

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Marina Machado Cunha e Mello

**Universo de FLRW dominado por campos
de calibre e férmions**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Física

Área de Concentração: Teoria Quântica de Campos, Gravitacão e Cosmologia.

Orientador: Prof. Dr. Renato Klippert Barcellos

Co-orientador Prof. Dr. Armando Bartolome Bernui Leo

SETEMBRO DE 2013

ITAJUBÁ-MG

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá
Bibliotecária Jacqueline Rodrigues de Oliveira Balducci- CRB_6/1698

M527u

Mello, Marina Machado Cunha e
Universo de FLRW dominado por campos de calibre e
fêrmions. / Marina Machado Cunha e Mello. – Itajubá, (MG) :
[s.n.], 2013.
101 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Renato Klippert Barcelos.
Co-orientador: Prof. Dr. Armando Bartolome Barnui Leo.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Friedmann. 2. Yang-Mills. 3. Dirac. 4. Eletrodinâmica
não-linear. I. Barcelos, Renato Klippert, orient. II. Leo, Armando
Bartolome Barnui, co-orient. III. Universidade Federal de Itajubá.
IV. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Marina Machado Cunha e Mello

**Universo de FLRW dominado por campos
de calibre e férmions**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 10 de setembro
de 2013, conferido ao autor o título de **Mestre em Ciências em
Física e Matemática Aplicada.**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Renato Klippert Barcellos (Orientador)

Prof. Dr. José Martins Salim

Prof. Dr. Armando Bartolome Bernui Leo

Prof. Dr. Edisom de Souza Moreira Junior

ITAJUBÁ-MG

2013

A meus pais, Eugênio e Elisabete, pelo apoio incondicional.

Agradecimentos

Ao professor Renato Klippert, pela oportunidade oferecida e pela extrema paciência empregada.

Ao professor Armando Bernui B. Leo pela cooperação e por me salvar nos momentos de desespero, colocando luz naquilo que estava totalmente obscuro.

A todos os professores que passaram por minha formação e que foram tão importante para meu amadurecimento pessoal e profissional. Em especial ao professor Vitório De Lorenci, pela excepcional didática.

Aos meus amigos, Malú Maira da Silva, Adriano Braga Barreto, Paulo Henrique Silva e outros por estarem sempre ao meu lado nos bons e maus momentos.

Agradeço principalmente ao meu namorado Giancarlo Thales Camilo da Silva, por me acalmar nos momentos de desespero e por estar sempre ao meu lado. Sem ele eu não teria conseguido todas estas conquistas.

Obrigada.

Resumo

Neste trabalho, investigamos dois modelos cosmológicos de FLRW descritos por campos de calibre acoplados à férmions. O primeiro caso a ser analisado foi o de um universo preenchido por um campo eletrodinâmico não-linear, que leva em conta correções de eletrodinâmica quântica a 1 loop, acoplado a um campo fermiônico. Através de uma análise numérica, realizamos uma variação dos parâmetros que nos forneceu diversas soluções para a evolução do fator de escala $a(t)$. Encontramos somente soluções não-singulares, de forma que a variação dos parâmetros não influenciou significativamente no comportamento da função.

Na segunda parte do trabalho, estudamos um universo permeado por campos de Yang-Mills acoplado a um campo fermiônico. Novamente uma análise numérica, combinada com uma variação de parâmetros nos retornou várias soluções para $a(t)$, sendo várias do tipo singular e outras com uma configuração praticamente constante do tipo não-singular, as quais portanto, não tem sua forma consideravelmente modificadas pela variação dos parâmetros.

Palavras-chave: Modelos de FLRW, Campo de calibre, Campo de Dirac.

Abstract

In this work, we explore two FLRW cosmological models, describing by one gauge field in the presence of fermions. Firstly, we present an universe permeated by a non-linear electrodynamic, that take into account quantic corrections for 1-loop, and fermionic fields. Through a numeric analyses, we vary the value of the parameters, which gave us many solutions for the scale factor $a(t)$. Only non-singular solutions were find, then we conclude that the value of the parameter didn't have a significant influence on the behavior of the function.

The second part of the work is devoted to the study of a FLRW universe, filled by Yang-Mills and Dirac fields. Over again, a numeric analyses where made, which combined with a variation of parameter, return us a lot of solutions for $a(t)$. All the solutions found where singular or practically constant non-singular, and they don't change their form substantially by the variation of parameters.

Keywords: FLRW models, Gauge field, Dirac field.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	2
1 Modelo cosmológico de FLRW	5
1.1 As equações de Einstein	5
1.2 A métrica de Robertson-Walker	8
1.3 O modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	10
2 Campo de spin 1/2	12
2.1 Campo de Dirac	12
2.2 Equação de Dirac	17
2.3 Quantização do campo de Dirac	21
2.4 Expansão em base de ondas planas	21
2.5 Tensor momento-energia	31
3 Campos de Calibre	37
3.1 Eletromagnetismo de Maxwell	37
3.2 Eletrodinâmica não-linear	40
3.2.1 Tensor Momento-Energia	41
3.3 Campos de Yang-Mills	43
3.3.1 Lagrangeana Efetiva	47

3.3.2	Tensor momento-energia	48
4	Modelos gravitacionais devido aos campos de calibre acoplados ao campo de Dirac	50
4.1	Campos de Dirac e eletrodinâmica não-linear acoplados	50
4.1.1	Cálculo de médias	53
4.1.2	Conservação de energia	57
4.1.3	Análise do fator de escala $a(t)$, para o acoplamento entre os campos eletrodinâmico não-linear e Dirac	58
4.2	Campos de Dirac e Yang-Mills acoplados	62
4.2.1	Cálculo de médias	63
4.2.2	Conservação de energia	64
4.2.3	Análise do fator de escala $a(t)$	65
	Conclusão	70
	Apêndice A	72
	A	72
A.1	Ação de Einstein-Hilbert	72
A.2	Métrica de Robertson-Walker	74
A.3	Modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	76
	Apêndice B	80
	B	80
B.1	Expansão em base de ondas planas	80
B.1.1	Prova das relações de ortonormalização e fechamento	81
B.1.2	Definição de $u(\mathbf{p}, s)$ e $v(\mathbf{p}, s)$	85
	Apêndice C	86
	C	86
C.1	Equações de Maxwell	86
C.2	Operador unitário	89

