

Diogo Leonardo Ferreira da Silva

**Uma nova perspectiva sobre a parametrização
da malha objetivo para o controle \mathcal{H}_∞ /LTR**

Itajubá - MG

Março de 2017

Diogo Leonardo Ferreira da Silva

**Uma nova perspectiva sobre a parametrização
da malha objetivo para o controle \mathcal{H}_∞ /LTR**

Tese submetida ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Ciências em Engenharia Elétrica.

Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI

Instituto de Engenharia de Sistemas e Tecnologia da Informação – IESTI

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Orientador: Luís Henrique de Carvalho Ferreira

Coorientador: Caio Fernandes de Paula

Itajubá - MG

Março de 2017

Agradecimentos

Agradeço inicialmente à minha família que sempre me deu todo o apoio necessário ao longo dessa longa trajetória. À família de minha esposa que sempre me tratou como se fosse um membro. Agradeço também aos meus amigos, que sempre estiveram ao meu lado e me dando apoio, seja aqui em Itajubá ou de longe via internet, mas sei que todos sempre me deram o suporte necessário. Nominalmente aos meus amigos Fadul e Fernando Henrique que vivenciaram todo o processo da pós-graduação dando forças em todos os momentos. Ao professor Karl Heinz Kienitz que participou da banca de qualificação e contribuiu para a versão final deste trabalho.

À minha esposa Gabriela que esteve comigo em todos os momentos, nos bons e também nos ruins, mas sempre com um sorriso no rosto e disposta a ajudar. Agradeço também aos meus colegas de grupo, que ao longo dos anos deixaram de ser apenas colegas e também se tornaram amigos, assim como todos os professores do grupo.

Ao professor Luís Henrique, mais do que meu orientador, um amigo que me depositou confiança e me deu todo o apoio desde o início, sempre com muita boa vontade e paciência. Agradeço também ao Caio, amigo desde a época de graduação, que me ajudou muito durante o mestrado e doutorado e agora, como professor da instituição também é o coorientador desse trabalho.

Por fim, agradeço à CAPES que através do programa “Demanda Social” viabilizou a realização do trabalho e a oportunidade de realizar um período sanduíche na *University of Tennessee, Knoxville* - EUA entre agosto de 2015 e agosto de 2016 através do Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior (PDSE), e também à FAPEMIG que além do apoio via programa “Demanda Social” também forneceu o suporte financeiro ao projeto de pesquisa APQ-03340-11 – Princípio de recuperação da malha aplicado ao controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ : um estudo de caso em um helicóptero de dois graus de liberdade.

“Se é difícil lembrar, vai ser difícil esquecer.”
(Arnold Schwarzenegger)

Resumo

Neste trabalho de tese é apresentada uma nova abordagem sobre a parametrização da malha objetivo para o controle \mathcal{H}_∞ /LTR. O procedimento proposto, o qual baseia-se em uma transformação de similaridade, permite a obtenção de um comportamento de um sistema de primeira ordem, através de uma formatação particular da sensibilidade da malha objetivo em termos de valores singulares. Além disso, a metodologia proposta torna possível expandir o modelo da planta de processo para qualquer o polo real finito estável, e não apenas para um polo na origem como nos procedimentos clássicos de parametrização da malha objetivo. Assim, a metodologia proposta tem grande potencial para aplicações de controle baseadas em recuperação da malha objetivo em que o uso de integradores na malha aberta é indesejável ou até mesmo proibitivo. Propriedades adicionais são obtidas se o modelo de planta projeto não tem polos no semiplano à direita. Como o controle \mathcal{H}_∞ /LTR pode ser visto como uma generalização do conhecido controle LQG/LTR, a metodologia proposta neste trabalho para formatar a malha objetivo pode ser devidamente estendida para o controle LQG/LTR.

Palavras-chaves: Parametrização da malha objetivo. Recuperação da malha objetivo. Controle \mathcal{H}_∞ /LTR. Controle LQG/LTR.

Abstract

In this thesis, a new approach on the Target Feedback Loop (TFL) parameterization for the \mathcal{H}_∞ /LTR control is presented. The proposed procedure, which is based on a similarity transformation, allows to obtain a first-order system behavior through a particular shaping of the TFL sensitivity in terms of singular values. Furthermore, the proposed methodology makes possible to augment the design plant model with any stable real-finite pole, and not only a pole at the origin, as classical TFL parameterization procedures suggest. Thus, the proposed methodology should gather great attention by LTR-based control applications in which the use of integrators in the open-loop is undesirable or even prohibitive. Additional properties are derived if the design plant model does not have poles at the open right-half plane. Since \mathcal{H}_∞ /LTR control can be viewed as a generalization of well-known LQG/LTR control, the proposed methodology in this paper to shape the TFL can be properly extended to the LQG/LTR control.

Key-words: Target feedback loop parameterization. loop transfer recovery. \mathcal{H}_∞ /LTR control. LQG/LTR control.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama de blocos geral para sistemas de controle.	23
Figura 2 – Diagrama de blocos do sistema realimentado.	25
Figura 3 – Diagrama de blocos do sistema expandido pela entrada.	31
Figura 4 – Diagrama de blocos da planta $G(s)$ expandida pela saída.	33
Figura 5 – Diagrama de blocos do sistema expandido pela saída.	42
Figura 6 – Diagrama de blocos da planta $G(s)$ expandida pela entrada.	44
Figura 7 – Caça F8 utilizado pela NASA.	52
Figura 8 – Gráfico da sensibilidade para o modelo do avião F8.	54
Figura 9 – Gráfico da resposta a um degrau unitário aplicado em ambas as entradas de comando do caça F8.	55
Figura 10 – Boeing CH-47 Chinook.	56
Figura 11 – Gráfico dos valores singulares de sensibilidade para o helicóptero CH-47 Chinook.	58
Figura 12 – Gráfico da resposta para um degrau unitário aplicado a ambas as entradas de comando para o helicóptero CH-47 Chinook.	59
Figura 13 – Helicóptero em escala reduzida com dois graus de liberdade.	60
Figura 14 – Gráfico dos valores singulares de sensibilidade do helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida.	62
Figura 15 – Gráfico da resposta temporal a um degrau unitário aplicado a ambas as entradas da planta do helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida.	63

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resumo das características do modelo do avião F8	53
Tabela 2 – Parâmetros utilizados para o modelo do avião F8	53
Tabela 3 – Resumo das características do modelo do helicóptero CH-47 Chinook .	57
Tabela 4 – Parâmetros utilizados para o modelo do helicóptero CH-47 Chinook . .	58
Tabela 5 – Resumo das características do modelo do helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida	61
Tabela 6 – Parâmetros utilizados para o modelo do helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida	62

Lista de símbolos

\mathcal{H}_∞	Norma \mathcal{H}_∞
\mathcal{H}_2	Norma \mathcal{H}_2
P	Planta generalizada específica
A, B, C, D	Matrizes do modelo em Variáveis de estado da planta G
\triangleq	Igual por definição
$:=$	Definição
$\stackrel{s}{=}$	Transformada de Laplace
T	Matriz transposta
$*$	Matriz complexo-conjugada transposta
G	Planta G
K	Controlador
r	Vetor de referência
u	Vetor de entrada da planta de processo
d	Vetor de distúrbio
y	Vetor de saída da planta de processo
\mathcal{S}	Função de sensibilidade
\mathcal{T}	Função de rastreamento
w	Vetor dos sinais das entradas exógenas
z	Vetor das variáveis de resposta auxiliares
$\mathcal{T}_{zw}(s)$	Matriz de transferência de w para z
x	Vetor de estados
X	Matriz solução da retroação de estados
Y	Matriz solução do observador de estados

K_C	Matriz de ganhos da retroação de estados
K_F	Matriz de ganhos do observador de estados
G_P	Planta de processo
U	Matriz de similaridade
L	Matriz de parametrização para o LTR de saída
H	Matriz de parametrização para o LTR de entrada

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
	Introdução	19
1.1	Considerações gerais	19
1.2	Justificativas	20
1.3	Objetivos	21
1.4	Estrutura do trabalho	21
2	O CONTROLE \mathcal{H}_∞/LTR	23
2.1	Considerações gerais	23
2.2	O controle \mathcal{H}_∞ via princípio de recuperação da malha objetivo	24
2.3	O controle \mathcal{H}_∞ /LTR pela entrada	28
3	A NOVA PARAMETRIZAÇÃO DA MALHA OBJETIVO	31
3.1	Considerações gerais	31
3.2	A atribuição da matriz L	31
3.2.1	Comparação com a atribuição de Athans	37
3.3	Propriedades para uma planta de processo estável em malha aberta expandida pela saída	38
3.4	A atribuição da matriz H	42
3.5	Propriedades para uma planta de processo estável em malha aberta expandida pela entrada	46
4	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	51
4.1	Considerações gerais	51
4.2	Avião F8	51
4.3	Helicóptero CH-47 Chinook	56
4.4	Helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida	60
5	CONCLUSÃO	65
	Conclusão	65

APÊNDICES	67
APÊNDICE A – CÓDIGO DESENVOLVIDO NO MATLAB[®] PARA O AVIÃO F8	69
APÊNDICE B – CÓDIGO DESENVOLVIDO NO MATLAB[®] PARA O HELICÓPTERO CH-47 CHINOOK	73
APÊNDICE C – CÓDIGO DESENVOLVIDO NO MATLAB[®] PARA O HELICÓPTERO EM ESCALA REDUZIDA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE	77
APÊNDICE D – ARTIGOS PUBLICADOS	81
REFERÊNCIAS	83
ANEXOS	87
ANEXO A – O COMPLEMENTO DE SCHUR	89

1 Introdução

1.1 Considerações gerais

Em 1987, Stein e Athans analisaram o controle LQG/LTR (Linear Quadrático Gaussiano com recuperação da malha objetivo) e ressaltaram que engenheiros de controle necessitavam de procedimentos sistemáticos de projeto para o desenvolvimento de sistemas de controle realimentados tanto para sistemas SISO (*Single-Input Single-Output*) e MIMO (*Multi-Input Multi-Output*) (STEIN; ATHANS, 1987). Neste sentido, recentemente, de Paula e Ferreira (PAULA; FERREIRA, 2011) mostraram que o processo de recuperação da malha objetivo também é possível de ser aplicado à síntese \mathcal{H}_∞ . O controle \mathcal{H}_∞ /LTR apresenta um grau a mais de liberdade na formatação da malha, o que permite limitar o valor singular máximo da sensibilidade complementar da malha objetivo de tal maneira que não é possível no controle LQG/LTR. Esta ferramenta adicional é interessante uma vez que o *overshoot* do sistema de controle está diretamente relacionado com o valor máximo singular da sensibilidade complementar (ou magnitude máxima para sistemas SISO) (OGATA, 2009).

Para sínteses com base no princípio de recuperação da malha objetivo, um bom desempenho significa escolher uma forma apropriada para a malha objetivo. Isso é realizado principalmente por meio da formatação dos limitantes dos valores singulares das matrizes de transferência em malha fechada, como as matrizes de sensibilidade e sensibilidade complementar. Este procedimento de formatação com limitantes é um conceito eficiente e robusto de formatação da malha objetivo (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005), especialmente para sistemas MIMO. No entanto, as equações que produzem os limites da sensibilidade e sensibilidade complementar tanto para o controle LQG/LTR quanto para o \mathcal{H}_∞ /LTR não mostram os formatos desejados para essas matrizes de transferência de malha fechada por si mesmas. Geralmente, entradas exógenas, como os sinais de distúrbio, de comando e de ruído, possuem espectros diferentes. Sinais de distúrbio normalmente ocorrem em baixas frequências, enquanto os sinais de ruído ocorrem em frequências mais elevadas. Uma vez que o distúrbio está relacionado com a função de sensibilidade e os sinais de comando e de ruído estão relacionados com a sensibilidade complementar, o formato das matrizes de transferência em malha fechada deve indicar que:

- o limitante relacionado à função de sensibilidade deve ser pequeno em baixas frequências, a fim de minimizar as perturbações, tais como variações de parâmetros ou perturbações externas e também os distúrbios;
- o limitante relacionado à função de sensibilidade complementar deve ser pequeno em

altas frequências, a fim de minimizar o ruído de medição, mas deve ser igual ao valor unitário em baixas frequências, a fim de rastrear sinais de comando e minimizar o *overshoot* do sistema ao se aplicar entradas do tipo degrau.

1.2 Justificativas

Como mencionado anteriormente, as equações que fornecem os limitantes de sensibilidade e sensibilidade complementar, embora mostrem uma estrutura interessante, não indicam claramente como formatar as matrizes de transferência em malha fechada na forma desejada. Explorando a estrutura dessas equações, quando o controle LQG/LTR surgiu, Athans (1986) sugeriu expandir a malha aberta com integradores. Através de uma matriz de particionamento conveniente na forma de um dos parâmetros de projeto, mostrou como atribuir os outros parâmetros de projeto para atingir os formatos desejados em baixas e altas frequências (ATHANS, 1986). No entanto, não fez esta proposição como um procedimento formal, mas como algumas indicações ou sugestões, para parametrizar a malha objetivo. Essas sugestões de Athans possuem algumas desvantagens, pois elas são limitadas em expandir a malha aberta com integradores e não são possíveis de ser utilizadas se a planta de processo possuir um polo na origem ou se a matriz pseudo inversa não existir. Mesmo com essa limitação, essas sugestões são populares e têm sido utilizadas com sucesso ao longo dos anos em aplicações de controle LQG/LTR (ZHANG; FREUDENBERG, 1990), (TZOU; WU, 1995).

O'Dell e Misawa (1995) mostraram um procedimento para parametrizar a malha objetivo a fim de atingir o formato desejado das matrizes em malha fechada para todas as frequências. Esta metodologia proposta superou o problema da pseudo-inversa, mas é ainda limitada pela inserção de um integrador na malha aberta e a planta de processo ainda não poderia ter um ou mais polos na origem. A necessidade de inserir integradores na malha aberta pode constituir um problema para algumas aplicações, pois é conhecido que o compensador com essa expansão ocasionará um sinal de comando com grande magnitude em baixas frequências (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

Como mostrado em Skogestad e Postlethwaite (2005), a recuperação da malha objetivo é uma abordagem clássica na concepção de sistemas de controle multivariáveis robustos, desde sua proposição até o advento do próprio controle robusto (DOYLE; STEIN, 1981). Essa abordagem despertou a atenção e interesse dos pesquisadores, principalmente nos anos 80 e 90, e ainda tem sido estudada, adaptada e melhorada para uma classe diferente de problemas que surgem na teoria de controle (ISHIHARA; GUO, 2008; ISHIHARA; GUO; TAKEDA, 2005; RAVANBOD; NOLL; APKARIAN, 2012; MATOS; SOUZA; SOUZA, 2008; WISE; LAVRETSKY, 2012) e usada em uma ampla gama de aplicações, tais como sistemas aeroespaciais (ZAREI et al., 2007; KULCSÁR, 2000; TSAI, 2007), sistemas de

energia (ZOLOTAS et al., 2007), servomecanismos (SUH; CHUNG; LEE, 2002) e reatores nucleares (ARAB-ALIBEIK; SETAYESHI, 2003), citando alguns casos.

1.3 Objetivos

Motivados pela semelhança entre as soluções de espaço de estado \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ em problemas de controle apresentadas por Doyle et al. (1989), Paula e Ferreira (2011) mostraram que o princípio de recuperação da malha pode ser aplicado tanto para a solução \mathcal{H}_∞ quanto para \mathcal{H}_2 (LQG). Essa generalização oferece mais um grau de liberdade, ou uma ferramenta adicional, para formatar a função de sensibilidade complementar da malha objetivo.

Como no controle LQG/LTR, a parametrização da malha objetivo é um passo importante no controle \mathcal{H}_∞ , e um esforço para dar uma solução ao problema foi apresentada em (SILVA; PAULA; FERREIRA, 2012). Assim, este trabalho tem como objetivo responder o seguinte questionamento:

É possível definir uma metodologia sistemática para a obtenção do parâmetro L da parametrização dos controles \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ ? E, se sim, quais propriedades podem ser obtidas dessa metodologia proposta?

1.4 Estrutura do trabalho

Este trabalho de tese está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta um breve resumo sobre o controle \mathcal{H}_∞ /LTR. No Capítulo 3 a parametrização da malha objetivo proposta é apresentada, resumindo os resultados de (SILVA; PAULA; FERREIRA, 2012), bem como desenvolvendo novas propriedades para plantas estáveis em malha aberta. O Capítulo 4 mostra a eficiência da metodologia proposta, através de três exemplos de aplicação, que consistem em plantas com características distintas e, por conseguinte, diferentes casos analisados. Finalmente, o Capítulo 5 é dedicado às conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 O controle \mathcal{H}_∞ /LTR

2.1 Considerações gerais

O desenvolvimento do princípio de recuperação da malha objetivo teve seu início na década de 1970, quando, baseado no trabalho de Kwakernaak e Sivan (1972), Doyle e Stein (1981) propuseram um método para recuperar a robustez do controlador LQG. Em 1981, Safonov, Laub e Hartmann (1981) concluíram que o controle LQG era um caso específico da otimização \mathcal{H}_2 ; já em 1989 Doyle et al. (1989) constataram que as otimizações \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ diferiam por apenas um parâmetro que quando tende ao infinito levava a otimização \mathcal{H}_∞ se igualar à \mathcal{H}_2 . Baseados nessas ideias, Paula e Ferreira (2011) constataram que recuperação da malha objetivo ocorria para a otimização \mathcal{H}_∞ da mesma forma que para a otimização \mathcal{H}_2 , chegando com êxito a uma nova metodologia de controle chamada então de \mathcal{H}_∞ /LTR .

