

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA

# Princípio de Recuperação da Malha Objetivo aplicado ao Controle $\mathcal{H}_\infty$

Caio Fernandes de Paula

Itajubá, Setembro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA

Caio Fernandes de Paula

# Princípio de Recuperação da Malha Objetivo aplicado ao Controle $\mathcal{H}_\infty$

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Ciências em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Automação e Sistemas Elétricos Industriais

Orientador: Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira

Setembro de 2013

Itajubá - MG

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –  
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB\_6/1700

P324p

Paula, Caio Fernandes de

Princípio de recuperação da Malha Objetivo aplicado ao Con\_  
trole H infinito / Caio Fernandes de Paula. -- Itajubá, (MG) : [s.n.],  
2013.

116 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira.  
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Malha Objetivo. 2. Controladores H2 e H infinito. 3. Con\_  
trole LQG/LTR. 4. Controle Robusto. I. Ferreira, Luís Henrique  
de Carvalho, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA

Caio Fernandes de Paula

Princípio de Recuperação da Malha  
Objetivo aplicado ao Controle  $\mathcal{H}_\infty$

Tese aprovada por banca examinadora em 13 de Setembro de  
2013, conferindo ao autor o título de **Doutor em Ciências  
em Engenharia Elétrica**

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira – UNIFEI  
Prof. Dr. Carlos Alberto Murari Pinheiro – UNIFEI  
Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga – UNIFEI  
Prof. Dr. Jeremias Barbosa Machado – UNIFEI  
Prof. Dr. José Jaime da Cruz – Poli-USP  
Prof. Dr. Karl Heinz Kienitz – ITA

Setembro de 2013

Itajubá - MG

# *Epígrafe*

*“Faça as coisas o mais simples que puder,  
porém, não as mais simples”*

Albert Einstein

# *Dedicatória e agradecimentos*

Agradeço primeiramente a Deus, o grande engenheiro do universo.

Agradeço aos meus pais, Ataíde e Zilda, que sempre me apoiaram em todos os momentos de minha vida.

Agradeço a minhas irmãs, Liége e Gisele, e minha sobrinha Sara, pelo apoio e compreensão.

Agradeço ao meu orientador e amigo, Luís Henrique, pela confiança em mim depositada e pelos conselhos valiosos sem os quais este trabalho não teria sido realizado.

Agradeço aos membros da banca examinadora por contribuírem para a melhoria do trabalho.

Agradeço aos meus amigos Diogo, Fadul, Gabriela, Júlio, Kalife, Evandro, Ulisses e a todos meus amigos que contribuíram diretamente ou indiretamente a realização deste trabalho. Agradeço também aos colegas professores do *Campus* de Itabira da Unifei pelo incentivo.

Agradeço à Fapemig, pelo suporte financeiro ao projeto de pesquisa número APQ-03340-11 intitulado “Princípio de recuperação da malha aplicado ao controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ : um estudo de caso em um helicóptero de dois graus de liberdade”, e à CAPES, por parcialmente financiar este trabalho.

A todos, os meus mais sinceros agradecimentos.

# *Resumo*

Esta tese de doutorado apresenta uma nova abordagem para a síntese de controladores via Princípio de Recuperação da Malha Objetivo. O Princípio de Recuperação da Malha Objetivo, tal qual como classicamente é conhecido, é uma abordagem que visa recuperar as propriedades de robustez do Regulador Linear Quadrático ou do Filtro de Kalman-Bucy para a síntese de controladores LQG. A este controle foi dado o nome clássico de LQG/LTR. Para que este princípio ocorra, é necessário fazer algumas suposições acerca da planta a ser controlada e determinar especificamente alguns parâmetros de controle.

Sabe-se que o controle LQG pode ser reinterpretado como a síntese  $\mathcal{H}_2$  com ponderações constantes no domínio da frequência, e que a síntese  $\mathcal{H}_\infty$  tende à síntese  $\mathcal{H}_2$  quando o parâmetro  $\gamma$  tende ao infinito. A linha geral que norteia este trabalho é pesquisar se o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo pode ser aplicado à síntese  $\mathcal{H}_\infty$  com sucesso de maneira similar à síntese  $\mathcal{H}_2$ /LQG, e se novas propriedades de controle surgem desta nova perspectiva. Busca-se então neste trabalho comprovar que a tese é verdadeira e que de fato novas propriedades de controle são atingidas para abordagem proposta para a síntese de controladores  $\mathcal{H}_\infty$ . Além disso, outro objetivo é estabelecer um paralelo, sempre que conveniente e necessário, para demonstrar que a metodologia  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR, nome este dado à metodologia desenvolvida nesta tese, pode ser compreendida como uma generalização do já clássico e tão conhecido controle LQG/LTR.

Para a comprovar a efetividade e a validação da tese proposta, dois exemplos de aplicação são considerados para concluir o trabalho. Um dos exemplos lida com o controle da dinâmica longitudinal linearizada de um caça F8 e o outro com o controle de arfagem e guinada de um helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida. O primeiro exemplo de aplicação é focado em mostrar numericamente a eficácia da tese proposta e o segundo mostra também resultados experimentais em um protótipo desenvolvido pela empresa canadense QUANSER.

**Palavras-Chave:** Princípio de Recuperação da Malha Objetivo, Controladores  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , Controle LQG/LTR, Controle Robusto, Formatação da Malha Objetivo.

# *Abstract*

This doctorate thesis presents a new approach on the Loop Transfer Recovery controller design. Loop Transfer Recovery, as classically known, is an approach which aims to recover the robustness properties of the Linear Quadratic Regulator or the Kalman-Bucy Filter for the LQG controller synthesis. This control methodology was classically named LQG/LTR. In order to make this approach happen, it is necessary to make some assumptions on the controlled plant and specifically assign some of the design parameters.

It is known that the LQG control can be reinterpreted as the  $\mathcal{H}_2$  synthesis with constant frequency weighting functions, and that the  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis will tend to the  $\mathcal{H}_2$  synthesis as the  $\gamma$  parameter tends to infinity. The overall guideline to this work is to study if the Loop Transfer recovery can be successfully applied to  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis in a similar way to the  $\mathcal{H}_2$ /LQG synthesis, and if new design properties can be achieved within this new framework. The aim of this work is then to prove that the proposed thesis is true and in fact new design properties can be achieved with the proposed approach on  $\mathcal{H}_\infty$  controller synthesis. Moreover, another goal is to establish a link, wherever convenient and necessary, to show that the  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR control, the name given to the proposed methodology on this thesis, can be viewed as a generalization of the already known and classic LQG/LTR control.

In order to prove the effectiveness and to validate the proposed thesis, two design examples will be considered to conclude the work. One of the examples is concerned with the linearized attitude control of a F8 fighter aircraft and the other example is about the pitch and yaw control of a two degree-of-freedom reduced scale helicopter. The first design example is focused on numerically showing the effectiveness of the proposed thesis and the second one shows experimental results obtained from a prototype designed by Canadian manufacturer QUANSER.

**Keywords:** Loop Transfer Recovery,  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Controllers, LQG/LTR Control, Robust Control, Loop Shaping Design.

# *Sumário*

**Lista de Figuras**

**Lista de Siglas e Abreviaturas**

**Lista de Símbolos**

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 16
1.1	Considerações Gerais . . . . .	p. 16
1.2	Justificativas . . . . .	p. 17
1.3	Objetivos . . . . .	p. 19
1.4	Estrutura do Trabalho . . . . .	p. 20
1.5	Notação . . . . .	p. 20
<b>2</b>	<b>Projeto de Controladores para Sistemas Multivariáveis</b>	p. 22
2.1	Fundamentos de Controle Multivariável . . . . .	p. 22
2.1.1	Estabilidade, Desempenho e Robustez . . . . .	p. 22
2.1.2	Quantificando Magnitudes em Sistemas Multivariáveis . . . . .	p. 26
2.1.3	Loop Shaping e Sensibilidade Mista . . . . .	p. 27
2.2	O Modelo da Planta em Variáveis de Estado . . . . .	p. 29
2.3	Controle LQG/LTR . . . . .	p. 31
2.4	Controle $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	p. 34
2.5	Funções de Custo e Controle $\mathcal{H}_\infty$ de Mínima Entropia . . . . .	p. 43
<b>3</b>	<b>Princípio de Recuperação da Malha Objetivo para a Síntese <math>\mathcal{H}_\infty</math></b>	p. 46

3.1	O Problema de Jogo Linear Quadrático . . . . .	p. 46
3.2	O Comportamento Assintótico dos Reguladores e Observadores baseados na Síntese $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	p. 48
3.3	Procedimento de Recuperação da Malha Objetivo . . . . .	p. 56
3.4	Relações entre o Comportamento Assintótico com as Funções de Custo .	p. 63
<b>4</b>	<b><math>\mathcal{H}_\infty</math>/LTR <i>Loop Shaping</i></b>	p. 67
4.1	Identidade de Kalman Generalizada para a Síntese $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	p. 67
4.2	Propriedades de <i>Loop Shaping</i> para o Controle $\mathcal{H}_\infty$ /LTR pela Saída . . .	p. 74
4.3	Propriedades de <i>Loop Shaping</i> para o Controle $\mathcal{H}_\infty$ /LTR pela Entrada .	p. 78
4.4	Formalização das Etapas do Procedimento . . . . .	p. 81
<b>5</b>	<b>Exemplos de Aplicação</b>	p. 84
5.1	Controle da Dinâmica Longitudinal de um Caça F8 . . . . .	p. 84
5.1.1	Modelo da Planta . . . . .	p. 84
5.1.2	Definição da Malha Objetivo . . . . .	p. 87
5.1.3	Recuperação da Malha Objetivo . . . . .	p. 89
5.1.4	O Efeito do Parâmetro $\gamma$ . . . . .	p. 92
5.2	Controle de Arfagem e Guinada em um Modelo Didático de Helicóptero 2 DOF . . . . .	p. 93
5.2.1	Modelo da Planta . . . . .	p. 93
5.2.2	Projeto do Compensador e Resultados de Simulação . . . . .	p. 97
5.2.3	Resultados Experimentais . . . . .	p. 104
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	p. 111
	<b>Referências</b>	p. 112
	<b>Apêndice A – Lema da Matriz Inversa</b>	p. 115



# *Lista de Figuras*

1	Diagrama de blocos convencional de um sistema de controle. . . . .	p. 22
2	Diagrama de blocos geral da malha de controle. . . . .	p. 35
3	Diagrama de valores singulares do caça F8 em malha aberta. . . . .	p. 85
4	Resposta ao degrau unitário aplicado na deflexão perturbada do profundor do caça F8 em malha aberta. . . . .	p. 86
5	Resposta ao degrau unitário aplicado na deflexão perturbada do <i>flapperon</i> do caça F8 em malha aberta. . . . .	p. 86
6	Restrições de <i>loop shaping</i> para a sensibilidade da malha objetivo para o caça F8. . . . .	p. 88
7	Restrições de <i>loop shaping</i> para o rastreamento da malha objetivo para o caça F8. . . . .	p. 88
8	Resposta ao degrau em ambas as entradas de referência da malha objetivo para o caça F8. . . . .	p. 89
9	Resposta ao degrau em ambas as entradas de referência para a malha de controle com parâmetro $\rho = 1$ e para a malha objetivo do caça F8. . . . .	p. 90
10	Resposta ao degrau em ambas as entradas de referência para a malha de controle com parâmetro $\rho = 0, 1$ e para a malha objetivo do caça F8. . . . .	p. 90
11	Resposta ao degrau em ambas as entradas de referência para a malha de controle com parâmetro $\rho = 0, 01$ e para a malha objetivo do caça F8. . . . .	p. 91
12	Diagrama de valores singulares para a sensibilidade da malha de controle do caça F8. . . . .	p. 92
13	Diagrama de valores singulares para o rastreamento da malha de controle do caça F8. . . . .	p. 92
14	Resposta ao degrau nas entradas de referência $R_1$ e $R_2$ para diferentes parâmetros $\gamma$ da malha de controle do caça F8. . . . .	p. 93

15	Helicóptero de dois graus de liberdade. . . . .	p. 94
16	Diagrama de valores singulares do modelo linearizado do helicóptero 2 DOF em malha aberta. . . . .	p. 95
17	Resposta ao degrau unitário aplicado no motor principal do helicóptero 2 DOF em malha aberta. . . . .	p. 96
18	Resposta ao degrau unitário aplicado no motor de cauda do helicóptero 2 DOF em malha aberta. . . . .	p. 96
19	Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência $R_1$ e $R_2$ da malha objetivo para $\gamma \rightarrow \infty$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 98
20	Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência $R_1$ e $R_2$ da malha objetivo para $\gamma = 6$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 98
21	Diagrama de valores singulares da sensibilidade da malha de controle para $\gamma \rightarrow \infty$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 99
22	Diagrama de valores singulares da sensibilidade da malha de controle para $\gamma = 6$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 99
23	Diagrama de valores singulares da sensibilidade da malha objetivo ( $\rho \rightarrow$ $0^+$ ) para $\gamma \rightarrow \infty$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 100
24	Diagrama de valores singulares da sensibilidade da malha objetivo ( $\rho \rightarrow$ $0^+$ ) para $\gamma = 6$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 100
25	Diagrama de valores singulares do rastreamento da malha de controle para $\gamma \rightarrow \infty$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 101
26	Diagrama de valores singulares do rastreamento da malha de controle para $\gamma = 6$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 101
27	Resposta ao degrau unitário na entrada de referência para o ângulo de arfagem da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 102
28	Resposta ao degrau unitário na entrada de referência para o ângulo de arfagem da malha de controle com $\gamma = 6$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 102
29	Resposta ao degrau unitário na entrada de referência para o ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 103

30	Resposta ao degrau unitário na entrada de referência para o ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma = 6$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 103
31	Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 104
32	Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência da malha de controle com $\gamma = 6$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 104
33	Resposta do ângulo de arfagem ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 105
34	Resposta do ângulo de arfagem ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma = 6$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 105
35	Resposta do ângulo de guinada ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 106
36	Resposta do ângulo de guinada ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma = 6$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 106
37	Tensão no motor principal para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 107
38	Tensão no motor principal para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma = 6$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 107
39	Tensão no motor de cauda para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 108
40	Tensão no motor de cauda para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma = 6$ do helicóptero 2 DOF. . . . .	p. 108
41	Resposta do ângulo de arfagem do helicóptero 2 DOF quando nenhum distúrbio é aplicado. . . . .	p. 109
42	Resposta do ângulo de guinada do helicóptero 2 DOF quando nenhum distúrbio é aplicado. . . . .	p. 109
43	Tensão no motor principal do helicóptero 2 DOF quando nenhum distúrbio é aplicado. . . . .	p. 110
44	Tensão no motor de cauda do helicóptero 2 DOF quando nenhum distúrbio é aplicado. . . . .	p. 110

# *Lista de Siglas e Abreviaturas*

BIBO	<i>Bounded Input Bounded Output</i>
DOF	<i>Degree of Freedom</i>
EAR	Equação Algébrica de Riccati
EARG	Equação Algébrica de Riccati Generalizada
FKB	Filtro de Kalman-Bucy
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
IKG	Identidade de Kalman Generalizada
LFT	<i>Linear Fractional Transformation</i>
LITDF	Linear, Invariante no Tempo e de Dimensão Finita
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
LTR	<i>Loop Transfer Recovery</i>
MIMO	<i>Multi Input Multi Output</i>
PRMO	Princípio de Recuperação da Malha Objetivo
SISO	<i>Single Input Single Output</i>
SPD	Semiplano Direito
SPE	Semiplano Esquerdo

# *Lista de Símbolos*

$\triangleq$	Definição
$s$	Variável de Laplace
$t$	Sinal de tempo
$\stackrel{s}{=}$	Conversão da representação de um modelo em variáveis de estado para função (matriz) de transferência
$(A, B, C, D)$	Matrizes de estado da representação de um sistema dinâmico em variáveis de estado
$:=$	Sistema dinâmico representado através de variáveis de estado
$T$	Matriz transposta
$*$	Matriz complexo-conjugada transposta
$i$	$i$ -ésimo elemento (para vetores) ou $i$ -ésima linha (para matrizes)
$j$	$j$ -ésima linha
sup	Supremo (que quando existe é a menor cota superior)
max	Máximo
min	Mínimo
dim	Dimensão de uma matriz ou vetor
tr	Traço de uma matriz
posto	Posto de uma matriz
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais excluindo-se o elemento 0
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais e positivos (excluindo o zero)
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{C}^+$	Conjunto dos números complexos com parte real não-negativa
$ \cdot $	Módulo
$\ \cdot\ $	Norma
$\gg$	Muito maior
$\ll$	Muito menor

$> 0$	Positiva definida
$\geq 0$	Positiva semidefinida
$< 0$	Negativa definida
$\leq 0$	Negativa semidefinida
$I$	Matriz identidade
$G$	Planta de processo (planta a ser controlada)
$K$	Controlador
$r$	Vetor de entradas de referência
$e$	Vetor de erros de rastreamento
$u$	Vetor de entradas da planta (entradas de comando)
$y$	Vetor de saídas da planta (saídas a serem controladas)
$d_u$	Vetor de distúrbios refletidos nas entradas da planta
$d_y$	Vetor de distúrbios refletidos nas saídas da planta
$n$	Vetor de ruídos de medição
$L_O$	Função (matriz de transferência) da malha aberta vista na saída da planta
$L_I$	Função (matriz de transferência) da malha aberta vista na entrada da planta
$S_O$	Função (matriz de transferência) de sensibilidade na saída
$S_I$	Função (matriz de transferência) de sensibilidade na entrada
$T_O$	Função (matriz de transferência) de rastreamento na saída
$T_I$	Função (matriz de transferência) de rastreamento na entrada
$\lambda_i[\cdot]$	$i$ -ésimo autovalor de uma matriz
$\sigma_i[\cdot]$	$i$ -ésimo valor singular de uma matriz
$W_P(s)$	Função de ponderação sobre a sensibilidade
$x$	Vetor de estados de um sistema dinâmico
$w_x$	Vetor de perturbações refletidas nos estados
$w_y$	Vetor de perturbações refletidas nos estados
$z_x$	Vetor de saídas auxiliares relacionadas aos estados do sistema
$z_u$	Vetor de saídas auxiliares relacionadas às entradas da planta
$P$	Planta generalizada específica
$L$ e $H$	Matrizes da representação em variáveis de estado da planta generalizada específica
$\rho$ e $\mu$	Escalares da representação em variáveis de estado da planta generalizada específica
$\gamma$	Valor da norma $\mathcal{H}_\infty$

$K_C$	Matriz de ganhos do regulador de estados
$K_F$	Matriz de ganhos do observador de estados
$X$	Solução da Equação Algébrica de Riccati associada ao regulador de estados
$Y$	Solução da Equação Algébrica de Riccati associada ao observador de estados
$Z$	Matriz auxiliar da síntese $\mathcal{H}_\infty$
$\Phi(s)$	Matriz auxiliar da representação em matriz de transferência
lim	Limite
$\rightarrow$	Tende a
$T_{zw}$	Matriz de malha fechada que relaciona a saída $z$ à entrada $w$
$F_l$	Transformação linear fracional inferior
$T$	Matriz de transformação linear
$J_\infty$	Custo $\mathcal{H}_\infty$
$J_2$	Custo $\mathcal{H}_2$
$s_0$	Entropia
$A_{CL}$	Matriz de sistema da malha fechada
$\hat{\theta}$	Perturbação no ângulo de arfagem para o caça F8 e para o helicóptero 2 DOF
$\hat{q}$	Perturbação na taxa de variação do ângulo de arfagem para o caça F8
$\hat{u}$	Perturbação na velocidade horizontal para o caça F8
$\hat{\alpha}$	Perturbação no ângulo de ataque para o caça F8
$\hat{\delta}_e$	Perturbação na deflexão do ângulo do profundor para o caça F8
$\hat{\delta}_f$	Perturbação na deflexão do ângulo do <i>flapperon</i> para o caça F8
$\hat{\gamma}_p$	Perturbação no ângulo de trajetória de voo para o caça F8
$\hat{\psi}$	Perturbação no ângulo de guinada para o helicóptero 2 DOF
$\hat{u}_p$	Perturbação na tensão do motor principal para o helicóptero 2 DOF
$\hat{u}_c$	Perturbação na tensão do motor de cauda para o helicóptero 2 DOF

# 1 *Introdução*

## 1.1 Considerações Gerais

Em 1987, Stein e Athans [1] consagraram o controle LQG/LTR (*Linear Quadratic Gaussian - Loop Transfer Recovery*) enfatizando que os engenheiros de controle necessitam de procedimentos sistemáticos de projeto de controladores para atender a requisitos de desempenho de sistemas de controle cada vez mais exigentes. Uma vez estabelecidos na forma de um procedimento sistemático, tais técnicas de engenharia, como o controle LQG/LTR, se tornam metodologias rigorosas capazes de serem aplicadas com facilidade a sistemas cada vez mais complexos.

Uma das grandes vertentes na teoria de controle e que atrai muitos pesquisadores é o chamado *controle robusto*. Em termos gerais, o controle robusto considera que há uma diferença entre o modelo matemático da planta (processo a ser controlado) - conhecido como *modelo nominal* - e o modelo matemático real da planta. Logo, requisitos de estabilidade e desempenho do sistema de controle devem ser mantidos em face às *incertezas* no modelo da planta [2].

O controle ótimo LQG, que é a combinação de um controle por realimentação de estados conhecido como LQR (*Linear Quadratic Regulator*) e um observador de estados conhecido como Filtro de Kalman-Bucy, foi amplamente estudado na década de 60 e possibilitou grandes avanços tecnológicos principalmente no setor aeroespacial. Entretanto, o controle LQG mostrou-se ineficiente quando analisado sob o viés do controle robusto. Tal afirmação a princípio parece incoerente, devido ao fato de que tanto o LQR quanto o Filtro de Kalman-Bucy apresentam boas propriedades de robustez isoladamente [2].

Dentre uma série de fatores que podem ser utilizados para explicar este fato, o que mais se aproxima em justificar tal incoerência é que as suposições acerca das ponderações são frequentemente irrealistas do ponto de vista de controle robusto, embora sejam bastante adequadas sob o ponto de vista de controle ótimo (estocástico). Em 1981, Doyle e Stein

[3], baseados nos resultados de Kwakernaak e Sivan [4], propuseram um procedimento para recuperar a robustez do controlador LQG, em uma metodologia que ficou conhecida como *Loop Transfer Recovery*, ou Princípio de Recuperação da Malha Objetivo [3]. Este artigo e a edição do periódico no qual ele foi publicado, o *IEEE Transactions on Automatic Control* Volume 36 Número 1, também ficaram conhecidos como um dos marcos da teoria de controle robusto.

Desde então, novas abordagens para o controle robusto começaram a ser desenvolvidas. Uma delas é a otimização de normas, e o influente trabalho de Zames [5] na otimização  $\mathcal{H}_\infty$  originou uma mudança significativa nesta direção. Ainda em 1981, Safonov et. al. [6] apresentaram uma reinterpretação do controle LQG, mostrando que este nada mais é do que um caso específico da otimização  $\mathcal{H}_2$ .

Conforme a teoria da otimização  $\mathcal{H}_\infty$  se desenvolvia, as abordagens  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  foram vistas mais relacionadas do que se imaginava. Em 1989, Doyle et. al. [7] apresentaram as soluções de controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  no espaço de estados e constataram que ambas as soluções possuíam uma correlação de modo que, quando o parâmetro  $\gamma$  (norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de malha fechada), a solução do controle  $\mathcal{H}_\infty$  central tende à solução do controle  $\mathcal{H}_2$ .

Sendo assim, pode-se enunciar o raciocínio que motivou este trabalho:

*Se o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo é possível de ser aplicado ao controle LQG, que é uma reinterpretação do controle  $\mathcal{H}_2$ , será que este princípio também ocorre de maneira similar para o controle  $\mathcal{H}_\infty$ ? E, caso afirmativo, quais novas propriedades decorrentes desta generalização surgem e que não podem ser obtidas pelo controle LQG/LTR?*

## 1.2 Justificativas

O Princípio de Recuperação da Malha Objetivo é uma metodologia sistemática que tem sido utilizada e pesquisada desde sua proposição original por Doyle e Stein [3] e consagração por Stein e Athans [1]. Suas principais vantagens consistem, mas não estão limitadas, em:

- Formatação a critério do projetista: a metodologia fornece um procedimento formal para formatar (verbo este que deve ser entendido, no contexto deste trabalho, no sentido de “dar forma”) a função de sensibilidade da malha objetivo (malha de

controle que possui o desempenho desejado). Esta é uma propriedade desejável do ponto de vista de formatação da malha (*loop shaping*).

- Simplicidade do controlador: a ordem do controlador será igual ao número de estados da representação em variáveis de estado do sistema a ser controlado.
- Simplicidade do projeto: a essência do projeto do compensador - se existir para os parâmetros desejados - envolve a solução de duas equações algébricas matriciais, sendo que diversos pacotes computacionais, como por exemplo o MATLAB<sup>®</sup> [8], possuem rotinas que resolvem tais equações. Também ressalta-se a quantidade reduzida de parâmetros envolvidos na sintonia do controlador.

No entanto, entre as principais desvantagens do Princípio de Recuperação da Malha Objetivo estão o fato de sua proposição original não contemplar plantas subatuadas ou de fase não-mínima, falta de um procedimento com parâmetro livre para formatar também o rastreamento e a possibilidade dos ganhos encontrados serem muito altos (fisicamente não implementáveis).

Em relação ao problema de fase não-mínima, diversas metodologias foram sendo propostas ao longo dos anos para contornar o problema do efeito de zeros de transmissão no SPD (Semiplano à Direita) em relação ao procedimento LTR. Em [9], os autores desenvolvem um procedimento para recuperar as propriedades da realimentação de uma classe de controladores por realimentação de estados os quais realimentam apenas os “estados de fase-mínima” de uma planta fatorada através de um modelo “de fase-mínima passa tudo” (*all pass minimum phase*). Já Stein e Athans [1] propõem diversas abordagens para estes problemas, entre os quais está a incorporação dos efeitos dos zeros de transmissão no SPD como uma restrição na otimização  $\mathcal{H}_2$ . Em [10], é constatado, sem prova, que o procedimento LTR é aplicável a sistemas de fase não-mínima quando seus zeros de transmissão no SPD estão fora da banda passante da malha recuperada. Em [11] é sugerido que é possível obter recuperação da malha em direções ortogonais aos dos zeros de transmissão no SPD. Finalmente em [12] um procedimento sistemático de recuperação da malha objetivo é apresentado, o qual consiste em fatorar o modelo da planta em uma parte de fase-mínima com um fator “passa tudo” (*all pass*) estável que contém os zeros de transmissão no SPD.

Já em relação aos ganhos elevados, metodologias baseadas na minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do erro entre a malha real recuperada e a malha objetivo de alguma função - de malha aberta ou fechada - como sensibilidade ou rastreamento, por exemplo, são empregadas

[13, 14, 15, 16].

Por outro lado, trabalhos que envolvem a aplicação do Princípio de Recuperação da Malha Objetivo que permitem formatar a função de rastreamento no *loop shaping* da malha objetivo com um parâmetro livre de projeto ainda não foram explorados na literatura, e portanto este trabalho apresenta uma contribuição importante e nova nesta área.

Ainda recentemente o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo vem recebendo atenção de pesquisadores. Como exemplo, cita-se o trabalho de Pereira [17], onde duas estruturas de controladores robustos utilizando o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo são investigados. Neste trabalho também pode ser encontrada uma descrição e revisão bibliográfica de trabalhos que utilizam o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo. Também recentemente trabalhos que utilizam o controle LQG/LTR em aplicações práticas foram desenvolvidos. Cita-se como exemplos os trabalhos de Zarei et. al. [18], Jaimoukha et. al. [19], Kulcsár [20] e Suh et. al. [21].

Existe também, fora do escopo de metodologias que utilizam o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo, uma metodologia de formatação da malha baseada numa otimização  $\mathcal{H}_\infty$  bastante conhecido e popular [22].

## 1.3 Objetivos

O que se busca neste trabalho é comprovar a tese principal de que o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo ocorre para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$  de maneira similar à síntese LQG/ $\mathcal{H}_2$ . Para isto, busca-se provar que a solução da Equação Algébrica de Riccati Generalizada (para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$ ) para o regulador de estados também tende a uma matriz nula (assim como na síntese LQG/ $\mathcal{H}_2$ , a qual pode ser encontrada em [4]) quando o parâmetro de projeto  $\rho$  tende a zero pela direita. De forma dual, prova-se que a solução da Equação Algébrica de Riccati Generalizada para o observador de estados também tende a uma matriz nula (assim como na síntese LQG/ $\mathcal{H}_2$ , a qual pode ser encontrada em [3]) quando o parâmetro de projeto  $\mu$  tende a zero pela direita.

Provando-se a tese principal, outro objetivo é investigar se o fato da malha objetivo para síntese  $\mathcal{H}_\infty$  ser possível de ser recuperada pode traduzir em novas propriedades de formatação da malha no domínio da frequência em termos de sensibilidade mista (sensibilidade e rastreamento).

De forma a comprovar a eficácia e os benefícios da tese proposta, são elaborados dois exemplos de aplicação, sendo um deles um problema de controle do tipo servomecanismo cujo objetivo é rastrear sinais de entrada do modelo longitudinal de uma aeronave F8, e o outro é um problema de controle do tipo regulador cujo objetivo é rejeitar eventuais distúrbios do modelo em escala reduzida de um helicóptero de dois graus de liberdade, sendo este último apresentado também resultados experimentais em um modelo de escala reduzida fabricado pela QUANSER [23].

## 1.4 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta aspectos do projeto de controladores para sistemas multivariáveis, abordando uma breve revisão de fundamentos de controle multivariável, a formulação do modelo em variáveis de estado da planta que será abordada neste trabalho, uma breve revisão da metodologia LQG/LTR e as soluções de controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  aplicados à planta específica deste trabalho.

Os Capítulos 3 e 4 apresentam o cerne do desenvolvimento do trabalho realizado nesta tese de doutorado, sendo o Capítulo 3 responsável por apresentar a formulação matemática do Princípio de Recuperação da Malha Objetivo aplicado ao controle  $\mathcal{H}_\infty$ , englobando o comportamento assintótico de reguladores e observadores baseados na síntese  $\mathcal{H}_\infty$ , o detalhamento do procedimento de recuperação da malha objetivo e as relações do comportamento assintótico com as funções de custo. Já o Capítulo 4 trata então de como formalizar a metodologia  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR, apresentando a Identidade de Kalman Generalizada e as propriedades de formatação da malha que a metodologia oferece.

O Capítulo 5 traz dois exemplos de aplicação da metodologia proposta, sendo um o controle da dinâmica longitudinal de um caça F8 e o segundo o controle de arfagem e guinada de um modelo em escala reduzida de um helicóptero de 2 graus de liberdade, sendo este último apresentado com ensaios experimentais.

Por fim, a conclusão revisa principais contribuições deste trabalho e traz as propostas de trabalhos futuros que envolvem a continuidade deste trabalho.

## 1.5 Notação

Buscou-se neste trabalho empregar a notação padrão utilizada em grande parte da literatura de controle e das referências utilizadas. Letras minúsculas, como  $u$  e  $y$ , são

utilizadas para denotar sinais (vetoriais ou escalares) e letras maiúsculas, como  $G$  e  $K$ , são utilizadas para denotar sistemas (matriciais ou escalares). Para sistemas representados através de variáveis de estado, utiliza-se a notação padrão  $(A, B, C, D)$  para as matrizes de estado com letras maiúsculas.

O símbolo  $\triangleq$  significa definição e o símbolo  $\stackrel{s}{\equiv}$  significa que o modelo representado através de variáveis de estado (no domínio do tempo) foi convertido para uma representação em matriz de transferência (no domínio de Laplace). O símbolo  $:=$  significa que o sistema dinâmico está representado em variáveis de estado da seguinte forma usual

$$G := \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \stackrel{s}{\equiv} C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (1.1)$$

O sobrescrito  $T$  denota matriz transposta e o sobrescrito  $*$  denota matriz complexo-conjugada transposta. Os subscritos como  $_i$  denotam o  $i$ -ésimo elemento de um vetor ou  $i$ -ésima linha de uma matriz (em conjunto com o subscrito  $_j$ , que denota a  $j$ -ésima coluna da matriz). A notação  $\sup$  denota supremo (que quando existe é a menor cota superior),  $\max$  denota máximo e  $\min$  denota mínimo. A notação  $\dim$  denota a dimensão de um vetor ou matriz e a notação  $\text{tr}$  denota o traço de uma matriz.

O símbolo  $\mathbb{N}^*$  denota o conjunto dos números naturais excluindo-se o elemento 0, o símbolo  $\mathbb{R}$  denota o conjunto dos números reais, o símbolo  $\mathbb{R}^+$  denota o conjunto dos números reais positivos (excluindo o zero), o símbolo  $\mathbb{C}$  denota o conjunto dos números complexos e  $\mathbb{C}^+$  denota o conjunto dos números complexos cuja parte real não é negativa (SPD do plano complexo incluindo o eixo imaginário). O símbolo  $\in$  denota “pertence”. O símbolo  $|\cdot|$  denota módulo e  $\|\cdot\|$  denota norma.

