

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Linhas de curvatura e pontos umbílicos em superfícies  
gráficos de funções polinomiais homogêneas**

**Evandro Felipe Rosa de Paula**

**Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 12 DE ABRIL DE 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# **Linhas de curvatura e pontos umbílicos em superfícies gráficos de funções polinomiais homogêneas**

**Evandro Felipe Rosa de Paula**

**Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática

**Área de Concentração: Equações diferenciais ordinárias**

ITAJUBÁ – MG

12 DE ABRIL DE 2017

*À DEUS e à minha esposa Taís, minhas inspirações para seguir em frente.*

# Agradecimentos

Agradeço à Deus que sempre me fortaleceu, ouviu as minhas orações e por sua infinita misericórdia me permitiu concluir esse curso. Minha esposa Taís por seu amor, amizade e por estar ao meu lado em todo tempo. Agradeço meus familiares, meu professor orientador Luis Fernando e meus amigos que fiz durante o curso que ficarão pra sempre em meu coração. A minha universidade que me deu todo apoio durante minha formação acadêmica e a CAPES pelo apoio financeiro.

*"O temor do SENHOR é o princípio do saber".*

*Provérbios 1:7.*

# Resumo

O presente trabalho tem como objetivo estudar as linhas de curvatura ao redor de pontos umbílicos isolados em superfícies regulares que são gráficos de funções polinomiais homogêneas de grau  $k$ , com  $k$  maior ou igual a três. Os índices desses pontos umbílicos isolados também serão objetos de estudo. Veremos que tais índices serão sempre menores ou iguais a um.

**Palavras-chave:** umbílico Darbouxiano, índice de ponto umbílico isolado, conjectura de Carathéodory, conjectura de Loewner.

# Abstract

The goal of this work is to study lines of curvature in neighborhoods of isolated umbilic points on smooth surfaces which are graphs of homogeneous polynomials of degree  $k$ , with  $k$  greater or equal three. The index of such umbilic points will be studied. We show that, in this context, these indices will be at most equal to one.

**Keywords:** Darbouxian umbilic, index of an umbilic, Carathéodory conjecture, Loewner conjecture.

# Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
<b>1 Geometria diferencial clássica</b>	<b>4</b>
<b>2 Linhas de curvatura de superfícies em <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>12</b>
2.1 Equação diferencial binária e o levantamento de Lie-Cartan . . . . .	12
2.2 O comportamento das linhas de curvatura de superfícies em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	20
2.2.1 1º caso ( $D_1$ ): $C^2 + 4B(2B - A) < 0$ . . . . .	27
2.2.2 2º caso ( $D_2$ ): $C^2 + 4B(2B - A) > 0$ , $A/B > 1$ , $A \neq 2B$ . . . . .	28
2.2.3 3º caso ( $D_3$ ): $C^2 + 4B(2B - A) > 0$ , $A/B < 1$ . . . . .	32
<b>3 Ponto umbílico isolado do gráfico de um polinômio homogêneo</b>	<b>33</b>
3.1 Preliminares . . . . .	34
3.2 O comportamento das distribuições principais próximo a uma raiz de $D$ . .	48
3.3 O teorema principal . . . . .	62
3.4 O fator $x^2 + y^2$ . . . . .	67



<b>4 Exemplos</b>	<b>76</b>
4.1 Polinômio homogêneo de grau 3 . . . . .	76
4.2 Polinômio homogêneo de grau 4 . . . . .	79
4.3 Polinômio homogêneo de grau 5 . . . . .	81
4.4 Polinômio homogêneo de grau 6 . . . . .	82
4.5 Polinômio homogêneo de grau 7 . . . . .	84
4.6 As direções principais e $\tilde{d}$ . . . . .	85
<b>Conclusões</b>	<b>86</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>87</b>

# Lista de Figuras

1	Pontos umbílicos Darbouxianos. . . . .	2
2.1	Solução do campo $\xi$ para $D_1$ . . . . .	28
2.2	Solução do campo $\xi$ para $D_2$ . . . . .	31
2.3	Solução do campo $\xi$ para $D_3$ . . . . .	32
3.1	Linhas de curvatura e direções principais do Exemplo 3.1. . . . .	41
4.1	Linhas de curvatura do gráfico de $f_{3,\frac{1}{2}}$ . . . . .	77
4.2	Linhas de curvatura do gráfico de $f_{3,-\frac{1}{2}}$ . . . . .	78
4.3	Linhas de curvatura do gráfico de $f_{4,1}$ . . . . .	79
4.4	Linhas de curvatura do gráfico de $f_{4,0}$ . . . . .	80
4.5	Linhas de curvatura do gráfico de $f_{4,-1}$ . . . . .	81
4.6	Linhas de curvatura do gráfico de $f_{5,-\frac{3}{2}}$ . . . . .	82
4.7	Linhas de curvatura do gráfico de $f_{6,-2}$ . . . . .	83
4.8	Linhas de curvatura do gráfico de $f_{7,-\frac{5}{2}}$ . . . . .	84
4.9	Separatrizes umbílicas determinadas pelas raízes de $\tilde{d}$ . . . . .	85

# Introdução

Carathéodory conjecturou que em toda superfície regular, compacta e estritamente convexa de  $\mathbb{R}^3$ , o número de pontos umbílicos é maior ou igual a dois. A conjectura de Loewner diz que o índice em um ponto umbílico isolado de uma superfície regular de  $\mathbb{R}^3$  é menor ou igual a um. Veja o artigo [5] para mais informações a respeito destas duas conjecturas e referências bibliográficas pertinentes.

No presente trabalho, iremos estudar as linhas de curvatura ao redor de pontos umbílicos isolados em superfícies que são gráficos de funções polinomiais homogêneas bem como os índices desses pontos umbílicos isolados. Para um polinômio homogêneo de grau  $k \geq 3$ , veremos que esses índices nunca serão maiores que 1. Neste sentido, a conjectura de Loewner é verdadeira para a classe de superfícies estudadas.

O índice de um ponto umbílico isolado é um invariante topológico que assume o valor  $n/2$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$  (ver referência [5]). Pelo Teorema de Índice de Bendixson, podemos calcular o índice de um ponto umbílico isolado  $p_0$  em uma superfície regular  $S$  por

$$\text{ind}_{p_0}(S) = 1 + \frac{\#e - \#h}{2}, \quad (1)$$

onde  $\#e$  é o número de setores elípticos e  $\#h$  é o número de setores hiperbólicos das linhas de curvatura numa vizinhança de  $p_0$ . De acordo com a Fórmula de Bendixson (1), os umbílicos Darbouxianos  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  têm índices  $1/2$ ,  $1/2$  e  $-1/2$ , respectivamente. Como os umbílicos Darbouxianos são genéricos [4], a conjectura de Loewner é genericamente verdadeira.

No Capítulo 1 apresentaremos alguns conceitos básicos da geometria diferencial, definindo superfícies regulares, aplicação de Gauss, primeira e segunda formas fundamentais,

equação diferencial das linhas de curvatura e enunciaremos alguns resultados necessários para compreender o texto.

No Capítulo 2 será estudado o comportamento das linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  próximas a um ponto umbílico isolado. Estes resultados são encontrados em vários livros e artigos, como por exemplo em [2] e [4]. O estudo muitas vezes é feito por meio de equações diferenciais implícitas da forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0,$$

onde  $a, b, c : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis que se anulam na origem  $(0, 0)$  e  $U \subset \mathbb{R}^2$  é um aberto contendo a origem. Veremos que, associado a equação acima, existe um campo vetorial  $\xi$  e as singularidades desse campo podem ser nós ou selas. Sob determinadas condições, veremos que as linhas de curvatura numa vizinhança de um ponto umbílico isolado se comportam como na Figura 1.

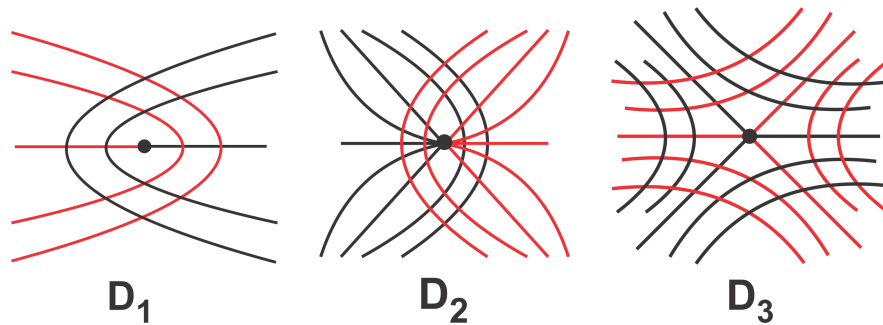


Figura 1: Pontos umbílicos Darbouxianos.

Os subíndices representam o número de separatrizes umbílicas e

- $D_1$ : é a projeção de uma única sela;
- $D_2$ : é a projeção de um único nó entre duas selas;
- $D_3$ : é a projeção de três selas.

O Capítulo 3 é o cerne deste trabalho e foi desenvolvido segundo a referência [1]. Nele serão estudadas as linhas de curvatura ao redor de um ponto umbílico isolado em superfícies que são gráficos de funções polinomiais homogêneas. O teorema principal a ser

estudado diz que dado  $f$  um polinômio homogêneo de duas variáveis reais  $x, y$ , de grau  $k \geq 3$  em que  $f$  é representado como

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \times \prod_{i=1}^n (\alpha_i x + \beta_i y)^{\epsilon_i}, \quad (2)$$

onde

1.  $\epsilon_i = 0, 1$ , ou  $2$ ;
2.  $(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são vetores não nulos tais que  $\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i \neq 0$  para  $i \neq j$ ;
3.  $\varphi$  é um polinômio homogêneo tal que  $\varphi(x, y) \neq 0$  para  $(x, y) \neq (0, 0)$  (é possível que  $\text{grau}(\varphi) = 0$ );

sendo  $G_f$  o gráfico de  $f$ , então  $\text{ind}_o(G_f) \in I(k)$ , onde

$$I(k) = \begin{cases} \{1, 0, \dots, 1 - k/2\}, & \text{se } k \text{ é par,} \\ \{1/2, -1/2, \dots, 1 - k/2\}, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Além disso, para quaisquer  $k \geq 3$  e  $l \in I(k)$ , podemos encontrar um polinômio homogêneo  $f_{k,l}$  de grau  $k$  que pode ser representado como em (2) e  $\text{ind}_o(G_{f_{k,l}}) = l$ .

No Capítulo 4, apresentaremos alguns exemplos dos polinômios  $f_{k,l}$  citados acima.

# Capítulo 1

## Geometria diferencial clássica

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados clássicos da geometria diferencial que serão necessários para o entendimento desta dissertação. As proposições e teoremas serão apenas enunciados, uma vez que as demonstrações dos mesmos podem ser encontradas na referência [3]. Para completude do texto, apresentaremos a demonstração da Proposição 1.6.

Ao longo de todo o trabalho, a expressão diferenciável significará infinitamente diferenciável e as superfícies estudadas serão sempre orientáveis e estarão orientadas.

**Definição 1.1.** *Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, e somente se, para cada ponto  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ ,  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que:*

1.  $\mathbf{x}$  é diferenciável;
2.  $\mathbf{x}$  é um homeomorfismo;
3. para todo  $q \in U$ , a diferencial  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

**Proposição 1.1.** *Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , então o gráfico de  $f$ , isto é, o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por*

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U\}$$

*é uma superfície regular.*

**Definição 1.2.** Dada uma aplicação diferenciável  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dizemos que  $p \in U$  é um ponto crítico de  $F$  se a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  não é sobrejetiva. A imagem  $F(p) \in \mathbb{R}^m$  de um ponto crítico é chamado valor crítico de  $F$ . Um ponto de  $\mathbb{R}^m$  que não é um valor crítico é chamado um valor regular de  $F$ .

**Proposição 1.2.** Se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposição 1.3.** Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular e  $p \in S$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $S$  tal que  $V$  é o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das três seguintes formas:  $z = f(x, y)$ ,  $y = g(x, z)$ ,  $x = h(y, z)$ .

**Definição 1.3.** A forma quadrática  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p$  é chamada a primeira forma fundamental da superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  em  $p \in S$ , onde  $T_p S$  é o plano tangente a  $S$  no ponto  $p$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  é o produto interno usual em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.4.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma seus valores na esfera unitária  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . A aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  é chamada a aplicação de Gauss de  $S$ .

**Proposição 1.4.** A diferencial  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.

**Definição 1.5.** A forma quadrática  $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$  é chamada segunda forma fundamental de  $S$  em  $p \in S$ .

**Definição 1.6.** Sejam  $C$  uma curva regular em  $S$  passando por  $p \in S$ ,  $k$  a curvatura de  $C$  em  $p$ , e  $\cos(\theta) = \langle n, N \rangle$ , onde  $n$  é o vetor normal a  $C$  e  $N$  é o vetor normal a  $S$  em  $p$ . O número  $k_n = k \cos(\theta)$  é chamado de curvatura normal de  $C \subset S$  em  $p$ .

Como a aplicação  $dN_p$  é linear e auto-adjunta, para cada  $p \in S$  existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_p S$  tal que  $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$  e  $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$ .

**Definição 1.7.** A curvatura normal máxima  $k_1$  e a curvatura normal mínima  $k_2$  são chamadas as curvaturas principais em  $p \in S$ . As correspondentes direções determinadas pelos autovetores  $e_1$  e  $e_2$  são chamadas direções principais em  $p \in S$ .

**Definição 1.8.** Se uma curva regular conexa  $C$  em  $S$  é tal que para todo  $p \in C$  a reta tangente a  $C$  é uma direção principal em  $p$ , então dizemos que  $C$  é uma linha de curvatura de  $S$ .

**Proposição 1.5 (Olinde Rodrigues).** Uma condição necessária e suficiente para que uma curva regular conexa  $C \subset S$  seja uma linha de curvatura de  $S$  é que  $N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$ , para qualquer parametrização  $\alpha$  de  $C$ , onde  $N(t) = N \circ \alpha(t)$  e  $\lambda(t)$  é uma função diferenciável em  $t$ . Nesse caso,  $-\lambda(t)$  é a curvatura (principal) ao longo de  $\alpha'(t)$ .

**Definição 1.9.** Sejam  $p \in S$  e  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $dN_p$  é a curvatura Gaussiana  $K$  de  $S$  em  $p$ . O negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamado curvatura média  $H$  de  $S$  em  $p$ , ou seja,

$$K = \det(dN_p) = k_1 k_2, \quad H = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(dN_p) = \frac{k_1 + k_2}{2}. \quad (1.1)$$

**Definição 1.10.** Um ponto  $p$  de uma superfície  $S$  é chamado:

1. *Elíptico* se  $\det(dN_p) > 0$ ;
2. *Hiperbólico* se  $\det(dN_p) < 0$ ;
3. *Parabólico* se  $\det(dN_p) = 0$ , com  $dN_p \neq 0$ ;
4. *Planar* se  $dN_p = 0$ .

**Definição 1.11.** Se em  $p \in S$ ,  $k_1 = k_2$ , então  $p$  é chamado um ponto umbílico de  $S$ . Em particular, pontos planares ( $k_1 = k_2 = 0$ ) são pontos umbílicos.

Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização em  $p \in S$  compatível com a orientação  $N$  de  $S$ , isto é, em  $\mathbf{x}(u, v)$ ,

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|},$$

para todo  $(u, v) \in U$ .

A primeira e a segunda formas fundamentais de  $S$  em  $p \in S$ , em coordenadas locais, são dadas pelas expressões



$$I_p = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2, \quad (1.2)$$

$$II_p = e(u, v)du^2 + 2f(u, v)dudv + g(u, v)dv^2, \quad (1.3)$$

sendo os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais  $E, F, G, e, f, g$ , dados por

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_u(u, v) \rangle, & F(u, v) &= \langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle, \\ G(u, v) &= \langle \mathbf{x}_v(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle, & e(u, v) &= \langle \mathbf{x}_{uu}(u, v), N(u, v) \rangle, \\ f(u, v) &= \langle \mathbf{x}_{uv}(u, v), N(u, v) \rangle, & g(u, v) &= \langle \mathbf{x}_{vv}(u, v), N(u, v) \rangle. \end{aligned}$$

As curvaturas Gaussiana  $K$  e média  $H$ , definidas em (1.1), são dadas por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fE + gE}{EG - F^2}.$$

Considere ainda  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização em  $p \in S$  compatível com a orientação  $N$  de  $S$ , e seja  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ . Para simplificar a notação, assumiremos que todas as funções seguintes indicam seus valores no ponto  $p$ . O vetor tangente a  $\alpha$  no ponto  $p$  é  $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$  e

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Como  $N_u$  e  $N_v$  pertencem a  $T_p S$ , podemos escrever

$$N_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v,$$

$$N_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v.$$

Portanto,

$$dN(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v,$$

ou seja,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que, na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ ,  $dN$  é determinada pela matriz  $(a_{ij})$ , com  $i, j = 1, 2$ . Note que esta matriz não é necessariamente simétrica, a não ser que  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  seja uma base ortonormal.

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle = \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2. \end{aligned}$$

Como  $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ , então

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Vamos obter os valores de  $a_{ij}$  em termos dos coeficientes  $e, f, g$ . Temos que

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ .

Expressando as equações (1.4) na forma de matriz, obtemos

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

e, portanto,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

onde

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Então, segue que os coeficientes  $a_{ij}$  da matriz de  $dN$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  são

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2},$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

Pela Proposição 1.5, temos que

$$dN(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

Segue que as funções  $u'$  e  $v'$  satisfazem o sistema de equações

$$\frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{gF - fG}{EG - F^2}v' = \lambda u',$$

$$\frac{eF - fE}{EG - F^2}u' + \frac{fF - gE}{EG - F^2}v' = \lambda v'.$$

Eliminando  $\lambda$  do sistema acima, obtemos

$$(Ef - eF)(u')^2 + (Eg - eG)u'v' + (Fg - Gf)(v')^2 = 0,$$

que pode ser escrito como

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

A equação

$$(Ef - eF)du^2 + (Eg - eG)dudv + (Fg - Gf)dv^2 = 0 \quad (1.5)$$

é chamada *equação diferencial das linhas de curvatura*.

**Proposição 1.6.** *Se todos os pontos de uma superfície conexa  $S$  são pontos umbílicos, então  $S$  está contida em uma esfera ou em um plano.*

*Demonstração.* Sejam  $p \in S$  e  $\mathbf{x}(u, v)$  uma parametrização de  $S$  em  $p$  tal que a vizinhança coordenada  $V$  é conexa.

Como cada  $q \in V$  é um ponto umbílico, então para qualquer vetor  $w = a_1\mathbf{x}_u + a_2\mathbf{x}_v \in T_qS$ ,

$$dN(w) = \lambda(q)w, \quad (1.6)$$

onde  $\lambda = \lambda(q)$  é uma função real diferenciável em  $V$ .

Vamos mostrar primeiro que  $\lambda$  é constante em  $V$ . Podemos escrever a equação (1.6) como

$$N_u a_1 + N_v a_2 = \lambda(\mathbf{x}_u a_1 + \mathbf{x}_v a_2),$$

e como  $w$  é arbitrário, então

$$N_u = \lambda \mathbf{x}_u,$$

$$N_v = \lambda \mathbf{x}_v.$$

Derivando a primeira equação na variável  $v$  e a segunda equação na variável  $u$ , obtemos

$$N_{uv} = \lambda_v \mathbf{x}_u + \lambda \mathbf{x}_{uv}, \quad (1.7)$$

$$N_{vu} = \lambda_u \mathbf{x}_v + \lambda \mathbf{x}_{vu}. \quad (1.8)$$

Subtraindo as equações (1.7) e (1.8), obtemos

$$\lambda_v \mathbf{x}_u - \lambda_u \mathbf{x}_v = 0.$$

Como  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$  são linearmente independentes, segue que  $\lambda_u = \lambda_v = 0$  para todo  $q \in V$ , e como  $V$  é conexa, então  $\lambda$  é constante em  $V$ .

Se  $\lambda \equiv 0$ , então  $N_u = N_v = 0$  e, portanto,  $N = N_0$  é constante em  $V$ . Deste modo,

$$\langle \mathbf{x}(u, v), N_0 \rangle_u = \langle \mathbf{x}(u, v), N_0 \rangle_v = 0,$$

logo,

$$\langle \mathbf{x}(u, v), N_0 \rangle = \text{constante},$$

e todos os pontos  $\mathbf{x}(u, v)$  de  $V$  pertencem a um plano.

Se  $\lambda \neq 0$ , então o ponto

$$\mathbf{x}(u, v) - \frac{1}{\lambda} N(u, v) = y(u, v)$$

é fixo, pois

$$\left( \mathbf{x}(u, v) - \frac{1}{\lambda} N(u, v) \right)_u = \left( \mathbf{x}(u, v) - \frac{1}{\lambda} N(u, v) \right)_v = 0.$$

Como

$$\|\mathbf{x}(u, v) - y\|^2 = \frac{1}{\lambda^2},$$

então todos os pontos de  $V$  estão contidos em uma esfera de centro  $y$  e raio  $1/|\lambda|$ . Isso prova a proposição localmente, isto é, para uma vizinhança de um ponto  $p \in S$ .

Como  $S$  é conexa, dado qualquer outro ponto  $r \in S$ , existe uma curva contínua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$  com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha(1) = r$ . Para cada ponto  $\alpha(t) \in S$  dessa curva, existe uma vizinhança  $V_t$  em  $S$  contida em uma esfera ou em um plano tal que  $\alpha^{-1}(V_t)$  é um intervalo aberto de  $[0, 1]$ . A união  $\bigcup \alpha^{-1}(V_t)$ , com  $t \in [0, 1]$  é uma cobertura de  $[0, 1]$  e como  $[0, 1]$  é um intervalo fechado, ele é coberto por finitos elementos da família  $\{\alpha^{-1}(V_t)\}$ . Portanto,  $\alpha([0, 1])$  é coberto por um número finito de vizinhanças  $V_t$ .

Se os pontos de uma dessas vizinhanças estão em um plano, todos os outros estarão no mesmo plano. Como  $r$  é arbitrário, todos os pontos de  $S$  pertencem a esse plano.

Se os pontos de uma dessas vizinhanças estão em uma esfera, então pelo mesmo argumento, todos os pontos de  $S$  pertencem a uma esfera. Isso completa a demonstração.  $\square$

# Capítulo 2

## Linhas de curvatura de superfícies em $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo estudaremos o comportamento das linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  próximas a um ponto umbílico isolado com base nas referências [2] e [4].

### 2.1 Equação diferencial binária e o levantamento de Lie-Cartan

Considere a seguinte equação diferencial implícita

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (2.1)$$

onde  $a, b, c : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis que se anulam na origem  $(0, 0)$  e  $U \subset \mathbb{R}^2$  é um aberto contendo a origem. Esta equação é chamada *equação diferencial binária*.

Dividindo os dois membros da equação (2.1) por  $dx^2$  e fazendo  $p = dy/dx$ , ou seja, escolhendo uma carta afim  $p = dy/dx$  no espaço projetivo  $\mathbb{R}P^1$ , obtemos

$$a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y) = 0.$$

Defina

$$F(x, y, p) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y) \quad (2.2)$$

e considere localmente em  $\mathbb{R}^3$  a superfície

$$M = \{(x, y, p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 : F(x, y, p) = 0\}.$$

Considere ainda as expansões de Taylor das funções  $a, b$  e  $c$  até os termos de segunda ordem

$$a(x, y) = a_1x + a_2y + O(2), \quad b(x, y) = b_1x + b_2y + O(2) \quad \text{e} \quad c(x, y) = c_1x + c_2y + O(2),$$

onde  $O(k)$  são os termos de ordem maiores ou iguais a  $k \in \mathbb{N}$  nas variáveis  $x$  e  $y$ .

O discriminante da equação (2.1) é o conjunto

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0\}.$$

**Proposição 2.1.** *As seguintes afirmações são verificadas.*

1. *A superfície  $M$  é regular em uma vizinhança de  $0 \times \mathbb{R}P^1$  se, e somente se, a função discriminante  $\varphi(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$  tem uma singularidade de Morse (ou não degenerada) em  $(0, 0)$ .*
2. *A projeção natural  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $(x, y, p) \mapsto (x, y)$  é um difeomorfismo local fora de  $\pi^{-1}(\Delta)$ .*

*Demonstração.* 1. A função

$$F_p(x, y, p) = \partial F(x, y, p) / \partial p = 2a(x, y)p + 2b(x, y)$$

é identicamente nula em  $0 \times \mathbb{R}P^1$ . De fato,

$$F_p(0, 0, p) = 2a(0, 0)p + 2b(0, 0) = 0, \quad \forall p.$$

Temos

$$\begin{aligned}
 F_x(x, y, p) &= \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y)] = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} [(a_1x + a_2y + O(2))p^2 + 2(b_1x + b_2y + O(2))p + c_1x + c_2y + O(2)] = \\
 &= a_1p^2 + 2b_1p + c_1 + O(1), \\
 F_y(x, y, p) &= \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y)] = \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} [(a_1x + a_2y + O(2))p^2 + 2(b_1x + b_2y + O(2))p + c_1x + c_2y + O(2)] = \\
 &= a_2p^2 + 2b_2p + c_2 + O(1).
 \end{aligned}$$

Então, a superfície  $M$  deixa de ser regular em uma vizinhança de  $0 \times \mathbb{R}P^1$  se, e somente se,

$$F_x(0, 0, p) = a_1p^2 + 2b_1p + c_1 \quad \text{e} \quad F_y(0, 0, p) = a_2p^2 + 2b_2p + c_2$$

se anulam simultaneamente para algum  $p$ . Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & 2b_1 & c_1 \\ a_2 & 2b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_2 & 2b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

O determinante da matriz  $A$  é a resultante dos polinômios  $F_x(0, 0, p)$  e  $F_y(0, 0, p)$ .

