

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA**

**Dualidade cor-cinemática na teoria de Yang-Mills e as relações BCJ**

**Hemily Gomes Marciano**

**Itajubá, outubro de 2013**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA**

**Hemily Gomes Marciano**

**Dualidade cor-cinemática na teoria de Yang-Mills e as relações BCJ**

**Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.**

**Área de concentração:** Teoria de Campos, Gravitação e Cosmologia

**Orientador:** Ricardo Iván Medina Bascur

**Outubro de 2013  
Itajubá**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –  
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB\_6/1700

M319d

Marciano, Hemily Gomes

Dualidade cor-cinemática na Teoria de Yang-Mills e as relações BCJ / Hemily Gomes Marciano. -- Itajubá, (MG) : [s.n.], 2013.  
135 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Iván Medina Bascur.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Teoria de cordas. 2. Amplitudes de espalhamento. 3. Teoria de Yang-Mills. 4. Relações BCJ. I. Bascur, Ricardo Iván Medina, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA**

**Hemily Gomes Marciano**

**Dualidade cor-cinemática na teoria de Yang-Mills e as relações BCJ**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 10 de outubro de 2013, conferindo à autora o título de *Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada*.

**Banca Examinadora:**

Prof. Ricardo Iván Medina Bascur (Orientador)

Dr. Horatiu Stefan Nastase

Prof. Dr. Edisom de Souza Moreira Junior

**Itajubá  
2013**

*À minha família.*

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, pois se hoje estou aqui é porque Ele quis primeiro.

Aos meus pais, Raimundo e Imbênia, por terem me ensinado tudo o que eu sei de mais importante.

Aos meus irmãos, Dener, Rogério, Rebecca, Rúbio, Waleska e Vinícius e todos os demais familiares por não terem medido esforços para que essa vitória fosse alcançada.

Ao meu futuro esposo Guilherme que sempre me apoiou e, com paciência, me acompanhou todos esses anos.

À minha cunhada e amiga Karina por ter estado ao meu lado em momentos em que eu não pude prosseguir sozinha.

Ao meu orientador Ricardo Medina que teve toda a paciência e disposição para me ensinar e tornar a conclusão dessa etapa possível.

Aos meus amigos que dividiram comigo momentos inesquecíveis dessa história.

A todos os meus professores, aos quais tenho profunda admiração e carinho.

À CAPES pelo apoio financeiro ao longo do mestrado.

# Resumo

A presente dissertação de mestrado trata das diversas relações que existem entre as amplitudes de espalhamento em nível de árvore da teoria de Yang-Mills. Mais especificamente, estudamos a dedução das relações de Kleiss-Kuijff e das relações BCJ. Discutimos a conjectura de que é possível, com essas relações, escrever uma amplitude de  $N$ -pontos em nível de árvore em termos de  $(N - 3)!$  subamplitudes. Abordamos também a dedução de tais relações utilizando ferramentas da teoria de cordas, reproduzindo os resultados encontrados com teoria de campos, visto que esta é recuperada ao tomarmos o limite de baixas energias na teoria de cordas. Com isso, demonstramos formalmente que a base mínima para as subamplitudes de Yang-Mills possui de fato dimensão  $(N - 3)!$ . Apresentamos, também, algumas aplicações das relações BCJ, a saber, a sua aplicação nas amplitudes da gravitação de Einstein e no cálculo de amplitudes em nível de loops.

**Palavras-chave:** teoria de campos, dualidade cor-cinemática, relações BCJ, teoria de Yang-Mills, amplitudes de espalhamento, relações de monodromia, teoria de cordas

# Abstract

This dissertation deals with the various relations that exist among the tree-level scattering amplitudes of the Yang-Mills theory. Specifically, we study the derivation of Kleiss-Kuijf and BCJ relations. We discuss the conjecture that it is possible, with these relations, to write an  $N$ -point tree amplitude in terms of  $(N - 3)!$  partial amplitudes. We also present the demonstration of such relations using tools of string theory, reproducing the results obtained from field theory, since it is recovered by taking the limit of low energies in string theory. Thus, we formally demonstrate that the minimal basis for the Yang-Mills amplitudes has indeed dimension  $(N - 3)!$ . We also present some applications of BCJ relations, namely, their application in the amplitudes of Einstein's gravitation and the calculation of amplitudes at loop level .

**Keywords:** field theory, scattering amplitudes, color-kinematic duality, BCJ relations, Yang-Mills theory, monodromy relations, string theory

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Breve revisão de teorias de <i>gauge</i> não-abelianas</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Relações Kleiss-Kuijf</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Relações BCJ</b>	<b>19</b>
4.1	Revisão da Identidade de Jacobi . . . . .	19
4.2	Relações BCJ para $N = 4$ . . . . .	20
4.3	Uma outra forma de escrever as subamplitudes para $N = 4$ . . . . .	22
4.3.1	Escrevendo as subamplitudes explicitamente em termos dos seus pólos	22
4.3.2	Identidade cinemática . . . . .	25
4.3.3	Dualidade cor-cinemática . . . . .	26
4.3.4	Amplitude de 4-pontos em termos dos pólos, dos numeradores e dos fatores de cor . . . . .	28
4.3.5	Liberdade de <i>gauge</i> dos numeradores . . . . .	29
4.4	Caso $N = 5$ . . . . .	30
4.4.1	Escrevendo as subamplitudes explicitamente em termos dos seus pólos	31
4.4.2	Dualidade cor-cinemática e as identidades cinemáticas . . . . .	35
4.4.3	Amplitude de 5-pontos em termos dos pólos, dos numeradores e dos fatores de cor . . . . .	39
4.4.4	Liberdade de <i>gauge</i> dos numeradores . . . . .	44
4.4.5	Relações BCJ para $N = 5$ . . . . .	47
4.5	Caso $N = 6$ . . . . .	49
4.5.1	Escrevendo as subamplitudes explicitamente em termos dos seus pólos	50

4.5.2	Amplitude de 6-pontos em termos dos pólos, dos numeradores e dos fatores de cor . . . . .	54
4.5.3	Dualidade cor-cinemática e as identidades cinemáticas . . . . .	56
4.5.4	Liberdade de <i>gauge</i> dos numeradores . . . . .	56
4.5.5	Relações BCJ para $N = 6$ . . . . .	57
4.6	Casos $N > 6$ . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Demonstração das relações Kleiss-Kuijf e BCJ utilizando a Teoria de Cordas como ferramenta</b>	<b>62</b>
5.1	Obtendo as relações de monodromia para $N = 5$ . . . . .	63
5.2	Generalização das relações de monodromia . . . . .	68
5.3	Paralelo entre as relações de monodromia e as de Kleiss-Kuijf . . . . .	70
5.4	Base mínima de $(N - 3)!$ subamplitudes . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Algumas aplicações das relações BCJ</b>	<b>79</b>
6.1	Amplitudes da gravitação . . . . .	79
6.2	Cálculo de amplitudes na teoria de Yang-Mills em nível de loops . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>90</b>
	<b>Apêndice A: Algumas identidades utilizadas</b>	<b>92</b>
A.1	Uma propriedade importante . . . . .	92
A.2	Relações entre os $s_{ij}$ 's para $N = 5$ . . . . .	93
	<b>Apêndice B: Regras de Feynman no espaço dos momentos</b>	<b>95</b>
	<b>Apêndice C: Relações KLT</b>	<b>97</b>
	<b>Apêndice D: Relacionando os numeradores cinemáticos usando a regra da fatoração</b>	<b>99</b>
D.1	Caso $N = 4$ . . . . .	99
D.2	Caso $N = 5$ . . . . .	104
	<b>Apêndice E: Diagramas de 6 pernas com apenas vértices cúbicos</b>	<b>119</b>
	<b>Apêndice F: Definição dos <math>c_i</math>'s para <math>N = 6</math></b>	<b>121</b>

Apêndice G : Resolução do sistema formado pelas identidades de Jacobi para $N = 6$	124
Apêndice H : Relações de monodromia para as amplitudes de glúons na teoria de cordas	128

# Capítulo 1

## Introdução

O conhecimento das amplitudes de espalhamento é de suma importância nas teorias físicas que envolvem interações entre partículas. A amplitude pode ser obtida calculando os diagramas de Feynman relevantes, usando as regras de Feynman apropriadas à interação em questão.

No entanto, o cálculo de amplitudes na teoria de Yang-Mills se torna, muitas vezes, longo devido à quantidade de diagramas que deve ser considerada num espalhamento de  $N$ -pontos. Mais especificamente, é conhecido que a amplitude de  $N$ -pontos (em nível de árvore) na teoria de Yang-Mills vem dada pela expressão [1]:

$$\mathcal{A}_N = (2\pi)^4 i \delta^4(k_1 + k_2 + \dots + k_N) \sum_{\mathcal{P}(2,3,\dots,N)} \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \dots \lambda^{a_N}) A_N(1, 2, \dots, N), \quad (1.1)$$

onde  $A_N(1, \dots, N)$  é chamada de subamplitude e os  $\lambda^a$ 's são as matrizes geradoras do grupo de *gauge*. A soma se dá sobre as permutações dos índices  $2, \dots, N$  das pernas, mantendo o índice 1 fixo.<sup>1</sup> Portanto, a expressão anterior contém, ao todo,  $(N - 1)!$  termos. Notemos que já para o caso  $N = 6$  serão  $(6 - 1)! = 120$  termos, o que representa um cálculo extenso.

Nas amplitudes em nível de loops aparecem também outros tipos de termos, os quais possuem produtos de traços, o que não ocorre em nível de árvore [1].

Diversos trabalhos foram realizados buscando aprofundar o conhecimento dessas amplitudes de espalhamento e, com isso, algumas relações não triviais entre as subamplitudes foram desenvolvidas, permitindo reduzir o número de subamplitudes que aparecem

---

<sup>1</sup>Em princípio, a soma seria sobre as permutações de todos os índices, incluindo o 1. Porém, devido à propriedade cíclica do traço, pode se provar que a amplitude vem escrita somente em termos dos  $(N - 1)!$  traços que não são ciclicamente equivalentes.

em (1.1). Mais especificamente, as chamadas relações Kleiss-Kuijf reduzem o número de subamplitudes independentes (em nível de árvore) de  $N$ -pontos de  $(N - 1)!$  para  $(N - 2)!$ . Tais relações, fruto de um trabalho de 1989 [2], estão apresentadas no Capítulo 3.

Em anos recentes, as chamadas relações BCJ forneceram ainda mais outros vínculos. Em seu artigo [3], Bern, Carrasco e Johansson, conjecturaram que, com essas relações adicionais, a base passaria a conter  $(N - 3)!$  subamplitudes independentes.

O objetivo do presente trabalho é estudar a dualidade cor-cinemática das teorias de *gauge* apresentada em [3], bem como as relações BCJ que são deduzidas a partir dessa dualidade, suas consequências, algumas de suas aplicações importantes e a dedução dessas relações com uma demonstração rigorosa proveniente da teoria de cordas.

As relações BCJ têm tido diversas aplicações em outros trabalhos, por exemplo, nos estudos sobre teorias da supergravidade [4, 5, 6, 7] e, de forma mais específica, na tentativa de provar a finitude da teoria SUGRA  $N = 8$ ,  $D = 4$  [8]. Há também muitos trabalhos da comunidade científica que citam o artigo de Bern, Carrasco e Johansson (ao qual vamos nos referir nesta dissertação como o “artigo BCJ”) em estudos sobre teorias de super Yang-Mills [4, 5, 9, 10], entre outros [11]. Essa repercussão está refletida na quantidade expressiva de citações que o trabalho de Bern, Carrasco e Johansson vem recebendo (cerca de 190 citações até o momento, segundo informações em <http://inspirehep.net/>).

Discutiremos em detalhes no Capítulo 4 a dedução dessas relações para  $N = 4, 5, 6$ , apresentando cálculos não abertos no artigo [3]. O resultado de que é possível reduzir a base para o número de  $(N - 3)!$  subamplitudes ainda não pôde ser provado em geral no artigo BCJ. A prova, nesse caso, se deu apenas para valores específicos de  $N$ . De fato, apenas podemos conjecturar o resultado para um  $N$  qualquer.

Já no Capítulo 5, será feita uma demonstração, a partir da teoria de cordas, das relações Kleiss-Kuijf e BCJ, sem a necessidade de fazer conjecturas, deduzindo formalmente o resultado para o caso geral [12].

No Capítulo 6, vamos apresentar as implicações das relações BCJ para as amplitudes da gravitação de Einstein, confirmando um resultado até então conhecido apenas no âmbito da teoria de cordas de um trabalho de 1986 [13]. E ainda será visto como podem ser aplicadas as relações BCJ para o cálculo de amplitudes em nível de loops.

Todas as amplitudes consideradas neste trabalho serão em nível de árvore, exceto quando seja mencionado o contrário. Os nossos cálculos, em todo momento, são realizados

no espaço-tempo de Minkowski, com métrica dada por  $\eta_{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$ .

# Capítulo 2

## Breve revisão de teorias de *gauge* não-abelianas

As teorias de *gauge* não-abelianas, ou teorias de Yang-Mills, descrevem as interações fortes da natureza, as quais são mediadas pelo *glúon* e são descritas pela seguinte lagrangeana [14]

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (2.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \quad (2.2)$$

Os campos de *gauge*  $A_\mu$  aparecem naturalmente se a ação para um campo é invariante sob um grupo de transformações de simetria interna e esta simetria é promovida a uma simetria local, ou seja, quando diferentes transformações de simetria são aplicadas em diferentes pontos do espaço-tempo.

E ainda, os campos de *gauge*  $A_\mu$  podem ser decompostos na forma

$$A_\mu = \lambda_a A_\mu^a \quad (2.3)$$

Os  $\lambda^a$ 's são as matrizes geradoras do grupo de simetria e são hermitianas se o grupo for  $U(N)$  ou  $SU(N)$ , e o índice  $a$  é chamado de **índice de cor**. Elas satisfazem a álgebra de Lie do grupo

$$[\lambda^a, \lambda^b] = i f^{ab}_c \lambda^c, \quad a, b, c = 1, 2, \dots, r \quad (2.4)$$

onde as constantes reais  $f^{ab}_c$  são completamente antissimétricas e são conhecidas como as constantes de estrutura do grupo e  $r$  é a dimensão do grupo de simetria.

Se escolhermos a normalização para o traço das matrizes geradoras como sendo

$$\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) = \delta^{ab} \quad (2.5)$$

podemos, usando que  $F_{\mu\nu} = \lambda_a F_{\mu\nu}^a$ , reescrever a densidade de Lagrangeana como

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu}_a \quad (2.6)$$

Com essa normalização, podemos manipular a igualdade em (2.4) e obter que

$$f^{abc} = -i \text{Tr}([\lambda^a, \lambda^b] \lambda^c) \quad (2.7)$$

É conhecida uma importante propriedade<sup>1</sup> que será muito útil nos cálculos deste trabalho. Esta propriedade está demonstrada no Apêndice A.1 e vem dada por:

$$\sum_a \text{Tr}(A \lambda^a) \text{Tr}(B \lambda_a) = \text{Tr}(A B) \quad (2.8)$$

onde  $A$  e  $B$  são matrizes arbitrárias.

Na teoria de Yang-Mills, assim como em qualquer outra que envolva interações, se faz importante o conhecimento das amplitudes de espalhamento entre as partículas descritas pela teoria. A partir dela é possível obter informações relevantes para a teoria como, por exemplo, podemos calcular a seção de choque na colisão das partículas. É conhecido [15] que, em nível de árvore, a amplitude total de  $N$ -pontos na teoria de Yang-Mills pode ser decomposta como

$$\mathcal{A}_N = i(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + \dots + k_N) \sum_{\mathcal{P}(2,3,\dots,N)} \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \dots \lambda^{a_N}) A_N(1, 2, \dots, N), \quad (2.9)$$

onde  $A_N$  é chamada de subamplitude e os  $\lambda^a$ 's são as matrizes geradoras do grupo indexadas pela cor de cada perna externa.  $\mathcal{P}(2, 3, \dots, N)$  denota que a soma se dá sobre todas as permutações não cíclicas das pernas ou, equivalentemente, todas as permutações mantendo a perna 1 fixa. Assim, essa soma é composta de  $(N-1)!$  termos, ou seja, cada amplitude total pode ser escrita em termos de  $(N-1)!$  subamplitudes. Daqui por diante, o fator  $i(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + \dots + k_N)$  será omitido ao escrevermos a amplitude total, mas ficará sempre subentendida a conservação do momento, ou seja,  $k_1 + k_2 + \dots + k_N = 0$ .<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Esta propriedade aparece em diversos trabalhos como, por exemplo, em [16].

<sup>2</sup>Por trás da conservação do momento escrita dessa forma está a convenção adotada de que as partículas do espalhamento estão sempre “saindo”.

Para se calcular essas subamplitudes, podemos utilizar as chamadas regras de Feynman. E alguns dos ingredientes dessas regras, que foram úteis neste trabalho, estão dados no Apêndice B.

As subamplitudes em nível de árvore satisfazem diversas relações bem conhecidas. As duas mais simples são [17]:

- Propriedade Cíclica

$$A_N(1, 2, 3, \dots, N) = A_N(2, 3, \dots, N, 1) = \dots = A_N(N, 1, 2, \dots, N - 1) \quad (2.10)$$

- Propriedade de Reflexão

$$A_N(1, 2, 3, \dots, N) = (-1)^N A_N(1, N, N - 1, \dots, 3, 2) \quad (2.11)$$

Há ainda outros tipos de relações menos simples entre as subamplitudes. Algumas delas como as relações Kleiss-Kuijf e as relações BCJ serão discutidas nos capítulos seguintes.

# Capítulo 3

## Relações Kleiss-Kuijf

Outras relações muito importantes existentes entre as subamplitudes são as chamadas **Relações de Kleiss-Kuijf** apresentadas em um trabalho de 1989 [2]. São elas:

$$A_N(1, \{\alpha\}, N, \{\beta\}) = (-1)^{n_\beta} \sum_{\{\sigma\}_i \in \mathcal{OP}(\{\alpha\}, \{\beta^T\})} A_N(1, \{\sigma\}_i, N), \quad (3.1)$$

onde os elementos de  $\{\alpha\}$  e  $\{\beta\}$  são os números de 2 a  $N - 1$  sendo que nenhum deles se repete e a soma se dá sobre todas as “permutações ordenadas”  $\mathcal{OP}(\{\alpha\}, \{\beta^T\})$ , isto é, todas as permutações de  $\{\alpha\} \cup \{\beta\}$  que mantém a ordem dos elementos individuais de cada conjunto no conjunto resultante. A notação  $\{\beta\}^T$  representa o conjunto  $\{\beta\}$  com a ordenação contrária e  $n_\beta$  é o número de elementos do mesmo.

Exemplo:

$$\begin{aligned} A_5(1, \{2, 3\}, 5, \{4\}) &= (-1)^1 A_5(1, \{2, 3, 4\}, 5) + (-1)^1 A_5(1, \{2, 4, 3\}, 5) + \\ &\quad + (-1)^1 A_5(1, \{4, 2, 3\}, 5) \\ \implies A_5(1, 2, 3, 5, 4) &= -A_5(1, 2, 3, 4, 5) - A_5(1, 2, 4, 3, 5) - A_5(1, 4, 2, 3, 5) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Outras 5 relações são obtidas permutando as pernas 2, 3 e 4:

$$\begin{aligned}
A_5(1, 2, 4, 5, 3) &= -A_5(1, 2, 4, 3, 5) - A_5(1, 2, 3, 4, 5) - A_5(1, 3, 2, 4, 5) \\
A_5(1, 3, 2, 5, 4) &= -A_5(1, 3, 2, 4, 5) - A_5(1, 3, 4, 2, 5) - A_5(1, 4, 3, 2, 5) \\
A_5(1, 3, 4, 5, 2) &= -A_5(1, 3, 4, 2, 5) - A_5(1, 3, 2, 4, 5) - A_5(1, 2, 3, 4, 5) \\
A_5(1, 4, 2, 5, 3) &= -A_5(1, 4, 2, 3, 5) - A_5(1, 4, 3, 2, 5) - A_5(1, 3, 4, 2, 5) \\
A_5(1, 4, 3, 5, 2) &= -A_5(1, 4, 3, 2, 5) - A_5(1, 4, 2, 3, 5) - A_5(1, 2, 4, 3, 5)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Notemos que no lado direito das relações anteriores só aparecem 6 subamplitudes diferentes, o que era de se esperar já que o número de permutações dos índices  $\{2, 3, 4\}$  é  $3! = 6$ .

Conhecemos, então, até agora as subamplitudes da forma  $A(1, a_1, a_2, 5, a_3)$ , onde os  $a_i$ 's podem assumir os valores 2, 3 ou 4 em termos de outras 6 da forma  $A(1, a_1, a_2, a_3, 5)$ .

Para obter relações com subamplitudes onde o índice 5 esteja em terceiro lugar, como, por exemplo,  $A(1, 2, 5, 3, 4)$ , basta considerar em (3.1) o seguinte:

$$\begin{aligned}
A_5(1, \{2\}, 5, \{3, 4\}) &= A_5(1, \{2, 4, 3\}, 5) + A_5(1, \{4, 2, 3\}, 5) + A_5(1, \{4, 3, 2\}, 5) \\
\implies A_5(1, 2, 5, 3, 4) &= A_5(1, 2, 4, 3, 5) + A_5(1, 4, 2, 3, 5) + A_5(1, 4, 3, 2, 5)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Novamente apareceram as mesmas 6 subamplitudes que haviam aparecido do lado direito das relações em (3.3). E o mesmo pode ser feito para encontrar subamplitudes como  $A(1, 5, 2, 3, 4)$  onde o índice 5 esteja em segundo lugar. Vejamos:

$$A_5(1, \{ \}, 5, \{2, 3, 4\}) = -A_5(1, \{4, 3, 2\}, 5) \quad , \tag{3.5}$$

onde “ $\{ \}$ ” denota o conjunto vazio, ou seja,

$$\implies A_5(1, 5, 2, 3, 4) = -A_5(1, 4, 3, 2, 5) \tag{3.6}$$

Notemos que a relação acima reflete exatamente a simetria de reflexão (2.11) da teoria.

Concluimos, então, que com as relações Kleiss-Kuijf é possível escrever qualquer subamplitude de 5 pontos em termos de um conjunto de subamplitudes onde participam somente 6 delas. Notemos que essas 6 subamplitudes em termos das quais foi possível

escrever as demais são da forma  $A(1, \mathcal{P}(2, 3, 4), 5)$ , ou seja, possuem o primeiro e o último índices iguais a 1 e 5, respectivamente. No entanto, podemos repetir todo o procedimento e ficarmos, no final, com um conjunto onde as subamplitudes sejam, por exemplo, da forma  $A(1, \mathcal{P}(2, 3, 5), 4)$ . Portanto, há diversas possibilidades de conjuntos de 6 subamplitudes a se obter no final. A única restrição é que essas subamplitudes vão ter em comum o primeiro e o último índices.

Em geral, para um  $N$  qualquer, não é difícil se convencer que a base conterá  $(N - 2)!$  subamplitudes.

# Capítulo 4

## Relações BCJ

Até agora, foram apresentadas relações que nos permitem escrever uma amplitude de  $N$ -pontos em nível de árvore em termos de  $(N - 2)!$  subamplitudes independentes. Em seu trabalho [3], Bern, Carrasco e Johansson propõem identidades cinemáticas que fornecem mais vínculos. Tais vínculos vêm de uma relação entre os fatores cinemáticos que aparecem na expressão das subamplitudes e são provenientes das contribuições dos diagramas de Feynman. Tal relação possui, como será visto, uma estreita analogia à identidade obedecida pelos fatores de cor referentes aos mesmos diagramas que, por sua vez, são obtidas a partir da conhecida identidade de Jacobi.

Vejamos, então, de forma mais detalhada os resultados citados acima, tendo como referência o trabalho em [3] que, no entanto, não apresenta todos os detalhes que serão vistos neste capítulo. Por exemplo, apresentaremos cálculos para o caso  $N = 6$ , os quais não foram abertos no artigo BCJ.

### 4.1 Revisão da Identidade de Jacobi

É bem conhecida a existência da chamada **Identidade de Jacobi**, a qual vem dada por:

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0 \quad (4.1)$$

Se trocarmos os operadores  $A$ ,  $B$  e  $C$  pelas matrizes geradoras do grupo, a identidade adota a seguinte forma:

$$[[\lambda^{a_1}, \lambda^{a_2}], \lambda^{a_3}] + [[\lambda^{a_2}, \lambda^{a_3}], \lambda^{a_1}] + [[\lambda^{a_3}, \lambda^{a_1}], \lambda^{a_2}] = 0 \quad (4.2)$$

E, usando que essas matrizes, uma vez que descrevem uma teoria de *gauge* não-abeliana, devem satisfazer a álgebra de Lie dada em (2.4), podemos chegar à seguinte identidade<sup>1</sup>

$$f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 a_4} + f^{a_1 a_4}_b f^{b a_2 a_3} + f^{a_1 a_3}_b f^{b a_4 a_2} = 0 \quad (4.3)$$

Vemos que a relação em (4.1) nos permite escrever uma relação entre os fatores de cor. Vamos, a partir daqui, nos referir a (4.3) também como **identidade de Jacobi**, apesar de esta não ser exatamente a original.

## 4.2 Relações BCJ para $N = 4$

Consideremos a seguinte relação de Kleiss-Kuijf para  $N = 4$ :

$$A(1, 3, 4, 2) + A(1, 2, 3, 4) + A(1, 3, 2, 4) = 0 \quad (4.4)$$

que pode ser facilmente obtida se fizermos  $\{\alpha\} = \{3\}$  e  $\{\beta\} = \{2\}$  na expressão em (3.1).

São bem conhecidas as expressões para  $A(1, 2, 3, 4)$ ,  $A(1, 3, 2, 4)$  e  $A(1, 3, 4, 2)$ . Elas podem ser calculadas utilizando-se adequadamente as regras de Feynman. Fazendo isso, chega-se a que:

$$A(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{st} K \quad (4.5)$$

$$A(1, 3, 2, 4) = \frac{1}{tu} K \quad (4.6)$$

$$A(1, 3, 4, 2) = \frac{1}{su} K \quad (4.7)$$

---

<sup>1</sup>Notemos que podemos enxergar uma regra por trás dessa notação em 4.3: mantendo o último índice livre fixo (nesse caso,  $a_4$ ) e permutando ciclicamente os demais índices livres, obtemos a identidade de Jacobi em questão. Mantendo esse raciocínio é possível escrever qualquer outra identidade de Jacobi, onde os índices livres ocupem lugares diferentes desses.

onde<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
K = & g^2 \left\{ -\frac{1}{4} \left[ st (\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot \zeta_4) + su (\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot \zeta_4) + tu (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) \right] + \right. \\
& + \frac{1}{2} s \left[ (\zeta_1 \cdot k_4)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_4) + (\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_3) + (\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + \right. \\
& + (\zeta_2 \cdot k_4)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_4) \left. \right] + \frac{1}{2} t \left[ (\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_3)(\zeta_1 \cdot \zeta_3) + (\zeta_3 \cdot k_4)(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_4) + \right. \\
& + (\zeta_2 \cdot k_4)(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) + (\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2)(\zeta_1 \cdot \zeta_2) \left. \right] + \frac{1}{2} u \left[ (\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + \right. \\
& \left. + (\zeta_3 \cdot k_4)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_4) + (\zeta_1 \cdot k_4)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) + (\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_2) \right] \left. \right\}. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Os  $\zeta_i$ 's são os vetores de polarização.  $s$ ,  $t$  e  $u$  são as variáveis de Mandelstam e vêm dadas por  $s = (k_1 + k_2)^2$ ,  $t = (k_1 + k_4)^2$  e  $u = (k_1 + k_3)^2$ , onde o  $k_i$  é o momento da partícula correspondente à  $i$ -ésima perna externa e  $g$  é a constante de acoplamento da teoria.

No caso em questão, como as partículas possuem massa nula, temos que  $k_i^2 = k_i \cdot k_i = 0$ , para  $i = 1, \dots, 4$ . E também, como deve haver conservação do momento no processo de espalhamento, a soma dos momentos de todas as pernas externas deve ser nula, ou seja,  $k_1^\mu + k_2^\mu + k_3^\mu + k_4^\mu = 0^3$ . Assim, com essas informações, não é difícil se convencer que  $s + t + u = 0$ .

Notemos que  $K$  é um fator comum às três subamplitudes em (4.5), (4.6) e (4.7). Isso se deve à forte simetria que a expressão em (4.8) apresenta. Mais precisamente,  $K$  é simétrico à troca de quaisquer dos quatro índices 1, 2, 3 e 4.

E ainda, a expressão de  $K$  é invariante sob a transformação de *gauge*

$$\zeta_i \longrightarrow \zeta_i + \lambda k_i \tag{4.9}$$

Confirmamos que a relação em (4.4) é verificada se utilizarmos agora as expressões para as subamplitudes dadas acima.

$$\begin{aligned}
A(1, 3, 4, 2) + A(1, 2, 3, 4) + A(1, 3, 2, 4) &= \left[ \frac{1}{su} + \frac{1}{st} + \frac{1}{tu} \right] K \\
&= \frac{s + t + u}{stu} K \\
&= 0. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

<sup>2</sup>A expressão de  $K$  está em diversos textos, por exemplo, em [18].

<sup>3</sup>Para entender a conservação do momento dada dessa forma, é preciso lembrar da convenção de que as partículas do espalhamento estão saindo e considerar que uma partícula com energia negativa pode ser enxergada, nesse contexto, como sua antipartícula viajando no sentido contrário do tempo.

Se eliminarmos  $K$  das igualdades (4.5), (4.6) e (4.7), obtemos que

$$t A(1, 2, 3, 4) = u A(1, 3, 4, 2) \quad (4.11)$$

$$t A(1, 3, 2, 4) = s A(1, 3, 4, 2) \quad (4.12)$$

$$s A(1, 2, 3, 4) = u A(1, 3, 2, 4) \quad (4.13)$$

que são as **Relações BCJ para  $N = 4$** .

É importante notar que, das três relações acima, apenas duas são linearmente independentes. Com essas relações, em conjunto com as de Kleiss-Kuijf já apresentadas anteriormente, é possível escrever a amplitude de 4-pontos em termos de apenas 1 subamplitude independente.

## 4.3 Uma outra forma de escrever as subamplitudes para $N = 4$

### 4.3.1 Escrevendo as subamplitudes explicitamente em termos dos seus pólos

Obtivemos, até agora, algumas relações entre as subamplitudes, que são as chamadas relações BCJ. Por outro lado, queremos encontrar uma nova forma de escrever esses novos vínculos para chegarmos à identidade cinemática à qual nos referimos no começo deste capítulo. Para isso, vejamos, primeiramente, quais são os diagramas de Feynman que contribuem para cada uma das subamplitudes. Para identificá-los, lembremos que, usando (2.9), a expressão de uma amplitude de 4-pontos (em nível de árvore) na teoria de Yang-Mills vem dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4 = & \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) A(1, 2, 3, 4) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) A(1, 2, 4, 3) + \\ & + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4}) A(1, 3, 2, 4) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) A(1, 3, 4, 2) + \\ & + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) A(1, 4, 2, 3) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) A(1, 4, 3, 2) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Pela expressão de  $\mathcal{A}_4$  acima, vemos que todos os termos que tiverem em comum, por exemplo, o  $\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4})$  contribuirão para  $A(1, 2, 3, 4)$  e somente esses termos. Logo, para identificarmos os diagramas que vão contribuir em cada subamplitude, precisamos ver os traços que aparecem ao se considerar as regras de Feynman para cada um deles.

Na figura 4.1 estão todos os diagramas em nível de árvore que contribuem para a amplitude total. Usando as regras de Feynman no espaço dos momentos, podemos obter as expressões vindas desses diagramas. As expressões para o primeiro (*i*) e o último (*iv*) diagramas são as seguintes:

$$D_i = \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} \zeta_3^{\mu_3} \zeta_4^{\mu_4} V_{\mu_1 \mu_2 \nu}^{a_1 a_2 b}(k_1, k_2, k_3 + k_4) \Delta_{bc}^{\nu \rho}(k_1 + k_2) \times \\ \times V_{\rho \mu_3 \mu_4}^{c a_3 a_4}(k_1 + k_2, k_3, k_4) \quad (4.15)$$

$$D_{iv} = \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} \zeta_3^{\mu_3} \zeta_4^{\mu_4} V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{a_1 a_2 a_3 a_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) \quad (4.16)$$

onde  $V_{\mu_1 \mu_2 \nu}^{a_1 a_2 b}(k_1, k_2, k_3)$  e  $V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{a_1 a_2 a_3 a_4}(k_1, k_2, k_3, k_4)$  são, respectivamente, os vértices de Yang-Mills de três e quatro pernas; e  $\Delta(k)$  é o propagador da teoria. Esses são elementos das regras de Feynman e estão dados no Apêndice B.

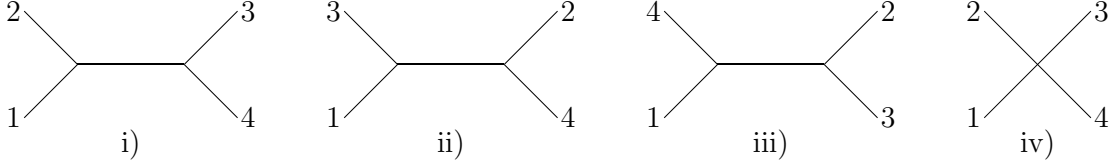


Figura 4.1: Diagramas de Feynman para a amplitude de 4-pontos

As contribuições dos outros diagramas podem ser obtidas trocando convenientemente os índices.

Vejamos, a seguir, para o primeiro dos diagramas, como irão aparecer os fatores com os traços.

Substituindo as expressões do vértice e do propagador em (4.15), obtemos que:

$$D_i = \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} \zeta_3^{\mu_3} \zeta_4^{\mu_4} \left\{ (-ig) f^{a_1 a_2 b} \left[ \eta_{\mu_1 \mu_2} (k_1 - k_2)_\nu + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta_{\mu_2 \nu} (k_2 - k_3 - k_4)_{\mu_1} + \eta_{\nu \mu_1} (k_3 + k_4 - k_1)_{\mu_2} \right] \left[ \frac{-i \eta^{\nu \rho} \delta_{bc}}{2k_3 \cdot k_4} \right] (-ig) f^{c a_3 a_4} \times \right. \\ \left. \times \left[ \eta_{\rho \mu_3} (k_1 + k_2 - k_3)_{\mu_4} + \eta_{\mu_3 \mu_4} (k_3 - k_4)_\rho + \eta_{\mu_4 \rho} (k_4 - k_1 - k_2)_{\mu_3} \right] \right\} \quad (4.17)$$

Notemos que na expressão acima aparece o produto de duas constantes de estru-

tura,  $f^{a_1 a_2 b} f^{c a_3 a_4} \delta_{bc} = f^{a_1 a_2 b} f_b^{a_3 a_4}$ . Usando (2.7) podemos reescrever esse produto como

$$\begin{aligned} f^{a_1 a_2 b} f_b^{a_3 a_4} &= -\text{Tr}(\lambda^{a_1} [\lambda^{a_2}, \lambda^b]) \text{Tr}(\lambda_b [\lambda^{a_3}, \lambda^{a_4}]) \\ &= -\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^b) \text{Tr}(\lambda_b \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^b) \text{Tr}(\lambda_b \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) + \\ &+ \text{Tr}(\lambda^{a_2} \lambda^{a_1} \lambda^b) \text{Tr}(\lambda_b \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) - \text{Tr}(\lambda^{a_2} \lambda^{a_1} \lambda^b) \text{Tr}(\lambda_b \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Agora, usando a propriedade dada em (2.8) e a simetria cíclica do traço, obtemos a seguinte expressão para o fator de cor:

$$f^{a_1 a_2 b} f_b^{a_3 a_4} = -\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) \quad (4.19)$$

Portanto, examinando os vértices de cada um dos diagramas da Figura 4.1 ou, mais especificamente, examinando os produtos das constantes de estrutura que virão de cada vértice podemos identificar os diferentes traços que contribuirão para cada subamplitude.

Fazendo isso, obtemos que para  $A(1, 2, 3, 4)$  devemos considerar os diagramas  $i)$ ,  $iii)$  e  $iv)$  da Figura 4.1, pois somente os fatores de cor vindos desses diagramas conterão o termo  $\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3})$ .

Como sabemos, o propagador da teoria, no *gauge* de Lorentz, vem dado por  $\Delta_{bc}^{\nu\rho}(k) = \frac{-i\eta^{\nu\rho}\delta_{bc}}{k^2}$ . Assim, para cada propagador presente no diagrama, teremos na expressão da subamplitude um pólo no momento correspondente. Por exemplo, no caso do diagrama  $i)$  da Figura 4.1, o momento propagado é igual a  $(k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 \cdot k_2 = 2k_1 \cdot k_2$ ; então, ele apresentará um pólo do tipo  $\frac{1}{2k_1 \cdot k_2} = \frac{1}{s}$ . Repetindo essa análise para o diagrama  $iii)$ , o pólo que aparece desta vez é do tipo  $\frac{1}{t}$ . Já para o último dos diagramas, o de vértice quártico, por não conter propagador, não apresentará pólo em sua expressão.

Com as informações anteriores, é conveniente escrever  $A(1, 2, 3, 4)$  em termos dos pólos que ela contém. Portanto, como os diagramas que contribuem para  $A(1, 2, 3, 4)$  são os  $i)$ ,  $iii)$  e  $iv)$ , os pólos que aparecerão nesta subamplitude serão em  $s$  e  $t$ . Assim:

$$A(1, 2, 3, 4) = \frac{n_s}{s} + \frac{n_t}{t} \quad (4.20)$$

onde os numeradores  $n_s$  e  $n_t$  são fatores cinemáticos que dependem dos momentos e das polarizações dos quatro glúons.

É importante notar que os numeradores  $n_s$  e  $n_t$  não são, necessariamente, os resíduos dos pólos  $s$  e  $t$ , respectivamente. Isso se deve ao fato de que a contribuição vinda

do diagrama com vértice quártico, a qual não contém nenhum pólo, deve estar incluída nessa expressão. Portanto, os numeradores devem incluir esses termos, chamados termos de contato.

Repetindo o procedimento agora para  $A(1, 3, 2, 4)$  e  $A(1, 3, 4, 2)$  temos que:

$$A(1, 3, 2, 4) = \frac{n'_t}{t} + \frac{n_u}{u} \quad (4.21)$$

$$A(1, 3, 4, 2) = \frac{n'_u}{u} + \frac{n'_s}{s} \quad (4.22)$$

Há, ao todo, seis numeradores que precisaram ser definidos:  $n_s, n_t, n_u, n'_s, n'_t$  e  $n'_u$ . Porém, é possível reduzir esse número para três, encontrando relações entre os numeradores. No Apêndice D.1 encontram-se detalhadas as manipulações para se chegar a essas relações, onde fica provado que

$$n'_s = -n_s$$

$$n'_t = -n_t$$

$$n'_u = -n_u$$

Para se chegar aos resultados acima, foi preciso utilizar a propriedade da fatoração das subamplitudes.

Com este resultado, reescrevamos as igualdades em (4.20), (4.21) e (4.22):

$$A(1, 2, 3, 4) = +\frac{n_s}{s} + \frac{n_t}{t} \quad (4.23)$$

$$A(1, 3, 2, 4) = -\frac{n_t}{t} + \frac{n_u}{u} \quad (4.24)$$

$$A(1, 3, 4, 2) = -\frac{n_u}{u} - \frac{n_s}{s} \quad (4.25)$$

### 4.3.2 Identidade cinemática

Substituamos as expressões das subamplitudes acima na relação BCJ para  $N = 4$  em (4.11):

$$t A(1, 2, 3, 4) = u A(1, 3, 4, 2) \quad (4.26)$$

$$t \left( \frac{n_s}{s} + \frac{n_t}{t} \right) = u \left( -\frac{n_u}{u} - \frac{n_s}{s} \right) \quad (4.27)$$

$$\frac{t}{s} n_s + n_t = -n_u - \frac{u}{s} n_s \quad (4.28)$$

$$n_u = -\frac{t+u}{s} n_s - n_t \quad (4.29)$$

Usando que  $s + t + u = 0$ , chegamos à **Identidade Cinemática** entre os numeradores:

$$\implies n_u = n_s - n_t \quad (4.30)$$

Já tínhamos visto que as relações BCJ acrescentam mais um vínculo às subamplitudes. Agora, com essa identidade cinemática, vemos que tal vínculo pode ser traduzido pela relação existente entre os numeradores presentes nas subamplitudes.

### 4.3.3 Dualidade cor-cinemática

Na seção 4.1, mais especificamente na equação (4.3), lembramos a identidade de Jacobi para as constantes de estrutura da teoria:

$$f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 a_4} + f^{a_1 a_4}_b f^{b a_2 a_3} + f^{a_1 a_3}_b f^{b a_4 a_2} = 0 \quad (4.31)$$

Permutando os índices  $a_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ), podemos obter muitas outras relações entre os fatores de cor da amplitude de 4-pontos. Por exemplo, trocando  $a_1$  e  $a_4$  de lugar, ficamos com a seguinte identidade:

$$f^{a_4 a_2}_b f^{b a_3 a_1} + f^{a_4 a_1}_b f^{b a_2 a_3} + f^{a_4 a_3}_b f^{b a_1 a_2} = 0 \quad (4.32)$$

Além disso, vimos que cada diagrama com dois vértices cúbicos contribui com um produto de constantes de estrutura para a expressão da subamplitude. Portanto, podemos olhar a identidade de Jacobi em (4.31) como uma relação entre os respectivos diagramas. Veja a Figura 4.2.

$$\begin{array}{ccccccc}
 f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 a_4} & + & f^{a_1 a_4}_b f^{b a_2 a_3} & + & f^{a_1 a_3}_b f^{b a_4 a_2} & = & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} & + & \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} & = & 0 \\
 \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 4 \end{array} & & \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3 \end{array} & & \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} & & \\
 \text{i)} & & \text{ii)} & & \text{iii)} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 n_s & & -n_t & & -n_u & = & 0
 \end{array}$$

Figura 4.2: Fatores de cor e diagramas

É importante ressaltar que a relação entre os diagramas representada na Figura 4.2 não significa que a soma das amplitudes correspondentes aos diagramas vale zero. Eles só estão sendo usados para representar a relação existente entre os fatores de cor que eles apresentam na expressão das suas respectivas amplitudes.

Por outro lado, da seção 4.3.1, sabemos que cada diagrama que possui um propagador contribui com um pólo para a expressão da subamplitude. E para cada pólo definimos um numerador. Portanto, podemos associar a cada diagrama também um numerador. Por exemplo, o primeiro dos diagramas da Figura 4.2 apresenta um pólo em  $s$ , então vamos associar a ele o numerador de  $s$  em  $A(1, 2, 3, 4)$ , que é  $n_s$ . Já o segundo dos diagramas da figura possui um pólo em  $t$ , então vamos associar a ele o numerador de  $t$  em  $A(1, 3, 2, 4)$  que é  $-n_t$ , de acordo com a equação (4.24). Analogamente, o terceiro diagrama está associado ao fator cinemático  $-n_u$ .

Sabendo disso, vamos nomear cada um dos produtos de constantes de estrutura tendo em vista os fatores cinemáticos referentes a cada diagrama. Por exemplo, o fator de cor  $f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 a_4}$  está associado ao primeiro dos diagramas da Figura 4.2 que, por sua vez, contribuiu com o fator cinemático  $n_s$ . Dessa forma, vamos redefinir:<sup>4</sup>

$$f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 a_4} \doteq c_s \quad (4.33)$$

Analogamente,

$$f^{a_1 a_4}_b f^{b a_2 a_3} \doteq -c_t \quad (4.34)$$

$$f^{a_1 a_3}_b f^{b a_4 a_2} \doteq -c_u \quad (4.35)$$

Substituindo (4.33), (4.34) e (4.35) na identidade de Jacobi em (4.31), obtemos:

$$c_s - c_t - c_u = 0 \quad (4.36)$$

ou ainda,

$$c_u = c_s - c_t \quad (4.37)$$

Se compararmos a igualdade acima com a identidade cinemática dada em (4.30), podemos observar o que chamamos de **dualidade cor-cinemática**. O mesmo tipo de relação que seguem os fatores de cor pela identidade de Jacobi, seguem também os fatores cinemáticos, pelo menos para o caso em que  $N = 4$ .

---

<sup>4</sup>Na verdade,  $c_s$ ,  $c_t$  e  $c_u$  deveriam conter os índices de cor  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$ , mas, para efeitos de simplificar a notação, vamos omiti-los.