O diagrama de blocos da Figura 1 ilustra o controle proposto, no qual $G(s)$ é a planta de processo, $K(s)$ é o controlador (LQG/LTR ou \mathcal{H}_∞ /LTR), r é o vetor de referência, u é o vetor de entrada da planta de processo, d é o vetor de distúrbio que incide sobre a saída e y é o vetor de saída da planta de processo.

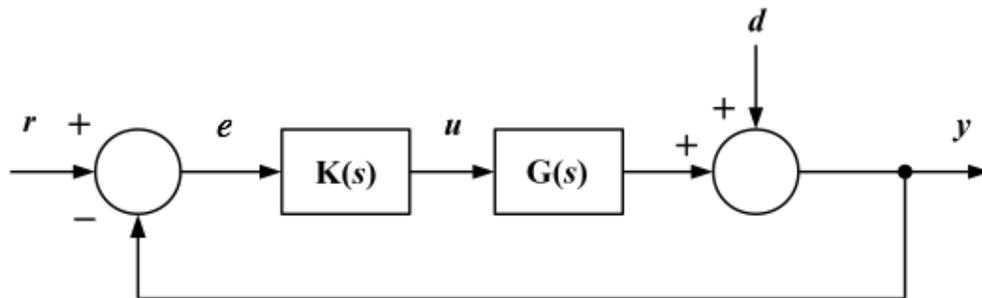


Figura 1 – Diagrama de blocos geral para sistemas de controle.

Observando a Figura 1, é importante salientar duas terminologias comuns aos sistemas de controle:

- Função de Sensibilidade – Representa a sensibilidade do sistema ao vetor de distúrbio, ou seja, é a matriz de transferência de $D(s)$ para $Y(s)$

$$\mathcal{S}(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1}. \quad (2.1)$$

- Função de Sensibilidade Complementar ou Rastreamento – Representa a sensibilidade do sistema ao vetor de referência, ou seja, é a matriz de transferência de $R(s)$ para $Y(s)$

$$\mathcal{T}(s) = G(s)K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1}. \quad (2.2)$$

O termo “complementar” da função \mathcal{T} deve-se ao fato de que $\mathcal{S} + \mathcal{T} = I$. A função de sensibilidade complementar, permite a avaliação do sistema do ponto de vista do rastreamento do sinal de referência, já a função de sensibilidade avalia o sistema do ponto de vista de rejeição a distúrbios.

Este capítulo é dedicado à apresentação das principais metodologias de controle que motivaram a elaboração do trabalho. Primeiramente é apresentada a planta generalizada e na sequência é apresentado o princípio de recuperação da malha objetivo para o controle \mathcal{H}_∞ .

2.2 O controle \mathcal{H}_∞ via princípio de recuperação da malha objetivo

Considere um sistema dinâmico linear invariante no tempo (LTI), esse sistema é descrito pelas seguintes equações de estado

$$P := \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Lw_x \\ z_x = Hx \\ z_u = \rho Iu \\ y = Cx + \mu Iw_y \end{cases}, \quad (2.3)$$

no qual x é o vetor de estado, u é o vetor de entrada de controle e y é o vetor de saída medido. As matrizes A , B e C formam uma realização no espaço de estados do que é normalmente chamado de planta de processo G , e faz-se o uso da seguinte notação

$$G := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \stackrel{s}{=} C\Phi(s)B \quad (2.4a)$$

com

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}, \quad (2.4b)$$

para expressar uma realização no espaço de estado de qualquer planta ¹. Portanto, a realização de espaço de estado do sistema dinâmico em (2.3), é

$$P := \left[\begin{array}{ccc|c} A & L & 0 & B \\ \hline H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho I \\ \hline C & 0 & \mu I & 0 \end{array} \right]. \quad (2.5)$$

P é chamada de planta generalizada, o diagrama de blocos geral que ilustra o sistema realimentado é mostrado na Figura 2, na qual K é um controlador real-racional e próprio.

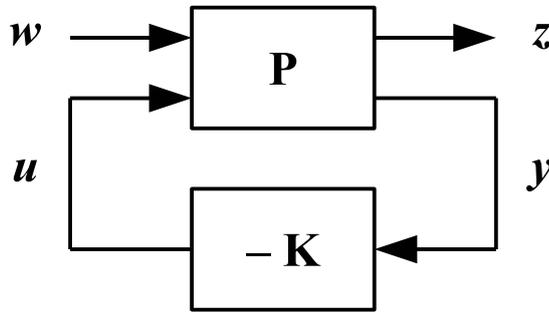


Figura 2 – Diagrama de blocos do sistema realimentado.

Os sinais w e z são, respectivamente, o vetor de entrada exógena e o vetor de resposta auxiliar ². A matriz de transferência em malha fechada resultante de w para z é denotada por $\mathcal{T}_{zw}(s)$ e é obtida a partir de uma transformação linear fracionária inferior (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

Em relação à planta generalizada P , pode ser visto que ela sempre atende à forma e suposições de ortogonalidade sobre planta generalizada feitas por Doyle *et al.* (DOYLE *et al.*, 1989). Assim, se os pares (A, B) e (A, L) são estabilizáveis e os pares (A, C) e (A, H) são detectáveis, então, a planta generalizada P em (2.5) pode ser submetida às otimizações \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ (PAULA; FERREIRA, 2011; DOYLE *et al.*, 1989). Segundo (PAULA; FERREIRA, 2011), para o caso \mathcal{H}_∞ , uma realização no espaço de estados do controlador K admissível ³ sugerida em (PAULA; FERREIRA, 2011) é dada por

$$K := \left[\begin{array}{c|c} A + \gamma^{-2}LL^T X - BK_C - ZK_F C & ZK_F \\ \hline K_C & 0 \end{array} \right], \quad (2.6a)$$

¹ Observe que $C\Phi(s)B$ denota uma matriz de transferência de u para y .

² Observe que, para a planta generalizada P tratada neste trabalho, w está convenientemente particionada em w_x e w_y . O mesmo se aplica a z , que está dividido em z_x e z_u .

³ Um controlador é dito admissível se é real-racional e próprio e faz com que a malha fechada seja internamente estável.

com

$$Z = (I - \gamma^{-2}YX)^{-1}, \quad (2.6b)$$

na qual γ é o valor da norma \mathcal{H}_∞ da matriz de transferência $\mathcal{T}_{zw}(s)$, X e Y são, respectivamente, as matrizes simétricas soluções das seguintes Equações Algébricas de Riccati Generalizadas (EARG)

$$A^T X + XA + \gamma^{-2}XLL^T X - \rho^{-2}XBB^T X + H^T H = 0 \quad (2.7a)$$

$$K_C = \rho^{-2}B^T X \quad (2.7b)$$

$$YA^T + AY + \gamma^{-2}YH^T HY - \mu^{-2}YC^T CY + LL^T = 0 \quad (2.8a)$$

$$K_F = \mu^{-2}YC^T, \quad (2.8b)$$

com K_C e K_F sendo, respectivamente, as matrizes de ganho da retroação de estados e do observador de estados.

As condições de existência do controlador em (2.6a) são de que as matrizes simétricas X e Y sejam ambas positivas semidefinidas e o raio espectral do produto XY seja estritamente menor que γ^2 (DOYLE et al., 1989). É importante notar que, quando o escalar γ tende ao infinito, o controlador \mathcal{H}_∞ em (2.6a) aproxima-se assintoticamente do controlador \mathcal{H}_2 , isto é, neste caso, se aproxima do controlador LQG (DOYLE et al., 1989). Por esta razão, a complexidade do controlador (número de polos) é o mesmo em ambos os casos.

Além disso, Paula e Ferreira (2011) mostraram que, utilizando-se a estrutura do controlador com um observador de estados, se a planta projeto G for quadrada e de fase mínima, a matriz H for feita igual à matriz C e o escalar ρ tender a zero pela direita, o LTR de saída também ocorre para a síntese \mathcal{H}_∞ assim como na LQG (PAULA; FERREIRA, 2011). Assim, a malha objetivo é dada por

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} G(s)K(s) = C\Phi(s)K_F. \quad (2.9)$$

Ou seja, a matriz de transferência em malha aberta $G(s)K(s)$ tende ao observador de estados (Filtro de Kalman) $C\Phi(s)K_F$ da estrutura LQG. Este procedimento é conhecido como LTR de saída. O LTR de saída aplicado à síntese \mathcal{H}_∞ levará a um melhor desempenho em malha fechada quando comparado com a síntese LQG devido ao grau de liberdade adicional que permite a limitação dos valores singulares da sensibilidade complementar, sendo possível reduzir o *overshoot* da resposta temporal ao degrau de

um sistema. Considerando a Identidade de Kalman Generalizada sugerida em (PAULA; FERREIRA, 2011) dada por

$$\begin{aligned} & [I + C\Phi(j\omega)K_F][I + C\Phi(j\omega)K_F]^* \\ & = I + \mu^{-2}C\Phi(j\omega)L[C\Phi(j\omega)L]^* + \gamma^{-2}\mu^2C\Phi(j\omega)K_F[C\Phi(j\omega)K_F]^* , \end{aligned} \quad (2.10)$$

que pode ser derivado da EARG em (2.8a) (PAULA; FERREIRA, 2011).

Como consequência de (2.9) e (2.10), e usando a notação em (2.1) e (2.2), os limitantes de desempenho do \mathcal{H}_∞ /LTR podem ser dados por

$$\sigma_{\max}(\mathcal{S}(j\omega)) \leq 1 \quad (2.11a)$$

$$\sigma_{\max}(\mathcal{T}(j\omega)) \leq 2 \quad (2.11b)$$

$$\sigma_{\max}(\mathcal{S}(j\omega)) \leq \mu \sigma_{\max}((C\Phi(j\omega)L)^{-1}) \quad (2.11c)$$

$$\sigma_{\max}(\mathcal{T}(j\omega)) \leq \frac{\gamma}{\mu} . \quad (2.11d)$$

Nota-se um grau de liberdade adicional na parametrização da malha objetivo é dado pelo limitante em (2.11d), que é uma ferramenta que pode ser utilizada para reduzir o *overshoot* do sistema. Os outros limitantes são os mesmos fornecidos pela teoria de controle LQG/LTR (PAULA; FERREIRA, 2011).

Assim, a escolha da matriz L e escalares μ e γ irão moldar a malha objetivo e definir o seu desempenho. Um bom desempenho pode ser alcançado se o limitante da malha objetivo for expresso pela função de sensibilidade de um simples polo real finito estável ou até mesmo na origem (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). Com base no último caso, Athans apresentou um método para a escolha da matriz L , a fim de igualar os valores singulares do limitante de sensibilidade em baixas e altas frequências, já O'Dell e Misawa apresentaram um método para igualar esses valores singulares em todo o espectro de frequência (ATHANS, 1986; O'DELL; MISAWA, 1995). Além do citado, é desejável que todos os valores singulares sejam uniformes, isto é, todos os valores singulares, do máximo para o mínimo, sejam iguais.

No entanto, pode haver situações em que o uso de um integrador é proibitivo. Assim, este trabalho propõe o desenvolvimento de um método para expandir a planta por um simples polo real-finito estável (ou até mesmo na origem), limitando a malha objetivo e a moldando em um sistema de primeira ordem padrão. Na seção seguinte, será mostrado

como alcançar as formas desejadas através de uma atribuição específica dos parâmetros L , μ e γ . Assim, este procedimento de parametrização da malha objetivo será verificado.

2.3 O controle \mathcal{H}_∞ /LTR pela entrada

Na seção anterior foi explicitado o controle \mathcal{H}_∞ /LTR, recuperando assim a matriz de transferência em malha aberta $G(s)K(s)$, fazendo com que essa matriz de transferência tenha o comportamento do observador de estados (Filtro de Kalman) projetado. Há um procedimento dual conhecido como Princípio de Recuperação da Malha Objetivo pela Entrada, no qual a planta de processo é expandida pela entrada e recupera-se a matriz de transferência em malha aberta $K(s)G(s)$, fazendo com que essa matriz de transferência tenha o comportamento da matriz de transferência do Regulador Linear Quadrático, como mostrado na equação (2.12).

Para que o procedimento ocorra na síntese \mathcal{H}_∞ , a planta G deve ser invertível pela direita, a matriz L deve ser feita igual à matriz B e o escalar μ deve tender a zero pela direita (de Paula, 2013).

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s)G(s) = K_C \Phi(s)B . \quad (2.12)$$

Considerando a Identidade de Kalman generalizada para a entrada obtida em (PAULA; FERREIRA, 2011), dada por (2.13)

$$\begin{aligned} & [I + K_C \Phi(j\omega)B]^* [I + K_C \Phi(j\omega)B] \\ & = I + \rho^{-2} [H \Phi(j\omega)B]^* [H \Phi(j\omega)B] + \rho^2 \gamma^{-2} [K_C \Phi(j\omega)B]^* [K_C \Phi(j\omega)B] , \end{aligned} \quad (2.13)$$

e considerando a função de sensibilidade de entrada $\mathcal{S}_I(s)$ e sensibilidade complementar de entrada $\mathcal{T}_I(s)$ sendo, respectivamente, definidas como

$$\mathcal{S}_I(s) = [I + K(s)G(s)]^{-1} , \quad (2.14a)$$

$$\mathcal{T}(s)_I = K(s)G(s) [I + G(s)K(s)]^{-1} , \quad (2.14b)$$

os limitantes de desempenho do controle \mathcal{H}_∞ /LTR pela entrada podem ser dados por

$$\sigma_{\max}(\mathcal{S}_I(j\omega)) \leq 1 \quad (2.15a)$$

$$\sigma_{\max}(\mathcal{T}_I(j\omega)) \leq 2 \quad (2.15b)$$

$$\sigma_{\max}(\mathcal{S}_I(j\omega)) \leq \rho \sigma_{\max}((H\Phi(j\omega)B)^{-1}) \quad (2.15c)$$

$$\sigma_{\max}(\mathcal{T}_I(j\omega)) \leq \frac{\gamma}{\rho}. \quad (2.15d)$$

Nota-se um grau de liberdade adicional na parametrização da malha objetivo pela entrada dado pelo limitante em (2.15d), é um procedimento que pode ser utilizado para reduzir o *overshoot* do sistema. Os outros limitantes são os mesmos fornecidos pela teoria de controle LQG/LTR pela entrada (PAULA; FERREIRA, 2011).

Assim, a escolha da matriz H e também dos escalares γ e ρ irá moldar a malha objetivo e definir seu desempenho. Da mesma maneira que para o caso do LTR de saída, um bom desempenho pode ser alcançado se o limitante da malha objetivo for expresso por um polo real finito ou um polo na origem (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

3 A nova parametrização da malha objetivo

3.1 Considerações gerais

De modo a conseguir bons limitantes de desempenho na análise de sensibilidade mista dos valores singulares, é desejado que a malha objetivo se aproxime de um sistema de primeira ordem (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). Para alcançar este fim, serão mostradas algumas informações sobre a parametrização da malha objetivo e como atribuir valores à matriz L , no caso da expansão do sistema feita pela saída, e também como atribuir valores à matriz H , no caso da expansão do sistema feita pela entrada. Serão também mostradas algumas propriedades obtidas na aplicação da metodologia proposta na parametrização da malha objetivo no controle \mathcal{H}_∞ /LTR pela entrada.

3.2 A atribuição da matriz L

Um sistema dinâmico quadrado e invariante no tempo pode ter a sua dinâmica expandida por um polo finito real estável a $s = -a$ em cada um dos canais, como mostrado na Figura 3, em que a expansão é feita pelas entradas da planta de processo.

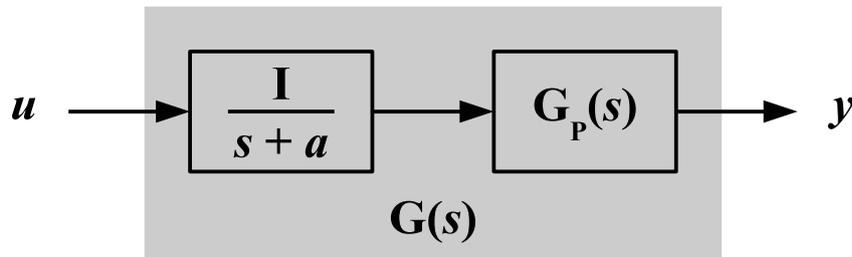


Figura 3 – Diagrama de blocos do sistema expandido pela entrada.

A realização no espaço de estados do sistema expandido, isto é, a planta de projeto, pode ser dada por

$$G := \left[\begin{array}{cc|c} A_P & B_P & 0 \\ 0 & -aI & I \\ \hline C_P & D_P & 0 \end{array} \right], \quad (3.1)$$

na qual o conjunto (A_P, B_P, C_P, D_P) representa as matrizes de estado da planta de processo, ou seja, a planta sem qualquer dinâmica expandida. Logo, a planta G é formada pela planta de processo G_P com a dinâmica expandida. Nota-se que a planta G é estritamente própria, mesmo que a planta de processo G_P seja semi-própria, uma vez que um polo em $-a$ é inserido em cada canal da planta de processo G_P . Esta afirmação não foi encontrada em qualquer trabalho encontrado na literatura.

Considere a matriz de transferência $C\Phi(s)L$, já expandida com a dinâmica especificada. A realização de espaço de estados dessa matriz de transferência com a matriz L sendo classicamente dividida em duas submatrizes, a matriz L_H superior e a matriz L_L inferior¹, é dada por

$$C\Phi(s)L = \left[\begin{array}{cc|c} A_P & B_P & L_H \\ 0 & -aI & L_L \\ \hline C_P & D_P & 0 \end{array} \right]. \quad (3.2)$$

A expansão do sistema por uma matriz diagonal de polos reais e finitos leva a uma melhor formatação da malha objetivo, uma vez que essa dinâmica será o próprio limitante da função de sensibilidade, além de permitir que a dinâmica expandida pela entrada seja incorporada à dinâmica do controlador. A realização no espaço de estados da planta $G(s)$ expandida pela entrada como mostrado na figura 3 é dada por

$$G(s) \triangleq C\Phi(s)B = \left[\begin{array}{cc|c} A_P & B_P & 0 \\ 0 & -aI & I \\ \hline C_P & D_P & 0 \end{array} \right]. \quad (3.3)$$

Para o limitante da função de sensibilidade, como mostrado em (2.11c), utiliza-se a matriz de transferência $C\Phi(s)L$, oriunda do observador de estados, com a matriz L sendo classicamente particionada por Athans (1986) em duas submatrizes: *high* L_H e *low* L_L como mostrada em (3.2).