Assim,

$$\text{Resultante}(F_x(0, 0, p), F_y(0, 0, p)) = 0$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= (c_2a_1 - c_1a_2)^2 - 4(b_2a_1 - b_1a_2)(c_2b_1 - c_1b_2) = \\
 &= a_1^2c_2^2 - 2a_1a_2c_1c_2 - 4a_1b_1b_2c_2 + 4a_1b_2^2c_1 + a_2^2c_1^2 + 4a_2b_1^2c_2 - 4a_2b_1b_2c_1 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Portanto,  $p$  é solução para ambos polinômios somente quando a equação (2.3) é verdadeira.



Reciprocamente, a expansão de Taylor da função discriminante é

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = (b_1x + b_2y)^2 - (a_1x + a_2y)(c_1x + c_2y) + O(3) = \\ &= b_1^2x^2 + 2b_1b_2xy + b_2^2y^2 - a_1c_1x^2 - a_1c_2xy - a_2c_1xy - a_2c_2y^2 + O(3) = \\ &= (b_1^2 - a_1c_1)x^2 + (2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1)xy + (b_2^2 - a_2c_2)y^2 + O(3).\end{aligned}$$

Vamos calcular as derivadas parciais de  $\varphi$ . Temos que:

$$\varphi_x(x, y) = 2(b_1^2 - a_1c_1)x + (2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1)y + O(2),$$

$$\varphi_y(x, y) = (2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1)x + 2(b_2^2 - a_2c_2)y + O(2).$$

Logo,

$$\varphi_x(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi_y(0, 0) = 0,$$

ou seja,  $(0, 0)$  é um ponto crítico de  $\varphi$ .

Agora, vamos mostrar que  $(0, 0)$  é uma singularidade degenerada de  $\varphi$ .

A função discriminante  $\varphi$  possui singularidade degenerada em  $(0, 0)$  se, e somente se, a sua matriz Hessiana possui determinante nulo. Vamos encontrar a matriz Hessiana de  $\varphi$  e calcular seu determinante. Para isso precisamos encontrar as derivadas parciais de segunda ordem de  $\varphi$ . Então,

$$\varphi_{xx}(x, y) = 2(b_1^2 - a_1c_1) + O(1),$$

$$\varphi_{yy}(x, y) = 2(b_2^2 - a_2c_2) + O(1),$$

$$\varphi_{xy}(x, y) = 2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1 + O(1).$$

Logo, a matriz Hessiana de  $\varphi$  em  $(0, 0)$  é

$$\text{Hess}(\varphi)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2(b_1^2 - a_1c_1) & 2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1 \\ 2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1 & 2(b_2^2 - a_2c_2) \end{pmatrix},$$

e seu determinante é

$$\begin{aligned}\det(\text{Hess}(\varphi)(0, 0)) &= -a_1^2c_2^2 + 2a_1a_2c_1c_2 + 4a_1b_1b_2c_2 - 4a_1b_2^2c_1 - a_2^2c_1^2 - 4a_2b_1^2c_2 + \\ &+ 4a_2b_1b_2c_1.\end{aligned}$$

Note que  $\det(\text{Hess}(\varphi)(0,0)) = -\det(A)$ . Portanto,  $\det(\text{Hess}(\varphi)(0,0)) = 0$  se, e somente se,  $\det(A) = 0$ . Ou seja, a função discriminante possui singularidade degenerada em  $(0,0)$  se, e somente se, vale a equação (2.3). Logo, a superfície  $M$  deixa de ser regular quando, e apenas quando, a função discriminante possui singularidade degenerada em  $(0,0)$ .

2. A projeção  $\pi$  falha em ser um difeomorfismo local nos pontos  $(x, y, p)$  onde

$$F_p(x, y, p) = 0,$$

isto é, quando

$$F(x, y, p) = F_p(x, y, p) = 0.$$

Isso implica em

$$\varphi(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0.$$

De fato, suponha que

$$F(x, y, p) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y) = 0$$

e

$$F_p(x, y, p) = 2a(x, y)p + 2b(x, y) = 0.$$

Então,

$$a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y) = 0 \Rightarrow c(x, y) = -a(x, y)p^2 - 2b(x, y)p \quad \text{e}$$

$$2a(x, y)p + 2b(x, y) = 0 \Rightarrow b(x, y) = -a(x, y)p.$$

Substituindo em  $\varphi$  temos

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= [-a(x, y)p]^2 - a(x, y)[-a(x, y)p^2 - 2b(x, y)p] = 2a^2(x, y)p^2 + 2a(x, y)b(x, y)p = \\ &= 2a(x, y)p \underbrace{[a(x, y)p + b(x, y)]}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a projeção  $\pi$  deixa de ser um difeomorfismo quando  $\varphi(x, y) = 0$ . Esse conjunto é precisamente  $\pi^{-1}(\Delta)$ .

□

**Definição 2.1.** Um campo vetorial  $\xi$  em  $M$  é dito ser um levantamento da equação (2.1) se, e somente se,  $d\pi(\xi)(x, y, p)$  é um vetor de inclinação  $p$ . Além disso, se  $\xi$  é tangente a  $M$ , então dizemos que  $\xi$  é um **levantamento adequado** sobre  $M$ .

**Proposição 2.2.** As seguintes afirmações são satisfeitas.

1. O campo vetorial

$$\xi(x, y, p) = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

é o levantamento adequado sobre  $M$  da equação (2.1) em  $\mathbb{R}^2$ . O campo  $\xi$  é chamado de **levantamento de Lie-Cartan**.

2. O campo vetorial  $\xi$  tem genericamente 1 ou 3 singularidades em  $0 \times \mathbb{R}P^1$ . Essas singularidades são do tipo nó ou sela.

*Demonstração.* 1. Seja

$$\xi = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial p}.$$

De acordo com a Definição 2.1 devemos mostrar que  $\xi$  é tangente a superfície  $M$  e que  $d\pi(\xi)(x, y, p)$  é um vetor de inclinação  $p$ . Como  $\pi(x, y, p) = (x, y)$ , então

$$d\pi(\xi)(x, y, p) = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y}$$

e, portanto, tem inclinação  $p = B/A$ . A condição de tangência é

$$AF_x + BF_y + CF_p = AF_x + pAF_y + CF_p = 0.$$

Tomando  $A = 1$  obtemos  $C = -(F_x + pF_y)/F_p$  e, multiplicando o campo vetorial  $\xi$  por  $F_p$ , obtemos

$$\begin{aligned} \xi &= A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} - \frac{(F_x + pF_y)}{F_p} \frac{\partial}{\partial p} = \\ &= F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

2. As singularidades do campo  $\xi$  em  $M$  ocorrem quando

$$F(x, y, p) = F_p(x, y, p) = (F_x + pF_y)(x, y, p) = 0.$$

Para  $F(x, y, p) = F_p(x, y, p) = 0$  temos que  $\varphi(x, y) = 0$ , o que determina o conjunto  $\pi^{-1}(\Delta)$ . Vamos considerar as singularidades de  $\xi$  em  $0 \times \mathbb{R}P^1$ . Como  $F(0, 0, p) = F_p(0, 0, p) = 0$ , essas singularidades ocorrem quando  $(F_x + pF_y)(0, 0, p) = 0$ . Então,

$$\begin{aligned} (F_x + pF_y)(0, 0, p) &= F_x(0, 0, p) + pF_y(0, 0, p) = \\ &= a_1p^2 + 2b_1p + c_1 + p(a_2p^2 + 2b_2p + c_2) = \\ &= a_2p^3 + (a_1 + 2b_2)p^2 + (c_2 + 2b_1)p + c_1. \end{aligned}$$

Sejam

$$\Phi(p) = a_2p^3 + (a_1 + 2b_2)p^2 + (c_2 + 2b_1)p + c_1$$

e  $p_0$  uma raiz de  $\Phi$ . Vamos agora, procurar a natureza das singularidades do campo  $\xi$ . Escrevendo-o em forma de sistema, obtemos

$$\xi(x, y, p) = \begin{cases} x' = F_p = 2ap + 2b, \\ y' = pF_p = 2ap^2 + 2bp, \\ p' = -(F_x + pF_y) = -\Phi(p). \end{cases}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} F_p(x, y, p) &= 2p(a_1x + a_2y) + 2(b_1x + b_2y), \\ pF_p(x, y, p) &= 2p^2(a_1x + a_2y) + 2p(b_1x + b_2y), \\ \Phi(p) &= a_2p^3 + (a_1 + 2b_2)p^2 + (c_2 + 2b_1)p + c_1, \\ F_{px}(x, y, p) &= 2(pa_1 + b_1), \\ F_{py}(x, y, p) &= 2(pa_2 + b_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{pp}(x, y, p) &= 2(a_1x + a_2y), \\
pF_{px}(x, y, p) &= 2p(pa_1 + b_1), \\
pF_{py}(x, y, p) &= 2p(pa_2 + b_2), \\
\frac{\partial[pF_p]}{\partial p}(x, y, p) &= F_p(x, y, p) + pF_{pp}(x, y, p) = 4p(a_1x + a_2y) + 2(b_1x + b_2y), \\
\Phi_x(p)(x, y, p) &= \Phi_y(p)(x, y, p) = 0, \\
\Phi_p(p)(x, y, p) &= \Phi'(p) = 3a_2p^2 + 2p(a_1 + 2b_2) + c_2 + 2b_1.
\end{aligned}$$

Linearizando o campo  $\xi$  no ponto  $(0, 0, p_0)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
d\xi(0, 0, p_0) &= \begin{pmatrix} F_{px}(0, 0, p_0) & F_{py}(0, 0, p_0) & F_{pp}(0, 0, p_0) \\ pF_{px}(0, 0, p_0) & pF_{py}(0, 0, p_0) & F_p(0, 0, p_0) + pF_{pp}(0, 0, p_0) \\ -\Phi_x(p)(0, 0, p_0) & -\Phi_y(p)(0, 0, p_0) & -\Phi'(p)(0, 0, p_0) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2(p_0a_1 + b_1) & 2(p_0a_2 + b_2) & 0 \\ 2p_0(p_0a_1 + b_1) & 2p_0(p_0a_2 + b_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi'(p_0) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vamos calcular os autovalores da matriz  $d\xi(0, 0, p_0)$ . O polinômio característico dessa matriz é dado por

$$\begin{aligned}
q(\lambda) &= \det(d\xi(0, 0, p_0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2(p_0a_1 + b_1) - \lambda & 2(p_0a_2 + b_2) & 0 \\ 2p_0(p_0a_1 + b_1) & 2p_0(p_0a_2 + b_2) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi'(p_0) - \lambda \end{vmatrix} = \\
&= [2(p_0a_1 + b_1) - \lambda][2p_0(p_0a_2 + b_2) - \lambda][-(\Phi'(p_0) + \lambda)] + \\
&+ [\Phi'(p_0) + \lambda][2(p_0a_2 + b_2)][2p_0(p_0a_1 + b_1)] \\
&= (\Phi'(p_0) + \lambda)[(2p_0a_2 + 2b_2)(2p_0^2a_1 + 2p_0b_1) - (2p_0a_1 + 2b_1 - \lambda)(2p_0^2a_2 + 2p_0b_2 - \lambda)] \\
&= (\Phi'(p_0) + \lambda)[4p_0^3a_1a_2 + 4p_0^2a_2b_1 + 4p_0^2a_1b_2 + 4p_0b_1b_2 - 4p_0^3a_1a_2 - 4p_0^2a_1b_2 + \\
&+ 2p_0a_1\lambda - 4p_0^2a_2b_1 - 4p_0b_1b_2 + 2b_1\lambda + 2p_0^2a_2\lambda + 2p_0b_2\lambda - \lambda^2] = \\
&= \lambda(\Phi'(p_0) + \lambda)[2p_0a_1 + 2b_1 + 2p_0^2a_2 + 2p_0b_2 - \lambda] = \\
&= \lambda(\Phi'(p_0) + \lambda)[2(a_2p_0^2 + (a_1 + b_2)p_0 + b_1) - \lambda].
\end{aligned}$$

Portanto, os autovalores de  $d\xi(0, 0, p_0)$  são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\Phi'(p_0) \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 2(a_2 p_0^2 + (a_1 + b_2)p_0 + b_1).$$

Como genericamente  $p_0$  não é uma raiz repetida da cúbica  $\Phi$ , então  $\Phi'(p_0) \neq 0$  e, portanto,  $\lambda_2 \neq 0$ . Genericamente  $2(a_2 p_0^2 + (a_1 + b_2)p_0 + b_1)$  e  $\Phi$  não possuem raízes em comum, logo,  $\lambda_3 \neq 0$ . Assim, se  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$  então a singularidade  $p_0$  do campo é um nó e se  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$ , então  $p_0$  é uma sela. Portanto, as singularidades de  $\xi$  em  $0 \times \mathbb{R}P^1$  são nós ou selas.

□

## 2.2 O comportamento das linhas de curvatura de superfícies em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção iremos estudar o comportamento das linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Para isto, utilizaremos como base a seção anterior.

Comparando a equação (2.1) com a equação diferencial de linhas de curvatura (1.5) vemos que

$$a(x, y) = F(x, y)g(x, y) - f(x, y)G(x, y),$$

$$2b(x, y) = E(x, y)g(x, y) - e(x, y)G(x, y),$$

$$c(x, y) = E(x, y)f(x, y) - e(x, y)F(x, y).$$

Tomamos a carta de Monge

$$\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto \mathbf{x}(x, y) = (x, y, \alpha(x, y)),$$

onde

$$\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \alpha(x, y).$$

Fazendo o desenvolvimento de Taylor de  $\alpha$  em torno da origem, o qual é um ponto umbílico, tem-se que

$$\begin{aligned}\alpha(x, y) &= \alpha(0, 0) + \alpha_x(0, 0)x + \alpha_y(0, 0)y + \frac{1}{2}\alpha_{xx}(0, 0)x^2 + \alpha_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}\alpha_{yy}(0, 0)y^2 + \\ &+ \frac{1}{6}\alpha_{xxx}(0, 0)x^3 + \frac{1}{2}\alpha_{xxy}(0, 0)x^2y + \frac{1}{2}\alpha_{xyy}(0, 0)xy^2 + \frac{1}{6}\alpha_{yyy}(0, 0)y^3 + O(4) = \\ &= \frac{K}{2}(x^2 + y^2) + \frac{A}{6}x^3 + \frac{B}{2}xy^2 + \frac{C}{6}y^3 + O(4),\end{aligned}$$

onde

$$A = \alpha_{xxx}(0, 0), \quad B = \alpha_{xxy}(0, 0), \quad C = \alpha_{xyy}(0, 0), \quad K = \alpha_{xx}(0, 0) = \alpha_{yy}(0, 0).$$

Note que, sem perda de generalidade, o termo  $x^2y$  pode ser tomado nulo na expressão acima por meio de uma rotação no sistema de coordenadas  $(x, y)$ . Logo,

$$\mathbf{x}(x, y) = \left( x, y, \frac{K}{2}(x^2 + y^2) + \frac{A}{6}x^3 + \frac{B}{2}xy^2 + \frac{C}{6}y^3 + O(4) \right).$$

Vamos calcular os coeficientes  $a, b$  e  $c$  da equação (2.1). Temos

$$\mathbf{x}_x(x, y) = \left( 1, 0, Kx + \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{2}y^2 + O(3) \right),$$

$$\mathbf{x}_y(x, y) = \left( 0, 1, Ky + Bxy + \frac{C}{2}y^2 + O(3) \right),$$

$$\mathbf{x}_{xx}(x, y) = (0, 0, K + Ax + O(2)),$$

$$\mathbf{x}_{yy}(x, y) = (0, 0, K + Bx + Cy + O(2)),$$

$$\mathbf{x}_{xy}(x, y) = (0, 0, By + O(2)).$$

Calculando o vetor normal, obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{N}(x, y) &= \mathbf{x}_x(x, y) \times \mathbf{x}_y(x, y) = \\ &= \left( - \left( Kx + \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{2}y^2 + O(3) \right), - \left( Ky + Bxy + \frac{C}{2}y^2 + O(3) \right), 1 \right).\end{aligned}$$

**Observação 2.1.** Note que, sem perda de generalidade, podemos tomar o vetor

$$\tilde{N}(x, y) = \mathbf{x}_x(x, y) \times \mathbf{x}_y(x, y)$$

ao invés do vetor

$$N(x, y) = \frac{\mathbf{x}_x(x, y) \times \mathbf{x}_y(x, y)}{\|\mathbf{x}_x(x, y) \times \mathbf{x}_y(x, y)\|},$$

pois o fator

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}_x(x, y) \times \mathbf{x}_y(x, y)\|}$$

pode ser colocado em evidência ao substituirmos os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais na equação (2.1).

Os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são

$$E(x, y) = \langle \mathbf{x}_x(x, y), \mathbf{x}_x(x, y) \rangle = 1 + O(2),$$

$$F(x, y) = \langle \mathbf{x}_x(x, y), \mathbf{x}_y(x, y) \rangle = O(2),$$

$$G(x, y) = \langle \mathbf{x}_y(x, y), \mathbf{x}_y(x, y) \rangle = 1 + O(2),$$

$$\tilde{e}(x, y) = \langle \mathbf{x}_{xx}(x, y), \tilde{N}(x, y) \rangle = K + Ax + O(2),$$

$$\tilde{f}(x, y) = \langle \mathbf{x}_{xy}(x, y), \tilde{N}(x, y) \rangle = By + O(2),$$

$$\tilde{g}(x, y) = \langle \mathbf{x}_{yy}(x, y), \tilde{N}(x, y) \rangle = K + Bx + Cy + O(2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} a(x, y) &= F(x, y)\tilde{g}(x, y) - \tilde{f}(x, y)G(x, y) = \\ &= (K + Bx + Cy + O(2))O(2) - (By + O(2))(1 + O(2)) = -By + O(2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2b(x, y) &= E(x, y)\tilde{g}(x, y) - \tilde{e}(x, y)G(x, y) = \\ &= (K + Bx + Cy + O(2)) - (K + Ax + O(2)) = (B - A)x + Cy + O(2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(x, y) &= E(x, y)\tilde{f}(x, y) - \tilde{e}(x, y)F(x, y) = \\ &= (By + O(2))(1 + O(2)) - (K + Ax + O(2))O(2) = By + O(2). \end{aligned}$$

Portanto, a equação diferencial binária (2.1) tem a seguinte forma

$$[By + O(2)]dx^2 + [(B - A)x + Cy + O(2)]dxdy + [-By + O(2)]dy^2 = 0. \quad (2.4)$$



Escolhendo uma carta afim no espaço projetivo  $\mathbb{R}P^1$  dada por  $p = dy/dx$ , obtemos

$$[By + O(2)] + [(B - A)x + Cy + O(2)]p + [-By + O(2)]p^2 = 0.$$

Seja

$$M = \{(x, y, p) : F(x, y, p) = [By + O(2)] + [(B - A)x + Cy + O(2)]p + [-By + O(2)]p^2 = 0\}, \quad (2.5)$$

a superfície associada à equação (2.4).

**Observação 2.2.** *Daqui em diante omitiremos os termos  $O(k)$ .*

Calculando as derivadas parciais de  $F$  e aplicando em  $(0, 0, p)$ , obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x(x, y, p) = F_x(0, 0, p) = (B - A)p, \\ F_{xx}(x, y, p) = F_{xx}(0, 0, p) = 0, \\ F_y(x, y, p) = F_y(0, 0, p) = -Bp^2 + Cp + B, \\ F_{yy}(x, y, p) = F_{yy}(0, 0, p) = 0, \\ F_{xy}(x, y, p) = F_{xy}(0, 0, p) = 0, \\ F_p(x, y, p) = -2pBy + (B - A)x + Cy \Rightarrow F_p(0, 0, p) = 0, \\ F_{px}(x, y, p) = F_{px}(0, 0, p) = B - A, \\ F_{py}(x, y, p) = F_{py}(0, 0, p) = -2pB + C, \\ F_{pp}(x, y, p) = -2By \Rightarrow F_{pp}(0, 0, p) = 0. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Para estudarmos o comportamento das linhas de curvatura precisamos encontrar as singularidades do campo

$$\xi(x, y, p) = \left\{ \begin{array}{l} x' = F_p(x, y, p) = -2pBy + (B - A)x + Cy, \\ y' = pF_p(x, y, p) = -2p^2By + (B - A)px + Cpy, \\ p' = -(F_x + pF_y)(x, y, p) = -[-Bp^3 + Cp^2 + (2B - A)p]. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

ao longo do eixo projetivo, ou seja, onde  $\xi(0, 0, p) = (0, 0, 0)$ . Como  $F_p(0, 0, p) = 0$ , as singularidades de  $\xi$  ocorrem quando  $(F_x + pF_y)(0, 0, p) = 0$ .

**Definição 2.2.** *Um ponto umbílico  $p$  em uma superfície  $M$  é um ponto umbílico Darbouxiano se satisfaz as duas condições a seguir.*

**T:(condição de transversalidade)** *A superfície  $M$  também é regular sobre  $\pi^{-1}(p)$ .*

**D:(condição do discriminante)** *As singularidades do campo de Lie-Cartan  $\xi$  são todas hiperbólicas e ocorrem conforme os seguintes casos:*

**D<sub>1</sub>:** *uma única sela;*

**D<sub>2</sub>:** *um único nó entre duas selas;*

**D<sub>3</sub>:** *três selas.*

**Observação 2.3.** *A condição de transversalidade **T** da Definição 2.2 é equivalente a dizer que  $B(B - A) \neq 0$ .*

*Pela Proposição 2.1, a superfície  $M$  é regular em uma vizinhança de  $0 \times \mathbb{R}P^1$  se, e somente se, a função discriminante  $\varphi$  de  $F$  possui uma singularidade de Morse em  $(0, 0)$ . Temos que*

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= [(B - A)x + Cy]^2 + 4B^2y^2, \\ \varphi_x(x, y) &= 2[(B - A)x + Cy](B - A), \\ \varphi_y(x, y) &= 2C[(B - A)x + Cy] + 8B^2y, \\ \varphi_{xx}(x, y) &= 2(B - A)^2, \\ \varphi_{yy}(x, y) &= 2C^2 + 8B^2, \\ \varphi_{xy}(x, y) &= 2C(B - A).\end{aligned}$$

*Logo, vemos que  $(x, y) = (0, 0)$  é um ponto crítico de  $\varphi$ . A matriz Hessiana da função discriminante no ponto  $(x, y) = (0, 0)$  é*

$$\text{Hess}(\varphi)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2(B - A)^2 & 2C(B - A) \\ 2C(B - A) & 2C^2 + 8B^2 \end{pmatrix}$$

e seu determinante é

$$\begin{aligned}
\det(\text{Hess}(\varphi)(0,0)) &= [2(B-A)^2][2C^2 + 8B^2] - [2C(B-A)]^2 = \\
&= [2B^2 - 4BA + 2A^2][2C^2 + 8B^2] - [4B^2C^2 - 8ABC^2 + 4A^2C^2] = \\
&= 4B^2C^2 + 16B^4 - 8ABC^2 - 32AB^3 + 4A^2C^2 + 16A^2B^2 \\
&\quad - 4B^2C^2 + 8ABC^2 - 4A^2C^2 = \\
&= 16B^4 - 32AB^3 + 16A^2B^2 = 16B^2(B^2 - 2AB + A^2) = \\
&= 16B^2(B-A)^2 = [4B(B-A)]^2.
\end{aligned}$$

Portanto,  $(x, y) = (0, 0)$  é uma singularidade de Morse de  $\varphi$  se, e somente se,

$$[4B(B-A)]^2 \neq 0 \iff B(B-A) \neq 0.$$

Voltando ao campo  $\xi$  em (2.7), queremos encontrar suas singularidades em  $0 \times \mathbb{R}P^1$  e vimos que elas ocorrem quando

$$(F_x + pF_y)(0, 0, p) = F_x(0, 0, p) + pF_y(0, 0, p) = 0.$$

Assim,

$$F_x(0, 0, p) + pF_y(0, 0, p) = 0 \iff (B-A)p + p(-Bp^2 + Cp + B) = 0,$$

que é verificado se, e somente se,

$$p(-Bp^2 + Cp + 2B - A) = 0. \tag{2.8}$$

Resolvendo a equação (2.8), obtemos

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{C + \sqrt{C^2 + 4B(2B - A)}}{2B}, \quad p_3 = \frac{C - \sqrt{C^2 + 4B(2B - A)}}{2B}.$$

Se  $C^2 + 4B(2B - A) < 0$ , então  $p_1 = 0$  é a única raiz do polinômio cúbico

$$p(-Bp^2 + Cp + 2B - A) = 0 \tag{2.9}$$

em  $0 \times \mathbb{R}P^1$ . Logo,  $Q_1 = (0, 0, p_1) = (0, 0, 0)$  é a única singularidade do campo  $\xi$ .