C.3 O potencial $A_\mu^{(a)}$	90
C.4 Tensor momento-energia	92
Apêndice D	96
D Vierbeins	96
Bibliografia	99

Conteúdo

Lista de Figuras

- 4.1 Gráficos enumerados de cima para baixo, da esquerda para a direita: 1. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 0$; 2. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 0$; 3. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 2$ e $\Lambda = 0$; 4. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 0,05$; 5. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 0$ e $\Lambda = -0,05$; 6. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3$, $E_p = 2$ e $\Lambda = 0$. . . 60
- 4.2 Gráficos enumerados de cima para baixo, da esquerda para a direita: 7. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 0,05$; 8. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3$, $E_p = 0$ e $\Lambda = -0,05$; 9. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 2$ e $\Lambda = 0,05$; 10. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 2$ e $\Lambda = -0,05$; 11. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3$, $E_p = 2$ e $\Lambda = 0,05$; 12. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3$, $E_p = 2$ e $\Lambda = -0,05$ 61
- 4.3 Gráficos enumerados de cima para baixo, da esquerda para a direita: 1. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 0$; 2. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 1,5$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 0$; 3. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 10$ e $\Lambda = 0$; 4. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 2$; 5. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3$, $E_p = 2$ e $\Lambda = -2$; 6. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 1,5$, $E_p = 0$ e $\Lambda = -2$ 67
- 4.4 Gráficos enumerados de cima para baixo, da esquerda para a direita: 7. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 0,05$; 8. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 1,5$, $E_p = 0$ e $\Lambda = -2$; 9. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 10$ e $\Lambda = 2$; 10. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 10$ e $\Lambda = -2$; 11. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 1,5$, $E_p = 10$ e $\Lambda = 2$; 12. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 1,5$, $E_p = 10$ e $\Lambda = -2$ 68

Introdução

A cosmologia é uma ciência que propõe a abordagem do cosmos de uma maneira integrada, estudando a origem, estrutura e evolução do Universo. Essa preocupação com a origem do universo é um problema que vem desde os primórdios da humanidade, a qual elaborou várias hipóteses para esse evento. Entretanto a cosmologia nos moldes atuais, baseada em dados observacionais é uma ciência relativamente nova. A hipótese atual de descrição do universo, com grande embasamento observacional, é descrita pelo modelo cosmológico padrão. O modelo cosmológico padrão descreve um universo homogêneo (para cada tempo cósmico, nenhuma posição no espaço é diferente das demais) e isotrópico (suas características são as mesmas em qualquer direção) em grandes escalas, descrito como um universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [11, 23, 31, 36]. Sendo ainda um universo em recente fase acelerada e com seção espacial plana. Outra premissa em vigor atualmente é a do princípio cosmológico, que diz que as propriedades do universo são as mesmas para todos os observadores, ou seja, não só suas características são as mesmas, mas os efeitos das leis físicas nos fenômenos observáveis também. Dentro deste cenário diversos modelos são propostos de forma a tentar recriar as condições iniciais do nosso universo, embasados pelos poucos “fósseis” restantes daquela época.

Através do estudo do fator $a(t)$, o qual possui as informações da dinâmica do universos, pode-se analisar suas características. Em especial nos momentos iniciais de sua formação. Uma possível origem para o universo seria em um processo do tipo bouncing [27], o qual é caracterizado por um início no qual o universo atinge um tamanho pequeno, porém finito, contendo uma grande quantidade de energia porém finita. Outra possibilidade seria a de um universo singular [35, 16], o qual apresenta um tamanho inicial do universo caracterizado por uma singularidade, e conseqüentemente a uma energia infinita. A fim de decidir-se por uma ou outra opção, investiga-se, como a fator $a(t)$ evolui em seu estado inicial. Outra característica importante é como o universo evolui ao longo do tempo, descrevendo uma expansão ou um

colapso. Sendo interessante as expansões aceleradas primordiais [1], caracterizando uma inflação do universo a qual é sugerida por dados observacionais recentes [34, 19]. A qual pode ser descrita até mesmo em universos com características do tipo bouncing [9].

O comportamento singular de um universo de FLRW, composto por um campo de Maxwell, é um resultado conhecido na literatura [17], e decorre diretamente da lei de conservação de energia. A fim de analisar este resultado utilizando campos semelhantes, diversos trabalhos foram apresentados com esta mesma abordagem. Um exemplo é o trabalho de análise de um universo de FRLW, permeado por um campo de eletrodinâmica não-linear [7], o qual apresentou um comportamento do tipo bouncing para o início do universo. Nesta mesma linha, o estudo de um universo de FRLW, formado por quark-gluons, descrito por um campo de Yang-Mills [8], apresentou um comportamento singular para um universo plano, sendo caracterizado por um período inflacionário somente para um universo com curvatura espacial negativa. Ainda, considerando a situação anterior para um universo plano, acrescido de constante cosmológica [2], observou-se várias regiões de estudos, apresentando singularidade ou não, dependendo de alguns parâmetros. Propomos então, uma extensão destes trabalhos com a adição de matéria fermiônica, caracterizada pelo campo de Dirac.

Neste trabalho analisamos, um modelo cosmológico de FLRW, preenchido por um campo de calibre acoplado a um campo fermiônico, iniciando com um campo de Yang-Mills e passando a um campo de eletrodinâmica não linear. Seguindo a tendência das observações recentes [38], consideraremos um universo de seção espacial plana. Ainda tomaremos o universo puramente magnético, na presença da constante cosmológica. Assim, definido o modelo cosmológico a ser considerado, analisaremos o fator de escala $a(t)$, de forma que esperamos descrever um universo que apresente uma época de inflação, seguida por uma fase de expansão desacelerada e finalmente por um estágio de aceleração. Desta forma, se esta solução for possível, dados observacionais atuais poderão ser explicados pelo modelo proposto em comparação com o modelo cosmológico padrão Λ CDM.