O símbolo  $\gg$  denota muito maior e o símbolo  $\ll$  denota muito menor. Os sinais de desigualdade quando acompanhados de matrizes indicam a definição da matriz no contexto de álgebra linear. A notação  $> 0$  denota positiva definida, a notação  $\geq 0$  significa positiva semidefinida, a notação  $< 0$  significa negativa definida e a notação  $\leq 0$  significa negativa semidefinida.

De maneira geral, a dependência das variáveis no tempo será omitida por clareza tipográfica.

## 2 Projeto de Controladores para Sistemas Multivariáveis

### 2.1 Fundamentos de Controle Multivariável

Esta seção é dedicada a fazer uma breve revisão sobre a estrutura básica de um sistema de controle multivariável em realimentação negativa. Será dado um enfoque na abordagem clássica do domínio da frequência, uma vez que as propriedades de *loop shaping* são muito mais claras vistas por esta perspectiva. Maiores detalhes são encontrados em [2].

#### 2.1.1 Estabilidade, Desempenho e Robustez

Considere o diagrama de blocos de uma malha de controle com realimentação negativa e unitária, representado pela Figura 1.

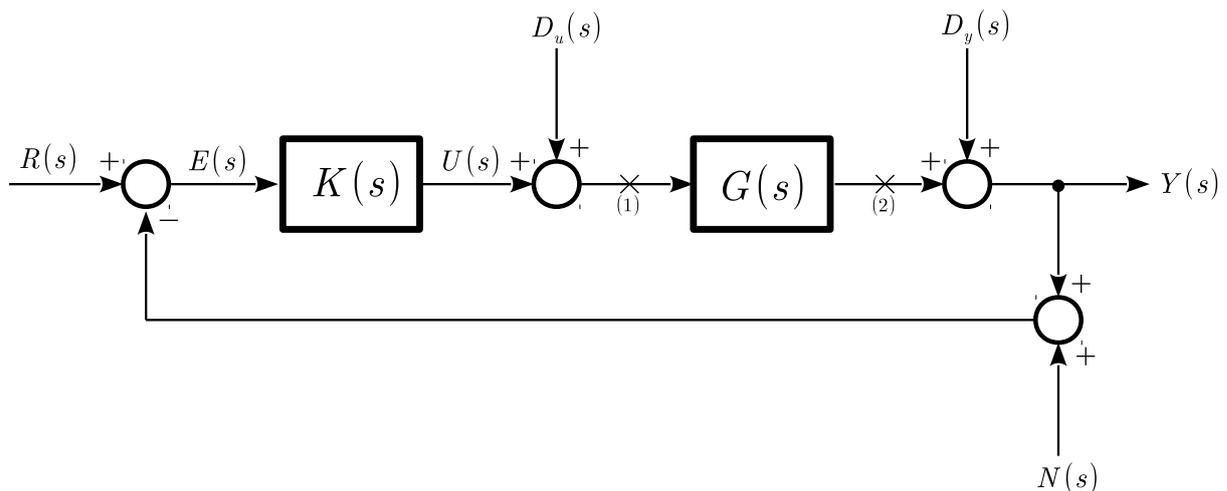


Figura 1: Diagrama de blocos convencional de um sistema de controle.

Os sinais e sistemas presentes na Figura 1, tomados no domínio de Laplace, são os seguintes:

- $G(s) \in \mathbb{C}^{m \times m}$  representa a matriz de transferência (matriz de funções de transferência) da planta a ser controlada. Neste trabalho assume-se que a planta é linear, invariante no tempo e de dimensão finita (no caso, a planta possui dimensão  $m$ , onde  $m \in \mathbb{N}^*$ );
- $K(s) \in \mathbb{C}^{m \times m}$  é a matriz de transferência do controlador (ou compensador) também LITDF com dimensão  $m$ ;
- $R(s) \in \mathbb{C}^m$  representa o vetor de entradas de referência;
- $E(s) \in \mathbb{C}^m$  é o vetor de erros de rastreamento;
- $U(s) \in \mathbb{C}^m$  representa o vetor de entradas da planta (entradas de comando);
- $Y(s) \in \mathbb{C}^m$  é o vetor de saídas da planta (saídas a serem controladas);
- $D_u(s) \in \mathbb{C}^m$  representa o vetor de distúrbios refletidos nas entradas da planta;
- $D_y(s) \in \mathbb{C}^m$  é o vetor de distúrbios refletidos nas saídas da planta;
- $N(s) \in \mathbb{C}^m$  é o vetor de ruídos de medição.

Nas definições anteriores, assumiu-se que a planta é multivariável de múltiplas entradas e múltiplas saídas. Assumiu-se também que a planta é quadrada, ou seja, possui o mesmo número  $m$  de entradas e saídas. Esta suposição, conforme será visto adiante, será necessária e simplifica o desenvolvimento da metodologia. Caso a planta seja monovariável, as matrizes e vetores anteriormente descritos dimensionalmente tornam-se escalares. Neste texto será assumido, exceto quando explicitamente indicado o contrário, que a planta é MIMO.

Também assume-se que o vetor de erro é dado pela diferença entre o vetor de entradas de referência e o vetor de saídas medidas, embora outras definições consideram que o erro deva ser definido como a diferença entre o vetor de entradas de referência e vetor de saídas da planta (sem considerar o ruído de medição ou eventuais dinâmicas do sensor) [2].

No projeto de um sistema de controle a etapa que consiste no projeto de um controlador  $K$  é feita de forma que o sistema em si possua os seguintes requisitos básicos:

- *Estabilidade*: isto equivale dizer que as saídas da planta  $y$  devam permanecer limitadas em magnitude para todas as entradas de referência  $r$  limitadas em magnitude, todos os distúrbios  $d$  (na entrada ou saída) limitados em magnitude e todos os ruídos

de medição  $n$  limitados em magnitude (conceito de estabilidade BIBO). Em outras palavras, as saídas não podem ir para o infinito se alguma perturbação não infinita incidir sobre o sistema. Um conceito mais amplo de estabilidade, conhecido como *estabilidade interna*, requer que, além da saída, outras variáveis internas, como o sinal gerado pelo controlador e o erro, devam ser levadas em consideração. Neste trabalho o conceito estabilidade deve ser entendido então como estabilidade interna;

- *Desempenho*: os erros de rastreamento  $e$  devem permanecer pequenos em magnitude em virtude da presença das entradas de referência  $r$ , das entradas de distúrbios  $d$  e dos ruídos de medição  $n$ . Para sistemas de controle do tipo regulador o objetivo é fazer com que a saída  $y$  se mantenha no ponto de equilíbrio desejado em função da presença de distúrbios  $d$ , e para sistemas de controle do tipo servomecanismo o objetivo é fazer com que a saída rastreie a entrada de referência (ou seja,  $y = r$ ) na presença de ruídos de medição  $n$ . Ambos os casos requerem que o vetor de erros  $e$  seja tão pequeno quanto especificado;
- *Robustez*: nenhum modelo matemático, por mais detalhista que seja, é capaz de descrever com perfeição o comportamento de um processo físico. Desta forma, um sistema de controle que mantém estabilidade e desempenho assegurados em face de *incertezas* no modelo deste processo ou dos sinais forçantes é dito *robusto*.

Pelo Teorema da Superposição (possível de ser aplicado uma vez que o sistema é linear), se a malha de controle for quebrada (no sentido de interrompida) no ponto (2) indicado na Figura 1, tem-se a seguinte matriz de transferência

$$L_O(s) \triangleq G(s)K(s) . \quad (2.1)$$

Logo, ao se quebrar a malha na saída da planta obtém-se o que é comumente chamado de matriz de transferência da malha aberta  $L_O(s)$ , ou *matriz de transferência vista pela saída*.

Ao se quebrar a malha no ponto (1) indicado na Figura 1, ou seja, na entrada da planta, tem-se a seguinte matriz de transferência

$$L_I(s) \triangleq K(s)G(s) , \quad (2.2)$$

também comumente conhecida como *matriz de transferência em malha aberta vista pela entrada*.

Estas matrizes de transferência em malha aberta são bases para a definição das seguintes matrizes de transferência em malha fechada:

- Matriz de transferência *sensibilidade na saída*

$$S_O(s) \triangleq (I + L_O(s))^{-1} ; \quad (2.3)$$

- Matriz de transferência *sensibilidade complementar (ou rastreamento) na saída*

$$T_O(s) \triangleq L_O(s) (I + L_O(s))^{-1} = (I + L_O(s))^{-1} L_O(s) ; \quad (2.4)$$

- Matriz de transferência *sensibilidade na entrada*

$$S_I(s) \triangleq (I + L_I(s))^{-1} ; \quad (2.5)$$

- Matriz de transferência *sensibilidade complementar (ou rastreamento) na entrada*

$$T_I(s) \triangleq L_I(s) (I + L_I(s))^{-1} = (I + L_I(s))^{-1} L_I(s) ; \quad (2.6)$$

Uma relação fundamental entre as matrizes de transferência de malha fechada é dada por

$$S_O(s) + T_O(s) = I , \quad (2.7)$$

ou seja, a soma das matrizes de transferência de sensibilidade e rastreamento definidas por  $L_O(s)$  sempre fornece a matriz identidade.

A mesma relação pode ser provada para as matrizes de transferência que envolvem  $L_I(s)$ , resultando em

$$S_I(s) + T_I(s) = I . \quad (2.8)$$

De acordo com o Teorema da Superposição, os sinais de interesse (internos à malha) na Figura 1 em função dos sinais forçantes (externos à malha) são matematicamente expressos por

$$E(s) = S_O(s) (R(s) - D_y(s) - N(s) - G(s)D_u(s)) \quad (2.9)$$

$$Y(s) = T_O(s) (R(s) - N(s)) + S_O(s)D_y(s) + G(s)S_I(s)D_u(s) \quad (2.10)$$

$$U(s) = K(s)S_O(s) (R(s) - D_y(s) - N(s)) - T_I(s)D_u(s). \quad (2.11)$$

De acordo com as equações (2.9) a (2.11), vê-se que o projeto do compensador  $K$  de forma a atender os requisitos de estabilidade, desempenho e robustez busca objetivos conflitantes: a minimização de uma determinada matriz de transferência em malha

fechada de forma a minimizar os efeitos de um determinado sinal forçante pode levar à maximização de outra matriz de transferência em malha fechada que irá maximizar o efeito de outro sinal forçante. Felizmente, os sinais forçantes externos à malha em geral possuem magnitude relevante em faixas de frequências distintas. Desta forma, o objetivo é minimizar cada matriz de transferência em malha fechada na faixa de frequência na qual a perturbação externa relacionada diretamente a ela é mais crítica.

Este processo é conhecido como *formatação de matrizes de transferência em malha fechada na frequência*, um conceito mais amplo do já tradicional conceito de *formatação da malha na frequência* (*frequency loop shaping*) empregado em sistemas SISO. Quando outra ou outras matrizes de transferência em malha fechada são levadas em consideração, além da sensibilidade no projeto do compensador, dá-se o nome de *problema de sensibilidade mista*, como os problemas de sensibilidade mista S/KS (sensibilidade e energia gasta pelo controle) e S/T (sensibilidade e rastreamento).

### 2.1.2 Quantificando Magnitudes em Sistemas Multivariáveis

Para sistemas SISO, quantificar os sinais ou sistemas em relação à magnitude, como “grande” ou “pequeno”, é feito de forma intuitiva, analisando-se o módulo do número complexo associado para cada frequência desejada. Para sistemas multivariáveis tal extensão não é tão trivial por vários motivos, sendo um deles um conceito que é irrelevante para sistemas SISO mas muito importante em sistemas MIMO: a presença de *direção*.

Um vetor  $r \in \mathbb{C}^m$  é quantificado em relação à magnitude de acordo com a sua norma euclidiana convencional

$$\|r\|_2 \triangleq \sqrt{r^* r} . \quad (2.12)$$

No entanto, para quantificar a magnitude de matrizes será utilizado o conceito de *valores singulares*. Dada uma matriz  $G \in \mathbb{C}^m$ , o funcional “ $i$ -ésimo valor singular” de  $G$  é definido como

$$\sigma_i [G] \triangleq \sqrt{\lambda_i [G^* G]} , \quad (2.13)$$

onde  $\lambda_i [\cdot]$  denota o  $i$ -ésimo autovalor de uma matriz. Se  $G$  é quadrada, então o funcional “ $i$ -ésimo valor singular também pode ser dado por

$$\sigma_i [G] \triangleq \sqrt{\lambda_i [GG^*]} . \quad (2.14)$$

O maior valor singular  $\sigma_{\max} [G]$  (ou  $\bar{\sigma} [G]$ ) é definido como

$$\sigma_{\max} [G] \triangleq \sqrt{\lambda_{\max} [G^*G]} , \quad (2.15)$$

onde  $\lambda_{\max} [\cdot]$  denota o maior autovalor (em módulo) de uma matriz. O menor valor singular  $\sigma_{\min} [G]$  (ou  $\underline{\sigma} [G]$ ) é definido como

$$\sigma_{\min} [G] \triangleq \sqrt{\lambda_{\min} [G^*G]} , \quad (2.16)$$

onde  $\lambda_{\min} [\cdot]$  denota o menor autovalor (em módulo) de uma matriz.

O conceito de valores singulares é antigo, no entanto sua extensão para quantificar matrizes no contexto da teoria de controle multivariável e robusto foi proposto por Doyle e Stein [3] e sua popularidade e aceitação se justifica uma vez que o funcional “maior valor singular” pode ser considerado uma norma, isto é, possui as seguintes propriedades [24]

$$\sigma_{\max} [G] \geq 0 ; \quad (2.17a)$$

$$\sigma_{\max} [G] = 0 \iff G = 0 ; \quad (2.17b)$$

$$\sigma_{\max} [\alpha G] = |\alpha| \sigma_{\max} [G] , \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} ; \quad (2.17c)$$

$$\sigma_{\max} [G + H] \leq \sigma_{\max} [G] + \sigma_{\max} [H] . \quad (2.17d)$$

Outras propriedades importantes de valores singulares são [2]

$$\sigma_{\max} [G^{-1}] = \frac{1}{\sigma_{\min} [G]} ; \quad (2.18a)$$

$$\sigma_{\max} [GH] \leq \sigma_{\max} [G] \sigma_{\max} [H] ; \quad (2.18b)$$

$$\sigma_{\min} [GH] \geq \sigma_{\min} [G] \sigma_{\min} [H] ; \quad (2.18c)$$

$$\sigma_{\max} [GH] \geq \sigma_{\min} [G] \sigma_{\max} [H] ; \quad (2.18d)$$

$$\sigma_{\max} [GH] \geq \sigma_{\max} [G] \sigma_{\min} [H] ; \quad (2.18e)$$

$$\sigma_i [G] + \sigma_{\max} [H] \geq \sigma_i [G + H] \geq \sigma_i [G] - \sigma_{\max} [H] . \quad (2.18f)$$

A equação (2.18f) é conhecida como Teorema de Fan [2].

### 2.1.3 Loop Shaping e Sensibilidade Mista

O termo *loop shaping*, em tradução livre “formatação da malha”, é uma abordagem para o projeto de controladores que está relacionado a como escolher os parâmetros de um

compensador de forma que a malha aberta  $L(s) = G(s)K(s)$  possua certas propriedades desejadas. Classicamente, em sistemas SISO, a formatação da malha está relacionada à magnitude de  $L(s)$  em função da frequência, ou seja,  $|L(j\omega)| = |G(j\omega)K(j\omega)|$ .

Como exemplo, considere o sistema de controle na Figura 1. Denotando-se  $S_O(s)$  por  $S(s)$  e  $T_O(s)$  por  $T(s)$ , e tomando-se a equação da saída, supondo-se que todos os distúrbios estão refletidos na saída ( $D_u(s) = 0$ ), tem-se que

$$Y(s) = T(s)R(s) + S(s)D_y(s) - T(s)N(s) . \quad (2.19)$$

Idealmente é desejável que a saída rastreie com perfeição a entrada de referência, ou seja,  $y = r$ . Para isso, é necessário que  $T(s) \rightarrow 1$ . Também é desejável que a saída rejeite os distúrbios, e para isso é necessário que  $S(s) \rightarrow 0$ . Uma vez que

$$S(s) + T(s) = 1 , \quad (2.20)$$

então se a magnitude de  $L(s)$  for grande, a magnitude de  $S(s)$  será pequena e a magnitude de  $T(s)$  será próxima a unidade. No entanto, se a magnitude de  $T$  é próxima da unidade, isto significa que na saída aparecerá não só a referência  $r$ , mas também o ruído  $n$ . Para que o ruído  $n$  não apareça na saída, é necessário que  $T \rightarrow 0$ , ou seja, a magnitude de  $L$  seja pequena. Felizmente, as frequências nas quais a magnitude de  $L(s)$  deve ser feita grande ou pequena são diferentes. Em geral, as entradas de comando e os distúrbios são sinais característicos de baixas frequências, enquanto que os ruídos são sinais característicos de altas frequências.

No *loop shaping* clássico SISO a “forma” desejada da malha aberta  $L(s)$  afeta diretamente o controlador  $K(s)$ , uma vez que  $L(s) = G(s)K(s)$ , e reciprocamente  $K(s)$  afeta  $L(s)$ . Entretanto, nesta abordagem não são considerados diretamente as funções de malha fechada  $S(s)$  e  $T(s)$ , que são as que determinam na realidade a resposta final como visto. Nos limites da magnitude de  $L(s)$ , ou seja, magnitude de  $L(s)$  muito grande ou muito pequena, as seguintes aproximações são válidas [2]

$$|L(j\omega)| \gg 1 \quad \Rightarrow S(j\omega) \approx L^{-1}(j\omega) \quad \text{e} \quad T(j\omega) \approx 1 \quad (2.21a)$$

$$|L(j\omega)| \ll 1 \quad \Rightarrow S(j\omega) \approx 1 \quad \text{e} \quad T(j\omega) \approx L(j\omega) . \quad (2.21b)$$

No entanto, nas frequências onde a magnitude de  $L(s)$  é intermediária, como por exemplo perto da frequência de cruzamento de ganho (em sistemas SISO), as magnitudes de  $S(s)$  e  $T(s)$  não podem ser inferidas a partir da magnitude de  $L(s)$ . Uma estratégia

para isso é dar forma diretamente às funções de malha fechada e não à malha aberta  $L(s)$ . A sensibilidade é uma das matrizes (ou funções) frequentemente escolhidas, pois muitos dos problemas de controle desejados envolvem rastreamento de referências ou rejeição a distúrbios, sinais as quais a sensibilidade está diretamente relacionada. Logo, o processo em geral envolve escolher uma função de ponderação  $W_P(s)$  de forma que

$$|S(j\omega)| < \frac{1}{|W_P(j\omega)|}, \quad (2.22)$$

ou equivalentemente

$$|S(j\omega)W_P(j\omega)| < 1, \quad (2.23)$$

para  $\omega \in [0, \infty)$ .

No entanto, em muitos problemas de controle a serem considerados, dar forma somente à sensibilidade não é suficiente, pois outros requisitos como redução da ultrapassagem máxima (*overshoot*), diminuição da taxa de atenuação em altas frequências ou limitação na magnitude dos sinais de controle podem ser desejados. Os dois primeiros estão relacionados com a função  $T(s)$ , enquanto que o último com a função  $K(s)S(s)$ . Quando uma ou mais funções além de  $S(s)$  são levadas em consideração na formatação da malha dá-se o nome de *sensibilidade mista*. Alguns dos problemas de sensibilidade mista mais comuns são S/T (sensibilidade e rastreamento), S/KS (sensibilidade e consumo de energia) e S/T/KS (sensibilidade, rastreamento e consumo de energia).

Portanto, neste trabalho a abordagem utilizada para o projeto de compensadores é o *loop shaping* de funções (matrizes) de malha fechada. Como será visto adiante, a metodologia desenvolvida irá propiciar um grau de liberdade a mais na formatação da matriz de transferência do rastreamento do que o que pode ser encontrado no controle LQG/LTR.

## 2.2 O Modelo da Planta em Variáveis de Estado

Considere um sistema dinâmico LITDF descrito através do seguinte modelo em variáveis de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Lw_x \\ z_x &= Hx \\ z_u &= \rho Iu \\ y &= Cx + \mu Iw_y \end{aligned}, \quad (2.24)$$

onde:

- $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema;
- $y \in \mathbb{R}^m$  o vetor das saídas medidas;
- $u \in \mathbb{R}^p$  o vetor de entradas de comando da planta;
- $w_x \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de perturbações refletidas nos estados do sistema;
- $w_y \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de perturbações refletidas nas saídas medidas;
- $z_x \in \mathbb{R}^m$  é um vetor de saídas auxiliares relacionadas aos estados do sistema;
- $z_u \in \mathbb{R}^p$  é um vetor de saídas auxiliares relacionadas às entradas da planta.

Considere, por clareza tipográfica, que as matrizes identidade em (2.24) possuem dimensão compatível. As matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  formam uma representação em variáveis de estado do que é usualmente conhecido como planta de processo  $G$ , dada por

$$G := \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (2.25)$$

As matrizes  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e  $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e os escalares  $\rho \in \mathbb{R}$  e  $\mu \in \mathbb{R}$  serão definidos posteriormente. Note que devido ao fato da planta de processo ser própria a matriz de termo direto  $D$  em (1.1) deve ser nula. Como pode ser observado através de (2.24) e (2.25), a planta a ser considerada contém a planta de processo  $G(s)$  além dos parâmetros (ou funções) de ponderação e entradas e saídas exógenas, tais como distúrbios e ruídos, entre outros. Por este motivo, esta planta é conhecida como *planta generalizada*, e esta é a planta padrão a ser estudada nesta tese.

Convertendo-se a representação em variáveis de estado em (2.25) em uma representação em matriz de transferência, tem-se

$$G(s) = C\Phi(s)B \quad (2.26a)$$

com

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} . \quad (2.26b)$$

De acordo com as dimensões de  $A$ ,  $B$  e  $C$  e as equações (2.25) e (2.26a), pode-se inferir que a planta  $G$  possui  $n$  estados,  $m$  saídas e  $p$  entradas sendo  $G(s)$ , portanto, uma matriz de transferência composta por  $m \times p$  funções de transferência com  $n$  pólos multivariáveis.

Colocando-se a planta generalizada em uma forma matricial mais conveniente, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_x \\ z_u \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ w_x \\ w_y \\ u \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

com

$$P := \left[ \begin{array}{c|cc|c} A & L & 0 & B \\ \hline H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho I \\ \hline C & 0 & \mu I & 0 \end{array} \right]. \quad (2.28)$$

A planta generalizada  $P$  descrita em (2.28) tem uma estrutura particularmente muito adequada e comum para a formulação dos problemas de controle em geral, em especial o controle LQG e as sínteses  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , e sua estrutura é essencialmente a mesma descrita por [1].

Em aplicações típicas do controle LQG, sob o ponto de vista de controle ótimo estocástico, os parâmetros  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $L$  e  $H$  possuem interpretação física clara. A matriz  $H$  está correlacionada com a dinâmica da malha, o escalar  $\rho$  com o consumo de energia e  $L$  e  $\mu$  estão correlacionados com propriedades estatísticas dos ruídos de processo e medição, respectivamente. A solução ótima fornece então os ganhos do regulador e do observador baseados na interpretação física dos parâmetros mencionados, como diminuir consumo de energia, atenuar ou eliminar ruídos brancos de processo e medição, entre outros.

No entanto, do ponto de vista do projeto de controladores baseados na formatação da malha objetivo, tais parâmetros serão tratados como parâmetros livres de projeto sem interpretação física, como um meio para um fim. No caso deste trabalho, tais parâmetros serão designados com o objetivo de formatar as matrizes de transferência em malha fechada no domínio da frequência, sendo neste caso as matrizes de sensibilidade  $S(s)$  e rastreamento  $T(s)$  no domínio da frequência.

## 2.3 Controle LQG/LTR

Esta seção é dedicada a fazer uma breve revisão da metodologia LQG/LTR, com foco nas propriedades de *loop shaping* para a sensibilidade mista S/T.

Considere a planta descrita em (2.24). A matriz de transferência do controlador LQG

aplicado à esta planta é dada por [1]

$$K(s) = K_C (sI - A + BK_C + K_F C)^{-1} K_F , \quad (2.29)$$

onde  $K_C$  e  $K_F$  são, respectivamente, os ganhos do regulador e do observador de estados, calculados da seguinte forma

$$K_C = \rho^{-2} B^T X , \quad (2.30)$$

$$K_F = \mu^{-2} Y C^T . \quad (2.31)$$

As matrizes simétricas  $X$  e  $Y$  são, respectivamente, as soluções das seguintes equações conhecidas como Equações Algébricas de Riccati

$$A^T X + X A - \rho^{-2} X B B^T X + H^T H = 0 , \quad (2.32)$$

$$Y A^T + A Y - \mu^{-2} Y C^T C Y + L L^T = 0 . \quad (2.33)$$

O controlador LQG existe, e é único, se as matrizes  $X$  e  $Y$  forem positivas semidefinidas e se os pares  $(A,B)$  e  $(A,L)$  forem estabilizáveis e os pares  $(C,A)$  e  $(H,A)$  forem detectáveis.

No contexto de controle ótimo estocástico, o controle LQG foi muito importante e extensivamente estudado e aplicado na década de 1960, principalmente no setor aeroespacial no qual a otimização era uma solução adequada. No entanto, quando o controle LQG foi estudado sob o ponto de vista do controle robusto, descobriu-se que a solução por ele fornecida era inadequada. Isto deve-se ao fato de que as suposições acerca dos distúrbios de processo e ruídos serem modelados com propriedades gaussianas é, na maioria das vezes nesta área de estudo, irrealista [2].

Sabe-se que, isoladamente, o Regulador Linear Quadrático e o Filtro de Kalman-Bucy possuem boas propriedades garantidas de robustez - em termos de margens de estabilidade relativa clássicas da resposta em frequência, a margem de ganho situa-se entre 6 [dB] e  $\infty$  [dB] e margem de fase é igual a  $60^\circ$ . No entanto, para o controle LQG tais margens não são garantidas. De fato, Doyle [25] mostrou através de um contraexemplo que tais margens não são garantidas para qualquer controlador LQG. Curiosamente, neste artigo em que Doyle trata da falta de margens de robustez garantidas para o controlador LQG, o *abstract* do artigo contém somente a seguinte frase marcante: “*There are none*”.

Em 1972, Kwakernaak e Sivan [4] motivados a estudar qual era a “máxima precisão alcançável” de reguladores lineares ótimos sem limitação na entrada (ou seja,  $\rho \rightarrow 0^+$ ),

mostraram que, para um sistema dinâmico LITDF com função de custo quadrática do tipo

$$0 \leq \min_u \int_0^\infty (z_x^T z_x + \rho u^T u) dt = x^T(0) X x(0) , \quad (2.34)$$

o custo tende a zero para qualquer  $x(0)$  quando  $\rho$  tende a zero pela direita se  $\dim(z_x) = \dim(u)$  e  $H\Phi(s)B$  não possui zeros de transmissão no SPD. A este fato os autores dão o nome de “regulação perfeita”, e quando isto ocorre

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} X = 0 . \quad (2.35)$$

Este comportamento assintótico da solução da EAR para o regulador de estados LQG desencadeou uma teoria que é conhecida como *Princípio de Recuperação da Malha Objetivo (Loop Transfer Recovery)*. Primeiramente proposto por Doyle e Stein [3] e consagrado por Stein e Athans [1], o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo diz que, quando  $\rho$  tende a zero pela direita e o parâmetro de projeto  $H$  for feito igual a  $C$ , o controlador em (2.29) tende a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = (C\Phi(s)B)^{-1} C\Phi(s)K_F . \quad (2.36)$$

Isto significa dizer que a matriz de transferência da malha aberta  $L_O(s)$  tende a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} G(s)K(s) = C\Phi(s)K_F , \quad (2.37)$$

que é a própria matriz de transferência do observador de estados (Filtro de Kalman-Bucy). Diz-se que houve uma *recuperação* da matriz de transferência da malha aberta, e que a matriz de transferência recuperada é, de fato, o próprio Filtro de Kalman-Bucy, e que conforme comentado anteriormente, possui boas propriedades de robustez (na saída da planta). Por este motivo, este procedimento também é conhecido como Princípio de Recuperação da Malha Objetivo pela saída (*Output LTR*). A condição para a ocorrência do Princípio de Recuperação da Malha Objetivo (pela saída) é que o controlador LQG exista e que  $\rho \rightarrow 0^+$ ,  $H = C$  e que a planta  $G(s)$  seja quadrada e não possua zeros de transmissão no SPD.

Há um procedimento que é conhecido como *Loop Transfer Recovery* pela entrada (*Input LTR*). Este é um procedimento *dual* do caso LTR pela saída, no qual para  $\mu \rightarrow 0^+$ ,  $L = B$  e  $G(s)$  não possuindo zeros de transmissão no SPD, recupera-se a seguinte matriz de transferência de malha aberta  $L_I(s)$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s)G(s) = K_C\Phi(s)B , \quad (2.38)$$

que é a matriz de transferência do Regulador Linear Quadrático.

A EAR em (2.33) pode ser vista no domínio da frequência da seguinte forma

$$(I + C\Phi(j\omega)K_F)(I + C\Phi(j\omega)K_F)^* = I + \mu^{-2}C\Phi(j\omega)L(C\Phi(j\omega)L)^* . \quad (2.39)$$

Como uma consequência de (2.37) e (2.39), as seguintes propriedades de *loop shaping* em termos de sensibilidade mista S/T para o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo pela saída podem ser obtidas

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(S_O(j\omega)) \leq 1 , \quad (2.40a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(T_O(j\omega)) \leq 2 , \quad (2.40b)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(S_O(j\omega)) \leq \mu \sigma_{\max}[(C\Phi(j\omega)L)^{-1}] , \quad (2.40c)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(T_O(j\omega)) \leq \sigma_{\max}(C\Phi(j\omega)K_F) . \quad (2.40d)$$

As equações (2.40a) e (2.40b) mostram que a sensibilidade e o rastreamento nunca se tornam muito grandes e os máximos valores singulares estão limitados por, respectivamente, 1 e 2. Entretanto, em algumas frequências é desejado que o máximo valor singular seja ainda menor. Para a sensibilidade é possível designar os parâmetros livres de projeto  $L$  e  $\mu$  e contar com a restrição (2.40c), entretanto para o rastreamento nenhum parâmetro livre de projeto adicional (além de  $L$  e  $\mu$ ) pode ser utilizado e é necessário contar apenas com a restrição (2.40d) imposta pelo ganho  $K_F$  (que depende de  $L$  e  $\mu$ ). Se for priorizado o rastreamento na escolha de  $L$  e  $\mu$  (através de  $K_F$ ), a sensibilidade ficará então amarrada a estes parâmetros.

Este é o procedimento usual de *loop shaping* aplicado ao controle LQG/LTR: formatar a malha objetivo (através de  $L$  e  $\mu$ ) e então obter a recuperação da malha objetivo (com  $H = C$  e  $\rho \rightarrow 0$ ). Os parâmetros de projeto são  $L$ ,  $H$ ,  $\mu$  e  $\rho$ , designados em total dedicação à formatação e recuperação da malha objetivo.

## 2.4 Controle $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

Os resultados obtidos no chamado controle LQG durante as décadas de 60 e 70 motivaram estudos e pesquisas na utilização da otimização  $\mathcal{H}_\infty$  na formulação de problemas de controle e robustez de sistemas dinâmicos. O desenvolvimento dessas pesquisas teve como início o influente trabalho de Zames [5], embora algumas aplicações da otimização

$\mathcal{H}_\infty$  em engenharia tenham sido utilizadas no trabalho de Helton [26]. Segundo Zames, as propriedades insatisfatórias de robustez do controle LQG podem ser atribuídas ao critério integral quadrático da norma  $\mathcal{H}_2$  e à representação, na maior parte das vezes irrealista, dos distúrbios (incertezas) como ruídos brancos. No entanto, conforme a teoria do controle  $\mathcal{H}_\infty$  evoluía, ambas as abordagens  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  foram vistas mais correlacionadas do que originalmente se pensava. Em 1989, Doyle et. al. [7] apresentaram e consagraram as soluções para o controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  no espaço de estados, e que serão brevemente revistas nesta seção.

Existem diversas maneiras de se formular um problema de controle a ser descrito na forma de otimização via  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ , dependendo geralmente do objetivo inicial, dentre as quais podem ser descritas como Controle Pleno (*Full Control*), Informação Plena (*Full Information*), Estimção da Saída (*Output Estimation*) e Injeção de Distúrbio na Saída (*Disturbance Feedforward*). Entretanto o caso mais geral, e de maior interesse deste trabalho, é o problema de Realimentação da Saída (*Output Feedback*), e que será discutido nesta seção.

O diagrama de blocos geral de um sistema de controle para o problema de controle denominado realimentação da saída pode ser visto na Figura 2.

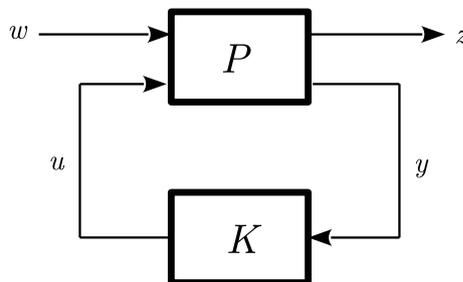


Figura 2: Diagrama de blocos geral da malha de controle.

