.*

Demonstração. Se $v \in \mathcal{D}(T') = \mathcal{D}(TT')$, então

$$(TT')^2v = TT'(TT'v) = (TT'T)T'v = TT'v.$$

Além disso, $\mathcal{R}(TT') \subseteq \mathcal{R}(T)$ e $\mathcal{N}(T') \subseteq \mathcal{N}(TT')$. Se $v \in \mathcal{R}(T)$, então existe $u \in \mathcal{D}(T)$ tal que

$$v = Tu = (TT'T)u = TT'(Tu) \in \mathcal{R}(TT').$$

Portanto, $\mathcal{R}(TT') = \mathcal{R}(T)$. Se $v \in \mathcal{N}(TT')$, então $(TT')v = 0$,

$$T'v = (T'TT')v = T'(TT'v) = 0$$

e assim, $\mathcal{N}(TT') = \mathcal{N}(T')$. A prova do item (2) é análoga já que se $T(inv)T'$ então $T'(inv)T$. $\square$

Observação 3.1.2. *Sejam T e T' operadores fechados densamente definidos em um espaço de Banach X a valores em X com $T(inv)T'$. Então, $\mathcal{D}(T') = \mathcal{N}(T') \oplus \mathcal{R}(T)$ e $\mathcal{D}(T) = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T')$.*

Proposição 3.1.2. *Sejam X um espaço de Banach e T, T' operadores fechados densamente definidos em X a valores em X com $T(inv)T'$. Se T' é limitado, então $\mathcal{D}(T') = X$.*

Demonstração. Pela Observação 3.1.2 temos que

$$\mathcal{D}(T') = \mathcal{N}(T') \oplus \mathcal{R}(T).$$

Já sabemos que $\overline{\mathcal{D}(T')} = X$ e assim resta mostrar que $\overline{\mathcal{D}(T')} \subseteq \mathcal{D}(T')$. Seja $u \in \overline{\mathcal{D}(T')}$. Então existe $\{u_n\}_n$ em $\mathcal{D}(T')$ tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Como T' é limitado, temos que $\{T'u_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy. De fato, dado $\varepsilon > 0$, como $\{u_n\}_n$ é sequência de Cauchy existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||T'u_n - T'u_m|| \leq ||T'||\,||u_n - u_m|| < \varepsilon,\ \forall m, n \geq N_0.$$

Como X é Banach, $\{T'u_n\}_n$ é convergente, digamos

$$v = \lim_{n\to\infty} T'u_n.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty}(u_n, T'u_n) = (u, v) \in \overline{G(T')} = G(T'),$$

e resulta que

$$(u, v) = (z, T'z), z \in \mathcal{D}(T').$$

Logo, $u = z \in \mathcal{D}(T')$ e $X = \mathcal{D}(T')$. □

Proposição 3.1.3. *Sejam T e T' operadores fechados densamente definidos em um espaço de Banach X a valores em X com $T(inv)T'$. Então, $TT' : \mathcal{D}(TT') \to X$ é fechado se, e somente se,*

$$\overline{\mathcal{R}(T)} \cap \mathcal{N}(T') = \{0\}.$$

Neste caso, temos $\mathcal{D}(\overline{TT'}) = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \mathcal{N}(T')$, $\mathcal{R}(\overline{TT'}) = \overline{\mathcal{R}(T)}$, $\mathcal{N}(\overline{TT'}) = \mathcal{N}(T')$ e $\overline{TT'}$ é uma projeção de $\mathcal{D}(\overline{TT'})$ em $\mathcal{R}(\overline{TT'})$ de núcleo $\mathcal{N}(T')$.

Demonstração. Suponhamos que $TT' : \mathcal{D}(TT') \to X$ é fechado. Pela Proposição 3.1.1, TT' é uma projeção de $\mathcal{D}(T')$ sobre $\mathcal{R}(T)$, de núcleo $\mathcal{N}(T')$. Seja $v \in \overline{\mathcal{R}(T)} \cap \mathcal{N}(T')$. Então existe uma sequência $\{u_n\}_n$ em $\mathcal{D}(T)$ tal que $\lim_{n\to\infty} Tu_n = v$. Seja

$$w_n = Tu_n - v.$$

Como $v \in \mathcal{N}(T') \subseteq \mathcal{D}(T')$ e $\mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{D}(T')$, vem que $w_n \in \mathcal{D}(T')$ e

$$(TT')w_n = TT'(Tu_n - v) = (TT'T)u_n - TT'v = Tu_n.$$

Logo, $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ e $\lim_{n\to\infty} TT'(w_n) = v$. Ou ainda, $\lim_{n\to\infty}(w_n, TT'(w_n)) = (0, v)$. Como TT' é fechado, temos que $(0, v) \in G(TT')$, isto é, $TT'0 = v$ e, portanto, $v = 0$. Logo, $\overline{\mathcal{R}(T)} \cap \mathcal{N}(T') = \{0\}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\overline{\mathcal{R}(T)} \cap \mathcal{N}(T') = \{0\}$ e seja $\{v_n\}_n$ uma sequência em $\mathcal{D}(TT') = \mathcal{D}(T')$ tal que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ e $\lim_{n\to\infty}(TT')v_n = w$. Segue que $w \in \overline{\mathcal{R}(T)}$. Consideremos a sequência $\{u_n\}_n$ dada por

$$u_n = (I - TT')v_n.$$

Então, $u_n \in \mathcal{N}(T')$ e $\lim_{n\to\infty} u_n = -w$. Além disso, sendo $G(T')$ o gráfico de T', temos que

$$\lim_{n\to\infty}(u_n, T'u_n) = (-w, 0) \in \overline{G(T')} = G(T'),$$

isto é, $(-w, 0) = (u, T'u)$ para algum $u \in \mathcal{D}(T')$. Logo, $u = -w$ e $T'u = 0$. Segue também que $T'(w) = T'(-(-w)) = -T'(u) = 0$, ou seja, $w \in \mathcal{N}(T')$. Portanto,

$$w \in \overline{\mathcal{R}(T)} \cap \mathcal{N}(T')$$

e assim

$$w = 0.$$

Isso prova que TT' é fechado. Suponhamos agora que TT' é fechado e seja $u \in \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \mathcal{N}(T')$. Então, $u = v + w$ com $v \in \overline{\mathcal{R}(T)}$ e $w \in \mathcal{N}(T')$; e existe uma sequência $\{x_n\}_n \subseteq \mathcal{D}(T)$ tal que $\lim_{n\to\infty} Tx_n = v$. Consideremos a sequência $\{u_n\}_n$ dada por

$$u_n = Tx_n + w.$$

Então, $\{u_n\}_n \subseteq \mathcal{D}(T')$ e

$$TT'(u_n) = TT'(Tx_n + w) = TT'Tx_n + TT'w = Tx_n.$$

Logo, $\lim_{n\to\infty} TT'(u_n) = v$ e $\lim_{n\to\infty} u_n = v + w = u$. Assim, $u \in \mathcal{D}(\overline{TT'})$ e $\overline{TT'}u = v$, e portanto $\overline{\mathcal{R}(T)} + \mathcal{N}(T') \subseteq \mathcal{D}(\overline{TT'})$. Como $v = \overline{TT'}u$, $v \in \mathcal{R}(\overline{TT'})$ temos

$$\overline{\mathcal{R}(T)} \subseteq \mathcal{R}(\overline{TT'}).$$

Finalmente, como $w \in \mathcal{N}(T')$ e a sequência $\{u_n - Tx_n\}_n$ em $\mathcal{D}(T') = \mathcal{D}(TT')$ converge para w e $TT'(u_n - Tx_n) = TT'u_n - TT'Tx_n = Tx_n - Tx_n = 0$, temos que

$$\overline{TT'}w = \lim_{n\to\infty} TT'(u_n - Tx_n) = 0.$$

Logo, $w \in \mathcal{N}(\overline{TT'})$ e assim $\mathcal{N}(T') \subseteq \mathcal{N}(\overline{TT'})$. Para mostrar as desigualdades opostas, sejam $u \in \mathcal{D}(\overline{TT'})$ e $v = \overline{TT'}u$. Então $v \in \mathcal{R}(\overline{TT'})$ e existe uma sequência $\{u_n\}_n \subseteq \mathcal{D}(T')$ tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ e $\lim_{n\to\infty}(TT')u_n = v$. Portanto, $v \in \overline{\mathcal{R}(T)}$ e $\mathcal{R}(\overline{TT'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(T)}$. Como

$$u_n = (I - TT')u_n + TT'u_n \to u,$$

então $(I - TT')u_n \to w = u - v$, com $u - v \in \mathcal{N}(T')$ pois, como TT' é fechado

$$(u_n, TT'u_n) \to (u, v) \in \overline{G(TT')} = G(TT'),$$

e assim $v = TT'u$. Resulta que

$$T'v = T'TT'u = T'u \Rightarrow T'u - T'v = 0 \Rightarrow T'(u - v) = 0 \Rightarrow u - v \in \mathcal{N}(T').$$

Logo, $\mathcal{D}(\overline{TT'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \mathcal{N}(T')$. Agora seja $z \in \mathcal{N}(\overline{TT'})$. Então existe uma sequência $\{z_n\}_n$ em $\mathcal{D}(\overline{TT'}) = \mathcal{D}(T')$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ e $\lim_{n\to\infty} TT'z_n = 0$. Logo,

$$(z, 0) \in \overline{G(TT')} = G(TT'),$$

ou seja, $TT'z = 0$. Daí, segue que, $T'TT'z = T'0$. Como $T(inv)T'$, temos $T'z = 0$. Logo, $z \in \mathcal{N}(T')$. Portanto, $\mathcal{N}(\overline{TT'}) \subseteq \mathcal{N}(T')$. É imediato verificar que $(\overline{TT'})^2 = \overline{TT'}$. $\square$