O trabalho a seguir será estruturado segundo os passos a serem descritos. Iniciamos com uma, revisão bibliográfica de introdução à cosmologia, no capítulo 1, onde deduzimos as equações de Einstein e definimos o tensor momento-energia. Ainda, deduzimos a métrica de Friedmann, e escrevemos as equações de Einstein em termos desta métrica. Seguimos, no capítulo 2, com uma nova revisão bibliográfica do campo de Dirac, onde definimos sua lagran-

geana, assim como sua hamiltoniana e outras quantidades relevantes, as quais expressamos em termos de uma expansão em ondas planas. Por fim calculamos o tensor momento-energia do campo de Dirac. Posteriormente, no capítulo 3 novamente realizamos uma revisão bibliográfica na qual introduzimos os campos de calibre, onde iniciamos com os campos de Maxwell, seguido pela eletrodinâmica não-linear e por fim introduzimos o campo não-abeliano, definido pelo campo de Yang-Mills. Calculamos, ainda, o tensor momento-energia dos campos de eletrodinâmica não-linear e de Yang-Mills. No capítulo 4, utilizamos os tensores momento-energia calculados previamente, e definimos o tensor momento-energia da interação entre os campos, acrescido de um termo de interação. Consideramos primeiro o acoplamento entre os campos de Dirac e Yang-Mills para depois analisarmos os campos de Dirac e de eletrodinâmica não-linear. Substituímos esses tensores nas equações de Einstein na métrica de Friedmann. Ainda calculamos o termo de conservação de energia, nos fornecendo equações que relacionam o fator de escala do universo $a(t)$ com termos dos campos. Finalmente, através de cálculos numéricos, um estudo do comportamento do fator de escala $a(t)$ ao longo do tempo.

Em todo o trabalho consideraremos unidades naturais, onde tomamos $G = \hbar = c = 1$.

Capítulo 1

Modelo cosmológico de FLRW

Com o advento da teoria da relatividade geral de Einstein, o universo passou a ser descrito como um espaço quadri-dimensional e dinâmico, onde o tempo é considerado como mais do que um simples parâmetro, e a geometria euclidiana dá lugar à geometria riemanniana. Tal universo é dependente da matéria que o permeia, apresentando uma geometria moldada de acordo com as características desse tipo de matéria. Esta interpretação tem se mostrado capaz de descrever o universo que observamos com suas características físicas. Neste capítulo iremos fazer uma breve descrição de como se dá essa relação entre matéria e geometria, assim como definir como a matéria é introduzida no modelo, em seguida, introduziremos o tipo de métrica que caracteriza a chamada geometria de Robertson-Walker, a qual iremos considerar.

1.1 As equações de Einstein

Einstein uniu em sua teoria os conceitos (até então desconexos) de espaço e tempo por meio da identificação entre geometria e matéria. Desta forma, o universo deixou de ser descrito por uma geometria euclidiana plana para ser descrito por uma geometria curva, representada por uma variedade na geometria de Riemann. Segundo ele, o universo é descrito por uma quantidade física que, na presença de matéria, apresenta uma geometria curva, onde as leis que descrevem a atuação dessa matéria, assim como a forma como o universo se curva, são as denominadas equações de Einstein [10].

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -T_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

onde tomamos $k = 8\pi G/c^4$, igual a um.

O lado esquerdo da equação contém a informação acerca da geometria do universo, caracterizada pelo tensor de curvatura $R_{\mu\nu\sigma}^{\gamma}$ [10],

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\gamma} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\gamma} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} + \Gamma_{\nu\theta}^{\gamma}\Gamma_{\sigma\mu}^{\theta} - \Gamma_{\sigma\theta}^{\gamma}\Gamma_{\mu\nu}^{\theta} \quad (1.2)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ é a conexão (ou símbolo de Christoffel), definida por [10]

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}(\partial_{\mu}g_{\gamma\nu} + \partial_{\nu}g_{\gamma\mu} - \partial_{\gamma}g_{\mu\nu}). \quad (1.3)$$

A conexão, por sua vez é dependente da métrica $g_{\mu\nu}$, a qual define como as distâncias são calculadas no espaço considerado e, de certa forma, define a geometria deste espaço. O tensor de curvatura apresenta as seguintes simetrias, [10]:

1. $R_{\mu\nu\sigma\gamma} = -R_{\nu\mu\sigma\gamma}$
2. $R_{\mu\nu\sigma\gamma} = -R_{\mu\nu\gamma\sigma}$
3. $R_{\mu\nu\sigma\gamma} = R_{\gamma\sigma\mu\nu}$,

além de obedecer à identidade cíclica onde

$$R_{\nu\sigma\gamma}^{\mu} + R_{\gamma\nu\sigma}^{\mu} + R_{\sigma\gamma\nu}^{\mu} = 0 \quad (1.4)$$

e à identidade de Bianchi

$$R_{\nu\sigma\gamma;\theta}^{\mu} + R_{\nu\gamma\theta;\sigma}^{\mu} + R_{\nu\theta\sigma;\gamma}^{\mu} = 0. \quad (1.5)$$

Podemos ainda construir um novo tensor a partir do tensor de curvatura contraindo dois dos seus índices, a saber, o chamado tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ [10]

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu\gamma}^{\gamma} \quad (1.6)$$

assim como o escalar de curvatura $R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

O lado direito das equações de Einstein, por sua vez, apresenta o tensor momento-energia, que caracteriza o conteúdo de matéria e energia existente no universo. O tensor momento-energia pode ser decomposto de maneira geral como [28]

$$T_{\mu\nu} = \rho v_{\mu}v_{\nu} - ph_{\mu\nu} + q_{\mu}v_{\nu} + q_{\nu}v_{\mu} + \pi_{\mu\nu}$$

onde ρ é a densidade de energia total do fluido, p é a pressão isotrópica, q^{μ} é a propagação de calor e $\pi_{\mu\nu}$ é a pressão não isotrópica. Ainda $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - v_{\mu}v_{\nu}$.

