

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Configurações Centrais Co-Circulares

Antonio José Melo de Queiroz

**UNIFEI - ITAJUBÁ
FEVEREIRO/2014**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Antonio José Melo de Queiroz

Configurações Centrais Co-Circulares

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de **Mestre em Ciência em Matemática.**

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes

UNIFEI - ITAJUBÁ
FEVEREIRO/2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB_6/1700

Q38f

Queiroz, Antonio José Melo de
Configurações Centrais Co-Circulares / Antonio José Melo
de Queiroz. -- Itajubá, (MG) : [s.n.], 2014.
88 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Problema Newtoniano. 2. Configuração Central. 3. Co-
Circular. I. Fernandes, Antonio Carlos, orient. II. Universidade
Federal de Itajubá. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Antonio José Melo de Queiroz

Configurações Centrais Co-Circulares

Dissertação aprovada por banca examinadora em 10 de fevereiro de 2014, conferindo ao autor o título de **Mestre em Ciência em Matemática.**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes
(Orientador)

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório
Mello

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes
Leandro

Agradecimentos

Ao Cosmos, por tudo que somos.

Aos meus pais, Gledson e Marizete, pelo apoio, compreensão e confiança.

À minha irmã, Thayane, por boas conversas, sobre tudo.

À minha namorada e amiga, Patrícia Aires, pela compreensão, paciência e apoio.

Aos professores do Instituto de Matemática e Computação da UNIFEI, Jacson Simsen, Mariza Simsen, Leandro Gustavo. E em especial, ao professor Luis Fernando, pelo esforço em fazer Matemática de qualidade na UNIFEI.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes, pela confiança, esforço na realização do trabalho, boas idéias, amizade e por ser sempre, muito prestativo.

Aos professores Edisom Eugênio e Antonio Grangeiro, da Universidade Estadual do Ceará, pela amizade e confiança.

Aos amigos de Quixadá, Diego Silva, Luciana Magalhães, Wendel Kassio, Emanuel Ferreira e Diógenes Nobre, pelo apoio e amizade incondicional.

Aos amigos de Itajubá, Tiago Garcia, Jarne Donizetti, José Lucas, Alexandre Lima, Filipe Mendonça, Warley Batista, Paulo Henrique, Fernando Félix, pela boa convivência e por boas trocas de idéias.

À CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

No presente trabalho apresentamos uma caracterização das configurações centrais co-circulares com 4 corpos, mostrando que elas determinam uma superfície, tendo como coordenadas as distâncias mútuas e utilizando as relações de Dziobek. Também apresentamos dois resultados que respondem parcialmente a uma questão posta por Alain Chenciner, a unicidade de configuração central co-circular com 4 e 5 corpos e centro de massa no centro do círculo. Por fim, mostramos que é possível fazer a mesma caracterização das configurações com 4 corpos utilizando as equações de Andoyer, em vez das relações de Dziobek.

Palavras-chave: Problema Newtoniano, Configuração Central, Co-Circular.

Abstract

In this work we present a characterization of the co-circular central configurations with 4 body, showing that they determine a surface, having as coordinates the mutual distances and using the Dziobek relation. Also we answer partially a question posed by Alain Chenciner, the uniqueness of the co-circular central configurations with 4 and 5 bodies and center of mass at the center of the circle. Finally, we show that you can do the same characterization of the configurations with 4 bodies using the Andoyer equations, instead of the Dziobek relations.

Keywords: Newtonian Problem, Central Configurations, Co-Circular.

Lista de Figuras

1.1	Configuração co-circular com 4 corpos.	9
1.2	Não pode ser configuração central	14
1.3	Pode ser configuração central	14
1.4	Ângulos α e β	20
2.1	Configuração pipa.	24
2.2	Configuração trapézio isósceles.	31
2.3	Gráfico de $y = \tau(x)$. Figura retirada de [14].	34
2.4	Superfície de C.C.C. Figura retirada de [14]. As curvas no plano $r_{34}r_{23}$ são as famílias de trapézios isósceles, pipas e triângulos equiláteros.	40
3.1	Trapézio isósceles.	51
5.1	Configuração triângulo girado.	73
5.2	Configuração quadrado girado.	75

Índice

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Figuras	iv
Introdução	1
1 Definições Preliminares	5
1.1 Panorama Geral	5
1.2 Distâncias Mútuas	7
1.3 Equações de Andoyer	10
1.4 Configuração de Dziobek no Caso Co-Circular	15
1.5 Razões das Massas	17
2 Configurações Centrais Co-Circulares	24
2.1 Configuração Pipa	24
2.2 A Configuração Trapézio Isósceles	29
2.3 O Caso Geral	37
2.4 A superfície de c.c.c	40
3 Unicidade de Configuração Central Co-Circular Com 4 Corpos Com Centro de Massa no Centro do Círculo	49
3.1 O Caso Simétrico	50
3.2 O Caso Não Simétrico	51
4 Unicidade de Configuração Central Co-Circular Com 5 Corpos Com Centro de Massa no Centro do Círculo	54
4.1 Preliminares	54
4.2 Unicidade da Configuração Central Co-Circular Com 5 Corpos e Centro de Massa no Centro do Círculo	56

4.3	Caso 1	56
4.3.1	Subcaso 1.1	57
4.3.2	Subcaso 1.2	59
4.4	Caso 2	64
5	Construções Equivalentes	67
5.1	Construções Com as Equações de Andoyer	67
5.2	Exemplos de C.C.C	72
5.3	Considerações Finais e Trabalhos Futuros	77
	Bibliografia	78

Introdução

A fascinação do homem pelo céu é bem antiga e diversa. Desde os gregos, antes da era cristã, o ser humano se questiona sobre o movimento dos corpos celestes. Algumas teorias foram criadas e posteriormente acabaram caindo por terra, por exemplo, a idéia dos epiciclos de Ptolomeu, que sobreviveu aproximadamente 18 séculos. Porém, o maior desenvolvimento na compreensão dos movimentos celestes ocorre por volta dos séculos XVI e XVII com grandes nomes como, Nicolau Copérnico, Galileu Galilei, Johannes Kepler e Isaac Newton. Neste ponto da história idéias seculares desabam, pois surgem idéias como: sistema heliocêntrico, órbitas elípticas, etc.

No século XVII um dos maiores cientistas da Terra, Isaac Newton, propõe um dos mais importantes problemas da Mecânica Celeste, hoje chamado de problema Newtoniano de n corpos. Consiste em estudar a dinâmica ao longo do tempo de n partículas interagindo pela Lei da Gravitação de Newton.

Esta questão tem o movimento dos corpos totalmente determinado apenas para $n = 2$. Neste caso sabemos o comportamento dos corpos ao longo do tempo, as órbitas são cônicas e as soluções são obtidas por quadraturas, ou seja, utilizando as quantidades conservadas do problema. Para $n = 3$ apenas algumas soluções são conhecidas, as clássicas, solução colinear de Euler e o triângulo equilátero de Lagrange.

Em princípio, a idéia era encontrar soluções via quadraturas, ou seja, encontrando integrais primeiras para o problema, visto que com o problema de 2 corpos este processo funcionou, já que temos as 10 constantes de movimento clássicas. Então, buscava-se encontrar ou produzir integrais primeiras para o problema de 3 corpos. Mas, em 1887 Ernst Heinrich Bruns em [3] mostra que quaisquer outras constantes algébricas de movimento que forem encontradas são combinações algébricas das 10 clássicas. Logo, torna-se impossível resolver o problema de n corpos via quadraturas.

A partir deste ponto, o que os matemáticos tem feito é estudar soluções particulares para o problema. Uma destas soluções são as soluções homográficas, nas quais a configuração inicial é preservada ao longo do tempo a menos de homotetias e rotações. Além disso, as condições iniciais destas soluções são as configurações centrais, resultado chamado de teorema de Laplace. Para $n = 3$, Lagrange mostrou que as soluções homográficas são sempre planares [15].

Para o problema Newtoniano de n corpos, uma configuração central é uma configuração de n partículas onde o vetor aceleração é um múltiplo do vetor posição relativo ao centro de massa

do sistema. As configurações centrais tem um importante papel no problema de n corpos, pois além das órbitas Keplerianas do problema de dois corpos, as únicas soluções explícitas são as soluções homográficas que formam a cada instante uma configuração central. Então se conhecermos estas configurações alguma solução homográfica fica determinada.

Assim, muitas questões surgem, umas das mais importantes é determinar a quantidade de configurações centrais para um dado conjunto de massas. Esta contagem é feita módulo rotações e homotetias centradas no centro de massa. Desta forma, contamos classes de configurações centrais. Esta questão foi proposta inicialmente por Wintner e a contagem de configurações centrais planares aparece na lista de Smale em [17], como um dos 18 problemas matemáticos mais importantes para o século XXI.

Para esta dissertação o objetivo principal foi compreender um pouco sobre as configurações centrais co-circulares, ou seja, aquelas configurações planares em que o conjunto de corpos pertence a um mesmo círculo. Um exemplo trivial deste tipo de configuração é o triângulo equilátero com corpos de massas quaisquer, pois, sabemos desde Lagrange, que o triângulo equilátero é sempre configuração central, independentemente das massas. Além disso, tal polígono é inscritível, logo a configuração é co-circular.

Hampton em [7] responde parcialmente a seguinte questão. É o polígono regular com corpos de massas iguais nos vértices, a única configuração central co-circular com centro de massas no centro do círculo? Esta é uma conjectura devida à Alain Chenciner. Hampton em [7] mostra que a única configuração central co-circular com 4 corpos e centro de massa no centro do círculo, é o quadrado com corpos de massas iguais nos seus vértices. Além disso, faz dois questionamentos, o primeiro; é o n -ágono com corpos de massas iguais a única configuração central co-circular com centro de massa no centro círculo? O segundo problema proposto é caracterizar todas as configurações centrais co-circulares com 4 corpos.

Este trabalho caminha na direção de analisar as respostas parciais existentes para estas duas questões. Roberts e Cors em [14] dão uma caracterização às configurações centrais co-circulares com 4 corpos, mostram que o conjunto de tais configurações é uma superfície, mais precisamente o gráfico de uma função diferenciável, parametrizada pelo comprimento dos dois menores lados do quadrilátero formado.

Além disso, mostram que os dois casos simétricos possíveis, pipa e trapézio isósceles, são famílias que formam dois bordos desta superfície. O outro bordo é formado pelo caso degenerado do triângulo equilátero com dois corpos de massas infinitesimais, problema restrito de 4 corpos. Também obtém um ordenamento preciso entre as massas. E um resultado surpreendente de simetria: prova ser a igualdade entre duas massas apenas condição suficiente para existência de simetria.

Esta dissertação também traz a demonstração de Hampton [7] da unicidade de configuração central co-circular com 4 corpos e centro de massa no centro do círculo. E uma prova devida a Llibre e Valls em [11] que estende a resposta ao primeiro questionamento de Hampton citado acima, pois mostram que a única configuração central com 5 corpos e centro de massa no centro

do círculo, é o pentágono regular.

As demonstrações dos resultados citados no parágrafo anterior seguem a mesma linha de raciocínio, pois sabe-se que, no primeiro caso o quadrado com corpos de massas iguais satisfaz as hipóteses, no segundo caso o pentágono regular também satisfaz as hipóteses do problema, então resta eliminar todas as outras possibilidades. Para 4 corpos, mostra-se que é impossível ser uma configuração simétrica do tipo trapézio isósceles, que não seja o quadrado, e também é impossível uma configuração sem simetria alguma, então a única que satisfaz o problema é o quadrado. Para 5 corpos, a idéia é a mesma, dividimos a prova em vários casos, um dos casos resulta no pentágono regular com corpos de massas iguais. Os demais casos geram contradição, normalmente surgem colisões entre os corpos.

As construções para a caracterização do conjunto de configurações centrais co-circulares seguem das relações de Dziobek, uma vez que temos $n = 4$ e a configuração é planar, então estas relações são equivalentes à configuração central. Um de nossos objetivos é reescrever as construções necessárias para tal caracterização utilizando as equações de Andoyer, que são equivalentes à configuração central para qualquer número de corpos no plano. Assim, a dissertação apresenta a seguinte estrutura.

No capítulo 1 fazemos todas as construções preliminares do problema, damos todas as definições a serem utilizadas, apresentamos as equações de Andoyer com alguns exemplos e a demonstração de sua equivalência com configuração central. Também apresentamos as relações de Dziobek para configurações com 4 corpos no plano. Além disso, deduzimos expressões para razões das massas em função dos lados do quadrilátero e relações entre os lados deste.

No capítulo 2 apresentamos a caracterização das configurações centrais co-circulares. Primeiramente construímos as famílias de casos simétricos, pipas e trapézios isósceles. Existe uma família de configurações centrais pipas que depende do comprimento do menor lado do quadrilátero e nos extremos desta família temos, em um deles o quadrado com corpos de massas iguais e no outro a configuração degenerada triângulo equilátero, com dois corpos de massas infinitesimais. Mostramos que a família de configurações trapézio isósceles é descrita como uma função diferenciável do menor lado do quadrilátero, nos extremos desta família, novamente aparecem o quadrado e o triângulo equilátero.

Por fim, o resultado principal mostra que o conjunto de configurações centrais co-circulares é o gráfico de uma função diferenciável dos dois menores lados do quadrilátero. Os casos simétricos apresentados acima são os bordos desta superfície. Além disso, segue um teorema que ordena precisamente as quatro massas, ou seja, a maior se opõe à menor e as duas maiores pertencem ao maior lado do quadrilátero. Também segue um resultado que garante a existência de simetria se apenas duas massas são iguais. E seguem os limites superiores e inferiores para os comprimentos de lados e diagonais.

O objetivo do capítulo 3 é apresentar a demonstração da unicidade de configuração central co-circular com 4 corpos e centro de massa no centro do círculo, tal configuração é o quadrado com corpos de massas iguais. No capítulo 4 fazemos o mesmo resultado para 5 massas, a forma

de escrever a configuração muda um pouco, com relação aos capítulos anteriores, pois neste capítulo utilizamos o círculo de raio 1 e senos e cossenos como coordenadas dos corpos.

Por fim, o quinto e último capítulo é dedicado à reescrever as construções para a caracterização das configurações centrais co-circulares utilizando as equações de Andoyer, em vez da relação de Dziobek, que foi utilizada por Roberts e Cors em [14]. Também damos alguns exemplos de configurações centrais utilizando as equações de Andoyer.

Capítulo 1

Definições Preliminares

1.1 Panorama Geral

O principal problema de estudo na Mecânica Celeste é o problema Newtoniano de n corpos, que consiste em analisar a evolução, ao longo do tempo, do movimento de n corpos sob suas atrações gravitacionais mútuas. Neste trabalho estudamos um tipo especial de solução para este problema, as soluções homográficas, nas quais a forma da configuração é preservada ao longo do tempo a menos de homotetias e rotações. Mais especificamente, analisamos as configurações centrais com quatro corpos em um mesmo círculo. Vamos às definições preliminares.

Suponha que temos n corpos com massas positivas dadas por m_i e posições $r_i \in \mathbb{R}^d$, respectivamente, para $i = 1, \dots, n$ e $d = 1, 2, 3$. Denotemos por $r_{ij} = \|r_i - r_j\|$, a distância Euclidiana entre os corpos i e j . Denotemos por $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{dn}$ o vetor configuração.

Na maior parte do trabalho estamos interessados em massas positivas, porém em alguns trechos do mesmo, trabalhamos com massas nulas. São os casos extremos das configurações com simetria. Ou seja, o problema Newtoniano restrito.

Definição 1.1.1. *O centro de massa do sistema é $c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i r_i$, onde $M = \sum_{i=1}^n m_i$ é a massa total do sistema.*

Definição 1.1.2. *Dado o sistema de n corpos isolado, as equações de movimento são determinadas pela lei da gravitação de Newton, e para cada partícula temos*

$$m_i \ddot{r}_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (r_i - r_j)}{\|r_i - r_j\|^3},$$

considerando $G = 1$.

Definição 1.1.3. *O momento de inércia é $I(r) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|r_i - c\|^2$, como uma medida do tamanho do sistema a partir do centro de massa.*

Definição 1.1.4. *A função potencial Newtoniano é $U(r) = \sum_{i < j}^n \frac{m_i m_j}{\|r_i - r_j\|}$.*

Definição 1.1.5. Uma dada solução $r(t)$ do problema de n corpos é **homográfica** se existem funções diferenciáveis $s : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $W : I \rightarrow SO(d)$, com $d = 2$ ou $d = 3$, definidas em um aberto $I \subseteq \mathbb{R}$, tais que $r_j(t) = s(t)W(t)r_j(t_0)$, para $j = 1, \dots, n$ e $t_0 \in I$.

Definição 1.1.6. Uma **configuração central (c.c)** do problema de n corpos é um vetor de posições $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{dn}$ para o qual existe uma constante λ tal que $\ddot{r}_i = \lambda(r_i - c)$, $i = 1, \dots, n$.

O seguinte teorema é chamado teorema de Laplace por Wintner em [20].

Teorema 1.1.1. A cada instante de tempo t a configuração de n corpos em uma solução homográfica é uma configuração central.

A seguinte observação dará um caráter mais algébrico à definição de c.c.

Observação 1.1.1. Se $r \in \mathbb{R}^{dn}$ é uma c.c, então r satisfaz

$$\nabla U(r) + \lambda \nabla I(r) = 0, \quad (1.1)$$

onde $U(r)$ é a função potencial Newtoniano. De fato, pois $\frac{\partial U}{\partial r_i} = m_i \ddot{r}_i$ e também $\frac{\partial I}{\partial r_i} = m_i(r_i - c)$ e como r é c.c, temos

$$- \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (r_i - r_j)}{\|r_i - r_j\|^3} + \lambda m_i (r_i - c) = 0,$$

ou seja, $\nabla U(r) + \lambda \nabla I(r) = 0$.

Entendemos a ação do grupo $SO(d)$ sobre os vetores configuração como sendo $R \in SO(d)$ e $r \in \mathbb{R}^{dn}$, então $Rr = (Rr_1, \dots, Rr_n)$.

Proposição 1.1.1. As configurações centrais são invariantes por homotetias e rotações com centro em c , ou seja, dado $k \neq 0 \in \mathbb{R}$, $R \in SO(d)$, se $r \in \mathbb{R}^{dn}$ é c.c, então $kr = (kr_1, \dots, kr_n)$ e $Rr = (Rr_1, \dots, Rr_n)$ também são configurações centrais.

Demonstração. De fato, seja $r \in \mathbb{R}^{dn}$ c.c, então temos

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (r_j - r_i)}{\|r_i - r_j\|^3} + \lambda m_i (r_i - c) = 0$$

e seja $k \neq 0$, logo

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (kr_j - kr_i)}{\|kr_i - kr_j\|^3} = -\frac{\lambda}{|k|^3} m_i (kr_i - kc).$$

Assim, basta tomar $\lambda' = \frac{\lambda}{|k|^3}$, então $kr \in \mathbb{R}^{dn}$ é c.c. Além disso, vemos também que

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (Rr_j - Rr_i)}{\|Rr_i - Rr_j\|^3} + \lambda m_i (Rr_i - Rc) =$$

$$R\left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (r_j - r_i)}{\|r_i - r_j\|^3} + \lambda m_i (r_i - c)\right) = 0,$$

podemos fazer isto porque $R \in SO(d)$ é rotação e sabemos que $r \in \mathbb{R}^{dn}$ é c.c. Logo, $Rr \in \mathbb{R}^{dn}$ é c.c, e podemos tomar o mesmo λ . Esta proposição pode ser mais forte, as c.c são invariantes por isometrias. $\square$

1.2 Distâncias Mútuas

Neste trabalho estamos interessados em configurações centrais co-circulares (c.c.c) com quatro corpos. Uma das abordagens para classificar tais c.c.c utiliza as distâncias mútuas entre os corpos como coordenadas. Nesta seção construímos algumas ferramentas úteis à tal abordagem.

Denotemos a partir daqui o vetor $r = (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}) \in \mathbb{R}^{+6}$ de distâncias mútuas, este é o caso estudado, com 4 corpos.

Proposição 1.2.1. *Sejam n corpos de massas positivas $m_1, \dots, m_n$ com posições $r_1, \dots, r_n$, então o momento de inércia pode ser dado por $I(r) = \frac{1}{2M} \sum_{i=1, i < j}^n m_i m_j r_{ij}^2$*

Demonstração. Seja $(r_j - r_i)^2$ o produto interno, $(r_j - r_i) \bullet (r_j - r_i)$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n m_j ((r_j - c) - (r_j - c))^2 &= \\ \sum_{j=1}^n m_j (r_j - c)^2 + \sum_{j=1}^n m_j (r_i - c)^2 - 2(r_i - c) \bullet \left(\sum_{j=1}^n m_j (r_j - c) \right) &= \\ \sum_{j=1}^n m_j (r_j - c)^2 + \sum_{j=1}^n m_j (r_i - c)^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^n m_j ((r_j - c) - (r_j - c))^2 = 2I + M(r_i - c)^2.$$

Multiplicando ambos os lados por m_i e somando em i , temos

$$\sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=1}^n m_j ((r_j - c) - (r_i - c))^2 = 4IM.$$

Desta forma, $I(r) = \frac{1}{2M} \sum_{i=1, i < j}^n m_i m_j r_{ij}^2$, como desejado. $\square$

Para o caso $n = 4$, as distâncias mútuas são dependentes umas das outras. Genericamente, sabemos que tais distâncias resultam em um tetraedro em $\mathbb{R}^3$, em vez de uma configuração planar.

Para termos uma c.c planar de 4 corpos é necessário uma restrição adicional, basta tomarmos o volume deste tetraedro igual a zero. Esta restrição pode ser obtida pelo determinante de

Cayley-Menger,

$$V(r) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & r_{24}^2 \\ 1 & r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & r_{34}^2 \\ 1 & r_{14}^2 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

em que temos a fórmula $(\text{vol})^2 = V(r)/288$.

Observação 1.2.1. *O volume do tetraedro pode ser positivo para uma escolha de seis distâncias mútuas e mesmo assim a configuração não existir, pois é suficiente que as distâncias não satisfaçam a desigualdade triangular.*

Exemplo 1.2.1. *Tomemos o seguinte vetor de distâncias mútuas $r = (2, 4, 1, 7, 4, 1)$, podemos fazer os cálculos e obter*

$$V(r) = 3118 \Rightarrow (\text{vol})^2 = 3118/288 > 0,$$

porém não existe configuração satisfazendo tais distâncias pois,

$$r_{12} = 2, r_{13} = 4, r_{23} = 7 \Rightarrow r_{23} > r_{12} + r_{13}.$$

Observação 1.2.2. *Pode existir vetor de distâncias mútuas satisfazendo a desigualdade triangular para toda tríade de distâncias, ou seja, $r_{ik} < r_{ij} + r_{jk}$, porém com o volume do tetraedro imaginário.*

Exemplo 1.2.2. *Tomemos a seguinte família de vetores de distâncias mútuas $r_t = (1, t, 1, 1, 2/t, 1)$, eles satisfazem as desigualdades triangulares para todas as tríades, porém $V(r_t) = -8t^{-2}(t^2 - 2)^2, \forall t > 0$, ou seja, o tetraedro formado tem o volume imaginário.*

Assim, para garantir que $r \in \mathbb{R}^{+6}$ é configuração de 4 corpos não-colinear, é necessário e suficiente garantir que $V(r) \geq 0$ e as desigualdades triangulares são satisfeitas estritamente. Desta forma, definimos o seguinte conjunto.

Definição 1.2.1. *Seja o conjunto*

$$G = \{r \in \mathbb{R}^{+6}; V(r) \geq 0 \text{ e } r_{ij} + r_{jk} > r_{ik}, \forall (i, j, k), \text{ com } i \neq j \neq k\}.$$

Aos vetores $r \in G$ damos a denominação de geometricamente realizáveis.

Qualquer vetor $r \in G$ corresponde a uma configuração planar de 4 corpos se $V(r) = 0$ e um tetraedro se $V(r) > 0$.

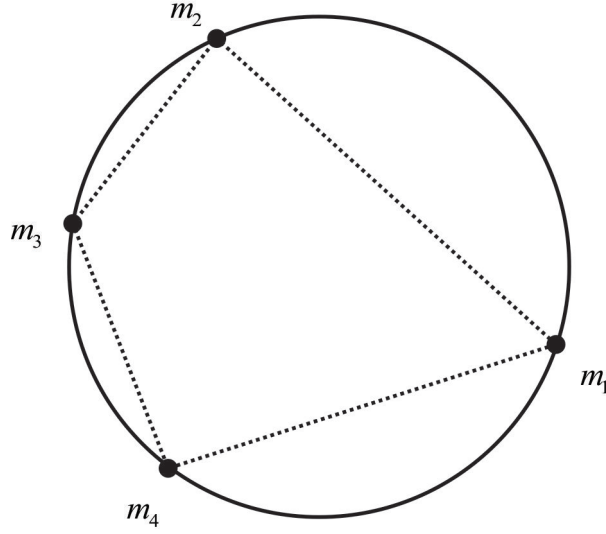


Figura 1.1: Configuração co-circular com 4 corpos.

Assumimos pelo resto do trabalho que o quadrilátero é ordenado ciclicamente, ou seja, os corpos são numerados consecutivamente nos vértices do quadrilátero. Assim, r_{12}, r_{14}, r_{23} e r_{34} são os comprimentos dos lados e r_{13}, r_{24} são os comprimentos das diagonais do quadrilátero.

Agora, enunciemos o teorema de Ptolomeu, objeto essencial na caracterização das c.c co-circulares com 4 corpos.

Teorema 1.2.1 (Ptolomeu). *Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo, então $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$, com a igualdade se, e somente se, o quadrilátero é inscrito.*

Para a prova deste teorema veja [2].

Dado o polinômio $P : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$P(r) = r_{12}r_{34} + r_{14}r_{23} - r_{13}r_{24},$$

o teorema acima nos diz que $P(r) = 0$ se o quadrilátero é co-circular.

Definição 1.2.2. *Desta forma, temos o subconjunto $P \subset G$, onde $P = \{r \in G; \ P(r) = 0\}$. Assim, as c.c que procuramos estão em P .*

Definição 1.2.3. *Tomemos Δ_i como a área orientada do triângulo cujos vértices são os corpos $j, k, l \neq i$. Neste trabalho ordenamos os corpos no círculo no sentido anti-horário e, para esta seção, assumimos, por convenção, $\Delta_1, \Delta_3 > 0$ e $\Delta_2, \Delta_4 < 0$.*

Provamos na sequência um lema afirmando que, os conjuntos de nível $\{V = 0\}$ e $\{P = 0\}$ se tangenciam para todo $r \in P$. Este lema é importante para facilitar a obtenção da relação de Dziobek para o caso co-circular.

Lema 1.2.1. Para qualquer $r \in P$ temos

$$\nabla V(r) = \frac{4}{r_c^2} \prod_{i=1, i < j}^n r_{ij} \nabla P(r),$$

onde r_c é o raio do círculo. Assim, no conjunto de vetores $P \subset G$, onde $V(r) = 0$ e $P(r) = 0$, os gradientes destas funções são paralelos.

Demonstração. Do determinante de Cayley-Menger temos a fórmula

$$\frac{\partial V}{\partial r_{ij}^2} = -32\Delta_i\Delta_j. \quad (1.2)$$

Pondo $\delta = r_{12}r_{13}r_{14}r_{23}r_{24}r_{34}$, então $\forall r \in P$ temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r_{ij}} &= \frac{\partial V}{\partial r_{ij}^2} \cdot \frac{\partial(r_{ij}^2)}{\partial r_{ij}} = 2r_{ij} \frac{\partial V}{\partial r_{ij}^2} \\ &= \frac{-64r_{ij}}{16r_c^2} (\pm 1) r_{jk}r_{kl}r_{jl}r_{ik}r_{il}r_{kl} = \\ &\quad \frac{\pm 4\delta r_{kl}}{r_c^2}, \end{aligned}$$

onde r_c é o raio do círculo que circunscreve o quadrilátero. Utilizamos a seguinte fórmula para calcular a área dos triângulos, $|\Delta_i| = r_{jk}r_{kl}r_{jl}/4r_c$. Como $\nabla P = (r_{34}, -r_{24}, r_{23}, r_{14}, -r_{13}, r_{12})$, $k, l \neq i, j$ em $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\Delta_1, \Delta_3 > 0$, $\Delta_2, \Delta_4 < 0$, os sinais de ∇V são $(+, -, +, +, -, +)$, ou seja, os mesmos sinais de ∇P , então

$$\nabla V(r) = \frac{4}{r_c^2} \prod_{i=1, i < j}^n r_{ij} \nabla P(r)$$

como desejado. □

Vimos assim que, os conjuntos de nível $\{V = 0\}$ e $\{P = 0\}$ são tangentes nos pontos do conjunto P , pois do contrário seriam transversais, o que é absurdo, pois como ∇V e ∇P são perpendiculares aos seus respectivos conjuntos de nível, então estes vetores gradientes seriam transversais, contradizendo o lema.