Corolário 3.1.1. *Sejam T e T' operadores fechados densamente definidos em um espaço de Banach X a valores em X com $T(inv)T'$. Então, TT' é fechado se, e somente se, $\mathcal{R}(T)$ é fechado.*

Demonstração. Suponhamos que $TT' : X \to X$ é fechado. Pela Proposição 3.1.3, obtemos que $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{R}(\overline{TT'})$. Seja $v \in \overline{\mathcal{R}(T)}$. Então, $v \in \mathcal{R}(\overline{TT'})$ e existe $u \in \mathcal{D}(\overline{TT'})$ tal que $\overline{TT'}u = v$. Mas isso implica que existe uma sequência $\{u_n\}_n$ em $\mathcal{D}(T') = \mathcal{D}(TT')$ tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ e $\lim_{n\to\infty} TT'u_n = v$. Equivalentemente, $(u, v) \in \overline{G(TT')} = G(TT')$, já que TT' é fechado. Logo, $v = TT'u$ e assim, $v \in \mathcal{R}(T)$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{R}(T)$ é fechado. Então, novamente pela Proposição 3.1.3, basta mostrarmos que $\mathcal{R}(T) \cap \mathcal{N}(T') = \{0\}$. Seja $y \in \mathcal{R}(T) \cap \mathcal{N}(T')$. Logo, $T'y = 0$ e existe $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ tal que $Tx_0 = y$. Segue que $T'Tx_0 = T'y = 0$ e daí,

$$(TT'T)x_0 = TT'y = T0 = 0.$$

Como $(TT'T)x_0 = Tx_0$, vem que $y = 0$. $\square$

Corolário 3.1.2. *Sejam T e T' operadores fechados densamente definidos em um espaço de Banach X a valores em X com $T(inv)T'$. Então, TT' é limitado se, e somente se,*

$$\mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{N}(T') = X.$$

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{N}(T') = X$. Como

$$X = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{N}(T') \subseteq \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \mathcal{N}(T') \subseteq X,$$

temos que

$$X = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \mathcal{N}(T').$$

Segue que $\overline{\mathcal{R}(T)} \cap \mathcal{N}(T') = \{0\}$, e pela Proposição 3.1.3, TT' é fechado. Notemos que

$$\mathcal{D}(TT') = \mathcal{D}(T') = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{N}(T') = X,$$

ou seja, TT' é um operador definido em X a valores em X. Pelo Teorema do Gráfico Fechado TT' é limitado. Para provar a recíproca, assuma que TT' é limitado. Logo, TT' é um operador contínuo. Seja $x \in \overline{\mathcal{R}(T)} \cap \mathcal{N}(T')$. Então existe uma sequência $\{u_n\}_n$ em $\mathcal{D}(T)$ tal que

$$x = \lim_{n\to\infty} Tu_n$$

e $T'x = 0$. Resulta que,

$$0 = (TT')x = TT'(\lim_{n\to\infty} Tu_n) = \lim_{n\to\infty}(TT')(Tu_n) = \lim_{n\to\infty} Tu_n = x,$$

o que implica em $\overline{\mathcal{R}(T)} \cap \mathcal{N}(T') = \{0\}$. Assim, pela Proposição 3.1.3, TT' é fechado e pelo Corolário 3.1.1, $\mathcal{R}(T)$ é fechado. Agora, notemos que $\overline{\mathcal{D}(T')} \subseteq \mathcal{D}(\overline{TT'})$. De fato, seja $\xi \in \overline{\mathcal{D}(T')}$. Então existe uma sequência $\{\xi_n\}_n \subseteq \mathcal{D}(T')$ tal que $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$. Logo, $\{\xi_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||\xi_n - \xi_m|| < \tfrac{\varepsilon}{||TT'||+1}, \quad \text{para todo } m, n \geq N.$$

Temos que $\{TT'\xi_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy em X, pois para todo $m, n \geq N$

$$||TT'(\xi_n) - TT'(\xi_m)|| \leq ||TT'||\,||\xi_n - \xi_m|| < ||TT'||\frac{\varepsilon}{||TT'||+1},$$

e como X é Banach, $\{TT'(\xi_n)\}_n$ é convergente em X. Logo, $\xi \in \mathcal{D}(\overline{TT'})$, e assim

$$X = \overline{\mathcal{D}(T')} \subseteq \mathcal{D}(\overline{TT'}) = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \mathcal{N}(T') = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{N}(T').$$

□

Utilizaremos o seguinte resultado da referência [12].

Lema 3.1.1. *Sejam S, T operadores fechados e densamente definidos em um espaço de Banach X a valores em X. Se $\mathcal{R}(S) + \mathcal{N}(T)$ é fechado e $\mathcal{R}(S) \cap \mathcal{N}(T) = \{0\}$, então $\mathcal{R}(S)$ é fechado.*

Proposição 3.1.4. *Sejam T e T' operadores fechados densamente definidos em um espaço de Banach X a valores em X com $T(inv)T'$. Se T' é limitado então $\mathcal{R}(T)$ é fechado.*

Demonstração. Sejam T, T' operadores tais que T' é limitado e $T(inv)T'$. Como T' é densamente definido, se mostrarmos que $\overline{\mathcal{D}(T')} \subseteq \mathcal{D}(T')$ e usarmos a Observação 3.1.2, obtemos

$$X = \overline{\mathcal{D}(T')} = \mathcal{D}(T') = \mathcal{N}(T') \oplus \mathcal{R}(T).$$

Logo, $\mathcal{N}(T') + \mathcal{R}(T)$ é fechado e $\mathcal{N}(T') \cap \mathcal{R}(T) = \{0\}$. Daí, segue do Lema 3.1.1 que $\mathcal{R}(T)$ é fechado.

Seja $u \in \overline{\mathcal{D}(T')}$. Então existe uma sequência $\{u_n\}_n \subseteq \mathcal{D}(T')$ tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Assim, $\{u_n\}_n$ é de Cauchy, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq N$

$$||u_n - u_m|| < \frac{\varepsilon}{||T'||+1}.$$

Como T' é limitado, temos que $\{T'(u_n)\}_n$ é uma sequência de Cauchy, pois para todo $m, n \geq N$ temos que

$$||T'u_n - T'u_m|| \leq ||T'||\,||u_n - u_m|| < ||T'||\frac{\varepsilon}{||T'||+1} = \varepsilon.$$

Como X é Banach, $\{T'(u_n)\}_n$ é convergente em X, digamos $\lim_{n\to\infty} T'u_n = v$. Segue que $(u, v) \in \overline{G(T')} = G(T')$. Assim, existe $z \in \mathcal{D}(T')$ tal que $(u, v) = (z, T'z)$. Logo, $u = z \in \mathcal{D}(T')$ e portanto,

$$\overline{\mathcal{D}(T')} \subseteq \mathcal{D}(T').$$

□

3.2 Majoração, Inclusão de Imagens e Fatoração de Operadores não limitados em espaços de Banach

Encontra-se em [9] uma versão do Teorema de Douglas para operadores lineares não limitados definidos em espaços de Hilbert. Motivado por este teorema, Forough apresentou em [12] um resultado que generaliza o Teorema de Douglas no contexto de operadores lineares fechados densamente definidos em espaços de Banach. Nesta seção, abordaremos este e outros resultados estabelecidos por Forough no mesmo artigo.

Teorema 3.2.1. *Sejam T e S operadores fechados densamente definidos em um espaço de Banach X a valores em X. Suponha que T tem inversa generalizada T'. Se $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$, então existe um único operador V densamente definido em X, tal que $S = TV$ e $\mathcal{R}(V) \subseteq \mathcal{R}(T')$. O operador V é chamado de solução reduzida para T' da equação $S = TX$. Também, existe um número $M > 0$ tal que*

$$||V(x)||^2 \leq M(||x||^2 + ||S(x)||^2), \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(V).$$

Além disso, se S é limitado então V é limitado; e se T é limitado, então V é fechado.

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{D}(S)$. Então $S(x) \in \mathcal{R}(S)$. Como $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T)$ segue que $S(x) \in \mathcal{R}(T)$. Pela Observação 3.1.2, temos que $\mathcal{D}(T) = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T')$. Logo, existe um único $y \in \mathcal{R}(T')$ tal que $S(x) = T(y)$. Agora, defina

$$\begin{aligned} V : \mathcal{D}(S) &\to X \\ x &\mapsto V(x) = y. \end{aligned}$$

As observações do início da prova, mostram que V está bem definido. Como $\overline{\mathcal{D}(S)} = X$, V está densamente definido, e como $S(x) = T(y)$, temos

$$S(x) = T(V(x)) \Rightarrow S(x) = (TV)(x).$$

Logo, $S = TV$. Observe também que

$$\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{D}(T')$$

e

$$\mathcal{R}(V) \subseteq \mathcal{R}(T'), \text{ pois } y \in \mathcal{R}(T').$$

Daí, $T'S = T'(TV) = V$, pois pela Proposição 3.1.1, $T'T$ é projeção sobre $\mathcal{R}(T')$. Suponhamos que ψ é um operador densamente definido em X tal que $S = T\psi$ e $\mathcal{R}(\psi) \subseteq \mathcal{R}(T')$. Então temos $T'S = T'T\psi = \psi$, o que mostra a unicidade, $\psi = V$.

