

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Ciclo Limite Bifurcando a partir do Infinito em  
Sistemas de Controle Bidimensionais**

**Francisco de Assis Freitas Junior**

**Orientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 7 DE MARÇO DE 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Ciclo Limite Bifurcando a partir do Infinito em  
Sistemas de Controle Bidimensionais**

**Francisco de Assis Freitas Junior**

**Orientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática

**Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias**

ITAJUBÁ – MG

7 DE MARÇO DE 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Ciclo Limite Bifurcando a partir do Infinito em  
Sistemas de Controle Bidimensionais**

**Francisco de Assis Freitas Junior**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 07 de  
março de 2017, conferindo ao autor o título de Mestre em  
Ciências em Matemática

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Marcelo Messias, UNESP

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello, UNIFEI

Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga (Orientador), UNIFEI

ITAJUBÁ – MG

7 DE MARÇO DE 2017

*À todos aqueles e aquelas que de alguma forma se fizeram presentes, incentivaram e ajudaram na concretização deste trabalho.*

# Agradecimentos

A Deus pela força espiritual, pela luz, pela vida e por sua constante presença. À minha família pelo amor, incentivo, amizade e apoio incondicional. À minha namorada pelo afeto, companheirismo e compreensão. Ao meu orientador pelo apoio técnico e científico, pela dedicação na orientação deste trabalho, pela disponibilidade e profissionalismo. Aos professores de todos os níveis de ensino que contribuíram para minha formação acadêmica, pessoal e profissional. Aos meus amigos e colegas de curso. À CAPES, pelo apoio financeiro. Enfim, a todos que colaboraram para a conclusão desta etapa.

*“Qual é a lógica do sistema?”*

*Humberto Gessinger*

# Resumo

O foco principal deste trabalho é estudar o surgimento de um ciclo limite, a partir do infinito, no retrato de fase de sistemas de controle lineares por partes, bidimensionais e simétricos. Estes sistemas estão relacionados com a classe de campos vetoriais não diferenciáveis nos quais os teoremas clássicos de bifurcações não são aplicáveis, de modo que técnicas específicas são necessárias em suas análises. Para tais sistemas, quando linearmente dominados no infinito, são conhecidos resultados que fornecem condições suficientes para que haja uma bifurcação, a partir do infinito, de uma órbita periódica. Assumindo que esta bifurcação ocorra para um valor crítico de um parâmetro, apresentaremos condições para a existência local, unicidade, estabilidade e uma estimativa assintótica para a amplitude da órbita periódica bifurcada. Para isto faremos um estudo da primeira e segunda derivadas da transformação de Poincaré, numa vizinhança do infinito.

**Palavras-chave:** Ciclo Limite no Infinito, Bifurcação, Sistema de Controle.

# Abstract

The main focus of this work is to study the appearance of a limit cycle from the infinity, in the phase portraits of bidimensional symmetric piecewise linear control systems. These systems are related to the class of non-differentiable vector fields for which the classical bifurcation theorems are not applicable so that specific techniques are needed in their analysis. For such systems, when linearly dominated at infinity, results are known which provide conditions in order that a periodic orbit bifurcates from the infinity. Assuming that this bifurcation occurs for a critical value of a parameter, we will present conditions for the local existence, uniqueness, stability and an asymptotic estimate for the size of the bifurcated periodic orbit. For this, we will make a study of the first and second derivatives of the Poincaré transformation in a neighborhood of the infinity.

**Keywords:** Limit Cycle at Infinity, Bifurcation, Control System.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Sumário</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Proposta de Trabalho . . . . .	1
1.2 Questões Norteadoras . . . . .	2
1.3 Revisão Bibliográfica . . . . .	2
1.4 Conteúdo dos Capítulos . . . . .	3
<b>2 Observabilidade de Sistemas de Controle Lineares</b>	<b>4</b>
2.1 Sistemas de Controle Lineares . . . . .	5
2.2 Subespaço não Observável . . . . .	20
2.3 Reconstrução de Estados . . . . .	24
2.4 Forma Normal dos Sistemas de Controle Lineares Autônomos . . . . .	26
<b>3 Bifurcação de Hopf a Partir do Infinito em Sistemas de Controle Bidimensionais</b>	<b>36</b>
3.1 Resultados Principais . . . . .	37

3.2	Primeiras Derivadas da Transformação de Poincaré no Infinito para Sistemas Suaves por Partes . . . . .	44
3.3	Demonstração dos Resultados Principais . . . . .	73
3.3.1	Prova do Teorema 3.1.1 . . . . .	77
3.3.2	Resultados Auxiliares para a Prova do Teorema 3.1.2 . . . . .	80
3.3.3	Prova do Teorema 3.1.2 . . . . .	115
	<b>Conclusões</b>	<b>124</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>125</b>

# Lista de Figuras

3.1	Gráfico da função $\psi$ , dada em (3.2) para $(k_1, k_2, w) = (2, 5, 2)$ . . . . .	38
3.2	Gráfico da função $\psi$ , dada em (3.2) para $(k_1, k_2, w) = (2, -4, 1)$ . . . . .	38
3.3	Gráfico da função $\psi$ , dada em (3.2) para $(k_1, k_2, w) = (2, 0, 1)$ . Neste caso, $\psi$ é chamada de saturação. . . . .	38
3.4	Gráfico da função $\psi$ , dada em (3.2) para $(k_1, k_2, w) = (-2, -4, 1)$ . . . . .	39
3.5	Gráfico da função $\psi$ , dada em (3.2) para $(k_1, k_2, w) = (-2, 4, 1)$ . . . . .	39
3.6	Gráfico da função $\psi$ , dada em (3.2) para $(k_1, k_2, w) = (0, 4, 1)$ . Neste caso, $\psi$ é chamada de zona morta. . . . .	39
3.7	Gráfico da função $\varphi$ , dada em (3.4). . . . .	42
3.8	Representação geométrica da transformação de Bendixson. . . . .	45
3.9	Diagrama para o esboço do retrato de fase do sistema (3.13). . . . .	56
3.10	Construção do retrato de fase de $\bar{X}$ , em torno de $(0, 0)$ , a partir do <i>blow-up</i> . . . . .	59
3.11	Construção do retrato de fase de $\bar{X}$ , em torno de $(0, \pi)$ , a partir do <i>blow-up</i> . . . . .	60
3.12	Retrato de fase de $\bar{X}$ a partir do <i>blow-up</i> . . . . .	61
3.13	Retrato de fase de $X$ a partir do <i>blow-down</i> . . . . .	61
3.14	Esquema da situação considerada nesta seção. . . . .	63
3.15	Regiões $D_I$ , $D_{II}$ e $D_{III}$ no cilindro $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ . O conjunto $\{(r, \theta) \mid r =  \sin \theta  \text{ e } \theta \in [0, 2\pi]\}$ é obtido a partir da função $\varphi$ , dada em (3.4), mediante a transformação de Bendixson e a mudança para coordenadas polares. . . . .	77

- 3.16 Retrato de fase local do sistema obtido a partir do sistema (3.44), mediante a transformação de Bendixson, para  $T = 1/5$ ,  $t = -4/5$ ,  $d = 1$  e  $D = 11/10$ . O ciclo limite bifurcado é estável e representado pela linha preta. A origem corresponde ao infinito via transformação de Bendixson. . . . . 122
- 3.17 Retrato de fase local do sistema (3.44), para  $T = 1/5$ ,  $t = -1/50$ ,  $d = 1$  e  $D = 11/10$ . O ciclo limite bifurcado é estável e representado pela linha preta. A elipse, com  $a = b = 14.5845$  e representada pela linha vermelha, é a aproximação assintótica para o ciclo limite bifurcado. . . . . 123

# Capítulo 1

## Introdução

No presente capítulo, será apresentada a ideia geral desta dissertação. Na Seção 1.1 será apontada a finalidade deste estudo. Já na Seção 1.2 elencaremos as questões que esta dissertação pretende responder, bem como onde foram encontrados recursos para a solução destas. A Seção 1.3 consiste de uma revisão de literatura, na qual estarão elencadas as principais referências utilizadas. A Seção 1.4 trata da estrutura global deste trabalho.

### 1.1 Proposta de Trabalho

É conhecido na literatura, o surgimento de um ciclo limite, a partir do infinito, no retrato de fase de sistemas diferenciais bidimensionais associados com campos de vetores suaves. Seguindo esta linha, a proposta desta dissertação é estudar o surgimento de um ciclo limite, a partir do infinito, no retrato de fase de um sistema de controle linear bidimensional, autônomo, observável, simétrico e em malha fechada. A diferença aqui é que o sistema de controle em malha fechada agora é linear por partes.

Tendo por base as referências [3] e [7], a ideia é utilizar a propriedade de observabilidade e a transformação de Bendixson para reescrever o sistema de controle em malha fechada em uma forma conveniente e mostrar que pode ocorrer de não bifurcar nenhum ou bifurcar um único ciclo limite, a partir do infinito, e este pode ser estável ou instável.

## 1.2 Questões Norteadoras

Para sistemas de controle lineares por partes, bidimensionais, simétricos e linearmente dominados no infinito, Glover [3] e He [4] fornecem condições suficientes para que haja uma bifurcação, a partir do infinito, de uma órbita periódica. Considere as seguintes questões:

- (1) *Se a bifurcação ocorrer para um valor crítico de um parâmetro, digamos  $\mu = 0$ , a órbita periódica bifurcada existe para  $\mu < 0$  ou  $\mu > 0$ , com  $|\mu|$  suficientemente pequeno?*
- (2) *A órbita periódica bifurcada é única?*
- (3) *O que se pode dizer a respeito da estabilidade da órbita periódica bifurcada?*
- (4) *Há uma estimativa assintótica para a amplitude da órbita periódica bifurcada?*

Apresentaremos, com detalhes, os resultados de Llibre e Ponce [7] que respondem à estas quatro questões.

## 1.3 Revisão Bibliográfica

Nas referências [5] e [12] encontram-se as principais definições, resultados e demonstrações referentes à Teoria de Controle, dos quais fizemos algumas modificações a fim de evitar o uso do conceito de controlabilidade. Como, no contexto desta dissertação, um sistema de controle é um caso particular de equação diferencial, alguns conceitos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias são empregados. Tais conceitos podem ser verificados em [11].

Foram necessárias, em nosso estudo, algumas definições e resultados das áreas de Álgebra Linear e Teoria da Medida, que podem ser vistos em [6] e [10], respectivamente.

Resultados que dão condições suficientes para que haja uma bifurcação, a partir do infinito, de uma órbita periódica, podem ser estudados em [3] e [4]. Faremos uso da transformação de Bendixson que se encontra em [1] e [2].

O cálculo da primeira e segunda derivadas da transformação de Poincaré para campos de vetores suficientemente diferenciáveis é feito em [9]. Utilizamos o artigo [7] como referência principal e para demonstrar o resultado central fizemos uso de lemas presentes nas referências [2] e [8].

## 1.4 Conteúdo dos Capítulos

Este trabalho está dividido conforme a estrutura a seguir.

No Capítulo 2 serão apresentadas algumas definições e resultados referentes à Teoria de Controle Linear, teoria necessária ao estudo de sistemas de controle lineares, com ênfase no conceito de observabilidade.

Já no Capítulo 3 serão demonstrados os resultados principais desta dissertação, dentre eles um teorema que responde às questões norteadoras, o qual faz uso da primeira e segunda derivadas da transformação de Poincaré, numa vizinhança do infinito.

Este trabalho é finalizado com as principais considerações em Conclusões.

## Capítulo 2

# Observabilidade de Sistemas de Controle Lineares

Neste capítulo, serão apresentadas algumas definições e resultados referentes à Teoria de Controle Linear, com ênfase na observabilidade de sistemas de controle lineares. Será analisado o problema de obter informações sobre o estado presente de um sistema de controle linear, a partir da observação do vetor de saída deste sistema em tempos passados. A Seção 2.1, trata das definições e resultados iniciais, dentre os quais, condições necessárias e suficientes para que um sistema de controle linear seja observável num dado intervalo de tempo. Na Seção 2.2, o interesse estará voltado para a caracterização das componentes não observáveis e detectáveis de um sistema de controle linear autônomo. Na Seção 2.3, será apresentada uma técnica de reconstrução dos vetores de estado, a partir do vetor de observação. A Seção 2.4 é dedicada à forma normal dos sistemas de controle lineares autônomos. Cabe ressaltar que alguns dos resultados apresentados encontram-se em [5] e [12], porém certas demonstrações sofreram algumas modificações, a fim de evitar o uso do conceito de controlabilidade. A observabilidade, termo recorrente nesta dissertação, é uma condição necessária e suficiente para que um sistema de controle em malha fechada tenha uma órbita periódica no infinito, fato que será mostrado no Capítulo 3. E apesar do sistema de controle em malha fechada tratado nesta dissertação ser não linear, se divide em sistemas de controle lineares. Tais fatos motivam os estudos feitos neste capítulo.

## 2.1 Sistemas de Controle Lineares

Um sistema de controle linear é um sistema da forma

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u, \\ y = C(t)x, \end{cases} \quad (2.1)$$

sendo  $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$  um parâmetro denominado tempo,  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  o vetor de estado,  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  o vetor de controle ou vetor de entrada,  $y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^p$  o vetor de observação ou vetor de saída e  $A : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $B : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}$  e  $C : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{p,n}$  transformações lineares contínuas em  $[t_0, t_1]$ . Aqui,  $\mathbb{R}^{n,m}$  denota o conjunto de todas as matrizes reais com  $n$  linhas e  $m$  colunas.

O sistema de controle linear (2.1) será denotado pela terna  $(A, B, C)$ . Quando as funções matriciais  $A$ ,  $B$  e  $C$  não dependem explicitamente do tempo  $t$ , o sistema de controle é denominado autônomo ou invariante no tempo e, caso contrário, o sistema é denominado não autônomo.

No caso autônomo, as transformações lineares  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  em (2.1) serão identificadas com matrizes que as representam e os elementos de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^p$  com matrizes coluna. A transformação identidade, bem como a matriz identidade, serão denotadas por  $E$ . A seguir, apresentaremos algumas definições e introduziremos algumas notações que serão utilizadas no decorrer do texto.

**Definição 2.1.1.** *O produto interno usual de elementos do  $\mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , é definido por*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

**Definição 2.1.2.** *A norma (induzida pelo produto interno usual) de um elemento do  $\mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , é definida por*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A inversa de uma transformação linear  $A$ , assim como a inversa de uma matriz  $A$ , serão denotadas por  $A^{-1}$ . A transformação adjunta de uma transformação linear  $A$  e a transposta de uma matriz  $A$  serão denotadas por  $A^*$ .

Considerando  $x \in \mathbb{R}^n$  como um elemento de  $\mathbb{R}^{n,1}$ , temos que  $x^* \in \mathbb{R}^{1,n}$ . Em particular, escrevemos

$$\langle x, y \rangle = x^* y \quad \text{e} \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x^* x.$$

Uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  é dita simétrica se  $A = A^*$ . O conjunto de todas as matrizes simétricas é parcialmente ordenado pela relação

$$A_1 \geq A_2 \quad \text{se, e somente se,} \quad \langle x, A_1 x \rangle \geq \langle x, A_2 x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

**Definição 2.1.3.** *Uma matriz simétrica  $M \in \mathbb{R}^{n,n}$  é denominada:*

- a. *Positiva definida, quando  $\langle x, Mx \rangle > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ;*
- b. *Positiva semidefinida, quando  $\langle x, Mx \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ ;*
- c. *Negativa definida, quando  $-M$  for positiva definida;*
- d. *Negativa semidefinida, quando  $-M$  for positiva semidefinida.*

**Definição 2.1.4.** *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função com domínio  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Então:*

- a.  *$f$  é dita ser de classe  $C(D, \mathbb{R}^m)$  se, e somente se, for uma função contínua;*
- b.  *$f$  é dita ser de classe  $C^k(D, \mathbb{R}^m)$ ,  $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ , se, e somente se, todas as suas derivadas parciais, de ordem até  $k$ , forem funções contínuas;*
- c.  *$f$  é dita ser suave ou de classe  $C^\infty(D, \mathbb{R}^m)$  se, e somente se, for de classe  $C^k(D, \mathbb{R}^m)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .*

Quando não quisermos explicitar o domínio e o contradomínio de uma função  $f$ , na definição anterior, diremos apenas que  $f$  é de classe  $C$ ,  $C^k$  ou  $C^\infty$ .

Derivadas de primeira e segunda ordens de uma função  $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t)$  serão denotadas por

$$\frac{d}{dt}x(t) \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

ou por  $x'$  e  $x''$ , respectivamente, e as de ordem  $n$  por

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$$

ou por  $x^{(n)}$ .

**Definição 2.1.5.** Se  $F(t) = (f_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{n,m}$ ,  $t \in [0, T]$  e  $f_{ij}$  é integrável em  $[0, T]$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ , então

$$\int_0^T F(t) dt = \left( \int_0^T f_{ij}(t) dt \right).$$

Finalizadas as definições iniciais, analisaremos a seguinte questão:

*Dado um sistema de controle linear  $(A, B, C)$ , em que circunstâncias é possível, a partir do conhecimento do vetor de controle  $u$  e do vetor de saída  $y$ , reconstruir o estado inicial  $x_0 := x(t_0)$ ?*

Uma vez conhecido o vetor  $x_0$ , é possível substituir o vetor de controle  $u$  na equação diferencial em (2.1) e obter o vetor de estado  $x = x(t)$  em qualquer instante de tempo  $t \in [t_0, t_1]$ .

Como vetores de controle admissíveis consideramos as funções

$$u \in L_1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m),$$

isto é, as funções pertencentes ao espaço vetorial de todas as classes de equivalência de funções  $v : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  Lebesgue mensuráveis (que diferem apenas em um conjunto de medida nula) tais que

$$\int_{t_0}^{t_1} \|v(t)\| dt < \infty.$$

**Definição 2.1.6.** Uma solução, em  $[t_0, t_1]$ , do Problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u, \\ x(\bar{t}_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

com  $\bar{t}_0 \in [t_0, t_1]$  e  $u \in L_1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$  é uma função absolutamente contínua,

$$\varphi : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

que satisfaz a equação integral

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{\bar{t}_0}^t A(s)x(s) + B(s)u(s) ds$$

ou, equivalentemente, satisfaz a equação diferencial em (2.2) em quase todo ponto e a condição inicial.

O conceito de função absolutamente contínua pode ser visto em [10]. A seguir, vamos demonstrar um teorema que fornece a solução analítica de (2.2). Antes disso, precisaremos de três lemas.

**Lema 2.1.1.** *Uma função  $f : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é absolutamente contínua em  $[t_0, t_1]$  se, e somente se,  $f$  é diferenciável em quase todo ponto de  $[t_0, t_1]$ ,  $f' \in L_1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  e*

$$\int_{t_0}^t f'(y) dy = f(t) - f(t_0), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

**Demonstração.** Veja a Seção *The Fundamental Theorem of Calculus* em [10].

■

No lema a seguir,  $\mu$  denota a medida de Lebesgue e  $\mu - q.t.p.$  a expressão “ $\mu$ -quase todo ponto”.

**Lema 2.1.2.** *Se  $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  e*

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f d\mu, \quad -\infty < t < \infty,$$

então

$$F'(t) = f(t), \quad \mu - q.t.p..$$

**Demonstração.** Veja a Seção *Derivatives of Measures* em [10].

■

**Lema 2.1.3.** *Sejam  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas em  $I = [t_0, t_1]$ . Se  $\psi$  é não negativa em  $I$  e*

$$\phi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s) ds, \quad t \in I,$$

com  $K$  e  $L$  constantes reais,  $L \geq 0$ , então

$$\phi(t) \leq K \exp \left( L \int_{t_0}^t \psi(s) ds \right), \quad t \in I.$$

**Demonstração.** Defina,

$$v(t) = K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s) ds, \quad t \in I.$$

Então,  $\phi(t) \leq v(t)$ ,  $t \in I$  e

$$v'(t) = L\psi(t)\phi(t) \leq L\psi(t)v(t), \quad t \in I.$$

Multiplicando ambos membros da última desigualdade por

$$\exp\left(-L \int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right),$$

resulta que

$$v'(t) \exp\left(-L \int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right) - L\psi(t)v(t) \exp\left(-L \int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right) \leq 0, \quad t \in I.$$

Ou, equivalentemente,

$$\left[\exp\left(-L \int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right) v(t)\right]' \leq 0, \quad t \in I.$$

Assim,

$$\exp\left(-L \int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right) v(t) \leq \exp\left(-L \int_{t_0}^{t_0} \psi(s) \, ds\right) v(t_0) = v(t_0), \quad t \in I.$$

De onde temos que

$$v(t) \leq v(t_0) \exp\left(L \int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right) = K \exp\left(L \int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right), \quad t \in I.$$

Portanto,

$$\phi(t) \leq v(t) \leq K \exp\left(L \int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right), \quad t \in I.$$

■

Dado um sistema diferencial da forma

$$x' = A(t)x, \tag{2.3}$$

a matriz

$$\Phi_A(t, s) = \Psi(t)\Psi^{-1}(s), \quad (t, s) \in [t_0, t_1] \times [t_0, t_1],$$

será chamada **matriz de transição**, sendo  $\Psi(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , uma matriz fundamental de (2.3). As propriedades destas matrizes podem ser vistas em [5].

Como mencionado anteriormente, vamos agora demonstrar um teorema que fornece a solução analítica de (2.2).

**Teorema 2.1.1.** A solução  $\varphi : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (2.2) é da forma

$$\varphi(t) = \Phi_A(t, \bar{t}_0)x_0 + \int_{\bar{t}_0}^t \Phi_A(t, s)B(s)u(s) ds. \quad (2.4)$$

**Demonstração.** Primeiramente, mostraremos que  $\varphi$  dada em (2.4) satisfaz a equação diferencial em (2.2), verifica a condição inicial e além disso é absolutamente contínua. Para isso, usaremos o Lema 2.1.2 para a função  $\tau$  dada por  $\tau(t, s) = \Phi_A(t, s)B(s)u(s)$ ,  $(t, s) \in [t_0, t_1] \times [t_0, t_1]$ . Substituindo a matriz de transição  $\Phi_A(t, \bar{t}_0)$  por  $\Psi(t)\Psi^{-1}(\bar{t}_0)$  e derivando  $\varphi$ , com respeito à variável  $t$ , temos

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \Phi_A(t, \bar{t}_0)x_0 + \int_{\bar{t}_0}^t \Phi_A(t, s)B(s)u(s) ds \\ &= \Psi(t)\Psi^{-1}(\bar{t}_0)x_0 + \Psi(t) \int_{\bar{t}_0}^t \Psi^{-1}(s)B(s)u(s) ds, \\ \varphi'(t) &= \Psi'(t)\Psi^{-1}(\bar{t}_0)x_0 + \Psi'(t) \int_{\bar{t}_0}^t \Psi^{-1}(s)B(s)u(s) ds + \Psi(t)\Psi^{-1}(t)B(t)u(t) \\ &= A(t)\Psi(t)\Psi^{-1}(\bar{t}_0)x_0 + A(t) \int_{\bar{t}_0}^t \Psi(t)\Psi^{-1}(s)B(s)u(s) ds + B(t)u(t) \\ &= A(t)\Phi_A(t, \bar{t}_0)x_0 + A(t) \int_{\bar{t}_0}^t \Phi_A(t, s)B(s)u(s) ds + B(t)u(t) \\ &= A(t) \left[ \Phi_A(t, \bar{t}_0)x_0 + \int_{\bar{t}_0}^t \Phi_A(t, s)B(s)u(s) ds \right] + B(t)u(t) \\ &= A(t)\varphi(t) + B(t)u(t) \end{aligned}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{t}_0) &= \Phi_A(\bar{t}_0, \bar{t}_0)x_0 + \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0} \Phi_A(\bar{t}_0, s)B(s)u(s) ds \\ &= \Psi(\bar{t}_0)\Psi^{-1}(\bar{t}_0)x_0 = x_0. \end{aligned}$$

Como as colunas da matriz  $\Psi(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , são soluções de (2.2), para  $u \equiv 0$ , temos que  $\Psi$  é absolutamente contínua e, conseqüentemente,  $\Phi_A$ . Assim,  $\varphi$  é absolutamente contínua se  $\phi$  for, sendo

$$\phi(t) = \int_{\bar{t}_0}^t \Phi_A(t, s)B(s)u(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Como a função  $\tau \in L_1([t_0, t_1] \times [t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ , segue do Lema 2.1.2 que  $\phi$  é diferenciável,

$$\phi'(t) = B(t)u(t),$$

isto é,  $\phi' \in L_1([t_0, t_1] \times [t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  e

$$\int_a^t \phi'(s) ds = \phi(t) - \phi(a).$$

Logo, pelo Lema 2.1.1  $\phi$  e, consequentemente,  $\varphi$  é absolutamente contínua.

Para mostrar a unicidade, suponha que  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  são soluções de (2.2). Assim,

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &= \left\| \int_{\bar{t}_0}^t A(s) [x(s) - y(s)] ds \right\| \\ &\leq \int_{\bar{t}_0}^t \|A(s)\| \|x(s) - y(s)\| ds. \end{aligned}$$

Para  $t \in [\bar{t}_0, t_1]$ , segue do Lema 2.1.3 que

$$0 \leq \|x(t) - y(t)\| \leq 0 \exp \left( \int_{\bar{t}_0}^t \|A(s)\| ds \right) = 0.$$

Portanto,  $\|x(t) - y(t)\| = 0$ , o que implica que  $x(t) = y(t)$ , para todo  $t \in [\bar{t}_0, t_1]$ .

Para  $t \in [t_0, \bar{t}_0]$ , vem que

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \int_{\bar{t}_0}^t \|A(s)\| \|x(s) - y(s)\| ds \\ &= \int_{\bar{t}_0}^{t_0} \|A(s)\| \|x(s) - y(s)\| ds + \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|x(s) - y(s)\| ds \\ &= K + \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|x(s) - y(s)\| ds, \end{aligned}$$

com

$$K = \int_{\bar{t}_0}^{t_0} \|A(s)\| \|x(s) - y(s)\| ds \leq 0.$$

Pelo Lema 2.1.3,

$$0 \leq \|x(t) - y(t)\| \leq K \exp \left( \int_{\bar{t}_0}^t \|A(s)\| ds \right) \leq 0,$$

o que implica que  $x(t) = y(t)$  para todo  $t \in [t_0, \bar{t}_0]$ . ■

Para  $\bar{t}_0 = t_0$ , nas hipóteses do Teorema 2.1.1, temos

$$x(t) = \Phi_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, s)B(s)u(s) ds$$

e, assim,

$$y(t) = C(t)x(t) = C(t)\Phi_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t C(t)\Phi_A(t, s)B(s)u(s) ds,$$

ou ainda,

$$y(t) = C(t)\Phi_A(t, t_0)x_0 + y_1(t),$$

sendo

$$y_1(t) = \int_{t_0}^t C(t)\Phi_A(t, s)B(s)u(s) ds.$$

Note que, conhecido o vetor de entrada  $u$ , a função  $y_1$  pode ser calculada *a priori*, independentemente de conhecermos ou não a condição inicial  $x_0$ . Portanto, a determinação de  $x_0$  a partir do par  $(y, u)$  é equivalente à determinação de  $x_0$  a partir da diferença  $y(t) - y_1(t) = C(t)\Phi_A(t, t_0)x_0$ , a qual corresponde ao vetor de saída do sistema linear homogêneo (2.3). Logo, para estudar a determinação do estado inicial  $x_0$  de um sistema de controle linear  $(A, B, C)$ , basta estudar os sistemas de controle lineares homogêneos da forma

$$\begin{cases} x' = A(t)x, \\ y = C(t)x. \end{cases} \quad (2.5)$$

O sistema de controle (2.5) será denotado pelo par  $(A, C)$ . Estamos agora em condições de formalizar o conceito de observabilidade para sistemas de controle lineares.

**Definição 2.1.7.** *Diremos que o sistema de controle linear  $(A, C)$  é observável, em  $[t_0, t_1]$ , quando para toda função  $x$  de classe  $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  a condição*

$$\begin{cases} x' = A(t)x(t), \\ C(t)x(t) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

para todo  $t \in [t_0, t_1]$ , implicar em  $x(t_0) = x_0 = 0$ .

Em outras palavras, a observabilidade do sistema  $(A, C)$  é equivalente ao fato da aplicação linear a seguir ser injetiva,

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^n &\longrightarrow C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \\ x_0 &\longmapsto G(x_0), \end{aligned} \quad (2.7)$$

com

$$G(x_0) : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \longmapsto G(x_0)(t) = C(t)\Phi_A(t, t_0)x_0.$$

No teorema a seguir analisaremos uma forma equivalente de se definir a observabilidade de um sistema de controle linear.

**Teorema 2.1.2.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

a. O par  $(A, C)$  é observável em  $[t_0, t_1]$ ;

b. A matriz

$$W(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t, t_0)^* C(t)^* C(t) \Phi_A(t, t_0) dt$$

é positiva definida.

**Demonstração.**

(a)  $\Rightarrow$  (b). Suponha que  $W(t_0, t_1)$  não é positiva definida. Logo,  $\langle x, W(t_0, t_1)x \rangle \leq 0$  para algum  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

A matriz  $W(t_0, t_1)$  é simétrica, pois

$$W(t_0, t_1)^* = \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t, t_0)^* C(t)^* C(t) \Phi_A(t, t_0) dt = W(t_0, t_1)$$

e, além disto, satisfaz  $\langle x, W(t_0, t_1)x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . De fato,

$$\begin{aligned} \langle x, W(t_0, t_1)x \rangle &= \left\langle x, \left[ \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t, t_0)^* C(t)^* C(t) \Phi_A(t, t_0) dt \right] x \right\rangle \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle x, \Phi_A(t, t_0)^* C(t)^* C(t) \Phi_A(t, t_0) x \rangle dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle C(t) \Phi_A(t, t_0) x, C(t) \Phi_A(t, t_0) x \rangle dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \|C(t) \Phi_A(t, t_0) x\|^2 dt \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Logo, existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $\langle x_0, W(t_0, t_1)x_0 \rangle = 0$ . Definindo agora a função  $x$  por  $x(t) = \Phi_A(t, t_0)x_0, t \in [t_0, t_1]$ , temos que esta é solução do Problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = A(t)x, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= [\Phi_A(t, t_0)x_0]' \\
 &= [\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)x_0]' \\
 &= \Psi'(t)\Psi^{-1}(t_0)x_0 \\
 &= A(t)\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)x_0 \\
 &= A(t)\Phi_A(t, t_0)x_0 \\
 &= A(t)x(t)
 \end{aligned}$$

e, ainda,

$$x(t_0) = \Phi_A(t_0, t_0)x_0 = \Psi(t_0)\Psi^{-1}(t_0)x_0 = Ex_0 = x_0.$$

Como

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_1} \|C(t)x(t)\|^2 dt &= \int_{t_0}^{t_1} \|C(t)\Phi_A(t, t_0)x_0\|^2 dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \langle C(t)\Phi_A(t, t_0)x_0, C(t)\Phi_A(t, t_0)x_0 \rangle dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \langle x_0, \Phi_A(t, t_0)^* C(t)^* C(t)\Phi_A(t, t_0)x_0 \rangle dt \\
 &= \left\langle x_0, \left[ \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t, t_0)^* C(t)^* C(t)\Phi_A(t, t_0) dt \right] x_0 \right\rangle \\
 &= \langle x_0, W(t_0, t_1)x_0 \rangle = 0,
 \end{aligned}$$

segue que  $C(t)x(t) = 0$ , para todo  $t \in [t_0, t_1]$ , com  $x(t_0) \neq 0$  e, portanto, o sistema  $(A, C)$  não é observável em  $[t_0, t_1]$ .

**(b)  $\Rightarrow$  (a).** Seja  $x$  uma função satisfazendo (2.6) para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Logo, temos  $x(t) = \Phi_A(t, t_0)x_0$ ,  $\forall t \in [t_0, t_1]$ , no qual  $x(t_0) = x_0$  e

$$\langle x_0, W(t_0, t_1)x_0 \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \|C(t)x(t)\|^2 dt = 0.$$

Como  $W(t_0, t_1)$  é positiva definida, segue que  $x_0 = 0$ . Portanto, o par  $(A, C)$  é observável. ■

A seguir, enunciaremos um lema que será útil na demonstração do próximo teorema.

**Lema 2.1.4.** *Uma matriz simétrica  $M \in \mathbb{R}^{n,n}$  é positiva definida se, e somente se, for positiva semidefinida e não singular.*

**Demonstração.** Veja a Seção *Operadores AutoAdjuntos* em [6].

■

Os sistemas de controle lineares autônomos representam um importante caso especial que é abordado no teorema a seguir. No que segue adotamos a notação  $\text{Po}(M)$ ,  $\text{Nuc}(M)$  e  $\text{Im}(M)$  para representar o posto, o núcleo e a imagem de uma matriz  $M$ , respectivamente. As matrizes

$$M_0 := \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix},$$

chamada de **matriz de observabilidade**, e

$$W_T := \int_0^T e^{sA^*} C^* C e^{sA} ds, \quad T > 0,$$

denominada **Gramiano de observabilidade**, serão importantes no teorema a seguir.