### 4.3.4 Amplitude de 4-pontos em termos dos pólos, dos numeradores e dos fatores de cor

Voltemos para a expressão da amplitude total de 4-pontos dada em (4.14):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4 = & \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) A(1, 2, 3, 4) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) A(1, 2, 4, 3) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4}) A(1, 3, 2, 4) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) A(1, 3, 4, 2) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) A(1, 4, 2, 3) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) A(1, 4, 3, 2) \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Usando a propriedade de reflexão dada em (2.11), podemos reescrever a igualdade anterior em termos de apenas três subamplitudes. Vejamos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4 = & \left[ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) \right] A(1, 2, 3, 4) + \left[ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) + \right. \\
& + \left. \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) \right] A(1, 3, 4, 2) + \left[ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4}) \right] A(1, 3, 2, 4) \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Substituamos as expressões das subamplitudes dadas em (4.23), (4.25) e (4.24):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4 = & \left[ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) \right] \left( \frac{n_s}{s} + \frac{n_t}{t} \right) + \\
& + \left[ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) \right] \left( -\frac{n_u}{u} - \frac{n_s}{s} \right) + \\
& + \left[ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4}) \right] \left( -\frac{n_t}{t} + \frac{n_u}{u} \right) \quad (4.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4 = & \left[ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) \right] \frac{n_s}{s} + \\
& + \left[ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4}) \right] \frac{n_t}{t} + \\
& + \left[ -\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4}) \right] \frac{n_u}{u} \quad (4.41)
\end{aligned}$$

É possível, ainda, identificar cada uma das somas de traços acima como um produto de constantes de estrutura. Por exemplo, usando (2.7), temos que:

$$f^{a_1 a_2}{}_b f^{a_3 a_4}{}_b = \{-i \text{Tr}([\lambda^{a_1}, \lambda^{a_2}] \lambda_b)\} \{-i \text{Tr}([\lambda^{a_3}, \lambda^{a_4}] \lambda^b)\} \quad (4.42)$$

E agora, usando a propriedade em (2.8):

$$f^{a_1 a_2}{}_b f^{a_3 a_4 b} = -\text{Tr}([\lambda^{a_1}, \lambda^{a_2}][\lambda^{a_3}, \lambda^{a_4}]) \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} &= -\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_2} \lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) + \\ &\quad -\text{Tr}(\lambda^{a_2} \lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \implies f^{a_1 a_2}{}_b f^{a_3 a_4 b} &= -\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) + \\ &\quad -\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Permutando os índices  $a_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) podemos escrever qualquer outro produto de constantes de estrutura como uma soma de traços. Desse modo, reescrevamos (4.41):

$$\mathcal{A}_4 = f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_3 a_4} \frac{n_s}{s} - f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_2 a_3} \frac{n_t}{t} - f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_4 a_2} \frac{n_u}{u} \quad (4.46)$$

E, por fim, usando a notação definida em (4.33), (4.34) e (4.35), chega-se a uma expressão extremamente simples para a amplitude de 4-pontos:

$$\mathcal{A}_4 = \frac{c_s n_s}{s} + \frac{c_t n_t}{t} + \frac{c_u n_u}{u}. \quad (4.47)$$

### 4.3.5 Liberdade de *gauge* dos numeradores

Os numeradores  $n_s$ ,  $n_t$  e  $n_u$  foram definidos de forma a conter os resíduos de um determinado pólo e ainda outras possíveis contribuições vindas da parte da subamplitude que não possuía pólo algum (aquela correspondente ao diagrama *iv*) da Figura 4.1). Por exemplo,  $n_s$  contém o resíduo do pólo  $s$  em  $A(1, 2, 3, 4)$  e ainda pode conter alguns outros termos do tipo  $[\alpha(k_i, \zeta_i)s]$ , os quais são provenientes dos termos de contato que foram realocados nos numeradores. Esse procedimento de realocar termos de contato nos numeradores foi detalhadamente feito no Apêndice D.1 e, através dele, é possível notar que a forma de distribuir esses termos pelos numeradores é totalmente arbitrária, tomando cuidado somente para que a subamplitude se mantenha inalterada. Ou seja, não há uma forma única de se definir os numeradores. Pelo contrário, eles possuem uma chamada **liberdade de *gauge*** [3].

Mais especificamente, ao se definir primeiro um dos numeradores, por exemplo,  $n_s$ , sempre podemos adicionar a ele um termo da forma  $[\alpha(k_i, \zeta_i)s]$ . Isto é, sempre podemos redefinir  $n_s$  trocando-o por um  $n'_s$  dado por:

$$n'_s = n_s + \alpha(k_i, \zeta_i)s \quad (4.48)$$

Entretanto, para que o valor das subamplitudes  $A(1, 2, 3, 4)$  e  $A(1, 3, 4, 2)$  dadas em (4.23) e (4.25) se mantenha inalterado, é preciso que os outros numeradores,  $n_t$  e  $n_u$ , também se transformem da seguinte forma:

$$n'_t = n_t - \alpha(k_i, \zeta_i)t \quad (4.49)$$

$$n'_u = n_u - \alpha(k_i, \zeta_i)u \quad (4.50)$$

Dessa forma, vemos que, uma vez feita a escolha de como se transformará um dos numeradores, a mudança dos outros já fica automaticamente definida.

Notemos que, efetuando as três transformações acima simultaneamente em (4.23), (4.25) e (4.24), obtemos de fato as mesmas expressões para as subamplitudes em termos dos numeradores.

Do mesmo modo, a identidade cinemática em (4.30) se mantém invariante. Vejamos:

$$n_u = n_s - n_t \longrightarrow n'_u = n'_s - n'_t \quad (4.51)$$

$$\implies n_u - \alpha u = (n_s + \alpha s) - (n_t - \alpha t) \quad (4.52)$$

$$\implies n_u = n_s - n_t + \alpha(s + t + u) \quad (4.53)$$

$$\implies n_u = n_s - n_t \quad (4.54)$$

Portanto, as transformações em (4.48), (4.49) e (4.50) nos permitem distribuir os termos de contato entre os numeradores sem alterar as subamplitudes e a identidade cinemática. E, embora, os numeradores dependam da escolha do *gauge*, a identidade (4.30) permanece igual para qualquer particular escolha.

## 4.4 Caso $N = 5$

Para chegar às relações BCJ para os casos em que  $N \geq 5$  vamos proceder de uma maneira um pouco diferente da feita para  $N = 4$ . Assumamos de antemão, como uma conjectura, que a dualidade cor-cinemática seja válida e, a partir dela, vamos obter as identidades entre os numeradores, análogas àquela em (4.30). E, em seguida, chegaremos às relações BCJ. Este foi o procedimento adotado no trabalho [3].

### 4.4.1 Escrevendo as subamplitudes explicitamente em termos dos seus pólos

Pretende-se aqui escrever as subamplitudes para  $N = 5$  explicitamente em termos dos seus pólos, assim como foi feito para  $N = 4$ . É suficiente fazer isso somente para as subamplitudes que permanecem independentes após utilizarmos as relações Kleiss-Kuijf. Sabemos que, com as relações Kleiss-Kuijf, é possível escrever a amplitude de 5 pontos em termos de uma base com  $(5 - 2)! = 6$  subamplitudes. Escolhamos então, para formar a base, aquelas 6 que possuem a forma  $A(1, \dots, 5)$ . São elas:

$$\{A(1, 2, 3, 4, 5), A(1, 2, 4, 3, 5), A(1, 3, 2, 4, 5), A(1, 3, 4, 2, 5), A(1, 4, 2, 3, 5), A(1, 4, 3, 2, 5)\}. \quad (4.55)$$

Precisamos, agora, identificar quais os diagramas de 5 pernas que contribuem para cada uma das subamplitudes. Para isso, basta procedermos de modo análogo ao que foi feito na seção 4.3.1.

Primeiramente, listemos todos os possíveis diagramas de Feynman que vão participar da amplitude total, começando por aqueles que contêm apenas vértices cúbicos. Eles estão representados na Figura 4.3.

Como foi feito na seção 4.3.1, usando as regras de Feynman podemos encontrar as expressões das amplitudes para cada um desses diagramas e, analisando os traços que aparecem, podemos saber para quais subamplitudes cada diagrama contribui. Vejamos um exemplo: a expressão para o primeiro diagrama da Figura 4.3, por conter três vértices cúbicos, vai apresentar um produto de três constantes de estrutura. Isso porque cada vértice de Yang-Mills de três pernas possui uma constante de estrutura como um fator global (ver Apêndice B). Mais especificamente, o diagrama vai conter o fator  $f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 c} f_c^{a_4 a_5}$ . Usando (2.7) e (2.8), assim como no caso  $N = 4$ , é possível escrever esse produto novamente como uma soma de traços. Fazendo isso, não é difícil chegar a que

$$\begin{aligned} f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 c} f_c^{a_4 a_5} &= \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) + \\ &+ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3}) + \\ &- \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Portanto, com essa informação e sabendo, de (2.9), que a amplitude de 5-pontos

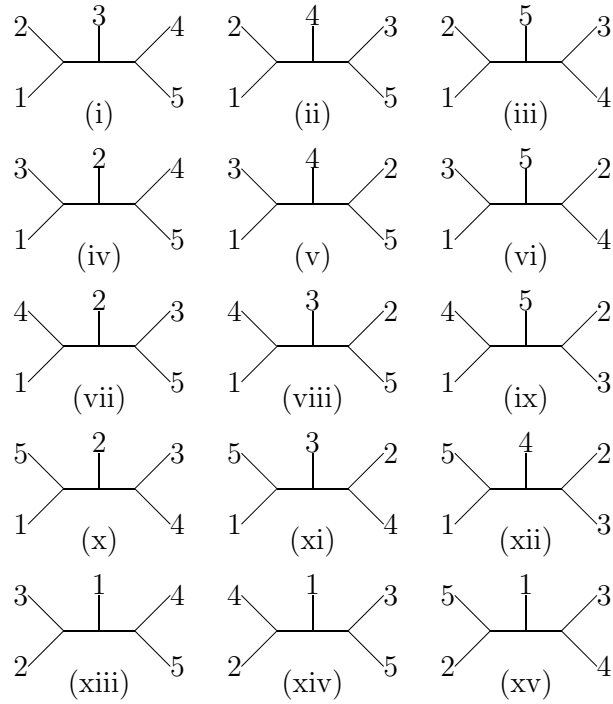


Figura 4.3: Diagramas com apenas vértices cúbicos para a amplitude de 5-pontos

(em nível de árvore) na teoria de Yang-Mills vem dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_5 = & \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5}) A(1, 2, 3, 4, 5) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5}) A(1, 2, 4, 3, 5) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5}) A(1, 3, 2, 4, 5) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5}) A(1, 3, 4, 2, 5) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5}) A(1, 4, 2, 3, 5) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5}) A(1, 4, 3, 2, 5) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4}) A(1, 2, 3, 5, 4) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3}) A(1, 2, 4, 5, 3) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4}) A(1, 3, 2, 5, 4) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2}) A(1, 3, 4, 5, 2) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3}) A(1, 4, 2, 5, 3) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2}) A(1, 4, 3, 5, 2) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) A(1, 2, 5, 3, 4) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) A(1, 2, 5, 4, 3) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4}) A(1, 3, 5, 2, 4) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) A(1, 3, 5, 4, 2) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) A(1, 4, 5, 2, 3) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) A(1, 4, 5, 3, 2) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) A(1, 5, 2, 3, 4) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) A(1, 5, 2, 4, 3) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4}) A(1, 5, 3, 2, 4) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) A(1, 5, 3, 4, 2) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) A(1, 5, 4, 2, 3) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) A(1, 5, 4, 3, 2) ,
\end{aligned}$$

(4.57)

podemos concluir que o primeiro diagrama da Figura 4.3 vai contribuir para as subamplitudes  $A(1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $A(1, 2, 5, 4, 3)$ ,  $A(1, 3, 5, 4, 2)$ ,  $A(1, 4, 5, 3, 2)$ ,  $A(1, 2, 3, 5, 4)$ ,  $A(1, 2, 4, 5, 3)$ ,  $A(1, 3, 4, 5, 2)$  e  $A(1, 5, 4, 3, 2)$ ; e somente para elas.

Notemos ainda que os diagramas com três vértices cúbicos possuem dois propagadores que, por sua vez, contribuem com um pólo cada um. Logo, a expressão total vinda do diagrama terá sempre um produto de dois pólos simples.

Ainda com relação ao diagrama (i) da Figura 4.3, vemos que os dois propagadores que ele contém são da forma  $\frac{1}{s_{12}}$  e  $\frac{1}{s_{45}}$ , onde  $s_{ij}$ <sup>5</sup> é definido como  $s_{ij} \doteq (k_i + k_j)^2$ . Logo, ele contribui com o pólo  $\frac{1}{s_{12}s_{45}}$ . Portanto, todas as oito subamplitudes mencionadas anteriormente conterão um pólo desse tipo por influência do diagrama (i).

A seguir, será feita a identificação dos pólos que todos os diagramas de vértices cúbicos, de (i) a (xv) da Figura 4.3, apresentam:

$$\begin{array}{lll}
 (i) \rightarrow \frac{1}{s_{12}s_{45}} & (ii) \rightarrow \frac{1}{s_{12}s_{35}} & (iii) \rightarrow \frac{1}{s_{12}s_{34}} \\
 (iv) \rightarrow \frac{1}{s_{13}s_{45}} & (v) \rightarrow \frac{1}{s_{13}s_{25}} & (vi) \rightarrow \frac{1}{s_{12}s_{34}} \\
 (vii) \rightarrow \frac{1}{s_{14}s_{35}} & (viii) \rightarrow \frac{1}{s_{14}s_{25}} & (ix) \rightarrow \frac{1}{s_{14}s_{23}} \\
 (x) \rightarrow \frac{1}{s_{15}s_{34}} & (xi) \rightarrow \frac{1}{s_{15}s_{24}} & (xii) \rightarrow \frac{1}{s_{15}s_{23}} \\
 (xiii) \rightarrow \frac{1}{s_{23}s_{45}} & (xiv) \rightarrow \frac{1}{s_{24}s_{35}} & (xv) \rightarrow \frac{1}{s_{25}s_{34}}
 \end{array}$$

Além desses diagramas, deveríamos considerar, em princípio, os que possuam também vértices quárticos, por exemplo, o da Figura 4.4. Porém, enquanto os diagramas com apenas vértices cúbicos possuem dois propagadores e, portanto, contribuem com o produto de dois pólos, os diagramas que contêm 1 vértice quártico e 1 cúbico possuem apenas um propagador e, conseqüentemente, contribuem com pólos simples, que são de ordem mais baixa. Por isso, vamos optar por escrever as subamplitudes em termos de seus pólos de ordem mais alta. As demais contribuições serão absorvidas nos numeradores, assim como foi feito para o caso  $N = 4$ .

---

<sup>5</sup>Há, no total, dez parâmetros  $s_{ij}$ 's diferentes no caso  $N = 5$ , mas nem todos são independentes. Demandando a validade da conservação do momento, isto é,  $k_1^\mu + k_2^\mu + k_3^\mu + k_4^\mu + k_5^\mu = 0$ , podemos obter relações entre os  $s_{ij}$ 's, como, por exemplo,  $s_{12} + s_{13} + s_{14} + s_{15} = 0$ . Assim, escrevendo todas as relações possíveis, chegamos a que apenas cinco  $s_{ij}$ 's são independentes. E vamos optar por escolher a base formada por:  $s_{12}$ ,  $s_{23}$ ,  $s_{34}$ ,  $s_{45}$  e  $s_{15}$ .

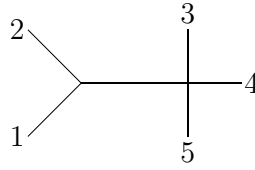


Figura 4.4: Diagrama com vértice cúbico e quártico

Com esse procedimento de identificar quais diagramas contribuem para cada subamplitude, somos capazes de escrevê-las em termos dos seus pólos de ordem mais alta. Fazendo isso para a primeira das subamplitudes escolhidas para a base,  $A(1, 2, 3, 4, 5)$ , vemos que os diagramas que vão contribuir para ela são os  $(i)$ ,  $(iii)$ ,  $(x)$ ,  $(xii)$  e  $(xiii)$  da Figura 4.3 e sua expressão toma a seguinte forma:

$$A(1, 2, 3, 4, 5) = \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} + \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} + \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} \quad (4.58)$$

Da mesma forma como ocorreu para  $N = 4$ , esses numeradores são definidos de modo a englobar os resíduos dos pólos em questão e os termos de ordens mais baixas que, neste caso, seriam os que contêm pólos simples e aqueles sem pólo algum.<sup>6</sup>

Repetindo esse procedimento para as outras 5 subamplitudes da base podemos chegar a que:

$$A(1, 4, 3, 2, 5) = \frac{n_6}{s_{14}s_{25}} + \frac{n'_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_7}{s_{14}s_{23}} + \frac{n_8}{s_{25}s_{34}} + \frac{n'_2}{s_{15}s_{23}} \quad (4.59)$$

$$A(1, 3, 4, 2, 5) = \frac{n_9}{s_{13}s_{25}} + \frac{n''_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} + \frac{n'_8}{s_{25}s_{34}} + \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (4.60)$$

$$A(1, 2, 4, 3, 5) = \frac{n_{12}}{s_{12}s_{35}} + \frac{n'_{11}}{s_{15}s_{24}} + \frac{n'_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_{13}}{s_{24}s_{35}} + \frac{n'''_5}{s_{15}s_{34}} \quad (4.61)$$

$$A(1, 4, 2, 3, 5) = \frac{n_{14}}{s_{14}s_{35}} + \frac{n''_{11}}{s_{15}s_{24}} + \frac{n'_7}{s_{14}s_{23}} + \frac{n'_{13}}{s_{24}s_{35}} + \frac{n''_2}{s_{15}s_{23}} \quad (4.62)$$

$$A(1, 3, 2, 4, 5) = \frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} + \frac{n'''_2}{s_{15}s_{23}} + \frac{n'_{10}}{s_{13}s_{24}} + \frac{n'_4}{s_{23}s_{45}} + \frac{n'''_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (4.63)$$

lembrando que

$$s_{ij} = (k_i + k_j)^2 \quad (4.64)$$

Em princípio, há 30 numeradores diferentes. Notemos que alguns deles foram definidos com o mesmo índice, por exemplo, temos  $n_5$ ,  $n'_5$ ,  $n''_5$  e  $n'''_5$ . Esses numeradores

<sup>6</sup>Os termos sem pólos não são óbvios: eles podem surgir por cancelamentos entre a expressão cinemática do numerador e os pólos.

foram definidos assim porque eles têm o mesmo denominador,  $s_{15}s_{34}$ , e, do mesmo modo como aconteceu para o caso  $N = 4$ , vamos poder reduzir essa quantidade de numeradores. Os detalhes desse procedimento podem ser encontrados no Apêndice D.2, onde, depois de vários cálculos, fica demonstrado que as igualdades em (4.58), (4.59), (4.60), (4.61), (4.62) e (4.63) podem ser reescritas em termos de somente 15 numeradores diferentes:

$$A(1, 2, 3, 4, 5) = \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} + \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} + \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} \quad (4.65)$$

$$A(1, 4, 3, 2, 5) = \frac{n_6}{s_{14}s_{25}} + \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_7}{s_{14}s_{23}} + \frac{n_8}{s_{25}s_{34}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} \quad (4.66)$$

$$A(1, 3, 4, 2, 5) = \frac{n_9}{s_{13}s_{25}} - \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} - \frac{n_8}{s_{25}s_{34}} + \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (4.67)$$

$$A(1, 2, 4, 3, 5) = \frac{n_{12}}{s_{12}s_{35}} + \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} - \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_{13}}{s_{24}s_{35}} - \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} \quad (4.68)$$

$$A(1, 4, 2, 3, 5) = \frac{n_{14}}{s_{14}s_{35}} - \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} - \frac{n_7}{s_{12}s_{34}} - \frac{n_{13}}{s_{24}s_{35}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{34}} \quad (4.69)$$

$$A(1, 3, 2, 4, 5) = \frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} - \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} - \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} - \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (4.70)$$

#### 4.4.2 Dualidade cor-cinemática e as identidades cinemáticas

Como já foi dito no começo deste capítulo, a partir de  $N = 5$  será assumida a existência da dualidade cor-cinemática. Ou seja, depois de escrever as relações entre os fatores de cor vindas da identidade de Jacobi, vamos conjecturar que os numeradores também satisfazem as mesmas identidades de Jacobi.

Para entender isso melhor, lembremos que já vimos no começo da seção 4.4.1 que cada um dos quinze diagramas de 5 pernas e somente vértices cúbicos apresenta em sua expressão um produto de três constantes de estrutura. Vamos denotar cada um desses produtos por um  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 15$ ). Por outro lado, esses mesmos diagramas possuem pólos que, por sua vez, são acompanhados por um numerador cinemático que já chamamos de algum  $n_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 15$ ).

Por exemplo, o primeiro dos diagramas da Figura 4.3 vai apresentar em sua expressão o fator de cor  $f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 c} f_c^{a_4 a_5}$  e o pólo  $\frac{1}{s_{12}s_{45}}$ . Como o numerador que acompanha esse pólo foi definido como  $n_1$  (veja (4.58)), vamos, para simplificar a notação, definir o fator de cor como  $c_1$ . Este exemplo está representado na Figura 4.5.

Da mesma forma como definimos  $c_1$ , podemos definir os demais fatores de cor. Assim, temos que os 15  $c_i$ 's vêm dados por:

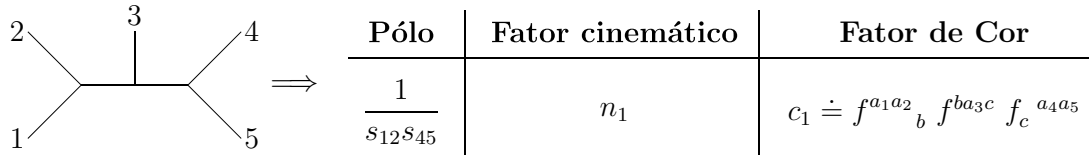


Figura 4.5: Fator de cor e fator cinemático de um diagrama de 5 pernas

$$c_1 \doteq f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 c} f_c^{a_4 a_5} \quad (4.71)$$

$$c_2 \doteq f^{a_2 a_3}_b f^{b a_4 c} f_c^{a_5 a_1} \quad (4.72)$$

$$c_3 \doteq f^{a_3 a_4}_b f^{b a_5 c} f_c^{a_1 a_2} \quad (4.73)$$

$$c_4 \doteq f^{a_4 a_5}_b f^{b a_1 c} f_c^{a_2 a_3} \quad (4.74)$$

$$c_5 \doteq f^{a_5 a_1}_b f^{b a_2 c} f_c^{a_3 a_4} \quad (4.75)$$

$$c_6 \doteq f^{a_1 a_4}_b f^{b a_3 c} f_c^{a_2 a_5} \quad (4.76)$$

$$c_7 \doteq f^{a_3 a_2}_b f^{b a_5 c} f_c^{a_1 a_4} \quad (4.77)$$

$$c_8 \doteq f^{a_2 a_5}_b f^{b a_1 c} f_c^{a_4 a_3} \quad (4.78)$$

$$c_9 \doteq f^{a_1 a_3}_b f^{b a_4 c} f_c^{a_2 a_5} \quad (4.79)$$

$$c_{10} \doteq f^{a_4 a_2}_b f^{b a_5 c} f_c^{a_1 a_3} \quad (4.80)$$

$$c_{11} \doteq f^{a_5 a_1}_b f^{b a_3 c} f_c^{a_4 a_2} \quad (4.81)$$

$$c_{12} \doteq f^{a_1 a_2}_b f^{b a_4 c} f_c^{a_3 a_5} \quad (4.82)$$

$$c_{13} \doteq f^{a_3 a_5}_b f^{b a_1 c} f_c^{a_2 a_4} \quad (4.83)$$

$$c_{14} \doteq f^{a_1 a_4}_b f^{b a_2 c} f_c^{a_3 a_5} \quad (4.84)$$

$$c_{15} \doteq f^{a_1 a_3}_b f^{b a_2 c} f_c^{a_4 a_5} \quad (4.85)$$

Assim como para  $N = 4$  havia uma relação entre os fatores cinemáticos, a qual foi dada em (4.30), aqui também teremos expressões que envolvam os 15 numeradores já definidos, a saber,  $n_1, n_2, \dots, n_{15}$ . Para obtê-las, baseado na conjectura da dualidade cor-cinemática, vamos primeiro encontrar as identidades de Jacobi que os fatores de cor  $c_1, c_2, \dots, c_{15}$  obedecem.

Lembremos que na equação (4.3) obtivemos uma identidade semelhante à de Jacobi para o produto de duas constantes de estrutura:

$$f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 a_4} + f^{a_1 a_4}_b f^{b a_2 a_3} + f^{a_1 a_3}_b f^{b a_4 a_2} = 0 \quad (4.86)$$

Multiplicando a igualdade anterior por  $f_{a_4}^{a_5 a_6}$ :

$$f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 a_4} f_{a_4}^{a_5 a_6} + f^{a_1 a_4}_b f^{b a_2 a_3} f_{a_4}^{a_5 a_6} + f^{a_1 a_3}_b f^{b a_4 a_2} f_{a_4}^{a_5 a_6} = 0 \quad (4.87)$$

Os índices repetidos,  $b$  e  $a_4$ , estão sendo somados. Para melhorar a notação, façamos a seguinte redefinição de variáveis:  $a_4 \rightarrow c$ ,  $a_5 \rightarrow a_4$  e  $a_6 \rightarrow a_5$ . Assim:

$$\begin{aligned} & f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 c} f_c^{a_4 a_5} + f^{a_1 c}_b f^{b a_2 a_3} f_c^{a_4 a_5} + f^{a_1 a_3}_b f^{b c a_2} f_c^{a_4 a_5} = 0 \\ \implies & f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 c} f_c^{a_4 a_5} + f^{a_3 a_1}_b f^{b a_2 c} f_c^{a_4 a_5} + f^{a_2 a_3}_b f^{b a_1 c} f_c^{a_4 a_5} = 0 \end{aligned} \quad (4.88)$$

Portanto, para  $N = 5$  essa é a “identidade de Jacobi”.

Permutando os índices  $a_1, a_2, a_3, a_4$  e  $a_5$ , obtemos várias outras relações análogas. Por exemplo, se fizermos a troca de índices  $a_2 \leftrightarrow a_4$  e  $a_3 \leftrightarrow a_5$  chegamos a uma outra identidade de Jacobi:

$$\begin{aligned} & f^{a_1 a_4}_b f^{b a_5 c} f_c^{a_2 a_3} + f^{a_1 c}_b f^{b a_4 a_5} f_c^{a_2 a_3} + f^{a_1 a_5}_b f^{b c a_4} f_c^{a_2 a_3} = 0 \\ \implies & f^{a_1 a_4}_b f^{b a_5 c} f_c^{a_2 a_3} + f^{a_4 a_5}_b f^{b a_1 c} f_c^{a_2 a_3} + f^{a_1 a_5}_b f^{b a_4 c} f_c^{a_3 a_2} = 0 \end{aligned} \quad (4.89)$$

Ou ainda, se fizermos em (4.88) a troca dos índices  $a_2 \leftrightarrow a_5$ , chegamos a que:

$$\begin{aligned} & f^{a_1 a_5}_b f^{b a_3 c} f_c^{a_4 a_2} + f^{a_1 c}_b f^{b a_5 a_3} f_c^{a_4 a_2} + f^{a_1 a_3}_b f^{b c a_5} f_c^{a_4 a_2} = 0 \\ \implies & f^{a_1 a_5}_b f^{b a_3 c} f_c^{a_4 a_2} + f^{a_5 a_3}_b f^{b a_1 c} f_c^{a_4 a_2} + f^{a_1 a_3}_b f^{b a_5 c} f_c^{a_2 a_4} = 0 \end{aligned} \quad (4.90)$$

Como o número permutações possíveis para  $a_1, a_2, a_3, a_4$  e  $a_5$  é  $5! = 120$ , em princípio, poderíamos encontrar 120 identidades de Jacobi. No entanto, muitas delas acabam se repetindo, restando um conjunto muito menor de equações.

Após obtermos todas as identidades possíveis, devemos identificar cada um dos termos com algum  $c_j$  definido nas equações de (4.71) a (4.85). Fazendo isso, chegamos às

seguintes identidades:<sup>7</sup>

$$c_1 - c_4 - c_{15} = 0 \quad (4.91)$$

$$c_2 - c_5 - c_{11} = 0 \quad (4.92)$$

$$c_3 - c_1 + c_{12} = 0 \quad (4.93)$$

$$c_4 - c_2 + c_7 = 0 \quad (4.94)$$

$$c_5 - c_3 - c_8 = 0 \quad (4.95)$$

$$c_6 - c_8 - c_9 = 0 \quad (4.96)$$

$$c_7 - c_6 + c_{14} = 0 \quad (4.97)$$

$$c_{10} - c_9 + c_{15} = 0 \quad (4.98)$$

$$c_{11} - c_{10} - c_{13} = 0 \quad (4.99)$$

O próximo passo é fazer a conjectura proposta no artigo BCJ [3], assumindo que existe a dualidade cor-cinemática e, portanto, os fatores cinemáticos devem seguir relações análogas às de Jacobi. Ou seja,

$$n_1 - n_4 - n_{15} = 0$$

$$n_2 - n_5 - n_{11} = 0$$

$$n_3 - n_1 + n_{12} = 0$$

$$n_4 - n_2 + n_7 = 0$$

$$n_5 - n_3 - n_8 = 0$$

$$n_6 - n_8 - n_9 = 0$$

$$n_7 - n_6 + n_{14} = 0$$

$$n_{10} - n_9 + n_{15} = 0$$

$$n_{11} - n_{10} - n_{13} = 0 \quad (4.100)$$

Resolvendo o sistema formado pelas 9 equações linearmente independentes acima,

---

<sup>7</sup>Em princípio, havia 10 identidades diferentes. No entanto, apenas 9 delas eram linearmente independentes.

obtemos a seguinte solução:

$$n_7 = n_2 - n_4 \quad (4.101)$$

$$n_8 = -n_3 + n_5 \quad (4.102)$$

$$n_9 = n_3 - n_5 + n_6 \quad (4.103)$$

$$n_{10} = -n_1 + n_3 + n_4 - n_5 + n_6 \quad (4.104)$$

$$n_{11} = n_2 - n_5 \quad (4.105)$$

$$n_{12} = n_1 - n_3 \quad (4.106)$$

$$n_{13} = n_1 + n_2 - n_3 - n_4 - n_6 \quad (4.107)$$

$$n_{14} = -n_2 + n_4 + n_6 \quad (4.108)$$

$$n_{15} = n_1 - n_4 \quad (4.109)$$

Foi possível escrever 9 dos 15 numeradores em termos de uma base de apenas 6. A base é formada por:  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$  e  $n_6$ . Portanto, esses são, até aqui, os fatores cinemáticos independentes.

### 4.4.3 Amplitude de 5-pontos em termos dos pólos, dos numeradores e dos fatores de cor

Como já foi falado na seção 4.4.1, uma amplitude de 5-pontos (em nível de árvore) na teoria de Yang-Mills vem dada pela expressão (4.57). Até então, a amplitude de 5-pontos vinha dada em termos de  $(5 - 1)! = 24$  subamplitudes diferentes. Usando convenientemente a fórmula de Kleiss-Kuijff dada em (3.1), é possível reduzir esse número

para  $(5 - 2)! = 6$ :

$$\begin{aligned}
A(1, 2, 3, 5, 4) &= A(1, \{2, 3\}, 5, \{4\}) = -A(1, 2, 3, 4, 5) - A(1, 2, 4, 3, 5) - A(1, 4, 2, 3, 5) \\
A(1, 2, 4, 5, 3) &= A(1, \{2, 4\}, 5, \{3\}) = -A(1, 2, 4, 3, 5) - A(1, 2, 3, 4, 5) - A(1, 3, 2, 4, 5) \\
A(1, 3, 2, 5, 4) &= A(1, \{3, 2\}, 5, \{4\}) = -A(1, 3, 2, 4, 5) - A(1, 3, 4, 2, 5) - A(1, 4, 3, 2, 5) \\
A(1, 3, 4, 5, 2) &= A(1, \{3, 4\}, 5, \{2\}) = -A(1, 3, 4, 2, 5) - A(1, 3, 2, 4, 5) - A(1, 2, 3, 4, 5) \\
A(1, 4, 2, 5, 3) &= A(1, \{4, 2\}, 5, \{3\}) = -A(1, 4, 2, 3, 5) - A(1, 4, 3, 2, 5) - A(1, 3, 4, 2, 5) \\
A(1, 4, 3, 5, 2) &= A(1, \{4, 3\}, 5, \{2\}) = -A(1, 4, 3, 2, 5) - A(1, 4, 2, 3, 5) - A(1, 2, 4, 3, 5) \\
A(1, 2, 5, 3, 4) &= A(1, \{2\}, 5, \{3, 4\}) = A(1, 2, 4, 3, 5) + A(1, 4, 2, 3, 5) + A(1, 4, 3, 2, 5) \\
A(1, 2, 5, 4, 3) &= A(1, \{2\}, 5, \{4, 3\}) = A(1, 2, 3, 4, 5) + A(1, 3, 2, 4, 5) + A(1, 3, 4, 2, 5) \\
A(1, 3, 5, 2, 4) &= A(1, \{3\}, 5, \{2, 4\}) = A(1, 3, 4, 2, 5) + A(1, 4, 3, 2, 5) + A(1, 4, 2, 3, 5) \\
A(1, 3, 5, 4, 2) &= A(1, \{3\}, 5, \{4, 2\}) = A(1, 3, 2, 4, 5) + A(1, 2, 3, 4, 5) + A(1, 2, 4, 3, 5) \\
A(1, 4, 5, 2, 3) &= A(1, \{4\}, 5, \{2, 3\}) = A(1, 4, 3, 2, 5) + A(1, 3, 4, 2, 5) + A(1, 3, 2, 4, 5) \\
A(1, 4, 5, 3, 2) &= A(1, \{4\}, 5, \{3, 2\}) = A(1, 4, 2, 3, 5) + A(1, 2, 4, 3, 5) + A(1, 2, 3, 4, 5) \\
A(1, 5, 2, 3, 4) &= A(1, \{ \}, 5, \{2, 3, 4\}) = -A(1, 4, 3, 2, 5) \\
A(1, 5, 2, 4, 3) &= A(1, \{ \}, 5, \{2, 4, 3\}) = -A(1, 3, 4, 2, 5) \\
A(1, 5, 3, 2, 4) &= A(1, \{ \}, 5, \{3, 2, 4\}) = -A(1, 4, 2, 3, 5) \\
A(1, 5, 3, 4, 2) &= A(1, \{ \}, 5, \{3, 4, 2\}) = -A(1, 2, 4, 3, 5) \\
A(1, 5, 4, 2, 3) &= A(1, \{ \}, 5, \{4, 2, 3\}) = -A(1, 3, 2, 4, 5) \\
A(1, 5, 4, 3, 2) &= A(1, \{ \}, 5, \{4, 3, 2\}) = -A(1, 2, 3, 4, 5) \tag{4.110}
\end{aligned}$$

Vale notar que, com as relações acima, optamos por eliminar aquelas subamplitudes que não possuem a forma  $A(1, \dots, 5)$ , fazendo com que a base seja composta por:  $A(1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $A(1, 2, 4, 3, 5)$ ,  $A(1, 3, 2, 4, 5)$ ,  $A(1, 3, 4, 2, 5)$ ,  $A(1, 4, 2, 3, 5)$  e  $A(1, 4, 3, 2, 5)$ .

Com isso, a amplitude total fica dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_5 = & \left[ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3}) + \right. \\
& - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) + \\
& + \left. \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) \right] A(1, 2, 3, 4, 5) + \left[ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5}) + \right. \\
& - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2}) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) + \\
& - \left. \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) \right] A(1, 2, 4, 3, 5) + \left[ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3}) + \right. \\
& - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) + \\
& + \left. \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_2}) \right] A(1, 3, 2, 4, 5) + \\
& + \left[ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2}) + \right. \\
& - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) + \\
& + \left. \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) \right] A(1, 3, 4, 2, 5) + \left[ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5}) + \right. \\
& - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2}) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) + \\
& - \left. \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4}) \right] A(1, 4, 2, 3, 5) + \left[ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4}) + \right. \\
& - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) + \\
& + \left. \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) \right] A(1, 4, 3, 2, 5)
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Agora, da mesma forma como foi feito para o caso  $N = 4$ , vamos identificar cada um dos coeficientes dessas 6 subamplitudes como um produto de constantes de estrutura.

Em (4.56) já vimos que:

$$\begin{aligned}
f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_4 a_5} = & \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3}) + \\
& - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2})
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Fazendo as manipulações convenientes nos índices  $a_1, a_2, a_3, a_4$  e  $a_5$  da igualdade anterior, podemos identificar cada uma das somas de 8 traços que aparecem em  $\mathcal{A}_5$  como um produto de três constantes de estrutura. Assim, a amplitude total pode ser reescrita

da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_5 = & f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_4 a_5} A(1, 2, 3, 4, 5) + f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_4 c} f_c{}^{a_3 a_5} A(1, 2, 4, 3, 5) + \\
& + f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_2 c} f_c{}^{a_4 a_5} A(1, 3, 2, 4, 5) + f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_4 c} f_c{}^{a_2 a_5} A(1, 3, 4, 2, 5) + \\
& + f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_2 c} f_c{}^{a_3 a_5} A(1, 4, 2, 3, 5) + f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_2 a_5} A(1, 4, 3, 2, 5)
\end{aligned} \tag{4.113}$$

Agora vamos substituir as expressões das subamplitudes dadas em (4.65), (4.66), (4.67), (4.68), (4.69) e (4.70):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_5 = & f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_4 a_5} \left[ \frac{n_1}{s_{12} s_{45}} + \frac{n_2}{s_{15} s_{23}} + \frac{n_3}{s_{12} s_{34}} + \frac{n_4}{s_{23} s_{45}} + \frac{n_5}{s_{15} s_{34}} \right] + \\
& + f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_4 c} f_c{}^{a_3 a_5} \left[ \frac{n_{12}}{s_{12} s_{35}} + \frac{n_{11}}{s_{15} s_{24}} - \frac{n_3}{s_{12} s_{34}} + \frac{n_{13}}{s_{24} s_{35}} - \frac{n_5}{s_{15} s_{34}} \right] + \\
& + f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_2 c} f_c{}^{a_4 a_5} \left[ \frac{n_{15}}{s_{13} s_{45}} - \frac{n_2}{s_{15} s_{23}} - \frac{n_{10}}{s_{13} s_{24}} - \frac{n_4}{s_{23} s_{45}} - \frac{n_{11}}{s_{15} s_{24}} \right] + \\
& + f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_4 c} f_c{}^{a_2 a_5} \left[ \frac{n_9}{s_{13} s_{25}} - \frac{n_5}{s_{15} s_{34}} + \frac{n_{10}}{s_{13} s_{24}} - \frac{n_8}{s_{25} s_{34}} + \frac{n_{11}}{s_{15} s_{24}} \right] + \\
& + f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_2 c} f_c{}^{a_3 a_5} \left[ \frac{n_{14}}{s_{14} s_{35}} - \frac{n_{11}}{s_{15} s_{24}} - \frac{n_7}{s_{14} s_{23}} - \frac{n_{13}}{s_{24} s_{35}} - \frac{n_2}{s_{15} s_{23}} \right] + \\
& + f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_2 a_5} \left[ \frac{n_6}{s_{14} s_{25}} + \frac{n_5}{s_{15} s_{34}} + \frac{n_7}{s_{14} s_{23}} + \frac{n_8}{s_{25} s_{34}} + \frac{n_2}{s_{15} s_{23}} \right]
\end{aligned} \tag{4.114}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_5 = & \frac{n_1}{s_{12} s_{45}} f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_4 a_5} + \frac{n_2}{s_{15} s_{23}} \left[ f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_4 a_5} - f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_2 c} f_c{}^{a_4 a_5} + \right. \\
& \left. - f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_2 c} f_c{}^{a_3 a_5} + f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_4 c} f_c{}^{a_3 a_5} \right] + \frac{n_3}{s_{12} s_{34}} \left[ f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_4 a_5} + \right. \\
& \left. - f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_4 c} f_c{}^{a_3 a_5} \right] + \frac{n_4}{s_{23} s_{45}} \left[ f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_4 a_5} - f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_2 c} f_c{}^{a_4 a_5} \right] + \\
& + \frac{n_5}{s_{15} s_{34}} \left[ f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_4 a_5} - f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_4 c} f_c{}^{a_2 a_5} + f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_2 a_5} \right] + \\
& + \frac{n_6}{s_{14} s_{25}} f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_2 a_5} + \frac{n_7}{s_{14} s_{23}} \left[ f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_2 a_5} - f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_2 c} f_c{}^{a_3 a_5} \right] + \\
& + \frac{n_8}{s_{25} s_{34}} \left[ f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_2 a_5} - f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_4 c} f_c{}^{a_2 a_5} \right] + \frac{n_9}{s_{13} s_{25}} f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_4 c} f_c{}^{a_2 a_5} + \\
& + \frac{n_{10}}{s_{13} s_{24}} \left[ f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_4 c} f_c{}^{a_2 a_5} - f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_2 c} f_c{}^{a_4 a_5} \right] + \frac{n_{11}}{s_{15} s_{24}} \left[ f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_4 c} f_c{}^{a_3 a_5} + \right. \\
& \left. - f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_2 c} f_c{}^{a_4 a_5} + f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_4 c} f_c{}^{a_2 a_5} - f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_2 c} f_c{}^{a_3 a_5} \right] + \\
& + \frac{n_{12}}{s_{12} s_{35}} f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_4 c} f_c{}^{a_3 a_5} + \frac{n_{13}}{s_{24} s_{35}} \left[ f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_4 c} f_c{}^{a_3 a_5} - f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_2 c} f_c{}^{a_3 a_5} \right] + \\
& + \frac{n_{14}}{s_{14} s_{35}} f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_2 c} f_c{}^{a_3 a_5} + \frac{n_{15}}{s_{13} s_{45}} f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_2 c} f_c{}^{a_4 a_5}
\end{aligned} \tag{4.115}$$

É possível simplificar a expressão anterior. Para isso, vamos utilizar as identidades de Jacobi encontradas na seção anterior. Por exemplo, o fator de cor do primeiro termo de  $\mathcal{A}_5$  não necessita de manipulações, pois já temos diretamente o  $c_1$  que foi definido em (4.71).

Vejamos, então, o segundo termo onde o fator de cor é o coeficiente de  $\frac{n_2}{s_{15}s_{23}}$  e vem dado por:

$$c = f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 c} f_c^{a_4 a_5} - f^{a_1 a_3}_b f^{b a_2 c} f_c^{a_4 a_5} - f^{a_1 a_4}_b f^{b a_2 c} f_c^{a_3 a_5} + f^{a_1 a_2}_b f^{b a_4 c} f_c^{a_3 a_5} \quad (4.116)$$

Da identidade de Jacobi em (4.88), sabemos que

$$f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3 c} f_c^{a_4 a_5} = -f^{a_2 a_3}_b f^{b a_1 c} f_c^{a_4 a_5} - f^{a_1 a_3}_b f^{b a_2 c} f_c^{a_5 a_4} \quad (4.117)$$

Substituindo isso em (4.116), ficamos com:

$$\begin{aligned} c &= -f^{a_2 a_3}_b f^{b a_1 c} f_c^{a_4 a_5} - f^{a_1 a_3}_b f^{b a_2 c} f_c^{a_5 a_4} - f^{a_1 a_3}_b f^{b a_2 c} f_c^{a_4 a_5} - f^{a_1 a_4}_b f^{b a_2 c} f_c^{a_3 a_5} + \\ &+ f^{a_1 a_2}_b f^{b a_4 c} f_c^{a_3 a_5} \\ &= -f^{a_2 a_3}_b f^{b a_1 c} f_c^{a_4 a_5} - f^{a_1 a_4}_b f^{b a_2 c} f_c^{a_3 a_5} + f^{a_1 a_2}_b f^{b a_4 c} f_c^{a_3 a_5} \end{aligned} \quad (4.118)$$

Usando agora a identidade dada em (4.89), podemos identificar os dois últimos termos da igualdade anterior como um único produto de constantes de estrutura:

$$c = -f^{a_2 a_3}_b f^{b a_1 c} f_c^{a_4 a_5} + f^{a_1 a_4}_b f^{b a_5 c} f_c^{a_2 a_3} \quad (4.119)$$

E, finalmente, usando a outra identidade de Jacobi dada em (4.90), chegamos a que:

$$c = f^{a_2 a_3}_b f^{b a_4 c} f_c^{a_5 a_1} \quad (4.120)$$

E ainda, se lembrarmos da definição dada em (4.72), vemos que o coeficiente anterior é exatamente igual a aquele definido como  $c_2$ .

Repetindo esses passos para todos os fatores de cor da expressão (4.115), podemos obter que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_5 &= \frac{n_1 c_1}{s_{12} s_{45}} + \frac{n_2 c_2}{s_{15} s_{23}} + \frac{n_3 c_3}{s_{12} s_{34}} + \frac{n_4 c_4}{s_{23} s_{45}} + \frac{n_5 c_5}{s_{15} s_{34}} + \frac{n_6 c_6}{s_{14} s_{25}} + \frac{n_7 c_7}{s_{14} s_{23}} + \frac{n_8 c_8}{s_{25} s_{34}} + \\ &+ \frac{n_9 c_9}{s_{13} s_{25}} + \frac{n_{10} c_{10}}{s_{13} s_{24}} + \frac{n_{11} c_{11}}{s_{15} s_{24}} + \frac{n_{12} c_{12}}{s_{12} s_{35}} + \frac{n_{13} c_{13}}{s_{24} s_{35}} + \frac{n_{14} c_{14}}{s_{14} s_{35}} + \frac{n_{15} c_{15}}{s_{13} s_{45}} \end{aligned} \quad (4.121)$$

onde os 15  $n_i$ 's não são todos independentes, como já vimos nas equações de (4.101) a (4.109).

Vemos que, assim como ocorreu para  $N = 4$  em (4.47), chegamos a uma forma simples para a expressão da amplitude total em termos dos pólos e que possui uma simetria evidente entre os fatores de cor  $c_i$ 's e os cinemáticos  $n_i$ 's.