Considere o operador

$$\begin{aligned} W\colon G(S) &\to X \\ (x, S(x)) &\mapsto W(x, S(x)) = V(x), \end{aligned}$$

onde $G(S)$ é o gráfico de S. Mostraremos que o gráfico de W, $G(W)$, é fechado no espaço de Banach $G(S) \oplus X$. Seja $(x, y, z) \in \overline{G(W)}$. Logo, existe uma sequência $\{(x_n, S(x_n), V(x_n))\}_n$ em $G(S) \oplus W$ convergindo para (x, y, z). Assim,

$$x_n \to x, S(x_n) \to y, V(x_n) \to z.$$

Como $G(S)$ é fechado, $(x, y) \in G(S)$ e $y = S(x)$. Resta mostrar que $W(x, y) = z$, ou equivalentemente, que $z = Vx$. Temos que $\lim_{n\to\infty} V(x_n) = z$, isto é, $\lim_{n\to\infty}(T'S)(x_n)z$. Assim, $\lim_{n\to\infty}(S(x_n), T'(S(x_n))) = (S(x), z)$. Como $G(T')$ é fechado, já que T' é fechado, vem que $T'(S(x)) = z$, ou seja, $(T'S)(x) = z$, e portanto $V(x) = z$ implicando que $G(W)$ é fechado. Usando o Teorema do Gráfico Fechado, temos que W é um operador limitado, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$||W(x, S(x))|| \leq C||(x, S(x))||, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(V).$$

Notemos que

$$||Vx|| = ||W(x, S(x))|| \leq C||(x, S(x))|| = C(\sqrt{||x||^2 + ||S(x)||^2}).$$

Logo,

$$||Vx||^2 \leq M(||x||^2 + ||S(x)||^2), \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(V), \text{ onde } M = C^2.$$

Suponhamos S limitado. Temos que mostrar que V é limitado. Observe que

$$\begin{aligned} ||V(x)||^2 &\leq C^2(||x||^2 + ||S(x)||^2) \\ &= C^2||x||^2 + C^2||S(x)||^2 \\ &\leq C^2||x||^2 + C^2(||S||^2||x||^2) = (C^2 + C^2||S||^2)||x||^2, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(V). \end{aligned}$$

e assim, V é limitado.

Agora, suponhamos que T é limitado. Devemos mostrar que V é um operador fechado. Para isso, vamos provar que o gráfico de V é fechado. Seja $(x, y) \in \overline{G(V)}$. Então existe uma sequência $\{x_n\}_n$ em $\mathcal{D}(V)$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} V(x_n) = y$. Como T é limitado, segue que

$$S(x_n) = (TV)(x_n) = T(V(x_n)) \to T(y).$$

Logo, temos a sequência $\{(x_n, S(x_n))\}_n$ em $G(S)$ convergindo para $(x, T(y))$. Como S é fechado, $G(S)$ é fechado, e portanto $S(x) = T(y)$, isto é, $(x, T(y)) \in G(S)$. Como T é limitado, a Proposição 3.1.4 garante que $\mathcal{R}(T')$ é fechado. Logo, sendo y o limite da sequência

$$V(x_n) = T'(S(x_n)),$$

tem-se que $y \in \mathcal{R}(T')$. Pela definição do operador V, $V(x) = y$, e portanto V é fechado.

□

Definição 3.2.1. *Seja $S : \mathcal{D}(S) \subseteq X \to X$ um operador linear onde X é um espaço normado. Um operador linear*

$$V : \mathcal{D}(V) \subseteq X \to X$$

é chamado S-limitado se $\mathcal{D}(V) \subseteq \mathcal{D}(S)$ e existe $M > 0$ tal que

$$||V(x)||^2 \leq M(||x||^2 + ||S(x)||^2), \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(V).$$

A prova do teorema acima mostra que para operadores fechados densamente definidos S e T em um espaço de Banach X, $\{T'S \mid T(inv)T'\}$ é um conjunto de soluções da equação $S = TV$ que são S-limitados.

Corolário 3.2.1. *Seja T' uma inversa generalizada de T e V solução reduzida para T' da equação $S = T\mathcal{X}$. Então, $\mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(S)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.1, temos que $V = T'S$ e $S = TV$. Segue que $\mathcal{N}(V) \subseteq \mathcal{N}(S)$. Como $V = T'S$, temos $\mathcal{N}(S) \subseteq \mathcal{N}(V)$. □

Proposição 3.2.1. *Sejam T e S operadores fechados densamente definidos em um espaço de Banach X a valores em X, ambos admitindo inversa generalizada. Se $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(S)$ e $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(S)$, então existe um operador invertível V, densamente definido, tal que $S = TV$.*

Demonstração. Sejam T' e S' inversas generalizadas de T e S, respectivamente. Pelo Teorema 3.2.1 existem aplicações lineares

$$\begin{aligned} Z : \mathcal{D}(S) &\to X \\ x &\mapsto Z(x) = (T'S)(x), \text{ com } S = TZ \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W : \mathcal{D}(T) &\to X \\ x &\mapsto W(x) = (S'T)(x), \text{ com } T = SW. \end{aligned}$$

Notemos que:

$a)$ $WZ = S'S$. De fato, temos que $WZ = S'TT'S$, e seja $u \in \mathcal{D}(S)$. Então,

$$S(u) \in \mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{D}(T').$$

Assim, como TT' é uma projeção sobre $\mathcal{R}(T)$, obtemos

$$(S'T)(T'S)u = S'TT'(S(u)) = (S'S)u.$$

$b)$ $WZ|_{\mathcal{R}(S')} = I$ é identidade. De fato, seja $x \in \mathcal{D}(S')$. Então,

$$WZ(S'(x)) = S'S(S'(x)) = (S'SS')(x) = S'(x).$$

$c)$ $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(SS')$ e $\mathcal{R}(T') = \mathcal{R}(T'T)$. De fato, dado $S(u) \in \mathcal{R}(S)$, então

$$S(u) = SS'S(u) = SS'(S(u)) \in \mathcal{R}(SS').$$

Se $SS'v \in \mathcal{R}(SS')$, então $S(S'(v)) \in \mathcal{R}(S)$. Vale também que $\mathcal{R}(T') = \mathcal{R}(T'T)$, pois se $T'(x) \in \mathcal{R}(T')$ então

$$T'(x) = T'TT'(x) = T'T(T'(x)) \in \mathcal{R}(T'T).$$

Por outro lado, se $T'T(v) \in \mathcal{R}(T'T)$, então $T'(T(v)) \in \mathcal{R}(T')$. Seja $Z_1 = Z|_{\mathcal{R}(S')}$. Temos que $\mathcal{R}(Z_1) = \mathcal{R}(T')$. De fato, segue de $c)$ que

$$Z(S'(x)) = T'SS'(x) = T'Tv = T'q.$$

Pela Observação 3.1.2, $\mathcal{D}(S) = \mathcal{R}(S') \oplus \mathcal{N}(S)$.

Defina

$$V : \mathcal{D}(S) \to X$$

$$(S'(x) + y) \mapsto V(S'(x) + y) = Z_1(S'(x)) + y, \ x \in \mathcal{D}(S'),$$

$y \in \mathcal{N}(S)$.

Segue que $\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(T') + \mathcal{N}(T) = \mathcal{D}(T)$, pois $\mathcal{R}(T') = \mathcal{R}(Z_1)$, $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(S)$ e vale a Observação 3.1.2. Temos que V é injetor, pois dado $S'(x) + y \in \mathcal{N}(V)$, então

$$V(S'(x) + y) = 0 \Rightarrow Z_1(S'(x)) + y = 0 \Rightarrow Z_1(S'(x)) = -y \Rightarrow WZ_1(S'(x)) = W(-y)$$
$$\Rightarrow S'(x) = W(-y) \Rightarrow S'(x) = S'T(-y) \Rightarrow S'(x) = 0, \text{ pois } y \in \mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(T).$$

Resulta que $y = -Z_1(S'(x)) = -Z_1(0) = 0$, ou seja, $S'(x) + y = 0$, e portanto $\mathcal{N}(V)$ é trivial. Logo V é invertível sobre $\mathcal{R}(V)$. Agora, seja $S'(x) + y \in \mathcal{D}(V)$, com $x \in \mathcal{D}(S')$ e $y \in \mathcal{N}(S)$. Então,

$$S(S'(x) + y) = S(S'(x)) + Sy = S(S'(x)),$$

$$TV(S'(x) + y) = TZ_1(S'(x)) + Ty = TT'S(S'(x)) = S(S'(x)),$$

e, portanto $S = TV$. □

Estudaremos agora o problema sobre a existência de um operador V tal que S é uma extensão de VT, assim

$$\mathcal{D}(VT) \subseteq \mathcal{D}(S) \text{ e } VT = S\ |_{\mathcal{D}(VT)},$$

com T e S operadores fechados densamente definidos. Usaremos a notação

$$VT \subseteq S$$

para indicar que S é uma extensão de VT. Para este estudo, introduziremos a propriedade T majora S, agora no contexto de operadores não limitados.

Definição 3.2.2. *Sejam T e S operadores fechados densamente definidos em um espaço de Banach X a valores em X. Diremos que T majora S se $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$ e existe $\lambda > 0$ tal que*

$$||S(x)|| \leq \lambda ||T(x)||,$$

para cada $x \in \mathcal{D}(T)$.

O próximo resultado fornece condições que garantem a majoração de operadores conforme a definição anterior. Veremos ainda que a propriedade de majoração é uma hipótese essencial na Proposição 3.2.3. Começaremos com o seguinte lema.

Lema 3.2.1. *Sejam X um espaço de Banach e T e S operadores fechados densamente definidos em X a valores em X, com $T(inv)T'$ e T' limitado. Então o operador*

$$\begin{aligned} ST' : \mathcal{D}(T') \subseteq X &\to X \\ x &\mapsto ST'(x) \end{aligned}$$

é limitado.