O observador escolhido para nossas considerações é do tipo tempo, o qual podemos normalizá-lo como $v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} = 1$. Ainda, temos que, as quantidades q^μ e $\pi_{\mu\nu}$ obedecem às seguintes relações [28]:

1. $q_\mu v^\mu = 0$
2. $\pi_{\mu\nu} v^\mu = 0$
3. $\pi_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0$
4. $\pi_{\mu\nu} = \pi_{\nu\mu}$

Em função da identidade de Bianchi definida anteriormente para o tensor de curvatura, Eq.(1.5), decorre a seguinte identidade para o tensor momento-energia,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

indicando que a energia e o momento se conservam.

Uma outra abordagem para a dedução das equações de Einstein é através da dinâmica característica do campo descrito pelas equações. Segue que, se considerarmos a ação de Einstein-Hilbert[22] que descreve a parte geométrica, mais uma lagrangeana \mathcal{L} representando o campo de matéria, teremos

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}R + \mathcal{L} \right] \sqrt{-g} \quad (1.7)$$

Assim, de acordo com o princípio da mínima ação podemos deduzir as equações de Einstein¹, Eq.(1.1), de forma que o tensor momento-energia seja definido como a derivada funcional da ação com relação à métrica

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.8)$$

Ainda, substituindo Eq.(1.7) na definição de $T_{\mu\nu}$, podemos encontrá-lo a partir da lagrangeana que representa o fluido que compõe o universo a ser representado, sendo dado como a derivada da lagrangeana em relação à métrica

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (1.9)$$

O tensor obtido, que depende do tipo de campo de matéria considerado, é naturalmente um tensor simétrico em seus dois índices, sendo portanto compatível com as equações de Einstein. Nos próximos capítulos utilizaremos dessa equação para calcular o tensor momento-energia associado aos campos de interesse.

¹Vide Apêndice A

1.2 A métrica de Robertson-Walker

As equações de Einstein, Eq.(1.1) apresentadas na seção anterior, são equações diferenciais parciais não lineares acopladas, de forma que a matemática atual não permite para a maioria dos casos uma solução fechada. Logo devemos introduzir algumas particularizações simplificadoras a fim de podermos resolvê-las mais facilmente. Tendo isso em mente, Schwarzschild considerou uma distribuição de matéria com simetria esférica, e obteve uma solução para as equações de Einstein (no vazio: $T_{\mu\nu} = 0$), caracterizada pelo elemento de linha

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Entretanto, esta não é a solução mais apropriada a ser considerada para os nossos propósitos. Note que se tomarmos r tendendo a infinito teremos uma solução do tipo de Minkowski, de forma que este tipo de solução é denominada assintoticamente plana, levando a um universo desprovido de matéria no infinito, o que não ocorre de fato. Logo devemos considerar um outro tipo de solução.

Podemos considerar, por exemplo, o universo totalmente coberto de matéria, mas com a simplificação de esta matéria estar distribuída de maneira homogênea e isotrópica (o que se verifica experimentalmente, ao menos em larga escala), de maneira que iremos considerar a solução das equações de Einstein como sendo para um fluido homogêneo e isotrópico. Este Ansatz nos remete a um elemento de linha do tipo [26]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \chi_{ij} dx^i dx^j \tag{1.10}$$

onde χ_{ij} depende somente de coordenadas espaciais. Neste caso, garantimos a homogeneidade, uma vez que, para isto o, coeficiente de dt^2 deve ser constante, qual iremos normalizar para c^2 , uma vez que dt não pode evoluir de maneira diferente depende do tempo ou espaço. Ainda garantimos a isotropia espacial por não incluir termos não diagonais do tipo $dt dx$ na métrica, pois caso considerarmos termos do tipo $f_{0\mu} dt dx^\mu$ no elemento de linha, então ao realizarmos um deslocamento do tipo dx^μ e $-dx^\mu$, eles irão contribuir de maneira oposta em ds^2 para um curto espaço de tempo, o que descaracteriza o princípio de isotropia. O próximo passo agora é definir como será a forma funcional de χ_{ij} .

Vamos considerar um universo fechado, e para conservarmos todas as propriedades requeridas vamos tomar o universo com a forma de esfera. Assim, escrevendo a equação de uma

3-esfera inserido em um espaço quadridimensional temos,

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,$$

O que nos permite escrever a parte espacial da métrica na 3-esfera é dada por

$$d\sigma^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.11)$$

$$= \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.12)$$

a qual é isotrópica por não indicar direções privilegiadas. Escrevendo em coordenadas esféricas, tais que

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$, teremos um elemento de linha do tipo ²

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (1.13)$$

Podemos fazer uma identificação com o elemento de linha proposto anteriormente, Eq.(1.10), onde $\chi_{11} = \frac{1}{1-r^2/R^2}$, $\chi_{22} = r^2$ e $\chi_{33} = r^2 \sin^2 \theta$ dependentes somente de componentes espaciais, como havíamos discutido anteriormente. Agora, R pode ainda tender ao infinito, o que nos levaria a um universo plano. A fim de deixar esses casos mais visíveis na equação vamos considerar um reescalonamento de r [25] na forma

$$r = \frac{r'}{\sqrt{R^2}} \quad (1.14)$$

nos retornando

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 \left(\frac{dr'^2}{1 - \epsilon r'^2} + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right), \quad (1.15)$$

onde ϵ assume valores iguais a: 1, para um universo esférico ou fechado, definindo um espaço de curvatura positiva; 0, para um universo plano, definindo um espaço de curvatura nula e -1, para um universo hiperbólico ou aberto, definindo um espaço de curvatura negativa.