**Teorema 2.1.3.** *Seja  $(A, C)$  um sistema de controle linear autônomo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a. *O par  $(A, C)$  é observável em  $[0, T]$  para todo  $T > 0$ ;*
- b. *O par  $(A, C)$  é observável em  $[0, T]$  para algum  $T > 0$ ;*
- c. *A matriz  $W_T$  é não singular para algum  $T > 0$ ;*
- d. *A matriz  $W_T$  é não singular para todo  $T > 0$ ;*
- e.  $\text{Po}(M_0) = n$ ;
- f.  $\bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k) = \{0\}$ .

**Demonstração.**

(a)  $\Rightarrow$  (b). Nada a fazer.

(b)  $\Rightarrow$  (c). Assuma que o par  $(A, C)$  é observável em  $[0, T]$  para algum  $T > 0$ . Assim, do Teorema 2.1.2, segue que  $W_T$  é positiva definida para algum  $T > 0$  e do Lema 2.1.4 temos, portanto, que  $W_T$  é não singular para algum  $T > 0$ .

(c)  $\Rightarrow$  (d). Suponha que  $W_T$  é não singular para algum  $T > 0$ , escolhido de acordo com (c) e seja  $\tilde{T} > 0$ . Da identidade

$$\langle x_0, W_{\tilde{T}} x_0 \rangle = \int_0^{\tilde{T}} \|Cx(s)\|^2 ds,$$

temos que

$$\langle x_0, W_{\tilde{T}} x_0 \rangle = 0$$

implica em

$$a(t) := Ce^{tA}x_0 = 0, \quad \forall t \in [0, \tilde{T}].$$

Logo,

$$a^{(k)}(0) = CA^k e^{tA}x_0|_{t=0} = CA^k x_0 = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Portanto,  $CA^k s^k x_0 = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots$  e  $s \in [0, T]$ . Desta igualdade, temos

$$\begin{aligned} \langle x_0, W_T x_0 \rangle &= \int_0^T \|Ce^{sA}x_0\|^2 ds \\ &= \int_0^T \left\| C \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k s^k \right) x_0 \right\|^2 ds \\ &= \int_0^T \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} CA^k s^k x_0 \right\|^2 ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pelo fato de  $W_T$  ser não singular e positiva semidefinida segue, do Lema 2.1.4, que  $W_T$  é positiva definida. Portanto,  $x_0 = 0$  e, assim,

$$\langle x_0, W_{\tilde{T}} x_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

e, então,  $W_{\tilde{T}}$  é não singular. Como  $\tilde{T}$  é arbitrário concluímos que  $W_T$  é não singular para todo  $T > 0$ .

(d)  $\Rightarrow$  (e). Suponha que  $W_T$  é não singular para todo  $T > 0$  e, por contradição, que  $\text{Po}(M_0) < n$ . Então, as linhas da matriz  $M_0$ ,  $n \times np$ , formam um conjunto linearmente dependente. Pelo *Teorema do Núcleo e da Imagem* (ver [6]), temos que

$$\dim \text{Nuc}(M_0) + \dim \text{Im}(M_0) = n,$$

ou ainda,

$$\dim \text{Nuc}(M_0) + \text{Po}(M_0) = n.$$

Logo,  $\dim \text{Nuc}(M_0) \geq 1$ , isto é, existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $M_0 x_0 = 0$ , ou seja,

$$CA^k x_0 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Considere o polinômio característico da matriz  $A$

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda E - A) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda^k.$$

Do *Teorema de Cayley–Hamilton* (ver [6]), segue que

$$\begin{aligned} p_A(A) &= A^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k \\ &= A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 E = 0, \end{aligned}$$

assim,

$$A^n = -\alpha_{n-1} A^{n-1} - \dots - \alpha_2 A^2 - \alpha_1 A - \alpha_0 E$$

e, portanto,

$$CA^n x_0 = -\alpha_{n-1} CA^{n-1} x_0 - \dots - \alpha_2 CA^2 x_0 - \alpha_1 CA x_0 - \alpha_0 CE x_0 = 0.$$

Para  $n+1$ , temos

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= (-\alpha_{n-1} A^{n-1} - \dots - \alpha_2 A^2 - \alpha_1 A - \alpha_0 E) A \\ &= -\alpha_{n-1} A^n - \dots - \alpha_2 A^3 - \alpha_1 A^2 - \alpha_0 A \end{aligned}$$

e, portanto,

$$CA^{n+1} x_0 = -\alpha_{n-1} CA^n x_0 - \dots - \alpha_2 CA^3 x_0 - \alpha_1 CA^2 x_0 - \alpha_0 CA x_0 = 0.$$

Por indução, segue que  $CA^k x_0 = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots$  e, ainda,

$$A^n = \alpha_{n-1,n}A^{n-1} + \dots + \alpha_{2,n}A^2 + \alpha_{1,n}A + \alpha_{0,n}E,$$

sendo  $\alpha_{k,n} = -\alpha_k$ , para  $k = 0, \dots, n-1$ . Desse modo obtemos

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= -\alpha_{n-1}A^n - \dots - \alpha_2A^3 - \alpha_1A^2 - \alpha_0A \\ &= -\alpha_{n-1}(-\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_2A^2 - \alpha_1A - \alpha_0E) - \dots \\ &\quad - \alpha_2A^3 - \alpha_1A^2 - \alpha_0A \\ &= (\alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-2})A^{n-1} + (\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3})A^{n-2} + \dots \\ &\quad + (\alpha_{n-1}\alpha_2 - \alpha_1)A^2 + (\alpha_{n-1}\alpha_1 - \alpha_0)A + (\alpha_{n-1}\alpha_0)E. \end{aligned}$$

Logo,

$$A^{n+1} = \alpha_{n-1,n+1}A^{n-1} + \dots + \alpha_{2,n+1}A^2 + \alpha_{1,n+1}A + \alpha_{0,n+1}E,$$

sendo  $\alpha_{0,n+1} = \alpha_{n-1}\alpha_0$  e  $\alpha_{k,n+1} = \alpha_{n-1}\alpha_k - \alpha_{k-1}$ , para  $k = 1, \dots, n-1$ .

Concluimos que

$$A^m = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,m}A^k, \quad m \geq n.$$

Isso nos permite escrever

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j A^j + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j A^j + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,j} A^k \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j A^j + \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j \alpha_{k,j} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} t^k A^k + \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \alpha_{k,j} \right) A^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{k!} t^k + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \alpha_{k,j} \right) A^k, \end{aligned}$$

então

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k,$$

sendo

$$\alpha_k(t) = \frac{1}{k!} t^k + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \alpha_{k,j}$$

e, portanto,

$$C e^{tA} x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) C A^k x_0 = 0.$$

Logo,

$$\langle x_0, W_T x_0 \rangle = \int_0^T \|C e^{tA} x_0\|^2 dt = 0,$$

com  $x_0 \neq 0$ . Como  $W_T$  é não singular e positiva semidefinida segue, do Lema 2.1.4, que  $W_T$  é positiva definida e temos, portanto, uma contradição.

(e)  $\Leftrightarrow$  (f). Como  $C A^k x_0 = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , concluímos que

$$x_0 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(C A^k)$$

se, e somente se,

$$x_0^* (A^k)^* C^* = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Assim, se  $x_0 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(C A^k)$  e  $x_0 \neq 0$ , então

$$C A^k x_0 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Logo,  $\text{Po}(M_0) < n$  e, portanto, (e)  $\Rightarrow$  (f).

Se  $\text{Po}(M_0) < n$ , então  $C A^k x_0 = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , com  $x_0 \neq 0$ . Logo,

$$\bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(C A^k) \neq \{0\}$$

e, assim, (f)  $\Rightarrow$  (e).

(f)  $\Rightarrow$  (a). Suponha que  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é tal que  $C e^{tA} x_0 = 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$ . Como visto anteriormente podemos concluir que  $C A^k x_0 = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots$ . A hipótese em (f) implica que  $x_0 = 0$ . Logo, o par  $(A, C)$  é observável em  $[0, T]$  para todo  $T > 0$ .

■

## 2.2 Subespaço não Observável

Considere um sistema de controle linear autônomo  $(A, C)$ . Como vimos, a observabilidade deste sistema é equivalente à injetividade da aplicação linear

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^n &\longrightarrow C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \\ x_0 &\longmapsto G(x_0) = C\Phi_A(\cdot, t_0)x_0. \end{aligned}$$

Este fato motiva a seguinte definição.

**Definição 2.2.1.** *O núcleo de  $G$  é denominado subespaço não observável do sistema de controle linear autônomo  $(A, C)$ .*

**Teorema 2.2.1.** *Sejam  $(A, C)$  um sistema de controle linear autônomo e  $N \subset \mathbb{R}^n$  seu subespaço não observável. Então, podemos representar  $N$  da seguinte forma*

$$N = \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k).$$

**Demonstração.** Note que se  $x_0 \in N$ , então  $C\Phi_A(t, t_0)x_0 = 0$ ,  $t \in [0, T]$ . Portanto,

$$\begin{aligned} CA^k x_0 &= \left[ \frac{d^k}{dt^k} C e^{(t-t_0)A} x_0 \right]_{t=t_0} \\ &= \left[ \frac{d^k}{dt^k} C \Phi_A(t, t_0) x_0 \right]_{t=t_0} \\ &= \left[ \frac{d^k}{dt^k} 0 \right]_{t=t_0} \\ &= 0, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Logo,  $x_0 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k)$  e, conseqüentemente,  $N \subset \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k)$ .

Reciprocamente, se  $x_0 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k)$ , repetimos a argumentação feita na demonstração do Teorema 2.1.3 em **(d)**  $\Rightarrow$  **(e)** e concluímos que

$$\langle x_0, W_T x_0 \rangle = \int_0^T \|C e^{tA} x_0\|^2 dt = 0,$$

provando que  $x_0 = 0 \in N$  e, portanto,  $\bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k) \subset N$ . E, assim, a igualdade segue. ■

**Teorema 2.2.2.** *O núcleo da matriz de observabilidade,  $\text{Nuc}(M_0)$ , de um sistema de controle linear autônomo  $(A, C)$  é idêntico ao seu subespaço não observável.*

**Demonstração.** Mostraremos que

$$\bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k) = \text{Nuc}(M_0).$$

Seja  $x \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k)$ . Logo,  $CA^k x = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , e

$$M_0 x = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} Cx \\ CAx \\ \vdots \\ CA^{n-1}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,  $x \in \text{Nuc}(M_0)$  e, portanto,  $\bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k) \subset \text{Nuc}(M_0)$ .

Reciprocamente, tome  $x \in \text{Nuc}(M_0)$ , ou seja,  $M_0 x = 0$ . Logo,  $CA^k x = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots, n-1$  e, conseqüentemente,  $x \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k)$ , mostrando que  $\text{Nuc}(M_0) \subset \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k)$ , donde segue a igualdade desejada.

Para finalizar utilizamos o Teorema 2.2.1 para concluir que  $\text{Nuc}(M_0)$  é o subespaço não observável de  $(A, C)$ . ■

Na Seção 2.4, mostraremos que  $\text{Nuc}(M_0)$  é o maior subespaço do  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$ -invariante, contido no núcleo de  $C$ .

Se um determinado sistema de controle linear autônomo  $(A, C)$  não é observável em  $[t_0, t_1]$ , para todo  $t_1 > t_0$ , podemos ainda indagar sobre a observabilidade das soluções que não decaem, isto é, aquelas que satisfazem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \neq 0.$$

Tais soluções estão associadas com os autovalores de  $A$  com partes reais positivas. A fim de analisar melhor esta questão, faremos a seguinte construção. Seja  $p_A$  o polinômio característico da matriz  $A$  e considere a decomposição

$$p_A(\lambda) = p^+(\lambda)p^-(\lambda),$$

sendo os polinômios escolhidos de forma que  $p^+$  possua raízes em  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\}$  e  $p^-$  em  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\lambda) < 0\}$ . Estes polinômios nos permitem definir os espaços

$$X^+(A) := \operatorname{Nuc}(p^+(A)) \quad \text{e} \quad X^-(A) := \operatorname{Nuc}(p^-(A)).$$

**Definição 2.2.2.** *Seja  $(A, C)$  um sistema de controle linear autônomo e  $N$  seu subespaço não observável. Sejam ainda  $X^+(A)$  e  $X^-(A)$  como definidos anteriormente. Dizemos que o par  $(A, C)$  é detectável quando  $N \subset X^-(A)$ .*

A noção de detectabilidade nos permite, enfim, analisar a relação entre os autovalores de  $A$  e as trajetórias das soluções do sistema. Antes, façamos uma definição.

**Definição 2.2.3.** *O conjunto dos autovalores de uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , denotado por  $\sigma(A)$ , é chamado espectro de  $A$ .*

**Teorema 2.2.3.** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$  definido por*

$$\gamma = \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

*Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe uma constante  $c = c(\varepsilon, A)$  tal que*

$$\|e^{tA}\| \leq ce^{(\gamma + \varepsilon)t}, \quad \forall t \geq 0.$$

**Demonstração.** Veja o Apêndice A, pág. 335 de [5].

■

**Teorema 2.2.4.** *Seja  $(A, C)$  um sistema de controle linear autônomo detectável. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a. *Cada autovalor  $\lambda$  de  $A$  tem parte real negativa;*
- b. *A função matricial*

$$V(t) := \int_0^t e^{sA^*} C^* C e^{sA} ds$$

*definida para  $t \in [0, \infty)$  é limitada.*

**Demonstração.**

(a)  $\Rightarrow$  (b). Seja  $\gamma = \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$  e tome  $\varepsilon = |\gamma|/2$ . Por hipótese,

$$\gamma < 0 \quad \text{e} \quad \delta = \gamma + \varepsilon = \gamma + \frac{|\gamma|}{2} < 0.$$

Pelo Teorema 2.2.3, existe  $c$  tal que

$$\|e^{tA}\| \leq ce^{\delta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Assim, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos que

$$\begin{aligned} \langle x, V(t)x \rangle &= \left\langle x, \left( \int_0^t e^{sA^*} C^* C e^{sA} ds \right) x \right\rangle \\ &= \int_0^t \langle x, e^{sA^*} C^* C e^{sA} x \rangle ds \\ &= \int_0^t \langle C e^{sA} x, C e^{sA} x \rangle ds \\ &= \int_0^t \|C e^{sA} x\|^2 ds \\ &\leq \|C\|^2 \|x\|^2 \int_0^t \|e^{sA}\|^2 ds \\ &\leq \|C\|^2 \|x\|^2 \int_0^t c^2 e^{2\delta s} ds \\ &\leq c^2 \|C\|^2 \|x\|^2 \int_0^\infty e^{2\delta s} ds \\ &= c^2 \|C\|^2 \|x\|^2 \left( -\frac{1}{2\delta} \right). \end{aligned}$$

Portanto,  $V$  é limitada, para todo  $t \in [0, \infty)$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a). Suponha, por redução ao absurdo, que existe um número complexo  $\lambda$ , autovalor de  $A$ , tal que  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$  e seja  $u$  o autovetor correspondente. Por hipótese, existe um número real  $M > 0$  tal que

$$\langle u, V(t)u \rangle = \int_0^t e^{2\operatorname{Re}(\lambda)s} \|Cu\|^2 ds < M, \quad \forall t \geq 0.$$

Tomando o limite quando  $t \rightarrow \infty$ , temos que  $Cu = 0$ , de onde concluímos que

$$CA^k u = \lambda^k Cu = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Pelo Teorema 2.1.3, temos que

$$u \in N = \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Nuc}(CA^k) \subset X^-(A).$$

Logo,

$$u \in X^-(A) \cap X^+(A) = \emptyset,$$

o que é um absurdo. Portanto, cada autovalor de  $A$  tem parte real negativa. ■

## 2.3 Reconstrução de Estados

Se o sistema de controle linear  $(A, C)$  é observável, em  $[t_0, t_1]$ , faz sentido pensar na reconstrução do estado inicial  $x_0$ , a partir do vetor de observação  $y$ . Uma primeira tentativa é utilizar um operador de reconstrução linear. Nesse sentido definimos o operador de reconstrução

$$x_0 = \int_{t_0}^{t_1} R(t) y(t) dt,$$

no qual, a função matricial  $R$  é denominada **núcleo de reconstrução do sistema**. Para esse esquema de reconstrução particular temos o seguinte resultado.

**Teorema 2.3.1.** *Seja  $(A, C)$  um sistema de controle linear observável em  $[t_0, t_1]$ , não necessariamente autônomo. Então, a função matricial*

$$R : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n,p}$$

dada por

$$R(t) := W(t_0, t_1)^{-1} \Phi_A(t, t_0)^* C(t)^*,$$

define um núcleo de reconstrução para o par  $(A, C)$ . A aplicação

$$\mathfrak{N} : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

definida por

$$\mathfrak{N}(y) := \int_{t_0}^{t_1} R(t) y(t) dt,$$

está bem definida, é linear e contínua em  $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^p)$ .

**Demonstração.** Do Teorema 2.1.2, temos que  $W(t_0, t_1)$  é inversível, portanto,  $R$  (e, conseqüentemente,  $\mathfrak{N}$ ) está bem definida. Note ainda que

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} R(t) y(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} R(t) C(t) \Phi_A(t, t_0) x_0 dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} W(t_0, t_1)^{-1} \Phi_A(t, t_0)^* C(t)^* C(t) \Phi_A(t, t_0) x_0 dt \\
&= W(t_0, t_1)^{-1} \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t, t_0)^* C(t)^* C(t) \Phi_A(t, t_0) dt x_0 \\
&= W(t_0, t_1)^{-1} W(t_0, t_1) x_0 \\
&= x_0,
\end{aligned}$$

provando que  $R$  satisfaz

$$x_0 = \int_{t_0}^{t_1} R(t) y(t) dt.$$

A aplicação  $\mathfrak{N}$  é linear, pois se  $\alpha$  é um escalar real e  $y, z \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^p)$ , então

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}(y + \alpha z) &:= \int_{t_0}^{t_1} R(t) (y + \alpha z)(t) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} R(t) [y(t) + \alpha z(t)] dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} R(t) y(t) dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} R(t) z(t) dt \\
&= \mathfrak{N}(y) + \alpha \mathfrak{N}(z).
\end{aligned}$$

Da desigualdade

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{t_0}^{t_1} R(t) y(t) dt \right\| &\leq \int_{t_0}^{t_1} \|R(t) y(t)\| dt \\
&\leq \int_{t_0}^{t_1} \|R(t)\| \|y(t)\| dt \\
&\leq \int_{t_0}^{t_1} \max_{t \in [t_0, t_1]} \|R(t)\| \max_{t \in [t_0, t_1]} \|y(t)\| dt \\
&= \left[ \int_{t_0}^{t_1} \max_{t \in [t_0, t_1]} \|R(t)\| dt \right] \max_{t \in [t_0, t_1]} \|y(t)\| \\
&= c \max_{t \in [t_0, t_1]} \|y(t)\| = c \|y\|_\infty,
\end{aligned}$$

temos que  $\mathfrak{N}$  é uma aplicação linear limitada e, portanto, contínua. ■

## 2.4 Forma Normal dos Sistemas de Controle Lineares Autônomos

A forma normal dos sistemas de controle lineares autônomos, conhecida também como **forma normal de Kalman**, é obtida a partir de uma propriedade que tais sistemas possuem, a qual, permite reescrevê-los numa forma especial. Sendo assim, considere o sistema de controle linear autônomo homogêneo

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (2.8)$$

Sejam  $x = x(t)$ ,  $t \geq 0$  uma solução de (2.8) e  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  uma matriz não singular. Definindo  $z = Px$ , temos

$$\begin{aligned} z'(t) &= Px'(t) \\ &= PAx(t) \\ &= PAP^{-1}z(t), \\ y &= Cx \\ &= CP^{-1}z(t). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} z' = \tilde{A}z, \\ y = \tilde{C}z, \end{cases}$$

no qual,  $\tilde{A} = PAP^{-1}$  e  $\tilde{C} = CP^{-1}$ .

**Definição 2.4.1.** *Dois sistemas de controle lineares autônomos homogêneos  $(A, C)$  e  $(\tilde{A}, \tilde{C})$  são ditos linearmente equivalentes se, e somente se, existir uma matriz não singular  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  tal que  $\tilde{A} = PAP^{-1}$  e  $\tilde{C} = CP^{-1}$ .*

A relação introduzida na definição anterior é uma relação de equivalência. De fato:

**i. Reflexividade** - O par  $(A, C)$  é linearmente equivalente ao par  $(A, C)$ . Basta tomar  $P = E$ , a identidade do  $\mathbb{R}^{n,n}$ ;

**ii. Simetria** - Se o par  $(A, C)$  é linearmente equivalente ao par  $(\tilde{A}, \tilde{C})$ , então existe uma matriz não singular  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  tal que

$$\tilde{A} = PAP^{-1} \quad \text{e} \quad \tilde{C} = CP^{-1}.$$

Logo,

$$A = P^{-1}\tilde{A}P \quad \text{e} \quad C = \tilde{C}P.$$

Assim, existe  $S = P^{-1}$  não singular tal que

$$A = S\tilde{A}S^{-1} \quad \text{e} \quad C = \tilde{C}S^{-1}$$

e, portanto, o par  $(\tilde{A}, \tilde{C})$  é linearmente equivalente ao par  $(A, C)$ ;

**iii. Transitividade** - Se o par  $(A, C)$  é linearmente equivalente ao par  $(\bar{A}, \bar{C})$  e o par  $(\bar{A}, \bar{C})$  é linearmente equivalente ao par  $(\tilde{A}, \tilde{C})$ , existem matrizes não singulares  $P, S \in \mathbb{R}^{n,n}$  tais que

$$\bar{A} = PAP^{-1} \quad \text{e} \quad \bar{C} = CP^{-1},$$

$$\tilde{A} = S\bar{A}S^{-1} \quad \text{e} \quad \tilde{C} = \bar{C}S^{-1}.$$

Logo,

$$\tilde{A} = S\bar{A}S^{-1} = SPAP^{-1}S^{-1},$$

$$\tilde{C} = \bar{C}S^{-1} = CP^{-1}S^{-1}.$$

Tomando  $T = SP$ , temos que  $T$  é não singular e

$$\tilde{A} = TAT^{-1},$$

$$\tilde{C} = CT^{-1}$$

e, portanto, o par  $(A, C)$  é linearmente equivalente ao par  $(\tilde{A}, \tilde{C})$ .

**Teorema 2.4.1.** *Se  $(A, C)$  e  $(\tilde{A}, \tilde{C})$  são sistemas de controle lineares autônomos homogêneos linearmente equivalentes, então  $\text{Po}(M_0) = \text{Po}(\tilde{M}_0)$ , sendo*

$$M_0 = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

**Demonstração.** Por hipótese, existe uma matriz não singular  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  tal que

$$\tilde{A} = PAP^{-1} \quad \text{e} \quad \tilde{C} = CP^{-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= CP^{-1} \\ \tilde{C}\tilde{A} &= CP^{-1}PAP^{-1} = CAP^{-1} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 &= \tilde{C}\tilde{A}\tilde{A} = CAP^{-1}PAP^{-1} = CA^2P^{-1} \\ &\vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} &= CA^{n-1}P^{-1}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\tilde{C}\tilde{A}^k = CA^kP^{-1}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Assim,

$$\tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CP^{-1} \\ CAP^{-1} \\ \vdots \\ CA^{n-1}P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1} = M_0P^{-1}$$

e, portanto,  $\text{Po}(\tilde{M}_0) = \text{Po}(M_0P^{-1}) = \text{Po}(M_0)$ .

■

**Lema 2.4.1.** *O núcleo de  $M_0$  é o maior subespaço do  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$ -invariante, contido no núcleo de  $C$ .*

**Demonstração.** Considere as transformações lineares

$$\begin{aligned} M_0 : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{np} \\ x &\mapsto M_0x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\mapsto Cx. \end{aligned}$$

Resulta que:

- i. Por ser o núcleo de uma transformação linear,  $\text{Nuc}(M_0)$  é um subespaço do  $\mathbb{R}^n$ ;
- ii.  $\text{Nuc}(M_0)$  é  $A$ -invariante. De fato, seja  $v \in \text{Nuc}(M_0)$ , isto é,  $M_0v = 0$ , ou ainda,

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} v = 0.$$

Logo,

$$CA^k v = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.9)$$

Note que

$$M_0Av = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} Av = \begin{pmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^n \end{pmatrix} v.$$

Do *Teorema de Cayley–Hamilton* e de (2.9), temos que

$$A^n = -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_2A^2 - \alpha_1A - \alpha_0E,$$

e, logo,

$$CA^n v = -\alpha_{n-1}CA^{n-1}v - \dots - \alpha_2CA^2v - \alpha_1CAv - \alpha_0CEv = 0,$$

o que implica que  $M_0Av = 0$ . Assim,  $A(\text{Nuc}(M_0)) \subset \text{Nuc}(M_0)$  e, portanto,  $\text{Nuc}(M_0)$  é  $A$ -invariante;

- iii.  $\text{Nuc}(M_0) \subset \text{Nuc}(C)$ . De fato, seja  $v \in \text{Nuc}(M_0)$ . Logo,  $M_0v = 0$  o que implica em  $CA^k v = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Em particular, para  $k = 0$  temos  $Cv = 0$ , o que implica em  $v \in \text{Nuc}(C)$ . Portanto,  $\text{Nuc}(M_0) \subset \text{Nuc}(C)$ ;

- iv.  $\text{Nuc}(M_0)$  é maximal dentre os subespaços do  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$ -invariantes, contidos em  $\text{Nuc}(C)$ . De fato, seja  $S \subset \mathbb{R}^n$  um subespaço  $A$ -invariante arbitrário contido em  $\text{Nuc}(C)$ .

Se  $x \in S$ , pelo fato de  $S$  ser  $A$ -invariante segue que  $x, Ax, A^2x, \dots, A^{n-1}x \in S$ . Como  $S \subset \text{Nuc}(C)$ , temos que  $Cx = CAx = CA^2x = \dots = CA^{n-1}x = 0$ . Assim,  $M_0x = 0$  e, logo,  $x \in \text{Nuc}(M_0)$  o que implica em  $S \subset \text{Nuc}(M_0)$ . Portanto,  $\text{Nuc}(M_0)$  é maximal. ■

**Teorema 2.4.2.** *Se  $\text{Po}(M_0) = r < n$ , então o par  $(A, C)$  é linearmente equivalente ao par*

$$\left( \left( \begin{array}{cc} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} \tilde{C}_1 & 0 \end{array} \right) \right).$$

*Além disso, o par  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$  é observável e  $\text{Po}(\tilde{M}_0) = r$ , sendo*

$$\tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11} \\ \vdots \\ \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

**Demonstração.** Do Teorema do Núcleo e da Imagem temos que  $\dim \text{Nuc}(M_0) = n - r$ . Logo, existem  $n - r$  linhas da matriz  $M_0$  formando um conjunto linearmente independente. Sejam  $V_{r+1}, \dots, V_n$  estas linhas. Então,  $\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$  forma uma base do  $\text{Nuc}(M_0)$ . Logo, existem vetores  $V_1, \dots, V_r \in \mathbb{R}^n$  tais que  $\{V_1, \dots, V_r, V_{r+1}, \dots, V_n\}$  forma uma base para o  $\mathbb{R}^n$ .

Pelo Lema 2.4.1,  $AV_j \in \text{Nuc}(M_0)$ , para  $j = r + 1, \dots, n$ , pois  $\text{Nuc}(M_0)$  é  $A$ -invariante. Assim, existem escalares  $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$ , com  $i, j = 1, \dots, n$ , eventualmente nulos, tais que

$$\begin{aligned} AV_1 &= \alpha_{1,1}V_1 + \dots + \alpha_{r,1}V_r + \alpha_{r+1,1}V_{r+1} + \dots + \alpha_{n,1}V_n, \\ &\vdots \\ AV_r &= \alpha_{1,r}V_1 + \dots + \alpha_{r,r}V_r + \alpha_{r+1,r}V_{r+1} + \dots + \alpha_{n,r}V_n, \\ AV_{r+1} &= 0V_1 + \dots + 0V_r + \alpha_{r+1,r+1}V_{r+1} + \dots + \alpha_{n,r+1}V_n, \\ &\vdots \\ AV_n &= 0V_1 + \dots + 0V_r + \alpha_{r+1,n}V_{r+1} + \dots + \alpha_{n,n}V_n. \end{aligned}$$

Considere a matriz não singular

$$P^{-1} = (V_1 | \dots | V_r | V_{r+1} | \dots | V_n).$$

Note que

$$\begin{aligned} AP^{-1} &= (AV_1 | \dots | AV_r | AV_{r+1} | \dots | AV_n) \\ &= (V_1 | \dots | V_r | V_{r+1} | \dots | V_n) \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r,1} & \cdots & \alpha_{r,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{r+1,1} & \cdots & \alpha_{r+1,r} & \alpha_{r+1,r+1} & \cdots & \alpha_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,r} & \alpha_{n,r+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

sendo  $\tilde{A}_{11}$  uma matriz  $r \times r$ . Logo,

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} = PAP^{-1}.$$

Seja agora  $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  a base canônica do espaço  $\mathbb{R}^p$ . Como  $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  e  $V_j \in \text{Nuc}(M_0) \subset \text{Nuc}(C)$ , para  $j = r+1, \dots, n$ , temos que  $CV_j = 0$ , para  $j = r+1, \dots, n$ .

Então, existem escalares  $\gamma_{i,j}$ , com  $i = 1, \dots, p$  e  $j = 1, \dots, r$ , tais que

$$\begin{aligned} CV_1 &= \gamma_{1,1}e_1 + \cdots + \gamma_{p,1}e_p, \\ &\vdots \\ CV_r &= \gamma_{1,r}e_1 + \cdots + \gamma_{p,r}e_p, \\ CV_{r+1} &= 0e_1 + \cdots + 0e_p, \\ &\vdots \\ CV_n &= 0e_1 + \cdots + 0e_p. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{C} &= CP^{-1} \\
&= (CV_1 | \dots | CV_r | CV_{r+1} | \dots | CV_n) \\
&= \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \gamma_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p,1} & \cdots & \alpha_{p,r} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&= (\tilde{C}_1 \ 0),
\end{aligned}$$

sendo  $\tilde{C}_1$  uma matriz  $p \times r$ .

Logo,

$$(\tilde{C}_1 \ 0) = CP^{-1}.$$

Agora resta mostrar que  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$  é observável e que  $\text{Po}(\tilde{M}_0) = r$ . Para isto basta observar que

$$\tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \\ \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^n & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Pelo *Teorema de Cayley–Hamilton*, para cada  $j \geq r$ ,  $\tilde{A}_{11}^j$  é combinação linear de  $\tilde{A}_{11}^i$ , com  $i = 0, 1, \dots, r-1$ . Assim, segue que  $\text{Po}(\tilde{M}_0) = r$  e, portanto, o par  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$  é observável. ■

**Teorema 2.4.3.** *Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $C \in \mathbb{R}^n$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

a. *O par  $(A, C)$  é observável;*

b. *Existe  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ , não singular, tal que o par  $(A, C)$  nas coordenadas  $z = Px$  tem a forma  $(\tilde{A}, \tilde{C})$ , com*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os números  $a_0, \dots, a_{n-1}$  são os coeficientes do polinômio característico de  $A$ .

### Demonstração.

(a)  $\Rightarrow$  (b). Devemos encontrar uma base  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  para o  $\mathbb{R}^n$ , de modo que a matriz não singular  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ , definida por

$$e_k P = w_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

satisfaça:

**i.**  $CP^{-1} = e_n$ ;

**ii.**  $e_1 P A P^{-1} = -a_0 e_n$ ;

**iii.**  $e_{k+1} P A P^{-1} = e_k - a_k e_n$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ ,

sendo  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Defina  $w_k$  da seguinte maneira

$$w_n = C, \quad w_k = w_{k+1} A + a_k C, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Logo,

$$CP^{-1} = w_n P^{-1} = e_n,$$

provando (i). Além disso,

$$w_{n-1} = w_n A + a_{n-1} C = CA + a_{n-1} C,$$

$$w_{n-2} = w_{n-1} A + a_{n-2} C = (CA + a_{n-1} C)A + a_{n-2} C = CA^2 + a_{n-1} CA + a_{n-2} C,$$

$\vdots$

$$w_1 = w_2 A + a_1 C = CA^{n-1} + a_{n-1} CA^{n-2} + \cdots + a_1 C.$$

Assim, de forma recursiva, concluímos que

$$w_k = CA^{n-k} + \sum_{j=1}^{n-k} a_{n-j} CA^{n-k-j}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Como o par  $(A, C)$  é observável, segue que  $\{C, CA, \dots, CA^{n-1}\}$  é um conjunto linearmente independente. Da mesma maneira  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  também é, visto que forma uma base para o  $\mathbb{R}^n$ . Do *Teorema de Cayley–Hamilton*,  $p_A(A) = 0$ , sendo  $p_A$  o polinômio característico da matriz  $A$ . Logo,

$$\begin{aligned} w_1 A &= (CA^{n-1} + a_{n-1}CA^{n-2} + \dots + a_1C)A + a_0C - a_0C \\ &= (CA^n + a_{n-1}CA^{n-1} + \dots + a_1CA + a_0C) - a_0C \\ &= \left( CA^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k CA^k \right) - a_0C \\ &= C \left( A^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k \right) - a_0C \\ &= Cp_A(A) - a_0C = -a_0C. \end{aligned}$$

Como  $C = w_n$ , temos que

$$w_1 A = -a_0 w_n.$$

Visto que  $e_k P = w_k$  e  $P$  é não singular, segue que

$$w_k = e_k P, \quad k = 1, \dots, n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} e_1 P A &= w_1 A = -a_0 w_n, \\ e_1 P A P^{-1} &= -a_0 w_n P^{-1} = -a_0 e_n, \end{aligned}$$

provando (ii). Temos ainda que

$$w_k = w_{k+1} A + a_k C,$$

o que implica que

$$w_{k+1} A = w_k - a_k C.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 e_{k+1}PA &= e_kP - a_k w_n \\
 &= e_kP - a_k e_n P \\
 &= (e_k - a_k e_n)P
 \end{aligned}$$

e, então,

$$e_{k+1}PAP^{-1} = e_k - a_k e_n, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

provando **(iii)**.