Demonstração. Primeiramente, notemos que como T' é limitado, temos pela Proposição 3.1.2 que

$$\mathcal{D}(T') = X.$$

Como X é Banach, se mostrarmos que ST' é fechado, pelo Teorema do Gráfico Fechado ST' é limitado. Seja $(y, z) \in \overline{G(ST')}$. Então existe uma sequência $\{y_n\}_n$ em $\mathcal{D}(ST')$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ e $\lim_{n\to\infty} ST'(y_n) = z$. Como T' é limitado

$$\lim_{n\to\infty} T'(y_n) = T'y.$$

Além disso, $(T'(y_n), ST'(y_n)) \in G(S)$ e $\lim_{n\to\infty}(T'(y_n), ST'(y_n)) = (T'y, z)$. Resulta que

$$(T'y, z) \in \overline{G(S)} = G(S),$$

e portanto,

$$z = S(T'y).$$

Ou seja, $G(ST')$ é fechado, o que implica que o operador ST' é fechado, e portanto limitado. $\square$

Proposição 3.2.2. *Sejam T e S operadores fechados densamente definidos em um espaço de Banach X a valores em X. Suponha que $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$, $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(S)$ e que T tem inversa generalizada, T', limitado. Então T majora S.*

Demonstração. Assuma as hipóteses da proposição e defina

$$\begin{aligned} V : \mathcal{R}(T) &\to X \\ T(x) &\mapsto V(T(x)) = S(x). \end{aligned}$$

Resulta que:

• V está bem definido.

De fato, sejam $T(x), T(y) \in \mathcal{R}(T)$ com $T(x) = T(y)$. Então $(x - y) \in \mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(S)$, e assim $S(x) = S(y)$, ou seja, $V(T(x)) = V(T(y))$. Portanto, V está bem definido.

• V é limitado.

Vamos mostrar que V é um operador fechado, e assim, pelo Teorema do Gráfico Fechado, concluir que V é limitado. Seja $(y, z) \in \overline{G(V)}$. Então existe uma sequência $\{u_n\}_n$ em $\mathcal{R}(T)$, $u_n = T(x_n)$ com $\lim_{n\to\infty} u_n = y$, $\{x_n\}_n$ em $\mathcal{D}(T)$ e $\lim_{n\to\infty} V(T(x_n)) = z$. Como T' é inversa generalizada de T, então temos que $T = TT'T$, o que implica que

$$V(T(x_n)) = (VT)(x_n) = VTT'T(x_n) = ST'T(x_n).$$

Como vimos no Lema 3.2.1, ST' é um operador limitado e assim,

$$V(T(x_n)) = (ST')(Tx_n) \to ST'(y),$$

o que implica que $z = ST'(y)$.

Como T' é limitado, pelo Lema 3.1.4, $\mathcal{R}(T)$ é fechado. Logo $y \in \mathcal{R}(T)$, e como TT' é projeção sobre $\mathcal{R}(T)$ obtemos $y = TT'(y)$. Segue que

$$V(y) = V(TT'(y)) = VT(T'y) = ST'(y) = z,$$

e V é fechado. Sendo V limitado, existe $C > 0$, tal que

$$||V(Tx)|| \leq C||Tx||, \quad \text{para todo } T(x) \in \mathcal{R}(T).$$

Mas isso implica que $||S(x)|| \leq C||T(x)||$, para todo $x \in \mathcal{D}(T)$ e, portanto, T majora S. □

Utilizaremos o seguinte resultado que se encontra na página 98 de [14].

Lema 3.2.2. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ um operador linear fechado com $\mathcal{N}(T)$ fechado. Então $\mathcal{R}(T)$ é fechado se, e somente se, existe $C > 0$ tal que*

$$C||x + \mathcal{N}(T)|| \leq ||Tx||, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(T).$$

Proposição 3.2.3. *Sejam T e S operadores fechados densamente definidos em um espaço de Banach X a valores em X, tal que T majora S. Se $\mathcal{R}(S)$ e $\mathcal{N}(S)$ são fechados e $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(S)$, então $\mathcal{R}(T)$ é fechado.*

Demonstração. Consideremos o seguinte operador

$$\begin{aligned} Q_S : X &\to X/\mathcal{N}(S) \\ x &\mapsto Q_S(x) = x + \mathcal{N}(S). \end{aligned}$$

Como supomos $\mathcal{R}(S)$ fechado, pelo Lema 3.2.2 existe $M > 0$ tal que

$$M||Q_S(x)|| \leq ||S(x)||, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(S),$$

ou equivalentemente,

$$||x + \mathcal{N}(S)|| \leq M^{-1}||S(x)||, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(S).$$

Como $\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(T)$ e T majora S, então $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$ e existe $C > 0$ tal que

$$||x + \mathcal{N}(T)|| \leq M^{-1}||S(x)|| \leq C||T(x)||, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(T).$$

Logo, pelo Lema 3.2.2 $\mathcal{R}(T)$ é fechado. □

Teorema 3.2.2. *Suponha que T e S são operadores fechados densamente definidos em um espaço de Banach X a valores em X, e que T tem uma inversa generalizada. Se T majora S, então existe um operador V densamente definido em X a valores em X tal* *que $VT \subseteq S$. Além disso, se T admite uma inversa generalizada limitada, então V é um operador limitado.*

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} V_0 : \mathcal{R}(T) &\to X \\ T(x) &\mapsto V_0(T(x)) = S(x). \end{aligned}$$

Como T majora S, $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$ e segue que $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(S)$. Assim V_0 está bem definido. Para todo $x \in \mathcal{D}(T)$, como T tem inversa generalizada T', vem que

$$V_0T(x) = V_0(TT'T)(x) = (V_0T)(T'T)(x) = ST'T(x) = ST'(T(x)), x \in \mathcal{D}(T).$$

Logo, $V_0 = ST'$ em $\mathcal{R}(T)$. Assim, podemos considerar V, extensão de V_0 como um operador densamente definido:

$$\begin{aligned} V : \mathcal{D}(T') &\to X \\ x &\mapsto V(x) = ST'(x). \end{aligned}$$

Supondo T' limitado, pelo Lema 3.2.1, $V = ST'$ é um operador limitado definido em X. □

No *Lemma 1* de [11], Embry obteve uma caracterização de imagens de operadores limitados em um espaço de Banach. A seguir, mostraremos um resultado análogo, válido no contexto de operadores densamente definidos em um espaço de Banach.

Definição 3.2.3. *Sejam X e Y espaços de Banach e T: $\mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ um operador linear densamente definido em X. O conjugado T^* de T está definido em*

$$\mathcal{D}(T^*) = \{y^* \mid y^* \in Y^*,\ y^*T \text{ é continuo em } \mathcal{D}(T)\}.$$

Para $y^* \in \mathcal{D}(T^*)$, seja T^* o operador que leva $y^* \in \mathcal{D}(T^*)$ em $\widetilde{y^*T}$, onde $\widetilde{y^*T}$ é a única extensão linear contínua de y^*T para todo X.

Lema 3.2.3. *Seja T um operador densamente definido em um espaço de Banach X a valores em X. Então, $x^* \in \mathcal{R}(T^*)$ se, e somente se, existe um número real $C \geq 0$ tal que*

$$|x^*(x)| \leq C||T(x)||, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(T).$$

Demonstração. Suponhamos que $x^* \in \mathcal{R}(T^*)$, então $T^*y^* = x^*$, $y^* \in \mathcal{D}(T^*)$. Logo, para $x \in \mathcal{D}(T)$,

$$|x^*(x)| = |T^*y^*(x)| = |y^*T(x)| \leq ||y^*||\,||T(x)||.$$

Reciprocamente, assuma que $x^* \in X^*$ e que existe um número $C > 0$ tal que

$$|x^*(x)| \leq C||T(x)||, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(T).$$

Defina

$$f : \mathcal{R}(T) \to \mathbb{K}$$
$$Tx \mapsto f(T(x)) = x^*(x).$$

É fácil ver que f está bem definido, e que f é linear devido a linearidade do funcional x^* e de T. Além disso, f é contínuo, pois

$$|f(Tx)| = |x^*(x)| \leq C||T(x)||, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(T).$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, f tem uma extensão linear limitada y^* em X^*. Daí,

$$y^*(Tx) = x^*(x), \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(T).$$

Note que y^*T é limitado em $\mathcal{D}(T)$ e segue que $y^* \in \mathcal{D}(T^*)$. Portanto, $x^* = T^*(y^*) \in \mathcal{R}(T^*)$. □

A próxima proposição é uma extensão de uma parte do Teorema 1 de Embry [11].

Proposição 3.2.4. *Sejam T e S operadores fechados densamente definidos em um espaço de Banach X a valores em X. Suponha que existe um operador limitado V definido em X tal que $VT \subseteq S$. Então,*

$$\mathcal{R}(S^*) \subseteq \mathcal{R}(T^*).$$

Demonstração. Sejam $x^* \in \mathcal{D}(S^*)$ e $V : X \to X$ um operador limitado tal que $VT(x) = Sx$ para todo $x \in \mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$. Então $S^*(x^*) \in \mathcal{R}(S^*)$, e para $y \in \mathcal{D}(T)$

$$|S^*(x^*)(y)| = |x^*(S(y))| = |x^*(VT(y))| \leq ||x^*||\,||V||\,||T(y)||.$$

Pelo Lema anterior, $S^*(x^*) \in \mathcal{R}(T^*)$. □

Corolário 3.2.2. *Sejam T e S operadores fechados densamente definidos em um espaço de Banach X a valores em X. Suponha que T tem inversa generalizada, T', limitada. Se T majora S, então $\mathcal{R}(S^*) \subseteq \mathcal{R}(T^*)$.*

Demonstração. Consequência imediata do Teorema 3.2.2 e da Proposição 3.2.4. $\square$

Capítulo 4

Frames para Operadores

Frames em espaços de Hilbert foram apresentados pela primeira vez em 1952 por J. Duffin e A.C. Schaffer [10] no contexto de séries de Fourier não-harmônica, isto é, expansões de funções em $L^2([0,1])$ em exponenciais complexas $e^{i\lambda_n x}$ onde $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma família de números reais ou complexos. Apesar de possuírem mais de meio século, os frames ganharam popularidade apenas nas últimas décadas, devido principalmente ao trabalho de I. Daubechies, A. Grossmann e Y. Meyer [8].

A propriedade de independência linear para uma base, que permite que cada vetor possa ser representado de forma única como uma combinação linear dos vetores que compõem a base é muito restritiva para problemas práticos. Nessas circunstâncias os frames surgem como uma poderosa ferramenta na Teoria de Operadores e na Teoria de Espaços de Banach.