Esta descrição no entanto nos remete a um universo estático, o que não condiz com os resultados observacionais atuais, mas que para Einstein na época parecia ser o único tipo de solução possível para suas equações.

²Vide Apêndice A.

Esta hipótese foi rebatida quando De Sitter publicou uma solução das equações de Einstein descrevendo um universo dinâmico, mas sem a presença de matéria. Sabemos então que o universo deve apresentar um comportamento semelhante, entretanto não podemos considerar a hipótese de de Sitter em função de sua ausência de matéria. Esse problema foi discutido pelo filósofo e cientista Ernest Mach [26], o qual argumentou que para ser possível analisar o movimento de entes físicos devemos ter um fundo composto por matéria de forma a termos um parâmetro de medida, caso contrário não haveria sentido em falarmos de movimento.

A hipótese de universo de Einstein está em acordo com o princípio de Mach. Devemos então encontrar uma descrição de um universo que obedeça o princípio cosmológico e que ao mesmo tempo apresente uma expansão, em concordância com o princípio de Mach. Entretanto, o processo de expansão não pode ocorrer de maneira aleatória, uma vez que as observações sugerem que os objetos cósmicos estão se afastando entre si de maneira ordenada, sem que haja encontro das linhas espaciais ao longo do tempo. Esse tipo de descrição foi apresentada pelo matemático Hermann Weyl, e é denominado princípio de Weyl.

A descrição de um universo que obedece ao princípio cosmológico e ao princípio de Weyl é dada por [26]

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{dr'^2}{1 - \epsilon r'^2} + r'^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right). \quad (1.16)$$

de forma que a constante R depende do tempo cósmico. Agora, fazendo uma nova substituição para r , a saber

$$r' = \frac{r}{1 + \epsilon r^2/4} \quad (1.17)$$

e denominando $R(t) \equiv a(t)$ temos

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a(t)^2}{(1 + \epsilon r^2/4)^2} (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)). \quad (1.18)$$

que é denominada a métrica de Robertson-Walker.

1.3 O modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Dado o elemento de linha de Robertson-Walker em coordenadas esféricas, Eq.(1.18), vamos considerar uma seção espacial plana, ou seja tomaremos $\epsilon = 0$. Assim escrevendo em coordenadas cartesianas, teremos

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.19)$$

Sabemos ainda que o elemento de linha obedece a relação

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.20)$$

Desta forma, comparando Eq.(1.19) com Eq.(1.20) temos a métrica dada por

$$g_{00} = 1 \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -a^2(t), \quad (1.21)$$

ou ainda

$$g^{00} = 1 \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = -\frac{1}{a^2(t)}, \quad (1.22)$$

De posse destas quantidades, podemos calcular as componentes da conexão³, Eq.(1.3), a qual possui os seguintes termos não nulos:

$$\Gamma_{11}^0 = \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{33}^0 = \dot{a}(t)a(t) \quad (1.23)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.24)$$

Nos permitindo calcular o tensor de Ricci, cujos únicos termos não nulos são

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.25)$$

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = -\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t) \quad (1.26)$$

Finalmente o escalar de curvatura será dado por

$$\begin{aligned} R &= R^\mu_\mu = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = R_{00}g^{00} + R_{11}g^{11} + R_{22}g^{22} + R_{33}g^{33} \\ &= 3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(-\frac{3}{a^2(t)}\right) (-\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t)) \\ &= \frac{6\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{6\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Substituindo Eq.(1.25), Eq.(1.26) e Eq.(1.27) nas equações de Einstein, Eq.(1.1), teremos as seguintes relações

$$3\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = T_{00} \quad (1.28)$$

e

$$2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t) = -T_{11} \quad (1.29)$$

(note que $T_{11} = T_{22} = T_{33}$).

Nos próximos capítulos iremos descrever o tipo de matéria que irá compor o tensor momento-energia para o modelo a se considerar.

³Vide Apêndice A

Capítulo 2

Campo de spin 1/2

Partículas de spin semi-inteiro, em particular os quarks de spin 1/2, são descritas por um campo spinorial denominado campo de Dirac. No capítulo que segue vamos fazer uma introdução ao campo de Dirac à partir da descrição da construção da lagrangeana de Dirac, assim como a sua hamiltoniana e função de onda, os quais ainda apresentaremos na forma de expansão em ondas planas.

2.1 Campo de Dirac

O campo de Dirac é um campo spinorial que descreve partículas fermiônicas. Sua construção originou-se na procura por uma equação de Schrödinger covariante relativística. A equação de Klein-Gordon foi a primeira a ser obtida com estas características, entretanto pelo fato de ser uma equação de segunda ordem no tempo, ela pode fornecer uma densidade de probabilidade negativa, o que não tem significado físico. Desta forma Dirac propôs uma equação de onda linear como solução

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{i} \left(\hat{\alpha}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) + \hat{\beta} m \right] \psi \equiv \hat{H}_f \psi. \quad (2.1)$$

onde ψ é uma função de onda, definida no espaço das funções quadrado-integráveis, $\hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}$ são os coeficientes propostos para esta função de onda e \hat{H}_f é a hamiltoniana do campo livre.

Agora para que a Eq.(2.1) seja realmente reconhecida como uma descrição de uma quantidade quântica relativística ela deve obedecer algumas condições: (i) deve apresentar a relação correta entre momento-energia para uma partícula livre relativística $E^2 = p^2 + m^2$, (ii) a densidade de probabilidade deve obedecer à equação de continuidade,(iii) deve ainda ser invariante

de Lorentz.