Na Figura 2, o bloco  $P$  representa a planta generalizada, que é real-racional e própria, e inclui além da planta de processo  $G$  todas as funções de ponderação sobre distúrbios, ruídos, saídas controladas, etc. O bloco  $K$  representa o bloco controlador ou bloco compensador, também real-racional e próprio, que deve ser determinado a partir das ponderações impostas. O sinal  $w$  contém todos os sinais de entrada exógenos, tais como entradas de referência, distúrbios de processo, ruídos de medição, entre outros, enquanto que o sinal  $z$  contém as variáveis a serem controladas. O sinal  $y$  contém as saídas medidas e o sinal  $u$  corresponde às entradas de comando da planta.

Em termos de equações matemáticas, pode-se representar o diagrama de blocos da

Figura 2 através de

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}}_{P(s)} \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

com a lei de controle dada por

$$U(s) = K(s)Y(s). \quad (2.42)$$

Note que ao se aplicar a lei de controle (2.42) à planta em (2.41) obtém-se uma matriz de transferência em malha fechada. A esta matriz de transferência é dado o nome de  $T_{zw}(s)$ , que é obtida através de uma *transformação linear fracional* (*Linear Fractional Transformation* - LFT) inferior<sup>1</sup> de  $P(s)$ , onde  $K(s)$  é denominado o parâmetro da LFT e é dado por

$$T_{zw}(s) \triangleq F_l(P(s), K(s)), \quad (2.43)$$

onde o subscrito  $l$  denota *lower* (inferior).

Ao fazer-se a substituição (2.42) em (2.41) a fim de eliminar  $u(s)$  e  $y(s)$ , obtém-se finalmente

$$T_{zw}(s) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s). \quad (2.44)$$

Então, define-se a formulação geral do problema de controle: *encontre um controlador  $K$  que, baseado na informação provida por  $y$ , gere um sinal de comando  $u$  que irá neutralizar a influência de  $w$  em  $z$ , através da minimização da norma da matriz (ou função) de malha fechada  $T_{zw}$ .*

Desta forma, uma das implicações que a definição geral do problema de controle acarreta é escolher qual norma deve ser utilizada para medir o desempenho de  $T_{zw}$ . Então, duas excelentes candidatas para servir de medição de desempenho de  $T_{zw}$  são as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  e assim define-se os dois seguintes problemas de controle

**Definição 2.1. Problema de controle  $\mathcal{H}_2$ :** *o problema de controle  $\mathcal{H}_2$  se resume a encontrar o controlador admissível<sup>2</sup>  $K$  (ótimo) que minimize a norma  $\|T_{zw}\|_2$ , que no*

<sup>1</sup>O termo *inferior* é dado por convenção ao se tratar da LFT obtida com um controlador e a planta generalizada. Quando o parâmetro da LFT são as incertezas acerca da planta, geralmente denota-se LFT superior.

<sup>2</sup>Um controlador é dito admissível quanto o sistema de controle é internamente estável.

domínio da frequência é definida por

$$\|T_{zw}(s)\|_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(T_{zw}^*(j\omega)T_{zw}(j\omega))} . \quad (2.45)$$

**Definição 2.2. Problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$ :** o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  se resume a encontrar um controlador admissível  $K$  que faça com que  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ , onde  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  é um parâmetro designado pelo projetista e deve ser maior ou igual a um parâmetro mínimo  $\gamma_{\text{opt}}$ . A norma de  $T_{zw}$  no domínio da frequência é definida como

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega} \sigma_{\max}(T_{zw}(j\omega)) . \quad (2.46)$$

Observe que o problema de controle  $\mathcal{H}_2$  determina “o controlador” (único) que resolve o problema, enquanto que o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  determina “um controlador” (dentre vários) que resolve o problema. Quando o problema de controle é achar tal parâmetro  $\gamma_{\text{opt}}$ , diz-se que então esse controlador  $\mathcal{H}_\infty$  é ótimo. Esclarece-se que o objetivo deste trabalho não é achar este parâmetro  $\gamma_{\text{opt}}$ , e o parâmetro  $\gamma$  também será designado exclusivamente com propósito de formatação da malha objetivo.

Existem algoritmos bastante eficientes utilizados para se resolver os problemas de controle dados pelas Definições 2.1 e 2.2, sendo o consagrado por [7] um dos mais vantajosos e conhecidos, pois já fornece as soluções no espaço de estados. Outros algoritmos incluem o de Kwakernaak [27] entre outros.

Segundo o algoritmo proposto por [7], é necessário que a planta generalizada  $P$  atenda algumas hipóteses. Analisando tais hipóteses acerca da planta generalizada  $P$  apresentada na seção 2.2, chega-se às seguintes conclusões:

- (S1) O par  $(A, B)$  deve ser estabilizável e o par  $(C, A)$  deve ser detectável. Isto deve ser testado para cada planta. Esta hipótese é necessária para garantir a existência de controladores  $K$  estabilizantes.
- (S2)  $\begin{bmatrix} 0 \\ \rho I \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 0 & \mu I \end{bmatrix}$  devem possuir posto completo (*full rank*) de linhas e colunas, respectivamente. Esta hipótese garante que os controladores  $K$  serão próprios e fisicamente factíveis [7].
- (S3) As saídas  $z_x$  e  $z_u$  não devem estar correlacionadas com as entradas exógenas  $w_x$  e  $w_y$ .
- (S4) A saída  $y$  não deve estar diretamente correlacionada com a entrada de comando  $u$

da planta, ou seja, a matriz de transferência direta deve ser nula.

(S5)  $\begin{bmatrix} 0 \\ \rho I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ . Esta hipótese garante que não há ponderações cruzadas na função de custo.

(S6)  $\begin{bmatrix} L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mu I \end{bmatrix}^T = 0$ . Esta hipótese garante que os distúrbios de processo e de medição não são correlacionados.

(S7) O par  $(A, L)$  deve ser estabilizável e o par  $(H, A)$  deve ser detectável. Esta suposição, juntamente com as hipóteses (S5) e (S6), garantem que o controlador não irá cancelar polos e zeros sobre o eixo imaginário. Esta hipótese deve ser testada.

As hipóteses (S2) a (S6) são confirmadas pela estrutura da planta. Apesar das hipóteses (S1)-(S7) parecerem um tanto restritivas à primeira vista, a maioria dos problemas de controle passíveis de terem soluções irá apresentar as características desejadas. É importante lembrar ainda que na maioria dos casos o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  envolve encontrar um controlador subótimo  $K(s)$  de forma que a norma  $\|T_{zw}(s)\|_\infty$  seja menor que um fator  $\gamma$ . Se um controlador ótimo é desejado, é necessário um processo iterativo onde o fator  $\gamma$  deve ser reduzido gradualmente, o que gera um processo teoricamente e computacionalmente complicado. Esta é uma importante diferença para o controle  $\mathcal{H}_2$ , onde o controlador ótimo determinado é único e pode ser determinado resolvendo-se duas Equações Algébricas de Riccati.

Se a planta generalizada  $P$  atender aos requisitos (S1)-(S7), o controlador estabilizante que minimiza a norma  $\|T_{zw}(s)\|_2$  é

$$K_{\mathcal{H}_2} := \left[ \begin{array}{c|c} A - BK_{C_2} - K_{F_2}C & K_{F_2} \\ \hline K_{C_2} & 0 \end{array} \right], \quad (2.47)$$

onde

$$K_{C_2} = \rho^{-2} B^T X_2, \quad (2.48a)$$

$$K_{F_2} = \mu^{-2} Y_2 C^T. \quad (2.48b)$$

As matrizes simétricas  $X_2$  e  $Y_2$  são matrizes positivas semidefinidas que solucionam, respectivamente, as seguintes Equações Algébricas de Riccati

$$A^T X_2 + X_2 A - \rho^{-2} X_2 B B^T X_2 + H^T H = 0, \quad (2.49a)$$

$$Y_2 A^T + A Y_2 - \mu^{-2} Y_2 C C^T Y_2 + L L^T = 0. \quad (2.49b)$$

Uma vez que  $X_2 \geq 0$ , diz-se que  $A - BK_{C_2}$  é estável, ou seja, todos os autovalores de  $A - BK_{C_2}$  estão no SPE do plano complexo (excluindo o eixo imaginário). Também uma vez que  $Y_2 \geq 0$ , diz-se também que  $A - K_{F_2}C$  é estável. Uma propriedade importante é que, se  $X_2$  e  $Y_2$  são soluções estabilizantes de uma EAR, então elas serão únicas.

Relembrando-se a definição 2.2, o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  consiste em encontrar um controlador  $K$  que faça com que a norma  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ , onde  $\gamma$  deve ser maior que o fator ótimo  $\gamma_{\text{opt}}$ . Embora não tão evidente e conhecido como no controle  $\mathcal{H}_2$ /LQG, o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  também apresenta uma estrutura de separação bastante conveniente [7]. O controlador estabilizante que faz com que a norma  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$  é

$$K_{\mathcal{H}_\infty} := \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A + \gamma^{-2}LL^T X_\infty - BK_{C_\infty} - Z_\infty K_{F_\infty} C}{K_{C_\infty}} & \frac{Z_\infty K_{F_\infty}}{0} \end{array} \right] \quad (2.50)$$

onde

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1} , \quad (2.51a)$$

$$K_{C_\infty} = \rho^{-2}B^T X_\infty , \quad (2.51b)$$

$$K_{F_\infty} = \mu^{-2}Y_\infty C^T . \quad (2.51c)$$

As matrizes simétricas  $X_\infty$  e  $Y_\infty$  são as matrizes positivas semidefinidas que solucionam, respectivamente, as seguintes Equações Algébricas de Riccati

$$A^T X_\infty + X_\infty A + \gamma^{-2} X_\infty LL^T X_\infty - \rho^{-2} X_\infty BB^T X_\infty + H^T H = 0 , \quad (2.52a)$$

$$Y_\infty A^T + AY_\infty + \gamma^{-2} Y_\infty H^T HY_\infty - \mu^{-2} Y_\infty C^T CY_\infty + LL^T = 0 . \quad (2.52b)$$

Para que o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  exista, também é necessário que o raio espectral (maior autovalor) de  $X_\infty Y_\infty$  seja estritamente maior que  $\gamma^2$ .

Conforme notado em [7], quando o parâmetro  $\gamma$  tende ao infinito, as equações do controle  $\mathcal{H}_\infty$  tendem às equações do controle  $\mathcal{H}_2$ , e esta observação é de fundamental importância e motivação deste trabalho para demonstrar e investigar sob quais condições o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo pode ser aplicado ao controle  $\mathcal{H}_\infty$ , e quais propriedades e/ou vantagens podem ser obtidas nesta nova configuração. Em função de  $\gamma \rightarrow \infty$  “recuperar” a síntese  $\mathcal{H}_2$ , as EARs em (2.52a) e (2.52b) serão então chamadas de Equações Algébricas de Riccati Generalizadas. Convém salientar também que a solução estabilizante de uma EARG é única.

Sabe-se que, através de uma transformação de similaridade, é possível converter uma

representação em variáveis de estado em outra representação em variáveis de estado, dado que a matriz de transformação linear não seja singular. Sendo assim, considere a seguinte proposição.

**Proposição 2.1.** *O controlador admissível  $\mathcal{H}_\infty$  em (2.50) pode ser convertido na seguinte representação em variáveis de estado*

$$K_{\mathcal{H}_\infty} := \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A + \gamma^{-2}Y_\infty H^T H - BK_{C_\infty}Z_\infty - K_{F_\infty}C}{K_{C_\infty}Z_\infty} & \frac{K_{F_\infty}}{0} \end{array} \right], \quad (2.53)$$

através de uma transformação de similaridade com matriz de transformação linear  $T = Z_\infty$ .

**Prova:** Considerando um sistema dinâmico LITDF  $G$  modelado através de

$$G := \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right], \quad (2.54)$$

e aplicando-se a este sistema uma transformação de similaridade, as novas matrizes de estado  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, 0)$  serão

$$\hat{A} = T^{-1}AT, \quad (2.55a)$$

$$\hat{B} = T^{-1}B, \quad (2.55b)$$

$$\hat{C} = CT. \quad (2.55c)$$

Aplicando-se uma transformação de similaridade em (2.50) com  $T = Z_\infty$ , e através do conjunto de equações (2.55), as novas matrizes de estado serão definidas como

$$\hat{A} = Z_\infty^{-1} (A + \gamma^{-2}LL^T X_\infty - BK_{C_\infty} - Z_\infty K_{F_\infty}C) Z_\infty, \quad (2.56a)$$

$$\hat{B} = K_{F_\infty}, \quad (2.56b)$$

$$\hat{C} = K_{C_\infty}Z_\infty, \quad (2.56c)$$

e então o controlador em (2.50) pode ser reescrito como

$$K_{\mathcal{H}_\infty}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{Z_\infty^{-1} (A + \gamma^{-2}LL^T X_\infty + BK_{C_\infty} + Z_\infty K_{F_\infty}C) Z_\infty}{K_{C_\infty}Z_\infty} & \frac{K_{F_\infty}}{0} \end{array} \right]. \quad (2.57)$$

O problema reside, portanto, em determinar qual é a nova matriz  $\hat{A}$ . Aplicando-se a propriedade distributiva em (2.56a) resulta em

$$\hat{A} = Z_\infty^{-1}AZ_\infty + \gamma^{-2}Z_\infty^{-1}LL^T X_\infty Z_\infty - Z_\infty^{-1}BK_{C_\infty}Z_\infty - K_{F_\infty}CZ_\infty. \quad (2.58)$$

Da definição da matriz  $Z_\infty$ , tem-se que  $Z_\infty = (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}$ . Então, paralelamente, considere as seguintes identidades que serão úteis no desenvolvimento da prova

$$Z_\infty^{-1} = I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty , \quad (2.59a)$$

$$Z_\infty = I + \gamma^{-2}Z_\infty Y_\infty X_\infty , \quad (2.59b)$$

$$Z_\infty = I + \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty Z_\infty . \quad (2.59c)$$

Usando-se a substituição (2.59a) em (2.58), tem-se

$$\begin{aligned} \hat{A} = & (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty) AZ_\infty + \gamma^{-2} (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty) LL^T X_\infty Z_\infty \\ & - (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty) BK_{C_\infty} Z_\infty - K_{F_\infty} CZ_\infty . \end{aligned} \quad (2.60)$$

Mais uma vez aplicando-se a propriedade distributiva, agora em (2.60), segue que

$$\begin{aligned} \hat{A} = & AZ_\infty - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty AZ_\infty + \gamma^{-2}LL^T X_\infty Z_\infty - \gamma^{-4}Y_\infty X_\infty LL^T X_\infty Z_\infty \\ & - BK_{C_\infty} Z_\infty + \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty BK_{C_\infty} Z_\infty - K_{F_\infty} CZ_\infty . \end{aligned} \quad (2.61)$$

Sabendo-se que a matriz de ganhos do regulador é dada por (2.51b) e fazendo-se esta substituição em um dos termos de (2.61), tem-se

$$\begin{aligned} \hat{A} = & AZ_\infty - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty AZ_\infty + \gamma^{-2}LL^T X_\infty Z_\infty - \gamma^{-4}Y_\infty X_\infty LL^T X_\infty Z_\infty \\ & - BK_{C_\infty} Z_\infty + \gamma^{-2}Y_\infty \rho^{-2} X_\infty BB^T X_\infty Z_\infty - K_{F_\infty} CZ_\infty . \end{aligned} \quad (2.62)$$

Reagrupando os termos na equação (2.62) resulta em

$$\begin{aligned} \hat{A} = & AZ_\infty + \gamma^{-2}LL^T X_\infty Z_\infty - BK_{C_\infty} Z_\infty - K_{F_\infty} CZ_\infty \\ & + \gamma^{-2}Y_\infty (-X_\infty A - \gamma^{-2}X_\infty LL^T X_\infty + \rho^{-2}X_\infty BB^T X_\infty) Z_\infty . \end{aligned} \quad (2.63)$$

Agora utilizando-se a EARG do regulador em (2.52a) a fim de substituir o termo entre parênteses em (2.63), chega-se a

$$\begin{aligned} \hat{A} = & AZ_\infty + \gamma^{-2}LL^T X_\infty Z_\infty - BK_{C_\infty} Z_\infty \\ & - K_{F_\infty} CZ_\infty + \gamma^{-2}Y_\infty (A^T X_\infty + H^T H) Z_\infty . \end{aligned} \quad (2.64)$$

Aplicando-se mais uma vez a propriedade distributiva, mas agora em (2.64), vem que

$$\begin{aligned} \hat{A} = AZ_\infty + \gamma^{-2}LL^T X_\infty Z_\infty - BK_{C_\infty} Z_\infty - K_{F_\infty} CZ_\infty \\ + \gamma^{-2}Y_\infty A^T X_\infty Z_\infty + \gamma^{-2}Y_\infty H^T H Z_\infty . \end{aligned} \quad (2.65)$$

Agora aplica-se a propriedade associativa em (2.65) a fim de agrupar alguns termos úteis no decorrer do desenvolvimento, resultando em

$$\hat{A} = AZ_\infty - BK_{C_\infty} Z_\infty - K_{F_\infty} CZ_\infty + \gamma^{-2}Y_\infty H^T H Z_\infty + (Y_\infty A^T + LL^T) \gamma^{-2} X_\infty Z_\infty . \quad (2.66)$$

Desta vez, utiliza-se a EARG do observador em (2.52b) a fim de substituir o termo destacado pelos parênteses em (2.66), fornecendo

$$\begin{aligned} \hat{A} = AZ_\infty - BK_{C_\infty} Z_\infty - K_{F_\infty} CZ_\infty + \gamma^{-2}Y_\infty H^T H Z_\infty \\ + (-AY_\infty - \gamma^{-2}Y_\infty H^T H Y_\infty + \mu^{-2}Y_\infty C^T C Y_\infty) \gamma^{-2} X_\infty Z_\infty . \end{aligned} \quad (2.67)$$

Recorrendo-se mais uma vez à propriedade distributiva de matrizes, desta vez em (2.67), chega-se a

$$\begin{aligned} \hat{A} = AZ_\infty - BK_{C_\infty} Z_\infty - K_{F_\infty} CZ_\infty + \gamma^{-2}Y_\infty H^T H Z_\infty \\ - \gamma^{-2}AY_\infty X_\infty Z_\infty - \gamma^{-4}Y_\infty H^T H Y_\infty X_\infty Z_\infty + \gamma^{-2}\mu^{-2}Y_\infty C^T C Y_\infty X_\infty Z_\infty . \end{aligned} \quad (2.68)$$

Sabendo-se que a matriz de ganhos do observador é dada por (2.51c), e substituindo-a em um dos termos de (2.68) resulta em

$$\begin{aligned} \hat{A} = AZ_\infty - BK_{C_\infty} Z_\infty - K_{F_\infty} CZ_\infty + \gamma^{-2}Y_\infty H^T H Z_\infty \\ - \gamma^{-2}AY_\infty X_\infty Z_\infty - \gamma^{-4}Y_\infty H^T H Y_\infty X_\infty Z_\infty + \gamma^{-2}K_{F_\infty} C Y_\infty X_\infty Z_\infty . \end{aligned} \quad (2.69)$$

No entanto, através da identidade em (2.59c), sabe-se que  $Z_\infty - I = \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty Z_\infty$ . Fazendo-se esta substituição em alguns termos de (2.69) resulta que

$$\begin{aligned} \hat{A} = AZ_\infty - BK_{C_\infty} Z_\infty - K_{F_\infty} CZ_\infty + \gamma^{-2}Y_\infty H^T H Z_\infty \\ - A(Z_\infty - I) - \gamma^{-2}Y_\infty H^T H (Z_\infty - I) + K_{F_\infty} C (Z_\infty - I) . \end{aligned} \quad (2.70)$$

Logo, chega-se a

$$\begin{aligned} \hat{A} = & AZ_\infty - BK_{C_\infty}Z_\infty - K_{F_\infty}CZ_\infty + \gamma^{-2}Y_\infty H^T H Z_\infty \\ & - AZ_\infty + A - \gamma^{-2}Y_\infty H^T H Z_\infty + \gamma^{-2}Y_\infty H^T H + K_{F_\infty}CZ_\infty - K_{F_\infty}C . \end{aligned} \quad (2.71)$$

Finalmente, a matriz  $\hat{A}$  é dada então por

$$\hat{A} = A + \gamma^{-2}Y_\infty H^T H - BK_{C_\infty}Z_\infty - K_{F_\infty}C . \quad (2.72)$$

Logo, a matriz de transferência do controlador pode ser finalmente reescrita, através de uma transformação de similaridade, como

$$K_{\mathcal{H}_\infty}(s) = K_{C_\infty}Z_\infty (sI - A - \gamma^{-2}Y_\infty H^T H + BK_{C_\infty}Z_\infty + K_{F_\infty}C)^{-1} K_{F_\infty} , \quad (2.73)$$

conforme indica a equação (2.53).

□

A representação do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  conforme (2.73) simplifica e torna *dual* a demonstração do Procedimento de Recuperação da Malha Objetivo pela entrada. Esta representação do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  em (2.73) pode ser encontrada em [28] e [29]. Aqui foi demonstrada a transformação de similaridade que converte uma representação na outra.

## 2.5 Funções de Custo e Controle $\mathcal{H}_\infty$ de Mínima Entropia

O conceito de entropia se estabeleceu como uma importante noção, com ampla aplicabilidade em um grande número de áreas de estudo [29]. O controlador  $\mathcal{H}_\infty$  de mínima entropia é um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  admissível que minimiza a seguinte integral

$$J_\infty(T_{zw}, \gamma, \infty) \triangleq \lim_{s_0 \rightarrow \infty} -\frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|\det(I - \gamma^{-2}T_{zw}^*(j\omega)T_{zw}(j\omega))| \left[ \frac{s_0^2}{s_0^2 + \omega^2} \right] d\omega , \quad (2.74)$$

conhecida como *integral de entropia no infinito* [28] e [29], sendo o parâmetro  $s_0$  conhecido como entropia. A partir deste ponto, por entropia entende-se entropia no infinito ( $s_0 \rightarrow \infty$ ), e o valor da integral de entropia será denotado por  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$ .

Este conceito é importante pois a entropia pode ser compreendida como uma limi-

tação superior no custo  $\mathcal{H}_2$  de  $T_{zw}$  e, intuitivamente, em teoria de controle custo é algo fisicamente mais compreensível. Lembrando-se da integral de custo  $\mathcal{H}_2$

$$J_2(T_{zw}) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} (T_{zw}^*(j\omega)T_{zw}(j\omega)) d\omega , \quad (2.75)$$

que é igual à norma  $\mathcal{H}_2$  elevada ao quadrado de  $T_{zw}$ , tem-se que

$$J_\infty(T_{zw}, \gamma) \geq J_2(T_{zw}) \geq 0 . \quad (2.76)$$

Neste trabalho, tomar-se-á a liberdade de denotar o valor da entropia por “custo  $\mathcal{H}_\infty$ ”. Sabe-se que para  $\gamma \rightarrow \infty$ , ou seja,  $\mathcal{H}_\infty \rightarrow \mathcal{H}_2$ , tem-se que primeira desigualdade em (2.76) tende a uma igualdade, ou seja

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} J_\infty(T_{zw}, \gamma) = J_2(T_{zw}) . \quad (2.77)$$

De fato, uma das propriedades da entropia é que ela é monotonicamente decrescente em relação à  $\gamma$ . Avaliar-se os custos  $J_2(T_{zw})$  e  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$  em função das integrais que os definem não é algo trivial. Felizmente, os custos podem ser computados em função da soluções das Equações Algébricas de Riccati e das matrizes do sistema no espaço de estados. Para o custo  $J_2(T_{zw})$ , tem-se [29]

$$J_2(T_{zw}) = \text{tr} (L^T X_2 L) + \text{tr} (\rho^{-2} B^T X_2 Y_2 X_2 B) = \text{tr} (HY_2 H^T) + \text{tr} (\mu^{-2} C Y_2 X_2 Y_2 C^T) , \quad (2.78)$$

e para o custo  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$

$$J_\infty(T_{zw}, \gamma) = \text{tr} (L^T X_\infty L) + \text{tr} (\rho^{-2} B^T X_\infty Z_\infty Y_\infty X_\infty B) = \text{tr} (HY_\infty H^T) + \text{tr} (\mu^{-2} C Y_\infty X_\infty Z_\infty Y_\infty C^T) . \quad (2.79)$$

A igualdade em (2.77) é verificada sabendo-se que, quando  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $X_\infty \rightarrow X_2$ ,  $Y_\infty \rightarrow Y_2$  e  $Z_\infty \rightarrow I$  e, então,  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$  em (2.79) tende a  $J_2(T_{zw})$  em (2.78). Ressalta-se também que ambos os custos  $J_2(T_{zw})$  e  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$  possuem uma interpretação na qual o custo total é composto de dois custos de problemas de controle distintos [29]:

- O termo  $\text{tr} (L^T X_2 L)$  - termo  $\text{tr} (L^T X_\infty L)$  no custo  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$  - está relacionado ao custo do problema de Informação Plena e o termo  $\text{tr} (\rho^{-2} B^T X_2 Y_2 X_2 B)$  - termo  $\text{tr} (\rho^{-2} B^T X_\infty Z_\infty Y_\infty X_\infty B)$  no custo  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$  - está relacionado ao custo do problema de Estimação da Saída;

- O termo  $\text{tr}(HY_2H^T)$  - termo  $\text{tr}(HY_\infty H^T)$  no custo  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$  - está relacionado ao custo do problema de Controle Pleno e o termo  $\text{tr}(\mu^{-2}CY_2X_2Y_2C^T)$  - termo  $\text{tr}(\mu^{-2}CY_\infty X_\infty Z_\infty Y_\infty C^T)$  no custo  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$  - está relacionado ao custo do problema de Injeção de Distúrbios na Saída.

Os problemas de Informação Plena e Estimção da Saída são, respectivamente, problemas *duais* aos problemas de Controle Pleno e Injeção de Distúrbios na Saída. Já os problemas de Informação Plena e Estimção da Saída são, respectivamente, equivalentes aos problemas de Injeção de Distúrbios na Saída e Controle Pleno. O problema de Realimentação da Saída possui uma estrutura de separação dada pelos problemas de Informação Plena e Estimção da Saída (ou entre Controle Pleno e Injeção de Distúrbios na Saída), e então o custo total é a soma do custo de cada um dos problemas que compõem o problema de Realimentação da Saída. Maiores detalhes acerca da natureza dos problemas e da construção das soluções e da estrutura de separação podem ser encontrados em [7] e [30].

Em relação aos custos, sabe-se que quando  $\gamma$  tende ao infinito o custo  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$  tende ao custo  $J_2(T_{zw})$ . Mas o que ocorre com o custo  $J_2(T_{zw})$  quando  $\rho \rightarrow 0^+$ , ou seja, uma das condições do PRMO?

Assumindo-se que as condições para que  $\rho \rightarrow 0^+$  são atendidas no controle LQG/LTR (ou seja,  $H\Phi(s)B$  é quadrada e de fase-mínima), sabe-se que [4]

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} X_2 = 0 \quad (2.80a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{-1} B^T X_2 = H \quad (2.80b)$$

Logo, tem-se que nestas condições limites o custo  $J_2(T_{zw})$  é

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} J_2(T_{zw}) = \\ \lim_{\rho \rightarrow 0^+} [\text{tr}(L^T 0L) + \text{tr}(\rho^{-1} B^T X_2 Y_2 \rho^{-1} X_2 B)] = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \text{tr}(HY_2H^T) \quad , \quad (2.81) \end{aligned}$$

o que confere com

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} J_2(T_{zw}) = \text{tr}(HY_2H^T) + \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \text{tr}(\mu^{-2}CY_2 0Y_2C^T) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \text{tr}(HY_2H^T) \quad . \quad (2.82)$$

A pergunta que surge agora é: o que ocorre com o custo  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$  nas condições de PRMO? Também nestas condições, qual a relação entre  $J_2(T_{zw})$  e  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$ ? Tais questionamentos serão respondidos no capítulo a seguir.

### 3 *Princípio de Recuperação da Malha Objetivo para a Síntese $\mathcal{H}_\infty$*

No capítulo anterior os princípios de controle multivariável foram brevemente revistos, juntamente com uma revisão do controle LQG/LTR e aspectos da síntese de controladores  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Neste capítulo, o cerne desta tese será apresentado e desenvolvido: demonstrar que o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo ocorre para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$  de maneira similar à síntese  $\mathcal{H}_2$ /LQG.

Desta maneira, serão vistos o problema de Jogo Linear Quadrático, onde o comportamento assintótico da solução da EARG para o regulador de estados é sugerido, a prova de fato de que sob as condições de PRMO a solução da EARG para o regulador e para o observador de estados tende a uma matriz nula e o procedimento de recuperação da malha objetivo que demonstra o comportamento assintótico da matriz de transferência de malha aberta. Por fim, as relações entre o comportamento assintótico dos reguladores e observadores com as funções de custo  $J_2(T_{zw})$  e  $J_\infty(T_{zw}, \infty)$  serão analisados e discutidos.

#### 3.1 O Problema de Jogo Linear Quadrático

Como uma forma de motivação para compreender o comportamento assintótico dos reguladores baseados na síntese  $\mathcal{H}_\infty$ , considere a EARG do regulador de estados

$$A^T X + XA + \gamma^{-2} XLL^T X - \rho^{-2} XBB^T X + H^T H = 0, \quad (3.1)$$

onde  $X = X^T \geq 0$  é a solução única de (3.1) que mantém  $A + \gamma^{-2}LL^T X - \rho^{-2}BB^T X$  assintoticamente estável. O problema regulador  $\mathcal{H}_\infty$  associado à EARG em (3.1) tem sua

função de custo dada por [28, 29]

$$0 \leq \min_u \max_{w_x} \int_0^{+\infty} (z_x^T z_x + \rho^2 u^T u - \gamma^2 w_x^T w_x) dt = x^T(0) X x(0) , \quad (3.2)$$

onde o sinal “ótimo” de entrada (para qualquer estado inicial  $x(0)$ ) é dado por

$$u = K_C x = \rho^{-2} B^T X x , \quad (3.3)$$

e o sinal “ótimo” de distúrbio (também para qualquer  $x(0)$ ) é dado por

$$w_x = \gamma^{-2} L^T X x . \quad (3.4)$$

Uma vez que o sistema dinâmico em questão é linear e a função de custo é quadrática, o jogo min-max em (3.2) é chamado de *problema de jogo linear quadrático* (*linear quadratic game problem*), em analogia ao problema regulador linear quadrático, no qual o sinal  $u$  tem o papel de um “jogador” minimizador e sua função é minimizar a função de custo em oposição ao sinal  $w_x$ , que possui o papel de um “jogador” maximizador cuja função é maximizar a função de custo.

Em outras palavras, o problema de jogo linear quadrático pode ser enunciado da seguinte forma: dado o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Lw_x , \\ z_x &= Hx , \\ z_u &= \rho Iu , \end{aligned} \quad (3.5)$$

com um estado inicial não-nulo  $x(0)$ , encontre um sinal de entrada  $u$  minimizante e um sinal de distúrbio  $w_x$  maximizante que levam o estado final do sistema a zero, ou seja,  $x(\infty) = 0$ , em um caminho ótimo dentro de todas as trajetórias possíveis deste sistema.

No entanto, considere agora que o parâmetro  $\rho$  tende a zero pela direita, ou seja,  $\rho \rightarrow 0^+$ . Agora a função de custo do regulador  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser expressa em função das seguintes desigualdades

$$0 \leq \max_{w_x} \int_0^{+\infty} (z_x^T z_x - \gamma^2 w_x^T w_x) dt \leq \int_0^{+\infty} z_x^T z_x dt . \quad (3.6)$$

A transformada de Laplace do sinal  $z_x$  é

$$Z_x(s) = H\Phi(s)BU(s) + H\Phi(s)x(0) , \quad (3.7)$$

e, sendo assim, deve existir um sinal  $u$  limitado em magnitude, cuja transformada de

Laplace deve ser

$$U(s) = - (H\Phi(s)B)^{-1} H\Phi(s)x(0) , \quad (3.8)$$

de forma que o sinal  $Z_x(s)$  seja nulo e então a função de custo se aproxima de zero para qualquer estado inicial  $x(0)$ . Observe que tal sinal  $U(s)$  existirá se  $H\Phi(s)B$  for de fase-mínima e quadrada, de modo que sua inversa exista e não possua modos instáveis.

Logo, a pergunta que surge deste fato é: quando  $\rho$  tende a zero pela direita, qual deve ser a solução  $X = X^T \geq 0$  de (3.1) capaz de manter a função de custo nula nesta trajetória possível deste sistema? Observe que na trajetória dada por (3.8) o sinal de distúrbio maximizante  $w_x$  deverá tender a zero para manter a segunda desigualdade em (3.6).

## 3.2 O Comportamento Assintótico dos Reguladores e Observadores baseados na Síntese $\mathcal{H}_\infty$

Esta seção se dedica a provar que a solução da EARG para o regulador ou observador de estados tende a uma matriz nula quando o parâmetro  $\rho$  (parâmetro  $\mu$  para o observador, no caso *dual*) tende a zero pela direita se determinadas condições forem atendidas. Inicialmente será dada atenção para a solução da EARG para o regulador de estados.