Pode-se considerar que frames são generalizações de bases ortonormais. Um frame permite que cada elemento do espaço possa ser escrito como uma combinação linear de elementos do frame, mas a independência linear entre os elementos do frame não é necessária. Este fato tornou-se importante no processamento de sinais, processamento de imagens, teoria da codificação e teoria da amostragem. Baseado no trabalho de Laura Gavruta [13] apresentaremos neste capítulo, como aplicação do Teorema de Douglas e dos demais conceitos estudados, uma generalização de frames (K-frames) que permite reconstruir elementos da imagem de um operador linear e limitado K em um espaço de Hilbert. Abordaremos uma caracterização de K-frames usando operadores lineares limitados. Elucidaremos a noção de sistema atômico associado a um operador linear limitado e suas propriedades e, por fim faremos uma descrição de famílias de átomos local.

4.1 Sistemas atômicos e K-frames

Definição 4.1.1. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Uma família de elementos $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$ é chamada de frame de $\mathcal{H}$ se existem constantes $A, B > 0$ tais que*

$$A||x||^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} | < x, f_n > |^2 \leq B||x||^2, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

As constantes A e B são chamadas de limites frame. Se apenas a última desigualdade da definição acima é válida, diremos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Bessel.

Exemplo 4.1.1. *Seja $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma base ortonormal de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ separável. Repetindo cada elemento de $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ duas vezes, obtemos*

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, ...\}$$

que é um frame com limite frame $A = 2$. Repetindo somente o elemento e_1, obtemos

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, ...\}$$

que é um frame com limites $A = 1$, $B = 2$.

Exemplo 4.1.2. *Sejam $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma base ortonormal de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ separável e*

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, ...\right\};$$

isto é, $\{f_k\}_k$ é uma sequência onde cada vetor $\frac{1}{\sqrt{k}}e_k$ é repetido k vezes. Então, para cada $f \in \mathcal{H}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} | < f, f_k > |^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k| < f, \frac{1}{\sqrt{k}}e_k > |^2 = ||f||^2.$$

Assim, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ é um frame em $\mathcal{H}$ com limite frame $A = 1$.

Outros exemplos e mais detalhes sobre frames podem ser encontrados em [6].

Proposição 4.1.1. *Seja* $\{f_k\}_k$ *uma sequência no espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *e suponhamos que* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ *é convergente para toda sequência* $\{c_k\}_k \in \ell^2$*. Então*

$$\begin{aligned} T : \ell^2 &\to \mathcal{H} \\ \{c_k\}_k &\mapsto T(\{c_k\}_k) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \end{aligned}$$

é um operador linear limitado, cujo adjunto é dado por

$$\begin{aligned} T^* : \mathcal{H} &\to \ell^2 \\ f &\mapsto T^*(f) = \{< f, f_k >\}_k. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} | < f, f_k > |^2 \leq ||T||^2 \ ||f||^2, \ \forall f \in \mathcal{H}.$$

Demonstração. Consideremos a sequência de operadores lineares limitados

$$\begin{aligned} T_n : \ell^2 &\to \mathcal{H} \\ \{c_k\}_k &\mapsto T_n(\{c_k\}_k) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k f_k. \end{aligned}$$

Claramente, $T_n \to T$ pontualmente quando $n \to \infty$. Pelo Teorema 1.0.11 temos que T é limitado. Resta encontrar a expressão de T^*. Sejam $f \in \mathcal{H}$ e $\{c_k\}_k \in \ell^2$. Então,

$$< f, T(\{c_k\}_k) > = < f, \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k > = \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_k > \overline{c_k}. \tag{4.1}$$

Temos, para todo $\{c_k\}_k \in \ell^2$, que a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} < f, f_k > \overline{c_k}$ implica que $\{< f, f_k >\}_k \in \ell^2$. Para verificar isso, note que $\sum_{n=1}^{\infty} < f, f_k > c_k$ também converge. Defina

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} < f, f_k > c_k$$

e

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} < f, f_k > c_k,$$

onde $x = \{c_k\}_k \in \ell^2$. Pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$|\varphi_n(x)| \leq (\sum_{k=1}^{n} |< f, f_k >|^2)^{1/2} \, (\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2)^{1/2} \leq (\sum_{k=1}^{n} |< f, f_k >|^2)^{1/2} \, ||x||.$$

Logo, φ_n é contínua, e

$$||\varphi_n|| \leq (\sum_{k=1}^{n} |< f, f_k >|^2)^{1/2}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Como $\varphi_n \to \varphi$ pontualmente, segue do Teorema 1.0.11 que φ também é limitado. Logo, para toda sequência $x = \{c_k\}_k$ em ℓ^2, temos que

$$|\varphi(x)| = |\sum_{k=1}^{\infty} < f, f_k > c_k| \leq ||\varphi|| (\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2)^{1/2}. \tag{4.2}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado, e consideremos a sequência $x = \{c_k\}_k$ dada por

$$c_k = \begin{cases} \overline{< f, f_k >}, & \text{se} \quad 1 \leq k \leq n, \; < f, f_k > \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, $\{c_k\}_k \in \ell^2$. Além disso, para $k = 1, ..., n$

$$|c_k|^2 = |\overline{< f, f_k >}|^2 = |< f, f_k >|^2$$

e

$$< f, f_k > c_k = < f, f_k > \overline{< f, f_k >} = |< f, f_k >|^2 = |c_k|^2.$$

Assim, da desigualdade (4.2) obtemos

$$\begin{aligned} (\textstyle\sum_{k=1}^{n} |< f, f_k >|^2)^{1/2} \, (\textstyle\sum_{k=1}^{n} |< f, f_k >|^2)^{1/2} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} |< f, f_k >|^2 \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} < f, f_k > c_k \\ &\leq ||\varphi|| \, (\textstyle\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2)^{1/2} \\ &= ||\varphi|| \, (\textstyle\sum_{k=1}^{n} |< f, f_k >|^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} (|< f, f_k >|^2)^{1/2} \leq ||\varphi||.$$

Como essa desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\{< f, f_k >\}_k \in \ell^2$. Com isso, escrevemos a identidade (4.1) na forma

$$< f, T(\{c_k\}_k) > = < \{< f, f_k >\}_k, \{c_k\}_k >,$$

e concluímos que

$$T^* f = \{< f, f_k >\}_k.$$

O adjunto de T é limitado e $||T|| = ||T^*||$. Temos

$$||T^* f||^2 \leq ||T^*||^2 \; ||f||^2 = ||T||^2 \; ||f||^2, \; \forall f \in \mathcal{H}.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} | < f, f_k > |^2 \leq ||T||^2 \; ||f||^2, \; \forall f \in \mathcal{H}.$$

□

Proposição 4.1.2. *Seja $\{f_k\}_k$ uma sequência em $\mathcal{H}$ e $B > 0$ dado. Então $\{f_k\}_k$ é uma sequência de Bessel se, e somente se,*

$$T : \ell^2 \to \mathcal{H}$$
$$\{c_k\}_k \mapsto T(\{c_k\}_k) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

é um operador limitado com $||T|| \leq \sqrt{B}$.

Demonstração. Suponhamos que $\{f_k\}_k$ é uma sequência de Bessel com a constante positiva B. Seja $\{c_k\}_k \in \ell^2$ e mostremos que T está bem definido, isto é, que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ é convergente. Para isso, consideremos $m, n \in \mathbb{N}$ com $n > m$. Então,

$$\left|\left| \sum_{k=1}^{n} c_k f_k - \sum_{k=1}^{m} c_k f_k \right|\right| = \left|\left| \sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k \right|\right| = \sup_{||g||=1} \left\{ | < \sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k, g > | \right\}$$

$$\leq \sup_{||g||=1} \sum_{k=m+1}^{n} |c_k < f_k, g > |$$

$$\leq (\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2)^{1/2} \sup_{||g||=1} (\sum_{k=m+1}^{n} | < f_k, g > |^2)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{B}\Bigg(\sum_{k=m+1}^{n}|c_k|^2\Bigg)^{1/2}.$$

Como $\{c_k\}_k \in \ell^2$, segue que $\{\sum_{n=1}^{\infty}|c_k|^2\}_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$. Logo, temos que $\{\sum_{k=1}^{n} c_k f_k\}_n$ é uma sequência se Cauchy em $\mathcal{H}$, e portanto convergente. Além disso, é fácil ver que T é linear, e como

$$||T(\{c_k\}_k)|| = \sup_{||g||=1}\{| < T(\{c_k\}_k), g > |\},$$

fazendo um cálculo semelhante ao que foi feito acima, concluímos que T é limitado com $||T|| \leq \sqrt{B}$. Reciprocamente, suponhamos T um operador linear limitado com $||T|| \leq \sqrt{B}$. Pela Proposição 4.1.1, temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}| < f, f_k > |^2 \leq ||T||^2||f||^2, \, \forall f \in H.$$

Logo,

$$\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}| < f, f_k > |^2 \leq B||f||^2 \text{ e } \{f_k\}_k \text{ é uma sequência Bessel.}$$

$\square$

Definição 4.1.2. *Seja $\{f_n\}_n$ uma sequência de Bessel em $\mathcal{H}$. O operador*

$$\begin{aligned} T : \ell^2 &\to \mathcal{H} \\ \{c_n\}_n &\mapsto T(\{c_n\}_n) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \end{aligned}$$

é chamado de operador síntese ou pré-frame.

O operador adjunto, dado por

$$\begin{aligned} \Theta = T^* : \mathcal{H} &\to \ell^2 \\ x &\mapsto \Theta(x) = \{< x, f_n >\}_n, \end{aligned}$$

é chamado de operador análise.