1.3 Equações de Andoyer

Nesta seção vamos definir e fazer algumas aplicações de um conjunto de equações algébricas, chamadas equações de Andoyer, que são equivalentes às equações da definição de configuração central. Este conjunto de equações é particularmente importante no estudo de configurações

centrais com algum tipo de simetria. Para esta seção consideramos o centro de massa na origem do sistema de coordenadas, ou seja, $c = 0$.

Definição 1.3.1. As equações de Andoyer com área em $\mathbb{R}^2$ são dadas por

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i, j}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0, \quad (1.3)$$

$R_{ij} = R_{ji} = \|r_i - r_j\|^{-3}$ e $\Delta_{ijk} = (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k)$ é o dobro área orientada do triângulo formado pelos corpos m_i, m_j e m_k e a notação acima representa produto exterior.

Vamos a um resultado essencial na relação entre configurações centrais e equações de Andoyer.

Teorema 1.3.1. Considere um sistema de n corpos com massas $m_1, \dots, m_n$ não-colineares, então eles formam uma configuração central se, e somente se, respeitam as seguintes condições

$$f_{ij} = 0, \quad \forall i, j (1 \leq i < j \leq n).$$

Demonstração. Suponhamos que os n corpos formam uma configuração central planar, o sistema formado por eles é isolado, o espaço é homogêneo e isotrópico. Estas condições serão utilizadas para termos a conservação do momento linear e do momento angular. Então, existe λ tal que

$$\lambda r_i = - \sum_{k \neq i} m_k R_{ik} (r_i - r_k). \quad (1.4)$$

Isto é equivalente à

$$\lambda r_i = - \sum_{k \neq i, j} m_k R_{ik} (r_i - r_k) - m_j R_{ij} (r_i - r_j). \quad (1.5)$$

Também para $j \neq i$ podemos fazer para r_j

$$\lambda r_j = - \sum_{k \neq i, j} m_k R_{jk} (r_j - r_k) - m_i R_{ji} (r_j - r_i). \quad (1.6)$$

Considerando a subtração de (1.5) de (1.6), tem-se

$$\lambda (r_i - r_j) = - \sum_{k \neq i, j} m_k [R_{ik} (r_i - r_k) - R_{jk} (r_j - r_k)] - [m_j R_{ij} - m_i R_{ji}] (r_i - r_j). \quad (1.7)$$

E tomando o produto vetorial por $(r_i - r_j)$ em ambos os lados da última equação, obtemos

$$0 = - \sum_{k \neq i, j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = -f_{ij}. \quad (1.8)$$

Logo, $f_{ij} = 0, \quad \forall i, j (1 \leq i < j \leq n)$.

Para a recíproca, considere que as equações de Andoyer são verificadas

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i, j}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0,$$

para $1 \leq i < j \leq n$, e podem ser escritas da seguinte forma,

$$\sum_{k \neq i, j}^n m_k R_{ik} (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k) = \sum_{k \neq i, j}^n m_k R_{jk} (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k). \quad (1.9)$$

Podemos inserir na última equação, sem alterá-la, o termo em j no lado esquerdo e o termo em i no lado direito, obtendo

$$\sum_{k \neq i}^n m_k R_{ik} (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k) = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k),$$

ou seja,

$$(r_i - r_j) \wedge \sum_{k \neq i}^n m_k R_{ik} (r_i - r_k) = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) + (r_j \wedge r_k)]. \quad (1.10)$$

Denote $\nabla_i U$ por F_i . Vemos que a igualdade acima pode ser escrita como:

$$(r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) + (r_j \wedge r_k)].$$

Podemos inserir à direita da igualdade (1.10) o termo $-r_j$ sem alterá-la, obtendo

$$(r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = \sum_{k \neq j}^n m_k R_{jk} [r_i \wedge (r_j - r_k) + r_j \wedge (-r_j + r_k)],$$

rearranjando o lado direito, temos

$$(r_i - r_j) \wedge \frac{F_i}{m_i} = (r_i - r_j) \wedge \frac{F_j}{m_j},$$

disto segue,

$$(r_i - r_j) \wedge (m_j F_i - m_i F_j) = 0. \quad (1.11)$$

Fazendo o produto vetorial termo a termo em (1.11), obtemos

$$r_i \wedge m_j F_i - r_i \wedge m_i F_j - r_j \wedge m_j F_i + r_j \wedge m_i F_j = 0,$$

e segue

$$m_j r_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge F_j - m_j r_j \wedge F_i + m_i r_j \wedge F_j = 0.$$

Podemos somar em j com $j \neq i$, obtendo:

$$(M - m_i)r_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge \sum_{j \neq i}^n F_j - \left(\sum_{j \neq i}^n m_j r_j \right) \wedge F_i + m_i \sum_{j \neq i}^n r_j \wedge F_j = 0, \quad (1.12)$$

onde M é a massa total. E, considerando o centro de massa na origem do referencial, temos

$$\sum_{j=1}^n m_j r_j = 0 \implies \sum_{j \neq i}^n m_j r_j = -m_i r_i. \quad (1.13)$$

Como o espaço é homogêneo e isotrópico e o sistema é isolado, temos que as quantidades de momento linear total e momento angular total são conservadas. Então, respectivamente, temos

$$\sum_{j=1}^n F_j = 0 \implies \sum_{j \neq i}^n F_j = -F_i \quad (1.14)$$

e

$$\sum_{j=1}^n (r_j \wedge F_j) = 0 \implies \sum_{j \neq i}^n (r_j \wedge F_j) = (-r_i \wedge F_i). \quad (1.15)$$

Substituindo (1.13), (1.14) e (1.15) em (1.12), obtemos

$$Mr_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge F_i + m_i r_i \wedge F_i + m_i r_i \wedge F_i - m_i r_i \wedge F_i = 0.$$

Assim, $Mr_i \wedge F_i = 0$, logo r_i e F_i são paralelos, ou seja, $F_i = \lambda_i r_i$, ou $\ddot{r}_i = (\lambda_i/m_i)r_i$. De (1.11), decorre que

$$\left(\frac{\lambda_i}{m_i} r_i - \frac{\lambda_j}{m_j} r_j \right) \wedge (r_i - r_j) = 0.$$

Assim,

$$-\frac{\lambda_i}{m_i} r_i \wedge r_j - \frac{\lambda_j}{m_j} r_j \wedge r_i = 0,$$

logo,

$$\left(\frac{\lambda_i}{m_i} - \frac{\lambda_j}{m_j} \right) (r_j \wedge r_i) = 0.$$

Se r_i e r_j são paralelos a igualdade acima é imediata. Se r_i e r_j são não-colineares, temos que

$$\frac{\lambda_i}{m_i} = \frac{\lambda_j}{m_j} = \lambda,$$

para todo i, j . Portanto,

$$\ddot{r}_i = \lambda r_i,$$

para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$, como desejado. □

Fazemos a seguir duas aplicações das equações de Andoyer, sendo a primeira, a configuração planar de Lagrange com 3 corpos.

Considere 3 corpos de massas positivas m_1, m_2 e m_3 não-colineares. Das equações (1.3) temos

$$f_{12} = m_3(R_{13} - R_{23})\Delta_{123} = 0,$$

$$f_{13} = m_2(R_{12} - R_{23})\Delta_{132} = 0,$$

$$f_{23} = m_1(R_{12} - R_{13})\Delta_{231} = 0.$$

Como $m_i > 0$ e $\Delta_{ijk} \neq 0$, segue que, $R_{12} = R_{13} = R_{23}$, ou seja, os corpos de massas m_1, m_2 e m_3 estão nos vértices de um triângulo equilátero e suas massas podem assumir quaisquer valores positivos.

A segunda aplicação das equações de Andoyer é uma condição importante de suficiência para a não-existência de certas configurações centrais.

Teorema 1.3.2 (Mediatriz). *Considere uma configuração central planar, formada por n corpos de massas positivas $m_1, \dots, m_n$. Escolha dois corpos de massas m_i e m_j com posições r_i e r_j , respectivamente. Trace a reta que contém estes dois corpos e a mediatriz do segmento $\overline{r_i r_j}$. Estas duas retas definem dois cones abertos no plano. Então, se existe corpo num dos cones abertos, devemos ter corpo no outro cone. Ou seja, se os outros $n - 2$ corpos pertencem à apenas um cone aberto não temos configuração central.*

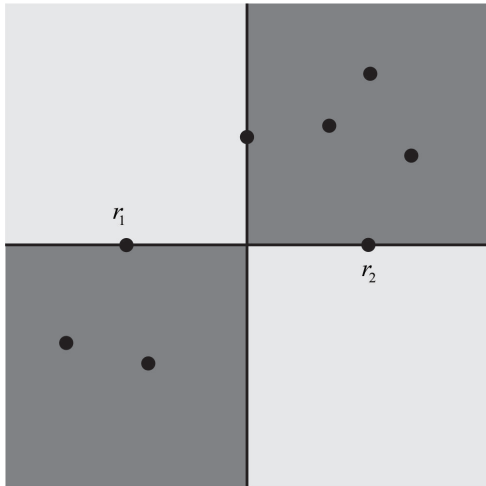


Figura 1.2: Não pode ser configuração central

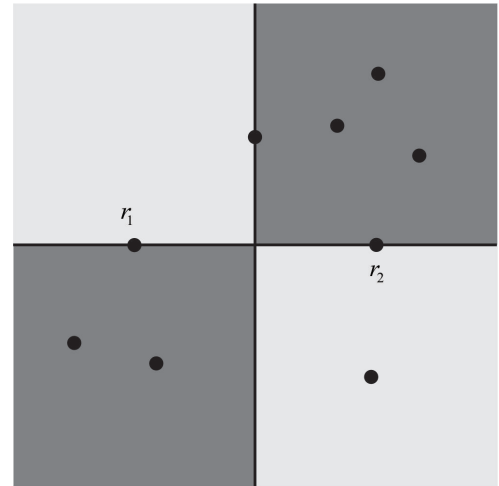


Figura 1.3: Pode ser configuração central

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos renomear os índices i e j por 1 e 2. Suponha, por contradição, que corpos de massas $m_3, \dots, m_n$ estão em um só cone aberto ou sobre o eixo bissetor, mas não todos sobre o eixo.

Como, por hipótese, temos configuração central planar, então as $\frac{n(n-1)}{2}$ equações de Andoyer são satisfeitas, em particular

$$f_{12} = \sum_{k=3}^n m_k(R_{1k} - R_{2k})\Delta_{12k} = 0.$$

Podemos olhar para as retas passando pelos corpos e a reta que a bissecta como os eixos tradicionais que dividem o plano em 4 quadrantes ordenados ciclicamente, como usual. Assim, um cone aberto é formado pela união do primeiro e terceiro quadrantes abertos, e o outro cone aberto é formado pela união do segundo e quarto quadrantes abertos. Vamos supor que existem corpos no primeiro e terceiro quadrantes, e possivelmente, sobre os eixos.

Vamos tomar a soma acima em três parcelas, da seguinte forma, o índice l denotará os termos no primeiro quadrante, k no terceiro e i são termos sobre a mediatriz. Se tivermos corpos sobre a reta que contem os corpos 1 e 2, então $\Delta_{12k} = 0$. Assim,

$$f_{12} = \sum_l m_l(R_{1l} - R_{2l})\Delta_{12l} + \sum_k m_k(R_{1k} - R_{2k})\Delta_{12k} + \sum_i m_i(R_{1i} - R_{2i})\Delta_{12i} = 0.$$

Primeiro, os termos da terceira soma são todos nulos, pois sobre a bissetriz $R_{1i} = R_{2i}$. Desta forma, nos resta

$$f_{12} = \sum_l m_l(R_{1l} - R_{2l})\Delta_{12l} + \sum_k m_k(R_{1k} - R_{2k})\Delta_{12k} = 0.$$

Agora, estudemos o sinal da primeira soma, $\Delta_{12l} > 0$, para todo l e

$$r_{1l} > r_{2l} \Rightarrow R_{1l} < R_{2l},$$

logo, todos os coeficientes das massas, na primeira soma, são negativos.

Para os termos da segunda soma temos, $\Delta_{12k} < 0$ para todo k e

$$r_{1k} < r_{2k} \Rightarrow R_{1k} > R_{2k},$$

assim, todos os coeficientes das massas na segunda soma são negativos, e as massas são positivas, então a soma analisada não pode ser zero, contradição. Logo se existe corpo em um dos cones abertos, existe corpo no outro cone aberto. $\square$

1.4 Configuração de Dziobek no Caso Co-Circular

Nesta seção mostramos uma das ferramentas utilizadas para classificação das configurações centrais co-circulares com 4 corpos, pois veremos a condição de Dziobek, que é necessária e suficiente, para garantir a existência de configurações centrais planares, já que temos $n = 4$. Na verdade as relações de Dziobek são equivalentes à configuração central em qualquer situação onde o espaço tem dimensão $n - 2$, sendo n o número de corpos.

Corolário 1.4.1. *Assuma um ordenamento cíclico, uma c.c.c de 4 corpos r é um ponto crítico da função*

$$U(r) + \lambda M(I(r) - I_0) + \sigma P(r), \quad (1.16)$$

satisfazendo $I = I_0, P = 0$ e $V = 0$.

Demonstração. Seja r uma c.c.c, então r está no conjunto de nível $P = 0$ e por ser configuração central, então r será ponto crítico de U restrito ao conjunto de nível $I = I_0$. Desta forma, podemos usar multiplicadores de Lagrange λ e σ e como r está na intersecção dos conjuntos de nível $P = 0$ e $I = I_0$, então

$$\nabla U(r) + \lambda M \nabla I(r) + \sigma \nabla P(r) = 0,$$

como desejado. □

Assim usando distâncias mútuas como coordenadas, temos

$$\frac{-m_i m_j}{r_{ij}^2} + \lambda m_i m_j r_{ij} + \sigma(\pm r_{kl}) = 0 \Rightarrow$$

$$-m_i m_j r_{ij}^{-2} + \lambda m_i m_j r_{ij} \pm \sigma r_{kl} = 0 \Rightarrow$$

$$\pm \sigma r_{kl} = m_i m_j r_{ij}^{-2} - \lambda m_i m_j r_{ij}.$$

Dividindo tudo por r_{ij} , temos $m_i m_j (r_{ij}^{-3} - \lambda) = \pm \sigma r_{kl} / r_{ij}$, onde $i \neq j \neq k \neq l$. Assim, obtemos no caso em que $n = 4$ as seguintes equações:

$$m_1 m_2 (r_{12}^{-3} - \lambda) = \frac{\sigma r_{34}}{r_{12}}, \quad m_3 m_4 (r_{34}^{-3} - \lambda) = \frac{\sigma r_{12}}{r_{34}}, \quad (1.17)$$

$$m_1 m_3 (r_{13}^{-3} - \lambda) = \frac{-\sigma r_{24}}{r_{13}}, \quad m_2 m_4 (r_{24}^{-3} - \lambda) = \frac{-\sigma r_{13}}{r_{24}}, \quad (1.18)$$

$$m_1 m_4 (r_{14}^{-3} - \lambda) = \frac{\sigma r_{23}}{r_{14}}, \quad m_2 m_3 (r_{23}^{-3} - \lambda) = \frac{\sigma r_{14}}{r_{23}}. \quad (1.19)$$

Equações idênticas são obtidas de (1.16) com V no lugar de P , a menos de uma mudança na constante σ e do surgimento das áreas orientadas dos triângulos. Multiplicando os pares de equações em (1.17), (1.18) e (1.19) obtemos a relação abaixo, que é conhecida como relação de Dziobek,

$$(r_{12}^{-3} - \lambda)(r_{34}^{-3} - \lambda) = (r_{13}^{-3} - \lambda)(r_{24}^{-3} - \lambda) = (r_{14}^{-3} - \lambda)(r_{23}^{-3} - \lambda). \quad (1.20)$$

Esta equação é condição necessária para configurações centrais planares de 4 corpos, não somente as co-circulares. Resolvendo a relação para λ , obtemos os seguintes valores:

$$\lambda = \frac{r_{12}^{-3} r_{34}^{-3} - r_{13}^{-3} r_{24}^{-3}}{r_{12}^{-3} + r_{34}^{-3} - r_{13}^{-3} - r_{24}^{-3}} = \frac{r_{13}^{-3} r_{24}^{-3} - r_{14}^{-3} r_{23}^{-3}}{r_{13}^{-3} + r_{24}^{-3} - r_{14}^{-3} - r_{23}^{-3}} = \frac{r_{14}^{-3} r_{23}^{-3} - r_{12}^{-3} r_{34}^{-3}}{r_{14}^{-3} + r_{23}^{-3} - r_{12}^{-3} - r_{34}^{-3}}. \quad (1.21)$$

Tomando,

$$\begin{aligned} s_1 &= r_{12}^{-3} + r_{34}^{-3}, & p_1 &= r_{12}^{-3} r_{34}^{-3}, \\ s_2 &= r_{13}^{-3} + r_{24}^{-3}, & p_2 &= r_{13}^{-3} r_{24}^{-3}, \\ s_3 &= r_{14}^{-3} + r_{23}^{-3}, & p_3 &= r_{14}^{-3} r_{23}^{-3}, \end{aligned}$$

assim a equação (1.21) torna-se

$$\lambda = (p_1 - p_2)/(s_1 - s_2) = (p_2 - p_3)/(s_2 - s_3) = (p_3 - p_1)/(s_3 - s_1).$$

Podemos ver $(s_1, p_1), (s_2, p_2), (s_3, p_3)$ como pontos em $\mathbb{R}^{+2}$, então eles estão em uma reta com inclinação λ .

A observação acima é equivalente a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0$$

e isto nos leva à fatoração abaixo, que segue diretamente da substituição dos valores de $s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3$. Assim a condição de Dziobek se torna:

$$(r_{13}^3 - r_{12}^3)(r_{23}^3 - r_{34}^3)(r_{24}^3 - r_{14}^3) = (r_{12}^3 - r_{14}^3)(r_{24}^3 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - r_{23}^3). \quad (1.22)$$

Desta forma, obtemos que a equação (1.22) é uma condição necessária e suficiente para c.c planar de 4 corpos, desde que as seis distâncias mútuas determinem um vetor geometricamente realizável em P .

Contudo, tal condição não garante positividade das massas. E notemos que, se dois lados com vértice comum tem comprimentos iguais, então temos por (1.22) uma c.c, e existe um outro par de lados com comprimentos iguais e vértice comum.

1.5 Razões das Massas

Para garantir massas positivas estudaremos as razões entre as massas dos corpos, que podem ser obtidas facilmente dividindo pares de equações apropriados em (1.17), (1.18) e (1.19). Além disso, mostramos relações entre as distâncias dos corpos e a condição de Ptolomeu. Tudo isto culmina com a formulação de um sistema de equações com seis equações e cinco incógnitas. E, encontrar c.c.c é, dadas as massas positivas, resolver tal sistema e encontrar as distâncias mútuas.

Consequimos as seguintes expressões para tais razões,

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{(\lambda - r_{13}^{-3})r_{13}r_{14}}{(r_{23}^{-3} - \lambda)r_{23}r_{24}} = \frac{(r_{14}^{-3} - \lambda)r_{13}r_{14}}{(\lambda - r_{24}^{-3})r_{23}r_{24}}, \quad (1.23)$$

$$\frac{m_3}{m_1} = \frac{(r_{12}^{-3} - \lambda)r_{12}r_{14}}{(r_{23}^{-3} - \lambda)r_{23}r_{24}} = \frac{(r_{14}^{-3} - \lambda)r_{12}r_{14}}{(r_{34}^{-3} - \lambda)r_{23}r_{34}}, \quad (1.24)$$

$$\frac{m_4}{m_1} = \frac{(r_{12}^{-3} - \lambda)r_{12}r_{13}}{(\lambda - r_{24}^{-3})r_{24}r_{34}} = \frac{(\lambda - r_{13}^{-3})r_{12}r_{13}}{(r_{34}^{-3} - \lambda)r_{24}r_{34}}. \quad (1.25)$$

Como desejamos massas positivas, então precisamos de outras restrições nas distâncias mútuas.

Primeiro, note que, se $\lambda = r_{ij}^{-3}$, para qualquer par i, j , então de (1.17), (1.18) e (1.19) e massas não-nulas, temos que $\sigma = 0$ e todos os r_{ij} serão iguais e a c.c. de 4 corpos é um tetraedro regular, caso que não nos interessa, visto que não é planar.

Se $r_{13}^{-3} - \lambda < 0$ então $\lambda > r_{13}^{-3}$, e para massas positivas, temos que $\sigma > 0$, pois de (1.18),

$$m_1 m_3 (r_{13}^{-3} - \lambda) < 0 \Rightarrow -\sigma r_{24}/r_{13} < 0 \Rightarrow -\sigma < 0 \Rightarrow \sigma > 0.$$

Logo, das equações (1.17), (1.18) e (1.19) temos

$$\begin{aligned} r_{13}^{-3}, r_{24}^{-3} < \lambda < r_{12}^{-3}, r_{14}^{-3}, r_{23}^{-3}, r_{34}^{-3} &\Leftrightarrow \\ r_{12}, r_{14}, r_{23}, r_{34} < \lambda^{-1/3} < r_{13}, r_{24}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Por outro lado, se $r_{13}^{-3} - \lambda > 0$ então $\lambda < r_{13}^{-3}$. Segue que (1.26) se inverte e temos a seguinte inequação

$$r_{13}, r_{24} < \lambda^{-1/3} < r_{12}, r_{14}, r_{23}, r_{34},$$

mas desta forma, ocorre o seguinte

$$P(r) = r_{12}r_{34} + r_{14}r_{23} - r_{13}r_{24} > 2r_{13}r_{24} - r_{13}r_{24} = r_{13}r_{24} > 0,$$

assim a configuração não é co-circular. Desta forma, (1.26) é a única possibilidade para as relações entre os lados do quadrilátero e assim, vemos que cada lado tem comprimento menor que o comprimento da diagonal.

Também podemos mostrar que o maior lado do quadrilátero está oposto ao menor lado do mesmo. De fato, suponha, sem perda de generalidade, que r_{12} é o maior lado do quadrilátero, então

$$\begin{aligned} r_{12} > r_{14} &\Rightarrow r_{12}^{-3} < r_{14}^{-3} \Rightarrow (r_{12}^{-3} - \lambda) < (r_{14}^{-3} - \lambda) \Rightarrow \\ (r_{34}^{-3} - \lambda) &> (r_{23}^{-3} - \lambda) \Rightarrow r_{34}^{-3} > r_{23}^{-3} \Rightarrow r_{34} < r_{23}, \end{aligned}$$

onde a quarta desigualdade segue de

$$(r_{12}^{-3} - \lambda)(r_{34}^{-3} - \lambda) = (r_{14}^{-3} - \lambda)(r_{23}^{-3} - \lambda) \quad (1.27)$$

e como $r_{12} > r_{23}$, temos similarmente que $r_{34} < r_{14}$, logo r_{34} é o menor lado do quadrilátero.

Se $r_{12} = r_{14}$, então da desigualdade em (1.26) e da relação de Dziobek, temos $r_{23} = r_{34}$ e

$$r_{14} = r_{12} \geq r_{34} = r_{23} \Rightarrow$$

$$r_{34} \leq r_{12}, r_{14}, r_{23},$$

assim r_{34} é o menor lado, como desejado. E o mesmo é válido se $r_{12} = r_{23}$.

O argumento é o mesmo para qualquer escolha de lado como o maior lado do quadrilátero. Assim, a menos de um reordenamento dos corpos, podemos fixar, sem perda de generalidade, r_{12} como o maior lado do quadrilátero. Então, isto junto com a inequação (1.26) dá a seguinte relação,

$$r_{34} \leq r_{14}, r_{23} \leq r_{12} < r_{13}, r_{24}.$$

Também podemos assumir que $r_{14} \geq r_{23}$, pois para isto é suficiente um reordenamento apropriado dos corpos. Além disso, percebemos que as equações em (1.17), (1.18) e (1.19) são invariantes pelas transformações

$$r_{13} \leftrightarrow r_{24} \quad e \quad r_{14} \leftrightarrow r_{23}, \quad m_1 \leftrightarrow m_2 \quad e \quad m_3 \leftrightarrow m_4.$$

Isso corresponde a mudar de lugar os corpos 1 e 2, 3 e 4 revertendo o sentido em que estão ordenados, passando do sentido anti-horário ao horário ou vice-versa.

Lema 1.5.1. *As diagonais r_{13} e r_{24} podem ser escritas como funções dos lados.*

Demonstração. Como o quadrilátero é co-circular e sequencialmente ordenado, usaremos a lei dos cossenos e a suplementaridade dos ângulos internos e opostos. Chame de α o ângulo interno no vértice do quadrilátero que tem o corpo 2, chame de β o ângulo interno no vértice que contém o corpo 4, ver figura 1.4. Assim, pela lei dos cossenos temos

$$r_{13}^2 = r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{23} \cos \alpha$$

e

$$r_{13}^2 = r_{14}^2 + r_{34}^2 - 2r_{14}r_{34} \cos \beta.$$

E como $\alpha + \beta = \pi$, então da regra do cosseno da diferença temos que $\cos \beta = -\cos \alpha$. Da primeira relação da lei dos cossenos acima, podemos tirar

$$\cos \alpha = \frac{-(r_{13}^2 - r_{12}^2 - r_{23}^2)}{2r_{12}r_{23}}.$$

Usando o fato $\cos \beta = -\cos \alpha$ e substituindo na segunda relação da lei dos cossenos, depois de alguma fatoração, obtemos:

$$r_{13} = \sqrt{\frac{ab}{c}},$$

onde

$$a = r_{12}r_{34} + r_{14}r_{23},$$

$$b = r_{12}r_{14} + r_{23}r_{34},$$

$$c = r_{12}r_{23} + r_{14}r_{34}.$$

Similarmente, obtemos

$$r_{24} = \sqrt{\frac{ac}{b}}.$$

Desta forma,

$$r_{13} = \sqrt{\frac{ab}{c}}, \quad r_{24} = \sqrt{\frac{ac}{b}} \quad (1.28)$$

que são funções dos quatro lados do quadrilátero, como desejado. $\square$

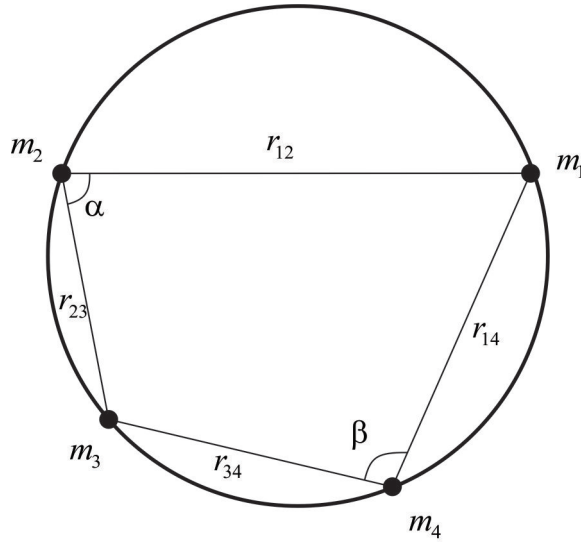


Figura 1.4: Ângulos α e β .

Observe que, se cada equação em (1.28) é válida, então $P(r) = 0$ e $V(r) = 0$. De fato, pois

$$r_{13}r_{24} = \sqrt{\frac{ab}{c}} \sqrt{\frac{ac}{b}} = \sqrt{a^2} = a = r_{12}r_{34} + r_{14}r_{23} \Rightarrow$$

$$P(r) = 0,$$

assim vemos que o fato do quadrilátero ser co-circular é equivalente às equações em (1.28).

Proposição 1.5.1. $r_{14} \geq r_{23}$ se, e somente se, $r_{13} \geq r_{24}$.

Demonstração. De fato, pois

$$\frac{r_{13}}{r_{24}} = \frac{b}{c} = \frac{r_{12}r_{14} + r_{23}r_{34}}{r_{12}r_{23} + r_{14}r_{34}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
r_{13} \geq r_{24} &\Leftrightarrow b \geq c \Leftrightarrow b - c \geq 0 \Leftrightarrow \\
(r_{12}r_{14} + r_{23}r_{34}) - (r_{12}r_{23} + r_{14}r_{34}) &\geq 0 \Leftrightarrow \\
(r_{12} - r_{34})(r_{14} - r_{23}) &\geq 0 \Leftrightarrow (r_{14} - r_{23}) \geq 0 \Leftrightarrow \\
r_{14} &\geq r_{23},
\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Como última hipótese podemos fixar o comprimento do maior lado do quadrilátero igual à 1, ou seja, $r_{12} = 1$. Assim, restringimos o conjunto de distâncias mútuas ao conjunto

$$\Omega = \{r \in \mathbb{R}^{+6}; r_{13} \geq r_{24} > r_{12} = 1 \geq r_{14} \geq r_{23} \geq r_{34}\}.$$

Logo, qualquer c.c.c com corpos de massas positivas e com esta escolha particular de ordenamento e escala corresponde a algum vetor $r \in \Omega$.