Para a formatação da malha objetivo, é desejado que a matriz de transferência $C\Phi(s)L$ tenha sua dinâmica dada pela matriz diagonal de polos que a planta foi expandida, ou seja,

$$C\Phi(s)L = \frac{I}{s+a}. \quad (3.4)$$

Surge então o seguinte questionamento: quais os valores para as matrizes L_H e L_L para que a equação (3.4) seja válida? Para responder essa questão faz-se necessário conhecer a expansão pela saída da planta de processo G_P , como mostrado na Figura 4.

A representação no espaço de estados da planta $G(s)$ expandida pela saída é dada

¹ Os nomes “superior” e “inferior” derivam da primeira abordagem sobre a parametrização da malha objetivo (ATHANS, 1986), em que a submatriz L_H tem sua importância na análise de altas frequências, enquanto a submatriz L_L tem sua influência na análise de baixas frequências.

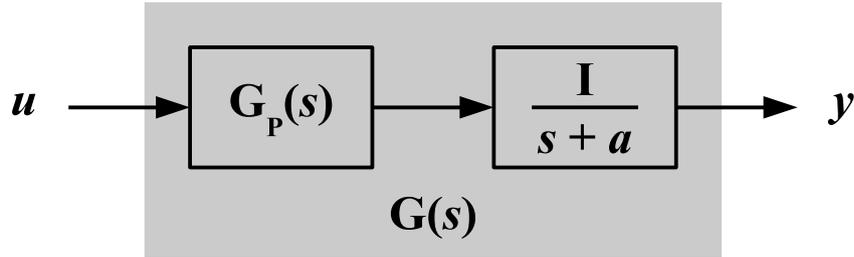


Figura 4 – Diagrama de blocos da planta $G(s)$ expandida pela saída.

por

$$G(s) \triangleq C\Phi(s)B = \left[\begin{array}{cc|c} A_P & 0 & B_P \\ C_P & -aI & D_P \\ \hline 0 & I & 0 \end{array} \right]. \quad (3.5)$$

Nota-se que (3.3) e (3.5) são realizações no espaço de estados que devem levar à mesma representação única em matriz de transferência $G(s)$. Assim, qual seria então a transformação de similaridade capaz de transformar a expansão pela entrada da planta G_P dada em (3.3) na expansão pela saída, dada em (3.5)? Considere o seguinte sistema dinâmico linear, no qual o subíndice E denota expansão pela entrada

$$\dot{x} = A_E x + B_E u, \quad (3.6a)$$

$$y = C_E x, \quad (3.6b)$$

define-se uma mudança de coordenadas na qual

$$x = U^{-1}z, \quad (3.7)$$

na qual a matriz de similaridade U transforma a expansão da planta de processo pela entrada em uma expansão pela saída.

O sistema representado por (3.6) passa a ser representado por

$$U^{-1}\dot{z} = A_E U^{-1}z + B_E u, \quad (3.8a)$$

$$y = C_E U^{-1}z. \quad (3.8b)$$

Multiplicando todos os termos de (3.8a) por U à esquerda, o seguinte sistema é obtido

$$\dot{z} = U A_E U^{-1}z + U B_E u \quad (3.9a)$$

$$y = C_E U^{-1} z . \quad (3.9b)$$

Comparando-se (3.9) com (3.6), são obtidas as equações para o seguinte sistema dinâmico linear, no qual o subíndice S denota expansão pela saída

$$B_S = U B_E , \quad (3.10a)$$

$$A_S = U A_E U^{-1} , \quad (3.10b)$$

$$C_S = C_E U^{-1} . \quad (3.10c)$$

A matriz U tem seus elementos particionados como

$$U = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} . \quad (3.11)$$

Sendo assim, ao analisar a equação (3.10a) tomando como base as equações (3.3) e (3.5), obtém-se

$$\begin{bmatrix} B_P \\ D_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} . \quad (3.12)$$

Resolvendo a equação (3.12), conclui-se que

$$X_2 = B_P , \quad (3.13a)$$

$$X_4 = D_P . \quad (3.13b)$$

Logo, observando (3.3) e (3.5) a equação (3.10c) é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_P & D_P \end{bmatrix} U^{-1} . \quad (3.14)$$

Multiplicando-se a equação (3.14) pela matriz U pela direita, obtém-se a equação

$$\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & B_P \\ X_3 & D_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_P & D_P \end{bmatrix} , \quad (3.15)$$

que leva a

$$X_3 = C_P . \quad (3.16)$$

O único parâmetro que resta a ser calculado é X_1 ; com base nas equações (3.3) e (3.5) a equação (3.10b) é reescrita como

$$\begin{bmatrix} A_P & 0 \\ C_P & -aI \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} A_P & B_P \\ 0 & -aI \end{bmatrix} U^{-1}. \quad (3.17)$$

Multiplicando a equação (3.10b) pela matriz U à direita, obtém-se a equação

$$\begin{bmatrix} A_P & 0 \\ C_P & -aI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & B_P \\ C_P & D_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & B_P \\ C_P & D_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_P & B_P \\ 0 & -aI \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Resolvendo a multiplicação em ambos os membros da igualdade em (3.18), é obtida a equação

$$\begin{bmatrix} A_P X_1 & A_P B_P \\ C_P X_1 - aC_P & C_P B_P - aD_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 A_P & X_1 B_P - aB_P \\ C_P A_P & C_P B_P - aD_P \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Comparando o segundo elemento da primeira linha em ambos os membros da equação (3.19), vem que

$$X_1 B_P - A_P B_P = aB_P. \quad (3.20)$$

A equação (3.20) leva à equação

$$X_1 - A_P = aI, \quad (3.21)$$

logo,

$$X_1 = aI + A_P. \quad (3.22)$$

Portanto, a matriz de similaridade U que pode ser vista pela expansão da planta de processo pela entrada em uma expansão pela saída é dada por

$$U = \begin{bmatrix} aI + A_P & B_P \\ C_P & D_P \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Utilizando a matriz inversa particionada baseada no complemento de Schur proposta por Skogestad e Postlethwaite (2005), apresentado no Anexo A, sabe-se que a matriz da transformação de similaridade U tem sua inversa garantida, mesmo se a matriz D_P for nula e/ou $-a$ for igual a zero. Essa inversa é dada por

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} (aI + A_P)^{-1} + (aI + A_P)^{-1} B_P W C_P (aI + A_P)^{-1} & -(aI + A_P)^{-1} B_P W \\ -W C_P (aI + A_P)^{-1} & W \end{bmatrix}, \quad (3.24a)$$

com

$$W = [D_P - C_P(aI + A_P)^{-1}B_P]^{-1}, \quad (3.24b)$$

desde que $(aI + A_P)^{-1}$ e W existam (de fato, W é a inversa do complemento de Schur de $(aI + A_P)$ dado em (3.23)). As condições apresentadas são para a existência da inversa particionada baseada no complemento de Schur, não sendo uma condição necessária para a inversão de (3.23). Se as condições citadas não forem satisfeitas, outras técnicas podem ser utilizadas para a inversão de (3.23).

Uma vez determinada a matriz de similaridade U , torna-se possível escolher a matriz L . Para isso, considere a seguinte representação no espaço de estados para a matriz de transferência diagonal com polo em $-a$

$$\frac{I}{s+a} = \left[\begin{array}{cc|c} A_P & 0 & 0 \\ C_P & -aI & I \\ \hline 0 & I & 0 \end{array} \right]. \quad (3.25)$$

Assim, será utilizada a matriz de similaridade U dada em (3.23) para transformar a matriz de transferência (3.2) na matriz de transferência (3.25). São obtidas então as equações

$$UAU^{-1} = \left[\begin{array}{cc} A_P & 0 \\ C_P & -aI \end{array} \right], \quad (3.26a)$$

$$CU^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 0 & I \end{array} \right], \quad (3.26b)$$

$$UL = \left[\begin{array}{c} 0 \\ I \end{array} \right]. \quad (3.26c)$$

As equações (3.26a) e (3.26b), provam a consistência da matriz de similaridade U dada em (3.23), já a equação (3.26c) possibilita o cálculo da matriz L da parametrização do controle \mathcal{H}_∞ /LTR e do controle LQG/LTR.

Partindo da equação (3.26c), é obtido

$$UL = \left[\begin{array}{cc} aI + A_P & B_P \\ C_P & D_P \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} L_H \\ L_L \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ I \end{array} \right]. \quad (3.27)$$

Ao resolver a multiplicação em (3.27), obtém-se

$$UL = \left[\begin{array}{c} (aI + A_P)L_H + B_PL_L \\ C_PL_H + D_PL_L \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ I \end{array} \right]. \quad (3.28)$$

Multiplicando (3.27) por U^{-1} pela esquerda, a matriz L , assim como mostrado em (SILVA; PAULA; FERREIRA, 2013) deve ser escolhida como

$$L = \begin{bmatrix} L_H \\ L_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(aI + A_P)^{-1}B_P W \\ W \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

A equação (3.29) é o ponto chave da parametrização da matriz L , objeto de estudo deste trabalho de tese. Com esta escolha, é possível estabelecer um limite superior, ou seja, o valor máximo singular, na função de sensibilidade como

$$\sigma_{max}(\mathcal{S}(j\omega)) \leq \min(\mu\sqrt{a^2 + \omega^2}, 1). \quad (3.30)$$

A equação (3.30) mostra uma ferramenta simples e fácil de se usar para modelar o limite superior para a função de sensibilidade. Com a atribuição adequada dos parâmetros a e μ , é possível atender a um requisito de controle comum e básico, como o máximo erro em regime permanente à entrada degrau e/ou a distúrbios, o qual será igual a a em cada canal.

Note que $C\Phi(s)L$ vista pela expansão pelas saídas da planta de processo é mais simples do que o mesmo visto pela entrada, simplificando a notação da parametrização da malha objetivo quando utiliza-se o LTR de saída. Esta conclusão também não foi indicada em qualquer trabalho referenciado (ATHANS, 1986; O'DELL; MISAWA, 1995).

3.2.1 Comparação com a atribuição de Athans

Para comparar a atribuição da matriz L proposta neste trabalho com a de Athans (1986), em primeiro lugar D_P será definida como uma matriz nula e a será definido como zero (um polo na origem) em (3.2), obtendo

$$C\Phi(s)L = \frac{C_P(sI - A_P)^{-1}B_P}{s}L_L + C_P(sI - A_P)^{-1}L_H, \quad (3.31)$$

que é a mesma matriz de transferência usada por Athans (ATHANS, 1986; O'DELL; MISAWA, 1995). Assim, nos extremos em baixas e altas frequências, a equação (3.31) pode ser reescrita como

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} C\Phi(j\omega)L \approx -\frac{C_P A_P^{-1} B_P L_L}{j\omega} \quad (3.32a)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} C\Phi(j\omega)L \approx \frac{C_P L_H}{j\omega}. \quad (3.32b)$$

Baseada nesses limites, a sugestão de Athans (ATHANS, 1986) na escolha da matriz L é dada por

$$L = \begin{bmatrix} L_H \\ L_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_P^T (C_P C_P^T)^{-1} \\ -(C_P A_P^{-1} B_P)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

e sua modificação, feita por O'Dell e Misawa (O'DELL; MISAWA, 1995), dada por

$$L = \begin{bmatrix} L_H \\ L_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_P^{-1} B_P (C_P A_P^{-1} B_P)^{-1} \\ -(C_P A_P^{-1} B_P)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Nota-se que tanto (3.33) e (3.34) são soluções de (3.32), sendo, na verdade, a abordagem utilizada em ambos os casos para expandir a planta de processo com um integrador livre (um polo na origem) em cada canal (ATHANS, 1986; O'DELL; MISAWA, 1995). No entanto, (3.34) também é a solução exata de (3.31), alcançando os limites desejados em todas as frequências, e não dependente de uma matriz pseudo inversa.

Por outro lado, atribuir a matriz L como (3.29), tem-se, por caminhos diferentes, a mesma matriz L dada por (3.34). Portanto, com base em uma transformação de similaridade, é apresentada uma generalização do limitante da função de sensibilidade $C\Phi L$, que não está limitado por um integrador, mas por qualquer polo finito real estável, mesmo para uma planta de processo semi-própria. Estes resultados expandem o conceito da recomendação de Athans para a parametrização da malha objetivo, que foi verificada com êxito no projeto de *loop shaping* em diferentes sistemas e aplicações (ATHANS, 1986; ZHANG; FREUDENBERG, 1990; TZOU; WU, 1995).

3.3 Propriedades para uma planta de processo estável em malha aberta expandida pela saída

Nesta seção, serão desenvolvidas novas propriedades com base na escolha proposta da matriz L em (3.29) no controle \mathcal{H}_∞ /LTR, quando a planta de processo é estável em malha aberta, essas propriedades são encontradas em (SILVA; PAULA; FERREIRA, 2014).

Teorema 1. *Considere a planta de processo em (3.1). Se a matriz L for escolhida como a matriz recomendada em (3.29), e além disso a matriz H for igual à matriz C , o escalar γ for maior do que o escalar μ e a matriz A_P for uma matriz Hurwitz, então a matriz simétrica Y , que resolve a EARG do observador do estados em (2.8a), se resume a*

$$Y = \frac{\sqrt{a^2 + \mu^{-2} - \gamma^{-2}} - a}{\mu^{-2} - \gamma^{-2}} LL^T. \quad (3.35)$$

Demonstração. Sob a hipótese de que a matriz H é igual à matriz C necessária para o LTR, é direta a conclusão que a EARG do observador de estados em (2.8a) pode ser reescrita agrupando-se os termos comuns resultando em

$$YA^T + AY - (\mu^{-2} - \gamma^{-2})YC^T CY + LL^T = 0, \quad (3.36)$$

que por sua vez pode ser reescrita em função de uma matriz de similaridade qualquer U , resultando em

$$(UYU^T)(UAU^{-1})^T + (UAU^{-1})(UYU^T) - (\mu^{-2} - \gamma^{-2})(UYU^T)(CU^{-1})^T(CU^{-1})(UYU^T) + (UL)(UL)^T = 0, \quad (3.37)$$

desde que U^{-1} exista. Além disso, considere que a matriz de transformação de similaridade simétrica UYU^T pode ser dividida em três submatrizes como segue

$$UYU^T = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 & \tilde{Y}_2 \\ \tilde{Y}_2^T & \tilde{Y}_3 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

na qual \tilde{Y}_1 e \tilde{Y}_3 possuem as mesmas dimensões de A_P e D_P , respectivamente. Adotando a matriz de transformação de similaridade específica U dada em (3.23) como

$$U = \begin{bmatrix} aI + A_P & B_P \\ C_P & D_P \end{bmatrix},$$

e suas implicações em (3.26), ou seja,

$$UAU^{-1} = \begin{bmatrix} A_P & 0 \\ C_P & -aI \end{bmatrix},$$

$$CU^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix},$$

$$UL = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},$$

é possível reescrever (3.37) em termos de matrizes particionadas, resultando

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 A_P^T & \tilde{Y}_1 C_P^T - a\tilde{Y}_2 \\ \tilde{Y}_2^T A_P^T & \tilde{Y}_2^T C_P^T - a\tilde{Y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_P \tilde{Y}_1 & A_P \tilde{Y}_2 \\ C_P \tilde{Y}_1 - a\tilde{Y}_2^T & C_P \tilde{Y}_2 - a\tilde{Y}_3 \end{bmatrix} - (\mu^{-2} - \gamma^{-2}) \begin{bmatrix} \tilde{Y}_2 \tilde{Y}_2^T & \tilde{Y}_2 \tilde{Y}_3 \\ \tilde{Y}_3 \tilde{Y}_2^T & \tilde{Y}_3 \tilde{Y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = 0. \quad (3.40)$$

Nota-se que a EARG do observador de estados vista através da expansão pela saída da planta de processo é mais simples do que o procedimento via expansão pela entrada,

simplificando a notação da parametrização da malha objetivo quando se usa o LTR de saída. Além disso, as seguintes sub-equações podem ser obtidas de (3.40)

$$\tilde{Y}_1 A_P^T + A_P \tilde{Y}_1 - (\mu^{-2} - \gamma^{-2}) \tilde{Y}_2 \tilde{Y}_2^T = 0 \quad (3.41a)$$

$$\tilde{Y}_2^T A_P^T + C_P \tilde{Y}_1 - a \tilde{Y}_2^T - (\mu^{-2} - \gamma^{-2}) \tilde{Y}_3 \tilde{Y}_2^T = 0 \quad (3.41b)$$

$$\tilde{Y}_2^T C_P^T - a \tilde{Y}_3 + C_P \tilde{Y}_2 - a \tilde{Y}_3 - (\mu^{-2} - \gamma^{-2}) \tilde{Y}_3 \tilde{Y}_3 + I = 0 . \quad (3.41c)$$

Na equação (3.41a), $\tilde{Y}_2 \tilde{Y}_2^T$ é sempre simétrica e positiva semidefinida por construção. Pelo critério de Sylvester, \tilde{Y}_1 é simétrica e semidefinida positiva desde que UYU^T também seja simétrica e semidefinida positiva (a única solução estabilizante da EARG do observador de estados). De acordo com a hipótese, A_P é uma matriz Hurwitz e o critério de estabilidade de Lyapunov deve ser satisfeito para \tilde{Y}_1 , o que é dado por

$$\tilde{Y}_1 A_P^T + A_P \tilde{Y}_1 \leq 0 \quad (3.42a)$$

$$\tilde{Y}_1 \geq 0 . \quad (3.42b)$$

Sob esta hipótese, A_P é uma matriz de Hurwitz e γ é maior que μ , então a matriz \tilde{Y}_1 deve ser uma matriz nula para que (3.41a) e (3.42) sejam verdadeiras. Além disso, a matriz \tilde{Y}_2 também deve ser uma matriz nula para que (3.41a) seja válida. Note-se que estas soluções também satisfazem (3.41b). Reescrevendo (3.41c), obtém-se

$$(\mu^{-2} - \gamma^{-2}) \tilde{Y}_3 \tilde{Y}_3 + 2a \tilde{Y}_3 - I = 0 . \quad (3.43)$$

As soluções para (3.43) são dadas por

$$\tilde{Y}_3 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + \mu^{-2} - \gamma^{-2}}}{\mu^{-2} - \gamma^{-2}} I . \quad (3.44)$$

Nota-se que UYU^T será uma matriz diagonal desde que \tilde{Y}_1 e \tilde{Y}_2 sejam matrizes nulas e \tilde{Y}_3 seja uma matriz diagonal. Então, de acordo com a hipótese de que γ é maior do que μ , a única solução possível para a matriz \tilde{Y}_3 , para que UYU^T permaneça positiva semidefinida é dada por

$$\tilde{Y}_3 = \frac{\sqrt{a^2 + \mu^{-2} - \gamma^{-2}} - a}{\mu^{-2} - \gamma^{-2}} I . \quad (3.45)$$

Portanto, a matriz UYU^T é dada por

$$UYU^T = \frac{\sqrt{a^2 + \mu^{-2} - \gamma^{-2}} - a}{\mu^{-2} - \gamma^{-2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

na qual é possível concluir que a matriz Y solução de (2.8a) é dada por (3.35).