Se  $C^2 + 4B(2B - A) > 0$  então  $p_1, p_2,$  e  $p_3$  são raízes da equação (2.9) em  $0 \times \mathbb{R}P^1$ . Assim,  $Q_1 = (0, 0, p_1), Q_2 = (0, 0, p_2), Q_3 = (0, 0, p_3)$  são as singularidades do campo  $\xi$ .

A linearização do campo  $\xi$  em (2.7) no ponto  $(0, 0, p)$  é

$$d\xi(0, 0, p) = \begin{pmatrix} F_{px} & F_{py} & F_{pp} \\ pF_{px} & pF_{py} & (F_p + pF_{pp}) \\ -(F_{xx} + pF_{xy}) & -(F_{xy} + pF_{yy}) & -(F_{xp} + F_y + pF_{py}) \end{pmatrix} (0, 0, p).$$

Utilizando as equações (2.6) e substituindo o valor das derivadas parciais no ponto  $(0, 0, p)$ , obtemos

$$d\xi(0, 0, p) = \begin{pmatrix} B - A & C - 2Bp & 0 \\ (B - A)p & p(C - 2Bp) & 0 \\ 0 & 0 & 3Bp^2 - 2Cp - 2B + A \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz  $d\xi(0, 0, p)$  é dado por

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= \begin{vmatrix} B - A - \lambda & C - 2Bp & 0 \\ (B - A)p & p(C - 2Bp) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3Bp^2 - 2Cp - 2B + A - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= [B - A - \lambda][Cp - 2Bp^2 - \lambda][3Bp^2 - 2Cp - 2B + A - \lambda] \\ &\quad - [3Bp^2 - 2Cp - 2B + A - \lambda][(B - A)p][C - 2Bp] = \\ &= [3Bp^2 - 2Cp - 2B + A - \lambda][(B - A - \lambda)(Cp - 2Bp^2 - \lambda) - (Bp - Ap)(C - 2Bp)] = \\ &= [3Bp^2 - 2Cp - 2B + A - \lambda][BCp - 2B^2p^2 - \lambda B - ACp + 2ABp^2 + A\lambda - Cp\lambda \\ &\quad + 2Bp^2\lambda + \lambda^2 - BCp + 2B^2p^2 + ACp - 2ABp^2] = \\ &= [3Bp^2 - 2Cp - 2B + A - \lambda][2Bp^2 - Cp - B + A + \lambda]\lambda. \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores da matriz linearizada  $d\xi(0, 0, p)$  são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2Bp^2 + Cp + B - A, \quad \lambda_3 = 3Bp^2 - 2Cp - 2B + A. \quad (2.10)$$

Vamos agora estudar a natureza das singularidades do campo  $\xi$ . Veremos que elas se comportam como na Definição 2.2.

### 2.2.1 1º caso ( $D_1$ ): $C^2 + 4B(2B - A) < 0$

Neste caso, temos que  $p_1 = 0$  é a única raiz real do polinômio cúbico dado em (2.9). Logo,  $Q_1 = (0, 0, p_1) = (0, 0, 0)$  é a única singularidade do campo  $\xi$ . Substituindo  $p = p_1 = 0$  nas equações (2.10), obtemos os autovalores da matriz  $d\xi(0, 0, 0)$ . São eles

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = B - A, \quad \lambda_3 = A - 2B.$$

Como  $\lambda_1 = 0$ , basta analisarmos os sinais de  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ .

Por hipótese,  $C^2 + 4B(2B - A) < 0$ . Então,

$$\begin{aligned} C^2 + 4B(2B - A) < 0 &\Rightarrow 4B(2B - A) < -C^2 \Rightarrow B(2B - A) < -\frac{C^2}{4} \\ &\Rightarrow -B(2B - A) > \frac{C^2}{4} \Rightarrow B(A - 2B) > \frac{C^2}{4} \end{aligned}$$

e como  $C^2/4 > 0$ , segue que  $B(A - 2B) > 0$ . Dessa forma,  $B$  e  $(A - 2B)$  possuem o mesmo sinal. Assim, temos duas possibilidades:

1. Se  $B > 0$  e  $(A - 2B) > 0$ , então  $A > 2B > B$ . Logo,

$$\lambda_2 \cdot \lambda_3 = \underbrace{(B - A)}_{<0} \underbrace{(A - 2B)}_{>0} < 0.$$

Portanto,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  têm sinais opostos.

2. Se  $B < 0$  e  $(A - 2B) < 0$ , então  $A < 2B < B$ . Logo,

$$\lambda_2 \cdot \lambda_3 = \underbrace{(B - A)}_{>0} \underbrace{(A - 2B)}_{<0} < 0.$$

Portanto,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  têm sinais opostos.

Em ambas as possibilidades os autovalores  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  têm sinais opostos. Portanto,  $Q_1 = (0, 0, 0)$  é uma singularidade do tipo sela. A Figura 2.1 mostra a solução do campo  $\xi$  para o caso  $D_1$ .

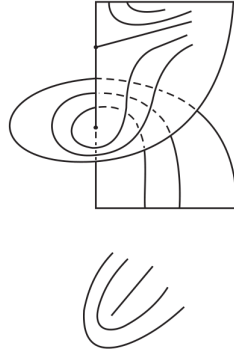


Figura 2.1: Solução do campo  $\xi$  para  $D_1$ .

Figura retirada da referência [4].

### 2.2.2 2º caso ( $D_2$ ): $C^2 + 4B(2B - A) > 0$ , $A/B > 1$ , $A \neq 2B$

Neste caso o campo  $\xi$  tem três singularidades. São elas:  $Q_1 = (0, 0, p_1)$ ,  $Q_2 = (0, 0, p_2)$  e  $Q_3 = (0, 0, p_3)$ . Vamos dividir este caso em mais dois sub-casos.

#### (i) $1 < \mathbf{A/B} < 2$

Para o ponto  $Q_1 = (0, 0, p_1)$ , os autovalores são  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = B - A$  e  $\lambda_3 = A - 2B$ .

Então,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{B - A}{A - 2B} = \frac{B(1 - \frac{A}{B})}{B(\frac{A}{B} - 2)} = \frac{\overbrace{1 - \frac{A}{B}}^{<0}}{\underbrace{\frac{A}{B} - 2}_{<0}} > 0.$$

Portanto,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  têm o mesmo sinal. Logo,  $Q_1 = (0, 0, p_1)$  é uma singularidade do tipo nó.

Agora, considere o polinômio cúbico  $p(-Bp^2 + Cp + 2B - A) = 0$ . Sabemos que  $p_2$  e  $p_3$  são raízes de  $-Bp^2 + Cp + 2B - A = 0$ . Para  $Q_2 = (0, 0, p_2)$ , os autovalores

são  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -2Bp_2^2 + Cp_2 + B - A$  e  $\lambda_3 = 3Bp_2^2 - 2Cp_2 - 2B + A$ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2}{\lambda_3} &= \frac{-2Bp_2^2 + Cp_2 + B - A}{3Bp_2^2 - 2Cp_2 - 2B + A} = \frac{-Bp_2^2 - Bp_2^2 + Cp_2 + 2B - B - A}{2Bp_2^2 + Bp_2^2 - Cp_2 - Cp_2 - 2B + A} = \\ &= \frac{-Bp_2^2 - B \overbrace{-Bp_2^2 + Cp_2 + 2B - A}^{=0}}{2Bp_2^2 - Cp_2 - \underbrace{(-Bp_2^2 + Cp_2 + 2B - A)}_{=0}} = \frac{-Bp_2^2 - B}{2Bp_2^2 - Cp_2} = \\ &= \frac{-B(p_2^2 + 1)}{Bp_2^2 + \underbrace{Bp_2^2 - Cp_2}_{=2B-A}} = \frac{-B(p_2^2 + 1)}{Bp_2^2 + 2B - A} = \frac{-B(p_2^2 + 1)}{B(p_2^2 + 2 - \frac{A}{B})} = \\ &= \frac{\overbrace{-(p_2^2 + 1)}^{<0}}{\underbrace{p_2^2 + 2 - \frac{A}{B}}_{>0}} < 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  têm sinais opostos e, portanto,  $Q_2 = (0, 0, p_2)$  é uma singularidade do tipo sela.

Para  $Q_3 = (0, 0, p_3)$ ,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{-2Bp_3^2 + Cp_3 + B - A}{3Bp_3^2 - 2Cp_3 - 2B + A} = \frac{\overbrace{-(p_3^2 + 1)}^{<0}}{p_3^2 + 2 - \frac{A}{B}} < 0.$$

Logo,  $Q_3 = (0, 0, p_3)$  também é uma singularidade do tipo sela.

(ii)  $2 < \mathbf{A/B} < 2 + (\mathbf{C/2B})^2$

Para o ponto  $Q_1 = (0, 0, p_1)$ , temos

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{B - A}{A - 2B} = \frac{B(1 - \frac{A}{B})}{B(\frac{A}{B} - 2)} = \frac{\overbrace{1 - \frac{A}{B}}^{<0}}{\underbrace{\frac{A}{B} - 2}_{>0}} < 0.$$

Logo,  $Q_1 = (0, 0, p_1)$  é uma sela.

Como no item anterior, para os pontos  $Q_2 = (0, 0, p_2)$  e  $Q_3 = (0, 0, p_3)$ , temos

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{-(p_2^2 + 1)}{p_2^2 + 2 - \frac{A}{B}} \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{-(p_3^2 + 1)}{p_3^2 + 2 - \frac{A}{B}}.$$

Os numeradores dessas frações são sempre negativos. Logo, basta analisar o sinal dos denominadores. Por hipótese,

$$C^2 + 4B(2B - A) > 0 \Rightarrow (C/2B)^2 + 2 - A/B > 0.$$

Sendo  $\delta = (C/2B)^2 + 2 - A/B$ , então

$$\begin{aligned} p_2^2 + 2 - \frac{A}{B} &= \left( \frac{C + \sqrt{C^2 + 4B(2B - A)}}{2B} \right)^2 + 2 - \frac{A}{B} = \\ &= \left( \frac{C}{2B} + \sqrt{\frac{C^2 + 4B(2B - A)}{4B^2}} \right)^2 + 2 - \frac{A}{B} = \\ &= \left( \frac{C}{2B} + \sqrt{\left(\frac{C}{2B}\right)^2 + 2 - \frac{A}{B}} \right)^2 + 2 - \frac{A}{B} = \left( \frac{C}{2B} + \sqrt{\delta} \right)^2 + 2 - \frac{A}{B} = \\ &= \left(\frac{C}{2B}\right)^2 + \frac{C}{B}\sqrt{\delta} + \delta + 2 - \frac{A}{B} = 2\delta + \frac{C}{B}\sqrt{\delta} = 2\sqrt{\delta} \left( \frac{C}{2B} + \sqrt{\delta} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3^2 + 2 - \frac{A}{B} &= \left( \frac{C - \sqrt{C^2 + 4B(2B - A)}}{2B} \right)^2 + 2 - \frac{A}{B} = \\ &= \left( \frac{C}{2B} - \sqrt{\left(\frac{C}{2B}\right)^2 + 2 - \frac{A}{B}} \right)^2 + 2 - \frac{A}{B} = \left( \frac{C}{2B} - \sqrt{\delta} \right)^2 + 2 - \frac{A}{B} = \\ &= \left(\frac{C}{2B}\right)^2 - \frac{C}{B}\sqrt{\delta} + \delta + 2 - \frac{A}{B} = 2\delta - \frac{C}{B}\sqrt{\delta} = 2\sqrt{\delta} \left( -\frac{C}{2B} + \sqrt{\delta} \right). \end{aligned}$$

Como  $\delta > 0$ , os sinais de

$$p_2^2 + 2 - \frac{A}{B} \quad \text{e de} \quad p_3^2 + 2 - \frac{A}{B}$$

dependem dos sinais de  $B$  e  $C$ .

Supondo  $B$  e  $C$  com os mesmos sinais temos que:

$$p_2^2 + 2 - \frac{A}{B} = 2\sqrt{\delta} \left( \frac{C}{2B} + \sqrt{\delta} \right) > 0,$$

$$\begin{aligned} p_3^2 + 2 - \frac{A}{B} &= 2\sqrt{\delta} \left( -\frac{C}{2B} + \sqrt{\delta} \right) = 2\sqrt{\delta} \left( \sqrt{\left(\frac{C}{2B}\right)^2 + 2 - \frac{A}{B}} - \frac{C}{2B} \right) < \\ &< 2\sqrt{\delta} \left( \sqrt{\left(\frac{C}{2B}\right)^2} - \frac{C}{2B} \right) = 2\sqrt{\delta} \left( \left| \frac{C}{2B} \right| - \frac{C}{2B} \right) = 0. \end{aligned}$$



Logo,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{-(p_2^2 + 1)}{p_2^2 + 2 - \frac{A}{B}} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{-(p_3^2 + 1)}{p_3^2 + 2 - \frac{A}{B}} > 0$$

e, portanto,  $Q_2 = (0, 0, p_2)$  é uma sela e  $Q_3 = (0, 0, p_3)$  é um nó.

Agora, supondo  $B$  e  $C$  com sinais opostos, temos

$$\begin{aligned} p_2^2 + 2 - \frac{A}{B} &= 2\sqrt{\delta} \left( \frac{C}{2B} + \sqrt{\delta} \right) = 2\sqrt{\delta} \left( \sqrt{\left( \frac{C}{2B} \right)^2 + \underbrace{2 - \frac{A}{B}}_{<0}} + \frac{C}{2B} \right) < \\ &< 2\sqrt{\delta} \left( \sqrt{\left( \frac{C}{2B} \right)^2} + \frac{C}{2B} \right) = 2\sqrt{\delta} \left( \left| \frac{C}{2B} \right| + \underbrace{\frac{C}{2B}}_{<0} \right) = 0, \\ p_3^2 + 2 - \frac{A}{B} &= 2\sqrt{\delta} \left( \underbrace{-\frac{C}{2B}}_{>0} + \sqrt{\delta} \right) > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{-(p_2^2 + 1)}{p_2^2 + 2 - \frac{A}{B}} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{-(p_3^2 + 1)}{p_3^2 + 2 - \frac{A}{B}} < 0$$

e, portanto,  $Q_2 = (0, 0, p_2)$  é um nó e  $Q_3 = (0, 0, p_3)$  é uma sela.

Assim, concluímos que para ambos os sub-casos a condição  $D_2$  é satisfeita, ou seja, obtemos um único nó entre duas selas. A Figura 2.2 mostra a solução do campo  $\xi$  para o caso  $D_2$ .

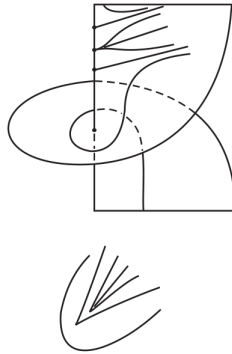


Figura 2.2: Solução do campo  $\xi$  para  $D_2$ .

Figura retirada da referência [4].

### 2.2.3 3º caso ( $D_3$ ): $C^2 + 4B(2B - A) > 0$ , $A/B < 1$

Também temos três singularidades:  $Q_1 = (0, 0, p_1)$ ,  $Q_2 = (0, 0, p_2)$  e  $Q_3 = (0, 0, p_3)$ .

Para  $Q_1 = (0, 0, p_1)$ ,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{B - A}{A - 2B} = \frac{\overbrace{1 - \frac{A}{B}}^{>0}}{\underbrace{\frac{A}{B} - 2}_{<0}} < 0.$$

Para  $Q_2 = (0, 0, p_2)$ ,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{-(p_2^2 + 1)}{\underbrace{p_2^2 + 2 - \frac{A}{B}}_{>0}} < 0.$$

Para  $Q_3 = (0, 0, p_3)$ ,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{-(p_3^2 + 1)}{\underbrace{p_3^2 + 2 - \frac{A}{B}}_{>0}} < 0.$$

Logo, para as três singularidades os autovalores  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  têm sinais opostos. Portanto,  $Q_1 = (0, 0, p_1)$ ,  $Q_2 = (0, 0, p_2)$  e  $Q_3 = (0, 0, p_3)$  são todas selas. A Figura 2.3 mostra a solução do campo  $\xi$  para o caso  $D_3$ .

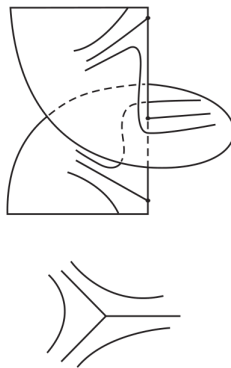


Figura 2.3: Solução do campo  $\xi$  para  $D_3$ .

Figura retirada da referência [4].

## Capítulo 3

# Ponto umbílico isolado do gráfico de um polinômio homogêneo

A presente seção será baseada na referência [1].

Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular e  $\text{Umb}(S)$  o conjunto dos pontos umbílicos de  $S$ . Se  $S \setminus \text{Umb}(S) \neq \emptyset$  então existe uma distribuição regular unidimensional  $D_s$  em  $S \setminus \text{Umb}(S)$  tal que  $D_s(p)$  é uma das direções principais em  $p \in S \setminus \text{Umb}(S)$ .  $D_s$  é chamada *distribuição principal em  $S$*  e é obtida de uma das duas folheações principais.

O comportamento da distribuição principal ao redor de um ponto umbílico isolado é estudado no gráfico de um polinômio homogêneo de duas variáveis. Seja  $f$  um polinômio homogêneo de duas variáveis reais  $x$  e  $y$ , de grau  $k \geq 3$  e seja  $G_f$  o gráfico de  $f$ . A origem  $o = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  é sempre um ponto umbílico do  $G_f$ . Entretanto,  $o$  nem sempre é um ponto umbílico isolado.

O índice de um ponto umbílico isolado  $p_0$ , denotado por  $\text{ind}_{p_0}(S)$ , também será objeto de estudo neste capítulo.

### 3.1 Preliminares

Seja  $f$  um polinômio homogêneo de duas variáveis reais  $x, y$  e de grau  $k \geq 3$ . Seja também  $G_f$  o gráfico de  $f$ . Denotaremos as derivadas parciais de  $f$  por

$$p = p(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad q = q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad r = r(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$$

$$s = s(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \quad e \quad t = t(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

A superfície regular  $G_f$  é dada por

$$G_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U\},$$

sendo  $U$  um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Por abuso de notação, defina

$$G_f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G_f(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

uma parametrização para a superfície regular  $G_f$ .

A primeira e a segunda formas fundamentais de  $G_f$ , em termos das coordenadas  $(x, y)$ , são dadas por

$$I(x, y) = E(x, y)dx^2 + 2F(x, y)dxdy + G(x, y)dy^2$$

e

$$II(x, y) = e(x, y)dx^2 + 2f(x, y)dxdy + g(x, y)dy^2.$$

Calculando as derivadas parciais de  $G_f$ , temos

$$\frac{\partial G_f(x, y)}{\partial x} = (1, 0, p), \quad \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial y} = (0, 1, q), \quad \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial x^2} = (0, 0, r),$$

$$\frac{\partial G_f(x, y)}{\partial x \partial y} = (0, 0, s), \quad \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial y^2} = (0, 0, t).$$

O vetor normal em um ponto de  $G_f$  é dado por

$$N(x, y) = \frac{\frac{\partial G_f(x, y)}{\partial x} \times \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial x} \times \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial y} \right\|} = \frac{(-p, -q, 1)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}.$$

Então, os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de  $G_f$  são

$$E(x, y) = \left\langle \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial x} \right\rangle = 1 + p^2,$$

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \left\langle \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial y} \right\rangle = pq, \\
G(x, y) &= \left\langle \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial y} \right\rangle = 1 + q^2, \\
e(x, y) &= \left\langle \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial x^2}, N(x, y) \right\rangle = (0, 0, r) \cdot \frac{(-p, -q, 1)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \\
f(x, y) &= \left\langle \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial x \partial y}, N(x, y) \right\rangle = (0, 0, s) \cdot \frac{(-p, -q, 1)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = \frac{s}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \\
g(x, y) &= \left\langle \frac{\partial G_f(x, y)}{\partial y^2}, N(x, y) \right\rangle = (0, 0, t) \cdot \frac{(-p, -q, 1)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = \frac{t}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}.
\end{aligned}$$

As direções principais em cada ponto de  $G_f$  são determinadas pela equação diferencial das linhas de curvatura. Assim,

$$\begin{aligned}
&(E(x, y)f(x, y) - e(x, y)F(x, y))dx^2 + (E(x, y)g(x, y) - e(x, y)G(x, y))dxdy + \\
&+ (F(x, y)g(x, y) - G(x, y)f(x, y))dy^2 = 0
\end{aligned}$$

a qual pode ser escrita da forma

$$\frac{[(s + sp^2 - pqr)dx^2 + (t - r + tp^2 - rq^2)dxdy + (-s + pqt - sq^2)dy^2]}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = 0$$

ou equivalentemente

$$Ax^2 + 2Bdxdy + Cdy^2 = 0, \tag{3.1}$$

onde

$$A = s + sp^2 - pqr, \quad 2B = t - r + tp^2 - rq^2, \quad C = -s + pqt - sq^2.$$

**Lema 3.1.** *Considere a equação diferencial das linhas de curvatura (3.1). Um vetor tangente  $x_0(\partial/\partial x) + y_0(\partial/\partial y)$  no ponto  $(x_0, y_0)$  está na direção principal se, e somente se,  $D(x_0, y_0) + N(x_0, y_0) = 0$ , onde*

$$D(x, y) = sx^2 + (t - r)xy - sy^2,$$

$$N(x, y) = (sp^2 - pqr)x^2 + (tp^2 - rq^2)xy + (pqt - sq^2)y^2.$$

*Demonstração.* Um vetor tangente  $x_0(\partial/\partial x) + y_0(\partial/\partial y)$  no ponto  $(x_0, y_0)$  está na direção principal se, e somente se,

$$Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 = 0,$$

isto é,

$$(s + sp^2 - pqr)x_0^2 + (t - r + tp^2 - rq^2)x_0y_0 + (-s + pqt - sq^2)y_0^2 = 0$$

ou seja, se, e somente se,

$$sx_0^2 + (t - r)x_0y_0 - sy_0^2 + (sp^2 - pqr)x_0^2 + (tp^2 - rq^2)x_0y_0 + (pqt - sq^2)y_0^2 = 0$$

ou equivalentemente

$$D(x_0, y_0) + N(x_0, y_0) = 0.$$

□

O resultado seguinte segue diretamente da derivada da expressão

$$(x, y) \cdot \text{grad}(f) = k \cdot f,$$

que é o Teorema de Euler para funções homogêneas.