Usando expressões adequadas para λ , produzimos melhores fórmulas para as razões das massas. Substituindo $\lambda = (p_2 - p_3)/(s_2 - s_3)$ na primeira equação de (1.23) temos, depois de fatorar,

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{r_{23}^2 r_{24}^2 (r_{13}^3 - r_{14}^3)}{r_{13}^2 r_{14}^2 (r_{24}^3 - r_{23}^3)} \quad (1.29)$$

e substituindo $\lambda = (p_3 - p_1)/(s_3 - s_1)$ na primeira equação em (1.24) obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{m_3}{m_1} = \frac{r_{23}^2 r_{34}^2 (r_{12}^3 - r_{14}^3)}{r_{12}^2 r_{14}^2 (r_{23}^3 - r_{34}^3)} \quad (1.30)$$

por fim substituindo $\lambda = (p_1 - p_2)/(s_1 - s_2)$ na primeira equação de (1.25) produzimos,

$$\frac{m_4}{m_1} = \frac{r_{24}^2 r_{34}^2 (r_{13}^3 - r_{12}^3)}{r_{12}^2 r_{13}^2 (r_{24}^3 - r_{34}^3)}. \quad (1.31)$$

Percebemos que todas estas razões entre massas são positivas e bem definidas em Ω . A excessão é quando $r_{12} = r_{14}$ e $r_{23} = r_{34}$, ou seja, a configuração pipa. Surgem problemas na razão m_3/m_1 , porém quando este for o caso usamos $\lambda = (p_1 - p_2)/(s_1 - s_2)$ e substituímos na primeira equação em (1.24) obtendo a seguinte razão

$$\frac{m_3}{m_1} = \frac{(r_{13}^{-3} - \lambda)r_{12}^2}{(r_{23}^{-3} - \lambda)r_{23}^2} = \frac{(r_{13}^3 - r_{12}^3)(r_{24}^3 - r_{12}^3)r_{23}^4}{(r_{13}^3 - r_{23}^3)(r_{24}^3 - r_{23}^3)r_{12}^4}. \quad (1.32)$$

De maneira mais geral, observe que podemos refazer o Corolário 1.4.1 com a função $V(r)$ no lugar de $P(r)$ pois a configuração central em questão é planar, logo pode ser interpretada como ponto crítico de

$$U(r) + \lambda M(I(r) - I_0) + \gamma V(r). \quad (1.33)$$

Assim, usando as distâncias mútuas como coordenadas, as componentes deste gradiente são

$$\frac{-m_i m_j}{r_{ij}^2} + \lambda m_i m_j r_{ij} - 64\gamma r_{ij} \Delta_i \Delta_j = 0 \Leftrightarrow$$

$$-m_i m_j (r_{ij}^{-3} - \lambda) = -64\gamma \Delta_i \Delta_j,$$

tomando também

$$-m_i m_l (r_{il}^{-3} - \lambda) = -64\gamma \Delta_i \Delta_l,$$

com $i \neq j \neq l$. Fazendo o quociente destas igualdades, obtemos a seguinte relação

$$m_j \Delta_l (r_{ij}^{-3} - \lambda) = m_l \Delta_j (r_{il}^{-3} - \lambda). \quad (1.34)$$

Assim, vale a seguinte proposição.

Proposição 1.5.2. *As razões entre as massas em uma c.c planar com 4 corpos satisfazem a seguinte relação*

$$\frac{m_i}{m_j} = \frac{\Delta_i (r_{kj}^{-3} - r_{lj}^{-3})}{\Delta_j (r_{ik}^{-3} - r_{il}^{-3})}. \quad (1.35)$$

Demonstração. De fato, pois

$$\begin{aligned} & m_i \Delta_j (r_{ik}^{-3} - r_{il}^{-3}) \\ &= m_i \Delta_j ((r_{ik}^{-3} - \lambda) - (r_{il}^{-3} - \lambda)) \\ &= m_i \Delta_j (r_{ik}^{-3} - \lambda) - m_i \Delta_j (r_{il}^{-3} - \lambda) \\ &= m_j \Delta_i (r_{kj}^{-3} - \lambda) - m_j \Delta_i (r_{lj}^{-3} - \lambda) \\ &= m_j \Delta_i ((r_{kj}^{-3} - \lambda) - (r_{lj}^{-3} - \lambda)) \\ &= m_j \Delta_i (r_{kj}^{-3} - r_{lj}^{-3}). \end{aligned}$$

Assim, temos a relação (1.35) como desejado. Além disso, foi utilizada a relação (1.34) na antepenúltima igualdade. $\square$

Vamos a outra proposição que apresenta expressões para as razões entre as massas, que torna o caso das razões das massas para 4 corpos, visto acima, como um caso particular.

Proposição 1.5.3. *As razões entre as massas em uma c.c planar com 4 corpos satisfazem a seguinte relação*

$$\frac{m_i}{m_j} = \pm \frac{r_{ik}^2 r_{il}^2 (r_{jk}^3 - r_{jl}^3)}{r_{jk}^2 r_{jl}^2 (r_{ik}^3 - r_{il}^3)}. \quad (1.36)$$

Demonstração. Tomamos a relação (1.35) da Proposição 1.5.2, substituímos Δ_i por $\pm \frac{r_{jk} r_{kl} r_{jl}}{4r_c}$, sua área com orientação, o mesmo fazemos com Δ_j e o resultado segue por um cálculo direto. $\square$

Também podemos escolher uma escala para as massas, assim fixamos, sem perda de generalidade, $m_1 = 1$ e manteremos esta escolha pelo próximo capítulo.

Resumindo, uma configuração $r \in \Omega$, com massas $m_1 = 1, m_2, m_3$ e m_4 positivas, é uma c.c.c se, e somente se, é um zero comum dos seguintes polinômios

$$I : \begin{cases} F_1 = r_{13}^2(r_{23} + r_{14}r_{34}) - (r_{14}^2r_{23} + r_{14}r_{34}(r_{23}^2 + 1) + r_{23}r_{34}^2), \\ F_2 = r_{24}^2(r_{14} + r_{23}r_{34}) - (r_{14}^2r_{23}r_{34} + r_{14}(r_{23}^2 + r_{34}^2) + r_{23}r_{34}), \\ F_3 = (r_{13}^3 - 1)(r_{23}^3 - r_{34}^3)(r_{24}^3 - r_{14}^3) - (1 - r_{14}^3)(r_{24}^3 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - r_{23}^3), \\ F_4 = m_2r_{13}^2r_{14}^2(r_{24}^3 - r_{23}^3) - r_{23}^2r_{24}^2(r_{13}^3 - r_{14}^3), \\ F_5 = m_3r_{14}^2(r_{23}^3 - r_{34}^3) - r_{23}^2r_{34}^2(1 - r_{14}^3), \\ F_6 = m_4r_{13}^2(r_{24}^3 - r_{34}^3) - r_{24}^2r_{34}^2(r_{13}^3 - 1). \end{cases}$$

Os polinômios F_1 e F_2 são obtidos de (1.28), apenas reordenando as equações e substituindo $r_{12} = 1$. O polinômio F_3 é obtido da relação de Dziobek (1.22), apenas por reordenamento e substituição de $r_{12} = 1$. Os polinômios F_4, F_5 e F_6 são obtidos de (1.29), (1.30) e (1.31) substituindo $r_{12} = 1$ e $m_1 = 1$.

Existem duas formas de abordar o problema da classificação de configurações centrais co-circulares, a primeira delas é: dadas as massas m_2, m_3 e m_4 podemos tentar resolver o sistema acima, que tipicamente não tem solução, visto que tem mais equações que incógnitas. A segunda forma é: para quais distâncias mútuas corresponde um conjunto de massas que faz a configuração central co-circular? Nesta linha seguimos para o próximo capítulo.

Analizamos em seguida a classificação das c.c.c. Vemos que elas formam uma superfície, cujas fronteiras são os casos simétricos. Para tal análise usamos fortemente a relação de Dziobek. Posteriormente, mostramos a unicidade de configuração central co-circular com 4 e 5 corpos e centro de massa no centro do círculo. Mais além, mostramos que a mesma classificação das c.c.c pode ser obtida utilizando fortemente as equações de Andoyer e o fato de a configuração ser co-circular, em vez da relação de Dziobek.

Capítulo 2

Configurações Centrais Co-Circulares

Antes de estudarmos todo o conjunto de c.c.c, analisamos os casos degenerados, ou seja, os casos com algum tipo de simetria, sendo eles, a pipa e o trapézio isósceles. Estes casos ocorrem na fronteira do conjunto Ω e se intersectam na configuração quadrado com massas iguais.

2.1 Configuração Pipa

Iniciamos esta seção com a definição e algumas observações, então passamos à construção da família de c.c.c pipa, que depende de um parâmetro, o comprimento do menor lado do quadrilátero.

Definição 2.1.1. Chamamos um quadrilátero convexo de uma **configuração pipa** se dois corpos opostos estão em um eixo de simetria da configuração.

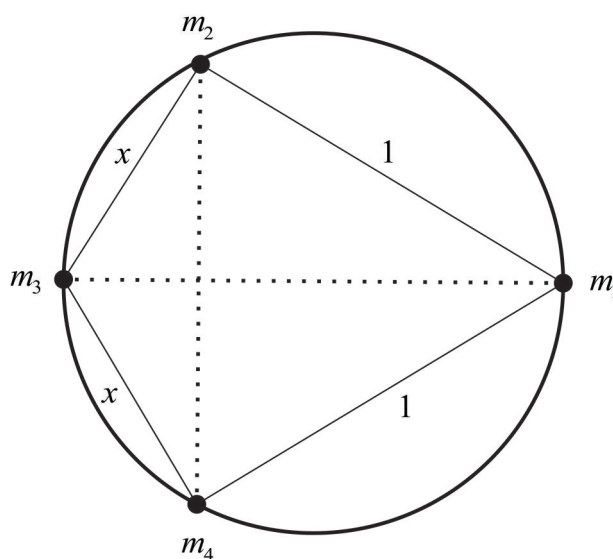


Figura 2.1: Configuração pipa.

Neste capítulo o resultado principal relaciona-se aos resultados obtidos por Leandro em [9].

Proposição 2.1.1. *Uma c.c.c é uma pipa se, e somente se, um par de corpos opostos está em um diâmetro do círculo.*

Demonstração. De fato, seja $r = (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34})$ uma c.c.c pipa. Suponha, sem perda de generalidade, que m_1 e m_3 estão no eixo de simetria. Logo,

$$|\Delta_4| = \frac{r_{12}r_{13}r_{23}}{4r_c}$$

e

$$|\Delta_4| = \frac{r_{23}r_{12}}{2},$$

pois o triângulo que contém os corpos 1, 2 e 3 é retângulo. Assim,

$$\frac{r_{12}r_{13}r_{23}}{4r_c} = \frac{r_{23}r_{12}}{2} \Rightarrow r_{13} = 2r_c \Rightarrow$$

r_{13} é diâmetro.

Reciprocamente, sejam m_1, m_3 massas dos corpos no diâmetro do círculo de uma c.c.c, isto pode ser aceito sem perda de generalidade, pois o mesmo poderia ser feito com m_2, m_4 . Temos que, em Ω :

$$r_{13} \geq r_{24} > r_{12} = 1 \geq r_{14} \geq r_{23} \geq r_{34}.$$

Suponhamos que

$$1 = r_{12} > r_{14} \Rightarrow r_{23} < 1, r_{34} < 1.$$

Sabemos que o triângulo formado pelos corpos 1, 2 e 3 é retângulo, o que implica:

$$r_{13}^2 = 1 + r_{23}^2 > r_{14} + r_{34}^2 > r_{14}^2 + r_{34}^2 = r_{13}^2,$$

já que o triângulo formado pelos corpos 1, 3 e 4 também é retângulo, assim $r_{13}^2 > r_{13}^2$, contradição. Assim, $r_{12} = 1 = r_{14}$ e $r_{23} = r_{34}$ e os corpos de massas m_1, m_3 estão em um eixo de simetria. $\square$

Proposição 2.1.2. *Qualquer configuração pipa, com massas satisfazendo as relações das razões entre massas, é automaticamente uma configuração central.*

Demonstração. De fato, basta notarmos que a equação (1.22) é plenamente satisfeita para $r_{12} = r_{14}$ e $r_{23} = r_{34}$. $\square$

Vamos ao teorema fundamental para c.c.c pipa.

Teorema 2.1.1. *Existe uma família a um parâmetro de c.c.c pipa, com os corpos 1 e 3 estando no diâmetro do círculo. As massas são $m_1 = 1, m_2 = m_4 = m$ e $m_3 = \alpha m$, ordenadas por $m_1 \geq m_2 = m_4 \geq m_3$. A igualdade é verificada se, e somente se, a configuração é o quadrado. No ponto extremo inferior do intervalo de variação do parâmetro $x = 1/\sqrt{3}$ obtemos uma c.c do problema de 4 corpos planar, circular e restrito, com $m_3 = 0$, no outro extremo em que $x = 1$ temos o quadrado com corpos de massas iguais.*

Demonstração. Tomando $r_{23} = r_{34} = x$ e denotando as diagonais por $r_{13} = c$ e $r_{24} = 2x/c$, onde $x \in (0, 1]$ é o parâmetro e $c^2 = 1 + x^2 \Rightarrow c = \sqrt{1 + x^2}$. Além disso, consideramos $r_{12} = 1 = r_{14}$, desta forma os corpos 1 e 3 estão no diâmetro do círculo e temos uma c.c pipa, ver figura 2.1.

Como, $P(r) = r_{12}r_{34} + r_{14}r_{23} - r_{13}r_{24} = x + x - 2x = 0$, implica que a c.c é co-circular.

Porém, não temos nada sobre a positividade das massas, ou seja, para quais valores de x temos massas positivas. Vemos isto agora.

Primeiro, note que com estas hipóteses $m_2 = m_4$, pois das equações (1.29) e (1.31) temos,

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{4x^4(c^3 - 1)}{c(8x^3 - c^3x^3)}$$

e

$$\frac{m_4}{m_1} = \frac{4x^4(c^3 - 1)}{c(8x^3 - c^3x^3)},$$

logo $m_4 = m_2$.

As expressões (1.29), (1.31) e (1.32) com $m_1 = 1$, dão $m_3 = \alpha m$, onde

$$m_2 = m_4 = m = \frac{4x(c^3 - 1)}{c(8 - c^3)}$$

e

$$\alpha = \frac{c(8x^3 - c^3)}{4(c^3 - x^3)}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{m_3}{m_1} &= \frac{(r_{13}^3 - r_{12}^3)(r_{24}^3 - r_{12}^3)r_{23}^4}{(r_{13}^3 - r_{23}^3)(r_{24}^3 - r_{23}^3)r_{12}^4} = \\ &= \frac{(c^3 - 1)(\frac{8x^3}{c^3} - 1)x^4}{(c^3 - x^3)(\frac{8x^3}{c^3} - x^3)} = \\ &= \frac{4x(c^3 - 1)c(8x^3 - c^3)}{c(8 - c^3)4(c^3 - x^3)} = m\alpha, \end{aligned}$$

como desejado. A expressão para m segue diretamente da equação (1.29), substituindo $m_1 = 1, r_{34} = r_{23} = x, r_{12} = r_{14} = 1$ e com alguma fatoração.

Além disso, precisamos de

$$m_2 = m_4 = m > 0 \Rightarrow 8 - c^3 > 0 \Rightarrow c^3 < 8 \Rightarrow c < 2,$$

porém se $c = \sqrt{2}$ ainda temos $m > 0$. Como sempre temos $c > 1$, assim $1 < c \leq \sqrt{2}$ e m é sempre positivo.

Desta forma, para que $m_3 = \alpha m$ seja positivo devemos ter α positivo. Ou seja,

$$\alpha = \frac{c(8x^3 - c^3)}{4(c^3 - x^3)} > 0 \Leftrightarrow c(8x^3 - c^3) > 0 \Leftrightarrow 8x^3 - c^3 > 0,$$

já que $c > x$. Mas, então temos

$$8x^3 - c^3 > 0 \Leftrightarrow x > c/2 \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} \Leftrightarrow x > 1/\sqrt{3}.$$

Logo, $\alpha > 0$ no intervalo $1/\sqrt{3} < x \leq 1$.

Quando $x = 1/\sqrt{3}$, temos

$$\alpha = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}})}{4(\frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}})} = 0,$$

logo $m_3 = 0$ e $r_{24} = 1$, assim $r_{12} = r_{14} = r_{24} = 1$, desta forma temos o triângulo equilátero como configuração central do problema de 4 corpos restrito.

Para $x = 1$ temos $r_{12} = r_{14} = r_{23} = r_{34} = 1$ e

$$m = \frac{4(\sqrt{2}^3 - 1)}{\sqrt{2}(8 - \sqrt{2}^3)} = 1 = m_2 = m_4$$

e

$$m_3 = \alpha m = \alpha = \frac{\sqrt{2}(8 - 2\sqrt{2})}{4(2\sqrt{2} - 1)} = 1,$$

ou seja, a c.c.c é o quadrado com corpos de massas iguais.

Para completar a prova do teorema resta mostrar as desigualdades entre as massas. Iniciamos mostrando que $m_3 \leq m_2$ para isto basta que $\alpha \leq 1$.

E,

$$\alpha \leq 1 \Leftrightarrow c(8x^3 - c^3) \leq 4(c^3 - x^3) \Leftrightarrow c(8x^3 - 4x^2 - 4) \leq (1 + x^2)^2 - 4x^3$$

e a inequação se transforma em igualdade se, e somente se, $x = 1$.

Desta forma, assumindo $x < 1$ e dividindo ambos os lados da última inequação acima por $(1 - x) > 0$, então esta inequação é equivalente a $-4c(2x^2 + x + 1) < 4x + (1 - x)^3$. Como o lado direito é sempre positivo e o esquerdo é sempre negativo, segue o resultado que, $\alpha \leq 1 \Leftrightarrow m_3 \leq m_2 = m_4$.

Agora, mostramos que $m_2 = m_4 = m \leq 1$, para $1/\sqrt{3} \leq x \leq 1$. Isto é equivalente a

$$4x(c^3 - 1) \leq c(8 - c^3) \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - 4x \leq 4c(2 - x(x^2 + 1)).$$

Novamente temos a igualdade na última inequação se, e somente se, $x = 1$, então assumindo $x < 1$ e dividindo ambos os lados por $(1 - x) > 0$ temos que tal inequação é equivalente a

$$-(x^3 + x^2 + 3x - 1) < 4c(x^2 + x + 2).$$

Sabemos que o lado direito é sempre positivo, resta mostrar que o lado esquerdo é sempre negativo para $1/\sqrt{3} \leq x < 1$. Porém, para $x = 1/\sqrt{3}$ segue a desigualdade $-(x^3 + x^2 + 3x - 1) = -(1 + \sqrt{3} + 9 - 3\sqrt{3})/3\sqrt{3} < 0$ e como a expressão $(x^3 + x^2 + 3x - 1)$ é crescente, então para

nenhum valor de $x > 1/\sqrt{3}$ ela será negativa, logo o lado esquerdo da inequação é sempre menor que o lado direito da mesma. Desta forma, temos a relação desejada entre as massas, $1 = m_1 \geq m_2 = m_4 \geq m_3$. $\square$

Vamos a algumas observações a respeito deste caso simétrico das c.c.c.

Observação 2.1.1. *Com cálculos diretos podemos ver que, m e α são funções estritamente crescentes do parâmetro x , para $x \in [1/\sqrt{3}, 1]$, ou seja, temos que as massas m_2, m_3 e m_4 são funções crescentes do lado $r_{23} = r_{34} = x$.*

Observação 2.1.2. *O centro de massa na pipa está próximo ao corpo de maior massa, m_1 , para $x < 1$. Agora, se $x = 1$ a configuração é um quadrado com corpos de massas iguais, logo o centro de massa coincide com o centro do círculo. Se o centro de massa está na origem do sistema de coordenadas e m_1 está no eixo das abscissas então, por continuidade, o centro de massa também está no eixo das abscissas, além disso, é uma função decrescente de $x \in [1/\sqrt{3}, 1]$.*

Denote por θ_{ij} o arco ao longo do círculo entre os corpos i, j . Sabemos que, r_{12} é o maior lado do quadrilátero inscrito, então θ_{12} é o maior arco entre dois corpos consecutivos.

Proposição 2.1.3. *Em uma c.c.c pipa, o arco θ_{12} é função decrescente de $x \in [1/\sqrt{3}, 1]$.*

Demonstração. Para a família de pipas temos que,

$$r_{13} = 2r_c \Rightarrow r_c = \frac{r_{13}}{2} \Rightarrow r_c = \frac{c}{2},$$

logo θ_{12} pode ser expresso em termos de x . Pois, seja θ o ângulo no corpo 3, do triângulo formado pelos corpos 1, 2 e 3, então

$$\theta = \frac{\theta_{12}}{2} \Rightarrow \theta_{12} = 2\theta.$$

Porém,

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{c}}{\frac{x}{c}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \theta_{12} = 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Podemos ver que,

$$\theta'_{12}(x) = \frac{2}{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{1 + x^2} < 0$$

em $[1/\sqrt{3}, 1]$. Logo, θ_{12} é função decrescente de x . Além disso, $\theta_{12}(1/\sqrt{3}) = 120^\circ$ e $\theta_{12}(1) = 90^\circ$, ou seja, nos extremos do intervalo temos o caso degenerado do triângulo equilátero e o quadrado. $\square$

Proposição 2.1.4. *Em uma c.c.c pipa, o arco θ_{23} é função crescente de $x \in [1/\sqrt{3}, 1]$.*

Demonstração. O menor arco entre quaisquer dois corpos consecutivos é $\theta_{23} = \theta_{34} = 2 \arctan(x)$ e como

$$\theta'_{23}(x) = \frac{2}{1+x^2} > 0$$

em $[1/\sqrt{3}, 1]$, então $\theta_{23} = \theta_{34}$ é função crescente de x , como desejado. E mais ainda, para $x = 1/\sqrt{3}$ temos $\theta_{23} = 2 \arctan(1/\sqrt{3}) = 60^\circ$. E para $x = 1$, temos $\theta_{23} = 90^\circ$, ou seja, nos extremos do intervalo onde x está definido temos a configuração degenerada, triângulo equilátero, no extremo inferior e, no extremo superior temos o quadrado. $\square$

Observação 2.1.3. Também vemos que, $\angle_{234}$ é o maior ângulo do quadrilátero, pois no caso da pipa é equivalente ao arco θ_{12} . E o ângulo $\angle_{214}$, é o menor ângulo interior do quadrilátero, pois é equivalente ao arco θ_{23} .

Logo, segue que o maior ângulo tem máximo de 120° e o menor ângulo tem um máximo de 90° , em uma c.c.c pipa.

Proposição 2.1.5. O comprimento de arco entre os corpos 1 e 2, em uma c.c.c pipa, é uma função decrescente de $x \in [1/\sqrt{3}, 1]$.

Demonstração. O arco da circunferência entre os corpos 1 e 2 tem comprimento dado por

$$\text{arc}(x) = \theta_{12}\left(\frac{c}{2}\right) = (\sqrt{x^2 + 1}) \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

e como

$$\begin{aligned} \text{arc}'(x) &= \frac{2x \arctan(\frac{1}{x})}{2\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{(x^2 + 1)} \\ &= \frac{x \arctan(\frac{1}{x}) - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \end{aligned}$$

como a expressão $x \arctan(\frac{1}{x}) - 1$ não tem zeros reais e para $x = 1/\sqrt{3}$ e $x = 1$ temos $\text{arc}'(x) < 0$, então a função $\text{arc}(x)$ é decrescente. $\square$

2.2 A Configuração Trapézio Isósceles

Estudamos nesta seção o segundo caso simétrico. Verificamos a existência de uma família a um parâmetro de c.c.c na forma de trapézios isósceles.

Da geometria Euclideana temos que qualquer trapézio isósceles pode ser inscrito em um círculo, em que o centro do círculo está na reta de simetria.

Os trapézios isósceles correspondem aos casos onde, $r_{14} = r_{23}$ e $r_{13} = r_{24}$, os lados r_{34} e r_{12} são paralelos. Da equação (1.29), temos

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{r_{14}^2 r_{24}^2 (r_{13}^3 - r_{14}^3)}{r_{24}^2 r_{14}^2 (r_{13}^3 - r_{14}^3)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$m_1 = m_2.$$

Das equações (1.30), (1.31) e (1.22), temos

$$\frac{m_3}{m_4} = \frac{r_{13}^2 r_{23}^2 (r_{24}^3 - r_{14}^3)}{r_{14}^2 r_{24}^2 (r_{13}^3 - r_{23}^3)} = 1 \Leftrightarrow \quad (2.1)$$

$$m_3 = m_4.$$

Assim, neste caso de simetria temos que os pares de massas m_1 e m_2 , m_3 e m_4 são iguais, desde que $r_{14} = r_{23}$ e $r_{13} = r_{24}$. O próximo lema traz a recíproca desta afirmação.

Lema 2.2.1. *Dada uma c.c.c, se $m_1 = m_2$ e $m_3 = m_4$, então esta c.c.c é um trapézio isósceles.*

Demonstração. Se $m_1 = m_2$ e $m_3 = m_4$, então as equações (1.29) e (2.1) implicam

$$1 = \frac{m_2}{m_1} = \frac{r_{23}^2 r_{24}^2 (r_{13}^3 - r_{14}^3)}{r_{13}^2 r_{14}^2 (r_{24}^3 - r_{23}^3)} \Leftrightarrow$$

$$r_{13}^2 r_{14}^2 (r_{24}^3 - r_{23}^3) - r_{23}^2 r_{24}^2 (r_{13}^3 - r_{14}^3) = 0 \quad (2.2)$$

e

$$1 = \frac{m_3}{m_4} = \frac{r_{23}^2 r_{13}^2 (r_{24}^3 - r_{14}^3)}{r_{24}^2 r_{14}^2 (r_{13}^3 - r_{23}^3)} \Leftrightarrow$$

$$r_{24}^2 r_{14}^2 (r_{13}^3 - r_{23}^3) - r_{23}^2 r_{13}^2 (r_{24}^3 - r_{14}^3) = 0. \quad (2.3)$$

Tomando a diferença entre (2.3) e (2.2), temos

$$-r_{13}^2 r_{14}^2 (r_{24}^3 - r_{23}^3) + r_{23}^2 r_{24}^2 (r_{13}^3 - r_{14}^3) + r_{24}^2 r_{14}^2 (r_{13}^3 - r_{23}^3) - r_{23}^2 r_{13}^2 (r_{24}^3 - r_{14}^3) = 0.$$

Depois de alguma fatoração a expressão acima é equivalente à

$$(r_{13} - r_{24})(r_{13}^2 r_{23}^2 r_{24}^2 + r_{13} r_{14}^2 r_{23}^3 + r_{13} r_{23}^2 r_{14}^3 + r_{13}^2 r_{14}^2 r_{24}^2 + r_{24} r_{23}^2 r_{14}^3 + r_{24} r_{14}^2 r_{23}^3) = 0 \Rightarrow$$

$$r_{13} = r_{24},$$

pois as distâncias mútuas são números positivos. De (2.1) e como $m_3 = m_4$ e $r_{13} = r_{24}$, temos

$$1 = \frac{r_{23}^2 (r_{13}^3 - r_{14}^3)}{r_{14}^2 (r_{13}^3 - r_{23}^3)} \Leftrightarrow$$

$$r_{14}^2 (r_{13}^3 - r_{23}^3) - r_{23}^2 (r_{13}^3 - r_{14}^3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(r_{14} - r_{23})(r_{14} r_{13}^3 + r_{14}^2 r_{23}^2 + r_{23} r_{13}^3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$r_{14} = r_{23}$$

e então a c.c.c é um trapézio isósceles. □

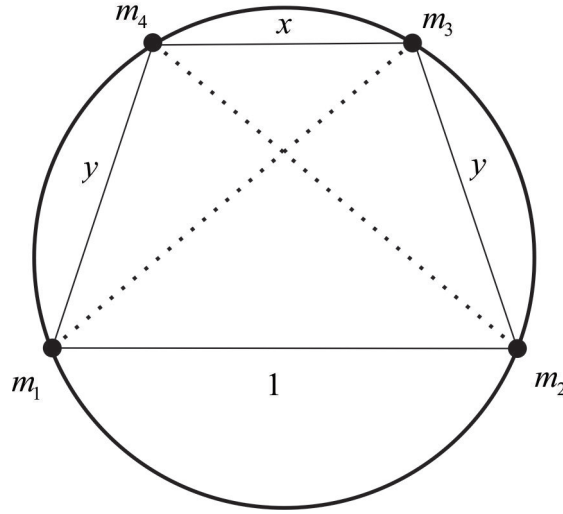


Figura 2.2: Configuração trapézio isósceles.