□

Corolário 1. *Considere a planta de projeto em (3.1). Se a matriz L for escolhida como (3.29), a matriz H for igual à matriz C , o escalar γ for maior do que o escalar μ e a matriz A_P for uma matriz Hurwitz, então a matriz de ganho K_F do observador de estados em (2.8b) é dada por*

$$K_F = \mu^{-2} \frac{\sqrt{a^2 + \mu^{-2} - \gamma^{-2}} - a}{\mu^{-2} - \gamma^{-2}} L. \quad (3.47)$$

Demonstração. Desde que o Teorema 1 obedeça às mesmas hipóteses, a equação (2.8b) pode ser reescrita como

$$K_F = \mu^{-2} \frac{\sqrt{a^2 + \mu^{-2} - \gamma^{-2}} - a}{\mu^{-2} - \gamma^{-2}} \begin{bmatrix} L_H \\ L_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_H^T & L_L^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_P^T \\ D_P^T \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Assim, é possível concluir que K_F é dado por (3.47), desde que $C_P L_H + D_P L_L$ seja igual à matriz identidade utilizando (3.28).

□

Portanto, se as condições do Teorema 1 e do Corolário 1 forem satisfeitas, isso é necessário e suficiente para resolver a EARG da realimentação de estados em (2.7a), uma vez que a solução da EARG do observador de estados em (2.8a) é dada por (3.35). Observa-se que em aplicações práticas ainda é necessário resolver (2.7a), já que não se pode tomar o limite $\rho \rightarrow 0$, mas ρ pequeno o suficiente para que se obtenha uma boa recuperação da malha objetivo.

Corolário 2. *Considere a planta projeto em (3.1). Se a matriz L for escolhida como (3.29), a matriz H for igual à matriz C , o escalar γ for maior do que o escalar μ e a matriz A_P for uma matriz Hurwitz, então a matriz de transferência $C\Phi(s)K_F$ da malha objetivo em (2.9) é dada por*

$$C\Phi(s)K_F = \mu^{-2} \frac{\sqrt{a^2 + \mu^{-2} - \gamma^{-2}} - a}{\mu^{-2} - \gamma^{-2}} \frac{I}{s + a}. \quad (3.49)$$

Demonstração. Mantendo as mesmas hipóteses do Corolário 1, a matriz de transferência da malha objetivo pode ser reescrita como

$$C\Phi(s)K_F = \mu^{-2} \frac{\sqrt{a^2 + \mu^{-2} - \gamma^{-2}} - a}{\mu^{-2} - \gamma^{-2}} C\Phi(s)L, \quad (3.50)$$

na qual é possível concluir que $C\Phi(s)K_F$ é dada por (3.49) usando (3.4).

□

Portanto, o Corolário 2 mostra que, se a matriz L for escolhida como em (3.29) e as condições do Teorema 1 forem mantidas, a malha objetivo é uma matriz de transferência diagonal composta pelas funções de transferência de primeira ordem iguais como em (3.49). Nota-se que estas hipóteses não são restritivas, uma vez que a matriz H ser igual a matriz C é necessário para que ocorra o LTR de saída, e o escalar γ ser maior que o escalar μ é necessário para uma sensibilidade complementar viável em (2.11d) (PAULA; FERREIRA, 2011). Este é um resultado expressivo, uma vez que é possível, de fato, separar todo o sistema realimentado em n sistemas com o comportamento de um sistema de primeira ordem.

3.4 A atribuição da matriz H

Um sistema dinâmico de representação quadrada e invariante no tempo também pode ter a sua dinâmica expandida por um polo finito real estável a $s = -a$ em cada um dos canais mas agora pelas saídas da planta de processo, como mostrado na Figura 5

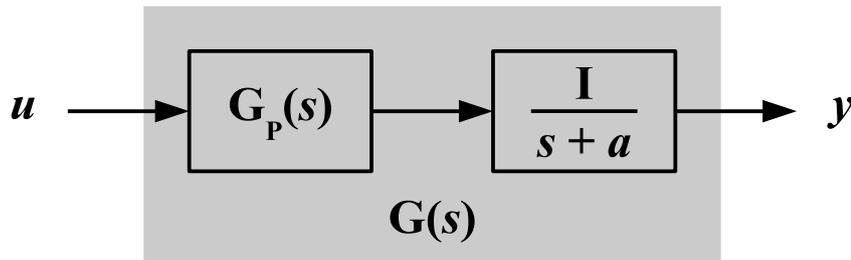


Figura 5 – Diagrama de blocos do sistema expandido pela saída.

A realização no espaço de estados do sistema expandido, isto é, a planta de projeto, pode ser dada por

$$G := \left[\begin{array}{cc|c} A_P & 0 & B_P \\ C_P & -aI & D_P \\ \hline 0 & I & 0 \end{array} \right], \quad (3.51)$$

na qual o conjunto (A_P, B_P, C_P, D_P) representa as matrizes de estado da planta de processo, ou seja, a planta sem qualquer dinâmica expandida. Logo, a planta G é formada pela planta de processo G_P com a dinâmica expandida.

Considere a matriz de transferência $H\Phi(s)B$, já expandida com a dinâmica especificada. A realização de espaço de estados dessa matriz de transferência com a matriz H sendo dividida em duas submatrizes, a matriz H_H e a matriz H_L ², é dada por

$$H\Phi(s)B \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_P & 0 & B_P \\ C_P & -aI & D_P \\ \hline H_H & H_L & 0 \end{array} \right]. \quad (3.52)$$

A expansão do sistema por uma matriz diagonal de polos reais e finitos leva a uma melhor formatação da malha objetivo, uma vez que essa dinâmica será o próprio limitante da função de sensibilidade, além de permitir que a dinâmica expandida pela saída seja incorporada à dinâmica do controlador. A realização no espaço de estados da planta $G(s)$ expandida pela saída como mostrado na figura 5 é dada por

$$G(s) \triangleq C\Phi(s)B \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_P & 0 & B_P \\ C_P & -aI & D_P \\ \hline 0 & I & 0 \end{array} \right]. \quad (3.53)$$

Para o limitante da função de sensibilidade, como mostrado em (2.15c), utiliza-se a matriz de transferência $H\Phi(s)B$, oriunda da retroação de estados, com a matriz H particionada nas submatrizes H_H e H_L como mostrada na equação 3.52.

Para a formatação da malha objetivo, é desejado que a matriz de transferência $H\Phi(s)B$ tenha sua dinâmica dada pelo polo que a planta foi expandida, ou seja,

$$H\Phi(s)B = \frac{I}{s+a}. \quad (3.54)$$

Da mesma maneira que para o LTR de saída, surge então o seguinte questionamento: quais os valores para as matrizes H_H e H_L para que a equação (3.54) seja válida? Para responder essa questão faz-se necessário conhecer a expansão pela entrada da planta de processo G_P , como mostrado na Figura 6.

A representação no espaço de estados da planta $G(s)$ expandida pela entrada é dada por

$$G(s) \triangleq C\Phi(s)B \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_P & 0 & 0 \\ 0 & -aI & I \\ \hline C_P & D_P & 0 \end{array} \right]. \quad (3.55)$$

² Os índices das matrizes derivam da primeira abordagem sobre a parametrização da malha objetivo na recuperação da malha expandida pela saída (ATHANS, 1986), em que a submatriz L_H tem sua importância na análise de altas frequências, enquanto a submatriz L_L tem sua influência na análise de baixa frequência.

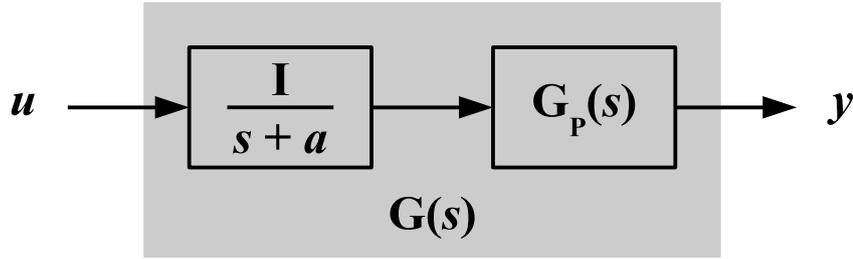


Figura 6 – Diagrama de blocos da planta $G(s)$ expandida pela entrada.

Nota-se que (3.53) e (3.55) são realizações no espaço de estados que levam à mesma matriz de transferência $G(s)$. Considere o seguinte sistema dinâmico linear, no qual o subíndice S denota expansão pela saída

$$\dot{x} = A_S x + B_S u , \quad (3.56a)$$

$$y = C_S x , \quad (3.56b)$$

define-se uma mudança de coordenadas na qual

$$x = U z , \quad (3.57)$$

na qual a matriz de similaridade U transforma a expansão da planta de processo pela saída em uma expansão pela entrada.

O sistema representado por (3.56) passa a ser representado por

$$U \dot{z} = A_S U z + B_S u , \quad (3.58a)$$

$$y = C_S U z . \quad (3.58b)$$

Multiplicando todos os termos de (3.58a) por U^{-1} à esquerda, o seguinte sistema é obtido

$$\dot{z} = U^{-1} A_S U z + U^{-1} B_S u \quad (3.59a)$$

$$y = C_S U z . \quad (3.59b)$$

Comparando-se (3.59) com (3.56), são obtidas as equações para o sistema dinâmico linear no qual o subíndice E denota expansão pela entrada

$$B_E = U^{-1} B_S , \quad (3.60a)$$

$$A_E = U^{-1}A_S U, \quad (3.60b)$$

$$C_E = C_S U. \quad (3.60c)$$

O problema consiste então em encontrar uma transformação de similaridade que transforme a realização no espaço de estados da planta expandida $G(s)$ de entrada em uma realização no espaço de estados da planta expandida $G(s)$ de saída, ou seja,

$$G(s) \stackrel{s}{=} \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} A_P & B_P & 0 \\ 0 & -aI & I \\ \hline C_P & D_P & 0 \end{array} \right]}_{\text{Entrada}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} A_P & 0 & B_P \\ C_P & -aI & D_P \\ \hline 0 & I & 0 \end{array} \right]}_{\text{Saída}}, \quad (3.61)$$

A matriz de similaridade U capaz de realizar a transformação é dada por

$$U = \begin{bmatrix} aI + A_P & B_P \\ C_P & D_P \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

e sua matriz inversa particionada baseada no complemento de Schur (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005), dada por

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} (aI + A_P)^{-1} + (aI + A_P)^{-1}B_P W C_P (aI + A_P)^{-1} & -(aI + A_P)^{-1}B_P W \\ -W C_P (aI + A_P)^{-1} & W \end{bmatrix}, \quad (3.63a)$$

com

$$W = [D_P - C_P (aI + A_P)^{-1} B_P]^{-1}, \quad (3.63b)$$

desde que $(aI + A_P)^{-1}$ e W existam.

Uma vez que a matriz de similaridade U é determinada, torna-se possível escolher a matriz H . Para isso, considere a seguinte representação no espaço de estados para a matriz de transferência diagonal com polo em $-a$

$$\frac{I}{s+a} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_P & 0 & 0 \\ C_P & -aI & I \\ \hline 0 & I & 0 \end{array} \right]. \quad (3.64)$$

Assim, será utilizada a matriz de similaridade U dada em (3.62) para transformar a matriz de transferência (3.52) na matriz de transferência (3.64). São obtidas então as equações

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} A_P & 0 \\ C_P & -aI \end{bmatrix}, \quad (3.65a)$$

$$HU = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}, \quad (3.65b)$$

$$U^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (3.65c)$$

As equações (3.65a) e (3.65c), provam a consistência da matriz de similaridade U dada em (3.62), já a equação (3.65b) possibilita o cálculo da matriz H da parametrização do controle $\mathcal{H}_\infty/\text{LTR}$ e do controle LQG/LTR pela entrada.

Partindo da equação (3.65c), é obtido

$$\begin{bmatrix} (aI + A_P)^{-1} + (aI + A_P)^{-1}B_P W C_P (aI + A_P)^{-1} & -(aI + A_P)^{-1}B_P W \\ -W C_P (aI + A_P)^{-1} & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_H & H_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Multiplicando (3.66) por U pela direita, a matriz H deve ser escolhida como

$$H = \begin{bmatrix} H_H & H_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W C_P (aI + A_P)^{-1} & W \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

A equação (3.67) é o ponto chave da parametrização da matriz H , objeto de estudo deste trabalho de tese. Com esta escolha, podemos estabelecer um limite superior, ou seja, o valor máximo singular, na função de sensibilidade como

$$\sigma_{\max}(\mathcal{S}_T(j\omega)) \leq \min\left(\rho \sigma_{\max}(H\Phi(j\omega)B)^{-1}, 1\right). \quad (3.68)$$

A equação (3.68) mostra uma ferramenta simples e fácil de se usar para modelar o limite superior para a função de sensibilidade.

3.5 Propriedades para uma planta de processo estável em malha aberta expandida pela entrada

Nesta seção, serão desenvolvidas novas propriedades com base na escolha proposta da matriz H em (3.67) no controle $\mathcal{H}_\infty/\text{LTR}$ pela entrada, quando a planta de processo é estável em malha aberta.

Teorema 2. *Considere a planta de processo em (3.51). Se a matriz H for escolhida como a matriz recomendada em (3.67), e além disso a matriz L for igual à matriz B , o escalar γ for maior do que o escalar ρ e a matriz A_P for uma matriz Hurwitz, então a matriz simétrica X , que resolve a EARG da retroação de estados em (2.7a), se resume a*

$$X = \frac{\sqrt{a^2 + \rho^{-2} - \gamma^{-2}} - a}{\rho^{-2} - \gamma^{-2}} H^T H. \quad (3.69)$$

Demonstração. Sob a hipótese de que a matriz L é igual à matriz B necessária para o LTR de entrada, é direta a conclusão que a EARG da retroação de estados em (2.7a) pode ser reescrita agrupando-se os termos comuns resultando em

$$A^T X + X A - (\rho^{-2} - \gamma^{-2}) X B B^T X + H^T H = 0, \quad (3.70)$$

que por sua vez pode ser reescrita em função de uma matriz de similaridade qualquer U , resultando em

$$(U A U^{-1})^T (U X U^T) + (U X U^T) (U A U^{-1}) - (\rho^{-2} - \gamma^{-2}) (U X U^T) (U^{-1} B) (U^{-1} B)^T (U Y U^T) + (H U)^T (H U) = 0, \quad (3.71)$$

Além disso, considere que a matriz de transformação de similaridade simétrica $U X U^T$ pode ser dividida em três submatrizes como segue

$$U X U^T = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_2^T & \tilde{X}_3 \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

na qual \tilde{X}_1 e \tilde{X}_3 possuem as mesmas dimensões de A_P e D_P , respectivamente. Adotando a matriz de transformação de similaridade específica U dada em (3.23) como

$$U = \begin{bmatrix} aI + A_P & B_P \\ C_P & D_P \end{bmatrix},$$

e suas implicações em (3.65), ou seja,

$$U A U^{-1} = \begin{bmatrix} A_P & 0 \\ C_P & -aI \end{bmatrix},$$

$$H U = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix},$$

$$U^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},$$

é possível reescrever (3.71) em termos de matrizes particionadas, resultando na equação

$$\begin{bmatrix} A_P \tilde{X}_1 + C_P \tilde{X}_2^T & C_P \tilde{X}_3 \\ -\tilde{X}_2^T aI & -\tilde{X}_3 aI \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_P \tilde{X}_1 + C_P \tilde{X}_1 & -\tilde{X}_1 aI \\ A_P \tilde{X}_2^T + C_P \tilde{X}_3 & -\tilde{X}_3 aI \end{bmatrix} - (\rho^{-2} - \gamma^{-2}) \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \tilde{X}_1^T & \tilde{X}_1 \tilde{X}_3 \\ \tilde{X}_3 \tilde{X}_2^T & \tilde{X}_3 \tilde{X}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = 0. \quad (3.74)$$

As seguintes sub-equações podem ser obtidas de (3.74)

$$A_P \tilde{X}_1 + C_P \tilde{X}_2^T + A_P \tilde{X}_1 + C_P \tilde{X}_1 - (\rho^{-2} - \gamma^{-2}) \tilde{X}_1 \tilde{X}_1^T = 0 \quad (3.75a)$$

$$-\tilde{X}_2^T aI + A_P \tilde{X}_2^T + CP \tilde{X}_3 - (\rho^{-2} - \gamma^{-2}) \tilde{X}_3 \tilde{X}_2^T = 0 \quad (3.75b)$$

$$-\tilde{X}_3 aI - \tilde{X}_3 aI - (\rho^{-2} - \gamma^{-2}) \tilde{X}_3 \tilde{X}_3 + I = 0. \quad (3.75c)$$

Reescrevendo (3.75c), é obtida a equação

$$(\rho^{-2} - \gamma^{-2}) \tilde{X}_3 \tilde{X}_3 + 2\tilde{X}_3 a - I = 0. \quad (3.76)$$

As soluções de (3.76) são dadas por

$$\tilde{X}_3 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + \rho^{-2} - \gamma^{-2}}}{\rho^{-2} - \gamma^{-2}} I. \quad (3.77)$$

Nota-se que UXU^T será uma matriz diagonal sob a hipótese que \tilde{X}_1 e \tilde{X}_2 sejam matrizes nulas seguindo os critérios de (3.41a) e (3.41b) e \tilde{X}_3 seja uma matriz diagonal. Então, de acordo com a hipótese de que γ é maior do que ρ , a única solução possível para a matriz \tilde{X}_3 , para que UXU^T permaneça positiva semidefinida é dada por

$$\tilde{X}_3 = \frac{\sqrt{a^2 + \rho^{-2} - \gamma^{-2}} - a}{\mu^{-2} - \rho^{-2}} I. \quad (3.78)$$

Portanto, a matriz UXU^T é dada por

$$UXU^T = \frac{\sqrt{a^2 + \rho^{-2} - \gamma^{-2}} - a}{\rho^{-2} - \gamma^{-2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (3.79)$$

na qual é possível concluir que a matriz X solução de (2.7a) é dada por (3.69).