**(b)**  $\Rightarrow$  **(a)**. Considere o par  $(\tilde{A}, \tilde{C})$  tal como em **(b)**. Logo, vem que  $\text{Po}(\tilde{M}_0) = n$ , pois,

$$\tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-2} \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & \alpha_{n-4} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix},$$

sendo que, para cada  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $\alpha_i$  é obtido em função dos coeficientes  $a_0, \dots, a_{n-1}$ .

Portanto, do Teorema 2.1.3, o par  $(\tilde{A}, \tilde{C})$  é observável. Assim, pelo Teorema 2.4.1, o par  $(A, C)$  é observável.

■

## Capítulo 3

# Bifurcação de Hopf a Partir do Infinito em Sistemas de Controle Bidimensionais

Neste capítulo, estamos interessados no aparecimento de um ciclo limite, a partir do infinito, no retrato de fase de sistemas de controle lineares por partes bidimensionais e simétricos. Este fenômeno pode ser considerado como uma espécie de bifurcação de Hopf a partir do infinito. Os sistemas em estudo são de grande importância na Teoria de Controle e muito comuns em engenharia, uma vez que incluem o caso em que as não linearidades envolvidas são do tipo saturação. Eles estão relacionados com a classe de campos vetoriais não diferenciáveis para os quais os teoremas clássicos de bifurcações não são aplicáveis. Para esses sistemas, condições necessárias e suficientes para a bifurcação de uma órbita periódica, a partir do infinito, são conhecidas. Na Seção 3.1 apresentaremos os resultados principais desta dissertação, que serão demonstrados na Seção 3.3 utilizando fortemente a primeira e a segunda derivadas da transformação de Poincaré no infinito, tema abordado na Seção 3.2.

### 3.1 Resultados Principais

Considere um sistema de controle linear autônomo

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases}$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n,m}$  e  $C \in \mathbb{R}^{p,n}$ . Neste capítulo,  $x'$  denota a derivada de  $x$  com respeito à variável  $s$ , chamada também de tempo.

Se  $u = \mathcal{F}(y)$ , sendo  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função de classe  $C(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$  ou  $C^k(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  ou  $k = \infty$ , então

$$x' = Ax + B\mathcal{F}(y)$$

é chamado de **sistema de controle em malha fechada**. Neste caso, o vetor de controle  $u = \mathcal{F}(y)$  é chamado de **realimentação estática de saída**.

Seguindo [7], aqui trataremos da classe de sistemas de controle em malha fechada da forma

$$x' = Ax + B\psi(C^*x), \quad (3.1)$$

nos quais  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{2,1}$  e  $C \in \mathbb{R}^{2,1}$ . A não linearidade de sistemas desse tipo resulta da presença da função característica  $\psi$  que desempenha um papel de realimentação estática de saída. É comum, em Teoria de Controle, considerar funções características, lineares por partes,  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} k_2\sigma - (k_1 - k_2)w, & \text{se } \sigma \leq -w, \\ k_1\sigma, & \text{se } -w < \sigma < w, \\ k_2\sigma + (k_1 - k_2)w, & \text{se } w \leq \sigma, \end{cases} \quad (3.2)$$

com  $k_1$ ,  $k_2$  e  $w$  números reais, sendo  $w > 0$ . Para  $k_2 = 0$ , temos

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} -k_1w, & \text{se } \sigma \leq -w, \\ k_1\sigma, & \text{se } -w < \sigma < w, \\ k_1w, & \text{se } w \leq \sigma, \end{cases}$$

que corresponde a uma função do tipo saturação, uma das mais frequentes não linearidades envolvidas em aplicações. Vejamos alguns possíveis gráficos para  $\psi$ , nas figuras a seguir.

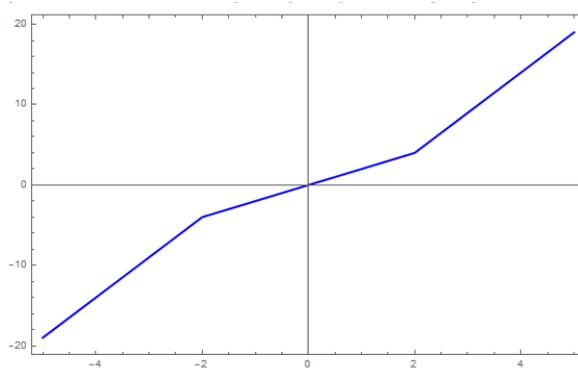


Figura 3.1: Gráfico da função  $\psi$ , dada em (3.2) para  $(k_1, k_2, w) = (2, 5, 2)$ .

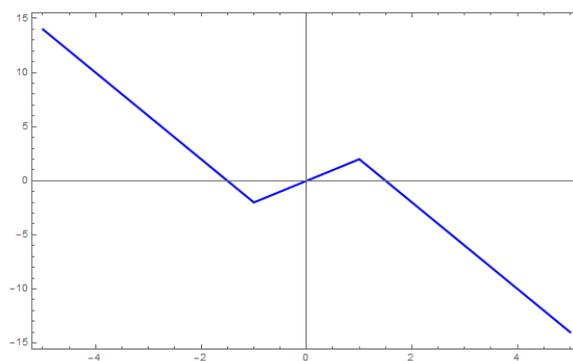


Figura 3.2: Gráfico da função  $\psi$ , dada em (3.2) para  $(k_1, k_2, w) = (2, -4, 1)$ .

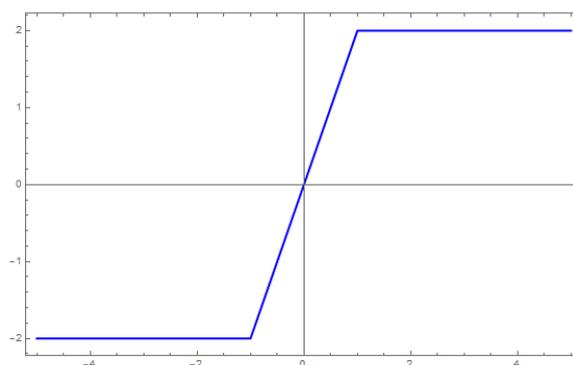


Figura 3.3: Gráfico da função  $\psi$ , dada em (3.2) para  $(k_1, k_2, w) = (2, 0, 1)$ . Neste caso,  $\psi$  é chamada de saturação.

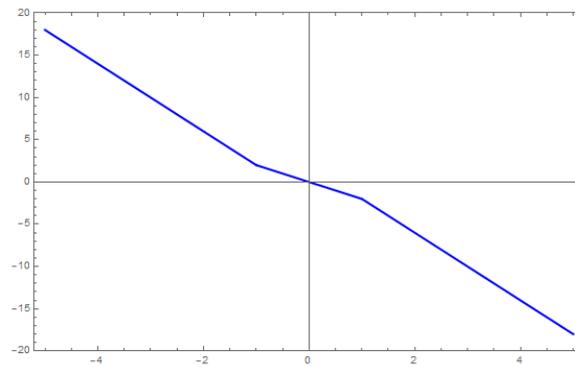


Figura 3.4: Gráfico da função  $\psi$ , dada em (3.2) para  $(k_1, k_2, w) = (-2, -4, 1)$ .

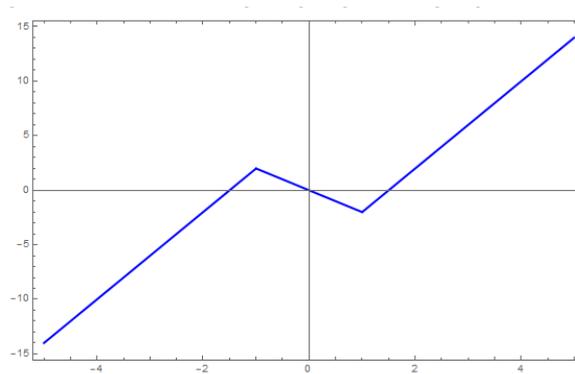


Figura 3.5: Gráfico da função  $\psi$ , dada em (3.2) para  $(k_1, k_2, w) = (-2, 4, 1)$ .

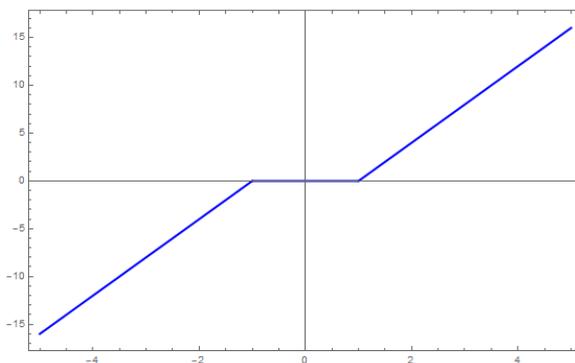


Figura 3.6: Gráfico da função  $\psi$ , dada em (3.2) para  $(k_1, k_2, w) = (0, 4, 1)$ . Neste caso,  $\psi$  é chamada de zona morta.

Note ainda que  $\psi$  é uma função ímpar, de fato

$$\begin{aligned} \psi(-\sigma) &= \begin{cases} -k_2\sigma - (k_1 - k_2)w, & \text{se } -\sigma \leq -w, \\ -k_1\sigma, & \text{se } -w < -\sigma < w, \\ -k_2\sigma + (k_1 - k_2)w, & \text{se } w \leq -\sigma, \end{cases} \\ &= - \begin{cases} k_2\sigma + (k_1 - k_2)w, & \text{se } w \leq \sigma, \\ k_1\sigma, & \text{se } -w < \sigma < w, \\ k_2\sigma - (k_1 - k_2)w, & \text{se } \sigma \leq -w, \end{cases} \\ &= -\psi(\sigma). \end{aligned}$$

Pela definição da função  $\psi$  em (3.2), claramente, o sistema (3.1) se divide em três sistemas de controle lineares autônomos em malha fechada, quais sejam,

$$\begin{cases} x' = Ax + B[k_2C^*x - (k_1 - k_2)w], & \text{se } C^*x \leq -w, \\ x' = Ax + B[k_1C^*x], & \text{se } -w \leq C^*x \leq w, \\ x' = Ax + B[k_2C^*x + (k_1 - k_2)w], & \text{se } w \leq C^*x. \end{cases}$$

Além disto, o sistema (3.1) é invariante sob a simetria  $x \leftrightarrow -x$ , pois, fazendo a mudança de variável  $x = -y$ , temos

$$\begin{aligned} y' &= (-x)' \\ &= -x' \\ &= -(Ax + B\psi(C^*x)) \\ &= -A(-y) - B\psi(-C^*y) \\ &= Ay + B\psi(C^*y). \end{aligned}$$

O sistema (3.1) é linearmente dominado no infinito, isto é, existe uma matriz constante  $F$ ,  $2 \times 2$  tal que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|Ax + B\psi(C^*x) - Fx\|}{\|x\|} = 0,$$

qual seja,  $F = A + k_2BC^*$ . De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|Ax + B\psi(C^*x) - Fx\|}{\|x\|} &= \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|Ax + B\psi(C^*x) - Ax - k_2BC^*x\|}{\|x\|} \\ &\leq \|B\| \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|\psi(C^*x) - k_2C^*x\|}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Se  $C^*x \leq -w$ , então

$$\begin{aligned} \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|Ax + B\psi(C^*x) - Fx\|}{\|x\|} &\leq \|B\| \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|k_2C^*x - (k_1 - k_2)w - k_2C^*x\|}{\|x\|} \\ &= \|B\| \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|(k_1 - k_2)w\|}{\|x\|} = 0. \end{aligned}$$

Para  $w \leq C^*x$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|Ax + B\psi(C^*x) - Fx\|}{\|x\|} &\leq \|B\| \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|k_2C^*x + (k_1 - k_2)w - k_2C^*x\|}{\|x\|} \\ &= \|B\| \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|(k_1 - k_2)w\|}{\|x\|} = 0. \end{aligned}$$

Assim, os resultados de Glover [3] e He [4], que dão condições suficientes para que haja uma bifurcação de uma órbita periódica a partir do infinito, se aplicam. No entanto, assumindo que esta bifurcação ocorra para um valor crítico de um parâmetro do sistema, digamos  $\mu = 0$ , estes resultados não fornecem quaisquer informações sobre:

- (1) A existência da órbita periódica bifurcada para  $\mu < 0$  ou  $\mu > 0$ , com  $|\mu|$  suficientemente pequeno;
- (2) A unicidade da órbita periódica bifurcada;
- (3) A estabilidade da órbita periódica bifurcada;
- (4) Uma estimativa assintótica para a amplitude da órbita periódica bifurcada.

Os resultados fornecidos em [7] respondem à estas questões.

Conforme o Capítulo 2, o sistema (3.1) é observável se, e somente se,

$$\text{Po} \begin{pmatrix} C^* \\ C^*A \end{pmatrix} = 2.$$

Para o sistema (3.1), definimos os parâmetros  $T$ ,  $t$ ,  $D$  e  $d$  que serão úteis nos teoremas a seguir,

$$T = \text{tr}(A + k_1 BC^*),$$

$$t = \text{tr}(A + k_2 BC^*),$$

$$D = \det(A + k_1 BC^*),$$

$$d = \det(A + k_2 BC^*).$$

**Teorema 3.1.1.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a. O sistema (3.1) tem uma órbita periódica no infinito;
- b. O sistema (3.1) é observável e  $4d - t^2 > 0$ .

Quando o sistema (3.1) for observável mostraremos, por meio de uma mudança de variáveis linear, que este pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \varphi(x_2) \begin{pmatrix} d - D \\ T - t \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

sendo,

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} -1, & \text{se } \sigma \leq -1, \\ \sigma, & \text{se } -1 \leq \sigma \leq 1, \\ 1, & \text{se } \sigma \geq 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

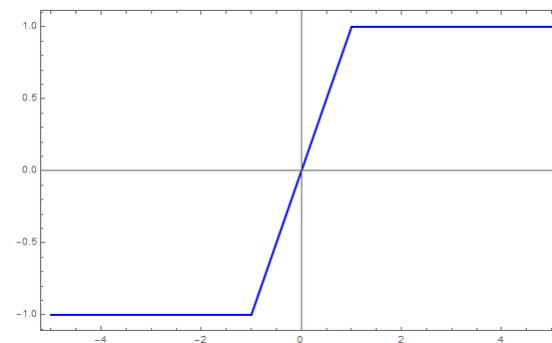


Figura 3.7: Gráfico da função  $\varphi$ , dada em (3.4).

Destacamos que (3.3) corresponde à forma canônica observável do sistema (3.1), no qual, a não linearidade  $\varphi$  é uma saturação normalizada. Escolhendo  $t$ , como um parâmetro de bifurcação, usaremos esta forma para mostrar o resultado a seguir.

**Teorema 3.1.2.** *Se o sistema (3.1) tem uma órbita periódica no infinito, então valem as seguintes afirmações:*

- a. *Se  $T \neq 0$ , então, para  $t = 0$ , o sistema (3.1) apresenta uma bifurcação de ciclos limites. Além disto, um ciclo limite bifurca a partir da órbita periódica no infinito quando  $Tt < 0$ ;*
- b. *Se  $T < 0$ , então, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, o ciclo limite bifurcado existe para  $t \in (0, \varepsilon)$ , é instável e não existe para  $t \in (-\varepsilon, 0)$ ;*
- c. *Se  $T > 0$ , então, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, o ciclo limite bifurcado existe para  $t \in (-\varepsilon, 0)$ , é estável e não existe para  $t \in (0, \varepsilon)$ ;*
- d. *O ciclo limite bifurcado está próximo da elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de semieixos

$$a = \left( \frac{Td - tD}{d} \right) \left[ \frac{1 + \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)}{1 - \exp\left(\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)} \right]$$

e

$$b = \frac{a}{\sqrt{d}};$$

- e. *Se  $T = 0$ , então, para  $t = 0$ , nenhum ciclo limite bifurca a partir da órbita periódica no infinito;*
- f. *Para  $t \neq 0$ , nenhum outro ciclo limite bifurca a partir da órbita periódica no infinito.*

Para provar o Teorema 3.1.2, necessitaremos do estudo da primeira e da segunda derivadas da transformação de Poincaré numa vizinhança do infinito. Para calculá-las, na Seção 3.2 usaremos uma extensão para sistemas suaves por partes. O Teorema 3.1.1 e a utilização dessas fórmulas para provar o Teorema 3.1.2 estão incluídos na Seção 3.3.

## 3.2 Primeiras Derivadas da Transformação de Poincaré no Infinito para Sistemas Suaves por Partes

O estudo da transformação de Poincaré associada com campos vetoriais bidimensionais, quando está bem definida e em uma vizinhança do infinito, pode ser feita usando convenientemente a transformação de Bendixson (veja [1] e [2]). Como veremos a seguir, essa transformação reduz o problema a um estudo similar, numa vizinhança da origem, de um novo sistema bidimensional. Mas antes, façamos a seguinte definição.

**Definição 3.2.1.** *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função, com  $D$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que  $f$  é uma função de Lipschitz se, e somente se, para todo  $x, y \in D$  existir uma constante real  $K > 0$  tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|.$$

O ínfimo das constantes  $K$  para o qual a desigualdade acima é válida é chamado de constante de Lipschitz.

Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} x'_1 = f(x_1, x_2), \\ x'_2 = g(x_1, x_2), \end{cases} \quad (3.5)$$

no qual  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções de Lipschitz e o campo vetorial bidimensional associado  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dado por

$$X(x_1, x_2) = (f(x_1, x_2), g(x_1, x_2)).$$

Seja  $\mathbb{S}^2$  a esfera do  $\mathbb{R}^3$ , centrada na origem, de raio  $r = 1/2$ , isto é,

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{1}{4} \right\},$$

conhecida na literatura como **Esfera de Bendixson**. Denotamos por  $N = (0, 0, 1/2)$  e  $S = (0, 0, -1/2)$  os polos norte e sul de  $\mathbb{S}^2$ , respectivamente. Os planos tangentes a  $\mathbb{S}^2$ , nos pontos  $N$  e  $S$ , serão denotados por  $T_N\mathbb{S}^2$  e  $T_S\mathbb{S}^2$ , respectivamente.

Primeiramente, construiremos uma projeção que leva pontos de  $T_S\mathbb{S}^2$  em pontos de  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ , a qual denotaremos por  $P_N^{-1}$ , que nada mais é do que a inversa da projeção estereográfica a partir do polo norte.

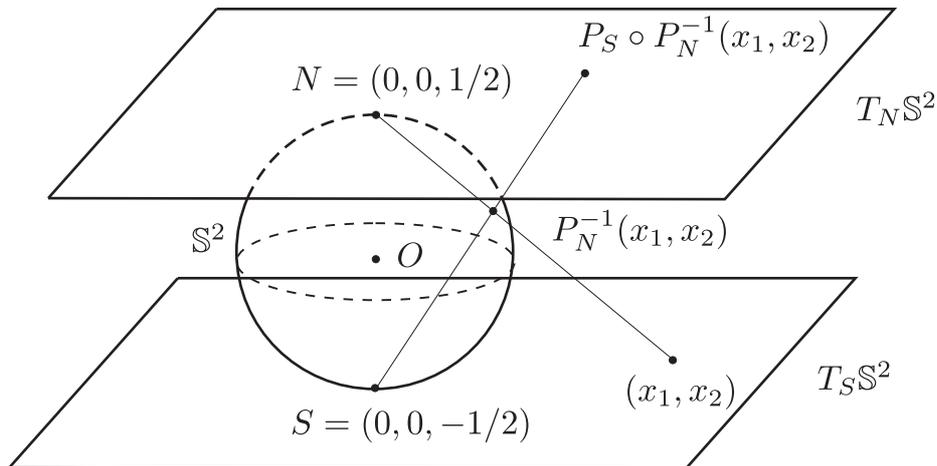


Figura 3.8: Representação geométrica da transformação de Bendixson.

Seja  $(x_1, x_2, -1/2) \in T_S\mathbb{S}^2$  e considere a única reta  $r_N$  que passa por este ponto e pelo ponto  $N$ , qual seja,

$$\begin{aligned} r_N(\tau) &= \left(0, 0, \frac{1}{2}\right) + \tau(x_1, x_2, -1) \\ &= \left(\tau x_1, \tau x_2, \frac{1}{2} - \tau\right). \end{aligned}$$

Tal reta intercepta  $\mathbb{S}^2$  se, e somente se,

$$\tau^2 x_1^2 + \tau^2 x_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \tau\right)^2 = \frac{1}{4},$$

isto é,

$$\begin{aligned} \tau^2 x_1^2 + \tau^2 x_2^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \tau\right)^2 \\ &= (1 - \tau)\tau \\ &= \tau - \tau^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\tau^2(x_1^2 + x_2^2 + 1) - \tau = 0,$$

e os valores do parâmetros  $\tau$  na interseção são

$$\tau = 0 \text{ ou } \tau = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}.$$

Como, para  $\tau = 0$ , temos

$$r_N(0) = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right) = N,$$

definimos  $P_N^{-1}$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} P_N^{-1} : T_S\mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto P_N^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

Construiremos agora uma projeção que leva pontos de  $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$  em pontos de  $T_N\mathbb{S}^2$ , a qual denotaremos por  $P_S$ , que nada mais é do que a projeção estereográfica a partir do polo sul.

Seja  $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$  e considere a única reta  $r_S$  que passa por este ponto e pelo ponto  $S$ , qual seja,

$$\begin{aligned} r_S(\tau) &= \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right) + \tau \left(y_1, y_2, y_3 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\tau y_1, \tau y_2, \tau y_3 + \frac{\tau - 1}{2}\right). \end{aligned}$$

Tal reta intercepta  $T_N\mathbb{S}^2$  se, e somente se,

$$\begin{aligned} \tau y_3 + \frac{\tau - 1}{2} &= \frac{1}{2}, \\ \tau \left(y_3 + \frac{1}{2}\right) &= 1, \\ \tau \left(\frac{2y_3 + 1}{2}\right) &= 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\tau = \frac{2}{2y_3 + 1}.$$

Definimos  $P_S$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} P_S : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} &\longrightarrow T_N\mathbb{S}^2 \\ (y_1, y_2, y_3) &\longmapsto P_S(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{2y_1}{2y_3 + 1}, \frac{2y_2}{2y_3 + 1}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

A transformação de Bendixson é obtida compondo  $P_S$  e  $P_N^{-1}$ ,

$$\begin{aligned}
P_S \circ P_N^{-1}(x_1, x_2) &= P_S(P_N^{-1}(x_1, x_2)) \\
&= P_S\left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}\right) \\
&= \left(\frac{\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}}{1 - \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} + 1}, \frac{\frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}}{1 - \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} + 1}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}}{\frac{2x_1^2 + 2x_2^2 + 2 - 2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}}, \frac{\frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}}{\frac{2x_1^2 + 2x_2^2 + 2 - 2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P_S \circ P_N^{-1} : T_S\mathbb{S}^2 \setminus \{S\} &\longrightarrow T_N\mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \\
(x_1, x_2) &\longmapsto P_S \circ P_N^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{1}{2}\right) = \left(u, v, \frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

ou ainda, utilizando a mesma notação,

$$\begin{aligned}
P_S \circ P_N^{-1} : T_S\mathbb{S}^2 \setminus \{S\} &\longrightarrow T_N\mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \\
(x_1, x_2) &\longmapsto (u, v) = P_S \circ P_N^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, via transformação de Bendixson

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

podemos obter um sistema equivalente que se comporta numa vizinhança da origem como o sistema (3.5) numa vizinhança do infinito. Usando agora as coordenadas polares

$$u = r \cos \theta \quad \text{e} \quad v = r \sin \theta,$$

o que, naturalmente, corresponde a fazer desde o início a mudança de variáveis

$$x_1 = \frac{\cos \theta}{r} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{\sin \theta}{r},$$

temos

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{\cos^2 \theta}{r^2} + \frac{\sen^2 \theta}{r^2} = \frac{1}{r^2}$$

e, logo,

$$r^2 = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Derivando a última igualdade, temos

$$\begin{aligned} 2rr' &= - \left( \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right)^2 (2x_1x_1' + 2x_2x_2'), \\ r' &= -r^3 \left( \frac{\cos \theta}{r} x_1' + \frac{\sen \theta}{r} x_2' \right) \\ &= -r^2 (x_1' \cos \theta + x_2' \sen \theta) \\ &= -r^2 \left[ f \left( \frac{\cos \theta}{r}, \frac{\sen \theta}{r} \right) \cos \theta + g \left( \frac{\cos \theta}{r}, \frac{\sen \theta}{r} \right) \sen \theta \right]. \end{aligned}$$

Temos também que

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\sen \theta}{r} \frac{r}{\cos \theta} = \tan \theta$$

e, assim,

$$\theta = \arctan \left( \frac{x_2}{x_1} \right).$$

Derivando a última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{1}{1 + \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2} \frac{x_1x_2' - x_2x_1'}{x_1^2} \\ &= \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \frac{x_1x_2' - x_2x_1'}{x_1^2} \\ &= r^2 \left( \frac{\cos \theta}{r} x_2' - \frac{\sen \theta}{r} x_1' \right) \\ &= -r (x_1' \sen \theta - x_2' \cos \theta) \\ &= -r \left[ f \left( \frac{\cos \theta}{r}, \frac{\sen \theta}{r} \right) \sen \theta - g \left( \frac{\cos \theta}{r}, \frac{\sen \theta}{r} \right) \cos \theta \right]. \end{aligned}$$

Assim, o sistema (3.5) torna-se

$$\begin{cases} r' = -r^2 \left[ f \left( \frac{\cos \theta}{r}, \frac{\sen \theta}{r} \right) \cos \theta + g \left( \frac{\cos \theta}{r}, \frac{\sen \theta}{r} \right) \sen \theta \right], \\ \theta' = -r \left[ f \left( \frac{\cos \theta}{r}, \frac{\sen \theta}{r} \right) \sen \theta - g \left( \frac{\cos \theta}{r}, \frac{\sen \theta}{r} \right) \cos \theta \right], \end{cases} \quad (3.6)$$

e estaremos interessados no fluxo definido no semicilindro

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1 = \{(r, \theta) \mid r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

Na maioria dos casos, o sistema (3.6) não tem sentido para  $r = 0$ , mas esta dificuldade pode, em certos casos, ser contornada mediante uma reparametrização do tempo e tipicamente é suficiente multiplicar o campo vetorial por uma potência de  $r$  adequada. Para fixar tais ideias, considere o sistema a seguir,

$$\begin{cases} x'_1 = P(x_1, x_2), \\ x'_2 = Q(x_1, x_2). \end{cases} \quad (3.7)$$

no qual  $P$  e  $Q$  são polinômios de grau no máximo  $d$  e o correspondente campo vetorial  $X$ , com uma singularidade na origem, dado por

$$X(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2)).$$

Da transformação de Bendixson, temos que

$$u = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad e \quad v = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Logo,

$$u^2 + v^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{u}{x_1} = \frac{v}{x_2}.$$

Assim,

$$x_1 = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad e \quad x_2 = \frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Substituindo  $x_1$  e  $x_2$ , obtidos anteriormente, no sistema (3.7), obtemos

$$\begin{cases} P\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}\right) = x'_1 = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right) u' + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right) v', \\ Q\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}\right) = x'_2 = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{v}{u^2 + v^2}\right) u' + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v}{u^2 + v^2}\right) v', \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{cases} P\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}\right) = \left[\frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2}\right] u' - \left[\frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2}\right] v', \\ Q\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}\right) = -\left[\frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2}\right] u' + \left[\frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2}\right] v', \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} P\left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right) \\ Q\left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} & -\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \\ -\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} & \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Sendo

$$A(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} & -\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \\ -\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} & \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2} \end{pmatrix},$$

temos que

$$A^{-1}(u, v) = \frac{1}{\det A(u, v)} \begin{pmatrix} \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2} & \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \\ \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} & \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} \det A(u, v) &= \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2} - \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \\ &= \frac{v^2u^2 - v^4 - u^4 + u^2v^2 - 4u^2v^2}{(u^2+v^2)^4} \\ &= \frac{-(u^4 + 2u^2v^2 + v^4)}{(u^2+v^2)^4} \\ &= \frac{-(u^2+v^2)^2}{(u^2+v^2)^4} \\ &= -\frac{1}{(u^2+v^2)^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$A^{-1}(u, v) = -(u^2+v^2)^2 \begin{pmatrix} \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2} & \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \\ \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} & \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2-u^2 & -2uv \\ -2uv & u^2-v^2 \end{pmatrix}.$$

Voltando ao sistema anterior, temos

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2-u^2 & -2uv \\ -2uv & u^2-v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P\left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right) \\ Q\left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right) \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{cases} u' = (v^2 - u^2)P\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}\right) - 2uvQ\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}\right), \\ v' = -2uvP\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}\right) + (u^2 - v^2)Q\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}\right). \end{cases} \quad (3.8)$$

Como o sistema (3.7) possui uma singularidade na origem e, conseqüentemente, o mesmo é válido para o sistema (3.8), podemos escrever  $P$  e  $Q$  da seguinte forma

$$P(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^d \sum_{j=0}^k p_{k-j,j} x_1^{k-j} x_2^j,$$

$$Q(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^d \sum_{j=0}^k q_{k-j,j} x_1^{k-j} x_2^j.$$

Nas variáveis  $u$  e  $v$ , temos que

$$\begin{aligned} P\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}\right) &= \sum_{k=1}^d \sum_{j=0}^k p_{k-j,j} \left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right)^{k-j} \left(\frac{v}{u^2 + v^2}\right)^j \\ &= \sum_{k=1}^d \sum_{j=0}^k p_{k-j,j} \left(\frac{1}{u^2 + v^2}\right)^{k-j} u^{k-j} \left(\frac{1}{u^2 + v^2}\right)^j v^j \\ &= \sum_{k=1}^d \frac{1}{(u^2 + v^2)^k} \sum_{j=0}^k p_{k-j,j} u^{k-j} v^j \\ &= \sum_{k=1}^d \frac{(u^2 + v^2)^{d-k}}{(u^2 + v^2)^d} \sum_{j=0}^k p_{k-j,j} u^{k-j} v^j \\ &= \frac{1}{(u^2 + v^2)^d} \sum_{k=1}^d (u^2 + v^2)^{d-k} \sum_{j=0}^k p_{k-j,j} u^{k-j} v^j \\ &= \frac{1}{(u^2 + v^2)^d} \bar{P}(u, v), \end{aligned}$$

no qual,

$$\bar{P}(u, v) = \sum_{k=1}^d (u^2 + v^2)^{d-k} \sum_{j=0}^k p_{k-j,j} u^{k-j} v^j.$$

Analogamente,

$$Q\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}\right) = \frac{1}{(u^2 + v^2)^d} \bar{Q}(u, v),$$

sendo

$$\bar{Q}(u, v) = \sum_{k=1}^d (u^2 + v^2)^{d-k} \sum_{j=0}^k q_{k-j,j} u^{k-j} v^j.$$

Substituindo essas expressões para  $P$  e  $Q$  no sistema (3.8), obtemos

$$\begin{cases} u' = (v^2 - u^2) \frac{1}{(u^2 + v^2)^d} \bar{P}(u, v) - 2uv \frac{1}{(u^2 + v^2)^d} \bar{Q}(u, v), \\ v' = -2uv \frac{1}{(u^2 + v^2)^d} \bar{P}(u, v) + (u^2 - v^2) \frac{1}{(u^2 + v^2)^d} \bar{Q}(u, v), \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{(u^2 + v^2)^d} \tilde{P}(u, v), \\ v' = \frac{1}{(u^2 + v^2)^d} \tilde{Q}(u, v), \end{cases} \quad (3.9)$$

no qual

$$\begin{aligned} \tilde{P}(u, v) &= (v^2 - u^2) \bar{P}(u, v) - 2uv \bar{Q}(u, v), \\ \tilde{Q}(u, v) &= -2uv \bar{P}(u, v) + (u^2 - v^2) \bar{Q}(u, v). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Faremos agora uma mudança na escala de tempo, qual seja,

$$\frac{ds}{d\tau} = (u^2 + v^2)^d.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \frac{du}{ds} \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{(u^2 + v^2)^d} \tilde{P}(u, v) (u^2 + v^2)^d = \tilde{P}(u, v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= \frac{dv}{ds} \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{(u^2 + v^2)^d} \tilde{Q}(u, v) (u^2 + v^2)^d = \tilde{Q}(u, v). \end{aligned}$$

Portanto, o sistema (3.7) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u' = \tilde{P}(u, v), \\ v' = \tilde{Q}(u, v). \end{cases} \quad (3.11)$$

Fora do ponto singular na origem, os sistemas (3.9) e (3.11) possuem o mesmo retrato de fase, visto serem topologicamente equivalentes, porém (3.11) está definido em todo ponto de  $\mathbb{R}^2$  e, por isso, estudaremos este sistema.