#### 4.4.4 Liberdade de *gauge* dos numeradores

Lembremos que no caso  $N = 4$ , os fatores cinemáticos tinham a liberdade de sofrer uma determinada transformação mantendo as subamplitudes e a identidade cinemática inalteradas.

Vamos investigar nesta seção se, para  $N = 5$ , também acontecerá algo parecido.

No fim da seção 4.4.1, conseguimos escrever as expressões para as 6 subamplitudes em termos dos seus pólos. Nestas expressões, estão presentes os 15 numeradores  $n_i$ 's. Porém, por meio das soluções obtidas para os numeradores, podemos reescrever as subamplitudes em termos de apenas 6  $n_i$ 's. Substituindo, então, as soluções de (4.101) a (4.109) nas subamplitudes dadas nas equações de (4.65) a (4.70), ficamos com:

$$A(1, 2, 3, 4, 5) = \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} + \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} + \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} \quad (4.122)$$

$$A(1, 4, 3, 2, 5) = \frac{n_6}{s_{14}s_{25}} + \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_2 - n_4}{s_{14}s_{23}} + \frac{-n_3 + n_5}{s_{25}s_{34}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} \quad (4.123)$$

$$A(1, 3, 4, 2, 5) = \frac{n_3 - n_5 + n_6}{s_{13}s_{25}} - \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{-n_1 + n_3 + n_4 - n_5 + n_6}{s_{13}s_{24}} - \frac{-n_3 + n_5}{s_{25}s_{34}} + \frac{n_2 - n_5}{s_{15}s_{24}} \quad (4.124)$$

$$A(1, 2, 4, 3, 5) = \frac{n_1 - n_3}{s_{12}s_{35}} + \frac{n_2 - n_5}{s_{15}s_{24}} - \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_1 + n_2 - n_4 - n_3 - n_6}{s_{24}s_{35}} - \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} \quad (4.125)$$

$$A(1, 4, 2, 3, 5) = \frac{-n_2 + n_4 + n_6}{s_{14}s_{35}} - \frac{n_2 - n_5}{s_{15}s_{24}} - \frac{n_2 - n_4}{s_{14}s_{23}} - \frac{n_1 + n_2 - n_3 - n_4 - n_6}{s_{24}s_{35}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} \quad (4.126)$$

$$A(1, 3, 2, 4, 5) = \frac{n_1 - n_4}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} - \frac{-n_1 + n_3 + n_4 - n_5 + n_6}{s_{13}s_{24}} - \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} - \frac{n_2 - n_5}{s_{15}s_{24}} \quad (4.127)$$

Agora temos as subamplitudes dadas em termos dos 6 numeradores independentes. Ingenuamente, poderíamos atribuir a cada um desses 6  $n_i$ 's uma liberdade de *gauge* independente da outra. Mas isso poderia nos levar a inconsistências entre as expressões das subamplitudes. Por isso vamos estabelecer vínculos entre as transformações de *gauge*

dos numeradores. Vejamos, na equação (4.122), vamos isolar  $n_5$ :

$$n_5 = s_{15}s_{34} \left[ A(1, 2, 3, 4, 5) - \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} - \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} - \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} \right] \quad (4.128)$$

Dessa forma, permitindo que cada um dos  $n_i$ 's do lado direito da igualdade anterior sofra uma transformação de *gauge*, a transformação de  $n_5$  estará diretamente determinada. Assim, dos 6 numeradores apenas  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  e  $n_4$  possuem liberdade de *gauge*.

Vamos fazer o mesmo para  $n_6$  na equação (4.123):

$$n_6 = s_{14}s_{25} \left[ A(1, 4, 3, 2, 5) - \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} - \frac{n_2 - n_4}{s_{14}s_{23}} - \frac{-n_3 + n_5}{s_{25}s_{34}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} \right] \quad (4.129)$$

Ao isolarmos  $n_5$  e  $n_6$ , ao invés de 6 numeradores independentes, passamos a ter como variáveis independentes os 4 numeradores  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  e  $n_4$  e ainda as duas subamplitudes  $A(1, 2, 3, 4, 5)$  e  $A(1, 4, 3, 2, 5)$ .

Assim, podemos agora atribuir às variáveis independentes as suas respectivas transformações de *gauge*:

$$\begin{aligned} n'_1 &= n_1 + \alpha_1 s_{12}s_{45} \\ n'_2 &= n_2 + \alpha_2 s_{15}s_{23} \\ n'_3 &= n_3 + \alpha_3 s_{12}s_{34} \\ n'_4 &= n_4 + \alpha_4 s_{23}s_{45} \end{aligned} \quad (4.130)$$

onde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$  são funções dos momentos  $k$  e dos vetores de polarização  $\zeta$  a serem fixadas arbitrariamente.

Por construção, as subamplitudes devem ser invariantes sob essas transformações de *gauge*. Logo,  $n_5$  e  $n_6$  devem se transformar de maneira que isso seja satisfeito. Tendo isso em vista, vamos encontrar essas transformações. Definindo

$$\Delta n_i \doteq n'_i - n_i \quad (4.131)$$

temos que, usando (4.128),

$$\begin{aligned} \Delta n_5 &= s_{15}s_{34} \left[ \Delta A(1, 2, 3, 4, 5) - \frac{\Delta n_1}{s_{12}s_{45}} - \frac{\Delta n_2}{s_{15}s_{23}} - \frac{\Delta n_3}{s_{12}s_{34}} - \frac{\Delta n_4}{s_{23}s_{45}} \right] \\ &= s_{15}s_{34} \left[ 0 - \frac{\alpha_1 s_{12}s_{45}}{s_{12}s_{45}} - \frac{\alpha_2 s_{15}s_{23}}{s_{15}s_{23}} - \frac{\alpha_3 s_{12}s_{34}}{s_{12}s_{34}} - \frac{\alpha_4 s_{23}s_{45}}{s_{23}s_{45}} \right] \\ \implies \Delta n_5 &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) s_{15}s_{34} \end{aligned} \quad (4.132)$$

E também, usando (4.129),

$$\begin{aligned}
\Delta n_6 &= s_{14}s_{25} \left[ \Delta A(1, 4, 3, 2, 5) - \frac{\Delta n_5}{s_{15}s_{34}} - \frac{\Delta n_2 - \Delta n_4}{s_{14}s_{23}} - \frac{-\Delta n_3 + \Delta n_5}{s_{25}s_{34}} - \frac{\Delta n_2}{s_{15}s_{23}} \right] \\
&= s_{14}s_{25} \left[ 0 - \frac{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)s_{15}s_{34}}{s_{15}s_{34}} - \frac{\alpha_2 s_{15}s_{23} - \alpha_4 s_{23}s_{45}}{s_{14}s_{23}} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{-\alpha_3 s_{12}s_{34} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)s_{15}s_{34}}{s_{25}s_{34}} - \frac{\alpha_2 s_{15}s_{23}}{s_{15}s_{23}} \right] \\
\implies \Delta n_6 &= s_{14}s_{25}(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) - s_{15}s_{25}\alpha_2 + s_{25}s_{45}\alpha_4 + s_{14}s_{12}\alpha_3 + \\
&\quad + s_{14}s_{15}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \tag{4.133}
\end{aligned}$$

O próximo passo seria utilizarmos  $\Delta n_5$  e  $\Delta n_6$  para obter qual a variação correspondente das subamplitudes em (4.124), (4.125), (4.126) e (4.127). Ou seja, queremos calcular, por exemplo,  $\Delta A(1, 3, 4, 2, 5)$ . Para isso, vamos substituir (4.132) e (4.133) em (4.124):

$$\begin{aligned}
\Delta A(1, 3, 4, 2, 5) &= \frac{\Delta n_3 - \Delta n_5 + \Delta n_6}{s_{13}s_{25}} - \frac{\Delta n_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{-\Delta n_1 + \Delta n_3 + \Delta n_4 - \Delta n_5 + \Delta n_6}{s_{13}s_{24}} + \\
&\quad - \frac{-\Delta n_3 + \Delta n_5}{s_{25}s_{34}} + \frac{\Delta n_2 - \Delta n_5}{s_{15}s_{24}} \tag{4.134}
\end{aligned}$$

onde  $\Delta n_1 = \alpha_1 s_{12}s_{45}$ ,  $\Delta n_2 = \alpha_2 s_{15}s_{23}$ ,  $\Delta n_3 = \alpha_3 s_{12}s_{34}$ ,  $\Delta n_4 = \alpha_4 s_{23}s_{45}$  e  $\Delta n_5$  e  $\Delta n_6$  são dados em (4.132) e (4.133).

Depois de realizarmos as substituições e escrevermos tudo em termos apenas dos  $s_{ij}$  independentes, ficamos com uma expressão onde haverá vários cancelamentos. Vamos omitir essas passagens, pois apesar de triviais, se tornam demasiadamente extensas. No fim, obtemos efetivamente que:

$$\Delta A(1, 3, 4, 2, 5) = 0 \tag{4.135}$$

Analogamente, podemos verificar que

$$\begin{aligned}
\Delta A(1, 2, 4, 3, 5) &= 0 \\
\Delta A(1, 4, 2, 3, 5) &= 0 \\
\Delta A(1, 3, 2, 4, 5) &= 0 \tag{4.136}
\end{aligned}$$

como queríamos obter.

Portanto, após utilizarmos as identidades cinemáticas, ficamos com quatro numeradores e duas subamplitudes independentes, sendo que cada um desses numeradores

possui sua respectiva liberdade de *gauge* dadas em (4.130). E ainda, as igualdades em (4.132) e (4.133) garantem que as subamplitudes sejam invariantes mediante às transformações de *gauge*.

#### 4.4.5 Relações BCJ para $N = 5$

Vimos em (4.130) as transformações de *gauge* às quais os fatores cinemáticos estão sujeitos. Façamos então a fixação de *gauge* mais conveniente: vamos escolher os  $\alpha_i$ 's de tal forma que  $n'_1$ ,  $n'_2$ ,  $n'_3$  e  $n'_4$  se anulem, o que implica que a dependência da amplitude nesses parâmetros se cancela, nos levando a relações que contenham apenas subamplitudes. E, de fato, são relações dessa natureza que buscamos.

Assim, fazendo

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{n_1}{s_{12}s_{45}} \\ \alpha_2 &= -\frac{n_2}{s_{15}s_{23}} \\ \alpha_3 &= -\frac{n_3}{s_{12}s_{34}} \\ \alpha_4 &= -\frac{n_4}{s_{23}s_{45}}\end{aligned}\tag{4.137}$$

ficamos com

$$n'_1 = n'_2 = n'_3 = n'_4 = 0\tag{4.138}$$

Precisamos encontrar agora quem são  $n'_5$  e  $n'_6$ . Usando (4.131), (4.132) e (4.133), obtemos que:

$$\begin{aligned}n'_5 &= n_5 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)s_{15}s_{34} \\ &= n_5 + \left[ \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} + \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} \right] s_{15}s_{34}\end{aligned}\tag{4.139}$$

Usando a expressão para  $n_5$  dada em (4.128):

$$\begin{aligned}n'_5 &= s_{15}s_{34} \left[ A(1, 2, 3, 4, 5) - \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} - \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} - \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} \right] + \left[ \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} \right] s_{15}s_{34} \\ \implies n'_5 &= s_{15}s_{34} A(1, 2, 3, 4, 5)\end{aligned}\tag{4.140}$$

E para  $n'_6$ :

$$\begin{aligned}
n'_6 &= n_6 + s_{14}s_{25}(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) - s_{15}s_{25}\alpha_2 + s_{25}s_{45}\alpha_4 + s_{14}s_{12}\alpha_3 + \\
&\quad + s_{14}s_{15}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad \vdots \\
\implies n'_6 &= s_{14}s_{25}A(1, 4, 3, 2, 5) - s_{14}(s_{25} + s_{15})A(1, 2, 3, 4, 5) \tag{4.141}
\end{aligned}$$

Agora que já conhecemos a expressão para os seis numeradores transformados, vamos escrever como ficam as subamplitudes sob essa transformação de *gauge*. Começemos por  $A(1, 3, 4, 2, 5)$  dado em (4.124):

$$\begin{aligned}
A(1, 3, 4, 2, 5) &= \frac{n'_3 - n'_5 + n'_6}{s_{13}s_{25}} - \frac{n'_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{-n'_1 + n'_3 + n'_4 - n'_5 + n'_6}{s_{13}s_{24}} - \frac{-n'_3 + n'_5}{s_{25}s_{34}} + \\
&\quad + \frac{n'_2 - n'_5}{s_{15}s_{24}} \tag{4.142}
\end{aligned}$$

Substituindo (4.138), (4.140) e (4.141) na igualdade anterior, chegamos a que

$$\begin{aligned}
A(1, 3, 4, 2, 5) &= \frac{-[s_{15}s_{34} + s_{14}(s_{25} + s_{15})] A(1, 2, 3, 4, 5) + s_{14}s_{25}A(1, 4, 3, 2, 5)}{s_{13}s_{25}} + \\
&\quad - \frac{s_{15}s_{34} A(1, 2, 3, 4, 5)}{s_{15}s_{34}} + \\
&\quad + \frac{-[s_{15}s_{34} + s_{14}(s_{25} + s_{15})] A(1, 2, 3, 4, 5) + s_{14}s_{25}A(1, 4, 3, 2, 5)}{s_{13}s_{24}} + \\
&\quad - \frac{s_{15}s_{34} A(1, 2, 3, 4, 5)}{s_{25}s_{34}} + \frac{-s_{15}s_{34} A(1, 2, 3, 4, 5)}{s_{15}s_{24}} \tag{4.143}
\end{aligned}$$

A equação anterior pode ser reescrita de uma forma mais simples. Para tal, é preciso utilizar as relações conhecidas entre os  $s_{ij}$ 's devido à conservação do momento para eliminar alguns desses parâmetros. Essas relações estão apresentadas no Apêndice A.2. Fazendo isso, podemos, finalmente, obter que:

$$A(1, 3, 4, 2, 5) = \frac{-s_{12}s_{45} A(1, 2, 3, 4, 5) + s_{14}(s_{24} + s_{25}) A(1, 4, 3, 2, 5)}{s_{24}(s_{45} + s_{25} + s_{24})} \tag{4.144}$$

Notemos que a dependência nos  $n_i$ 's desapareceu, restando uma relação que envolve somente subamplitudes. Esta é, portanto, uma das relações BCJ para  $N = 5$ .

Repetindo esse procedimento de encontrar a expressão da subamplitude depois de sofrer uma transformação de *gauge*, agora para  $A(1, 2, 4, 3, 5)$ ,  $A(1, 4, 2, 3, 5)$  e  $A(1, 3, 2, 4, 5)$ ,

também obtemos outras três relações:

$$A(1, 2, 4, 3, 5) = \frac{s_{45}(s_{12} + s_{24}) A(1, 2, 3, 4, 5) - s_{14}s_{25} A(1, 4, 3, 2, 5)}{s_{24}(s_{12} + s_{24} + s_{14})} \quad (4.145)$$

$$A(1, 3, 4, 2, 5) = \frac{-s_{12}s_{45} A(1, 2, 3, 4, 5) + s_{25}(s_{14} + s_{24}) A(1, 4, 3, 2, 5)}{s_{24}(s_{12} + s_{24} + s_{14})} \quad (4.146)$$

$$A(1, 3, 2, 4, 5) = \frac{s_{12}(s_{24} + s_{45}) A(1, 2, 3, 4, 5) - s_{14}s_{25} A(1, 4, 3, 2, 5)}{s_{24}(s_{45} + s_{25} + s_{24})} \quad (4.147)$$

Logo, as relações BCJ para  $N = 5$  estão dadas em (4.144), (4.145), (4.146) e (4.147).

É importante notar que, com as relações BCJ, a base mínima que, até então, era composta de 6 subamplitudes pôde ser reduzida para uma base com somente 2 delas, a saber,  $A(1, 2, 3, 4, 5)$  e  $A(1, 4, 3, 2, 5)$ .

Esses resultados, apesar de terem sido obtidos a partir de uma conjectura na qual assumimos que existem entre os fatores cinemáticos relações análogas à identidade de Jacobi, podem ser postos à prova utilizando-se as expressões já conhecidas das subamplitudes a partir das regras de Feynman para a lagrangeana de Yang-Mills. Fazendo isso, chega-se a que as relações BCJ são, de fato, consistentes.

## 4.5 Caso $N = 6$

Vimos com detalhes, na seção 4.4, como são obtidas as relações BCJ para  $N = 5$ . Trata-se de um processo, apesar de simples, não muito curto. Essas relações foram apresentadas no artigo [3]. Para  $N = 6$ , podemos esperar (e de fato é o que ocorre) manipulações muito mais extensas e meticulosas.

Uma primeira peculiaridade deste caso já aparece nos pólos dos diagramas. Enquanto nos casos  $N = 4$  e  $5$  lidamos com pólos da forma  $\frac{1}{(k_1 + k_2)^2}$  e  $\frac{1}{(k_1 + k_2)^2(k_4 + k_5)^2}$ , respectivamente, para  $N = 6$  há pólos do tipo  $\frac{1}{(k_1 + k_3)^2(k_5 + k_6)^2(k_1 + k_2 + k_3)^2}$  onde aparecem quadrados de soma de três momentos, o que não ocorria antes.

Devido à quantidade de manipulações, serão apresentados aqui apenas os cálculos e resultados mais significantes, visto que o procedimento, em geral, é exatamente análogo ao feito para  $N = 5$ . Bern, Carrasco e Johansson, em seu artigo [3], não colocam esses cálculos para o caso de 6-pontos. Portanto, o presente trabalho de mestrado possui o diferencial de abrir essas contas.

### 4.5.1 Escrevendo as subamplitudes explicitamente em termos dos seus pólos

Com as relações Kleiss-Kuijf a base utilizada para escrever a amplitude total passa a ser formada por  $(6 - 2)! = 24$  subamplitudes. Vamos escolher, então, aquelas que possuem o primeiro índice igual a 1 e o último igual a 6. São elas:  $A(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ,  $A(1, 2, 4, 3, 5, 6)$ ,  $A(1, 3, 2, 4, 5, 6)$ ,  $A(1, 3, 4, 2, 5, 6)$ ,  $A(1, 4, 2, 3, 5, 6)$ ,  $A(1, 4, 3, 2, 5, 6)$ ,  $A(1, 2, 3, 5, 4, 6)$ ,  $A(1, 2, 4, 5, 3, 6)$ ,  $A(1, 3, 2, 5, 4, 6)$ ,  $A(1, 3, 4, 5, 2, 6)$ ,  $A(1, 4, 2, 5, 3, 6)$ ,  $A(1, 4, 3, 5, 2, 6)$ ,  $A(1, 2, 5, 3, 4, 6)$ ,  $A(1, 2, 5, 4, 3, 6)$ ,  $A(1, 3, 5, 2, 4, 6)$ ,  $A(1, 3, 5, 4, 2, 6)$ ,  $A(1, 4, 5, 2, 3, 6)$ ,  $A(1, 4, 5, 3, 2, 6)$ ,  $A(1, 5, 2, 3, 4, 6)$ ,  $A(1, 5, 2, 4, 3, 6)$ ,  $A(1, 5, 3, 2, 4, 6)$ ,  $A(1, 5, 3, 4, 2, 6)$ ,  $A(1, 5, 4, 2, 3, 6)$  e  $A(1, 5, 4, 3, 2, 6)$ .

Precisamos, agora, identificar quais os diagramas de 6 pernas contribuem para cada uma das subamplitudes. Na Figura 4.6 estão os três tipos de diagramas que devem ser considerados. Notemos que eles só possuem vértices cúbicos. Afinal, lembremos que os diagramas que possuem também vértices quárticos vão contribuir para amplitude total apenas em ordens mais baixas e, por isso, vão ser contabilizadas nas expressões dos numeradores, assim como aconteceu no caso  $N = 5$ . No Apêndice E estão representados todos os possíveis diagramas de Feynman, 105 ao todo, que vão participar da amplitude total.

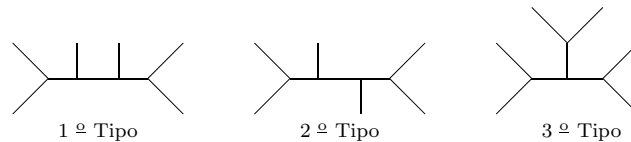


Figura 4.6: Tipos de diagramas com apenas vértices cúbicos para amplitude de 6-pontos

Assim como foi feito para  $N = 5$ , usando as regras de Feynman podemos identificar quais são os pólos que aparecerão de cada diagrama. Fazendo isso, surgem 105 pólos que contêm produtos de 3  $s_{ij}$ 's no denominador. Alguns deles são:  $\frac{1}{s_{13}s_{56}s_{123}}$ ,  $\frac{1}{s_{25}s_{46}s_{125}}$  e  $\frac{1}{s_{13}s_{24}s_{56}}$ , vindos, respectivamente, dos diagramas da Figura 4.7, onde  $s_{ij} = (k_i + k_j)^2$  e  $s_{ijm} = (k_i + k_j + k_m)^2$ .

Sabendo quais diagramas contribuem para cada subamplitude, conhecemos também quais serão os pólos que cada uma delas contém e podemos escrever as expressões refe-

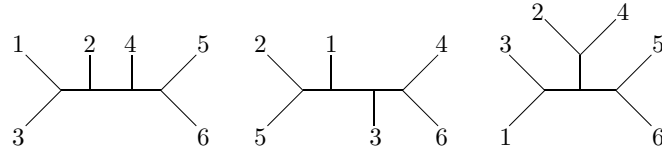


Figura 4.7: Exemplos de diagramas de Feynman para a amplitude de 6-pontos

rentes a cada uma das 24 subamplitudes da base da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
A(1, 2, 3, 4, 5, 6) = & + \frac{n_1}{s_{12}s_{56}s_{123}} + \frac{n_2}{s_{16}s_{45}s_{345}} + \frac{n_3}{s_{56}s_{34}s_{234}} + \frac{n_4}{s_{45}s_{23}s_{123}} + \frac{n_5}{s_{12}s_{34}s_{345}} + \\
& + \frac{n_6}{s_{23}s_{16}s_{234}} + \frac{n_7}{s_{12}s_{34}s_{56}} + \frac{n_8}{s_{16}s_{23}s_{45}} + \frac{n_9}{s_{12}s_{45}s_{123}} + \frac{n_{10}}{s_{16}s_{34}s_{345}} + \\
& + \frac{n_{11}}{s_{56}s_{23}s_{234}} + \frac{n_{12}}{s_{12}s_{45}s_{345}} + \frac{n_{13}}{s_{16}s_{34}s_{234}} + \frac{n_{14}}{s_{56}s_{23}s_{123}} \quad (4.148)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 2, 3, 5, 4, 6) = & + \frac{n_{15}}{s_{12}s_{46}s_{123}} - \frac{n_2}{s_{16}s_{45}s_{345}} + \frac{n_{16}}{s_{46}s_{35}s_{235}} - \frac{n_4}{s_{45}s_{23}s_{123}} + \frac{n_{17}}{s_{12}s_{35}s_{345}} + \\
& + \frac{n_{18}}{s_{23}s_{16}s_{235}} + \frac{n_{19}}{s_{12}s_{35}s_{46}} - \frac{n_8}{s_{16}s_{23}s_{45}} - \frac{n_9}{s_{12}s_{45}s_{123}} + \frac{n_{21}}{s_{16}s_{35}s_{345}} + \\
& + \frac{n_{22}}{s_{46}s_{23}s_{235}} - \frac{n_{12}}{s_{12}s_{45}s_{345}} + \frac{n_{23}}{s_{16}s_{35}s_{235}} + \frac{n_{20}}{s_{46}s_{23}s_{123}} \quad (4.149)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 2, 5, 4, 3, 6) = & + \frac{n_{25}}{s_{12}s_{36}s_{125}} + \frac{n_{10}}{s_{16}s_{34}s_{345}} + \frac{n_{26}}{s_{36}s_{45}s_{245}} + \frac{n_{27}}{s_{34}s_{25}s_{125}} + \frac{n_{12}}{s_{12}s_{45}s_{345}} + \\
& + \frac{n_{28}}{s_{25}s_{16}s_{245}} + \frac{n_{29}}{s_{12}s_{45}s_{36}} + \frac{n_{30}}{s_{16}s_{25}s_{34}} + \frac{n_{31}}{s_{12}s_{34}s_{125}} + \frac{n_2}{s_{16}s_{45}s_{345}} + \\
& + \frac{n_{32}}{s_{36}s_{25}s_{245}} + \frac{n_5}{s_{12}s_{34}s_{345}} + \frac{n_{33}}{s_{16}s_{45}s_{245}} + \frac{n_{34}}{s_{36}s_{25}s_{125}} \quad (4.150)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 2, 4, 3, 5, 6) = & + \frac{n_{35}}{s_{12}s_{56}s_{124}} - \frac{n_{21}}{s_{16}s_{35}s_{345}} - \frac{n_3}{s_{56}s_{34}s_{234}} + \frac{n_{36}}{s_{35}s_{24}s_{124}} - \frac{n_5}{s_{12}s_{34}s_{345}} + \\
& + \frac{n_{37}}{s_{24}s_{16}s_{234}} - \frac{n_7}{s_{12}s_{34}s_{56}} + \frac{n_{38}}{s_{16}s_{24}s_{35}} + \frac{n_{39}}{s_{12}s_{35}s_{124}} - \frac{n_{10}}{s_{16}s_{34}s_{345}} + \\
& + \frac{n_{40}}{s_{56}s_{24}s_{234}} - \frac{n_{17}}{s_{12}s_{35}s_{345}} - \frac{n_{13}}{s_{16}s_{34}s_{234}} + \frac{n_{41}}{s_{56}s_{24}s_{124}} \quad (4.151)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 2, 4, 5, 3, 6) = & + \frac{n_{42}}{s_{12}s_{36}s_{124}} + \frac{n_{21}}{s_{16}s_{35}s_{345}} - \frac{n_{26}}{s_{36}s_{45}s_{245}} - \frac{n_{36}}{s_{35}s_{24}s_{124}} - \frac{n_{12}}{s_{12}s_{45}s_{345}} + \\
& + \frac{n_{43}}{s_{24}s_{16}s_{245}} - \frac{n_{29}}{s_{12}s_{45}s_{36}} - \frac{n_{38}}{s_{16}s_{24}s_{35}} - \frac{n_{39}}{s_{12}s_{35}s_{124}} - \frac{n_2}{s_{16}s_{45}s_{345}} + \\
& + \frac{n_{44}}{s_{36}s_{24}s_{245}} + \frac{n_{17}}{s_{12}s_{35}s_{345}} - \frac{n_{33}}{s_{16}s_{45}s_{245}} + \frac{n_{45}}{s_{36}s_{24}s_{124}} \quad (4.152)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 2, 5, 3, 4, 6) = & + \frac{n_{46}}{s_{12}s_{46}s_{125}} - \frac{n_{10}}{s_{16}s_{34}s_{345}} - \frac{n_{16}}{s_{46}s_{35}s_{235}} - \frac{n_{27}}{s_{34}s_{25}s_{125}} - \frac{n_{17}}{s_{12}s_{35}s_{345}} + \\
& + \frac{n_{47}}{s_{25}s_{16}s_{235}} - \frac{n_{19}}{s_{12}s_{35}s_{46}} - \frac{n_{30}}{s_{16}s_{25}s_{34}} - \frac{n_{31}}{s_{12}s_{34}s_{125}} - \frac{n_{21}}{s_{16}s_{35}s_{345}} + \\
& + \frac{n_{48}}{s_{46}s_{25}s_{235}} - \frac{n_5}{s_{12}s_{34}s_{345}} - \frac{n_{23}}{s_{16}s_{35}s_{235}} + \frac{n_{49}}{s_{46}s_{25}s_{125}} \quad (4.153)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 3, 2, 4, 5, 6) = & + \frac{n_{50}}{s_{13}s_{56}s_{123}} + \frac{n_{33}}{s_{16}s_{45}s_{245}} - \frac{n_{40}}{s_{56}s_{24}s_{234}} - \frac{n_4}{s_{45}s_{23}s_{123}} + \frac{n_{51}}{s_{13}s_{24}s_{245}} + \\
& - \frac{n_6}{s_{23}s_{16}s_{234}} + \frac{n_{52}}{s_{13}s_{24}s_{56}} - \frac{n_8}{s_{16}s_{23}s_{45}} + \frac{n_{53}}{s_{13}s_{45}s_{123}} - \frac{n_{43}}{s_{16}s_{24}s_{245}} + \\
& - \frac{n_{11}}{s_{56}s_{23}s_{234}} + \frac{n_{54}}{s_{13}s_{45}s_{245}} - \frac{n_{37}}{s_{16}s_{24}s_{234}} - \frac{n_{14}}{s_{56}s_{23}s_{123}} \quad (4.154)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 3, 2, 5, 4, 6) = & + \frac{n_{55}}{s_{13}s_{46}s_{123}} - \frac{n_{33}}{s_{16}s_{45}s_{245}} - \frac{n_{48}}{s_{46}s_{25}s_{235}} + \frac{n_4}{s_{45}s_{23}s_{123}} + \frac{n_{56}}{s_{13}s_{25}s_{245}} + \\
& - \frac{n_{18}}{s_{23}s_{16}s_{235}} + \frac{n_{57}}{s_{13}s_{25}s_{46}} + \frac{n_8}{s_{16}s_{23}s_{45}} - \frac{n_{53}}{s_{13}s_{45}s_{123}} - \frac{n_{28}}{s_{16}s_{25}s_{245}} + \\
& - \frac{n_{22}}{s_{46}s_{23}s_{235}} - \frac{n_{54}}{s_{13}s_{45}s_{245}} - \frac{n_{47}}{s_{16}s_{25}s_{235}} - \frac{n_{20}}{s_{46}s_{23}s_{123}} \quad (4.155)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 4, 2, 3, 5, 6) = & + \frac{n_{58}}{s_{14}s_{56}s_{124}} - \frac{n_{23}}{s_{16}s_{35}s_{235}} - \frac{n_{11}}{s_{56}s_{23}s_{234}} - \frac{n_{36}}{s_{35}s_{24}s_{124}} + \frac{n_{59}}{s_{14}s_{23}s_{235}} + \\
& - \frac{n_{37}}{s_{24}s_{16}s_{234}} + \frac{n_{60}}{s_{14}s_{23}s_{56}} - \frac{n_{38}}{s_{16}s_{24}s_{35}} + \frac{n_{61}}{s_{14}s_{35}s_{124}} - \frac{n_{18}}{s_{16}s_{23}s_{235}} + \\
& - \frac{n_{40}}{s_{56}s_{24}s_{234}} + \frac{n_{62}}{s_{14}s_{35}s_{235}} - \frac{n_6}{s_{16}s_{23}s_{234}} - \frac{n_{41}}{s_{56}s_{24}s_{124}} \quad (4.156)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 4, 2, 5, 3, 6) = & + \frac{n_{63}}{s_{14}s_{36}s_{124}} + \frac{n_{23}}{s_{16}s_{35}s_{235}} - \frac{n_{32}}{s_{36}s_{25}s_{245}} + \frac{n_{36}}{s_{35}s_{24}s_{124}} + \frac{n_{65}}{s_{14}s_{25}s_{235}} + \\
& - \frac{n_{43}}{s_{24}s_{16}s_{245}} + \frac{n_{66}}{s_{14}s_{25}s_{36}} + \frac{n_{38}}{s_{16}s_{24}s_{35}} - \frac{n_{61}}{s_{14}s_{35}s_{124}} - \frac{n_{47}}{s_{16}s_{25}s_{235}} + \\
& - \frac{n_{44}}{s_{36}s_{24}s_{245}} - \frac{n_{62}}{s_{14}s_{35}s_{235}} - \frac{n_{28}}{s_{16}s_{25}s_{245}} - \frac{n_{45}}{s_{36}s_{24}s_{124}} \quad (4.157)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 5, 2, 3, 4, 6) = & + \frac{n_{67}}{s_{15}s_{46}s_{125}} - \frac{n_{13}}{s_{16}s_{34}s_{234}} - \frac{n_{22}}{s_{46}s_{23}s_{235}} + \frac{n_{27}}{s_{34}s_{25}s_{125}} + \frac{n_{69}}{s_{15}s_{23}s_{234}} + \\
& - \frac{n_{47}}{s_{25}s_{16}s_{235}} + \frac{n_{70}}{s_{15}s_{23}s_{46}} + \frac{n_{30}}{s_{16}s_{25}s_{34}} + \frac{n_{71}}{s_{15}s_{34}s_{125}} - \frac{n_6}{s_{16}s_{23}s_{234}} + \\
& - \frac{n_{48}}{s_{46}s_{25}s_{235}} + \frac{n_{72}}{s_{15}s_{34}s_{234}} - \frac{n_{18}}{s_{16}s_{23}s_{235}} - \frac{n_{49}}{s_{46}s_{25}s_{125}} \quad (4.158)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 5, 2, 4, 3, 6) = & + \frac{n_{73}}{s_{15}s_{36}s_{125}} + \frac{n_{13}}{s_{16}s_{34}s_{234}} - \frac{n_{44}}{s_{36}s_{24}s_{245}} - \frac{n_{27}}{s_{34}s_{25}s_{125}} + \frac{n_{75}}{s_{15}s_{24}s_{234}} + \\
& - \frac{n_{28}}{s_{25}s_{16}s_{245}} + \frac{n_{76}}{s_{15}s_{24}s_{36}} - \frac{n_{30}}{s_{16}s_{25}s_{34}} - \frac{n_{71}}{s_{15}s_{34}s_{125}} - \frac{n_{37}}{s_{16}s_{24}s_{234}} + \\
& - \frac{n_{32}}{s_{36}s_{25}s_{245}} - \frac{n_{72}}{s_{15}s_{34}s_{234}} - \frac{n_{43}}{s_{16}s_{24}s_{245}} - \frac{n_{34}}{s_{36}s_{25}s_{125}} \quad (4.159)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 3, 4, 2, 5, 6) = & + \frac{n_{77}}{s_{13}s_{56}s_{134}} + \frac{n_{28}}{s_{16}s_{25}s_{245}} + \frac{n_{40}}{s_{56}s_{24}s_{234}} + \frac{n_{78}}{s_{25}s_{34}s_{134}} - \frac{n_{51}}{s_{13}s_{24}s_{245}} + \\
& - \frac{n_{13}}{s_{34}s_{16}s_{234}} - \frac{n_{52}}{s_{13}s_{24}s_{56}} + \frac{n_{30}}{s_{16}s_{25}s_{34}} + \frac{n_{80}}{s_{13}s_{25}s_{134}} + \frac{n_{43}}{s_{16}s_{24}s_{245}} + \\
& - \frac{n_3}{s_{56}s_{34}s_{234}} - \frac{n_{56}}{s_{13}s_{25}s_{245}} + \frac{n_{37}}{s_{16}s_{24}s_{234}} + \frac{n_{81}}{s_{56}s_{34}s_{134}} \quad (4.160)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 3, 5, 2, 4, 6) = & + \frac{n_{82}}{s_{13}s_{46}s_{135}} + \frac{n_{43}}{s_{16}s_{24}s_{245}} + \frac{n_{48}}{s_{46}s_{25}s_{235}} + \frac{n_{83}}{s_{24}s_{35}s_{135}} - \frac{n_{56}}{s_{13}s_{25}s_{245}} + \\
& - \frac{n_{23}}{s_{35}s_{16}s_{235}} - \frac{n_{57}}{s_{13}s_{25}s_{46}} - \frac{n_{38}}{s_{16}s_{24}s_{35}} + \frac{n_{85}}{s_{13}s_{24}s_{135}} + \frac{n_{28}}{s_{16}s_{25}s_{245}} + \\
& - \frac{n_{16}}{s_{46}s_{35}s_{235}} - \frac{n_{51}}{s_{13}s_{24}s_{245}} + \frac{n_{47}}{s_{16}s_{25}s_{235}} + \frac{n_{86}}{s_{46}s_{35}s_{135}} \quad (4.161)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 4, 3, 2, 5, 6) = & + \frac{n_{87}}{s_{14}s_{56}s_{134}} + \frac{n_{47}}{s_{16}s_{25}s_{235}} + \frac{n_{11}}{s_{56}s_{23}s_{234}} - \frac{n_{78}}{s_{25}s_{34}s_{134}} - \frac{n_{59}}{s_{14}s_{23}s_{235}} + \\
& + \frac{n_{13}}{s_{34}s_{16}s_{234}} - \frac{n_{60}}{s_{14}s_{23}s_{56}} - \frac{n_{30}}{s_{16}s_{25}s_{34}} + \frac{n_{88}}{s_{14}s_{25}s_{134}} + \frac{n_{18}}{s_{16}s_{23}s_{235}} + \\
& + \frac{n_3}{s_{56}s_{34}s_{234}} - \frac{n_{65}}{s_{14}s_{25}s_{235}} + \frac{n_6}{s_{16}s_{23}s_{234}} - \frac{n_{81}}{s_{56}s_{34}s_{134}} \quad (4.162)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 4, 5, 2, 3, 6) = & + \frac{n_{89}}{s_{14}s_{36}s_{145}} + \frac{n_{18}}{s_{16}s_{23}s_{235}} + \frac{n_{32}}{s_{36}s_{25}s_{245}} + \frac{n_{90}}{s_{23}s_{45}s_{145}} - \frac{n_{65}}{s_{14}s_{25}s_{235}} + \\
& + \frac{n_{33}}{s_{45}s_{16}s_{245}} - \frac{n_{66}}{s_{14}s_{25}s_{36}} - \frac{n_8}{s_{16}s_{23}s_{45}} + \frac{n_{91}}{s_{14}s_{23}s_{145}} + \frac{n_{47}}{s_{16}s_{25}s_{235}} + \\
& + \frac{n_{26}}{s_{36}s_{45}s_{245}} - \frac{n_{59}}{s_{14}s_{23}s_{235}} + \frac{n_{28}}{s_{16}s_{25}s_{245}} + \frac{n_{92}}{s_{36}s_{45}s_{145}} \quad (4.163)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 5, 3, 2, 4, 6) = & + \frac{n_{93}}{s_{15}s_{46}s_{135}} + \frac{n_{37}}{s_{16}s_{24}s_{234}} + \frac{n_{22}}{s_{46}s_{23}s_{235}} - \frac{n_{83}}{s_{24}s_{35}s_{135}} - \frac{n_{69}}{s_{15}s_{23}s_{234}} + \\
& + \frac{n_{23}}{s_{35}s_{16}s_{235}} - \frac{n_{70}}{s_{15}s_{23}s_{46}} + \frac{n_{38}}{s_{16}s_{24}s_{35}} + \frac{n_{94}}{s_{15}s_{24}s_{135}} + \frac{n_6}{s_{16}s_{23}s_{234}} + \\
& + \frac{n_{16}}{s_{46}s_{35}s_{235}} - \frac{n_{75}}{s_{15}s_{24}s_{234}} + \frac{n_{18}}{s_{16}s_{23}s_{235}} - \frac{n_{86}}{s_{46}s_{35}s_{135}} \quad (4.164)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 5, 4, 2, 3, 6) = & + \frac{n_{95}}{s_{15}s_{36}s_{145}} + \frac{n_6}{s_{16}s_{23}s_{234}} + \frac{n_{44}}{s_{36}s_{24}s_{245}} - \frac{n_{90}}{s_{23}s_{45}s_{145}} - \frac{n_{75}}{s_{15}s_{24}s_{234}} + \\
& - \frac{n_{33}}{s_{45}s_{16}s_{245}} - \frac{n_{76}}{s_{15}s_{24}s_{36}} + \frac{n_8}{s_{16}s_{23}s_{45}} + \frac{n_{96}}{s_{15}s_{23}s_{145}} + \frac{n_{37}}{s_{16}s_{24}s_{234}} + \\
& - \frac{n_{26}}{s_{36}s_{45}s_{245}} - \frac{n_{69}}{s_{15}s_{23}s_{234}} + \frac{n_{43}}{s_{16}s_{24}s_{245}} - \frac{n_{92}}{s_{36}s_{45}s_{145}} \quad (4.165)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 3, 4, 5, 2, 6) = & + \frac{n_{97}}{s_{13}s_{26}s_{134}} - \frac{n_{28}}{s_{16}s_{25}s_{245}} + \frac{n_{98}}{s_{26}s_{45}s_{345}} - \frac{n_{78}}{s_{25}s_{34}s_{134}} - \frac{n_{54}}{s_{13}s_{45}s_{245}} + \\
& - \frac{n_{10}}{s_{34}s_{16}s_{345}} + \frac{n_{99}}{s_{13}s_{45}s_{26}} - \frac{n_{30}}{s_{16}s_{25}s_{34}} - \frac{n_{80}}{s_{13}s_{25}s_{134}} - \frac{n_{33}}{s_{16}s_{45}s_{245}} + \\
& + \frac{n_{100}}{s_{26}s_{34}s_{345}} + \frac{n_{56}}{s_{13}s_{25}s_{245}} - \frac{n_2}{s_{16}s_{45}s_{345}} + \frac{n_{101}}{s_{26}s_{34}s_{134}} \quad (4.166)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 3, 5, 4, 2, 6) = & + \frac{n_{102}}{s_{13}s_{26}s_{135}} - \frac{n_{43}}{s_{16}s_{24}s_{245}} - \frac{n_{98}}{s_{26}s_{45}s_{345}} - \frac{n_{83}}{s_{24}s_{35}s_{135}} + \frac{n_{54}}{s_{13}s_{45}s_{245}} + \\
& - \frac{n_{21}}{s_{35}s_{16}s_{345}} - \frac{n_{99}}{s_{13}s_{45}s_{26}} + \frac{n_{38}}{s_{16}s_{24}s_{35}} - \frac{n_{85}}{s_{13}s_{24}s_{135}} + \frac{n_{33}}{s_{16}s_{45}s_{245}} + \\
& + \frac{n_{103}}{s_{26}s_{35}s_{345}} + \frac{n_{51}}{s_{13}s_{24}s_{245}} + \frac{n_2}{s_{16}s_{45}s_{345}} + \frac{n_{104}}{s_{26}s_{35}s_{135}} \quad (4.167)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 4, 3, 5, 2, 6) = & + \frac{n_{105}}{s_{14}s_{26}s_{134}} - \frac{n_{47}}{s_{16}s_{25}s_{235}} - \frac{n_{103}}{s_{26}s_{35}s_{345}} + \frac{n_{78}}{s_{25}s_{34}s_{134}} - \frac{n_{62}}{s_{14}s_{35}s_{235}} + \\
& + \frac{n_{10}}{s_{34}s_{16}s_{345}} + \frac{n_{24}}{s_{14}s_{35}s_{26}} + \frac{n_{30}}{s_{16}s_{25}s_{34}} - \frac{n_{88}}{s_{14}s_{25}s_{134}} + \frac{n_{23}}{s_{16}s_{35}s_{235}} + \\
& - \frac{n_{100}}{s_{26}s_{34}s_{345}} + \frac{n_{65}}{s_{14}s_{25}s_{235}} + \frac{n_{21}}{s_{16}s_{35}s_{345}} - \frac{n_{101}}{s_{26}s_{34}s_{134}} \quad (4.168)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 4, 5, 3, 2, 6) = & + \frac{n_{64}}{s_{14}s_{26}s_{145}} - \frac{n_{18}}{s_{16}s_{23}s_{235}} + \frac{n_{103}}{s_{26}s_{35}s_{345}} - \frac{n_{90}}{s_{23}s_{45}s_{145}} + \frac{n_{62}}{s_{14}s_{35}s_{235}} + \\
& + \frac{n_2}{s_{45}s_{16}s_{345}} - \frac{n_{24}}{s_{14}s_{35}s_{26}} + \frac{n_8}{s_{16}s_{23}s_{45}} - \frac{n_{91}}{s_{14}s_{23}s_{145}} - \frac{n_{23}}{s_{16}s_{35}s_{235}} + \\
& - \frac{n_{98}}{s_{26}s_{45}s_{345}} + \frac{n_{59}}{s_{14}s_{23}s_{235}} - \frac{n_{21}}{s_{16}s_{35}s_{345}} + \frac{n_{68}}{s_{26}s_{45}s_{145}} \quad (4.169)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 5, 3, 4, 2, 6) = & + \frac{n_{74}}{s_{15}s_{26}s_{135}} - \frac{n_{37}}{s_{16}s_{24}s_{234}} - \frac{n_{100}}{s_{26}s_{34}s_{345}} + \frac{n_{83}}{s_{24}s_{35}s_{135}} - \frac{n_{72}}{s_{15}s_{34}s_{234}} + \\
& + \frac{n_{21}}{s_{35}s_{16}s_{345}} + \frac{n_{79}}{s_{15}s_{34}s_{26}} - \frac{n_{38}}{s_{16}s_{24}s_{35}} - \frac{n_{94}}{s_{15}s_{24}s_{135}} + \frac{n_{13}}{s_{16}s_{34}s_{234}} + \\
& - \frac{n_{103}}{s_{26}s_{35}s_{345}} + \frac{n_{75}}{s_{15}s_{24}s_{234}} + \frac{n_{10}}{s_{16}s_{34}s_{345}} - \frac{n_{104}}{s_{26}s_{35}s_{135}} \quad (4.170)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 5, 4, 3, 2, 6) = & + \frac{n_{84}}{s_{15}s_{26}s_{145}} - \frac{n_6}{s_{16}s_{23}s_{234}} + \frac{n_{100}}{s_{26}s_{34}s_{345}} + \frac{n_{90}}{s_{23}s_{45}s_{145}} + \frac{n_{72}}{s_{15}s_{34}s_{234}} + \\
& - \frac{n_2}{s_{45}s_{16}s_{345}} - \frac{n_{79}}{s_{15}s_{34}s_{26}} - \frac{n_8}{s_{16}s_{23}s_{45}} - \frac{n_{96}}{s_{15}s_{23}s_{145}} - \frac{n_{13}}{s_{16}s_{34}s_{234}} + \\
& + \frac{n_{98}}{s_{26}s_{45}s_{345}} + \frac{n_{69}}{s_{15}s_{23}s_{234}} - \frac{n_{10}}{s_{16}s_{34}s_{345}} - \frac{n_{68}}{s_{26}s_{45}s_{145}} \quad (4.171)
\end{aligned}$$

Notemos que há ao todo 105 numeradores diferentes. Muitos deles aparecem mais de uma vez nas 24 subamplitudes. Isso ocorre porque os numeradores dos termos com um mesmo pólo são iguais pelo menos em módulo, o que pode ser comprovado através da regra da fatoração, analogamente ao que já foi feito nos Apêndices D.1 e D.2 para os casos  $N = 4$  e  $N = 5$ , respectivamente.