Descrevemos a família de c.c.c trapézio isósceles. Colocamos $r_{12} = 1, r_{34} = x, r_{14} = r_{23} = y$, onde $0 \leq x \leq 1$ e $x \leq y \leq 1$, são parâmetros dependentes, ver figura 2.2. Usando o teorema de Ptolomeu, temos

$$r_{13}r_{24} = r_{14}r_{23} + r_{12}r_{34} \Rightarrow r_{13}r_{24} = x + y^2.$$

Como $r_{13} = r_{24}$, temos $r_{13} = r_{24} = \sqrt{x + y^2}$.

Também fixamos $m_1 = m_2 = 1$. Pelas equações (1.30) e (2.1), temos

$$m_3 = m_4 = m = \frac{y^2 x^2 (1 - y^3)}{y^2 (y^3 - x^3)} = \frac{x^2 (1 - y^3)}{y^3 - x^3}.$$

Além disso, para o trapézio isósceles ser c.c, a equação (1.22) precisa ser satisfeita, o que dá a condição não trivial abaixo

$$T(x, y) = (y^2 + x)^{3/2} (2y^3 - x^3 - 1) - y^3 - x^3 y^3 + 2x^3. \quad (2.4)$$

Para ter c.c precisamos de $T(x, y) = 0$.

O menor lado do trapézio é paralelo à base e pode variar de 0 a 1. Além disso, o comprimento y dos lados congruentes varia pouco.

No ponto $(0, 1)$ temos a configuração triângulo equilátero, pois $r_{34} = 0, r_{23} = r_{14} = 1 = r_{12}$ e $m_3 = m_4 = 0$. No ponto $(1, 1)$ temos $r_{12} = r_{14} = r_{23} = r_{34} = 1$, então a c.c.c é um quadrado com corpos de massas iguais.

Também mostraremos que $T(x, y) = 0$ define uma função implícita de $x, y = \tau(x)$, com $x \in [0, 1]$. Logo existe uma família à um parâmetro de c.c.c trapézio isósceles, parametrizadas por $r_{34} = x$. Vamos ao seguinte lema, que determina a existência de tal família de c.c.c parametrizadas por x .

Lema 2.2.2. *No contexto descrito acima, para cada valor de $x \in (0, 1]$, existe um único valor*

de $y \in [x, 1]$, tal que $T(x, y) = 0$. Além disso, o parâmetro distância, y , pode ser escrito como uma função diferenciável de x , denotada por $y = \tau(x)$.

Demonstração. Sabemos que $r_{13} = r_{24} > 1 = r_{12}$ em Ω . Assim, temos

$$r_{13} = \sqrt{x+y^2} > 1 \Rightarrow x+y^2 > 1 \Rightarrow$$

$$y^2 > 1-x \Rightarrow y > \sqrt{1-x}.$$

Além disso, $r_{12} = 1 \geq r_{23} \geq r_{34}$ em Ω , ou seja,

$$r_{34} = x \leq r_{23} = y \leq 1 \Rightarrow x \leq y \leq 1.$$

Logo, podemos nos restringir ao subconjunto Λ do plano xy , definido por

$$\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq 1 \quad e \quad y \geq \sqrt{1-x}\}.$$

Como $x \geq 0$, então as curvas $y = \sqrt{1-x}$ e $y = x$ intersectam-se quando $x = \sqrt{1-x}$, ou seja, quando $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ logo em Λ , $y \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Note que,

$$\begin{aligned} T(x, 1) &= (1+x)^{3/2}(2-x^3-1) - 1-x^3+2x^3 = \\ &= (1-x^3)[(1+x)^{3/2}-1] \geq 0, \end{aligned}$$

para $0 \leq x \leq 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} T(x, \sqrt{1-x}) &= ((\sqrt{1-x})^2+x)^{3/2}(2(\sqrt{1-x})^3-x^3-1) - (\sqrt{1-x})^3-x^3(\sqrt{1-x})^3+2x^3 = \\ &= (1-x^3)[(\sqrt{1-x})^3-1] < 0, \end{aligned}$$

para $0 < x < 1$. E por fim,

$$\begin{aligned} T(x, x) &= (x^2+x)^{3/2}(2x^3-x^3-1) - x^3-x^6+2x^3 = \\ &= (1-x^3)[-(x^2+x)^{3/2}+x^3] < 0, \end{aligned}$$

para $0 < x < 1$, pois como $x \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} x^2+x &> x \Rightarrow \sqrt{x^2+x} > \sqrt{x} \Rightarrow \\ &= (x^2+x)^{3/2} > x^{3/2} > x^3, \end{aligned}$$

como desejado.

Fixamos $x \in (0, 1)$ e consideramos $T(x, y) = T_x(y)$, como função na variável y . Segue que, $T_x < 0$ na fronteira inferior de Λ e $T_x > 0$ na fronteira superior de Λ . Como T é contínua, existe

pelo menos uma solução para $T(x, y) = 0$ em Λ , para cada $x \in (0, 1)$. Para ver que este valor é único calculamos:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{3\sqrt{y^2+x}2y(2y^3-x^3-1)}{2} + (y^2+x)^{3/2}6y^2 - 3y^2 - 3x^3y^2$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= 3\left[\frac{(y^2+x)^{-1/2}2y(2y^4-x^3y-y)}{2} + \sqrt{y^2+x}(8y^3-x^3-1) + \frac{3(\sqrt{y^2+x}4y^3)}{2} + \right. \\ &\quad \left. (y^2+x)^{3/2}4y - 2y - 2x^3y\right] = \\ &= 3\left[\sqrt{x+y^2}(16y^3+4xy-x^3-1) - 2y(x^3+1) + \frac{y^2(4y^3+2xy-x^3-1)}{\sqrt{y^2+x}}\right]. \end{aligned}$$

A quantidade $4y^3+2xy-x^3-1$ é estritamente positiva em Λ . Pois, temos que $x+y^2 > 1 \Rightarrow x+2y^2 > 1+y^2$. E temos,

$$4y^3+2xy-x^3-1 = 2y(x+2y^2)-x^3-1 >$$

$$2y(1+y^2)-x^3-1 \geq 2y(x+2y^2)-y^3-1 =$$

$$y^3+2y-1 \geq 2\sqrt{5}-4 > 0,$$

como desejado.

Agora, usando o fato que $\sqrt{x+y^2} > 1$ e $x \leq 1$, temos

$$\partial^2 T / \partial y^2 > 3[-2y(x^3+1) + \sqrt{x+y^2}(16y^3+4xy-x^3-1)] >$$

$$3[-2y(x^3+1) + 16y^3+4xy-x^3-1] =$$

$$3[4y(4y^2+x) - (2y+1)(x^3+1)] >$$

$$3[4y(3y^2+1) - 2(2y+1)] = 6(6y^3-1) > 0,$$

pois $y \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y^3 > \frac{1}{6}$.

Logo, $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} > 0$ em Λ e, como $T_x < 0$ na fronteira inferior de Λ e $T_x > 0$ na fronteira superior de Λ , segue que

$$\frac{d}{dy}(T_x(y))_{y=\hat{y}} > 0, \quad (2.5)$$

quando $y = \hat{y}$ satisfazendo $T_x(y) = 0$, com $\hat{y}$ sendo o menor valor de y satisfazendo tal equação. Como, $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} > 0$ em Λ , então a função T_x é convexa e $y = \hat{y}$ é a única solução de $T_x(y) = 0$, pois do contrário T_x não seria convexa.

Isto prova a existência de uma função $y = \tau(x)$, para $0 < x < 1$, satisfazendo $T(x, \tau(x)) = 0$ em Λ , ver figura 2.3.

Como $T(1, 1) = 0$, definimos $\tau(1) = 1$ e como $\frac{\partial T}{\partial y}(1, 1) = 6(2\sqrt{2} - 1) > 0$. Então, pelo Teorema da Função da Implícita e do fato que $\frac{d}{dy}(T_x(y))_{y=\hat{y}} > 0$, temos que $y = \tau(x)$ é diferenciável em $(0, 1]$. $\square$

Observação 2.2.1. Para $r_{34} = x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow r_{14} = r_{23} = 1$ e como $r_{12} = 1$, temos o quadrado e, por diferenciação implícita, segue que

$$\tau'(x) = \frac{-\frac{\partial T}{\partial x}}{\frac{\partial T}{\partial y}} = -\frac{\frac{3\sqrt{y^2+x}}{2}(2y^3 - x^3 - 1) + (y^2 + x)^{3/2}(-3x^2) - 3x^2y^3 + 6x^2}{\frac{3\sqrt{y^2+x}}{2}2y(2y^3 - x^3 - 1) + (y^2 + x)^{3/2}6y^2 - 3y^2 - 3x^3y^2} \Rightarrow$$

$$\tau'(1) = 1/2.$$

Para $x = 0 = r_{34}$, não faz sentido físico, porém, matematicamente podemos estender $\tau(x)$ ao intervalo fechado $[0, 1]$, definindo $\tau(0) = 1$ e então $T(0, 1) = 0$ e $\frac{\partial T}{\partial y}(0, 1) = 6 > 0$, além disso, $\tau'(0) = -1/4$.

Observação 2.2.2. Também obtemos que $0,9 < \tau(x) < 1$, para $0 < x < 1$. De fato, para ver que $\tau(x) < 1$ em $(0, 1)$, observamos que $T(x, 1) = (1 - x^3)((1 + x)^{3/2} - 1) > 0$ em $(0, 1)$ e com $y = \tau(x) = 1$, então devemos ter $y = \tau(x) < 1$, para que $T(x, y) = T(x, \tau(x)) = 0$. Para ver que $\tau(x) > 0,9$, usa-se bases de Gröbner, sequências de Sturm e computação simbólica.

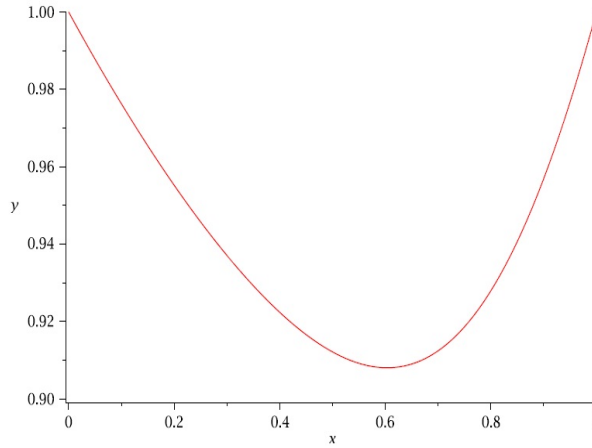


Figura 2.3: Gráfico de $y = \tau(x)$. Figura retirada de [14].

Vemos na sequência que, para $m_1 = m_2$ e $m_3 = m_4$ existe uma única c.c.c trapézio isósceles. Antes, um lema técnico.

Lema 2.2.3. Suponha $h(m, x)$ definida por

$$h(m, x) = \left(x^{1/3} \left(\frac{1+mx}{x^2+m} \right)^{2/3} + 1 \right)^{3/2} (x^2 - m) + \sqrt{x}(mx - 1). \quad (2.6)$$

Então, para qualquer $0 < m < 1$, existe um único $x = x(m)$ tal que,

1. $h(m, x) < 0$ para $0 < x < x(m)$,
2. $h(m, x(m)) = 0$,
3. $h(m, x) > 0$ para $x(m) < x < 1$,
4. $\lim_{m \rightarrow 0} x(m) = 0$ e $\lim_{m \rightarrow 1} x(m) = 1$.

Mais ainda, $\Gamma_x = \{(m, x(m)); 0 < m < 1\}$ é uma curva suave em $(0, 1) \times (0, 1)$.

A prova deste lema pode ser vista em [21].

Teorema 2.2.1. *Em uma c.c.c trapezoidal isósceles, a função $m = m(x, y(x))$ dada por,*

$$m = \frac{x^2(1 - y^3)}{y^3 - x^3}$$

é uma função crescente de x em $(0, 1)$.

Demonstração. Pelo Lema 2.2.2, y é uma função de x definida implicitamente por (2.4). Logo, m é uma função de x dada pela expressão acima. Agora, provamos que x é também uma função de m , para $0 < m < 1$. Resolvendo a expressão

$$m = \frac{x^2(1 - y^3)}{y^3 - x^3}$$

para y , temos

$$y = \left(\frac{x^2(1 + mx)}{x^2 + m} \right)^{1/3}$$

e substituindo este valor de y em (2.4), obtemos

$$g(m, x) = \frac{(1 - x^3)x^{3/2}}{x^2 + m} h(m, x) = 0,$$

onde $h(m, x)$ é definida por (2.6). $g = 0$ é equivalente a $h = 0$ para $0 < m, x < 1$. Pelo Lema 2.2.3, x é uma função de m definida implicitamente por $h(m, x) = 0$. Então, $x = x(m)$ é injetora e sobrejetora de $(0, 1)$ em $(0, 1)$. Note que, ela é crescente, pois $0 = \lim_{m \rightarrow 0} x(m) < \lim_{m \rightarrow 1} x(m) = 1$. Portanto, $m = m(x, y(x))$ é também uma função crescente. $\square$

Vamos às relações entre o maior e menor arco do círculo entre quaisquer dois corpos consecutivos e o comprimento $r_{34} = x$, bem como as relações entre o maior e menor ângulo interior do quadrilátero e o parâmetro x .

Teorema 2.2.2. *O maior arco, θ_{12} , da família de trapézios isósceles é função estritamente decrescente do menor lado $r_{34} = x$. O supremo de θ_{12} é 120° , na configuração degenerada triângulo equilátero, e seu mínimo é atingido na configuração quadrado com $\theta_{12} = 90^\circ$. Similarmente, o maior ângulo interior do trapézio é uma função estritamente decrescente de x ,*

respeitando os mesmos limites. Afirmção análoga pode ser feita para o menor arco e também para o menor ângulo interior, porém trocando a palavra decrescente por crescente e os limites inferior e superior por 60^0 e 90^0 , respectivamente, ver figura 2.2.

Demonstração. Considere o arco θ_{12} , entre os corpos 1 e 2. Assim temos,

$$\frac{\sin\theta_{12}}{2} = \frac{1}{2r_c} \Rightarrow \frac{\theta_{12}}{2} = \arcsen\left(\frac{1}{2r_c}\right) \Rightarrow$$

$$\theta_{12} = 2\arcsen\left(\frac{1}{2r_c}\right),$$

onde r_c é o raio do círculo. Este raio é função de x .

De fato, pela lei dos cossenos, temos

$$1 = (x + y^2) + y^2 - 2\sqrt{x + y^2}y \cos\left(\frac{\theta_{12}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$1 = (x + y^2) + y^2 - 2\sqrt{x + y^2}y \sqrt{1 - \frac{1}{4r_c^2}} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{4r_c^2} = \frac{(x + 2y^2)^2 - 2(x + 2y^2) + 1}{4(x + y^2)y^2} \Rightarrow$$

$$r_c = y \sqrt{\frac{x + y^2}{4y^2 - (1 - x)^2}}.$$

No par ordenado $(0, 1)$ temos $r_c = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \theta_{12} = 120^0$, e no par $(1, 1)$ teremos $r_c = \sqrt{2}/2 \Rightarrow \theta_{12} = 90^0$, logo o supremo para θ_{12} ocorre no mínimo para r_c .

Considere r_c^2 , então afirmamos que $\frac{dr_c^2}{dx}$ é positiva para, $0 < x \leq 1$.

De fato, temos

$$\frac{dr_c^2}{dx} = \frac{[2yy'(x + y^2) + y^2(1 + 2yy')](4y^2 - (1 - x)^2) - (y^2(x + y^2))[8yy' + 2 - 2x]}{(4y^2 - (1 - x)^2)^2}.$$

Como o denominador da expressão acima é sempre positivo vamos ao numerador,

$$[2yy'(x + y^2) + y^2(1 + 2yy')](4y^2 - (1 - x)^2) - (y^2(x + y^2))[8yy' + 2 - 2x]$$

e estudamos seu sinal. Este, depois de alguma fatoração, nos dá a seguinte expressão

$$y[(-2x + 4x^2 - 2x^3 + 8y^4 - 4y^2 + 8xy^2 - 4x^2y^2)y' + (2y^3 - y + x^2y + 2xy^3)]$$

Como $y \geq 0$, é suficiente ver que

$$y(2y^2 - 1 + x^2 + 2xy^2) + (8y^4 - 2(x - 2x^2 + x^3 + 2y^2 - 4xy^2 + 2x^2y^2))y'$$

é positivo, ou seja,

$$y(2y^2 - 1 + x^2 + 2xy^2) \frac{\partial T}{\partial y} - (8y^4 - 2(1-x)^2(x+2y^2)) \frac{\partial T}{\partial x} > 0, \quad (2.7)$$

em $0 < x \leq 1$.

Isto pode ser verificado utilizando o Maple para calcular uma base de Gröbner, para obtermos um polinômio em y e, aplicando a sequência de Sturm, vemos que este não tem raízes entre 0,9 e 1. Logo (2.7) não muda de sinal na curva $y = \tau(x)$ e como no par ordenado $(1,1)$, (2.7) tem o valor $48(2\sqrt{2} - 1) > 0$, então a expressão será positiva ao longo de toda $y = \tau(x)$. Portanto, o ínfimo do raio é $r_c = 1/\sqrt{3}$ e θ_{12} é função decrescente de x .

Agora, considere o arco θ_{14} , entre os corpos 1 e 4, assim

$$\frac{\text{sen}\theta_{14}}{2} = \frac{y}{2r_c} \Rightarrow \frac{\theta_{14}}{2} = \arcsen\left(\frac{y}{2r_c}\right) \Rightarrow$$

$$\theta_{14} = 2\arcsen\left(\frac{y}{2r_c}\right).$$

Com argumento similar ao apresentado acima teremos que, $\frac{y}{2r_c}$ é função decrescente para $0 \leq x \leq 1$ logo, θ_{14} é função decrescente de x . Assim, o maior ângulo interior, $\angle_{234}$, dado por $\frac{\theta_{12} + \theta_{14}}{2}$ é função decrescente de x . Argumentos análogos seguem para o menor arco e menor ângulo serem funções crescentes de x . $\square$

2.3 O Caso Geral

Nesta e na próxima seção analisamos todo o conjunto de c.c.c de 4 corpos e mostramos que ele é um gráfico sobre dois dos comprimentos dos lados do quadrilátero.

O conjunto de interesse é aquele que contem os vetores $r = (1, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}) \in \Omega$ e satisfazendo a equação (1.22), com $P(r) = 0$.

Lembramos que, para um quadrilátero cíclico, as diagonais podem ser escritas como funções dos lados, então da equação (1.28), temos

$$r_{13} = \left[\frac{(r_{12}r_{34} + r_{14}r_{23})(r_{12}r_{14} + r_{23}r_{34})}{(r_{12}r_{23} + r_{14}r_{34})} \right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$r_{13} = \left[\frac{r_{14}^2 r_{23} + r_{14} r_{34} (r_{23}^2 + 1) + r_{23} r_{34}^2}{r_{23} + r_{14} r_{34}} \right]^{1/2} \quad (2.8)$$

e

$$r_{24} = \left[\frac{(r_{12}r_{34} + r_{14}r_{23})(r_{12}r_{23} + r_{14}r_{34})}{(r_{12}r_{14} + r_{23}r_{34})} \right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$r_{24} = \left[\frac{r_{14}^2 r_{23} r_{34} + r_{14}(r_{34}^2 + r_{23}^2) + r_{23} r_{34}}{r_{14} + r_{23} r_{34}} \right]^{1/2}, \quad (2.9)$$

o que é equivalente à $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$. Além disso, sabemos que se (2.8) e (2.9) valem, então $P(r) = 0$, logo, $V(r) = 0$. Isto elimina a necessidade de utilização do determinante de Cayley-Menger para garantir que a configuração é planar. Também serve para eliminar as variáveis r_{13} e r_{24} . Pois, substituindo $r_{12} = 1$ e tomando as expressões em (2.8) e (2.9) na equação (1.22) temos

$$F(r_{14}, r_{23}, r_{34}) = (r_{13}^3 - 1)(r_{23}^3 - r_{34}^3)(r_{24}^3 - r_{14}^3) - (1 - r_{14}^3)(r_{24}^3 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - r_{23}^3) = 0,$$

onde r_{13}, r_{24} podem ser entendidas como funções de r_{14}, r_{23}, r_{34} dadas pelas equações (2.8) e (2.9), respectivamente.

As relações entre as distâncias mútuas em Ω junto com o fato que os corpos estão em um mesmo círculo, levam-nos à restrições nas variáveis r_{14}, r_{23}, r_{34} . Pois, como $r_{13} > 1$, de (2.8) temos,

$$\begin{aligned} r_{14}^2 r_{23} + r_{14} r_{34}(r_{23}^2 + 1) + r_{23} r_{34}^2 &> r_{23} + r_{14} r_{34} \Rightarrow \\ r_{23}(r_{14}^2 + r_{14} r_{34} r_{23} + r_{34}^2) &> r_{23} \Rightarrow \\ r_{14}^2 + r_{34}^2 + r_{14} r_{23} r_{34} &> 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Da mesma forma, como $r_{24} > 1$, de (2.9) temos,

$$\begin{aligned} r_{14}^2 r_{23} r_{34} + r_{14} r_{34}^2 + r_{14} r_{23}^2 + r_{23} r_{34} &> r_{14} + r_{23} r_{34} \Rightarrow \\ r_{14}(r_{14} r_{23} r_{34} + r_{34}^2 + r_{23}^2) &> r_{14} \Rightarrow \\ r_{23}^2 + r_{34}^2 + r_{14} r_{23} r_{34} &> 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como em Ω vale $r_{14} \geq r_{23}$,

$$\begin{aligned} r_{14}^2 + r_{34}^2 + r_{14} r_{23} r_{34} &\geq r_{23}^2 + r_{34}^2 + r_{14} r_{23} r_{34} > 1 \Rightarrow \\ r_{14}^2 + r_{34}^2 + r_{14} r_{23} r_{34} &> 1, \end{aligned}$$

logo segue que, em Ω a desigualdade (2.10) sai diretamente de (2.11). Além disso, os cálculos podem ser feitos de forma reversa e então, (2.10) e (2.11) implicam que $r_{13} > 1$ e $r_{24} > 1$ respectivamente, logo provamos o seguinte lema.

Lema 2.3.1. *Considere $C = \{(r_{14}, r_{23}, r_{34}) \in \mathbb{R}^{+3}; \quad 1 \geq r_{14} \geq r_{23} \geq r_{34}, \quad r_{23}^2 + r_{34}^2 + r_{14} r_{23} r_{34} > 1\}$ e $\Gamma = \{s = (r_{14}, r_{23}, r_{34}) \in \mathbb{R}^{+3}; \quad s \in C, \quad F(s) = 0\}$. Qualquer ponto em Γ corresponde a uma c.c.c de quatro corpos, com massas positivas. A menos de um reordenamento ou mudança de escala, Γ contém todas as tais configurações.*

Para vermos que Γ é uma superfície, mostraremos que ele é o gráfico de $r_{14} = f(r_{23}, r_{34})$.

Primeiro note que, as fronteiras de Γ consistem de uma reta, contendo as pipas, uma curva, contendo os trapézios isósceles e outra curva, contendo as c.c degeneradas, com $m_3 = 0$. Por causa deste último detalhe, os casos, pipa e trapézio isósceles estão em Γ , enquanto que os casos degenerados não estão, pois apresentam massa nula.

As pipas estão na reta, $r_{14} = 1, r_{23} = r_{34} = x$, com $1/\sqrt{3} < x \leq 1$. Ou seja, $1 = f(x, x)$. Os trapézios isósceles estão no plano $r_{14} = r_{23}$, pois r_{23} pode ser escrito como função diferenciável de r_{34} . As configurações centrais degeneradas com $m_3 = 0$ são pontos críticos do problema de 4 corpos planar, circular e restrito. Neste caso, os corpos 1, 2 e 4 estão em um triângulo equilátero com $r_{14} = r_{12} = r_{24} = 1$.

Proposição 2.3.1. *Se $r_{24} = 1$, então $F = 0$ em C , somente se, $r_{14} = 1$.*

Demonstração. De fato, se $r_{24} = 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} F(r_{14}, r_{23}, r_{34}) &= (r_{13}^3 - 1)(r_{23}^3 - r_{34}^3)(r_{24}^3 - r_{14}^3) - (1 - r_{14}^3)(r_{24}^3 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - r_{23}^3) = \\ &= (r_{13}^3 - 1)(r_{23}^3 - r_{34}^3)(1 - r_{14}^3) - (1 - r_{14}^3)(1 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - r_{23}^3) = \\ &= (1 - r_{14}^3)[r_{23}^3(r_{13}^3 - r_{34}^3) + r_{34}^3 - r_{13}^3] = \\ &= (1 - r_{14}^3)[(r_{13}^3 - r_{34}^3)(r_{23}^3 - 1)], \end{aligned}$$

como $r_{13}^3 \geq 1 > r_{34}^3$ e $1 > r_{23}^3 \Rightarrow$

$$F(r_{14}, r_{23}, r_{34}) = 0$$

somente se $r_{14} = 1$. □

Logo, pela proposição acima podemos afirmar que as fronteiras de Γ contém somente os casos pipa, trapézio isósceles e c.c degenerada (triângulo equilátero).

Lema 2.3.2. *Em C , ambos $\frac{\partial r_{13}}{\partial r_{14}}$ e $\frac{\partial r_{24}}{\partial r_{14}}$ são estritamente positivas.*

Demonstração. Depois de alguma fatoração temos que,

$$\frac{\partial r_{13}}{\partial r_{14}} = \frac{r_{23}[r_{34}(r_{14}^2 + r_{23}^2 - r_{34}^2 + 1) + 2r_{14}r_{23}]}{2r_{13}(r_{23} + r_{14}r_{34})}$$

que é estritamente positiva em C , pois $r_{23} \geq r_{34}$.

Da mesma forma, depois de alguma fatoração

$$\frac{\partial r_{24}}{\partial r_{14}} = \frac{r_{23}r_{34}(r_{14}^2 + r_{23}^2 + r_{34}^2 + 2r_{23}r_{14}r_{34} - 1)}{2r_{24}(r_{14} + r_{23}r_{34})^2}$$

que também é estritamente positiva em C , pela inequação (2.11). □

2.4 A superfície de c.c.c

Demonstraremos nesta seção o principal resultado do capítulo, o teorema que classifica o conjunto completo de c.c.c como uma superfície, gráfico da função $r_{14} = f(r_{23}, r_{34})$.

Teorema 2.4.1. *O conjunto de c.c.c, Γ , é o gráfico de uma função diferenciável $r_{14} = f(r_{23}, r_{34})$, de duas variáveis r_{23}, r_{34} . O domínio desta função é a região*

$$\mathcal{D} = \{(r_{34}, r_{23}) \in \mathbb{R}^{+2}; 1 \geq r_{23} \geq r_{34}, r_{23} \leq \tau(r_{34}), r_{23}^2 + r_{34}^2 + r_{23}r_{34} > 1\}.$$

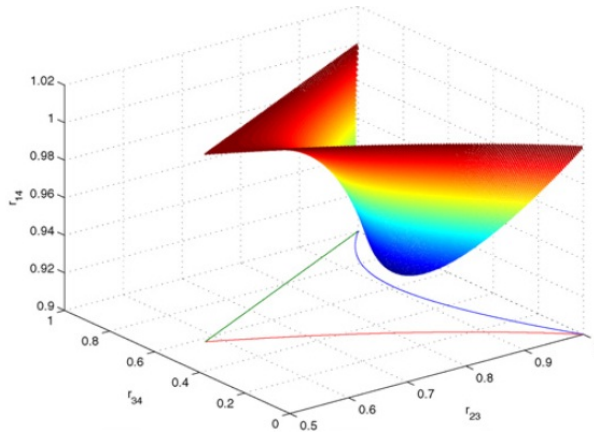


Figura 2.4: Superfície de C.C.C. Figura retirada de [14]. As curvas no plano $r_{34}r_{23}$ são as famílias de trapézios isósceles, pipas e triângulos equiláteros.

Demonstração. Vamos ver que a projeção de Γ no plano $r_{34}r_{23}$ é igual a $\mathcal{D}$ e que r_{14} pode ser escrita como função diferenciável de r_{34}, r_{23} sobre $\mathcal{D}$, isto é, $\frac{\partial f}{\partial r_{34}}$ e $\frac{\partial f}{\partial r_{23}}$ existem e são contínuas no interior de $\mathcal{D}$. De acordo com a definição do conjunto $\mathcal{C}$, a distância r_{14} satisfaz

$$r_{14} \geq r_{23}, \quad r_{14} > \frac{1 - r_{23}^2 - r_{34}^2}{r_{23}r_{34}}, \quad (2.12)$$

então definimos, $z(r_{34}, r_{23}) = \max\{r_{23}, \frac{1 - r_{23}^2 - r_{34}^2}{r_{23}r_{34}}\}$.