Considere as seguintes Equações Algébricas de Riccati para o regulador de estados

$$A^T X_2 + X_2 A - \rho^{-2} X_2 B B^T X_2 + H^T H = 0 , \quad (3.9)$$

$$A^T X_\infty + X_\infty A + \gamma^{-2} X_\infty L L^T X_\infty - \rho^{-2} X_\infty B B^T X_\infty + H^T H = 0 . \quad (3.10)$$

A equação (3.9) surge da síntese  $\mathcal{H}_2$  enquanto que a equação (3.10) surge da síntese  $\mathcal{H}_\infty$ , o que justifica os subscritos  $_2$  e  $_\infty$  na solução  $X$ . Conforme explicitado no capítulo anterior, se  $X_2 \geq 0$  e  $X_\infty \geq 0$  são, respectivamente, soluções para (3.9) e (3.10), então elas são únicas<sup>1</sup> e através da propriedade da monotonicidade

$$X_2 \leq X_\infty . \quad (3.11)$$

Além disso, se  $X = X^T \geq 0$  é a solução para uma EAR, então a matriz de sistema da malha fechada  $A_{CL}$  deve ser assintoticamente estável [7], ou seja, os autovalores de  $A_{CL}$

<sup>1</sup>A solução estabilizante (ou seja, positiva semidefinida) de uma EAR é sempre única [31]. Para o caso  $\mathcal{H}_2$  a solução é ótima, pois minimiza  $\|T_{zw}\|_2$ , e para o caso  $\mathcal{H}_\infty$  é subótima, pois faz com que  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ . Se  $\gamma = \gamma_{\text{opt}}$  então a solução para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$  será ótima.

devem estar todos situados no semiplano esquerdo do plano complexo, excluindo o eixo imaginário. No caso da planta generalizada abordada neste trabalho

$$A_{CL} = A - \rho^{-2}BB^T X_2 \quad (3.12)$$

é a matriz de sistema da malha fechada para a síntese  $\mathcal{H}_2$  e

$$A_{CL} = A_\infty - \rho^{-2}BB^T X_\infty \quad (3.13)$$

é a matriz de sistema da malha fechada para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$ , onde

$$A_\infty = A + \gamma^{-2}LL^T X_\infty . \quad (3.14)$$

Sendo assim, existem duas condições para que  $X_2$  e  $X_\infty$  sejam iguais:

- A primeira é imediata e conhecida: se  $\gamma$  tender ao infinito, (3.10) tende a (3.9) e desta forma  $X_\infty$  tende a  $X_2$ .
- A segunda, não imediata, requer que o parâmetro  $\rho$  tenda a zero pela direita. Na realidade, esta condição, como será vista a seguir, diz que ambas as soluções tendem a uma matriz nula. A implicação desta afirmação no sentido físico será dado *à posteriori*.

Para a síntese  $\mathcal{H}_2$ , o fato que  $X_2$  tende a uma matriz nula foi amplamente estudado e demonstrado em [4] como a máxima “exatidão” que reguladores ou filtros lineares ótimos podem alcançar e que produziu um resultado fundamental no desenvolvimento do procedimento de recuperação da malha por [3]. Desta forma, o objetivo desta subseção é estender este conhecido e importante resultado para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$  e, para este fim, enuncia-se o seguinte teorema.

**Teorema 3.1.** *Considere a matriz de transferência  $H\Phi(s)B$ . Se  $H\Phi(s)B$  for quadrada e de fase-mínima (sem zeros de transmissão no SPD aberto) e o escalar  $\rho$  tender a zero pela direita, então a solução  $X = X^T \geq 0$  da EARG em (3.1) tende a uma matriz nula.*

**Prova.** A estratégia geral para provar este teorema é a prova por construção. Primeiro provar-se-á que  $X \rightarrow 0$  quando  $\rho \rightarrow 0^+$  é uma solução possível para a EARG em (3.1) se  $H\Phi(s)B$  é quadrada. Em seguida, provar-se-á que  $X \rightarrow 0$  quando  $\rho \rightarrow 0^+$  mantém  $A_{CL}$  estável se  $H\Phi(s)B$  é de fase-mínima.

Para estabelecer o primeiro caso, suponha que  $X_2 = X_\infty = X \rightarrow 0$  é verdadeiro quando  $\rho \rightarrow 0^+$ . Desta forma, ambas as EARs em (3.9) e (3.10) irão tender a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} [\rho^{-1} B^T X]^T [\rho^{-1} B^T X] = H^T H , \quad (3.15)$$

uma vez que o termo  $H^T H$  é finito e não depende de  $\rho$ . Note que o termo extra  $\gamma^{-2} X L L^T X$ , que surge da síntese  $\mathcal{H}_\infty$ , também se torna uma matriz nula. Note também que o membro esquerdo de (3.15) é uma indeterminação do tipo 0/0. De [4], considere o seguinte lema.

**Lema 3.1.** *Considere a seguinte equação matricial*

$$V^T V = Q , \quad (3.16)$$

onde  $V$  é uma matriz desconhecida de dimensão  $v \times q$  com  $v \leq q$  e  $Q$  é uma matriz conhecida e não-negativa definida simétrica de dimensão  $q \times q$ . A equação em (3.16) possui uma solução se, e somente se,

$$\text{posto}(Q) \leq v . \quad (3.17)$$

Se a condição expressa em (3.17) for satisfeita então a solução geral de (3.16) é da seguinte forma

$$V = UR , \quad (3.18)$$

onde a matriz  $R$  de dimensão  $v \times q$  é qualquer solução de (3.16) e  $U$  é qualquer matriz unitária arbitrária de dimensão  $v \times v$ .

Através do Lema 3.1, o limite

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} [\rho^{-1} B^T X]^T [\rho^{-1} B^T X] \quad (3.19)$$

em (3.15) irá existir se a matriz  $H^T H$  tiver posto menor ou igual a  $p$ , onde  $p$  é o número de entradas da planta ( $\dim(u) = p$ ), uma vez que  $B^T X$  fornece uma matriz de dimensão  $p \times n$ . Observe também que  $H^T H$  é, por construção, simétrica e positiva semidefinida. Uma vez que

$$\text{posto}(H^T H) = \text{posto}(H H^T) = \text{posto}(H) = \text{posto}(H^T) = m , \quad (3.20)$$

se  $H\Phi(s)B$  for quadrada, então  $m = p$ , e a condição em (3.17) é satisfeita através da igualdade. Desta forma, conclui-se que a hipótese  $X \rightarrow 0$  quando  $\rho$  tende a zero pela di-

reita é possível se  $H\Phi(s)B$  for quadrada (note que isto é uma condição suficiente, mas não necessária, e há um certo *conservadorismo* aqui que se justificará adiante). Entretanto, ainda é necessário verificar se  $X \rightarrow 0$  é a única solução estabilizante admissível para a EARG em (3.1).

Sabendo-se que  $A_\infty - BK_C$  deve ser assintoticamente estável, onde  $K_C = \rho^{-2}B^T X$ , considere os seguintes passos

$$\det(sI - A_\infty + BK_C) = \det(sI - A_\infty) \det[I + BK_C(sI - A_\infty)^{-1}] , \quad (3.21)$$

e, por uma propriedade matricial

$$\det(sI - A_\infty + BK_C) = \det(sI - A_\infty) \det[I + K_C(sI - A_\infty)^{-1} B] . \quad (3.22)$$

Suponha agora que  $H\Phi(s)B$  é uma matriz de transferência quadrada e então as condições do Lema 3.1 são satisfeitas. Então, pode-se reescrever (3.15) como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K_C = \rho^{-1}WH \quad (3.23)$$

onde  $W$  é qualquer matriz ortogonal. Sem perda de generalidade, faça  $W$  ser igual a uma matriz identidade de dimensão compatível. Agora, se  $\rho$  tender a zero pela direita e utilizando-se (3.23), pode-se reescrever o membro direito de (3.22) como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \det(sI - A_\infty + BK_C) = \det(sI - A) \det(I + \rho^{-1}H\Phi(s)B) . \quad (3.24)$$

Em geral, dada uma matriz de transferência quadrada  $G(s)$ , os pólos e zeros multivariáveis de  $G(s)$  são os pólos e zeros de  $\det(G(s))$  se não houver nenhum cancelamento de pólos e zeros indevidos (pólos e zeros em direções diferentes) [2]. Observando-se (3.24), vê-se que as raízes da equação característica da malha fechada que se mantêm finitos quando  $\rho$  tende a zero pela direita irão se aproximar das raízes de

$$\det(sI - A) \det(H\Phi(s)B) \quad (3.25)$$

e então, considerando a seguinte notação

$$\det(H\Phi(s)B) = \frac{\psi(s)}{\phi(s)} , \quad (3.26)$$

onde  $\psi(s)$  é o polinômio de zeros multivariáveis de  $H\Phi(s)B$  e  $\phi(s)$  é o polinômio de pólos multivariáveis de  $H\Phi(s)B$ . Conclui-se então que os pólos finitos da malha fechada irão se aproximar de  $\psi(s)$ , uma vez que  $\phi(s) = \det(sI - A)$ . Uma vez que foi assumido que o par

$(A, B)$  é controlável e o par  $(H, A)$  é observável (desde a definição da planta generalizada),  $(A, B, H)$  possui realização mínima e, portanto, não há cancelamento de pólos e zeros.

Este resultado mostra que se  $H\Phi(s)B$  apresenta um ou mais zeros no SPD aberto a hipótese de que  $X \rightarrow 0$  pode não ser verdadeira, uma vez que  $A_\infty - BK_C$  é incondicionalmente estável. Por outro lado, se todos os zeros multivariáveis de  $H\Phi(s)B$  se situam no SPE aberto conclui-se que a hipótese  $X \rightarrow 0$  é obrigatoriamente verdadeira, uma vez que a solução estabilizante para a EARG em (3.1) é única.

□

O teorema anterior prova que quando  $\rho$  tende a zero pela direita a solução da EAR do regulador tende a uma matriz nula, resultado este que já era conhecido para a síntese  $\mathcal{H}_2$ /LQG e que agora foi estendido para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$ . Como uma consequência direta do Teorema 3.1, tem-se o seguinte corolário:

**Corolário 3.1.** *Considere a matriz de transferência  $H\Phi(s)B$ . Se  $H\Phi(s)B$  for quadrada e de fase-mínima (sem zeros multivariáveis no SPD aberto) e o escalar  $\rho$  tender a zero pela direita, então*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho K_C = WH . \quad (3.27)$$

**Prova:** A prova decorre imediatamente de (3.15) e do Lema 3.1 uma vez que o Teorema 3.1 é válido. □

Considerando o problema de jogo linear quadrático novamente, o questionamento feito e que motivou esta seção era qual deveria ser a solução  $X$  de (3.1) capaz de manter a trajetória deste sistema e consequentemente levar o distúrbio maximizado  $w_x$  a zero quando  $\rho \rightarrow 0^+$ . Provou-se então que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} X = 0 . \quad (3.28)$$

Com isto, tem-se dois fatos:

- De acordo com o afirmado na seção 3.1, quando  $\rho$  tende a zero pela direita é suficiente para o sinal  $U(s)$  existir que a matriz  $H\Phi(s)B$  seja quadrada e de fase-mínima. Tais condições são também suficientes para provar o Teorema 3.1;
- Com as condições suficientes impostas, provou-se que quando  $\rho$  tende a zero pela direita, a matriz  $X$  tende a uma matriz nula. Isto leva o distúrbio maximizante  $w_x$

a zero, condição afirmada na seção 3.1 para manter as desigualdades em (3.6), e por consequência para o sinal  $U(s)$  existir.

Isto mostra que as suposições e conclusões feitas na Seção 3.1 se mantêm com os resultados do Teorema 3.1.

Considerar-se-á agora o caso dual, ou seja, o comportamento assintótico do observador de estados. Considere as seguintes Equações Algébricas de Riccati para o observador de estados

$$Y_2 A^T + A Y_2 - \mu^{-2} Y_2 C^T C Y_2 + L L^T = 0 \quad (3.29)$$

$$Y_\infty A^T + A Y_\infty + \gamma^{-2} Y_\infty H^T H Y_\infty - \mu^{-2} Y_\infty C^T C Y_\infty + L L^T = 0 . \quad (3.30)$$

A equação (3.29) surge da síntese  $\mathcal{H}_2$  enquanto que a equação (3.30) surge da síntese  $\mathcal{H}_\infty$ , o que justifica os subscritos  $_2$  e  $_\infty$  na solução  $Y$ . Conforme explicitado no capítulo anterior, se  $Y_2 = Y_2^T \geq 0$  e  $Y_\infty = Y_\infty^T \geq 0$  são, respectivamente, soluções para (3.29) e (3.30), então elas são únicas e através da propriedade da monotonicidade

$$Y_2 \leq Y_\infty . \quad (3.31)$$

Além disso, se  $Y \geq 0$  é solução para uma EAR, então a matriz de sistema da malha fechada  $A_{CL}$  deve ser assintoticamente estável [7], ou seja, os autovalores de  $A_{CL}$  devem estar todos situados no SPE do plano complexo, excluindo o eixo imaginário. No caso da planta generalizada abordada neste trabalho

$$A_{CL} = A - \mu^{-2} Y_2 C^T C \quad (3.32)$$

é a matriz de estados da malha fechada para a síntese  $\mathcal{H}_2$  e

$$A_{CL} = A_\infty - \mu^{-2} Y_\infty C^T C \quad (3.33)$$

é a matriz de estados da malha fechada para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$ , onde

$$A_\infty = A + \gamma^{-2} Y_\infty H^T H . \quad (3.34)$$

Sendo assim, existem duas condições para que  $Y_2$  e  $Y_\infty$  sejam iguais:

- A primeira é imediata: se  $\gamma$  tender ao infinito, (3.30) tende a (3.29) e desta forma  $Y_\infty$  tende a  $Y_2$ .
- A segunda, não imediata, requer que o parâmetro  $\mu$  tenda a zero pela direita. Na

realidade, esta condição, como será vista a seguir, diz que ambas as soluções tendem a uma matriz nula. A implicação desta afirmação no sentido físico será dado *à posteriori*.

Para a síntese  $\mathcal{H}_2$ , o fato que  $Y_2$  tende a uma matriz nula foi amplamente estudado e demonstrado em [4] como a máxima “exatidão” que filtros lineares ótimos podem alcançar e que produziu um resultado fundamental no desenvolvimento do procedimento de recuperação da malha por Doyle e Stein [3]. Desta forma, o objetivo desta subseção é estender este conhecido e importante resultado para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$  e, para este fim, enuncia-se o seguinte teorema.

**Teorema 3.2.** *Considere a matriz de transferência  $C\Phi(s)L$ . Se  $C\Phi(s)L$  for quadrada e de fase-mínima (sem zeros de transmissão no SPD aberto) e o escalar  $\mu$  tender a zero pela direita, então a solução  $Y = Y^T \geq 0$  da EARG*

$$YA^T + AY + \gamma^{-2}YH^T HY - \mu^{-2}YC^T CY + LL^T = 0, \quad (3.35)$$

tende a uma matriz nula.

**Prova.** A estratégia geral para provar este teorema é a mesma que para o Teorema 3.1. Primeiro provar-se-á que  $Y \rightarrow 0$  quando  $\mu \rightarrow 0^+$  é uma solução possível para a EARG em (3.35) se  $C\Phi(s)L$  é quadrada. Em seguida, provar-se-á que  $Y \rightarrow 0$  quando  $\mu \rightarrow 0^+$  mantém  $A_{CL}$  estável se  $C\Phi(s)L$  é de fase-mínima.

Para estabelecer o primeiro caso, assuma que a hipótese  $Y_2 = Y_\infty = Y \rightarrow 0$  é verdadeira quando  $\mu \rightarrow 0^+$ . Desta forma, ambas as EARs em (3.29) e (3.30) irão tender a

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} [\mu^{-1}CY]^T [\mu^{-1}CY] = LL^T, \quad (3.36)$$

uma vez que o termo  $LL^T$  é finito e não depende de  $\mu$ . Note que o termo extra  $\gamma^{-2}YH^T HY$ , que surge da síntese  $\mathcal{H}_\infty$ , também se torna uma matriz nula. Note também que o membro esquerdo de (3.36) é uma indeterminação do tipo 0/0. Através do Lema 3.1, o limite em (3.36) irá existir se a matriz  $LL^T$  tiver posto menor ou igual a  $m$ , onde  $m$  é o número de saídas da planta ( $\dim(y) = m$ ), uma vez que  $CY$  fornece uma matriz de dimensão  $m \times n$ . Observe também que  $LL^T$  é, por construção, simétrica e positiva-semidefinida. Uma vez que

$$\text{posto}(LL^T) = \text{posto}(L^T L) = \text{posto}(L) = \text{posto}(L^T) = p, \quad (3.37)$$

se  $C\Phi(s)L$  for quadrada, então  $p = m$ , e a condição em (3.17) é satisfeita através da igualdade. Desta forma, conclui-se que a hipótese  $Y \rightarrow 0$  quando  $\mu$  tende a zero pela

direita é possível se  $C\Phi(s)L$  for quadrada (note que isto é uma condição suficiente, mas não necessária, e há um certo *conservadorismo* aqui que se justificará adiante). Entretanto, ainda é necessário verificar se  $Y \rightarrow 0$  é a única solução estabilizante admissível para a EARG em (3.35).

Sabendo-se que  $A_\infty - K_F C$  deve ser assintoticamente estável, onde  $K_F = \mu^{-2} Y C^T$ , considere os seguintes passos

$$\det(sI - A_\infty + K_F C) = \det(sI - A_\infty) \det[I + K_F C (sI - A_\infty)^{-1}] , \quad (3.38)$$

e, por uma propriedade matricial

$$\det(sI - A_\infty + K_F C) = \det(sI - A_\infty) \det[I + C (sI - A_\infty)^{-1} K_F] . \quad (3.39)$$

Suponha agora que  $C\Phi(s)L$  é uma matriz de transferência quadrada e então as condições do Lema 3.1 são satisfeitas. Então, pode-se reescrever (3.36) como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K_F = \mu^{-1} L W , \quad (3.40)$$

onde  $W$  é qualquer matriz ortogonal. Sem perda de generalidade, faça  $W$  ser igual a uma matriz identidade de dimensão compatível. Agora, se  $\mu$  tender a zero pela direita e utilizando-se (3.40), pode-se reescrever o membro direito de (3.39) como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \det(sI - A_\infty + K_F C) = \det(sI - A) \det(I + \mu^{-1} C\Phi(s)L) . \quad (3.41)$$

Observando-se (3.41), vê-se que as raízes da equação característica da malha fechada que se mantêm finitas quando  $\mu$  tende a zero pela direita irão se aproximar das raízes de

$$\det(sI - A) \det(C\Phi(s)L) \quad (3.42)$$

e, então, considerando a seguinte notação

$$\det(C\Phi(s)L) = \frac{\vartheta(s)}{\phi(s)} , \quad (3.43)$$

onde  $\vartheta(s)$  é o polinômio de zeros multivariáveis de  $C\Phi(s)L$  e  $\phi(s)$  é o polinômio de pólos multivariáveis de  $C\Phi(s)L$ . Conclui-se então que os pólos finitos da malha fechada irão se aproximar de  $\vartheta(s)$ , uma vez que  $\phi(s) = \det(sI - A)$ . Uma vez que se assumiu que o par  $(A, L)$  é controlável e o par  $(C, A)$  é observável (desde a definição da planta generalizada),  $(A, L, C)$  possui realização mínima e, portanto, não há cancelamento de pólos e zeros.

Este resultado mostra que se  $C\Phi(s)L$  apresenta um ou mais zeros no SPD aberto a

hipótese de que  $Y \rightarrow 0$  pode não ser verdadeira, uma vez que  $A_\infty - K_F C$  é incondicionalmente estável. Por outro lado, se todos os zeros multivariáveis de  $C\Phi(s)L$  se situam no SPE aberto conclui-se que a hipótese  $Y = 0$  é obrigatoriamente verdadeira, uma vez que a solução estabilizante para a EARG em (3.35) é única.  $\square$

O teorema anterior prova que quando  $\mu$  tende a zero pela direita a solução da EAR do observador tende a uma matriz nula, resultado este que já era conhecido para a síntese  $\mathcal{H}_2/\text{LQG}$  e que agora foi estendido para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$ . Como uma consequência direta do Teorema 3.2, tem-se o seguinte corolário.

**Corolário 3.2.** *Considere a matriz de transferência  $C\Phi(s)L$ . Se  $C\Phi(s)L$  for quadrada e de fase-mínima e o escalar  $\mu$  tender a zero pela direita, então*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \mu K_F = LW . \quad (3.44)$$

**Prova:** A prova decorre imediatamente de (3.36) e do Lema 3.1 uma vez que o Teorema 3.2 é válido.  $\square$

### 3.3 Procedimento de Recuperação da Malha Objetivo

Nesta seção será detalhado o procedimento de recuperação da malha objetivo para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$ , ou seja, será aplicado o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo para o controle  $\mathcal{H}_\infty$  dada a planta com estrutura definida no capítulo anterior. Primeiro será mostrado o procedimento de recuperação da matriz de transferência de malha aberta vista pela saída  $G(s)K(s)$  e depois da matriz de transferência de malha aberta vista pela entrada  $K(s)G(s)$ .

Considere a representação em matriz de transferência do controlador  $K(s)$  via síntese  $\mathcal{H}_\infty$  mostrada no capítulo anterior

$$K(s) = K_C (sI - A - \gamma^{-2}LL^T X + BK_C + ZK_F C)^{-1} ZK_F , \quad (3.45)$$

onde  $Z = (I - \gamma^{-2}YX)^{-1}$ .

**Corolário 3.3.** *Considere a matriz de transferência  $H\Phi(s)B$ . Se  $H\Phi(s)B$  for quadrada e de fase-mínima e o escalar  $\rho$  tender a zero pela direita, então a matriz de transferência*

do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser reduzida a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = K_C (sI - A + BK_C + K_F C)^{-1} K_F . \quad (3.46)$$

**Prova:** Pelo Teorema 3.1,  $X \rightarrow 0$ , e então  $Z \rightarrow I$ . Logo, avaliando o controlador em (3.45) com essas condições resulta em (3.46).  $\square$

**Teorema 3.3.** *Considere a matriz de transferência da planta de processo  $C\Phi(s)B$ . Se  $C\Phi(s)B$  for quadrada e de fase-mínima e o escalar  $\rho$  tender a zero pela direita, então o controlador em (3.46) se reduz a*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = (C\Phi(s)B)^{-1} C\Phi(s)K_F \quad (3.47)$$

e conseqüentemente a matriz de transferência da malha aberta vista pela saída é

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} G(s)K(s) = C\Phi(s)K_F , \quad (3.48)$$

que é a matriz de transferência do observador de estados.

**Prova:** Considere a seguinte expressão, cuja finalidade é simplificar as expressões a serem desenvolvidas adiante

$$\bar{\Phi}(s) = (\Phi^{-1}(s) + K_F C)^{-1} . \quad (3.49)$$

Utilizando-se a expressão (3.49) com o intuito de simplificar (3.46), tem-se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \left( \bar{\Phi}^{-1}(s) + BK_C \right)^{-1} K_F . \quad (3.50)$$

Desenvolvendo-se (3.50), através do Lema da Matriz Inversa, resulta em

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \left[ \bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(s)B (I + K_C \bar{\Phi}(s)B)^{-1} K_C \bar{\Phi}(s) \right] K_F . \quad (3.51)$$

Com manipulações algébricas, pode-se reescrever (3.51) como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \bar{\Phi}(s)K_F - K_C \bar{\Phi}(s)B (I + K_C \bar{\Phi}(s)B)^{-1} K_C \bar{\Phi}(s)K_F . \quad (3.52)$$

Agrupando-se os termos comuns, (3.52) pode ser reescrita como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = \left[ I - K_C \bar{\Phi}(s)B (I + K_C \bar{\Phi}(s)B)^{-1} \right] K_C \bar{\Phi}(s)K_F , \quad (3.53)$$

que por sua vez, através de propriedades matriciais, resulta em

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = (I + K_C \bar{\Phi}(s)B)^{-1} K_C \bar{\Phi}(s)K_F . \quad (3.54)$$

Multiplicando-se o membro direito da equação (3.54) por  $\rho^{-1}\rho$  resulta em

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = (\rho I + \rho K_C \bar{\Phi}(s)B)^{-1} \rho K_C \bar{\Phi}(s)K_F . \quad (3.55)$$

Pelo Corolário 3.1, pode-se reescrever (3.55) como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = (WH\bar{\Phi}(s)B)^{-1} WH\bar{\Phi}(s)K_F , \quad (3.56)$$

onde  $W$  é qualquer matriz ortogonal. Tomando-se  $W$  como a matriz identidade e escolhendo-se  $H = C$ , tem-se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = (C\bar{\Phi}(s)B)^{-1} C\bar{\Phi}(s)K_F , \quad (3.57)$$

Desenvolvendo o termo  $\bar{\Phi}(s)$  pelo Lema da Matriz Inversa, tem-se que (3.57) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) &= \{C [\Phi(s) - \Phi(s)K_F (I + C\Phi(s)K_F)^{-1} C\Phi(s)] B\}^{-1} \\ &\{C [\Phi(s) - \Phi(s)K_F (I + C\Phi(s)K_F)^{-1} C\Phi(s)] K_F\} . \end{aligned} \quad (3.58)$$

Através de manipulações algébricas, pode-se reescrever (3.58) como

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) &= [C\Phi(s)B - C\Phi(s)K_F (I + C\Phi(s)K_F)^{-1} C\Phi(s)B]^{-1} \\ &[C\Phi(s)K_F - C\Phi(s)K_F (I + C\Phi(s)K_F)^{-1} C\Phi(s)K_F] . \end{aligned} \quad (3.59)$$

Agrupando-se os termos comuns de (3.59) resulta em

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) &= \{[I - C\Phi(s)K_F (I + C\Phi(s)K_F)^{-1}] C\Phi(s)B\}^{-1} \\ &\{[I - C\Phi(s)K_F (I + C\Phi(s)K_F)^{-1}] C\Phi(s)K_F\} . \end{aligned} \quad (3.60)$$

Através de propriedades matriciais, a equação (3.60) pode ser reescrita como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = \{(I + C\Phi(s)K_F)^{-1} C\Phi(s)B\}^{-1} (I + C\Phi(s)K_F)^{-1} C\Phi(s)K_F . \quad (3.61)$$

Lançando-se mão da propriedade de inversão de uma multiplicação de matrizes, pode-

se reescrever (3.61) como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = (C\Phi(s)B)^{-1} (I + C\Phi(s)K_F) (I + C\Phi(s)K_F)^{-1} C\Phi(s)K_F . \quad (3.62)$$

Logo, de (3.62) é imediato concluir que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = (C\Phi(s)B)^{-1} C\Phi(s)K_F , \quad (3.63)$$

e, por consequência,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} G(s)K(s) = C\Phi(s)K_F . \quad (3.64)$$

□

Logo, a equação (3.64) mostra que a matriz de transferência da malha aberta  $G(s)K(s)$  tende à matriz de transferência do observador de estados  $C\Phi(s)K_F$ , ou seja, que o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo ocorre para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$  da mesma forma e com as mesmas condições que no controle  $\mathcal{H}_2$ /LQG. É interessante ressaltar que, embora tanto no controle LQG quanto na síntese  $\mathcal{H}_\infty$  a malha a ser recuperada é o observador de estados, a dinâmica será diferente uma vez que o ganho  $K_F$  não é o mesmo para ambas as sínteses.

Também é importante ressaltar a necessidade da planta  $G(s)$  ser quadrada e de fase-mínima: através de (3.63), verifica-se que nas condições do Princípio de Recuperação da Malha Objetivo o controlador  $K(s)$  produz efetivamente uma inversa da planta. Desta forma, a planta  $G(s)$  deve ser quadrada para sua inversa existir e caso  $G(s)$  possua zeros de transmissão (não ser de fase-mínima) o controlador  $K(s)$  possuiria pólos no SPD, levando a malha de controle a instabilidade (o sistema não seria *internamente estável*). As condições do Teorema 3.3 são obtidas ao se tomar as condições dos Corolários 3.1 e 3.3 para  $H = C$ .

Uma vez que quando  $\rho$  tende a zero pela direita, as soluções  $X_2 = X_\infty = X \rightarrow 0$ , é natural esperar que a matriz de transferência da malha aberta  $G(s)K(s)$  tenda à matriz de transferência do observador de estados, uma vez que  $X \rightarrow 0$  e isto já está provado para a síntese  $\mathcal{H}_2$ /LQG. Entretanto, o desenvolvimento das equações do controlador é feito de forma a reforçar e estender o conceito do Princípio de Recuperação da Malha Objetivo para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$ .

Também é interessante ressaltar que o Teorema 3.3 será válido para o controlador com

a seguinte estrutura [32]

$$K(s) = K_C (sI - A + \gamma^{-2}LL^T X + BK_C)^{-1} K_F , \quad (3.65)$$

uma vez que  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} X = 0$  é válido para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$ , conforme o Teorema 3.1 comprova.

Será demonstrado agora o procedimento *dual*, conhecido como Princípio de Recuperação da Malha Objetivo pela entrada. Considere a representação em matriz de transferência do controlador  $K(s)$  via síntese  $\mathcal{H}_\infty$  mostrada no capítulo anterior

$$K(s) = K_C Z (sI - A - \gamma^{-2}YH^T H + BK_C Z + K_F C)^{-1} K_F , \quad (3.66)$$

onde  $Z = (I - \gamma^{-2}YX)^{-1}$ .

**Corolário 3.4.** *Considere a matriz de transferência  $C\Phi(s)L$ . Se  $C\Phi(s)L$  for quadrada e de fase-mínima e o escalar  $\mu$  tender a zero pela direita, então a matriz de transferência do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  em (3.66) pode ser reduzida a*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s) = K_C (sI - A + BK_C + K_F C)^{-1} K_F . \quad (3.67)$$

**Prova:** Pelo Teorema 3.2,  $Y \rightarrow 0$ , e então  $Z \rightarrow I$ . Logo, avaliando o controlador em (3.66) com essas condições resulta em (3.67).  $\square$

**Teorema 3.4.** *Considere a matriz de transferência da planta de processo (planta a ser controlada)  $C\Phi(s)B$ . Se  $C\Phi(s)B$  for quadrada e de fase-mínima e o escalar  $\mu$  tender a zero pela direita, então o controlador em (3.67) se reduz a*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \Phi(s)B (C\Phi(s)B)^{-1} \quad (3.68)$$

e, conseqüentemente, a matriz de transferência da malha aberta vista pela entrada será

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s)G(s) = K_C \Phi(s)B , \quad (3.69)$$

que é a matriz de transferência do regulador.

**Prova:** Considere a seguinte expressão, cuja finalidade é simplificar as expressões a serem desenvolvidas adiante

$$\bar{\Phi}(s) = (\Phi^{-1}(s) + BK_C)^{-1} \quad (3.70)$$

Utilizando-se a expressão (3.70) com o intuito de simplificar (3.67), tem-se

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \left( \bar{\Phi}^{-1}(s) + K_F C \right)^{-1} K_F . \quad (3.71)$$

Desenvolvendo-se (3.71) através do Lema da Matriz Inversa, segue que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \left[ \bar{\Phi}(s) - \bar{\Phi}(s)K_F (I + C\bar{\Phi}(s)K_F)^{-1} C\bar{\Phi}(s) \right] K_F . \quad (3.72)$$

Com manipulações algébricas, pode-se reescrever (3.72) como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \bar{\Phi}(s)K_F - K_C \bar{\Phi}(s)K_F (I + C\bar{\Phi}(s)K_F)^{-1} C\bar{\Phi}(s)K_F . \quad (3.73)$$

Agrupando-se os termos comuns, (3.73) pode ser reescrita como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \bar{\Phi}(s)K_F \left[ I - (I + C\bar{\Phi}(s)K_F)^{-1} C\bar{\Phi}(s)K_F \right] , \quad (3.74)$$

que por sua vez, através de propriedades matriciais, resulta em

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \bar{\Phi}(s)K_F (I + C\bar{\Phi}(s)K_F)^{-1} . \quad (3.75)$$

Multiplicando-se o membro direito da equação (3.75) por  $\mu^{-1}\mu$  resulta em

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \bar{\Phi}(s)\mu K_F (\mu I + C\bar{\Phi}(s)\mu K_F)^{-1} . \quad (3.76)$$

Pelo Corolário 3.2, pode-se reescrever (3.76) como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \bar{\Phi}(s)LW (C\bar{\Phi}(s)LW)^{-1} , \quad (3.77)$$

onde  $W$  é qualquer matriz ortogonal. Tomando-se  $W = I$  e escolhendo-se  $L = B$ , tem-se

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \bar{\Phi}(s)B (C\bar{\Phi}(s)B)^{-1} , \quad (3.78)$$

Desenvolvendo o termo  $\bar{\Phi}(s)$  pelo Lema da Matriz Inversa, tem-se que (3.78) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s) = & \left\{ K_C \left[ \Phi(s) - \Phi(s)B (I + K_C \Phi(s)B)^{-1} K_C \Phi(s) \right] B \right\} \\ & \left\{ C \left[ \Phi(s) - \Phi(s)B (I + K_C \Phi(s)B)^{-1} K_C \Phi(s) \right] B \right\}^{-1} . \end{aligned} \quad (3.79)$$

Através de manipulações algébricas, pode-se reescrever (3.79) como

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s) = & \left[ K_C \Phi(s)B - K_C \Phi(s)B (I + K_C \Phi(s)B)^{-1} K_C \Phi(s)B \right] \\ & \left[ C\Phi(s)B - C\Phi(s)B (I + K_C \Phi(s)B)^{-1} K_C \Phi(s)B \right]^{-1} . \end{aligned} \quad (3.80)$$

Agrupando-se os termos comuns de (3.80) resulta em

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s) = \left\{ K_C \Phi(s) B \left[ I - (I + K_C \Phi(s) B)^{-1} K_C \Phi(s) B \right] \right\} \left\{ C \Phi(s) B \left[ I - (I + K_C \Phi(s) B)^{-1} K_C \Phi(s) B \right] \right\}^{-1} . \quad (3.81)$$

Utilizando-se a Identidade Matricial A2 novamente, (3.81) pode ser reescrita como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \Phi(s) B (I + K_C \Phi(s) B)^{-1} \left[ C \Phi(s) B (I + K_C \Phi(s) B)^{-1} \right]^{-1} . \quad (3.82)$$

Lançando-se mão da propriedade de inversão de uma multiplicação de matrizes, pode-se reescrever (3.82) como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \Phi(s) B (I + K_C \Phi(s) B)^{-1} (I + K_C \Phi(s) B) (C \Phi(s) B)^{-1} . \quad (3.83)$$

Logo, de (3.83) é imediato concluir que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = K_C \Phi(s) B (C \Phi(s) B)^{-1} , \quad (3.84)$$

e, por consequência,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) G(s) = K_C \Phi(s) B . \quad (3.85)$$

□

Logo, a equação (3.85) mostra que a matriz de transferência da malha aberta (vista pela entrada)  $K(s)G(s)$  se aproxima da matriz de transferência do regulador  $K_C \Phi(s)B$ , ou seja, que o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo ocorre para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$  da mesma forma e com as mesmas condições que no controle  $\mathcal{H}_2$ /LQG. É interessante ressaltar que, embora tanto no controle LQG quanto na síntese  $\mathcal{H}_\infty$  a malha a ser recuperada é o regulador, a dinâmica será diferente uma vez que a matriz de ganhos  $K_C$  não é a mesma para ambas as sínteses.