#### 4.5.2 Amplitude de 6-pontos em termos dos pólos, dos numeradores e dos fatores de cor

Em princípio, usando (2.9), a amplitude total vem dada em termos de 120 subamplitudes. Mas, se utilizarmos as relações Kleiss-Kuijf adequadamente, conseguimos reduzir esse número para 24 subamplitudes e a expressão da amplitude total começa da

seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_6 = & A(1, 2, 3, 4, 5, 6) \left[ -\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6}) + \right. \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) + \\
& - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4}) + \\
& \left. - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6} \lambda^{a_4}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6} \lambda^{a_3}) \right] + \{23 \text{ termos}\}
\end{aligned} \tag{4.172}$$

Aqui também é possível identificar essa soma de traços que aparece como um produto de constantes de estrutura. Antes disso, do mesmo modo que obtivemos a relação em (4.56), não é difícil chegar também a que

$$\begin{aligned}
f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_3 c} f_c{}^{a_4 d} f_d{}^{a_5 a_6} = & \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6} \lambda^{a_2}) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5} \lambda^{a_2}) + \\
& - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3}) + \\
& - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3}) + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) + \\
& + \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_6} \lambda^{a_5} \lambda^{a_4}) - \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_5} \lambda^{a_6} \lambda^{a_4}) +
\end{aligned} \tag{4.173}$$

A partir de então, é preciso repetir todo o procedimento que foi feito para o caso  $N = 5$ . Para  $N = 6$ , se fez importante a utilização do software Maple para realizar as manipulações.

E no fim, é possível escrever a amplitude total num formato que apresenta o mesmo padrão dos outros casos:

$$\mathcal{A}_6 = \frac{n_1 c_1}{s_{12} s_{56} s_{123}} + \frac{n_2 c_2}{s_{16} s_{45} s_{345}} + \dots + \frac{n_{105} c_{105}}{s_{15} s_{26} s_{145}} \tag{4.174}$$

onde cada um dos 105  $c_i$ 's é um produto de quatro constantes de estrutura e eles correspondem aos fatores de cor dos 105 diagramas (com apenas vértices cúbicos) que contribuem para essa amplitude. Esses  $c_i$ 's estão apresentados no Apêndice F.

### 4.5.3 Dualidade cor-cinemática e as identidades cinemáticas

Aqui também vamos assumir que os fatores cinemáticos  $n_i$ 's satisfazem relações análogas às obedecidas pelos fatores de cor  $c_i$ 's. Então, primeiro devemos encontrar todas as identidades de Jacobi entre os  $c_i$ 's. Neste caso, isso foi feito no Maple e foram encontradas 105 equações. Ao resolvermos o sistema formado por essas equações para os 105  $c_i$ 's, conseguimos escrever 81 deles em termos dos 24 restantes. Na solução encontrada, os 24 fatores de cor independentes foram:  $c_{14}, c_{20}, c_{24}, c_{34}, c_{41}, c_{45}, c_{49}, c_{54}, c_{57}, c_{62}, c_{66}, c_{68}, c_{72}, c_{76}, c_{79}, c_{81}, c_{84}, c_{86}, c_{88}, c_{92}, c_{94}, c_{96}, c_{101}$  e  $c_{104}$ .

As 105 equações do sistema e a solução encontrada estão apresentadas no Apêndice G.

Esse resultado é, então, estendido para os fatores cinemáticos. Logo, os  $n_i$ 's independentes serão os seguintes 24:  $n_{14}, n_{20}, n_{24}, n_{34}, n_{41}, n_{45}, n_{49}, n_{54}, n_{57}, n_{62}, n_{66}, n_{68}, n_{72}, n_{76}, n_{79}, n_{81}, n_{84}, n_{86}, n_{88}, n_{92}, n_{94}, n_{96}, n_{101}$  e  $n_{104}$ .

### 4.5.4 Liberdade de *gauge* dos numeradores

Lembremos que para  $N = 5$ , foi preciso isolar dois dos  $n_i$ 's independentes em termos das subamplitudes da base (vide equações (4.128) e (4.129)). Ou seja, eles foram trocados por duas subamplitudes, fazendo com que ficássemos com apenas quatro  $n_i$ 's independentes e duas subamplitudes na base.

O importante a ser notado aqui é que essa técnica de se eliminar alguns numeradores fez com que o número de subamplitudes independentes fosse reduzido. Neste caso em que  $N = 5$ , esse número passou de 6 para 2 ou, equivalentemente, de  $(N-2)! = (5-2)! = 6$  para  $(N-3)! = (5-3)! = 2$ .

Com base nas informações acima, vamos repetir o procedimento para  $N = 6$ , almejando um resultado semelhante. Espera-se, então, que o número de elementos da base seja reduzido de  $(6-2)! = 24$  para  $(6-3)! = 6$ . Vamos, portanto, isolar 6 dos 24 numeradores independentes. Para isso, precisamos utilizar as expressões dadas de (4.148) a (4.171). Escolhemos isolar os numeradores  $n_{14}, n_{41}, n_{54}, n_{62}, n_{81}$  e  $n_{88}$ , respectivamente, das equações (4.148), (4.151), (4.154), (4.156), (4.160) e (4.162). Essas expressões não serão apresentadas aqui por se tratarem de expressões muito longas. O importante é notarmos que esses seis numeradores passam a ser funções dos outros dezoito  $n_i$ 's e também das seis subamplitudes  $A(1, 2, 3, 4, 5, 6), A(1, 2, 4, 3, 5, 6), A(1, 3, 2, 4, 5, 6),$

$A(1, 4, 2, 3, 5, 6)$ ,  $A(1, 3, 4, 2, 5, 6)$  e  $A(1, 4, 3, 2, 5, 6)$ .

Com isso, restam apenas 18 numeradores independentes. A cada um desses  $n_i$ 's atribuiremos uma liberdade de *gauge* da mesma forma feita nos outros casos. Assim, tanto as subamplitudes quanto as identidades cinemáticas devem se manter inalteradas mediante as seguintes transformações:

$$\begin{aligned}
n'_{20} &= n_{20} + \beta_1 s_{23}s_{46}s_{123} \\
n'_{24} &= n_{24} + \beta_2 s_{14}s_{35}s_{26} \\
n'_{34} &= n_{34} + \beta_3 s_{25}s_{36}s_{125} \\
n'_{45} &= n_{45} + \beta_4 s_{24}s_{36}s_{124} \\
n'_{49} &= n_{49} + \beta_5 s_{25}s_{46}s_{125} \\
n'_{57} &= n_{57} + \beta_6 s_{13}s_{25}s_{46} \\
n'_{66} &= n_{66} + \beta_7 s_{14}s_{25}s_{36} \\
n'_{68} &= n_{68} + \beta_8 s_{26}s_{45}s_{145} \\
n'_{72} &= n_{72} + \beta_9 s_{15}s_{34}s_{234} \\
n'_{76} &= n_{76} + \beta_{10} s_{15}s_{24}s_{36} \\
n'_{79} &= n_{79} + \beta_{11} s_{15}s_{26}s_{34} \\
n'_{84} &= n_{84} + \beta_{12} s_{15}s_{26}s_{145} \\
n'_{86} &= n_{86} + \beta_{13} s_{35}s_{46}s_{135} \\
n'_{92} &= n_{92} + \beta_{14} s_{36}s_{45}s_{145} \\
n'_{94} &= n_{94} + \beta_{15} s_{15}s_{24}s_{135} \\
n'_{96} &= n_{96} + \beta_{16} s_{15}s_{23}s_{145} \\
n'_{101} &= n_{101} + \beta_{17} s_{26}s_{34}s_{134} \\
n'_{104} &= n_{104} + \beta_{18} s_{26}s_{35}s_{135}
\end{aligned}
\tag{4.175}$$

onde os  $\beta_i$ 's são funções dos momentos e das polarizações.

#### 4.5.5 Relações BCJ para $N = 6$

O próximo passo é obter as relações BCJ. Podemos repetir a mesma ideia utilizada na seção 4.4.5: vamos realizar uma transformação de *gauge* em todos os 18 numeradores

independentes de modo que os novos  $n_i$ 's sejam nulos. Para isso basta escolher os  $\beta_i$ 's adequadamente. Por exemplo, fazendo  $\beta_1 = -\frac{n_{20}}{s_{23}s_{46}s_{123}}$ , temos que  $n'_{20} = 0$ . Analogamente, podemos ter também  $n'_{24} = n'_{34} = n'_{45} = n'_{49} = n'_{57} = n'_{66} = n'_{68} = n'_{72} = n'_{76} = n'_{79} = n'_{84} = n'_{86} = n'_{92} = n'_{94} = n'_{96} = n'_{101} = n'_{104} = 0$ .

Os 6 numeradores,  $n_{14}$ ,  $n_{41}$ ,  $n_{54}$ ,  $n_{62}$ ,  $n_{81}$  e  $n_{88}$ , que foram escritos em termos dos outros e das subamplitudes também sofrerão uma transformação de acordo com a expressão de cada um deles, ou seja, com sua dependência nos 18 numeradores acima.

Mas vai ocorrer que esses 6 numeradores, após serem transformados, dependerão, de fato, apenas de subamplitudes. Isso porque onde apareceriam, por exemplo,  $n'_{20}$  ou  $n'_{24}$ , colocaremos "zero". No final das contas, teremos  $n'_{14}$ ,  $n'_{41}$ ,  $n'_{54}$ ,  $n'_{62}$ ,  $n'_{81}$  e  $n'_{88}$  dados em termos somente das 6 subamplitudes:  $A(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ,  $A(1, 2, 4, 3, 5, 6)$ ,  $A(1, 3, 2, 4, 5, 6)$ ,  $A(1, 4, 2, 3, 5, 6)$ ,  $A(1, 3, 4, 2, 5, 6)$  e  $A(1, 4, 3, 2, 5, 6)$ .

Assim, podemos substituir os novos fatores cinemáticos  $n'_i$  nas expressões das 18 subamplitudes  $A(1, 2, 3, 5, 4, 6)$ ,  $A(1, 2, 5, 4, 3, 6)$ ,  $A(1, 2, 4, 5, 3, 6)$ ,  $A(1, 2, 5, 3, 4, 6)$ ,  $A(1, 3, 2, 5, 4, 6)$ ,  $A(1, 4, 2, 5, 3, 6)$ ,  $A(1, 5, 2, 3, 4, 6)$ ,  $A(1, 5, 2, 4, 3, 6)$ ,  $A(1, 3, 5, 2, 4, 6)$ ,  $A(1, 4, 5, 2, 3, 6)$ ,  $A(1, 5, 3, 2, 4, 6)$ ,  $A(1, 5, 4, 2, 3, 6)$ ,  $A(1, 3, 4, 5, 2, 6)$ ,  $A(1, 3, 5, 4, 2, 6)$ ,  $A(1, 4, 4, 3, 5, 2, 6)$ ,  $A(1, 4, 5, 3, 2, 6)$ ,  $A(1, 5, 3, 4, 2, 6)$  e  $A(1, 5, 4, 3, 2, 6)$ . Lembrando que alguns numeradores são nulos e os outros dependem somente de subamplitudes, ao fazermos essa substituição chegaremos, enfim, a relações que envolvam somente subamplitudes. Estas serão as Relações BCJ para  $N = 6$ . Abaixo estão listadas algumas delas:

$$\begin{aligned} A(1, 2, 3, 5, 4, 6) &= -\frac{-s_{56} + s_{123}}{s_{123} - s_{56} - s_{45}}A(1, 2, 3, 4, 5, 6) - \frac{s_{123} - s_{56} + s_{34}}{s_{123} - s_{56} - s_{45}}A(1, 2, 4, 3, 5, 6) \\ &+ \frac{s_{56} - s_{123} - s_{234} + s_{23}}{-s_{56} - s_{45} + s_{123}}A(1, 3, 4, 2, 5, 6) \end{aligned} \quad (4.176)$$

$$\begin{aligned} A(1, 2, 4, 5, 3, 6) &= -\frac{s_{12} - s_{34} - s_{123}}{s_{12} - s_{345} + s_{45} - s_{123}}A(1, 2, 4, 3, 5, 6) + \\ &+ \frac{s_{123} - s_{12} - s_{23}}{s_{12} - s_{345} + s_{45} - s_{123}}A(1, 3, 2, 4, 5, 6) + \\ &- \frac{s_{12} - s_{123}}{s_{12} - s_{345} + s_{45} - s_{123}}A(1, 2, 3, 4, 5, 6) \end{aligned} \quad (4.177)$$

$$\begin{aligned}
A(1, 4, 5, 3, 2, 6) = & + \frac{(s_{23} - s_{234} + s_{34} - s_{12})(s_{345} - s_{16} - s_{123} + s_{23} - s_{34})}{(-s_{12} + s_{345} - s_{16})(-s_{123} + s_{23} - s_{16} + s_{45})} A(1, 3, 4, 2, 5, 6) \\
& - \frac{(-s_{345} - s_{234} + s_{16} + s_{34})(s_{123} - s_{12} - s_{23} + s_{34})}{(-s_{12} + s_{345} - s_{16})(-s_{123} + s_{23} - s_{16} + s_{45})} A(1, 4, 3, 2, 5, 6) \\
& - \frac{(-s_{345} - s_{234} + s_{16} + s_{34})(s_{123} - s_{12} - s_{23})}{(-s_{12} + s_{345} - s_{16})(-s_{123} + s_{23} - s_{16} + s_{45})} A(1, 4, 2, 3, 5, 6) \\
& + \frac{(s_{123} - s_{12} - s_{23})(s_{23} + s_{345} - s_{16})}{(-s_{12} + s_{345} - s_{16})(-s_{123} + s_{23} - s_{16} + s_{45})} A(1, 3, 2, 4, 5, 6) \\
& + \frac{s_{12}(s_{123} - s_{23} + s_{34} - s_{345} + s_{16})}{(-s_{12} + s_{345} - s_{16})(-s_{123} + s_{23} - s_{16} + s_{45})} A(1, 2, 4, 3, 5, 6) \\
& - \frac{s_{12}(-s_{123} + s_{23} + s_{345} - s_{16})}{(-s_{12} + s_{345} - s_{16})(-s_{123} + s_{23} - s_{16} + s_{45})} A(1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (4.178)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 4, 3, 5, 2, 6) = & - \frac{s_{12}}{s_{12} - s_{345} + s_{16}} A(1, 2, 4, 3, 5, 6) - \frac{s_{12} - s_{34} + s_{234}}{s_{12} - s_{345} + s_{16}} A(1, 4, 3, 2, 5, 6) \\
& - \frac{s_{12} - s_{23} + s_{234} - s_{34}}{s_{12} - s_{345} + s_{16}} A(1, 3, 4, 2, 5, 6) \quad (4.179)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 3, 2, 5, 4, 6) = & - \frac{s_{56} - s_{123}}{s_{45} - s_{123} + s_{56}} A(1, 3, 2, 4, 5, 6) \\
& - \frac{s_{56} - s_{123} - s_{234} + s_{23}}{s_{45} - s_{123} + s_{56}} A(1, 4, 3, 2, 5, 6) \\
& - \frac{s_{123} - s_{234} + s_{56} + s_{34} + s_{23}}{s_{45} - s_{123} + s_{56}} A(1, 4, 2, 3, 5, 6) \quad (4.180)
\end{aligned}$$

E vale notar que, de fato, foi possível com as relações BCJ reduzir o número de elementos da base de 24 para 6 subamplitudes.

Embora tenhamos apresentado acima somente algumas relações BCJ, conseguimos obter todas elas, ou seja, obtivemos todas as expressões para 18 subamplitudes da forma  $A(1, \mathcal{P}(2, 3, 4, 5), 6)$  que ainda permaneciam independentes depois do uso das relações Kleiss-Kuijff em termos de somente outras 6 da forma  $A(1, \mathcal{P}(2, 3, 4), 5, 6)$ . Apesar disso, não colocamos as demais relações neste trabalho por se tratarem de expressões muito longas.

## 4.6 Casos $N > 6$

A ideia é que os principais resultados vistos no casos em que  $N = 5$  e  $N = 6$ , especialmente a dualidade cor-cinemática, sejam válidos para qualquer  $N$ . Mais especificamente, esperamos que seja sempre possível estender as relações de Jacobi entre os fatores de cor para os numeradores, fornecendo, assim, novos vínculos entre as subamplitudes.

Uma consequência importante desses novos vínculos é a redução do número de elementos da base necessária para se escrever uma amplitude. Com as relações Kleiss-Kuijf, conseguimos escrever a amplitude de  $N$ -pontos em termos de  $(N-2)!$  subamplitudes [2]. Se, além disso, utilizarmos as relações BCJ, esse número é reduzido para  $(N-3)!$ . Isso foi conferido até  $N = 8$  por Bern, Carrasco e Johansson segundo informações em seu trabalho [3]. Para valores de  $N$  maiores que 8, assume-se que um resultado geral se aplica, ou seja, que para uma amplitude de  $N$  pontos, o número de subamplitudes na base será de  $(N-3)!$ . Além disso, eles ainda propõem uma forma geral das relações BCJ para  $N$ -pontos. Esta fórmula foi testada por eles para alguns valores de  $N$ , porém permanece também uma conjectura para o caso em que  $N$  é geral:

$$A_n(1, 2, \{\alpha\}, 3, \{\beta\}) = \sum_{\{\sigma\}_j \in PPO(\{\alpha\}, \{\beta\})} A_n(1, 2, 3, \{\sigma\}_j) \prod_{k=4}^m \frac{\mathcal{F}(3, \{\sigma\}_j, 1 | k)}{s_{2,4,\dots,k}} \quad (4.181)$$

onde a soma se dá sobre as “permutações parcialmente ordenadas” (PPO) da fusão dos conjuntos  $\{\alpha\}$  e  $\{\beta\}$ , ou seja, todas as permutações de  $\{\alpha\} \cup \{\beta\}$  que mantêm a ordem dos elementos de  $\{\beta\}$ . A função  $\mathcal{F}$  associada à perna  $k$  vem dada por:

$$\mathcal{F}(3, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-3}, 1 | k) \equiv \mathcal{F}(\{\rho\} | k) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{l=t_k}^{n-1} \mathcal{G}(k, \rho_l) & \text{se } t_{k-1} < t_k \\ -\sum_{l=1}^{t_k} \mathcal{G}(k, \rho_l) & \text{se } t_{k-1} > t_k \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ll} s_{2,4,\dots,k} & \text{se } t_{k-1} < t_k < t_{k+1} \\ -s_{2,4,\dots,k} & \text{se } t_{k-1} > t_k > t_{k+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{array} \right\} \quad (4.182)$$

onde  $t_k$  é a posição da perna  $k$  no conjunto  $\{\rho\}$ , exceto para  $t_3$  e  $t_{m+1}$  que são sempre definidos como

$$t_3 \equiv t_5, \quad t_{m+1} \equiv 0. \quad (4.183)$$

E a função  $\mathcal{G}$  vem dada por:

$$\mathcal{G}(i, j) = \left\{ \begin{array}{ll} s_{i,j} & \text{se } i < j \text{ ou } j = 1, 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{array} \right\}. \quad (4.184)$$

E, finalmente,

$$s_{i,j} = (k_i + k_j)^2, \quad s_{2,4,\dots,i} = (k_2 + k_4 + \dots + k_i)^2, \quad (4.185)$$

onde os momentos são definidos para partículas que estão saindo no espalhamento.

Em princípio, então, o procedimento para se obter as relações BCJ e, com isso, escrever a amplitude em termos de uma base mínima de  $(N-3)!$  está bem definido e pode ser utilizado para um  $N$  qualquer. Porém, nos cálculos feitos para  $N = 6$  já houve muita dificuldade em se chegar às relações devido às manipulações e expressões demasiadamente longas com as quais o software Maple teve que lidar. Portanto, é de se esperar que seja cada vez mais difícil, à medida que aumentamos o valor de  $N$ , obter as relações BCJ por este método.

Apesar de, no artigo BCJ, o resultado geral de que a base contém  $(N-3)!$  elementos veio de conjecturar a existência da dualidade cor-cinemática, há um outro trabalho de teoria de campos [19] que obtém esse resultado para alguns valores específicos de  $N$  sem a necessidade de se assumir tal conjectura. E ainda, um outro trabalho [20], em que um dos autores é o próprio Bern, traz uma prova geral, para  $N$ -pontos (sendo  $N$  arbitrário), das relações BCJ (no nível de árvore), se ainda for assumido que é válida a dualidade cor-cinemática.

## Capítulo 5

# Demonstração das relações Kleiss-Kuijf e BCJ utilizando a Teoria de Cordas como ferramenta

As relações Kleiss-Kuijf e BCJ, já discutidas anteriormente, foram obtidas a partir da teoria de campos. Neste capítulo, pretendemos chegar a relações que sejam equivalentes a essas, utilizando, desta vez, ferramentas da teoria de cordas. Tais relações, conhecidas como **relações de monodromia** [12], vão depender de  $\alpha'$ , a constante fundamental da teoria de cordas. E ao tomarmos o limite  $\alpha' \rightarrow 0$  [21, 22], recuperamos as relações já conhecidos em teoria de campos [23].

Veremos que com a teoria de cordas podemos chegar aos resultados já discutidos nos capítulos anteriores, porém com um procedimento mais formal, sem conjecturas. Isso é possível porque na teoria de cordas se conhece uma expressão fechada para a amplitude de espalhamento, o que não ocorre com campos.

## 5.1 Obtendo as relações de monodromia para $N = 5$

É conhecido da teoria de cordas que a expressão para a subamplitude  $A(1, \dots, N)$  de  $N$  bósons de *gauge* possui a forma geral<sup>1</sup>

$$A(1, \dots, N) = C_N \delta(k_1 + k_2 + \dots + k_N) \int \prod_{j=1}^N dx_j \prod_{i>j}^N |x_i - x_j|^{2\alpha' k_i k_j} \times \\ \times \exp\left(\sum_{i>j} \frac{2\alpha' \zeta_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)^2} - \sum_{i \neq j} \frac{2\alpha' k_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)}\right) \Bigg|_{\text{multilinear em } \zeta_\mu}. \quad (5.1)$$

onde  $\alpha'$  é a constante fundamental da teoria de cordas,  $C_N$  é uma constante conhecida da teoria (que depende de  $\alpha'$ ) e onde  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ .

Pode-se provar que a expressão acima é invariante sob as transformação do tipo  $SL(2; \mathbb{R})$  [24]. Mais especificamente, as transformações

$$x \longrightarrow \frac{ax + b}{cx + d}, \quad (5.2)$$

e que estão sujeitas ao vínculo

$$ad - bc = 1 \quad (5.3)$$

possuem a estrutura do grupo  $SL(2; \mathbb{R})$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Por causa disso, a expressão da amplitude apresenta um “*gauge* residual” devido à simetria do grupo, o que nos permite fixar três pontos à nossa escolha.

Podemos, então, optar por resolver o problema fixando 3 das variáveis de integração e, apesar de ser arbitrária, é comum se fazer a seguinte escolha:

$$x_1 = 0, x_{N-1} = 1, x_N = +\infty.$$

Vamos, então, considerar um caso particular. Para efeitos de simplificação dos cálculos, ao invés de tratarmos da amplitude de espalhamento entre glúons dada em (5.1), vamos considerar a amplitude entre táquions que possui uma expressão mais simples. No entanto, todos os resultados a que iremos chegar são também válidos para o espalhamento entre glúons, tal como está discutido no Apêndice H. Toda a justificativa feita nesse apêndice não foi apresentada no trabalho de referência [12], sendo esse mais um diferencial da presente dissertação de mestrado.

---

<sup>1</sup>A fórmula (5.1) pode ser encontrada, por exemplo, no trabalho [13].

Consideremos, então, a amplitude de espalhamento entre táquions, a qual vem dada pela expressão:

$$A(1, \dots, N) = C_N \delta(k_1 + k_2 + \dots + k_N) \int \prod_{j=1}^N dx_j \prod_{i>j}^N |x_i - x_j|^{2\alpha' k_i k_j} \quad (5.4)$$

Vamos tratar, especificamente, do espalhamento entre 5 táquions. Assim:

$$A(1, 2, 3, 4, 5) = C_5 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5) \int \prod_{j=1}^5 dx_j \prod_{i>j}^5 |x_i - x_j|^{2\alpha' k_i k_j} \quad (5.5)$$

Fixemos  $x_1 = 0$ ,  $x_4 = 1$ ,  $x_5 = +\infty$ . Fazendo isso e considerando que  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ , nos resta apenas uma integral dupla em  $x_2$  e  $x_3$  da seguinte forma (a menos de uma constante multiplicativa):

$$A(1, 2, 3, 4, 5) = \int_0^1 dx_3 x_3^{2\alpha' k_1 \cdot k_3} (1 - x_3)^{2\alpha' k_3 \cdot k_4} \times \\ \times \int_0^{x_3} dx_2 x_2^{2\alpha' k_1 \cdot k_2} (1 - x_2)^{2\alpha' k_2 \cdot k_4} (x_3 - x_2)^{2\alpha' k_2 \cdot k_3} \quad (5.6)$$

Vale notar que os limites de integração acima aparecem ao levarmos em conta o ordenamento entre os  $x_i$ 's, ou seja,  $x_1 = 0 < x_2 < x_3 < x_4 = 1 < x_5 = +\infty$ .

Gostaríamos de chegar às chamadas relações de monodromia que são relações que envolvem de forma linear subamplitudes diferentes. Para isso, vamos considerar a integral em  $x_2$ , dada acima, agora como sendo realizada no plano complexo [12]. Seja então definida a seguinte integral:

$$I = \oint_C d\chi \chi^{2\alpha' k_1 \cdot k_2} (1 - \chi)^{2\alpha' k_2 \cdot k_4} (x_3 - \chi)^{2\alpha' k_2 \cdot k_3} \quad (5.7)$$

onde vamos assumir que  $\chi$  e  $\alpha' k_i \cdot k_j$  são variáveis complexas,  $x_3$  é um número real e  $C$  é o contorno fechado dado na Figura 5.1.

Mas notemos que o integrando possui pontos de ramificação no eixo real. São eles:  $\chi = 0$ ,  $\chi = x_3$  e  $\chi = 1$ . Portanto, não podemos proceder a integral ao longo de  $C$  normalmente. A alternativa é provocar uma deformação no caminho de forma a evitar os pontos de ramificação e, posteriormente, tomar os limites adequados para recuperar o contorno original. Fazendo isso, vamos então efetuar a integral ao longo do novo contorno fechado  $C'$  dado na Figura 5.2.

Notemos que o integrando é analítico na região limitada por  $C'$ . Com o teorema dos resíduos de Cauchy-Goursat podemos concluir que

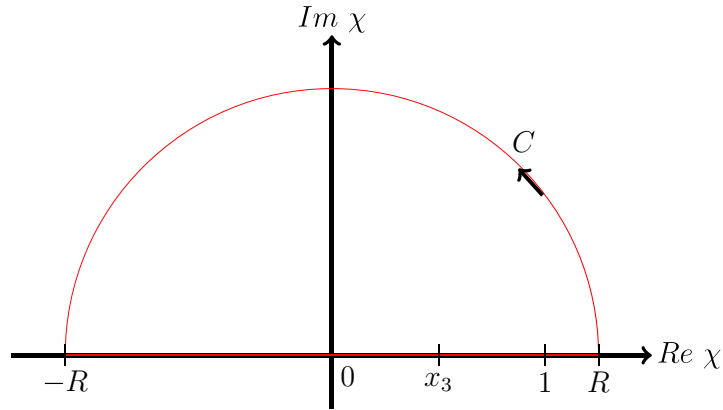


Figura 5.1: Contorno de Integração  $C$

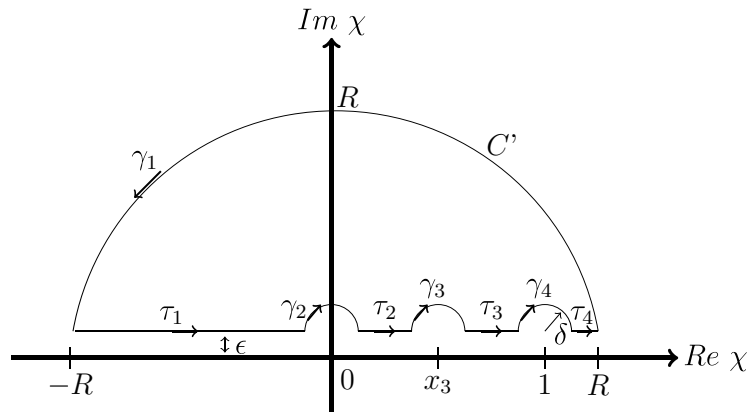


Figura 5.2: Contorno de Integração  $C'$

$$I = \oint_C d\chi \chi^{2\alpha'k_1 \cdot k_2} (1 - \chi)^{2\alpha'k_2 \cdot k_4} (x_3 - \chi)^{2\alpha'k_2 \cdot k_3} = 0 \quad (5.8)$$

onde  $\delta \rightarrow 0$  e  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Por outro lado,  $I$  pode ser dividida em outras integrais que têm como caminho de integração trechos do contorno  $C'$ . Tais trechos estão indicados na Figura 5.2 pelos  $\gamma_i$ 's e  $\tau_i$ 's ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Com isso, podemos reescrever a expressão anterior:

$$I = \int_{\gamma_1} d\chi F(\chi) + \int_{\tau_1} d\chi F(\chi) + \int_{\gamma_2} d\chi F(\chi) + \int_{\tau_2} d\chi F(\chi) + \int_{\gamma_3} d\chi F(\chi) + \\ + \int_{\tau_3} d\chi F(\chi) + \int_{\gamma_4} d\chi F(\chi) + \int_{\tau_4} d\chi F(\chi) + = 0 \quad (5.9)$$

onde  $F(\chi) = \chi^{2\alpha'k_1 \cdot k_2} (1 - \chi)^{2\alpha'k_2 \cdot k_4} (x_3 - \chi)^{2\alpha'k_2 \cdot k_3}$ .

Tomemos agora os limites  $\delta \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$ . Fazendo isso pode-se provar que as contribuições vindas dos semicírculos são nulas, restando apenas as referentes aos trechos  $\tau_i$ 's. Usando a parametrização adequada para esses trechos e definindo  $x_2 = Re \chi$ , a igualdade (5.9) se torna:

$$\int_{-\infty}^0 dx_2 f(x_2) + \int_0^{x_3} dx_2 f(x_2) + \int_{x_3}^1 dx_2 f(x_2) + \int_1^{\infty} dx_2 f(x_2) = 0 \quad (5.10)$$

onde  $f(x_2) = (x_2 + i\epsilon)^{2\alpha'k_1 \cdot k_2} (x_3 - x_2 - i\epsilon)^{2\alpha'k_2 \cdot k_3} (1 - x_2 - i\epsilon)^{2\alpha'k_2 \cdot k_4}$  e  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Reescrevendo os termos de  $f(x_2)$  como exponenciais, por exemplo,

$$(x_2 + i\epsilon)^{2\alpha'k_1 \cdot k_2} = e^{2\alpha'k_1 \cdot k_2 \log(x_2 + i\epsilon)},$$

e usando que  $\log(z = x + iy) = \log|z| + i \arctan \frac{y}{x}$  é possível calcular o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Vejam os,

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ (x_2 + i\epsilon)^{2\alpha'k_1 \cdot k_2} (x_3 - x_2 - i\epsilon)^{2\alpha'k_2 \cdot k_3} (1 - x_2 - i\epsilon)^{2\alpha'k_2 \cdot k_4} \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ e^{2\alpha'k_1 \cdot k_2 \log(x_2 + i\epsilon)} e^{2\alpha'k_2 \cdot k_3 \log(x_3 - x_2 - i\epsilon)} e^{2\alpha'k_2 \cdot k_4 \log(1 - x_2 - i\epsilon)} \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ e^{2\alpha'k_1 \cdot k_2 (\log|x_2 + i\epsilon| + i \arctan \frac{\epsilon}{x_2})} e^{2\alpha'k_2 \cdot k_3 (\log|x_3 - x_2 - i\epsilon| + i \arctan \frac{-\epsilon}{x_3 - x_2})} \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{2\alpha'k_2 \cdot k_4 (\log|1 - x_2 - i\epsilon| + i \arctan \frac{-\epsilon}{1 - x_2})} \right\} \\ &= x_2^{2\alpha'k_1 \cdot k_2} (x_3 - x_2)^{2\alpha'k_2 \cdot k_3} (1 - x_2)^{2\alpha'k_2 \cdot k_4} \times \\ &\quad \times \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ e^{i2\alpha'k_1 \cdot k_2 \arctan \frac{\epsilon}{x_2}} e^{i2\alpha'k_2 \cdot k_3 \arctan \frac{\epsilon}{x_2 - x_3}} e^{i2\alpha'k_2 \cdot k_4 \arctan \frac{\epsilon}{x_2 - 1}} \right\} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Para efeitos de maior simplicidade, vamos chamar a parte da expressão acima que já teve seu limite calculado de  $g(x_2)$ .

$$f(x_2) = g(x_2) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ e^{i2\alpha'k_1 \cdot k_2 \arctan \frac{\epsilon}{x_2}} e^{i2\alpha'k_2 \cdot k_3 \arctan \frac{\epsilon}{x_2 - x_3}} e^{i2\alpha'k_2 \cdot k_4 \arctan \frac{\epsilon}{x_2 - 1}} \right\} \quad (5.12)$$

Agora, precisamos calcular o limite para as funções arco-tangente. Quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , todos os argumentos das funções arco-tangente tenderão também a zero, com a diferença de que uns tenderão a zero pela direita e outros pela esquerda. Isso vai depender do sinal do denominador do argumento, portanto, vai depender de qual intervalo de integração o  $x_2$

se encontra<sup>2</sup>. Então, usando que  $\arctan 0^+ = 0$  e  $\arctan 0^- = \pi$ , vamos obter a função  $f(x_2)$  para cada um dos intervalos:

- $-\infty < x_2 < 0$

$$\begin{aligned} f(x_2) &= g(x_2)e^{i2\alpha'\pi k_1 \cdot k_2} e^{i2\alpha'\pi k_2 \cdot k_3} e^{i2\alpha'\pi k_2 \cdot k_4} \\ &= g(x_2)e^{i2\alpha'\pi k_2 \cdot (k_1+k_3+k_4)} \end{aligned} \quad (5.13)$$

- $0 < x_2 < x_3$

$$\begin{aligned} f(x_2) &= g(x_2)e^{i2\alpha'\pi k_2 \cdot k_3} e^{i2\alpha'\pi k_2 \cdot k_4} \\ &= g(x_2)e^{i2\alpha'\pi k_2 \cdot (k_3+k_4)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

- $x_3 < x_2 < 1$

$$\begin{aligned} f(x_2) &= g(x_2)e^{i2\alpha'\pi k_2 \cdot k_4} \\ &= g(x_2)e^{i2\alpha'\pi k_2 \cdot k_4} \end{aligned} \quad (5.15)$$

- $1 < x_2 < +\infty$

$$f(x_2) = g(x_2) \quad (5.16)$$

onde  $g(x_2) = x_2^{2\alpha'k_1 \cdot k_2} (x_3 - x_2)^{2\alpha'k_2 \cdot k_3} (1 - x_2)^{2\alpha'k_2 \cdot k_4}$ .

Substituindo esses resultados em (5.10), obtemos que:

$$\begin{aligned} e^{2\alpha'i\pi k_2 \cdot (k_1+k_3+k_4)} \int_{-\infty}^0 dx_2 g(x_2) + e^{2\alpha'i\pi k_2 \cdot (k_3+k_4)} \int_0^{x_3} dx_2 g(x_2) + \\ + e^{2\alpha'i\pi k_2 \cdot k_4} \int_{x_3}^1 dx_2 g(x_2) + \int_1^{\infty} dx_2 g(x_2) = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Multiplicando a expressão anterior por  $\int_0^1 dx_3 x_3^{2\alpha'k_1 \cdot k_3} (1 - x_3)^{2\alpha'k_3 \cdot k_4}$  e substituindo de volta a expressão de  $g(x_2)$ , podemos identificar cada uma das integrais duplas que aparecem como uma subamplitude. Por exemplo, usando (5.6), vemos que a segunda

---

<sup>2</sup>Se olharmos a igualdade em 5.10, vemos integrais em  $x_2$  com diferentes intervalos de integração. Por exemplo, na primeira dela,  $x_2$  está sendo integrado de  $-\infty$  a 0, portanto,  $-\infty < x_2 < 0 < x_3$ . Já na segunda,  $0 < x_2 < x_3$ . Na terceira integral,  $x_3 < x_2 < 1$ . E na última,  $x_3 < x_2 < +\infty$ . Levando isso em consideração, é possível avaliar corretamente o limite das funções arco-tangente que aparecem em 5.12

das integrais acima coincide com  $A(1, 2, 3, 4, 5)$ . Assim, chegamos à primeira relação de monodromia:

$$e^{2\alpha' i\pi k_2 \cdot (k_1+k_3+k_4)} A(2, 1, 3, 4, 5) + e^{2\alpha' i\pi k_2 \cdot (k_3+k_4)} A(1, 2, 3, 4, 5) + \\ + e^{2\alpha' i\pi k_2 \cdot k_4} A(1, 3, 2, 4, 5) + A(1, 3, 4, 2, 5) = 0 \quad (5.18)$$

Há várias outras relações de monodromia que podem ser obtidas analogamente. Notemos que as subamplitudes que apareceram na relação anterior estão ligadas diretamente com a variável e os limites de integração presentes em (5.17). Estes, por sua vez, estão ligados à escolha feita anteriormente quando ficou estabelecido que  $x_1 = 0 < x_3 < x_4 = 1 < x_5 = +\infty$  e  $x_2$  seria a variável. E como tal escolha é arbitrária, podemos chegar a relações análogas a (5.18) fazendo escolhas diferentes. Por exemplo, se tivermos  $x_1 = 0 < x_4 < x_3 = 1 < x_5 = +\infty$ , chegaremos a:

$$e^{2\alpha' i\pi k_2 \cdot (k_1+k_3+k_4)} A(2, 1, 4, 3, 5) + e^{2\alpha' i\pi k_2 \cdot (k_3+k_4)} A(1, 2, 4, 3, 5) + \\ + e^{2\alpha' i\pi k_2 \cdot k_3} A(1, 4, 2, 3, 5) + A(1, 4, 3, 2, 5) = 0 \quad (5.19)$$

que é uma nova relação de monodromia que envolve subamplitudes diferentes daquelas que aparecem em (5.18).

Ou ainda, um outro exemplo seria fazer  $x_2 = 0 < x_3 < x_4 = 1 < x_5 = +\infty$  e  $x_1$  sendo a variável. Nesse caso, obtemos a seguinte relação:

$$e^{2\alpha' i\pi k_1 \cdot (k_2+k_3+k_4)} A(1, 2, 3, 4, 5) + e^{2\alpha' i\pi k_1 \cdot (k_3+k_4)} A(2, 1, 3, 4, 5) + \\ + e^{2\alpha' i\pi k_1 \cdot k_4} A(2, 3, 1, 4, 5) + A(2, 3, 4, 1, 5) = 0 \quad (5.20)$$

## 5.2 Generalização das relações de monodromia

Vimos que dependendo da escolha que fazemos ao fixar 3 das variáveis de integração e qual é o ordenamento entre elas, chegamos a relações de monodromia diferentes. No primeiro dos exemplos, dado em (5.18), foi escolhido  $x_2$  como a variável de integração e a ordem adotada foi  $x_1 < x_3 < x_4 < x_5$ . Se analisarmos atentamente este caso, é possível entender em geral como escrever as relações de monodromia, ou seja, quais serão as subamplitudes que vão participar e qual fator de fase vai acompanhar cada uma delas.

As subamplitudes que vão aparecer são aquelas que seus índices respeitam a ordem adotada, neste caso,  $x_1 < x_3 < x_4 < x_5$ . Ou seja, o 1 deve estar antes do 3 que

deve estar antes do 4 que deve estar antes do 5. Já o índice 2 que faz o papel do  $x_2$  deve ocupar todos os intervalos, já que ele é a variável de integração. Então, as amplitudes envolvidas serão:  $A(2, 1, 3, 4, 5)$ ,  $A(1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $A(1, 3, 2, 4, 5)$  e  $A(1, 3, 4, 2, 5)$ .

Nos resta ver quais serão os fatores de fase que estarão multiplicando cada uma. Precisamos notar que, quanto maior for o valor assumido pela variável de integração, menos contribuições vamos ter para os fatores de fase. Isso tem a ver com o cálculo do limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$  nas funções arco-tangente. Assim, para  $A(2, 1, 3, 4, 5)$ ,  $x_2$  está no intervalo onde assume seus menores valores, de  $-\infty$  a 0. Portanto, seu fator de fase conterà as contribuições de todos os momentos. Teremos:

$$e^{i2\alpha'\pi k_2(k_1+k_3+k_4)} A(2, 1, 3, 4, 5) \quad (5.21)$$

Para  $A(1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $x_2$  está no intervalo de 0 a  $x_3$ . E como o índice 2 já está posicionado depois do 1, não haverá mais a contribuição de  $k_1$  na exponencial desta vez. Assim:

$$e^{i2\alpha'\pi k_2(k_3+k_4)} A(1, 2, 3, 4, 5) \quad (5.22)$$

Mantendo esse procedimento, não é difícil se convencer de que a relação de monodromia obtida será aquela em (5.18).

Em suma, esse procedimento para construir as relações de monodromia depende apenas da ordem adotada entre os índices (o que define quais as subamplitudes que vão estar presentes na relação) e da posição do índice 2 nas subamplitudes (o que define qual será o fator de fase).

Esse raciocínio pode ser facilmente estendido para valores de  $N$  maiores que 5. Se fizermos isso, obtemos que, em geral, as relações de monodromia vêm dadas por

$$e^{2\alpha'i\pi k_2 \cdot (k_1+k_3+\dots+k_{N-1})} A(2, 1, 3, \dots, N) + e^{2\alpha'i\pi k_2 \cdot (k_3+\dots+k_{N-1})} A(1, 2, 3, \dots, N) + \dots \\ \dots + A(1, 3, \dots, N-1, 2, N) = 0 \quad (5.23)$$

Ou ainda,

$$A(2, 1, 3, \dots, N) + e^{-2\alpha'i\pi k_1 \cdot k_2} A(1, 2, 3, \dots, N) + e^{-2\alpha'i\pi k_2 \cdot (k_1+k_3)} A(1, 3, 2, \dots, N) + \dots \\ \dots + e^{-2\alpha'i\pi k_2 \cdot (k_1+k_3+\dots+k_{N-1})} A(1, 3, \dots, N-1, 2, N) = 0 \quad (5.24)$$

Será útil mais adiante separar a relação acima em parte real e parte imaginária:

$$\begin{aligned}
& A(2, 1, 3, \dots, N) + \cos(-2\alpha' i \pi k_1 \cdot k_2) A(1, 2, 3, \dots, N) + \\
& \quad + \cos(-2\alpha' i \pi k_2 \cdot (k_1 + k_3)) A(1, 3, 2, \dots, N) + \dots \\
& \dots + \cos(-2\alpha' i \pi k_2 \cdot (k_1 + k_3 + \dots + k_{N-1})) A(1, 3, \dots, N-1, 2, N) = 0 \quad (5.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{sen}(-2\alpha' i \pi k_1 \cdot k_2) A(1, 2, 3, \dots, N) + \text{sen}(-2\alpha' i \pi k_2 \cdot (k_1 + k_3)) A(1, 3, 2, \dots, N) + \dots \\
& \quad \dots + \text{sen}(-2\alpha' i \pi k_2 \cdot (k_1 + k_3 + \dots + k_{N-1})) A(1, 3, \dots, N-1, 2, N) = 0 \quad (5.26)
\end{aligned}$$

As relações de monodromia obtidas até aqui levaram em conta a amplitude entre táquions cuja expressão foi dada em (5.4), o que tornou os cálculos mais simples. Entretanto, mesmo no caso onde as partículas envolvidas não são táquions, as relações de monodromia às quais chegamos permanecem válidas. O procedimento para comprovar essa afirmação para o caso de glúons está apresentado no Apêndice H.