Para determinar o retrato de fase de um campo vetorial numa vizinhança de uma singularidade hiperbólica, utilizamos o método de linearização dado pelo *Teorema de Hartman–Grobman*.

**Teorema 3.2.1.** *Sejam  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^1$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $p \in \Delta$  um ponto singular hiperbólico de  $X$ . Existem vizinhanças  $W$  de  $p$  em  $\Delta$  e  $V$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^n$  tais que  $X|_W$  é topologicamente conjugado a  $DX(p)|_V$ .*

**Demonstração.** Veja o Capítulo IX de [11]. ■

Quando a singularidade é não hiperbólica, este teorema não se aplica e, por isso, temos que recorrer a outros métodos, por exemplo, o *blow-up*. Tal método consiste numa mudança de coordenadas que expande (ou “explode”) as singularidades em curvas contendo um número finito de singularidades. Após a mudança de coordenadas, estudamos as singularidades isoladamente de um novo campo vetorial ao longo dessa curva e, se uma singularidade é não hiperbólica, podemos aplicar um novo *blow-up* na mesma e, assim, sucessivamente.

Sob certas condições, após uma sequência finita de *blow-ups* serão encontradas apenas singularidades elementares. Esse resultado é conhecido na literatura como *Teorema da Decomposição* (Veja detalhes em [2]). Finalmente, pelo processo inverso (*blow-down*), obtemos o retrato de fase local numa vizinhança do ponto singular original.

A seguir, vamos descrever o método *Blow-up* para o campo vetorial  $\tilde{X}$ , associado com o sistema (3.11), dado por

$$\tilde{X}(u, v) = (\tilde{P}(u, v), \tilde{Q}(u, v)),$$

com  $\tilde{P}$  e  $\tilde{Q}$  tais como em (3.10).

Considere a aplicação  $\phi$  correspondente à mudança de coordenadas dada por

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Observe que  $\phi$  leva  $\{0\} \times \mathbb{S}^1$  em  $(0, 0)$ . Logo, a aplicação inversa  $\phi^{-1}$  “expande” a origem em um círculo.

Devemos encontrar um campo de vetores  $\hat{X} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com

$$\hat{X}(r, \theta) = \left( \hat{P}(r, \theta), \hat{Q}(r, \theta) \right),$$

de tal forma que o sistema

$$\begin{cases} r' = \hat{P}(r, \theta), \\ \theta' = \hat{Q}(r, \theta), \end{cases} \quad (3.13)$$

seja equivalente ao sistema (3.11). Sendo  $(u, v) = \phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , com  $r > 0$

$$\begin{cases} u = r \cos \theta, \\ v = r \sin \theta, \end{cases}$$

temos que

$$\begin{cases} r^2 = u^2 + v^2, \\ \theta = \arctan\left(\frac{v}{u}\right). \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} r' &= \frac{uu' + vv'}{r} \\ &= \frac{u\tilde{P}(u, v) + v\tilde{Q}(u, v)}{r} \\ &= \frac{r \cos \theta \tilde{P}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \tilde{Q}(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r} \\ &= \cos \theta \tilde{P}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \tilde{Q}(r \cos \theta, r \sin \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} \frac{uv' - vu'}{u^2} \\ &= \frac{uv' - vu'}{u^2 + v^2} \\ &= \frac{u\tilde{Q}(u, v) - v\tilde{P}(u, v)}{r^2} \\ &= \frac{r \cos \theta \tilde{Q}(r \cos \theta, r \sin \theta) - r \sin \theta \tilde{P}(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r^2} \\ &= \frac{\cos \theta \tilde{Q}(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta \tilde{P}(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r}. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \hat{P}(r, \theta) &= \cos \theta \tilde{P}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \tilde{Q}(r \cos \theta, r \sin \theta), \\ \hat{Q}(r, \theta) &= \frac{\cos \theta \tilde{Q}(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta \tilde{P}(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Essa construção nos permite demonstrar o seguinte resultado, no qual utilizaremos a seguinte notação

$$\mathbb{R}_+^* = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}.$$

**Teorema 3.2.2.** *Sejam  $\tilde{X}$  um campo de vetores de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$ , no qual  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  é uma singularidade isolada, e  $\phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  como definida em (3.12). Então existe um campo  $\hat{X} : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  tal que*

$$D\phi(r, \theta)\hat{X}(r, \theta) = \tilde{X}(\phi(r, \theta)), \quad \forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1.$$

**Demonstração.** Basta verificar que  $\hat{X}$  dado pela equação (3.14) satisfaz a essa condição.

De fato,

$$\begin{aligned} D\phi(r, \theta)\hat{X}(r, \theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \tilde{P} + \sin \theta \tilde{Q} \\ \frac{1}{r}[\cos \theta \tilde{Q} - \sin \theta \tilde{P}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \tilde{P} + \sin \theta \cos \theta \tilde{Q} - \sin \theta \cos \theta \tilde{Q} + \sin^2 \theta \tilde{P} \\ \sin \theta \cos \theta \tilde{P} + \sin^2 \theta \tilde{Q} + \cos^2 \theta \tilde{Q} - \sin \theta \cos \theta \tilde{P} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \tilde{P} \\ (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \tilde{Q} \end{pmatrix} \\ &= (\tilde{P}(r \cos \theta, r \sin \theta), \tilde{Q}(r \cos \theta, r \sin \theta)) \\ &= \tilde{X}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \tilde{X}(\phi(r, \theta)), \end{aligned}$$

para todo  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1$ . ■

Com este teorema, temos que  $\phi|_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1}$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$  sobre  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Logo,  $\hat{X}$  é  $C^\infty$ -diferenciavelmente conjugado a  $\tilde{X}|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ .

O campo  $\hat{X}$  é chamado *pull back* de  $\tilde{X}$  por  $\phi$  e está definido na superfície de um cilindro e, em  $r = 0$ , a singularidade será expandida, isto é, desingularizada. O esboço do retrato de fase, no cilindro, é visualizado como mostra o diagrama a seguir.

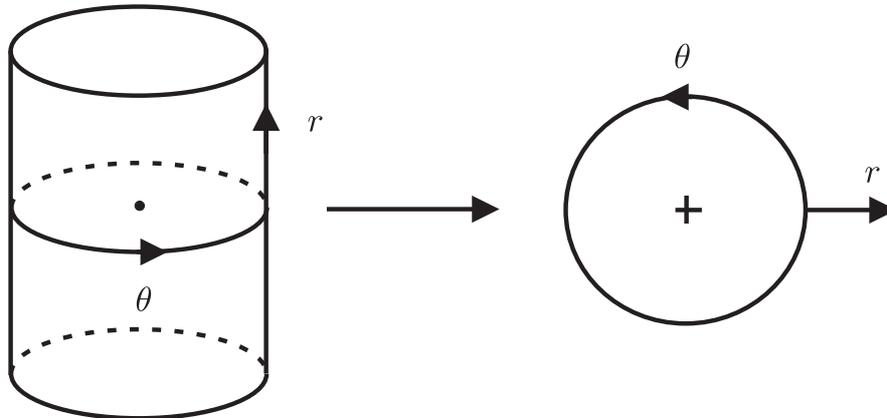


Figura 3.9: Diagrama para o esboço do retrato de fase do sistema (3.13).

Assim, estudar o retrato de fase de  $\tilde{X}$  numa vizinhança  $V$  da origem é equivalente a estudar o retrato de fase de  $\hat{X}$  na vizinhança  $\phi^{-1}(V)$  do círculo  $\{0\} \times \mathbb{S}^1$  e podemos até mesmo restringir para  $r \geq 0$ .

Seja  $j^k$  uma aplicação, denominada  $k$ -jato, que associa a cada função diferenciável  $f$  e cada elemento  $x$  do seu domínio o seu polinômio de Taylor, em torno de  $x$ , truncado na  $k$ -ésima potência  $j^k(f)(x)$ , sendo  $k \in \mathbb{N}$ .

Se  $\tilde{X}$  tem a propriedade de  $j^k(\tilde{X})(0) = 0$  e  $j^{k+1}(\tilde{X})(0) \neq 0$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

$$\bar{X} = \frac{1}{r^k} \hat{X},$$

que é um campo de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ . Tal divisão não muda as órbitas de  $\hat{X}$ , muda apenas a parametrização do tempo. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 3.2.1.** *Seja  $X$  um campo vetorial tal que*

$$X(u, v) = (u^2 - 2uv, v^2 - 2uv).$$

*Note que  $(u_0, v_0) = (0, 0)$  é a única singularidade de  $X$ . De fato,*

$$X(u, v) = (0, 0)$$

*se, e somente se,*

$$\begin{cases} u^2 - 2uv = 0, \\ v^2 - 2uv = 0, \end{cases} \quad (3.15)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} u^2 - 2uv = 0, \\ -v^2 + 2uv = 0. \end{cases}$$

Somando as duas equações do sistema anterior, obtemos

$$u^2 - v^2 = (u + v)(u - v) = 0$$

e, assim,

$$u = v \quad \text{ou} \quad u = -v.$$

Substituindo em qualquer uma das equações de (3.15), obtemos  $(u, v) = (0, 0)$ . Como,

$$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} 2u - 2v & -2u \\ -2v & 2v - 2u \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que  $(u_0, v_0) = (0, 0)$  é uma singularidade não hiperbólica. Aplicaremos então o método blow-up. Assim,

$$\begin{aligned} \hat{X}(r, \theta) &= (\cos \theta (r^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \sin \theta \cos \theta) + \sin \theta (r^2 \sin^2 \theta - 2r^2 \sin \theta \cos \theta), \\ &\quad \frac{1}{r} [\cos \theta (r^2 \sin^2 \theta - 2r^2 \sin \theta \cos \theta) - \sin \theta (r^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \sin \theta \cos \theta)]) \\ &= (r^2 (\cos^3 \theta - 2 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin^3 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta), \\ &\quad r (\sin^2 \theta \cos \theta - 2 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin \theta \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos \theta)) \\ &= (r^2 (\cos^3 \theta - 2 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin^3 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta), \\ &\quad 3r \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)). \end{aligned}$$

Como  $X$  tem componentes polinomiais formadas por monômios de grau 2, nas variáveis  $u$  e  $v$ , segue que  $k = 1$ . Logo,

$$\bar{X} = \frac{1}{r} \hat{X} = (r (\cos^3 \theta - 2 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin^3 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta), 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)).$$

Em  $r = 0$ , temos seis singularidades para  $\bar{X}$ , quais sejam,

$$(0, 0), \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right), (0, \pi), \left(0, \frac{5\pi}{4}\right), \text{ e } \left(0, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Calculando a matriz jacobiana de  $\bar{X}$ , temos que

$$D\bar{X}(r, \theta) = \begin{pmatrix} f_1(\theta) & r f_2(\theta) \\ 0 & f_3(\theta) \end{pmatrix},$$

sendo

$$f_1(\theta) = \cos^3 \theta - 2 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta - 2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta,$$

$$f_2(\theta) = 2 \operatorname{sen}^3 \theta - 2 \cos^3 \theta - 7 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta + 7 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta,$$

$$f_3(\theta) = 6 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta - 3 \operatorname{sen}^3 \theta - 3 \cos^3 \theta + 6 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta.$$

Assim, nos pontos singulares de  $\bar{X}$ , temos

$$D\bar{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D\bar{X}\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$D\bar{X}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D\bar{X}(0, \pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D\bar{X}\left(0, \frac{5\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$D\bar{X}\left(0, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Todas as singularidades são hiperbólicas e são pontos de sela. Devemos encontrar a posição das variedades invariantes. Como

$$A := D\bar{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

seus autovalores são  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -3$  e os autovetores associados são da forma  $V_1 = (u, 0)$  e  $V_2 = (0, v)$ , respectivamente.

Assim, concluímos que em torno de  $(0, 0)$ ,

$$E^S = [(0, 1)]$$

e

$$E^U = [(1, 0)],$$

os espaços gerados pelos vetores  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ , respectivamente. E ainda, toda solução  $\zeta$  de  $z' = Az$ , com  $z = (z_1, z_2)$ , é da forma

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= c_1 e^s (1, 0) + c_2 e^{-3s} (0, 1) \\ &= (c_1 e^s, c_2 e^{-3s}), \quad s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

sendo  $c_1$  e  $c_2$  constantes reais. Logo, na direção de  $\theta$ , temos que a órbita tende para  $(0, 0)$  quando  $s \rightarrow \infty$  e, na direção de  $r$ , a órbita tende a  $(0, 0)$  quando  $s \rightarrow -\infty$ .

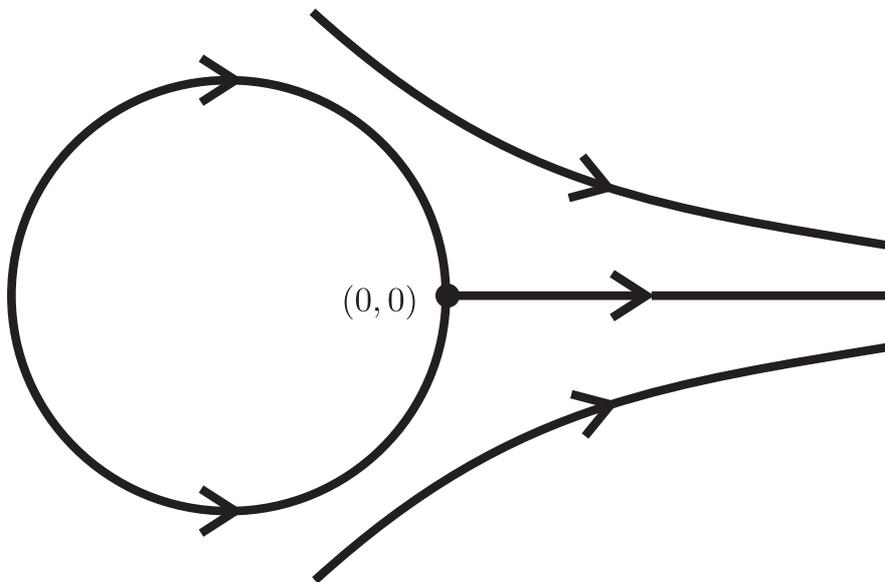


Figura 3.10: Construção do retrato de fase de  $\bar{X}$ , em torno de  $(0, 0)$ , a partir do *blow-up*.

Localmente o retrato de fase é o mesmo para as singularidades  $(0, \pi/2)$  e  $(0, 5\pi/4)$ , pois em ambas  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ .

Agora, como

$$B := D\bar{X}(0, \pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

seus autovalores são  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 3$ . Os autovetores associados à  $\lambda_1$  são da forma  $V_1 = (u, 0)$  e os associados à  $\lambda_2$  são da forma  $V_2 = (0, v)$ . Assim, concluímos que em torno de  $(0, \pi)$ ,

$$E^S = [(1, 0)]$$

e

$$E^U = [(0, 1)]$$

os espaços gerados pelos vetores  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , respectivamente. E, ainda, toda solução  $\varsigma$  de  $z' = Bz$ , com  $z = (z_1, z_2)$ , é da forma

$$\begin{aligned} \varsigma(s) &= c_1 e^{-s}(1, 0) + c_2 e^{3s}(0, 1) \\ &= (c_1 e^{-s}, c_2 e^{3s}), \quad s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

sendo  $c_1$  e  $c_2$  constantes reais. Logo, na direção de  $\theta$ , temos que a órbita tende para  $(0, 0)$  quando  $s \rightarrow -\infty$  e, na direção de  $r$ , a órbita tende a  $(0, 0)$  quando  $s \rightarrow \infty$ .

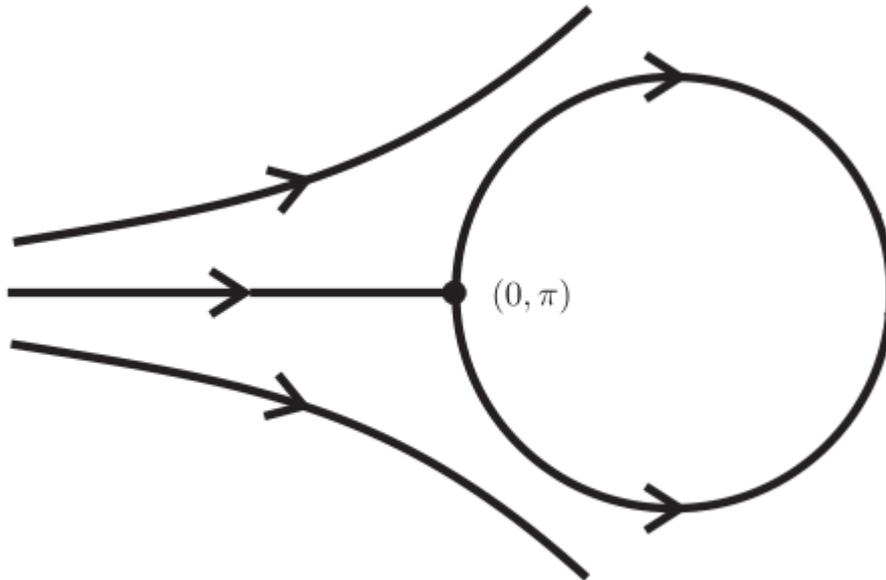


Figura 3.11: Construção do retrato de fase de  $\bar{X}$ , em torno de  $(0, \pi)$ , a partir do *blow-up*.

Localmente o retrato de fase é o mesmo para as singularidades  $(0, \pi/4)$  e  $(0, 3\pi/2)$ , pois em ambas  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 > 0$ . Portanto, o retrato de fase de  $\bar{X}$  é tal como na Figura 3.12.

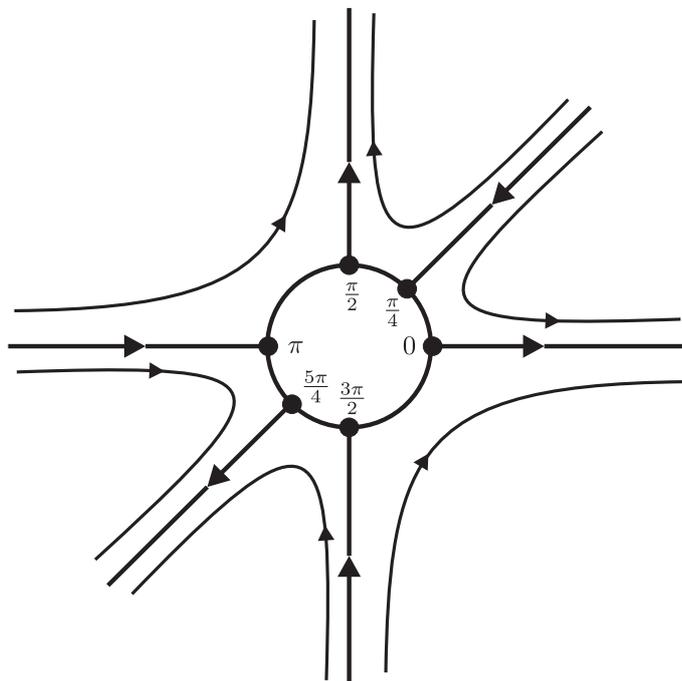


Figura 3.12: Retrato de fase de  $\bar{X}$  a partir do *blow-up*.

Em seguida, voltando à singularidade original, isto é, implodindo, obtemos seis separatri-  
zes no retrato de fase local de  $X$ , como na Figura 3.13.

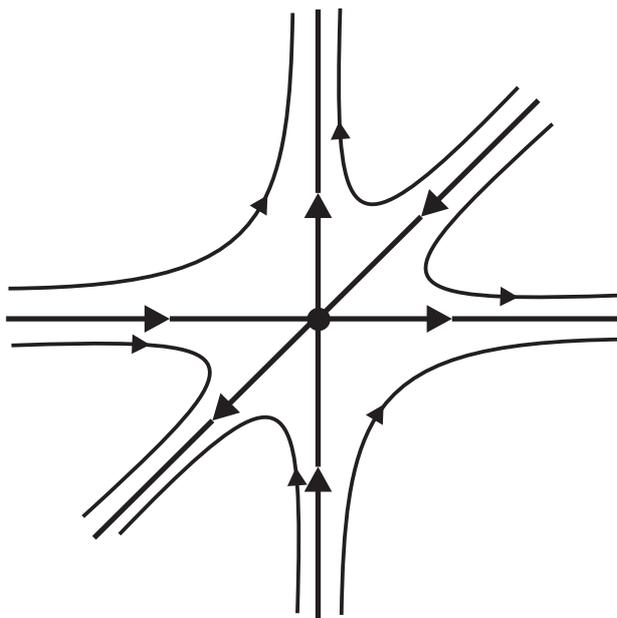


Figura 3.13: Retrato de fase de  $X$  a partir do *blow-down*.

Voltando ao sistema (3.6), observe que após estender continuamente o fluxo para  $r = 0$ , se necessário, a existência de uma órbita periódica no infinito para o sistema (3.5) é equivalente a ter  $r = 0$  como uma órbita periódica no cilindro para o sistema (3.6). Na sequência, assumimos que o sistema (3.6) pode ser estendido para o sistema

$$\begin{cases} r' = R(r, \theta), \\ \theta' = \Theta(r, \theta), \end{cases} \quad (3.16)$$

nos quais as funções  $R$  e  $\Theta$  satisfazem:

- (A<sub>1</sub>)  $R$  e  $\Theta$  são funções de Lipschitz e periódicas, com período  $2\pi$  na variável  $\theta$ ;
- (A<sub>2</sub>)  $R(0, \theta) = 0$  e  $\Theta(0, \theta) \neq 0$ ,  $\forall \theta \in \mathbb{S}^1$ .

Note que (A<sub>2</sub>) implica que  $r = 0$  é uma órbita periódica do sistema (3.16) e que não há pontos de equilíbrio em  $[0, \rho) \times \mathbb{S}^1$ , para algum  $\rho$  suficientemente pequeno. Isto representa uma condição necessária e suficiente para que o sistema (3.5) tenha uma órbita periódica no infinito. Como  $\Theta \neq 0$ , numa vizinhança de  $r = 0$ , podemos considerar o sistema (3.16) como a equação de primeira ordem

$$\frac{dr}{d\theta} = S(r, \theta) = \frac{R(r, \theta)}{\Theta(r, \theta)}, \quad (3.17)$$

na qual  $r \in [0, \rho)$  e  $\theta \in \mathbb{S}^1$ . Para  $\xi \in [0, \rho)$ , denotamos por  $r = r(\theta, \xi)$  a solução de (3.17) satisfazendo  $r(0, \xi) = \xi$ . Consideremos a transformação de Poincaré definida em  $[0, \rho)$ ,

$$\xi \mapsto h(\xi) = r(2\pi, \xi).$$

Note que  $h(0) = r(2\pi, 0) = 0$ . Como é bem conhecido,  $h$  é monótona crescente em seu domínio de definição e toda solução de

$$h(\xi) - \xi = 0,$$

corresponde a uma órbita periódica de (3.17) e, conseqüentemente, de (3.16), (3.6) e (3.5).

Através do estudo do comportamento da primeira e segunda derivadas de  $h$ , podemos deduzir se outras soluções da equação  $h(\xi) - \xi = 0$  bifurcam a partir da solução  $\xi = 0$ , quando um parâmetro varia. Novas soluções, se existirem, corresponderão às órbitas periódicas do sistema (3.5), bifurcando a partir de uma órbita periódica no infinito.

Quando  $R$  e  $\Theta$ , e então  $S$ , são suficientemente suaves, as primeiras derivadas podem ser calculadas seguindo Lloyd [9]. Entretanto, a falta de suavidade do sistema (3.1) requer ressalvas adicionais.

No que segue, consideramos o caso em que a função  $S$  é somente diferenciável por partes e estamos interessados em calcular a primeira e a segunda derivadas de uma transformação de Poincaré genérica. Assumimos um domínio

$$D = \{(r, \theta) \in [0, \rho] \times [\theta_1, \theta_2]\},$$

que é dividido em duas partes pelo gráfico de uma função de classe  $C^1$ ,  $\bar{\theta} : [0, \rho] \mapsto [\theta_1, \theta_2]$ , quais sejam,

$$D_1 = \{(r, \theta) \in [0, \rho] \times [\theta_1, \bar{\theta}(r)]\},$$

$$D_2 = \{(r, \theta) \in [0, \rho] \times [\bar{\theta}(r), \theta_2]\},$$

de modo que,

$$S(r, \theta) = \begin{cases} S_1(r, \theta), & (r, \theta) \in D_1, \\ S_2(r, \theta), & (r, \theta) \in D_2 \setminus D_1, \end{cases} \quad (3.18)$$

sendo ambas  $S_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $S_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  suaves e  $S(0, \theta) = 0$  para todo  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ .

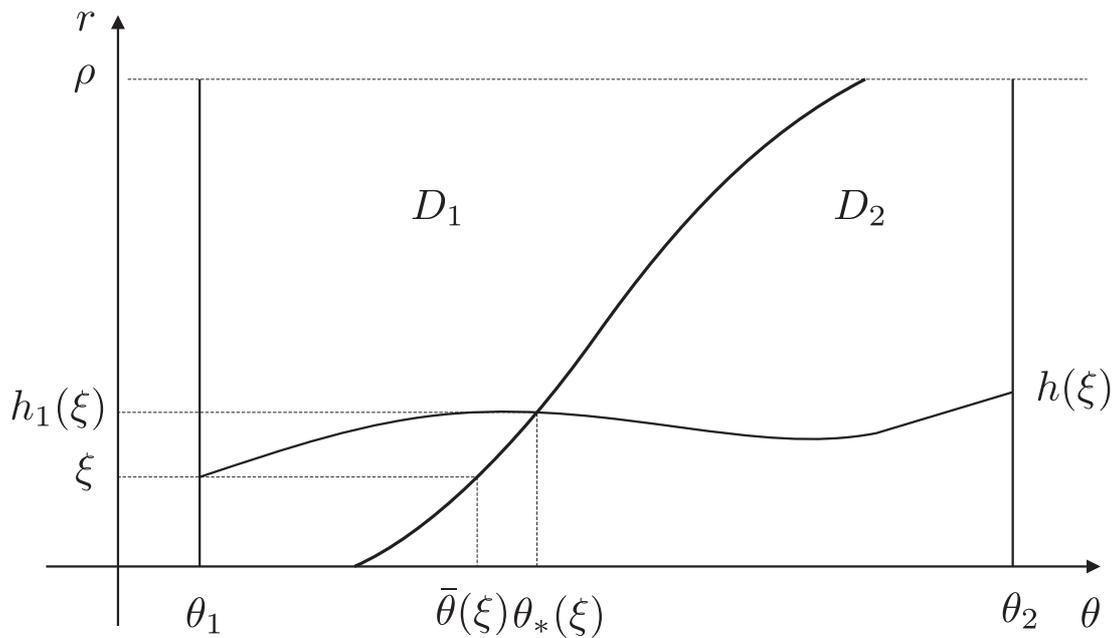


Figura 3.14: Esquema da situação considerada nesta seção.

Supomos que a equação diferencial (3.17), com  $S$  dada em (3.18), tem uma solução contínua,  $r = r(\theta, \xi)$ , definida em  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ , que satisfaz  $r(\theta_1, \xi) = \xi$  para cada  $\xi \in [0, \rho]$ . Assumimos também para cada  $\xi \in [0, \rho]$  uma condição de transversalidade,

$$S_1(\xi, \bar{\theta}(\xi)) \frac{d\bar{\theta}}{d\xi}(\xi) \neq 1, \quad (3.19)$$

na curva  $\bar{\theta}([0, \rho])$  e a existência de uma função de cruzamento de fase, de classe  $C^1$ ,

$$\begin{aligned} \theta_* : [0, \rho] &\longrightarrow [\theta_1, \theta_2] \\ \xi &\longmapsto \theta_*(\xi) = \bar{\theta}(r(\theta_*(\xi), \xi)), \end{aligned}$$

a qual permite definir a transformação de Poincaré intermediária

$$\xi \longmapsto h_1(\xi) = r(\theta_*(\xi), \xi).$$

Definimos as seguintes funções que serão úteis no próximo teorema

$$\begin{aligned} E(\xi, \theta_1, \theta) &= \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\partial S}{\partial r}(r(\phi, \xi), \phi) d\phi \right), \\ D(\xi, \theta) &= E(\xi, \theta_1, \theta) \frac{\partial^2 S}{\partial r^2}(r(\theta, \xi), \theta), \end{aligned}$$

para  $\xi \in [0, \rho]$  e  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ .

Antes de enunciá-lo faremos um lema que será útil nos cálculos envolvidos em sua demonstração.

**Lema 3.2.1.** *Sejam  $f = f(x, s)$  e  $\frac{\partial f}{\partial x}$  funções contínuas em  $(x, s)$ , em alguma região do plano  $xs$  contendo*

$$\{(x, s) \mid x_0 \leq x \leq x_1, a(x) \leq s \leq b(x)\}.$$

*Se  $a$  e  $b$  são funções de classe  $C^1$ , para  $x \in [x_0, x_1]$ , então*

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, s) ds \right) = f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, s) ds.$$

**Demonstração.** Seja  $F = F(x, s)$  uma primitiva de  $f$ . Logo,

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, s) ds = F(x, b(x)) - F(x, a(x)).$$

Derivando ambos membros da igualdade anterior, com respeito à variável  $x$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, s) ds \right) &= \frac{d}{dx} (F(x, b(x)) - F(x, a(x))) \\ &= \frac{dF}{dx}(x, b(x)) - \frac{dF}{dx}(x, a(x)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, b(x)) + \frac{\partial F}{\partial s}(x, b(x))b'(x) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, a(x)) - \frac{\partial F}{\partial s}(x, a(x))a'(x) \\ &= f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \frac{\partial F}{\partial x}(x, b(x)) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, a(x)). \end{aligned}$$

Note que,

$$\frac{\partial F}{\partial s}(x, s) = f(x, s).$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial s}(x, s) \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, s)$$

e, assim,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x, s) \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, s),$$

implicando em

$$\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, s) ds = \frac{\partial F}{\partial x}(x, b(x)) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, a(x)).$$

Portanto, para cada  $x \in [x_0, x_1]$ , concluímos que

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, s) ds \right) = f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, s) ds. \quad \blacksquare$$

Observamos que as fórmulas que apresentaremos para a primeira e segunda derivadas da transformação de Poincaré, em geral, são diferentes daquelas obtidas por Lloyd [9] e, claramente, ambas coincidem se a função  $S$  for suficientemente diferenciável.