A relação apresentada pela condição (i) é caracterizada pela equação de Klein-Gordon, de forma que ψ deve satisfazê-la, tal que

$$(\square + m^2)\psi = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial(t)^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi = 0,$$

segue que

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2)\psi. \quad (2.2)$$

Entretanto se tomarmos 2 vezes a derivada temporal de Eq.(2.1) e a considerarmos recursivamente teremos

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = i \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{H}_t \psi. \quad (2.3)$$

Logo, substituindo a Eq.(2.1) na Eq.(2.3)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \left[\frac{1}{i} \left(\hat{\alpha}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \hat{\beta} m \right]^2 \psi \\ &= \left[- \left((\hat{\alpha}^1)^2 \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} + \hat{\alpha}^1 \hat{\alpha}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} + \hat{\alpha}^1 \hat{\alpha}^3 \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^3} + \hat{\alpha}^2 \hat{\alpha}^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^1} + (\hat{\alpha}^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{\alpha}^2 \hat{\alpha}^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^3} + \hat{\alpha}^3 \hat{\alpha}^1 \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^1} + \hat{\alpha}^3 \hat{\alpha}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^2} + (\hat{\alpha}^3)^2 \frac{\partial^2}{\partial (x^3)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m \hat{\beta}}{i} \left(\hat{\alpha}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{i} \left(\hat{\alpha}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \hat{\beta} + \hat{\beta}^2 m^2 \right] \psi, \end{aligned}$$

ou escrevendo de uma forma mais compacta temos

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^i}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{m}{i} \sum_{i=1}^3 (\hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \hat{\beta}^2 m^2 \psi. \quad (2.4)$$

Agora, comparando Eq.(2.2) com Eq.(2.4) encontramos as relações

$$\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^i = 2\delta^{ij} \hat{\mathbb{1}}, \quad (2.5)$$

$$\hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i = 0, \quad (2.6)$$

$$\hat{\beta}^2 = \hat{\mathbb{1}}. \quad (2.7)$$

Ainda, para $i = j$ em Eq.(2.5) temos

$$(\hat{\alpha}^i)^2 = \hat{\mathbb{1}}. \quad (2.8)$$

Note que, se $\hat{\alpha}^i$ e β forem números chegaremos a um impasse, uma vez que números comutam entre si, portanto

$$\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j = \delta^{ij}, \quad (2.9)$$

$$\hat{\alpha}^i \hat{\beta} = 0, \quad (2.10)$$

$$\hat{\beta}^2 = 1 \quad (2.11)$$

o que nos leva a uma inconsistência ao compararmos Eq(2.8) com Eq.(2.9). Devemos então considerá-los como sendo matrizes, os quais consideraremos de dimensão N.

Segue que, sendo os coeficientes matrizes, então para mantermos a igualdade em Eq.(2.1) devemos escrever a equação de onda na forma matricial, como uma matriz coluna de dimensão N

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}, t) \\ \psi_2(\mathbf{x}, t) \\ \vdots \\ \psi_N(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Note que a Eq.(2.12) se assemelha à função de onda de spin da equação de Pauli, logo iremos denominá-la *spinor*.

Podemos então construir uma densidade de probabilidade positiva definida na forma

$$\rho(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x) = (\psi_1^* \psi_2^* \dots \psi_N^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \psi_i^\dagger(x)\psi_i(x), \quad (2.13)$$

resolvendo assim o problema da densidade negativa ocorrido no campo de Klein-Gordon.

Considerando agora a condição (ii) imposta anteriormente devemos nos certificar de que a densidade de probabilidade seja uma quantidade conservada. Para isto vamos construir a quadri-corrente densidade e a equação da continuidade associada à esta quantidade. Assim, multiplicando Eq.(2.1) pela esquerda por ψ^\dagger e subtraindo esta quantidade do conjugado hermitiano da Eq.(2.1), multiplicado por ψ à direita temos:

$$i\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^3 \left(\psi^\dagger \hat{\alpha}^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} \hat{\alpha}^k \psi \right)$$

Logo,

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} (\psi^\dagger \hat{\alpha}^k \psi).$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

onde ρ é a densidade positiva definida, Eq.(2.13), e \mathbf{j} é a densidade de corrente

$$j^k = \psi^\dagger \hat{\alpha}^k \psi \quad \text{ou} \quad \mathbf{j} = \psi^\dagger \hat{\boldsymbol{\alpha}} \psi$$

onde introduzimos o vetor

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \{\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3\} = \{-\hat{\alpha}_1, -\hat{\alpha}_2, -\hat{\alpha}_3\}.$$

Portanto uma vez que ρ é positivo definido e obedece à lei de conservação, então podemos interpretá-lo como sendo uma densidade de probabilidade. Podemos ainda interpretar \mathbf{j} como a corrente de densidade de probabilidade, a qual será escrita como um quadri-vetor do tipo $\{\rho, \mathbf{j}\}$.

Vamos então construir os vetores (ou matrizes) $\hat{\alpha}^i$ e $\hat{\beta}$. Note que as quantidades $\hat{\alpha}^i$ devem ser hermitianas, pois para que a Hamiltoniana em 2.1 seja hermitiana devemos ter

$$\frac{1}{i} \left(\hat{\alpha}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) + \hat{\beta} m = i \left(-\hat{\alpha}^{k\dagger} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) + \hat{\beta} m.$$

Logo $\hat{\alpha}^i = \hat{\alpha}^{i\dagger}$. Assim sendo, diagonalizá-las separadamente na forma

$$\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} A_1^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_N^i \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Ainda, da relação em Eq.(2.8)

$$(\hat{\alpha}^i)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_N^2 \end{pmatrix}$$

Logo $(A^j)^2 = 1 \Rightarrow A^j = \pm 1$ e os autovetores de $\hat{\alpha}^i$ só assumem valores ± 1 . Analogamente concluimos que os autovalores de $\hat{\beta}$ também são ± 1 . Considerando agora a Eq.(2.6)

$$\hat{\beta} \hat{\alpha}^i = -\hat{\alpha}^i \hat{\beta} \Rightarrow \hat{\beta}^2 \hat{\alpha}^i = -\hat{\beta} \hat{\alpha}^i \hat{\beta} \Rightarrow \hat{\alpha}^i = -\hat{\beta} \hat{\alpha}^i \hat{\beta}$$

Das propriedades do traço, onde $tr\lambda AB = \lambda trBA$ temos

$$tr\hat{\alpha}^i = tr\hat{\beta}^2\hat{\alpha}^i = tr\hat{\beta}\hat{\beta}\hat{\alpha}^i = tr\hat{\beta}\hat{\alpha}^i\hat{\beta} = -tr\hat{\alpha}^i$$

logo $tr\hat{\alpha}^i = 0$.