### 5.3 Paralelo entre as relações de monodromia e as de Kleiss-Kuijf

A esta altura é razoável se questionar se existe e como se dá o paralelo entre Kleiss-Kuijf e as relações de monodromia, já que ambos os métodos nos levam a relações lineares entre subamplitudes de  $N$ -pontos. Para responder isso, lembremos, em resumo, a construção de uma relação de monodromia. Vimos na seção (5.2) que, ao consideramos a integral (5.6) no plano complexo escolhendo o contorno apropriado, no final havia, essencialmente, quatro trechos que contribuíam para o cálculo da integral. São os seguintes intervalos:

$$\begin{aligned}
-\infty &< x_2 < 0 ; \\
0 &< x_2 < x_3 ; \\
x_3 &< x_2 < 1 ; \\
1 &< x_2 < +\infty. \quad (5.27)
\end{aligned}$$

A integração em cada um dos trechos acima nos levou a uma subamplitude participante da relação de monodromia (5.18). São elas:  $A(2, 1, 3, 4, 5)$ ,  $A(1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $A(1, 3, 2, 4, 5)$  e  $A(1, 3, 4, 2, 5)$ .

Vemos então que, como neste caso deve ser respeitado que  $x_1 = 0 < x_3 < x_4 = 1 < x_5 = +\infty$  e  $x_2$  é a variável de integração, para efeitos práticos, o método se resume em: mantendo a ordenação dos  $x_i$ 's, devemos posicionar  $x_2$  nos intervalos descritos em (5.27). Ou seja, no primeiro trecho (ou primeira integral),  $x_2$  deve estar antes de  $x_1 = 0$ ; no segundo trecho,  $x_2$  deve estar entre  $x_1 = 0$  e  $x_3$ ; no terceiro,  $x_2$  deve estar entre  $x_3$  e  $x_4 = 1$  e, por fim, no quarto trecho,  $x_2$  deve estar entre  $x_4 = 1$  e  $x_5 = +\infty$ . Notemos, finalmente, que esse procedimento é idêntico ao que deve ser feito quando consideramos os índices na relação Kleiss-Kuijf para  $A(1, \{3, 4\}, 5, \{2\})$ . Vejamos, usando a fórmula (3.1) temos que uma das relações Kleiss-Kuijf vem dada por

$$A_5(1, \{3, 4\}, 5, \{2\}) = -A_5(1, 2, 3, 4, 5) - A_5(1, 3, 2, 4, 5) - A_5(1, 3, 4, 2, 5) \quad (5.28)$$

que é uma relação que envolve as mesmas subamplitudes que a relação de monodromia em (5.18) (lembrando da propriedade cíclica que garante que  $A(2, 1, 3, 4, 5) = A(1, 3, 4, 5, 2)$ ).

Portanto, os dois procedimentos nos levam a uma expressão entre as mesmas subamplitudes, com a diferença que na relação de monodromia participam alguns fatores de fase dependentes de  $\alpha'$ . Além disso, se tomarmos o limite de baixas energias, ou seja,  $\alpha' \rightarrow 0$ , a igualdade (5.18) se torna a própria relação de Kleiss-Kuijf em (5.28).

Mas, podemos nos perguntar acerca das demais relações. Afinal, até agora identificamos a ligação entre os procedimentos apenas para uma das relações Kleiss-Kuijf. Mas notemos que é possível, permutando os índices 2, 3 e 4 em (5.18), chegar a outras relações

de monodromia:

$$A(3, 1, 2, 4, 5) + e^{-i2\alpha'\pi k_1 \cdot k_3} A(1, 3, 2, 4, 5) + e^{-i2\alpha'\pi k_3 \cdot (k_1+k_2)} A(1, 2, 3, 4, 5) + \\ + e^{-i2\alpha'\pi k_3 \cdot (k_1+k_2+k_4)} A(1, 2, 4, 3, 5) = 0$$

$$A(4, 1, 3, 2, 5) + e^{-i2\alpha'\pi k_1 \cdot k_4} A(1, 4, 3, 2, 5) + e^{-i2\alpha'\pi k_4 \cdot (k_1+k_3)} A(1, 3, 4, 2, 5) + \\ + e^{-i2\alpha'\pi k_4 \cdot (k_1+k_2+k_3)} A(1, 3, 2, 4, 5) = 0$$

$$A(2, 1, 4, 3, 5) + e^{-i2\alpha'\pi k_2 \cdot k_1} A(1, 2, 4, 3, 5) + e^{-i2\alpha'\pi k_2 \cdot (k_1+k_4)} A(1, 4, 2, 3, 5) + \\ + e^{-i2\alpha'\pi k_2 \cdot (k_1+k_3+k_4)} A(1, 4, 3, 2, 5) = 0$$

$$A(3, 1, 4, 2, 5) + e^{-i2\alpha'\pi k_1 \cdot k_3} A(1, 3, 4, 2, 5) + e^{-i2\alpha'\pi k_3 \cdot (k_1+k_4)} A(1, 4, 3, 2, 5) + \\ + e^{-i2\alpha'\pi k_3 \cdot (k_1+k_2+k_4)} A(1, 4, 2, 3, 5) = 0$$

$$A(4, 1, 2, 3, 5) + e^{-i2\alpha'\pi k_1 \cdot k_4} A(1, 4, 2, 3, 5) + e^{-i2\alpha'\pi k_4 \cdot (k_1+k_2)} A(1, 2, 4, 3, 5) + \\ + e^{-i2\alpha'\pi k_4 \cdot (k_1+k_2+k_3)} A(1, 2, 3, 4, 5) = 0$$

(5.29)

As relações dadas em (5.18) e (5.29) são exatamente as de Kleiss-Kuijff obtidas em (3.2) e (3.3) se fizermos  $\alpha' \rightarrow 0$ .

Com isso, temos visto o paralelo que existe entre os métodos pelo menos quando buscamos as relações para as subamplitudes da forma  $A(1, a, b, 5, c)$ , com  $a, b, c = 2, 3, 4$ .

Resta analisar o caso das subamplitudes da forma  $A(1, a, 5, b, c)$  e  $A(1, 5, a, b, c)$ . Voltando novamente ao procedimento realizado para chegar à relação de monodromia em (5.18), lembremos que fixamos os valores de  $x_1 = 0$ ,  $x_4 = 1$  e  $x_5 = +\infty$  e consideramos sempre  $x_1 < x_3 < x_4 < x_5$ . Foi por essa razão que as subamplitudes que apareceram foram só da forma que mantinha os índices na ordem 1, 3, 4, 5. Apenas o índice 2, por ser a variável de integração, tinha a liberdade de se posicionar em qualquer lugar que fosse antes do 5 (referente ao  $x_5 = +\infty$ ).

Portanto, se quisermos uma relação de monodromia que contenha o índice 5 em terceiro lugar, por exemplo, a subamplitude  $A(1, 2, 5, 3, 4)$ , podemos repetir todo o procedimento, porém agora fazendo a seguinte escolha:

- 1ª Possibilidade

$x_2$  é a variável de integração e  $x_1 = 0 < x_5 < x_3 = 1 < x_4 = +\infty$ .

Dessa forma, obteríamos uma relação de monodromia que envolve:  $A(2, 1, 5, 3, 4)$ ,  $A(1, 2, 5, 3, 4)$ ,  $A(1, 5, 2, 3, 4)$  e  $A(1, 5, 3, 2, 4)$ .

E, de fato, essa relação é análoga à obtida usando a fórmula de Kleiss-Kuijff para

$$A(1, \{5, 3\}, 4, \{2\}) = -A(1, 2, 5, 3, 4) - A(1, 5, 2, 3, 4) - A(1, 5, 3, 2, 4)$$

- 2ª Possibilidade

$x_5$  é a variável de integração e  $x_1 = 0 < x_2 < x_3 = 1 < x_4 = +\infty$ .

Dessa forma, obteríamos uma relação de monodromia que envolve:  $A(5, 1, 2, 3, 4)$ ,  $A(1, 5, 2, 3, 4)$ ,  $A(1, 2, 5, 3, 4)$  e  $A(1, 2, 3, 5, 4)$ .

E, novamente, vemos que as mesmas subamplitudes aparecem na relação

$$A(1, \{2, 3\}, 4, \{5\}) = -A(1, 5, 2, 3, 4) - A(1, 2, 5, 3, 4) - A(1, 2, 3, 5, 4)$$

- Há mais duas possibilidades de obter relações com  $A(1, 2, 5, 3, 4)$ . São elas: tomando  $x_3$  ou  $x_4$  como variável de integração e fixando as restantes de modo que seja respeitada a ordem  $x_1 < x_2 < x_5$ .

E, finalmente, para obter relações que contenham o índice 5 em segundo lugar, por exemplo, a subamplitude  $A(1, 5, 2, 3, 4)$ , podemos repetir o argumento anterior. Vejamos apenas um caso:

- $x_5$  é a variável de integração e  $x_1 = 0 < x_2 < x_3 = 1 < x_4 = +\infty$ .

Então a relação de monodromia envolverá:  $A(5, 1, 2, 3, 4)$ ,  $A(1, 5, 2, 3, 4)$ ,  $A(1, 2, 5, 3, 4)$  e  $A(1, 2, 3, 5, 4)$ .

A relação de Kleiss-Kuijff equivalente será:

$$A(1, \{2, 3\}, 4, \{5\}) = -A(1, 5, 2, 3, 4) - A(1, 2, 5, 3, 4) - A(1, 2, 3, 5, 4)$$

E, novamente, ambas relacionam as mesmas subamplitudes.

Com isso, temos estabelecido um paralelo entre as relações de monodromia e algumas das relações Kleiss-Kuijff (aquelas em que  $n_\beta = 1$ ) pelo menos para  $N = 5$ . Para essas, vimos que as relações de monodromia recaem nas de Kleiss-Kuijff ao se fazer  $\alpha' \rightarrow 0$ .

Para  $N > 5$  o raciocínio será o mesmo. A diferença consistirá em que o intervalo entre 0 e 1 terá cada vez mais subdivisões e, com isso, mais subamplitudes participarão da relação de monodromia. Vejamos um exemplo com  $N = 6$ . Vamos encontrar um relação que contenha  $A(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ .

- $x_2$  é a variável de integração e  $x_1 = 0 < x_3 < x_4 = 1 < x_5 = 1 < x_6 = +\infty$ .

Neste caso, a relação de monodromia envolverá:  $A(2, 1, 3, 4, 5, 6)$ ,  $A(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ,  $A(1, 3, 2, 4, 5, 6)$ ,  $A(1, 3, 4, 2, 5, 6)$  e  $A(1, 3, 4, 5, 2, 6)$ .

Usemos agora a fórmula de Kleiss-Kuijff para obter uma relação com  $A(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ :

$$\begin{aligned} A(1, \{3, 4, 5\}, 6, \{2\}) &= -A(1, 2, 3, 4, 5, 6) - A(1, 3, 2, 4, 5, 6) + \\ &\quad -A(1, 3, 4, 2, 5, 6) - A(1, 3, 4, 5, 2, 6) \end{aligned} \quad (5.30)$$

E, mais uma vez, as subamplitudes participantes em ambas as relações são as mesmas.

## 5.4 Base mínima de $(N - 3)!$ subamplitudes

Já vimos que, com as relações Kleiss-Kuijff, é possível escrever as subamplitudes em termos de uma base de  $(N-2)!$ . Mas notemos que podemos também fazer tal afirmação usando as relações de monodromia [23], tendo em vista o paralelo que existe entre elas. Afinal, toda a argumentação feita no capítulo 3 para justificar a base de  $(N-2)!$  a partir das relações Kleiss-Kuijff pode ser repetida para chegar à mesma conclusão, mas usando apenas a parte real das relações de monodromia dada em (5.25), uma vez que os dois tipos de relações envolvem as mesmas subamplitudes.

Escolhamos, então, as  $(N-2)!$  subamplitudes da base como sendo da forma  $A(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-2}, N)$ .

A ideia agora é ver se, com a parte imaginária das relações de monodromia, é possível escrever as subamplitudes da base que possuem a forma  $A(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-2}, N)$  em termos de um conjunto menor.

Então, analisemos a parte imaginária das relações de monodromia apresentada

em (5.26), onde foi utilizado  $x_2$  como a variável de integração:

$$\begin{aligned} & \text{sen}(2\alpha'\pi k_2 k_1)A(1, 2, 3, \dots, N-1, N) + \text{sen}(2\alpha'\pi k_2(k_1 + k_3))A(1, 3, 2, \dots, N-1, N) + \\ & \dots + \text{sen}(2\alpha'\pi k_2(k_1 + k_3 + \dots + k_{N-1}))A(1, 3, \dots, N-1, 2, N) = 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

A expressão acima contém  $N-2$  termos. Todas as subamplitudes que nela aparecem estão no formato  $A(1, \mathcal{P}(2, 3, \dots, N-1), N)$ . Além disso, notemos que há mais um índice que está fixo em quase todas elas. Apenas a última subamplitude não possui o penúltimo índice igual a  $N-1$ . Se a isolarmos em termos das outras, conseguimos escrevê-la em termos das outras  $N-3$  subamplitudes que possuem a forma geral mais restrita  $A(1, \mathcal{P}(2, 3, \dots, N-2), N-1, N)$ . Representemos isso da seguinte forma:

$$A(1, 3, \dots, N-1, 2, N) \implies \left\{ A(1, 2, 3, \dots, N-1, N), A(1, 3, 2, \dots, N-1, N), \dots \right. \\ \left. \dots, A(1, 3, 4, \dots, 2, N-1, N) \right\} \quad (5.32)$$

Da mesma forma, utilizando a relação de monodromia conveniente, podemos escrever qualquer das  $(N-2)!$  subamplitudes da base em termos de outras  $N-3$ . Por exemplo, seja a parte imaginária de uma outra relação de monodromia (trocando de lugar os índices 2 e 3 em (5.31)):

$$\begin{aligned} & \text{sen}(2\alpha'\pi k_3 k_1)A(1, 3, 2, 4, \dots, N-1, N) + \\ & + \text{sen}(2\alpha'\pi k_3(k_1 + k_2))A(1, 2, 3, 4, \dots, N-1, N) + \dots \\ & \dots + \text{sen}(2\alpha'\pi k_3(k_1 + k_2 + k_4 + \dots + k_{N-1}))A(1, 2, 4, \dots, N-1, 3, N) = 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Isolando a última das subamplitudes, podemos escrever  $A(1, 2, 4, \dots, N-1, 3, N)$  em termos de outras  $N-3$ , mas que são diferentes daquelas que apareceram em (5.32), mas que possuem o mesmo formato  $A(1, \mathcal{P}(2, 3, \dots, N-2), N-1, N)$ .

Se repetirmos esse procedimento mais vezes, vamos realmente poder escrever subamplitudes como essas em termos de  $(N-3)!$  outras da forma  $A(1, \mathcal{P}(2, 3, \dots, N-2), N-1, N)$ . Isso porque o número de permutações possíveis dos índices  $2, 3, \dots, N-2$  é  $(N-3)!$ . Mas isso só está garantido, até agora, para aquelas subamplitudes que, além de terem o primeiro e o último índices iguais a 1 e  $N$ , respectivamente, também tenham o antepenúltimo índice igual a  $N-1$ . Afinal, a parte imaginária da relação de monodromia traz esse índice para penúltimo lugar, tomando o formato desejado, como está

representado em (5.32). Na Figura 5.3 está esquematizado o que obtemos ao aplicarmos uma vez a parte imaginária da relação de monodromia a uma subamplitude do tipo  $A(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-4}, \alpha_{N-3}, N)$ , (onde os  $\alpha_i$ 's podem assumir os valores  $2, 3, \dots, N-1$ ).

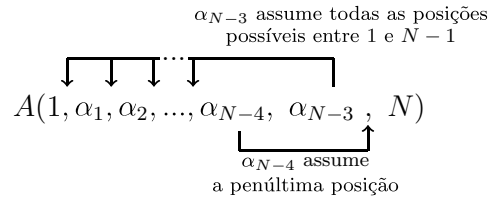


Figura 5.3: Aplicação da parte imaginária da relação de monodromia

Vimos que se quem está na antepenúltima posição é o índice  $N-1$ , a subamplitude poderá ser escrita em termos de uma base de  $(N-3)!$  elementos que possuem a forma geral  $A(1, \mathcal{P}(2, 3, \dots, N-2), N-1, N)$ . Mas e para os outros casos em que  $N-1$  não está no antepenúltima posição? Por exemplo, o que acontece para  $A(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, N-1, \alpha_{N-4}, \alpha_{N-3}, N)$ ? Vejamos, usando a parte imaginária das relações de monodromia, obtemos que:

$$A(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, N-1, \alpha_{N-4}, \alpha_{N-3}, N) \implies \left\{ A(1, \alpha_{N-3}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, N-1, \alpha_{N-4}, N), \right. \\ \left. A(1, \alpha_1, \alpha_{N-3}, \alpha_2, \dots, N-1, \alpha_{N-4}, N), \dots, A(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, N-1, \alpha_{N-3}, \alpha_{N-4}, N) \right\} \quad (5.34)$$

Gostaríamos que o índice  $N-1$  ocupasse o penúltimo lugar nas amplitudes, o que ainda não ocorreu. No entanto, já vimos que quando o  $N-1$  está no antepenúltimo lugar, é possível trazê-lo ao penúltimo aplicando uma vez a parte imaginária da relação de monodromia (Figura 5.3). Apenas a última subamplitude dentre as que aparecem em (5.34) não se encaixa nisso, pois o  $N-1$  não está no penúltimo, nem no antepenúltimo lugar.

Para esta subamplitude,  $A(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, N-1, \alpha_{N-3}, \alpha_{N-4}, N)$ , usemos, então, novamente a parte imaginária da relação de monodromia. Fazendo isso e aplicando o esquema da Figura 5.3:

$$A(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, N-1, \alpha_{N-3}, \alpha_{N-4}, N) \implies \left\{ A(1, \alpha_{N-4}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, N-1, \alpha_{N-3}, N), \right. \\ \left. A(1, \alpha_1, \alpha_{N-4}, \alpha_2, \dots, N-1, \alpha_{N-3}, N), \dots, A(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, N-1, \alpha_{N-4}, \alpha_{N-3}, N) \right\} \quad (5.35)$$

Exceto a última subamplitude que aparece na expressão anterior, as demais possuem o  $N - 1$  na antepenúltima posição, o que já sabemos escrever em termos da base formada por  $A(1, \mathcal{P}(2, 3, \dots, N - 2), N - 1, N)$ , usando o esquema dado na Figura 5.3. Já para a última subamplitude em (5.35),  $A(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, N - 1, \alpha_{N-4}, \alpha_{N-3}, N)$ , em princípio não sabemos fazer o mesmo. Porém, se voltarmos para (5.34), onde foram representadas as subamplitudes envolvidas em uma relação de monodromia, vemos que  $A(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, N - 1, \alpha_{N-4}, \alpha_{N-3}, N)$  é exatamente a que aparece do lado esquerdo. Portanto, ao substituírmos a relação de monodromia (5.35) em (5.34), vai ser possível escrever também as subamplitudes desse tipo em termos das  $(N - 3)!$  que possuem a forma  $A(1, \mathcal{P}(2, 3, \dots, N - 2), N - 1, N)$ .

Assim, concluímos que aplicando o número de vezes necessário a parte imaginária da relação de monodromia, sempre é possível escrever qualquer subamplitude em termos dessa base de  $(N - 3)!$  elementos.

Aqui, fizemos toda a argumentação tendo em vista a base formada pelas subamplitudes do tipo  $A(1, \mathcal{P}(2, 3, \dots, N - 2), N - 1, N)$ . Mas, poderíamos repetir todo o procedimento, escolhendo outro índice no lugar do  $N - 1$ . O que importa é que todas os elementos da base vão conter três índices fixos, restando apenas  $N - 3$  para serem permutados.

Resumindo, com a parte real das relações de monodromia conseguimos escrever qualquer subamplitude em termos de uma base com outras  $(N - 2)!$ . Ou, dito de outra forma, se tomarmos o limite quando  $\alpha' \rightarrow 0$  nas relações de monodromia, obtemos as de Kleiss-Kuijff e, com elas, todos os resultados já discutidos no capítulo 3. Já com a parte imaginária essa base é reduzida ainda mais para  $(N - 3)!$  [23], como acontece quando usamos as relações BCJ, assunto discutido na seção 4.6. A diferença é que com as relações de monodromia não foi preciso utilizar nenhuma conjectura. A base mínima aparece de forma natural.

Uma outra vantagem é que, como já foi mencionado antes, o procedimento para obter as relações BCJ, apesar de eficiente, se torna demasiadamente longo. No caso  $N = 6$ , as expressões que precisam ser manipuladas já não são simples e até mesmo com o computador existe dificuldade em obter as relações.

Mas, já que a parte imaginária das relações de monodromia nos permite chegar ao mesmo número de subamplitudes independentes, é de se esperar que seja possível obter

as relações BCJ a partir delas.

Para isso, basta escrever, com a ajuda de algum software (no caso, usamos o Maple), todas as possíveis relações de monodromia. Mais especificamente, só a parte imaginária delas. E ainda, utilizamos apenas o termo de ordem mais baixa em  $\alpha'$ , ou seja, expandimos os senos que aparecem e ficamos apenas com o primeiro termo de cada um deles. Construimos, então, um sistema com elas. Mas é preciso já utilizar neste sistema uma base de  $(N - 2)!$ , ou seja, o que já é conhecido da parte real das relações.

Ao resolvermos esse sistema de equações para  $N = 6$ , foi possível, de fato, encontrar uma solução que dependesse apenas de 6 subamplitudes. Resultado esse também alcançado anteriormente pelas relações BCJ. Ao realizarmos esses cálculos, nos foi possível chegar à conclusão de que, esse procedimento, apesar de também ser longo, contém menos etapas a serem executadas que no caso das relações BCJ e é mais fácil de ser implementado no computador.

# Capítulo 6

## Algumas aplicações das relações BCJ

### 6.1 Amplitudes da gravitação

Partindo da ação de Einstein-Hilbert [25],

$$\mathcal{S}_{EH} = \int d^4x \mathcal{L} = -\frac{1}{2\lambda^2} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (6.1)$$

onde  $\lambda = \sqrt{8\pi G}$ , podemos encontrar a versão perturbativa (com relação à métrica de Minkowski) da ação gravitacional. Para isso, devemos expandir  $g_{\mu\nu}$ :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu} , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (6.2)$$

e utilizar o *gauge* de Lorentz [26],

$$\partial^\nu h_{\mu\nu} = 0 , \quad (6.3)$$

e também o *gauge* residual

$$h = 0 \quad (6.4)$$

Dessa forma, após várias manipulações, as quais não detalhamos aqui, é possível chegar aos primeiros termos da expansão da ação [25, 27]:

$$\mathcal{S}_{EH} = \int d^4x \left[ \frac{1}{4} \partial^\mu h^{\lambda\alpha} \partial_\mu h_{\alpha\lambda} - \lambda \left( h^{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma \partial_\delta h_{\alpha\beta} + h_\gamma^\beta h^{\gamma\alpha} \partial_\delta \partial^\delta h_{\alpha\beta} \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] \quad (6.5)$$

A partir da variação da ação com relação ao campo  $h_{\mu\nu}$ , é possível encontrar os vértices da teoria. Em especial, calculamos a expressão do vértice cúbico (dado na

equação (B.4) do Apêndice B) e, em seguida, usando as regras de Feynman, encontramos que a amplitude de espalhamento de três grávitons vem dada por [28]:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3 = -\lambda & \left[ (k_2^\mu \zeta_{1\mu\nu} k_2^\nu) (\zeta_{2\mu\nu} \zeta_3^{\mu\nu}) + (k_3^\mu \zeta_{2\mu\nu} k_3^\nu) (\zeta_{3\mu\nu} \zeta_1^{\mu\nu}) + (k_1^\mu \zeta_{3\mu\nu} k_1^\nu) (\zeta_{1\mu\nu} \zeta_2^{\mu\nu}) + \right. \\ & \left. + 2(k_2^\mu \zeta_{1\mu\nu} \zeta_3^{\nu\rho} \zeta_{2\rho\sigma} k_3^\sigma) + 2(k_2^\mu \zeta_{1\mu\nu} \zeta_2^{\nu\rho} \zeta_{3\rho\sigma} k_1^\sigma) + 2(k_3^\mu \zeta_{2\mu\nu} \zeta_1^{\nu\rho} \zeta_{3\rho\sigma} k_1^\sigma) \right] \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde o tensor de polarização é simétrico  $\zeta_i^{\mu\nu} = \zeta_i^{\nu\mu}$  e de traço nulo, e foi utilizada a condição de transversalidade vinda do *gauge* de Lorentz  $(k_{i\mu} \cdot \zeta_i^{\mu\nu}) = 0$ , ambos para  $i = 1, 2, 3$ .

Reescrevamos, agora, a amplitude acima de uma outra forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3 = -\lambda & \zeta_1^{\mu_1\nu_1} \zeta_2^{\mu_2\nu_2} \zeta_3^{\mu_3\nu_3} \left[ k_{2\mu_1} k_{2\nu_1} \eta_{\mu_2\mu_3} \eta_{\nu_2\nu_3} + k_{3\mu_2} k_{3\nu_2} \eta_{\mu_1\mu_3} \eta_{\nu_1\nu_3} + k_{1\mu_3} k_{1\nu_3} \eta_{\mu_1\mu_2} \eta_{\nu_1\nu_2} \right. \\ & \left. + 2k_{2\mu_1} \eta_{\mu_3\nu_1} \eta_{\mu_2\nu_3} k_{3\nu_2} + 2k_{2\mu_1} \eta_{\mu_2\nu_1} \eta_{\mu_3\nu_2} k_{1\nu_3} + 2k_{3\mu_2} \eta_{\mu_1\nu_2} \eta_{\mu_3\nu_1} k_{1\nu_3} \right], \end{aligned} \quad (6.7)$$

ou ainda, fatorando,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3 = -\lambda & \zeta_1^{\mu_1\nu_1} \zeta_2^{\mu_2\nu_2} \zeta_3^{\mu_3\nu_3} \left[ (k_{2\mu_1} \eta_{\mu_2\mu_3} + k_{3\mu_2} \eta_{\mu_1\mu_3} + k_{1\mu_3} \eta_{\mu_1\mu_2}) \right] \left[ (k_{2\nu_1} \eta_{\nu_2\nu_3} + k_{3\nu_2} \eta_{\nu_1\nu_3} + \right. \\ & \left. + k_{1\nu_3} \eta_{\nu_1\nu_2}) \right] \end{aligned} \quad (6.8)$$

Se examinarmos as duas expressões que estão entre parênteses na amplitude anterior, podemos notar que elas são exatamente iguais ao vértice de três pernas na teoria de Yang-Mills dado em (B.2). E ainda, se enxergarmos cada tensor de polarização como um produto direto de 2 vetores de polarização,  $\zeta_i^{\mu_i\nu_i} = \zeta_i^{\mu_i} \bar{\zeta}_i^{\nu_i}$ , então temos um forte indício de que exista uma relação entre as amplitudes da gravitação e as de Yang-Mills. Mais especificamente, podemos afirmar que a amplitude de 3 grávitons se comporta como o produto de duas amplitudes de 3 glúons.

Essa relação e a sua generalização para amplitudes de  $N$ -pontos foram encontradas e demonstradas em 1986 utilizando como ferramenta a teoria de cordas. Em seu trabalho [13], Kawai, Lewellen e Tye apresentam este resultado por meio de uma fórmula que expressa qualquer amplitude em nível de árvore de uma corda fechada em termos de uma soma de produtos de amplitudes de cordas abertas, ambas sem massa, relacionando, assim, as amplitudes de grávitons e de glúons.

Essas relações entre os dois tipos de amplitudes são conhecidas como relações KLT. Algumas delas estão colocadas no Apêndice C, onde também apresentamos a forma

geral de se escrever as relações KLT que é a seguinte:<sup>1</sup>

$$\mathcal{M}_N^{\text{fechada}} = \left( \frac{i}{2\pi\alpha'} \right)^{N-3} \lambda^{N-2} \sum_{P,P'} A_N^{\text{aberta}}(P) \tilde{A}_N^{\text{aberta}}(P') e^{i\pi F(P,P')} \quad (6.9)$$

onde  $A_N^{\text{aberta}}(P)$  (ou  $\tilde{A}_N^{\text{aberta}}(P')$ )<sup>2</sup> é uma amplitude de  $N$ -pontos de uma corda aberta para um particular ordenamento  $P$  (ou  $P'$ ) das  $N$  pernas externas e  $\mathcal{M}_N^{\text{fechada}}$  é uma amplitude de  $N$ -pontos de uma corda fechada, todas em nível de árvore.  $F(P, P')$  é um fator de fase conhecido que depende dos momentos das partículas. Ao tomarmos o limite  $\alpha' \rightarrow 0$  nas relações KLT, obtemos relações que envolvem amplitudes da relatividade geral e de Yang-Mills, uma vez que nesse limite as amplitudes da corda fechada são equivalentes às amplitudes da gravitação [3, 13, 28] e as da corda aberta são equivalentes às de Yang-Mills [21, 22]. Com isso, o resultado de KLT é estendido à teoria de campos. Entretanto, não havia, até pouco tempo atrás, um meio de se obter este mesmo resultado partindo unicamente da teoria de campos.

Em 2008, o trabalho BCJ [3] retoma este assunto de um ponto de vista puramente da teoria de campos e usa a dualidade cor-cinemática para se chegar a relações entre as amplitudes da gravitação e as de Yang-Mills, assim como as relações KLT. A ideia é que as amplitudes de 4-pontos em nível de árvore da gravitação possam ser expressas em termos de diagramas cujos numeradores cinemáticos são produtos de numeradores de teorias de *gauge*. Então, consideremos a amplitude de 4-pontos de Yang-Mills dada em (4.47):

$$\mathcal{A}_4 = \frac{c_s n_s}{s} + \frac{c_t n_t}{t} + \frac{c_u n_u}{u} \quad (6.10)$$

Assim, para a amplitude gravitacional teremos<sup>3</sup>

$$-i\mathcal{M}_4(1, 2, 3, 4) = \frac{n_s \tilde{n}_s}{s} + \frac{n_t \tilde{n}_t}{t} + \frac{n_u \tilde{n}_u}{u} \quad (6.11)$$

Por outro lado, se tomarmos o limite  $\alpha' \rightarrow 0$  na relação KLT dada no Apêndice C, mais especificamente na equação (C.4), obtemos a versão para teoria de campos que vem dada por (a menos de um fator global):

$$\mathcal{M}_4(1, 2, 3, 4) = -is_{12} A_4(1, 2, 3, 4) \tilde{A}_4(1, 2, 4, 3) \quad (6.12)$$

---

<sup>1</sup>Ao se aplicar a fórmula KLT, assume-se que o produto de dois vetores de polarização da teoria de Yang-Mills se comporta como um tensor de polarização da gravitação.

<sup>2</sup>É importante notar que  $A_N(P)$  e  $\tilde{A}_N(P')$  não incluem a constante de acoplamento da teoria de Yang-Mills.

<sup>3</sup>Vamos omitir a constante de acoplamento da gravitação  $\lambda$ .

Substituíamos, agora, as expressões para  $A(1, 2, 3, 4)$  e  $A(1, 2, 4, 3)$  dadas em (4.23) e (4.25) na igualdade (6.12):

$$\mathcal{M}_4(1, 2, 3, 4) = -is_{12} \left( \frac{n_s}{s} + \frac{n_t}{t} \right) \left( -\frac{\tilde{n}_u}{u} - \frac{\tilde{n}_s}{s} \right) \quad (6.13)$$

Notemos que  $s_{12} = s = (k_1 + k_2)^2$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4(1, 2, 3, 4) &= i \left( \frac{n_s \tilde{n}_u}{u} + \frac{n_s \tilde{n}_s}{s} + \frac{s n_t \tilde{n}_u}{tu} + \frac{n_t \tilde{n}_s}{t} \right) \\ &= i \left( \frac{n_s \tilde{n}_s}{s} + \frac{t n_s \tilde{n}_u + s n_t \tilde{n}_u + u n_t \tilde{n}_s}{tu} \right) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Usemos que, pela conservação do momento,  $s = -t - u$ :

$$\mathcal{M}_4(1, 2, 3, 4) = i \left( \frac{n_s \tilde{n}_u}{u} + \frac{t \tilde{n}_u (n_s - n_t)}{tu} + \frac{u n_t (\tilde{n}_s - \tilde{n}_u)}{tu} \right) \quad (6.15)$$

E, por fim, vamos utilizar que os numeradores satisfazem as identidades cinemáticas

$$\begin{aligned} n_u &= n_s - n_t \\ \tilde{n}_u &= \tilde{n}_s - \tilde{n}_t \end{aligned} \quad (6.16)$$

Assim, chegamos finalmente a que:

$$\implies -i\mathcal{M}_4(1, 2, 3, 4) = \frac{n_s \tilde{n}_s}{s} + \frac{n_t \tilde{n}_t}{t} + \frac{n_u \tilde{n}_u}{u} \quad (6.17)$$

Vemos então que a expressão construída em (6.11) é consistente com o resultado vindo da relação KLT. Isso significa que, pelo menos para 4-pontos, a amplitude de grávitons pode ser, assim como a amplitude de glúons, escrita em termos de seus pólos, só que com os fatores cinemáticos dados por produtos de dois numeradores  $n_i$ 's.

Deste modo, esperamos que seja possível generalizar este resultado para  $N > 4$ . Por exemplo, no caso em que  $N = 5$ , a amplitude da gravitação seria equivalente a uma soma sobre as contribuições de todos os 15 diagramas possíveis, construídos somente com vértices cúbicos (similares aos 15 diagramas vistos na Figura 4.3), mas com fatores cinemáticos dados por um produto de dois numeradores da teoria de *gauge*. Isto é,

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_5(1, 2, 3, 4, 5) &= \frac{n_1 \tilde{n}_1}{s_{12} s_{45}} + \frac{n_2 \tilde{n}_2}{s_{15} s_{23}} + \frac{n_3 \tilde{n}_3}{s_{12} s_{34}} + \frac{n_4 \tilde{n}_4}{s_{23} s_{45}} + \frac{n_5 \tilde{n}_5}{s_{15} s_{34}} + \frac{n_6 \tilde{n}_6}{s_{14} s_{25}} + \frac{n_7 \tilde{n}_7}{s_{14} s_{23}} \\ &+ \frac{n_8 \tilde{n}_8}{s_{25} s_{34}} + \frac{n_9 \tilde{n}_9}{s_{13} s_{25}} + \frac{n_{10} \tilde{n}_{10}}{s_{13} s_{24}} + \frac{n_{11} \tilde{n}_{11}}{s_{15} s_{24}} + \frac{n_{12} \tilde{n}_{12}}{s_{12} s_{35}} + \frac{n_{13} \tilde{n}_{13}}{s_{24} s_{35}} + \frac{n_{14} \tilde{n}_{14}}{s_{14} s_{35}} + \frac{n_{15} \tilde{n}_{15}}{s_{13} s_{45}} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Novamente podemos comprovar a consistência desta expressão com a versão da relação KLT para teoria de campos, que neste caso vem de tomar o limite  $\alpha' \rightarrow 0$  na equação (C.5) chegando à seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_5(1, 2, 3, 4, 5) = & +is_{12}s_{34}A_5(1, 2, 3, 4, 5)\tilde{A}_5(1, 4, 3, 5, 2) + \\ & +is_{13}s_{24}A_5(1, 3, 2, 4, 5)\tilde{A}_5(1, 4, 2, 5, 3) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Precisamos agora substituir as expressões das subamplitudes. Para isso vamos usar as expressões de (4.65) a (4.70) e também as relações Kleiss-Kuijff em (4.110). Não vão ser apresentados aqui esses cálculos por se tratarem de manipulações longas, apesar de simples. O importante é que depois de feito isso e utilizando as identidades cinemáticas entre os numeradores chegamos à mesma expressão dada em (6.18).

Em resumo, a proposta de que as amplitudes da gravitação possam ser escritas na forma exemplificada em (6.11) e (6.18) é completamente consistente com as relações (6.12) e (6.19) vindas das relações KLT.

Podemos, então, assumindo a forma em (6.18) e utilizando as identidades cinemáticas, chegar à relação KLT dada em (6.19). Para tal, precisamos escolher  $A(1, 2, 3, 4, 5)$  e  $A(1, 3, 2, 4, 5)$  como sendo as amplitudes da base sem o “til” e  $\tilde{A}(1, 4, 3, 5, 2)$  e  $\tilde{A}(1, 4, 2, 5, 3)$  para a base com “til”. E isso é feito procedendo de forma análoga ao que foi feito na seção (4.4.4), isolando dois numeradores,  $n_5$  e  $n_6$ , em termos das duas subamplitudes escolhidas para a base e, juntamente com a solução do sistema de Jacobi dada nas equações de (4.101) a (4.109), substituí-los em (6.18), fazendo com que fiquemos apenas com os numeradores independentes. Realizando esses cálculos, chegamos de fato à relação em (6.19) utilizando apenas ferramentas da teoria quântica de campos.

É possível ainda obter outras relações KLT diferentes daquelas encontradas em [3], escolhendo uma base diferente. Por exemplo, se isolarmos os dois numeradores em termos de outras subamplitudes que não essas mencionadas acima, escolhendo, desta vez,  $A(1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $A(1, 4, 3, 2, 5)$ ,  $\tilde{A}(1, 2, 3, 4, 5)$  e  $\tilde{A}(1, 4, 3, 2, 5)$ , chegamos a uma outra relação

KLT dada abaixo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_5(1, 2, 3, 4, 5) &= \frac{i s_{12} s_{45} (s_{12} s_{14} s_{23} + s_{34} (s_{12} + s_{13}) (s_{23} + s_{25}))}{s_{13} s_{24} s_{35}} A_5(1, 2, 3, 4, 5) \tilde{A}_5(1, 2, 3, 4, 5) \\
&\quad - \frac{i s_{12} s_{14} s_{25} (s_{13} + s_{35}) s_{45}}{s_{13} s_{24} s_{35}} [A_5(1, 2, 3, 4, 5) \tilde{A}_5(1, 4, 3, 2, 5) + A_5(1, 4, 3, 2, 5) \tilde{A}_5(1, 4, 3, 2, 5)] \\
&\quad + \frac{i s_{14} s_{25} (s_{12} s_{14} s_{34} + s_{23} (s_{13} + s_{14}) (s_{34} + s_{45}))}{s_{13} s_{24} s_{35}} A_5(1, 4, 3, 2, 5) \tilde{A}_5(1, 4, 3, 2, 5)
\end{aligned} \tag{6.20}$$

É esperado que essa ideia de que as relações KLT sejam equivalentes a escrever a amplitude da gravitação como uma soma sobre todos os diagramas possíveis (com apenas vértices cúbicos) mas com um produto de dois numeradores da teoria de *gauge* seja válida em geral, para qualquer  $N$ .

Já foi conjecturado que as subamplitudes nas teorias de *gauge* possuem a forma

$$A_N(1, 2, 3, \dots, N) = g^{N-2} \sum_i \frac{n_i c_i}{(\prod_j p_j^2)_i} \tag{6.21}$$

$$\tilde{A}_N(1, 2, 3, \dots, N) = g^{N-2} \sum_i \frac{\tilde{n}_i c_i}{(\prod_j p_j^2)_i} \tag{6.22}$$

onde  $n_i$  e  $\tilde{n}_i$  satisfazem as identidades cinemáticas,  $c_i$  são os fatores de cor vindos dos diagramas e a soma é sobre todos os diagramas com apenas vértices cúbicos. E a produtória que aparece nos denominadores corresponde aos diferentes propagadores que vêm de cada diagrama. Assim, com base nos exemplos vistos, esperamos que as amplitudes da gravitação venham dadas por

$$-i \mathcal{M}_N(1, 2, 3, \dots, N) = \sum_i \frac{n_i \tilde{n}_i}{(\prod_j p_j^2)_i} \tag{6.23}$$

A consistência deste resultado foi confirmada por Bern, Carrasco e Johansson até 8-pontos.

## 6.2 Cálculo de amplitudes na teoria de Yang-Mills em nível de loops

Todos os resultados até aqui foram obtidos considerando apenas amplitudes em nível de árvore. No entanto, é possível aplicá-los de forma adequada também para diagramas que contenham loops.

Para aplicarmos as relações BCJ e as identidades cinemáticas para amplitudes em nível de loops, podemos, primeiro, utilizar o chamado método de **cortes unitários**[1, 29, 30, 31]. Esse método nos permite construir uma amplitude em nível de loops a partir de outras amplitudes que contenham menos loops ou que seja em nível de árvore.

Para ilustrar, vamos apresentar como esse método funcionaria em um exemplo de uma amplitude de 4-pontos em 1-loop, na teoria de Yang-Mills. Vamos nos restringir à subamplitude  $A(1, 2, 3, 4)$ , nos preocupando apenas no coeficiente do traço  $\text{Tr}(\lambda^{a_1}, \lambda^{a_2}, \lambda^{a_3}, \lambda^{a_4})$ . Há sete diagramas que contribuem neste caso <sup>4</sup> e estão apresentados na Figura 6.1.

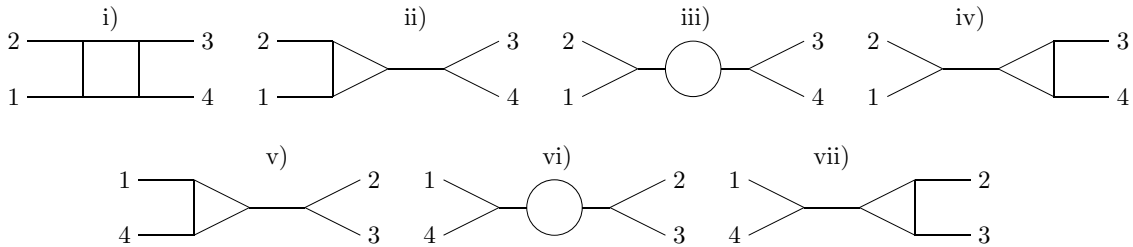


Figura 6.1: Diagramas em 1-loop que contribuem para  $A(1, 2, 3, 4)$

Segundo o método dos cortes unitários, devemos realizar convenientemente um corte nos diagramas de forma a cancelar algum loop. Neste caso específico, vamos fazer o corte no único loop que existe em cada diagrama, dividindo-o em dois diagramas em nível de árvore. Os cortes a serem feitos estão na Figura 6.2. No caso do primeiro dos diagramas, há ainda uma outra possibilidade de corte diferente da apresentada na figura: podemos escolher realizar o corte horizontalmente, ao invés de verticalmente.

Depois de realizar os cortes, segundo o método dos cortes unitários, devemos impor condições “on-shell” de forma que as pernas que foram cortadas passem a estar na camada de massa ( $p^2 = 0$ ). Matematicamente, devemos substituir o propagador de Feynman por uma função delta  $\delta(p^2)$ .

Com esse procedimento, a amplitude originalmente calculada através da soma das contribuições dos sete diagramas da Figura (6.1) agora passa a corresponder a uma soma de produtos de dois diagramas em nível de árvore. Por exemplo, com os cortes unitários

<sup>4</sup>Os diagramas considerados são apenas aqueles que contém vértices de três pernas. Assim como ocorreu nos casos das amplitudes em nível de árvore, as contribuições vindas dos diagramas que possuem vértices quárticos são computadas nas expressões dos numeradores cinemáticos.

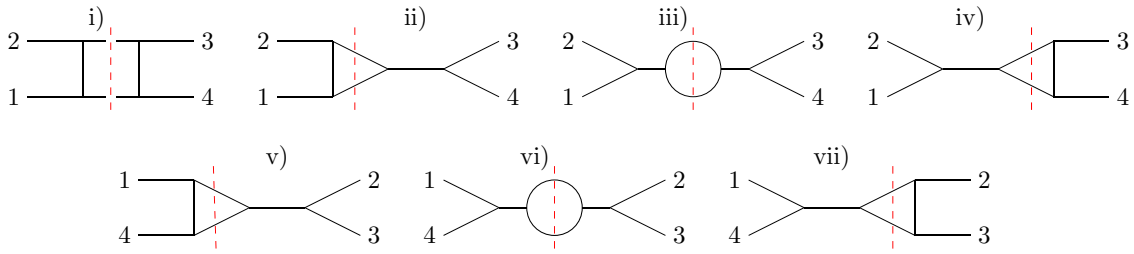


Figura 6.2: Cortes nos diagramas em 1-loop

a contribuição vinda do diagrama i), antes calculada usando as regras de Feynman para amplitudes com loops, agora pode ser obtida calculando duas amplitudes em nível de árvore, tomando o produto entre elas, segundo esquema da Figura 6.3. Além disso, impondo as condições “on-shell” para as pernas cortadas e integrando sobre os momentos dessas pernas, chegamos à seguinte expressão:

$$A_i^{(1\text{-Loop})}(1, 2, 3, 4) = \int \frac{d^D l_1 d^D l_2}{(2\pi)^{D-2}} \delta(l_1^2) \delta(l_2^2) \delta^D(l_1 + l_2 + k_1 + k_2) \times \\ \times A^0(k_1, k_2, l_2, l_1) A^0(-l_1, -l_2, k_3, k_4) \quad (6.24)$$

onde  $A^0(k_1, k_2, l_2, l_1)$  e  $A^0(-l_1, -l_2, k_3, k_4)$  são amplitudes em nível de árvore cuja expressão em termos dos pólos e numeradores nós já sabemos construir. Por exemplo, no caso da teoria de Yang-Mills essa subamplitude vem dada por

$$A^0(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{n_s}{s} + \frac{n_t}{t} \quad (6.25)$$

onde  $s = (k_1 + k_2)^2$  e  $t = (k_1 + k_4)^2$ .