Quando  $R$  e  $\Theta$ , e então  $S$ , são suficientemente suaves, a primeira derivada pode ser calculada como a seguir. Primeiramente, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta, \xi) \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, \xi) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} S(r(\theta, \xi), \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} S(r(\theta, \xi), \theta) \frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta, \xi). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Temos então, o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta, \xi) \right) = \frac{\partial}{\partial r} S(r(\theta, \xi), \theta) \frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta, \xi), \\ \frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta_1, \xi) = 1. \end{cases}$$

Resolvendo esta equação diferencial separável, temos

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \ln \left| \frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta, \xi) \right| \right) = \frac{\partial}{\partial r} S(r(\theta, \xi), \theta).$$

Integrando na variável  $\phi$ , de  $\theta_1$  até  $\theta$ ,

$$\ln \left| \frac{\partial r}{\partial \xi}(\phi, \xi) \right| \Big|_{\theta_1}^{\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\partial}{\partial r} S(r(\phi, \xi), \phi) d\phi$$

e, assim,

$$\ln \left| \frac{\frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta, \xi)}{\frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta_1, \xi)} \right| = \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\partial}{\partial r} S(r(\phi, \xi), \phi) d\phi.$$

Usando a condição inicial, obtemos

$$\ln \left| \frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta, \xi) \right| = \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\partial}{\partial r} S(r(\phi, \xi), \phi) d\phi$$

e, exponenciando ambos os membros da igualdade anterior, segue que

$$\frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta, \xi) = \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\partial}{\partial r} S(r(\phi, \xi), \phi) d\phi \right).$$

Portanto,

$$h'(\xi) = \frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta_2, \xi) = \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial}{\partial r} S(r(\theta, \xi), \theta) d\theta \right). \quad (3.21)$$

**Teorema 3.2.3.** *A transformação de Poincaré*

$$\xi \mapsto h(\xi) = r(\theta_2, \xi),$$

satisfaz

$$h'(\xi) = \frac{1 - S_2(h_1(\xi), \bar{\theta}(h_1(\xi))) \bar{\theta}'(h_1(\xi))}{1 - S_1(h_1(\xi), \bar{\theta}(h_1(\xi))) \bar{\theta}'(h_1(\xi))} E(\xi, \theta_1, \theta_2) \quad (3.22)$$

e

$$h'(0) = E(0, \theta_1, \theta_2). \quad (3.23)$$

Se, além disso, a função  $S$  dada em (3.18) é contínua, temos

$$\begin{aligned} h''(\xi) &= E(\xi, \theta_1, \theta_2) \int_{\theta_1}^{\theta_2} D(\xi, \theta) d\theta \\ &+ E(\xi, \theta_1, \theta_2) \frac{E(\xi, \theta_1, \bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}'(h_1(\xi))}{1 - S_1(h_1(\xi), \bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}'(h_1(\xi))} \\ &\times \left( \frac{\partial S_1}{\partial r}(h_1(\xi), \bar{\theta}(h_1(\xi))) - \frac{\partial S_2}{\partial r}(h_1(\xi), \bar{\theta}(h_1(\xi))) \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

e

$$\begin{aligned} h''(0) &= E(0, \theta_1, \theta_2) \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} D(0, \theta) d\theta + E(0, \theta_1, \bar{\theta}(0))\bar{\theta}'(0) \right. \\ &\left. \times \left( \frac{\partial S_1}{\partial r}(0, \bar{\theta}(0)) - \frac{\partial S_2}{\partial r}(0, \bar{\theta}(0)) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

**Demonstração.** Inicialmente, considere a equação

$$\frac{dr}{d\theta} = S_1(r, \theta),$$

para  $\theta \in [\theta_1, \bar{\theta}(r)]$  e sua solução,  $r_1 = r_1(\theta, \xi)$ , que satisfaz  $r_1(\theta_1, \xi) = \xi$ . Como

$$\theta_*(\xi) = \bar{\theta}(r_1(\theta_*(\xi), \xi)) = \bar{\theta}(h_1(\xi)),$$

temos que

$$\theta'_*(\xi) = \bar{\theta}'(h_1(\xi))h'_1(\xi). \quad (3.26)$$

Substituindo em

$$h'_1(\xi) = \frac{\partial r_1}{\partial \theta}(\theta_*(\xi), \xi)\theta'_*(\xi) + \frac{\partial r_1}{\partial \xi}(\theta_*(\xi), \xi),$$

obtemos

$$h'_1(\xi) = \frac{\partial r_1}{\partial \theta}(\theta_*(\xi), \xi)\bar{\theta}'(h_1(\xi))h'_1(\xi) + \frac{\partial r_1}{\partial \xi}(\theta_*(\xi), \xi).$$

Logo,

$$h'_1(\xi) = \frac{\frac{\partial r_1}{\partial \xi}(\theta_*(\xi), \xi)}{1 - \frac{\partial r_1}{\partial \theta}(\theta_*(\xi), \xi)\bar{\theta}'(h_1(\xi))}. \quad (3.27)$$

Como

$$\frac{\partial r_1}{\partial \theta}(\theta_*(\xi), \xi) = S_1(r_1(\theta_*(\xi), \xi), \theta_*(\xi)) = S_1(h_1(\xi), \theta_*(\xi)),$$

segue que

$$h'_1(\xi) = \frac{\frac{\partial r_1}{\partial \xi}(\theta_*(\xi), \xi)}{1 - S_1(h_1(\xi), \theta_*(\xi))\bar{\theta}'(h_1(\xi))}.$$

Repetindo os argumentos utilizados para obter a equação (3.21), obtemos

$$\frac{\partial r_1}{\partial \xi}(\theta_*(\xi), \xi) = \exp\left(\int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta, \xi), \theta) d\theta\right)$$

e, assim,

$$h'_1(\xi) = \frac{\exp\left(\int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta, \xi), \theta) d\theta\right)}{1 - S_1(h_1(\xi), \theta_*(\xi))\bar{\theta}'(h_1(\xi))}, \quad (3.28)$$

na qual a condição de transversalidade assegura que o denominador não se anula. De fato,

$$S_1(h_1(\xi), \theta_*(\xi))\bar{\theta}'(h_1(\xi)) = S_1(h_1(\xi), \bar{\theta}(h_1(\xi)))\frac{d\bar{\theta}}{dr}(h_1(\xi)) \neq 1.$$

Considere agora a equação

$$\frac{dr}{d\theta} = S_2(r, \theta),$$

para  $\theta \in [\bar{\theta}(r), \theta_2]$  e sua solução  $r_2 = r_2(\theta, \eta)$  que satisfaz  $r_2(\bar{\theta}(\eta), \eta) = \eta$ . Derivando a última equação, com respeito à variável  $\eta$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} [r_2(\bar{\theta}(\eta), \eta)] &= 1, \\ \frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\bar{\theta}(\eta), \eta) + \frac{\partial r_2}{\partial \theta}(\bar{\theta}(\eta), \eta)\bar{\theta}'(\eta) &= 1, \\ \frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\bar{\theta}(\eta), \eta) + S_2(r_2(\bar{\theta}(\eta), \eta), \bar{\theta}(\eta))\bar{\theta}'(\eta) &= 1, \\ \frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\bar{\theta}(\eta), \eta) + S_2(\eta, \bar{\theta}(\eta))\bar{\theta}'(\eta) &= 1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\bar{\theta}(\eta), \eta) = 1 - S_2(\eta, \bar{\theta}(\eta))\bar{\theta}'(\eta).$$

Definimos  $h_2(\eta) = r_2(\theta_2, \eta)$ .

Usando os argumentos utilizados para obter a equação (3.20), temos o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta, \eta) \right) = \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta, \eta), \theta) \frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta, \eta), \\ \frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\bar{\theta}(\eta), \eta) = 1 - S_2(\eta, \bar{\theta}(\eta))\bar{\theta}'(\eta). \end{cases} \quad (3.29)$$

Resolvendo esta equação diferencial separável, temos

$$\frac{d}{d\theta} \left[ \ln \left( \frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta, \eta) \right) \right] = \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta, \eta), \theta),$$

integrando na variável  $\theta$ , de  $\bar{\theta}(\eta)$  até  $\theta_2$ , segue que

$$\ln \left| \frac{\frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta_2, \eta)}{\frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\bar{\theta}(\eta), \eta)} \right| = \int_{\bar{\theta}(\eta)}^{\theta_2} \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta, \eta), \theta) d\theta$$

e, exponenciando ambos membros da última igualdade e usando a condição inicial, obtemos

$$\frac{\frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta_2, \eta)}{1 - S_2(\eta, \bar{\theta}(\eta))\bar{\theta}'(\eta)} = \exp \left( \int_{\bar{\theta}(\eta)}^{\theta_2} \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta, \eta), \theta) d\theta \right).$$

Resulta que

$$\begin{aligned} h_2'(\eta) &= \frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta_2, \eta) \\ &= [1 - S_2(\eta, \bar{\theta}(\eta))\bar{\theta}'(\eta)] \exp \left( \int_{\bar{\theta}(\eta)}^{\theta_2} \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta, \eta), \theta) d\theta \right). \end{aligned}$$

Considerando que

$$h(\xi) = h_2(h_1(\xi)),$$

e identificando

$$\eta = h_1(\xi) \text{ e } \theta_*(\xi) = \bar{\theta}(\eta),$$

temos que

$$\begin{aligned} h'(\xi) &= h_2'(h_1(\xi))h_1'(\xi) \\ &= \frac{1 - S_2(h_1(\xi), \bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}'(h_1(\xi))}{1 - S_1(h_1(\xi), \theta_*(\xi))\theta_*(\xi)'} \\ &\quad \times \exp \left( \int_{\theta_*(\xi)}^{\theta_2} \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta, h_1(\xi)), \theta) d\theta \right) \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta, \xi), \theta) d\theta \right) \\ &= \frac{1 - S_2(h_1(\xi), \bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}'(h_1(\xi))}{1 - S_1(h_1(\xi), \bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}'(h_1(\xi))} \\ &\quad \times \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta, \xi), \theta) d\theta + \int_{\theta_*(\xi)}^{\theta_2} \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta, h_1(\xi)), \theta) d\theta \right) \\ &= \frac{1 - S_2(h_1(\xi), \bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}'(h_1(\xi))}{1 - S_1(h_1(\xi), \bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}'(h_1(\xi))} E(\xi, \theta_1, \theta_2), \end{aligned}$$

no qual,

$$E(\xi, \theta_1, \theta_2) = \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial S}{\partial r}(r(\theta, \xi), \theta) d\theta \right),$$

provando (3.22).

Como  $h_1(0) = 0$  e  $S(0, \theta) = 0$ , para todo  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ , decorre que

$$h'(0) = \frac{1 - S_2(h_1(0), \bar{\theta}(h_1(0)))\bar{\theta}'(h_1(0))}{1 - S_1(h_1(0), \bar{\theta}(h_1(0)))\bar{\theta}'(h_1(0))} E(0, \theta_1, \theta_2) = E(0, \theta_1, \theta_2),$$

provando (3.23).

Agora, assumindo que a função  $S$  é contínua, isto é,

$$S_1(r, \bar{\theta}(r)) = S_2(r, \bar{\theta}(r)), \quad \forall r \in [0, \rho),$$

temos

$$h'(\xi) = \exp \left( \int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta, \xi), \theta) d\theta + \int_{\theta_*(\xi)}^{\theta_2} \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta, h_1(\xi)), \theta) d\theta \right).$$

Derivando ambos membros da última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} h''(\xi) &= h'(\xi) \frac{d}{d\xi} \left( \int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta, \xi), \theta) d\theta + \int_{\theta_*(\xi)}^{\theta_2} \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta, h_1(\xi)), \theta) d\theta \right) \\ &= h'(\xi) \left[ \frac{d}{d\xi} \left( \int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta, \xi), \theta) d\theta \right) - \frac{d}{d\xi} \left( \int_{\theta_2}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta, h_1(\xi)), \theta) d\theta \right) \right]. \end{aligned}$$

Usando o Lema 3.2.1,

$$\begin{aligned} h''(\xi) &= h'(\xi) \left[ \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta_*(\xi), \xi), \theta_*(\xi))\theta'_*(\xi) - \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta_1, \xi), \theta_1)0 \right. \\ &\quad + \int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta, \xi), \theta) \right) d\theta - \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta_*(\xi), h_1(\xi)), \theta_*(\xi))\theta'_*(\xi) \\ &\quad \left. + \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta_2, h_1(\xi)), \theta_2)0 - \int_{\theta_2}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta, h_1(\xi)), \theta) \right) d\theta \right], \end{aligned}$$

donde concluimos que

$$\begin{aligned} h''(\xi) &= h'(\xi) \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial^2 S_1}{\partial r^2}(r_1(\theta, \xi), \theta) \frac{\partial r_1}{\partial \xi}(\theta, \xi) d\theta \right. \\ &\quad + \int_{\theta_*(\xi)}^{\theta_2} \frac{\partial^2 S_2}{\partial r^2}(r_2(\theta, h_1(\xi)), \theta) \frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta, h_1(\xi)) h'_1(\xi) d\theta \\ &\quad \left. + \theta'_*(\xi) \left( \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta_*(\xi), \xi), \theta_*(\xi)) - \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta_*(\xi), h_1(\xi)), \theta_*(\xi)) \right) \right]. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Note que, a expressão (3.30) pode adotar uma forma mais compacta escrevendo as integrais convenientemente e utilizando

$$r(\theta, \xi) = \begin{cases} r_1(\theta, \xi), & \text{se } \theta \in [\theta_1, \theta_*(\xi)], \\ r_2(\theta, \xi), & \text{se } \theta \in [\theta_*(\xi), \theta_2]. \end{cases}$$

Vemos, por exemplo, que  $h'(\xi) = E(\xi, \theta_1, \theta_2)$ . Note que,

$$\frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta, \xi) = \begin{cases} \frac{\partial r_1}{\partial \xi}(\theta, \xi), & \text{se } \theta \in [\theta_1, \theta_*(\xi)], \\ \frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta, h_1(\xi))h_1'(\xi), & \text{se } \theta \in [\theta_*(\xi), \theta_2]. \end{cases} \quad (3.31)$$

A partir das equações (3.27) e (3.28), decorre que

$$\frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta, \xi) = E(\xi, \theta_1, \theta), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_*(\xi)]. \quad (3.32)$$

Integrando a equação (3.29) na variável  $\phi$ , de  $\theta_*(\xi)$  até  $\theta$ , obtemos

$$\frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta, h_1(\xi)) = [1 - S_2(h_1(\xi), \theta_*(\xi))\bar{\theta}'(h_1(\xi))] \exp\left(\int_{\theta_*(\xi)}^{\theta} \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\phi, h_1(\xi)), \phi) d\phi\right).$$

Portanto, a partir de (3.28), (3.31) e da continuidade da função  $S$ , segue que

$$\frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta, \xi) = E(\xi, \theta_1, \theta), \quad \theta \in [\theta_*(\xi), \theta_2]. \quad (3.33)$$

De fato, para  $\theta \in [\theta_*(\xi), \theta_2]$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta, \xi) &= \frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta, h_1(\xi))h_1'(\xi) \\ &= \frac{1 - S_2(h_1(\xi), \theta_*(\xi))\bar{\theta}'(h_1(\xi))}{1 - S_1(h_1(\xi), \theta_*(\xi))\bar{\theta}'(h_1(\xi))} \exp\left(\int_{\theta_*(\xi)}^{\theta} \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\phi, h_1(\xi)), \phi) d\phi\right) \\ &\quad \times \exp\left(\int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta, \xi), \theta) d\theta\right) \\ &= \exp\left(\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\partial S}{\partial r}(r(\phi, \xi), \phi) d\phi\right) \\ &= E(\xi, \theta_1, \theta). \end{aligned}$$

De (3.32) e (3.33), decorre que

$$\frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta, \xi) = E(\xi, \theta_1, \theta), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

e, assim,

$$h'(\xi) = \frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta_2, \xi) = E(\xi, \theta_1, \theta_2). \quad (3.34)$$

Substituindo (3.26) e (3.34) em (3.30), obtemos

$$\begin{aligned} h''(\xi) = & E(\xi, \theta_1, \theta_2) \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial^2 S}{\partial r^2}(r(\theta, \xi), \theta) \frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta, \xi) d\theta \right. \\ & + \bar{\theta}'(h_1(\xi)) \frac{E(\xi, \theta_1, \bar{\theta}(h_1(\xi)))}{1 - S_1(h_1(\xi), \bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}'(h_1(\xi))} \\ & \left. \times \left( \frac{\partial S_1}{\partial r}(h_1(\xi), \theta_*(\xi)) - \frac{\partial S_2}{\partial r}(h_1(\xi), \theta_*(\xi)) \right) \right] \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} h''(\xi) = & E(\xi, \theta_1, \theta_2) \int_{\theta_1}^{\theta_2} D(\xi, \theta) d\theta \\ & + E(\xi, \theta_1, \theta_2) \frac{E(\xi, \theta_1, \bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}'(h_1(\xi))}{1 - S_1(h_1(\xi), \bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}'(h_1(\xi))} \\ & \times \left( \frac{\partial S_1}{\partial r}(h_1(\xi), \theta_*(\xi)) - \frac{\partial S_2}{\partial r}(h_1(\xi), \theta_*(\xi)) \right), \end{aligned}$$

provando (3.24). Assim,

$$\begin{aligned} h''(0) = & E(0, \theta_1, \theta_2) \int_{\theta_1}^{\theta_2} D(0, \theta) d\theta \\ & + E(0, \theta_1, \theta_2) \frac{E(0, \theta_1, \bar{\theta}(h_1(0)))\bar{\theta}'(h_1(0))}{1 - S_1(h_1(0), \bar{\theta}(h_1(0)))\bar{\theta}'(h_1(0))} \\ & \times \left( \frac{\partial S_1}{\partial r}(h_1(0), \theta_*(0)) - \frac{\partial S_2}{\partial r}(h_1(0), \theta_*(0)) \right), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} h''(0) = & E(0, \theta_1, \theta_2) \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} D(0, \theta) d\theta + E(0, \theta_1, \bar{\theta}(0))\bar{\theta}'(0) \right. \\ & \left. \times \left( \frac{\partial S_1}{\partial r}(0, \bar{\theta}(0)) - \frac{\partial S_2}{\partial r}(0, \bar{\theta}(0)) \right) \right], \end{aligned}$$

provando (3.25). ■

### 3.3 Demonstração dos Resultados Principais

Começamos demonstrando dois resultados intermediários que serão utilizados na prova do Teorema 3.1.1.

**Lema 3.3.1.** *Se o sistema (3.1) tem uma órbita periódica no infinito, então este sistema é observável.*

**Demonstração.** Suponha que o sistema (3.1) não é observável. Logo,

$$\text{Po} \begin{pmatrix} C^* \\ C^*A \end{pmatrix} < 2.$$

Do Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim \text{Nuc} \begin{pmatrix} C^* \\ C^*A \end{pmatrix} + \text{Po} \begin{pmatrix} C^* \\ C^*A \end{pmatrix} = 2$$

e, assim,

$$\dim \text{Nuc} \begin{pmatrix} C^* \\ C^*A \end{pmatrix} \geq 1.$$

Então, existe um vetor  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v \neq 0$ , tal que

$$\begin{pmatrix} C^* \\ C^*A \end{pmatrix} v = 0$$

e, conseqüentemente,  $C^*v = 0$  e  $C^*Av = 0$ . Assim,  $v$  é um autovetor da matriz  $A$ , pois, se  $Av \neq \lambda v$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , temos a contradição

$$0 = C^*Av \neq \lambda C^*v = 0.$$

Como

$$(A + k_1BC^*)v = Av + k_1BC^*v = Av,$$

$v$  é também autovetor da matriz  $A + k_1BC^*$ . Note que o sistema (3.1) é escrito como

$$x' = (A + k_1BC^*)x,$$

para  $|C^*x| \leq w$ . Além disso, a reta  $C^*x = 0$  é invariante sob seu fluxo. De fato, seja

$$\begin{aligned} \varphi_x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \varphi_x(s) = e^{(A+k_1BC^*)s}x \end{aligned}$$

a solução máxima única em  $\mathbb{R}$  do Problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = (A + k_1BC^*)x, \\ x(0) = x. \end{cases}$$

Como  $C^*x = 0$  e  $C^*v = 0$ , segue que  $x = \alpha v$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , para  $C^* \neq 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} e^{(A+k_1BC^*)s}x &= e^{(A+k_1BC^*)s}\alpha v \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} (A + k_1BC^*)^k v \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \lambda^k v \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \lambda^k \alpha v \\ &= e^{\lambda s} \alpha v \\ &= e^{\lambda s} x. \end{aligned}$$

Logo,

$$C^*e^{(A+k_1BC^*)s}x = C^*e^{\lambda s}x = e^{\lambda s}C^*x = 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, temos um par de pontos singulares simétricos no equador da Esfera de Poincaré (ver [2]). Portanto, o sistema (3.1) não tem uma órbita periódica no infinito. ■

**Lema 3.3.2.** *Se o sistema (3.1) é observável, então pode ser escrito, por meio de uma mudança de variáveis linear, na forma dada em (3.3).*

**Demonstração.** Se fizermos em (3.1) as mudanças

$$wz = x, \quad \bar{A} = A + k_2BC^* \text{ e } \bar{B} = (k_1 - k_2)B,$$

com  $z \in \mathbb{R}^2$ , temos

$$\begin{aligned}
& wz' = x' \\
& = A(wz) + \psi(C^*(wz))B \\
& = wAz + \left( \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} k_2 C^*(wz) - (k_1 - k_2)w, \text{ se } C^*(wz) \leq -w, \\ k_1 C^*(wz), \text{ se } -w < C^*(wz) < w, \\ k_2 C^*(wz) + (k_1 - k_2)w, \text{ se } C^*(wz) \geq w, \end{array} \right) B, \end{array} \right) \\
& z' = Az + \left( \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} k_2 C^*z - (k_1 - k_2), \text{ se } C^*z \leq -1, \\ k_1 C^*z, \text{ se } -1 < C^*z < 1, \\ k_2 C^*z + (k_1 - k_2), \text{ se } C^*z \geq 1, \end{array} \right) B \end{array} \right) \\
& = Az + \left\{ \begin{array}{l} k_2 BC^*z - (k_1 - k_2)B, \text{ se } C^*z \leq -1, \\ k_1 BC^*z, \text{ se } -1 < C^*z < 1, \\ k_2 BC^*z + (k_1 - k_2)B, \text{ se } C^*z \geq 1, \end{array} \right. \\
& = Az + \left\{ \begin{array}{l} k_2 BC^*z - (k_1 - k_2)B, \text{ se } C^*z \leq -1, \\ k_2 BC^*z + (k_1 - k_2)BC^*z, \text{ se } -1 < C^*z < 1, \\ k_2 BC^*z + (k_1 - k_2)B, \text{ se } C^*z \geq 1, \end{array} \right. \\
& = Az + \left\{ \begin{array}{l} k_2 BC^*z - \bar{B}, \text{ se } C^*z \leq -1, \\ k_2 BC^*z + \bar{B}C^*z, \text{ se } -1 < C^*z < 1, \\ k_2 BC^*z + \bar{B}, \text{ se } C^*z \geq 1, \end{array} \right. \\
& = \bar{A}z + \left\{ \begin{array}{l} -\bar{B}, \text{ se } C^*z \leq -1, \\ \bar{B}C^*z, \text{ se } -1 < C^*z < 1, \\ \bar{B}, \text{ se } C^*z \geq 1, \end{array} \right. \\
& = \bar{A}z + \left( \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} -1, \text{ se } C^*z \leq -1, \\ C^*z, \text{ se } -1 < C^*z < 1, \\ 1, \text{ se } C^*z \geq 1, \end{array} \right) \bar{B}. \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Assim, obtemos o sistema

$$z' = \bar{A}z + \varphi(C^*z)\bar{B}, \quad (3.35)$$

no qual,  $\varphi$  é dada em (3.4). Tal mudança preserva a observabilidade, pois é equivalente à

$$\det \begin{pmatrix} C^* \\ C^*A \end{pmatrix} \neq 0$$

e

$$\det \begin{pmatrix} C^* \\ C^*\bar{A} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} C^* \\ C^*A + C^*k_2BC^* \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} C^* \\ C^*A + k_2C^*BC^* \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} C^* \\ C^*A \end{pmatrix}.$$

Agora, a partir de (3.35), e por meio de outra mudança de variáveis linear, podemos passar para a forma canônica observável,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \varphi(x_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

O Teorema 2.4.3, garante a existência de uma matriz não singular  $P \in \mathbb{R}^{2,2}$  tal que

$$C^*P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P\bar{A}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P\bar{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Próximo da origem, temos que  $\varphi(x_2) = x_2$  e, assim, o sistema (3.36) tem a seguinte forma

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d + b_1 \\ 1 & t + b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Já o sistema (3.1), perto da origem, tem a forma  $x' = (A + k_1BC^*)x$ . Comparando os campos vetoriais associados numa vizinhança da origem, obtemos

$$D = \det(A + k_1BC^*) = d - b_1,$$

$$T = \text{tr}(A + k_1BC^*) = t + b_2.$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \varphi(x_2) \begin{pmatrix} d - D \\ T - t \end{pmatrix}.$$

■

Para o sistema (3.3), utilizaremos a notação de (3.36) nos quais

$$b_1 = d - D \quad \text{e} \quad b_2 = T - t, \quad (3.37)$$

e observamos que este é formado pelos seguintes sistemas lineares

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \text{se } x_2 \geq 1, \\ \text{b.} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & b_1 - d \\ 1 & b_2 + t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{se } |x_2| \leq 1, \\ \text{c.} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \text{se } x_2 \leq -1. \end{aligned} \quad (3.38)$$

### 3.3.1 Prova do Teorema 3.1.1

(b)  $\Rightarrow$  (a) Assuma que o sistema (3.1) é observável e  $4d - t^2 > 0$ . Pelo Lema 3.3.2, podemos passar para a formulação equivalente dada em (3.38). Definimos três regiões no cilindro  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ , quais sejam

$$D_I = \{(r, \theta) \mid r \leq \text{sen } \theta \text{ e } \theta \in [0, \pi]\},$$

$$D_{II} = \{(r, \theta) \mid r \geq |\text{sen } \theta| \text{ e } \theta \in [0, 2\pi]\},$$

$$D_{III} = \{(r, \theta) \mid r \leq -\text{sen } \theta \text{ e } \theta \in [\pi, 2\pi]\}.$$

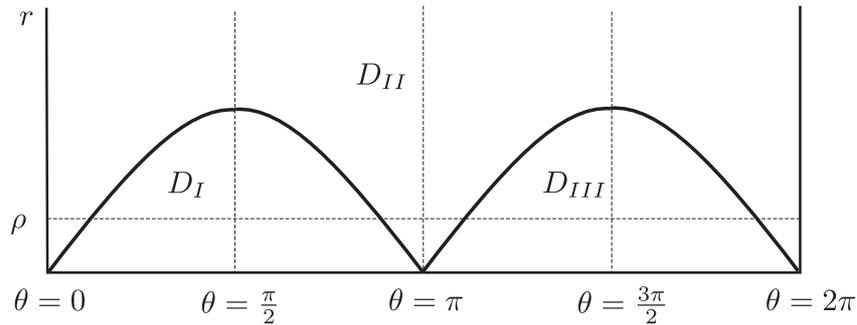


Figura 3.15: Regiões  $D_I$ ,  $D_{II}$  e  $D_{III}$  no cilindro  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ . O conjunto  $\{(r, \theta) \mid r = |\text{sen } \theta| \text{ e } \theta \in [0, 2\pi]\}$  é obtido a partir da função  $\varphi$ , dada em (3.4), mediante a transformação de Bendixson e a mudança para coordenadas polares.

Fazendo a transformação de Bendixson, definida na Seção 3.2, e passando para coordenadas polares, temos

$$x_1 = \frac{\cos \theta}{r} \text{ e } x_2 = \frac{\text{sen } \theta}{r}.$$

Assim, obtemos a partir de (3.6) e (3.38) três novos sistemas. De fato, a transformação implica em

$$\begin{cases} r' = -r^2(x'_1 \cos \theta + x'_2 \text{sen } \theta), \\ \theta' = -r(x'_1 \text{sen } \theta - x'_2 \cos \theta), \end{cases}$$

e de (3.38 a),

$$\begin{cases} x'_1 = -dx_2 + b_1 \\ x'_2 = x_1 + tx_2 + b_2 \end{cases}, \text{ se } x_2 \geq 1.$$

Assim,

$$\begin{cases} r' = -r^2 \left[ \left( -d \frac{\text{sen } \theta}{r} + b_1 \right) \cos \theta + \left( \frac{\cos \theta}{r} + t \frac{\text{sen } \theta}{r} + b_2 \right) \text{sen } \theta \right] \\ \theta' = -r \left[ \left( -d \frac{\text{sen } \theta}{r} + b_1 \right) \text{sen } \theta - \left( \frac{\cos \theta}{r} + t \frac{\text{sen } \theta}{r} + b_2 \right) \cos \theta \right] \end{cases}, \frac{\text{sen } \theta}{r} \geq 1,$$

$$\begin{cases} r' = -r^2 \left[ -\frac{d \text{sen } \theta \cos \theta}{r} + \frac{rb_1 \cos \theta}{r} + \left( \frac{\cos \theta + t \text{sen } \theta}{r} \right) \text{sen } \theta + \frac{rb_2 \text{sen } \theta}{r} \right] \\ \theta' = -r \left[ -\frac{d \text{sen}^2 \theta}{r} + \frac{rb_1 \text{sen } \theta}{r} - \left( \frac{\cos \theta + t \text{sen } \theta}{r} \right) \cos \theta - \frac{rb_2 \cos \theta}{r} \right] \end{cases}, r \leq \text{sen } \theta,$$

e, então,

$$\begin{cases} r' = -r [(1-d) \text{sen } \theta \cos \theta + t \text{sen}^2 \theta + r(b_1 \cos \theta + b_2 \text{sen } \theta)] \\ \theta' = d \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta + t \text{sen } \theta \cos \theta - r(b_1 \text{sen } \theta - b_2 \cos \theta) \end{cases}, (r, \theta) \in D_I. \quad (3.39)$$

A equação (3.38 b) fornece

$$\begin{cases} x'_1 = (b_1 - d)x_2 \\ x'_2 = x_1 + (b_2 + t)x_2 \end{cases}, \text{ se } |x_2| \leq 1.$$

Daí,

$$\begin{cases} r' = -r^2 \left\{ (b_1 - d) \frac{\text{sen } \theta}{r} \cos \theta + \left[ \frac{\cos \theta}{r} + (b_2 + t) \frac{\text{sen } \theta}{r} \right] \text{sen } \theta \right\} \\ \theta' = -r \left\{ (b_1 - d) \frac{\text{sen } \theta}{r} \text{sen } \theta - \left[ \frac{\cos \theta}{r} + (b_2 + t) \frac{\text{sen } \theta}{r} \right] \cos \theta \right\} \end{cases}, \left| \frac{\text{sen } \theta}{r} \right| \leq 1,$$

$$\begin{cases} r' = -r[(b_1 - d) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta + (b_2 + t) \operatorname{sen}^2 \theta] \\ \theta' = -[(b_1 - d) \operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta - (b_2 + t) \operatorname{sen} \theta \cos \theta] \end{cases}, \quad r \geq |\operatorname{sen} \theta|,$$

e, portanto,

$$\begin{cases} r' = -r[(1 + b_1 - d) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + (b_2 + t) \operatorname{sen}^2 \theta] \\ \theta' = -(b_1 - d) \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta + (b_2 + t) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \end{cases}, \quad (r, \theta) \in D_{II}. \quad (3.40)$$

E de (3.38 c), temos

$$\begin{cases} x'_1 = -dx_2 - b_1 \\ x'_2 = x_1 + tx_2 - b_2 \end{cases}, \quad \text{se } x_2 \leq -1.$$

E, assim,

$$\begin{cases} r' = -r^2 \left[ \left( -d \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} - b_1 \right) \cos \theta + \left( \frac{\cos \theta}{r} + t \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} - b_2 \right) \operatorname{sen} \theta \right] \\ \theta' = -r \left[ \left( -d \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} - b_1 \right) \operatorname{sen} \theta - \left( \frac{\cos \theta}{r} + t \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} - b_2 \right) \cos \theta \right] \end{cases}, \quad \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \leq -1,$$

$$\begin{cases} r' = -r^2 \left[ -\frac{d \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r} - \frac{rb_1 \cos \theta}{r} + \left( \frac{\cos \theta + t \operatorname{sen} \theta}{r} \right) \operatorname{sen} \theta - \frac{rb_2 \operatorname{sen} \theta}{r} \right] \\ \theta' = -r \left[ -\frac{d \operatorname{sen}^2 \theta}{r} - \frac{rb_1 \operatorname{sen} \theta}{r} - \left( \frac{\cos \theta + t \operatorname{sen} \theta}{r} \right) \cos \theta + \frac{rb_2 \cos \theta}{r} \right] \end{cases}, \quad r \leq -\operatorname{sen} \theta,$$

logo,

$$\begin{cases} r' = -r[(1 - d) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + t \operatorname{sen}^2 \theta - r(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta)] \\ \theta' = d \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta + r(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta) \end{cases}, \quad (r, \theta) \in D_{III}. \quad (3.41)$$

Note que o fluxo global, no cilindro  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ , é invariante pela mudança

$$(r, \theta) \leftrightarrow (r, \theta + \pi),$$

o que é uma consequência da simetria original  $x \leftrightarrow -x$  do sistema (3.1). De fato,

$$\left( \frac{\cos \theta}{r}, \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \right) \leftrightarrow \left( -\frac{\cos \theta}{r}, -\frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \right) = \left( \frac{\cos(\theta + \pi)}{r}, \frac{\operatorname{sen}(\theta + \pi)}{r} \right).$$

Além disso, o fluxo global verifica a hipótese  $(A_1)$  da Seção 3.2. Considerando a hipótese  $(A_2)$ , que é uma condição necessária e suficiente para haver uma órbita periódica no infinito, vemos que

$$R(0, \theta) = 0, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad e$$

$$\Theta(0, \theta) = d \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

que pode ser vista como uma forma quadrática em  $(\operatorname{sen} \theta, \cos \theta)$  com matriz

$$M = \begin{pmatrix} d & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Realmente,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \operatorname{sen} \theta + \frac{t}{2} \cos \theta \\ \frac{t}{2} \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= d \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{t}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \frac{t}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= d \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Consequentemente, a condição  $\Theta(0, \theta) \neq 0$ , para todo  $\theta$ , é equivalente à matriz anterior ser positiva ou negativa definida. Como isto também é equivalente a ter  $4d - t^2 > 0$ , o resultado segue.