Vamos mostrar que para um dado ponto (r_{34}, r_{23}) em $\mathcal{D}$, $F = 0$ tem uma única solução para algum r_{14} , com $z \leq r_{14} \leq 1$ e este ponto claramente está em Γ .

A intersecção das duas superfícies $r_{14} = r_{23}$ e $r_{14} = \frac{1 - r_{23}^2 - r_{34}^2}{r_{23}r_{34}}$ projetada no primeiro quadrante do plano $r_{34}r_{23}$ é

$$\begin{aligned} r_{23} &= \frac{1 - r_{23}^2 - r_{34}^2}{r_{23}r_{34}} \Rightarrow \\ r_{23} &= \sqrt{1 - r_{34}}, \end{aligned}$$

ou seja, é parte da parábola $r_{23}^2 = 1 - r_{34}$.

Este braço de curva divide a região $\mathcal{D}$ em duas partes, denotadas por $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$.

Em $\mathcal{D}_1$ temos os pontos no interior de $\mathcal{D}$ para o qual, $r_{23} < \sqrt{1-r_{34}}$ e temos nesta região $z = \frac{1-r_{23}^2-r_{34}^2}{r_{23}r_{34}}$. De fato, pois se $z = r_{23} \Rightarrow$

$$r_{23} > \frac{1-r_{23}^2-r_{34}^2}{r_{23}r_{34}} \Rightarrow$$

$$r_{23}^2(r_{34}+1) > (1-r_{34})(1+r_{34}) \Rightarrow$$

$$r_{23} > \sqrt{1-r_{34}},$$

contradição.

$\mathcal{D}_2$ é definido como o conjunto de pontos no interior de $\mathcal{D}$ para o qual, $r_{23} \geq \sqrt{1-r_{34}}$ e neste caso temos $z = r_{23}$, pois se $z = \frac{1-r_{23}^2-r_{34}^2}{r_{23}r_{34}} \Rightarrow$

$$\frac{1-r_{23}^2-r_{34}^2}{r_{23}r_{34}} > r_{23} \Rightarrow$$

$$r_{23} < \sqrt{1-r_{34}},$$

novamente contradição.

As três curvas definindo as fronteiras de $\mathcal{D}$ correspondem às pipas, quando $r_{23} = r_{34}$. A família de trapézios isósceles, quando $r_{23} = \tau(r_{34})$ e os casos degenerados, quando $m_3 = 0$ e $r_{14} = r_{24} = 1$, tendo triângulos equiláteros como configuração.

Se $r_{14} = 1$ e nos restringimos ao interior de $\mathcal{D}$, então, pelas inequações (2.10) e (2.11) temos que $r_{13} > 1$ e $r_{24} > 1$. Logo, segue que

$$F(r_{14} = 1, r_{23}, r_{34}) = (r_{13}^3 - 1)(r_{24}^3 - 1)(r_{23}^3 - r_{34}^3)$$

é estritamente positiva no interior de $\mathcal{D}$.

Agora, afirmamos que $F(r_{14} = z, r_{23}, r_{34})$ é estritamente negativa no interior de $\mathcal{D}$.

Para ver isto, considere um ponto em $\mathcal{D}_1$ e suponha que $r_{14} = z = \frac{1-r_{23}^2-r_{34}^2}{r_{23}r_{34}}$. Então, a desigualdade (2.11) transforma-se em igualdade e $r_{24} = 1$. Mais ainda, $0 < r_{23} \leq r_{14} < 1$, pela definição de z e pelo fato que (r_{34}, r_{23}) está no interior de $\mathcal{D}$.

Também, usando a equação (2.8) temos,

$$r_{13}^2 - r_{34}^2 = \frac{r_{14}^2 r_{23} + r_{14} r_{34} r_{23}^2 + r_{14} r_{34} + r_{23} r_{34}^2}{r_{23} + r_{14} r_{34}} - r_{34}^2 \Rightarrow$$

$$r_{13}^2 - r_{34}^2 = \frac{r_{14}(r_{14} r_{23} + r_{34} + r_{34}(r_{23}^2 - r_{34}^2))}{r_{23} + r_{14} r_{34}} > 0,$$

pois $r_{23} > r_{34}$. E segue que,

$$F(r_{14} = z, r_{23}, r_{34}) = (r_{13}^3 - 1)(r_{23}^3 - r_{34}^3)(1 - r_{14}^3) - (1 - r_{14}^3)(1 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - r_{23}^3) =$$

$$\begin{aligned}
& (1 - r_{14}^3)[(r_{13}^3 - 1)(r_{23}^3 - r_{34}^3) - (1 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - r_{23}^3)] = \\
& (1 - r_{14}^3)(r_{13}^3 r_{23}^3 + r_{34}^3 - r_{13}^3 - r_{23}^3 r_{34}^3) = \\
& -(1 - r_{14}^3)(1 - r_{23}^3)(r_{13}^3 - r_{34}^3) < 0,
\end{aligned}$$

estritamente negativa em $\mathcal{D}_1$.

Agora, considere um ponto no interior de $\mathcal{D}_2$ e suponha que $r_{14} = r_{23} = z$, então olhando para as equações (2.8) e (2.9) temos $r_{13} = r_{24}$, calculando vemos que:

$$\begin{aligned}
F(r_{14} = r_{23}, r_{23}, r_{34}) &= (r_{13}^3 - 1)(r_{23}^3 - r_{34}^3)(r_{24}^3 - r_{23}^3) - (1 - r_{23}^3)(r_{24}^3 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - r_{23}^3) = \\
& (r_{13}^3 - r_{23}^3)(r_{13}^3(2r_{23}^3 - r_{34}^3 - 1) - r_{23}^3 - r_{23}^3 r_{34}^3 + 2r_{34}^3) = \\
& (r_{13}^3 - r_{23}^3)T(x = r_{34}, y = r_{23}),
\end{aligned}$$

onde T é dado pela equação (2.4) da família de trapézio isósceles.

Como demonstrado no Lema 2.2.2, o valor de T em $\mathcal{D}_2$ é estritamente negativo, pois T se anula na fronteira superior de $\mathcal{D}$, quando $r_{23} = \tau(r_{34})$ e como $\frac{\partial T}{\partial y}(x, y = \tau(x)) > 0$, então para $y < \tau(x) \Rightarrow T(x, y) < 0$. Como $r_{14} = r_{23}$ e aplicando a equação (2.8) temos $r_{13} = \sqrt{r_{34} + r_{23}^2} > r_{23}$, assim $F(r_{14} = z, r_{23}, r_{34})$ é estritamente negativa em $\mathcal{D}_2$ e logo, é estritamente negativa em $\mathcal{D}$.

Pelo Teorema do Valor Intermediário, para cada ponto (r_{34}, r_{23}) no interior de $\mathcal{D}$, existe pelo menos uma solução para $F = 0$, para algum $z < r_{14} < 1$.

Para ver que esta solução é única, mostraremos que $\frac{\partial F}{\partial r_{14}} > 0$ em Γ . Calculamos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial r_{14}} &= [3r_{13}^2 \frac{\partial r_{13}}{\partial r_{14}}(r_{23}^3 - r_{34}^3)(r_{24}^3 - r_{14}^3) + (3r_{24}^2 \frac{\partial r_{24}}{\partial r_{14}} - 3r_{14}^2)(r_{13}^3 - 1)(r_{23}^3 - r_{34}^3)] - \\
& [-3r_{14}^2(r_{24}^3 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - r_{23}^3) + (3r_{24}^2 \frac{\partial r_{24}}{\partial r_{14}}(r_{13}^3 - r_{23}^3) + (r_{24}^3 - r_{34}^3)3r_{13}^2 \frac{\partial r_{13}}{\partial r_{14}})(1 - r_{14}^3)] \Rightarrow \\
\frac{\partial F}{\partial r_{14}} &= 3r_{13}^2 \frac{\partial r_{13}}{\partial r_{14}} \alpha_1 + 3r_{24}^2 \frac{\partial r_{24}}{\partial r_{14}} \alpha_2 + 3r_{14}^2 \alpha_3
\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (r_{23}^3 - r_{34}^3)(r_{24}^3 - r_{14}^3) - (1 - r_{14}^3)(r_{24}^3 - r_{34}^3), \\
\alpha_2 &= (r_{23}^3 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - 1) - (1 - r_{14}^3)(r_{13}^3 - r_{23}^3), \\
\alpha_3 &= (r_{24}^3 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - r_{23}^3) - (r_{23}^3 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - 1).
\end{aligned}$$

Usando que $F = 0$, cada α_i restrito à Γ transforma-se em

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{(1 - r_{14}^3)(r_{24}^3 - r_{34}^3)(1 - r_{23}^3)}{r_{13}^3 - 1}, \\
\alpha_2 &= \frac{(1 - r_{14}^3)(r_{13}^3 - r_{23}^3)(r_{14}^3 - r_{34}^3)}{r_{24}^3 - r_{14}^3},
\end{aligned}$$

$$\alpha_3 = \frac{(r_{24}^3 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - r_{23}^3)(r_{24}^3 - 1)}{r_{24}^3 - r_{14}^3}.$$

Observamos que α_3 é estritamente positiva em Γ e α_1, α_2 são não-negativas em Γ , isto, junto com o Lema 2.3.2, prova que $\frac{\partial F}{\partial r_{14}} > 0$ em Γ .

Portanto, existe uma função $r_{14} = f(r_{34}, r_{23})$ definida implicitamente por

$$F(r_{14}, r_{23}, r_{34}) = 0$$

sobre o interior de $\mathcal{D}$.

Finalmente, na fronteira de $\mathcal{D}$ definida por $r_{23} = r_{34}$, a única possibilidade para $F(r_{14}, r_{23}, r_{34}) = 0$ é $r_{14} = 1$ em $\mathcal{C}$, que é a configuração pipa.

Similarmente, na fronteira $r_{23} = \tau(r_{34})$, como $\frac{\partial F}{\partial r_{14}} > 0$ e como para $r_{14} = r_{23}$, temos

$$F(r_{14} = r_{23}, r_{23}, r_{34}) = (r_{13}^3 - r_{23}^3)T(x = r_{34}, y = r_{23}).$$

E sabemos que $T(x = r_{34}, y = r_{23}) = 0$ na curva $r_{23} = \tau(r_{34})$ assim, vemos que a única possibilidade para $F = 0$ em $\mathcal{C}$ é $r_{14} = r_{23}$, que é a família de trapézio isósceles.

Portanto, definimos $f(r_{34}, r_{23} = r_{34}) = 1$ e $f(r_{34}, r_{23} = \tau(r_{34})) = r_{23}$ para estender f a todo $\mathcal{D}$. Assim, o Teorema da Função Implícita, que é aplicável nas fronteiras que dão as pipas e os trapézios isósceles, e o fato que $F = 0$ é algébrico, mostra que f é contínua em todo $\mathcal{D}$ e diferenciável no interior de $\mathcal{D}$.

Da prova do Lema 2.2.2, qualquer ponto (r_{34}, r_{23}) estando acima da curva τ , ou seja, $r_{23} > \tau(r_{34})$, temos $T > 0$. Como, $\frac{\partial F}{\partial r_{14}} > 0$ em Γ , segue que, a solução para $F = 0$ deve satisfazer $r_{14} < r_{23}$, pois se $r_{14} = r_{23} \Rightarrow F(r_{14} = r_{23}, r_{23}, r_{34}) = (r_{13}^3 - r_{23}^3)T(x, y)$ que é positivo se (r_{34}, r_{23}) está acima da curva τ , logo para ter $F = 0$, deve ter $r_{14} < r_{23}$, este valor está fora de $\mathcal{C}$.

Além disso, qualquer ponto (r_{34}, r_{23}) estando abaixo da curva $r_{23}^2 + r_{34}^2 + r_{34}r_{23} = 1$, teremos $r_{24} \leq 1$, que também está fora de $\mathcal{C}$. Logo, a projeção de Γ no plano $r_{34}r_{23}$ é o conjunto $\mathcal{D}$. $\square$

Não é difícil ver que, para qualquer c.c.c, as massas podem ser ordenadas de uma forma precisa. Os argumentos que seguem dependem principalmente do fato que, os quatro corpos estão em um círculo comum, bem como do ordenamento das distâncias mútuas. Antes, veremos alguns lemas técnicos que mostram relações entre o comprimento das diagonais e o comprimento dos lados entre os corpos 1 e 4, 2 e 3.

Lema 2.4.1. *Qualquer c.c.c em Γ satisfaz*

$$r_{13} - r_{24} \leq (r_{14} - r_{23})(1 - r_{34}) \quad (2.13)$$

e

$$r_{13} - r_{24} \leq r_{14} - r_{23}. \quad (2.14)$$

Demonstração. Usando as equações em (1.28) temos,

$$\begin{aligned} r_{13} - r_{24} &= \sqrt{\frac{ab}{c}} - \sqrt{\frac{ac}{b}} = \frac{\sqrt{a(b-c)}}{\sqrt{bc}} = \\ &= \sqrt{\frac{a}{bc}}((r_{14} + r_{23}r_{34}) - (r_{23} + r_{14}r_{34})) = \\ &= \sqrt{\frac{a}{bc}}(r_{14} - r_{23})(1 - r_{34}). \end{aligned}$$

Então, como

$$\begin{aligned} bc &= (r_{14} + r_{23}r_{34})(r_{23} + r_{14}r_{34}) = \\ r_{14}r_{23} + r_{34}(r_{14}^2 + r_{23}^2 + r_{14}r_{23}r_{34}) &> r_{14}r_{23} + r_{34} = a \Rightarrow \\ bc > a &\Rightarrow \frac{a}{bc} < 1. \end{aligned}$$

Logo, $r_{13} - r_{24} \leq (r_{14} - r_{23})(1 - r_{34})$ e como $0 < r_{34} \leq 1 \Rightarrow r_{13} - r_{24} \leq r_{14} - r_{23}$.

A igualdade é necessária em (2.13) e (2.14) porque consideramos a família de trapézios isósceles, onde ambos os lados das desigualdades se anulam e, as desigualdades são estritas nas outras c.c.c. $\square$

Lema 2.4.2. *Qualquer c.c.c em Γ satisfaz, $\frac{r_{13}}{r_{24}} \leq \frac{r_{14}}{r_{23}}$.*

Demonstração. Como $r_{23} \leq r_{14}$ temos,

$$\begin{aligned} \frac{r_{13}}{r_{24}} &= \frac{r_{14} + r_{23}r_{34}}{r_{23} + r_{14}r_{34}} \\ &\leq \frac{r_{14} + r_{14}r_{34}}{r_{23} + r_{23}r_{34}} = \frac{r_{14}(1 + r_{34})}{r_{23}(1 + r_{34})} \\ &= \frac{r_{14}}{r_{23}}, \end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Vamos ao teorema que garante o ordenamento preciso das massas em uma c.c.c de 4 corpos.

Teorema 2.4.2. *Qualquer c.c.c em Γ satisfaz $m_3 \leq m_4 \leq m_2 \leq m_1 = 1$. Em outras palavras, o corpo de maior massa está localizado no vértice entre os dois maiores lados do quadrilátero e o corpo de menor massa está oposto ao de maior massa. Além disso, os dois corpos de maior massa estão no maior lado do quadrilátero e os dois corpos de menor massa estão no menor lado.*

Demonstração. Vamos à primeira desigualdade

$$m_2 = \frac{r_{23}^2 r_{24}^2 (r_{13}^3 - r_{14}^3)}{r_{13}^2 r_{14}^2 (r_{24}^3 - r_{23}^3)} \leq 1.$$

Como $r_{13} \geq r_{24}$ e $r_{14} \geq r_{23}$, é suficiente mostrar que $r_{24}^3 - r_{23}^3 \geq r_{13}^3 - r_{14}^3$ ou, equivalentemente

$$r_{13}^3 - r_{24}^3 \leq r_{14}^3 - r_{23}^3. \quad (2.15)$$

Tomando (2.14) e elevando ao cubo em ambos os lados

$$(r_{13} - r_{24})^3 \leq (r_{14} - r_{23})^3 \Leftrightarrow$$

$$r_{13}^3 - r_{24}^3 + 3(-r_{13}^2 r_{24} + r_{13} r_{24}^2 + r_{14}^2 r_{23} - r_{14} r_{23}^2) \leq r_{14}^3 - r_{23}^3.$$

Para mostrar (2.15) é equivalente ver que

$$-r_{13}^2 r_{24} + r_{13} r_{24}^2 + r_{14}^2 r_{23} - r_{14} r_{23}^2 \geq 0$$

ou que

$$r_{13} r_{24} (r_{24} - r_{13}) + r_{14} r_{23} (r_{14} - r_{23}) \geq 0. \quad (2.16)$$

Sabemos que:

$$1 \leq r_{13} r_{24} = a = r_{23} r_{14} + r_{34},$$

e temos as seguintes implicações:

$$1 \leq r_{23} r_{14} + r_{34} \Rightarrow r_{34} \leq r_{34}^2 + r_{14} r_{23} r_{34} \Rightarrow$$

$$r_{34} - r_{34}^2 - r_{34} r_{14} r_{23} + r_{14} r_{23} \leq r_{14} r_{23} \Rightarrow$$

$$(1 - r_{34})(r_{14} r_{23} + r_{34}) \leq r_{14} r_{23} \Rightarrow r_{13} r_{24} (1 - r_{34}) \leq r_{14} r_{23} \Rightarrow$$

$$r_{13} r_{24} (r_{14} - r_{23})(1 - r_{34}) \leq r_{14} r_{23} (r_{14} - r_{23}).$$

Agora, usando (2.13)

$$r_{13} r_{24} (r_{13} - r_{24}) \leq r_{13} r_{24} (r_{14} - r_{23})(1 - r_{34}) \leq r_{14} r_{23} (r_{14} - r_{23}) \Rightarrow$$

$$r_{14} r_{23} (r_{14} - r_{23}) + r_{13} r_{24} (r_{24} - r_{13}) \geq 0$$

então, (2.15) é válida segue que $m_2 \leq m_1 = 1$.

Agora, verificamos que $m_4 \leq m_2$, usando as equações (1.29) e (1.31), temos

$$\begin{aligned} \frac{m_2}{m_4} &= \frac{r_{23}^2 (r_{13}^3 - r_{14}^3) (r_{24}^3 - r_{34}^3)}{r_{14}^2 r_{34}^2 (r_{24}^3 - r_{23}^3) (r_{13}^3 - 1)} \\ &= \frac{r_{23}^2}{r_{14}^2 r_{34}^2} \frac{r_{24}^3 - r_{34}^3}{r_{24}^3 - r_{23}^3} \frac{r_{13}^3 - r_{14}^3}{r_{13}^3 - 1}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

cada fração em (2.17) é maior ou igual a 1, pois $r_{23} \geq r_{34}$ e $1 \geq r_{14}$ assim, segue que $\frac{m_2}{m_4} \geq 1 \Leftrightarrow$

$$m_2 \geq m_4.$$

Finalmente, das equações (1.30), (1.31) e (1.22) temos,

$$\begin{aligned} \frac{m_4}{m_3} &= \frac{r_{14}^2 r_{24}^2 (r_{23}^3 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - 1)}{r_{13}^2 r_{23}^2 (1 - r_{14}^3)(r_{24}^3 - r_{34}^3)} = \\ &= \frac{r_{14}^2 r_{24}^2 (r_{13}^3 - r_{23}^3)}{r_{13}^2 r_{23}^2 (r_{24}^3 - r_{14}^3)}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.4.2, $r_{24}r_{14} \geq r_{13}r_{23}$ e como $r_{13} \geq r_{24}$ e $r_{14} \geq r_{23} \Rightarrow$

$$r_{13}^3 \geq r_{24}^3 \Rightarrow r_{13}^3 - r_{14}^3 \geq r_{24}^3 - r_{14}^3$$

assim,

$$\begin{aligned} r_{13}^3 - r_{23}^3 &\geq r_{13}^3 - r_{14}^3 \geq r_{24}^3 - r_{14}^3 \Rightarrow \\ \frac{m_4}{m_3} &\geq 1 \Rightarrow m_4 \geq m_3. \end{aligned}$$

Então, $m_3 \leq m_4 \leq m_2 \leq m_1 = 1$. □

Corolário 2.4.1. *Se somente dois corpos de uma c.c.c têm massas iguais então, a configuração é simétrica, uma pipa, ou um trapézio isósceles. Especificamente, para qualquer c.c.c em Γ se ou $m_1 = m_2$ ou $m_3 = m_4$, então a configuração é um trapézio isósceles e o outro par de massas é necessariamente igual. Se $m_2 = m_4$, a configuração é uma pipa. Se quaisquer três massas são iguais, então a configuração é um quadrado e todas as massas são iguais.*

Demonstração. Da prova que $m_2 \leq 1$ temos que:

$$m_2 = \frac{r_{23}^2 r_{24}^2 r_{13}^3 - r_{14}^3}{r_{14}^2 r_{13}^2 r_{24}^3 - r_{23}^3} \quad (2.18)$$

é o produto de números positivos menores ou igual à 1. Se $m_2 = m_1 = 1$ segue que, cada fração em (2.18) é igual a 1. E disto, temos $r_{14} = r_{23}$ e $r_{13} = r_{24}$, ou seja, temos um trapézio isósceles. Pela equação (2.1) temos que $\frac{m_3}{m_4} = 1 \Leftrightarrow m_3 = m_4$.

Agora, se $m_3 = m_4$ então, da prova que $m_3 \leq m_4$ temos $r_{13}^3 - r_{23}^3 = r_{24}^3 - r_{14}^3$ e isto é equivalente à

$$r_{13}^3 - r_{24}^3 = r_{23}^3 - r_{14}^3. \quad (2.19)$$

Se $r_{23} < r_{14}$ então, o lado direito da equação (2.19) é negativo, o que contradiz o fato que, $r_{13} \geq r_{24}$. Logo, $r_{23} = r_{14}$, e a equação (2.19) dá $r_{13} = r_{24}$, novamente temos um trapézio isósceles. Além disso, por (1.29) $\frac{m_2}{m_1} = 1 \Leftrightarrow m_2 = m_1 = 1$.

Finalmente, se $m_2 = m_4$, por um argumento similar ao apresentado acima e usando (2.17),

$$1 = \frac{r_{23}^2}{r_{14}^2 r_{34}^2} \frac{r_{13}^3 - r_{14}^3}{r_{13}^3 - 1} \frac{r_{24}^3 - r_{34}^3}{r_{24}^3 - r_{23}^3},$$

onde todas as frações são maiores ou igual a 1. Pois, $r_{23} \geq r_{14}$, $1 \geq r_{14}$. E assim segue que, $r_{13}^3 - r_{14}^3 \geq r_{13}^3 - 1$ e $r_{24}^3 - r_{34}^3 \geq r_{24}^3 - r_{23}^3$. logo, $r_{14} = 1$ e $r_{23} = r_{34}$ e temos uma configuração pipa.

Se três massas são iguais, então ou $m_3 = m_4 = m_2$ ou $m_4 = m_2 = m_1$, logo a c.c.c é simultaneamente, uma pipa e um trapézio isósceles, assim ela é um quadrado com todas as massas iguais. $\square$

A seguir apresentamos uma proposição que determina os limites nos comprimentos dos lados e das diagonais do quadrilátero.

Proposição 2.4.1. *Os lados e as diagonais do quadrilátero em uma c.c.c em Γ são restritos por,*

$$0 < r_{34} \leq 1, 1/\sqrt{3} < r_{23} \leq 1, \tau' \leq r_{14} \leq 1, 1 < r_{13}, r_{24} \leq \sqrt{2},$$

onde τ' é o valor mínimo de $\tau(x)$.

Demonstração. Os limites das distâncias r_{34} e r_{23} seguem diretamente do Teorema 2.4.1. Usando argumento similar ao da prova daquele teorema, temos que $\frac{\partial F}{\partial r_{23}} > 0$ no interior de $\mathcal{D}$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, $\frac{\partial r_{14}}{\partial r_{23}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial r_{23}}}{\frac{\partial F}{\partial r_{14}}} < 0$ no interior de $\mathcal{D}$. Como $r_{14} = 1$ na fronteira inferior de $\mathcal{D}$ (o caso degenerado do triângulo equilátero ou a família de pipas), segue que o valor mínimo para r_{14} deve ocorrer na fronteira superior de $\mathcal{D}$, dada pela curva $r_{23} = \tau(r_{34})$. Porém, nesta curva temos $r_{14} = r_{23}$ (trapézio isósceles). Portanto, o valor mínimo de r_{14} ocorre no valor mínimo de r_{23} em τ .

Os limites inferiores das diagonais seguem diretamente da definição de Γ e da inequação (2.11). Agora, pela equação (1.28)

$$\begin{aligned} r_{13} \leq \sqrt{2} &\Leftrightarrow ab \leq 2c \Leftrightarrow \\ (r_{34} + r_{14}r_{23})(r_{14} + r_{23}r_{34}) &\leq 2(r_{23} + r_{14}r_{34}) \Leftrightarrow \\ -r_{34}r_{14} + r_{34}r_{14}r_{23}^2 &\leq 2r_{23} - r_{23}r_{34}^2 - r_{14}^2r_{23} \Leftrightarrow \\ r_{14}r_{34}(1 - r_{23}^2) &\geq r_{23}(r_{14}^2 + r_{34}^2 - 2). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Como $r_{14} \leq 1$ e $r_{34} \leq 1$, o lado direito de (2.20) é não positivo porém, $r_{23} \leq 1$ e isto implica que, o lado esquerdo (2.20) é não negativo. Logo, (2.20) é sempre válida, então $r_{13} \leq \sqrt{2}$ e como $r_{24} \leq r_{13} \Rightarrow r_{24} \leq \sqrt{2}$.

Estes limites são atingidos, porém a única possibilidade é a configuração quadrado, pois $r_{23} = r_{34} = r_{14} = 1$ é a única configuração possível para fazer (2.20) uma igualdade. $\square$

Desta forma, ficam classificadas as configurações centrais co-circulares, ou seja, vemos que elas determinam uma superfície, gráfico de um dos lados do quadrilátero como função do comprimento dos dois menores lados do quadrilátero. Além disso, vimos que nos bordos de tal superfície moram as configurações centrais co-circulares com algum tipo de simetria, a

família de pipas determina uma reta na fronteira da superfície e a família de trapézios isósceles determina uma curva diferenciável. Além disso, um dos bordos é composto pelos triângulos equiláteros do problema restrito de 4 corpos.

Foi utilizada a relação de Dziobek para tal classificação, assim como as razões entre as massas, respondendo ao seguinte questionamento: Para qual conjunto de distâncias mútuas corresponde um conjunto de massas positivas que determina uma configuração central? Além disso, foi possível demonstrar que existe um ordenamento preciso nas massas em uma configuração central co-circular. Também vimos que é suficiente ter a igualdade entre duas massas, apenas, para termos c.c.c simétrica.

Mostraremos no capítulo 5, que é possível obter a mesma classificação das c.c.c utilizando as equações de Andoyer, vistas no capítulo 1. Pois basta mostrarmos que o sistema de equações I é equivalente a estas. Como já é esperado, pois os dois formalismos, equações de Andoyer e relações de Dziobek, descrevem o mesmo tipo de situação, as configurações centrais do problema de n corpos. As equações de Andoyer são equivalentes às equações de configuração central. As relações de Dziobek também são equivalentes às mesmas, porém com a restrição da dimensão, ou seja, tal fato é verdade em dimensão $n - 2$, onde n é o número de corpos no sistema.

Capítulo 3

Unicidade de Configuração Central Co-Circular Com 4 Corpos Com Centro de Massa no Centro do Círculo

Neste capítulo e no próximo apresentamos dois resultados que respondem positivamente, para 4 e 5 corpos, respectivamente, a conjectura proposta por Alain Chenciner em 2001. Chenciner conjecturou: É o n -ágono regular a única configuração central co-circular cujo centro de massa coincide com o centro do círculo.

Neste capítulo fazemos a prova da conjectura citada acima para 4 corpos. Tal prova é devida a Marshall Hampton e mostra que a única c.c.c com 4 corpos e centro de massa no centro do círculo é o quadrado com corpos de massas iguais.

Damos a seguinte notação para as razões das massas definidas em (1.36)

$$g_{ij} = \frac{m_i}{m_j} = \pm \frac{r_{ik}^2 r_{il}^2 (r_{jk}^3 - r_{jl}^3)}{r_{jk}^2 r_{jl}^2 (r_{ik}^3 - r_{il}^3)}.$$

Além disso, neste capítulo os quatro corpos são ordenados ciclicamente, no sentido anti-horário e o círculo tem centro na origem do sistema de coordenadas. Também vale a relação (1.22) e o teorema de Ptolomeu.