**Lema 3.2.** *Seja  $f$  um polinômio homogêneo de grau  $k \geq 2$ . Então*

$$(k - 1)\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

onde

$$\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

*Demonstração.* Como  $f$  é um polinômio homogêneo, podemos escrever  $f$  como

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^k a_m x^{k-m} y^m = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} y + a_2 x^{k-2} y^2 + \dots + a_{k-2} x^2 y^{k-2} + a_{k-1} x y^{k-1} + a_k y^k.$$

As derivadas parciais de  $f$  são dadas por

$$p = ka_0 x^{k-1} + (k - 1)a_1 x^{k-2} y + (k - 2)a_2 x^{k-3} y^2 + \dots + 2a_{k-2} x y^{k-2} + a_{k-1} y^{k-1},$$

$$\begin{aligned}
q &= a_1x^{k-1} + 2a_2x^{k-2}y + \dots + (k-2)a_{k-2}x^2y^{k-3} + (k-1)a_{k-1}xy^{k-2} + ka_ky^{k-1}, \\
r &= k(k-1)a_0x^{k-2} + (k-1)(k-2)a_1x^{k-3}y + (k-2)(k-3)a_2x^{k-4}y^2 + \dots + 2a_{k-2}y^{k-2}, \\
s &= (k-1)a_1x^{k-2} + 2(k-2)a_2x^{k-3}y + \dots + 2(k-2)a_{k-2}xy^{k-3} + (k-1)a_{k-1}y^{k-2}, \\
t &= 2a_2x^{k-2} + \dots + (k-2)(k-3)a_{k-2}x^2y^{k-4} + (k-1)(k-2)a_{k-1}xy^{k-3} + k(k-1)a_ky^{k-2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
rx &= k(k-1)a_0x^{k-1} + (k-1)(k-2)a_1x^{k-2}y + (k-2)(k-3)a_2x^{k-3}y^2 + \dots + 2a_{k-2}xy^{k-2}, \\
sy &= (k-1)a_1x^{k-2}y + 2(k-2)a_2x^{k-3}y^2 + \dots + 2(k-2)a_{k-2}xy^{k-2} + (k-1)a_{k-1}y^{k-1}, \\
sx &= (k-1)a_1x^{k-1} + 2(k-2)a_2x^{k-2}y + \dots + 2(k-2)a_{k-2}x^2y^{k-3} + (k-1)a_{k-1}xy^{k-2}, \\
ty &= 2a_2x^{k-2}y + \dots + (k-2)(k-3)a_{k-2}x^2y^{k-3} + (k-1)(k-2)a_{k-1}xy^{k-2} + k(k-1)a_ky^{k-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
rx + sy &= k(k-1)a_0x^{k-1} + ((k-2)+1)(k-1)a_1x^{k-2}y + ((k-3)+2)(k-2)a_2x^{k-3}y^2 \\
&\quad + \dots + ((k-2)+1)2a_{k-2}xy^{k-2} + (k-1)a_{k-1}y^{k-1} = \\
&= (k-1)[ka_0x^{k-1} + (k-1)a_1x^{k-2}y + (k-2)a_2x^{k-3}y^2 + \dots + \\
&\quad + 2a_{k-2}xy^{k-2} + a_{k-1}y^{k-1}] = \\
&= (k-1)p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
sx + ty &= (k-1)a_1x^{k-1} + ((k-2)+1)2a_2x^{k-2}y + \dots + ((k-3)+2)(k-2)a_{k-2}x^2y^{k-3} \\
&\quad + ((k-2)+1)(k-1)a_{k-1}xy^{k-2} + k(k-1)a_ky^{k-1} = \\
&= (k-1)[a_1x^{k-1} + 2a_2x^{k-2}y + \dots + (k-2)a_{k-2}x^2y^{k-3} + \\
&\quad + (k-1)a_{k-1}xy^{k-2} + ka_ky^{k-1}] = \\
&= (k-1)q.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx + sy \\ sx + ty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k-1)p \\ (k-1)q \end{pmatrix} = (k-1) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = (k-1)\text{grad}(f).$$

□

**Lema 3.3.** *Seja  $f$  um polinômio homogêneo de grau  $k \geq 2$ . Então,  $N(x, y) = 0$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .*

*Demonstração.* De fato, da equação (3.2) temos que

$$p = \frac{1}{k-1}(rx + sy) \quad e \quad q = \frac{1}{k-1}(sx + ty).$$

Então, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , temos

$$\begin{aligned} N(x, y) &= x^2(p^2s - pqr) + xy(p^2t - q^2r) + y^2(pqt - sq^2) = \\ &= x^2 \left[ \frac{(rx + sy)^2}{(k-1)^2} s - \frac{(rx + sy)(sx + ty)}{(k-1)^2} r \right] + xy \left[ \frac{(rx + sy)^2}{(k-1)^2} t - \frac{(sx + ty)^2}{(k-1)^2} r \right] + \\ &+ y^2 \left[ \frac{(rx + sy)(sx + ty)}{(k-1)^2} t - \frac{(sx + ty)^2}{(k-1)^2} s \right] = \\ &= \frac{x^2}{(k-1)^2} (sr^2x^2 + 2rs^2xy + s^3y^2 - r^2sx^2 - r^2txy - rs^2xy - rsty^2) + \\ &+ \frac{xy}{(k-1)^2} (tr^2x^2 + 2rstxy + ts^2y^2 - s^2rx^2 - 2strxy - t^2ry^2) + \\ &+ \frac{y^2}{(k-1)^2} (trsx^2 + rt^2xy + ts^2xy + t^2sy^2 - s^3x^2 - 2s^2txy - st^2y^2) = \\ &= \frac{1}{(k-1)^2} (sr^2x^4 + 2rs^2x^3y + s^3y^2x^2 - r^2sx^4 - r^2tx^3y - rs^2x^3y - rstx^2y^2 + \\ &+ tr^2x^3y + 2rstx^2y^2 + ts^2xy^3 - s^2rx^3y - 2strx^2y^2 - t^2rxy^3 + \\ &+ trsx^2y^2 + rt^2xy^3 + ts^2xy^3 + t^2sy^4 - s^3x^2y^2 - 2s^2txy^3 - st^2y^4) = 0. \end{aligned}$$

□

**Lema 3.4.** *Um vetor tangente  $x_0(\partial/\partial x) + y_0(\partial/\partial y)$  no ponto  $(x_0, y_0)$  está numa direção principal se, e somente se,  $(x_0, y_0)$  é raiz da equação  $D(x, y) = 0$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $x_0(\partial/\partial x) + y_0(\partial/\partial y)$  no ponto  $(x_0, y_0)$  está numa direção principal. Então pelo Lema 3.1,

$$D(x_0, y_0) + N(x_0, y_0) = 0.$$

Mostramos no Lema 3.3 que  $N(x, y) = 0$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Logo,  $N(x_0, y_0) = 0$  e, portanto,  $D(x_0, y_0) = 0$ .



Reciprocamente, suponha que  $(x_0, y_0)$  é raiz da equação  $D(x, y) = 0$ , ou seja,  $D(x_0, y_0) = 0$ . Como  $N(x_0, y_0) = 0$ , então

$$D(x_0, y_0) + N(x_0, y_0) = 0.$$

Portanto, pelo Lema 3.1, o vetor tangente  $x_0(\partial/\partial x) + y_0(\partial/\partial y)$  no ponto  $(x_0, y_0)$  está na direção principal.  $\square$

**Lema 3.5.** *Para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  temos que*

$$D(x, y) = (k - 1) \left\langle \text{grad}(f), \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (3.3)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno em  $\mathbb{R}^2$ .

*Demonstração.* Da equação (3.2) temos

$$rx = (k - 1)p - sy \quad e \quad ty = (k - 1)q - sx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} D(x, y) &= sx^2 + (t - r)xy - sy^2 = sx^2 + txy - rxy - sy^2 = \\ &= sx^2 + (k - 1)qx - sx^2 - (k - 1)py + sy^2 - sy^2 = (k - 1)qx - (k - 1)py = \\ &= (k - 1)(qx - py) = (k - 1) \left\langle \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= (k - 1) \left\langle \text{grad}(f), \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

$\square$

**Exemplo 3.1.** *Suponha que  $f$  é um polinômio homogêneo de grau 2. Então, podemos escrevê-lo como*

$$f(x, y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2.$$

*Calculando as derivadas parciais de  $f$  temos*

$$p(x, y) = 2a_0x + a_1y, \quad q(x, y) = a_1x + 2a_2y,$$

$$r(x, y) = 2a_0, \quad s(x, y) = a_1 \quad e \quad t(x, y) = 2a_2.$$

Os coeficientes  $A$ ,  $2B$  e  $C$  calculados no ponto  $(0, 0)$  são

$$A(0, 0) = s(0, 0) + s(0, 0)p(0, 0)^2 - p(0, 0)q(0, 0)r(0, 0) = a_1,$$

$$2B(0, 0) = t(0, 0) - r(0, 0) + t(0, 0)p(0, 0)^2 - r(0, 0)q(0, 0)^2 = 2(a_2 - a_0)$$

$$e \quad C(0, 0) = -s(0, 0) + p(0, 0)q(0, 0)t(0, 0) - s(0, 0)q(0, 0)^2 = -a_1.$$

Então, para que a origem  $(0, 0)$  seja um ponto umbílico do gráfico de  $f$  devemos ter  $A(0, 0) = 2B(0, 0) = C(0, 0) = 0$ , ou seja,  $a_1 = 0$  e  $a_0 = a_2$ . Seja  $\lambda = a_0 = a_2$ . Então,  $f(x, y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 = \lambda(x^2 + y^2)$ . Desse modo, vemos que  $(0, 0)$  é um ponto umbílico de  $G_f$  se, e somente se,  $f$  pode ser escrito como  $f(x, y) = \lambda(x^2 + y^2)$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Para o polinômio homogêneo  $f(x, y) = \lambda(x^2 + y^2)$  temos

$$p(x, y) = 2x\lambda, \quad q(x, y) = 2y\lambda, \quad r(x, y) = 2\lambda, \quad s(x, y) = 0, \quad t(x, y) = 2\lambda.$$

Então,

$$D(x, y) = s(x, y)x^2 + (t(x, y) - r(x, y))xy - s(x, y)y^2 = 0, \quad \forall (x, y) \in G_f.$$

Portanto, segue do Lema 3.4 que para quaisquer  $(x_0, y_0) \in G_f$ , o vetor tangente  $x_0(\partial/\partial x) + y_0(\partial/\partial y)$  está numa direção principal. A equação diferencial de linhas de curvatura é

$$A(x, y)dx^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dy^2 = 0,$$

isto é,

$$-8\lambda^3xydx^2 + (8\lambda^3x^2 - 8\lambda^3y^2)dxdy + 8\lambda^3xydy^2 = 0.$$

Logo,

$$-8\lambda^3[xydx^2 + (y^2 - x^2)dxdy - xydy^2] = 0,$$

e, portanto,

$$xydx^2 + (y^2 - x^2)dxdy - xydy^2 = 0.$$

Os pontos umbílicos de  $G_f$  são os pontos onde  $A(x, y) = 2B(x, y) = C(x, y) = 0$ , ou seja, onde  $xy = 0$  e  $y^2 - x^2 = 0$ . Assim, vemos que  $(x, y) = (0, 0)$  é o único ponto que

satisfaz as duas equações. Portanto,  $(0,0)$  é um ponto umbílico isolado de  $G_f$ . As direções principais em  $(x_0, y_0) \neq (0,0)$  são dadas por  $x_0(\partial/\partial x) + y_0(\partial/\partial y)$  e  $-y_0(\partial/\partial x) + x_0(\partial/\partial y)$  que são ortogonais. As linhas de curvatura e as direções principais de  $G_f$ , projetadas no plano  $xy$ , são mostradas na Figura 3.1. Pela Fórmula de Bendixson (1), temos

$$\text{ind}_o(G_f) = 1 + \frac{\overbrace{\#e}^{=0} - \overbrace{\#h}^{=0}}{2},$$

ou seja,  $\text{ind}_o(G_f) = 1$ .

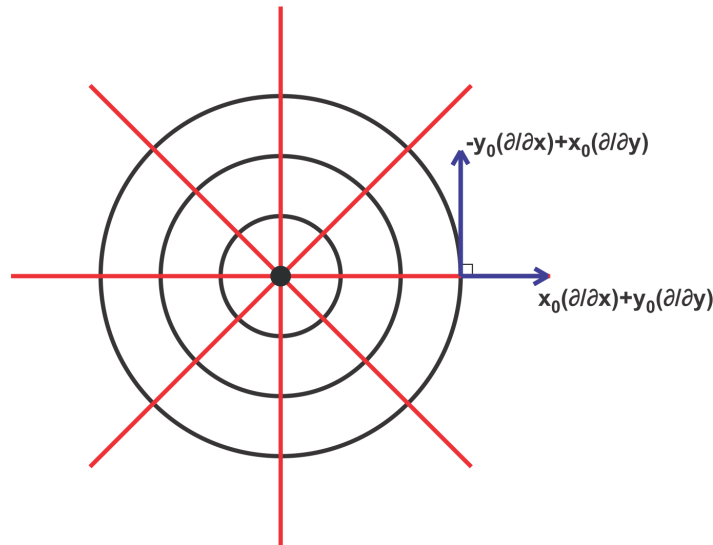


Figura 3.1: Linhas de curvatura e direções principais do Exemplo 3.1.

A seguinte proposição generaliza o Exemplo 3.1.

**Proposição 3.1.** *Seja  $f \not\equiv 0$  um polinômio homogêneo de grau  $k \geq 2$ . Então,  $D(x, y) \equiv 0$  se, e somente se, as seguintes afirmações são válidas.*

1.  $k$  é par;

2.  $f$  é representada como  $f(x, y) = \lambda(x^2 + y^2)^{k/2}$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Além disso, se  $D(x, y) \equiv 0$ , então a origem  $o$  é um ponto umbílico isolado de  $G_f$  e  $\text{ind}_o(G_f) = 1$ .

*Demonstração.* Como  $f$  é um polinômio homogêneo, podemos escrevê-lo como

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^k a_m x^{k-m} y^m,$$

onde  $k \geq 2$ . Temos

$$qx = a_1 x^k + 2a_2 x^{k-1} y + 3a_3 x^{k-2} y^2 + 4a_4 x^{k-3} y^3 + \dots + (k-1)a_{k-1} x^2 y^{k-2} + ka_k x y^{k-1},$$

$$py = ka_0 x^{k-1} y + (k-1)a_1 x^{k-2} y^2 + (k-2)a_2 x^{k-3} y^3 + \dots + 3a_{k-3} x^2 y^{k-2} + 2a_{k-2} x y^{k-1} + a_{k-1} y^k,$$

$$\begin{aligned} qx - py &= a_1 x^k - a_{k-1} y^k + (2a_2 - ka_0) x^{k-1} y + (3a_3 - (k-1)a_1) x^{k-2} y^2 + \\ &+ (4a_4 - (k-2)a_2) x^{k-3} y^3 + \dots + ((k-1)a_{k-1} - 3a_{k-3}) x^2 y^{k-2} + \\ &+ (ka_k - 2a_{k-2}) x y^{k-1}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \left\langle \text{grad}(f), \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle &= qx - py = a_1 x^k - a_{k-1} y^k + \\ &+ \sum_{m=1}^{k-1} [(m+1)a_{m+1} - (k-m+1)a_{m-1}] x^{k-m} y^m. \end{aligned}$$

Note que o polinômio homogêneo  $qx - py$  se anula se, e somente se, seus coeficientes se anulam, isto é,

$$a_1 = 2a_2 - ka_0 = 3a_3 - (k-1)a_1 = 4a_4 - (k-2)a_2 = \dots = ka_k - 2a_{k-2} = a_{k-1} = 0.$$

Das igualdades acima, concluímos que

- (1)  $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{k-1} = 0$ ;
- (2)  $ka_0 = 2a_2, (k-2)a_2 = 4a_4, \dots, (k-2j)a_{2j} = 2(j+1)a_{2(j+1)}$ ,  
com  $j = 0, 1, 2, \dots, (k-2)/2$ ;
- (3)  $k$  é par, pois  $k = 2 \left[ \frac{(j+1)a_{2(j+1)}}{a_{2j}} + j \right]$  para todo  
 $j = 0, 1, 2, \dots, (k-2)/2$ .

Logo,  $D(x, y) \equiv 0$  se, e somente se, os três itens acima são verdadeiros.

Agora, vamos mostrar que um polinômio homogêneo  $f$  de grau  $k \geq 2$  que satisfaz (1), (2) e (3) é da forma  $f(x, y) = \lambda(x^2 + y^2)^{k/2}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Para isto, considere

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^k a_m x^{k-m} y^m = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} y + a_2 x^{k-2} y^2 + \dots + a_{k-2} x^2 y^{k-2} + a_{k-1} x y^{k-1} + a_k y^k.$$

Como  $f$  satisfaz os itens (1) e (2), os coeficientes ímpares se anulam e

$$\left\{ \begin{array}{l} ka_0 = 2a_2 \Rightarrow a_2 = a_0 \cdot \frac{k}{2}, \\ (k-2)a_2 = 4a_4 \Rightarrow a_4 = a_2 \cdot \frac{(k-2)}{4} \Rightarrow a_4 = a_0 \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{(k-2)}{4}, \\ (k-4)a_4 = 6a_6 \Rightarrow a_6 = a_4 \cdot \frac{(k-4)}{6} \Rightarrow a_6 = a_0 \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{(k-2)}{4} \cdot \frac{(k-4)}{6}, \\ \vdots \\ 2a_{k-2} = ka_k \Rightarrow a_k = a_{k-2} \cdot \frac{2}{k} \Rightarrow a_k = a_0 \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{(k-2)}{4} \cdot \frac{(k-4)}{6} \dots \frac{4}{(k-2)} \cdot \frac{2}{k} = a_0. \end{array} \right.$$

Dessa forma, tomando  $\lambda = a_0$ , obtemos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \lambda x^k + \lambda \frac{k}{2} x^{k-2} y^2 + \lambda \frac{k(k-2)}{2 \cdot 4} x^{k-4} y^4 + \lambda \frac{k(k-2)(k-4)}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \lambda y^k = \\ &= \lambda \left( x^k + \frac{k}{2} x^{k-2} y^2 + \frac{k(k-2)}{2 \cdot 4} x^{k-4} y^4 + \frac{k(k-2)(k-4)}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^{k-6} y^6 + \dots + y^k \right) = \\ &= \lambda \left( \binom{k/2}{0} x^k + \binom{k/2}{1} x^{k-2} y^2 + \binom{k/2}{2} x^{k-4} y^4 + \dots + \binom{k/2}{k/2} y^k \right) = \\ &= \lambda (x^2 + y^2)^{k/2}, \quad \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Se  $f$  é representado como  $f(x, y) = \lambda(x^2 + y^2)^{k/2}$ , com  $\lambda \neq 0$ , então

$$p(x, y) = \lambda k x (x^2 + y^2)^{(k-2)/2}, \quad (3.4)$$

$$p(0, 0) = 0,$$

$$q(x, y) = \lambda k y (x^2 + y^2)^{(k-2)/2}, \quad (3.5)$$

$$q(0, 0) = 0,$$

$$r(x, y) = \lambda k (x^2 + y^2)^{(k-2)/2} + \lambda k x^2 (x^2 + y^2)^{(k-4)/2}, \quad (3.6)$$

$$r(0, 0) = 0,$$

$$s(x, y) = \lambda k (k - 2) x y (x^2 + y^2)^{(k-4)/2}, \quad (3.7)$$

$$s(0, 0) = 0,$$

$$t(x, y) = \lambda k (x^2 + y^2)^{(k-2)/2} + \lambda k y^2 (x^2 + y^2)^{(k-4)/2}, \quad (3.8)$$

$$t(0, 0) = 0.$$

Logo,

$$A(0, 0) = s(0, 0) + s(0, 0)p(0, 0)^2 - p(0, 0)q(0, 0)r(0, 0) = 0,$$

$$2B(0, 0) = t(0, 0) - r(0, 0) + t(0, 0)p(0, 0)^2 - r(0, 0)q(0, 0)^2 = 0,$$

$$C(0, 0) = -s(0, 0) + p(0, 0)q(0, 0)t(0, 0) - s(0, 0)q(0, 0)^2 = 0.$$

Note que  $(x, y) = (0, 0)$  é o único ponto em  $\mathbb{R}$  que satisfaz as equações (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8). Logo, existe uma vizinhança  $U_0$  de  $(0, 0)$  tal que  $A(x, y) \neq B(x, y) \neq C(x, y) \neq 0$  para cada ponto pertencente a  $U_0 \setminus \{(0, 0)\}$ . Portanto,  $o = (0, 0)$  é um ponto umbílico isolado de  $G_f$  e  $\text{ind}_o(G_f) = 1$ , pois como  $f(x, y) = \lambda(x^2 + y^2)^{k/2}$ , com  $\lambda \neq 0$ , as linhas de curvatura de  $G_f$  na vizinhança  $U_0$  de  $(0, 0)$  não possuem setores elípticos e nem hiperbólicos. Logo, segue da equação (1) que  $\text{ind}_o(G_f) = 1$ .  $\square$

**Teorema 3.1.** *Seja  $f$  um polinômio homogêneo de grau  $k \geq 3$ . Então a origem  $o$  é um ponto umbílico isolado do  $G_f$  se, e somente se,  $f$  é representado como*

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \times \prod_{i=1}^n (\alpha_i x + \beta_i y)^{\epsilon_i},$$

onde

1.  $\epsilon_i = 0, 1, \text{ ou } 2$ ;

2.  $(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são vetores não nulos tais que  $\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i \neq 0$  para  $i \neq j$ ;
3.  $\varphi$  é um polinômio homogêneo tal que  $\varphi(x, y) \neq 0$  para  $(x, y) \neq (0, 0)$  (é possível que  $\text{grau}(\varphi) = 0$ ).

*Demonstração.* Seja

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \times \prod_{i=1}^n (\alpha_i x + \beta_i y)^{\epsilon_i}$$

e suponha que exista um  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\epsilon_{i_0} \geq 3$ .

Para  $n = 1$ , tem-se apenas um termo no produtório, isto é,

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \times (\alpha x + \beta y)^\epsilon.$$

Calculando as derivadas parciais de  $f$ , obtemos

$$p = \varphi_x(\alpha x + \beta y)^\epsilon + \varphi \epsilon \alpha (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-1},$$

$$q = \varphi_y(\alpha x + \beta y)^\epsilon + \varphi \epsilon \beta (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-1},$$

$$r = \varphi_{xx}(\alpha x + \beta y)^\epsilon + \varphi_x \epsilon \alpha (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-1} + \epsilon \alpha [\varphi_x(\alpha x + \beta y)^{\epsilon-1} + \varphi(\epsilon - 1)\alpha(\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2}]$$

$$= (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2} \underbrace{[\varphi_{xx}(\alpha x + \beta y)^2 + \varphi_x \epsilon \alpha (\alpha x + \beta y) + \epsilon \alpha (\varphi_x(\alpha x + \beta y) + \varphi(\epsilon - 1)\alpha)]}_a$$

$$= (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2} a,$$

$$t = (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2} \underbrace{[\varphi_{yy}(\alpha x + \beta y)^2 + \varphi_y \epsilon \beta (\alpha x + \beta y) + \epsilon \beta (\varphi_y(\alpha x + \beta y) + \varphi(\epsilon - 1)\beta)]}_b$$

$$= (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2} b,$$

$$s = (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2} \underbrace{[\varphi_{xy}(\alpha x + \beta y)^2 + \varphi_y \epsilon \beta (\alpha x + \beta y) + \epsilon \alpha (\varphi_y(\alpha x + \beta y) + \varphi(\epsilon - 1)\beta)]}_c$$

$$= (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2} c.$$

Então, os coeficientes  $A$ ,  $2B$  e  $C$  são dados por

$$\begin{aligned} A &= (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2}c + (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2}cp^2 - pq(\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2}a \\ &= (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2} (c + cp^2 - pqa), \\ 2B &= (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2}b - (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2}a + (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2}bp^2 - (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2}aq^2 \\ &= (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2} (b - a + bp^2 - aq^2), \\ C &= -(\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2}c + pq(\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2}b - (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2}cq^2 \\ &= (\alpha x + \beta y)^{\epsilon-2} (-c + pqb - cq^2). \end{aligned}$$

Sabemos que em um ponto umbílico  $A = 2B = C = 0$ . Uma condição suficiente para que isso ocorra é quando  $\alpha x + \beta y$  se anula. Logo, cada ponto  $(x, y)$  que satisfaz  $\alpha x + \beta y = 0$  é um ponto umbílico de  $G_f$ . Portanto, a origem não é um ponto umbílico isolado de  $G_f$ , o que contradiz a hipótese.

Para  $n > 1$  o raciocínio é análogo, pois o termo  $\alpha x + \beta y$  pode ser colocado em evidência. Reciprocamente, suponha que  $f$  é representado como

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \times \prod_{i=1}^n (\alpha_i x + \beta_i y)^{\epsilon_i}.$$

Se  $D(x, y) \equiv 0$ , então segue da Proposição 3.1 que a origem é um ponto umbílico isolado de  $G_f$ . Suponhamos que  $D(x, y) \not\equiv 0$  e que exista outro ponto umbílico  $(x_0, y_0) \in G_f$  além da origem. Segue do Lema 3.4 que  $(x_0, y_0)$  é raiz da equação  $D(x, y) = 0$ , pois em um ponto umbílico qualquer vetor tangente ao gráfico de  $f$  está numa direção principal. Temos que

$$D(x_0, y_0) = sx_0^2 + (t - r)x_0y_0 - sy_0^2 = 0.$$

O conjunto das raízes de  $D(x, y)$  é representado graficamente como a união finita de retas no plano  $xy$  passando pela origem.

Suponha que  $o$  não é um ponto umbílico isolado, então existe uma sequência infinita  $u_n$  de pontos umbílicos que converge para  $o$ . Assim, temos uma sequência infinita,  $u_n$ , convergindo no conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D(x, y) = 0\}$  que é finito. Logo, existe uma subsequência infinita  $u_{nk}$  de  $u_n$  tendendo para  $o$ . Podemos tomar essa subsequência sob uma reta  $L$  e considerar essa reta como  $y = 0$ . Então,  $u_{nk} = (x_n, 0)$  com  $x_n \neq 0$ . Se



$(x_n, 0)$  não é raiz para ambas as equações  $s = 0$  e  $t - r = 0$ , então, por homogeneidade de  $f$  e pela equação (3.1), existe uma vizinhança  $U_o$  de  $o$  em  $G_f$  tal que  $o$  é o único ponto umbílico em  $U_o \cap \{y = 0\}$ , contradizendo a maneira de encontrar a reta  $L$ . Portanto, suponha que  $(x_n, 0)$  é raiz para ambas equações  $s = 0$  e  $t - r = 0$ . Então, em  $(x_n, 0)$  temos

$$A = s + sp^2 - pqr = -pqr, \quad 2B = t - r + tp^2 - rq^2 = r(p^2 - q^2), \quad C = -s + pqt - sq^2 = pqr.$$

Logo,

$$Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2 = 0 \Rightarrow -pqr dx^2 + r(p^2 - q^2)dxdy + pqr dy^2 = 0.$$

Se  $r(x_n, 0) = 0$ , então  $s(x_n, 0) = r(x_n, 0) = t(x_n, 0) = 0$ . Os polinômios  $r$ ,  $s$  e  $t$  se anulam em um conjunto finito de pontos, mas como  $\{(x_n, 0)\}$  é um conjunto infinito então  $r, s$  e  $t$  devem se anular sobre a reta  $y = 0$ . Logo,  $r = s = t = 0$  em  $y = 0$ . Isso implica que  $f$  é representado como  $f(x, y) = y^\epsilon g(x, y)$ , onde  $\epsilon \geq 3$ , contradizendo uma das hipóteses do teorema. Portanto,  $r(x_n, 0) \neq 0$ . Se  $(x_n, 0)$  é ponto umbílico de  $G_f$ , então

$$-pqr dx^2 + r(p^2 - q^2)dxdy + pqr dy^2 = 0 \Rightarrow r(-pq dx^2 + (p^2 - q^2)dxdy + pq dy^2) = 0.$$

Como  $r \neq 0$  segue que

$$\begin{cases} pq = 0 \\ p^2 - q^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow p = q = 0 \Rightarrow \text{grad}(f) = 0.$$

Assim,  $\text{grad}(f)(x_n, 0) = 0$ . As componentes de  $\text{grad}(f)$  também são polinômios que se anulam sobre a reta  $y = 0$ , ou seja,  $p(x_n, 0) = 0$  e  $q(x_n, 0) = 0$ . Isso implica que  $f$  pode ser escrita como  $f(x, y) = y^2 g(x, y)$ , onde  $g(x, 0) \neq 0$  para  $x \neq 0$ . Então,

$$r(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) \Rightarrow r(x, 0) = 0,$$

contradizendo a hipótese de que  $r(x_n, 0) \neq 0$ .