□

Corolário 3. *Considere a planta de projeto em (3.51). Se a matriz H for escolhida como (3.67), a matriz L for igual à matriz B , o escalar γ for maior do que o escalar ρ e a matriz A_P for uma matriz Hurwitz, então a matriz de ganho K_C da retroação de estados em (2.7b) é dada por*

$$K_C = \rho^{-2} \frac{\sqrt{a^2 + \rho^{-2} - \gamma^{-2}} - a}{\rho^{-2} - \gamma^{-2}} H. \quad (3.80)$$

Demonstração. Desde que o Teorema 2 obedeça às mesmas hipóteses, a equação (2.7b) pode ser reescrita como

$$K_C = \begin{bmatrix} B_P^T & D_P^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_H^T \\ H_L^T \end{bmatrix} \rho^{-2} \frac{\sqrt{a^2 + \rho^{-2} - \gamma^{-2}} - a}{\rho^{-2} - \gamma^{-2}} \begin{bmatrix} H_H & H_L \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Assim, é possível concluir que K_C é dado por (3.80), desde que $B_P H_H + D_P H_L$ seja igual à matriz identidade utilizando (3.65b).

□

Portanto, se as condições do Teorema 2 e do Corolário 3 forem satisfeitas, isso é necessário e suficiente para resolver a EARG do observador de estados em (2.8a), uma vez que a solução da EARG da retroação de estados em (2.7a) é dada por (3.69).

Corolário 4. *Considere a planta projeto em (3.51). Se a matriz H for escolhida como (3.67), a matriz L for igual à matriz B , o escalar γ for maior do que o escalar ρ e a matriz A_P for uma matriz Hurwitz, então a matriz de transferência $K_C \Phi(s)B$ da malha objetivo pela entrada em (2.12) é dada por*

$$K_C \Phi(s)B = \rho^{-2} \frac{\sqrt{a^2 + \rho^{-2} - \gamma^{-2}} - a}{\rho^{-2} - \gamma^{-2}} \frac{I}{s + a} . \quad (3.82)$$

Demonstração. Mantendo as mesmas hipóteses do Corolário 3, a matriz de transferência da malha objetivo para a entrada pode ser reescrita como

$$K_C \Phi(s)B = \rho^{-2} \frac{\sqrt{a^2 + \rho^{-2} - \gamma^{-2}} - a}{\rho^{-2} - \gamma^{-2}} H \Phi(s)B \quad (3.83)$$

na qual é possível concluir que $K_C \Phi(s)B$ é dada por (3.82) usando (3.54).

□

Portanto, o Corolário 4 mostra que, se a matriz H for escolhida como em (3.67) e as condições do Teorema 2 forem mantidas, a malha objetivo é uma matriz de transferência diagonal composta pelas funções de transferência de primeira ordem iguais como em (3.82). Nota-se que estas hipóteses não são restritivas, uma vez que a matriz L ser igual a matriz B é necessário para que ocorra o LTR de entrada.

4 Exemplos de aplicação

4.1 Considerações gerais

Neste capítulo três exemplos de projeto serão apresentados para demonstrar a eficiência da metodologia proposta neste trabalho. Foram realizadas simulações nos modelos linearizados dos três exemplos, os exemplos relacionados são sistemas MIMO, mas apresentam características diferentes em relação à planta de processo. O primeiro exemplo é sobre um avião de caça F8 desenvolvido pela Vought na década de 1950. É uma planta estável em malha aberta, sem polos multivariáveis na origem, com duas entradas, duas saídas e quatro estados. O modelo da planta de processo admite a expansão por um polo na origem, uma vez que a matriz A_P deste sistema é invertível.

O segundo exemplo é associado ao helicóptero Boeing CH 47 Chinook. O modelo também possui duas entradas, duas saídas e quatro estados, mas três dos polos multivariáveis estão localizados no semiplano à direita, caracterizando um sistema instável em malha aberta. No entanto, ele admite uma expansão por polos na origem, uma vez que a matriz A_P deste sistema também pode ser invertida.

O último exemplo, é um modelo simplificado de um helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida. O modelo também possui duas entradas, duas saídas e quatro estados, mas o modelo tem um polo multivariável na origem, e, portanto, esta planta é instável na malha aberta. Além disso, a planta não permite a expansão por polos na origem, uma vez que a matriz A_P deste sistema não pode ser invertida.

Para efeito de comparação, nos três exemplos apresentados os parâmetros serão mantidos os mesmos: $a = 0,01$, $\mu = 1$, $\gamma = 1,6$ e $\rho = 0,0001$. É importante salientar que a preocupação deste capítulo não é projetar um controlador para fins reais, mas para destacar a eficiência da metodologia proposta e discutir alguns aspectos práticos úteis que devem ser levados em consideração ao projetar o compensador associado.

4.2 Avião F8

O avião de caça F8 foi desenvolvido na década de 1950 pela marinha dos EUA e utilizado no desenvolvimento do sistema *fly-by-wire* digital pela NASA na década de 1970 (NASA, 2014). O caça F8 foi escolhido para este trabalho devido às características do seu modelo longitudinal linearizado.

As entradas do modelo são distúrbios na deflexão do ângulo do elevador $\hat{\delta}_e$ [rad] e na deflexão do ângulo do *flapperon* $\hat{\delta}_f$ [rad]. As saídas do modelo são os distúrbios no



Figura 7 – Caça F8 utilizado pela NASA.

Fonte: F-8 Digital Fly-By-Wire Image Gallery (NASA, 2015)

ângulo de arfagem $\hat{\theta}$ [rad] e no ângulo da trajetória de voo $\hat{\gamma}_P$ [rad], resultando em um modelo quadrado de duas entradas e duas saídas.

Uma análise no domínio do tempo em malha aberta do F8 pode ser encontrada em (KULCSÁR, 2000). A dinâmica longitudinal do caça F8 foi linearizada a Mach 1,2 em 30.000 [pés] de altitude, resultando no seguinte modelo de espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{q}} \\ \dot{\hat{u}} \\ \dot{\hat{\alpha}} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 & -0,0006 & -13,2 & 0 \\ 0 & -0,014 & -16,64 & -32,2 \\ 1 & -0,0001 & -1,65 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{u} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -19 & -2,5 \\ -0,66 & -0,5 \\ -0,16 & -0,6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_e \\ \hat{\delta}_f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\gamma}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{u} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_e \\ \hat{\delta}_f \end{bmatrix},$$

(4.1)

no qual os estados são o ângulo de inclinação perturbado $\hat{\theta}$, o ângulo de ataque perturbado $\hat{\alpha}$, a velocidade horizontal perturbada \hat{u} e a taxa de inclinação perturbada \hat{q} . As entradas da planta são o ângulo do elevador perturbado $\hat{\delta}_e$ e o ângulo do *flapperon* perturbado

$\hat{\delta}_f$, enquanto as saídas da planta são o ângulo de inclinação perturbado e o ângulo de trajetória de voo perturbado $\hat{\gamma}_p$, definido como $\hat{\theta} - \hat{\alpha}$.

A análise da planta de processo em (4.1) indica que este sistema é quadrado, de fase mínima, controlável, observável e todos os seus polos multivariáveis estão no semiplano à esquerda. Assim, a expansão da planta do processo pode ser feita por qualquer polo estável finito $s = -a$ ou mesmo na origem, desde que a matriz A_P^{-1} exista. Se a expansão é feita com $a = 0,01$, este sistema ainda permanecerá controlável e observável, e, portanto, o controle \mathcal{H}_∞ /LTR pode ser aplicado.

Na Tabela 1 um resumo das principais características do modelo da planta, do ponto de vista da aplicação da metodologia proposta, é apresentado.

Tabela 1 – Resumo das características do modelo do avião F8

Item	Característica
1	Sistema quadrado
2	Sistema de fase mínima
3	Controlável
4	Observável
5	Estável em malha aberta
6	Matriz A_P invertível

Na Tabela 2 são explicitados os parâmetros utilizados para a parametrização para uma expansão por uma matriz diagonal de polos em $-0,01$.

Tabela 2 – Parâmetros utilizados para o modelo do avião F8

Parâmetro	Valor
μ	1
ρ	1,6
γ	0,0001
a	0,01

Nota-se também que A_P é uma matriz Hurwitz, e mantém as condições do Teorema 1. Usando os parâmetros de ajuste mencionadas anteriormente neste capítulo, e atribuindo L como em (3.29), o gráfico dos valores singulares de sensibilidade pode ser visto na Figura 8.

Na Figura 8, o limitante superior da sensibilidade dado pela equação (2.11a) é representado pela linha tracejada. Uma vez que $a = 0,01$, $\gamma = 1,6$ e $\mu = 1$, o máximo valor singular é limitado a 0,01 (-40 [dB]) para baixas frequências, e assim, o erro em regime permanente esperado devido a uma excitação do tipo degrau nas entradas de comando e/ou distúrbios é no máximo igual a 0,01. As outras linhas são o máximo e mínimo valor

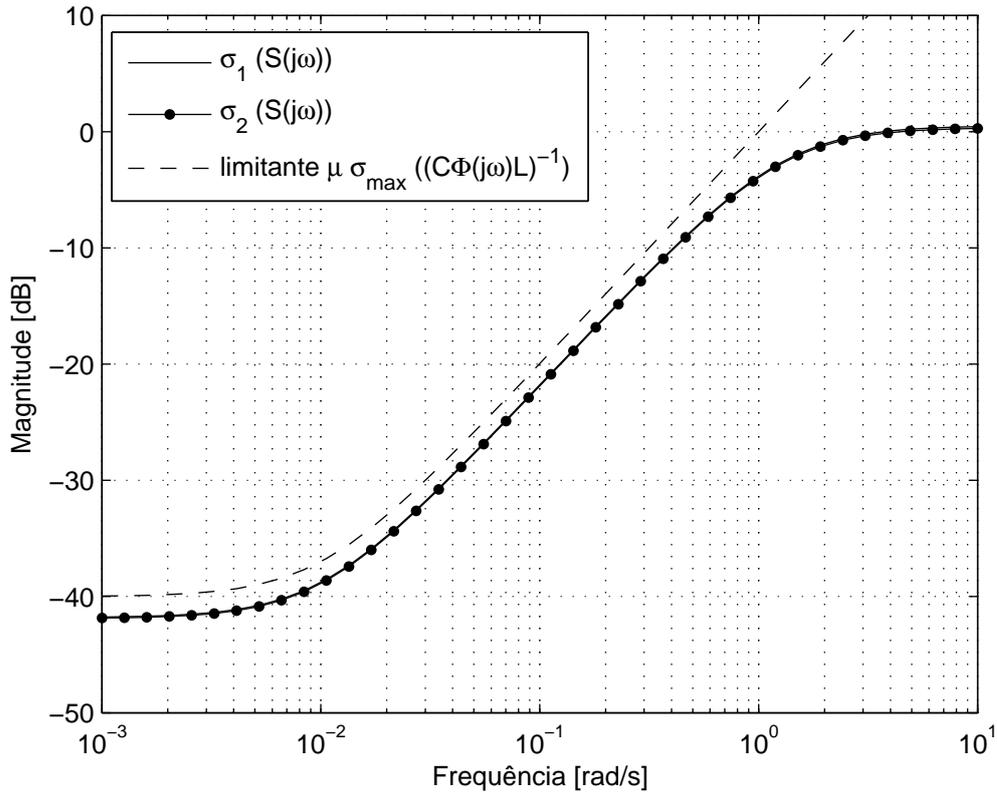


Figura 8 – Gráfico da sensibilidade para o modelo do avião F8.

singular da sensibilidade do sistema em malha fechada, e como esperado todos os valores singulares reais são iguais uns aos outros, uma vez que a metodologia proposta força-os a serem uniformes.

É esperado que o tempo de resposta para um degrau unitário aplicado a ambas as entradas de comando seja como a resposta de dois sistemas de primeira ordem igualmente desacoplados. Este comportamento pode ser visto na Figura 9.

A fim de estabelecer uma comparação, gráficos de resposta também foram obtidos para $a = 0, 1$ (dez vezes mais rápido do que o polo anterior) e $a = 0$ (um polo na origem).

Para $a = 0$, o valor de K é dado por

$$K = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,8 & -0,0006 & -13,2 & 0 & -19 & -2,5 \\ -3,528 & -0,014 & 1386 & 2990 & 0,6494 & -0,019 \\ 1 & -0,0001 & -2,95 & -0,0049 & -0,1604 & -0,6 \\ 1 & 0 & 0,0012 & -1,3032 & 0,0004 & 0,000017 \\ 72,92 & 0,00094 & -68,09 & 1044 & -52,37 & -2,5444 \\ -3,72 & -0,0054 & 915,13 & -956,73 & -2,54 & -32,7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4521 & 1420 \\ 1,32 & -1,32 \\ 1,33 & 0,003 \\ -0,41 & 0,44 \\ -2,788 & 3,267 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -72,92 & -0,00094 & 68,09 & -1044 & 52,37 & 2,5444 \\ 3,72 & 0,0054 & -915,13 & 956,73 & 2,54 & 32,7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.2a)$$

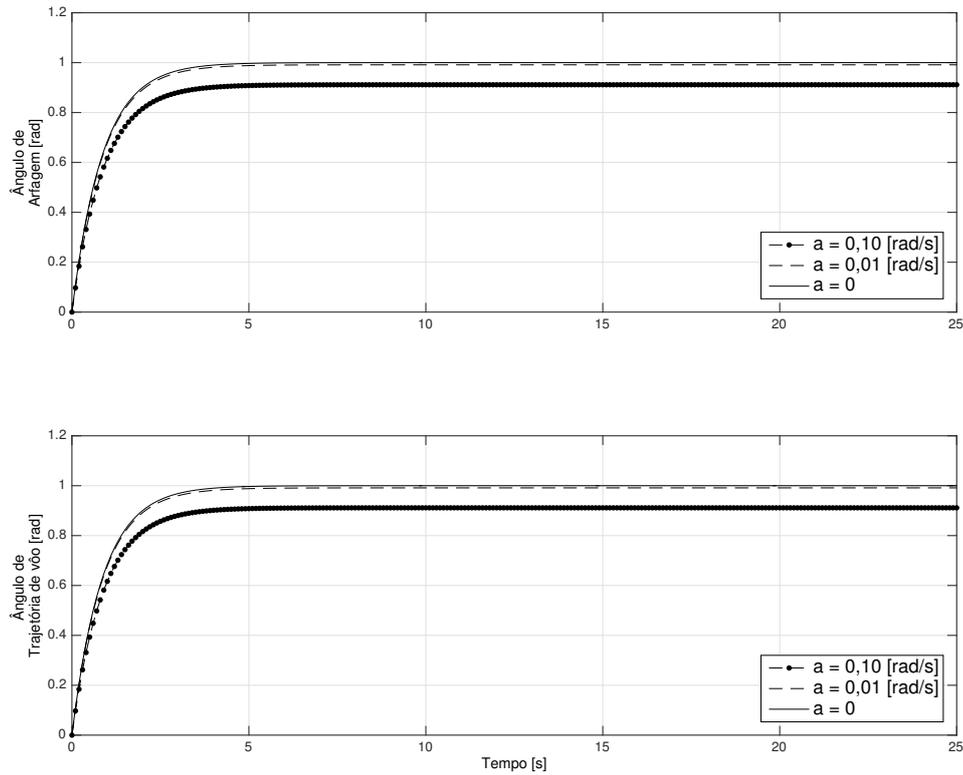


Figura 9 – Gráfico da resposta a um degrau unitário aplicado em ambas as entradas de comando do caça F8.