(a)  $\Rightarrow$  (b) Basta aplicar o Lema 3.3.1 e considerar a necessidade da hipótese  $(A_2)$  da Seção 3.2, que implica em  $4d - t^2 > 0$ . ■

### 3.3.2 Resultados Auxiliares para a Prova do Teorema 3.1.2

Antes de demonstrarmos o Teorema 3.1.2, faremos um trabalho de preparação. Assumindo que o sistema (3.1) tem uma órbita periódica no infinito temos, do Teorema 3.1.1, que este sistema é observável e  $4d - t^2 > 0$ . Assim, podemos assumir que  $d > 0$  e passar a trabalhar com o sistema equivalente (3.36). E, para simplificar os cálculos restantes,

faremos as seguintes mudanças

$$x_1 = \sqrt{d}X, \quad x_2 = Y \quad \text{e} \quad s = \frac{\tau}{\sqrt{d}},$$

obtendo

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = -Y + \bar{b}_1\varphi(Y), \\ \frac{dY}{d\tau} = X + \bar{t}Y + \bar{b}_2\varphi(Y), \end{cases} \quad (3.42)$$

no qual,

$$\bar{b}_1 = \frac{b_1}{d}, \quad \bar{b}_2 = \frac{b_2}{\sqrt{d}} \quad \text{e} \quad \bar{t} = \frac{t}{\sqrt{d}}, \quad (3.43)$$

e  $|\bar{t}| < 2$ . De fato,

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\tau}{\sqrt{d}} \right) = \frac{1}{\sqrt{d}}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= \frac{dX}{ds} \frac{ds}{d\tau} \\ &= \frac{d}{ds} \left( \frac{x_1}{\sqrt{d}} \right) \frac{1}{\sqrt{d}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{dx_1}{ds} \frac{1}{\sqrt{d}} \\ &= \frac{1}{d} x'_1 \\ &= \frac{1}{d} (-dY + \varphi(Y)b_1) \\ &= -Y + \bar{b}_1\varphi(Y). \end{aligned}$$

Para a outra derivada, temos

$$\begin{aligned} \frac{dY}{d\tau} &= \frac{dY}{ds} \frac{ds}{d\tau} \\ &= \frac{dx_2}{ds} \frac{1}{\sqrt{d}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{d}} x'_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{d}} \left( \sqrt{d}X + tY + \varphi(Y)b_2 \right) \\ &= X + \bar{t}Y + \bar{b}_2\varphi(Y). \end{aligned}$$

E, como  $4d - t^2 > 0$ , segue que  $d > (t/2)^2$ .

Logo,  $\sqrt{d} > |t|/2$  e, portanto,

$$|\bar{t}| = \frac{|t|}{\sqrt{d}} < 2.$$

Note que (3.42) é da forma (3.36) e, então, se omitirmos a barra dos parâmetros  $b_1$ ,  $b_2$  e  $t$ , podemos escrever

$$\begin{pmatrix} \frac{dX}{d\tau} \\ \frac{dY}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \varphi(Y) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Basta agora tomar  $d = 1$  em (3.39), (3.40) e (3.41) para obter  $S$ , no cilindro, que fornece o fluxo próximo do ponto no infinito, com

$$S(r, \theta) = \begin{cases} S_I(r, \theta), & \text{em } D_I, \\ S_{II}(r, \theta), & \text{em } D_{II}, \\ S_{III}(r, \theta), & \text{em } D_{III}, \end{cases} \quad (3.45)$$

com

$$\begin{aligned} S_I(r, \theta) &= \frac{R_I(r, \theta)}{\Theta_I(r, \theta)} = \frac{-r [t \sen^2 \theta + r(b_1 \cos \theta + b_2 \sen \theta)]}{1 + t \sen \theta \cos \theta - r(b_1 \sen \theta - b_2 \cos \theta)}, \\ S_{II}(r, \theta) &= \frac{R_{II}(r, \theta)}{\Theta_{II}(r, \theta)} = \frac{-r (t \sen^2 \theta + b_1 \sen \theta \cos \theta + b_2 \sen^2 \theta)}{1 - b_1 \sen^2 \theta + (b_2 + t) \sen \theta \cos \theta}, \\ S_{III}(r, \theta) &= \frac{R_{III}(r, \theta)}{\Theta_{III}(r, \theta)} = \frac{-r [t \sen^2 \theta - r(b_1 \cos \theta + b_2 \sen \theta)]}{1 + t \sen \theta \cos \theta + r(b_1 \sen \theta - b_2 \cos \theta)}. \end{aligned}$$

Isto torna a função  $S$  suave por partes e de Lipschitz com respeito à variável  $r$ , para  $|t| < 2$ . De fato, como as funções  $R_I$ ,  $R_{II}$ ,  $R_{III}$ ,  $\Theta_I$ ,  $\Theta_{II}$  e  $\Theta_{III}$ , obtidas de (3.39), (3.40) e (3.41), respectivamente, são combinações (soma e produto) de funções de classe  $C^\infty$ , segue que  $S_I$ ,  $S_{II}$  e  $S_{III}$  são suaves. Conseqüentemente, a função  $S$  é suave por partes. Mais à frente mostraremos que  $S$  é de Lipschitz com respeito à variável  $r$ , quando  $|t| < 2$ . Tomando  $r \in [0, \rho)$ , com  $\rho > 0$  suficientemente pequeno, e escolhendo adequadamente os parâmetros  $T$ ,  $t$  e  $D$ , temos que as funções  $\Theta_I$ ,  $\Theta_{II}$  e  $\Theta_{III}$  são positivas e, portanto, a orientação das órbitas é preservada.

Note que as hipóteses  $(A_1)$  e  $(A_2)$  são satisfeitas e para verificar parte da primeira hipótese utilizaremos o teorema a seguir.

**Teorema 3.3.1.** *Sejam  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$  compactos tais que  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ . Se  $f$  e  $g$  são funções de Lipschitz, então*

$$\begin{aligned} fg : \mathcal{M} \cap \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto fg(x) = f(x)g(x) \end{aligned}$$

*é uma função de Lipschitz.*

**Demonstração.** Como  $f$  e  $g$  são funções de Lipschitz, existem constantes reais positivas  $K_1$  e  $K_2$  tais que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K_1 \|x - y\|$$

e

$$\|g(x) - g(y)\| \leq K_2 \|x - y\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|fg(x) - fg(y)\| &= \|f(x)g(x) - f(y)g(y)\| \\ &= \|f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)\| \\ &= \|[f(x) - f(y)]g(x) + f(y)[g(x) - g(y)]\| \\ &\leq \|f(x) - f(y)\| \|g(x)\| + \|f(y)\| \|g(x) - g(y)\| \\ &\leq K_1 \|x - y\| \|g(x)\| + \|f(y)\| K_2 \|x - y\| \\ &\leq K_1 M_1 \|x - y\| + K_2 M_2 \|x - y\| \\ &= (K_1 M_1 + K_2 M_2) \|x - y\|, \end{aligned}$$

sendo  $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$  os máximos de  $f$  e  $g$ , respectivamente. Portanto,  $fg$  é uma função de Lipschitz. ■

Agora, observe que

$$R_I(r, \theta) = R_{I,1}(r, \theta) R_{I,2}(r, \theta),$$

sendo

$$R_{I,1}(r, \theta) = -r$$

e

$$R_{I,2}(r, \theta) = t \operatorname{sen}^2 \theta + r(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta).$$

As funções  $R_{I,1}$  e  $R_{I,2}$  são de Lipschitz com respeito à variável  $r$ , pois

$$\|R_{I,1}(r_1, \theta) - R_{I,1}(r_2, \theta)\| = \|-r_1 + r_2\| \leq \|r_1 - r_2\|$$

e

$$\begin{aligned} \|R_{I,2}(r_1, \theta) - R_{I,2}(r_2, \theta)\| &= \|r_1(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta) - r_2(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta)\| \\ &\leq \|r_1 - r_2\| \|b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta\| \\ &\leq M_1 \|r_1 - r_2\|, \end{aligned}$$

sendo  $M_1 \in \mathbb{R}$  o máximo de  $f_1$ , no qual,  $f_1(\theta) = b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta$ . Portanto, pelo Teorema 3.3.1, temos que  $R_I$  é uma função de Lipschitz com respeito à variável  $r$ .

A função  $\Theta_I$  satisfaz

$$\begin{aligned} \|\Theta_I(r_1, \theta) - \Theta_I(r_2, \theta)\| &= \|-r_1(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta) + r_2(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta)\| \\ &\leq \|b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta\| \|r_1 - r_2\| \\ &\leq M_2 \|r_1 - r_2\|, \end{aligned}$$

sendo  $M_2 \in \mathbb{R}$  o máximo de  $f_2$ , no qual,  $f_2(\theta) = b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta$ . Logo,  $\Theta_I$  é uma função de Lipschitz com respeito à variável  $r$ .

Para a função  $R_{II}$ , temos

$$\begin{aligned} \|R_{II}(r_1, \theta) - R_{II}(r_2, \theta)\| &= \|-r_1(t \operatorname{sen}^2 \theta + b_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + b_2 \operatorname{sen}^2 \theta) \\ &\quad + r_2(t \operatorname{sen}^2 \theta + b_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + b_2 \operatorname{sen}^2 \theta)\| \\ &\leq \|t \operatorname{sen}^2 \theta + b_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + b_2 \operatorname{sen}^2 \theta\| \|r_1 - r_2\| \\ &\leq M_3 \|r_1 - r_2\|, \end{aligned}$$

no qual,  $M_3 \in \mathbb{R}$  é o máximo de  $f_3$ , sendo  $f_3(\theta) = t \operatorname{sen}^2 \theta + b_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + b_2 \operatorname{sen}^2 \theta$ . E, então,  $R_{II}$  é uma função de Lipschitz com respeito à variável  $r$ .

A função  $\Theta_{II}$  satisfaz

$$\|\Theta_{II}(r_1, \theta) - \Theta_{II}(r_2, \theta)\| = 0 \leq \|r_1 - r_2\|.$$

Daí,  $\Theta_{II}$  é uma função de Lipschitz com respeito à variável  $r$ .

Agora, observe que

$$R_{III}(r, \theta) = R_{III,1}(r, \theta)R_{III,2}(r, \theta),$$

sendo

$$R_{III,1}(r, \theta) = -r,$$

$$R_{III,2}(r, \theta) = t \operatorname{sen}^2 \theta - r(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta).$$

As funções  $R_{III,1}$  e  $R_{III,2}$  são de Lipschitz com respeito à variável  $r$ , pois

$$\|R_{III,1}(r_1, \theta) - R_{III,1}(r_2, \theta)\| = \|-r_1 + r_2\| \leq \|r_1 - r_2\|$$

e

$$\begin{aligned} \|R_{III,2}(r_1, \theta) - R_{III,2}(r_2, \theta)\| &= \|-r_1(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta) + r_2(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta)\| \\ &\leq \|r_1 - r_2\| \|b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta\| \\ &\leq M_1 \|r_1 - r_2\|. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 3.3.1, temos que  $R_{III}$  é uma função de Lipschitz com respeito à variável  $r$ .

Para a função  $\Theta_{III}$ , temos

$$\begin{aligned} \|\Theta_{III}(r_1, \theta) - \Theta_{III}(r_2, \theta)\| &= \|r_1(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta) - r_2(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta)\| \\ &\leq \|b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta\| \|r_1 - r_2\| \\ &\leq M_2 \|r_1 - r_2\|. \end{aligned}$$

Logo, temos que  $\Theta_{III}$  é uma função de Lipschitz com respeito à variável  $r$ .

Mostremos agora que estas funções são periódicas de períodos  $2\pi$  na variável  $\theta$ . De fato,

$$\begin{aligned} R_I(r, \theta + 2\pi) &= -rt \operatorname{sen}^2(\theta + 2\pi) - r^2[b_1 \cos(\theta + 2\pi) + b_2 \operatorname{sen}(\theta + 2\pi)] \\ &= -rt \operatorname{sen}^2 \theta - r^2(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta) \\ &= R_I(r, \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_I(r, \theta + 2\pi) &= 1 + t \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) \cos(\theta + 2\pi) - r[b_1 \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) - b_2 \cos(\theta + 2\pi)] \\
&= 1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta - r(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta) \\
&= \Theta_I(r, \theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{II}(r, \theta + 2\pi) &= -r[t \operatorname{sen}^2(\theta + 2\pi) + b_1 \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) \cos(\theta + 2\pi) + b_2 \operatorname{sen}^2(\theta + 2\pi)] \\
&= -r(t \operatorname{sen}^2 \theta + b_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + b_2 \operatorname{sen}^2 \theta) \\
&= R_{II}(r, \theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{II}(r, \theta + 2\pi) &= 1 - b_1 \operatorname{sen}^2(\theta + 2\pi) + (b_2 + t) \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) \cos(\theta + 2\pi) \\
&= 1 - b_1 \operatorname{sen}^2 \theta + (b_2 + t) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\
&= \Theta_{II}(r, \theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{III}(r, \theta + 2\pi) &= -rt \operatorname{sen}^2(\theta + 2\pi) + r^2[b_1 \cos(\theta + 2\pi) + b_2 \operatorname{sen}(\theta + 2\pi)] \\
&= -rt \operatorname{sen}^2 \theta + r^2(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta) \\
&= R_{III}(r, \theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{III}(r, \theta + 2\pi) &= 1 + t \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) \cos(\theta + 2\pi) + r[b_1 \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) - b_2 \cos(\theta + 2\pi)] \\
&= 1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta + r(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta) \\
&= \Theta_{III}(r, \theta).
\end{aligned}$$

Portanto, a hipótese  $(A_1)$  é satisfeita. Mostremos agora que a hipótese  $(A_2)$  também se verifica. Realmente,

$$R_I(0, \theta) = R_{II}(0, \theta) = R_{III}(0, \theta) = 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{S}^1$$

e, ainda, para  $|t| < 2$ , temos que

$$\Theta_I(0, \theta) = \Theta_{III}(0, \theta) = 1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta \neq 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{S}^1.$$

Observe que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \Theta_{II}(0, \theta) = 1 \neq 0,$$

logo, segue do *Teorema da Conservação do Sinal* que existe uma vizinhança de  $r = 0$ , na qual  $\Theta_{II}(0, \theta)$  não se anula. Portanto,

$$\Theta_{II}(0, \theta) = 1 - b_1 \sin^2 \theta + (b_2 + t) \sin \theta \cos \theta \neq 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{S}^1.$$

Para mostrar que a função  $S$  é de Lipschitz com respeito à variável  $r$ , para  $|t| < 2$ , utilizaremos os teoremas a seguir.

**Teorema 3.3.2.** *Seja  $g : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$  compacto. Se  $g$  é uma função de Lipschitz que não se anula em  $\mathcal{N}$ , então*

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} : \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)} \end{aligned}$$

é uma função de Lipschitz.

**Demonstração.** Como  $g$  é uma função de Lipschitz, existe uma constante real positiva  $K$  tal que

$$\|g(x) - g(y)\| \leq K\|x - y\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right\| &= \left\| \frac{g(y) - g(x)}{g(x)g(y)} \right\| \\ &= \frac{\|g(x) - g(y)\|}{\|g(x)g(y)\|} \\ &\leq \frac{K}{\|g(x)\|\|g(y)\|} \|x - y\| \\ &\leq \frac{K}{M^2} \|x - y\|, \end{aligned}$$

sendo  $M \in \mathbb{R}$  o mínimo de  $g$ . Portanto,  $1/g$  é uma função de Lipschitz. ■

**Teorema 3.3.3.** *Sejam  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$  compactos tais que  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ . Se  $f$  e  $g$  são funções de Lipschitz e  $g$  não se anula em  $\mathcal{N}$ , então*

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : \mathcal{M} \cap \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

*é uma função de Lipschitz.*

**Demonstração.** Segue diretamente dos Teoremas 3.3.1 e 3.3.2. ■

Deste modo, como  $R_I$ ,  $\Theta_I$ ,  $R_{III}$  e  $\Theta_{III}$  são funções de Lipschitz com respeito à variável  $r$  e  $D_I$  e  $D_{III}$  são compactos, segue do Teorema 3.3.3 que  $S_I$  e  $S_{III}$  são de Lipschitz com respeito à variável  $r$ . Para  $S_{II}$ , temos que

$$S_{II}(r, \theta) = rf(\theta),$$

com  $(r, \theta) \in D_{II}$  e

$$f(\theta) = -\frac{t \operatorname{sen}^2 \theta + b_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + b_2 \operatorname{sen}^2 \theta}{1 - b_1 \operatorname{sen}^2 \theta + (b_2 + t) \operatorname{sen} \theta \cos \theta}.$$

Logo,

$$\|S_{II}(r_1, \theta) - S_{II}(r_2, \theta)\| = \|r_1 f(\theta) - r_2 f(\theta)\| \leq |f(\theta)| \|r_1 - r_2\|.$$

Mostremos que  $f$  é limitada. Temos que  $f(\theta) = g(\theta)/h(\theta)$ , na qual

$$g(\theta) = -t \operatorname{sen}^2 \theta - b_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - b_2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

e

$$h(\theta) = 1 - b_1 \operatorname{sen}^2 \theta + (b_2 + t) \operatorname{sen} \theta \cos \theta.$$

Observe que

$$\begin{aligned} |g(\theta)| &= | -t \operatorname{sen}^2 \theta - b_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - b_2 \operatorname{sen}^2 \theta | \\ &\leq |t \operatorname{sen}^2 \theta| + |b_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta| + |b_2 \operatorname{sen}^2 \theta| \\ &\leq |t| |\operatorname{sen} \theta|^2 + |b_1| |\operatorname{sen} \theta| |\cos \theta| + |b_2| |\operatorname{sen} \theta|^2 \\ &\leq 2 + |b_1| + |b_2|. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Observe também que

$$|\operatorname{sen} \theta \cos \theta| \leq 1$$

e

$$|\operatorname{sen}^2 \theta| \leq 1.$$

Logo,

$$|(b_2 + t) \operatorname{sen} \theta \cos \theta| \leq |b_2 + t|$$

e

$$|b_1 \operatorname{sen}^2 \theta| \leq |b_1|.$$

Então, temos que

$$-|b_2 + t| \leq (b_2 + t) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \leq |b_2 + t|$$

e

$$-|b_1| \leq -b_1 \operatorname{sen}^2 \theta \leq |b_1|.$$

Assim,

$$1 - |b_1| - |b_2 + t| \leq 1 - b_1 \operatorname{sen}^2 \theta + (b_2 + t) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \leq 1 + |b_1| + |b_2 + t|,$$

de onde obtemos

$$\frac{1}{h(\theta)} \leq \frac{1}{1 - |b_1| - |b_2 + t|}$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{1}{|h(\theta)|} \leq \frac{1}{|1 - |b_1| - |b_2 + t||}. \quad (3.47)$$

Portanto, das equações (3.46) e (3.47) concluímos que

$$|f(\theta)| = \frac{|g(\theta)|}{|h(\theta)|} \leq \frac{2 + |b_1| + |b_2|}{|1 - |b_1| - |b_2 + t||} \leq C,$$

sendo  $C$  uma constante real. Assim, temos que

$$\|S_{II}(r_1, \theta) - S_{II}(r_2, \theta)\| = \|r_1 f(\theta) - r_2 f(\theta)\| \leq C \|r_1 - r_2\|$$

e, portanto,  $S_{II}$  é de Lipschitz com respeito à variável  $r$ . Tomando  $K$  como a maior das constantes de Lipschitz de  $S_I$ ,  $S_{II}$  e  $S_{III}$ , segue que  $S$  é de Lipschitz com respeito à variável  $r$  e com constante  $K$ .

Note que, existe  $\rho > 0$  tal que, para  $\xi \in [0, \rho)$ , a solução  $r = r(\theta, \xi)$  satisfazendo  $r(0, \xi) = \xi$ , na qual  $S$  é dada em (3.45), está bem definida para  $\theta \in [0, 2\pi)$ . E, ainda, a transformação de Poincaré  $\xi \mapsto h(\xi) = r(2\pi, \xi)$  é analítica, pois é obtida a partir da composição de cinco funções analíticas, para  $\rho$  suficientemente pequeno, quais sejam, os fluxos definidos em  $D_{II}$ ,  $D_I$ ,  $D_{II}$ ,  $D_{III}$  e  $D_{II}$  (veja a Figura 3.15).

Devido à invariância da equação (3.17) com a mudança  $(r, \theta) \leftrightarrow (r, \theta + \pi)$ , com  $S$  dada em (3.45), podemos considerar a transformação de Poincaré  $h$  como

$$h(\xi) = h_1(h_1(\xi)),$$

sendo,  $h_1(\xi) = r(\pi, \xi)$ . Note que  $\xi_0$  é um ponto fixo de  $h$  se, e somente se,  $\xi_0$  é um ponto fixo de  $h_1$  e, nesse caso, tem a mesma estabilidade para ambas transformações, pois,  $h'(\xi_0) = h_1'(\xi_0)h_1'(\xi_0) = [h_1'(\xi_0)]^2$ .

De fato, primeiramente suponha que  $\xi_0$  é um ponto fixo de  $h$ , isto é,  $h(\xi_0) = \xi_0$ . Como  $h_1$  é estritamente crescente,  $\xi_2 > \xi_1$  implica que  $h_1(\xi_2) > h_1(\xi_1)$ . Se  $h_1(\xi_0) \neq \xi_0$ , então  $h_1(\xi_0) < \xi_0$  ou  $h_1(\xi_0) > \xi_0$ . Considerando o caso  $h_1(\xi_0) > \xi_0$ , temos que

$$\xi_0 = h(\xi_0) = h_1(h_1(\xi_0)) > h_1(\xi_0),$$

o que gera uma contradição. Analogamente, o caso  $h_1(\xi_0) < \xi_0$  gera uma contradição. Logo,  $h_1(\xi_0) = \xi_0$ , isto é,  $\xi_0$  é um ponto fixo de  $h_1$ . Reciprocamente, se  $h_1(\xi_0) = \xi_0$ , então

$$h(\xi_0) = h_1(h_1(\xi_0)) = h_1(\xi_0) = \xi_0,$$

isto é,  $\xi_0$  é um ponto fixo da  $h$ .

A seguir, faremos cinco lemas necessários para provar um resultado que fornece a primeira e a segunda derivadas da transformação de Poincaré  $h_1$ .

**Lema 3.3.3.** *Seja  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $|p| < 1$ . Então,*

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 + p \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

**Demonstração.** De uma identidade trigonométrica, decorre que

$$\cos \theta = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

e, logo,

$$\int \frac{1}{1+p \cos \theta} d\theta = \int \frac{1}{1+p \left( \frac{1 - \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \right)} d\theta.$$

Fazendo a mudança de variável  $u = \tan \left( \frac{\theta}{2} \right)$ , temos que

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2} \sec^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] = \frac{1+u^2}{2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+p \left( \frac{1 - \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \right)} d\theta &= \int \frac{1}{1+p \left( \frac{1-u^2}{1+u^2} \right)} \frac{2}{1+u^2} du \\ &= \int \frac{2}{1+u^2+p(1-u^2)} du \\ &= \int \frac{2}{(1-p)u^2+(1+p)} du \\ &= \frac{2}{1+p} \int \frac{1}{\frac{1-p}{1+p}u^2+1} du \\ &= \frac{2}{1+p} \int \frac{1}{\left( \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}u \right)^2+1} du. \end{aligned}$$

Fazendo agora a mudança de variável

$$v = \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}u,$$

segue que

$$\frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \frac{2}{1+p} \int \frac{1}{\left( \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}u \right)^2+1} du &= \frac{2}{1+p} \sqrt{\frac{1+p}{1-p}} \int \frac{1}{v^2+1} dv \\ &= \frac{2}{\sqrt{(1-p)(1+p)}} \int \frac{1}{v^2+1} dv \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-p^2}} \arctan v \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-p^2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{1-p}{1+p}} \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+p \cos \theta} d\theta = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{2}{\sqrt{1-p^2}} \arctan \left[ \sqrt{\frac{1-p}{1+p}} \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}}.$$

■

**Lema 3.3.4.** *Se  $f$  é uma função contínua e periódica, de período  $2\pi$ , então:*

a. *Vale a seguinte identidade*

$$\int_a^{a+2\pi} f(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad \forall a \in \mathbb{R};$$

b. *Se além disso  $f$  é uma função par, então*

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 2 \int_0^\pi f(\theta) d\theta.$$

**Demonstração.**

a. Defina a função  $g$ , dada por

$$g(a) = \int_a^{a+2\pi} f(\theta) d\theta.$$

Logo,

$$g(a) = \int_a^0 f(\theta) d\theta + \int_0^{a+2\pi} f(\theta) d\theta = \int_0^{a+2\pi} f(\theta) d\theta - \int_0^a f(\theta) d\theta.$$

Derivando  $g$ , obtemos

$$g'(a) = f(a+2\pi) - f(a) = f(a) - f(a) = 0.$$

Decorre que  $g$  é constante e

$$g(a) = g(0) = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta.$$

Portanto,

$$\int_a^{a+2\pi} f(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

b. Note que

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \int_0^\pi f(\theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} f(\theta) d\theta.$$

Para a integral

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(\theta) \, d\theta,$$

façamos a mudança de variável  $s = 2\pi - \theta$ . Logo,  $-ds = d\theta$  e

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} f(\theta) \, d\theta &= - \int_{\pi}^0 f(2\pi - s) \, ds \\ &= \int_0^{\pi} f(s - 2\pi) \, ds \\ &= \int_0^{\pi} f(s) \, ds. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta = \int_0^{\pi} f(\theta) \, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} f(\theta) \, d\theta = 2 \int_0^{\pi} f(\theta) \, d\theta.$$

■

**Lema 3.3.5.** *Seja  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $|p| < 1$ . Então,*

$$\int_0^{\pi} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \theta}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

**Demonstração.** Se  $p = 0$ , temos

$$\int_0^{\pi} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \theta}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \, d\theta = \int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta = \theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \, d\theta = \int_0^{\pi} 1 \, d\theta = \theta \Big|_0^{\pi} = \pi, \text{ e}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - p^2}} = \pi$$

e o resultado segue. Para  $p \neq 0$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \, d\theta &= \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + p \operatorname{sen} (2\theta)} \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + p \cos (2\theta - \frac{\pi}{2})} \, d\theta. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $\phi = 2\theta - \frac{\pi}{2}$ , decorre que  $d\phi = 2d\theta$  e

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + p \cos (2\theta - \frac{\pi}{2})} \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{1 + p \cos \phi} \, d\phi.$$

A partir dos Lemas 3.3.3 e 3.3.4, resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{1+p \cos \phi} d\phi &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+p \cos \phi} d\phi \\
&= \frac{1}{2} \left( 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{1+p \cos \phi} d\phi \right) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{1+p \cos \phi} d\phi \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}},
\end{aligned}$$

e a segunda igualdade segue. Para a primeira igualdade, observe que

$$\frac{2 \operatorname{sen}^2 \theta}{1+2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta}{1+2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} + \frac{1}{1+2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta}.$$

Como

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta}{1+2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta = -\frac{1}{2p} \log(1+2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \Big|_0^{\pi} = 0,$$

a primeira igualdade é satisfeita. ■

**Lema 3.3.6.** *Defina, para  $|p| < 1$  e  $q \in \mathbb{R}$ , as expressões*

$$\mathcal{J}_s(p, q) = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \theta}{(1+2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \exp \left( \int_0^{\theta} \frac{q}{1+2p \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi \right) d\theta, \quad (3.48)$$

$$\mathcal{J}_c(p, q) = \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta}{(1+2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \exp \left( \int_0^{\theta} \frac{q}{1+2p \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi \right) d\theta. \quad (3.49)$$

Então, temos

$$\mathcal{J}_s(p, q) = \frac{1}{1-p^2+q^2} \left[ 1 + \exp \left( \frac{\pi q}{\sqrt{1-p^2}} \right) \right] \quad (3.50)$$

e

$$\mathcal{J}_c(p, q) = -\frac{p+q}{1-p^2+q^2} \left[ 1 + \exp \left( \frac{\pi q}{\sqrt{1-p^2}} \right) \right]. \quad (3.51)$$

**Demonstração.** Trabalharemos com as duas expressões paralelamente. Para isso considere as funções auxiliares  $u_s$ ,  $u_c$  e  $v$  definidas, respectivamente, por

$$u_s(\theta, p) = \frac{\operatorname{sen} \theta}{(1+2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.52)$$

$$u_c(\theta, p) = \frac{\cos \theta}{(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.53)$$

e

$$v(\theta, p, q) = \exp \left( \int_0^\theta \frac{q}{1 + 2p \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi \right), \quad (3.54)$$

de modo que

$$\mathcal{J}_{\{s,c\}}(p, q) = \int_0^\pi \frac{u_{\{s,c\}}(\theta, p)v(\theta, p, q)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta. \quad (3.55)$$

Primeiramente, consideramos o caso  $q = 0$ . Como  $v(\theta, p, 0) = 1$ , para todo  $\theta$ , podemos escrever

$$\mathcal{J}_{\{s,c\}}(p, 0) = \int_0^\pi \frac{u_{\{s,c\}}(\theta, p)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta. \quad (3.56)$$

A partir das equações (3.52) e (3.53), obtemos

$$(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{1}{2}} u_{\{s,c\}}(\theta, p) = \{\operatorname{sen} \theta, \cos \theta\},$$

e derivando com respeito a variável  $\theta$ ,

$$(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{1}{2}} u'_{\{s,c\}}(\theta, p) + p \frac{\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta}{(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} u_{\{s,c\}}(\theta, p) = \{\cos \theta, -\operatorname{sen} \theta\}.$$

Agora, multiplicando por  $(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)$ ,

$$\begin{aligned} & (1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{3}{2}} u'_s(\theta, p) + p(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{1}{2}} u_s(\theta, p) \\ & = (1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \cos \theta, \end{aligned}$$

e utilizando a equação (3.52), segue que

$$\begin{aligned} & (1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{3}{2}} u'_s(\theta, p) \\ & = (1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \cos \theta - p(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \operatorname{sen} \theta \\ & = \cos \theta + 2p \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta - p \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta + p \operatorname{sen}^3 \theta \\ & = \cos \theta + p \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

Para a outra equação, temos que

$$\begin{aligned} & (1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{3}{2}} u'_c(\theta, p) + p(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{1}{2}} u_c(\theta, p) \\ & = -(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \operatorname{sen} \theta, \end{aligned}$$

e da equação (3.53), decorre que

$$\begin{aligned}
& (1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{3}{2}} u'_c(\theta, p) \\
&= -(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \operatorname{sen} \theta - p(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \cos \theta \\
&= -\operatorname{sen} \theta - 2p \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta - p \cos^3 \theta + p \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta \\
&= -\operatorname{sen} \theta - p \cos \theta,
\end{aligned}$$

de modo que

$$(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{3}{2}} u'_{\{s,c\}}(\theta, p) = \{\cos \theta + p \operatorname{sen} \theta, -\operatorname{sen} \theta - p \cos \theta\}.$$

Usando novamente as equações (3.52) e (3.53), obtemos

$$\begin{aligned}
u'_s(\theta, p) &= \frac{\cos \theta + p \operatorname{sen} \theta}{(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \\
&= (1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{-1} \left[ \frac{\cos \theta}{(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} + p \frac{\operatorname{sen} \theta}{(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (3.57) \\
&= (1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{-1} [u_c(\theta, p) + p u_s(\theta, p)]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
u'_c(\theta, p) &= \frac{-\operatorname{sen} \theta - p \cos \theta}{(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \\
&= (1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{-1} \left[ -\frac{\operatorname{sen} \theta}{(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} - p \frac{\cos \theta}{(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (3.58) \\
&= (1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{-1} [-u_s(\theta, p) - p u_c(\theta, p)].
\end{aligned}$$

Integrando ambos os membros da equação (3.57), na variável  $\theta$  de 0 a  $\pi$  e utilizando a equação (3.56), vem que

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi u'_s(\theta, p) \, d\theta &= \int_0^\pi \frac{u_c(\theta, p) + p u_s(\theta, p)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \, d\theta, \\
u_s(\theta, p)|_0^\pi &= \int_0^\pi \frac{u_c(\theta, p)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \, d\theta + p \int_0^\pi \frac{u_s(\theta, p)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \, d\theta, \\
u_s(\pi, p) - u_s(0, p) &= \mathcal{J}_c(p, 0) + p \mathcal{J}_s(p, 0).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{J}_c(p, 0) + p \mathcal{J}_s(p, 0) = 0.$$

Integrando ambos os membros da equação (3.58), na variável  $\theta$  de 0 a  $\pi$  e fazendo uso da equação (3.56), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u'_c(\theta, p) \, d\theta &= \int_0^\pi \frac{-u_s(\theta, p) - pu_c(\theta, p)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \, d\theta, \\ u_c(\theta, p)|_0^\pi &= - \int_0^\pi \frac{u_s(\theta, p)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \, d\theta - p \int_0^\pi \frac{u_c(\theta, p)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \, d\theta, \\ u_c(\pi, p) - u_c(0, p) &= -\mathcal{J}_s(p, 0) - p\mathcal{J}_c(p, 0) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$-\mathcal{J}_s(p, 0) - p\mathcal{J}_c(p, 0) = -2.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \mathcal{J}_c(p, 0) + p\mathcal{J}_s(p, 0) = 0, \\ -\mathcal{J}_s(p, 0) - p\mathcal{J}_c(p, 0) = -2, \end{cases}$$

temos que,

$$\begin{cases} p\mathcal{J}_c(p, 0) + p^2\mathcal{J}_s(p, 0) = 0, \\ -p\mathcal{J}_c(p, 0) - \mathcal{J}_s(p, 0) = -2. \end{cases}$$

Logo,

$$(p^2 - 1)\mathcal{J}_s(p, 0) = -2$$

e, assim,

$$\mathcal{J}_s(p, 0) = \frac{2}{1 - p^2}.$$

Substituindo na primeira equação, segue que

$$\mathcal{J}_c(p, 0) = -p\mathcal{J}_s(p, 0) = -p \frac{2}{1 - p^2}$$

e, então,

$$\mathcal{J}_c(p, 0) = -\frac{2p}{1 - p^2}.$$

Portanto, as equações (3.50) e (3.51) se verificam para  $q = 0$ . Suponha agora que  $q \neq 0$ .