Também é importante ressaltar a necessidade da planta  $G(s)$  ser quadrada e de fase-mínima: através de (3.84), verifica-se que nas condições do Princípio de Recuperação da Malha Objetivo o controlador  $K(s)$  produz efetivamente uma inversa da planta. Desta forma, a planta  $G(s)$  deve ser quadrada para sua inversa existir e caso  $G(s)$  possuísse zeros de transmissão no SPD o controlador  $K(s)$  possuiria pólos no SPD, levando a malha de controle a instabilidade (o sistema não seria *internamente estável*). As condições do Teorema 3.4 são obtidas ao se tomar as condições dos Corolários 3.2 e 3.4 para  $L = B$ .

Uma vez que a matriz de transferência da malha aberta vista pela saída  $G(s)K(s)$  tende à matriz de transferência do observador de estados quando  $\rho$  tende a zero pela direita (ou, no caso *dual*,  $K(s)G(s)$  tende à matriz de transferência do regulador quando  $\mu \rightarrow 0^+$ ), quais as propriedades no domínio da frequência que este fato pode proporcionar? Ou seja, como desenvolver uma metodologia de controle com os resultados obtidos até aqui? É desta questão que o próximo capítulo irá tratar.

Entretanto, antes disso serão vistos as implicações que ambos os procedimentos tem nas funções de custo do controle  $\mathcal{H}_2$  e do controle  $\mathcal{H}_\infty$ .

### 3.4 Relações entre o Comportamento Assintótico com as Funções de Custo

Considere novamente as funções de custo  $J_2(T_{zw})$  e  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$ , expressas em função das soluções das EARGs e das matrizes de estado da planta generalizada

$$J_2(T_{zw}) = \text{tr}(L^T X_2 L) + \text{tr}(\rho^{-2} B^T X_2 Y_2 X_2 B) = \text{tr}(H Y_2 H^T) + \text{tr}(\mu^{-2} C Y_2 X_2 Y_2 C^T) , \quad (3.86)$$

$$J_\infty(T_{zw}, \gamma) = \text{tr}(L^T X_\infty L) + \text{tr}(\rho^{-2} B^T X_\infty Z_\infty Y_\infty X_\infty B) = \text{tr}(H Y_\infty H^T) + \text{tr}(\mu^{-2} C Y_\infty X_\infty Z_\infty Y_\infty C^T) . \quad (3.87)$$

Suponha que  $G(s)$  seja quadrada e de fase-mínima. Então, sabe-se que, para o controle LQG/LTR, se  $\rho$  tender a zero pela direita e  $H = C$ , a solução  $X_2$  irá tender a uma matriz nula e o limite

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{-1} B^T X_2 = C , \quad (3.88)$$

irá existir [3], [4]. Consequentemente, ter-se-á o seguinte limite para a função de custo  $J_2(T_{zw})$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} J_2(T_{zw}) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \text{tr}(L^T 0 L) + \text{tr}(\rho^{-1} B^T X_2 Y_2 \rho^{-1} X_2 B) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \text{tr}(C Y_2 C^T) . \quad (3.89)$$

Equivalentemente, ter-se-á o seguinte limite para a função de custo  $J_2(T_{zw})$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} J_2(T_{zw}) = \text{tr}(C Y_2 C^T) + \text{tr}(\mu^{-2} C Y_2 0 Y_2 C^T) = \text{tr}(C Y_2 C^T) , \quad (3.90)$$

que, naturalmente, fornece o mesmo valor para o custo  $\mathcal{H}_2$  quando  $\rho \rightarrow 0^+$ .

Na seção 3.2 provou-se que, se  $H\Phi(s)B$  for quadrada e de fase-mínima, e se  $\rho$  tender a zero pela direita, então a solução  $X_\infty$  também irá tender a uma matriz nula,  $Z_\infty$  irá tender a uma matriz identidade e para  $H = C$  (agora considera-se a planta  $G(s)$  quadrada e de fase-mínima), o limite

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{-1} B^T X_\infty = C \quad (3.91)$$

também irá existir. Consequentemente, a função de custo  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$  irá tender a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} J_\infty(T_{zw}, \gamma) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \text{tr} (L^T 0L) + \text{tr} (\rho^{-1} B^T X_\infty I Y_\infty \rho^{-1} X_\infty B) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \text{tr} (C Y_\infty C^T) , \quad (3.92)$$

ou, de forma alternativa, irá tender a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} J_\infty(T_{zw}, \gamma) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \text{tr} (C Y_\infty C^T) + \text{tr} (\mu^{-2} C Y_\infty 0 I Y_\infty C^T) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \text{tr} (C Y_\infty C^T) . \quad (3.93)$$

Desta forma, conclui-se que:

- Se  $G(s)$  for quadrada e de fase-mínima, e se  $\rho \rightarrow 0^+$ , o custo total, seja  $J_2(T_{zw})$  ou  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$  será dado somente pelo “custo de observação”, ou seja, o “custo de regulação” será sempre nulo. Como é sabido que, pela propriedade da monotonicidade,  $Y_2 \leq Y_\infty$ , tem-se que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} J_\infty(T_{zw}, \gamma) \geq J_2(T_{zw}) > 0 , \quad (3.94)$$

outro resultado também já conhecido e que pode ser novamente comprovado;

- Quando o custo de regulação é nulo, diz-se que há “regulação perfeita” [4]. Para que isto ocorra é necessário que o número de entradas seja igual ou maior que o número de saídas, que não haja zeros de transmissão no SPD (condições estas atendidas se  $G(s)$  for quadrada e de fase-mínima) e que a energia de controle seja infinita, ou seja,  $\rho \rightarrow 0^+$  implica que não há limitação em magnitude nas entradas.

Suponha que  $G(s)$  seja quadrada e de fase-mínima. Então, sabe-se que, para o controle LQG/LTR, se  $\mu$  tender a zero pela direita e  $L = B$ , a solução  $Y_2$  irá tender a uma matriz nula e o limite

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \mu^{-1} Y_2 C^T = B , \quad (3.95)$$

irá existir [3], [4]. Consequentemente, a função de custo  $J_2(T_{zw})$  irá tender a

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} J_2(T_{zw}) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \text{tr} (B^T X_2 B) + \text{tr} (\rho^{-2} B^T X_2 0 X_2 B) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \text{tr} (B^T X_2 B) . \quad (3.96)$$

Equivalentemente a função de custo  $J_2(T_{zw})$  pode ser computada através de

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} J_2(T_{zw}) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \text{tr} (C0C^T) + \text{tr} (\mu^{-1} C Y_2 X_2 \mu^{-1} Y_2 C^T) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \text{tr} (B^T X_2 B) , \quad (3.97)$$

que, naturalmente, fornece o mesmo valor para o custo  $\mathcal{H}_2$ .

Na seção 3.2 provou-se que, se  $C\Phi(s)L$  for quadrada e de fase-mínima, e se  $\mu$  tender a zero pela direita, então a solução  $Y_\infty$  também irá tender a uma matriz nula,  $Z_\infty$  irá tender a uma matriz identidade e para  $L = B$  (agora considera-se a planta  $G(s)$  quadrada e de fase-mínima), o limite

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \mu^{-1} Y_\infty C^T = B \quad (3.98)$$

também irá existir. Consequentemente, a função de custo  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$  irá tender a

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} J_\infty(T_{zw}, \gamma) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \text{tr} (B^T X_\infty B) + \text{tr} (\rho^{-2} B^T X_\infty I 0 \rho^{-1} X_\infty B) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \text{tr} (B^T X_\infty B) , \quad (3.99)$$

ou, alternativamente, irá tender a

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} J_\infty(T_{zw}, \gamma) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \text{tr} (C0C^T) + \text{tr} (\mu^{-1} C Y_\infty X_\infty I \mu^{-1} Y_\infty C^T) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \text{tr} (B^T X_\infty B) . \quad (3.100)$$

Desta forma, conclui-se que:

- Se  $G(s)$  for quadrada e de fase-mínima, e se  $\mu \rightarrow 0^+$ , o custo total, seja  $J_2(T_{zw})$  ou  $J_\infty(T_{zw}, \gamma)$  será dado somente pelo “custo de regulação”, ou seja, o “custo de filtragem” será sempre nulo. Como é sabido que, pela propriedade da monotonicidade,  $X_2 \leq X_\infty$ , tem-se que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} J_\infty(T_{zw}, \gamma) \geq J_2(T_{zw}) > 0 , \quad (3.101)$$

outro resultado também já conhecido e que pode ser novamente comprovado;

- Quando o custo de filtragem é nulo, diz-se que há “filtragem perfeita” [4]. Para

que isto ocorra é necessário que o número de saídas seja igual ou maior que o de entradas, não haja zeros de transmissão no SPD (condições estas atendidas se  $G(s)$  for quadrada e de fase-mínima) e que não haja ruídos de medição, ou seja,  $\mu \rightarrow 0^+$  implica que a saída é determinística.

## 4 $\mathcal{H}_\infty/LTR$ Loop Shaping

No capítulo anterior demonstrou-se que para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$ , se  $G(s)$  for quadrada e de fase-mínima, o parâmetro  $\rho$  tender a zero pela direita e a matriz  $H$  for igual à matriz  $C$ , então a matriz de transferência da malha aberta vista pela saída irá tender à matriz de transferência do observador de estados. De forma *dual*, também provou-se que se  $G(s)$  for quadrada e de fase-mínima, o parâmetro  $\mu$  tender a zero pela direita e a matriz  $L$  for igual a matriz  $B$ , então a matriz de transferência da malha aberta vista pela entrada irá tender à matriz de transferência do regulador de estados da síntese  $\mathcal{H}_\infty$ . A estes procedimentos dá-se o nome clássico de Princípio de Recuperação da Malha Objetivo.

Neste capítulo será mostrado como obter um “procedimento simples” (*easy-to-use*) para o controle  $\mathcal{H}_\infty$  tomando-se como base a teoria desenvolvida no Capítulo 3. Para isto, será demonstrada uma conversão do domínio do tempo para o domínio da frequência conhecido como “*Identidade de Kalman*” (*Kalman’s Dual Equality*) para o observador e regulador de estados baseado na síntese  $\mathcal{H}_\infty$ . Em sequência serão derivadas as propriedades de *loop shaping* em decorrência da Identidade de Kalman Generalizada e por fim uma descrição, de como seria um procedimento geral para a utilização da solução de controle proposta, será elaborada.

### 4.1 Identidade de Kalman Generalizada para a Síntese $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção será demonstrado como obter uma relação de uma EARG entre o domínio do tempo e o domínio da frequência, conhecida como Identidade de Kalman (em inglês, *Kalman’s Dual Equality*). Como isso será feito para uma EARG, dar-se-á o nome então de *Identidade de Kalman Generalizada*.

**Proposição 4.1.** *Considere a EARG do Observador de Estados baseado na síntese  $\mathcal{H}_\infty$*

$$YA^T + AY + \gamma^{-2}YH^T HY - \mu^{-2}YC^T CY + LL^T = 0 . \quad (4.1)$$

Através de manipulações algébricas, é possível converter a equação (4.1) na seguinte equação

$$(I + C\Phi(s)K_F)(I + C\Phi(s)K_F)^* = I + \mu^{-2}C\Phi(s)L(C\Phi(s)L)^* + \mu^2\gamma^{-2}C\Phi(s)K_F(C\Phi(s)K_F)^* , \quad (4.2)$$

que, por sua vez, está no domínio da frequência ao se tomar a resposta em frequência através de  $s = j\omega$ .

**Prova:** Sabendo-se que para que o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo ocorra  $H$  deve ser igual a  $C$ , e rearranjando-se a equação (4.1), tem-se

$$-YA^T - AY + \mu^{-2}YC^TCY = \gamma^{-2}YC^TCY + LL^T . \quad (4.3)$$

Adicionando e subtraindo-se o termo  $sIY$  ao membro esquerdo da equação (4.3), e sabendo-se que  $sIY = YsI$ , tem-se

$$-YA^T - AY + \mu^{-2}YC^TCY + sIY - YsI = \gamma^{-2}YC^TCY + LL^T . \quad (4.4)$$

Agrupando-se os termos comuns de (4.4) resulta em

$$Y(-sI - A^T) + (sI - A)Y + \mu^{-2}YC^TCY = \gamma^{-2}YC^TCY + LL^T . \quad (4.5)$$

Tomando-se a resposta em frequência de (4.5), ou seja, fazendo-se  $s = j\omega$ , tem-se

$$Y(-j\omega I - A^T) + (j\omega I - A)Y + \mu^{-2}YC^TCY = \gamma^{-2}YC^TCY + LL^T . \quad (4.6)$$

Sabendo-se que  $(-j\omega I - A^T)$  é o complexo-conjugado transposto de  $(j\omega I - A)$ , pode-se reescrever (4.6) como

$$Y(j\omega I - A)^* + (j\omega I - A)Y + \mu^{-2}YC^TCY = \gamma^{-2}YC^TCY + LL^T . \quad (4.7)$$

Simplificando-se (4.7) através de  $\Phi(j\omega) = (j\omega I - A)^{-1}$ , tem-se

$$Y(\Phi^{-1}(j\omega))^* + \Phi^{-1}(j\omega)Y + \mu^{-2}YC^TCY = \gamma^{-2}YC^TCY + LL^T . \quad (4.8)$$

Multiplicando-se (4.8) por  $C\Phi(j\omega)$  pela esquerda resulta em

$$C\Phi(j\omega)Y(\Phi^{-1}(j\omega))^* + C\Phi(j\omega)\Phi^{-1}(j\omega)Y + \mu^{-2}C\Phi(j\omega)YC^TCY = \gamma^{-2}C\Phi(j\omega)YC^TCY + C\Phi(j\omega)LL^T . \quad (4.9)$$

Agora multiplicando-se (4.9) por  $(C\Phi(j\omega))^*$  pela direita chega-se a

$$\begin{aligned} & C\Phi(j\omega)Y(\Phi^{-1}(j\omega))^*(C\Phi(j\omega))^* + C\underbrace{\Phi(j\omega)\Phi^{-1}(j\omega)}_I Y(C\Phi(j\omega))^* + \\ & \mu^{-2}C\Phi(j\omega)YC^T CY(C\Phi(j\omega))^* = \gamma^{-2}C\Phi(j\omega)YC^T CY(C\Phi(j\omega))^* + \\ & C\Phi(j\omega)LL^T(C\Phi(j\omega))^* . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Manipulando-se algebricamente (4.10) resulta em

$$\begin{aligned} & C\Phi(j\omega)Y\underbrace{(C\Phi(j\omega)\Phi^{-1}(j\omega))^*}_{C^T} + (C\Phi(j\omega)Y^T C^T)^* + \\ & \mu^{-2}C\Phi(j\omega)YC^T(C\Phi(j\omega)Y^T C^T)^* = \gamma^{-2}C\Phi(j\omega)YC^T(C\Phi(j\omega)Y^T C^T)^* + \\ & C\Phi(j\omega)L(C\Phi(j\omega)L)^* . \end{aligned} \quad (4.11)$$

No entanto, sabendo-se que  $Y = Y^T$ , pode-se reescrever (4.11) como

$$\begin{aligned} & C\Phi(j\omega)YC^T + (C\Phi(j\omega)YC^T)^* + \mu^{-2}C\Phi(j\omega)YC^T(C\Phi(j\omega)YC^T)^* = \\ & \gamma^{-2}C\Phi(j\omega)YC^T(C\Phi(j\omega)YC^T)^* + C\Phi(j\omega)L(C\Phi(j\omega)L)^* . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Isolando-se o termo  $YC^T$  na matriz de ganhos do observador de estados e substituindo-o em (4.12) resulta em

$$\begin{aligned} & \mu^2 C\Phi(j\omega)K_F + \mu^2 (C\Phi(j\omega)K_F)^* + \mu^2 C\Phi(j\omega)K_F (C\Phi(j\omega)K_F)^* = \\ & \mu^4 \gamma^{-2} C\Phi(j\omega)K_F (C\Phi(j\omega)K_F)^* + C\Phi(j\omega)L (C\Phi(j\omega)L)^* . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Adicionando-se  $\mu^2 I$  em ambos os membros de (4.13) chega-se a

$$\begin{aligned} & \mu^2 I + \mu^2 C\Phi(j\omega)K_F + \mu^2 (C\Phi(j\omega)K_F)^* + \mu^2 C\Phi(j\omega)K_F (C\Phi(j\omega)K_F)^* = \\ & \mu^2 I + \mu^4 \gamma^{-2} C\Phi(j\omega)K_F (C\Phi(j\omega)K_F)^* + C\Phi(j\omega)L (C\Phi(j\omega)L)^* . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dividindo-se (4.14) por  $\mu^2$  tem-se

$$\begin{aligned} & I + C\Phi(j\omega)K_F + (C\Phi(j\omega)K_F)^* + C\Phi(j\omega)K_F (C\Phi(j\omega)K_F)^* = \\ & I + \mu^2 \gamma^{-2} C\Phi(j\omega)K_F (C\Phi(j\omega)K_F)^* + \mu^{-2} C\Phi(j\omega)L (C\Phi(j\omega)L)^* . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Através de uma identidade matricial, finalmente é possível reduzir (4.15) a

$$\begin{aligned} (I + C\Phi(j\omega)K_F)(I + C\Phi(j\omega)K_F)^* = \\ I + \mu^{-2}C\Phi(j\omega)L(C\Phi(j\omega)L)^* + \mu^2\gamma^{-2}C\Phi(j\omega)K_F(C\Phi(j\omega)K_F)^* , \end{aligned} \quad (4.16)$$

e conseqüentemente, através de  $s = j\omega$ , chega-se a

$$\begin{aligned} (I + C\Phi(s)K_F)(I + C\Phi(s)K_F)^* = \\ I + \mu^{-2}C\Phi(s)L(C\Phi(s)L)^* + \mu^2\gamma^{-2}C\Phi(s)K_F(C\Phi(s)K_F)^* . \end{aligned} \quad (4.17)$$

□

A equação (4.16) mostra a Identidade de Kalman para o observador de estados baseado na síntese  $\mathcal{H}_\infty$ . Observe agora a Identidade de Kalman para o observador de estados da síntese  $\mathcal{H}_2/\text{LQG}$  (que é o Filtro de Kalman-Bucy em si)

$$(I + C\Phi(j\omega)K_F)(I + C\Phi(j\omega)K_F)^* = I + \mu^{-2}C\Phi(j\omega)L(C\Phi(j\omega)L)^* . \quad (4.18)$$

Comparando-se a estrutura das duas Identidades de Kalman, verifica-se que a Identidade de Kalman para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$  possui um termo adicional não visto na síntese  $\mathcal{H}_2/\text{LQG}$ . Este termo adicional, como será visto, possui um papel primordial na análise das propriedades de *loop shaping* do controle  $\mathcal{H}_\infty$  e, portanto, a Identidade de Kalman para o observador de estados baseado na síntese  $\mathcal{H}_\infty$  é então chamada de Identidade de Kalman Generalizada (IKG).

É preciso ficar claro que a IKG em (4.16) somente é válida para  $H = C$ , uma das condições para a ocorrência do Princípio de Recuperação da Malha Objetivo, ao passo que a Identidade de Kalman em (4.18) é válida sob quaisquer condições (não necessariamente para as condições de PRMO).

Outro ponto importante a se observar é que, como esperado, se  $\gamma$  tende ao infinito, ou seja, voltando-se à síntese  $\mathcal{H}_2/\text{LQG}$ , a Identidade de Kalman Generalizada na equação (4.16) tende à Identidade de Kalman da síntese  $\mathcal{H}_2/\text{LQG}$ , uma vez que o termo adicional vai a zero e a matriz de ganhos do observador de estados  $K_F$  da síntese  $\mathcal{H}_\infty$  tende à matriz de ganhos  $K_F$  do Filtro de Kalman-Bucy (síntese  $\mathcal{H}_2/\text{LQG}$ ).

**Proposição 4.2.** *Considere a EARG do regulador de estados baseado na síntese  $\mathcal{H}_\infty$*

$$A^T X + XA + \gamma^{-2}XLL^T X - \rho^{-2}XBB^T X + H^T H = 0 . \quad (4.19)$$

Através de manipulações algébricas, é possível converter a equação (4.19) na seguinte equação

$$(I + K_C \Phi(s)B)^* (I + K_C \Phi(s)B) = I + \rho^{-2} (H\Phi(s)B)^* (H\Phi(s)B) + \rho^2 \gamma^{-2} (K_C \Phi(s)B)^* K_C \Phi(s)B \quad (4.20)$$

que, por sua vez, estará no domínio da frequência ao se fazer a substituição do operador de Laplace  $s = j\omega$ .

**Prova:** Sabendo-se que ao aplicar o PRMO a matriz  $L$  deve ser igual à matriz  $B$  e rearranjando-se a equação (4.19), tem-se que

$$-A^T X - XA + \rho^{-2} XBB^T X = \gamma^{-2} XBB^T X + H^T H . \quad (4.21)$$

Adicionando-se o termo  $sIX$  a ambos os membros da equação (4.21), e sabendo-se que  $sIX = XsI$ , resulta em

$$-A^T X - XA + \rho^{-2} XBB^T X + XsI = \gamma^{-2} XBB^T X + H^T H + sIX . \quad (4.22)$$

Rearranjando-se a equação (4.22) fornece

$$(-sI - A^T) X + X(sI - A) + \rho^{-2} XBB^T X = \gamma^{-2} XBB^T X + H^T H . \quad (4.23)$$

Tomando-se a resposta em frequência de (4.23), ou seja, fazendo-se a substituição  $s = j\omega$  em (4.23), tem-se que

$$(-j\omega I - A^T) X + X(j\omega I - A) + \rho^{-2} XBB^T X = \gamma^{-2} XBB^T X + H^T H . \quad (4.24)$$

Sabendo-se que  $(-j\omega I - A^T)$  é o complexo-conjugado transposto de  $(j\omega I - A)$ , pode-se reescrever (4.24) como

$$(j\omega I - A)^* X + X(j\omega I - A) + \rho^{-2} XBB^T X = \gamma^{-2} XBB^T X + H^T H . \quad (4.25)$$

Simplificando-se (4.25) através de  $\Phi(j\omega) = (j\omega I - A)^{-1}$  fornece

$$(\Phi^{-1}(j\omega))^* X + X\Phi^{-1}(j\omega) + \rho^{-2} XBB^T X = \gamma^{-2} XBB^T X + H^T H . \quad (4.26)$$

Multiplicando-se a equação (4.26) por  $(\Phi(j\omega)B)^*$  pela esquerda resulta em

$$(\Phi(j\omega)B)^* (\Phi^{-1}(j\omega))^* X + (\Phi(j\omega)B)^* X \Phi^{-1}(j\omega) + \rho^{-2} (\Phi(j\omega)B)^* X B B^T X = \gamma^{-2} (\Phi(j\omega)B)^* X B B^T X + (\Phi(j\omega)B)^* H^T H . \quad (4.27)$$

Agora multiplicando-se (4.27) por  $\Phi(j\omega)B$  pela direita, tem-se que

$$\begin{aligned} & (\Phi(j\omega)B)^* (\Phi^{-1}(j\omega))^* X \Phi(j\omega)B + (\Phi(j\omega)B)^* X \underbrace{\Phi^{-1}(j\omega)\Phi(j\omega)}_I B + \\ & \rho^{-2} (\Phi(j\omega)B)^* X B B^T X \Phi(j\omega)B = \gamma^{-2} (\Phi(j\omega)B)^* X B B^T X \Phi(j\omega)B + \\ & (\Phi(j\omega)B)^* H^T H \Phi(j\omega)B . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Através de manipulações algébricas em (4.28) é possível chegar a

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\Phi^{-1}(j\omega)\Phi(j\omega)B)^*}_{B^T} X \Phi(j\omega)B + (B^T X^T \Phi(j\omega)B)^* + \\ & \rho^{-2} (B^T X^T \Phi(j\omega)B)^* B^T X \Phi(j\omega)B = \gamma^{-2} (B^T X^T \Phi(j\omega)B)^* B^T X \Phi(j\omega)B + \\ & (H \Phi(j\omega)B)^* H \Phi(j\omega)B . \end{aligned} \quad (4.29)$$

No entanto, sabe-se que  $X = X^T$ , e então a equação (4.29) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & B^T X \Phi(j\omega)B + (B^T X \Phi(j\omega)B)^* + \rho^{-2} (B^T X \Phi(j\omega)B)^* B^T X \Phi(j\omega)B = \\ & \gamma^{-2} (B^T X \Phi(j\omega)B)^* B^T X \Phi(j\omega)B + (H \Phi(j\omega)B)^* H \Phi(j\omega)B . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Isolando-se o termo  $B^T X$  da matriz de ganhos do regulador de estados e substituindo-o em (4.30) fornece

$$\begin{aligned} & \rho^2 K_C \Phi(j\omega)B + \rho^2 (K_C \Phi(j\omega)B)^* + \rho^2 (K_C \Phi(j\omega)B)^* K_C \Phi(j\omega)B = \\ & \gamma^{-2} \rho^4 (K_C \Phi(j\omega)B)^* K_C \Phi(j\omega)B + (H \Phi(j\omega)B)^* H \Phi(j\omega)B . \end{aligned} \quad (4.31)$$

Adicionando  $\rho^2 I$  a ambos os membros da equação (4.31) fornece

$$\begin{aligned} & \rho^2 I + \rho^2 K_C \Phi(j\omega)B + \rho^2 (K_C \Phi(j\omega)B)^* + \rho^2 (K_C \Phi(j\omega)B)^* K_C \Phi(j\omega)B = \\ & \rho^2 I + \gamma^{-2} \rho^4 (K_C \Phi(j\omega)B)^* K_C \Phi(j\omega)B + (H \Phi(j\omega)B)^* H \Phi(j\omega)B . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Dividindo-se a equação (4.32) por  $\rho^2$  resulta em

$$\begin{aligned} I + K_C\Phi(j\omega)B + (K_C\Phi(j\omega)B)^* + (K_C\Phi(j\omega)B)^* (K_C\Phi(j\omega)B) = \\ I + \gamma^{-2}\rho^2 (K_C\Phi(j\omega)B)^* (K_C\Phi(j\omega)B) + \rho^{-2} (H\Phi(j\omega)B)^* (K_C\Phi(j\omega)B) . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Através de uma identidade matricial, é possível reduzir a equação (4.33) a

$$\begin{aligned} (I + K_C\Phi(j\omega)B)^* (I + K_C\Phi(j\omega)B) = \\ I + \rho^{-2} (H\Phi(j\omega)B)^* (H\Phi(j\omega)B) + \rho^2\gamma^{-2} (K_C\Phi(j\omega)B)^* K_C\Phi(j\omega)B , \end{aligned} \quad (4.34)$$

e finalmente tomando-se  $s = j\omega$  novamente, tem-se que

$$\begin{aligned} (I + K_C\Phi(s)B)^* (I + K_C\Phi(s)B) = \\ I + \rho^{-2} (H\Phi(s)B)^* (H\Phi(s)B) + \rho^2\gamma^{-2} (K_C\Phi(s)B)^* K_C\Phi(s)B , \end{aligned} \quad (4.35)$$

□

A equação (4.34) mostra a Identidade de Kalman para o regulador de estados baseado na síntese  $\mathcal{H}_\infty$ . Observe agora a Identidade de Kalman para o regulador de estados da síntese  $\mathcal{H}_2/\text{LQG}$  (que é o Regulador Linear Quadrático em si)

$$(I + K_C\Phi(j\omega)B)^* (I + K_C\Phi(j\omega)B) = I + \rho^{-2} (H\Phi(j\omega)B)^* (H\Phi(j\omega)B) . \quad (4.36)$$

Comparando-se a estrutura das duas Identidades de Kalman, verifica-se que a Identidade de Kalman para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$  possui um termo adicional não visto na síntese  $\mathcal{H}_2/\text{LQG}$ . Este termo adicional, como será visto, possui um papel primordial na análise das propriedades de *loop shaping* do controle  $\mathcal{H}_\infty$  e, portanto, a Identidade de Kalman para o regulador de estados baseado na síntese  $\mathcal{H}_\infty$  é então chamada de Identidade de Kalman Generalizada.

É preciso ficar claro que a IKG em (4.34) somente é válida para  $L = B$ , uma das condições para a ocorrência do Princípio de Recuperação da Malha Objetivo, ao passo que a Identidade de Kalman em (4.36) é válida sob quaisquer condições (não necessariamente para as condições de PRMO).

Outro ponto importante a se observar é que, como esperado, se  $\gamma$  tende ao infinito, ou seja, voltando-se à síntese  $\mathcal{H}_2/\text{LQG}$ , a Identidade de Kalman Generalizada na equação (4.34) tende à Identidade de Kalman da síntese  $\mathcal{H}_2/\text{LQG}$ , uma vez que o termo adicional vai a zero e a matriz de ganhos do regulador de estados  $K_C$  da síntese  $\mathcal{H}_\infty$  tende à matriz

de ganhos  $K_C$  do Regulador Linear Quadrático (síntese  $\mathcal{H}_2$ /LQG).

A Identidade de Kalman Generalizada em (4.34) já havia sido apresentada em [16], porém, propriedades de *loop shaping* não foram derivadas dela, como será feito a seguir.

## 4.2 Propriedades de *Loop Shaping* para o Controle $\mathcal{H}_\infty$ /LTR pela Saída

A seção 3.3 mostrou que a matriz de transferência de malha aberta  $G(s)K(s)$  tende à matriz de transferência do observador de estados  $C\Phi(s)K_F$  à medida que o parâmetro  $\rho$  tende a zero pela direita. Se o parâmetro  $\rho$  fosse idealmente feito igual a zero, recuperaria-se a matriz de transferência do observador de estados  $C\Phi(s)K_F$  completamente. No limite de  $\rho$  tendendo a zero pela direita, a sensibilidade na saída da malha se torna

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} S_O(s) = (I + C\Phi(s)K_F)^{-1} , \quad (4.37)$$

e o rastreamento na saída (ou sensibilidade complementar na saída) é

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} T_O(s) = C\Phi(s)K_F (I + C\Phi(s)K_F)^{-1} . \quad (4.38)$$

Como visto no Capítulo 2, o rastreamento também é dado por

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} T_O(s) = (I + C\Phi(s)K_F)^{-1} C\Phi(s)K_F . \quad (4.39)$$

Considere a IKG em (4.16). Considere também um vetor  $v \in \mathbb{C}^m$  qualquer, onde  $m$  é o número de entradas da planta, tal que  $v \neq 0$ . Multiplicando-se a IKG em (4.16) por  $v^*$  pela esquerda e por  $v$  pela direita, tem-se que

$$\begin{aligned} v^* (I + C\Phi(j\omega)K_F) (I + C\Phi(j\omega)K_F)^* v = v^* v + \\ \mu^{-2} v^* C\Phi(j\omega)L (C\Phi(j\omega)L)^* v + \mu^2 \gamma^{-2} v^* C\Phi(j\omega)K_F (C\Phi(j\omega)K_F)^* v . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Por construção, a matriz  $(I + C\Phi(j\omega)K_F) (I + C\Phi(j\omega)K_F)^*$  é positiva semidefinida, e então o membro esquerdo de (4.40) fornece um escalar positivo ou igual a zero. Também por construção, todos os termos do membro direito de (4.40) fornecem um escalar positivo.