Sabemos que o traço de matriz diagonalizada é a soma dos valores da diagonal, que no nosso caso assumem valores ± 1 . Assim para que o traço seja nulo, o número de valores da diagonal deve ser par para que se cancelem. Desta forma procuramos por uma matriz quadrada de dimensão par. Considerando a dimensão $N=2$, teremos um problema, pois só existem três matrizes deste tipo que obedecem a relação de anticomutação em Eq.(2.6), que são as matrizes de Pauli. Agora considerando $N=4$ encontramos as matrizes que obedecem as relações necessárias, de forma que, por simplicidade, iremos considerar como sendo a dimensão das matrizes procuradas, ignorando as matrizes de dimensão maior. Assim, as matrizes $\hat{\alpha}^i$'s e $\hat{\beta}$ assumem a forma

$$\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ \hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

onde $\hat{\sigma}^i$ são as matrizes hermitianas de Pauli, então

$$\hat{\alpha}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\alpha}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\alpha}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Devemos então nos certificar que a equação de Dirac, Eq.(2.1) seja invariante de Lorentz. Para isto ela deve ser invariante sob a transformação de referenciais inerciais. Assim, vamos multiplicá-la por $\hat{\beta}$

$$\left(\hat{\beta}i\frac{\partial}{\partial t} + i\hat{\beta}\left(\hat{\alpha}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right) - \hat{\beta}^2m \right) \psi = 0 \quad (2.15)$$

ou ainda

$$i\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3\frac{\partial}{\partial x^3} - m\mathbb{1}\right) \psi = 0 \quad (2.16)$$

onde definimos as matrizes γ^μ como $\gamma^0 = \hat{\beta}$ e $\gamma^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}^i$, ou na forma matricial

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ -\hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Agora, uma vez que $\hat{\beta}^2 = \mathbb{1}$ e de acordo com a relação em Eq.(2.5) teremos

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}. \quad (2.18)$$

Ainda, as matrizes γ^μ são unitárias, ou seja $(\gamma^\mu)^{-1} = (\gamma^\mu)^\dagger$. Quanto a sua hermiticidade elas apresentam comportamentos diferente, sendo que γ^0 é hermitiana e γ^i é anti-hermitiana, tal que

$$\begin{aligned} (\gamma^i)^{-1} &= (\gamma^i)^\dagger \Rightarrow (\gamma^i)^\dagger = -(\gamma^i) \\ (\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0 \Rightarrow (\gamma^0)^2 = \mathbb{1} \end{aligned}$$

Pode ser mostrado [14] que todas as matrizes gamma satisfazendo as relações Eq.(2.35) e Eq.(2.19) são iguais perante uma transformação unitária, de forma que sendo \hat{U} um operador unitário temos

$$\gamma'^\mu = \hat{U}^\dagger\gamma^\mu\hat{U} \quad \hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1} \quad (2.19)$$

agora, uma vez que transformações unitárias não mudam a física, então podemos tomar $\gamma'^\mu = \gamma^\mu$, o que confere à equação de Dirac o caráter de invariante de Lorentz. Podemos então reconhecer a equação de Dirac como um quantidade quântica relativística.

2.2 Equação de Dirac

A equação de Dirac na notação relativística covariante, para partículas massivas de spin 1/2 são, de acordo com Eq.(2.16)

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\mathbb{1})\psi = 0. \quad (2.20)$$

A partir da equação de Dirac podemos inferir uma densidade de Lagrangeana, como sendo uma função bilinear composta dos campos ψ , $\dot{\psi}$ e $\nabla\psi$, assim como de seus conjugados hermitianos ψ^\dagger , $\dot{\psi}^\dagger$ e $\nabla\psi^\dagger$. Deve ainda se transformar como um escalar de Lorentz, e apresentar somente derivadas de primeira ordem. O que nos leva a uma Lagrangeana do tipo [13]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\mathbb{1})\psi \quad (2.21)$$

onde $\bar{\psi}$ é denominado spinor adjunto de ψ e é definido como $\bar{\psi} \doteq \psi^\dagger \gamma^0$. Ainda considerando que $\gamma^0 = \gamma_0$ e $\partial_i = \nabla_i$ podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \psi^\dagger (i\partial_t + i\hat{\alpha} \cdot \nabla - m\gamma_0)\psi \\ &= \psi^\dagger (i\partial_t - \hat{\alpha} \cdot \mathbf{p} - m\hat{\beta})\psi.\end{aligned}$$

Note que se tomarmos a variação da ação com respeito a $\bar{\psi}$ teremos

$$\begin{aligned}\frac{\delta \int \mathcal{L} d^4x}{\delta \bar{\psi}} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} [\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1})\psi] - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} [\bar{\psi} (i\gamma^\lambda \partial_\lambda - m\mathbb{1})\psi] &= 0 \\ &\Rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1})\psi = 0.\end{aligned}$$

Assim temos as equações de Dirac

$$i\partial_t \psi = (\hat{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\hat{\beta})\psi \equiv \hat{H}_f \psi$$

Tomando a variação com relação a ψ teremos as equações de Dirac conjugadas.

Vamos agora calcular os momentos canonicamente conjugados como

$$\begin{aligned}\pi_\psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} [i\psi^\dagger \dot{\psi} + i\psi^\dagger \hat{\alpha} \cdot \nabla \psi - m\psi^\dagger \hat{\beta} \psi] \\ &= i\psi^\dagger \\ \pi_{\psi^\dagger} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^\dagger} = \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}^\dagger} [i\psi^\dagger \dot{\psi} + i\psi^\dagger \hat{\alpha} \cdot \nabla \psi - m\psi^\dagger \hat{\beta} \psi]. \\ &= 0\end{aligned}$$

Que fornece ao campo de Dirac dois graus de liberdade dados por ψ e ψ^\dagger .