Derivando ambos os membros da igualdade (3.54), obtemos

$$v'(\theta, p, q) = q \frac{v(\theta, p, q)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta}.$$

Da equação (3.55), decorre que

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\{s,c\}}(p, q) &= \int_0^\pi u_{\{s,c\}}(\theta, p) \frac{v(\theta, p, q)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{q} \int_0^\pi u_{\{s,c\}}(\theta, p) v'(\theta, p, q) d\theta.\end{aligned}\tag{3.59}$$

Utilizando o método da integração por partes na equação (3.59), e considerando as equações (3.52), (3.55) e (3.57), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_s(p, q) &= \frac{1}{q} \int_0^\pi u_s(\theta, p) v'(\theta, p, q) d\theta \\ &= \frac{1}{q} \left[ u_s(\theta, p) v(\theta, p, q) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi u'_s(\theta, p) v(\theta, p, q) d\theta \right] \\ &= \frac{1}{q} \left[ u_s(\pi, p) v(\pi, p, q) - u_s(0, p) v(0, p, q) - \int_0^\pi \frac{u_c(\theta, p) + p u_s(\theta, p)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} v(\theta, p, q) d\theta \right] \\ &= -\frac{1}{q} \left[ \int_0^\pi \frac{u_c(\theta, p) v(\theta, p, q)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta + p \int_0^\pi \frac{u_s(\theta, p) v(\theta, p, q)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta \right] \\ &= -\frac{1}{q} [\mathcal{J}_c(p, q) + p \mathcal{J}_s(p, q)].\end{aligned}$$

Utilizando o método da integração por partes na equação (3.59), e considerando as equações (3.53), (3.55) e (3.58), segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_c(p, q) &= \frac{1}{q} \int_0^\pi u_c(\theta, p) v'(\theta, p, q) d\theta \\ &= \frac{1}{q} \left[ u_c(\theta, p) v(\theta, p, q) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi u'_c(\theta, p) v(\theta, p, q) d\theta \right] \\ &= \frac{1}{q} \left[ u_c(\pi, p) v(\pi, p, q) - u_c(0, p) v(0, p, q) - \int_0^\pi \frac{-u_s(\theta, p) - p u_c(\theta, p)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} v(\theta, p, q) d\theta \right] \\ &= -\frac{1}{q} \left[ 1 + v(\pi, p, q) - \int_0^\pi \frac{u_s(\theta, p) v(\theta, p, q)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta - p \int_0^\pi \frac{u_c(\theta, p) v(\theta, p, q)}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta \right] \\ &= -\frac{1}{q} [1 + v(\pi, p, q) - \mathcal{J}_s(p, q) - p \mathcal{J}_c(p, q)] \\ &= -\frac{1}{q} [1 + v(\pi, p, q)] + \frac{1}{q} [\mathcal{J}_s(p, q) + p \mathcal{J}_c(p, q)].\end{aligned}$$

Do Lema 3.3.5, segue que

$$v(\pi, p, q) = \exp \left( q \int_0^\pi \frac{1}{1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta \right) = \exp \left( \frac{\pi q}{\sqrt{1 - p^2}} \right).$$

Assim, há o seguinte sistema

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{p}{q}\right) \mathcal{J}_s(p, q) + \frac{1}{q} \mathcal{J}_c(p, q) = 0, \\ -\frac{1}{q} \mathcal{J}_s(p, q) + \left(1 - \frac{p}{q}\right) \mathcal{J}_c(p, q) = -\frac{1}{q} \left[1 + \exp\left(\frac{\pi q}{\sqrt{1-p^2}}\right)\right], \end{cases}$$

e multiplicando-se a primeira equação por  $(p - q)$ , temos o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{p}{q}\right) (p - q) \mathcal{J}_s(p, q) - \left(1 - \frac{p}{q}\right) \mathcal{J}_c(p, q) = 0, \\ -\frac{1}{q} \mathcal{J}_s(p, q) + \left(1 - \frac{p}{q}\right) \mathcal{J}_c(p, q) = -\frac{1}{q} \left[1 + \exp\left(\frac{\pi q}{\sqrt{1-p^2}}\right)\right]. \end{cases}$$

Logo,

$$\left[\left(1 + \frac{p}{q}\right) (p - q) - \frac{1}{q}\right] \mathcal{J}_s(p, q) = -\frac{1}{q} \left[1 + \exp\left(\frac{\pi q}{\sqrt{1-p^2}}\right)\right],$$

ou, simplificando,

$$\left(\frac{p^2 - q^2 - 1}{q}\right) \mathcal{J}_s(p, q) = -\frac{1}{q} \left[1 + \exp\left(\frac{\pi q}{\sqrt{1-p^2}}\right)\right]$$

e, portanto,

$$\mathcal{J}_s(p, q) = \frac{1}{1 - p^2 + q^2} \left[1 + \exp\left(\frac{\pi q}{\sqrt{1-p^2}}\right)\right].$$

Assim, decorre que

$$\mathcal{J}_c(p, q) = -q \left(1 + \frac{p}{q}\right) \mathcal{J}_s(p, q) = \frac{-q - p}{1 - p^2 + q^2} \left[1 + \exp\left(\frac{\pi q}{\sqrt{1-p^2}}\right)\right],$$

ou seja,

$$\mathcal{J}_c(p, q) = -\frac{p + q}{1 - p^2 + q^2} \left[1 + \exp\left(\frac{\pi q}{\sqrt{1-p^2}}\right)\right],$$

concluindo a demonstração. ■

**Lema 3.3.7.** Defina, para  $|p| < 1$  e  $q, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{R}$ , a expressão

$$\mathcal{J}(p, q, \mathcal{C}, \mathcal{D}) = \int_0^\pi \frac{\mathcal{C} \operatorname{sen} \theta + \mathcal{D} \cos \theta}{(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2} \exp \left( \int_0^\theta \frac{q - 2p \operatorname{sen}^2 \phi}{1 + 2p \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi \right) d\theta.$$

Então, temos que

$$\mathcal{J}(p, q, \mathcal{C}, \mathcal{D}) = \frac{\mathcal{C} - q\mathcal{D}}{1 - 2pq + q^2} \left[ 1 + \exp \left( \frac{\pi(q - p)}{\sqrt{1 - p^2}} \right) \right].$$

**Demonstração.** Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \frac{q - 2p \operatorname{sen}^2 \phi}{1 + 2p \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi &= \int_0^\theta \frac{q - p}{1 + 2p \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi \\ &\quad + \int_0^\theta \frac{p(\cos^2 \phi - \operatorname{sen}^2 \phi)}{1 + 2p \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi \end{aligned}$$

e

$$\int_0^\theta \frac{p(\cos^2 \phi - \operatorname{sen}^2 \phi)}{1 + 2p \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi = \frac{1}{2} \log(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(p, q, \mathcal{C}, \mathcal{D}) &= \int_0^\pi \frac{\mathcal{C} \operatorname{sen} \theta + \mathcal{D} \cos \theta}{(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2} \\ &\quad \times \exp \left( \frac{1}{2} \log(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta) + \int_0^\theta \frac{q - p}{1 + 2p \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi \right) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\mathcal{C} \operatorname{sen} \theta + \mathcal{D} \cos \theta}{(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2} (1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \exp \left( \int_0^\theta \frac{q - p}{1 + 2p \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi \right) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\mathcal{C} \operatorname{sen} \theta + \mathcal{D} \cos \theta}{(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \exp \left( \int_0^\theta \frac{q - p}{1 + 2p \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi \right) d\theta. \end{aligned}$$

Das equações (3.48) e (3.49), segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(p, q, \mathcal{C}, \mathcal{D}) &= \mathcal{C} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} \theta}{(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \exp \left( \int_0^\theta \frac{q - p}{1 + 2p \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi \right) d\theta \\ &\quad + \mathcal{D} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{(1 + 2p \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \exp \left( \int_0^\theta \frac{q - p}{1 + 2p \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi \right) d\theta \\ &= \mathcal{C} \mathcal{J}_s(p, q - p) + \mathcal{D} \mathcal{J}_c(p, q - p). \end{aligned}$$

Portanto, do Lema 3.3.6, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(p, q, \mathcal{C}, \mathcal{D}) &= \mathcal{C} \frac{1}{1 - p^2 + (q - p)^2} \left[ 1 + \exp \left( \frac{\pi(q - p)}{\sqrt{1 - p^2}} \right) \right] \\ &\quad - \mathcal{D} \frac{p + (q - p)}{1 - p^2 + (q - p)^2} \left[ 1 + \exp \left( \frac{\pi(q - p)}{\sqrt{1 - p^2}} \right) \right] \\ &= \frac{\mathcal{C} - q\mathcal{D}}{1 - 2pq + q^2} \left[ 1 + \exp \left( \frac{\pi(q - p)}{\sqrt{1 - p^2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

■

Enfim, o próximo resultado fornece a primeira e a segunda derivadas da transformação de Poincaré  $h_1$ .

**Lema 3.3.8.** *A transformação de Poincaré  $h_1$  associada com (3.17) satisfaz*

$$\begin{aligned} h_1'(0) &= \exp \left( -\frac{\pi t}{\sqrt{4 - t^2}} \right), \\ h_1''(0) &= -2h_1'(0)(b_1 t + b_2) \left[ 1 + \exp \left( -\frac{\pi t}{\sqrt{4 - t^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

e

$$h_1''(0)|_{t=0} = -4b_2.$$

**Demonstração.** Para demonstrar este lema, faremos uso do Teorema 3.2.3 e para aplicá-lo adequadamente iremos decompor a transformação de Poincaré em duas aplicações, quais sejam,

$$\xi \longmapsto h_{1,1}(\xi) = r \left( \frac{\pi}{2}, \xi \right),$$

para  $\xi \in [0, \rho)$ , com  $\rho$  suficientemente pequeno, e

$$\eta \longmapsto h_{1,2}(\eta) = r(\pi, \xi),$$

para  $\xi$  tal que  $r(\pi/2, \xi) = \eta$  e  $\eta \in [0, r(\pi/2, \rho))$ , sendo  $r = r(\theta, \xi)$  a solução da equação diferencial (3.17) que satisfaz  $r(0, \xi) = \xi$ .

Note que  $h_{1,1}$  é a aplicação de transição que aplica o intervalo  $[0, \rho)$  de geratriz  $\{\theta = 0\}$  na geratriz  $\{\theta = \pi/2\}$  (veja a Figura 3.15). Da mesma forma,  $h_{1,2}$  é a aplicação de transição que aplica o intervalo  $[0, r(\pi/2, \rho))$  de geratriz  $\{\theta = \pi/2\}$ , na geratriz  $\{\theta = \pi\}$ .

Temos também que  $h_{1,1}(0) = 0$  e  $h_{1,2}(0) = 0$ , pois  $r(\theta, 0) = 0$ , para todo  $\theta \in \mathbb{S}^1$ .

Claramente,  $h_{1,1}$  faz uso apenas do fluxo na região  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , no qual,  $S$  é suave por partes e coincide com  $S_{II}$  de (3.45), para  $0 \leq \theta \leq \bar{\theta}(r) = \arcsen(r)$ , e coincide com  $S_I$  de (3.45), para  $\bar{\theta}(r) \leq \theta \leq \pi/2$ .

Para aplicarmos o Teorema 3.2.3, devemos ainda verificar a condição de transversalidade (3.19) para  $S_{II}$ . Como  $\bar{\theta}(r) = \arcsen(r)$ , temos que

$$\bar{\theta}(0) = \arcsen(0) = 0$$

e

$$\bar{\theta}'(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$$

que implica em

$$\bar{\theta}'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1.$$

Logo, para  $\xi = 0$ , temos que

$$S_{II}(0, \bar{\theta}(0))\bar{\theta}'(0) = S_{II}(0, 0)\bar{\theta}'(0) = 0 \neq 1.$$

Por continuidade, segue que

$$S_{II}(\xi, \bar{\theta}(\xi))\bar{\theta}'(\xi) \neq 1.$$

para todo  $\xi \in [0, \rho)$  e, portanto, a referida condição é satisfeita. De (3.23), temos que

$$h'_{1,1}(0) = E\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right),$$

sendo

$$E(0, 0, \theta) = \exp\left(\int_0^\theta \frac{\partial S_I}{\partial r}(0, \phi) d\phi\right), \quad (3.60)$$

visto que o valor de  $\partial S_{II}/\partial r$  não contribui para a integral. Como

$$S_I(r, \theta) = \frac{-r[t \sen^2 \theta + r(b_1 \cos \theta + b_2 \sen \theta)]}{1 + t \sen \theta \cos \theta - r(b_1 \sen \theta - b_2 \cos \theta)},$$

decorre que

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_I}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{[1 + t \sen \theta \cos \theta - r(b_1 \sen \theta - b_2 \cos \theta)][-t \sen^2 \theta - 2r(b_1 \cos \theta + b_2 \sen \theta)]}{[1 + t \sen \theta \cos \theta - r(b_1 \sen \theta - b_2 \cos \theta)]^2} \\ &+ \frac{r[t \sen^2 \theta + r(b_1 \cos \theta + b_2 \sen \theta)][-b_1 \sen \theta + b_2 \cos \theta]}{[1 + t \sen \theta \cos \theta - r(b_1 \sen \theta - b_2 \cos \theta)]^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial S_I}{\partial r}(0, \theta) = \frac{(1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta)(-t \operatorname{sen}^2 \theta)}{(1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2} = -\frac{t \operatorname{sen}^2 \theta}{1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta}. \quad (3.61)$$

Para a segunda derivada, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(r, \theta)[1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta - r(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta)]^4 \\ &= [1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta - r(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta)]^2 \\ & \quad \times \frac{\partial}{\partial r}([1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta - r(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta)][-t \operatorname{sen}^2 \theta - 2r(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta)] \\ & \quad + r[t \operatorname{sen}^2 \theta + r(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta)][-b_1 \operatorname{sen} \theta + b_2 \cos \theta]) \\ & \quad - \{[1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta - r(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta)][-t \operatorname{sen}^2 \theta - 2r(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta)] \\ & \quad + r[t \operatorname{sen}^2 \theta + r(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta)][-b_1 \operatorname{sen} \theta + b_2 \cos \theta]\} \\ & \quad \times \frac{\partial}{\partial r}([1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta - r(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta)]^2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(r, \theta)[1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta - r(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta)]^4 \\ &= [1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta - r(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta)]^2 \\ & \quad \times \{(-b_1 \operatorname{sen} \theta + b_2 \cos \theta)[-t \operatorname{sen}^2 \theta - 2r(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta)] \\ & \quad + [1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta - r(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta)](-2b_1 \cos \theta - 2b_2 \operatorname{sen} \theta) \\ & \quad + [t \operatorname{sen}^2 \theta + 2r(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta)][-b_1 \operatorname{sen} \theta + b_2 \cos \theta]\} \\ & \quad - \{[1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta - r(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta)][-t \operatorname{sen}^2 \theta - 2r(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta)] \\ & \quad + r[t \operatorname{sen}^2 \theta + r(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta)][-b_1 \operatorname{sen} \theta + b_2 \cos \theta]\} \\ & \quad \times 2[1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta - r(b_1 \operatorname{sen} \theta - b_2 \cos \theta)](-b_1 \operatorname{sen} \theta + b_2 \cos \theta) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(0, \theta)(1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^4 &= (1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2[(-b_1 \operatorname{sen} \theta + b_2 \cos \theta)(-t \operatorname{sen}^2 \theta) \\ & \quad + (1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta)(-2b_1 \cos \theta - 2b_2 \operatorname{sen} \theta) \\ & \quad + (t \operatorname{sen}^2 \theta)(-b_1 \operatorname{sen} \theta + b_2 \cos \theta)] - 2(1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \\ & \quad \times (-t \operatorname{sen}^2 \theta)(1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta)(-b_1 \operatorname{sen} \theta + b_2 \cos \theta). \end{aligned}$$

Simplificando, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(0, \theta)(1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2 &= -(-b_1 \operatorname{sen} \theta + b_2 \cos \theta)(t \operatorname{sen}^2 \theta) \\
&\quad + (1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta)(-2b_1 \cos \theta - 2b_2 \operatorname{sen} \theta) \\
&\quad + (t \operatorname{sen}^2 \theta)(-b_1 \operatorname{sen} \theta + b_2 \cos \theta) \\
&\quad + 2(t \operatorname{sen}^2 \theta)(-b_1 \operatorname{sen} \theta + b_2 \cos \theta) \\
&= (1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta)(-2b_1 \cos \theta - 2b_2 \operatorname{sen} \theta) \\
&\quad + 2(t \operatorname{sen}^2 \theta)(-b_1 \operatorname{sen} \theta + b_2 \cos \theta),
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(0, \theta)(1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2 &= -2b_1 \cos \theta - 2b_2 \operatorname{sen} \theta - 2b_1 t \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta - 2b_2 t \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta \\
&\quad - 2b_1 t \operatorname{sen}^3 \theta + 2b_2 t \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta \\
&= -2b_1 \cos \theta - 2b_2 \operatorname{sen} \theta - 2b_1 t \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta - 2b_1 t \operatorname{sen}^3 \theta \\
&= -2[b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta + b_1 t \operatorname{sen} \theta (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)] \\
&= -2(b_1 \cos \theta + b_2 \operatorname{sen} \theta + b_1 t \operatorname{sen} \theta) \\
&= -2[b_1(\cos \theta + t \operatorname{sen} \theta) + b_2 \operatorname{sen} \theta]
\end{aligned}$$

e, assim,

$$\frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(0, \theta) = -2 \frac{b_1(\cos \theta + t \operatorname{sen} \theta) + b_2 \operatorname{sen} \theta}{(1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2}. \quad (3.62)$$

A expressão (3.25) se reduz a

$$h''_{1,1}(0) = E \left( 0, 0, \frac{\pi}{2} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} D(0, \theta) \, d\theta,$$

já que

$$\frac{\partial S_I}{\partial r}(0, 0) = \frac{\partial S_{II}}{\partial r}(0, 0) = 0.$$

Temos também que

$$D(0, \theta) = E(0, 0, \theta) \frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(0, \theta),$$

pois a integração pode ser feita completamente em  $D_I$ . Em resumo, obtemos

$$h''_{1,1}(0) = E \left( 0, 0, \frac{\pi}{2} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(0, \theta) E(0, 0, \theta) \, d\theta.$$

Agora, aplicaremos o Teorema 3.2.3 para  $h_{1,2}$ . Note que todos os cálculos são similares, mas  $\bar{\theta}(r) = \pi - \arcsen(r)$ ,  $\theta_1 = \pi/2$  e  $\theta_2 = \pi$ . Assim, obtemos

$$h'_{1,2}(0) = E\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

$$D(0, \theta) = E\left(0, \frac{\pi}{2}, \theta\right) \frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(0, \theta)$$

e

$$h''_{1,2}(0) = E\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(0, \theta) E\left(0, \frac{\pi}{2}, \theta\right) d\theta.$$

Observe que

$$h_1(\xi) = h_{1,2}(h_{1,1}(\xi)),$$

e, derivando com respeito à variável  $\xi$ , decorre que

$$h'_1(\xi) = h'_{1,2}(h_{1,1}(\xi))h'_{1,1}(\xi)$$

e, assim,

$$h'_1(0) = h'_{1,2}(h_{1,1}(0))h'_{1,1}(0) = h'_{1,2}(0)h'_{1,1}(0).$$

Para a segunda derivada, temos que

$$h''_1(\xi) = h''_{1,2}(h_{1,1}(\xi))h'_{1,1}(\xi)h'_{1,1}(\xi) + h'_{1,2}(h_{1,1}(\xi))h''_{1,1}(\xi)$$

e, calculando em  $\xi = 0$ , segue que

$$\begin{aligned} h''_1(0) &= h''_{1,2}(h_{1,1}(0))h'_{1,1}(0)h'_{1,1}(0) + h'_{1,2}(h_{1,1}(0))h''_{1,1}(0) \\ &= h''_{1,2}(0)h'_{1,1}(0)h'_{1,1}(0) + h'_{1,2}(0)h''_{1,1}(0) \\ &= h''_{1,2}(0)h'_{1,1}(0)^2 + h'_{1,2}(0)h''_{1,1}(0). \end{aligned}$$

Usando as expressões para  $h'_1(0)$ ,  $h''_1(0)$  e a igualdade

$$E\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right) E\left(0, \frac{\pi}{2}, \theta\right) = E(0, 0, \theta),$$

obtemos

$$h'_1(0) = h'_{1,2}(0)h'_{1,1}(0) = E\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right) E\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right) = E(0, 0, \pi) \quad (3.63)$$

e

$$\begin{aligned}
h_1''(0) &= h_{1,2}''(0)h_{1,1}'(0)^2 + h_{1,2}'(0)h_{1,1}''(0) \\
&= E\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(0, \theta) E\left(0, \frac{\pi}{2}, \theta\right) d\theta E\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right)^2 \\
&\quad + E\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right) E\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(0, \theta) E(0, 0, \theta) d\theta \\
&= E(0, 0, \pi) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(0, \theta) E(0, 0, \theta) d\theta \\
&\quad + E(0, 0, \pi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(0, \theta) E(0, 0, \theta) d\theta,
\end{aligned}$$

de onde

$$h_1''(0) = E(0, 0, \pi) \int_0^{\pi} \frac{\partial^2 S_I}{\partial r^2}(0, \theta) E(0, 0, \theta) d\theta. \quad (3.64)$$

Para avaliar  $E(0, 0, \pi)$ , escrevemos

$$\int_0^{\pi} \frac{t \operatorname{sen}^2 \theta}{1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{t}{1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{t(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)}{1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta.$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{t(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)}{1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta &= \log(1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \Big|_0^{\pi} \\
&= \log(1 + t \operatorname{sen} \pi \cos \pi) - \log(1 + t \operatorname{sen} 0 \cos 0) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

segue que

$$\int_0^{\pi} \frac{t \operatorname{sen}^2 \theta}{1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{t}{1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta.$$

Então, de (3.60) e (3.61), obtemos

$$E(0, 0, \pi) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{t}{1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta\right).$$

Utilizando o Lema 3.3.5, segue que

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{t}{1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta = -\frac{1}{2} \frac{\pi t}{\sqrt{1 - (\frac{t}{2})^2}} = -\frac{\pi t}{\sqrt{4 - t^2}}$$

e, assim,

$$E(0, 0, \pi) = \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4 - t^2}}\right). \quad (3.65)$$

Portanto, de (3.63) e (3.65), obtemos

$$h_1'(0) = \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4-t^2}}\right)$$

provando a primeira identidade. Agora, de (3.64) e usando (3.60), (3.61) e (3.62), temos

$$\begin{aligned} h_1''(0) &= -2E(0, 0, \pi) \int_0^\pi \frac{b_1(\cos \theta + t \operatorname{sen} \theta) + b_2 \operatorname{sen} \theta}{(1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2} \exp\left(\int_0^\theta -\frac{t \operatorname{sen}^2 \phi}{1 + t \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi\right) d\theta \\ &= -2E(0, 0, \pi) \int_0^\pi \frac{(b_1 t + b_2) \operatorname{sen} \theta + b_1 \cos \theta}{(1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2} \exp\left(\int_0^\theta -\frac{t \operatorname{sen}^2 \phi}{1 + t \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi\right) d\theta. \end{aligned}$$

Utilizando o Lema 3.3.7, com  $\mathcal{C} = b_1 t + b_2$ ,  $\mathcal{D} = b_1$ ,  $p = t/2$  e  $q = 0$ , resulta que

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{(b_1 t + b_2) \operatorname{sen} \theta + b_1 \cos \theta}{(1 + t \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2} \exp\left(\int_0^\theta -\frac{t \operatorname{sen}^2 \phi}{1 + t \operatorname{sen} \phi \cos \phi} d\phi\right) d\theta \\ &= (b_1 t + b_2) \left[1 + \exp\left(\frac{\pi(-t/2)}{\sqrt{1 - (\frac{t}{2})^2}}\right)\right] \\ &= (b_1 t + b_2) \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4-t^2}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$h_1''(0) = -2E(0, 0, \pi)(b_1 t + b_2) \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4-t^2}}\right)\right].$$

Portanto, de (3.63), decorre que

$$h_1''(0) = -2h_1'(0)(b_1 t + b_2) \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4-t^2}}\right)\right]$$

e, assim,

$$\begin{aligned} h_1''(0)|_{t=0} &= -2 h_1'(0)|_{t=0} (b_1 0 + b_2) \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi 0}{\sqrt{4-0^2}}\right)\right] \\ &= -2b_2(1+1) = -4b_2. \end{aligned}$$

■

A seguir, analisaremos a ocorrência de uma bifurcação transcítica. De modo não rigoroso, uma família de aplicações  $F_\mu = \{f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \mu \in \mathbb{R}\}$  de classe  $C^r$  ( $r \geq 2$ ) apresenta, para  $\mu = 0$ , uma bifurcação transcítica, se existem duas curvas de pontos fixos que passam pela origem do plano  $\mu\xi = \{(\mu, \xi) \mid \mu, \xi \in \mathbb{R}\}$  e (os pontos fixos) trocam de estabilidade ao passarem por ela.

**Lema 3.3.9.** *Considere, para algum  $\delta > 0$ , suficientemente pequeno, uma família de aplicações a um parâmetro  $\mu$ , de classe  $C^2$ ,*

$$\begin{aligned} h_\mu : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto h_\mu(\xi), \end{aligned}$$

com  $|\mu| < \delta$ , tendo um ponto fixo em  $\xi = 0$ , isto é,  $h_\mu(0) = 0$ , para todo  $|\mu| < \delta$ . Suponha que para  $\mu = 0$  este ponto fixo é não-hiperbólico, isto é,  $h'_0(0) = 1$ . Se as condições

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mu} h'_\mu(0) \right|_{\mu=0} \neq 0$$

e

$$h''_\mu(0) \neq 0$$

são satisfeitas e então a família de aplicações apresenta, para  $\mu = 0$ , uma bifurcação transcítica em  $\xi = 0$ , isto é, além do ponto fixo  $\xi = 0$ , existe uma curva  $\xi = \xi(\mu)$  de pontos fixos no plano  $\mu\xi$  passando pela origem e dando origem a um ponto fixo adicional para  $\mu < 0$  e outro para  $\mu > 0$ . A inclinação dessa curva na origem é

$$\frac{d\xi}{d\mu}(0) = -2 \frac{\left. \frac{\partial}{\partial \mu} h'_\mu(0) \right|_{\mu=0}}{\left. h''_\mu(0) \right|_{\mu=0}}.$$

**Demonstração.** Inicialmente, note que  $h_\mu$  pode ser vista como uma função de duas variáveis, qual seja

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, \mu) &\longmapsto h(\xi, \mu) = h_\mu(\xi). \end{aligned}$$

Dessa forma, utilizaremos a notação  $h'_\mu$  para indicar a derivada de  $h_\mu$  com respeito à variável  $\xi$  ou, equivalentemente, a derivada parcial de  $h$  com respeito à primeira variável.

Do mesmo modo, a notação  $\partial h_\mu / \partial \mu$  significa que estamos considerando a função  $h_\mu$  em sua forma equivalente  $h$  e calculando a derivada parcial de  $h$  com respeito à segunda variável.

O mesmo raciocínio se aplica para as próximas famílias de aplicações que definirmos.

Agora, defina a função de classe  $C^2$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{h}_\mu : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \tilde{h}_\mu(\xi) = h_\mu(\xi) - \xi. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \tilde{h}_\mu}{\partial \mu}(0) \right|_{\mu=0} &= \left. \frac{\partial h_\mu}{\partial \mu}(0) \right|_{\mu=0} \\
 &= \frac{\partial h}{\partial \mu}(0, 0) \\
 &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{h(0, \mu) - h(0, 0)}{\mu} \\
 &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{h_\mu(0) - h_0(0)}{\mu} \\
 &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{0}{\mu} = 0,
 \end{aligned}$$

para todo  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que  $|\mu| < \delta$ .

A curva dada por  $\xi = 0$  passa pela origem do plano  $\mu\xi$ , assim, tomaremos  $\tilde{h}_\mu$  da forma

$$\tilde{h}_\mu(\xi) = \xi H_\mu(\xi) = \xi(F_\mu(\xi) - 1),$$

sendo

$$H_\mu(\xi) = F_\mu(\xi) - 1$$

e

$$F_\mu(\xi) = \begin{cases} \frac{h_\mu(\xi)}{\xi}, & \xi \neq 0, \\ h'_\mu(0), & \xi = 0. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned}
 h'_\mu(0) &= \frac{\partial h_\mu}{\partial \xi}(0) \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{h_\mu(\xi) - h_\mu(0)}{\xi} \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{h_\mu(\xi)}{\xi},
 \end{aligned}$$

segue que  $F_\mu$  (e, conseqüentemente,  $H_\mu$ ) é contínua, mais ainda é de classe  $C^1$ , visto que  $h_\mu$  é de classe  $C^2$ . Assim,

$$H_\mu(\xi) = \begin{cases} \frac{\tilde{h}_\mu(\xi)}{\xi}, & \xi \neq 0, \\ h'_\mu(0) - 1, & \xi = 0, \end{cases} = \begin{cases} \frac{\tilde{h}_\mu(\xi)}{\xi}, & \xi \neq 0, \\ \tilde{h}'_\mu(0), & \xi = 0. \end{cases}$$

Derivando  $H_\mu$ , com respeito à variável  $\mu$  em  $\xi = 0$  e avaliando em  $\mu = 0$ , segue que

$$\left. \frac{\partial H_\mu}{\partial \mu}(0) \right|_{\mu=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \mu} h'_\mu(0) \right|_{\mu=0} \neq 0.$$

Logo,  $H_\mu$  tem uma única curva de zeros que passa por  $\xi = 0$  e existe para  $\mu < 0$  e  $\mu > 0$ .

Como  $H_\mu$  é de classe  $C^1$ ,  $H_0(0) = h'_0(0) - 1 = 1 - 1 = 0$  e

$$\left. \frac{\partial H_\mu}{\partial \mu}(0) \right|_{\mu=0} \neq 0,$$

segue do *Teorema da Função Implícita* que existem um aberto  $W \subset \mathbb{R}$  e uma única função de classe  $C^1$ ,  $\mu : W \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que:

(a<sub>1</sub>)  $0 \in W$  e  $\mu(0) = 0$ ;

(a<sub>2</sub>)  $H_{\mu(\xi)}(\xi) = 0$ , para todo  $\xi \in W$ .

Derivando implicitamente a última igualdade, decorre que

$$\frac{\partial}{\partial \xi} H_{\mu(\xi)}(\xi) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial H_{\mu(\xi)}(\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial H_{\mu(\xi)}(\xi)}{\partial \mu} \frac{d\mu}{d\xi}(\xi) = 0.$$

Avaliando em  $\xi = 0$ , obtemos

$$\frac{\partial H_0}{\partial \xi}(0) + \frac{\partial H_0}{\partial \mu}(0) \frac{d\mu}{d\xi}(0) = 0$$

e, assim,

$$\frac{d\mu}{d\xi}(0) = - \frac{\frac{\partial H_0}{\partial \xi}(0)}{\frac{\partial H_0}{\partial \mu}(0)}.$$

Como  $W \subset \mathbb{R}$  é aberto,  $\mu : W \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação de classe  $C^1$ ,  $0 \in W$ ,  $\mu'(0) \neq 0$  e  $\mu(0) = 0$ , segue do *Teorema da Função Inversa* que:

(b<sub>1</sub>) Existem abertos  $U, V \subset \mathbb{R}$  tais que  $0 \in U \cap V$  e  $\mu : U \rightarrow V$  é bijetora;

(b<sub>2</sub>) A inversa de  $\mu$ ,  $\nu : V \rightarrow U$ , é de classe  $C^1$  e  $\nu'(\eta) = [\mu'(\nu(\eta))]^{-1}$ .