Portanto, a origem  $o$  é um ponto umbílico isolado de  $G_f$ . □

## 3.2 O comportamento das distribuições principais próximo a uma raiz de $D$

Considere  $f$  um polinômio homogêneo de grau  $k \geq 3$ . Como vimos na seção anterior, podemos escrever  $f$  como

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^k a_m x^{k-m} y^m = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} y + a_2 x^{k-2} y^2 + \dots + a_{k-2} x^2 y^{k-2} + a_{k-1} x y^{k-1} + a_k y^k.$$

Suas derivadas parciais são

$$\begin{aligned} p &= k a_0 x^{k-1} + (k-1) a_1 x^{k-2} y + (k-2) a_2 x^{k-3} y^2 + \dots + 2 a_{k-2} x y^{k-2} + a_{k-1} y^{k-1}, \\ q &= a_1 x^{k-1} + 2 a_2 x^{k-2} y + \dots + (k-2) a_{k-2} x^2 y^{k-3} + (k-1) a_{k-1} x y^{k-2} + k a_k y^{k-1}, \\ r &= k(k-1) a_0 x^{k-2} + (k-1)(k-2) a_1 x^{k-3} y + (k-2)(k-3) a_2 x^{k-4} y^2 + \dots + 2 a_{k-2} y^{k-2}, \\ s &= (k-1) a_1 x^{k-2} + 2(k-2) a_2 x^{k-3} y + \dots + 2(k-2) a_{k-2} x y^{k-3} + (k-1) a_{k-1} y^{k-2}, \\ t &= 2 a_2 x^{k-2} + \dots + (k-2)(k-3) a_{k-2} x^2 y^{k-4} + (k-1)(k-2) a_{k-1} x y^{k-3} + k(k-1) a_k y^{k-2}. \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular as derivadas parciais de  $f$  em coordenadas polares. Fazendo  $x = R \cos \theta$  e  $y = R \sin \theta$ , com  $R > 0$ , temos

$$\begin{aligned} p(R \cos \theta, R \sin \theta) &= k a_0 (R \cos \theta)^{k-1} + (k-1) a_1 (R \cos \theta)^{k-2} (R \sin \theta) + \\ &\quad + (k-2) a_2 (R \cos \theta)^{k-3} (R \sin \theta)^2 + \dots \\ &\quad \dots + 2 a_{k-2} (R \cos \theta) (R \sin \theta)^{k-2} + a_{k-1} (R \sin \theta)^{k-1} = \\ &= R^{k-1} \cdot p(\cos \theta, \sin \theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(R \cos \theta, R \sin \theta) &= a_1 (R \cos \theta)^{k-1} + 2 a_2 (R \cos \theta)^{k-2} (R \sin \theta) + \dots \\ &\quad \dots + (k-2) a_{k-2} (R \cos \theta)^2 (R \sin \theta)^{k-3} + \\ &\quad + (k-1) a_{k-1} (R \cos \theta) (R \sin \theta)^{k-2} + k a_k (R \sin \theta)^{k-1} = \\ &= R^{k-1} \cdot q(\cos \theta, \sin \theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(R \cos \theta, R \sin \theta) &= k(k-1) a_0 (R \cos \theta)^{k-2} + (k-1)(k-2) a_1 (R \cos \theta)^{k-3} (R \sin \theta) + \\ &\quad + (k-2)(k-3) a_2 (R \cos \theta)^{k-4} (R \sin \theta)^2 + \dots + 2 a_{k-2} (R \sin \theta)^{k-2} = \\ &= R^{k-2} \cdot r(\cos \theta, \sin \theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s(R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta) &= (k-1)a_1(R \cos \theta)^{k-2} + 2(k-2)a_2(R \cos \theta)^{k-3}(R \operatorname{sen} \theta) + \dots \\
&\quad \dots + 2(k-2)a_{k-2}(R \cos \theta)(R \operatorname{sen} \theta)^{k-3} + (k-1)a_{k-1}(R \operatorname{sen} \theta)^{k-2} = \\
&= R^{k-2} \cdot s(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t(R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta) &= 2a_2(R \cos \theta)^{k-2} + \dots + (k-2)(k-3)a_{k-2}(R \cos \theta)^2(R \operatorname{sen} \theta)^{k-4} + \\
&\quad + (k-1)(k-2)a_{k-1}(R \cos \theta)(R \operatorname{sen} \theta)^{k-3} + k(k-1)a_k(R \operatorname{sen} \theta)^{k-2} \\
&= R^{k-2} \cdot t(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta).
\end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned}
\tilde{p} = \tilde{p}(\theta) &= p(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta), & \tilde{q} = \tilde{q}(\theta) &= q(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta), & \tilde{r} = \tilde{r}(\theta) &= r(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta), \\
\tilde{s} = \tilde{s}(\theta) &= s(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) & e & \tilde{t} = \tilde{t}(\theta) &= t(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta).
\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}
p(R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta) &= R^{k-1} \cdot \tilde{p}, & q(R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta) &= R^{k-1} \cdot \tilde{q}, \\
r(R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta) &= R^{k-2} \cdot \tilde{r}, & s(R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta) &= R^{k-2} \cdot \tilde{s} \\
e & t(R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta) = R^{k-2} \cdot \tilde{t}.
\end{aligned}$$

Calculando  $A$ ,  $2B$  e  $C$  em  $(R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta)$ , temos

$$\begin{aligned}
\tilde{A} = A(R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta) &= (s + sp^2 - pqr) (R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta) = \\
&= R^{k-2}\tilde{s} + R^{k-2}\tilde{s}(R^{k-1}\tilde{p})^2 - R^{k-1}\tilde{p}R^{k-1}\tilde{q}R^{k-2}\tilde{r} = \\
&= R^{k-2}\tilde{s} + R^{3k-4}\tilde{s}\tilde{p}^2 - R^{3k-4}\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r} = \\
&= R^{k-2}\tilde{s} + R^{3k-4}(\tilde{s}\tilde{p}^2 - \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\tilde{B} = 2B(R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta) &= (t - r + tp^2 - rq^2) (R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta) = \\
&= R^{k-2}\tilde{t} - R^{k-2}\tilde{r} + R^{k-2}\tilde{t}(R^{k-1}\tilde{p})^2 - R^{k-2}\tilde{r}(R^{k-1}\tilde{q})^2 = \\
&= R^{k-2}(\tilde{t} - \tilde{r}) + R^{3k-4}(\tilde{t}\tilde{p}^2 - \tilde{r}\tilde{q}^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{C} = C(R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta) &= (-s + pqt - sq^2) (R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta) = \\
&= -R^{k-2}\tilde{s} + R^{k-1}\tilde{p}R^{k-1}\tilde{q}R^{k-2}\tilde{t} - R^{k-2}\tilde{s}(R^{k-1}\tilde{q})^2 = \\
&= R^{k-2}(-\tilde{s}) + R^{3k-4}(\tilde{p}\tilde{q}\tilde{t} - \tilde{s}\tilde{q}^2).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1, um vetor tangente  $\cos \phi(\partial/\partial x) + \sin \phi(\partial/\partial y)$  no ponto  $(R \cos \theta, R \sin \theta)$  está numa direção principal se, e somente se,

$$\tilde{A} \cos^2 \phi + 2\tilde{B} \cos \phi \sin \phi + \tilde{C} \sin^2 \phi = 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned} & [R^{k-2}\tilde{s} + R^{3k-4}(\tilde{s}\tilde{p}^2 - \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r})] \cos^2 \phi + [R^{k-2}(\tilde{t} - \tilde{r}) + R^{3k-4}(\tilde{t}\tilde{p}^2 - \tilde{r}\tilde{q}^2)] \cos \phi \sin \phi \\ & + [R^{k-2}(-\tilde{s}) + R^{3k-4}(\tilde{p}\tilde{q}\tilde{t} - \tilde{s}\tilde{q}^2)] \sin^2 \phi = 0, \end{aligned}$$

ou seja, se, e somente se,

$$\begin{aligned} & R^{k-2} [\tilde{s} \cos^2 \phi + (\tilde{t} - \tilde{r}) \cos \phi \sin \phi - \tilde{s} \sin^2 \phi] + \\ & + R^{3k-4} [(\tilde{s}\tilde{p}^2 - \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}) \cos^2 \phi + (\tilde{t}\tilde{p}^2 - \tilde{r}\tilde{q}^2) \cos \phi \sin \phi + (\tilde{p}\tilde{q}\tilde{t} - \tilde{s}\tilde{q}^2) \sin^2 \phi] = 0 \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$R^{k-2}d(\theta, \phi) + R^{3k-4}n(\theta, \phi) = 0,$$

onde

$$d(\theta, \phi) = \tilde{s} \cos^2 \phi + (\tilde{t} - \tilde{r}) \cos \phi \sin \phi - \tilde{s} \sin^2 \phi, \quad (3.9)$$

$$n(\theta, \phi) = (\tilde{s}\tilde{p}^2 - \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}) \cos^2 \phi + (\tilde{t}\tilde{p}^2 - \tilde{r}\tilde{q}^2) \cos \phi \sin \phi + (\tilde{p}\tilde{q}\tilde{t} - \tilde{s}\tilde{q}^2) \sin^2 \phi. \quad (3.10)$$

Portanto,  $(\theta_0, \phi_0)$  satisfaz a equação  $R^{k-2}d(\theta_0, \phi_0) + R^{3k-4}n(\theta_0, \phi_0) = 0$  se, e somente se, o vetor tangente  $\cos \phi_0(\partial/\partial x) + \sin \phi_0(\partial/\partial y)$  no ponto  $(R \cos \theta_0, R \sin \theta_0)$  está numa direção principal.

**Observação 3.1 (Convenção).** *Como estamos interessados no estudo de pontos umbílicos isolados, de agora em diante, considere  $R$  uma constante positiva tal que em  $0 < x^2 + y^2 \leq R^2$  não existe ponto umbílico. Denotaremos por  $R_0$  o supremo dos números  $R$ .*

**Lema 3.6.** *Se  $\theta_0, \phi_0 \in \mathbb{R}$  satisfazem  $R^{k-2}d(\theta_0, \phi_0) + R^{3k-4}n(\theta_0, \phi_0) = 0$ , então existe uma única função diferenciável  $\phi(\theta)$  satisfazendo  $\phi(\theta_0) = \phi_0$  e*

$$R^{k-2}d(\theta, \phi(\theta)) + R^{3k-4}n(\theta_0, \phi(\theta)) = 0, \quad (3.11)$$

para quaisquer  $\theta \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Seja  $\delta$  a distribuição principal de  $G_f$ . Como  $\delta$  é uma distribuição regular de  $G_f \setminus \text{Umb}(G_f)$ , existe uma única função  $\phi(\theta)$  satisfazendo  $\phi(\theta_0) = \phi_0$  e  $R^{k-2}d(\theta, \phi(\theta)) + R^{3k-4}n(\theta_0, \phi(\theta)) = 0$ , para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ . Assim, resta mostrar a regularidade de  $\phi(\theta_0)$ . Como calculamos anteriormente, temos que

$$R^{k-2}d(\theta, \phi) + R^{3k-4}n(\theta, \phi) = \tilde{A} \cos^2 \phi + 2\tilde{B} \cos \phi \sin \phi + \tilde{C} \sin^2 \phi, \quad (3.12)$$

onde  $\tilde{A} = A(R \cos \theta, R \sin \theta)$ ,  $2\tilde{B} = 2B(R \cos \theta, R \sin \theta)$  e  $\tilde{C} = C(R \cos \theta, R \sin \theta)$ .

Para todo  $\theta \in \mathbb{R}$  e para todo  $R \in (0, R_0)$ , podemos encontrar números reais  $\phi_{R,\theta}$ ,  $\lambda_{R,\theta}^{(1)}$ ,  $\lambda_{R,\theta}^{(2)}$  tais que

$$\begin{aligned} & \lambda_{R,\theta}^{(1)} \cos^2(\phi - \phi_{R,\theta}) + \lambda_{R,\theta}^{(2)} \sin^2(\phi - \phi_{R,\theta}) = \\ & = \lambda_{R,\theta}^{(1)} (\cos \phi \cos \phi_{R,\theta} + \sin \phi \sin \phi_{R,\theta})^2 + \lambda_{R,\theta}^{(2)} (\sin \phi \cos \phi_{R,\theta} - \cos \phi \sin \phi_{R,\theta})^2 = \\ & = \lambda_{R,\theta}^{(1)} (\cos^2 \phi \cos^2 \phi_{R,\theta} + 2 \cos \phi \cos \phi_{R,\theta} \sin \phi \sin \phi_{R,\theta} + \sin^2 \phi \sin^2 \phi_{R,\theta}) + \\ & \quad + \lambda_{R,\theta}^{(2)} (\cos^2 \phi \sin^2 \phi_{R,\theta} - 2 \cos \phi \cos \phi_{R,\theta} \sin \phi \sin \phi_{R,\theta} + \sin^2 \phi \cos^2 \phi_{R,\theta}) = \\ & = \left( \lambda_{R,\theta}^{(1)} \cos^2 \phi_{R,\theta} + \lambda_{R,\theta}^{(2)} \sin^2 \phi_{R,\theta} \right) \cos^2 \phi + \\ & \quad + \left( 2 \lambda_{R,\theta}^{(1)} \cos \phi_{R,\theta} \sin \phi_{R,\theta} - 2 \lambda_{R,\theta}^{(2)} \cos \phi_{R,\theta} \sin \phi_{R,\theta} \right) \sin \phi \cos \phi + \\ & \quad + \left( \lambda_{R,\theta}^{(1)} \sin^2 \phi_{R,\theta} + \lambda_{R,\theta}^{(2)} \cos^2 \phi_{R,\theta} \right) \sin^2 \phi. \end{aligned}$$

Comparando com a equação (3.12), vemos que

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \lambda_{R,\theta}^{(1)} \cos^2 \phi_{R,\theta} + \lambda_{R,\theta}^{(2)} \sin^2 \phi_{R,\theta}, \\ 2\tilde{B} &= 2 \lambda_{R,\theta}^{(1)} \cos \phi_{R,\theta} \sin \phi_{R,\theta} - 2 \lambda_{R,\theta}^{(2)} \cos \phi_{R,\theta} \sin \phi_{R,\theta}, \\ \tilde{C} &= \lambda_{R,\theta}^{(1)} \sin^2 \phi_{R,\theta} + \lambda_{R,\theta}^{(2)} \cos^2 \phi_{R,\theta}, \end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \lambda_{R,\theta}^{(1)} \cos^2(\phi - \phi_{R,\theta}) + \lambda_{R,\theta}^{(2)} \sin^2(\phi - \phi_{R,\theta}) &= \tilde{A} \cos^2 \phi + 2\tilde{B} \cos \phi \sin \phi + \tilde{C} \sin^2 \phi = \\ &= R^{k-2}d(\theta, \phi) + R^{3k-4}n(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pela Convenção 3.1, vemos que não existem pontos umbílicos em uma vizinhança de  $(0, 0)$ . Logo,  $\tilde{A}\tilde{C} - \tilde{B}^2 < 0$  para  $R \in (0, R_0)$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{A}\tilde{C} - \tilde{B}^2 &= \left( \lambda_{R,\theta}^{(1)} \cos^2 \phi_{R,\theta} + \lambda_{R,\theta}^{(2)} \sen^2 \phi_{R,\theta} \right) \left( \lambda_{R,\theta}^{(1)} \sen^2 \phi_{R,\theta} + \lambda_{R,\theta}^{(2)} \cos^2 \phi_{R,\theta} \right) - \\
&\quad - \left( \lambda_{R,\theta}^{(1)} \cos \phi_{R,\theta} \sen \phi_{R,\theta} - \lambda_{R,\theta}^{(2)} \cos \phi_{R,\theta} \sen \phi_{R,\theta} \right)^2 = \\
&= \left( \lambda_{R,\theta}^{(1)} \cos \phi_{R,\theta} \sen \phi_{R,\theta} \right)^2 + \lambda_{R,\theta}^{(1)} \lambda_{R,\theta}^{(2)} \cos^4 \phi_{R,\theta} + \lambda_{R,\theta}^{(1)} \lambda_{R,\theta}^{(2)} \sen^4 \phi_{R,\theta} + \\
&\quad + \left( \lambda_{R,\theta}^{(2)} \cos \phi_{R,\theta} \sen \phi_{R,\theta} \right)^2 - \left( \lambda_{R,\theta}^{(1)} \cos \phi_{R,\theta} \sen \phi_{R,\theta} \right)^2 + \\
&\quad + 2 \lambda_{R,\theta}^{(1)} \lambda_{R,\theta}^{(2)} \cos^2 \phi_{R,\theta} \sen^2 \phi_{R,\theta} - \left( \lambda_{R,\theta}^{(2)} \cos \phi_{R,\theta} \sen \phi_{R,\theta} \right)^2 = \\
&= \lambda_{R,\theta}^{(1)} \lambda_{R,\theta}^{(2)} \left( \cos^4 \phi_{R,\theta} + 2 \cos^2 \phi_{R,\theta} \sen^2 \phi_{R,\theta} + \sen^4 \phi_{R,\theta} \right) = \\
&= \lambda_{R,\theta}^{(1)} \lambda_{R,\theta}^{(2)} \left( \cos^2 \phi_{R,\theta} + \sen^2 \phi_{R,\theta} \right)^2 < 0,
\end{aligned}$$

e, portanto,  $\lambda_{R,\theta}^{(1)} \lambda_{R,\theta}^{(2)} < 0$ . Da equação (3.13) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left( R^{k-2} d(\theta, \phi) + R^{3k-4} n(\theta, \phi) \right) = 2 \left( \lambda_{R,\theta}^{(2)} - \lambda_{R,\theta}^{(1)} \right) \sen(\phi - \phi_{R,\theta}) \cos(\phi - \phi_{R,\theta}).$$

Se  $\theta_0, \phi_0 \in \mathbb{R}$  satisfazem

$$R^{k-2} d(\theta_0, \phi_0) + R^{3k-4} n(\theta_0, \phi_0) = \lambda_{R,\theta_0}^{(1)} \cos^2(\phi_0 - \phi_{R,\theta_0}) + \lambda_{R,\theta_0}^{(2)} \sen^2(\phi_0 - \phi_{R,\theta_0}) = 0,$$

então vemos que nem  $\sen(\phi_0 - \phi_{R,\theta_0})$  e nem  $\cos(\phi_0 - \phi_{R,\theta_0})$  se anulam e como  $\lambda_{R,\theta_0}^{(1)} \lambda_{R,\theta_0}^{(2)} < 0$  segue que

$$\left. \frac{\partial}{\partial \phi} \left( R^{k-2} d(\theta, \phi) + R^{3k-4} n(\theta, \phi) \right) \right|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\phi_0)} \neq 0.$$

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, segue que a função  $\phi$  é suave em  $\theta_0$ , concluindo a demonstração.  $\square$

**Definição 3.1.** *Definimos o índice do ponto umbílico isolado do gráfico de  $f$  por*

$$\text{ind}_o(G_f) = \frac{\phi(\theta_0 + 2\pi) - \phi_0}{2\pi},$$

onde  $\phi$  é a função argumento no círculo  $x^2 + y^2 = R^2$  com valores iniciais  $(\theta_0, \phi_0)$ .

Para qualquer  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\tilde{d}(\theta) = d(\theta, \theta) = D(\cos \theta, \sen \theta), \tag{3.14}$$

$$\tilde{n}(\theta) = n(\theta, \theta) = N(\cos \theta, \sin \theta) = 0. \quad (3.15)$$

Note que a equação (3.15) é válida, pois mostramos no Lema 3.3 que  $N(x, y) = 0$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Lema 3.7.** *Sejam  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  uma raiz de  $\tilde{d}$  e  $\phi$  a função argumento no círculo  $x^2 + y^2 = R^2$  com valores iniciais  $(\theta_0, \theta_0)$ . Suponha que exista  $0 < n \in \mathbb{Z}$  tal que*

$$\left. \frac{d^m}{d\theta^m}(\theta - \phi) \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad (m = 0, 1, \dots, n-1).$$

Então,

$$\left. \frac{d^n}{d\theta^n}(\theta - \phi) \right|_{\theta=\theta_0} = \frac{\frac{d^n[\tilde{d}]}{d\theta^n}(\theta_0)}{\left. \frac{\partial(d+R^{2k-2}n)}{\partial\phi} \right|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\theta_0)}}. \quad (3.16)$$

*Demonstração.* Suponha  $n = 1$ . Então, do Teorema da Função Implícita temos

$$\frac{d\phi}{d\theta} = -\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}(R^{k-2}d + R^{3k-4}n)}{\frac{\partial}{\partial\phi}(R^{k-2}d + R^{3k-4}n)} = -\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}(d + R^{2k-2}n)}{\frac{\partial}{\partial\phi}(d + R^{2k-2}n)}.$$

Pela equação (3.15), concluímos que

$$\frac{\partial n}{\partial\theta}(\theta_0, \theta_0) + \frac{\partial n}{\partial\phi}(\theta_0, \theta_0) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\theta}(\theta - \phi) \right|_{\theta=\theta_0} &= 1 - \left. \frac{d\phi}{d\theta} \right|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\theta_0)} = 1 + \left( \frac{\frac{\partial}{\partial\theta}(d + R^{2k-2}n)}{\frac{\partial}{\partial\phi}(d + R^{2k-2}n)} \right) \Big|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\theta_0)} = \\ &= \left( \frac{\frac{\partial}{\partial\phi}(d + R^{2k-2}n) + \frac{\partial}{\partial\theta}(d + R^{2k-2}n)}{\frac{\partial}{\partial\phi}(d + R^{2k-2}n)} \right) \Big|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\theta_0)} = \\ &= \left( \frac{\frac{\partial d}{\partial\phi} + \frac{\partial d}{\partial\theta} + R^{2k-2} \left( \frac{\partial n}{\partial\phi} + \frac{\partial n}{\partial\theta} \right)}{\frac{\partial}{\partial\phi}(d + R^{2k-2}n)} \right) \Big|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\theta_0)} = \\ &= \left( \frac{\frac{\partial d}{\partial\phi} + \frac{\partial d}{\partial\theta}}{\frac{\partial}{\partial\phi}(d + R^{2k-2}n)} \right) \Big|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\theta_0)}. \end{aligned}$$

As derivadas parciais de  $d(\theta, \phi)$ , definida pela equação (3.9), são dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial \phi}(\theta, \phi) &= -4\tilde{s} \operatorname{sen} \phi \cos \phi + (\tilde{t} - \tilde{r})(\cos^2 \phi - \operatorname{sen}^2 \phi), \\ \frac{\partial d}{\partial \theta}(\theta, \phi) &= \frac{d[\tilde{s}]}{d\theta}(\cos^2 \phi - \operatorname{sen}^2 \phi) + \left(\frac{d[\tilde{t}]}{d\theta} - \frac{d[\tilde{r}]}{d\theta}\right) \operatorname{sen} \phi \cos \phi.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\partial d}{\partial \phi}(\theta, \phi) + \frac{\partial d}{\partial \theta}(\theta, \phi) = \left(\tilde{t} - \tilde{r} + \frac{d[\tilde{s}]}{d\theta}\right) (\cos^2 \phi - \operatorname{sen}^2 \phi) + \left(\frac{d[\tilde{t}]}{d\theta} - \frac{d[\tilde{r}]}{d\theta} - 4\tilde{s}\right) \operatorname{sen} \phi \cos \phi.$$

Calculando a equação anterior em  $(\theta, \phi) = (\theta_0, \theta_0)$  obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial \phi}(\theta_0, \theta_0) + \frac{\partial d}{\partial \theta}(\theta_0, \theta_0) &= \left(\tilde{t}(\theta_0) - \tilde{r}(\theta_0) + \frac{d[\tilde{s}]}{d\theta}(\theta_0)\right) (\cos^2 \theta_0 - \operatorname{sen}^2 \theta_0) + \\ &+ \left(\frac{d[\tilde{t}]}{d\theta}(\theta_0) - \frac{d[\tilde{r}]}{d\theta}(\theta_0) - 4\tilde{s}(\theta_0)\right) \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\tilde{d}(\theta) = d(\theta, \theta) = \tilde{s} (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + (\tilde{t} - \tilde{r}) \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

e

$$\frac{d[\tilde{d}(\theta)]}{d\theta} = \left(\tilde{t} - \tilde{r} + \frac{d[\tilde{s}]}{d\theta}\right) (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + \left(\frac{d[\tilde{t}]}{d\theta} - \frac{d[\tilde{r}]}{d\theta} - 4\tilde{s}\right) \operatorname{sen} \theta \cos \theta.$$