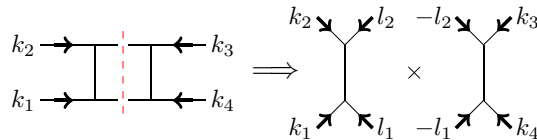


Figura 6.3: Cortes nos diagramas em 1-loop

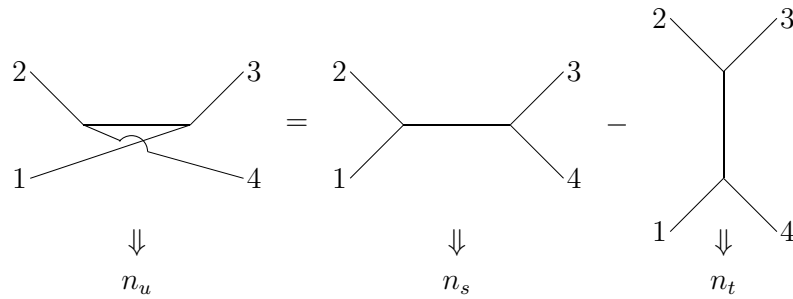
Portanto, vemos que os diagramas em nível de loops podem, através dos cortes, ser enxergados como produtos de diagramas em nível de árvore, o que nos leva a estender os resultados vindos das relações BCJ para as amplitudes com loops.

Para entender isso melhor, vamos analisar como se aplicariam as identidades cinemáticas a diagramas com 1 loop. Lembremos que, em nível de árvore, a identidade

cinemática que foi dada em (4.30) vinha dada por:

$$n_u = n_s - n_t \quad (6.26)$$

Além disso, essa identidade foi esquematizada com diagramas na Figura 4.2. Vamos utilizar tal esquema novamente aqui. Antes, porém, vamos reorganizar de forma conveniente os índices dos diagramas, mas sem alterar a consistência da igualdade representada na figura. Fazendo isso, não é difícil se convencer de que podemos reescrever o esquema da forma que está apresentada na Figura 6.4.



Ou ainda, de forma mais geral, temos que:

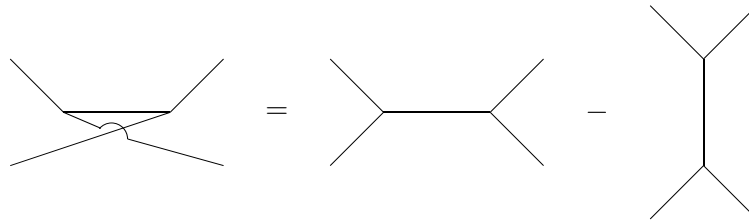


Figura 6.4: Identidade cinemática para  $N = 4$  em termos de diagramas

Em seguida, vamos adicionar uma mesma contribuição a cada um dos três termos (diagramas) da Figura 6.4, de forma a não alterar a identidade. Por exemplo, vamos adicionar um diagrama de 4 pernas em nível de árvore (com vértices cúbicos) na parte superior dos diagramas. O resultado será uma identidade entre os numeradores correspondentes aos diagramas com 1 loop e está apresentada na Figura 6.5.<sup>5</sup>

Outras identidades envolvendo diagramas com loops podem ser obtidas adicionando diferentes contribuições aos diagramas da igualdade representada na Figura 6.4.

<sup>5</sup>Assim como ocorreu no caso da identidade cinemática para diagramas em nível de árvore na seção 4.3.3, a identidade representada na Figura 6.5, apesar do sinal de igualdade entre os diagramas, não indica uma relação entre as amplitudes, mas sim entre os numeradores cinemáticos. O mesmo vale para as igualdades da Figura 6.4.

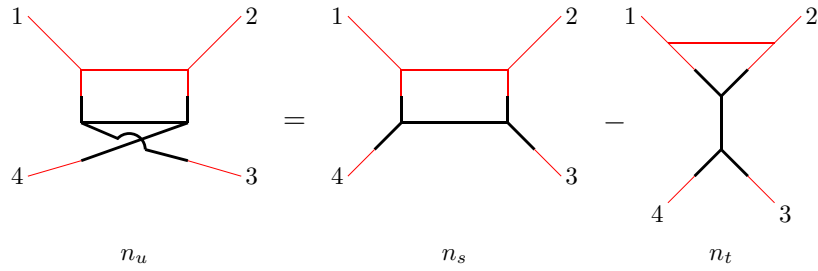


Figura 6.5: Identidade cinemática para diagramas de 4 pernas com 1 loop

Mais duas delas estão dadas na Figura 6.6, no caso de amplitudes de 4-pontos em 2-loops. É importante notar que, nos diagramas dessas figuras, a parte em preto corresponde à identidade cinemática em nível de árvore representada na Figura 6.4 e a parte em vermelho corresponde a contribuição que foi adicionada a essa identidade.

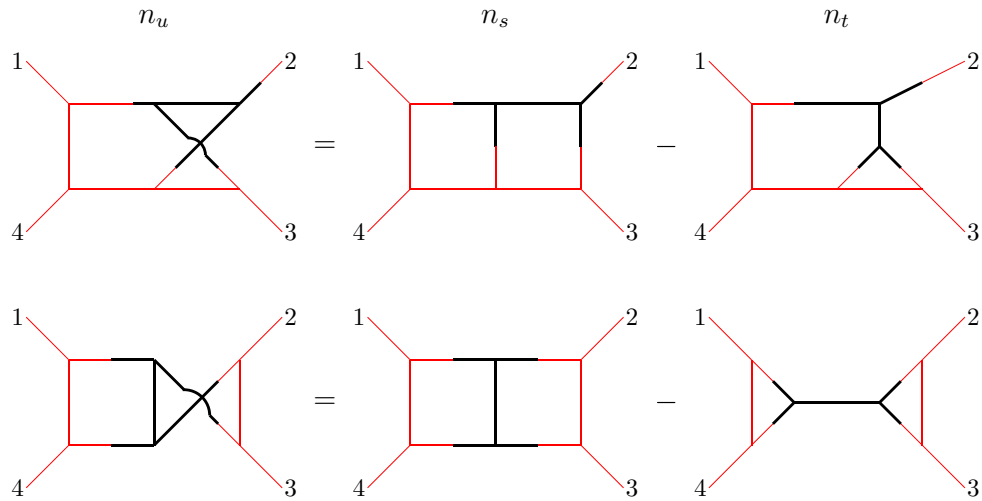


Figura 6.6: Identidades cinemáticas para diagramas de 4 pernas com 2 loops

Além disso, há ainda um outro trabalho de Bern, Carrasco e Johansson [32] no qual eles conjecturaram, com base em certas comprovações, que a dualidade cor-cinemática pode ser proposta explicitamente para as amplitudes em nível de loops. Mais especificamente, eles concluem que uma amplitude de Yang-Mills em nível de loops vem dada por:

$$\frac{(-i)^L}{g^{N-2+2L}} A_N^{\text{Loop}} = \sum_j \int \prod_{l=1}^L \frac{d^D p_l}{(2\pi)^D} \frac{1}{S_j} \frac{n_j c_j}{\prod_{\alpha_j} p_{\alpha_j}^2} \quad (6.27)$$

onde a soma se dá sobre todos os diferentes diagramas de  $N$ -pontos com vértices cúbicos e

L-loops e os  $S_j$  são os fatores de simetria (interna) de cada diagrama. Portanto, já existe uma proposta concreta da dualidade cor-cinémática no contexto das amplitudes em nível de loops.

# Capítulo 7

## Considerações Finais

As diversas relações entre as amplitudes de Yang-Mills encontradas nas últimas décadas permitiram que se reduzisse, cada vez mais, o número de subamplitudes independentes da teoria. Usando as relações Kleiss-Kuijf, uma amplitude de espalhamento de  $N$ -pontos pode ser escrita em termos de uma base com  $(N - 2)!$  elementos.

Com o trabalho de Bern, Carrasco e Johansson, descobriu-se uma dualidade entre a cor e a cinemática da teoria de Yang-Mills desconhecida até então. Essa dualidade acabou revelando novos vínculos, o que permitiu que as relações BCJ fossem deduzidas. Observando os resultados para casos específicos, foi conjecturado que, num espalhamento de  $N$ -pontos, a amplitude passaria a ser escrita em termos de uma base com apenas  $(N - 3)!$  elementos.

Realizamos os cálculos para  $N = 4$  e  $5$  confirmando os resultados presentes no trabalho [3]. Além disso, fizemos também as contas para o caso  $N = 6$ , obtendo as relações BCJ correspondentes, as quais não foram apresentadas no artigo BCJ. No entanto, já para o caso  $N = 6$ , houve dificuldade em manipular as extensas expressões que apareciam, mesmo com a ajuda do computador.

Por outro lado, no contexto da teoria de cordas, deduzimos as chamadas relações de monodromia que são expressões que relacionam entre si amplitudes de cordas abertas. Vimos que essas relações recaem nas relações Kleiss-Kuijf e BCJ quando tomamos o limite de baixas energias ( $\alpha' \rightarrow 0$ ). Com essas relações, pudemos demonstrar que de fato é possível escrever qualquer amplitude de Yang-Mills de  $N$ -pontos em termos de uma base mínima com  $(N - 3)!$  elementos. Portanto, com ferramentas de teoria de cordas, chegamos a essa conclusão sem a necessidade de se fazer conjectura como no caso das relações BCJ.

Apesar de as relações BCJ terem sido deduzidas para amplitudes em nível de árvore, foi possível aplicá-las para aquelas com loops, por meio do método dos cortes unitários.

Como vimos, era conhecida desde 1986, por meio da teoria de cordas, as chamadas relações KLT que envolvem amplitudes de cordas fechadas e abertas (ambas sem massa), as quais, no limite em que  $\alpha' \rightarrow 0$ , se tornam relações entre as amplitudes da gravitação de Einstein e as de Yang-Mills. Com os resultados advindos do artigo BCJ, foi possível enxergar essa ligação e deduzir tais relações utilizando apenas a teoria de campos.

Do ponto de vista prático, as relações BCJ também foram fundamentais para facilitar o cálculo das amplitudes de espalhamento, uma vez que o número de subamplitudes a serem calculadas foi reduzido significativamente.

Esse é um assunto que está sendo explorado e aplicado em muitos trabalhos, o que pode ser visto pela grande quantidade de citações que o artigo BCJ recebeu desde sua publicação e, portanto, tem muito ainda a contribuir em outros estudos. Uma demonstração formal dos resultados conjecturados no artigo BCJ do ponto de vista puramente da teoria de campos, por exemplo, seria uma contribuição bastante significativa.

Outras possíveis opções de continuidade para esse trabalho seriam estudar aplicações das relações BCJ em diferentes modelos físicos de forma a explicar, possivelmente, resultados conhecidos, porém sem uma aparente motivação teórica. Um exemplo dessa natureza foi discutido no próprio artigo BCJ: de forma resumida, um resultado que aparecia naturalmente dos cálculos das amplitudes de 4-pontos da QCD em 2-loops sem nenhuma justificativa mais fundamental pôde ser interpretado como um resultado de consistência com a identidade cinemática obedecida pelos numeradores.

# Apêndice A

## Algumas identidades utilizadas

### A.1 Uma propriedade importante

Seja uma matriz  $H$  arbitrária e hermitiana que, fazendo parte do grupo  $U(N)$ , pode ser escrita como:

$$H = \sum_a C_a \lambda^a \quad (\text{A.1})$$

Multipliquemos a igualdade anterior por  $\lambda^b$  e calculemos seu traço:

$$\text{Tr}(H\lambda^b) = \sum_a C_a \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) \quad (\text{A.2})$$

Usando a normalização escolhida em (2.5), obtemos que:

$$C_a = \text{Tr}(H\lambda_a) \quad (\text{A.3})$$

Assim, vamos substituir a expressão encontrada para  $C_a$  em  $H$ :

$$H = \sum_a \text{Tr}(H\lambda_a) \lambda^a \quad (\text{A.4})$$

Em componentes, temos:

$$H_{ij} = \sum_a \text{Tr}(H\lambda_a) (\lambda^a)_{ij} \quad (\text{A.5})$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \sum_a \sum_{m,n} H_{mn} (\lambda_a)_{nm} (\lambda^a)_{ij} \\ &= \sum_{m,n} \left[ \sum_a (\lambda_a)_{nm} (\lambda^a)_{ij} \right] H_{mn} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Comparando os dois lados da igualdade anterior, uma vez que  $H$  é arbitrária, é preciso que apenas o termo em que  $m = i$  e  $n = j$  da soma sejam diferentes de zero. Ou seja, para o caso do grupo  $U(N)$ , obtemos que

$$\sum_a (\lambda_a)_{nm} (\lambda^a)_{ij} = \delta_{mi} \delta_{nj} \quad (\text{A.7})$$

que é chamada de “Relação de Fechamento”. Com isso, agora vamos calcular a seguinte soma:

$$\sum_a \text{Tr}(A\lambda^a) \text{Tr}(B\lambda_a), \quad \text{onde } A \text{ e } B \text{ são matrizes} \quad (\text{A.8})$$

Vejamos:

$$\begin{aligned} \sum_a \text{Tr}(A\lambda^a) \text{Tr}(B\lambda_a) &= \sum_{m,n} \sum_{p,q} \sum_a A_{mn} (\lambda^a)_{nm} B_{pq} (\lambda_a)_{qp} \\ &= \sum_{m,n} \sum_{p,q} \sum_a A_{mn} B_{pq} \left[ \sum_a (\lambda^a)_{nm} (\lambda_a)_{qp} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Notemos que o termo em colchetes, pela relação de fechamento, vale  $\delta_{mq} \delta_{np}$ . Então,

$$\sum_a \text{Tr}(A\lambda^a) \text{Tr}(B\lambda_a) = \sum_{p,q} A_{qp} B_{pq} \quad (\text{A.10})$$

E, finalmente, chegamos à propriedade desejada:

$$\implies \sum_a \text{Tr}(A\lambda^a) \text{Tr}(B\lambda_a) = \text{Tr}(A B) \quad (\text{A.11})$$

A diferença dessa dedução para o caso do grupo  $SU(N)$  é que a relação de fechamento viria dada por [17]:

$$\sum_a (\lambda_a)_{nm} (\lambda^a)_{ij} = \delta_{nj} \delta_{im} - \frac{1}{N} \delta_{nm} \delta_{ij} \quad (\text{A.12})$$

No entanto, uma vez que nesse caso  $\text{Tr}(\lambda^a) = 0$ , não é difícil se convencer de que a propriedade em (A.11) se mantém inalterada.

## A.2 Relações entre os $s_{ij}$ 's para $N = 5$

Nos processos de espalhamento devemos considerar a conservação do momento, ou seja, no caso de  $N = 5$  temos que  $k_1^\mu + k_2^\mu + k_3^\mu + k_4^\mu + k_5^\mu = 0$ . Com isso, uma vez que

$s_{ij} = (k_i + k_j)^2$ , podemos estabelecer as seguintes relações entre os 9  $s_{ij}$ 's:

$$s_{12} + s_{13} + s_{14} + s_{15} = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$s_{12} + s_{23} + s_{24} + s_{25} = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$s_{13} + s_{23} + s_{34} + s_{35} = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$s_{14} + s_{24} + s_{34} + s_{45} = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$s_{15} + s_{25} + s_{35} + s_{45} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Resolvendo esse sistema de equações, é possível escrever 5  $s_{ij}$ 's em termos de outros 4. Uma das possíveis soluções vem dada por:

$$s_{23} = -s_{12} - s_{24} - s_{25} \quad (\text{A.18})$$

$$s_{13} = s_{45} + s_{25} + s_{24} \quad (\text{A.19})$$

$$s_{34} = -s_{14} - s_{24} - s_{45} \quad (\text{A.20})$$

$$s_{35} = s_{12} + s_{24} + s_{14} \quad (\text{A.21})$$

$$s_{15} = -s_{25} - s_{12} - s_{24} - s_{14} - s_{45} \quad (\text{A.22})$$

Existem outras soluções possíveis com bases diferentes.

# Apêndice B

## Regras de Feynman no espaço dos momentos

A seguir serão apresentadas as regras de Feynman para a teoria de Yang-Mills no *gauge* de Lorentz[14]:

- Propagador no *gauge* de Lorentz

$$\Delta_{ab}^{\mu\nu}(p) = \frac{-i\eta^{\mu\nu}\delta_{ab}}{p^2} \quad (\text{B.1})$$

- Vértice de 3 pernas

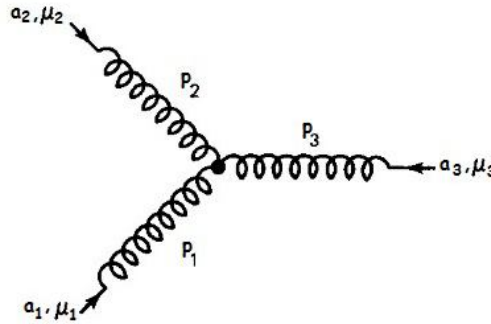


Figura B.1: Diagrama do espalhamento entre 3 glúons

$$V_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(k_1, k_2, k_3) = -igf^{a_1a_2a_3} \left[ \eta_{\mu_1\mu_2}(k_1 - k_2)_{\mu_3} + \eta_{\mu_2\mu_3}(k_2 - k_3)_{\mu_1} + \eta_{\mu_3\mu_1}(k_3 - k_1)_{\mu_2} \right] \quad (\text{B.2})$$

• Vértice de 4 pernas

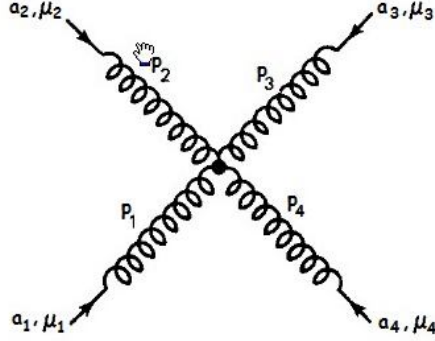


Figura B.2: Diagrama do espalhamento entre 4 glúons

$$V_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{a_1a_2a_3a_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = (-ig^2) \left[ f^{a_1a_2}_b f^{a_3a_4b} (\eta_{\mu_1\mu_3}\eta_{\mu_2\mu_4} - \eta_{\mu_1\mu_4}\eta_{\mu_2\mu_3}) + \right. \\ \left. + f^{a_1a_4}_b f^{a_2a_3b} (\eta_{\mu_1\mu_2}\eta_{\mu_3\mu_4} - \eta_{\mu_1\mu_3}\eta_{\mu_2\mu_4}) + f^{a_1a_3}_b f^{a_4a_2b} (\eta_{\mu_1\mu_4}\eta_{\mu_2\mu_3} - \eta_{\mu_1\mu_2}\eta_{\mu_3\mu_4}) \right] \quad (\text{B.3})$$

A seguir, será apresentada a expressão para o vértice de 3 pernas para o espalhamento entre grávitons, calculada a partir da ação dada em (6.5):

$$V_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6}(k_1, k_2, k_3) = \lambda \left[ -\frac{1}{2}\eta_{\mu_3\mu_5}\eta_{\mu_4\mu_6}k_3\mu_2(k_1+k_3)_{\mu_1} - \frac{1}{2}\eta_{\mu_3\mu_5}\eta_{\mu_4\mu_6}k_3\mu_1(k_1+k_3)_{\mu_2} + \right. \\ \left. + \eta_{\mu_1\mu_5}\eta_{\mu_2\mu_6}k_3\mu_3(k_1+k_3)_{\mu_4} + \frac{1}{2}\eta_{\mu_1\mu_3}\eta_{\mu_2\mu_4}k_3\mu_5(k_1+k_3)_{\mu_6} - 2\eta_{\mu_2\mu_5}\eta_{\mu_3\mu_6}k_1\mu_1(k_1+k_3)_{\mu_4} + \right. \\ \left. - 2\eta_{\mu_1\mu_4}\eta_{\mu_3\mu_6}k_3\mu_5(k_1+k_3)_{\mu_2} - 2\eta_{\mu_1\mu_4}\eta_{\mu_2\mu_5}k_3\mu_3(k_1+k_3)_{\mu_6} + \frac{1}{2}\eta_{\mu_1\mu_3}\eta_{\mu_2\mu_4}k_3\mu_5(k_1+k_3)_{\mu_6} + \right. \\ \left. - 2\eta_{\mu_1\mu_4}\eta_{\mu_2\mu_5}\eta_{\mu_3\mu_6}(k_1^\nu k_3^\nu) - \eta_{\mu_1\mu_5}\eta_{\mu_2\mu_6}k_3\mu_3k_3\mu_4 - \eta_{\mu_1\mu_3}\eta_{\mu_2\mu_4}(k_1+k_3)_{\mu_5}(k_1+k_3)_{\mu_6} + \right. \\ \left. + 2\eta_{\mu_2\mu_5}\eta_{\mu_3\mu_6}k_3\mu_1k_3\mu_4 + 2\eta_{\mu_2\mu_3}\eta_{\mu_4\mu_5}(k_1+k_3)_{\mu_1}(k_1+k_3)_{\mu_6} + 2\eta_{\mu_1\mu_4}\eta_{\mu_2\mu_5}k_3\mu_3k_3\mu_6 + \right. \\ \left. + 2\eta_{\mu_1\mu_4}\eta_{\mu_2\mu_5}(k_1+k_3)_{\mu_3}(k_1+k_3)_{\mu_6} - 2\eta_{\mu_1\mu_5}\eta_{\mu_2\mu_3}\eta_{\mu_4\mu_6}(k_1+k_2)^\nu(k_1+k_2)_\nu + \right. \\ \left. - 2\eta_{\mu_1\mu_4}\eta_{\mu_2\mu_5}\eta_{\mu_3\mu_6}(k_1+k_3)^\nu(k_1+k_3)_\nu + 2\eta_{\mu_2\mu_3}\eta_{\mu_4\mu_5}(k_1+k_2)_{\mu_1}(k_1+k_2)_{\mu_6} + \right. \\ \left. + 2\eta_{\mu_2\mu_5}\eta_{\mu_4\mu_6}(k_1+k_3)_{\mu_1}(k_1+k_3)_{\mu_3} \right] \quad (\text{B.4})$$

# Apêndice C

## Relações KLT

Em seu trabalho [13], Kawai, Lewellen e Tye, usando ferramentas da Teoria de Cordas, apresentaram a fórmula que nos permite calcular a amplitude entre  $N$  grávitons:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_N &= \lambda^{N-2} \left( \frac{i}{2\pi\alpha'} \right)^{N-3} \int d^2 Z_1 \cdots d^2 Z_N \frac{|Z_a - Z_b|^2 |Z_b - Z_c|^2 |Z_c - Z_a|^2}{d^2 Z_a d^2 Z_b d^2 Z_c} \times \\ &\times \prod_{i>j} (Z_i - Z_j)^{2\alpha' k_i \cdot k_j} \exp \left\{ (2\alpha') \left[ \sum_{i>j} \frac{\zeta_i \cdot \zeta_j}{(Z_i - Z_j)^2} - \sum_{i \neq j} \frac{k_i \cdot \zeta_j}{(Z_i - Z_j)} \right] \right\} \Big|_{\text{multilinear em } \zeta_\mu} \times \\ &\times \prod_{i>j} (\bar{Z}_i - \bar{Z}_j)^{2\alpha' k_i \cdot k_j} \exp \left\{ (2\alpha') \left[ \sum_{i>j} \frac{\bar{\zeta}_i \cdot \bar{\zeta}_j}{(\bar{Z}_i - \bar{Z}_j)^2} - \sum_{i \neq j} \frac{k_i \cdot \bar{\zeta}_j}{(\bar{Z}_i - \bar{Z}_j)} \right] \right\} \Big|_{\text{multilinear em } \bar{\zeta}_\mu} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

onde, de forma semelhante ao que ocorreu para o caso de espalhamento entre bósons de *gauge*, há três variáveis complexas arbitrárias que podem ser fixadas e, portanto, não precisam ser integradas. E ainda devemos substituir os fatores  $\zeta_i^{\mu_1} \bar{\zeta}_i^{\nu_1}$  por  $\zeta_i^{\mu_1 \nu_1}$ .

A partir dessa fórmula, eles chegaram às chamadas relações KLT que nos permitem escrever uma amplitude de cordas fechadas em termos de amplitudes de cordas abertas. De uma forma geral, essas relações vêm dadas por:

$$\mathcal{M}_N^{\text{fechada}} = \left( \frac{i}{2\pi\alpha'} \right)^{N-3} \lambda^{N-2} \sum_{P, P'} A_N^{\text{aberta}}(P) \tilde{A}_N^{\text{aberta}}(P') e^{i\pi F(P, P')} \quad (\text{C.2})$$

onde  $F(P, P')$  é um fator de fase conhecido que depende dos momentos das partículas,  $A_N^{\text{aberta}}(P)$  ( $M_N^{\text{fechada}}(P)$ ) é uma amplitude em nível de árvore de cordas abertas (fechadas) para um particular ordenamento  $P$  das  $N$  pernas externas.

Serão apresentadas a seguir as relações KLT para alguns casos específicos:

- $N = 3$

$$\mathcal{M}_3^{\text{fechada}} = \lambda A_3^{\text{aberta}}(1, 2, 3) \tilde{A}_3^{\text{aberta}}(1, 2, 3) \quad (\text{C.3})$$

- $N = 4$

$$\mathcal{M}_4^{\text{fechada}} = -\frac{\lambda^2}{2\pi\alpha'} \text{sen}(2\pi\alpha' k_1 \cdot k_2) A_4^{\text{aberta}}(1, 2, 3, 4) \tilde{A}_4^{\text{aberta}}(1, 2, 4, 3) \quad (\text{C.4})$$

- $N = 5$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_5^{\text{fechada}} = \frac{\lambda^3}{(2\pi\alpha')^2} & \left[ \text{sen}(2\pi\alpha' k_1 \cdot k_2) \text{sen}(2\pi\alpha' k_3 \cdot k_4) \times \right. \\ & \times A_5^{\text{aberta}}(1, 2, 3, 4, 5) \tilde{A}_5^{\text{aberta}}(1, 4, 3, 5, 2) + \\ & + \text{sen}(2\pi\alpha' k_1 \cdot k_3) \text{sen}(2\pi\alpha' k_2 \cdot k_4) \times \\ & \left. \times A_5^{\text{aberta}}(1, 3, 2, 4, 5) \tilde{A}_5^{\text{aberta}}(1, 4, 2, 5, 3) \right] \quad (\text{C.5}) \end{aligned}$$

onde  $\alpha'$  é a constante fundamental da teoria de cordas.

Essas relações também são válidas no limite de baixas energias em teoria de cordas, ou seja, quando  $\alpha' \rightarrow 0$ , passando a relacionar amplitudes da gravitação e de Yang-Mills.

# Apêndice D

## Relacionando os numeradores cinemáticos usando a regra da fatoração

Neste apêndice, vamos relacionar entre si os numeradores cinemáticos que apresentam o mesmo tipo de pólo. Em princípio, eles são diferentes, mas, usando a chamada propriedade da fatoração das amplitudes, será possível reduzir significativamente o número de numeradores presentes nas subamplitudes.

Os cálculos apresentados a seguir para  $N = 4$  e  $N = 5$  não foram abertos no artigo BCJ [3].

### D.1 Caso $N = 4$

É conhecida uma propriedade que nos permite relacionar duas subamplitudes, uma de  $N$  e outra de  $(N - 1)$ -pontos, quando tomamos um determinado limite. Vejamos: vamos considerar, em um espalhamento de 4 partículas, a contribuição do diagrama de Feynman dado na Figura D.1.

A **regra da fatoração** [17] nos diz que, no limite em que os momentos das partículas 1 e 2 se tornam paralelos,  $k_1 \parallel k_2$ , a contribuição deste diagrama tende a ser equivalente a do diagrama da Figura D.1:

Neste caso, essa regra é traduzida pela seguinte expressão:

$$A_4(\zeta_1, k_1; \zeta_2, k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4)|_{k_1 \parallel k_2} \longrightarrow \frac{1}{2k_1 \cdot k_2} V_{12}^\mu \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} A_3(\zeta, k_1 + k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4) \quad (\text{D.1})$$

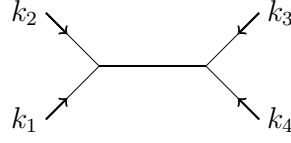


Figura D.1: Diagrama de um espalhamento de 4-pontos

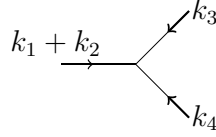


Figura D.2: Diagrama de um espalhamento de 3-pontos

onde  $V_{ij}^\mu$  vem dado por

$$V_{ij}^\mu = (\zeta_i \cdot \zeta_j)(k_j - k_i)^\mu + 2(\zeta_j \cdot k_i)\zeta_i^\mu - 2(\zeta_i \cdot k_j)\zeta_j^\mu \quad (\text{D.2})$$

Notemos que  $V_{ij}^\mu$  é exatamente igual à parte cinética do vértice de Yang-Mills  $V^{\nu\rho\mu}(k_i, k_j, -k_i - k_j)$ , dado em (B.2), contraído com as polarizações  $\zeta_i^\nu$  e  $\zeta_j^\rho$ . Vejamos: a parte cinética do vértice vem dada por

$$V^{\nu\rho\mu}(k_i, k_j, -k_i - k_j) = -g_{\nu\rho}(k_i - k_j)_\mu - g_{\rho\mu}(2k_j + k_i)_\nu - g_{\mu\nu}(-2k_i - k_j)_\rho \quad (\text{D.3})$$

Contraíndo com as polarizações  $\zeta_i^\nu \zeta_j^\rho$ :

$$V_{\nu\rho}{}^\mu(k_i, k_j, -k_i - k_j)\zeta_i^\nu \zeta_j^\rho = (\zeta_i \cdot \zeta_j)(k_j - k_i)^\mu - 2(\zeta_i \cdot k_j)\zeta_j^\mu + 2(\zeta_j \cdot k_i)\zeta_i^\mu$$

Comparando com (D.2), vemos que

$$\implies V_{\nu\rho}{}^\mu(k_i, k_j, -k_i - k_j)\zeta_i^\nu \zeta_j^\rho = V_{ij}^\mu \quad (\text{D.4})$$

Para um  $N$  qualquer, a regra da fatoração vem dada por:

$$\begin{aligned} A_N(\zeta_1, k_1; \dots; \zeta_i, k_i; \zeta_j, k_j; \dots; \zeta_N, k_N) \Big|_{k_i \parallel k_j} &\longrightarrow \frac{1}{2k_i \cdot k_j} V_{ij}^\mu \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} A_{N-1}(\zeta_1, k_1; \dots; \zeta_i, k_i; \zeta_j, k_j; \dots; \zeta_{N-1}, k_{N-1}) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

onde  $V_{ij}^\mu$  está dado em (D.2).

Usando a regra acima, temos que, no limite em que  $k_1$  se torna paralelo a  $k_2$ , a subamplitude  $A(1, 2, 3, 4)$  tem seu comportamento dominado por:

$$A_4(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{2k_1k_2} V_{12}^\mu \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} A_3(\zeta, k_1 + k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4) \quad (\text{D.6})$$

Notemos que o resíduo do pólo  $\frac{1}{2k_1k_2} = \frac{1}{s}$  em  $A(1, 2, 3, 4)$  vem dado pelo seu coeficiente que é:

$$R_u^{A(1,2,3,4)} = V_{12}^\mu \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} A_3(\zeta, k_1 + k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4) \quad (\text{D.7})$$

Analogamente, sabemos que, quando  $k_1$  tende a ser paralelo a  $k_2$ , a outra subamplitude,  $A(1, 3, 4, 2)$ , é dominada por:

$$A_4(1, 3, 4, 2) = \frac{1}{2k_1k_2} V_{21}^\mu \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} A_3(\zeta, k_1 + k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4) \quad (\text{D.8})$$

e o resíduo do pólo  $\frac{1}{s}$  em  $A(1, 3, 4, 2)$  é igual a

$$R_u^{A(1,3,4,2)} = V_{21}^\mu \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} A_3(\zeta, k_1 + k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4) \quad (\text{D.9})$$

Notemos também que, com a expressão do vértice dada em (D.2),  $V_{ij}^\mu$  é antissimétrico nos índices  $i, j$ :

$$V_{ij}^\mu = -V_{ji}^\mu \quad (\text{D.10})$$

De acordo com isso temos que  $V_{21}^\mu = -V_{12}^\mu$ . Logo, concluímos que

$$R_s^{A(1,3,4,2)} = -R_s^{A(1,2,3,4)} \quad (\text{D.11})$$

Desse modo, vemos que os resíduos referentes ao pólo  $s$  em ambas as subamplitudes,  $A(1, 2, 3, 4)$  e  $A(1, 3, 4, 2)$ , diferem apenas pelo sinal. Mas isso não significa, a priori, que os numeradores como um todo,  $n_s$  e  $n'_s$  também sigam essa regra. Afinal, como já foi comentado, os numeradores, além dos resíduos, contêm também os termos de contato que foram absorvidos nos numeradores de alguma forma que ainda não conhecemos.

Se repetirmos o procedimento anterior, agora para os pólos  $t$  e  $u$ , também podemos chegar a que

$$R_t^{A(1,3,2,4)} = -R_t^{A(1,2,3,4)} \quad (\text{D.12})$$

$$R_u^{A(1,3,2,4)} = -R_u^{A(1,3,4,2)} \quad (\text{D.13})$$

Portanto, todos os resíduos referentes ao mesmo pólo apresentam um sinal global de diferença.

A seguir, vamos nos convencer de que é possível estender essa relação de sinais para os numeradores.

Primeiramente, escrevamos  $A(1, 2, 3, 4)$  na forma:

$$A(1, 2, 3, 4) = \frac{R^{A(1,2,3,4)}}{s} + \frac{R^{A(1,2,3,4)}}{t} + \beta + \gamma \quad (\text{D.14})$$

O que fizemos acima foi somente separar explicitamente os resíduos dos demais termos que não possuem pólos. A soma  $\beta + \gamma$  representa os termos de contato da subamplitude. Para absorvê-los nos numeradores, façamos o seguinte:

$$A(1, 2, 3, 4) = \frac{R^{A(1,2,3,4)} + \beta s}{s} + \frac{R^{A(1,2,3,4)} + \gamma t}{t} \quad (\text{D.15})$$

Com isso, podemos definir os seguintes numeradores:

$$n_s \doteq R_s^{A(1,2,3,4)} + \beta s \quad (\text{D.16})$$

$$n_t \doteq R_t^{A(1,2,3,4)} + \gamma t \quad (\text{D.17})$$

Agora, vejamos para  $A(1, 3, 4, 2)$ :

$$A(1, 3, 4, 2) = \frac{R^{A(1,3,4,2)}}{u} + \frac{R^{A(1,3,4,2)}}{s} + \delta \quad (\text{D.18})$$

De (D.11), sabemos que  $R_s^{A(1,3,4,2)} = -R_s^{A(1,2,3,4)}$ . Vamos obrigar também a que todo o numerador de  $s$  em  $A(1, 3, 4, 2)$ , não só o resíduo, coincida com o numerador de  $s$  em  $A(1, 2, 3, 4)$  dado em (D.16) a menos de um sinal global. Para isso, vamos somar e subtrair o termo  $\beta$  na expressão de  $A(1, 3, 4, 2)$ :

$$A(1, 3, 4, 2) = \frac{R^{A(1,3,4,2)}}{u} + \frac{R^{A(1,3,4,2)}}{s} + \delta + \beta - \beta \quad (\text{D.19})$$

Agora usando (D.11) e posicionando os termos de contato convenientemente, obtemos que:

$$A(1, 3, 4, 2) = \frac{R^{A(1,3,4,2)} + (\delta + \beta)u}{u} - \frac{R^{A(1,2,3,4)} + \beta s}{s} \quad (\text{D.20})$$

Com isso, podemos usar a definição de  $n_s$  dada em (D.16):

$$A(1, 3, 4, 2) = \frac{R^{A(1,3,4,2)} + (\delta + \beta)u}{u} - \frac{n_s}{s} \quad (\text{D.21})$$

Podemos, portanto, chamar o numerador de  $u$  em  $A(1, 3, 4, 2)$  de  $-n_u$ :

$$R_u^{A(1,3,4,2)} + (\delta + \beta)u = -n_u \quad (\text{D.22})$$

$$\implies n_u \doteq -R_u^{A(1,3,4,2)} - (\delta + \beta)u \quad (\text{D.23})$$

E, por fim, façamos o mesmo para  $A(1, 3, 2, 4)$ :

$$A(1, 3, 2, 4) = \frac{R_t^{A(1,3,2,4)}}{t} + \frac{R_u^{A(1,3,2,4)}}{u} + \eta \quad (\text{D.24})$$

Da mesma forma que foi feito anteriormente, vamos somar e subtrair o termo  $\gamma$  e ainda utilizar as relações dadas em (D.12) e (D.13):

$$A(1, 3, 2, 4) = -\frac{R_t^{A(1,2,3,4)}}{t} - \frac{R_u^{A(1,3,4,2)}}{u} + \eta + \gamma - \gamma \quad (\text{D.25})$$

Novamente, vamos obrigar a que o numerador de  $t$  em  $A(1, 3, 2, 4)$  seja o negativo de  $n_t$  que foi definido em (D.17):

$$A(1, 3, 2, 4) = -\frac{R_t^{A(1,2,3,4)} + \gamma t}{t} + \frac{-R_u^{A(1,3,4,2)} + (\eta + \gamma)u}{u} \quad (\text{D.26})$$

Até aqui temos as seguintes relações:

$$A(1, 2, 3, 4) = \frac{n_s}{s} + \frac{n_t}{t} \quad (\text{D.27})$$

$$A(1, 3, 4, 2) = -\frac{n_u}{u} - \frac{n_s}{s} \quad (\text{D.28})$$

$$A(1, 3, 2, 4) = -\frac{n_t}{t} + \frac{-R_u^{A(1,3,4,2)} + (\eta + \gamma)u}{u} \quad (\text{D.29})$$

Usemos agora a relação Kleiss-Kuijff dada em (4.4) para encontrar uma expressão simplificada para o último dos numeradores acima.

$$A(1, 3, 4, 2) + A(1, 2, 3, 4) + A(1, 3, 2, 4) = 0 \quad (\text{D.30})$$

$$\left(\frac{n_s}{s} + \frac{n_t}{t}\right) + \left(-\frac{n_u}{u} - \frac{n_s}{s}\right) + \left(-\frac{n_t}{t} + \frac{-R_u^{A(1,3,4,2)} + (\eta + \gamma)u}{u}\right) = 0 \quad (\text{D.31})$$

$$-\frac{n_u}{u} + \frac{-R_u^{A(1,3,4,2)} + (\eta + \gamma)u}{u} = 0 \quad (\text{D.32})$$

$$\implies -R_u^{A(1,3,4,2)} + (\eta + \gamma)u = n_u \quad (\text{D.33})$$

Com o resultado anterior, podemos reescrever (D.29):

$$A(1, 3, 2, 4) = -\frac{n_t}{t} + \frac{n_u}{u} \quad (\text{D.34})$$

Portanto, de fato os numeradores também seguem a mesma regra de sinal entre o resíduos dada em (D.11), (D.12) e (D.13).

Reescrevamos, então, as expressões das subamplitudes:

$$A(1, 2, 3, 4) = +\frac{n_s}{s} + \frac{n_t}{t} \quad (\text{D.35})$$

$$A(1, 3, 2, 4) = -\frac{n_t}{t} + \frac{n_u}{u} \quad (\text{D.36})$$

$$A(1, 3, 4, 2) = -\frac{n_u}{u} - \frac{n_s}{s} \quad (\text{D.37})$$

e que agora vêm dadas em termos de apenas três numeradores diferentes, ao invés de seis como ocorria em (4.20), (4.22) e (4.21).

## D.2 Caso $N = 5$

Usando a regra da fatoração [17] dada em (D.5), agora para  $N = 5$ , podemos relacionar os resíduos dos pólos entre si, analogamente ao que foi feito no Apêndice D.1.

Consideremos um primeiro exemplo:  $n_5$  foi definido como o fator cinemático que acompanha o pólo  $\frac{1}{s_{15}s_{34}}$  em  $A(1, 2, 3, 4, 5)$ . Vejamos, usando a regra da fatoração, qual seria o resíduo desse pólo. Para isso, façamos primeiro  $k_1$  tender a ser paralelo a  $k_5$ :

$$\begin{aligned} A^{(5)}(5, 1, 2, 3, 4) |_{k_1 \parallel k_5} &\longrightarrow \frac{1}{2k_1 k_5} V_{51}^\mu \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} A^{(4)}(\zeta, k_1 + k_5; \zeta_2, k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4) \\ \implies A^{(5)}(1, 2, 3, 4, 5) |_{k_1 \parallel k_5} &\longrightarrow \frac{1}{s_{15}} V_{51}^\mu \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} A^{(4)}(1 + 5, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

Acima conseguimos separar o resíduo do pólo  $\frac{1}{s_{15}}$ . Mas estamos interessados mesmo no pólo  $\frac{1}{s_{15}s_{34}}$ . Por isso, vamos precisar aplicar a regra da fatoração mais uma vez, agora para a subamplitude  $A^{(4)}(1 + 5, 2, 3, 4)$ . Fazendo  $k_3$  tender a ser paralelo a  $k_4$ :

$$\begin{aligned} A^{(4)}(3, 4, 1 + 5, 2) |_{k_3 \parallel k_4} &\longrightarrow \frac{1}{2k_3 k_4} V_{34}^\nu \frac{\partial}{\partial \zeta^\nu} A^{(3)}(\zeta, k_1 + k_5; \zeta_2, k_2; \zeta', k_3 + k_4) \\ \implies A^{(4)}(1 + 5, 2, 3 + 4) |_{k_3 \parallel k_4} &\longrightarrow \frac{1}{s_{34}} V_{34}^\nu \frac{\partial}{\partial \zeta^\nu} A^{(3)}(1 + 5, 2, 3 + 4) \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

Substituindo (D.39) em (D.38):

$$\begin{aligned} A^{(5)}(1, 2, 3, 4, 5) |_{k_1 \parallel k_5 \text{ e } k_3 \parallel k_4} &\longrightarrow \frac{1}{s_{15}s_{34}} V_{51}^\mu V_{34}^\nu \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta'^\nu} \times \\ &\quad \times A^{(3)}(\zeta, k_1 + k_5; \zeta_2, k_2; \zeta', k_3 + k_4) \\ \implies A^{(5)}(1, 2, 3, 4, 5) |_{k_1 \parallel k_5 \text{ e } k_3 \parallel k_4} &\longrightarrow \frac{1}{s_{15}s_{34}} V_{51}^\mu V_{34}^\nu \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta'^\nu} A^{(3)}(1 + 5, 2, 3 + 4) \end{aligned} \quad (\text{D.40})$$

Portanto, vemos que o resíduo do pólo  $\frac{1}{s_{15}s_{34}}$  em  $A(1, 2, 3, 4, 5)$  é

$$R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)} = V_{51}^\mu V_{34}^\nu \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta^\nu} A^{(3)}(1 + 5, 2, 3 + 4) \quad (\text{D.41})$$

Por outro lado, esse mesmo pólo aparece também em  $A(1, 3, 4, 2, 5)$ , onde nós definimos o numerador como  $n_5''$ . Se repetirmos o procedimento acima, usando duas vezes a regra da fatoração, agora para  $A(1, 3, 4, 2, 5)$  vamos obter o seguinte:

$$A^{(5)}(1, 3, 4, 2, 5) |_{k_1 \parallel k_5 \text{ e } k_3 \parallel k_4} \longrightarrow \frac{1}{s_{15}s_{34}} V_{51}^\mu V_{34}^\nu \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta^\nu} A^{(3)}(1 + 5, 3 + 4, 2) \quad (\text{D.42})$$

Pela simetria de reflexão, sabemos que  $A(1 + 5, 3 + 4, 2) = -A(1 + 5, 2, 3 + 4)$ .

Assim:

$$\implies A^{(5)}(1, 3, 4, 2, 5) |_{k_1 \parallel k_5 \text{ e } k_3 \parallel k_4} \longrightarrow -\frac{1}{s_{15}s_{34}} V_{51}^\mu V_{34}^\nu \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta^\nu} A^{(3)}(1 + 5, 2, 3 + 4) \quad (\text{D.43})$$

Portanto, o resíduo de pólo  $\frac{1}{s_{15}s_{34}}$  em  $A(1, 2, 3, 4, 5)$  é

$$R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)} = -V_{51}^\mu V_{34}^\nu \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta^\nu} A^{(3)}(1 + 5, 2, 3 + 4) \quad (\text{D.44})$$

Se compararmos (D.41) com (D.44), concluímos que

$$R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)} = -R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)} \quad (\text{D.45})$$

Isso significa que a parte que diz respeito ao resíduo do pólo  $\frac{1}{s_{15}s_{34}}$  que está contida nos numeradores  $n_5$  e  $n_5''$  diferem entre si apenas pelo sinal. Mas notemos que, em princípio, nada nos garante que os numeradores também sigam essa regra, ou seja, que eles sejam iguais em módulo.

Fazendo o mesmo para todos os pólos que aparecem em mais de uma subamplitude, podemos encontrar diversas outras relações como a de (D.45). Algumas delas estão listadas a seguir:

$$R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,3,2,4,5)} = -R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,2,3,4,5)} \quad (\text{D.46})$$

$$R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)} = -R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)} \quad (\text{D.47})$$

$$R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,2,4,5)} = -R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)} \quad (\text{D.48})$$

$$R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,2,4,5)} = -R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)} \quad (\text{D.49})$$

Como o objetivo desta seção é encontrar uma relação entre os numeradores e não somente entre os resíduos, vamos, com um procedimento análogo ao que foi usado na seção (D.1), verificar se as relações entre os resíduos dadas de (D.45) a (D.49) podem ser estendidas aos numeradores. Vamos começar admitindo que isso seja verdade:

$$R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)} = -R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)} \longrightarrow n_5'' = -n_5 \quad (\text{D.50})$$

$$R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,3,2,4,5)} = -R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,2,3,4,5)} \longrightarrow n_2''' = -n_2 \quad (\text{D.51})$$

$$R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)} = -R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)} \longrightarrow n_4' = -n_4 \quad (\text{D.52})$$

$$R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,2,4,5)} = -R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)} \longrightarrow n_{10}' = -n_{10} \quad (\text{D.53})$$

$$R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,2,4,5)} = -R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)} \longrightarrow n_{11}''' = -n_{11} \quad (\text{D.54})$$

A ideia é escrevermos expressões explícitas para os numeradores de modo que as relações acima sejam obedecidas. E, em seguida, utilizaremos uma relação conhecida entre as subamplitudes para verificarmos se há consistência ou não.