Sejam  $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$  e  $N \in \mathbb{C}^{m \times m}$  duas matrizes. A seguinte equação

$$M \geq N \quad (4.41)$$

é dita uma desigualdade matricial se

$$v^* M v \geq v^* N v, \quad \forall v \neq 0. \quad (4.42)$$

Uma vez que cada um dos três termos do membro direito de (4.40) é no mínimo positivo ou igual a zero e o membro esquerdo de (4.40) também é positivo ou igual a zero, tem-se que as seguintes desigualdades podem ser obtidas

$$(I + C\Phi(j\omega)K_F)(I + C\Phi(j\omega)K_F)^* \geq I, \quad (4.43)$$

$$(I + C\Phi(j\omega)K_F)(I + C\Phi(j\omega)K_F)^* \geq \mu^{-2} C\Phi(j\omega)L(C\Phi(j\omega)L)^*, \quad (4.44)$$

$$(I + C\Phi(j\omega)K_F)(I + C\Phi(j\omega)K_F)^* \geq \mu^2 \gamma^{-2} C\Phi(j\omega)K_F(C\Phi(j\omega)K_F)^*. \quad (4.45)$$

Uma vez que  $(I + C\Phi(j\omega)K_F)$  e  $C\Phi(j\omega)L$  devem ser matrizes quadradas e inversíveis, pode-se reescrever (4.44) como

$$[(I + C\Phi(j\omega)K_F)^*]^{-1}(I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1} \leq \mu^2 [(C\Phi(j\omega)L)^*]^{-1}(C\Phi(j\omega)L)^{-1}, \quad (4.46)$$

$$[(I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1}]^*(I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1} \leq \mu^2 [(C\Phi(j\omega)L)^{-1}]^*(C\Phi(j\omega)L)^{-1} \quad (4.47)$$

Como consequência de (4.37), tem-se que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} S_O^*(j\omega)S_O(j\omega) \leq \mu^2 [(C\Phi(j\omega)L)^{-1}]^*(C\Phi(j\omega)L)^{-1}. \quad (4.48)$$

Extraindo-se o valor singular <sup>1</sup> máximo de (4.48) resulta em

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}[S_O(j\omega)] \leq \mu \sigma_{\max}[(C\Phi(j\omega)L)^{-1}]. \quad (4.49)$$

A equação (4.49) mostra que o máximo valor singular da sensibilidade na saída da malha é limitado pelo máximo valor singular de  $(C\Phi(s)L)^{-1}$ . A equação (4.49) já é um resultado conhecido da teoria de controle LQG/LTR. Naturalmente, este também é um resultado que se esperava para o controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR apresentado neste trabalho. Logo, tem-se um procedimento formal para dar forma à função de sensibilidade na saída da malha objetivo no domínio da frequência em termos de valores singulares.

As seguintes expressões são obtidas ao se inverter (4.43)

$$[(I + C\Phi(j\omega)K_F)^*]^{-1}(I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1} \leq I. \quad (4.50)$$

---

<sup>1</sup>Pela expressão “extrair os valores singulares” entenda-se aplicar a definição de valores singulares.

$$[(I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1}]^* (I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1} \leq I . \quad (4.51)$$

Como consequência de (4.37), a equação (4.51) pode ser reescrita como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} S_O^*(j\omega)S_O(j\omega) \leq I . \quad (4.52)$$

Extraindo-se o valor singular máximo de (4.52), chega-se a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [S_O(j\omega)] \leq 1 . \quad (4.53)$$

A equação (4.53) mostra que a sensibilidade na entrada da malha é limitada e nunca assume valores elevados. Em algumas faixas de frequência este valor pode não ser adequado, e então é necessário contar com a restrição imposta por (4.49). Este resultado também já era conhecido do controle LQG/LTR e foi também demonstrado para o controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR proposto.

Somando-se 1 a ambos os membros de (4.53), tem-se que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [S_O(j\omega)] + 1 \leq 2 . \quad (4.54)$$

De [24], tem-se que a seguinte desigualdade é válida

$$\sigma_{\max} [T_O(j\omega)] \leq \sigma_{\max} [S_O(j\omega)] + 1 . \quad (4.55)$$

Combinando-se as desigualdades em (4.54) e (4.55), tem-se que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [T_O(j\omega)] \leq \sigma_{\max} [S_O(j\omega)] + 1 \leq 2 \quad (4.56)$$

que por sua vez pode ser reescrita como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [T_O(j\omega)] \leq 2 . \quad (4.57)$$

A equação (4.57) mostra que o rastreamento do sistema também é limitado e nunca assume valores elevados. Este também é um resultado conhecido do controle LQG/LTR e que naturalmente se apresenta no controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR proposto.

Considere a equação (4.51). Multiplicando-a por  $(C\Phi(j\omega)K_F)^*$  pela esquerda e por

$C\Phi(j\omega)K_F$  pela direita, tem-se que

$$(C\Phi(j\omega)K_F)^* [(I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1}]^* (I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1} C\Phi(j\omega)K_F \leq (C\Phi(j\omega)K_F)^* C\Phi(j\omega)K_F, \quad (4.58)$$

$$[(I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1} C\Phi(j\omega)K_F]^* (I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1} C\Phi(j\omega)K_F \leq (C\Phi(j\omega)K_F)^* C\Phi(j\omega)K_F. \quad (4.59)$$

Como consequência de (4.39) e extraído-se o valor singular máximo de (4.59), chega-se a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [T_O(j\omega)] \leq \sigma_{\max} [C\Phi(j\omega)K_F]. \quad (4.60)$$

Embora a equação (4.60) não forneça uma ferramenta com um parâmetro livre para dar forma ao rastreamento na saída assim como na sensibilidade na saída, ela é útil para verificar os valores singulares do rastreamento na saída principalmente em altas frequências. Esta também é uma propriedade encontrada no controle LQG/LTR e naturalmente também está presente no controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR.

No entanto, conforme mencionado anteriormente, existe um termo na IGK que não é encontrado na síntese LQG/ $\mathcal{H}_2$ , o qual se origina da síntese  $\mathcal{H}_\infty$ . Multiplicando-se (4.45) pela esquerda por  $(I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1}$  e pela direita por  $[(I + C\Phi(j\omega)K_F)^*]^{-1}$ , tem-se

$$(I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1} C\Phi(j\omega)K_F (C\Phi(j\omega)K_F)^* [(I + C\Phi(j\omega)K_F)^*]^{-1} \leq \frac{\gamma^2}{\mu^2} I, \quad (4.61)$$

$$(I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1} C\Phi(j\omega)K_F (C\Phi(j\omega)K_F)^* [(I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1}]^* \leq \frac{\gamma^2}{\mu^2} I, \quad (4.62)$$

$$(I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1} C\Phi(j\omega)K_F [(I + C\Phi(j\omega)K_F)^{-1} C\Phi(j\omega)K_F]^* \leq \frac{\gamma^2}{\mu^2} I. \quad (4.63)$$

Como consequência de (4.39) e extraído-se o valor singular máximo de (4.63), chega-se a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [T_O(j\omega)] \leq \frac{\gamma}{\mu}. \quad (4.64)$$

A equação (4.64) mostra a propriedade fundamental do controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR: uma ferramenta para limitar ainda mais o rastreamento na saída da malha além daquela obtida através de (4.57). Um conceito intuitivo para sistemas SISO é o de que o máximo pico do rastreamento está diretamente relacionado com o máximo pico da saída na resposta ao degrau [33]. Espera-se então que tal conceito possa ser estendido para sistemas MIMO,

e então a ferramenta adicional proporcionada pela equação (4.64) permite ao controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR uma diminuição do *overshoot* da malha através de um procedimento em essência similar ao controle LQG/LTR. Observe que se  $\gamma$  tender ao infinito, a equação (4.64) perde seu significado em face à equação (4.57), mostrando de outra forma que o controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR pode ser visto como uma generalização do controle LQG/LTR.

Desta forma, as restrições de *loop shaping* do controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR pela saída são resumidamente dadas por

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [S_O(j\omega)] \leq \min \left( 1, \mu \sigma_{\max} [(C\Phi(j\omega)L)^{-1}] \right) \quad (4.65a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [T_O(j\omega)] \leq \min \left( 2, \frac{\gamma}{\mu}, \sigma_{\max} (C\Phi(j\omega)K_F) \right). \quad (4.65b)$$

### 4.3 Propriedades de *Loop Shaping* para o Controle $\mathcal{H}_\infty$ /LTR pela Entrada

A seção 3.3 mostrou que a matriz de transferência de malha aberta vista pela entrada  $K(s)G(s)$  tende à matriz de transferência do regulador de estados  $K_C\Phi(s)B$  à medida que o parâmetro  $\mu$  tende a zero pela direita, se  $G(s)$  for quadrada e de fase-mínima e a matriz  $L$  for feita igual à matriz  $B$ . Se o parâmetro  $\mu$  fosse idealmente feito igual a zero, recuperar-se-ia a matriz de transferência do regulador de estados  $K_C\Phi(s)B$  completamente. No limite para  $\mu$  tendendo a zero pela direita, a sensibilidade na entrada da malha se torna

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} S_I(s) = (I + K_C\Phi(s)B)^{-1}, \quad (4.66)$$

e o rastreamento na entrada (ou sensibilidade complementar na entrada) é

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} T_I(s) = K_C\Phi(s)B (I + K_C\Phi(s)B)^{-1}. \quad (4.67)$$

Como visto no Capítulo 2, o rastreamento na entrada também pode também ser dado por

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} T_I(s) = (I + K_C\Phi(s)B)^{-1} K_C\Phi(s)B. \quad (4.68)$$

De maneira semelhante ao que foi feito para a IGK do observador de estados, a IGK para o regulador de estados em (4.34) pode ser vista em função das seguintes desigualdades

$$(I + K_C\Phi(j\omega)B)^* (I + K_C\Phi(j\omega)B) \geq I, \quad (4.69)$$

$$(I + K_C\Phi(j\omega)B)^* (I + K_C\Phi(j\omega)B) \geq \rho^{-2} (H\Phi(s)B)^* (H\Phi(s)B) , \quad (4.70)$$

$$(I + K_C\Phi(j\omega)B)^* (I + K_C\Phi(j\omega)B) \geq \rho^2 \gamma^{-2} (K_C\Phi(j\omega)B)^* K_C\Phi(j\omega)B . \quad (4.71)$$

Uma vez que  $(I + K_C\Phi(j\omega)B)$  e  $H\Phi(j\omega)B$  devem ser matrizes quadradas e inversíveis, pode-se reescrever (4.70) como

$$(I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1} [(I + K_C\Phi(j\omega)B)^*]^{-1} \leq \rho^2 (H\Phi(s)B)^{-1} [(H\Phi(s)B)^*]^{-1} ,$$

$$(I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1} [(I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1}]^* \leq \rho^2 (H\Phi(s)B)^{-1} [(H\Phi(s)B)^{-1}]^* \quad (4.72)$$

Como consequência de (4.66), tem-se que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} S_I(j\omega)S_I^*(j\omega) \leq \rho^2 (H\Phi(s)B)^{-1} [(H\Phi(s)B)^{-1}]^* . \quad (4.73)$$

Extraindo-se o valor singular máximo de (4.73) resulta em

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [S_I(j\omega)] \leq \rho \sigma_{\max} [(H\Phi(j\omega)B)^{-1}] . \quad (4.74)$$

A equação (4.74) mostra que o máximo valor singular da sensibilidade na entrada da malha é limitado pelo máximo valor singular de  $(H\Phi(s)B)^{-1}$ . A equação (4.74) já é um resultado conhecido da teoria de controle LQG/LTR. Naturalmente, este também é um resultado que se esperava para o controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR apresentado neste trabalho. Logo, tem-se um procedimento formal para dar forma à função de sensibilidade na entrada da malha objetivo no domínio da frequência em termos de valores singulares.

As seguintes expressões são obtidas ao se inverter (4.69)

$$(I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1} [(I + K_C\Phi(j\omega)B)^*]^{-1} \leq I , \quad (4.75)$$

$$(I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1} [(I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1}]^* \leq I . \quad (4.76)$$

Como consequência de (4.66), a equação (4.76) pode ser reescrita como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} S_I(j\omega)S_I^*(j\omega) \leq I . \quad (4.77)$$

Extraindo-se o valor singular máximo de (4.77), chega-se a

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [S_I(j\omega)] \leq 1 . \quad (4.78)$$

A equação (4.78) mostra que a sensibilidade na entrada da malha é limitada e nunca

assume valores elevados. Em algumas faixas de frequência este valor pode não ser adequado, e então é necessário contar com a restrição imposta por (4.74). Este resultado também já era conhecido do controle LQG/LTR e foi também demonstrado para o controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR proposto.

Somando-se 1 a ambos os membros de (4.78), tem-se que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [S_I(j\omega)] + 1 \leq 2 . \quad (4.79)$$

Sabendo-se que [24]

$$\sigma_{\max} [T_I(j\omega)] \leq \sigma_{\max} [S_I(j\omega)] + 1 , \quad (4.80)$$

e então combinando-se esta desigualdade com (4.79), tem-se que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [T_I(j\omega)] \leq \sigma_{\max} [S_I(j\omega)] + 1 \leq 2 \quad (4.81)$$

que por sua vez pode ser reescrita como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [T_I(j\omega)] \leq 2 . \quad (4.82)$$

A equação (4.82) mostra que o rastreamento na entrada do sistema também é limitado e nunca assume valores elevados. Este também é um resultado conhecido do controle LQG/LTR e que naturalmente se apresenta no controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR proposto.

Considere a equação (4.76). Multiplicando-a por  $(K_C\Phi(j\omega)B)^*$  pela direita e por  $K_C\Phi(j\omega)B$  pela esquerda, tem-se que

$$K_C\Phi(j\omega)B (I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1} [(I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1}]^* (K_C\Phi(j\omega)B)^* \leq K_C\Phi(j\omega) (K_C\Phi(j\omega)B)^* , \quad (4.83)$$

$$K_C\Phi(j\omega)B (I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1} [K_C\Phi(j\omega)B (I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1}]^* \leq K_C\Phi(j\omega)B (K_C\Phi(j\omega)B)^* . \quad (4.84)$$

Como consequência de (4.67) e extraído-se o valor singular máximo de (4.84), chega-se a

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [T_I(j\omega)] \leq \sigma_{\max} [K_C\Phi(j\omega)B] . \quad (4.85)$$

Embora a equação (4.85) não forneça uma ferramenta com um parâmetro livre para

dar forma ao rastreamento na entrada assim como na sensibilidade na entrada, ela é útil para verificar os valores singulares do rastreamento na entrada. Esta também é uma propriedade encontrada no controle LQG/LTR e naturalmente também está presente no controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR.

No entanto, conforme mencionado anteriormente, existe um termo na Identidade de Kalman Generalizada que não é encontrado na síntese LQG/ $\mathcal{H}_2$ , o qual se origina da síntese  $\mathcal{H}_\infty$ . Multiplicando-se a equação (4.71) por  $(I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1}$  pela direita e por  $[(I + K_C\Phi(j\omega)B)^*]^{-1}$  pela esquerda, tem-se

$$[(I + K_C\Phi(j\omega)B)^*]^{-1} (K_C\Phi(j\omega)B)^* K_C\Phi(j\omega)B (I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1} \leq \frac{\gamma^2}{\rho^2} I, \quad (4.86)$$

$$[(I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1}]^* (K_C\Phi(j\omega)B)^* K_C\Phi(j\omega)B (I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1} \leq \frac{\gamma^2}{\rho^2} I, \quad (4.87)$$

$$[K_C\Phi(j\omega)B (I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1}]^* K_C\Phi(j\omega)B (I + K_C\Phi(j\omega)B)^{-1} \leq \frac{\gamma^2}{\rho^2} I. \quad (4.88)$$

Como consequência de (4.67) e extraído-se o valor singular máximo de (4.88), chega-se a

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [T_I(j\omega)] \leq \frac{\gamma}{\rho}. \quad (4.89)$$

A equação (4.89) mostra a propriedade fundamental do controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR pela entrada: uma ferramenta para limitar ainda mais o rastreamento na entrada da malha além daquela obtida através de (4.82). Observe que se  $\gamma$  tender ao infinito, a equação (4.89) perde seu significado em face à equação (4.82), mostrando de outra forma que o controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR pode ser visto como uma generalização do controle LQG/LTR.

Desta forma, as restrições de *loop shaping* do controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR pela entrada são resumidamente dadas por

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [S_I(j\omega)] \leq \min \left( 1, \rho \sigma_{\max} [(H\Phi(j\omega)B)^{-1}] \right) \quad (4.90a)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sigma_{\max} [T_I(j\omega)] \leq \min \left( 2, \frac{\gamma}{\rho}, \sigma_{\max} [K_C\Phi(j\omega)B] \right). \quad (4.90b)$$

## 4.4 Formalização das Etapas do Procedimento

O procedimento geral para a aplicação da solução de controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR poderia ser dividido nas seguintes etapas:

- **Definição da Malha Objetivo:** através da escolha de  $L$ ,  $\mu$  e  $\gamma$  (ou  $H$ ,  $\rho$  e  $\gamma$ , para o caso de PRMO pela entrada) apropriados projete uma malha objetivo que tenha o comportamento dinâmico desejado no domínio da frequência através do conjunto de restrições (4.65) (ou conjunto de restrições (4.90), no caso de PRMO pela entrada). Neste passo, apesar das escolhas dos parâmetros  $L$ ,  $\mu$  e  $\gamma$  serem feitas de forma empírica, é interessante notar o comportamento da malha objetivo ao se alterar os valores como, por exemplo, acelerar a resposta do sistema ao se diminuir o parâmetro  $\mu$ , diminuir o *overshoot* da malha ao se diminuir  $\gamma$ , entre outros fatores. Um bom ponto de partida para se determinar a matriz  $L$  é fazê-la inicialmente igual a matriz  $B$ , e depois alterar iterativamente os valores de forma a se obter uma malha objetivo aceitável. Convém lembrar que os parâmetros  $L$ ,  $\mu$  e  $\gamma$  aqui são designados livremente para cumprir com o propósito de *loop shaping*, ao invés de um contexto de estimação e controle estocástico ótimo (como no controle LQG tradicional). Neste passo também já deve ser definido se é desejada a inclusão de integradores para a eliminação do erro em regime permanente, uma vez que esta expansão irá alterar a dimensão da matriz  $L$ . Existem métodos clássicos para a parametrização da malha objetivo no controle LQG/LTR [10], [34].
- **Recuperação da Malha Objetivo:** de posse de uma malha objetivo com características de desempenho desejáveis, tanto no domínio da frequência como no domínio do tempo, projeta-se uma série de matrizes de ganhos do regulador de estados  $K_C$  através da EARG para o regulador de estados (matrizes de ganhos  $K_F$ , para o caso de PRMO pela entrada) de forma a se aproximar a malha de controle “real”  $G(s)K(s)$  à malha objetivo  $C\Phi(s)K_F$ , através da redução iterativa do parâmetro  $\rho$ , fazendo-o tender a zero pela direita (de forma dual, aproximar  $K(s)G(s)$  de  $K_C\Phi(s)B$  diminuindo-se  $\mu$ ). Nesta etapa, é importante observar o grau de recuperação da malha objetivo em relação aos valores do ganho  $K_C$ , pois ganhos muito elevados podem prejudicar a factibilidade física do compensador, saturar os atuadores e aumentar o consumo de energia. Logo, o mais importante neste passo é buscar uma boa solução de compromisso entre recuperação da malha objetivo e o “esforço” de controle, representado pelos aspectos citados anteriormente. Como um bom critério para se aproximar a malha de controle real à malha objetivo, pode-se comparar a resposta ao degrau de ambas. Existem outras literaturas que sugerem diversas formas de se determinar um grau satisfatório de recuperação. Em [32] é sugerido um método para avaliar se o erro entre a malha “real”  $G(s)K(s)$  e a malha objetivo  $C\Phi(s)K_F$  é pequeno em uma ampla faixa de frequências como uma forma

de determinar o grau de recuperação da malha objetivo. Em [13], [14], [15], [16] e [18], entre outros, sugere-se minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função erro entre a malha “real” e a malha objetivo. Ressalta-se que neste trabalho a metodologia para avaliar o grau de recuperação da malha objetivo será simplesmente comparar a resposta ao degrau da malha “real” e da malha objetivo.

## 5 Exemplos de Aplicação

Nesta seção serão vistos dois exemplos de aplicação da metodologia  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR proposta: primeiro, o controle da dinâmica longitudinal linearizada de um caça F8 será apresentada. Em seguida, o controle de arfagem e guinada de um modelo em escala reduzida de um helicóptero de dois graus de liberdade (2 DOF *Helicopter*) será apresentado.

O primeiro exemplo de aplicação é conduzido com o objetivo de demonstrar, como um exercício numérico, a eficácia da metodologia proposta. Portanto, os controladores obtidos não tem como objetivo aplicações práticas reais. Já o segundo exemplo de aplicação contará com, além de resultados numéricos de simulação, resultados experimentais feitos em um protótipo fabricado pela empresa canadense QUANSER, direcionado ao problema de regulação para rejeição de distúrbios no ângulo de guinada.

### 5.1 Controle da Dinâmica Longitudinal de um Caça F8

#### 5.1.1 Modelo da Planta

O caça F8 foi utilizado no desenvolvimento do sistema digital “*fly-by-wire*” pela Agência Espacial Norte Americana (NASA) em 1972, através do Centro de Pesquisas de Voo Dryden (*Dryden Flight Research Centre*). A dinâmica longitudinal linearizada para o caça voando a uma altitude constante de 30000 pés e com velocidade constante 1,2 Mach é [20]

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{q}} &= -0,8\hat{q} - 0,0006\hat{u} - 13,2\hat{\alpha} - 19\hat{\delta}_e - 2,5\hat{\delta}_f \\
 \dot{\hat{u}} &= -0,014\hat{u} - 16,64\hat{\alpha} - 32,2\hat{\theta}_p - 0,66\hat{\delta}_e - 0,5\hat{\delta}_f \\
 \dot{\hat{\alpha}} &= \hat{q} - 0,0001\hat{u} - 1,65\hat{\alpha} - 0,16\hat{\delta}_e - 0,6\hat{\delta}_f \\
 \dot{\hat{\theta}} &= \hat{q} ,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde  $\hat{q}$  é a perturbação na taxa de variação do ângulo de arfagem,  $\hat{u}$  é a perturbação na velocidade horizontal,  $\hat{\alpha}$  é a perturbação no ângulo de ataque e  $\hat{\theta}$  é a perturbação no

ângulo de arfagem. As entradas de comando são a perturbação na deflexão do ângulo do profundor  $\hat{\delta}_e$  e a perturbação na deflexão do ângulo do *flapperon*  $\hat{\delta}_f$ . As saídas a serem controladas são o ângulo de arfagem perturbado e o ângulo da trajetória de voo perturbado  $\hat{\gamma}_p = \hat{\theta} - \hat{\alpha}$ . Portanto, a planta é quadrada de dimensão  $2 \times 2$ . Reescrevendo-se o modelo em variáveis de estado, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{q}} \\ \dot{\hat{u}} \\ \dot{\hat{\alpha}} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 & -0,0006 & -13,2 & 0 \\ 0 & -0,014 & -16,64 & -32,2 \\ 1 & -0,0001 & -1,65 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{u} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -19 & -2,5 \\ -0,66 & -0,5 \\ -0,16 & -0,6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_e \\ \hat{\delta}_f \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\gamma}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{u} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_e \\ \hat{\delta}_f \end{bmatrix}.$$

De (5.2), é possível inferir que o sistema apresenta dois pares de pólos multivariáveis complexo-conjugados em  $s_{1,2} = -1,2261 \pm j 3,6083$  e  $s_{3,4} = -0,0059 \pm j 0,0264$ , e um zero de transmissão no semiplano à esquerda do eixo imaginário, localizado em  $s = -0,0139$ , caracterizando assim um sistema de fase-mínima e estável em malha aberta. Ainda pode ser verificado que o modelo em variáveis de estado deste sistema é controlável e observável. O diagrama de valores singulares do caça F8 em malha aberta é apresentado na Figura 3.

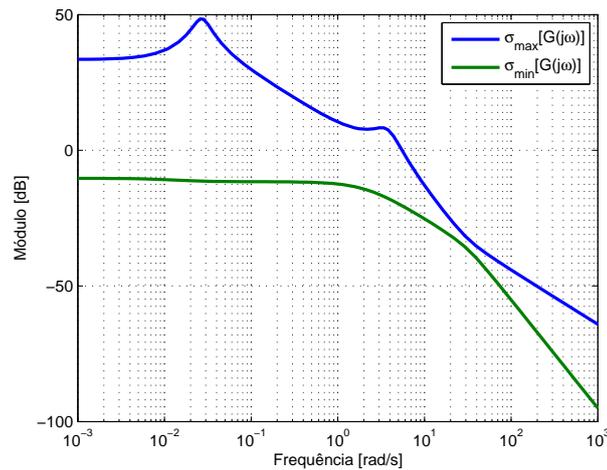


Figura 3: Diagrama de valores singulares do caça F8 em malha aberta.

As Figuras 4 e 5 representam a resposta do sistema a um degrau unitário aplicado na entrada de comando  $\hat{\delta}_e$  e  $\hat{\delta}_f$ , respectivamente.

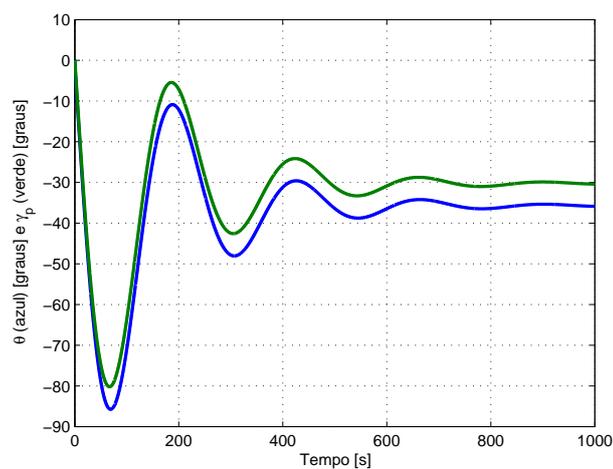


Figura 4: Resposta ao degrau unitário aplicado na deflexão perturbada do profundor do caça F8 em malha aberta.

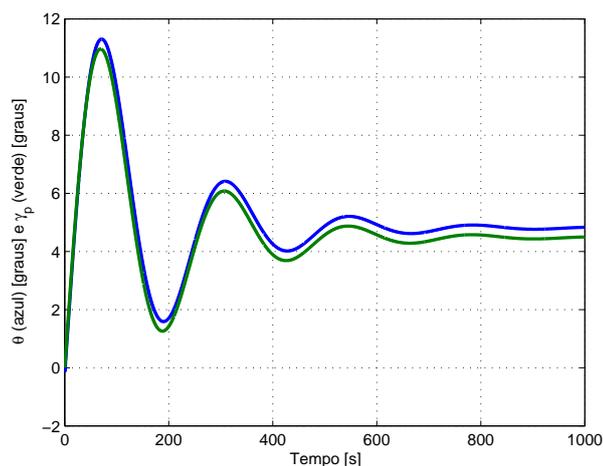


Figura 5: Resposta ao degrau unitário aplicado na deflexão perturbada do *flapperon* do caça F8 em malha aberta.

Observando-se as Figuras 4 e 5 nota-se que a resposta ao degrau unitário em cada uma das entradas de comando do caça F8 em malha aberta apresenta grandes oscilações e erro em regime permanente, além de um alto tempo de acomodação.

O sistema não apresenta pólos na origem em malha aberta. No intuito de eliminar o erro em regime permanente para uma entrada do tipo degrau no sistema, faz-se necessário a inclusão de integradores na malha de controle. O uso de integradores, além de auxiliar o *loop shaping* da malha objetivo [33], é recomendado nos casos onde sejam necessários e possíveis de serem utilizados [10]. A expansão por pólos na origem (na entrada) de um

sistema descrito através de variáveis de estado é dada por

$$G_E := \left[ \begin{array}{cc|c} A & B & 0 \\ 0 & 0 & I \\ \hline C & D & 0 \end{array} \right] . \quad (5.3)$$

É importante ressaltar que esta expansão pode afetar a controlabilidade ou a observabilidade do sistema. No entanto, para o caso específico estudado, a expansão por pólos na origem não afeta a controlabilidade ou observabilidade, uma vez que as matrizes de controlabilidade e observabilidade do sistema expandido possuem posto completo de linhas e colunas, respectivamente.

### 5.1.2 Definição da Malha Objetivo

Para este exemplo de aplicação será o utilizado o PRMO pela saída. Por isso, em toda esta seção, quando for dito sensibilidade deve-se entender na realidade sensibilidade na saída, e quando for dito rastreamento subentende-se rastreamento na saída também.

O primeiro passo para o projeto  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR é definir a malha objetivo. Existem algumas metodologias que auxiliam a parametrização da malha objetivo para o controle LQG/LTR [10, 34] e recentemente uma metodologia proposta e generalizada para o controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR foi apresentada em [35]. No entanto, para efeito de simplicidade e com o objetivo de demonstrar a eficácia da síntese proposta, utilizar-se-á os seguintes parâmetros

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \gamma = 7 , \quad \mu = 6 , \quad (5.4)$$

que foram encontrados através de um processo de tentativa e erro. Através de diversas simulações, verificou-se que a malha objetivo fornecia melhores resultados se a matriz  $L$  fosse particionada em uma matriz “superior” de ordem  $4 \times 2$  e uma “inferior” de ordem  $2 \times 2$ . Inicialmente, ajustou-se a matriz superior para uma matriz de zeros e a matriz inferior para uma matriz identidade. Ainda assim alguns ajustes na matriz inferior de  $L$  foram feitos para se obter uma malha objetivo desejável. Já o parâmetro  $\mu = 6$  foi escolhido de forma a adequar a resposta da malha objetivo e o parâmetro  $\gamma$  foi escolhido

para se obter uma restrição do rastreamento na saída em termos de valores singulares entre 1 e 2, e foi adotado então o valor  $\gamma = 7$ .

De posse dos parâmetros anteriores, calcula-se o ganho  $K_F$ , que é igual a

$$K_F = \begin{bmatrix} 0,0727 & 0,0727 & 0,0411 & 0,5435 & -0,0322 & 0,0345 \\ 0,0774 & 4,0202 & -0,0709 & 0,5024 & 0,0035 & 0,3217 \end{bmatrix}^T. \quad (5.5)$$

Com isto, pode-se elaborar o diagrama de valores singulares com as restrições de *loop shaping* da malha objetivo em termos da sensibilidade (equação (4.65a)) e rastreamento (equação (4.65b)), que podem ser visualizadas, respectivamente, pelas Figuras 6 e 7.

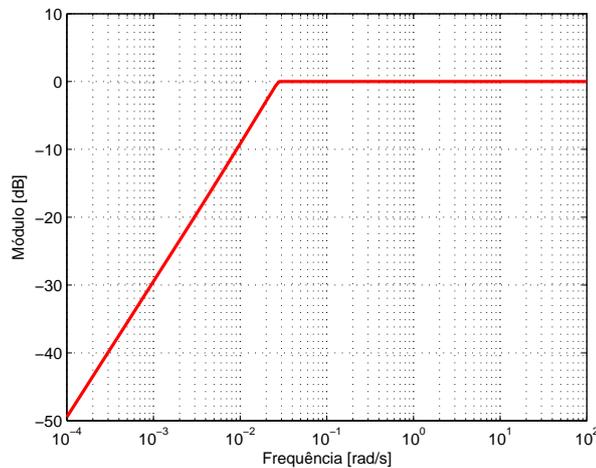


Figura 6: Restrições de *loop shaping* para a sensibilidade da malha objetivo para o caça F8.

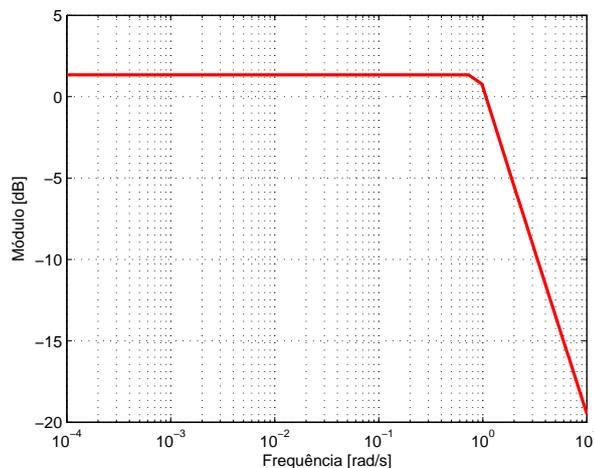


Figura 7: Restrições de *loop shaping* para o rastreamento da malha objetivo para o caça F8.

Em seguida, obtém-se a resposta ao degrau em ambas as entradas de referência  $R_1$

(que está relacionada com a saída  $\hat{\theta}$ ) e  $R_2$  (que está relacionada com a saída  $\hat{\gamma}_p$ ) da malha objetivo, que pode ser vista na Figura 8.

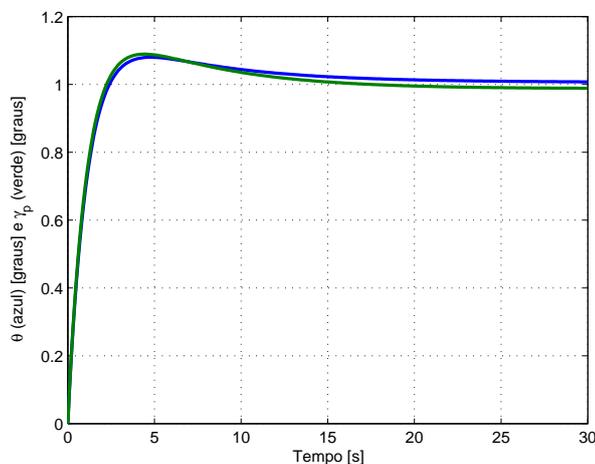


Figura 8: Resposta ao degrau em ambas as entradas de referência da malha objetivo para o caça F8.