Logo,

$$\frac{\partial d}{\partial \phi}(\theta_0, \theta_0) + \frac{\partial d}{\partial \theta}(\theta_0, \theta_0) = \frac{d[\tilde{d}]}{d\theta}(\theta_0).$$

Dessa forma, obtemos

$$\frac{d}{d\theta}(\theta - \phi) \Big|_{\theta=\theta_0} = \left(\frac{\frac{\partial d}{\partial \phi} + \frac{\partial d}{\partial \theta}}{\frac{\partial}{\partial \phi}(d + R^{2k-2n})}\right) \Big|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\theta_0)} = \frac{\frac{d[\tilde{d}]}{d\theta}(\theta_0)}{\frac{\partial}{\partial \phi}(d + R^{2k-2n}) \Big|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\theta_0)}}.$$

Similarmente, para  $n = 2$ , temos

$$\frac{d^2 \phi}{d\theta^2} = -\frac{\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2\frac{d\phi}{d\theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} + \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right] (d + R^{2k-2n})}{\frac{\partial(d + R^{2k-2n})}{\partial \phi}}.$$

Suponha que

$$\frac{d}{d\theta}(\theta - \phi) \Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{d\theta}(\theta_0) = 1.$$



Então segue que

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2}(\theta_0) = \frac{\left[ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] (d + R^{2k-2}n) \Big|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\theta_0)}}{\frac{\partial(d+R^{2k-2}n)}{\partial\phi} \Big|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\theta_0)}}.$$

Como

$$\frac{\partial^2 n}{\partial\theta^2}(\theta_0, \theta_0) + 2\frac{\partial^2 n}{\partial\theta\partial\phi}(\theta_0, \theta_0) + \frac{\partial^2 n}{\partial\phi^2}(\theta_0, \theta_0) = 0,$$

obtemos

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\theta - \phi) \Big|_{\theta=\theta_0} = -\frac{d^2\phi}{d\theta^2}(\theta_0) = \frac{\left[ \frac{\partial^2 d}{\partial\theta^2} + 2\frac{\partial^2 d}{\partial\theta\partial\phi} + \frac{\partial^2 d}{\partial\phi^2} \right] \Big|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\theta_0)}}{\frac{\partial(d+R^{2k-2}n)}{\partial\phi} \Big|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\theta_0)}} = \frac{\frac{d^2}{d\theta^2}[\tilde{d}](\theta_0)}{\frac{\partial(d+R^{2k-2}n)}{\partial\phi} \Big|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\theta_0)}}.$$

Para  $n \geq 3$ , segue indutivamente. Isso conclui a demonstração deste lema.  $\square$

Considere  $f(x, y) = \sum_{m=0}^k a_m x^{k-m} y^m$ . As derivadas parciais são

$$p = \sum_{m=0}^k \frac{a_m x^{k-m} (k-m) y^m}{x} \quad e \quad q = \sum_{m=0}^k \frac{a_m x^{k-m} y^m m}{y}.$$

Fazendo  $x = \cos \theta$  e  $y = \sin \theta$ , temos

$$\tilde{f}(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta) = \sum_{m=0}^k a_m (\cos \theta)^{k-m} (\sin \theta)^m, \quad (3.17)$$

$$\tilde{p} = \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (k-m) (\sin \theta)^m}{\cos \theta}, \quad (3.18)$$

$$\tilde{q} = \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (\sin \theta)^m m}{\sin \theta}. \quad (3.19)$$

A derivada de  $\tilde{f}$  é

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta) &= \sum_{m=0}^k \left( -\frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (k-m) (\sin \theta)^m \sin \theta}{\cos \theta} + \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (\sin \theta)^m m \cos \theta}{\sin \theta} \right) = \\ &= \tilde{q} \cos \theta - \tilde{p} \sin \theta. \end{aligned}$$

Dessa forma, utilizando a equação (3.3), podemos escrever  $\tilde{d}$  como

$$\tilde{d}(\theta) = D(\cos \theta, \sin \theta) = (k-1) \left\langle \left( \begin{array}{c} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{array} \right) \right\rangle = (k-1) (\tilde{q} \cos \theta - \tilde{p} \sin \theta).$$

Portanto,

$$\tilde{d}(\theta) = (k-1) \frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta). \quad (3.20)$$

**Observação 3.2.** *Note que, pela equação (3.20),  $\theta_0$  é uma raiz de  $\tilde{d}$  se, e somente se,  $\theta_0$  é um ponto crítico de  $\tilde{f}$ .*

Se  $\tilde{d}(\theta) \equiv 0$ , então  $\tilde{f}$  é representado como na Proposição 3.1. Portanto, de agora em diante, vamos considerar  $\tilde{d}(\theta) \not\equiv 0$ .

**Definição 3.2.** *Dizemos que uma raiz  $\theta_0$  de  $\tilde{d}$  é **relacionada** se  $\tilde{f}$  atinge um extremo em  $\theta_0$ . Caso contrário, dizemos que  $\theta_0$  é uma raiz **não relacionada** de  $\tilde{d}$ .*

Como  $D$  é um polinômio homogêneo, podemos escrevê-lo como

$$D(x, y) = \psi(x, y) \times \prod_{i=1}^N (\gamma_i x + \delta_i y)^{\mu_i},$$

onde

- (1)  $\mu_i$  é um inteiro tal que  $\mu_i \geq 0$ ;
- (2)  $(\gamma_i, \delta_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , são vetores não nulos tais que  $\gamma_i \delta_j - \gamma_j \delta_i \neq 0$  para  $i \neq j$ ;
- (3)  $\psi$  é um polinômio homogêneo tal que  $\psi(x, y) \neq 0$  para  $(x, y) \neq 0$  (é possível que o grau( $\psi$ ) = 0).

Desse modo,

$$\tilde{d}(\theta) = D(\cos \theta, \sin \theta) = \psi(\cos \theta, \sin \theta) \times \prod_{i=1}^N (\gamma_i \cos \theta + \delta_i \sin \theta)^{\mu_i}.$$

Pelo item (3) vemos que  $\psi(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$ , pois  $(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$  para qualquer  $\theta$ . Logo,  $\theta_0$  é uma raiz de  $\tilde{d}$  se, e somente se,  $\gamma_{i_0} \cos \theta_0 + \delta_{i_0} \sin \theta_0 = 0$  para algum inteiro  $i_0 \in \{1, \dots, N\}$ . Dizemos que  $\mu_{i_0}$  é a **multiplicidade** de  $\theta_0$ .

**Proposição 3.2.** *Seja  $\theta_0$  uma raiz de  $\tilde{d}$  com multiplicidade  $\mu_0$ . Então, as seguintes afirmações são válidas.*

- (1)  $\frac{d^m}{d\theta^m}\tilde{d}(\theta_0) = 0$ , para  $m = 0, 1, \dots, \mu_0 - 1$ ;
- (2)  $\frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}}\tilde{d}(\theta_0) \neq 0$ ;
- (3)  $\theta_0$  é relacionada (respec. não relacionada) se, e somente se,  $\mu_0$  é ímpar (respec. par).

*Demonstração.* Segue imediatamente das definições apresentadas. □

**Definição 3.3.** *Sejam  $\theta_0$  uma raiz relacionada de  $\tilde{d}$  com multiplicidade  $\mu_0$  e  $\phi$  a função argumento no círculo  $x^2 + y^2 = R^2$  com valores iniciais  $(\theta_0, \theta_0)$ . Então, definimos o **signal** de  $\theta_0$  da seguinte forma.*

- (1)  $\theta_0$  é **positivo** se

$$\left. \frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}}(\theta - \phi) \right|_{\theta=\theta_0} > 0;$$

- (2)  $\theta_0$  é **negativo** se

$$\left. \frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}}(\theta - \phi) \right|_{\theta=\theta_0} < 0.$$

**Definição 3.4.** *Considere  $\theta_0$  uma raiz relacionada de  $\tilde{d}$ . Definimos o **signal crítico** de  $\theta_0$  como se segue.*

- (1) O **signal crítico** de  $\theta_0$  é **positivo** se vale uma das seguintes afirmações.

- (i)  $\tilde{f}(\theta_0)$  é um máximo relativo e  $\tilde{f}(\theta_0) \geq 0$  ou;
- (ii)  $\tilde{f}(\theta_0)$  é um mínimo relativo e  $\tilde{f}(\theta_0) \leq 0$ .

- (2) O **signal crítico** de  $\theta_0$  é **negativo** se vale uma das seguintes afirmações.

- (i)  $\tilde{f}(\theta_0)$  é um máximo relativo e  $\tilde{f}(\theta_0) < 0$  ou;
- (ii)  $\tilde{f}(\theta_0)$  é um mínimo relativo e  $\tilde{f}(\theta_0) > 0$ .

**Lema 3.8.** *Considere  $\theta_0$  uma raiz relacionada de  $\tilde{d}$ . Se o sinal crítico de  $\theta_0$  é positivo então*

$$(1) \frac{\partial d}{\partial \phi}(\theta_0, \theta_0) < 0 \text{ se } \tilde{f}(\theta_0) \text{ é um máximo relativo e } \tilde{f}(\theta_0) \geq 0;$$

$$(2) \frac{\partial d}{\partial \phi}(\theta_0, \theta_0) > 0 \text{ se } \tilde{f}(\theta_0) \text{ é um mínimo relativo e } \tilde{f}(\theta_0) \leq 0.$$

*Demonstração.* Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\theta_0 = 0$ . Sabemos que

$$\begin{aligned} d(\theta, \phi) &= \tilde{s} \cos^2 \phi + (\tilde{t} - \tilde{r}) \sen \phi \cos \phi - \tilde{s} \sen^2 \phi = \\ &= \tilde{s}(\cos^2 \phi - \sen^2 \phi) + (\tilde{t} - \tilde{r}) \sen \phi \cos \phi = \\ &= \tilde{s} \cos 2\phi + \frac{(\tilde{t} - \tilde{r})}{2} \sen 2\phi. \end{aligned}$$

Calculando a derivada parcial de  $d$  em relação a  $\phi$  obtemos

$$\frac{\partial d}{\partial \phi}(\theta, \phi) = -2\tilde{s} \sen 2\phi + (\tilde{t} - \tilde{r}) \cos 2\phi,$$

logo

$$\frac{\partial d}{\partial \phi}(0, 0) = \tilde{t}(0) - \tilde{r}(0).$$

Por outro lado, temos que

$$\tilde{d}(\theta) = (k-1) \frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta) \implies \frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta) = \frac{1}{(k-1)} \tilde{d}(\theta),$$

$$\frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta) = \frac{1}{(k-1)}(k-1)(\tilde{q} \cos \theta - \tilde{p} \sen \theta) \implies \frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta) = \tilde{q} \cos \theta - \tilde{p} \sen \theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{f}}{d\theta^2}(\theta) &= \frac{d[\tilde{q}]}{d\theta} \cos \theta - \tilde{q} \sen \theta - \frac{d[\tilde{p}]}{d\theta} \sen \theta - \tilde{p} \cos \theta = \\ &= -(\tilde{p} \cos \theta + \tilde{q} \sen \theta) + \frac{d[\tilde{q}]}{d\theta} \cos \theta - \frac{d[\tilde{p}]}{d\theta} \sen \theta. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Das equações (3.18) e (3.19) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d[\tilde{p}]}{d\theta}(\theta) &= - \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (k-m)^2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta)^m}{(\cos \theta)^2} + \\ &+ \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (k-m) (\operatorname{sen} \theta)^m \operatorname{sen} \theta}{(\cos \theta)^2} + \\ &+ \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (k-m) (\operatorname{sen} \theta)^m m}{\operatorname{sen} \theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\tilde{q}]}{d\theta}(\theta) &= - \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (k-m) (\operatorname{sen} \theta)^m m}{\cos \theta} + \\ &+ \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (\operatorname{sen} \theta)^m m^2 \cos \theta}{(\operatorname{sen} \theta)^2} - \\ &- \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (\operatorname{sen} \theta)^m m \cos \theta}{(\operatorname{sen} \theta)^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d[\tilde{p}]}{d\theta}(\theta) \operatorname{sen} \theta &= - \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (k-m)^2 (\operatorname{sen} \theta)^2 (\operatorname{sen} \theta)^m}{(\cos \theta)^2} + \\ &+ \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (k-m) (\operatorname{sen} \theta)^m (\operatorname{sen} \theta)^2}{(\cos \theta)^2} + \\ &+ \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (k-m) (\operatorname{sen} \theta)^m m \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\tilde{q}]}{d\theta}(\theta) \cos \theta &= - \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (k-m) (\operatorname{sen} \theta)^m m \cos(\theta)}{\cos \theta} + \\ &+ \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (\operatorname{sen} \theta)^m m^2 (\cos \theta)^2}{(\operatorname{sen} \theta)^2} - \\ &- \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (\operatorname{sen} \theta)^m m (\cos \theta)^2}{(\operatorname{sen} \theta)^2}. \end{aligned}$$

No entanto,

$$r = \sum_{m=0}^k \left( \frac{a_m x^{k-m} (k-m)^2 y^m}{x^2} - \frac{a_m y^m (k-m) x^{k-m}}{x^2} \right),$$

$$\begin{aligned}
\tilde{r} &= \sum_{m=0}^k \left( \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (k-m)^2 (\sin \theta)^m}{(\cos \theta)^2} - \frac{a_m (\sin \theta)^m (k-m) (\cos \theta)^{k-m}}{(\cos \theta)^2} \right), \\
s &= \sum_{m=0}^k \frac{a_m y^m (k-m) x^{k-m} m}{xy}, \\
\tilde{s} &= \sum_{m=0}^k \frac{a_m (\sin \theta)^m (k-m) (\cos \theta)^{k-m} m}{\cos \theta \sin \theta}, \\
t &= \sum_{m=0}^k \left( \frac{a_m y^m x^{k-m} m^2}{y^2} - \frac{m y^m a_m x^{k-m}}{y^2} \right), \\
\tilde{t} &= \sum_{m=0}^k \left( \frac{a_m (\sin \theta)^m (\cos \theta)^{k-m} m^2}{(\sin \theta)^2} - \frac{m (\sin \theta)^m a_m (\cos \theta)^{k-m}}{(\sin \theta)^2} \right). \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Desse modo, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d[\tilde{p}]}{d\theta}(\theta) \sin \theta &= -\tilde{r} \sin^2 \theta + \tilde{s} \sin \theta \cos \theta, \\
\frac{d[\tilde{q}]}{d\theta}(\theta) \cos \theta &= \tilde{t} \cos^2 \theta - \tilde{s} \sin \theta \cos \theta.
\end{aligned}$$

Portanto, da equação (3.21) obtemos

$$\frac{d^2 \tilde{f}}{d\theta^2}(\theta) = -(\tilde{p} \cos \theta + \tilde{q} \sin \theta) + \tilde{t} \cos^2 \theta + \tilde{r} \sin^2 \theta - 2\tilde{s} \sin \theta \cos \theta. \tag{3.23}$$

Da equação (3.2) temos que  $rx + sy = (k-1)p$ . Logo,

$$\tilde{r} \cos \theta + \tilde{s} \sin \theta = (k-1)\tilde{p} \Rightarrow \tilde{r}(0) \cos(0) + \tilde{s}(0) \sin(0) = (k-1)\tilde{p}(0) \Rightarrow \tilde{r}(0) = (k-1)\tilde{p}(0).$$

Por outro lado, pelas equações (3.17) e (3.18), vemos que

$$\tilde{p}(0) = ka_0 = k\tilde{f}(0),$$

e, portanto,

$$\tilde{r}(0) = (k-1)\tilde{p}(0) = k(k-1)\tilde{f}(0). \tag{3.24}$$

Calculando a equação (3.21) em  $\theta_0 = 0$  obtemos

$$\frac{d^2 \tilde{f}}{d\theta^2}(0) = \tilde{t}(0) - \tilde{p}(0) = \tilde{t}(0) - \frac{\tilde{r}(0)}{k-1}.$$

Agora, se  $\tilde{f}(0)$  é um máximo relativo e  $\tilde{f}(0) > 0$ , então

$$0 \geq \tilde{t}(0) - \frac{\tilde{r}(0)}{k-1} > \tilde{t}(0) - \tilde{r}(0),$$

e, assim, segue que

$$\frac{\partial d}{\partial \phi}(0, 0) < 0.$$

Analogamente, se  $\tilde{f}(0)$  é um mínimo relativo e  $\tilde{f}(0) < 0$ , então

$$\frac{\partial d}{\partial \phi}(0, 0) > 0.$$

Se  $\tilde{f}(0) = 0$ , então pela equação (3.24) segue que  $\tilde{p}(0) = \tilde{r}(0) = 0$ . Sabemos que  $\theta_0 = 0$  é uma raiz relacionada de  $\tilde{d}$ , ou seja,  $\tilde{d}(0) = 0$ . Dessa forma,  $\tilde{s}(0) = 0$ . Entretanto, da equação (3.22) vemos que  $\tilde{t}(0) = 2a_2 \neq 0$ . Portanto,

$$\frac{d^2 \tilde{f}}{d\theta^2}(0) = \frac{\partial d}{\partial \phi}(0, 0) = \tilde{t}(0) \neq 0.$$

Assim, se  $\tilde{f}(0) = 0$  é um máximo relativo (respec. mínimo relativo), então  $(\partial d / \partial \phi)(0, 0) < 0$  (respec.  $> 0$ ), concluindo a demonstração deste lema.  $\square$

**Proposição 3.3.** *Se o sinal crítico de uma raiz relacionada  $\theta_0$  de  $\tilde{d}$  é positivo, então  $\theta_0$  é positivo.*

*Demonstração.* Considere  $\mu_0$  a multiplicidade de  $\theta_0$ . Pela Proposição 3.2, temos que

$$\frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}} \tilde{d}(\theta_0) \neq 0.$$

Como o sinal crítico de  $\theta_0$  é positivo, segue do Lema 3.8 e da Proposição 3.2 que, se  $\tilde{f}(\theta_0)$  é um máximo relativo, então

$$\frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}} \tilde{d}(\theta_0) < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial d}{\partial \phi}(\theta_0, \theta_0) < 0$$

e se  $\tilde{f}(\theta_0)$  é um mínimo relativo, então

$$\frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}} \tilde{d}(\theta_0) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial d}{\partial \phi}(\theta_0, \theta_0) > 0.$$

Portanto, para todo  $R \in (0, R_0)$ , segue do Lema 3.7 que

$$\frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}}(\theta - \phi) \Big|_{\theta=\theta_0} = \frac{\frac{d^{\mu_0}[\tilde{d}]}{d\theta^{\mu_0}}(\theta_0)}{\frac{\partial(d+R^{2k-2}n)}{\partial \phi} \Big|_{(\theta,\phi)=(\theta_0,\theta_0)}} = \frac{\frac{d^{\mu_0}[\tilde{d}]}{d\theta^{\mu_0}}(\theta_0)}{\frac{\partial d}{\partial \phi}(\theta_0, \theta_0) + R^{2k-2} \underbrace{\frac{\partial n}{\partial \phi}(\theta_0, \theta_0)}_{=0}} > 0$$

em ambos os casos, ou seja,  $\theta_0$  é positivo.  $\square$

### 3.3 O teorema principal

Considere

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^k a_m x^{k-m} y^m$$

um polinômio homogêneo de grau  $k \geq 3$  nas variáveis  $x$  e  $y$ . Seja

$$\tilde{f}(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta) = \sum_{m=0}^k a_m (\cos \theta)^{k-m} (\sin \theta)^m.$$

Considere ainda,

$$\tilde{d}(\theta) = (k-1) \frac{d}{d\theta} \tilde{f}(\theta).$$

**Lema 3.9.** *Se  $\theta$  é raiz de  $\tilde{d}$ , então  $\theta + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , também é raiz de  $\tilde{d}$ .*

*Demonstração.* Queremos mostrar que  $\theta + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , é raiz de  $\tilde{d}$ , ou seja,  $\tilde{d}(\theta + n\pi) = 0$ .

Sabemos que  $\theta$  é raiz de  $\tilde{d}$  se, e somente se,  $\theta$  é um ponto crítico de  $\tilde{f}$ , ou seja,

$$\frac{d}{d\theta} \tilde{f}(\theta) = 0.$$

Logo, para provarmos o lema basta mostrar que

$$\frac{d}{d\theta} \tilde{f}(\theta + n\pi) = 0.$$

Temos que

$$\frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta) = \sum_{m=0}^k \left( -\frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (k-m) (\sin \theta)^m \sin \theta}{\cos \theta} + \frac{a_m (\cos \theta)^{k-m} (\sin \theta)^m m \cos \theta}{\sin \theta} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta + n\pi) &= \sum_{m=0}^k \left( -\frac{a_m (\cos(\theta + n\pi))^{k-m} (k-m) (\sin(\theta + n\pi))^m \sin(\theta + n\pi)}{\cos(\theta + n\pi)} \right) + \\ &+ \sum_{m=0}^k \left( \frac{a_m (\cos(\theta + n\pi))^{k-m} (\sin(\theta + n\pi))^m m \cos(\theta + n\pi)}{\sin(\theta + n\pi)} \right), \end{aligned}$$

e como

$$\sin(\theta + n\pi) = \sin(\theta) \cos(n\pi) + \sin(n\pi) \cos(\theta) = (-1)^n \sin \theta,$$

$$\cos(\theta + n\pi) = \cos(\theta) \cos(n\pi) - \sin(n\pi) \sin(\theta) = (-1)^n \cos \theta,$$



então

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta + n\pi) &= \sum_{m=0}^k \left( -\frac{a_m((-1)^n \cos \theta)^{k-m}(k-m)((-1)^n \operatorname{sen} \theta)^m(-1)^n \operatorname{sen} \theta}{(-1)^n \cos \theta} \right) + \\
&\quad + \sum_{m=0}^k \left( \frac{a_m((-1)^n \cos \theta)^{k-m}((-1)^n \operatorname{sen} \theta)^m m(-1)^n \cos \theta}{(-1)^n \operatorname{sen} \theta} \right) = \\
&= \sum_{m=0}^k (-1)^{nk} \left( -\frac{a_m(\cos \theta)^{k-m}(k-m)(\operatorname{sen} \theta)^m \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \right) + \\
&\quad + \sum_{m=0}^k (-1)^{nk} \left( \frac{a_m(\cos \theta)^{k-m}(\operatorname{sen} \theta)^m m \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right) = \\
&= (-1)^{nk} \cdot \frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta).
\end{aligned}$$

Por hipótese,  $\theta$  é ponto crítico de  $\tilde{f}$ , então  $(d/d\theta)(\tilde{f}(\theta)) = 0$ . Portanto,

$$\frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta + n\pi) = 0.$$

□

Por meio do Lema 3.9 podemos definir uma relação de equivalência  $\sim$  no conjunto  $S$  das raízes de  $\tilde{d}$  da seguinte forma

$$\theta, \theta' \in S : \quad \theta \sim \theta' \iff \theta' = \theta + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

A relação  $\sim$  definida é, de fato, uma relação de equivalência.

- Reflexiva:  $\theta \sim \theta$ , pois  $\theta = \theta + 0\pi$ ,  $\theta \in S$ ;
- Simétrica: se  $\theta \sim \theta'$ , então  $\theta' = \theta + n\pi$ . Logo,  $\theta = \theta' + \overbrace{(-n)}^{\in \mathbb{Z}}\pi$  e, portanto,  $\theta' \sim \theta$ ;
- Transitiva: se  $\theta \sim \theta'$  e  $\theta' \sim \theta''$ , então  $\theta' = \theta + n\pi$  e  $\theta'' = \theta' + n\pi$ . Logo,  $\theta'' = \theta + n\pi + n\pi = \theta + \underbrace{(2n)}_{\in \mathbb{Z}}\pi$ . Portanto,  $\theta \sim \theta''$ .

**Observação 3.3.** Note que, pela relação de equivalência  $\sim$ ,  $\theta$  é relacionada se, e somente se,  $\theta' = \theta + n\pi$  é relacionada. Como calculamos anteriormente,

$$\frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta + n\pi) = (-1)^{nk} \cdot \frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta).$$

Considere  $\mu$  a multiplicidade de  $\theta$ . Se  $\theta$  é raiz relacionada, então  $\tilde{f}$  atinge um extremo em  $\theta$  e, portanto,

$$\frac{d^\mu \tilde{f}}{d\theta^\mu}(\theta) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^\mu \tilde{f}}{d\theta^\mu}(\theta + n\pi) = (-1)^{nk} \cdot \frac{d^\mu \tilde{f}}{d\theta^\mu}(\theta) \neq 0.$$

Assim,  $\theta'$  é relacionada.

Denotaremos por  $[\theta]$  a classe de equivalência contendo  $\theta$  e a chamaremos de *classe raiz de*  $\theta$ . Pela Observação 3.3 podemos dizer que o sinal e o sinal crítico de  $\theta$  correspondem aos de  $\theta'$ . Assim,  $[\theta]$  é relacionada (respec. não relacionada) se  $\theta$  é relacionada (respec. não relacionada). Se  $\theta$  é relacionada, podemos definir o sinal e o sinal crítico de  $[\theta]$  pelos de  $\theta$ .

Consideraremos as seguintes notações:

- $N$ : número de classes raiz;
- $N_+$ : número de classes raiz com sinal positivo;
- $N_-$ : número de classes raiz com sinal negativo;
- $N_0$ : número de classes raiz não relacionadas;
- $N_+^C$ : número de classes raiz com sinal crítico positivo;
- $N_-^C$ : número de classes raiz com sinal crítico negativo.