Fixamos o maior lado do quadrilátero como $r_{12} = 1$. Como vimos na Proposição 1.5.1 da seção 1.5, que $r_{14} \geq r_{23} \Leftrightarrow r_{13} \geq r_{24}$. Neste capítulo, utilizamos a relação inversa, $r_{23} \geq r_{14} \Leftrightarrow r_{24} \geq r_{13}$. Assim, estamos interessados em vetores $r = (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}) \in \mathbb{R}^{+6}$ tais que

$$r_{24} \geq r_{13} > r_{12} = 1 \geq r_{23} \geq r_{14} \geq r_{34}. \quad (3.1)$$

Como os quatro corpos que formam a c.c estão em um mesmo círculo, aparecem algumas relações entre as distâncias mútuas, entre elas, a relação (1.36) e o teorema de Ptolomeu. Estas relações permitem que r_{24} e r_{34} sejam escritas como funções de r_{13} , r_{23} e r_{14} . Assim, reduzimos

o problema à análise de três variáveis, que devem variar de acordo com os limites na relação (3.1). Logo, definimos tal região como a seguir.

Definição 3.0.1. Considere $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^{+3}$, onde os pontos $(r_{13}, r_{23}, r_{14}) \in \mathcal{R}$ são tais que, $r_{13} \in [1, \sqrt{r_{34} + r_{23}^2}]$, $r_{23} \in [(\sqrt{5} - 1)/2, 1]$ e $r_{14} \in [r_{23}\sqrt{r_{23}/(1 - r_{13}^2 + 2r_{23} + r_{23}^2)}, r_{23}]$.

Vamos ao teorema do capítulo.

Teorema 3.0.3. A única configuração central co-circular com 4 corpos e centro de massa no centro do círculo é o quadrado com corpos de massas iguais nos seus vértices.

Demonstração. Dividimos a prova em duas partes, o caso simétrico e o caso não simétrico.

3.1 O Caso Simétrico

Agora, vamos mostrar que a única c.c.c com quatro corpos e centro de massa no centro do círculo é o quadrado com corpos de massas iguais nos vértices. Primeiro, tomamos o caso simétrico trapézio isósceles, onde $r_{14} = r_{23}$ e $r_{13} = r_{24}$, ver figura 3.1 e vemos que o seu centro de massa não está no centro do círculo.

Do teorema de Ptolomeu, segue que $r_{34} = r_{13}^2 - r_{23}^2$, assim elimina-se a distância r_{34} e o problema transforma-se em bidimensional, pois é suficiente obter as distâncias r_{13} e r_{23} .

Note que, se o centro de massa estiver na origem, então vale a relação

$$1 + (2r_{13}^2 - r_{34})(m_3 - 1) - m_3 r_{34}^2 = 0. \quad (3.2)$$

De fato, fixando $m_1 = m_2 = 1$, a condição do centro de massa estar na origem é equivalente à

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + m_4 r_4 = r_1 + r_2 + m_3(r_3 + r_4) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 1 + (2r_{13}^2 - r_{34})(m_3 - 1) - m_3 r_{34}^2 &= \\ 1 + (r_{13}^2 + r_{23}^2)(m_3 - 1) - m_3 r_{34}^2 &= \\ 1 + (r_1^2 - 2r_1 \bullet r_2 + r_3^2 + r_2^2 - 2r_2 \bullet r_3 + r_3^2)(m_3 - 1) - m_3 (r_3^2 - 2r_3 \bullet r_4 + r_4^2) &= \\ 1 - 2m_3 r_1 \bullet r_3 - 2m_3 r_2 \bullet r_3 - 4r_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

As duas últimas igualdades seguem da relação do centro de massa, do fato que os vetores posição tem o mesmo comprimento e das simetrias envolvidas.

Assim, utilizando as relações g_{ij} e tomando o resultante com relação à variável r_{23} , o fator não trivial do polinômio em r_{13} é

$$\begin{aligned} 7r_{13}^{18} + 42r_{13}^{17} + 78r_{13}^{16} + 70r_{13}^{15} + 9r_{13}^{14} - 186r_{13}^{13} - 97r_{13}^{12} - 138r_{13}^{11} + 204r_{13}^{10} + 60r_{13}^9 + 72r_{13}^8 - 48r_{13}^7 - \\ 89r_{13}^6 + 60r_{13}^5 - 42r_{13}^4 + 42r_{13}^3 - 21r_{13}^2 + 6r_{13} - 1. \end{aligned}$$

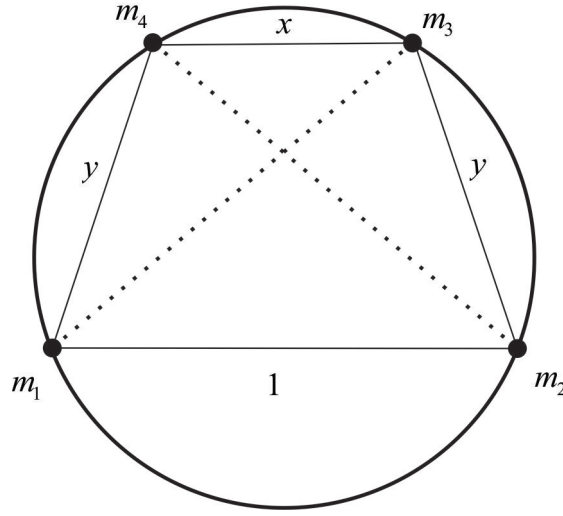


Figura 3.1: Trapézio isósceles.

Aplicando o algoritmo de Sturm, vemos que a expressão anterior não tem raízes no intervalo $[1, \sqrt{2}]$. Logo a expressão (3.2) também não tem zeros neste intervalo, e o centro de massa não pode ser o centro do círculo.

3.2 O Caso Não Simétrico

As variáveis r_{24} e r_{34} podem ser vistas como funções de r_{13} , r_{23} e r_{14} , determinadas implicitamente por suas relações de co-circularidade.

Podemos checar sem muito trabalho que para configurações centrais co-circulares com centro de massa na origem do círculo, a seguinte identidade é válida

$$r_{12}^2 \left(\frac{m_2}{m_1} - 1 \right) + \frac{m_4}{m_1} (r_{14}^2 - r_{24}^2) + \frac{m_3}{m_1} (r_{13}^2 - r_{23}^2) = 0. \quad (3.3)$$

De fato, pois como $c = 0$, então $m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + m_4 r_4 = 0$. Além disso, mostrar a relação (3.3) é equivalente à mostrar que

$$r_{12}^2 (m_2 - m_1) + m_4 (r_{14}^2 - r_{24}^2) + m_3 (r_{13}^2 - r_{23}^2) = 0.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} & (r_1^2 - 2r_1 \bullet r_2 + r_2^2)(m_2 - m_1) + m_4 (r_1^2 - 2r_1 \bullet r_4 + r_4^2 - r_2^2 + 2r_2 \bullet r_4 - r_4^2) + \\ & \quad m_3 (r_1^2 - 2r_1 \bullet r_3 + r_3^2 - r_2^2 + 2r_2 \bullet r_3 - r_3^2) = \\ & (r_1 - r_2) \bullet (r_1 - r_2)(m_2 - m_1) + 2m_4 (r_2 - r_1) \bullet r_4 + 2m_3 (r_2 - r_1) \bullet r_3 = \\ & (r_1 - r_2) \bullet [(r_1 - r_2)(m_2 - m_1) - 2m_4 r_4 - 2m_3 r_3] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r_1 - r_2) \bullet [m_2 r_1 + m_1 r_2 + m_1 r_1 + m_2 r_2] &= \\
(r_1 - r_2) \bullet [(m_1 + m_2)(r_1 + r_2)] &= \\
(m_1 + m_2)(r_1^2 - r_2^2) &= 0,
\end{aligned}$$

como desejado. Foram utilizados nas igualdades acima, o fato de os vetores posição terem o mesmo comprimento e o fato do centro de massa estar na origem do sistema de referência.

Fazemos $r_{12} = 1$ e usamos $g_{21} = \frac{m_2}{m_1}$, $g_{31} = \frac{m_3}{m_1}$ e $\frac{g_{43}}{g_{13}} = \frac{m_4}{m_1}$, então obtemos

$$(g_{21} - 1) + \frac{g_{43}}{g_{13}}(r_{14}^2 - r_{24}^2) + g_{31}(r_{13}^2 - r_{23}^2) = 0. \quad (3.4)$$

Como $g_{13} = 1/g_{31}$, e substituindo o valor de g_{43} , podemos escrever a expressão em (3.4) da seguinte forma

$$S = S_1 + g_{31} r_{13}^{-2} r_{23}^{-2} (r_{13}^3 - r_{23}^3) S_2, \quad (3.5)$$

onde $S_1 = (g_{21} - 1)$ e

$$S_2 = \frac{r_{13}^2 r_{23}^2 (r_{13}^2 - r_{23}^2)}{(r_{13}^3 - r_{23}^3)} - \frac{r_{14}^2 r_{24}^2 (r_{24}^2 - r_{14}^2)}{(r_{24}^3 - r_{14}^3)}. \quad (3.6)$$

Podemos notar que $S = 0$, quando $r_{14} = r_{23}$. Vamos mostrar que $S \neq 0$ no interior de $\mathcal{R}$.

Como o coeficiente de S_2 é positivo em $\mathcal{R}$, devemos estudar o seu sinal. Derivando S_2 com respeito a r_{14} , obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_2}{\partial r_{14}} = - \frac{r_{14} r_{24}}{(r_{14}^2 + r_{14} r_{24} + r_{24}^2)^2} (2r_{14}^4 r_{24}' + r_{14}^3 r_{24} + 4r_{14}^3 r_{24} r_{24}' + 2r_{14}^2 r_{24}^2 + 2r_{14}^2 r_{24}^2 r_{24}' + \\
4r_{14} r_{24}^3 + r_{14} r_{24}^3 r_{24}' + 2r_{24}^4). \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Basta investigar o sinal do segundo fator na expressão acima, pois o primeiro fator é sempre positivo em $\mathcal{R}$. Afim de evitar o surgimento da distância r_{34} no problema, calculamos a derivada implícita r_{24}' a partir da seguinte relação

$$r_{13} r_{23} - r_{13} r_{23} r_{14}^2 - r_{14} r_{24} + r_{13}^2 r_{14} r_{24} + r_{23}^2 r_{14} r_{24} - r_{13} r_{23} r_{24}^2 = 0,$$

que é válida para configurações co-circulares com $r_{12} = 1$. Assim, temos

$$r_{24}' = \frac{2r_{13} r_{23} r_{14} + r_{24} - r_{13}^2 r_{24} - r_{23}^2 r_{24}}{r_{13}^2 r_{14} + r_{23}^2 r_{14} - r_{14} - 2r_{13} r_{23} r_{24}}.$$

Substituindo esta expressão em $\frac{\partial S_2}{\partial r_{14}}$, vemos que seu sinal é determinado por

$$\frac{(r_{24} - r_{14})}{r_{13}^2 r_{14} + r_{23}^2 r_{14} - r_{14} - 2r_{13}r_{23}r_{24}} (2r_{13}r_{23}(2r_{14}^2 + 6r_{14}^3 r_{24} + r_{14}^2 r_{24}^2 + 6r_{14}r_{24}^3 + 2r_{24}^4) + \quad (3.8)$$

$$r_{14}r_{24}(1 - r_{23}^2)(r_{14}^2 + 3r_{14}r_{24} + r_{24}^2) - r_{13}^2 r_{14}r_{24}(r_{14}^2 + 3r_{14}r_{24} + r_{24}^2)).$$

Observamos que, da relação (3.1) e como $r_{23}^2 r_{14} \leq r_{14}$ e $r_{13}^2 r_{14} \leq 2r_{13}r_{23}r_{24}$, então em $\mathcal{R}$ temos

$$\frac{(r_{24} - r_{14})}{r_{13}^2 r_{14} + r_{23}^2 r_{14} - r_{14} - 2r_{13}r_{23}r_{24}} \leq 0.$$

Também obtemos as seguintes relações

$$4r_{13}r_{23}r_{24}^4 \geq r_{13}^2 r_{14}r_{24}^3 + 3r_{13}^2 r_{14}^2 r_{24}^2 \quad (3.9)$$

e

$$12r_{13}r_{23}r_{14}r_{24}^2 \geq r_{13}^2 r_{14}^3 r_{24}, \quad (3.10)$$

estas relações quando aplicadas no segundo fator de (3.8), vemos que este é sempre não positivo. Além disso, $\frac{\partial S_2}{\partial r_{14}} < 0$, na fronteira $r_{14} = r_{23}$ e $r_{13} = r_{24}$ e como $r_{13} > r_{23}$, então $S_2 > 0$ no interior de $\mathcal{R}$. Também temos que $S_1 \geq 0$ no interior de $\mathcal{R}$, basta um ordenamento adequado dos corpos no círculo. Assim, S é diferente de zero no interior de $\mathcal{R}$, contradição com o fato de a c.c.c ter centro de massa no centro do círculo, assim tal configuração não existe. E vemos que a única c.c.c com centro de massa no centro do círculo, é o quadrado com corpos de massas iguais. $\square$

Capítulo 4

Unicidade de Configuração Central Co-Circular Com 5 Corpos Com Centro de Massa no Centro do Círculo

Neste capítulo, continuaremos discutindo a conjectura de Chenciner, citada no início do capítulo anterior. Aqui será dada uma resposta positiva à mesma, para o caso particular de 5 corpos. Ou seja, mostraremos a unicidade de c.c.c com centro de massa no centro do círculo, esta configuração é o pentágono regular com corpos de massas iguais nos vértices. Diferentemente do que ocorreu nos capítulos anteriores, onde o resultado principal foi obtido da relação de Dziobek e de outras relações devidas ao fato de a c.c ser co-circular, o resultado principal seguirá de análises das equações da definição de c.c.

4.1 Preliminares

Nesta seção vamos construir o cenário para o resultado mais importante. Neste capítulo, assim como nos dois anteriores, o centro do círculo é a origem do sistema de coordenadas. Além disso, consideramos o círculo de raio 1, sem perda de generalidade, pois as c.c são invariantes por homotetias e rotações centradas no centro de massa.

Assim, tome n corpos de massas positivas m_i , suas posições são dadas por

$$(c_k, s_k) = (\cos \theta_k, \sin \theta_k),$$

com $\theta_i \in [0, 2\pi)$ e $\theta_i \neq \theta_j$ se $i \neq j$. Denotamos tais c.c, neste capítulo, por

$$\{\theta_1, \dots, \theta_n\},$$

e sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi.$$

Os ângulos θ são medidos no sentido anti-horário com origem no eixo das abscissas positivas.

As equações da definição de configuração central são

$$-\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j(r_i - r_j)}{\|r_i - r_j\|^3} + \lambda(r_i - c) = 0.$$

Com as definições acima e considerando $c = 0$, temos o seguinte conjunto de equações equivalentes,

$$e_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j(c_j - c_i)}{r_{ij}^3} + \lambda c_i = 0, \quad (4.1)$$

$$e_{i+n} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j(s_j - s_i)}{r_{ij}^3} + \lambda s_i = 0, \quad (4.2)$$

$$e_{2n+1} = \sum_{j=1}^n m_j c_j = 0, \quad (4.3)$$

$$e_{2n+2} = \sum_{j=1}^n m_j s_j = 0, \quad (4.4)$$

para $i = 1, \dots, n$, com $r_{ij} = \sqrt{(c_j - c_i)^2 + (s_j - s_i)^2}$. Segue uma proposição que será utilizada na demonstração principal.

Proposição 4.1.1. *Seja $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ uma c.c.c com centro de massa na origem do círculo. Então as seguintes sentenças são válidas.*

1. *A configuração Θ_x , refletida com respeito ao eixo das abscissas da configuração Θ , é uma configuração central co-circular.*
2. *A configuração Θ_y , refletida com respeito ao eixo das ordenadas da configuração Θ , é uma configuração central co-circular.*

Demonstração. Se a c.c.c Θ é $(c_1, s_1, c_2, s_2, \dots, c_n, s_n)$, então a configuração Θ_x é $(c_1, -s_1, c_2, -s_2, \dots, c_n, -s_n)$. Sabemos que Θ satisfaz as equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4), logo Θ_x também as satisfaz, logo é uma c.c.c.

Desta forma, a configuração Θ_y é $(-c_1, s_1, -c_2, s_2, \dots, -c_n, s_n)$. Já que Θ satisfaz as equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4), então Θ_y também as satisfaz, logo é c.c.c. Está provado os itens 1 e 2 acima. $\square$

Na próxima seção enunciamos e demonstramos a unicidade de c.c.c com 5 corpos, e centro de massa no centro do círculo.

4.2 Unicidade da Configuração Central Co-Circular Com 5 Corpos e Centro de Massa no Centro do Círculo

Para toda esta seção consideramos $n = 5$ e o objetivo principal é demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 4.2.1. *Para o problema Newtoniano com 5 corpos, a única configuração central co-circular com centro de massa no centro do círculo é o pentágono regular com corpos de massas iguais em seus vértices.*

Demonstração. Sabemos que as c.c.c com centro de massa na origem do círculo são invariantes por rotações centradas nesta origem, e por reflexões com respeito ao eixo das ordenadas e das abscissas. Assim, podemos assumir, sem perda de generalidade, que temos uma c.c.c $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5\}$, tal que

$$c_5 = c_2, \quad s_5 = -s_2 < 0, \quad c_1 > 0, \quad m_2 \geq m_5.$$

Isto pode ser desta forma, pois primeiro damos a denominação de m_1 para a maior massa. Então, nomeamos as massas dos demais corpos no sentido anti-horário, iniciando com m_1 . Se necessário, rotacionamos a configuração de tal forma que, $s_5 = -s_2$ com $s_2 > 0$. Se $m_2 < m_5$, aplicamos uma reflexão com respeito ao eixo das abscissas então, a configuração obtida será, novamente, nomeada no sentido anti-horário, a partir de m_1 . Assim, obtemos $m_2 \geq m_5$.

Note que se a configuração é invariante com respeito ao eixo das abscissas, então $\theta_1 = 0$ e $\theta_3 = -\theta_4$. Logo,

$$s_1 = 0, \quad c_1 = 1, \quad s_3 = -s_4 \quad \text{e} \quad c_3 = c_4,$$

esta informação será usada em algum momento da demonstração.

Usando o fato que o centro de massa está na origem do círculo e, esta coincide com a origem do sistema de coordenadas, temos

$$c_4 = -\frac{m_1 c_1 + (m_2 + m_5) c_2 + m_3 c_3}{m_4} \quad \text{e} \quad s_4 = -\frac{m_1 s_1 + (m_2 - m_5) s_2 + m_3 s_3}{m_4}. \quad (4.5)$$

A prova deste teorema será dividida em dois casos. Sendo que, o primeiro deles será dividido em dois subcasos. No segundo subcaso do primeiro caso veremos que a c.c.c formada é o pentágono regular com corpos de massas iguais nos vértices, nos demais casos não existirá c.c.

4.3 Caso 1

Este caso leva em consideração a seguinte possibilidade

$$m_1 s_1 + (m_2 - m_5) s_2 = 0,$$

consideramos dois subcasos.

4.3.1 Subcaso 1.1

Neste subcaso consideramos $m_2 > m_5$, portanto

$$s_1 = \frac{m_5 - m_2}{m_1} s_2. \quad (4.6)$$

Como $s_2 > 0$ e $m_2 > m_5$ temos que $s_1 < 0$. Mais ainda,

$$s_4 = -\frac{m_3}{m_4} s_3.$$

Logo, $s_3 > 0$ e, consequentemente $s_4 < 0$. Portanto,

$$(m_2 - m_5)s_2 + m_3s_3 \neq 0.$$

Neste ponto, podemos resolver o sistema

$$\begin{cases} c_1^2 + s_1^2 = 1 \\ c_4^2 + s_4^2 = 1, \end{cases}$$

com respeito a s_1 e c_1 . Obtendo duas soluções diferentes $R^j = \{c_1^j, s_1^j\}$, para $j = 1, 2$ com

$$s_1^1 = -\frac{m_1}{D_1 D_3} (m_1^2 D_1^2 + D_1^2 (D_1^2 + D_2^2 - m_4^2) - D_2 S_1),$$

$$c_1^1 = -\frac{m_1}{D_3} (D_2 (m_1^2 + D_1^2 + D_2^2 - m_4^2) + S_1),$$

$$s_1^2 = -\frac{m_1}{D_1 D_3} (m_1^2 D_1^2 + D_1^2 (D_1^2 + D_2^2 - m_4^2) + D_2 S_1),$$

$$c_1^2 = -\frac{m_1}{D_3} (D_2 (m_1^2 + D_1^2 + D_2^2 - m_4^2) - S_1),$$

onde

$$D_1 = (m_2 - m_5)s_2 + m_3s_3,$$

$$D_2 = c_3m_3 + c_2(m_2 + m_5),$$

$$D_3 = 2m_1^2(D_1^2 + D_2^2)$$

e

$$S_1 = \sqrt{D_1^2(2m_1^2(D_1^2 + D_2^2 + m_4^2) - (m_1^4 + D_1^2 + D_2^2 - m_4^2))}.$$

Assim, da Proposição 4.1.1, sabemos que a configuração Θ_x refletida com respeito ao eixo das abscissas da configuração central co-circular Θ é ainda uma c.c.c. Desta forma, ou a

configuração Θ é invariante com respeito ao eixo das abscissas, ou

$$c_1^1 = c_1^2|_{s_2 \rightarrow -s_2, \quad s_3 \rightarrow -s_3} \quad e \quad s_1^1 = -s_1^2|_{s_2 \rightarrow -s_2, \quad s_3 \rightarrow -s_3}. \quad (4.7)$$

Para a primeira possibilidade, como visto acima, segue que, $s_1 = 0$, contradição, pois estamos em acordo com as hipóteses do subcaso 1.1. Logo, a relação (4.7) é válida. Assim, temos

$$S_1 = 0$$

e

$$D_2 S_1 = 0,$$

respectivamente. Ou seja, $S_1 = 0$ e como $D_1 > 0$ segue que,

$$2m_1^2(D_1^2 + D_2^2 + m_4^2) - (m_1^4 + D_1^2 + D_2^2 - m_4^2) = 0.$$

Observamos que, a equação acima é biquadrada em m_1 . Resolvendo em relação a esta massa, encontramos quatro soluções que denominamos por $m_{1,j}$ com $j = 1, 2, 3, 4$ e

$$m_{1,j} = (-1)^j m_4 - \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$$

e

$$m_{1,j+2} = (-1)^j m_4 + \sqrt{D_1^2 + D_2^2}, \quad j = 1, 2.$$

Como $m_1 > 0$, a solução $m_{1,1}$ nunca satisfaz, logo está descartada. Assim, resta analisar $m_{1,2}$, $m_{1,3}$ e $m_{1,4}$.

Se $m_1 = m_{1,2}$ temos

$$s_1 = -s_4 = \frac{(m_2 - m_5)s_2 + m_3 s_3}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}.$$

Como (4.6) é válida segue que, $s_1 < 0$, logo $s_4 > 0$, contradição, pois de acordo com as hipóteses do subcaso 1.1, temos $s_4 < 0$. Logo, não é possível ter $m_1 = m_{1,2}$.

Se $m_1 = m_{1,3}$ temos

$$s_1 = s_4 = -\frac{(m_2 - m_5)s_2 + m_3 s_3}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}$$

e

$$c_1 = c_4 = -\frac{c_3 m_3 + (m_2 + m_5)c_2}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}.$$

Desta forma, existe colisão entre os corpos de massas m_1 e m_4 , contradição. Logo, não é possível ter $m_1 = m_{1,3}$.

Se $m_1 = m_{1,4}$ então

$$s_1 = -s_4 = -\frac{(m_2 - m_5)s_2 + m_3s_3}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}.$$

Logo, a solução $m_1 = m_{1,4}$ não é possível, pelo mesmo motivo que $m_1 = m_{1,2}$ não é possível. Assim, está concluído o subcaso 1.1, ou seja, sob aquelas hipóteses não existe configuração central co-circular.

4.3.2 Subcaso 1.2

Aqui, consideramos $m_2 = m_5$ e como

$$m_1s_1 + (m_2 - m_5)s_2 = 0,$$

então $s_1 = 0$. E também $c_1 = 1$ e $r_{12} = r_{15}$. Mais ainda, temos

$$c_4 = -\frac{m_1 + 2m_2c_2 + m_3c_3}{m_4} \quad e \quad s_4 = -\frac{m_3}{m_4}s_3. \quad (4.8)$$

Logo, temos que $s_3 > 0$ e $s_4 < 0$.

Da equação $e_6 = 0$ de (4.2) tem-se

$$m_3s_3 \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{14}^3} \right) = 0.$$

Desta forma, segue $r_{14} = r_{13}$. Consequentemente, $c_4 = c_3$ e $s_4 = -s_3$. Assim, segue de (4.8) que

$$m_3 = m_4$$

e

$$m_1 = -2(c_2m_2 + c_3m_3).$$

E notamos que $c_3 < 0$, pois o centro de massa está no centro do círculo, ou seja, na origem do sistema.

Claramente temos

$$r_{45} = r_{23}, \quad r_{35} = r_{24}, \quad r_{25} = 2s_2, \quad r_{34} = 2s_3.$$

Assim, das equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) percebemos que as únicas equações que permanecem independentes são as $e_k = 0$ para $k = 1, 3, 7, 8$. Pois, $e_2 = 0$ pode ser obtido da combinação linear

$$m_1e_1 + 2m_3e_3 + 2m_2e_2 = 0.$$

E

$$e_4 = e_3,$$

$$e_5 = e_2,$$

$$e_6 = 0,$$

$$e_9 = -e_8$$

e

$$e_{10} = -e_7.$$

Agora, de $e_1 = 0$, obtemos

$$\lambda = \frac{2(c_2 - 1)m_2}{r_{12}^3} + \frac{2(c_3 - 1)m_3}{r_{13}^3}.$$

E substituindo λ em e_k para $k = 3, 7, 8$ obtemos as equações abaixo

$$f_1 = -r_{12}^2 r_{24}^3 r_{23}^3 - r_{13}^2 r_{24}^3 r_{23}^3 - r_{12} r_{13} r_{24}^3 r_{23}^3 + 2r_{24}^3 r_{23}^3 + r_{12} r_{13}^2 r_{23}^3 + r_{12}^2 r_{13} r_{23}^3 + r_{12} r_{13}^2 r_{24}^3 + r_{12}^2 r_{13} r_{24}^3,$$

$$f_2 = \frac{1}{2(r_{12} - 2)r_{12}^3(r_{12} + 2)r_{13}r_{23}^3r_{24}^3} (2m_2 r_{13} r_{23}^3 r_{24}^3 - m_3 (r_{12} - 2) r_{12}^2 (r_{12} + 2) r_{13}^2 \sqrt{4 - r_{13}^2} (r_{23} - r_{24}) (r_{23}^2 + r_{24} r_{23} + r_{24}^2) - (r_{12} - 2) (r_{12} + 2) \sqrt{4 - r_{12}^2} (-m_3 r_{12}^3 r_{24}^3 r_{23}^3 + m_3 r_{13}^3 r_{24}^3 r_{23}^3 - 2m_2 r_{13} r_{24}^3 r_{23}^3 - 2m_3 r_{13} r_{24}^3 r_{23}^3 + m_3 r_{12}^3 r_{13} r_{23}^3 + m_3 r_{12}^3 r_{13} r_{24}^3)),$$

$$f_3 = \frac{1}{2r_{12}(r_{13} - 2)r_{13}^3(r_{12} + 2)r_{13}r_{23}^3r_{24}^3} (2m_3 r_{12} r_{23}^3 r_{24}^3 r_{13} - m_2 r_{12}^2 \sqrt{4 - r_{12}^2} (r_{13} - 2) (r_{13} + 2) (r_{23} - r_{24}) (r_{23}^2 + r_{24} r_{23} + r_{24}^2) r_{13}^3 - (r_{13} - 2) (r_{13} + 2) \sqrt{4 - r_{13}^2} (m_2 r_{12} r_{13}^3 r_{23}^3 + m_2 r_{12}^3 r_{24}^3 r_{23}^3 - m_2 r_{13}^3 r_{24}^3 r_{23}^3 - 2m_2 r_{12} r_{24}^3 r_{23}^3 - 2m_3 r_{12} r_{24}^3 r_{23}^3 + m_2 r_{12} r_{13}^3 r_{24}^3) r_{13}),$$

respectivamente, onde foi usado o fato que

$$c_2 = \frac{1}{2}(2 - r_{12}^2), \quad c_3 = \frac{1}{2}(2 - r_{13}^2).$$

A partir daqui não utilizamos os denominadores de f_2 e f_3 , porque eles são diferentes de zero, já que estamos supondo c.c.c com 5 corpos. Por exemplo, se $r_{13} = 2$, então $r_{14} = 2$, mas isto implica em colisão dos corpos de massas m_3 e m_4 .