Para $a = 0,01$, o valor de K é dado por

$$K = \left[\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -0,8 & -0,0006 & -13,2 & 0,0129 & -19 & -2,5 \\ -12,54 & -0,014 & 4910 & 1057 & 3,99 & 1,21 \\ 1 & -0,0001 & -2,93 & -0,0047 & -0,1604 & -0,6 \\ 1 & 0 & 0,0011 & -1,2855 & 0,0004 & 0,000017 \\ 72,92 & 0,00094 & -68,13 & 1044 & -52,37 & -2,5455 \\ -3,72 & -0,0054 & 914,49 & -957,95 & -2,55 & -32,7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0,0131 & -0,00003 \\ -0,00016 & 4988 \\ 1,31 & -1,29 \\ 1,31 & 0,003 \\ -0,29 & 0,40 \\ -0,880 & 2,61 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -72,92 & -0,00094 & 68,13 & -1044 & 52,37 & 2,5455 \\ 3,72 & 0,0054 & -914,49 & 957,95 & 2,55 & 32,7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (4.2b)$$

Para $a = 0,1$, o valor de K é dado por

$$K = \left[\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -0,8 & -0,0006 & -13,2 & 0,1137 & -19 & -2,5 \\ 0,5667 & -0,014 & -216,26 & -456,98 & -0,87 & -0,577 \\ 1 & -0,0001 & -2,78 & -0,0022 & -0,1604 & -0,6 \\ 1 & 0 & 0,0004 & -1,1371 & 0,0004 & 0,000017 \\ 72,92 & 0,00094 & -68,10 & 1044 & -52,37 & -2,5444 \\ -3,72 & -0,0054 & 914,77 & -955,97 & -2,54 & -32,7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0,1166 & -0,00023 \\ 639,91 & -202,39 \\ 1,16 & -1,15 \\ 1,16 & 0,0024 \\ -0,40 & 0,427 \\ -3,19 & 2,90 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -72,92 & -0,00094 & 68,10 & -1044 & 52,37 & 2,5444 \\ 3,72 & 0,0054 & -914,77 & 955,97 & 2,54 & 32,7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (4.2c)$$

Como esperado, o sistema em malha fechada é totalmente desacoplado, e ambas as saídas comportam-se como sistemas de primeira ordem iguais (para o mesmo a). Também como esperado, menores valores de a irão produzir erros menores em regime permanente se os outros parâmetros permanecerem inalterados, uma característica importante para sistemas cujo o uso de integradores é proibitivo na expansão da malha objetivo. A expansão por uma matriz diagonal de polos em $-a$ insere um erro controlado em regime permanente, tão pequeno quanto desejado. Este é um exemplo de aplicação bastante comum, e as recomendações de Athans (ATHANS, 1986) e o procedimento proposto por O'Dell e Misawa (O'DELL; MISAWA, 1995) poderiam ser utilizadas para dar forma à malha objetivo.

4.3 Helicóptero CH-47 Chinook

O Boeing CH-47 Chinook foi projetado e produzido inicialmente na década de 1960. Trata-se de um helicóptero americano com dois rotores em tandem para cargas pesadas. Suas principais funções são a movimentação de tropas, deslocamento de artilharia e reabastecimento no campo de batalha (BOEING, 2014).



Figura 10 – Boeing CH-47 Chinook.

Fonte: CH - 47 Chinook Gallery (BOEING, 2015)

As entradas da planta são a deflexão no comando do coletivo $\hat{\delta}_c$ [rad] e a deflexão no comando do coletivo diferencial $\hat{\delta}_d$ [rad]. As saídas da planta são a velocidade vertical perturbada \hat{w} [pés/s] e o ângulo de arfagem perturbado $\hat{\theta}$ [rad], resultando em uma planta quadrada de duas entradas e duas saídas. Mais detalhes podem ser encontrados em

(DOYLE; STEIN, 1981). O modelo no espaço de estados linearizado para uma velocidade de 40 [*knots*] é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{u}} \\ \dot{\hat{w}} \\ \dot{\hat{q}} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,02 & 0,005 & 2,4 & -32 \\ -0,14 & 0,44 & -1,3 & -30 \\ 0 & 0,018 & -1,6 & 1,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \\ \hat{q} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,14 & -0,12 \\ 0,36 & -8,6 \\ 0,35 & 0,009 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_c \\ \hat{\delta}_d \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\theta} \\ \dot{\hat{w}} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_c \\ \hat{\delta}_d \end{bmatrix}.$$

No qual os estados são o ângulo de arfagem perturbado $\hat{\theta}$ [rad] a taxa de arfagem perturbada \hat{q} [rad/s], a velocidade vertical perturbada \hat{w} [pés/s] e a velocidade horizontal perturbada \hat{u} [pés/s]. Observando (4.3), é possível inferir que a planta tem um par de polos complexo conjugado em $s_{1,2} = 0,4913 \pm j0,4151$ e dois polos reais em $s_3 = 0,0652$ e $s_4 = -2,2279$. A planta também tem um zero em $z_1 = -0,018$, e, assim, a planta é de fase mínima¹. Dado que o sistema possui um polo à direita do semiplano aberto, o sistema é instável em malha aberta. Além disso, o sistema é controlável e observável.

Na Tabela 3 um resumo das principais características do modelo da planta, do ponto de vista da aplicação da metodologia proposta, é apresentado.

Tabela 3 – Resumo das características do modelo do helicóptero CH-47 Chinook

Item	Característica
1	Sistema quadrado
2	Sistema de fase mínima
3	Controlável
4	Observável
5	Instável em malha aberta
6	Matriz A_P invertível

Na Tabela 4 são explicitados os parâmetros utilizados para a parametrização para uma expansão por uma matriz diagonal de polos em 0,01.

¹ Embora possa haver várias definições de fase mínima, considera-se neste ponto uma planta de fase mínima aquela que não possui zeros de transmissão no semiplano à direita ou atrasos de transporte.

Tabela 4 – Parâmetros utilizados para o modelo do helicóptero CH-47 Chinook

Parâmetro	Valor
μ	1
ρ	1,6
γ	0,0001
a	0,01

Expandindo a planta de processo G_P com $a = 0,01$, a planta G permanece controlável e observável. Logo, o controle \mathcal{H}_∞ /LTR é aplicável. Portanto, a matriz L pode ser escolhida como indicado em (3.29), mas as condições do Teorema 1 não são mantidas, dado que a planta não é estável em malha aberta (A_P não é uma matriz de Hurwitz). No entanto, as recomendações de Athans (ATHANS, 1986) e o procedimento de O'Dell e Misawa (O'DELL; MISAWA, 1995) ainda podem ser aplicados neste caso, desde que A_P^{-1} exista.

A Figura 11 mostra o gráfico dos valores singulares de sensibilidade para o sistema em malha fechada com os parâmetros de projeto mencionados anteriormente neste capítulo.

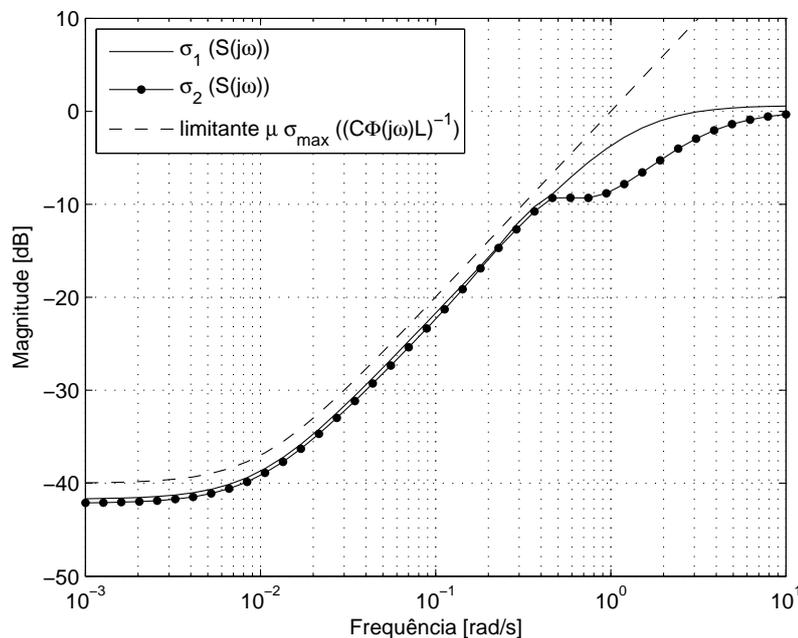


Figura 11 – Gráfico dos valores singulares de sensibilidade para o helicóptero CH-47 Chinook.

A análise da Figura 11 indica que, mesmo para sistemas instáveis em malha aberta é possível moldar a sensibilidade como desejado. No entanto, uma vez que este é um sistema bastante mal condicionado, a malha objetivo não poderia ser satisfatoriamente recuperada com $\rho = 0,0001$. Assim, para frequências próximas da região de transição, os

valores singulares de sensibilidade não são uniformes, e, portanto, o desacoplamento não é total.

No entanto, em baixas frequências, os valores singulares de sensibilidade são uniformes e, assim, a malha fechada apresenta desacoplamento nesta gama de frequências. Este é um bom resultado já que a região de baixas frequências é importante pela rejeição de distúrbios e o desempenho em regime permanente. A Figura 12 mostra o gráfico da resposta do sistema para um degrau unitário aplicado a ambas as entradas de comando.

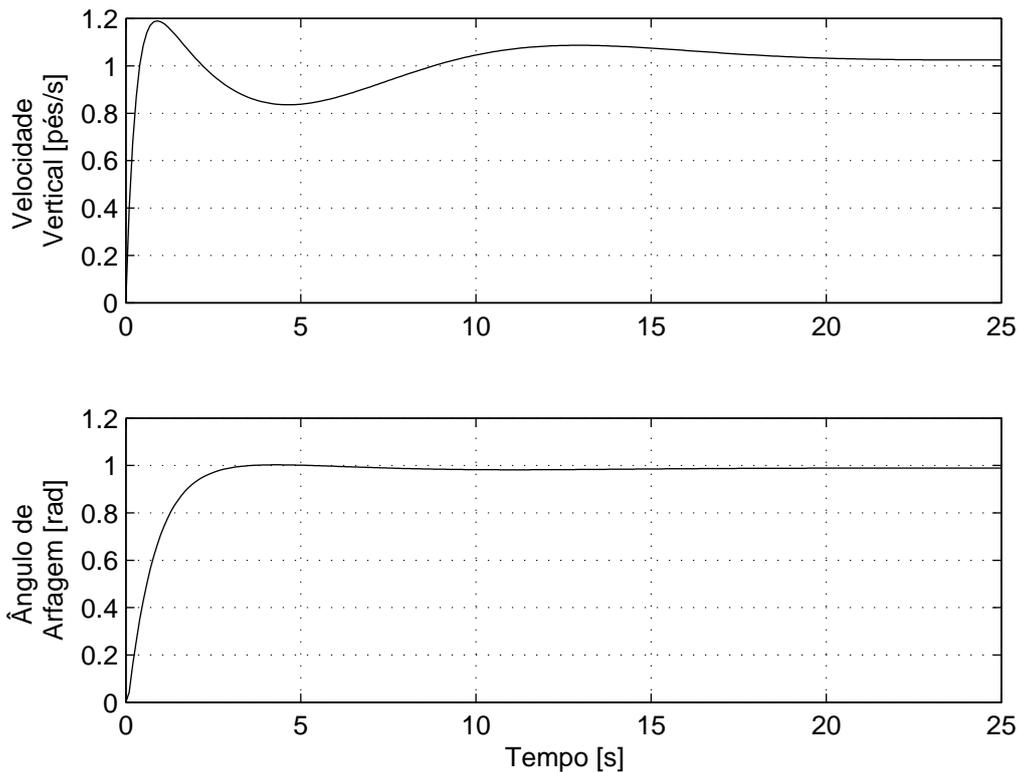


Figura 12 – Gráfico da resposta para um degrau unitário aplicado a ambas as entradas de comando para o helicóptero CH-47 Chinook.

Para $a = 0,01$, o valor de K é dado por

$$K = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,02 & 570,59 & -0,65 & 5190 & 0,1233 & -0,12 \\ -0,14 & -4,45 & -1,3 & -29,89 & 0,36 & -8,6 \\ 0 & 0,1289 & -1,6 & 1,2056 & 0,35 & 0,009 \\ 0 & 0,1026 & 1,0008 & -1,3165 & 0 & 0 \\ 0,8753 & -4180 & -5817 & -100002 & -66,08 & -52,13 \\ -21,33 & 99971 & -444,81 & -8836 & 52,12 & -1310 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -570,59 & -5325 \\ 4,89 & -0,1026 \\ -0,1109 & -0,0059 \\ -0,1026 & 1,34 \\ -0,71 & -6,72 \\ 9,13 & 81,75 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -0,8753 & 4180 & 5817 & 100002 & 66,08 & 52,13 \\ 21,33 & 99971 & 444,81 & 8836 & -52,12 & 1310 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

A análise da Figura 12 indica que o comportamento do ângulo de arfagem se assemelha a um sistema de primeira ordem, o que não acontece com o comportamento da

velocidade vertical. No entanto, ambos mostram semelhantes erros em regime permanente, dado que em baixas frequências os valores singulares em malha fechada são uniformes. Este é um resultado bastante expressivo, uma vez que o modelo utilizado não cumpre integralmente todos os requisitos para a aplicação da metodologia proposta, no caso, o sistema não é estável em malha aberta.

4.4 Helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida

O último exemplo de projeto é um modelo de helicóptero em escala reduzida com dois graus de liberdade. A planta consiste em um kit de um helicóptero em escala reduzida montado no topo de uma haste presa a uma base. Os dois rotores do helicóptero são formados por hélices acionadas por motores CC, o rotor principal é montado horizontalmente em relação à fuselagem e o rotor de cauda é montado verticalmente em relação à fuselagem. O objetivo é controlar os ângulos de arfagem e de guinada do helicóptero aplicando-se tensão em ambos os motores de corrente contínua que impulsionam as hélices. A Figura 4.4 mostra uma representação das forças atuantes no modelo e os ângulos envolvidos, sendo r_y a distância entre o motor de cauda e o eixo de guinada, r_p a distância entre o motor principal e o eixo de guinada, l_{cm} a distância entre o centro de massa e o eixo de guinada, F_p a força resultante do motor principal, F_y a força resultante do motor de cauda e F_g a força da gravidade.

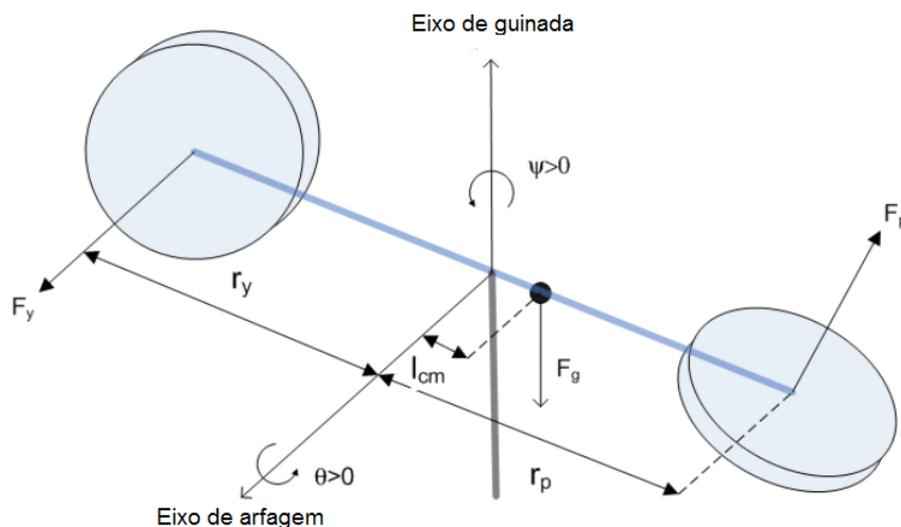


Figura 13 – Helicóptero em escala reduzida com dois graus de liberdade.

Fonte: 2 DOF Helicopter (QUANSER, 2015)

O modelo dinâmico da planta apresenta algumas características interessantes para a metodologia proposta neste trabalho. As entradas do modelo são a tensão perturbada de

armadura do motor principal \hat{e}_{a_m} [V] e a tensão perturbada de armadura do motor de cauda \hat{e}_{a_s} [V]. As saídas do modelo são os ângulos perturbados de arfagem $\hat{\theta}$ [rad] e de guinada $\hat{\psi}$ [rad], resultando em um modelo quadrado 2x2. Mais detalhes do equacionamento podem ser encontrados em (QUANSER, 2006).

A dinâmica da planta do helicóptero foi linearizada para a posição em que ambos os ângulos de arfagem e guinada são zero radianos, resultando no modelo no espaço de estados encontrado em (QUANSER, 2006), representado como

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}} \\ \dot{\hat{\psi}} \\ \ddot{\hat{\theta}} \\ \ddot{\hat{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2,527 & 0 & -9,275 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3,495 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\psi} \\ \dot{\hat{\theta}} \\ \dot{\hat{\psi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2,367 & 0,079 \\ 0,241 & 0,791 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_{a_m} \\ \hat{e}_{a_s} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\psi} \\ \dot{\hat{\theta}} \\ \dot{\hat{\psi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_{a_m} \\ \hat{e}_{a_s} \end{bmatrix}.$$

Analisando (4.5), é possível verificar que a planta tem quatro polos reais: $s_1 = -0,2809$, $s_2 = -3,4955$, $s_3 = -8,9942$ e um na origem $s_4 = 0$, e não há zeros de transmissão. Assim, este é um sistema quadrado de fase mínima, e é possível demonstrar que também é controlável e observável. Uma vez que este sistema possui um polo na origem, A_P^{-1} não existe e, portanto, a recomendação de Athans (ATHANS, 1986) e a metodologia de O'Dell e Misawa (O'DELL; MISAWA, 1995) não podem ser aplicadas nesta situação. Portanto, somente a metodologia proposta neste trabalho é possível de ser aplicada quando $a > 0$.