Deste modo, temos que

$$N = N_+ + N_- + N_0 \quad e \quad N_+ + N_- = N_+^C + N_-^C.$$

Observe que  $N$ ,  $N_+^C$  são números inteiros positivos e  $N_-^C$ ,  $N_0$  são números inteiros maiores ou iguais a zero.

**Lema 3.10.** *Valem as seguintes desigualdades:  $N_- \leq N_-^C \leq N_+^C \leq N_+$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 3.3, segue que  $N_+^C \leq N_+$ . Temos que

$$N_+ + N_- = N_+^C + N_-^C \leq N_+ + N_-^C \Rightarrow N_- \leq N_-^C.$$

Agora, resta mostrar que  $N_-^C \leq N_+^C$ .

Se  $N_+ + N_- = \underbrace{N_+^C}_{>0} + \underbrace{N_-^C}_{\geq 0} = 1$ , então  $N_+^C = 1$  e  $N_-^C = 0$ . Logo,  $N_-^C < N_+^C$ .

Para  $N_+ + N_- > 1$ , ver demonstração nas páginas 128 e 129 da referência [1].  $\square$

**Lema 3.11.** *O número  $N_+ - N_-$  é menor ou igual a  $k$  e é*

(1) *um número inteiro par não negativo, se  $k$  é par;*

(2) *um número inteiro ímpar positivo, se  $k$  é ímpar.*

*Demonstração.* Como o número total de classes raiz  $N$  é sempre menor ou igual a  $k$ , então segue que  $N_+ - N_- \leq k$ . Agora, se  $N_+ + N_-$  é par então podemos escrever

$$N_+ + N_- = 2n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Logo,

$$N_+ - N_- = 2n - N_- - N_- = 2n - 2N_- = 2(n - N_-), \quad n \in \mathbb{Z},$$

ou seja, se  $N_+ + N_-$  é par, então  $N_+ - N_-$  também é par. Analogamente, se  $N_+ + N_-$  é ímpar então

$$N_+ + N_- = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow N_+ - N_- = 2n + 1 - N_- - N_- = 2(n - N_-) + 1, \quad n \in \mathbb{Z},$$

e, portanto,  $N_+ - N_-$  é ímpar. No Lema 3.10 vimos que  $N_+ + N_- \geq 1$ , portanto é suficiente mostrar que  $N_+ + N_-$  é par, se  $k$  é par e  $N_+ + N_-$  é ímpar, se  $k$  é ímpar.

Considere  $[\theta_1], [\theta_2], \dots, [\theta_{N_+ + N_-}]$  as classes de raízes relacionadas com  $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_{N_+ + N_-} < \pi$ . Considere ainda, se existirem,  $[\tilde{\theta}_1], \dots, [\tilde{\theta}_{N_0}]$  as classes de raízes não relacionadas com  $0 \leq \tilde{\theta}_1 < \dots < \tilde{\theta}_{N_0} < \pi$ . Sejam  $\mu_i$  e  $\tilde{\mu}_j$  as multiplicidades de  $\theta_i$  e  $\tilde{\theta}_j$  respectivamente, com  $i = 1, \dots, N_+ + N_-$  e  $j = 1, \dots, N_0$ . Então,

$$z = k - \left( \sum_{i=1}^{N_+ + N_-} \mu_i + \sum_{j=1}^{N_0} \tilde{\mu}_j \right)$$

é um número inteiro par não negativo, pois como as raízes  $\theta_i$  e  $\tilde{\theta}_j$  variam no intervalo  $[0, \pi)$ , então a soma das multiplicidades será menor ou igual a  $k$ . Portanto,  $z \geq 0$  e  $z$  é par. Pela Definição 3.2, temos que  $\tilde{\mu}_j$  é par para todo  $j = 1, \dots, N_0$ , logo  $\sum_{j=1}^{N_0} \tilde{\mu}_j$  é

par. Similarmente,  $\mu_i$  é ímpar para todo  $i = 1, \dots, N_+ + N_-$ , logo  $\sum_{i=1}^{N_++N_-} \mu_i$  é par se  $N_+ + N_-$  é par e  $\sum_{i=1}^{N_++N_-} \mu_i$  é ímpar se  $N_+ + N_-$  é ímpar. Assim,

$$z = k - \left( \sum_{i=1}^{N_++N_-} \mu_i + \sum_{j=1}^{N_0} \tilde{\mu}_j \right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{N_++N_-} \mu_i = k - \left( \underbrace{z}_{\text{par}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N_0} \tilde{\mu}_j}_{\text{par}} \right).$$

Portanto,  $\sum_{i=1}^{N_++N_-} \mu_i$  é par se  $k$  é par e  $\sum_{i=1}^{N_++N_-} \mu_i$  é ímpar se  $k$  é ímpar, concluindo a demonstração.  $\square$

**Lema 3.12.** *Sejam  $\theta_1$  uma raiz relacionada de  $\tilde{d}$ ,  $\phi$  a função argumento no círculo  $x^2 + y^2 = R^2$  com valores iniciais  $(\theta_1, \theta_1)$  e  $\theta_2$  uma raiz relacionada tal que  $\tilde{f}(\theta_2)$  é um mínimo relativo com  $\theta_2 > \theta_1$ . As seguintes afirmações são válidas.*

(1)  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são positivos se, e somente se,  $\theta_2 - \phi(\theta_2) = \pi/2$ ;

(2) Exatamente um de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  é positivo se, e somente se,  $\theta_2 - \phi(\theta_2) = 0$ .

*Demonstração.* Ver demonstração na página 130 da referência [1].  $\square$

O Lema 3.12 será usado na prova do seguinte teorema.

**Teorema 3.2.** *Sejam  $f$  um polinômio homogêneo de grau  $k \geq 3$  representado como no Teorema 3.1 e  $G_f$  o gráfico de  $f$ . Assim, a origem  $o$  seja um ponto umbílico isolado de  $G_f$ . Então, o índice de  $o$  é dado por*

$$\text{ind}_o(G_f) = 1 - \frac{N_+ - N_-}{2}. \quad (3.25)$$

*Demonstração.* Seja  $\theta_1$  como no Lema 3.12. Pela Definição 3.1, a expressão (3.25) será obtida se mostrarmos

$$\theta_1 + 2\pi - \phi(\theta_1 + 2\pi) = (N_+ - N_-)\pi. \quad (3.26)$$

A variação da função  $\phi$ , por um lado, é dada por

$$\theta_1 + 2\pi - \phi(\theta_1 + 2\pi).$$

Por outro lado, pelo Lema 3.12, essa variação é dada por

$$\left( (N_+ - N_-) \frac{\pi}{2} \right) 2,$$

uma vez que as raízes são determinadas no intervalo  $[0, \pi)$ . Isso conclui a prova do teorema.  $\square$

O principal teorema deste trabalho é o seguinte.

**Teorema 3.3.** *Para qualquer inteiro  $k \geq 3$ , seja  $I(k)$  um conjunto de números reais definido por*

$$I(k) = \begin{cases} \{1, 0, \dots, 1 - k/2\}, & \text{se } k \text{ é par,} \\ \{1/2, -1/2, \dots, 1 - k/2\}, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

*Considere  $f$  um polinômio homogêneo de grau  $k \geq 3$  representado como no Teorema 3.1. Então,  $\text{ind}_o(G_f) \in I(k)$ .*

*Demonstração.* Observe que, pela Proposição 3.1, se  $D(x, y) \equiv 0$ , então  $\text{ind}_o(G_f) = 1 \in I(k)$ , com  $k$  par. Logo, é suficiente considerar o caso em que  $D(x, y) \not\equiv 0$ .

Se  $k$  é par, então pelo Lema 3.11,  $N_+ - N_-$  é um número inteiro par não negativo, ou seja,  $N_+ - N_- \in \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ . Logo, pelo Teorema 3.2

$$\text{ind}_o(G_f) = 1 - \frac{N_+ - N_-}{2} \in \left\{ 1, 0, -1, -2, \dots, 1 - \frac{k}{2} \right\}.$$

Se  $k$  é ímpar, então o Lema 3.11 garante que  $N_+ - N_- \in \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ . Logo,

$$\text{ind}_o(G_f) = 1 - \frac{N_+ - N_-}{2} \in \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots, 1 - \frac{k}{2} \right\}.$$

Portanto,

$$\text{ind}_o(G_f) = 1 - \frac{N_+ - N_-}{2} \in I(k).$$

$\square$

### 3.4 O fator $x^2 + y^2$

Seja  $f$  um polinômio homogêneo de grau  $k \geq 2$ . Considere

$$f^{(l)}(x, y) = (x^2 + y^2)^l f(x, y),$$

onde  $l$  é um inteiro positivo. Note que

$$\text{grau}(f^{(l)}) = \text{grau}((x^2 + y^2)^l) + \text{grau}(f) = k + 2l.$$

Logo, segue da equação (3.3), que

$$D^{(l)}(x, y) = (k + 2l - 1) \left\langle \text{grad}(f^{(l)}), \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (3.27)$$

**Lema 3.13.** *A seguinte expressão é verdadeira.*

$$D^{(l)}(x, y) = \frac{k + 2l - 1}{k - 1} (x^2 + y^2)^l D(x, y).$$

*Demonstração.* Vamos calcular as derivadas parciais de  $f^{(l)}(x, y)$ .

$$\begin{aligned} p^{(l)} &= \frac{\partial f^{(l)}(x, y)}{\partial x} = 2xl(x^2 + y^2)^{l-1} f(x, y) + p(x^2 + y^2)^l = \\ &= (x^2 + y^2)^{l-1} [2xl f(x, y) + p(x^2 + y^2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^{(l)} &= \frac{\partial f^{(l)}(x, y)}{\partial y} = 2yl(x^2 + y^2)^{l-1} f(x, y) + q(x^2 + y^2)^l = \\ &= (x^2 + y^2)^{l-1} [2yl f(x, y) + q(x^2 + y^2)]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\langle \text{grad}(f^{(l)}), \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle &= (x^2 + y^2)^{l-1} [-py(x^2 + y^2) + qx(x^2 + y^2)] = \\ &= (x^2 + y^2)^l [-py + qx] = (x^2 + y^2)^l \left\langle \text{grad}(f), \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle, \end{aligned}$$

e pela equação (3.27), segue que

$$D^{(l)}(x, y) = (k + 2l - 1)(x^2 + y^2)^l \left\langle \text{grad}(f), \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{(k + 2l - 1)}{k - 1} (x^2 + y^2)^l D(x, y).$$

□

**Lema 3.14.** *Suponha que  $D(x, y) \neq 0$ . Considere  $N, N_+, N_-, N_0, N_+^C, N_-^C$  os inteiros determinados por  $f$  como na Seção 3.3, e  $N(l), N_+(l), N_-(l), N_0(l), N_+^C(l), N_-^C(l)$  os inteiros similarmente determinados por  $f^{(l)}$ . Então, valem as seguintes afirmações.*

- (1)  $N = N(1) = N(2) = \dots$ ;
- (2)  $N_+^C = N_+^C(1) = N_+^C(2) = \dots$ ;
- (3)  $N_-^C = N_-^C(1) = N_-^C(2) = \dots$ ;
- (4)  $N_0 = N_0(1) = N_0(2) = \dots$ .

*Demonstração.* As classes de equivalência  $N$ ,  $N_+$ ,  $N_-$ ,  $N_0$ ,  $N_+^C$ ,  $N_-^C$  são definidas sobre o conjunto das raízes de  $\tilde{d}$ , isto é, no conjunto dos pontos críticos de  $\tilde{f}$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \tilde{d}^{(l)}(\theta) &= D^{(l)}(\cos \theta, \sin \theta) = \frac{(k+2l-1)}{k-1} ((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2)^l D(\cos \theta, \sin \theta) = \\ &= \frac{(k+2l-1)}{(k-1)} (k-1) \left\langle \text{grad}(\tilde{f}), \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle = (k+2l-1) \frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta). \end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{d}^{(l)}(\theta) = 0 \iff \frac{d\tilde{f}}{d\theta}(\theta) = 0.$$

Portanto, as classes de equivalência  $N(l)$ ,  $N_+(l)$ ,  $N_-(l)$ ,  $N_0(l)$ ,  $N_+^C(l)$ ,  $N_-^C(l)$  também são definidas no conjunto dos pontos críticos de  $\tilde{f}$ , o que mostra a veracidade das afirmações.  $\square$

**Teorema 3.4.** *Para  $k \geq 3$  e  $l \in I(k)$  arbitrários, existe um polinômio homogêneo  $f_{k,l}$  de grau  $k$  tal que*

- 1.  $f_{k,l}$  é representado como no Teorema 3.1;
- 2.  $\text{ind}_o(G_{f_{k,l}}) = l$ .

*Demonstração.* Se  $k$  é par e  $l = 1$ , então pela Proposição 3.1, basta tomarmos

$$f_{k,l}(x, y) = (x^2 + y^2)^{k/2}$$

e o teorema será satisfeito.

Suponhamos que  $k \geq 3$  é um inteiro arbitrário e que  $l \in I(k)$ ,  $l \neq 1$ . Sejam  $(\alpha_i, \beta_i) (i = 1, \dots, 2(1-l))$  vetores não nulos tais que  $\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i \neq 0$  para  $i \neq j$ . Considere

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^{2(1-l)} (\alpha_i x + \beta_i y).$$

Então,

$$\tilde{f}(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta) = \prod_{i=1}^{2(1-l)} (\alpha_i \cos \theta + \beta_i \sin \theta).$$

Como  $\tilde{f}$  tem  $2(1-l)$  termos no produto, segue que  $\tilde{f}$  tem exatamente  $2(1-l)$  zeros simples. Sabemos que  $\tilde{f}$  é um polinômio trigonométrico homogêneo de grau  $2(1-l)$ , logo  $(d/d\theta)(\tilde{f}(\theta))$  também é um polinômio trigonométrico homogêneo de grau  $2(1-l)$  e também tem exatamente  $2(1-l)$  zeros simples. Portanto, temos  $2(1-l)$  pontos críticos de  $\tilde{f}$ , ou seja,  $2(1-l)$  raízes de  $\tilde{d}$ , e assim

$$N = N_+ = N_+^C = 2(1-l), \quad N_- = N_-^C = N_0 = 0.$$

Se tomarmos

$$f_{k,l}(x, y) = f^{(k/2+l-1)}(x, y) = (x^2 + y^2)^{(k/2+l-1)} \prod_{i=1}^{2(1-l)} (\alpha_i x + \beta_i y),$$

então

$$\text{grau}(f_{k,l}) = \text{grau}((x^2 + y^2)^{(k/2+l-1)}) + \text{grau}(f) = k + 2l - 2 + 2 - 2l = k$$

e, pelo Lema 3.14, temos que

$$N(k/2 + l - 1) = N_+(k/2 + l - 1) = N_+^C(k/2 + l - 1) = 2(1-l),$$

$$N_-(k/2 + l - 1) = N_0(k/2 + l - 1) = N_-^C(k/2 + l - 1) = 0.$$

Portanto,

$$\text{ind}_o(G_{f_{k,l}}) = 1 - \frac{N_+(k/2 + l - 1) - N_-(k/2 + l - 1)}{2} = 1 - \frac{2(1-l)}{2} = l,$$

o que conclui a demonstração do teorema.  $\square$

**Proposição 3.4.** *Sejam  $f$  um polinômio homogêneo de grau  $k \geq 3$  representado como no Teorema 3.1 e  $G_f$  o gráfico de  $f$ . Então*

$$\text{ind}_o(G_f) \leq \text{ind}_o(G_{f^{(1)}}) \leq \text{ind}_o(G_{f^{(2)}}) \leq \dots \leq \text{ind}_o(G_{f^{(l)}}).$$



*Demonstração.* Pelo Teorema 3.2 temos

$$\text{ind}_o(G_{f^{(l)}}) = 1 - \frac{N_+(l) - N_-(l)}{2}$$

e do Lema 3.14, segue que  $N_+^C = N_+^C(l)$  e  $N_-^C = N_-^C(l)$ . Então,

$$\begin{aligned} N_+ + N_- &= N_+^C + N_-^C = N_+^C(l) + N_-^C(l) = N_+(l) + N_-(l) \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_+ = N_+(l) + N_-(l) - N_-. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{ind}_o(G_{f^{(l)}}) - \text{ind}_o(G_f) &= 1 - \frac{N_+(l) - N_-(l)}{2} - 1 + \frac{N_+ - N_-}{2} = \\ &= \frac{N_+ - N_- - N_+(l) + N_-(l)}{2} = \\ &= \frac{N_+(l) + N_-(l) - N_+ - N_- - N_+(l) + N_-(l)}{2} = \\ &= \frac{2N_-(l) - 2N_-}{2} = \\ &= N_-(l) - N_-. \end{aligned}$$

Considere  $\theta_0$  uma raiz negativa de  $\tilde{d}$ . Então, é suficiente mostrar que  $\theta_0$  também é uma raiz negativa de  $\tilde{d}^{(l)}(\theta) = 0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $\theta_0 = 0$ . Considere  $f(x, y) = \sum_{m=0}^k a_m x^{k-m} y^m$ . Temos que

$$\begin{aligned} d(\theta, \phi) &= \tilde{s} \cos^2 \phi + (\tilde{t} - \tilde{r}) \text{sen } \phi \cos \phi - \tilde{s} \text{sen}^2 \phi = \\ &= \tilde{s}(\cos^2 \phi - \text{sen}^2 \phi) + (\tilde{t} - \tilde{r}) \text{sen } \phi \cos \phi = \\ &= \tilde{s} \cos 2\phi + \frac{(\tilde{t} - \tilde{r})}{2} \text{sen } 2\phi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(0, \phi) &= \tilde{s}(0) \cos 2\phi + \frac{(\tilde{t}(0) - \tilde{r}(0))}{2} \operatorname{sen} 2\phi = \\ &= (k-1)a_1 \cos 2\phi + \left( a_2 - \frac{k(k-1)a_0}{2} \right) \operatorname{sen} 2\phi, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial d}{\partial \phi}(0, \phi) = -2(k-1)a_1 \operatorname{sen} 2\phi + (2a_2 - k(k-1)a_0) \cos 2\phi,$$

$$\frac{\partial d}{\partial \phi}(0, 0) = 2a_2 - k(k-1)a_0.$$

Sabemos que  $f^{(l)}(x, y) = (x^2 + y^2)^l f(x, y)$ . Calculando as derivadas parciais de  $f^{(l)}(x, y)$  obtemos

$$\begin{aligned} p^{(l)} &= 2xl (x^2 + y^2)^{l-1} f(x, y) + (x^2 + y^2)^l p, \\ q^{(l)} &= 2yl (x^2 + y^2)^{l-1} f(x, y) + (x^2 + y^2)^l q, \\ r^{(l)} &= 2l (x^2 + y^2)^{l-1} f(x, y) + 4x^2 l(l-1) (x^2 + y^2)^{l-2} f(x, y) + 4xl (x^2 + y^2)^{l-1} p + \\ &\quad + (x^2 + y^2)^l r, \\ s^{(l)} &= 4xyl(l-1) (x^2 + y^2)^{l-2} f(x, y) + 2xl (x^2 + y^2)^{l-1} q + 2yl (x^2 + y^2)^{l-1} p + \\ &\quad + (x^2 + y^2)^l s, \\ t^{(l)} &= 2l (x^2 + y^2)^{l-1} f(x, y) + 4y^2 l(l-1) (x^2 + y^2)^{l-2} f(x, y) + 4yl (x^2 + y^2)^{l-1} q + \\ &\quad + (x^2 + y^2)^l t. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$r^{(l)}(\theta) = r^{(l)}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = 2lf(\theta) + 4l(l-1) \cos^2(\theta) f(\theta) + 4l \cos \theta p(\theta) + r(\theta),$$

$$s^{(l)}(\theta) = s^{(l)}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = 4l(l-1) \cos \theta \operatorname{sen} \theta f(\theta) + 2l \cos \theta q(\theta) + 2l \operatorname{sen} \theta p(\theta) + s(\theta),$$

$$t^{(l)}(\theta) = t^{(l)}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = 2lf(\theta) + 4l(l-1) \operatorname{sen}^2(\theta) f(\theta) + 4l \operatorname{sen} \theta q(\theta) + t(\theta).$$

Temos que

$$d^{(l)}(\theta, \phi) = s^{(l)}(\theta) \cos 2\phi + \frac{(t^{(l)}(\theta) - r^{(l)}(\theta))}{2} \operatorname{sen} 2\phi,$$

$$d^{(l)}(0, \phi) = s^{(l)}(0) \cos 2\phi + \frac{(t^{(l)}(0) - r^{(l)}(0))}{2} \operatorname{sen} 2\phi,$$

$$\begin{aligned} r^{(l)}(0) &= 2la_0 + 4l(l-1)a_0 + 4lka_0 + k(k-1)a_0 = a_0(2l + 4l^2 - 4l + 4lk + k^2 - k) = \\ &= a_0(k+2l)(k+2l-1), \end{aligned}$$

$$s^{(l)}(0) = 2la_1 + (k-1)a_1,$$

$$t^{(l)}(0) = 2la_0 + 2a_2.$$

Portanto,

$$d^{(l)}(0, \phi) = (k+2l-1)a_1 \cos 2\phi + \left( a_2 + la_0 - \frac{a_0(k+2l)(k+2l-1)}{2} \right) \operatorname{sen} 2\phi,$$

$$\frac{\partial d^{(l)}}{\partial \phi}(0, \phi) = -2(k+2l-1)a_1 \operatorname{sen} 2\phi + (2(a_2 + la_0) - (k+2l)(k+2l-1)a_0) \cos 2\phi,$$

$$\frac{\partial d^{(l)}}{\partial \phi}(0, 0) = 2(a_2 + la_0) - (k+2l)(k+2l-1)a_0 =$$

$$= 2(a_2 + la_0) - (4l^2 - 2l + 4lk + k^2 - k)a_0 =$$

$$= 2a_2 + 2la_0 - (k^2 - k)a_0 - (4l^2 - 2l + 4lk)a_0 =$$

$$= 2a_2 - k(k-1)a_0 - (4l^2 - 4l + 4lk)a_0 =$$

$$= \frac{\partial d}{\partial \phi}(0, 0) - 4la_0(k+l-1). \quad (3.28)$$

Como o sinal de  $\theta_0 = 0$  é negativo, segue da Proposição 3.3 que o sinal crítico de  $\theta_0 = 0$  é negativo. Pela Definição 3.4, se  $\theta_0 = 0$  tem sinal crítico negativo, então

- $\tilde{f}(0) = a_0 < 0$  e  $\tilde{f}(0)$  é um máximo relativo, implicando em

$$\frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}} \tilde{d}(0) < 0 \quad \text{ou;}$$

- $\tilde{f}(0) = a_0 > 0$  e  $\tilde{f}(0)$  é um mínimo relativo, implicando em

$$\frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}} \tilde{d}(0) > 0.$$

Logo, em ambos os casos, temos que

$$a_0 \frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}} \tilde{d}(0) > 0.$$

Agora, pelo Lema 3.7 temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}} (\theta - \phi) \right|_{\theta=0} &= \frac{\left. \frac{d^{\mu_0}[\tilde{d}]}{d\theta^{\mu_0}}(0) \right|_{(\theta,\phi)=(0,0)}}{\left. \frac{\partial(d+R^{2k-2}n)}{\partial\phi} \right|_{(\theta,\phi)=(0,0)}} = \frac{a_0 \frac{d^{\mu_0}[\tilde{d}]}{d\theta^{\mu_0}}(0)}{a_0 \frac{\partial d}{\partial\phi}(0,0) + a_0 R^{2k-2} \frac{\partial n}{\partial\phi}(0,0)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_0 \frac{\partial d}{\partial\phi}(0,0) + a_0 R^{2k-2} \frac{\partial n}{\partial\phi}(0,0) = \frac{a_0 \frac{d^{\mu_0}[\tilde{d}]}{d\theta^{\mu_0}}(0)}{\left. \frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}} (\theta - \phi) \right|_{\theta=0}} \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.3 vemos que

$$\frac{\partial n}{\partial\phi}(0,0) = 0$$

e como o sinal de  $\theta_0 = 0$  é negativo, então

$$\left. \frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}} (\theta - \phi) \right|_{\theta=0} < 0.$$

Portanto,

$$a_0 \frac{\partial d}{\partial\phi}(0,0) < 0.$$

Multiplicando ambos os membros da equação (3.28) por  $a_0$  obtemos

$$a_0 \frac{\partial d^{(l)}}{\partial\phi}(0,0) = a_0 \frac{\partial d}{\partial\phi}(0,0) - 4la_0^2(k+l-1). \quad (3.29)$$

Como  $k \geq 3$  e  $l$  são inteiros positivos então  $4la_0^2(k+l-1) > 0$  e, portanto,

$$a_0 \frac{\partial d^{(l)}}{\partial\phi}(0,0) < 0.$$

Utilizando o Lema 3.7 novamente, temos

$$\left. \frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}} (\theta - \phi) \right|_{\theta=0} = \frac{a_0 \frac{d^{\mu_0}[\tilde{d}^{(l)}]}{d\theta^{\mu_0}}(0)}{a_0 \frac{\partial d^{(l)}}{\partial\phi}(0,0) + a_0 R^{2k-2} \frac{\partial n^{(l)}}{\partial\phi}(0,0)}.$$

Como o sinal crítico de  $\theta_0 = 0$  é negativo, então

$$a_0 \frac{d^{\mu_0}[\tilde{d}^{(l)}]}{d\theta^{\mu_0}}(0) > 0$$

e, pelo Lema 3.3

$$\frac{\partial n^{(l)}}{\partial \phi}(0, 0) = 0.$$

Portanto,

$$\left. \frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}}(\theta - \phi) \right|_{\theta=0} < 0,$$

ou seja,  $\theta_0 = 0$  também é uma raiz negativa de  $\tilde{d}^{(l)}(\theta) = 0$ , concluindo a demonstração.  $\square$

Note que, de acordo com a Proposição 3.4, existe um elemento  $i_f \in I(k)$  e um número  $l_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $l \geq l_0$ ,

$$\text{ind}_o(G_{f^{(l)}}) = i_f.$$

**Proposição 3.5.** *Sejam  $f^{(l)}$  um polinômio homogêneo de grau  $k \geq 3$  representado como no Teorema 3.1 e  $G_{f^{(l)}}$  o gráfico de  $f^{(l)}$ . Então*

$$\text{ind}_o(G_{f^{(l)}}) = i_f = 1 - \frac{N_+^C - N_-^C}{2}.$$

*Demonstração.* Considere  $\theta_0$  uma raiz negativa de  $\tilde{d}$  e, portanto, com sinal crítico negativo. Então é suficiente mostrar que existe  $l_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $l \geq l_0$ ,  $\theta_0$  é uma raiz negativa de  $\tilde{d}^{(l)}(\theta) = 0$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\theta_0 = 0$ . Da equação (3.29) temos

$$a_0 \frac{\partial d^{(l)}}{\partial \phi}(0, 0) = a_0 \frac{\partial d}{\partial \phi}(0, 0) - 4la_0^2(k + l - 1) < 0.$$

Logo, existe um número inteiro  $l_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $l \geq l_0$ ,

$$a_0 \frac{\partial d^{(l)}}{\partial \phi}(0, 0) < 0.$$

Como o sinal crítico de  $\theta_0 = 0$  é negativo, então

$$a_0 \frac{d^{\mu_0}[\tilde{d}^{(l)}]}{d\theta^{\mu_0}}(0) > 0.$$

Assim, pelo Lema 3.7

$$\left. \frac{d^{\mu_0}}{d\theta^{\mu_0}}(\theta - \phi) \right|_{\theta=0} = \frac{a_0 \frac{d^{\mu_0}[\tilde{d}^{(l)}]}{d\theta^{\mu_0}}(0)}{a_0 \frac{\partial d^{(l)}}{\partial \phi}(0, 0) + a_0 R^{2k-2} \frac{\partial n^{(l)}}{\partial \phi}(0, 0)} < 0.$$

Portanto,  $\theta_0 = 0$  é uma raiz negativa de  $\tilde{d}^{(l)}(\theta) = 0$ .  $\square$

# Capítulo 4

## Exemplos

Neste capítulo, faremos alguns exemplos de polinômios homogêneos  $f_{k,l}$  de grau  $k \geq 3$  tais que  $\text{ind}_o(G_{f_{k,l}}) \in I(k)$ . O Teorema 3.4 nos diz que para arbitrários  $k \geq 3$  e  $l \in I(k)$ , existe um polinômio homogêneo  $f_{k,l}$  tal que  $\text{ind}_o(G_{f_{k,l}}) = l$ .