Verificando-se a Figura 8 conclui-se que os *overshoots* em ambas as saídas estão bem próximos e equivalem a aproximadamente 8,5%. Cabe salientar aqui novamente que o propósito de se aplicar um degrau nas duas entradas de referência ao mesmo tempo é simplesmente um exercício numérico.

Num procedimento padrão, as restrições de *loop shaping* de sensibilidade e rastreamento e a resposta ao degrau da malha objetivo deveriam ser verificadas se estão satisfatórias. No entanto, como o objetivo é demonstrar a eficácia da metodologia proposta numericamente, assumir-se-á que esse desempenho está satisfatório e então os parâmetros  $L$ ,  $\mu$  e  $\gamma$  vistos anteriormente serão adotados.

### 5.1.3 Recuperação da Malha Objetivo

A próxima e última etapa consiste em aproximar a malha de controle “real”  $G(s)K(s)$  à malha objetivo  $C\Phi(s)K_F$ , através de uma série de ganhos  $K_C$ , que são feitos reduzindo-se o valor do parâmetro  $\rho$ . Conforme descrito anteriormente, um bom método para se averiguar o grau de recuperação da malha objetivo é comparar-se a resposta ao degrau em ambas as entradas de referência da malha de controle real  $G(s)K(s)$  com a da malha objetivo  $C\Phi(s)K_F$ .

Com os parâmetros  $L$ ,  $\mu$  e  $\gamma$  adotados anteriormente e mantidos constantes, o parâmetro  $\rho$  foi feito primeiramente igual a 1 e então obteve-se o gráfico da resposta ao degrau

unitário em ambas as entradas de referência  $R_1$  e  $R_2$  da malha real ( $\rho = 1$ ) e da malha objetivo ( $\rho \rightarrow 0$ ), como pode ser visto na Figura 9.

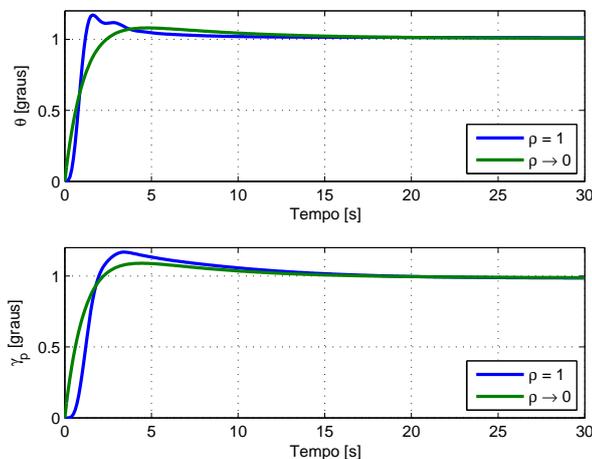


Figura 9: Resposta ao degrau em ambas as entradas de referência para a malha de controle com parâmetro  $\rho = 1$  e para a malha objetivo do caça F8.

Da Figura 9, depreende-se que a malha real não está satisfatoriamente aproximada à malha objetivo desejada, sendo necessária uma redução no parâmetro  $\rho$ . Sendo assim, reduz-se o parâmetro  $\rho$  em dez vezes. Desta forma, um novo gráfico de resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência para a malha real com  $\rho = 0,1$  e a malha objetivo é então plotado, que pode ser visto na Figura 10.

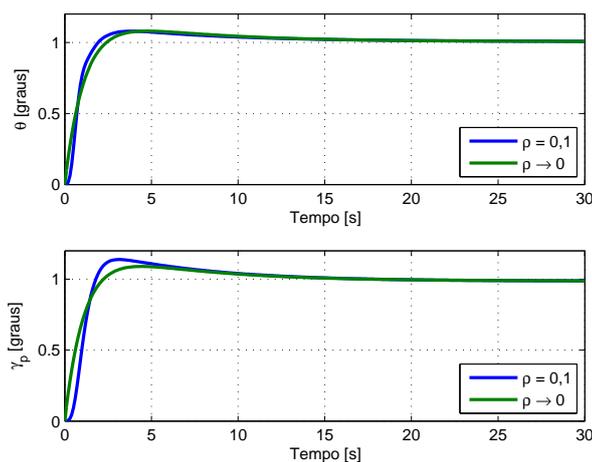


Figura 10: Resposta ao degrau em ambas as entradas de referência para a malha de controle com parâmetro  $\rho = 0,1$  e para a malha objetivo do caça F8.

A Figura 10 mostra que, para o parâmetro  $\rho = 0,1$  a malha de controle real  $G(s)K(s)$  ainda não está satisfatoriamente aproximada da malha objetivo  $C\Phi(s)K_F$ . Reduzindo-se o parâmetro  $\rho$  mais dez vezes, obtém-se um novo gráfico de resposta ao degrau unitário

em ambas as entradas de referência para a malha real com  $\rho = 0,01$  e a malha objetivo, que pode ser visto na Figura 11.

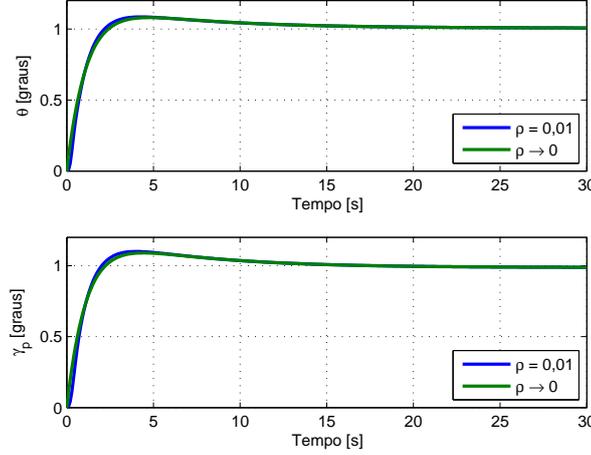


Figura 11: Resposta ao degrau em ambas as entradas de referência para a malha de controle com parâmetro  $\rho = 0,01$  e para a malha objetivo do caça F8.

Analisando-se Figura 11, pode-se inferir que as respostas da malha de controle com  $\rho = 0,01$  e da malha objetivo estão muito próximas, indicando que um grau satisfatório de recuperação da malha objetivo foi alcançado. Reduzindo-se ainda mais o parâmetro  $\rho$  não acarretaria uma melhoria no desempenho, mas somente traria problemas como um maior consumo de energia e factibilidade física do compensador (em função dos altos ganhos). Para  $\rho = 0,01$ , o ganho  $K_C$  é

$$K_C = \begin{bmatrix} -14,6830 & 0,0004 & 26,7990 & -115,3005 & 23,4266 & 0,7568 \\ 0,4041 & 0,0015 & -73,7078 & 81,8842 & 0,7568 & 9,2658 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Convém salientar que para os parâmetros escolhidos as condições para a existência do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  são satisfeitas.

Os valores singulares da sensibilidade mista para a malha de controle podem ser visualizadas através das Figuras 12 e 13, nas quais a curva em vermelho denota as restrições impostas pelo conjunto de equações (4.65).

Há uma pequena violação na restrição da sensibilidade que é justificada pelo fato do parâmetro  $\rho$  não poder ser idealmente igual a zero. Se essa violação fosse crítica e indesejada em uma aplicação real, poderia diminuir-se ainda mais o parâmetro  $\rho$  para atenuá-la.

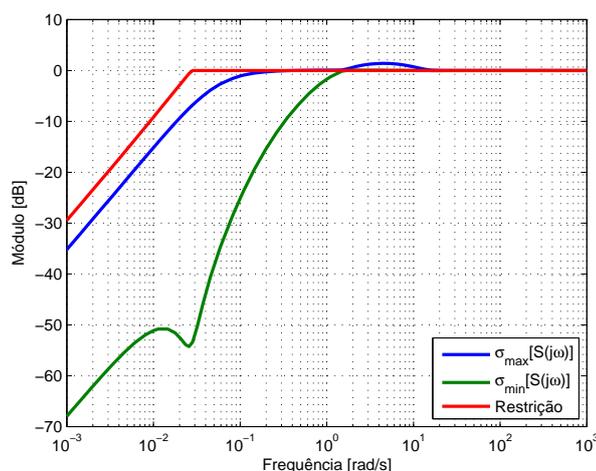


Figura 12: Diagrama de valores singulares para a sensibilidade da malha de controle do caça F8.

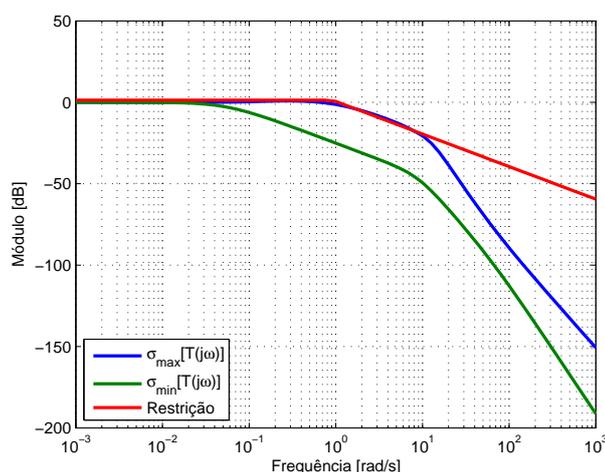


Figura 13: Diagrama de valores singulares para o rastreamento da malha de controle do caça F8.

#### 5.1.4 O Efeito do Parâmetro $\gamma$

Sabendo-se que a metodologia proposta tem como principal atrativo a redução do *overshoot* através da redução do parâmetro  $\gamma$ , e que para  $\gamma$  tendendo ao infinito recupera-se a síntese LQG, é interessante notar o comportamento do sistema em função de vários parâmetros  $\gamma$ , para a resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência  $R_1$  e  $R_2$ , e que pode ser visto na Figura 14. Os outros parâmetros de controle permanecem os mesmos.

A Figura 14 mostra um resultado esperado para a metodologia proposta  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR na saída: uma redução no *overshoot* do sistema possibilitada pela redução do parâmetro

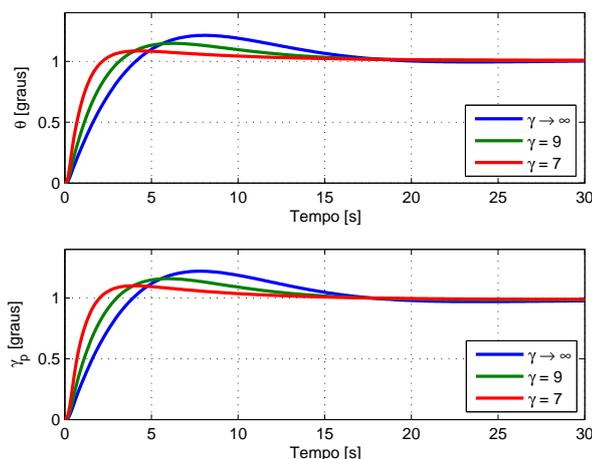


Figura 14: Resposta ao degrau nas entradas de referência  $R_1$  e  $R_2$  para diferentes parâmetros  $\gamma$  da malha de controle do caça F8.

$\gamma$  (uma vez que  $\mu$  foi mantido constante). Observe que o controle LQG ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), que não apresenta este grau de liberdade na definição da malha objetivo, apresenta o maior *overshoot* entre os parâmetros  $\gamma$  testados. De certa forma, a Figura 14 resume graficamente as vantagens da metodologia proposta em relação ao já tradicional controle LQG/LTR.

## 5.2 Controle de Arfagem e Guinada em um Modelo Didático de Helicóptero 2 DOF

Nesta seção será visto um exemplo de aplicação envolvendo um modelo didático de helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida fabricado pela empresa canadense QUANSER.

### 5.2.1 Modelo da Planta

O modelo, que pode ser visto na Figura 15, foi projetado e é comercializado pela empresa canadense QUANSER.

A planta consiste em um modelo em escala reduzida de um helicóptero montado sobre uma base fixa com duas hélices acopladas a dois motores de corrente contínua. Devido à construção há dois movimentos possíveis do modelo, sendo desta forma um helicóptero de dois graus de liberdade: a rotação em torno do eixo perpendicular ao plano da base, chamado de eixo de guinada (*yaw axis*) e a rotação em torno do eixo perpendicular ao

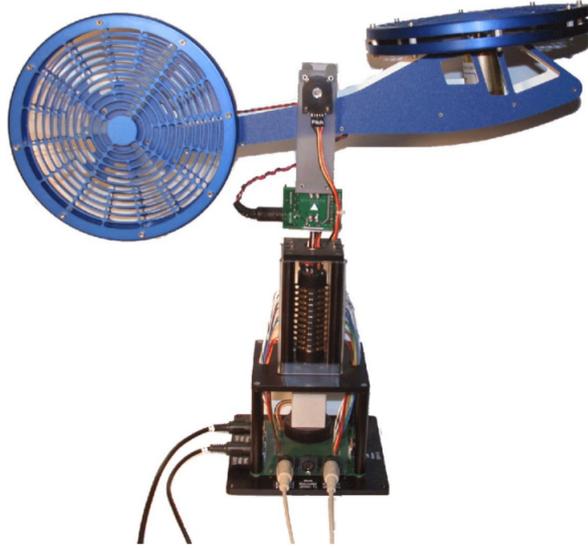


Figura 15: Helicóptero de dois graus de liberdade.

plano da ilustração da Figura 15, chamado de eixo de arfagem (*pitch axis*). O ângulo formado pela posição do nariz do helicóptero e o plano paralelo à base é chamado de ângulo de arfagem (*pitch angle*) e o ângulo formado pela posição do nariz do helicóptero e o plano perpendicular à base é chamado de ângulo de guinada (*yaw angle*). O objetivo então é controlar ambos os ângulos de arfagem e guinada.

Tomando-se como referência a foto do modelo ilustrado pela Figura 15, e de maneira a fazer uma analogia com helicópteros reais de maior porte, chamar-se-á o rotor que está situado na parte principal da fuselagem do helicóptero de rotor principal e o rotor que está situado na cauda do helicóptero de rotor de cauda. Ambos os rotores influenciam os ângulos a serem controlados, sendo o sistema portanto acoplado. As entradas de comando são a tensão aplicada no motor principal  $u_p$  [V] e a tensão aplicada no motor de cauda  $u_c$  [V].

Os ângulos de arfagem  $\theta$  e guinada  $\psi$  são medidos através de *encoders*. Os fios que transmitem os sinais dos *encoders* estão ligados à uma escova deslizante posicionada sobre a haste da base, de forma que permite um movimento de 360 graus em torno do eixo de guinada sem que os fios se emaranhem na haste da base. Por característica construtiva, o ângulo de arfagem está limitado entre +40 e -40 graus.

As equações que determinam a dinâmica do helicóptero são

$$\ddot{\theta} = -0,2436\dot{\theta} - 13,2025 \cos(\theta - 0,1745) + 0,7787u_p \quad (5.7a)$$

$$\ddot{\psi} = -0,1299 \sec(\theta) \dot{\psi} + 0,0988 u_p + 0,2135 u_c . \quad (5.7b)$$

Mais detalhes acerca do equacionamento do helicóptero podem ser encontrados em [23].

Fazendo-se uma linearização em torno do ponto onde o ângulo de arfagem e o ângulo de guinada são nulos em relação ao modelo não-linear, de forma a obter um modelo linear, obtém-se o seguinte modelo em variáveis de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}} \\ \dot{\hat{\psi}} \\ \ddot{\hat{\theta}} \\ \ddot{\hat{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2,2922 & 0 & -0,2436 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1299 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\psi} \\ \dot{\hat{\theta}} \\ \dot{\hat{\psi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,7787 & 0 \\ 0,0988 & 0,2135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_p \\ \hat{u}_c \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\psi} \\ \dot{\hat{\theta}} \\ \dot{\hat{\psi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_p \\ \hat{u}_c \end{bmatrix} .$$

O modelo linearizado em (5.8) possui quatro pólos multivariáveis, sendo dois deles complexo-conjugados localizados em  $s_{1,2} = -0,1218 \pm j1,509$  e dois deles reais e distintos, localizados em  $s_3 = -0,1299$  e  $s_4 = 0$  (pólo na origem). Já os zeros de transmissão não existem, sendo o sistema portanto de fase-mínima e instável em malha aberta. O modelo em variáveis de estado deste sistema também é controlável e observável. O diagrama de valores singulares da malha aberta pode ser verificado na Figura 16.

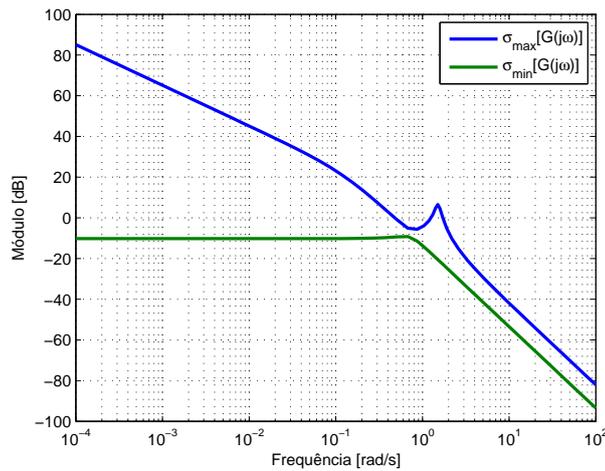


Figura 16: Diagrama de valores singulares do modelo linearizado do helicóptero 2 DOF em malha aberta.

O pólo na origem faz com que o sistema seja instável em malha aberta, o que pode ser visto nas Figuras 17 e 18, que representam um degrau de tensão de amplitude 1 [V]

aplicado no motor principal e no motor de cauda, respectivamente.

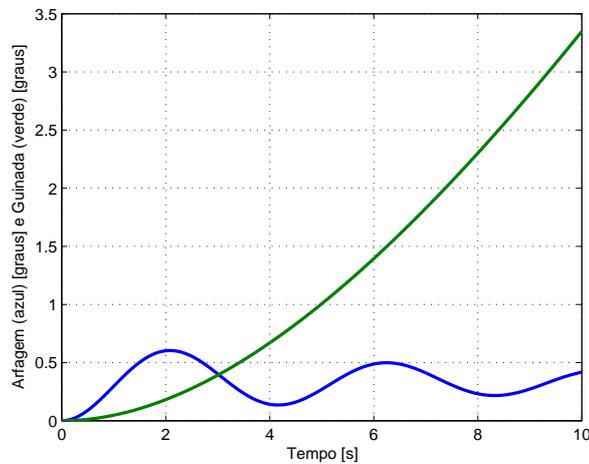


Figura 17: Resposta ao degrau unitário aplicado no motor principal do helicóptero 2 DOF em malha aberta.

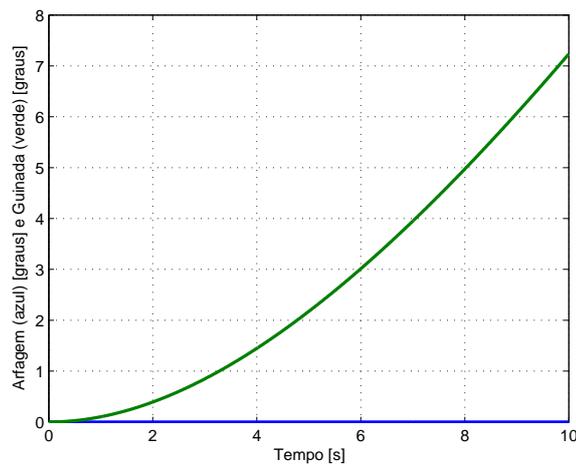


Figura 18: Resposta ao degrau unitário aplicado no motor de cauda do helicóptero 2 DOF em malha aberta.

Embora o sistema já possua um pólo na origem, é necessário fazer-se uma expansão em pólos na origem, assim como feito na seção 5.1.1 para o modelo do caça F8, de forma a equalizar a resposta de ambas as saídas e garantir erro nulo em regime permanente para uma entrada do tipo degrau em ambas as saídas. Testando a controlabilidade e a observabilidade do modelo sistema expandido, verifica-se que o mesmo se mantém controlável e observável.

### 5.2.2 Projeto do Compensador e Resultados de Simulação

Para este exemplo de aplicação será utilizado também o PRMO pela saída. Por isso, em toda esta seção, quando for dito sensibilidade deve-se entender na realidade sensibilidade na saída, e quando for dito rastreamento subentende-se rastreamento na saída também.

O primeiro passo para a aplicação do controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR é a definição da malha objetivo. Através de um processo de tentativa e erro, chegou-se então aos seguintes parâmetros

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 50 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad \mu = 3 \quad . \quad (5.9)$$

Através de diversas simulações, verificou-se que a malha objetivo fornecia melhores resultados se a matriz  $L$  fosse particionada da mesma maneira que o exemplo de aplicação anterior. Inicialmente fazendo-se a matriz superior como uma matriz de zeros e a inferior como uma identidade, e depois procedendo-se ajustes na matriz inferior, chegou-se então na matriz  $L$  dada em (5.9). Já o parâmetro  $\mu = 3$  foi escolhido de forma a adequar a resposta da malha objetivo.

De forma a enfatizar a proposta deste trabalho, dois valores para o parâmetro  $\gamma$  deverão ser adotados: um será  $\gamma \rightarrow \infty$  e o outro será  $\gamma = 6$ . Espera-se, então, que a malha de controle com  $\gamma = 6$  possua menor *overshoot* em relação à malha de controle com  $\gamma \rightarrow \infty$ . Com os parâmetros apresentados calculou-se os ganhos  $K_F$

$$K_{F\gamma \rightarrow \infty} = \begin{bmatrix} 3,8005 & 0,2891 & 7,2638 & 1,0201 & 16,5891 & -0,6424 \\ 0,2895 & 2,1505 & 0,7002 & 2,3540 & 1,6061 & 6,6356 \end{bmatrix}^T, \quad (5.10)$$

$$K_{F\gamma=6} = \begin{bmatrix} 4,7362 & 0,3644 & 8,4617 & 1,2291 & 19,1565 & -0,7376 \\ 0,3644 & 2,7258 & 0,8102 & 2,8360 & 1,8440 & 7,6626 \end{bmatrix}^T. \quad (5.11)$$

A Figura 19 mostra a resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência  $R_1$  (que está relacionada com o ângulo de arfagem) e  $R_2$  (que está relacionada com o ângulo de guinada) da malha objetivo projetada para  $\gamma \rightarrow \infty$  e a Figura 20 mostra a resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência  $R_1$  e  $R_2$  da malha objetivo projetada

para  $\gamma = 6$ .

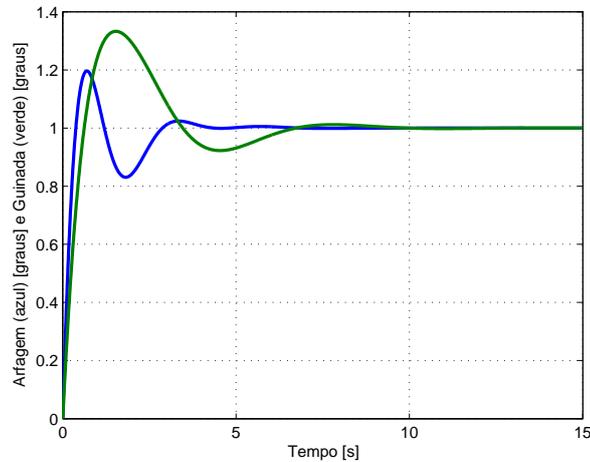


Figura 19: Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência  $R_1$  e  $R_2$  da malha objetivo para  $\gamma \rightarrow \infty$  do helicóptero 2 DOF.

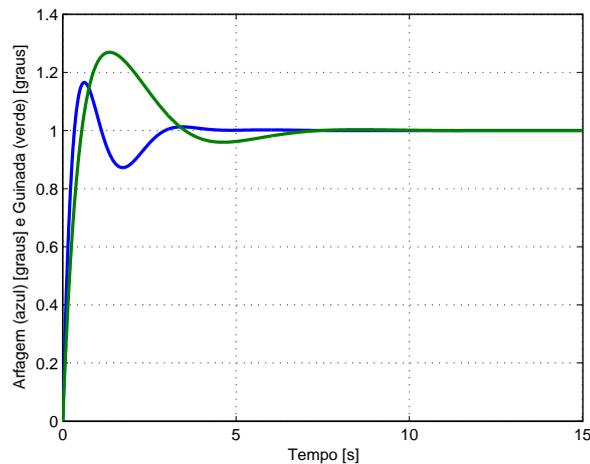


Figura 20: Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência  $R_1$  e  $R_2$  da malha objetivo para  $\gamma = 6$  do helicóptero 2 DOF.

Observando-se as Figuras 19 e 20 nota-se que houve, de fato, uma redução no *overshoot* de ambas as saídas na malha de controle com parâmetro  $\gamma = 6$  em relação à malha com parâmetro  $\gamma \rightarrow \infty$ . Observe novamente que o intuito de se aplicar um degrau em ambas as entradas de referência ao mesmo tempo é meramente um exercício numérico. O próximo passo seria encontrar um ganho  $K_C$  que faça com que a malha de controle real se aproxime da malha objetivo dado pelo observador de estados. Através de diversas simulações, verificou-se que para  $\rho = 0,0001$  a dinâmica da malha de controle real está suficientemente próxima à da malha objetivo. Logo, os ganhos  $K_C$  para os parâmetros

desejados são

$$K_{C\gamma \rightarrow \infty} = \begin{bmatrix} 9842,1 & 1004,5 & 987,6 & 81,3 & 39,4 & 0,5464 \\ -971,5 & 9949,4 & -171,0 & 1531,6 & 0,5470 & 25,6 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

$$K_{C\gamma=6} = \begin{bmatrix} 9834,2 & 1004,3 & 987,6 & 81,2 & 39,4 & 0,5458 \\ -971,5 & 9949,4 & -171,0 & 1531,5 & 0,5470 & 25,6 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

As Figuras 21 e 22 mostram, respectivamente, o diagrama de valores singulares da sensibilidade da malha de controle para  $\gamma \rightarrow \infty$  e  $\gamma = 6$ .

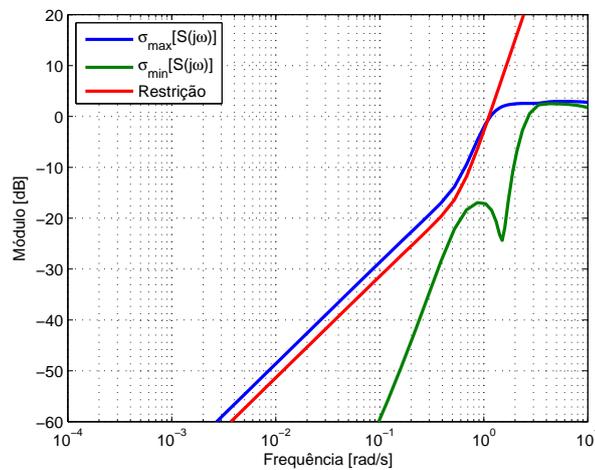


Figura 21: Diagrama de valores singulares da sensibilidade da malha de controle para  $\gamma \rightarrow \infty$  do helicóptero 2 DOF.

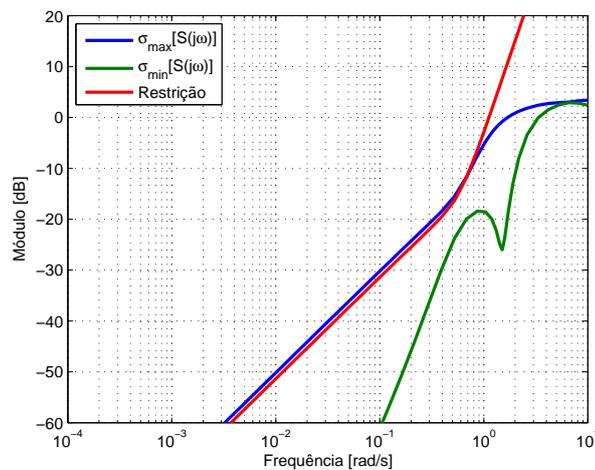


Figura 22: Diagrama de valores singulares da sensibilidade da malha de controle para  $\gamma = 6$  do helicóptero 2 DOF.

Em ambas as Figuras 21 e 22 a curva em vermelho denota a restrição da sensibilidade

dada por  $\mu\sigma_{\max} [(C\Phi(j\omega)L)^{-1}]$ , a curva em azul denota o máximo valor singular e a curva em verde denota o mínimo valor singular. Observa-se que o máximo valor singular ultrapassa o limitante ligeiramente em ambos os gráficos devido ao fato do parâmetro  $\rho$  não ser idealmente igual a zero. Isso pode ser comprovado através das Figuras 23 e 24, que mostram, respectivamente, o diagrama de valores singulares da sensibilidade da malha objetivo, ou seja, quando  $\rho \rightarrow 0^+$ , para  $\gamma \rightarrow \infty$  e  $\gamma = 6$ . Observa-se também que para  $\gamma = 6$  os valores singulares da sensibilidade tendem a ser menores do que para  $\gamma \rightarrow \infty$ .

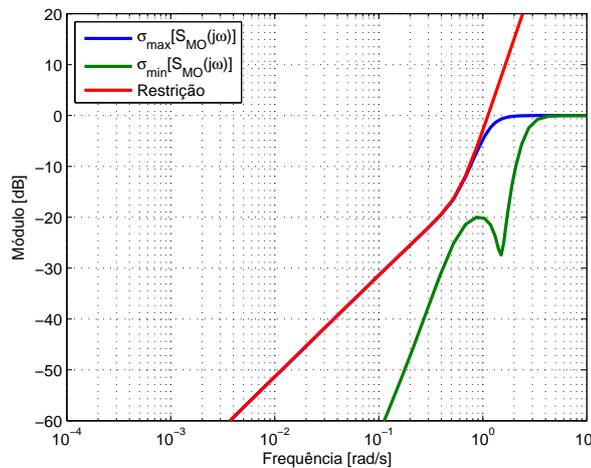


Figura 23: Diagrama de valores singulares da sensibilidade da malha objetivo ( $\rho \rightarrow 0^+$ ) para  $\gamma \rightarrow \infty$  do helicóptero 2 DOF.

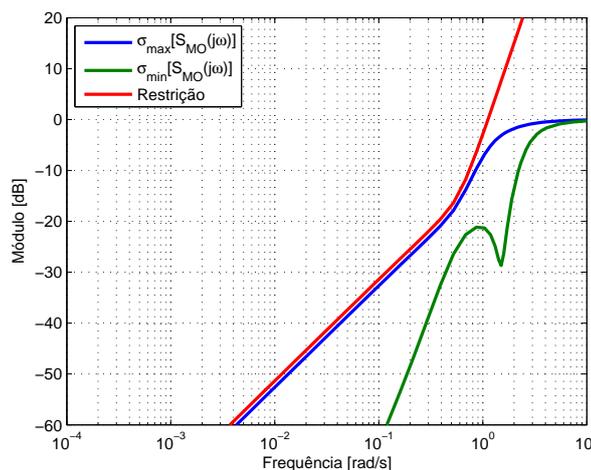


Figura 24: Diagrama de valores singulares da sensibilidade da malha objetivo ( $\rho \rightarrow 0^+$ ) para  $\gamma = 6$  do helicóptero 2 DOF.

As Figuras 25 e 26 mostram, respectivamente, o diagrama de valores singulares do rastreamento da malha de controle para  $\gamma \rightarrow \infty$  e  $\gamma = 6$ .

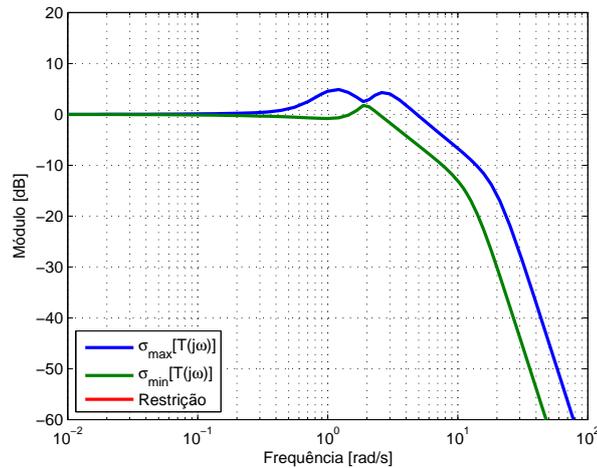


Figura 25: Diagrama de valores singulares do rastreamento da malha de controle para  $\gamma \rightarrow \infty$  do helicóptero 2 DOF.

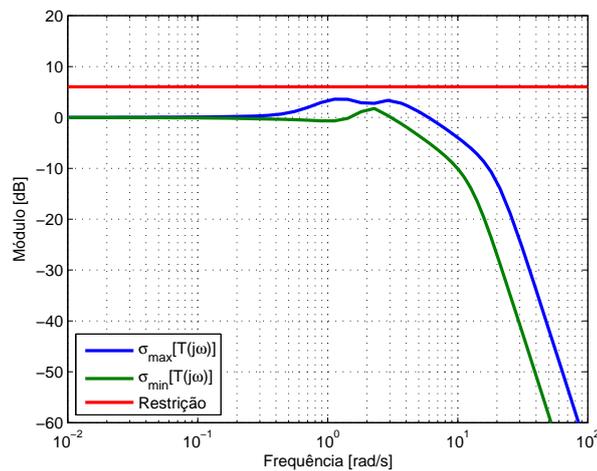


Figura 26: Diagrama de valores singulares do rastreamento da malha de controle para  $\gamma = 6$  do helicóptero 2 DOF.