Fazendo a composição de T com T^* obtemos o operador frame

$$\begin{aligned} S : \mathcal{H} &\to \mathcal{H} \\ x &\mapsto S(x) = TT^*(x) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} < x, f_n > f_n. \end{aligned}$$

Definição 4.1.3. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e $K \in B(\mathcal{H})$. Diremos que uma sequência $\{f_n\}_n$ em $\mathcal{H}$ é um sistema atômico para K se valem as seguintes afirmações:*
(i) A série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ converge para todo $c = \{c_n\}_n \in \ell^2$.
(ii) Existe $C > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}$ existe $a_x = \{a_n\}_n \in \ell^2$ tal que $||a_x|| \leq C||x||$ e $Kx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$.

Observação 4.1.1. *A condição (i) da definição anterior é equivalente a dizer que $\{f_n\}_n$ é uma sequência de Bessel, o que pode ser verificado através da Proposição 4.1.1 e Proposição 4.1.2.*

O próximo resultado trata da existência de sistema atômico para um operador.

Teorema 4.1.1. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e $K \in B(\mathcal{H})$. Então K tem um sistema atômico.*

Demonstração. Seja $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma base ortonormal em $\mathcal{H}$. Então, para todo $x \in \mathcal{H}$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n,$$

e segue que

$$K(x) = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > Ke_n.$$

Tome $f_n = Ke_n$ e $a_n = < x, e_n >$, $n = 1, 2, ...$ Usando a Identidade de Parseval, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < x, f_n > |^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, Ke_n > |^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < K^* x, e_n > |^2 = ||K^* x||^2 \leq ||K^*||^2 \, ||x||^2, x \in \mathcal{H},$$

o que mostra que $\{f_n\}_n$ é uma sequência de Bessel. Além disso $||\{a_n\}_n|| = ||x||$. De fato,

$$||\{a_n\}_n||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, e_n > |^2 = ||x||^2, x \in \mathcal{H}.$$

Logo, K tem um sistema atômico. $\square$

O próximo resultado de Gavruta [13] fornece uma caracterização de sistemas atômicos.

Teorema 4.1.2. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e $\{f_n\}_n \subseteq \mathcal{H}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *$\{f_n\}_n$ é um sistema atômico para K;*

(2) *Existem $A, B > 0$ tais que*

$$A||K^*x||^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |< x, f_n >|^2 \leq B||x||^2, \ \forall x \in \mathcal{H};$$

(3) *$\{f_n\}_n$ é uma sequência de Bessel e existe uma sequência de Bessel $\{g_n\}_n$ tal que*

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} < x, g_n > f_n, \ x \in \mathcal{H}.$$

Demonstração. **(1)** $\Rightarrow$ **(2)** Suponhamos que $\{f_n\}_n$ é um sistema atômico para K. Nesse caso, $\{f_n\}_n$ é uma sequência de Bessel, e portanto existe $B > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |< x, f_n >|^2 \leq B||x||^2, \ x \in \mathcal{H}.$$

Para provar a desigualdade oposta, notemos que, para $g \in \mathcal{H}$ com $||g|| = 1$ e usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|< K^*x, g >| \leq ||K^*x|| \, ||g|| = ||K^*x||$$

e

$$\sup_{||g||=1} \{|< K^*x, g >|\} \leq ||K^*x||.$$

Por outro lado,

$$||K^*x|| = < K^*x, \frac{K^*x}{||K^*x||} > = |< K^*x, \frac{K^*x}{||K^*x||} >| \ \leq \ \sup_{||g||=1} \{|< K^*x, g >|\}.$$

Logo, temos que

$$||K^*x|| = \sup_{||g||=1} \{|< K^*x, g >|\} = \sup_{||g||=1} \{|< x, Kg >|\}$$

Substituindo x por g na condição (ii) da Definição 4.1.3, obtemos

$$Kg = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n.$$

Então,

$||K^*x|| = \sup_{||g||=1}\{| < x, \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n > |\} = \sup_{||g||=1}\{| \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} < x, f_n > |\}$

$\leq \sup_{||g||=1}\{(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}} \ (\sum_{n=1}^{\infty} | < x, f_n > |^2)^{\frac{1}{2}}\}$

$\leq \sup_{||g||=1}\{C \ ||g||(\sum_{n=1}^{\infty} | < x, f_n > |^2)^{\frac{1}{2}}\}.$

Logo,

$$||K^*x|| \leq C \sup_{||g||=1}\{||g||(\sum_{n=1}^{\infty} | < x, f_n > |^2)^{\frac{1}{2}}\},$$

e portanto,

$$||K^*x|| \leq C(\sum_{n=1}^{\infty} | < x, f_n > |^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{C^2}||K^*x||^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} | < x, f_n > |^2,$$

o que conclui a prova.

(2) $\Rightarrow$ **(3)** Assuma **(2)**. Como visto na Observação 4.1.1, $\{f_n\}_n$ é uma sequência de Bessel. Segue que $f_n = Te_n$, onde $T : \ell^2 \to \mathcal{H}$ é um operador linear limitado (operador síntese) e $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é a base ortonormal canônica de ℓ^2. Assim,

$$A||K^*x||^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} | < x, Te_n > |^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < T^*x, e_n > |^2 = ||T^*x||^2.$$

Então,

$$||K^*x|| \leq A^{-1}||T^*x||, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Desse modo, valendo a condição (ii) do Teorema de Douglas, temos que existe um operador linear e limitado $M : \mathcal{H} \to \ell^2$ tal que $K = TM$. Consideremos a sequência de funcionais

$$F_n : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto F_n(x) = (Mx)_n,$$

onde $(Mx)_n$ é o n-ésimo termo da sequência Mx. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$, F_n está bem definido e

$$|F_n(x)| = |(Mx)_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(Mx)_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = ||Mx|| \leq ||M|| \, ||x||, \; x \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{N}.$$

Segue do Teorema da Representação de Riesz que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $g_n \in \mathcal{H}$ tal que $F_n(x) = < x, g_n >$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Daí,

$$Kx = TMx = T(\{F_n(x)\}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) f_n = \sum_{n=1}^{\infty} < x, g_n > f_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < x, g_n > |^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |F_n(x)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(Mx)_n|^2 = ||Mx||^2 \leq ||M||^2 \, ||x||^2, \; \forall x \in \mathcal{H}.$$

Portanto, $\{g_n\}_n$ é uma sequência de Bessel.

(3) $\Rightarrow$ **(1)** Seja $\{f_n\}_n \subseteq \mathcal{H}$ e suponhamos **(3)**. Como $\{f_n\}_n$ é uma sequência de Bessel, a primeira exigência da Definição 4.1.3 já está satisfeita. Além disso, por hipótese,

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} < x, g_n > f_n.$$

Isso nos leva a tomar, para cada $x \in \mathcal{H}$, a sequência $a_x = \{< x, g_n >\}_n$. Como $\{g_n\}_n$ é uma sequência de Bessel, vem que existe $B > 0$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} | < x, g_n > |^2 \leq B||x||^2$ e isso mostra que $a_x \in \ell^2$ e $||a_x|| \leq \sqrt{B}||x||$. Assim $\{f_n\}_n$ é um sistema atômico para K. □

Definição 4.1.4. *Seja $K \in B(\mathcal{H})$. Diremos que $\{f_n\}_n$ é um K-frame para $\mathcal{H}$ se existem constantes*

$A, B > 0$ tais que

$$A||K^* x||^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} | < x, f_n > |^2 \leq B||x||^2, \; \forall x \in \mathcal{H}.$$

O seguinte resultado é uma caracterização de K-frames através de operadores limitados.

Teorema 4.1.3. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável, $K \in B(\mathcal{H})$ e $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma base ortonormal para ℓ^2. Então, $\{f_n\}_n$ é um K-frame se, e somente se, existe um operador linear limitado $L : \ell^2 \to \mathcal{H}$ tal que $f_n = Le_n$ e $\mathcal{R}(K) \subseteq \mathcal{R}(L)$.*

Demonstração. Suponhamos que $\{f_n\}_n$ é um K-frame e consideremos a aplicação

$$S : \mathcal{H} \to \ell^2$$
$$x \mapsto S(x) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} < x, f_n > e_n.$$

Note que S está bem definida, é linear e limitada, pois

$$||Sx||^2 = ||\sum_{n=1}^{\infty} < x, f_n > e_n||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, f_n > |^2 \leq B||x||^2,$$

onde a última desigualdade segue da definição de K-frame. Além disso, sendo $S^* : \ell^2 \to \mathcal{H}$, temos que $S^*(e_n) = f_n$, $n \in \mathbb{N}$, pois para $y \in \ell^2$

$$< S^* e_n, y > = < e_n, Sy > = < e_n, \sum_{j=1}^{\infty} < y, f_j > e_j > = \overline{< y, f_n >} = < f_n, y > .$$

Logo, $S^*(e_n) = f_n$. Da hipótese de $\{f_n\}_n$ ser K-frame existe $A > 0$ tal que

$$A||K^* x||^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} | < x, f_n > |^2.$$

E, pelo que mostramos,

$$||S(x)||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, f_n > |^2, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Resulta que

$$A||K^* x||^2 \leq ||S(x)||^2,$$

e consequentemente, $||K^* x|| \leq A^{-1}||L^* x||$ para todo $x \in \mathcal{H}$, onde $L = S^*$. Pelo Teorema de Douglas,

$$\mathcal{R}(K) \subseteq \mathcal{R}(L).$$

Reciprocamente, seja $L : \ell^2 \to \mathcal{H}$ um operador linear e limitado, e suponha que $f_n = Le_n$ e $\mathcal{R}(K) \subseteq \mathcal{R}(L)$. Temos que $L^* : \mathcal{H} \to \ell^2$ é dado por

$$L^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} < x, f_n > e_n.$$

De fato, para $g \in \ell^2$,

$$< L^*x, g > = < L^*x, \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n > = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n} < L^*x, e_n > = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n} < x, Le_n >$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{< g, e_n >} < x, f_n > = \sum_{n=1}^{\infty} < e_n, g >< x, f_n >$$
$$= < \sum_{n=1}^{\infty} < x, f_n > e_n, g >.$$

Notemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < x, f_n > |^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, Le_n > |^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < L^*x, e_n > |^2 = ||L^*x||^2 \leq ||L^*||^2 ||x||^2,$$

ou seja, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Bessel. Como $\mathcal{R}(K) \subseteq \mathcal{R}(L)$, usando o Teorema de Douglas, temos que existe uma constante $A > 0$ tal que $||K^*x|| \leq A^{-1}||L^*x||$. Segue que

$$A||K^*x||^2 \leq ||L^*x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, f_n > |^2 \leq ||L^*||^2 ||x||^2, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

□

4.2 Famílias de átomos locais

Apresentaremos agora uma relação entre os resultados anteriores sobre sistemas atômicos e uma nova família de sistemas de análise e síntese para um subespaço fechado H_0 de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Os problemas que surgem na teoria da amostragem motiva o estudo desses sistemas, que diferentemente dos frames, não necessariamente pertencem a H_0. Provaremos que uma família de átomos local para H_0 é um P_{H_0}-frame, onde P_{H_0} é projeção ortogonal sobre H_0.