O polinômio homogêneo  $f_{k,l}$  é dado por

$$f_{k,l}(x, y) = f^{(k/2+l-1)}(x, y) = (x^2 + y^2)^{(k/2+l-1)} \prod_{i=1}^{2(1-l)} (\alpha_i x + \beta_i y)$$

e o conjunto  $I(k)$  é definido por

$$I(k) = \begin{cases} \{1, 0, \dots, 1 - k/2\}, & \text{se } k \text{ é par,} \\ \{1/2, -1/2, \dots, 1 - k/2\}, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Sendo assim, vamos escolher alguns valores  $l$  no conjunto  $I(k)$ , encontrar o polinômio homogêneo  $f_{k,l}$  com o menor grau  $k$  possível e esboçar as linhas de curvatura próximas à origem, projetadas no plano  $xy$ .

### 4.1 Polinômio homogêneo de grau 3

Para  $k = 3$ , temos que  $I(3) = \{1/2, -1/2\}$ .

**Exemplo 4.1.**  $k = 3$  e  $l = 1/2$ .

O polinômio homogêneo é dado por

$$\begin{aligned} f_{3,\frac{1}{2}}(x, y) &= f^{(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1)}(x, y) = (x^2 + y^2)^{(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1)} \prod_{i=1}^{2(1-\frac{1}{2})} (\alpha_i x + \beta_i y) = \\ &= (x^2 + y^2)(\alpha_1 x + \beta_1 y). \end{aligned}$$

Escolhendo o vetor  $(\alpha_1, \beta_1) = (1, 0)$ , temos

$$f_{3,\frac{1}{2}}(x, y) = (x^2 + y^2)x.$$

As linhas de curvatura do gráfico de  $f_{3,\frac{1}{2}}$ , projetadas no plano  $xy$ , são mostradas na Figura 4.1.

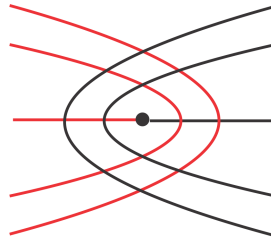


Figura 4.1: Linhas de curvatura do gráfico de  $f_{3,\frac{1}{2}}$ .

Podemos verificar que  $\text{ind}_o(G_{f_{3,\frac{1}{2}}}) = \frac{1}{2}$ . De fato,

$$\text{ind}_o(G_{f_{k,l}}) = 1 - \frac{\overbrace{N_+(k/2 + l - 1)}^{=2(1-l)} - \overbrace{N_-(k/2 + l - 1)}^{=0}}{2} = 1 - \frac{2(1-l)}{2},$$

e, portanto,

$$\text{ind}_o(G_{f_{3,\frac{1}{2}}}) = 1 - \frac{N_+(1) - N_-(1)}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ou equivalentemente, pela Fórmula de Bendixson

$$\text{ind}_o(G_{f_{3,\frac{1}{2}}}) = 1 + \frac{\overbrace{\#e}^{=0} - \overbrace{\#h}^{=1}}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Podemos perceber que as linhas de curvatura numa vizinhança de  $(0,0)$  se comportam como no caso de um ponto umbílico Darbouxiano  $D_1$ .

**Exemplo 4.2.**  $k = 3$  e  $l = -1/2$ .

O polinômio homogêneo é dado por

$$\begin{aligned} f_{3,-\frac{1}{2}}(x, y) &= f^{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-1\right)}(x, y) = (x^2 + y^2)^{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-1\right)} \prod_{i=1}^{2\left(1+\frac{1}{2}\right)} (\alpha_i x + \beta_i y) = \\ &= \prod_{i=1}^3 (\alpha_i x + \beta_i y). \end{aligned}$$

Escolhendo os vetores  $(\alpha_1, \beta_1) = (1, 0)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2) = (1, 1)$  e  $(\alpha_3, \beta_3) = (0, 1)$ , dois a dois linearmente independentes, temos

$$f_{3,-\frac{1}{2}}(x, y) = xy(x + y).$$

As linhas de curvatura do gráfico de  $f_{3,-\frac{1}{2}}$ , projetadas no plano  $xy$ , são mostradas na Figura 4.2.

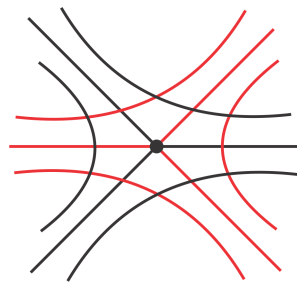


Figura 4.2: Linhas de curvatura do gráfico de  $f_{3,-\frac{1}{2}}$ .

Temos que

$$\text{ind}_o(G_{f_{3,-\frac{1}{2}}}) = 1 - \frac{N_+(0) - N_-(0)}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Ou equivalentemente, pela Fórmula de Bendixson

$$\text{ind}_o(G_{f_{3,-\frac{1}{2}}}) = 1 + \frac{\overbrace{\#e}^{=0} - \overbrace{\#h}^{=3}}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

As linhas de curvatura numa vizinhança de  $(0, 0)$  se comportam como no caso de um ponto umbílico Darbouxiano  $D_3$ .



## 4.2 Polinômio homogêneo de grau 4

Para  $k = 4$ , temos que  $I(4) = \{1, 0, -1\}$ .

**Exemplo 4.3.**  $k = 4$  e  $l = 1$ .

Pela Proposição 3.1, podemos escolher o polinômio homogêneo da forma

$$f_{k,l}(x, y) = \lambda(x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}, \quad \lambda \neq 0.$$

Logo,

$$f_{4,1}(x, y) = (x^2 + y^2)^2.$$

As linhas de curvatura do gráfico de  $f_{4,1}$ , projetadas no plano  $xy$ , são mostradas na Figura 4.3.

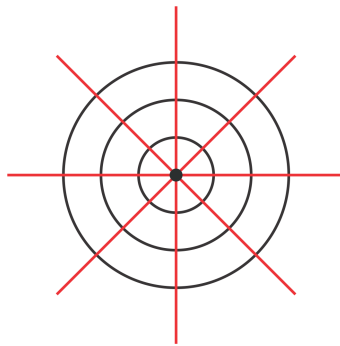


Figura 4.3: Linhas de curvatura do gráfico de  $f_{4,1}$ .

Temos que

$$\text{ind}_o(G_{f_{4,1}}) = 1 - \frac{N_+(2) - N_-(2)}{2} = 1 - 0 = 1.$$

Ou equivalentemente, pela Fórmula de Bendixson

$$\text{ind}_o(G_{f_{4,1}}) = 1 + \frac{\overbrace{\#e}^{=0} - \overbrace{\#h}^{=0}}{2} = 1.$$

**Exemplo 4.4.**  $k = 4$  e  $l = 0$ .

O polinômio homogêneo é dado por

$$\begin{aligned} f_{4,0}(x, y) &= f^{\left(\frac{4}{2}+0-1\right)}(x, y) = (x^2 + y^2)^{\left(\frac{4}{2}+0-1\right)} \prod_{i=1}^{2(1-0)} (\alpha_i x + \beta_i y) = \\ &= (x^2 + y^2) \prod_{i=1}^2 (\alpha_i x + \beta_i y). \end{aligned}$$

Escolhendo os vetores  $(\alpha_1, \beta_1) = (1, 0)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2) = (0, 1)$ , dois a dois linearmente independentes, temos

$$f_{4,0}(x, y) = xy(x^2 + y^2).$$

As linhas de curvatura do gráfico de  $f_{4,0}$ , projetadas no plano  $xy$ , são mostradas na Figura 4.4.

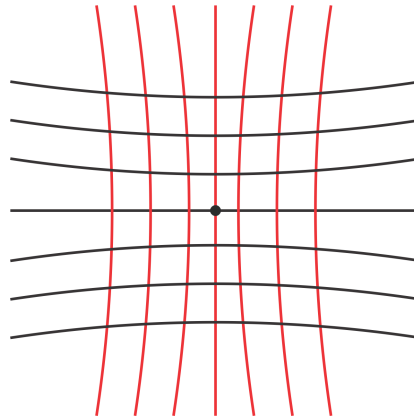


Figura 4.4: Linhas de curvatura do gráfico de  $f_{4,0}$ .

Temos que

$$\text{ind}_o(G_{f_{4,0}}) = 1 - \frac{N_+(1) - N_-(1)}{2} = 1 - 1 = 0.$$

Ou equivalentemente, pela Fórmula de Bendixson

$$\text{ind}_o(G_{f_{4,0}}) = 1 + \frac{\overbrace{\#e}^{=0} - \overbrace{\#h}^{=2}}{2} = 1 - \frac{2}{2} = 0.$$

**Exemplo 4.5.**  $k = 4$  e  $l = -1$ .

O polinômio homogêneo é dado por

$$f_{4,-1}(x, y) = f^{(\frac{4}{2}-1-1)}(x, y) = (x^2 + y^2)^{(\frac{4}{2}-1-1)} \prod_{i=1}^{2(1+1)} (\alpha_i x + \beta_i y) = \\ = \prod_{i=1}^4 (\alpha_i x + \beta_i y).$$

Escolhendo os vetores  $(\alpha_1, \beta_1) = (1, 0)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2) = (1, 1)$ ,  $(\alpha_3, \beta_3) = (0, 1)$ ,  $(\alpha_4, \beta_4) = (-1, 1)$ , dois a dois linearmente independentes, temos

$$f_{4,-1}(x, y) = xy(x + y)(y - x).$$

As linhas de curvatura do gráfico de  $f_{4,-1}$ , projetadas no plano  $xy$ , são mostradas na Figura 4.5.

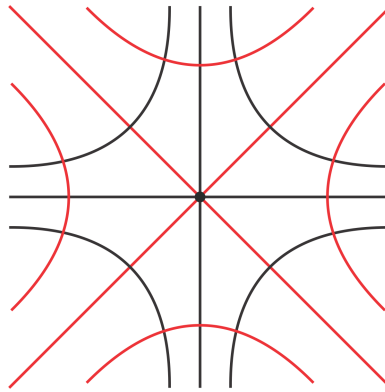


Figura 4.5: Linhas de curvatura do gráfico de  $f_{4,-1}$ .

Temos que

$$\text{ind}_o(G_{f_{4,-1}}) = 1 - \frac{N_+(0) - N_-(0)}{2} = 1 - \frac{4}{2} = -1.$$

Ou equivalentemente, pela Fórmula de Bendixson

$$\text{ind}_o(G_{f_{4,-1}}) = 1 + \frac{\overbrace{\#e}^{=0} - \overbrace{\#h}^{=4}}{2} = 1 - \frac{4}{2} = -1.$$

### 4.3 Polinômio homogêneo de grau 5

Para  $k = 5$ , temos que  $I(5) = \{1/2, -1/2, -3/2\}$ .

**Exemplo 4.6.**  $k = 5$  e  $l = -3/2$ .

O polinômio homogêneo é dado por

$$\begin{aligned} f_{5, -\frac{3}{2}}(x, y) &= f^{(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} - 1)}(x, y) = (x^2 + y^2)^{(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} - 1)} \prod_{i=1}^{2(1 + \frac{3}{2})} (\alpha_i x + \beta_i y) = \\ &= \prod_{i=1}^5 (\alpha_i x + \beta_i y). \end{aligned}$$

Escolhendo os vetores  $(\alpha_1, \beta_1) = (1, 0)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2) = (1, 1)$ ,  $(\alpha_3, \beta_3) = (0, 1)$ ,  $(\alpha_4, \beta_4) = (-1, 1)$ ,  $(\alpha_5, \beta_5) = (-1, 1/2)$ , dois a dois linearmente independentes, temos

$$f_{5, -\frac{3}{2}}(x, y) = xy(x + y)(y - x) \left( \frac{y}{2} - x \right).$$

As linhas de curvatura do gráfico de  $f_{5, -\frac{3}{2}}$ , projetadas no plano  $xy$ , são mostradas na Figura 4.6.

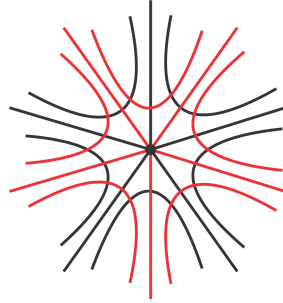


Figura 4.6: Linhas de curvatura do gráfico de  $f_{5, -\frac{3}{2}}$ .

Temos que

$$\text{ind}_o(G_{f_{5, -\frac{3}{2}}}) = 1 - \frac{N_+(0) - N_-(0)}{2} = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Ou equivalentemente, pela Fórmula de Bendixson

$$\text{ind}_o(G_{f_{5, -\frac{3}{2}}}) = 1 + \frac{\overbrace{\#e}^{=0} - \overbrace{\#h}^{=5}}{2} = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}.$$

## 4.4 Polinômio homogêneo de grau 6

Para  $k = 6$ , temos que  $I(6) = \{1, 0, -1, -2\}$ .

**Exemplo 4.7.**  $k = 6$  e  $l = -2$ .

O polinômio homogêneo é dado por

$$\begin{aligned} f_{6,-2}(x, y) &= f^{\left(\frac{6}{2}-2-1\right)}(x, y) = (x^2 + y^2)^{\left(\frac{6}{2}-2-1\right)} \prod_{i=1}^{2(1+2)} (\alpha_i x + \beta_i y) = \\ &= \prod_{i=1}^6 (\alpha_i x + \beta_i y). \end{aligned}$$

Escolhendo os vetores  $(\alpha_1, \beta_1) = (1, 0)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2) = (1, 1)$ ,  $(\alpha_3, \beta_3) = (0, 1)$ ,  $(\alpha_4, \beta_4) = (-1, 1)$ ,  $(\alpha_5, \beta_5) = (-1, 1/2)$ ,  $(\alpha_6, \beta_6) = (1, 1/2)$ , dois a dois linearmente independentes, temos

$$f_{6,-2}(x, y) = xy(x+y)(y-x) \left(\frac{y}{2} - x\right) \left(x + \frac{y}{2}\right).$$

As linhas de curvatura do gráfico de  $f_{6,-2}$ , projetadas no plano  $xy$ , são mostradas na Figura 4.7.

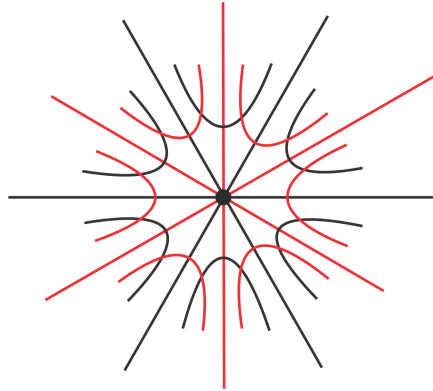


Figura 4.7: Linhas de curvatura do gráfico de  $f_{6,-2}$ .

Temos que

$$\text{ind}_o(G_{f_{6,-2}}) = 1 - \frac{N_+(0) - N_-(0)}{2} = 1 - \frac{6}{2} = -2.$$

Ou equivalentemente, pela Fórmula de Bendixson

$$\text{ind}_o(G_{f_{6,-2}}) = 1 + \frac{\overbrace{\#e}^{=0} - \overbrace{\#h}^{=6}}{2} = 1 - \frac{6}{2} = -2.$$

## 4.5 Polinômio homogêneo de grau 7

Para  $k = 7$ , temos que  $I(7) = \{1/2, -1/2, -3/2, -5/2\}$ .

**Exemplo 4.8.**  $k = 7$  e  $l = -5/2$ .

O polinômio homogêneo é dado por

$$\begin{aligned} f_{7, -\frac{5}{2}}(x, y) &= f^{(\frac{7}{2} - \frac{5}{2} - 1)}(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{7}{2} - \frac{5}{2} - 1} \prod_{i=1}^{2(1 + \frac{5}{2})} (\alpha_i x + \beta_i y) = \\ &= \prod_{i=1}^7 (\alpha_i x + \beta_i y). \end{aligned}$$

Escolhendo os vetores  $(\alpha_1, \beta_1) = (1, 0)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2) = (1, 1)$ ,  $(\alpha_3, \beta_3) = (0, 1)$ ,  $(\alpha_4, \beta_4) = (-1, 1)$ ,  $(\alpha_5, \beta_5) = (-1, 1/2)$ ,  $(\alpha_6, \beta_6) = (1, 1/2)$ ,  $(\alpha_7, \beta_7) = (1/2, 1)$ , dois a dois linearmente independentes, temos

$$f_{7, -\frac{5}{2}}(x, y) = xy(x + y)(y - x) \left(\frac{y}{2} - x\right) \left(x + \frac{y}{2}\right) \left(\frac{x}{2} + y\right).$$

As linhas de curvatura do gráfico de  $f_{7, -\frac{5}{2}}$ , projetadas no plano  $xy$ , são mostradas na Figura 4.8.

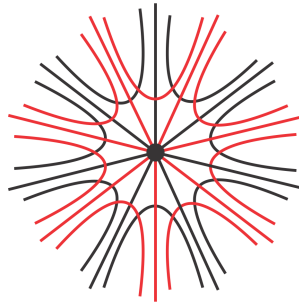


Figura 4.8: Linhas de curvatura do gráfico de  $f_{7, -\frac{5}{2}}$ .

Temos que

$$\text{ind}_o(G_{f_{7, -\frac{5}{2}}}) = 1 - \frac{N_+(0) - N_-(0)}{2} = 1 - \frac{7}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Ou equivalentemente, pela Fórmula de Bendixson

$$\text{ind}_o(G_{f_{7, -\frac{5}{2}}}) = 1 + \frac{\overbrace{\#e}^{=0} - \overbrace{\#h}^{=7}}{2} = 1 - \frac{7}{2} = -\frac{5}{2}.$$

## 4.6 As direções principais e $\tilde{d}$

Considere o polinômio homogêneo

$$f(x, y) = xy(x + y) = x^2y + xy^2$$

de grau  $k = 3$ . Vimos no Exemplo 4.2 que  $\text{ind}_o(G_f) = -1/2$ . Temos que

$$\tilde{f}(\theta) = \cos^2 \theta \sin \theta + \cos \theta \sin^2 \theta,$$

$$\frac{d}{d\theta} \tilde{f}(\theta) = \cos^3 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta - \sin^3 \theta,$$

$$\tilde{d}(\theta) = 2 \cos^3 \theta + 4 \cos^2 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^2 \theta - 2 \sin^3 \theta.$$

Como  $l = -1/2$  e  $\tilde{d}$  é um polinômio trigonométrico homogêneo, então  $\tilde{d}$  possui  $2(1 - l)$  raízes, ou seja, 3 zeros simples. Logo,  $N = 3$ . Considere a circunferência de raio  $R$ , como na Convenção 3.1, mostrada na Figura 4.9. Pela Figura 4.9, vemos que as retas

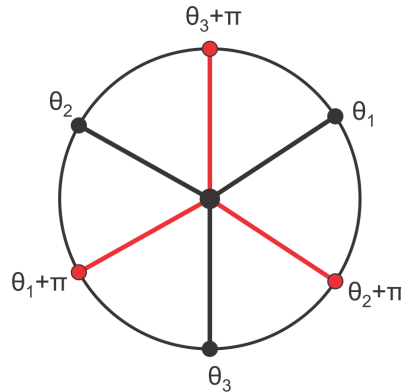


Figura 4.9: Separatrizes umbílicas determinadas pelas raízes de  $\tilde{d}$ .

que passam pela origem e pelas raízes de  $\tilde{d}$  determinam o número de classes raiz  $N$  e as separatrizes umbílicas, ou seja, as raízes  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  de  $\tilde{d}$  determinam as direções principais das linhas de curvatura de  $G_f$ . As direções ortogonais são determinadas por  $\theta_1 + \pi$ ,  $\theta_2 + \pi$ ,  $\theta_3 + \pi$  que estão na mesma classe raiz de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  respectivamente.

# Conclusões

Particularmente, pelo Teorema 3.3, vimos que para um polinômio homogêneo de grau  $k \geq 3$  representado como no Teorema 3.1,  $\text{ind}_o(G_f) \leq 1$ . Sendo assim, podemos conjecturar que para toda superfície regular  $S$  com um ponto umbílico isolado  $p_0$ ,  $\text{ind}_{p_0}(S) \leq 1$ . Isso é exatamente a Conjectura de Loewner. Em outras palavras, mostramos nesta dissertação que a Conjectura de Loewner é verdadeira para a classe das superfícies que são gráficos de funções polinomiais homogêneas.

Vimos no Lema 3.6 que existe uma única função diferenciável  $\phi(\theta)$  satisfazendo  $\phi(\theta_0) = \phi_0$  e

$$R^{k-2}d(\theta, \phi(\theta)) + R^{3k-4}n(\theta_0, \phi(\theta)) = 0,$$

para quaisquer  $\theta \in \mathbb{R}$ . Concluimos que se tomarmos

$$\phi(\theta) = \theta - n\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1,$$

então a equação acima é satisfeita. Isso pode ser observado no Lema 3.12.

Nos exemplos do Capítulo 4, observamos que a Fórmula de Bendixson (1) e a equação do índice de um ponto umbílico isolado determinado pelo Teorema 3.2 possuem semelhanças. Comparando as duas, vemos que  $\#e = 0$  e  $N_- = 0$ . Dessa forma, temos que

$$\text{ind}_o(G_f) = 1 - \frac{\#h}{2} \quad \text{e} \quad \text{ind}_o(G_f) = 1 - \frac{N_+}{2}.$$

Isso nos dá a impressão de que, geometricamente,  $N_- = \#e$  e  $N_+ = \#h$ . Assim, uma sugestão para trabalhos futuros é verificar as igualdades destas expressões.



# Referências Bibliográficas

- [1] ANDO, N., *An isolated umbilical point of the graph of a homogeneous polynomial*, Geometriae Dedicata, **82** (2000), 115-137.
- [2] BRUCE, J.; TARI, F., *On binary differential equations*, Nonlinearity, **8** (1995), 255-271.
- [3] DO CARMO, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [4] GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J., *Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory*, 27º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [5] SOTOMAYOR, J.; MELLO, L. F., *A Note on Some Developments on Carathéodory Conjecture on Umbilic Points*, Expositiones Mathematicae, **17** (1999), 49-58.