Então,

$$\frac{d\xi}{d\mu}(0) = \frac{1}{\frac{d\mu}{d\xi}(0)} = \frac{1}{-\frac{\frac{\partial H_0}{\partial \xi}(0)}{\frac{\partial H_0}{\partial \mu}(0)}} = - \frac{\frac{\partial H_0}{\partial \mu}(0)}{\frac{\partial H_0}{\partial \xi}(0)}. \quad (3.66)$$

Note que

$$\begin{aligned} h_\mu(\xi) &= \tilde{h}_\mu(\xi) + \xi \\ &= \xi H_\mu(\xi) + \xi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} h'_\mu(\xi) &= H_\mu(\xi) + \xi \frac{\partial H_\mu}{\partial \xi}(\xi) + 1, \\ \frac{\partial}{\partial \mu} h'_\mu(\xi) &= \frac{\partial H_\mu}{\partial \mu}(\xi) + \xi \frac{\partial^2 H_\mu}{\partial \mu \partial \xi}(\xi), \end{aligned}$$

e

$$h''_\mu(\xi) = 2 \frac{\partial H_\mu}{\partial \xi}(\xi) + \xi \frac{\partial^2 H_\mu}{\partial \xi^2}(\xi).$$

Avaliando em  $\xi = 0$  e  $\mu = 0$ , obtemos

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mu} h'_\mu(0) \right|_{\mu=0} = \frac{\partial H_0}{\partial \mu}(0)$$

e

$$h''_\mu(0) \Big|_{\mu=0} = 2 \frac{\partial H_0}{\partial \xi}(0).$$

Substituindo as duas últimas identidades na equação (3.66), concluímos que

$$\frac{d\xi}{d\mu}(0) = - \frac{\frac{\partial H_0}{\partial \mu}(0)}{\frac{\partial H_0}{\partial \xi}(0)} = -2 \frac{\left. \frac{\partial}{\partial \mu} h'_\mu(0) \right|_{\mu=0}}{h''_\mu(0) \Big|_{\mu=0}}.$$

Mostremos que, para  $\mu < 0$  e para  $\mu > 0$ , as estabilidades são opostas. Do *Teorema de Taylor*, temos que

$$\begin{aligned} h(\xi, \mu) &= h(0, 0) + \frac{\partial h}{\partial \xi}(0, 0)\xi + \frac{\partial h}{\partial \mu}(0, 0)\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}(0, 0)\xi^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \mu}(0, 0)\xi\mu + \frac{\partial^2 h}{\partial \mu^2}(0, 0)\mu^2 + \mathcal{O}_h(|\xi|^3, |\mu|^3). \end{aligned}$$

Utilizando as hipóteses, segue que

$$\begin{aligned} h(\xi, \mu) &= \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}(0, 0)\xi^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \mu}(0, 0)\xi\mu + \frac{\partial^2 h}{\partial \mu^2}(0, 0)\mu^2 + \mathcal{O}_h(|\xi|^3, |\mu|^3) \\ &= \xi + \frac{1}{2} h''_\mu(0) \Big|_{\mu=0} \xi^2 + \left. \frac{\partial}{\partial \mu} h'_\mu(0) \right|_{\mu=0} \xi\mu + \left. \frac{\partial^2 h}{\partial \mu^2}(0) \right|_{\mu=0} \mu^2 + \mathcal{O}_h(|\xi|^3, |\mu|^3) \\ &= \xi + a\xi^2 + b\xi\mu + c\mu^2 + \mathcal{O}_h(|\xi|^3, |\mu|^3), \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} h''_{\mu}(0) \Big|_{\mu=0} \neq 0, \\ b &= \frac{\partial}{\partial \mu} h'_{\mu}(0) \Big|_{\mu=0} \neq 0, \\ c &= \frac{\partial^2 h}{\partial \mu^2}(0) \Big|_{\mu=0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$h'_{\mu}(\xi) = \frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, \mu) = 1 + 2a\xi + b\mu + \mathcal{O}_{h'}(|\xi|^2, |\mu|^3).$$

Avaliando em  $\xi = 0$ , temos

$$h'_{\mu}(0) = \frac{\partial h}{\partial \xi}(0, \mu) = 1 + b\mu + \mathcal{O}_{h'}(0, |\mu|^3).$$

Suponha que  $b > 0$ . Logo, temos que:

(c<sub>1</sub>) Se  $\mu > 0$ , então

$$h'_{\mu}(0) > 1,$$

o que implica que  $\xi = 0$  é instável;

(c<sub>2</sub>) Para  $\mu < 0$ , decorre que

$$h'_{\mu}(0) < 1,$$

e, portanto,  $\xi = 0$  é estável.

Agora, suponha que  $b < 0$ . Assim, segue que:

(c<sub>3</sub>) Se  $\mu > 0$ , então

$$h'_{\mu}(0) < 1,$$

o que implica que  $\xi = 0$  é estável;

(c<sub>4</sub>) Para  $\mu < 0$ , decorre que

$$h'_{\mu}(0) > 1,$$

e, portanto,  $\xi = 0$  é instável.

Do Teorema de Taylor, temos também que

$$\begin{aligned}\xi(\mu) &= \xi(0) + \xi'(0)\mu + \mathcal{O}_\xi(|\mu|^2) \\ &= -2 \frac{\frac{\partial}{\partial \mu} h'_\mu(0) \Big|_{\mu=0}}{h''_\mu(0) \Big|_{\mu=0}} \mu + \mathcal{O}_\xi(|\mu|^2) \\ &= -\frac{b}{a} \mu + \mathcal{O}_\xi(|\mu|^2).\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}h'_\mu(\xi(\mu)) &= 1 + 2a\xi(\mu) + b\mu + \mathcal{O}_{h'}(|\xi(\mu)|^2, |\mu|^3) \\ &= 1 + 2a \left[ -\frac{b}{a} \mu + \mathcal{O}_\xi(|\mu|^2) \right] + b\mu + \mathcal{O}_{h'}(|\xi(\mu)|^2, |\mu|^3) \\ &= 1 - 2b\mu + 2a\mathcal{O}_\xi(|\mu|^2) + b\mu + \mathcal{O}_{h'}(|\xi(\mu)|^2, |\mu|^3) \\ &= 1 - b\mu + \mathcal{O}(|\xi(\mu)|^2, |\mu|^2),\end{aligned}$$

no qual

$$\mathcal{O}(|\xi(\mu)|^2, |\mu|^2) = 2a\mathcal{O}_\xi(|\mu|^2) + \mathcal{O}_{h'}(|\xi(\mu)|^2, |\mu|^3).$$

Suponha que  $b > 0$ . Logo, segue que:

( $d_1$ ) Se  $\mu > 0$ , então

$$h'_\mu(\xi(\mu)) < 1,$$

o que implica que  $\xi(\mu)$  é estável;

( $d_2$ ) Para  $\mu < 0$ , decorre que

$$h'_\mu(\xi(\mu)) > 1,$$

e, portanto,  $\xi(\mu)$  é instável.

Agora, suponha que  $b < 0$ . Logo, temos que:

( $d_3$ ) Se  $\mu > 0$ , então

$$h'_\mu(\xi(\mu)) > 1,$$

o que implica que  $\xi(\mu)$  é instável;

( $d_4$ ) Para  $\mu < 0$ , decorre que

$$h'_\mu(\xi(\mu)) < 1,$$

e, portanto,  $\xi(\mu)$  é estável, finalizando a demonstração. ■

Por fim, faremos a demonstração do Teorema 3.1.2 mas, antes disso, precisaremos dos lemas a seguir.

**Definição 3.3.1.** *Um sistema fundamental é um sistema da forma (3.1), que tem a origem como ponto de equilíbrio assintoticamente estável, no qual a função característica  $\psi$  é da forma*

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} -w, & \text{se } \sigma \leq -w, \\ \sigma, & \text{se } -w < \sigma < w, \\ w, & \text{se } w \leq \sigma, \end{cases}$$

sendo  $w > 0$  uma constante real fixada.

**Lema 3.3.10.** *Se um sistema fundamental tem uma órbita periódica ou uma conexão dupla de selas, então seu parâmetro básico  $t$  é maior que zero.*

**Demonstração.** Veja a demonstração da Proposição 3 de [8]. ■

**Lema 3.3.11.** *Se existir uma função  $\vartheta = \vartheta(x, y)$  de classe  $C^1$ , em uma região  $R$  simplesmente conexa, tal que*

$$\frac{\partial(\vartheta P)}{\partial x} + \frac{\partial(\vartheta Q)}{\partial y},$$

tem sinal constante e não é identicamente zero em nenhuma sub-região, então o sistema

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases}$$

no qual  $P$  e  $Q$  são funções de classe  $C^1$ , não tem uma órbita periódica inteiramente situada na região  $R$ .

**Demonstração.** Veja a demonstração do Teorema de Dulac no Capítulo 7 de [2]. ■

### 3.3.3 Prova do Teorema 3.1.2

Aplicaremos o Lema 3.3.9 para a transformação de Poincaré  $h_1$ , tomando  $\mu = t$ , sendo que

$$h(\xi) = h_1(h_1(\xi)),$$

e

$$h_1(\xi) = r(\pi, \xi).$$

Do Lema 3.3.8, temos que  $\xi = 0$  é ponto fixo não hiperbólico de  $h_1$  para  $t = 0$ . De fato,

$$h_1(0) = r(\pi, 0) = 0$$

e

$$h_1'(0) = \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4-t^2}}\right)\Big|_{t=0} = \exp(0) = 1.$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h_1'(0)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4-t^2}}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4-t^2}}\right)\exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4-t^2}}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{-\pi\sqrt{4-t^2} + \pi t\left(-\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\right)}{|4-t^2|}\exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4-t^2}}\right)\Big|_{t=0} \\ &= -\frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \neq 0, \end{aligned}$$

e

$$h_1''(0)\Big|_{t=0} = -4b_2.$$

Logo, do Lema 3.3.9 temos, para  $b_2 \neq 0$ , que a aplicação  $h_1$  apresenta, para  $t = 0$ , uma bifurcação transcritical em  $\xi = 0$ . De (3.37) e (3.43), obtemos

$$\bar{b}_2 = \frac{b_2}{\sqrt{d}} = \frac{T-t}{\sqrt{d}}.$$

Se  $T \neq 0$  e  $t = 0$ , temos que  $\bar{b}_2 \neq 0$ . Logo, um único ciclo limite bifurca a partir da órbita periódica no infinito, para  $t < 0$  ou  $t > 0$ , o que prova o item (a).

A curva adicional de pontos fixos  $\xi = \xi(t)$  tem, na origem do plano  $t\xi$ , a inclinação

$$\frac{d\xi}{dt}(0) = -2 \frac{-\frac{\pi}{2}}{-4b_2} = -\frac{\pi}{4b_2}.$$

Os pontos fixos, com  $\xi > 0$ , correspondem às órbitas periódicas do sistema (3.1) e para  $T < 0$  e  $t > 0$ ,  $t \in (0, \varepsilon)$  com  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno, temos que  $\bar{b}_2 < 0$ . Logo,

$$\frac{d\xi}{dt}(0) > 0.$$

Pelo *Teorema da Conservação do Sinal*, existe uma vizinhança  $V_1$  de 0, na qual  $\xi = \xi(t)$  é estritamente crescente. Logo, se  $t \in (0, \varepsilon)$ , então

$$\xi(t) > \xi(0) = 0$$

e, se  $t \in (-\varepsilon, 0)$ , segue que,

$$\xi(t) < \xi(0) = 0.$$

Portanto, o ciclo limite bifurcado existe para  $t \in (0, \varepsilon)$  e não existe para  $t \in (-\varepsilon, 0)$ .

Como,  $b = -\pi/2 < 0$  e  $t > 0$  segue, dos cálculos do final da demonstração do Lema 3.3.9, que o ciclo limite bifurcado é instável, o que prova o item **(b)**.

Para  $T > 0$  e  $t < 0$ ,  $t \in (-\varepsilon, 0)$ , temos que  $\bar{b}_2 > 0$ . Logo,

$$\frac{d\xi}{dt}(0) < 0.$$

Pelo *Teorema da Conservação do Sinal*, existe uma vizinhança  $V_2$  de 0, na qual  $\xi = \xi(t)$  é estritamente decrescente. Logo, para  $t \in (0, \varepsilon)$ , temos que

$$\xi(t) < \xi(0) = 0$$

e, se  $t \in (-\varepsilon, 0)$ , então

$$\xi(t) > \xi(0) = 0.$$

Portanto, o ciclo limite bifurcado existe para  $t \in (-\varepsilon, 0)$  e não existe para  $t \in (0, \varepsilon)$ .

Como,  $b < 0$  e  $t < 0$  segue, dos cálculos do final da demonstração do Lema 3.3.9, que o ciclo limite bifurcado é estável, o que prova o item **(c)**.

Considere agora a função  $\tilde{h}_t$ , dada por  $\tilde{h}_t(\xi) = h_t(\xi) - \xi$ . Do *Teorema de Taylor*, temos que

$$\begin{aligned}\tilde{h}_t(\xi) &= h_t(0) + \frac{\partial h_t}{\partial \xi}(0)\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \xi^2}(0)\xi^2 + \mathcal{O}_{\tilde{h}_\mu}(|\xi^3|, |t|) - \xi \\ &= \left[ \frac{\partial h_t}{\partial \xi}(0) - 1 \right] \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \xi^2}(0)\xi^2 + \mathcal{O}_{\tilde{h}_\mu}(|\xi^3|, |t|) \\ &= a(t)\xi + \frac{b(t)}{2}\xi^2 + \mathcal{O}_{\tilde{h}_\mu}(|\xi^3|, |t|) \\ &= b(t)\xi \left[ \frac{a(t)}{b(t)} + \frac{\xi}{2} + \frac{\mathcal{O}_{\tilde{h}_\mu}(|\xi^3|, |t|)}{b(t)\xi} \right] \\ &= b(t)\xi L_t(\xi),\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}L_t(\xi) &= \frac{a(t)}{b(t)} + \frac{\xi}{2} + \mathcal{O}_{L_t}(|\xi^2|, |t|), \\ \mathcal{O}_{L_t}(|\xi^2|, |t|) &= \frac{\mathcal{O}_{\tilde{h}_\mu}(|\xi^3|, |t|)}{b(t)\xi}, \\ a(t) &= \frac{\partial h_t}{\partial \xi}(0) - 1, \\ b(t) &= \frac{\partial^2 h_t}{\partial \xi^2}(0).\end{aligned}$$

Defina a função

$$\begin{aligned}\phi : I = (-\delta, \delta) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \tau = \phi(t) = \frac{a(t)}{b(t)}.\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\phi'(0) &= \frac{a'(0)b(0) - a(0)b'(0)}{[b(0)]^2} \\ &= \frac{a'(0)}{b(0)} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial t} h'_t(0) \Big|_{t=0}}{h''_t(0) \Big|_{t=0}} \neq 0.\end{aligned}$$

Logo, existe um intervalo  $J \subset I$  tal que  $\phi'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in J$ . Assim, está bem definida (localmente) a inversa de  $\phi$ ,

$$\begin{aligned}\phi^{-1} : K = \phi(J) &\longrightarrow J \\ \tau &\longmapsto \phi^{-1}(\tau) = t.\end{aligned}$$

Reescrevendo a função  $L_t$ , temos

$$L_t(\xi) = \phi(t) + \frac{\xi}{2} + \mathcal{O}_{L_t}(|\xi^2|, |t|)$$

e, assim,

$$\begin{aligned} M_\tau(\xi) &:= L_{\phi^{-1}(\tau)}(\xi) \\ &= \phi(\phi^{-1}(\tau)) + \frac{\xi}{2} + \mathcal{O}_{L_t}(|\xi^2|, |\phi^{-1}(\tau)|) \\ &= \tau + \frac{\xi}{2} + \mathcal{O}_{M_\tau}(|\xi^2|, |\phi^{-1}(\tau)|), \end{aligned}$$

no qual,

$$\mathcal{O}_{M_\tau}(|\xi^2|, |\phi^{-1}(\tau)|) = \mathcal{O}_{L_t}(|\xi^2|, |\phi^{-1}(\tau)|).$$

Como  $M_\tau$  é de classe  $C^1$ ,  $M_0(0) = 0$  e

$$\frac{\partial M_0}{\partial \xi}(0) = \frac{1}{2} \neq 0,$$

segue do *Teorema da Função Implícita* que existem um aberto  $\tilde{K} \subset K$  e uma única função de classe  $C^1$ ,

$$\begin{aligned} \beta: \tilde{K} &\longrightarrow K \\ \tau &\longmapsto \beta(\tau) = \xi, \end{aligned}$$

tais que  $0 \in \tilde{K}$ ,  $\beta(0) = 0$  e  $M_\tau(\beta(\tau)) = 0$ , para todo  $\tau \in \tilde{K}$ .

Derivando implicitamente a última identidade e avaliando em  $\tau = 0$ , obtemos

$$\beta'(0) = \frac{d\beta}{d\tau}(0) = -\frac{\frac{\partial M_0}{\partial \tau}(0)}{\frac{\partial M_0}{\partial \xi}(0)} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

Assim,

$$\xi = \beta(\tau) = \beta(0) + \beta'(0)\tau + \mathcal{O}_\beta(|\tau|^2) = -2\tau + \mathcal{O}_\beta(|\tau|^2),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \xi &= \beta(\tau) = \beta(\phi(t)) \\ &= -2\phi(t) + \mathcal{O}_\beta(|\phi(t)|^2) \\ &= -2\frac{a(t)}{b(t)} + \mathcal{O}_\beta(|\phi(t)|^2) \\ &= -2\frac{h'_t(0) - 1}{h''_t(0)} + \mathcal{O}_\beta(|\phi(t)|^2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\xi = 2 \frac{1 - h'_t(0)}{h''_t(0)} + \mathcal{O}_\beta(|\phi(t)|^2). \quad (3.67)$$

Logo, para a aplicação  $h_1$ , temos pela equação (3.67) que

$$\xi(t) = 2 \frac{1 - h'_1(0)}{h''_1(0)} + \mathcal{O}_\beta(|\phi(t)|^2).$$

Pelo Lema 3.3.8, temos que

$$\begin{aligned} \xi(t) &= 2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4-t^2}}\right)}{-2h'_1(0)(b_1 t + b_2) \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4-t^2}}\right)\right]} + \mathcal{O}_\beta(|\phi(t)|^2) \\ &= -\frac{1 - \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4-t^2}}\right)}{(b_1 t + b_2) \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4-t^2}}\right) \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4-t^2}}\right)\right]} + \mathcal{O}_\beta(|\phi(t)|^2), \end{aligned}$$

isto é, sem a omissão da barra, temos

$$\xi(\bar{t}) = -\frac{1 - \exp\left(-\frac{\pi \bar{t}}{\sqrt{4-\bar{t}^2}}\right)}{(\bar{b}_1 \bar{t} + \bar{b}_2) \exp\left(-\frac{\pi \bar{t}}{\sqrt{4-\bar{t}^2}}\right) \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi \bar{t}}{\sqrt{4-\bar{t}^2}}\right)\right]} + \mathcal{O}_\beta(|\phi(\bar{t})|^2)$$

e, então, o ciclo limite bifurcado para o sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{dX}{d\tau} \\ \frac{dY}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \bar{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \varphi(Y) \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix},$$

está próximo do círculo de raio  $\bar{r} = 1/\xi(\bar{t})$ , ou seja,

$$X^2 + Y^2 = \bar{r}^2.$$

Voltando para a forma canônica observável, através das mudanças de variáveis

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 &= \frac{b_1}{d}, \quad \bar{b}_2 = \frac{b_2}{\sqrt{d}} \quad \text{e} \quad \bar{t} = \frac{t}{\sqrt{d}}, \\ \bar{b}_1 &= d - D \quad \text{e} \quad \bar{b}_2 = T - t, \\ x_1 &= \sqrt{d}X, \quad x_2 = Y \quad \text{e} \quad s = \tau/\sqrt{d}, \end{aligned}$$

temos que

$$\frac{\pi \bar{t}}{\sqrt{4 - \bar{t}^2}} = \frac{\pi \frac{t}{\sqrt{d}}}{\sqrt{4 - \left(\frac{t}{\sqrt{d}}\right)^2}} = \frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 \bar{t} + \bar{b}_2 &= \frac{b_1}{d} \frac{t}{\sqrt{d}} + \frac{b_2 d}{d \sqrt{d}} \\ &= \frac{b_1 t + b_2 d}{d \sqrt{d}}. \end{aligned}$$

Portanto, o ciclo limite bifurcado para o sistema (desconsiderando  $\mathcal{O}_\beta$ )

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \varphi(x_2) \begin{pmatrix} d - D \\ T - t \end{pmatrix},$$

está próximo da elipse dada por

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{d}}\right)^2 + (x_2)^2 = \left[\frac{1}{\xi(t)}\right]^2$$

sendo

$$\frac{1}{\xi(t)} = -\frac{(b_1 t + b_2 d) \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right) \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)\right]}{\left[1 - \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)\right] d \sqrt{d}}.$$

Note que

$$b_1 t + b_2 d = (d - D)t + (T - t)d = dt - Dt + Td - td = Td - tD$$

e, portanto,

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{d}}\right)^2 + (x_2)^2 = \left\{ -\frac{(Td - tD) \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right) \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)\right]}{\left[1 - \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)\right] d \sqrt{d}} \right\}^2 = z^2,$$

sendo

$$z = -\frac{(Td - tD) \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right) \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)\right]}{\left[1 - \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)\right] d \sqrt{d}}.$$

Assim, temos que

$$\frac{x_1^2}{(z\sqrt{d})^2} + \frac{x_2^2}{z^2} = 1,$$

é uma elipse de semieixos  $a = z\sqrt{d}$  e  $b = a/\sqrt{d}$ . Observe que

$$\begin{aligned} a &= -\frac{(Td - tD) \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right) \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)\right]}{\left[1 - \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)\right] d\sqrt{d}} \sqrt{d} \frac{\exp\left(\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)}{\exp\left(\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)} \\ &= -\left(\frac{Td - tD}{d}\right) \left[\frac{1 + \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)}{\exp\left(\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right) - 1}\right] \\ &= \left(\frac{Td - tD}{d}\right) \left[\frac{1 + \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)}{1 - \exp\left(\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)}\right]. \end{aligned}$$

Portanto, para o sistema (3.1) em sua forma canônica observável (3.3), o ciclo limite bifurcado está próximo da elipse de semieixo  $x$

$$a = \left(\frac{Td - tD}{d}\right) \left[\frac{1 + \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)}{1 - \exp\left(\frac{\pi t}{\sqrt{4d - t^2}}\right)}\right]$$

e semieixo  $y$

$$b = \frac{a}{\sqrt{d}},$$

o que prova o item **(d)**.

Se  $T = 0$  e  $t \neq 0$ , então o traço da matriz do sistema (3.44) tem sinal constante e não é identicamente zero. Logo, pelo Lema 3.3.11 (adequadamente modificado para sistemas  $C^1$  contínuos por partes, como no Lema 3.3.10), segue que nenhum ciclo limite bifurca a partir da órbita periódica no infinito, o que prova o item **(e)**.

Pelo Lema 3.3.8, se  $t \neq 0$ , então a órbita periódica no infinito é hiperbólica, já que

$$h_1'(0) = \exp\left(-\frac{\pi t}{\sqrt{4 - t^2}}\right).$$

Logo, nenhuma outra órbita periódica bifurca a partir da órbita periódica no infinito, o que prova o item **(f)**. ■

Para elucidar alguns itens do Teorema 3.1.2, apresentaremos o exemplo subsequente.

**Exemplo 3.3.1.** Escolhendo os seguintes valores para os parâmetros  $T$ ,  $t$ ,  $d$  e  $D$ ,

$$T = \frac{1}{5}, \quad t = -\frac{4}{5}, \quad d = 1 \quad \text{e} \quad D = \frac{11}{10},$$

temos, pelo item (c) do Teorema 3.1.2, que o ciclo limite bifurcado é estável. Assim, o retrato de fase local do sistema obtido a partir do sistema (3.44), mediante a transformação de Bendixson é como apresentado na figura a seguir.

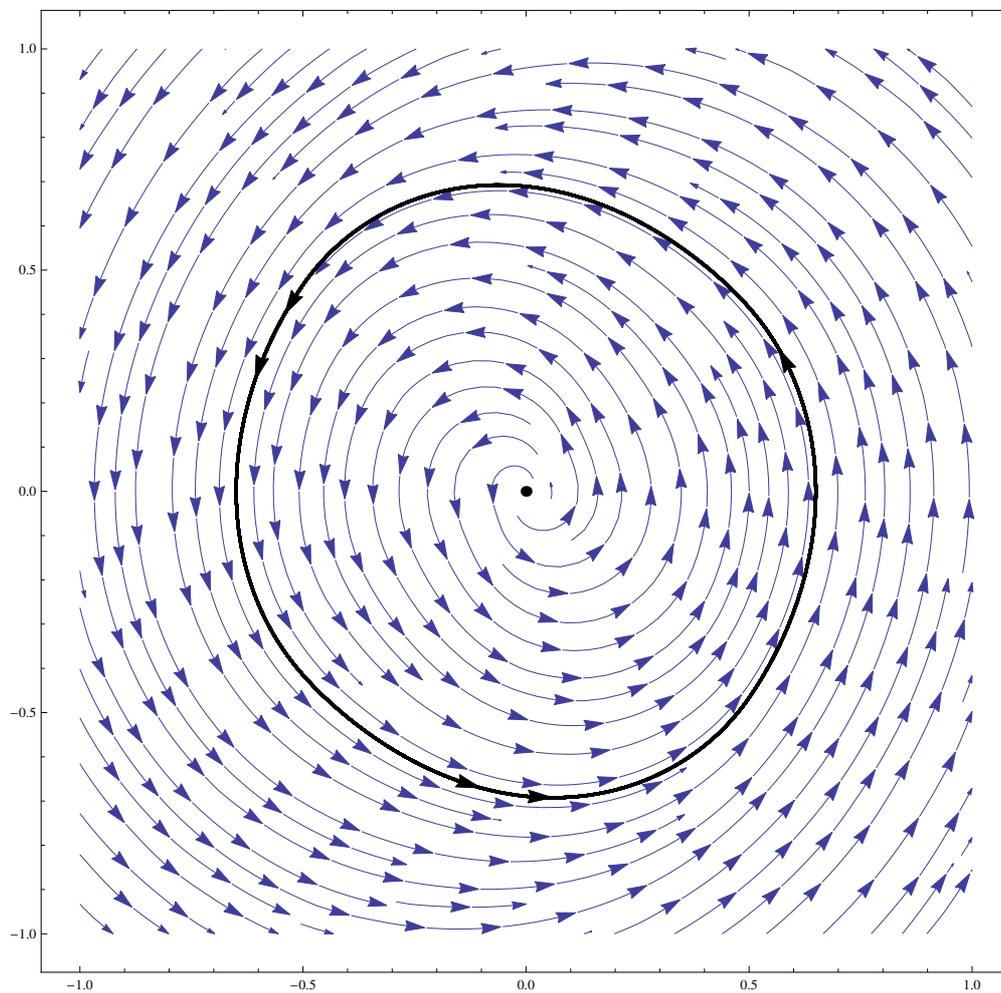


Figura 3.16: Retrato de fase local do sistema obtido a partir do sistema (3.44), mediante a transformação de Bendixson, para  $T = 1/5$ ,  $t = -4/5$ ,  $d = 1$  e  $D = 11/10$ . O ciclo limite bifurcado é estável e representado pela linha preta. A origem corresponde ao infinito via transformação de Bendixson.

Para verificar que o ciclo limite bifurcado está próximo da elipse descrita no item (d) do Teorema 3.1.2, escolhemos

$$T = \frac{1}{5}, \quad t = -\frac{1}{50}, \quad d = 1 \quad \text{e} \quad D = \frac{11}{10}.$$

Com estes parâmetros obtemos os semieixos da elipse, dados por

$$a = b = 14.5845$$

e, novamente, pelo item (c) do Teorema 3.1.2, temos que o ciclo limite bifurcado é estável. Então, o retrato de fase do sistema (3.44), assim como a elipse, é como ilustrado a seguir.

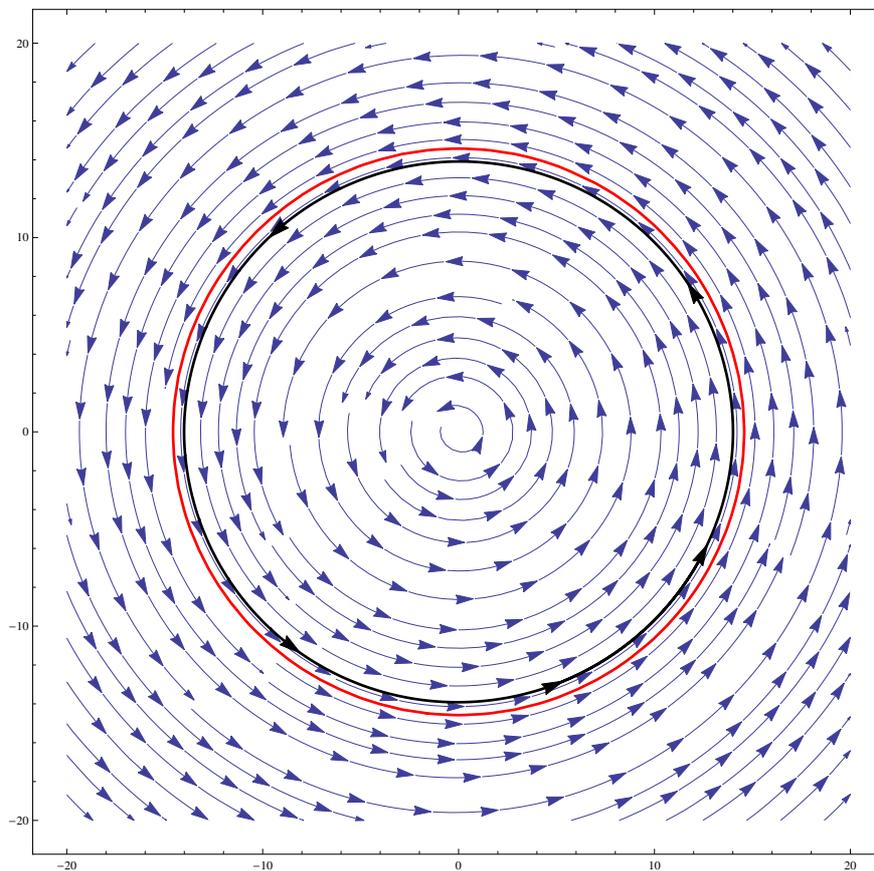


Figura 3.17: Retrato de fase local do sistema (3.44), para  $T = 1/5$ ,  $t = -1/50$ ,  $d = 1$  e  $D = 11/10$ . O ciclo limite bifurcado é estável e representado pela linha preta. A elipse, com  $a = b = 14.5845$  e representada pela linha vermelha, é a aproximação assintótica para o ciclo limite bifurcado.

# Conclusões

Nesta dissertação estudamos o aparecimento ou desaparecimento de uma órbita periódica, a partir do infinito, através de uma alteração local nas propriedades de estabilidade de um ponto de equilíbrio, isto é, um tipo de bifurcação de Hopf, a partir do infinito, em sistemas de controle bidimensionais e simétricos. Após um estudo inicial sobre teoria de controle, para compreender melhor o conceito de observabilidade de um sistema de controle linear, apresentamos uma série de resultados que culminam no Teorema 3.1.2 que responde aos questionamentos iniciais. Tal teorema fornece condições para que o sistema (3.1), tendo uma órbita periódica no infinito, não tenha nenhum ou tenha um único ciclo limite bifurcado, para a existência do ciclo limite diante de uma pequena variação do parâmetro de bifurcação, assim como sua estabilidade e por fim uma estimativa assintótica para a amplitude da órbita periódica bifurcada.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, A. G. Maier, *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*, Jerusalem, Israel Program of Scientific Translation, 1973.
- [2] F. Dumortier, J. Llibre, J.C. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, New York: Springer-Verlag, UniversiText, 2006.
- [3] J. N. Glover, *Hopf Bifurcations at Infinity*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **13** (1989), 1393–1398.
- [4] X. He, *Hopf Bifurcation at Infinity with Discontinuous Nonlinearities*, *J. Austral. Math. Soc. Ser., B* **31** (1991), 133–148.
- [5] A. C. G. Leitão, J. Baumeister, *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica*, 1ª Edição, IMPA, 2014.
- [6] E. L. Lima, *Álgebra Linear*, 8ª Edição, IMPA, 2012.
- [7] J. Llibre, E. Ponce, *Hopf Bifurcation from Infinity for Planar Control Systems*, *Publ. Mat.*, **41** (1997), 181–198.
- [8] J. Llibre, J. Sotomayor, *Phase Portrait of Planar Control Systems*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **10** (1996), 1177–1197.
- [9] N. G. Lloyd, *A Note on the Number of Limit Cycles in Certain Two-dimensional Systems*, *J. London Math. Soc.*, **20** (1979), 277–286.

- [10] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw–Hill, 1987.
- [11] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA–CNPq, 1979.
- [12] J. Zabczyk, *Mathematical Control Theory: An Introduction*, 2<sup>nd</sup> Edition, Birkhäuser, 1995.