Na Tabela 5 um resumo das principais características do modelo da planta, do ponto de vista da aplicação da metodologia proposta, é apresentado.

Tabela 5 – Resumo das características do modelo do helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida

Item	Característica
1	Sistema quadrado
2	Sistema de fase mínima
3	Controlável
4	Observável
5	Possui um polo na origem
6	Matriz A_P não invertível

Na Tabela 6 são explicitados os parâmetros utilizados para a parametrização para uma expansão por uma matriz diagonal de polos em 0,01.

Tabela 6 – Parâmetros utilizados para o modelo do helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida

Parâmetro	Valor
μ	1
ρ	1,6
γ	0,0001
a	0,01

Expandindo a planta de processo com $a = 0,01$, este sistema permanece controlável e observável, e, assim, o controle \mathcal{H}_∞ /LTR pode ser aplicado a este sistema. Observe também que, mesmo com um dos autovalores de A_P seja zero, o critério de estabilidade do Lyapunov em (3.42) ainda é válido, e, portanto, as condições do Teorema 1 são mantidas (mesmo que este sistema seja instável em malha aberta devido ao polo na origem). Utilizou-se a atribuição de L como em (3.29) e os parâmetros de projeto mencionados anteriormente neste capítulo. A Figura 14 mostra o gráfico dos valores singulares de sensibilidade.

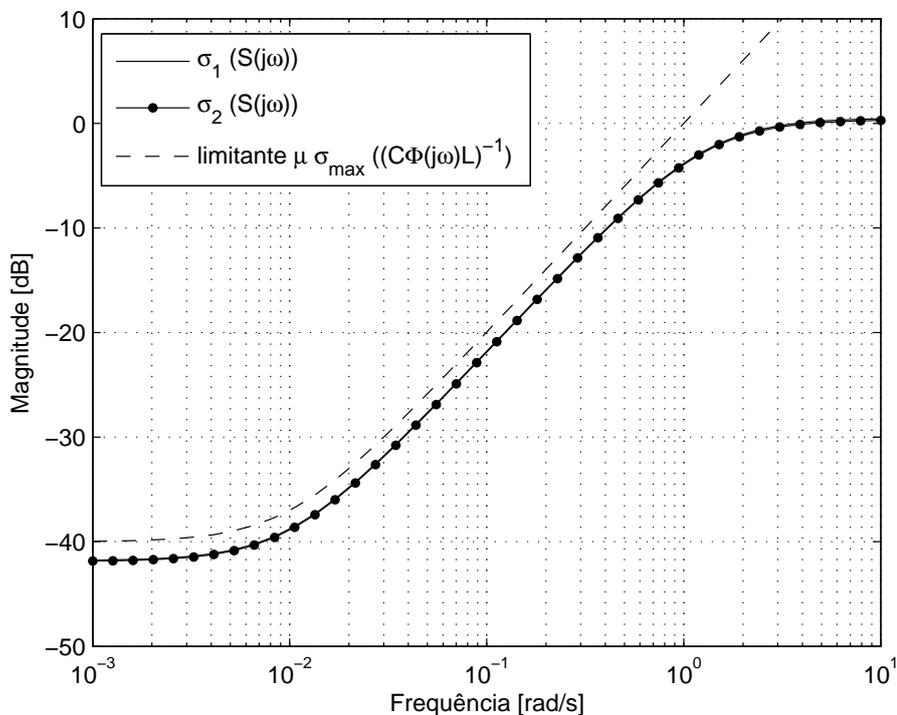


Figura 14 – Gráfico dos valores singulares de sensibilidade do helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida.

A principal consequência da parametrização proposta pode ser vista na Figura 14, foi possível moldar os valores singulares de sensibilidade, em que os procedimentos

propostos por Athans (ATHANS, 1986) e O'Dell e Misawa (O'DELL; MISAWA, 1995) não podem ser aplicados. Além disso, os valores singulares reais são uniformes em todas as frequências, desacoplando completamente o sistema em malha fechada.

Para $a = 0,01$, o valor de K é dado por

$$K = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,27 & -0,00051 & 1 & -0,00003 & 0 & 0 \\ 0,0004 & -1,28 & -0,00003 & 1 & 0 & 0 \\ -2,51 & 0 & -9,28 & 0 & 2,37 & 0,08 \\ 0 & 0,0128 & 0 & -3,4955 & 0,24 & 0,79 \\ -99807 & -5575 & -2790 & -67,68 & -115,06 & -2,55 \\ 6108 & -99823 & 302,15 & -4301 & -3,14 & -82,16 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1,2854 & -0,0013 \\ -0,0012 & 1,2945 \\ -0,0129 & 0,00001 \\ 0,00001 & -0,0129 \\ 1,3356 & 0,00005 \\ -0,4067 & -0,0572 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 99807 & 5575 & 2790 & 67,68 & 115,06 & 2,55 \\ -6108 & 99823 & -302,15 & 4301 & 3,14 & 82,16 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Com os parâmetros atribuídos, é esperado um erro em regime permanente menor que 1% e que ambas as saídas se comportem como sistemas de primeira ordem idênticos. A Figura 15 mostra a resposta do sistema a um degrau unitário aplicado a ambas as entradas da planta. Assim como o modelo do avião F8, o modelo do helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida cumpre todos os requisitos para a aplicação da metodologia, sendo os valores singulares de sensibilidade e a resposta temporal idênticos para ambos os casos.

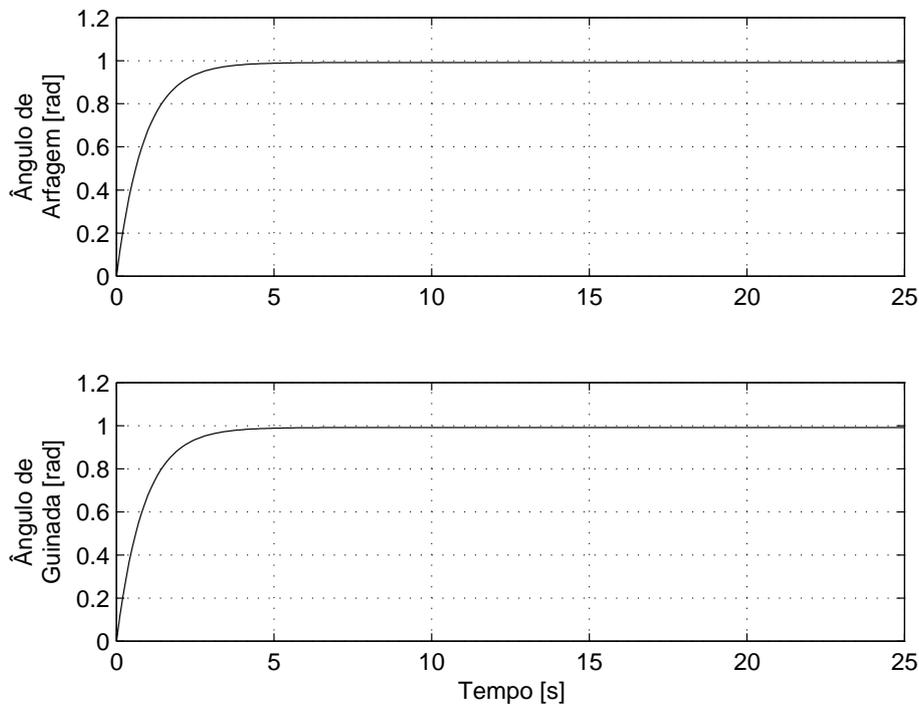


Figura 15 – Gráfico da resposta temporal a um degrau unitário aplicado a ambas as entradas da planta do helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida.

5 Conclusões

Neste trabalho de tese foi apresentada uma abordagem sobre a parametrização da malha objetivo para o controle $\mathcal{H}_\infty/\text{LTR}$ pela saída e também pela entrada. Foi demonstrado que essa abordagem é sempre possível desde que as condições para que ocorra a recuperação da malha objetivo (LTR) sejam obedecidas. Obtém-se assim uma ferramenta simples para dar forma à função de sensibilidade no controle $\mathcal{H}_\infty/\text{LTR}$.

Além disso, se a planta de processo não possuir polos no semiplano à direita excluindo-se a origem, provou-se que a malha objetivo tenderá a n sistemas de primeira ordem igualmente desacoplados, fornecendo também uma ferramenta para moldar diretamente a resposta desejada, resultado que não foi abordado por trabalhos anteriores. A parametrização da malha objetivo proposta pode ser estendida ao controle LQG/LTR se considerações apropriadas forem realizadas.

Os resultados também expandem as recomendações de Athans para o LTR de saída, mesmo para uma planta de processo semi-própria, uma vez que não depende da existência de uma matriz pseudo-inversa. Além disso a expansão não necessariamente tem que ser feita por um polo na origem, mas pode ser realizada para qualquer polo real, finito e estável.

Partindo-se da matriz L proposta, é possível resolver a equação algébrica de Ricatti generalizada do observador de estados de maneira simplificada, resumindo a solução a um escalar que multiplica a própria L multiplicada de sua transposta. Além disso a equação do ganho do observador de estados se resume a um escalar multiplicado pela matriz L proposta.

A principal conclusão tem por base o Teorema 1, no qual foi provado que de fato a malha objetivo se resume a uma matriz de transferência diagonal com polos em $-a$ desde que o sistema seja estável em malha aberta. Além disso, o processo dual é válido para o caso do LTR de entrada partindo-se da matriz H proposta, há a recuperação do comportamento do regulador que se resume também a uma matriz de transferência diagonal com polos em $-a$ desde que as condições do Teorema 2 sejam respeitadas.

Como trabalhos futuros propostos estão o desenvolvimento das propriedades para uma planta de processo estável em malha aberta para o caso do controle $\mathcal{H}_\infty/\text{LTR}$ em tempo discreto para a expansão por qualquer valor de polo discreto estável. Além do desenvolvimento de propriedades o controle $\mathcal{H}_\infty/\text{LTR}$ pela entrada também em tempo discreto.

Apêndices

APÊNDICE A – Código desenvolvido no MATLAB[®] para o avião F8

Neste apêndice é disponibilizado o código desenvolvido em MATLAB[®] para aplicação e validação da metodologia proposta no modelo dinâmico do avião F8.

```

1 % Controle H infinito / LTR de saída do modelo do F8
2 % 03/02/2017
3
4 clear all;
5 clc;
6
7 % -----
8 % Modelo do F8
9 %
10 % Vetor de estados:
11 % – pitch rate (q),
12 % – pertubated horizontal velocity (u),
13 % – pertubated angle of attack (alpha),
14 % – pertubated pitch angle (theta)
15 %
16 % Saídas:
17 % – pertubated pitch angle (theta),
18 % – pertubated flight path angle (gamma)
19 %
20 % Entradas:
21 % – pertubated elevator angle deflection (delta_e),
22 % – pertubated flapperon angle deflection (delta_f)
23 %
24 % A nominal model for the dynamics relating these variables at
    30000 feet
25 % and 1.2 Mach is (Kulcsar, LQG/LTR controller design for an
    aircraft model)
26 ap = [ -0.8 -0.0006 -13.2 0; 0 -0.014 -16.64 -32.2; 1 -0.0001
    -1.65 0; 1 0 0 0 ];
27 bp = [ -19 -2.5; -0.66 -0.5; -0.16 -0.6; 0 0 ];
28 cp = [ 0 0 0 1; 0 0 -1 1 ];

```

```

29 dp = zeros(2);
30
31 gp = ss(ap, bp, cp, dp);
32
33 % -----
34 % Expansao por polo real
35 ae = 0.01;
36 gx = ss(-ae*eye(2), eye(2), eye(2), zeros(2));
37 gi = series(gx, gp);
38
39 [ai, bi, ci, di, ti] = ssdata(gi);
40 [po, ze] = pzmap(gi)
41
42 % -----
43 % Controle H infinito / LTR
44 mc = ctrb(ai, bi);
45 mo = obsv(ai, ci);
46
47 co = rank(mc);
48 if co == size(ai) disp('O sistema e de estados controlaveis.');
```

```

49 else disp('O sistema nao e de estados controlaveis.');
```

```

50 end
51
52 ob = rank(mo);
53 if ob == size(ai) disp('O sistema e de estados observaveis.');
```

```

54 else disp('O sistema nao e de estados observaveis.');
```

```

55 end
56
57 ui = [ae*eye(4)+ap bp; cp dp];
58
59 hi = ci;
60 ro = 1e-3;
61 li = [ zeros(4,2); 1 0; 0 1 ];
62 li = inv(ui)*li;
63 mu = 1;
64 ga = 1.6;
65
66 xi = are(ai, ro^-2*bi*bi'-ga^-2*li*li', hi'*hi);
67 kc = ro^-2*bi'*xi;

```

```

68
69 yi = are(ai', mu^-2*ci'*ci-ga^-2*hi'*hi, li*li');
70 kf = mu^-2*yi*ci';
71
72 zk = (eye(size(ai))-ga^-2*yi*xi)^-1;
73 ak = ai + ga^-2*li*li'*xi - bi*kc - zk*kf*ci;
74 bk = zk*kf;
75 ck = kc;
76 dk = zeros(2);
77
78 gk = ss(ak, bk, ck, dk);
79 gn = ss(zeros(2), zeros(2), zeros(2), eye(2));
80 go = ss(ai, kf, ci, zeros(2));
81 gy = ss(ai, li, ci, zeros(2));
82
83 gl = series(gk, gi);
84 gs = feedback(gn, gl); % Funcao sensibilidade S
85 gf = feedback(gl, gn); % Funcao malha fechada T
86 go = feedback(go, gn); % Filtro de Kalman
87
88 % -----
89 % Valores singulares do controle H infinito / LTR MIMO
90 figure;
91 [sv, wf] = sigma(gs, {1e-3, 1e+1});
92 [ws, wf] = sigma(gy, wf);
93 sv = 20*log10(sv);
94 ws = 20*log10(mu*ws(2,:).^-1);
95 semilogx(wf, sv(1,:), wf, sv(2,:), wf, ws);
96 axis([1e-3 1e+1 -50 10]);
97 grid;
98 xlabel('Frequencia [rad/s]');
99 ylabel('Magnitude [dB]');
100
101 % -----
102 % Malha fechada do controle H infinito / LTR MIMO
103 tk = 0:0.1:25;
104
105 figure;
106 sk = [ ones(size(tk)); ones(size(tk)) ];

```

```
107 [yg, tg, xg] = lsim(gf, sk', tk');
108 [yo, to, xo] = lsim(go, sk', tk');
109
110 subplot(211);
111 plot(tg, yg(:,1), 'b');
112 hold on;
113 plot(to, yo(:,1), 'g');
114 grid;
115 axis([0 25 0 1.5]);
116 ylabel('Angulo de arfagem [rad]');
117 subplot(212);
118 plot(tg, yg(:,2), 'b');
119 hold on;
120 plot(to, yo(:,2), 'g');
121 grid;
122 axis([0 25 0 1.5]);
123 ylabel('Angulo de trajetoria de voo [rad]');
124 xlabel('Tempo [s]');
```

APÊNDICE B – Código desenvolvido no MATLAB[®] para o helicóptero CH-47 Chinook

Neste apêndice é disponibilizado o código desenvolvido em MATLAB[®] para aplicação e validação da metodologia proposta no modelo dinâmico do helicóptero CH-47 Chinook.

```

1 % Controle H infinito / LTR de saída do modelo do CH47
2 % 03/02/2017
3
4 clear all;
5 clc;
6
7 % _____
8 % Modelo do CH47
9 %
10 % Vetor de estados:
11 % – pertubated horizontal velocity (u),
12 % – pertubated vertical velocity (w),
13 % – pitch rate (q),
14 % – pertubated pitch angle (theta)
15 %
16 % Saídas:
17 % – pertubated vertical velocity (w),
18 % – pertubated pitch angle (theta)
19 %
20 % Entradas:
21 % – colletive rotor thrust command deflection (delta_c),
22 % – differential colletive rotor thrust command deflection (
    delta_d)
23 %
24 % A nominal model for the dynamics relating these variables at
    40 knot
25 % airspeed is (Doyle and Stein, Multivariable feedback design:
    concepts for

```

```

26 % a classical / modern synthesis)
27 ap = [ -0.02 0.005 2.4 -32; -0.14 0.44 -1.3 -30; 0 0.018 -1.6
        1.2; 0 0 1 0 ];
28 bp = [ 0.14 -0.12; 0.36 -8.6; 0.35 0.009; 0 0 ];
29 cp = [ 0 1 0 0; 0 0 0 1 ];
30 dp = zeros(2);
31
32 gp = ss(ap, bp, cp, dp);
33
34 % -----
35 % Expansao por polo real
36 ae = 0.01;
37 gx = ss(-ae*eye(2), eye(2), eye(2), zeros(2));
38 gi = series(gx, gp);
39
40 [ai, bi, ci, di, ti] = ssdata(gi);
41 [po, ze] = pzmap(gi)
42
43 % -----
44 % Controle H infinito / LTR
45 mc = ctrb(ai, bi);
46 mo = obsv(ai, ci);
47
48 co = rank(mc);
49 if co == size(ai) disp('O sistema e de estados controlaveis.');
```

```

50 else disp('O sistema nao e de estados controlaveis.');
```

```

51 end
52
53 ob = rank(mo);
54 if ob == size(ai) disp('O sistema e de estados observaveis.');
```

```

55 else disp('O sistema nao e de estados observaveis.');
```

```

56 end
57
58 ui = [ae*eye(4)+ap bp; cp dp];
59
60 hi = ci;
61 ro = 1e-5;
62 li = [ zeros(4,2); 1 0; 0 1 ];
63 li = inv(ui)*li;
```

```

64 mu = 1;
65 ga = 1.6;
66
67 xi = are(ai , ro^-2*bi*bi'-ga^-2*li*li' , hi'*hi);
68 kc = ro^-2*bi'*xi;
69
70 yi = are(ai' , mu^-2*ci'*ci-ga^-2*hi'*hi , li*li');
71 kf = mu^-2*yi*ci';
72
73 zk = (eye(size(ai))-ga^-2*yi*xi)^-1;
74 ak = ai + ga^-2*li*li'*xi - bi*kc - zk*kf*ci;
75 bk = zk*kf;
76 ck = kc;
77 dk = zeros(2);
78
79 gk = ss(ak, bk, ck, dk);
80 gn = ss(zeros(2), zeros(2), zeros(2), eye(2));
81 go = ss(ai, kf, ci, zeros(2));
82 gy = ss(ai, li, ci, zeros(2));
83
84 gl = series(gk, gi);
85 gs = feedback(gn, gl); % Funcao sensibilidade S
86 gf = feedback(gl, gn); % Funcao malha fechada T
87 go = feedback(go, gn); % Filtro de Kalman
88
89 % -----
90 % Valores singulares do controle H infinito / LTR MIMO
91 figure;
92 [sv, wf] = sigma(gs, {1e-3, 1e+1});
93 [ws, wf] = sigma(gy, wf);
94 sv = 20*log10(sv);
95 ws = 20*log10(mu*ws(2,:).^-1);
96 semilogx(wf, sv(1,:), wf, sv(2,:), wf, ws);
97 axis([1e-3 1e+1 -50 10]);
98 grid;
99 xlabel('Frequencia [rad/s]');
100 ylabel('Magnitude [dB]');
101
102 % -----