### 1ª Etapa:

Fazendo, então,  $\{\alpha\} = \{3, 4\}$  e  $\{\beta\} = \{2\}$  na fórmula de Kleiss-Kuijff dada em (3.1), obtemos a seguinte relação:

$$A(1, 2, 3, 4, 5) + A(1, 3, 4, 2, 5) + A(1, 3, 2, 4, 5) + A(1, 3, 4, 5, 2) = 0 \quad (\text{D.55})$$

Para as três primeiras subamplitudes já são conhecidas as expressões em termos de seus pólos. Da mesma forma que as obtivemos na seção (4.4.1), não é difícil encontrar a expressão para  $A(1, 3, 4, 5, 2)$ :

$$A(1, 3, 4, 5, 2) = \frac{n_9'}{s_{13}s_{25}} + \frac{n_1'}{s_{12}s_{45}} + \frac{n_8''}{s_{25}s_{34}} + \frac{n_{15}'}{s_{13}s_{45}} + \frac{n_3''}{s_{12}s_{34}} \quad (\text{D.56})$$

E relacionando os resíduos desta subamplitude com os das outras por meio da regra da fatoração (D.5), também obtemos que:

$$R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,4,5,2)} = -R_{s_{15}s_{25}}^{A(1,3,4,2,5)} \quad (\text{D.57})$$

$$R_{s_{12}s_{45}}^{A(1,3,4,5,2)} = -R_{s_{12}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)} \quad (\text{D.58})$$

$$R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,3,4,5,2)} = -R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)} \quad (\text{D.59})$$

$$R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,4,5,2)} = -R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)} \quad (\text{D.60})$$

$$R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,3,4,5,2)} = -R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)} \quad (\text{D.61})$$

$$(\text{D.62})$$

Da mesma forma que fizemos para as outras relações entre resíduos, vamos assumir que elas se estendem aos numeradores, ou seja:

$$R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,4,5,2)} = -R_{s_{15}s_{25}}^{A(1,3,4,2,5)} \implies n'_9 = -n_9 \quad (\text{D.63})$$

$$R_{s_{12}s_{45}}^{A(1,3,4,5,2)} = -R_{s_{12}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)} \implies n'_1 = -n_1 \quad (\text{D.64})$$

$$R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,3,4,5,2)} = -R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)} \implies n''_8 = -n'_8 \quad (\text{D.65})$$

$$R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,4,5,2)} = -R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)} \implies n'_{15} = -n_{15} \quad (\text{D.66})$$

$$R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,3,4,5,2)} = -R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)} \implies n''_3 = -n_3 \quad (\text{D.67})$$

$$(\text{D.68})$$

Reescrevamos agora a primeira das subamplitudes envolvidas na relação (D.55) de uma forma mais conveniente, explicitando os resíduos de cada pólo e os termos de ordens mais baixas:

$$\begin{aligned} A(1, 2, 3, 4, 5) &= \frac{R_{s_{12}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)}}{s_{12}s_{45}} + \frac{R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,2,3,4,5)}}{s_{15}s_{23}} + \frac{R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)}}{s_{12}s_{34}} + \frac{R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)}}{s_{23}s_{45}} + \frac{R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)}}{s_{12}s_{34}} \\ &+ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \end{aligned} \quad (\text{D.69})$$

$$\begin{aligned} A(1, 3, 4, 2, 5) &= \frac{R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{13}s_{25}} + \frac{R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{15}s_{34}} + \frac{R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{13}s_{24}} + \frac{R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{25}s_{34}} + \frac{R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{15}s_{24}} + \\ &+ \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 \end{aligned} \quad (\text{D.70})$$

$$\begin{aligned} A(1, 3, 2, 4, 5) &= \frac{R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)}}{s_{13}s_{45}} + \frac{R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,3,2,4,5)}}{s_{15}s_{23}} + \frac{R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,2,4,5)}}{s_{13}s_{24}} + \frac{R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)}}{s_{23}s_{45}} + \frac{R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,2,4,5)}}{s_{15}s_{24}} + \alpha_{10} \\ & \quad (\text{D.71}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(1, 3, 4, 5, 2) &= \frac{R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,4,5,2)}}{s_{13}s_{25}} + \frac{R_{s_{12}s_{45}}^{A(1,3,4,5,2)}}{s_{12}s_{45}} + \frac{R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,3,4,5,2)}}{s_{25}s_{34}} + \frac{R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,4,5,2)}}{s_{13}s_{45}} + \frac{R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,3,4,5,2)}}{s_{12}s_{34}} + \alpha_{11} \\ & \quad (\text{D.72}) \end{aligned}$$

Os  $\alpha_i$ 's representam os termos de ordens mais baixas que são os que contêm pólo simples e os que não contêm pólo.

Vamos reescrever (D.69) reposicionando os  $\alpha_i$ 's de modo que a subamplitude adote a forma da expressão em (4.58):

$$\begin{aligned} A(1, 2, 3, 4, 5) &= \frac{R_{s_{12}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_1 s_{12}s_{45}}{s_{12}s_{45}} + \frac{R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_2 s_{15}s_{23}}{s_{15}s_{23}} + \frac{R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_3 s_{12}s_{34}}{s_{12}s_{34}} + \\ &+ \frac{R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_4 s_{23}s_{45}}{s_{23}s_{45}} + \frac{R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_5 s_{15}s_{34}}{s_{15}s_{34}} \end{aligned} \quad (\text{D.73})$$

Se compararmos a expressão anterior com a de (4.58), podemos identificar os seguintes numeradores:

$$n_1 = R_{s_{12}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_1 s_{12}s_{45} \quad (\text{D.74})$$

$$n_2 = R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_2 s_{15}s_{23} \quad (\text{D.75})$$

$$n_3 = R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_3 s_{12}s_{34} \quad (\text{D.76})$$

$$n_4 = R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_4 s_{23}s_{45} \quad (\text{D.77})$$

$$n_5 = R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_5 s_{15}s_{34} \quad (\text{D.78})$$

Então,

$$A(1, 2, 3, 4, 5) = \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} + \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} + \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} \quad (\text{D.79})$$

Passando para a segunda subamplitude,  $A(1, 3, 4, 2, 5)$ , temos que:

$$\begin{aligned} A(1, 3, 4, 2, 5) &= \frac{R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{13}s_{25}} + \frac{R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{15}s_{34}} + \frac{R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{13}s_{24}} + \frac{R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{25}s_{34}} + \frac{R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{15}s_{24}} + \\ &+ \{\text{termos de ordens mais baixas}\} \end{aligned} \quad (\text{D.80})$$

Substituindo a relação (D.45):

$$\begin{aligned} A(1, 3, 4, 2, 5) &= \frac{R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{13}s_{25}} - \frac{R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)}}{s_{15}s_{34}} + \frac{R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{13}s_{24}} + \frac{R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{25}s_{34}} + \frac{R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{15}s_{24}} + \\ &+ \{\text{termos de ordens mais baixas}\} \end{aligned} \quad (\text{D.81})$$

Notemos que o pólo  $\frac{1}{s_{15}s_{34}}$  está presente em  $A(1, 2, 3, 4, 5)$  e  $A(1, 3, 4, 2, 5)$ . De acordo com (4.58), (4.60) e (D.50), queremos que o numerador de  $s_{15}s_{34}$  em  $A(1, 3, 4, 2, 5)$  ( $n_5''$ ) seja igual a menos o numerador de  $s_{15}s_{34}$  em  $A(1, 2, 3, 4, 5)$  ( $n_5$ ). Da igualdade em (D.78) conhecemos que

$$n_5 = R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_5 s_{15}s_{34} \quad (\text{D.82})$$

Portanto, para satisfazer (D.50) devemos ter que o numerador de  $s_{15}s_{34}$  em  $A(1, 3, 4, 2, 5)$  vale:

$$n_5'' = -n_5 = -(R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_5 s_{15}s_{34}) \quad (\text{D.83})$$

Sabendo disso, reescrevamos (D.81) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A(1, 3, 4, 2, 5) &= \frac{R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{13}s_{25}} - \frac{R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)}}{s_{15}s_{34}} + \frac{R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{13}s_{24}} + \frac{R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{25}s_{34}} + \frac{R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{15}s_{24}} + \\ &- \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 \end{aligned} \quad (\text{D.84})$$

O que foi feito acima foi simplesmente definir os termos de ordens mais baixas de  $-\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9$  por conveniência, o que nos é permitido pois, apesar de  $\alpha_5$  já ter aparecido em (D.69),  $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$  e  $\alpha_9$  são, até agora, totalmente arbitrários.

Distribuindo os termos  $\alpha_i$ 's presentes em (D.84) pelos numeradores, podemos escrever:

$$\begin{aligned} A(1, 3, 4, 2, 5) &= \frac{R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,4,2,5)} + \alpha_6 s_{13}s_{25}}{s_{13}s_{25}} - \frac{R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_5 s_{15}s_{34}}{s_{15}s_{34}} + \frac{R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)} + \alpha_7 s_{13}s_{24}}{s_{13}s_{24}} + \\ &+ \frac{R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)} + \alpha_8 s_{25}s_{34}}{s_{25}s_{34}} + \frac{R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)} + \alpha_9 s_{15}s_{24}}{s_{15}s_{24}} \end{aligned} \quad (D.85)$$

Vemos na expressão anterior que o numerador de  $s_{15}s_{34}$  é igual a  $-n_5$ , dado em (D.78). Podemos, então, definir os demais numeradores de modo que a expressão adote a forma em (4.60). Logo,

$$A(1, 3, 4, 2, 5) = \frac{n_9}{s_{13}s_{25}} - \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} + \frac{n'_8}{s_{25}s_{34}} + \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (D.86)$$

onde

$$n_9 \doteq R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,4,2,5)} + \alpha_6 s_{13}s_{25} \quad (D.87)$$

$$n_{10} \doteq R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)} + \alpha_7 s_{13}s_{24} \quad (D.88)$$

$$n'_8 \doteq R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,4,2,5)} + \alpha_8 s_{25}s_{34} \quad (D.89)$$

$$n_{11} \doteq R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)} + \alpha_9 s_{15}s_{24} \quad (D.90)$$

Agora para a terceira subamplitude  $A(1, 3, 2, 4, 5)$ :

$$\begin{aligned} A(1, 3, 2, 4, 5) &= \frac{R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)}}{s_{13}s_{45}} + \frac{R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,3,2,4,5)}}{s_{15}s_{23}} + \frac{R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,2,4,5)}}{s_{13}s_{24}} + \frac{R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)}}{s_{23}s_{45}} + \frac{R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,2,4,5)}}{s_{15}s_{24}} + \\ &+ \{\text{termos de ordens mais baixas}\} \end{aligned} \quad (D.91)$$

Substituindo as relações (D.46), (D.47), (D.48) e (D.49) na igualdade anterior:

$$\begin{aligned} A(1, 3, 2, 4, 5) &= \frac{R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)}}{s_{13}s_{45}} - \frac{R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,2,3,4,5)}}{s_{15}s_{23}} - \frac{R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{13}s_{24}} - \frac{R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)}}{s_{23}s_{45}} - \frac{R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{15}s_{24}} + \\ &+ \{\text{termos de ordens mais baixas}\} \end{aligned} \quad (D.92)$$

Notemos que quatro dos pólos presentes acima já apareceram nas outras duas primeiras subamplitudes  $A(1, 2, 3, 4, 5)$  e  $A(1, 3, 4, 2, 5)$ , dadas em (D.79) e (D.86), respectivamente. Como assumimos que as relações entre os numeradores dadas em (D.50),

(D.51), (D.52), (D.53) e (D.54) são válidas, podemos reescrever  $A(1, 3, 2, 4, 5)$  em (D.92) da seguinte forma:

$$A(1, 3, 2, 4, 5) = \frac{R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)}}{s_{13}s_{45}} - \frac{R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,2,3,4,5)}}{s_{15}s_{23}} - \frac{R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{13}s_{24}} - \frac{R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)}}{s_{23}s_{45}} - \frac{R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)}}{s_{15}s_{24}} + \alpha_2 - \alpha_7 - \alpha_4 - \alpha_9 + \alpha_{10} \quad (D.93)$$

Novamente, o que foi feito acima (assim como em (D.84)) foi simplesmente definir os termos de ordens mais baixas de  $-\alpha_2 - \alpha_7 - \alpha_4 - \alpha_9 + \alpha_{10}$  por conveniência, o que nos é permitido pois, apesar de  $\alpha_2$ ,  $\alpha_7$ ,  $\alpha_4$  e  $\alpha_9$  já terem sido definidos antes,  $\alpha_{10}$  é, até agora, totalmente arbitrário.

Distribuindo os termos  $\alpha_i$ 's presentes em (D.93) pelos numeradores, podemos escrever:

$$A(1, 3, 2, 4, 5) = \frac{R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)} + \alpha_{10}s_{13}s_{45}}{s_{13}s_{45}} - \frac{R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_2s_{15}s_{23}}{s_{15}s_{23}} - \frac{R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)} + \alpha_7s_{13}s_{24}}{s_{13}s_{24}} + \frac{R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)} + \alpha_4s_{23}s_{45}}{s_{23}s_{45}} - \frac{R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,4,2,5)} + \alpha_9s_{15}s_{24}}{s_{15}s_{24}} \quad (D.94)$$

Podemos, de novo, identificar alguns numeradores na expressão acima com  $n_2$ ,  $n_4$ ,  $n_{10}$ ,  $n_{11}$  já definidos anteriormente:

$$A(1, 3, 2, 4, 5) = \frac{R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)} + \alpha_{10}s_{13}s_{45}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} - \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} - \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} - \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (D.95)$$

Para que a expressão anterior fique da forma dada em (4.63), vamos definir o numerador  $n_{15}$ :

$$A(1, 3, 2, 4, 5) = \frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} - \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} - \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} - \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (D.96)$$

onde

$$n_{15} \doteq R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)} + \alpha_{10} s_{13}s_{45} \quad (D.97)$$

E, por último, temos  $A(1, 3, 4, 5, 2)$  que, reescrita, fica da seguinte forma:

$$A(1, 3, 4, 5, 2) = \frac{R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,4,5,2)}}{s_{13}s_{25}} + \frac{R_{s_{12}s_{45}}^{A(1,2,4,5,2)}}{s_{12}s_{45}} + \frac{R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,3,4,5,2)}}{s_{25}s_{34}} + \frac{R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,2,4,5,2)}}{s_{13}s_{45}} + \frac{R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,3,4,5,2)}}{s_{12}s_{34}} + \{\text{termos de ordens mais baixas}\} \quad (D.98)$$

Todos os pólos que estão presentes na expressão anterior já apareceram em algumas das outras 3 subamplitudes  $A(1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $A(1, 3, 2, 4, 5)$  e  $A(1, 3, 4, 2, 5)$ . Sabendo

disso, é conveniente escrevermos:

$$A(1, 3, 4, 5, 2) = \frac{R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,4,5,2)}}{s_{13}s_{25}} + \frac{R_{s_{12}s_{45}}^{A(1,2,4,5,2)}}{s_{12}s_{45}} + \frac{R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,3,4,5,2)}}{s_{25}s_{34}} + \frac{R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,2,4,5,2)}}{s_{13}s_{45}} + \frac{R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,3,4,5,2)}}{s_{12}s_{34}} + \alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_6 - \alpha_8 - \alpha_{10} + \alpha_{11} \quad (\text{D.99})$$

onde  $\alpha_{11}$ , por enquanto, é totalmente arbitrário.

Usando, agora, as definições dos numeradores  $n_1$ ,  $n_3$ ,  $n'_8$ ,  $n_9$  e  $n_{15}$  dadas, respectivamente, em (D.74), (D.76), (D.89), (D.87) e (D.97), obtemos que:

$$A(1, 3, 4, 5, 2) = -\frac{n_9}{s_{13}s_{25}} - \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} - \frac{n'_8}{s_{25}s_{34}} - \frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \alpha_{11} \quad (\text{D.100})$$

Se compararmos a expressão anterior com a de (D.56), concluímos que todo o procedimento realizado até aqui é consistente se, e somente se,  $\alpha_{11} = 0$ . Para confirmarmos se isso de fato acontece, vamos utilizar a relação de Kleiss-Kuijf já mencionada anteriormente em (D.55):

$$A(1, 2, 3, 4, 5) + A(1, 3, 4, 2, 5) + A(1, 3, 2, 4, 5) + A(1, 3, 4, 5, 2) = 0 \quad (\text{D.101})$$

Substituamos nesta relação as expressões das subamplitudes dadas em (D.79), (D.86), (D.96) e (D.100):

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} + \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} + \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} \right] + \left[ \frac{n_9}{s_{13}s_{25}} - \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} + \frac{n'_8}{s_{25}s_{34}} + \right. \\ & \left. + \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \right] + \left[ \frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} - \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} - \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} - \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \right] + \left[ -\frac{n_9}{s_{13}s_{25}} - \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} + \right. \\ & \left. - \frac{n'_8}{s_{25}s_{34}} - \frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \alpha_{11} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.102})$$

Simplificando, nos resta que:

$$\implies \alpha_{11} = 0 \quad (\text{D.103})$$

como queríamos obter.

A conclusão é que a hipótese feita de (D.50) até (D.54) e de (D.63) até (D.67), de que os numeradores seguem a mesma relação de sinais existente entre os resíduos que eles contêm, é verdadeira. No entanto, isso só foi provado, em princípio, para um conjunto de 4 subamplitudes que são as que aparecem na relação Kleiss-Kuijf em (D.55). Ou seja, até

agora, sabemos de fato que:

$$A(1, 2, 3, 4, 5) = \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} + \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} + \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} \quad (\text{D.104})$$

$$A(1, 3, 4, 2, 5) = \frac{n_9}{s_{13}s_{25}} - \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} + \frac{n'_8}{s_{25}s_{34}} + \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (\text{D.105})$$

$$A(1, 3, 2, 4, 5) = \frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} - \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} - \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} - \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (\text{D.106})$$

$$A(1, 3, 4, 5, 2) = -\frac{n_9}{s_{13}s_{25}} - \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} - \frac{n'_8}{s_{25}s_{34}} - \frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} \quad (\text{D.107})$$

Para provar para as demais subamplitudes, é preciso repetir todo o procedimento feito anteriormente, desta vez usando relações Kleiss-Kuijf diferentes que envolvam outras subamplitudes.

Façamos isso, porém vamos omitir os detalhes, já que o procedimento é exatamente o mesmo.

### 2ª Etapa:

Fazendo  $\{\alpha\} = \{4, 3\}$  e  $\{\beta\} = \{2\}$  na fórmula de Kleiss-Kuijf dada em (3.1), obtemos a seguinte relação:

$$A(1, 4, 3, 2, 5) + A(1, 2, 4, 3, 5) + A(1, 4, 2, 3, 5) + A(1, 4, 3, 5, 2) = 0 \quad (\text{D.108})$$

E como nesta relação há uma subamplitude que até agora não tinha aparecido, escrevamos a expressão para ela em termos dos seus pólos:

$$A(1, 4, 3, 5, 2) = \frac{n'_6}{s_{14}s_{25}} + \frac{n'_{12}}{s_{12}s_{35}} + \frac{n'''_8}{s_{25}s_{34}} + \frac{n'_{14}}{s_{14}s_{35}} + \frac{n'''_3}{s_{12}s_{34}} \quad (\text{D.109})$$

Utilizando a regra da fatoração (D.5), obtemos as seguintes relações entre os

resíduos:

$$R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,4,2,3,5)} = -R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,4,3,2,5)} \quad (\text{D.110})$$

$$R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,4,3,5,2)} = -R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,2,4,3,5)} \quad (\text{D.111})$$

$$R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,2,4,3,5)} = -R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,4,3,2,5)} \quad (\text{D.112})$$

$$R_{s_{14}s_{25}}^{A(1,4,3,5,2)} = -R_{s_{14}s_{25}}^{A(1,4,3,2,5)} \quad (\text{D.113})$$

$$R_{s_{14}s_{23}}^{A(1,4,2,3,5)} = -R_{s_{14}s_{23}}^{A(1,4,3,2,5)} \quad (\text{D.114})$$

$$R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,4,3,5,2)} = -R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,4,3,2,5)} \quad (\text{D.115})$$

$$R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,4,2,3,5)} = -R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,4,3,2,5)} \quad (\text{D.116})$$

$$R_{s_{12}s_{35}}^{A(1,4,3,5,2)} = -R_{s_{12}s_{35}}^{A(1,2,4,3,5)} \quad (\text{D.117})$$

$$R_{s_{24}s_{35}}^{A(1,4,2,3,5)} = -R_{s_{24}s_{35}}^{A(1,2,4,3,5)} \quad (\text{D.118})$$

$$R_{s_{14}s_{35}}^{A(1,4,3,5,2)} = -R_{s_{14}s_{35}}^{A(1,4,2,3,5)} \quad (\text{D.119})$$

Assim como ocorreu na etapa anterior, os resíduos de um determinado pólo possuem módulos iguais, mas sinais opostos.

Vamos, novamente, assumir que os numeradores também obedeçam relações análogas às dos respectivos resíduos:

$$R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,4,2,3,5)} = -R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,4,3,2,5)} \implies n_2'' = -n_2' \quad (\text{D.120})$$

$$R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,4,3,5,2)} = -R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,2,4,3,5)} \implies n_3''' = -n_3' \quad (\text{D.121})$$

$$R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,2,4,3,5)} = -R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,4,3,2,5)} \implies n_5''' = -n_5' \quad (\text{D.122})$$

$$R_{s_{14}s_{25}}^{A(1,4,3,5,2)} = -R_{s_{14}s_{25}}^{A(1,4,3,2,5)} \implies n_6' = -n_6 \quad (\text{D.123})$$

$$R_{s_{14}s_{23}}^{A(1,4,2,3,5)} = -R_{s_{14}s_{23}}^{A(1,4,3,2,5)} \implies n_7' = -n_7 \quad (\text{D.124})$$

$$R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,4,3,5,2)} = -R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,4,3,2,5)} \implies n_8''' = -n_8 \quad (\text{D.125})$$

$$R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,4,2,3,5)} = -R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,4,3,2,5)} \implies n_{11}'' = -n_{11}' \quad (\text{D.126})$$

$$R_{s_{12}s_{35}}^{A(1,4,3,5,2)} = -R_{s_{12}s_{35}}^{A(1,2,4,3,5)} \implies n_{12}' = -n_{12} \quad (\text{D.127})$$

$$R_{s_{24}s_{35}}^{A(1,4,2,3,5)} = -R_{s_{24}s_{35}}^{A(1,2,4,3,5)} \implies n_{13}' = -n_{13} \quad (\text{D.128})$$

$$R_{s_{14}s_{35}}^{A(1,4,3,5,2)} = -R_{s_{14}s_{35}}^{A(1,4,2,3,5)} \implies n_{14}' = -n_{14} \quad (\text{D.129})$$

A partir daqui, devemos repetir o mesmo procedimento que foi realizado da

equação em (D.69) até a em (D.100). Fazendo isso, o que vamos obter será que:

$$A(1, 4, 3, 2, 5) = \frac{n_6}{s_{14}s_{25}} + \frac{n'_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_7}{s_{14}s_{23}} + \frac{n_8}{s_{25}s_{34}} + \frac{n'_2}{s_{15}s_{23}} \quad (\text{D.130})$$

$$A(1, 2, 4, 3, 5) = \frac{n_{12}}{s_{12}s_{35}} + \frac{n'_{11}}{s_{15}s_{24}} + \frac{n'_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_{13}}{s_{24}s_{35}} - \frac{n'_5}{s_{15}s_{34}} \quad (\text{D.131})$$

$$A(1, 4, 2, 3, 5) = \frac{n_{14}}{s_{14}s_{35}} - \frac{n'_{11}}{s_{15}s_{24}} - \frac{n_7}{s_{14}s_{23}} - \frac{n_{13}}{s_{24}s_{35}} - \frac{n'_2}{s_{15}s_{23}} \quad (\text{D.132})$$

$$A(1, 4, 3, 5, 2) = -\frac{n_6}{s_{14}s_{25}} - \frac{n_{12}}{s_{12}s_{35}} - \frac{n_8}{s_{25}s_{34}} - \frac{n_{14}}{s_{14}s_{35}} - \frac{n'_3}{s_{12}s_{34}} + \beta \quad (\text{D.133})$$

onde  $\beta$  é, assim como  $\alpha_{11}$  na 1ª etapa, é uma função arbitrária das polarizações e dos momentos. Mas para que a hipótese inicial seja válida, é preciso que  $\beta = 0$ . Para confirmar isso, é necessário ver se as expressões anteriores são consistentes com a relação (D.108). E não é difícil ver que, substituindo as subamplitudes na relação Kleiss-Kuijf, efetivamente chegamos a que  $\beta = 0$ .

Desse modo, fica provado que a hipótese de que os numeradores seguem as relações de (D.120) a (D.129) também é verdadeira neste caso.

Em resumo, depois dessas duas etapas, as 6 subamplitudes da base estão escritas da seguinte forma:

$$A(1, 2, 3, 4, 5) = \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} + \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} + \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} \quad (\text{D.134})$$

$$A(1, 4, 3, 2, 5) = \frac{n_6}{s_{14}s_{25}} + \frac{n'_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_7}{s_{14}s_{23}} + \frac{n_8}{s_{25}s_{34}} + \frac{n'_2}{s_{15}s_{23}} \quad (\text{D.135})$$

$$A(1, 3, 4, 2, 5) = \frac{n_9}{s_{13}s_{25}} - \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} + \frac{n'_8}{s_{25}s_{34}} + \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (\text{D.136})$$

$$A(1, 2, 4, 3, 5) = \frac{n_{12}}{s_{12}s_{35}} + \frac{n'_{11}}{s_{15}s_{24}} + \frac{n'_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_{13}}{s_{24}s_{35}} - \frac{n'_5}{s_{15}s_{34}} \quad (\text{D.137})$$

$$A(1, 4, 2, 3, 5) = \frac{n_{14}}{s_{14}s_{35}} - \frac{n'_{11}}{s_{15}s_{24}} - \frac{n_7}{s_{14}s_{23}} - \frac{n_{13}}{s_{24}s_{35}} - \frac{n'_2}{s_{15}s_{23}} \quad (\text{D.138})$$

$$A(1, 3, 2, 4, 5) = \frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} - \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} - \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} - \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (\text{D.139})$$

$$A(1, 3, 4, 5, 2) = -\frac{n_9}{s_{13}s_{25}} - \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} - \frac{n'_8}{s_{25}s_{34}} - \frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} \quad (\text{D.140})$$

$$A(1, 4, 3, 5, 2) = -\frac{n_6}{s_{14}s_{25}} - \frac{n_{12}}{s_{12}s_{35}} - \frac{n_8}{s_{25}s_{34}} - \frac{n_{14}}{s_{14}s_{35}} - \frac{n'_3}{s_{12}s_{34}} + \beta \quad (\text{D.141})$$

Notemos que ainda há alguns pólos que, ao se repetirem, estão com numeradores completamente diferentes. Por exemplo, o pólo  $\frac{1}{s_{15}s_{34}}$  aparece em  $A(1, 2, 3, 4, 5)$  e  $A(1, 4, 3, 2, 5)$  com os numeradores  $n_5$  e  $n'_5$ , respectivamente. Usando alguma relação Kleiss-Kuijf que contenha essas subamplitudes, deve ser possível relacionar também esses

numeradores. Portanto, devemos continuar repetindo o procedimento.

### 3ª Etapa

Fazendo  $\{\alpha\} = \{3, 2\}$  e  $\{\beta\} = \{4\}$  na fórmula de Kleiss-Kuijff dada em (3.1), obtemos a seguinte relação:

$$A(1, 3, 2, 4, 5) + A(1, 3, 4, 2, 5) + A(1, 4, 3, 2, 5) + A(1, 3, 2, 5, 4) = 0 \quad (\text{D.142})$$

E como nesta relação há uma subamplitude que até agora não tinha aparecido, escrevamos a expressão para ela em termos dos seus pólos:

$$A(1, 3, 2, 5, 4) = \frac{n''_{15}}{s_{13}s_{45}} + \frac{n''_6}{s_{14}s_{25}} + \frac{n''_4}{s_{23}s_{45}} + \frac{n''_9}{s_{13}s_{25}} + \frac{n''_7}{s_{14}s_{23}} \quad (\text{D.143})$$

Com a regra da fatoração (D.5), obtemos as seguintes relações entre os resíduos:

$$R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,5,4)} = -R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)} \quad (\text{D.144})$$

$$R_{s_{14}s_{25}}^{A(1,3,2,5,4)} = -R_{s_{14}s_{25}}^{A(1,4,3,2,5)} \quad (\text{D.145})$$

$$R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,3,2,5,4)} = -R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)} \quad (\text{D.146})$$

$$R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,2,5,4)} = -R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,4,2,5)} \quad (\text{D.147})$$

$$R_{s_{14}s_{23}}^{A(1,3,2,5,4)} = -R_{s_{14}s_{23}}^{A(1,4,3,2,5)} \quad (\text{D.148})$$

$$R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)} = -R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,4,3,2,5)} \quad (\text{D.149})$$

$$R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,4,3,2,5)} = -R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)} \quad (\text{D.150})$$

$$R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,4,3,2,5)} = -R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,3,2,4,5)} \quad (\text{D.151})$$

Assim como ocorreu nas etapas anteriores, os resíduos de um determinado pólo possuem o mesmo módulo, mas sinais opostos.

Vamos, novamente, assumir que os numeradores também obedeçam relações análogas às dos respectivos resíduos: (Obs.: Importante notar que, desta vez, há alguns numeradores que já possuem um sinal negativo em sua definição, como o numerador de  $s_{15}s_{23}$  em  $A(1, 3, 2, 4, 5)$ . Isso vai implicar na hora de escrever as relações para os numeradores

a seguir.)

$$R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,5,4)} = -R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)} \implies n''_{15} = -n_{15} \quad (\text{D.152})$$

$$R_{s_{14}s_{25}}^{A(1,3,2,5,4)} = -R_{s_{14}s_{25}}^{A(1,4,3,2,5)} \implies n''_6 = -n_6 \quad (\text{D.153})$$

$$R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,3,2,5,4)} = -R_{s_{23}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)} \implies n''_4 = n_4 \quad (\text{D.154})$$

$$R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,2,5,4)} = -R_{s_{13}s_{25}}^{A(1,3,4,2,5)} \implies n''_9 = -n_9 \quad (\text{D.155})$$

$$R_{s_{14}s_{23}}^{A(1,3,2,5,4)} = -R_{s_{14}s_{23}}^{A(1,4,3,2,5)} \implies n''_7 = -n_7 \quad (\text{D.156})$$

$$R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)} = -R_{s_{25}s_{34}}^{A(1,4,3,2,5)} \implies n'_8 = -n_8 \quad (\text{D.157})$$

$$R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,4,3,2,5)} = -R_{s_{15}s_{34}}^{A(1,3,4,2,5)} \implies n'_5 = n_5 \quad (\text{D.158})$$

$$R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,4,3,2,5)} = -R_{s_{15}s_{23}}^{A(1,3,2,4,5)} \implies n'_2 = n_2 \quad (\text{D.159})$$

A partir daqui, devemos repetir o mesmo procedimento que foi realizado da equação em (D.69) até a em (D.100). Fazendo isso, o que vamos obter será que:

$$A(1, 3, 2, 4, 5) = \frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} - \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} - \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} - \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (\text{D.160})$$

$$A(1, 3, 4, 2, 5) = \frac{n_9}{s_{13}s_{25}} - \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} - \frac{n_8}{s_{25}s_{34}} + \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (\text{D.161})$$

$$A(1, 4, 3, 2, 5) = \frac{n_6}{s_{14}s_{25}} + \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_7}{s_{14}s_{23}} + \frac{n_8}{s_{25}s_{34}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} \quad (\text{D.162})$$

$$A(1, 3, 2, 5, 4) = -\frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_6}{s_{14}s_{25}} + \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} - \frac{n_9}{s_{13}s_{25}} - \frac{n_7}{s_{14}s_{23}} + \gamma \quad (\text{D.163})$$

onde  $\gamma$  é uma função arbitrária das polarizações e dos momentos. Mas para que a hipótese inicial seja válida, é preciso que  $\gamma = 0$ . Para confirmar isso, é necessário ver se as expressões anteriores são consistentes com a relação (D.142). E, substituindo as subamplitudes na relação Kleiss-Kuijf, efetivamente chegamos a que  $\gamma = 0$ .

Mais uma vez, as relações entre os numeradores dadas de (D.152) a (D.159) são verdadeiras.

#### 4ª Etapa:

Fazendo  $\{\alpha\} = \{2, 4\}$  e  $\{\beta\} = \{3\}$  na fórmula de Kleiss-Kuijf dada em (3.1), obtemos a seguinte relação:

$$A(1, 2, 3, 4, 5) + A(1, 2, 4, 3, 5) + A(1, 3, 2, 4, 5) + A(1, 2, 4, 5, 3) = 0 \quad (\text{D.164})$$

E como nesta relação há uma subamplitude que até agora não tinha aparecido, escrevamos a expressão para ela em termos dos seus pólos:

$$A(1, 2, 4, 5, 3) = \frac{n''_{12}}{s_{12}s_{35}} + \frac{n'''_{15}}{s_{13}s_{45}} + \frac{n''_{13}}{s_{24}s_{35}} + \frac{n''_1}{s_{12}s_{45}} + \frac{n''_{10}}{s_{13}s_{24}} \quad (\text{D.165})$$

Com a regra da fatoração (D.5), obtemos as seguintes relações entre os resíduos:

$$R_{s_{12}s_{35}}^{A(1,2,4,5,3)} = -R_{s_{12}s_{35}}^{A(1,2,4,3,5)} \quad (\text{D.166})$$

$$R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,2,4,5,3)} = -R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)} \quad (\text{D.167})$$

$$R_{s_{24}s_{35}}^{A(1,2,4,5,3)} = -R_{s_{24}s_{35}}^{A(1,2,4,3,5)} \quad (\text{D.168})$$

$$R_{s_{12}s_{45}}^{A(1,2,4,5,3)} = -R_{s_{12}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)} \quad (\text{D.169})$$

$$R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,2,4,5,3)} = -R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,2,4,5)} \quad (\text{D.170})$$

$$R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,2,4,3,5)} = -R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,2,4,5)} \quad (\text{D.171})$$

$$R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,2,4,3,5)} = -R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)} \quad (\text{D.172})$$

Assim como ocorreu nas etapas anteriores, os resíduos de um determinado pólo são iguais em módulo, mas com sinais opostos.

Vamos, de novo, assumir que os numeradores também obedecem relações análogas às dos respectivos resíduos: (Obs.: Novamente, lembremos que aqui também há alguns numeradores que já possuem um sinal negativo em sua definição, como o numerador de  $s_{15}s_{24}$  em  $A(1,3,2,4,5)$ . Isso vai implicar na hora de escrever as relações para os numeradores a seguir.)

$$R_{s_{12}s_{35}}^{A(1,2,4,5,3)} = -R_{s_{12}s_{35}}^{A(1,2,4,3,5)} \implies n''_{12} = -n_{12} \quad (\text{D.173})$$

$$R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,2,4,5,3)} = -R_{s_{13}s_{45}}^{A(1,3,2,4,5)} \implies n'''_{15} = -n_{15} \quad (\text{D.174})$$

$$R_{s_{24}s_{35}}^{A(1,2,4,5,3)} = -R_{s_{24}s_{35}}^{A(1,2,4,3,5)} \implies n''_{13} = -n_{13} \quad (\text{D.175})$$

$$R_{s_{12}s_{45}}^{A(1,2,4,5,3)} = -R_{s_{12}s_{45}}^{A(1,2,3,4,5)} \implies n''_1 = -n_1 \quad (\text{D.176})$$

$$R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,2,4,5,3)} = -R_{s_{13}s_{24}}^{A(1,3,2,4,5)} \implies n''_{10} = n_{10} \quad (\text{D.177})$$

$$R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,2,4,3,5)} = -R_{s_{15}s_{24}}^{A(1,3,2,4,5)} \implies n'_{11} = n_{11} \quad (\text{D.178})$$

$$R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,2,4,3,5)} = -R_{s_{12}s_{34}}^{A(1,2,3,4,5)} \implies n'_3 = -n_3 \quad (\text{D.179})$$

A partir daqui, devemos repetir o mesmo procedimento que foi realizado da equação em (D.69) até a em (D.100). Fazendo isso, o que vamos obter será que:

$$A(1, 2, 3, 4, 5) = \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} + \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} + \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} \quad (\text{D.180})$$

$$A(1, 2, 4, 3, 5) = \frac{n_{12}}{s_{12}s_{35}} + \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} - \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_{13}}{s_{24}s_{35}} - \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} \quad (\text{D.181})$$

$$A(1, 3, 2, 4, 5) = \frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} - \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} - \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} - \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (\text{D.182})$$

$$A(1, 2, 4, 5, 3) = -\frac{n_{12}}{s_{12}s_{35}} - \frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_{13}}{s_{24}s_{35}} - \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} + \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} + \delta \quad (\text{D.183})$$

onde  $\delta$  é uma função arbitrária das polarizações e dos momentos. Mas para que a hipótese inicial seja válida, é preciso que  $\delta = 0$ . Para confirmar isso, é necessário ver se as expressões anteriores são consistentes com a relação (D.164). E, substituindo as subamplitudes na relação Kleiss-Kuijf, efetivamente chegamos a que  $\delta = 0$ .

Mais uma vez, as relações entre os numeradores dadas de (D.173) a (D.179) são verdadeiras.

Portanto, juntando os resultados obtidos nas 4 etapas descritas anteriormente, finalmente chegamos à versão final das expressões das 6 subamplitudes da base:

$$A(1, 2, 3, 4, 5) = \frac{n_1}{s_{12}s_{45}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} + \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} + \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} \quad (\text{D.184})$$

$$A(1, 4, 3, 2, 5) = \frac{n_6}{s_{14}s_{25}} + \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_7}{s_{14}s_{23}} + \frac{n_8}{s_{25}s_{34}} + \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} \quad (\text{D.185})$$

$$A(1, 3, 4, 2, 5) = \frac{n_9}{s_{13}s_{25}} - \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} + \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} - \frac{n_8}{s_{25}s_{34}} + \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (\text{D.186})$$

$$A(1, 2, 4, 3, 5) = \frac{n_{12}}{s_{12}s_{35}} + \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} - \frac{n_3}{s_{12}s_{34}} + \frac{n_{13}}{s_{24}s_{35}} - \frac{n_5}{s_{15}s_{34}} \quad (\text{D.187})$$

$$A(1, 4, 2, 3, 5) = \frac{n_{14}}{s_{14}s_{35}} - \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} - \frac{n_7}{s_{14}s_{23}} - \frac{n_{13}}{s_{24}s_{35}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} \quad (\text{D.188})$$

$$A(1, 3, 2, 4, 5) = \frac{n_{15}}{s_{13}s_{45}} - \frac{n_2}{s_{15}s_{23}} - \frac{n_{10}}{s_{13}s_{24}} - \frac{n_4}{s_{23}s_{45}} - \frac{n_{11}}{s_{15}s_{24}} \quad (\text{D.189})$$

de onde vemos então que, efetivamente, todos os numeradores de um mesmo pólo estão relacionados da mesma forma que os respectivos resíduos.