Observe que, o sistema formado pelas equações f_2 e f_3 é linear e homogêneo considerando as massas m_2 e m_3 como variáveis. Assim, o determinante deste sistema precisa ser zero, pois

estamos interessados em massas positivas, para esta condição obtemos a seguinte equação

$$\begin{aligned}
 f_4 = & 4r_{12}^2(r_{13} - 2)r_{13}^2(r_{13} + 2)\sqrt{4 - r_{13}^2r_{23}^6r_{24}^6 + r_{12}^2r_{13}^2(r_{13}^4r_{23}^6r_{12}^8 - 4r_{13}^2r_{23}^6r_{12}^8} \\
 & - r_{13}^4r_{24}^6r_{12}^8 + r_{13}^3r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^8 - 4r_{13}r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^8 + 4r_{13}^2r_{24}^6r_{12}^8 - r_{13}^3r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^8 + \\
 & 4r_{13}r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^8 - 8r_{13}^4r_{23}^6r_{12}^6 + 32r_{13}^2r_{23}^6r_{12}^6 + 8r_{13}^4r_{24}^6r_{12}^6 - r_{13}^5r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^6 + \\
 & 16r_{13}r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^6 - 32r_{13}^2r_{24}^6r_{12}^6 + r_{13}^5r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^6 - 16r_{13}r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^6 - \\
 & r_{13}^6r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^5 + 6r_{13}^4r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^5 - 8r_{13}^2r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^5 + r_{13}^6r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^5 - \\
 & 6r_{13}^4r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^5 + 8r_{13}^2r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^5 + r_{13}^8r_{23}^6r_{12}^4 - 8r_{13}^6r_{23}^6r_{12}^4 + 32r_{13}^4r_{23}^6r_{12}^4 - \\
 & 64r_{13}^2r_{23}^6r_{12}^4 - r_{13}^8r_{24}^6r_{12}^4 + 8r_{13}^6r_{24}^6r_{12}^4 - 32r_{13}^4r_{24}^6r_{12}^4 + 6r_{13}^5r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^4 - \\
 & 32r_{13}^3r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^4 + 32r_{13}r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^4 + 64r_{13}^2r_{24}^6r_{12}^4 - 6r_{13}^5r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^4 + \\
 & 32r_{13}^3r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^4 - 32r_{13}r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^4 + r_{13}^8r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^3 - 32r_{13}^4r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^3 + \\
 & 64r_{13}^2r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^3 - r_{13}^8r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^3 + 32r_{13}^4r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^3 - \\
 & 4r_{13}^8r_{23}^6r_{12}^2 + 32r_{13}^6r_{23}^6r_{12}^2 - 64r_{13}^4r_{23}^6r_{12}^2 + 4r_{13}^8r_{24}^6r_{12}^2 - 32r_{13}^6r_{24}^6r_{12}^2 + \\
 & 64r_{13}^4r_{24}^6r_{12}^2 - 8r_{13}^5r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^2 + 64r_{13}^3r_{23}^3r_{24}^6r_{12}^2 - 128r_{13}r_{24}^6r_{23}^3r_{12}^2 + \\
 & 8r_{13}^5r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^2 - 64r_{13}^3r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^2 + 128r_{13}r_{23}^6r_{24}^3r_{12}^2 - 4r_{13}^8r_{23}^3r_{24}^6r_{12} + \\
 & 16r_{13}^6r_{23}^3r_{24}^6r_{12} + 32r_{13}^4r_{23}^3r_{24}^6r_{12} - 128r_{13}^2r_{23}^3r_{24}^6r_{12} + 4r_{13}^8r_{23}^6r_{24}^3r_{12} - \\
 & 16r_{13}^6r_{23}^6r_{24}^3r_{12} - 32r_{13}^4r_{23}^6r_{24}^3r_{12} + 128r_{13}^2r_{23}^6r_{24}^3r_{12} + 4r_{23}^6r_{24}^6) \\
 & + \sqrt{4 - r_{12}^2}(4(r_{12} - 2)r_{12}^2(r_{12} + 2)r_{13}^2r_{23}^6r_{24}^6 - \\
 & (r_{12} - 2)r_{12}(r_{12} + 2)(r_{13} - 2)r_{13}(r_{13} + 2)\sqrt{4 - r_{13}^2}(-r_{12}^6r_{24}^6r_{23}^6 - \\
 & r_{13}^6r_{24}^6r_{23}^6 + 2r_{12}^4r_{24}^6r_{23}^6 + 2r_{13}^4r_{24}^6r_{23}^6 + 2r_{12}^3r_{13}^3r_{24}^6r_{23}^6 - 2r_{12}r_{13}^3r_{24}^6r_{23}^6 - \\
 & 2r_{12}^3r_{13}r_{24}^6r_{23}^6 + 2r_{12}^4r_{13}^4r_{23}^6 + r_{12}r_{13}^6r_{24}^3r_{23}^6 - r_{12}^3r_{13}^4r_{24}^3r_{23}^6 - 2r_{12}r_{13}^4r_{24}^3r_{23}^6 - \\
 & r_{12}^4r_{13}^3r_{24}^3r_{23}^6 + r_{12}^6r_{13}^3r_{24}^3r_{23}^6 - 2r_{12}^4r_{13}r_{24}^3r_{23}^6 + r_{12}r_{13}^6r_{24}^6r_{23}^3 - r_{12}^3r_{13}^4r_{24}^6r_{23}^3 - \\
 & 2r_{12}r_{13}^4r_{24}^6r_{23}^3 - r_{12}^4r_{13}^3r_{24}^6r_{23}^3 + r_{12}^6r_{13}^3r_{24}^6r_{23}^3 - 2r_{12}^4r_{13}r_{24}^6r_{23}^3 + 2r_{12}^4r_{13}^4r_{24}^6r_{23}^3)).
 \end{aligned}$$

Notamos que as equações $f_1 = 0$ e $f_4 = 0$ dependem apenas das distâncias r_{12} , r_{13} , r_{23} e r_{24} . Vemos que, podemos encontrar as distâncias r_{23} e r_{24} em função das distâncias r_{12} e r_{13} , usando o teorema de Ptolomeu. Pois, se m_1 , m_2 , m_3 e m_4 são massas de corpos que estão ordenados ciclicamente em um círculo, então

$$r_{12}r_{34} + r_{14}r_{23} - r_{13}r_{24} = 0.$$

Assim, sob as hipóteses do subcaso 1.2 obtemos

$$r_{24} = r_{12}\sqrt{4 - r_{13}^2} + r_{23}. \quad (4.9)$$

Agora, aplicando o teorema de Ptolomeu aos corpos de massas m_1 , m_2 , m_3 e m_5 temos que

$$r_{12}r_{35} + r_{15}r_{23} - r_{13}r_{25} = 0.$$

Logo,

$$r_{23} = \sqrt{4 - r_{12}^2}r_{13} - \sqrt{r_{13}^2 + \frac{1}{2}r_{12}(\sqrt{4 - r_{12}^2}r_{13}\sqrt{4 - r_{13}^2} - r_{12}(r_{13}^2 - 2))}. \quad (4.10)$$

Podemos substituir r_{23} e r_{24} nas equações $f_1 = 0$ e $f_4 = 0$, vemos que nas expressões resultantes aparecem radicais. Elevando estas expressões ao quadrado três vezes, então as raízes quadradas são eliminadas. Desta forma, obtemos equações g_1 e g_4 , que tem as mesmas soluções que f_1 e f_4 e possivelmente algumas outras soluções. As equações g_1 e g_4 ficam

$$g_1 = -(r_{12} + r_{13})^6 g_{11}^2 g_{12},$$

onde

$$\begin{aligned} g_{11} = & r_{12}^{14} - 4r_{13}^2 r_{12}^{12} - 4r_{12}^{12} - 2r_{13}^3 r_{12}^{11} + 4r_{13} r_{12}^{11} + 6r_{13}^4 r_{12}^{10} + 16r_{13}^2 r_{12}^{10} + 4r_{12}^{10} \\ & + 8r_{13}^5 r_{12}^9 - 12r_{13}^3 r_{12}^9 - 8r_{13} r_{12}^9 + r_{13}^8 r_{12}^8 - 9r_{13}^6 r_{12}^8 - 19r_{13}^4 r_{12}^8 - 12r_{13}^2 r_{12}^8 \\ & - 12r_{13}^7 r_{12}^7 + 8r_{13}^5 r_{12}^7 + 32r_{13}^3 r_{12}^7 - 9r_{13}^8 r_{12}^6 + 62r_{13}^6 r_{12}^6 - 28r_{13}^4 r_{12}^6 \\ & + 8r_{13}^9 r_{12}^5 + 8r_{13}^7 r_{12}^5 - 48r_{13}^5 r_{12}^5 + 6r_{13}^{10} r_{12}^4 - 19r_{13}^8 r_{12}^4 - 16r_{13}^6 r_{12}^4 \\ & - 2r_{13}^{11} r_{12}^3 - 12r_{13}^9 r_{12}^3 + 32r_{13}^7 r_{12}^3 - 4r_{13}^{12} r_{12}^2 + 16r_{13}^{10} r_{12}^2 - 16r_{13}^8 r_{12}^2 \\ & + 4r_{13}^{11} r_{12} - 8r_{13}^9 r_{12} + r_{13}^{14} - r_{13}^{12} + 4r_{13}^{10}. \end{aligned}$$

A expressão para o polinômio g_{12} é maior que g_{11} mais que dez vezes, além disso, ela não dá soluções para as equações $f_1 = 0$ e $f_4 = 0$. Também temos

$$g_4 = -r_{12}^8 (r_{12} - r_{13})^{12} r_{13}^8 (r_{12} + r_{13})^{12} g_{41} g_{42},$$

o polinômio g_{41} é aproximadamente duzentas vezes maior que g_{11} , e g_{42} é aproximadamente seiscentas vezes maior que g_{11} , tais expressões não aparecem neste trabalho.

Das expressões de g_1 e g_4 vemos que para buscar as configurações centrais co-circulares, devemos procurar as soluções do sistema

$$g_{11}g_{12} = 0, \quad g_{41}g_{42} = 0,$$

ou de forma equivalente buscamos as soluções dos sistemas abaixo

$$g_{11} = 0, \quad g_{41} = 0; \quad (4.11)$$

$$g_{11} = 0, \quad g_{42} = 0; \quad (4.12)$$

$$g_{12} = 0, \quad g_{41} = 0; \quad (4.13)$$

$$g_{12} = 0, \quad g_{42} = 0. \quad (4.14)$$

Podemos ver que todos os polinômios g_{ij} dependem apenas das variáveis r_{12} e r_{13} . Agora, fixamos nossa atenção no sistema (4.11), definamos os seguintes polinômios em uma variável,

$$p(r_{12}) = \text{Resultante}[g_{11}, g_{41}, r_{13}],$$

$$q(r_{13}) = \text{Resultante}[g_{11}, g_{41}, r_{12}],$$

onde $\text{Resultante}[g_{11}, g_{41}, r_{13}]$ é o resultante dos polinômios g_{11} e g_{41} com respeito à variável r_{13} . Sabemos que este polinômio depende apenas da variável r_{12} . Além disso, das propriedades do resultante temos que, se (r_{12}^*, r_{13}^*) é uma solução do sistema (4.11), então r_{12}^* é uma raiz do polinômio $p(r_{12})$, e r_{13}^* é uma raiz de $q(r_{13})$. As expressões de $p(r_{12})$ e $q(r_{13})$ são as seguintes

$$p(r_{12}) = a(r_{12} - 2)^{96} r_{12}^{416} (r_{12} + 2)^{96} (r_{12}^2 - 2)^8 (r_{12}^4 - 5r_{12}^2 + 5) p_{140}(r_{12}) p_{304}(r_{12}),$$

$$q(r_{13}) = b(r_{13} - 2)^{96} r_{13}^{416} (r_{13} + 2)^{96} (r_{13}^2 - 2)^8 (r_{13}^4 - 5r_{13}^2 + 5) q_{140}(r_{13}) q_{304}(r_{13}),$$

onde a e b são inteiros positivos, $p_k(r_{12})$ é um polinômio com coeficientes inteiros de grau k na variável r_{12} , e $q_l(r_{13})$ é um polinômio com coeficientes inteiros na variável r_{13} e de grau l .

Note que, $p_{140}(r_{12}) \neq q_{140}(r_{12})$ e $p_{304}(r_{12}) \neq q_{304}(r_{12})$, porém são polinômios dependente de r_{12}^2 , de graus 70 e 152, respectivamente. O análogo é válido para r_{13} . A(s) c.c.c que buscamos satisfazem

$$0 < r_{12} < r_{13} < 2. \quad (4.15)$$

Desta forma, estamos interessados nas raízes r_{12}^* do polinômio $p(r_{12})$ e nas raízes r_{13}^* do polinômio $q(r_{13})$, que estão no intervalo $(0, 2)$. Assim, tomamos todos estes pares de raízes com $r_{12}^* < r_{13}^*$ e checamos quais deles são soluções de $f_1 = 0$ e de $f_4 = 0$. Existe apenas um tal par, seja ele

$$(r_{12}^*, r_{13}^*) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})}, \sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})} \right). \quad (4.16)$$

Ou seja, esta é a única solução de (4.11) que também é solução de $f_1 = 0$ e $f_4 = 0$.

Estudando todas as soluções de (4.12), (4.13) e (4.14) da mesma forma que foi feito acima, obtemos que nenhuma delas é solução de $f_1 = 0$ e $f_4 = 0$ e satisfaz (4.15) simultaneamente. Logo, a única solução é o par em (4.16).

Por fim, substituindo este par ordenado em $f_2 = 0$ e $f_3 = 0$ com r_{23} e r_{24} dados por (4.9) e (4.10), respectivamente, obtemos

$$-50(1 + \sqrt{5})(m_2 - m_3) = 0$$

e

$$50(-3 + \sqrt{5})(m_2 - m_3) = 0,$$

respectivamente. Desta forma, podemos concluir que $m_2 = m_3$. Observamos assim que, a única c.c.c sob as hipóteses do subcaso 1.2 é o pentágono regular com corpos de massas iguais nos vértices. Tal resultado sobre as massas é uma questão de completude, pois da literatura, sabemos que para um polígono regular ser c.c é necessário que tenha corpos com massas iguais.

4.4 Caso 2

Nesta seção analisamos o caso restante, a saber quando $m_1 s_1 + (m_2 - m_5) s_2 \neq 0$. Assim como antes, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} c_3^2 + s_3^2 = 1 \\ c_4^2 + s_4^2 = 1, \end{cases}$$

com respeito às variáveis s_3 e c_3 . Novamente, como no caso 1, obtemos duas soluções diferentes $T^j = \{c_3^j, s_3^j\}$ para $j = 1, 2$ e as expressões para s_3^j e c_3^j são

$$s_3^1 = -\frac{m_3}{D_4 D_6} (D_4^2 (D_5^2 + m_3^2 - m_4^2 + D_4^2) - D_5 S_2),$$

$$c_3^1 = -\frac{m_3}{D_6} (D_5 (D_5^2 + m_3^2 - m_4^2 + D_4^2) + S_2),$$

$$s_3^2 = -\frac{m_3}{D_4 D_6} (D_4^2 (D_5^2 + m_3^2 - m_4^2 + D_4^2) + D_5 S_2),$$

$$c_3^2 = -\frac{m_3}{D_6} (D_5 (D_5^2 + m_3^2 - m_4^2 + D_4^2) - S_2),$$

onde

$$D_4 = m_1 s_1 + (m_2 - m_5) s_2,$$

$$D_5 = m_1 c_1 + (m_2 + m_5) c_2,$$

$$D_6 = 2m_3^2 (D_4^2 + D_5^2)$$

e

$$S_2 = \sqrt{-D_4^2 (D_5^2 - (m_3 - m_4)^2 + D_4^2) (D_5^2 - (m_3 + m_4)^2 + D_4^2)}.$$

Como já sabemos da Proposição 4.1.1, a configuração Θ_x refletida com respeito ao eixo das abscissas da c.c.c Θ é também uma c.c.c. Desta forma, ou a configuração Θ é invariante com respeito ao eixo das abscissas, ou

$$c_3^1 = c_3^2|_{s_1 \rightarrow -s_1, s_2 \rightarrow -s_2} \quad e \quad s_3^1 = -s_3^2|_{s_1 \rightarrow -s_1, s_2 \rightarrow -s_2}. \quad (4.17)$$

Se a configuração for invariante com respeito ao eixo das abscissas então, $s_1 = 0$, $c_1 = 1$,

$s_4 = -s_3$ e $c_4 = -c_3$. Logo, $s_3 > 0$ e $s_4 < 0$. Além disso, como estamos sob as hipóteses do caso 2 e $m_2 \geq m_5$, temos que $m_2 > m_5$. Pela relação (4.5) temos que

$$s_2 = \frac{m_4 - m_3}{m_2 - m_5} s_3.$$

Por hipótese $s_2 > 0$ então $m_4 > m_3$. Assim, também observamos que $r_{14} = r_{13}$ e $r_{15} = r_{12}$. Agora, a equação $e_6 = 0$ de (4.2) reduz-se à

$$(m_3 - m_4)s_3 \left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} \right) = 0.$$

Então, $r_{12} = r_{13}$ tal fato indica colisão entre os corpos de massas m_2 e m_3 , contradição, então é válida a relação (4.17).

Disto, segue que $S_2 = 0$ e $D_5 S_2 = 0$, respectivamente. Como $S_2 = 0$ e $D_4 \neq 0$ obtemos a relação

$$(D_5^2 - (m_3 - m_4)^2 + D_4^2)(D_5^2 - (m_3 + m_4)^2 + D_4^2) = 0.$$

Resolvendo $D_5^2 - (m_3 + m_4)^2 + D_4^2 = 0$ com respeito a m_1 , temos duas soluções denominadas por $M_{1,j}$ para $j = 1, 2$ com a seguinte expressão

$$M_{1,j} = -((m_2 + m_5)c_1 c_2 + (m_2 - m_5)s_1 s_2 + (-1)^{j+1} \sqrt{N}),$$

onde

$$N = ((m_3 + m_4)^2 - (m_2 + m_5)^2 c_2^2) s_1^2 + 2(m_2^2 - m_5^2) c_1 c_2 s_1 s_2 + ((m_3 + m_4)^2 - (m_2 - m_5)^2 s_2^2) c_1^2.$$

E resolvendo $D_5^2 - (m_3 - m_4)^2 + D_4^2 = 0$, novamente, com respeito a m_1 , chegamos à duas soluções denominadas por $M_{1,j}$ para $j = 3, 4$ com a seguinte expressão

$$M_{1,j+2} = -((m_2 + m_5)c_1 c_2 + (m_2 - m_5)s_1 s_2 + (-1)^{j+1} \sqrt{N_1}),$$

para $j = 1, 2$ e

$$N_1 = ((m_3 - m_4)^2 - (m_2 + m_5)^2 c_2^2) s_1^2 + 2(m_2^2 - m_5^2) c_1 c_2 s_1 s_2 + ((m_3 - m_4)^2 - (m_2 - m_5)^2 s_2^2) c_1^2.$$

Podemos notar que $m_3 \neq m_4$, pois caso contrário $D_5^2 + D_4^2$ não pode ser zero já que, $D_4 \neq 0$. Tomando as quatro possíveis soluções para m_1 temos.

Se $m_1 = M_{1,1}$ segue que

$$s_3 = s_4 = \frac{1}{(m_3 + m_4)} ((m_2 + m_5)c_1 c_2 s_1 + (m_5 - m_2)c_1^2 s_2 + s_1 \sqrt{N}),$$

$$c_3 = c_4 = \frac{1}{(m_3 + m_4)}(-(m_2 + m_5)c_2s_1^2 + ((m_2 - m_5)s_1s_2 + \sqrt{N})c_1).$$

Contradição, pois isto implica em colisão entre os corpos de massas m_3 e m_4 , logo esta solução não é possível.

Se $m_1 = M_{1,2}$, segue que

$$s_3 = s_4 = \frac{1}{(m_3 + m_4)}((m_2 + m_5)c_1c_2s_1 + (m_5 - m_2)c_1^2s_2 - s_1\sqrt{N}),$$

$$c_3 = c_4 = -\frac{1}{(m_3 + m_4)}((m_2 + m_5)c_2s_1^2 + ((m_2 - m_5)s_1s_2 + \sqrt{N})c_1).$$

Pelo mesmo motivo acima, esta solução não é possível.

Se $m_1 = M_{1,3}$, temos

$$s_3 = -s_4 = \frac{1}{(m_3 - m_4)}((m_2 + m_5)c_1c_2s_1 + (m_5 - m_2)c_1^2s_2 + s_1\sqrt{N_1}),$$

$$c_3 = -c_4 = \frac{1}{(m_3 - m_4)}(-(m_2 + m_5)c_2s_1^2 + ((m_2 - m_5)s_1s_2 + \sqrt{N_1})c_1).$$

Se $(m_2 - m_5)s_2 + m_3s_3 = 0$ então $m_2 > m_5$, caso contrário $s_3 = 0$, pois $m_2 \geq m_5$, e $s_4 = 0$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$, contradição com o fato de $\theta_4 < \theta_5$, logo $m_2 > m_5$ como afirmado. Assim,

$$s_3 = -\frac{m_2 - m_5}{m_3}s_2,$$

implica que $s_3 < 0$, pois $s_2 > 0$. Logo, $s_4 > 0$, contradição com o fato que $\theta_3 < \theta_4$.

Desta forma, $(m_2 - m_5)s_2 + m_3s_3 \neq 0$, usando os mesmos argumentos que no subcaso 1.1, então m_1 deve ser uma das três soluções $m_{1,j}$ para $j = 2, 3, 4$. Porém, $m_1 = m_{1,3}$ implica colisão entre os corpos de massas m_1 e m_4 . Por outro lado, se $m_1 = m_{1,2}$ ou $m_1 = m_{1,4}$, segue que $s_1 = -s_4$ e $c_1 = -c_4$ e como, $s_3 = -s_4$ e $c_3 = -c_4$, derivamos uma contradição, pois assim existe colisão entre os corpos com massas m_1 e m_3 . Logo, a solução $m_1 = M_{1,3}$ é impossível.

Se $m_1 = M_{1,4}$ temos

$$s_3 = -s_4 = \frac{1}{(m_3 - m_4)}((m_2 + m_5)c_1c_2s_1 + (m_5 - m_2)c_1^2s_2 - s_1\sqrt{N_1}),$$

$$c_3 = -c_4 = \frac{1}{(m_3 - m_4)}(-(m_2 + m_5)c_2s_1^2 + ((m_2 - m_5)s_1s_2 - \sqrt{N_1})c_1).$$

Assim, os mesmos argumentos utilizados para a solução $m_1 = M_{1,3}$ podem ser aplicados a este caso, mostrando que a solução $m_1 = M_{1,4}$ também é impossível.

O teorema tem sua prova completa, como desejado, a única c.c.c com 5 corpos e centro de massa no centro do círculo é o pentágono regular com corpos de massas iguais nos seus vértices. $\square$

Capítulo 5

Construções Equivalentes

A idéia deste capítulo é mostrar que os resultados obtidos na classificação das c.c.c com 4 corpos, utilizando a relação de Dziobek (1.20), podem ser obtidos também com a utilização das equações de Andoyer (1.3). Como foi dito no fim do capítulo 2, tal resultado é esperado, pois estes dois formalismos descrevem as configurações centrais.

5.1 Construções Com as Equações de Andoyer

Nosso objetivo nesta seção é fazer as mesmas construções que aparecem nas seções 1.4 e 1.5 do capítulo 1, porém utilizando as equações de Andoyer (1.3). Observamos que para o nosso caso, $n = 4$, estas equações formam o seguinte sistema:

$$II : \begin{cases} f_{12} = m_3(R_{13} - R_{23})\Delta_{123} + m_4(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} = 0, \\ f_{13} = m_2(R_{12} - R_{23})\Delta_{132} + m_4(R_{14} - R_{34})\Delta_{134} = 0, \\ f_{14} = m_2(R_{12} - R_{24})\Delta_{142} + m_3(R_{13} - R_{34})\Delta_{143} = 0, \\ f_{23} = m_1(R_{12} - R_{13})\Delta_{231} + m_4(R_{24} - R_{34})\Delta_{234} = 0, \\ f_{24} = m_1(R_{12} - R_{14})\Delta_{241} + m_3(R_{23} - R_{34})\Delta_{243} = 0, \\ f_{34} = m_1(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} + m_2(R_{23} - R_{24})\Delta_{342} = 0. \end{cases}$$

Suponha válido o sistema II e suponha que a c.c formada é co-circular, então o próximo resultado prova que é válida a relação (1.26) da seção 1.5.

Proposição 5.1.1. *Se o sistema II é satisfeito e a configuração central é co-circular, então as distâncias mútuas satisfazem a seguinte relação*

$$r_{13}, r_{24} > r_{12} \geq r_{14}, r_{23} \geq r_{34}, \quad (5.1)$$

supondo r_{12} o maior lado do quadrilátero.

Demonstração. Como

$$f_{12} = 0 \Leftrightarrow \frac{m_3 \Delta_{123}}{m_4 \Delta_{124}} = \frac{R_{24} - R_{14}}{R_{13} - R_{23}} > 0,$$

então, se

$$R_{24} - R_{14} > 0 \quad e \quad R_{13} - R_{23} > 0 \Rightarrow$$

$$r_{24} < r_{14} \quad e \quad r_{13} < r_{23} \Rightarrow$$

$$r_{13}r_{24} < r_{14}r_{23} \Rightarrow r_{13}r_{24} < r_{12}r_{34} + r_{14}r_{23},$$

contradição, pois a c.c é co-circular, e já que estamos supondo massas positivas, devemos ter

$$r_{24} > r_{14} \quad e \quad r_{13} > r_{23}. \quad (5.2)$$

Da equação

$$f_{14} = 0 \Leftrightarrow \frac{m_2 \Delta_{142}}{m_3 \Delta_{143}} = \frac{R_{34} - R_{13}}{R_{12} - R_{24}} > 0,$$

então, se

$$R_{34} - R_{13} < 0 \quad e \quad R_{12} - R_{24} < 0 \Rightarrow$$

$$r_{13} < r_{34} \quad e \quad r_{24} < r_{12} \Rightarrow$$

$$r_{13}r_{24} < r_{12}r_{34} \Rightarrow r_{13}r_{24} < r_{12}r_{34} + r_{14}r_{23},$$

contradição, pois a c.c é co-circular e como supomos massas positivas, devemos ter

$$r_{13} > r_{34} \quad e \quad r_{24} > r_{12}. \quad (5.3)$$

De forma similar, obtemos a partir da equação $f_{23} = 0$ que

$$r_{24} > r_{34} \quad e \quad r_{13} > r_{12}. \quad (5.4)$$

E a partir da equação $f_{34} = 0$ obtemos que

$$r_{24} > r_{23} \quad e \quad r_{13} > r_{14}. \quad (5.5)$$

Assim, de (5.2), (5.3), (5.4) e (5.5) podemos garantir que

$$r_{13}, r_{24} > r_{12}, r_{14}, r_{23}, r_{34}. \quad (5.6)$$

Agora, supondo que r_{12} é maior lado do quadrilátero, vemos que r_{34} é o menor, ou seja, o maior

lado se opõe ao menor lado. De fato, da equação

$$f_{13} = 0 \Leftrightarrow \frac{m_2 \Delta_{132}}{m_4 \Delta_{134}} = \frac{R_{34} - R_{14}}{R_{12} - R_{23}} < 0,$$

então, se

$$R_{34} - R_{14} < 0 \quad e \quad R_{12} - R_{23} > 0 \Rightarrow$$

$$r_{12} < r_{23},$$

contradição, pois por hipótese, temos a desigualdade inversa. Logo,

$$r_{34} < r_{14}. \quad (5.7)$$

De forma análoga, tomamos a equação $f_{24} = 0$ e vemos que

$$r_{34} < r_{23}. \quad (5.8)$$

Assim, das desigualdades (5.6), (5.7) e (5.8) obtemos o resultado desejado em (5.1), com as igualdades válidas nos casos simétricos e as desigualdades estritas nos demais casos. $\square$

Desta forma, se o sistema II é satisfeito, supondo $r_{12} = 1$ o maior lado e a configuração é co-circular então, novamente como na seção 1.5, podemos nos restringir a procurar c.c.c no conjunto

$$\Omega = \{r \in \mathbb{R}^{+6}; r_{13} \geq r_{24} > r_{12} = 1 \geq r_{14} \geq r_{23} \geq r_{34}\}.$$

Da mesma forma que naquela seção, também conseguimos obter as mesmas expressões para as razões entre massas.