```

```
103 % Malha fechada do controle H infinito / LTR MMO
104 tk = 0:0.1:25;
105
106 figure;
107 sk = [ ones(size(tk)); ones(size(tk)) ];
108 [yg, tg, xg] = lsim(gf, sk', tk');
109 [yo, to, xo] = lsim(go, sk', tk');
110
111 subplot(211);
112 plot(tg, yg(:,1), 'b');
113 hold on;
114 plot(to, yo(:,1), 'g');
115 grid;
116 axis([0 25 0 1.5]);
117 ylabel('Velocidade vertical [pes/s]');
118 subplot(212);
119 plot(tg, yg(:,2), 'b');
120 hold on;
121 plot(to, yo(:,2), 'g');
122 grid;
123 axis([0 25 0 1.5]);
124 ylabel('Angulo de arfagem [rad]');
125 xlabel('Tempo [s]');
```

APÊNDICE C – Código desenvolvido no MATLAB[®] para o helicóptero em escala reduzida de dois graus de liberdade

Neste apêndice é disponibilizado o código desenvolvido em MATLAB[®] para aplicação e validação da metodologia proposta no modelo dinâmico do helicóptero em escala reduzida de dois graus de liberdade.

```

1 % Controle H infinito / LTR de saída do modelo do Helicoptero 2
  DOF
2 % 03/02/2017
3
4 clear all;
5 clc;
6
7 % -----
8 % Modelo do Helicoptero 2 DOF
9 %
10 % Vetor de estados:
11 % – pertubated pitch angle (theta),
12 % – pertubated yaw angle (psi),
13 % – pitch rate (q),
14 % – yaw rate (r)
15 %
16 % Saídas:
17 % – pertubated pitch angle (theta),
18 % – pertubated yaw angle (psi)
19 %
20 % Entradas:
21 % – pertubated main motor armature voltage (ea_m),
22 % – pertubated stabilizing (tail) motor armature voltage (ea_s)
23 %
24 % A nominal model for the dynamics relating these variables at 0
  and 0
25 % position (Quanser 2 DOF helicopter manual)
26 ap = [ 0 0 1 0; 0 0 0 1; -2.5267 0 -9.2751 0; 0 0 0 -3.4955 ];

```

```
27 bp = [ 0 0; 0 0; 2.3667 0.0790; 0.2410 0.7913 ];
28 cp = [ 1 0 0 0; 0 1 0 0 ];
29 dp = zeros(2);
30
31 gp = ss(ap, bp, cp, dp);
32
33 % -----
34 % Expansao por polo real
35 ae = 0.01;
36 gx = ss(-ae*eye(2), eye(2), eye(2), zeros(2));
37 gi = series(gx, gp);
38
39 [ai, bi, ci, di, ti] = ssdata(gi);
40 [po, ze] = pzmap(gi)
41
42 % -----
43 % Controle H infinito / LTR
44 mc = ctrb(ai, bi);
45 mo = obsv(ai, ci);
46
47 co = rank(mc);
48 if co == size(ai) disp('O sistema e de estados controlaveis.');
```

```
49 else disp('O sistema nao e de estados controlaveis.');
```

```
50 end
```

```
51
52 ob = rank(mo);
53 if ob == size(ai) disp('O sistema e de estados observaveis.');
```

```
54 else disp('O sistema nao e de estados observaveis.');
```

```
55 end
```

```
56
57 ui = [ae*eye(4)+ap bp; cp dp];
58
59 hi = ci;
60 ro = 1e-5;
61 li = [ zeros(4,2); 1 0; 0 1 ];
62 li = inv(ui)*li;
63 mu = 1;
64 ga = 1.6;
65
```

```

66 xi = are(ai , ro^-2*bi*bi'-ga^-2*li*li' , hi'*hi);
67 kc = ro^-2*bi'*xi;
68
69 yi = are(ai' , mu^-2*ci'*ci-ga^-2*hi'*hi , li*li');
70 kf = mu^-2*yi*ci';
71
72 zk = (eye(size(ai))-ga^-2*yi*xi)^-1;
73 ak = ai + ga^-2*li*li'*xi - bi*kc - zk*kf*ci;
74 bk = zk*kf;
75 ck = kc;
76 dk = zeros(2);
77
78 gk = ss(ak, bk, ck, dk);
79 gn = ss(zeros(2), zeros(2), zeros(2), eye(2));
80 go = ss(ai, kf, ci, zeros(2));
81 gy = ss(ai, li, ci, zeros(2));
82
83 gl = series(gk, gi);
84 gs = feedback(gn, gl); % Funcao sensibilidade S
85 gf = feedback(gl, gn); % Funcao malha fechada T
86 go = feedback(go, gn); % Filtro de Kalman
87
88 % -----
89 % Valores singulares do controle H infinito / LTR MIMO
90 figure;
91 [sv, wf] = sigma(gs, {1e-3, 1e+1});
92 [ws, wf] = sigma(gy, wf);
93 sv = 20*log10(sv);
94 ws = 20*log10(mu*ws(2,:).^-1);
95 semilogx(wf, sv(1,:), wf, sv(2,:), wf, ws);
96 axis([1e-3 1e+1 -50 10]);
97 grid;
98 xlabel('Frequencia [rad/s]');
99 ylabel('Magnitude [dB]');
100
101 % -----
102 % Malha fechada do controle H infinito / LTR MIMO
103 tk = 0:0.1:25;
104

```

```
105 figure ;
106 sk = [ ones(size(tk)); ones(size(tk)) ];
107 [yg, tg, xg] = lsim(gf, sk', tk');
108 [yo, to, xo] = lsim(go, sk', tk');
109
110 subplot(211);
111 plot(tg, yg(:,1), 'b');
112 hold on;
113 plot(to, yo(:,1), 'g');
114 grid;
115 axis([0 25 0 1.5]);
116 ylabel('Angulo de arfagem [rad]');
117 subplot(212);
118 plot(tg, yg(:,2), 'b');
119 hold on;
120 plot(to, yo(:,2), 'g');
121 grid;
122 axis([0 25 0 1.5]);
123 ylabel('Angulo de guinada [rad]');
124 xlabel('Tempo [s]');
```

APÊNDICE D – Artigos publicados

Os trabalhos desenvolvidos na confecção deste trabalho de tese resultaram em publicações nas seguintes revistas

- DA SILVA, DIOGO L. F., DE PAULA, CAIO F., FERREIRA, LUÍS H. C. A New Look at the Target Feedback Loop Parameterization for \mathcal{H}_∞ /LTR Control. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems.* , v.25, p.389 - 399, 2014.
- GUARACY, F. H. D., DA SILVA, DIOGO L. F., FERREIRA, LUÍS H. C. On the Properties of Augmented Open-Loop Stable Plants Using LQG/LTR Control. *IEEE Transactions on Automatic Control.* v. 60, p. 2172 - 2176, 2015.

Além dos seguintes trabalhos apresentados em congresso

- DA SILVA, DIOGO L. F., DE PAULA, CAIO F., FERREIRA, LUIS H. C. On the target feedback loop parameterization for \mathcal{H}_∞ /LTR control In: *2013 IEEE 22nd International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*, Taipei. 2013 IEEE International Symposium on Industrial Electronics. IEEE, 2013. p.1
- GUARACY, FERNANDO H. D., DA SILVA, DIOGO L. F., FERREIRA, LUIS H. C. On the plant augmentation by integrators in the discrete-time LQG/LTR control In: *2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, Juan Les Antibes. 2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA). , 2014. p.1152
- GUARACY, F. H. D., SILVA, D. L. F., FERREIRA, L. H. C. Sobre a expansão da dinâmica de uma planta por integradores no controle LQG/LTR em tempo discreto In: *Congresso Brasileiro de Automática*, 2014, Belo Horizonte. Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática. , 2014. p.2253 - 2259

Referências

AGUIRRE, L. A. *Enciclopédia de Automática: Controle e Automação, Volume 1*. [S.l.]: Blucher, 2007. Citado na página 89.

ARAB-ALIBEIK, H.; SETAYESHI, S. Improved temperature control of a PWR nuclear reactor using an LQG/LTR based controller. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, v. 50, n. 1, p. 211–218, 2003. Citado na página 21.

ATHANS, M. A tutorial on the LQG/LTR method. In: *Proceedings of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1986. p. 1289–1296. Citado 10 vezes nas páginas 20, 27, 32, 37, 38, 43, 56, 58, 61 e 63.

BOEING. *CH - 47 Chinook*. [S.l.], 2014. Disponível em: <<http://www.boeing.com/history/products/ch47-chinook.page>>. Acesso em: 14 de abril 2015. Citado na página 56.

BOEING. *CH - 47 Chinook Gallery*. [S.l.], 2015. Disponível em: <<http://www.boeing.com/defense/ch-47-chinook/#/gallery>>. Acesso em: 7 de abril 2015. Citado na página 56.

de Paula, C. F. *Princípio de Recuperação da Malha Objetivo aplicado ao Controle \mathcal{H}_∞* . Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Itajubá, Instituto de Engenharia de Sistemas e Tecnologia da Informação, Curso de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, Itajubá, 2013. Citado na página 28.

DOYLE, J. C. et al. State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989. Citado 4 vezes nas páginas 21, 23, 25 e 26.

DOYLE, J. C.; STEIN, G. Multivariable feedback design: Concepts for a modern/classical synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, n. 1, p. 4–16, 1981. Citado 3 vezes nas páginas 20, 23 e 57.

ISHIHARA, T.; GUO, H. Design of optimal output disturbance cancellation controllers via loop transfer recovery. *International Journal of Control*, v. 81, p. 1027–1034, 2008. Citado na página 20.

ISHIHARA, T.; GUO, H.; TAKEDA, H. Integral controller design based on disturbance cancellation: Partial LTR approach for non-minimum phase plants. *Automatica*, v. 41, p. 2083–2089, 2005. Citado na página 20.

JBILOU, K.; MESSAOUDI, A.; TABAÂ, K. Some Schur complement identities and applications to matrix extrapolation methods. *Linear Algebra Appl.*, v. 392, p. 195–210, 2004. Citado na página 89.

KULCSÁR, B. LQG/LTR controller design for an aircraft model. *Periodica Polytechnica Transportation Engineering*, v. 28, n. 1-2, p. 131–142, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 52.

- KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal filters. *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 17, n. 1, p. 79–86, 1972. Citado na página 23.
- MATOS, E. J.; SOUZA, R. N.; SOUZA, J. R. B. Using stabilizer dynamic pre-compensator to design robust controllers for an unstable MIMO system. *IEEE Transactions Latin America*, v. 6, n. 1, p. 35–41, 2008. Citado na página 20.
- NASA. *NASA Armstrong Fact Sheet: F-8 Digital Fly-By-Wire Aircraft*. [S.l.], 2014. Disponível em: <<http://www.nasa.gov/centers/armstrong/news/FactSheets/FS-024-DFRC.html>>. Acesso em: 14 de abril 2015. Citado na página 51.
- NASA. *F-8 Digital Fly-By-Wire Image Gallery*. [S.l.], 2015. Disponível em: <<http://www.nasa.gov/centers/armstrong/multimedia/imagegallery/F-8DFBW>>. Acesso em: 7 de abril 2015. Citado na página 52.
- O'DELL, B. D.; MISAWA, E. A. Obtaining uniform singular values of augmented systems using LQG/LTR. In: *Proceedings of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1995. p. 461–465. Citado 8 vezes nas páginas 20, 27, 37, 38, 56, 58, 61 e 63.
- OGATA, K. *Modern Control Engineering*. [S.l.]: Prentice Hall, 2009. Citado na página 19.
- PAULA, C. F. de; FERREIRA, L. H. C. An easy-to-use \mathcal{H}_∞ /LTR control solution with mixed-sensitivity properties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 56, n. 7, p. 1709–1713, 2011. Citado 9 vezes nas páginas 19, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 29 e 42.
- QUANSER. *2 DOF Helicopter. User and Control Manual*. [S.l.]: Quanser, Inc., 2006. Citado na página 61.
- QUANSER. *2 DOF Helicopter*. [S.l.], 2015. Disponível em: <http://www.quanser.com/products/2dof_helicopter>. Acesso em: 7 de abril 2015. Citado na página 60.
- RAVANBOD, L.; NOLL, D.; APKARIAN, P. An extension of the linear quadratic gaussian-loop transfer recovery procedure. *IET Control Theory Applications*, v. 6, n. 14, p. 2269–2278, 2012. Citado na página 20.
- SAFONOV, M. G.; LAUB, A. J.; HARTMANN, G. L. Feedback properties of multivariable systems: the role and use of the return difference matrix. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-26, n. 1, p. 47–65, 1981. Citado na página 23.
- SILVA, D. L. F. da; PAULA, C. F. de; FERREIRA, L. H. C. Sobre a parametrização da malha objetivo no controle \mathcal{H}_∞ /LTR (On the target feedback loop parameterization for \mathcal{H}_∞ /LTR control). In: *Proceedings on XIX Congresso Brasileiro de Automática*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 80–85. Citado na página 21.
- SILVA, D. L. F. da; PAULA, C. F. de; FERREIRA, L. H. C. On the target feedback loop parameterization for \mathcal{H}_∞ /LTR control. In: *2013 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1–5. ISSN 2163-5137. Citado na página 37.
- SILVA, D. L. F. da; PAULA, C. F. de; FERREIRA, L. H. C. A new look at the target feedback loop parameterization for \mathcal{H}_∞ /LTR control. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 25, n. 4, p. 389–399, 2014. ISSN 2195-3899. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s40313-014-0130-x>>. Citado na página 38.

- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. [S.l.]: Wiley, 2005. Citado 8 vezes nas páginas 19, 20, 25, 27, 29, 31, 35 e 45.
- STEIN, G.; ATHANS, M. The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 32, n. 2, p. 105–114, 1987. Citado na página 19.
- SUH, S.; CHUNG, C. C.; LEE, S. Servo controller design for high-bandwidth HDDs. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 38, n. 5, p. 2177–2179, 2002. Citado na página 21.
- TSAI, H. Generalized linear quadratic gaussian and loop transfer recovery design of F-16 aircraft lateral control system. *Engineering Letters*, v. 14, 2007. Citado na página 20.
- TZOU, Y. Y.; WU, H. J. LQG/LTR control of an AC induction servo drive. *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 10, n. 2, p. 214–221, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 38.
- WISE, K.; LAVRETSKY, E. Asymptotic properties of LQG/LTR controllers in flight control problems. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012, (Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences). Citado na página 20.
- ZAREI, J. et al. Design and comparison of LQG/LTR and \mathcal{H}_∞ controllers for a VSTOL flight control system. *Journal of the Franklin Institute*, v. 344, p. 577–594, 2007. Citado na página 20.
- ZHANG, Z.; FREUDENBERG, J. S. Loop transfer recovery for non-minimum phase plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 35, n. 5, p. 547–553, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 38.
- ZOLOTAS, A. C. et al. A study on LQG/LTR control for damping inter-area oscillations in power systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 15, n. 1, p. 151–160, 2007. Citado na página 21.

Anexos

ANEXO A – O Complemento de Schur

Segundo (AGUIRRE, 2007), o complemento de Schur é um artifício frequentemente usado para converter uma desigualdade (convexa) não-linear em uma LMI (ou vice-versa).

Considere uma matriz M com quatro blocos:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

sendo que a submatriz D é quadrada e não-singular (isto é, existe D^{-1}). O complemento de Schur de D em M , denotado por (M/D) é definido por (JBILOU; MESSAOUDI; TABAÂ, 2004) como:

$$(M/D) = A - BD^{-1}C. \quad (\text{A.2})$$

De forma similar, pode-se definir os complementos de Schur abaixo:

$$(M/A) = D - CA^{-1}B. \quad (\text{A.3})$$

$$(M/B) = C - DB^{-1}A. \quad (\text{A.4})$$

$$(M/C) = B - AC^{-1}D. \quad (\text{A.5})$$

se para cada complemento de Schur as matrizes indicadas forem invertíveis.

Particularmente para uma matriz simétrica:

$$M = M^T = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

definem-se os complementos de Schur em relação às submatrizes M_1 e M_3 da forma:

$$(M/M_1) = M_3 - M_2^T M_1^{-1} M_2 \quad (\text{A.7})$$

$$(M/M_3) = M_1 - M_2 M_3^{-1} M_2^T \quad (\text{A.8})$$