# Apêndice E

## Diagramas de 6 pernas com apenas vértices cúbicos

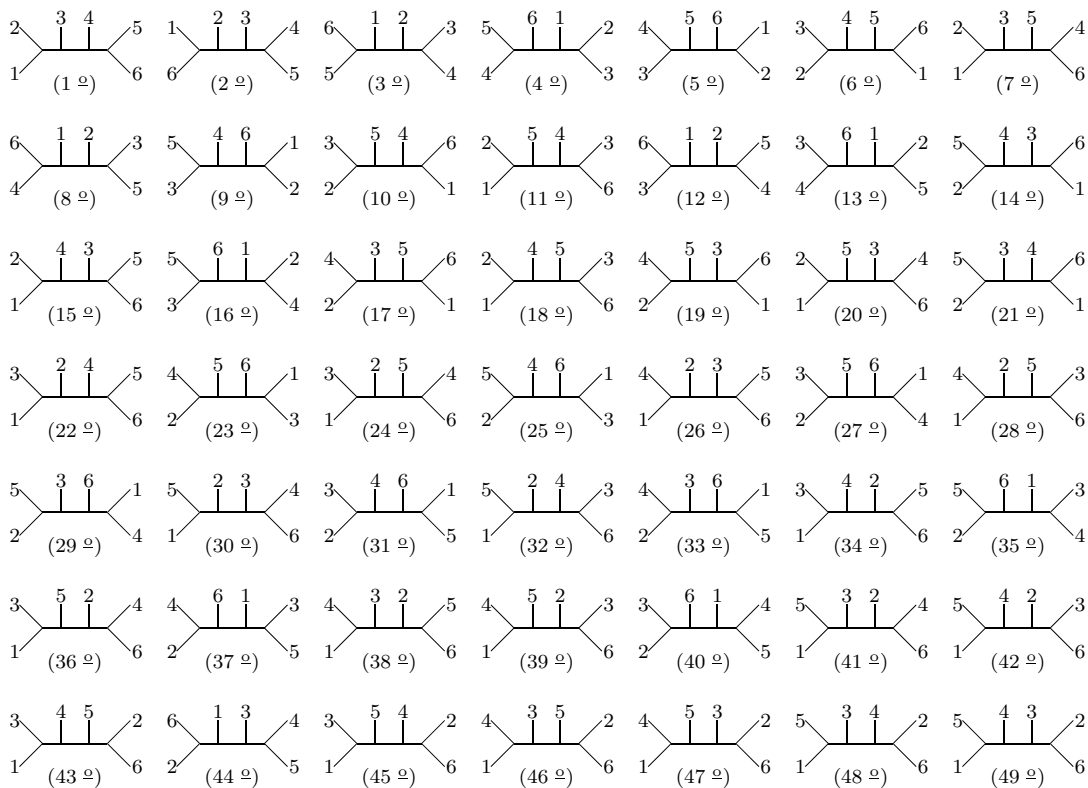
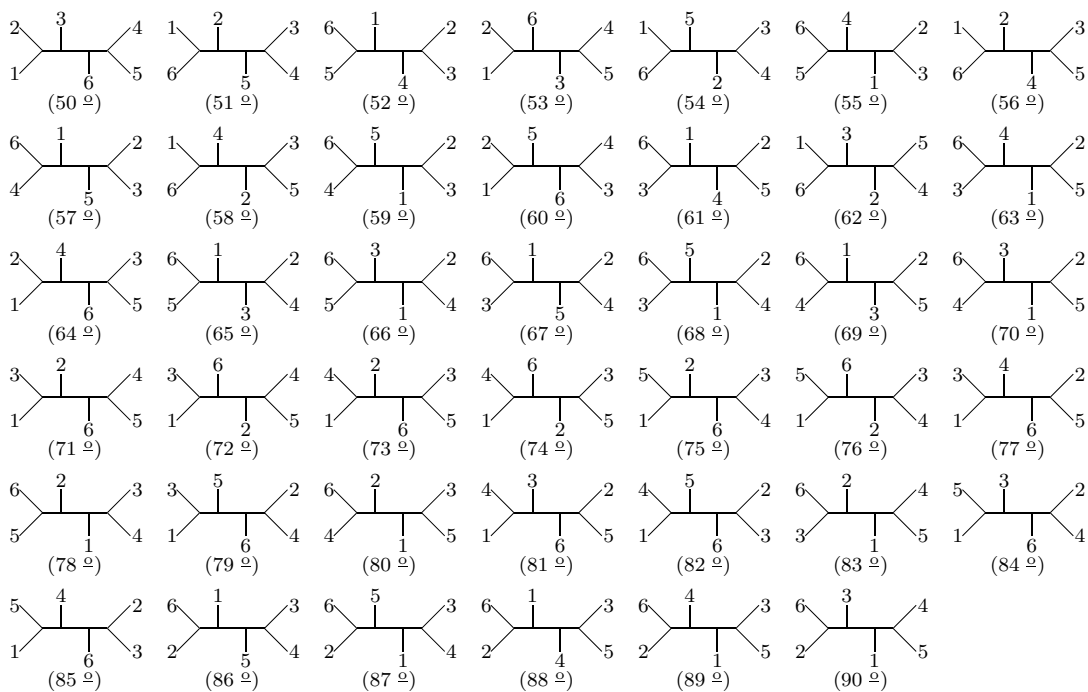
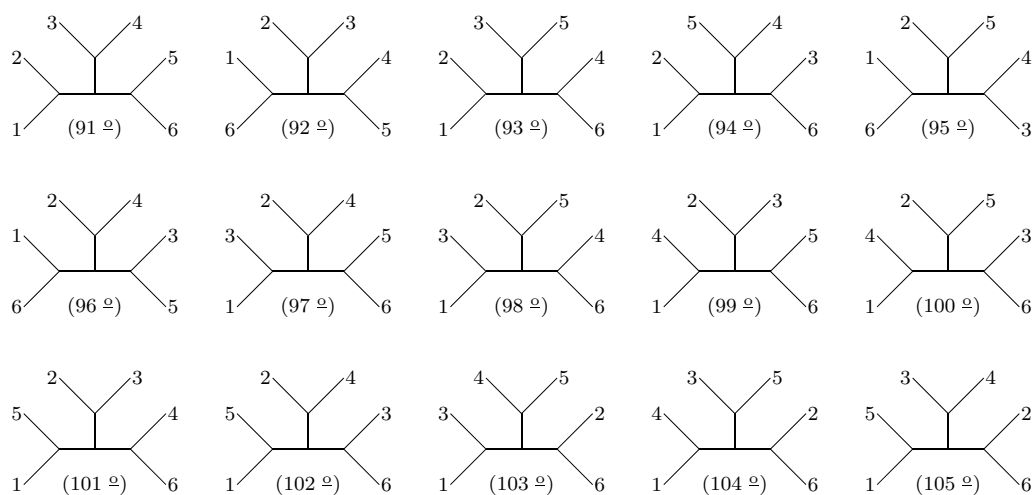


Figura E.1: Diagramas do 1 ° Tipo

Figura E.2: Diagramas do 2<sup>o</sup> TipoFigura E.3: Diagramas do 3<sup>o</sup> Tipo

# Apêndice F

## Definição dos $c_i$ 's para $N = 6$

$$\begin{aligned} c_1 &\doteq f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3}_c f^{c a_4}_d f^{d a_5 a_6}, & c_2 &\doteq f^{a_6 a_1}_b f^{b a_2}_c f^{c a_3}_d f^{d a_4 a_5}, \\ c_3 &\doteq f^{a_5 a_6}_b f^{b a_1}_c f^{c a_2}_d f^{d a_3 a_4}, & c_4 &\doteq f^{a_4 a_5}_b f^{b a_6}_c f^{c a_1}_d f^{d a_2 a_3}, \\ c_5 &\doteq f^{a_3 a_4}_b f^{b a_5}_c f^{c a_6}_d f^{d a_1 a_2}, & c_6 &\doteq f^{a_2 a_3}_b f^{b a_4}_c f^{c a_5}_d f^{d a_6 a_1}, \\ c_7 &\doteq f^{a_1 a_2}_b f^{a_3 a_4}_c f^{a_5 a_6}_d f^{b c d}, & c_8 &\doteq f^{a_6 a_1}_b f^{a_2 a_3}_c f^{a_4 a_5}_d f^{b c d}, \\ c_9 &\doteq f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3}_c f^{c a_6}_d f^{d a_5 a_4}, & c_{10} &\doteq f^{a_1 a_6}_b f^{b a_2}_c f^{c a_5}_d f^{d a_3 a_4}, \\ c_{11} &\doteq f^{a_5 a_6}_b f^{b a_4}_c f^{c a_1}_d f^{d a_2 a_3}, & c_{12} &\doteq f^{a_1 a_2}_b f^{b a_6}_c f^{c a_3}_d f^{d a_5 a_4}, \\ c_{13} &\doteq f^{a_1 a_6}_b f^{b a_5}_c f^{c a_2}_d f^{d a_3 a_4}, & c_{14} &\doteq f^{a_5 a_6}_b f^{b a_4}_c f^{c a_1}_d f^{d a_3 a_2}, \\ c_{15} &\doteq f^{a_1 a_2}_b f^{b a_3}_c f^{c a_5}_d f^{d a_4 a_6}, & c_{16} &\doteq f^{a_4 a_6}_b f^{b a_1}_c f^{c a_2}_d f^{d a_3 a_5}, \\ c_{17} &\doteq f^{a_3 a_5}_b f^{b a_4}_c f^{c a_6}_d f^{d a_1 a_2}, & c_{18} &\doteq f^{a_2 a_3}_b f^{b a_5}_c f^{c a_4}_d f^{d a_6 a_1}, \\ c_{19} &\doteq f^{a_1 a_2}_b f^{a_3 a_5}_c f^{a_4 a_6}_d f^{b c d}, & c_{20} &\doteq f^{a_4 a_6}_b f^{b a_5}_c f^{c a_1}_d f^{d a_3 a_2}, \\ c_{21} &\doteq f^{a_1 a_6}_b f^{b a_2}_c f^{c a_4}_d f^{d a_3 a_5}, & c_{22} &\doteq f^{a_4 a_6}_b f^{b a_1}_c f^{c a_5}_d f^{d a_3 a_2}, \\ c_{23} &\doteq f^{a_1 a_6}_b f^{b a_4}_c f^{c a_2}_d f^{d a_3 a_4}, & c_{24} &\doteq f^{a_1 a_4}_b f^{a_3 a_5}_c f^{a_2 a_6}_d f^{b c d}, \\ c_{25} &\doteq f^{a_1 a_2}_b f^{b a_5}_c f^{c a_4}_d f^{d a_3 a_6}, & c_{26} &\doteq f^{a_3 a_6}_b f^{b a_1}_c f^{c a_2}_d f^{d a_5 a_4}, \\ c_{27} &\doteq f^{a_4 a_3}_b f^{b a_6}_c f^{c a_1}_d f^{d a_2 a_5}, & c_{28} &\doteq f^{a_2 a_5}_b f^{b a_4}_c f^{c a_3}_d f^{d a_6 a_1}, \\ c_{29} &\doteq f^{a_1 a_2}_b f^{a_5 a_4}_c f^{a_3 a_6}_d f^{b c d}, & c_{30} &\doteq f^{a_6 a_1}_b f^{a_2 a_5}_c f^{a_4 a_3}_d f^{b c d}, \\ c_{31} &\doteq f^{a_1 a_2}_b f^{b a_5}_c f^{c a_6}_d f^{d a_3 a_4}, & c_{32} &\doteq f^{a_3 a_6}_b f^{b a_1}_c f^{c a_4}_d f^{d a_5 a_2}, \\ c_{33} &\doteq f^{a_1 a_6}_b f^{b a_3}_c f^{c a_2}_d f^{d a_5 a_4}, & c_{34} &\doteq f^{a_3 a_6}_b f^{b a_4}_c f^{c a_1}_d f^{d a_5 a_2}, \\ c_{35} &\doteq f^{a_1 a_2}_b f^{b a_4}_c f^{c a_3}_d f^{d a_5 a_6}, & c_{36} &\doteq f^{a_3 a_5}_b f^{b a_6}_c f^{c a_1}_d f^{d a_2 a_4}, \\ c_{37} &\doteq f^{a_2 a_4}_b f^{b a_3}_c f^{c a_5}_d f^{d a_6 a_1}, & c_{38} &\doteq f^{a_6 a_1}_b f^{a_2 a_4}_c f^{a_3 a_5}_d f^{b c d}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{39} &\doteq f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_4}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_5 a_3}, & C_{40} &\doteq f^{a_5 a_6}{}_b f^{b a_1}{}_c f^{c a_3}{}_d f^{d a_4 a_2}, \\
C_{41} &\doteq f^{a_5 a_6}{}_b f^{b a_3}{}_c f^{c a_1}{}_d f^{d a_4 a_2}, & C_{42} &\doteq f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_4}{}_c f^{c a_5}{}_d f^{d a_3 a_6}, \\
C_{43} &\doteq f^{a_2 a_4}{}_b f^{b a_5}{}_c f^{c a_3}{}_d f^{d a_6 a_1}, & C_{44} &\doteq f^{a_3 a_6}{}_b f^{b a_1}{}_c f^{c a_5}{}_d f^{d a_4 a_2}, \\
C_{45} &\doteq f^{a_3 a_6}{}_b f^{b a_5}{}_c f^{c a_1}{}_d f^{d a_4 a_2}, & C_{46} &\doteq f^{a_1 a_2}{}_b f^{b a_5}{}_c f^{c a_3}{}_d f^{d a_4 a_6}, \\
C_{47} &\doteq f^{a_2 a_5}{}_b f^{b a_3}{}_c f^{c a_4}{}_d f^{d a_6 a_1}, & C_{48} &\doteq f^{a_4 a_6}{}_b f^{b a_1}{}_c f^{c a_3}{}_d f^{d a_5 a_2}, \\
C_{49} &\doteq f^{a_4 a_6}{}_b f^{b a_3}{}_c f^{c a_1}{}_d f^{d a_5 a_2}, & C_{50} &\doteq f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_2}{}_c f^{c a_4}{}_d f^{d a_5 a_6}, \\
C_{51} &\doteq f^{a_2 a_4}{}_b f^{b a_5}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_1 a_3}, & C_{52} &\doteq f^{a_1 a_3}{}_b f^{a_2 a_4}{}_c f^{a_5 a_6}{}_d f^{b c d}, \\
C_{53} &\doteq f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_2}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_5 a_4}, & C_{54} &\doteq f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_6}{}_c f^{c a_2}{}_d f^{d a_5 a_4}, \\
C_{55} &\doteq f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_2}{}_c f^{c a_5}{}_d f^{d a_4 a_6}, & C_{56} &\doteq f^{a_2 a_5}{}_b f^{b a_4}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_1 a_3}, \\
C_{57} &\doteq f^{a_1 a_3}{}_b f^{a_2 a_5}{}_c f^{a_4 a_6}{}_d f^{b c d}, & C_{58} &\doteq f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_2}{}_c f^{c a_3}{}_d f^{d a_5 a_6}, \\
C_{59} &\doteq f^{a_2 a_3}{}_b f^{b a_5}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_1 a_4}, & C_{60} &\doteq f^{a_1 a_4}{}_b f^{a_2 a_3}{}_c f^{a_5 a_6}{}_d f^{b c d}, \\
C_{61} &\doteq f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_2}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_5 a_3}, & C_{62} &\doteq f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_6}{}_c f^{c a_2}{}_d f^{d a_5 a_3}, \\
C_{63} &\doteq f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_2}{}_c f^{c a_5}{}_d f^{d a_3 a_6}, & C_{64} &\doteq f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_5}{}_c f^{c a_3}{}_d f^{d a_2 a_6}, \\
C_{65} &\doteq f^{a_2 a_5}{}_b f^{b a_3}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_1 a_4}, & C_{66} &\doteq f^{a_1 a_4}{}_b f^{a_2 a_5}{}_c f^{a_3 a_6}{}_d f^{b c d}, \\
C_{67} &\doteq f^{a_1 a_5}{}_b f^{b a_2}{}_c f^{c a_3}{}_d f^{d a_4 a_6}, & C_{68} &\doteq f^{a_2 a_6}{}_b f^{b a_3}{}_c f^{c a_1}{}_d f^{d a_5 a_4}, \\
C_{69} &\doteq f^{a_2 a_3}{}_b f^{b a_4}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_1 a_5}, & C_{70} &\doteq f^{a_1 a_5}{}_b f^{a_2 a_3}{}_c f^{a_4 a_6}{}_d f^{b c d}, \\
C_{71} &\doteq f^{a_1 a_5}{}_b f^{b a_2}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_4 a_3}, & C_{72} &\doteq f^{a_1 a_5}{}_b f^{b a_6}{}_c f^{c a_2}{}_d f^{d a_4 a_3}, \\
C_{73} &\doteq f^{a_1 a_5}{}_b f^{b a_2}{}_c f^{c a_4}{}_d f^{d a_3 a_6}, & C_{74} &\doteq f^{a_1 a_5}{}_b f^{b a_3}{}_c f^{c a_4}{}_d f^{d a_2 a_6}, \\
C_{75} &\doteq f^{a_2 a_4}{}_b f^{b a_3}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_1 a_5}, & C_{76} &\doteq f^{a_1 a_5}{}_b f^{a_2 a_4}{}_c f^{a_3 a_6}{}_d f^{b c d}, \\
C_{77} &\doteq f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_4}{}_c f^{c a_2}{}_d f^{d a_5 a_6}, & C_{78} &\doteq f^{a_2 a_5}{}_b f^{b a_6}{}_c f^{c a_1}{}_d f^{d a_3 a_4}, \\
C_{79} &\doteq f^{a_1 a_5}{}_b f^{a_3 a_4}{}_c f^{a_2 a_6}{}_d f^{b c d}, & C_{80} &\doteq f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_4}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_5 a_2}, \\
C_{81} &\doteq f^{a_5 a_6}{}_b f^{b a_2}{}_c f^{c a_1}{}_d f^{d a_4 a_3}, & C_{82} &\doteq f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_5}{}_c f^{c a_2}{}_d f^{d a_4 a_6}, \\
C_{83} &\doteq f^{a_2 a_4}{}_b f^{b a_6}{}_c f^{c a_1}{}_d f^{d a_3 a_5}, & C_{84} &\doteq f^{a_1 a_5}{}_b f^{b a_4}{}_c f^{c a_3}{}_d f^{d a_2 a_6}, \\
C_{85} &\doteq f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_5}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_4 a_2}, & C_{86} &\doteq f^{a_4 a_6}{}_b f^{b a_2}{}_c f^{c a_1}{}_d f^{d a_5 a_3}, \\
C_{87} &\doteq f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_3}{}_c f^{c a_2}{}_d f^{d a_5 a_6}, & C_{88} &\doteq f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_3}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_5 a_2}, \\
C_{89} &\doteq f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_5}{}_c f^{c a_2}{}_d f^{d a_3 a_6}, & C_{90} &\doteq f^{a_2 a_3}{}_b f^{b a_6}{}_c f^{c a_1}{}_d f^{d a_4 a_5}, \\
C_{91} &\doteq f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_5}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_3 a_2}, & C_{92} &\doteq f^{a_3 a_6}{}_b f^{b a_2}{}_c f^{c a_1}{}_d f^{d a_5 a_4}, \\
C_{93} &\doteq f^{a_1 a_5}{}_b f^{b a_3}{}_c f^{c a_2}{}_d f^{d a_4 a_6}, & C_{94} &\doteq f^{a_1 a_5}{}_b f^{b a_3}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_4 a_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{95} &\doteq f^{a_1 a_5}{}_b f^{b a_4}{}_c f^{c a_2}{}_d f^{d a_3 a_6} , & C_{96} &\doteq f^{a_1 a_5}{}_b f^{b a_4}{}_c f^{c a_6}{}_d f^{d a_3 a_2} , \\
C_{97} &\doteq f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_4}{}_c f^{c a_5}{}_d f^{d a_2 a_6} , & C_{98} &\doteq f^{a_2 a_6}{}_b f^{b a_1}{}_c f^{c a_3}{}_d f^{d a_4 a_5} , \\
C_{99} &\doteq f^{a_1 a_3}{}_b f^{a_4 a_5}{}_c f^{a_2 a_6}{}_d f^{b c d} , & C_{100} &\doteq f^{a_2 a_6}{}_b f^{b a_1}{}_c f^{c a_5}{}_d f^{d a_4 a_3} , \\
C_{101} &\doteq f^{a_2 a_6}{}_b f^{b a_5}{}_c f^{c a_1}{}_d f^{d a_4 a_3} , & C_{102} &\doteq f^{a_1 a_3}{}_b f^{b a_5}{}_c f^{c a_4}{}_d f^{d a_2 a_6} , \\
C_{103} &\doteq f^{a_2 a_6}{}_b f^{b a_1}{}_c f^{c a_4}{}_d f^{d a_5 a_3} , & C_{104} &\doteq f^{a_2 a_6}{}_b f^{b a_1}{}_c f^{c a_4}{}_d f^{d a_5 a_3} , \\
C_{105} &\doteq f^{a_1 a_4}{}_b f^{b a_3}{}_c f^{c a_5}{}_d f^{d a_2 a_6} .
\end{aligned} \tag{F.1}$$

# Apêndice G

## Resolução do sistema formado pelas identidades de Jacobi para $N = 6$

O sistema é formado por 105 equações e 105 incógnitas. Porém as equações não são, necessariamente, linearmente independentes.

$$\begin{aligned} & -c_{38} + c_{23} - c_{21} = 0, -c_{60} - c_{87} + c_{58} = 0, -c_{70} - c_{93} + c_{67} = 0, c_8 + c_{33} - c_2 = 0, \\ & c_8 + c_{90} - c_4 = 0, -c_{38} - c_{83} + c_{36} = 0, c_{30} - c_{78} - c_{27} = 0, -c_{76} - c_{44} + c_{45} = 0, \\ & c_{79} + c_{100} - c_{101} = 0, c_{70} + c_{22} - c_{20} = 0, c_{66} + c_{32} - c_{34} = 0, -c_{25} + c_{34} + c_{73} = 0, \\ & c_{31} - c_{27} + c_{71} = 0, -c_{12} + c_{98} + c_2 = 0, c_{76} + c_{95} - c_{73} = 0, c_{39} - c_{36} - c_{61} = 0, \\ & c_{29} - c_{12} + c_9 = 0, c_{66} - c_{65} - c_{88} = 0, c_{76} - c_{75} - c_{94} = 0, c_{38} - c_{37} + c_{43} = 0, \\ & -c_{19} - c_{46} + c_{15} = 0, -c_{24} - c_{64} + c_{105} = 0, -c_7 - c_{35} + c_1 = 0, -c_{79} - c_{84} + c_{74} = 0, \\ & c_{30} + c_{47} - c_{28} = 0, c_{99} + c_{54} - c_{53} = 0, c_{24} + c_{62} - c_{61} = 0, c_{79} + c_{72} - c_{71} = 0, \\ & -c_{57} - c_{82} + c_{55} = 0, -c_{66} - c_{89} + c_{63} = 0, -c_{30} - c_{13} + c_{10} = 0, -c_{52} - c_{77} + c_{50} = 0, \\ & c_{46} - c_{49} - c_{67} = 0, -c_{56} + c_{32} - c_{28} = 0, -c_{88} + c_{87} - c_{105} = 0, -c_{78} + c_{81} - c_{101} = 0, \\ & c_{54} + c_{26} - c_{33} = 0, -c_5 + c_{12} + c_{17} = 0, -c_{100} + c_{98} + c_{103} = 0, c_{36} - c_{41} + c_{45} = 0, \\ & -c_{61} + c_{58} - c_{63} = 0, -c_{31} - c_{46} + c_{25} = 0, c_{71} - c_{67} + c_{73} = 0, -c_{27} - c_{49} + c_{34} = 0, \\ & c_{39} - c_{35} + c_{42} = 0, -c_{69} + c_{11} - c_6 = 0, -c_{15} + c_{20} + c_{55} = 0, c_{53} - c_{50} + c_{55} = 0, \\ & -c_9 + c_1 - c_{15} = 0, -c_4 + c_{14} - c_{20} = 0, -c_{35} + c_{41} + c_{58} = 0, -c_{72} + c_3 - c_{13} = 0, \\ & -c_{75} + c_{40} - c_{37} = 0, -c_9 + c_4 + c_{53} = 0, -c_{42} + c_{45} + c_{63} = 0, c_{60} + c_{11} - c_{14} = 0, \\ & c_7 - c_3 - c_{81} = 0, c_{19} - c_{16} - c_{86} = 0, c_{29} + c_{92} - c_{26} = 0, c_7 - c_5 + c_{31} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{52} - c_{51} - c_{85} &= 0, c_{60} - c_{59} - c_{91} = 0, c_{57} - c_{56} - c_{80} = 0, c_{70} - c_{69} - c_{96} = 0, \\
c_{19} - c_{17} - c_{39} &= 0, c_{29} - c_{25} + c_{42} = 0, -c_{99} - c_{102} + c_{97} = 0, -c_8 + c_6 - c_{18} = 0, \\
c_{24} + c_{103} - c_{104} &= 0, c_{52} + c_{40} - c_{41} = 0, c_{57} + c_{48} - c_{49} = 0, -c_{99} + c_{68} + c_{98} = 0, \\
c_{17} - c_{103} - c_{21} &= 0, c_1 - c_{14} - c_{50} = 0, c_{77} - c_{81} - c_{87} = 0, c_{97} - c_{101} - c_{105} = 0, \\
-c_{59} + c_{22} - c_{18} &= 0, -c_{94} + c_{93} - c_{74} = 0, -c_{85} + c_{82} - c_{102} = 0, c_{51} - c_{54} - c_{56} = 0, \\
c_{83} - c_{86} + c_{104} &= 0, -c_{80} + c_{78} + c_{88} = 0, -c_{65} + c_{48} - c_{47} = 0, c_{82} - c_{86} - c_{93} = 0, \\
c_{62} - c_{16} + c_{23} &= 0, -c_{44} - c_{26} + c_{32} = 0, -c_{43} - c_{33} + c_{28} = 0, c_{80} - c_{77} + c_{97} = 0, \\
c_{10} - c_2 - c_{21} &= 0, c_{91} - c_{90} - c_{96} = 0, c_{102} - c_{104} - c_{74} = 0, -c_{85} + c_{83} + c_{94} = 0, \\
-c_{64} + c_{68} + c_{84} &= 0, c_5 - c_{100} - c_{10} = 0, -c_{89} + c_{92} + c_{95} = 0, -c_{51} + c_{44} - c_{43} = 0, \\
-c_{18} + c_{23} + c_{47} &= 0, c_{59} - c_{62} - c_{65} = 0, c_{90} - c_{92} + c_{68} = 0, -c_{96} + c_{95} - c_{84} = 0, \\
-c_{91} + c_{89} - c_{64} &= 0, -c_{11} + c_3 + c_{40} = 0, -c_6 + c_{13} + c_{37} = 0, -c_{22} + c_{16} + c_{48} = 0, \\
& c_{69} - c_{72} - c_{75} = 0.
\end{aligned}
\tag{G.1}$$

Resolvendo o sistema, conseguimos obter 81  $c_i$ 's em termos de outros 24. Ou seja, somente 81 das 105 equações originais eram linearmente independentes. A solução encontrada vem dada a seguir:

$$\begin{aligned}
c_{31} &= c_{34} - c_{79} - c_{72} - c_{49}, c_{100} = -c_{79} + c_{101}, c_{39} = c_{62} + c_{41} - c_{45} + c_{24}, \\
c_{38} &= -c_{45} - c_{86} + c_{104} + c_{41}, c_{103} = -c_{24} + c_{104}, c_{74} = c_{79} + c_{84}, c_{30} = c_{34} - c_{49} + c_{81} - c_{101}, \\
c_{33} &= c_{76} - c_{45} + c_{54} - c_{66} + c_{34}, c_{55} = c_{57} + c_{86} + c_{94} + c_{79} + c_{84}, c_{71} = c_{79} + c_{72}, \\
c_{99} &= -c_{79} + c_{101} + c_{68} + c_{24} - c_{104}, c_{61} = c_{24} + c_{62}, \\
c_{23} &= -c_{96} - c_{72} - c_{76} + c_{94} + c_{20} - c_{62} + c_{57} - c_{49}, c_{60} = c_{96} + c_{62} + c_{66} - c_{88} + c_{92} - c_{68}, \\
c_{19} &= c_{86} - c_{96} - c_{72} - c_{76} + c_{94} + c_{20} + c_{57} - c_{49}, c_{29} = -c_{92} + c_{76} - c_{45} - c_{66} + c_{34}, \\
c_6 &= -c_{96} - c_{62} - c_{66} + c_{88} - c_{92} + c_{68} - c_{72} - c_{76} + c_{94} + c_{14}, \\
c_{43} &= -c_{76} + c_{81} - c_{54} - c_{57} + c_{88} - c_{101} + c_{45}, \\
c_5 &= c_{14} - c_{79} + c_{101} + c_{68} - c_{104} + c_{54} - c_{41} + c_{34} - c_{72} - c_{49} - c_{96} - c_{62} - c_{66} \\
& \quad - c_{92} + c_{57} + c_{86} + c_{94}, \\
c_{52} &= -c_{81} + c_{54} + c_{57} - c_{88} - c_{104} + c_{101} + c_{94} + c_{86},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{10} &= c_{14} + c_{68} - c_{104} + c_{54} - c_{41} + c_{34} - c_{72} - c_{49} - c_{96} - c_{62} - c_{66} - c_{92} + c_{57} + \\
&\qquad\qquad\qquad c_{86} + c_{94}, \\
c_{26} &= c_{76} - c_{45} - c_{66} + c_{34}, c_{46} = c_{49} + c_{79} + c_{72} + c_{76} + c_{96} + c_{84}, \\
c_{28} &= -c_{57} + c_{88} + c_{81} - c_{101} - c_{66} + c_{34}, c_{69} = c_{72} + c_{76} - c_{94}, c_{89} = c_{92} + c_{96} + c_{84}, \\
c_{27} &= -c_{49} + c_{34}, c_{77} = c_{81} + c_{88} + c_{24} + c_{68} + c_{84}, c_{51} = c_{54} + c_{57} - c_{88} - c_{81} + c_{101}, \\
c_{32} &= -c_{66} + c_{34}, c_{59} = c_{62} + c_{66} - c_{88}, c_{18} = -c_{96} - c_{72} - c_{76} + c_{94} + c_{20} - c_{62} - c_{66} + c_{88}, \\
c_{58} &= c_{24} + c_{62} + c_{66} + c_{92} + c_{96} + c_{84}, c_{67} = c_{79} + c_{72} + c_{76} + c_{96} + c_{84}, \\
c_{73} &= c_{76} + c_{96} + c_{84}, c_{93} = c_{94} + c_{79} + c_{84}, c_4 = c_{14} - c_{20}, \\
c_{21} &= c_{45} + c_{86} - c_{104} - c_{41} - c_{96} - c_{72} - c_{76} + c_{94} + c_{20} - c_{62} + c_{57} - c_{49}, \\
c_{50} &= c_{101} + c_{68} + c_{24} - c_{104} + c_{54} + c_{57} + c_{86} + c_{94} + c_{84}, \\
c_{53} &= -c_{79} + c_{101} + c_{68} + c_{24} - c_{104} + c_{54}, c_{75} = c_{76} - c_{94}, \\
c_{37} &= -c_{86} + c_{104} + c_{41} - c_{76} + c_{81} - c_{54} - c_{57} + c_{88} - c_{101}, c_{65} = c_{66} - c_{88}, \\
c_{17} &= c_{86} - c_{96} - c_{72} - c_{76} + c_{94} + c_{20} + c_{57} - c_{49} - c_{62} - c_{41} + c_{45} - c_{24}, \\
c_{56} &= c_{57} - c_{88} - c_{81} + c_{101}, c_{87} = c_{88} + c_{24} + c_{68} + c_{84}, c_{83} = c_{86} - c_{104}, \\
c_{98} &= -c_{79} + c_{101} + c_{24} - c_{104}, c_{102} = c_{104} + c_{79} + c_{84}, c_{97} = c_{101} + c_{68} + c_{24} + c_{84}, \\
c_{78} &= c_{81} - c_{101}, c_{85} = c_{94} + c_{86} - c_{104}, c_{11} = -c_{96} - c_{62} - c_{66} + c_{88} - c_{92} + c_{68} + c_{14}, \\
c_{16} &= -c_{96} - c_{72} - c_{76} + c_{94} + c_{20} + c_{57} - c_{49}, c_{22} = -c_{96} - c_{72} - c_{76} + c_{94} + c_{20}, \\
c_{25} &= c_{34} + c_{76} + c_{96} + c_{84}, c_{64} = c_{68} + c_{84}, c_{44} = -c_{76} + c_{45}, \\
c_{42} &= c_{45} + c_{66} + c_{92} + c_{96} + c_{84}, c_{48} = -c_{57} + c_{49}, \\
c_{35} &= c_{41} + c_{24} + c_{62} + c_{66} + c_{92} + c_{96} + c_{84}, c_{82} = c_{86} + c_{94} + c_{79} + c_{84}, c_{90} = c_{92} - c_{68}, \\
c_{40} &= c_{81} - c_{54} - c_{57} + c_{88} + c_{104} - c_{101} - c_{94} - c_{86} + c_{41}, \\
c_{36} &= c_{41} - c_{45}, c_{91} = c_{96} + c_{92} - c_{68}, c_{15} = c_{20} + c_{57} + c_{86} + c_{94} + c_{79} + c_{84}, \\
c_{12} &= c_{14} - c_{20} + c_{34} - c_{45} + c_{54} - c_{66} + c_{76} - c_{92} + c_{101} - c_{104} + c_{24} + c_{68} - c_{79}, \\
c_9 &= c_{14} - c_{20} - c_{79} + c_{101} + c_{68} + c_{24} - c_{104} + c_{54}, c_8 = -c_{92} + c_{68} + c_{14} - c_{20}, \\
c_1 &= c_{14} + c_{101} + c_{68} - c_{104} + c_{54} + c_{57} + c_{86} + c_{94} + c_{24} + c_{84}, \\
c_7 &= c_{14} + c_{101} + c_{68} - c_{104} + c_{54} - c_{41} - c_{96} - c_{62} - c_{66} - c_{92} + c_{57} + c_{86} + c_{94},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{13} &= -c_{96} - c_{62} - c_{66} - c_{92} + c_{68} - c_{72} + c_{94} + c_{14} + c_{86} - c_{104} - c_{41} - c_{81} + c_{54} + \\
&\qquad\qquad\qquad c_{57} + c_{101}, \\
c_3 &= c_{14} + c_{101} + c_{68} - c_{104} + c_{54} - c_{41} - c_{96} - c_{62} - c_{66} - c_{92} + c_{57} + c_{86} + c_{94} - c_{81}, \\
c_2 &= -c_{92} + c_{68} + c_{14} - c_{20} + c_{76} - c_{45} + c_{54} - c_{66} + c_{34}, c_{95} = c_{96} + c_{84}, \\
c_{80} &= c_{88} + c_{81} - c_{101}, c_{105} = c_{24} + c_{68} + c_{84}, c_{70} = c_{96} + c_{72} + c_{76} - c_{94}, \\
c_{47} &= -c_{66} + c_{88} - c_{57} + c_{49}, c_{63} = c_{66} + c_{92} + c_{96} + c_{84}
\end{aligned}
\tag{G.2}$$

Essa solução deve, assumindo válida a dualidade cor-cinemática, ser estendida para os respectivos  $n_i$ 's.

# Apêndice H

## Relações de monodromia para as amplitudes de glúons na teoria de cordas

Para encontrar as relações de monodromia da seção 5.2, foi considerada a expressão da subamplitude entre táquions. Vejamos, que mudanças ocorreriam se, ao invés de táquions, considerássemos glúons.

Lembremos que, segundo (5.1), a expressão para a amplitude entre cordas vem dada pela fórmula abaixo:

$$A(1, \dots, N) = C \delta(k_1 + k_2 + \dots + k_N) \int \prod_{j=1}^N dx_j \prod_{i>j}^N |x_i - x_j|^{2\alpha' k_i k_j} \times \\ \times \exp \left\{ \sum_{i>j} \frac{2\alpha' \zeta_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)^2} - \sum_{i \neq j} \frac{2\alpha' k_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)} \right\} \Bigg|_{\text{linear em } \zeta_i^\mu} . \quad (\text{H.1})$$

No caso de glúons, vemos pela fórmula acima que a expressão da subamplitude ganharia mais um fator multiplicativo da forma

$$\exp \left\{ \sum_{i>j} \frac{2\alpha' \zeta_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)^2} - \sum_{i \neq j} \frac{2\alpha' k_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)} \right\} \Bigg|_{\text{linear em } \zeta_i^\mu} \quad (\text{H.2})$$

$$= \exp \left\{ \sum_{i \neq j} \left[ \frac{\alpha' \zeta_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)^2} - \frac{2\alpha' k_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)} \right] \right\} \Bigg|_{\text{linear em } \zeta_i^\mu} \quad (\text{H.3})$$

Ao expandirmos a exponencial para ficarmos apenas com os termos lineares em cada  $\zeta_i^\mu$ , teremos termos do tipo  $(x_i - x_j)^{n_{ij}}$ , onde  $n_{ij}$  é um inteiro negativo. Notemos ainda

que, na fórmula (H.1), há também o fator  $(x_i - x_j)^{2\alpha'k_i \cdot k_j}$  multiplicando a exponencial. Ficamos, portanto, com a dependência em  $x$  dada pelo seguinte termo:

$$(x_i - x_j)^{2\alpha'k_i \cdot k_j + n_{ij}} \quad (\text{H.4})$$

Reescrevamos o termo anterior de uma forma mais conveniente:

$$e^{(2\alpha'k_i \cdot k_j + n_{ij}) \log(x_i - x_j)} \quad (\text{H.5})$$

Lembremos que, no procedimento utilizado para se chegar às relações de monodromia, precisávamos escolher uma variável como a de integração. Aqui vamos supor que a variável de integração seja  $x_i$ . Além disso, em um certo momento, foi necessário tomarmos o limite  $x_i \rightarrow x_i + i\epsilon$ , onde  $\epsilon \rightarrow 0$ . Devemos fazer isso aqui também. Portanto, (H.5) pode ser reescrito como:

$$e^{(2\alpha'k_i \cdot k_j + n_{ij}) \log(x_i + i\epsilon - x_j)}, \quad \text{onde } \epsilon \rightarrow 0 \quad (\text{H.6})$$

Ou ainda,

$$\exp\left\{(2\alpha'k_i \cdot k_j + n_{ij}) \left[ \log(x_i - x_j) + i \arctan \frac{\epsilon}{x_i - x_j} \right]\right\}, \quad \text{onde } \epsilon \rightarrow 0 \quad (\text{H.7})$$

Ao efetuarmos o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , precisamos avaliar a função arcotangente e obtemos que:

$$\text{i) } \arctan \frac{\epsilon}{x_i - x_j} = 0 \quad \text{se } x_i > x_j, \quad (\text{H.8})$$

$$\text{ii) } \arctan \frac{\epsilon}{x_i - x_j} = \pi \quad \text{se } x_i < x_j. \quad (\text{H.9})$$

Nos primeiro e segundo casos acima, o termo exponencial em (H.7) ficará, respectivamente, na forma:

$$\text{i) } \exp\left\{(2\alpha'k_i \cdot k_j + n_{ij}) \log(x_i - x_j)\right\} = (x_i - x_j)^{2\alpha'k_i \cdot k_j + n_{ij}}, \quad \text{se } x_i > x_j \quad (\text{H.10})$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \exp\left\{(2\alpha'k_i \cdot k_j + n_{ij}) [\log(x_i - x_j) + i\pi]\right\} &= (x_i - x_j)^{2\alpha'k_i \cdot k_j + n_{ij}} e^{(2\alpha'k_i \cdot k_j + n_{ij})i\pi} \\ &= (-1)^{n_{ij}} (x_i - x_j)^{2\alpha'k_i \cdot k_j + n_{ij}}, \\ &\quad \text{se } x_i < x_j \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

Notemos, portanto, que há um fator  $(-1)^{n_{ij}}$  de diferença entre os dois casos. Isso não ocorria no caso dos táquions. Analisemos, então, a estrutura da expressão completa da amplitude para concluirmos quais as implicações que esse fator terá sobre as relações de monodromia. Para isso, vejamos quais serão os tipos de potências de  $(x_i - x_j)$  que aparecerão ao expandirmos a exponencial em (H.3), ou seja, quais os valores que  $n_{ij}$  poderá assumir.

Vamos denotar a expansão da exponencial pela expressão abaixo:

$$E \doteq 1 + E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + \dots \quad (\text{H.12})$$

onde

$$E_n \doteq \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{i \neq j} \left[ \frac{\alpha' \zeta_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)^2} - \frac{2\alpha' k_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)} \right] \right\}^n \quad (\text{H.13})$$

Como estamos interessados apenas nos termos que sejam lineares em cada  $\zeta_i$ , ou seja, que contenham apenas as  $N$  polarizações distintas, não é difícil se convencer que só teremos contribuições a partir do termo  $E_{\frac{N}{2}}$  se  $N$  for par e a partir do  $E_N$  se  $N$  for ímpar. Vejamos com mais detalhes esses dois casos:

$\implies$   **$N$  par**

Neste caso, as contribuições relevantes virão de dois tipos de termos:

- 1º Tipo

$$\left\{ \sum_{i \neq j} \left[ \frac{\alpha' \zeta_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)^2} - \frac{2\alpha' k_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)} \right] \right\}^{\frac{N}{2}} \implies \text{contribui com termos da forma: } \frac{(\zeta_i \cdot \zeta_j)^{\frac{N}{2}}}{(x_i - x_j)^N} \quad (\text{H.14})$$

- 2º Tipo

$$\left\{ \sum_{i \neq j} \left[ \frac{\alpha' \zeta_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)^2} - \frac{2\alpha' k_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)} \right] \right\}^N$$

$\Downarrow$

contribui com termos das formas:

$$\frac{(\zeta_i \cdot k_j)^N}{(x_i - x_j)^N} \quad (\text{H.15})$$

e

$$\left[ -\frac{(\zeta_i \cdot k_j)}{(x_i - x_j)} \right]^{N_1} \left[ \frac{(\zeta_i \cdot \zeta_j)}{(x_i - x_j)^2} \right]^{N_2} \quad (\text{H.16})$$

onde  $N_1$  e  $N_2$  devem satisfazer que

$$N_1 + 2N_2 = N \quad (\text{H.17})$$

Da igualdade anterior, podemos concluir que  $N_1 + 2N_2$  é par, uma vez que estamos considerando  $N$  par. Além disso,  $N_1$  também deve ser par, por consistência.

Assim, podemos afirmar que todas as potências de  $(x_i - x_j)$  nos termos em (H.14), (H.15) e (H.16) são pares. Portanto, para  $N$  par,  $n_{ij}$  também é par. E ainda, não aparecerá nenhum sinal negativo global.

Desta forma, para o caso em que  $N$  é par, as expressões em (H.10) e (H.11) se tornam equivalentes e, portanto, chegaríamos às mesmas relações de monodromia que as já encontradas para táquions.

$\implies$   $N$  ímpar

Neste caso, as contribuições relevantes virão do termo seguinte:

$$\left\{ \sum_{i \neq j} \left[ \frac{\alpha' \zeta_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)^2} - \frac{2\alpha' k_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)} \right] \right\}^N$$

$$\Downarrow$$

contribui com termos das formas:

$$\left\{ \frac{-(\zeta_i \cdot k_j)}{(x_i - x_j)} \right\}^N \quad (\text{H.18})$$

e

$$\left[ -\frac{(\zeta_i \cdot k_j)}{(x_i - x_j)} \right]^{N_1} \left[ \frac{(\zeta_i \cdot \zeta_j)}{(x_i - x_j)^2} \right]^{N_2} \quad (\text{H.19})$$

onde  $N_1$  e  $N_2$  devem satisfazer que

$$N_1 + 2N_2 = N \quad (\text{H.20})$$

Da igualdade anterior, podemos concluir que  $N_1 + 2N_2$  é ímpar, uma vez que estamos considerando  $N$  ímpar. Além disso,  $N_1$  também deve ser ímpar, por consistência.

Assim, podemos afirmar que todas as potências de  $(x_i - x_j)$  nos termos em (H.18) e (H.19) são ímpares. Portanto, para  $N$  ímpar,  $n_{ij}$  também é ímpar. No entanto, em ambos os termos, há ainda um sinal negativo global.

Desta forma, para o caso em que  $N$  é ímpar, as expressões em (H.10) e (H.11) que, em princípio, iriam apresentar um sinal global de diferença devido ao fator  $(-1)^{n_{ij}}$ , passam a ser equivalentes devido ao sinal negativo que também aparece em (H.18) e (H.19). Portanto, também para  $N$  ímpar, as relações de monodromia para  $N$  glúons seriam as mesmas que as obtidas para  $N$  táquions.

# Referências Bibliográficas

- [1] Z. Bern, L. J. Dixon, D. A. Kosower, “Progress in one-loop QCD computations”, *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.* 46 (1996) 109-148, [arXiv:hep-ph/9602280v1];
- [2] R. Kleiss and H. Kuijf, “Multi - Gluon Cross-Sections And Five Jet Production At Hadron Colliders”, *Nucl. Phys. B* 312, 616 (1989);
- [3] Z. Bern, J. J. M. Carrasco and H. Johansson, “New Relations for Gauge-Theory Amplitudes”, *Phys. Rev. D* 78, 085011 (2008) [arXiv:hep-ph/0805.3993];
- [4] B. Feng, S. He, “KLT and New Relations for  $N = 8$  SUGRA and  $N = 4$  SYM”, *JHEP* 1009 (2010) 043, [arXiv:hep-th/1007.0055];
- [5] J. J. M. Carrasco, H. Johansson, “Five-Point Amplitudes in  $N = 4$  Super-Yang-Mills Theory and  $N = 8$  Supergravity”, *Phys.Rev. D*85 (2012) 025006, [arXiv:hep-th/1106.4711];
- [6] Z. Bern, C. Boucher-Veronneau, H. Johansson, “ $N \geq 4$  Supergravity Amplitudes from Gauge Theory at One Loop”, *Phys.Rev. D*84 (2011) 105035, [arXiv:hep-th/1107.1935];
- [7] J. M. Drummond, M. Spradlin, A. Volovich, C. Wen, “Tree-Level Amplitudes in  $N = 8$  Supergravity”, *Phys.Rev. D*79 (2009) 105018, [arXiv:hep-th/0901.2363];
- [8] Z. Bern, J.J.M. Carrasco, H. Johansson, “Progress on Ultraviolet Finiteness of Supergravity”, [arXiv:hep-th/0902.3765], (2009);
- [9] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, L. J. Dixon, H. Johansson, R. Roiban, “The Complete Four-Loop Four-Point Amplitude in  $N = 4$  Super-Yang-Mills Theory”, *Phys.Rev. D*82 (2010) 125040, [arXiv:hep-th/1008.3327v1];

- [10] F. Cachazo, “Fundamental BCJ Relation in N=4 SYM From The Connected Formulation”, [arXiv:hep-th/1206.5970], (2012);
- [11] T. Sondergaard, “New Relations for Gauge-Theory Amplitudes with Matter”, Nucl.Phys. B821 (2009) 417-430, [arXiv:hep-th/0903.5453];
- [12] S. Stieberger, Open & Closed vs. Pure Open String Disk Amplitudes, [arXiv:hep-th/0907.2211] (2010);
- [13] H. Kawai, D. C. Lewellen and S. H. H. Tye, “A Relation Between Tree Amplitudes Of Closed And Open Strings”, Nucl. Phys. B 269, 1 (1986);
- [14] M. S. Peskin, D. V. Schroeder, “An Introduction to Quantum Field Theory”, Westview Press, Colorado, (1995);
- [15] L. Dixon, “Calculating scattering amplitudes efficiently”, In \*Boulder 1995, QCD and beyond\* 539-582, [arXiv:hep-ph/9601359v2];
- [16] J. Polchinski, “String theory, Volume 1: An Introduction to the Bosonic String”, Cambridge, University Press (1998);
- [17] M.L. Mangano e S.J. Parke, “Multi-Parton Amplitudes in Gauge Theories”, Phys.Rept. 200 (1991) 301-367, [arXiv:hep-th/0509223];
- [18] J. H. Schwarz, “Superstring Theory”, Phys.Rept. 89, 223-322, (1982);
- [19] D. Vaman, Y. Yao, “Constraints and Generalized Gauge Transformations on Tree-Level Gluon and Graviton Amplitudes”, JHEP 1011 (2010) 028, [arXiv:hep-th/1007.3475];
- [20] Z. Bern, T. Dennen, Y. Huang, M. Kiermaier, “Gravity as the Square of Gauge Theory”, Phys.Rev. D82 (2010) 065003, [arXiv:hep-th/1004.0693];
- [21] A. Neveu, J. Scherk, “Connection between Yang-Mills fields and dual models”, Nucl. Phys. B36 155-161, (1972);
- [22] J. Gervais, A. Neveu, “Feynman rules for massive gauge fields with dual diagram topology”, Nucl. Phys. B46 381-401, (1972);

- [23] N.E.J. Bjerrum-Bohr, P.H. Damgaard, P. Vanhove, “Minimal Basis for Gauge Theory Amplitudes”, *Phys.Rev.Lett.* 103 (2009) 161602, [arXiv:hep-th/0907.1425v2];
- [24] D. Tong, “String Theory”, [arXiv:hep-th/0908.0333v3] (2012);
- [25] R. P. Feynman, F. B. Morinigo, W. G. Wagner, “Feynman Lectures on Gravitation”(1995);
- [26] S. M. Carroll, “Lecture Notes on General Relativity”, [arXiv:gr-qc/9712019v1] (1997);
- [27] M. H. Goroff, A. Sagnotti, “The Ultraviolet Behavior of Einstein Gravity”, *Phys. Lett. B* 160, 81 (1985);
- [28] J. Scherk, J. H. Schwarz, “Dual Models for Nonhadrons”, *Nucl. Phys. B* 81, 118 (1974);
- [29] Z. Bern, L. J. Dixon, D. A. Kosower, “Two-Loop  $g \rightarrow gg$  Splitting Amplitudes in QCD”, *JHEP* 0408 (2004) 012, [arXiv:hep-ph/0404293v2];
- [30] Z. Bern, S. Davies, T. Dennen, Y. Huang, J. Nohle, “Color-Kinematics Duality for Pure Yang-Mills and Gravity at One and Two Loops”, [arXiv:hep-th/1303.6605v2] (2013);
- [31] Z. Bern, L. J. Dixon, D. A. Kosower, “A Two-Loop Four-Gluon Helicity Amplitude in QCD”, *JHEP* 0001 (2000) 027, [arXiv:hep-ph/0001001v2];
- [32] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, H. Johansson, “Perturbative Quantum Gravity as a Double Copy of Gauge Theory”, *Phys.Rev.Lett.* 105 (2010) 061602, [arXiv:hep-th/1004.0476v2].