Proposição 5.1.2. *Se o sistema II é satisfeito, então as razões entre as massas tem as expressões de (1.29), (1.30) e (1.31) da seção 1.5.*

Demonstração. Observemos que, $f_{34} = 0$ é equivalente à

$$\frac{m_1 \Delta_{341}}{m_2 \Delta_{342}} = \frac{R_{24} - R_{23}}{R_{13} - R_{14}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{m_2 \Delta_{342}}{m_1 \Delta_{341}} = \frac{R_{13} - R_{14}}{R_{24} - R_{23}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{r_{23}^2 r_{24}^2 (r_{13}^3 - r_{14}^3)}{r_{13}^2 r_{14}^2 (r_{24}^3 - r_{23}^3)},$$

como desejado. Na última igualdade foi feito $\Delta_{ijk} = \pm \frac{r_{ij} r_{ik} r_{jk}}{4r_c}$, com r_c o raio da circunferência.

De $f_{24} = 0$, obtemos equivalência com

$$\frac{m_1 \Delta_{241}}{m_3 \Delta_{243}} = \frac{R_{34} - R_{23}}{R_{12} - R_{14}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{m_3 \Delta_{243}}{m_1 \Delta_{241}} = \frac{R_{12} - R_{14}}{R_{34} - R_{23}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{m_3}{m_1} = \frac{r_{23}^2 r_{34}^2 (r_{12}^3 - r_{14}^3)}{r_{12}^2 r_{14}^2 (r_{23}^3 - r_{34}^3)},$$

como esperado.

Agora, de $f_{23} = 0$ temos equivalência com

$$\frac{m_1 \Delta_{231}}{m_4 \Delta_{234}} = \frac{R_{34} - R_{24}}{R_{12} - R_{13}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{m_4 \Delta_{234}}{m_1 \Delta_{231}} = \frac{R_{12} - R_{13}}{R_{34} - R_{24}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{m_4}{m_1} = \frac{r_{24}^2 r_{34}^2 (r_{13}^3 - r_{12}^3)}{r_{12}^2 r_{13}^2 (r_{24}^3 - r_{34}^3)},$$

como desejado.

Assim, temos as razões das massas a partir do sistema II, similar ao feito na seção 1.5, além disso, podemos tomar, sem perda de generalidade, a menos de uma mudança de escala, $m_1 = 1$. Diversas outras expressões para tais razões podem ser obtidas a partir de combinações nas equações do sistema II. $\square$

Teorema 5.1.1. *O sistema II junto com a condição de a configuração central ser co-circular é equivalente ao sistema I.*

Demonstração. Primeiro, suponha que o sistema II é satisfeito e a c.c é co-circular, vamos utilizar sempre que possível $r_{12} = 1$ e $m_1 = 1$. Do fato de a configuração central ser co-circular, sabemos que são válidas as equações $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$, pois estas seguem somente do fato de os corpos estarem em um mesmo círculo.

Da equação $f_{34} = 0$ no sistema II, usando $m_1 = 1$, temos

$$(R_{13} - R_{14})r_{34}r_{14}r_{13} + m_2(R_{23} - R_{24})r_{23}r_{24}r_{34} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{r_{14}^3 - r_{13}^3}{r_{13}^3 r_{14}^3} r_{34}r_{14}r_{13} + m_2 \frac{r_{24}^3 - r_{23}^3}{r_{23}^3 r_{24}^3} r_{23}r_{24}r_{34} = 0 \Leftrightarrow$$

$$m_2(r_{24}^3 - r_{23}^3)r_{13}^2 r_{14}^2 + r_{23}^2 r_{24}^2 (r_{14}^3 - r_{13}^3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$m_2(r_{24}^3 - r_{23}^3)r_{13}^2 r_{14}^2 - r_{23}^2 r_{24}^2 (r_{13}^3 - r_{14}^3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$F_4 = 0$$

no sistema I.

Da equação $f_{24} = 0$ no sistema II e usando $r_{12} = 1$ e $m_1 = 1$ temos

$$(1 - R_{14})r_{14}r_{12}r_{24} + m_3(R_{23} - R_{34})r_{23}r_{24}r_{34} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \frac{r_{14}^3 - 1}{r_{14}^3} r_{14} - m_3 \frac{r_{34}^3 - r_{23}^3}{r_{23}^3 r_{34}^3} r_{23} r_{34} = 0 \Leftrightarrow \\
& m_3 (r_{34}^3 - r_{23}^3) r_{14}^2 + r_{23}^2 r_{34}^2 (1 - r_{14}^3) = 0 \Leftrightarrow \\
& m_3 (r_{23}^3 - r_{34}^3) r_{14}^2 - r_{23}^2 r_{34}^2 (1 - r_{14}^3) = 0 \Leftrightarrow \\
& F_5 = 0
\end{aligned}$$

no sistema I.

Agora, tomando a equação $f_{23} = 0$ no sistema II e fazendo $m_1 = 1$ e $r_{12} = 1$ temos

$$\begin{aligned}
& (1 - R_{13}) r_{13} r_{12} r_{23} + m_4 (R_{24} - R_{34}) r_{23} r_{24} r_{34} = 0 \Leftrightarrow \\
& \frac{r_{13}^3 - 1}{r_{13}^3} r_{13} + m_4 \frac{r_{34}^3 - r_{24}^3}{r_{24}^3 r_{34}^3} r_{24} r_{34} = 0 \Leftrightarrow \\
& m_4 (r_{34}^3 - r_{24}^3) r_{13}^2 + r_{24}^2 r_{34}^2 (r_{13}^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\
& m_4 (r_{24}^3 - r_{34}^3) r_{13}^2 - r_{24}^2 r_{34}^2 (r_{13}^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\
& F_6 = 0
\end{aligned}$$

no sistema I.

Além disso, de $f_{12} = 0$ e utilizando as expressões para m_3 e m_4 que aparecem em (1.30) e (1.31), com substituição direta e alguma simplificação obtemos equivalentemente a seguinte expressão

$$(r_{13}^3 - 1)(r_{23}^3 - r_{34}^3)(r_{24}^3 - r_{14}^3) - (1 - r_{14}^3)(r_{24}^3 - r_{34}^3)(r_{13}^3 - r_{23}^3) = 0$$

que é equivalente a $F_3 = 0$ do sistema I.

Logo, vemos que o sistema II mais a condição co-circular para a configuração central, implica que o sistema I é satisfeito.

Reciprocamente, suponha que o sistema I é satisfeito. Das demonstrações acima vemos que

$$f_{12} = 0 \Leftrightarrow F_3 = 0,$$

$$f_{34} = 0 \Leftrightarrow F_4 = 0,$$

$$f_{24} = 0 \Leftrightarrow F_5 = 0,$$

$$f_{23} = 0 \Leftrightarrow F_6 = 0.$$

Então, resta mostrar que $f_{13} = 0$ e $f_{14} = 0$.

Suponhamos que $f_{13} \neq 0$, então

$$\frac{m_2}{m_4} \neq \frac{(R_{34} - R_{14})\Delta_{134}}{(R_{12} - R_{23})\Delta_{132}} = -\frac{(R_{34} - R_{14})r_{14}r_{34}}{(R_{12} - R_{23})r_{12}r_{23}} =$$

$$-\frac{(r_{14}^3 - r_{34}^3)r_{12}^2r_{23}^2}{(r_{23}^3 - r_{12}^3)r_{14}^2r_{34}^2},$$

ou seja,

$$\frac{m_2}{m_4} \neq \frac{(r_{34}^3 - r_{14}^3)r_{12}^2r_{23}^2}{(r_{23}^3 - r_{12}^3)r_{14}^2r_{34}^2},$$

porém, de $F_4 = 0$ e $F_6 = 0$, temos

$$\frac{m_2}{m_4} = \frac{r_{23}^2(r_{13}^3 - r_{14}^3)(r_{24}^3 - r_{34}^3)}{r_{14}^2r_{34}^2(r_{24}^3 - r_{23}^3)(r_{13}^3 - 1)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{(r_{34}^3 - r_{14}^3)r_{12}^2r_{23}^2}{(r_{23}^3 - r_{12}^3)r_{14}^2r_{34}^2} &\neq \frac{r_{23}^2(r_{13}^3 - r_{14}^3)(r_{24}^3 - r_{34}^3)}{r_{14}^2r_{34}^2(r_{24}^3 - r_{23}^3)(r_{13}^3 - 1)} \Rightarrow \\ (r_{23}^3 - 1)(r_{13}^3 - r_{14}^3)(r_{24}^3 - r_{34}^3) &\neq (r_{34}^3 - r_{14}^3)(r_{24}^3 - r_{23}^3)(r_{13}^3 - 1) \Rightarrow \\ (r_{13}^3 - 1)(r_{34}^3 - r_{23}^3)(r_{24}^3 - r_{14}^3) &\neq (r_{24}^3 - r_{34}^3)(r_{14}^3 - 1)(r_{13}^3 - r_{23}^3), \end{aligned}$$

contradição, pois $F_3 = 0$.

Da mesma forma, supondo que $f_{14} \neq 0$, utilizando o fato que $F_4 = 0$ e $F_5 = 0$, obtemos o mesmo tipo de contradição do caso anterior. Logo, $f_{13} = 0$ e $f_{14} = 0$, completando a prova do teorema. $\square$

Observamos que os resultados principais do trabalho que aparecem no capítulo 2 seguem de análises nas equações do sistema I. Conforme acabamos de ver, o sistema I é equivalente ao sistema II, mais a condição de a c.c ser co-circular. Então podemos concluir que os resultados do capítulo 2 podem ser adquiridos do sistema II mais a condição co-circular, ou seja, tais resultados seguem de análises das equações de Andoyer mais o fato de a c.c ser co-circular.

Utilizando o sistema de equações II, mais o fato de a c.c ser co-circular, pode-se construir famílias de c.c.c com simetria. O próximo resultado afirma tal existência para a família de pipas co-circulares, similar ao resultado do Teorema 2.1.1.

Teorema 5.1.2. *Sejam quatro corpos com massas m_1, m_2, m_3 e m_4 localizados em $r_1 = (-x, 0)$, $r_2 = (x, 0)$, $r_3 = (0, \sqrt{3}/2)$, $r_4 = (0, y)$, $x > 0$ e $y < 0$, respectivamente. Existe uma curva $C = \{(x, y) : y = -2\sqrt{3}x^2/3, 1/2 < x < 3/2\}$ com a seguinte propriedade: para cada $(x_0, y_0) \in C$ existem massas $m_1 = m_2$, $m_3(x_0, y_0)$ e $m_4(x_0, y_0)$ localizadas em $(-x_0, 0)$, $(x_0, 0)$, $(0, \sqrt{3}/2)$, $(0, y_0)$, respectivamente, tal que estes corpos estão em uma c.c co-circular pipa.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [13].

5.2 Exemplos de C.C.C

Vamos mostrar a seguir dois fatos interessantes que garantem condições necessárias para a existência de dois exemplos de c.c.c quando giramos o triângulo equilátero e o quadrado. Mais

detalhadamente, podemos pensar na seguinte indagação. Dado uma configuração com n corpos nos vértices de um n -ágono regular, logo co-circular, aplicando uma rotação sobre esta configuração, quais as condições sobre as massas para que a nova configuração formando o $2n$ -ágono seja configuração central?

Vamos ver que, supondo certa simetria nas massas, a resposta para a questão acima, quando $n = 3$ e $n = 4$ é que todas as massas devem ser iguais, e a nova configuração é o polígono regular com $2n$ vértices. Para $n = 3$ as hipótese do teorema abaixo podem ser enfraquecidas. Não precisamos supor a igualdade entre os pares de massas. Conseguimos mostrar o mesmo resultado, sem tal hipótese, utilizando matrizes circulantes construídas a partir das equações de Andoyer.

Teorema 5.2.1. *Considere uma configuração hexagonal com corpos de massas m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 e m_6 , onde os três primeiros corpos formam um triângulo equilátero e os três últimos são o primeiro triângulo rotacionado de um ângulo α , ver figura 5.1. Além disso, considere $m_1 = m_4$, $m_2 = m_5$ e $m_3 = m_6$. Então, uma condição necessária para que os seis corpos no hexágono formem uma c.c é que todas as massas sejam iguais. Além disso, satisfeita a relação entre as massas, o ângulo de rotação será $\alpha = \pi/3$.*

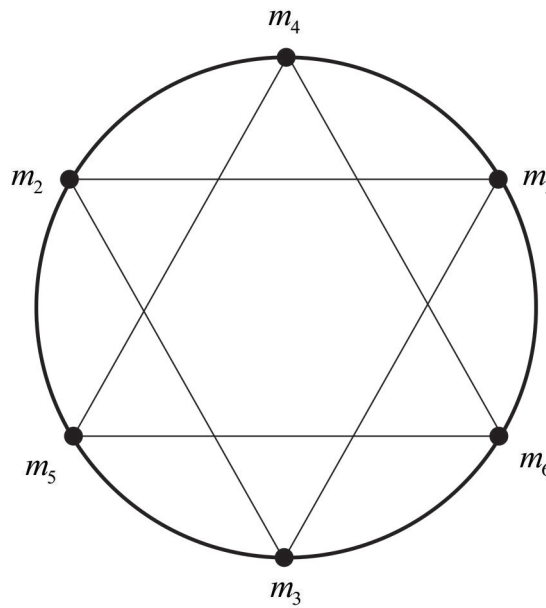


Figura 5.1: Configuração triângulo girado.

Demonstração. Pelo conjunto de equações de Andoyer para a configuração hexágono tomamos a seguinte equação

$$f_{14} = m_2(R_{12} - R_{24})\Delta_{142} + m_3(R_{13} - R_{34})\Delta_{143} + m_5(R_{15} - R_{45})\Delta_{145} + m_6(R_{16} - R_{46})\Delta_{146} = 0.$$

Por simetrias do problema, a igualdade acima implica em

$$(m_2 - m_6)(R_{12} - R_{24})\Delta_{142} + (m_3 - m_5)(R_{13} - R_{34})\Delta_{143} = 0 \Rightarrow$$

$$(m_5 - m_3)(R_{12} - R_{24})\Delta_{142} + (m_3 - m_5)(R_{13} - R_{34})\Delta_{143} = 0 \Rightarrow$$

$$(m_5 - m_3)[(R_{12} - R_{24})\Delta_{142} + (R_{34} - R_{13})\Delta_{143}] = 0.$$

Das relações entre os lados e as diagonais de um polígono inscrito e o sinal das áreas orientadas dos triângulos, vemos que

$$(R_{12} - R_{24})\Delta_{142} + (R_{34} - R_{13})\Delta_{143} < 0,$$

logo, $m_3 = m_5$, assim $m_6 = m_3 = m_5 = m_2$.

Da equação abaixo tiramos o restante das igualdades entre massas

$$f_{36} = m_1(R_{13} - R_{16})\Delta_{361} + m_2(R_{23} - R_{26})\Delta_{362} + m_4(R_{34} - R_{46})\Delta_{364} + m_5(R_{35} - R_{56})\Delta_{365} = 0.$$

Das simetrias do problema, a igualdade acima implica em

$$(m_1 - m_5)(R_{13} - R_{16})\Delta_{361} + (m_2 - m_4)(R_{23} - R_{26})\Delta_{362} = 0 \Rightarrow$$

$$(m_1 - m_5)(R_{13} - R_{16})\Delta_{361} + (m_5 - m_1)(R_{23} - R_{26})\Delta_{362} = 0 \Rightarrow$$

$$(m_1 - m_5)[(R_{13} - R_{16})\Delta_{361} + (R_{26} - R_{23})\Delta_{362}] = 0.$$

Da mesma forma que foi feito acima, fixando o sentido anti-horário como positivo para área dos triângulos, temos que

$$(R_{13} - R_{16})\Delta_{361} + (R_{26} - R_{23})\Delta_{362} < 0.$$

Assim $m_1 = m_5$, logo $m_4 = m_1 = m_5 = m_2 = m_3 = m_6$, como desejado. O fato de o ângulo de rotação ser $\pi/3$, segue do corolário do teorema principal em [22], pois estamos nas hipóteses daquele resultado. $\square$

Vamos fazer o análogo do resultado acima para $n = 4$.

Teorema 5.2.2. *Considere uma configuração octógono com corpos de massas $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7$ e m_8 , onde os quatro primeiros corpos formam um quadrado e os quatro últimos são o primeiro quadrado rotacionado de um ângulo β . Além disso, considere $m_1 = m_5, m_2 = m_6, m_3 = m_7$ e $m_4 = m_8$. Então, uma condição necessária para que os oito corpos no octógono formem uma c.c é que, todas eles tenham massas iguais. Além disso, satisfeita a relação entre as massas o ângulo de rotação será $\beta = \pi/4$.*

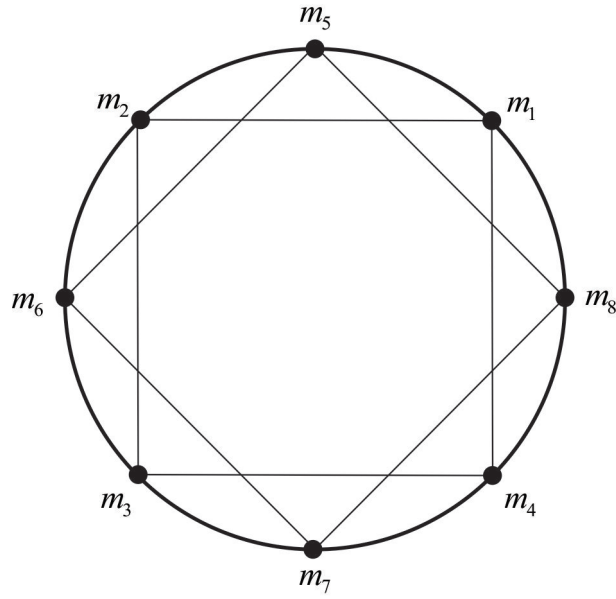


Figura 5.2: Configuração quadrado girado.

Demonstração. Supondo que o octógono formado pelo conjunto de corpos de massas acima é c.c, ver figura 5.2, fixando a orientação no sentido anti-horário como positivo, para as áreas orientadas dos triângulos formados pelas tríades de corpos e tomando as equações de Andoyer. Observando o seguinte par de equações de Andoyer, temos

$$f_{13} = m_2(R_{12} - R_{23})\Delta_{132} + m_4(R_{14} - R_{34})\Delta_{134} + m_5(R_{15} - R_{35})\Delta_{135} \\ + m_6(R_{16} - R_{36})\Delta_{136} + m_7(R_{17} - R_{37})\Delta_{137} + m_8(R_{18} - R_{38})\Delta_{138} = 0,$$

$$f_{24} = m_1(R_{12} - R_{14})\Delta_{241} + m_3(R_{23} - R_{34})\Delta_{243} + m_5(R_{25} - R_{45})\Delta_{245} \\ + m_6(R_{26} - R_{46})\Delta_{246} + m_7(R_{27} - R_{47})\Delta_{247} + m_8(R_{28} - R_{48})\Delta_{248} = 0,$$

onde

$$m_2(R_{12} - R_{23})\Delta_{132} + m_4(R_{14} - R_{34})\Delta_{134} = 0$$

e

$$m_1(R_{12} - R_{14})\Delta_{241} + m_3(R_{23} - R_{34})\Delta_{243} = 0,$$

pois $r_{12} = r_{14} = r_{23} = r_{34}$. Assim, obtemos a seguinte igualdade

$$m_5(R_{15} - R_{35})\Delta_{135} + m_6(R_{16} - R_{36})\Delta_{136} + m_7(R_{17} - R_{37})\Delta_{137} + m_8(R_{18} - R_{38})\Delta_{138} = \\ m_5(R_{25} - R_{45})\Delta_{245} + m_6(R_{26} - R_{46})\Delta_{246} + m_7(R_{27} - R_{47})\Delta_{247} + m_8(R_{28} - R_{48})\Delta_{248} \Rightarrow$$

$$m_5(R_{15} - R_{35})\Delta_{135} + m_6(R_{16} - R_{36})\Delta_{136} + m_7(R_{17} - R_{37})\Delta_{137} + m_8(R_{18} - R_{38})\Delta_{138} = \\ m_5(R_{18} - R_{38})\Delta_{138} + m_6(R_{15} - R_{35})\Delta_{135} + m_7(R_{16} - R_{36})\Delta_{136} + m_8(R_{17} - R_{37})\Delta_{137}.$$

Esta última implicação vem das simetrias no problema, pois $r_{15} = r_{26}$, $r_{35} = r_{46}$, $r_{16} = r_{27}$, $r_{36} = r_{47}$, $r_{17} = r_{28}$, $r_{37} = r_{48}$, $r_{18} = r_{25}$, $r_{38} = r_{45}$ e $r_{13} = r_{24}$. Desta forma, obtemos

$$(m_5 - m_6)(R_{15} - R_{35})\Delta_{135} + (m_6 - m_7)(R_{16} - R_{36})\Delta_{136} + \\ (m_7 - m_8)(R_{17} - R_{37})\Delta_{137} + (m_8 - m_5)(R_{18} - R_{38})\Delta_{138} = 0 \Rightarrow$$

$$[(m_5 - m_6) + (m_7 - m_8)](R_{15} - R_{35})\Delta_{135} + \\ [(m_6 - m_7) + (m_8 - m_5)](R_{16} - R_{36})\Delta_{136} = 0.$$

Onde a última implicação segue porque $r_{15} = r_{37}$, $r_{17} = r_{35}$, $r_{16} = r_{38}$ e $r_{36} = r_{18}$. Mas, então temos,

$$[(m_5 - m_6) + (m_7 - m_8)][(R_{15} - R_{35})\Delta_{135} - (R_{16} - R_{36})\Delta_{136}] = 0.$$

Sabemos que $\Delta_{135} < 0$, $\Delta_{136} < 0$ e $r_{35} > r_{15}$, $r_{16} > r_{36}$, pois o quadrado formado pelos corpos 5, 6, 7 e 8 está ordenado ciclicamente e é resultado de uma rotação aplicada ao quadrado formado pelos corpos 1, 2, 3 e 4. Assim, o segundo fator do produto acima é estritamente negativo. Logo,

$$(m_5 - m_6) + (m_7 - m_8) = 0. \quad (5.9)$$

Agora, tomamos as equações abaixo

$$f_{35} = m_1(R_{13} - R_{15})\Delta_{351} + m_2(R_{23} - R_{25})\Delta_{352} + m_4(R_{34} - R_{45})\Delta_{354} \\ + m_6(R_{36} - R_{56})\Delta_{356} + m_7(R_{37} - R_{57})\Delta_{357} + m_8(R_{38} - R_{58})\Delta_{358} = 0,$$

$$f_{46} = m_1(R_{14} - R_{16})\Delta_{461} + m_2(R_{24} - R_{26})\Delta_{462} + m_3(R_{34} - R_{36})\Delta_{463} \\ + m_5(R_{45} - R_{56})\Delta_{465} + m_7(R_{47} - R_{67})\Delta_{467} + m_8(R_{48} - R_{68})\Delta_{468} = 0.$$

Da primeira equação, obtemos

$$(m_1 - m_7)(R_{13} - R_{15})\Delta_{351} + (m_2 - m_6)(R_{23} - R_{25})\Delta_{352} + (m_4 - m_8)(R_{34} - R_{45})\Delta_{354} = 0.$$

Pois, $r_{13} = r_{57}$, $r_{15} = r_{37}$, $r_{23} = r_{56}$, $r_{36} = r_{25}$, $r_{34} = r_{58}$ e $r_{38} = r_{45}$. Além disso, o sinal das áreas orientadas dos respectivos triângulos é o mesmo. Porém, estamos supondo que $m_2 = m_6$ e $m_4 = m_8$. Logo, a relação acima reduz-se a

$$(m_1 - m_7)(R_{13} - R_{15})\Delta_{351} = 0,$$

como $r_{13} \neq r_{15}$, então $m_1 = m_7$.

Analogamente, utilizando a equação $f_{46} = 0$, obtemos que $m_2 = m_8$. Então, utilizando a hipótese e as igualdades das massas acima, sabemos que $m_3 = m_7 = m_1 = m_5$ e $m_6 = m_2 = m_8 = m_4$.

Pela relação (5.9) $m_5 = m_6$, logo todas as massas são iguais, como desejado.

O fato de o ângulo de rotação ser $\pi/4$, segue do corolário do teorema principal em [22], pois estamos nas hipóteses daquele resultado. $\square$

5.3 Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Esta seção dedicamos às considerações finais e possíveis trabalhos futuros.

Fazendo um apanhado geral do trabalho, observamos que foram definidos dois formalismos para trabalhar com as configurações centrais planares, um deles vem das equações de Andoyer e o outro das equações de Dziobek. O primeiro conjunto de equações citado é equivalente a das configurações centrais, porém para o segundo conjunto, esta afirmação é verdade somente quando a dimensão do espaço Euclidiano considerado for $n - 2$, onde n é o número de corpos no problema.

A partir destes formalismos foi caracterizado o conjunto de c.c.c com 4 corpos, como uma superfície regular, gráfico de uma função, mais especificamente, um dos lados do quadrilátero é função diferenciável dos dois menores lados deste quadrilátero. Vimos que pode-se adotar as equações de Dziobek ou de Andoyer para fazer tal caracterização. Também vimos dois resultados que respondem parcialmente e positivamente a uma conjectura posta por Alain Chenciner. Os resultados são: a unicidade de configuração central co-circular com centro de massa no centro do círculo para 4 e 5 corpos.

Quanto a trabalhos futuros, uma questão interessante é a caracterização das configurações centrais co-esféricas com 5 massas, uma vez que neste caso ainda seria válida a equivalência entre configurações centrais e as equações de Dziobek. Porém, não existe um teorema de Ptolomeu, e vimos que este foi utilizado largamente para reduzir as variáveis do problema.

Outra idéia a ser desenvolvida em trabalhos futuros é a igualdade entre todas as massas do $2n$ -ágono, quando tomamos o n -ágono regular e o giramos, como condição necessária para existência de configuração central. Vimos acima que isto é verdade para $n = 3$ e $n = 4$, assumindo certa simetria nas massas.

Bibliografia

- [1] ALBOUY, A. FU, Y. SUN, S. Symmetry of planar four-body convex central configurations. **Proc. R. Soc. London. Ser. A** **464**, p.1355-1365, feb. 2008.
- [2] APOSTOL, T. M. Ptolemy's inequality and the chordal metric. **Mathematics Magazine** **5**, p.233-235, nov. 1967.
- [3] BRUNS, E. H. Über des integrales der Vielkörperproblem. **Acta Mathematica**, vol. 11, 1887.
- [4] CHAVES, F. E. **Configurações centrais no problema de n corpos**. 2009. 68p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2009.
- [5] COX, D. A. LITTLE, J. O'SHEA, D. **Using algebraic geometry**. 2.ed. New York: Springer, 2004.
- [6] FERNANDES, A. C. **O problema de Kepler, uma solução coreográfica para o problema de três corpos e alguns resultados sobre configurações centrais**. 2009. 114p. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.
- [7] HAMPTON, M. Co-circular central configurations in the four-body problem. **EQUADIFF 2003 (conf. proc.)**, p.993-998, nov. 2004.
- [8] HIRSCH, M. W. SMALE, S. DEVANEY, R. L. **Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos**. 2.ed. San Diego: Elsevier Academic Press, 2004.
- [9] LEANDRO, E. S. Finiteness and bifurcations of some symmetrical classes of central configurations. **Arch. Ration. Mech. Anal** **167**, p.147-177, feb. 2003.
- [10] LIMA, E. L. **Análise real**. v. 1,2. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [11] LLIBRE, J. VALLS, C. The co-circular central configurations of the 5-body problem. **preprint**, 2013.
- [12] MELLO, L. F. CHAVES, F. E. FERNANDES, A. C. Configurações centrais planares do tipo pipa. **Rev. Bras. Ens. Fís.**, v. 31, n. 1, p.1302-1-1302-7, Abr. 2009.

- [13] MELLO, L. F. FERNANDES, A. C. Co-circular and co-spherical kite central configurations. **Qual. Theory Dyn. Syst.** **10**, p.29-41, feb. 2011.
- [14] ROBERTS, G. E. CORS, J. M. Four-body co-circular central configurations. **Nonlinearity** **25**, p.343-370, jan. 2012.
- [15] SILVA, D. L. **Soluções homográficas e configurações centrais**. 2007. 72p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pernambuco, Recife, 2007.
- [16] SILVA, T. D. O. **Aplicação da geometria algébrica à finitude das configurações centrais de Dziobek**. 2009. 37p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pernambuco, Recife, 2009.
- [17] SMALE, S. Mathematical problems for the next century. **Mathematical Intelligencer** **20**, p.7-15, 1998.
- [18] VOLCHAN, S. **Uma introdução à mecânica celeste**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [19] WATARI, K. **Mecânica clássica**. v. 1,2. 2.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004.
- [20] WINTNER, A. **Analytical foundations of celestial mechanics**. Princeton University Press, 1941.
- [21] XIE, Z. Isosceles trapezoid central configurations of the Newtonian four-body problem. **Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A** **142A**, p.665-672, May 2012.
- [22] YU, XIANG. ZHANG, S. Twisted angles for central configurations formed by two twisted regular polygons. **J. Differential Equations** **253**, p.2106-2122, June 2012.