Definição 4.2.1. *Seja $\{f_n\}_n$ uma sequência de Bessel em $\mathcal{H}$ e H_0 um subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Chamaremos $\{f_n\}_n$ de uma família de átomos local para H_0 se existe uma sequência de funcionais lineares $\{c_n\}_n$ tal que*
(i) Existe $C > 0$ com $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 \leq C||x||^2$;
(ii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) f_n$, para todo $x \in H_0$.
Diremos que o par $\{f_n, c_n\}_n$ fornece uma decomposição atômica para H_0 e C é um limite atômico de $\{f_n\}_n$.

Usando o Teorema 4.1.2 e o Teorema 4.1.3 obtemos caracterizações de famílias de átomos locais.

Teorema 4.2.1. *Seja $\mathcal{H}$ uma espaço de Hilbert separável e $\{f_n\}_n \subseteq \mathcal{H}$ uma sequência de Bessel. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *$\{f_n\}_n$ é uma família de átomos local para H_0;*

(2) *$\{f_n\}_n$ é um sistema atômico para P_{H_0};*

(3) *Existe $A > 0$ tal que*

$$A||P_{H_0}x||^2 \leq \sum_n |< x, f_n >|^2, \ \forall x \in \mathcal{H};$$

(4) *Existe uma sequência de Bessel $\{g_n\}_n$ em $\mathcal{H}$ tal que*

$$P_{H_0}x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, g_n > f_n, \ x \in X;$$

(5) *Existe um operador linear limitado $L : \ell^2 \to \mathcal{H}$ tal que $f_n = Le_n$ e $H_0 \subseteq \mathcal{R}(L)$, onde $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal para ℓ^2.*

Demonstração. **(1)** $\Rightarrow$ **(2)** Imediata.

(2) $\Leftrightarrow$ **(3)** $\Leftrightarrow$ **(4)** Segue do Teorema 4.1.2.

(4) $\Rightarrow$ **(1)** Seja $x \in H_0$ e de (iv) segue que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, g_n > f_n.$$

Denotando $c_n(x) \ = < x, g_n >$ temos que existe $B > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< x, g_n >|^2 \leq B||x||^2$$

pois $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Bessel e c_n são funcionais lineares em H_0.

(2) $\Leftrightarrow$ **(5)** Segue do Teorema 4.1.2 e do Teorema 4.1.3. $\square$

Capítulo 5

Operadores Quociente

O conceito de quociente, um dos mais antigos da Matemática, se revela presente em inúmeros de seus ramos, passando pelas lições de Euclides para a definição da divisão euclidiana e alcançando a Matemática abstrata, quando utilizado para descrever espaços cujos elementos são classes de equivalência concernente à alguma relação de equivalência.

Em 1978, Kaufman [15] introduziu os operadores quociente com o objetivo de estender a classe de todos os operadores fechados em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Tais operadores tem sido estudados em diversas áreas, como por exemplo, na teoria espectral de operadores fechados e na resolução de equações diferenciais abstratas e equações diferenciais parciais.

Em [1], Abdellah apresenta uma condição necessária para a existência do quociente entre dois operadores lineares limitados em um espaço de Hilbert. Esta condição se relaciona com o conceito de gráfico de um operador linear. Fundamentado em [2], usaremos o Teorema de Douglas para caracterizar os operadores quociente limitados e estudaremos os operadores quociente compactos e de Fredholm.

5.1 Operador Quociente Limitado

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T, S \in B(\mathcal{H})$. Denotaremos por $G(S, T)$ o subespaço de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dado por

$$G(S, T) = \{(Su, Tu) \mid u \in \mathcal{H}\}.$$

Temos que $G(S,T)$ é gráfico de um operador linear definido em $\mathcal{R}(S)$ se, e somente se, $\mathcal{N}(S) \subseteq \mathcal{N}(T)$. Se $G(S,T)$ é gráfico, denotemos por F o operador linear tal que $G(F) = G(S,T)$. Portanto, F será a aplicação

$$Su \to Tu, \forall u \in \mathcal{H},$$

ou seja, $Tu = FSu$, para todo $u \in \mathcal{H}$. Isso nos conduz à seguinte definição:

Definição 5.1.1. *Sejam T e S dois operadores limitados em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{N}(S) \subseteq \mathcal{N}(T)$. Chamamos de operador quociente T por S e denotamos por T/S, a aplicação*

$$Su \mapsto Tu, u \in \mathcal{H}.$$

Observação 5.1.1. *Os subespaços $\mathcal{R}(S)$, $\mathcal{R}(T)$ e $G(S,T)$ são o domínio, a imagem e o gráfico de T/S, respectivamente.*

Observação 5.1.2. *O quociente de dois operadores limitados, não é necessariamente um operador limitado. De fato, seja $A \in B(\mathcal{H})$ um operador injetor tal que $\mathcal{R}(A)$ não é fechado no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Temos que $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(I)$. O operador quociente I/A não é limitado, pois se fosse limitado existiria $C > 0$ tal que*

$$\left|\left|(I/A)(Ax)\right|\right| \leq C||Ax||, \ \forall x \in \mathcal{H},$$

isto é,

$$||x|| = ||Ix|| \leq C||Ax||, \forall x \in \mathcal{H}.$$

Logo, pela Proposição 1.0.9, $\mathcal{R}(A)$ é fechado em $\mathcal{H}$, o que é uma contradição.

A partir do Teorema de Douglas, obtemos o seguinte resultado para um operador quociente T/S:

Proposição 5.1.1. *O operador T/S é limitado se, e somente se, $\mathcal{R}(T^*) \subseteq \mathcal{R}(S^*)$.*

Demonstração. Suponhamos T/S limitado. Logo, existe $M > 0$ tal que

$$||(T/S)x|| \leq M||x||, \ \forall x \in \mathcal{D}(T/S) = \mathcal{R}(S).$$

Equivalentemente, $||(T/S)Su|| \leq M||Su|| \Rightarrow ||Tu|| \leq \mathrm{M}||Su||$, para todo $u \in \mathcal{H}$ e assim, S majora T. Pelo Teorema de Douglas $\mathcal{R}(T^*) \subseteq \mathcal{R}(S^*)$. Reciprocamente, se $\mathcal{R}(T^*) \subseteq \mathcal{R}(S^*)$, então S majora T e pelo Teorema de Douglas existe um operador limitado V^* em $\mathcal{H}$ tal que

$$T^* = S^*V^*.$$

Segue que

$$T = VS,$$

onde $V = (V^*)^*$ e V é uma extensão limitada de T/S. Portanto, T/S é limitado em $\mathcal{H}$. □

Já vimos que se $\mathcal{R}(T^*) \subseteq \mathcal{R}(S^*)$, então $\mathcal{N}(S) \subseteq \mathcal{N}(T)$. Utilizando a Proposição 2.1.2 e o Teorema de Douglas, temos uma recíproca para essa afirmação.

Proposição 5.1.2. *Sejam T e S operadores limitados em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{R}(S)$ é fechado e $\mathcal{N}(S) \subseteq \mathcal{N}(T)$. Então $\mathcal{R}(T^*) \subseteq \mathcal{R}(S^*)$.*

Teorema 5.1.1. *Se T/S é um operador quociente com domínio fechado, isto é, $\mathcal{R}(S)$ fechado em $\mathcal{H}$, então T/S é limitado.*

Demonstração. Temos que $\mathcal{N}(S) \subseteq \mathcal{N}(T)$. Se $\mathcal{R}(S)$ é fechado, pela Proposição 5.1.2, $\mathcal{R}(T^*) \subseteq \mathcal{R}(S^*)$. A Proposição 5.1.1 garante que T/S é limitado. □

Notemos que esta condição é, em geral, suficiente, mas não necessária. Veja o seguinte exemplo:

Exemplo 5.1.1. *Seja*

$$\begin{aligned} A : \ell^2 &\to \ell^2 \\ \{x_j\}_j &\mapsto A(\{x_j\}) = \{\tfrac{x_j}{j}\}_j, \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ \left\{ \frac{x_j}{j} \right\}_j \mid \{x_j\}_j \in \ell^2 \right\}$$

e consideremos o operador quociente A/A. Temos que $A/A = I$ é limitado e $\mathcal{R}(A)$ não é fechado. Mostraremos que $\mathcal{R}(A)$ não contém todos os seus pontos de acumulação, ou seja, mostraremos que existe uma sequência em $\mathcal{R}(A)$ cujo limite não pertence a $\mathcal{R}(A)$.

Seja $\{y_j\}_j = \left\{\frac{1}{j}\right\}_j$. *Então* $\{y_j\}_j \in \ell^2$, *pois*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{1}{j}\right|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty$$

mas $\{y_j\}_j \notin \mathcal{R}(A)$.