Na Figura 26 a curva em vermelho denota o máximo valor singular dado pela restrição  $\gamma/\mu$ . Observe que na Figura 25 tal curva não aparece no gráfico pois a restrição é infinita. Em ambas as Figuras 25 e 26 a curva em azul denota o máximo valor singular e a curva em verde denota o mínimo valor singular. Observa-se que na Figura 26 o pico da curva de máximo valor singular é menor que na Figura 25, fato que foi possibilitado pela restrição  $\gamma/\mu$ . Espera-se então que esta diminuição no pico da curva de máximo valor singular resulte em uma diminuição do *overshoot*.

Isto pode ser verificado através das Figuras 27, 28, 29, 30, 31 e 32. As Figuras 27 e 28 mostram a resposta ao degrau unitário na entrada de referência para o ângulo de arfagem para a malha com  $\gamma \rightarrow \infty$  e  $\gamma = 6$ , respectivamente.

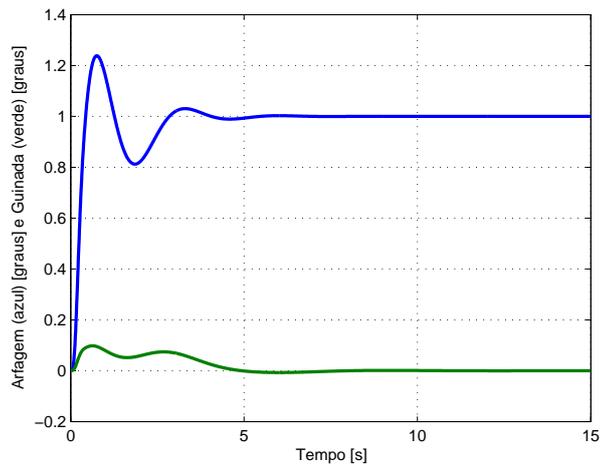


Figura 27: Resposta ao degrau unitário na entrada de referência para o ângulo de arfagem da malha de controle com  $\gamma \rightarrow \infty$  do helicóptero 2 DOF.

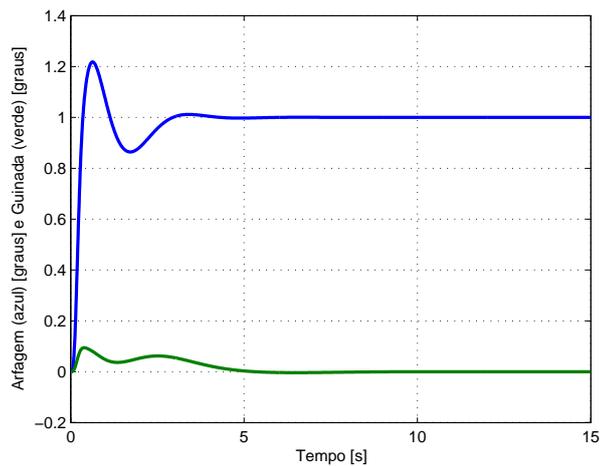


Figura 28: Resposta ao degrau unitário na entrada de referência para o ângulo de arfagem da malha de controle com  $\gamma = 6$  do helicóptero 2 DOF.

Já as Figuras 29 e 30 mostram a resposta ao degrau unitário na entrada de referência para o ângulo de guinada para a malha com  $\gamma \rightarrow \infty$  e  $\gamma = 6$ , respectivamente.

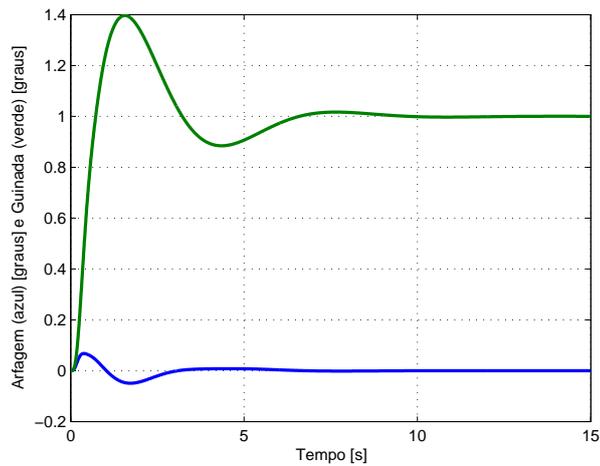


Figura 29: Resposta ao degrau unitário na entrada de referência para o ângulo de guinada da malha de controle com  $\gamma \rightarrow \infty$  do helicóptero 2 DOF.

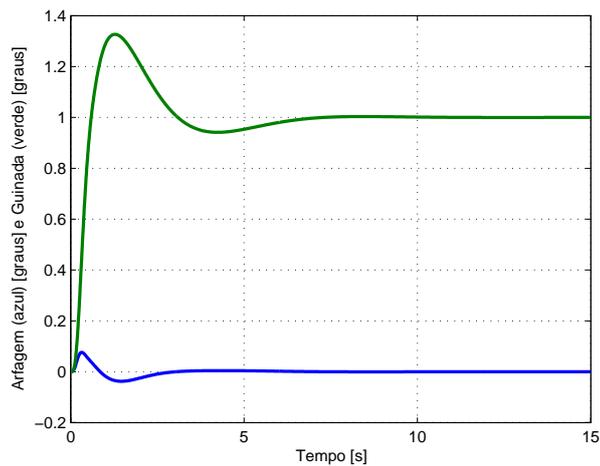


Figura 30: Resposta ao degrau unitário na entrada de referência para o ângulo de guinada da malha de controle com  $\gamma = 6$  do helicóptero 2 DOF.

Por fim, as Figuras 31 e 32 mostram a resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência para a malha com  $\gamma \rightarrow \infty$  e  $\gamma = 6$ , respectivamente.

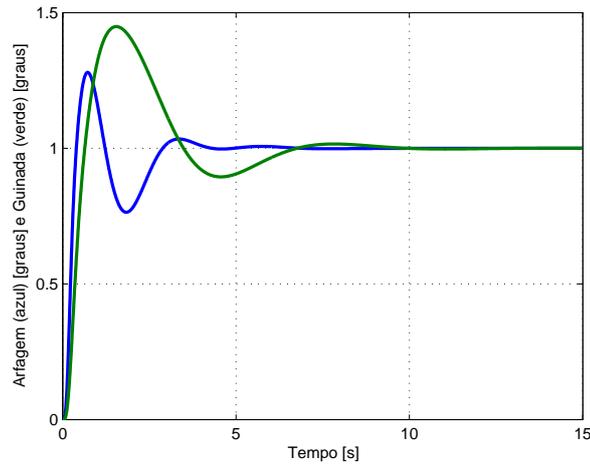


Figura 31: Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência da malha de controle com  $\gamma \rightarrow \infty$  do helicóptero 2 DOF.

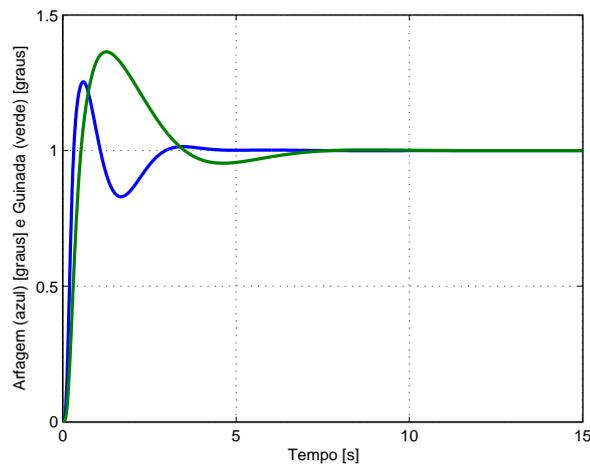


Figura 32: Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência da malha de controle com  $\gamma = 6$  do helicóptero 2 DOF.

Comparando-se a Figura 27 com Figura 28, Figura 29 com Figura 30 e Figura 31 com Figura 32, nota-se que houve redução no *overshoot* em todos os casos onde  $\gamma = 6$  em relação a  $\gamma \rightarrow \infty$ , comprovando o resultado esperado.

### 5.2.3 Resultados Experimentais

Com base nos controladores projetados e nas simulações da subseção anterior, realizou-se ensaios experimentais no helicóptero a fim de comprovar na prática os resultados esperados para a metodologia proposta neste trabalho. O ensaio consiste em colocar o

helicóptero no ponto de operação no qual se obteve o modelo linearizado e em seguida aplicar um distúrbio de 20 graus no ângulo de guinada, sendo o sistema de controle, portanto, do tipo regulador.

Fazendo-se os ensaios descritos para os controladores obtidos para  $\gamma \rightarrow \infty$  e  $\gamma = 6$ , obtêm-se as Figuras 33 e 34 para o comportamento do ângulo de arfagem em relação ao distúrbio aplicado e as Figuras 35 e 36 para o comportamento do ângulo de guinada em relação ao distúrbio. Em todas as figuras a curva em azul denota as medições feitas no helicóptero e a curva em verde denota a simulação do modelo não-linear.

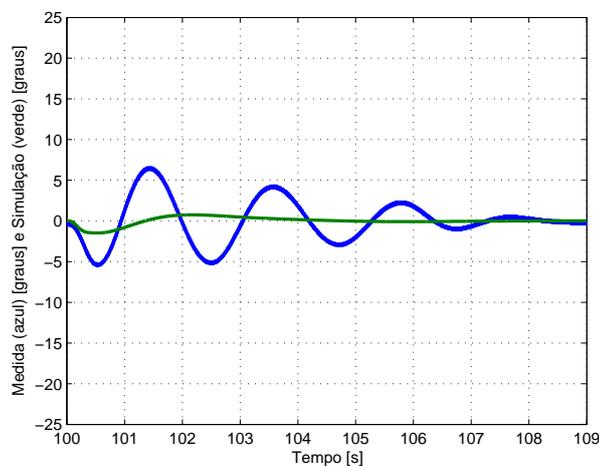


Figura 33: Resposta do ângulo de arfagem ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com  $\gamma \rightarrow \infty$  do helicóptero 2 DOF.

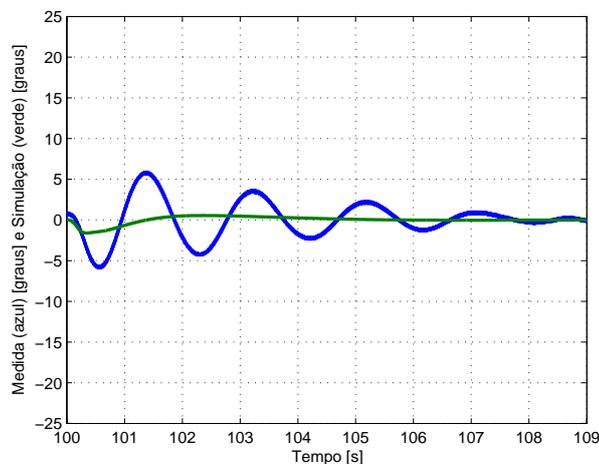


Figura 34: Resposta do ângulo de arfagem ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com  $\gamma = 6$  do helicóptero 2 DOF.

A análise das Figuras 33 e 34 mostra que para o distúrbio aplicado há uma oscilação não prevista para o ângulo de arfagem. Credita-se tais oscilações a não-linearidades presentes na dinâmica real do helicóptero e não consideradas no projeto dos compensadores. Tais oscilações eram ainda maiores e foram diminuídas ao se fixar com parafusos a base do protótipo no plano. Observe que as oscilações são menores para o controlador com  $\gamma = 6$  do que para o controlador com  $\gamma \rightarrow \infty$ , como esperado.

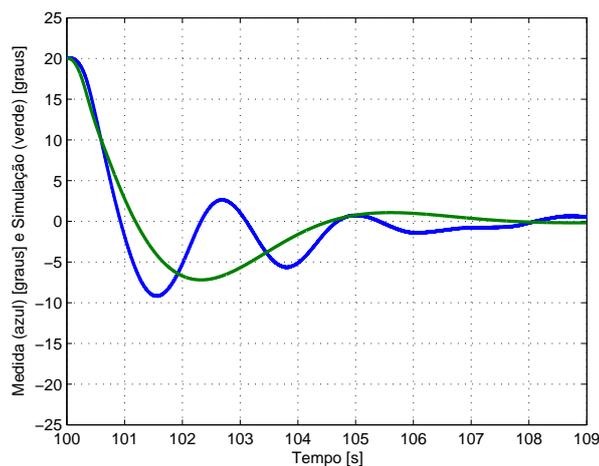


Figura 35: Resposta do ângulo de guinada ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com  $\gamma \rightarrow \infty$  do helicóptero 2 DOF.

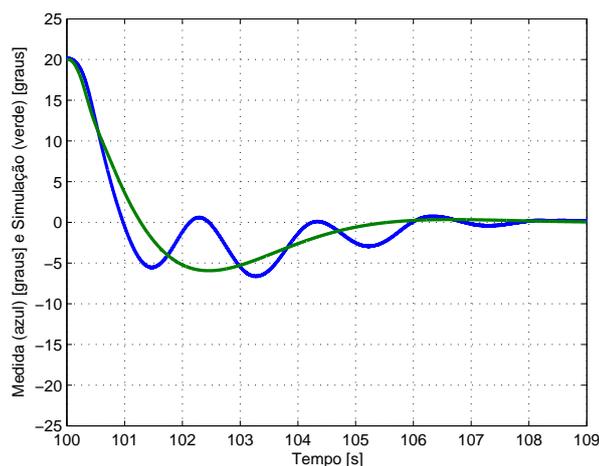


Figura 36: Resposta do ângulo de guinada ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com  $\gamma = 6$  do helicóptero 2 DOF.

Comparando-se as Figuras 35 e 36, nota-se que o resultado esperado de diminuição de *overshoot* para a malha com  $\gamma = 6$  realmente ocorreu e está mais nítida em relação

ao ângulo de arfagem. Tal diferença entre as duas malhas de controle (entre  $\gamma \rightarrow \infty$  e  $\gamma = 6$ ) foi de 5 graus aproximadamente. Novamente, oscilações indesejáveis e não previstas ocorrem para o ângulo de guinada. Entretanto, para este caso tais oscilações são mais bem “comportadas” que para o ângulo de arfagem. Observe que em ambos os casos, tanto para o ângulo de arfagem quanto para o ângulo de guinada, ambos os controladores com  $\gamma \rightarrow \infty$  e  $\gamma = 6$  possuem boa capacidade reguladora, já que ambas as saídas tendem a zero ao passo que o tempo aumenta.

As Figuras 37 e 38 mostram a tensão aplicada no motor de arfagem para as malhas com  $\gamma \rightarrow \infty$  e  $\gamma = 6$ , respectivamente, quando o distúrbio no ângulo de guinada é aplicado.

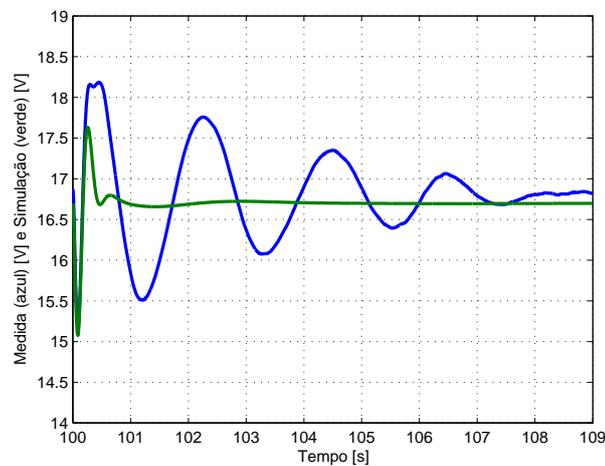


Figura 37: Tensão no motor principal para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com  $\gamma \rightarrow \infty$  do helicóptero 2 DOF.

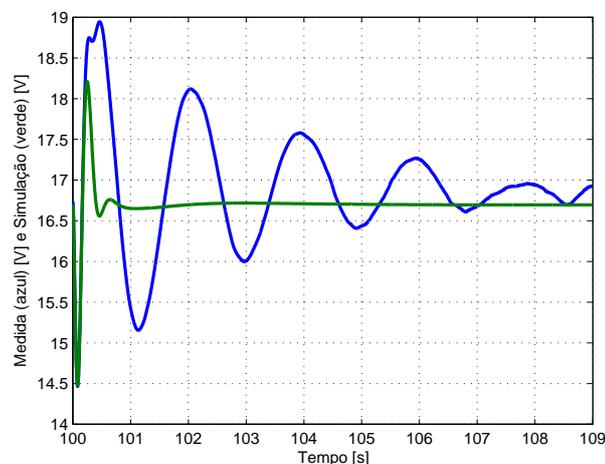


Figura 38: Tensão no motor principal para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com  $\gamma = 6$  do helicóptero 2 DOF.

Já as Figuras 39 e 40 mostram a tensão aplicada no motor de guinada para as malhas com  $\gamma \rightarrow \infty$  e  $\gamma = 6$  quando o distúrbio é aplicado. Novamente, a curva em azul denota as medições feitas e a curva em verde denota as simulações do modelo não-linear.

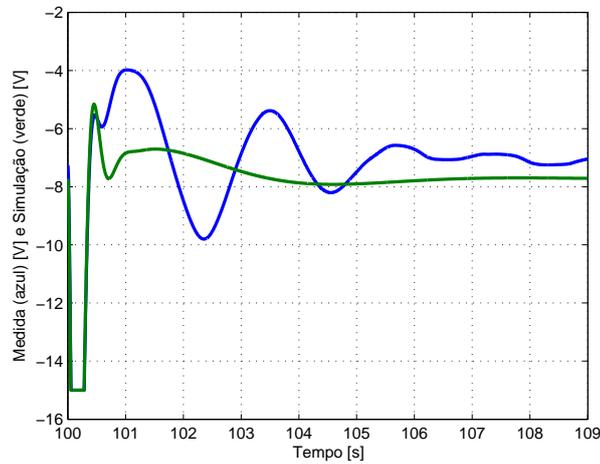


Figura 39: Tensão no motor de cauda para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com  $\gamma \rightarrow \infty$  do helicóptero 2 DOF.

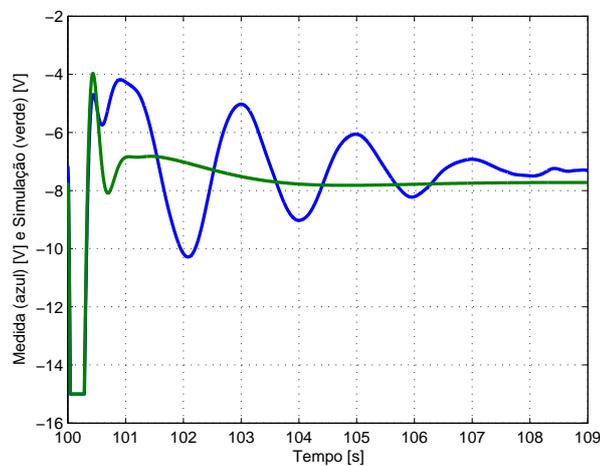


Figura 40: Tensão no motor de cauda para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com  $\gamma = 6$  do helicóptero 2 DOF.

A análise das Figuras 37, 38, 39 e 40 mostra que devido às oscilações não previstas há uma oscilação também nas tensões aplicadas nos motores. Observa-se também que as tensões nos motores cujas malhas possuem parâmetro  $\gamma = 6$  são em geral maiores.

De forma a comprovar que as oscilações indesejadas decorrem de alguma dinâmica não modelada do helicóptero real, um outro ensaio com características diferentes foi elaborado.

Este novo ensaio consiste em colocar o helicóptero na posição de ângulo de arfagem zero e ângulo de guinada zero (ponto de operação para o qual o modelo linear foi obtido), e então não aplicar qualquer distúrbio. Procedendo-se tal ensaio, obteve-se então a resposta do ângulo de arfagem, do ângulo de guinada, da tensão no motor principal e da tensão no motor de cauda, que estão ilustradas, respectivamente, pelas Figuras 41, 42, 43 e 44.

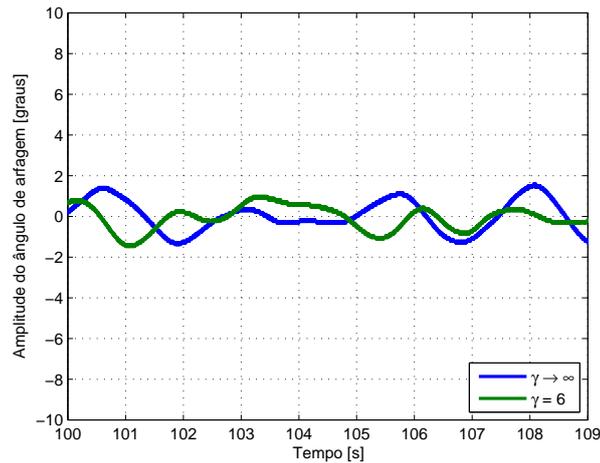


Figura 41: Resposta do ângulo de arfagem do helicóptero 2 DOF quando nenhum distúrbio é aplicado.

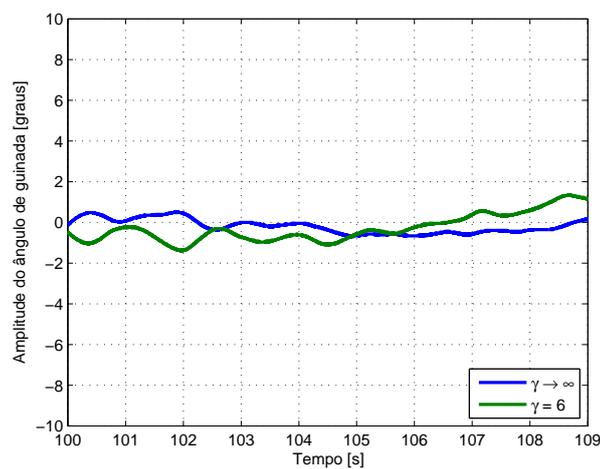


Figura 42: Resposta do ângulo de guinada do helicóptero 2 DOF quando nenhum distúrbio é aplicado.

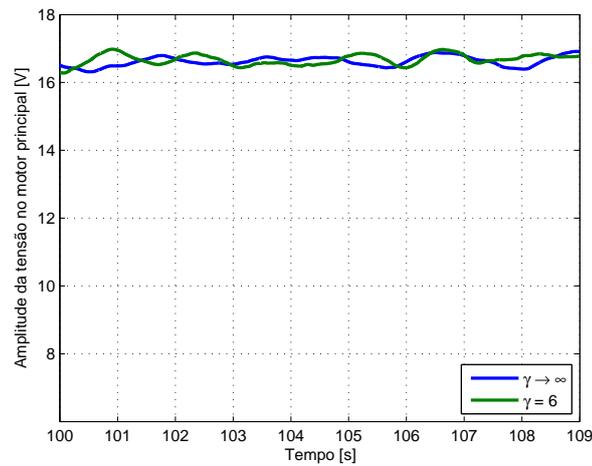


Figura 43: Tensão no motor principal do helicóptero 2 DOF quando nenhum distúrbio é aplicado.

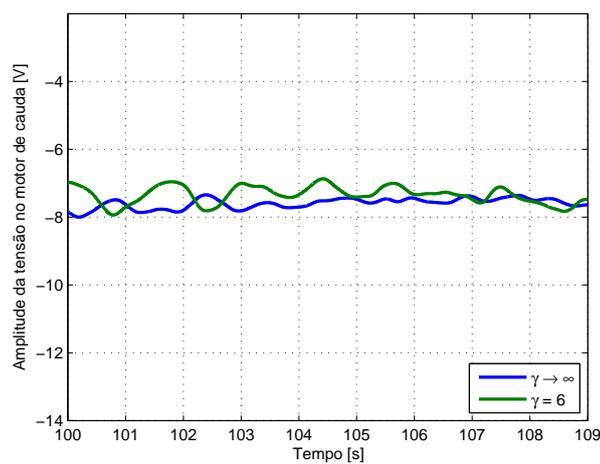


Figura 44: Tensão no motor de cauda do helicóptero 2 DOF quando nenhum distúrbio é aplicado.

A análise das Figuras 41 e 42 revela que mesmo quando nenhum distúrbio é aplicado há uma oscilação não-prevista (indesejada) nos ângulos de arfagem e guinada para ambos os valores do parâmetro  $\gamma$ .

## 6 Conclusão

Neste trabalho foi proposta a tese de que o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo ocorre para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$  assim como ocorre para a síntese  $\mathcal{H}_2$ /LQG. Esta proposta foi investigada e mostrou-se verdadeira. O ponto central para provar que o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo ocorre para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$  assim como para a síntese  $\mathcal{H}_2$ /LQG está no comportamento assintótico dos reguladores e observadores: assim como no controle LQG/LTR, se o parâmetro  $\rho$  tende a zero pela direita, e se  $H\Phi(s)B$  for quadrada e de fase-mínima, então a solução da EARG também tenderá a zero.

Outro ponto bastante interessante da teoria desenvolvida é a transformação de similaridade que possibilitou ao controlador  $\mathcal{H}_\infty$  ter uma nova representação em variáveis de estado na qual é muito mais simples obter as provas duais para o PRMO pela entrada. Além disso, novas propriedades de sintonia de controladores surgiram, propriedades estas que só podem ser alcançadas com o controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR em decorrência da Identidade de Kalman Generalizada.

Logo, conclui-se que o controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR apresentado pode ser visto como uma generalização do controle LQG/LTR. Sendo assim, a facilidade e simplicidade da sintonia de controladores via controle LQG/LTR podem ser extendidas para o  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR: a resolução de duas Equações Algébricas de Riccati é capaz de resolver o problema. Exemplos de aplicação apresentados, inclusive com resultados experimentais práticos, corroboram a metodologia proposta.

Como trabalhos futuros estão incluídos estudos para desenvolvimento de novas metodologias para a escolha dos parâmetros de controle para a formatação da malha objetivo, estudos para verificar a aplicabilidade ou adequação da metodologia proposta em plantas de fase não-mínimas ou subatuadas, estudo da aplicabilidade e resultados da metodologia aplicada aos controladores com as estruturas propostas por [32] e estudo sobre a possibilidade de aplicação do Princípio de Recuperação da Malha Objetivo em sistemas com custo misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ , que dão origem à Equações Algébricas de Riccati acopladas.

## *Referências*

- [1] STEIN, G.; ATHANS, M. The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 32, n. 2, p. 105–114, 1987.
- [2] SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 2005.
- [3] DOYLE, J. C.; STEIN, G. Multivariable feedback design: Concepts for a modern/classical synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, n. 1, p. 4–16, 1981.
- [4] KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 17, n. 1, p. 79–86, 1972.
- [5] ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverse. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, p. 301–320, 1981.
- [6] SAFONOV, M. G.; LAUB, A. J.; HARTMANN, G. L. Feedback properties of multivariable systems: the role and use of the return difference matrix. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, n. 1, p. 47–65, 1981.
- [7] DOYLE, J. C. et al. State-space solutions to standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989.
- [8] MATHWORKS. *MATLAB 2013a*. [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com), 2013.
- [9] MOORE, J. B.; XIA, L. Loop recovery and robust state estimate feedback designs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 32, p. 512–517, 6 1987.
- [10] ATHANS, M. A tutorial on the LQG/LTR method. In: *Proceedings of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1986.
- [11] WALL, J. E.; DOYLE, J. C.; HARVEY, C. A. Asymptotic recovery for discrete-time systems. In: *Proceedings of the 18th Allerton Conference*. [S.l.: s.n.], 1980.
- [12] ZHANG, Z.; FREUDENBERG, J. S. Loop transfer recovery for non-minimum phase plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 35, n. 5, p. 547–553, 1990.
- [13] TURAN, L.; MINGORI, D. L. A unified loop transfer recovery approach to robust control using  $\mathcal{H}_\infty$  optimization methods. *Automatica*, v. 31, n. 7, p. 1045–1052, 1995.
- [14] SAEKI, M.  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR procedure with specified degree of recovery. *Automatica*, v. 28, n. 3, p. 509–517, 1992.

- [15] NIEMANN, H. H.; STOUSTRUP, J. A general  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR design problem. In: *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1991.
- [16] KWITEGETSE, B. S. Loop transfer recovery for  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis. In: *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1994.
- [17] PEREIRA, R. L. *Controladores Robustos Utilizando Generalizações do Método LQG/LTR*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2011.
- [18] ZAREI, J. et al. Design and comparison of LQG/LTR and  $\mathcal{H}_\infty$  controllers for a VSTOL flight control system. *Journal of the Franklin Institute*, v. 344, p. 577–594, 2007.
- [19] JAIMOUKHA, I. M. et al. A study on LQG/LTR control for damping inter-area oscillations in power systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 15, n. 1, p. 151–160, 2007.
- [20] KULCSÁR, B. LQG/LTR controller design for an aircraft model. *Periodica Polytechnica Transportation Engineering*, v. 28, n. 1-2, p. 131–142, 2000.
- [21] SUH, S.; CHUNG, C. C.; LEE, S. Servo controller design for high-bandwidth HDDs. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 38, n. 5, p. 2177–2179, 2002.
- [22] MCFARLANE, D.; GLOVER, K. A loop shaping design procedure using  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 37, n. 6, p. 759–769, 1992.
- [23] QUANSER 2 DOF Helicopter. User and control manual. [S.l.]: Quanser Inc., 2006.
- [24] CRUZ, J. J. *Controle Multivariável Robusto*. 1. ed. [S.l.]: EDUSP, 1996.
- [25] DOYLE, J. C. Guaranteed margins for LQG regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 23, n. 4, p. 756–757, 1978.
- [26] HELTON, J. Operator theory and broadband matching. In: *Proceedings of the 11th Annual Allerton Conference on Communications, Control and Computing*. [S.l.: s.n.], 1976.
- [27] KWAKERNAAK, H. The polynomial approach to  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal regulation. In: E., M.; PANDOLFI, L. (Ed.).  *$\mathcal{H}_\infty$  Control*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1990, (Lecture Notes in Mathematics).
- [28] MUSTAFA, D. Relations between maximum-entropy/ $\mathcal{H}_\infty$  control and combined  $\mathcal{H}_\infty$ /LQG control. *Systems and Control Letters*, n. 12, p. 193–203, 1989.
- [29] MUSTAFA, D.; GLOVER, K. Minimum entropy  $\mathcal{H}_\infty$  control. In: THOMA, M.; WYNER, A. (Ed.). [S.l.]: Springer-Verlag, 1990. Lecture Notes in Control and Information Sciences.
- [30] ZHOU, K.; DOYLE, J.; GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*. 1. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1995.
- [31] KAILATH, T. *Linear Systems*. 1. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1980.

- [32] PRAKASH, R. Target feedback loop/loop transfer recovery (TFL/LTR) robust control design procedures. In: *Proceedings of the 29<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1990. v. 03, p. 1203–1209.
- [33] OGATA, K. *Modern Control Engineering*. 5. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2009.
- [34] O'DELL, B. D.; MISAWA, E. A. Obtaining uniform singular values of augmented systems using LQG/LTR. In: *Proceedings of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1995. p. 461–465.
- [35] SILVA, D. L. F.; PAULA, C. F. de; FERREIRA, L. H. C. Sobre a parametrização da malha objetivo no controle  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR. In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 80–85.
- [36] TYLAVSKY, D. J.; SOHIE, G. R. L. Generalization of the matrix inversion lemma. *Proceedings of the IEEE*, v. 74, n. 7, p. 1050–1052, 1986.
- [37] PAULA, C. F. de; FERREIRA, L. H. C. An easy-to-use  $\mathcal{H}_\infty$ /LTR control solution with mixed sensitivity properties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 56, n. 7, p. 1709–1713, 2011.

## *APÊNDICE A – Lema da Matriz Inversa*

Este apêndice é dedicado a apresentar um lema frequentemente utilizado nesta tese de doutorado: o Lema da Matriz Inversa.

**Lema da Matriz Inversa** O lema da matriz inversa é uma identidade matricial muito importante e frequentemente utilizada em vários desenvolvimentos algébricos na teoria de sistemas lineares. Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  matrizes reais ou complexas. Dado que  $A$  e  $C$  são inversíveis, é possível provar que

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (\text{A.1})$$

A prova de (A.1) é bem conhecida na literatura e pode ser encontrada junto de outros casos e generalizações, por exemplo, em [36].

## *APÊNDICE B – Artigos e Publicações*

Esta teste originou um artigo publicado no *IEEE Transactions on Automatic Control* [37], periódico classificado no Qualis A1 da CAPES e um artigo publicado no XVIII Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2010.

de Paula, C. F. and Ferreira, L. H. C. “*An Easy-to-Use  $\mathcal{H}_\infty/LTR$  Control Solution With Mixed-Sensitivity Properties*”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, No. 7, pp. 1709-1713, July 2011.

de Paula, C. F., da Cunha, F.H.R. e Ferreira, L. H. C. “*Um procedimento simplificado de síntese de controladores  $\mathcal{H}_\infty/LTR$  para o problema de sensibilidade mista*”, XVIII Congresso Brasileiro de Automática, 2010, pp. 2939-2944.

Além disso, um projeto de pesquisa intitulado “*Princípio de Recuperação da Malha Aplicado ao Controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ : um Estudo de Caso em um Helicóptero de Dois Graus de Liberdade*” do Edital 01/2011 Demanda Universal da Fapemig, Processo No. TEC-APQ-00340-11 encontra-se em desenvolvimento.