De fato, se $\{y_j\}_j \in \mathcal{R}(A)$, *então existe* $\{x_j\}_j \in \ell^2$ *tal que* $\{y_j\}_j = \left\{\frac{x_j}{j}\right\}_j$, *ou seja,*

$$\frac{1}{j} = \frac{x_j}{j} \Leftrightarrow x_j = 1, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} 1$$

diverge, e portanto, $\{x_j\}_j = \{1\}_j \notin \ell_2$, *o que é uma contradição.*

Agora, tome $\{z_n\}_n \in \mathcal{R}(A)$ *dada por*

$$z_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, 0, 0, ...\right),$$

e note que

$$||z_n - L||^2 = \left|\left|\left(0, ..., 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...\right)\right|\right|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\frac{1}{j}\right|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2},$$

onde $L = \left\{\frac{1}{j}\right\}_j$. *Seja* $\varepsilon > 0$. *Então existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq N_0$

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}\right| < \varepsilon.$$

Mas note que,

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \left|\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\right| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}\right| < \varepsilon, \forall n \geq N_0.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L = \left\{\frac{1}{j}\right\}_j,$$

o que mostra que $\mathcal{R}(A)$ *não é fechado.*

Proposição 5.1.3. *Seja T/S um operador quociente limitado tal que $\mathcal{R}(T)$ é fechado em $\mathcal{H}$ e $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(S)$. Então $\mathcal{R}(S)$ é fechado em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Pela Proposição 5.1.1, $\mathcal{R}(T^*) \subseteq \mathcal{R}(S^*)$. Assim, segue do Teorema de Douglas que S majora T, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ tal que

$$||Tx|| \leq \lambda ||Sx||, \forall x \in \mathcal{H}.$$

Pela Proposição 2.1.3 , $\mathcal{R}(S)$ é fechado em $\mathcal{H}$. □

Teorema 5.1.2. *Seja T/S um operador quociente em $\mathcal{H}$.*
(1) *Se $\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(T)$, então T/S é invertível e $(T/S)^{-1} = S/T$.*
(2) *Se $\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{R}(T)$ é fechado em $\mathcal{H}$, então T/S tem uma inversa limitada S/T.*

Demonstração. **(1)** Como $\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(T)$, temos que $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(S)$. Logo, fica bem definido o operador quociente S/T:

$$Ty \mapsto (S/T)(Ty) = Sy, \ y \in \mathcal{H}.$$

Como $\mathcal{R}(T/S) \subseteq \mathcal{D}(S/T) = \mathcal{R}(T)$ e $\mathcal{R}(S/T) \subseteq \mathcal{D}(T/S) = \mathcal{R}(S)$ ficam bem definidas as composições

$$\begin{aligned}(S/T)(T/S) : \mathcal{D}(T/S) = \mathcal{R}(S) &\rightarrow \mathcal{R}(S/T)\\ Sx &\mapsto (S/T)(T/S)Sx = (S/T)Tx = Sx\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(T/S)(S/T) : \mathcal{D}(S/T) = \mathcal{R}(T) &\rightarrow \mathcal{R}(T/S)\\ Ty &\mapsto (T/S)(S/T)Ty = (T/S)Sy = Ty.\end{aligned}$$

(2) Segue do item anterior e do Teorema 5.1.1. □

5.2 Operador Quociente Compacto e de Fredholm

Teorema 5.2.1. *Sejam $S, T \in B(\mathcal{H})$ tais que $\mathcal{N}(S) \subseteq \mathcal{N}(T)$. Se o operador quociente T/S é compacto, então T é compacto.*

Demonstração. Suponhamos que T/S é compacto e seja $\{x_n\}_n$ uma sequência limitada em $\mathcal{H}$. Segue que $\{(T/S)Sx_n\}_n$ possui subsequência convergente em $\mathcal{H}$. Mas, notemos que

$$\{(T/S)Sx_n\}_n = \{Tx_n\}_n.$$

Logo, T é compacto. □

A recíproca do teorema anterior não é verdadeira. Considere, por exemplo, o operador compacto A definido no Exemplo 5.1.1 da Seção 5.1. Temos que o operador quociente $A/A = I$ não é um operador compacto já que $\dim\mathcal{R}(A) = \infty$. Mostra-se também com esse exemplo que se T é compacto, mas $\mathcal{R}(S)$ não é fechado, então T/S não é necessariamente compacto.

Teorema 5.2.2. *Sejam $S, T \in B(\mathcal{H})$ tais que $\mathcal{N}(S) \subseteq \mathcal{N}(T)$. Se T é compacto, S injetor e $\mathcal{R}(S)$ é fechado em $\mathcal{H}$, então o operador quociente T/S é compacto.*

Demonstração. Seja $\{Sx_n\}_n$ uma sequência limitada em $\mathcal{D}(T/S)$. Pela Proposição 1.0.9, $\{x_n\}_n$ é uma sequência limitada em $\mathcal{H}$, e já que T é compacto, $\{Tx_n\}_n$ tem subsequência convergente. Como

$$(T/S)(\{Sx_n\}_n) = \{Tx_n\}_n,$$

temos que o operador quociente (T/S) é compacto. □

Corolário 5.2.1. *Sejam $S, T \in B(\mathcal{H})$ tais que $\mathcal{N}(S) \subseteq \mathcal{N}(T)$. Se T é compacto, S é injetor e $\mathcal{R}(S)$ tem dimensão finita, então o operador quociente T/S é compacto.*

Demonstração. Temos que $\mathcal{R}(S)$ é fechado, já que $\dim\mathcal{R}(S) < \infty$. Portanto, o resultado segue do Teorema 5.2.2. □

Definição 5.2.1. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Um operador $T \in B(\mathcal{H})$ é dito um operador de Fredholm se satisfaz as seguintes condições:*
(i) $\mathcal{R}(T)$ é fechado em $\mathcal{H}$;
(ii) $\dim\mathcal{N}(T) < \infty$;
(iii) $\dim\mathcal{H}/\mathcal{R}(T) < \infty$.

Teorema 5.2.3. *Sejam $S, T \in B(\mathcal{H})$. Se T é um operador de Fredholm, então o operador quociente T/S é Fredholm.*

Demonstração. Como T é um operador de Fredholm, temos que $\mathcal{R}(T)$ é fechado em $\mathcal{H}$, $\dim \mathcal{N}(T) < \infty$ e $\dim \mathcal{H}/\mathcal{R}(T) < \infty$. Logo, usando o fato de que

$$\mathcal{R}(T/S) = \mathcal{R}(T)$$

e

$$\mathcal{N}(T/S) = \{Su \mid u \in \mathcal{N}(T)\},$$

concluímos que T/S é Fredholm. $\square$

Exemplo 5.2.1. *Considere os operadores lineares limitados $S : \ell^2 \to \ell^2$ e $T : \ell^2 \to \ell^2$, definidos por*

$$S(\{x_j\}_j) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$$

e

$$T(\{x_j\}_j) = (x_2, x_3, x_4, ...),$$

respectivamente. Sendo S injetor e

$$\mathcal{N}(T) = \{\{x_j\}_j \in \ell^2 \mid x_j = 0, \ \forall j \geq 2\}$$

podemos definir o operador quociente

$$(T/S)(0, x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...).$$

Como T é um operador de Fredholm, segue do Teorema 5.2.3 que T/S é Fredholm. Note que

$$\mathcal{R}(T/S) = \ell^2$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T/S) &= \{\{w_j\}_j \in \mathcal{R}(S) \mid (T/S)\{w_j\}_j = \{0\}_j\} \\
&= \{(0, x_1, x_2, x_3, ...) \in \mathcal{R}(S) \mid (T/S)(0, x_1, x_2, x_3, ...) = (0, 0, 0, ..)\} \\
&= \{(0, x_1, x_2, x_3, ...) \in \mathcal{R}(S) \mid (x_2, x_3, x_4, ...) = (0, 0, 0, ...)\} \\
&= \{(0, x_1, 0, 0, ...) \mid x_1 \in \mathbb{K}\}.
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] A. Gherbi, *Quotient des opérateurs bornés extension aux opérateurs non bornes et applications*, Tese, Université d'Oran, Algeria, 2010.

[2] A. Gherbi, B. Messirdi and M. Benharrat, *Quotient operators: new generation of linear operators*, Functional Analysis, Approximation and Computation 7 (1) (2015), 85-93.

[3] B. A. Barnes, *Majorization, range inclusion and factorization for bounded linear operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2004), 155-162.

[4] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, SBM, 2015.

[5] S. Caradus, W. Pfaffenberger and B. Yood, *Calkin Algebras of Operators on Banach Spaces* Lecture Notes in Pure and Applied Math. V.9, Marcel Dekker, New York, 1974.

[6] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhauser, 2003.

[7] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, New York, 1990.

[8] I. Daubechies, A. Grossmann, Y. Meyer, *Painless nonorthogonal expansions*, J. Math. Phys. 27 (1986), 1271-1283.

[9] R. G. Douglas, *On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 413-415.

[10] J. Duffin, A. C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 341-366.

[11] M. R. Embry, *Factorization of operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 587-590.

[12] M. Forough, *Majorization, range inclusion, and factorization for unbounded operators on Banach spaces*, Linear Algebra and Applications 449 (2014), 60-67.

[13] L. Gavruta, *Frames for operators*, Applied and Computacional Harmonic Analysis 32 (2012), 139-144.

[14] S. Goldberg, *Unbounded Linear Operators*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[15] W. E. Kaufman, *Representing a closed operator as a quotient of continuous operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 531-534.

[16] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New Jersey, 1989.

[17] J-Ph. Labrousse, *Inverses generalises d'operateurs non bornes*, Proc. Amer. Math. Soc. 115 (1992), 125-129.

[18] C. R. Oliveira, *Introdução à Análise Funcional*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.