A densidade de Hamiltoniana é encontrada a partir da Lagrangeana

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi_\psi \dot{\psi} + \pi_{\psi^\dagger} \dot{\psi}^\dagger - \mathcal{L} = i\psi^\dagger \dot{\psi} - i\psi^\dagger \dot{\psi} - i\psi^\dagger \hat{\alpha} \cdot \nabla \psi + m\psi^\dagger \hat{\beta} \psi \\ &= \psi^\dagger (-i\hat{\alpha} \cdot \nabla + m\hat{\beta})\psi.\end{aligned}$$

Logo a Hamiltoniana é o valor esperado do operador de Dirac $H_D = \hat{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\hat{\beta}$, assim

$$H = \int d^3x \psi^\dagger (\hat{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\hat{\beta})\psi. \quad (2.22)$$

A partir do teorema de Noether [13] para quantidades conservadas podemos calcular o tensor

momento-energia $\theta_{\mu\nu}$ como

$$\begin{aligned}\theta_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi)} \partial_\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \bar{\psi})} \partial_\nu \bar{\psi} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \frac{\partial(\bar{\psi}(i\gamma^\lambda \partial_\lambda - m\mathbb{1})\psi)}{\partial(\partial^\mu \psi)} \partial_\nu \psi + \frac{\partial(\bar{\psi}(i\gamma^\lambda \partial_\lambda - m\mathbb{1})\psi)}{\partial(\partial^\mu \bar{\psi})} \partial_\nu \bar{\psi} - \delta_{\mu\nu} (\bar{\psi}(i\gamma^\lambda \partial_\lambda - m\mathbb{1})\psi) \\ &= \bar{\psi} i \gamma_\mu \partial_\nu \psi - \delta_{\mu\nu} \bar{\psi} i \gamma^\sigma \partial_\sigma \psi + \delta_{\mu\nu} m \bar{\psi} \psi.\end{aligned}$$

Temos então o tensor quadri-momentum

$$P_\nu = \int d^3x \theta_{0\nu} = \int d^3x (\bar{\psi} i \gamma^0 \partial_\nu \psi - \delta_{0\nu} \bar{\psi} i \gamma^\sigma \partial_\sigma \psi + \delta_{0\nu} m \bar{\psi} \psi)$$

onde a componente temporal é dada por

$$\begin{aligned}P_0 &= \int d^3x \theta^0_0 = \int d^3x (\bar{\psi} i \gamma^0 \partial_0 \psi - \bar{\psi} i \gamma^\sigma \partial_\sigma \psi + m \bar{\psi} \psi) \\ &= \int d^3x (\bar{\psi} i \gamma^0 \partial_0 \psi - \bar{\psi} i \gamma^i \partial_i \psi - \bar{\psi} i \gamma^i \partial_i \psi + m \bar{\psi} \psi) \\ &= \int d^3x (\psi^\dagger (i \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} + m \hat{\beta}) \psi)\end{aligned}$$

a qual representa a energia e portanto é igual a Hamiltoniana. A componente espacial representa o vetor momento linear e é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \int d^3x \theta^0_i = \int d^3x (\bar{\psi} i \gamma^0 \partial_i \psi - \delta_{0i} \bar{\psi} i \gamma^\sigma \partial_\sigma \psi + \delta_{0i} m \bar{\psi} \psi) \\ &= \int d^3x (\bar{\psi} i \gamma^0 \partial_i \psi) \\ &= - \int d^3x (\psi^\dagger \mathbf{p} \psi).\end{aligned}\tag{2.23}$$

Agora, da lei de transformação dos spinores de Dirac sob transformações infinitesimais de Lorentz tal que

$$\psi'(x') = \psi(x) - \frac{i}{4} \delta w_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \psi(x)\tag{2.24}$$

onde

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu].\tag{2.25}$$

Podemos encontrar uma relação com as transformações de rotação do campo que são dadas por [13]

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) + \frac{1}{2} \delta w_{\mu\nu} (I^{\mu\nu})_{rs} \phi_s(x).\tag{2.26}$$

em que $I^{\mu\nu}$ são os geradores infinitesimais da transformação de Lorentz. Assim comparando (2.24) com (2.26) teremos

$$(I^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2} (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta},$$

de forma que $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ são índices de Lorentz e $\alpha, \beta = 1, \dots, 4$ são índices de Dirac, em particular,

$$\sigma^{0i} = \frac{i}{2}(\gamma^0\gamma^i - \gamma^i\gamma^0) = i\gamma^0\gamma^i = i\alpha^i$$

$$\sigma^{ij} = \epsilon^{ijk}\Sigma_k.$$

onde

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Agora, uma vez que o tensor momento angular generalizado é

$$M_{\nu\lambda} = \int d^3x (\Theta_{0\lambda}x_\nu - \Theta_{0\nu}x_\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi_r)}(I_{\nu\lambda})_{rs}\phi_s(x))$$

onde

$$M_{\nu\lambda} = L_{\nu\lambda} + S_{\nu\lambda}$$

e

$$L_{\nu\lambda} = \int d^3x (\Theta_{0\lambda}x_\nu - \Theta_{0\nu}x_\lambda) \quad (2.28)$$

$$S_{\nu\lambda} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0\psi)} I_{\nu\lambda}\psi \quad (2.29)$$

Os vetores tri-dimensionais de momento angular orbital e de spin para o campo de Dirac são, de acordo com (2.28) (2.29)

$$\mathbf{L} = -i \int d^3x \psi^\dagger (\mathbf{x} \times \nabla) \psi \quad (2.30)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int d^3x \psi^\dagger \boldsymbol{\Sigma} \psi \quad (2.31)$$

Vamos agora analisar a invariância da densidade de Lagrangeana por uma transformação global de fase, tal que $\psi \rightarrow e^{ix}\psi$ e $\psi^\dagger \rightarrow e^{-ix}\psi^\dagger$, assim

$$\mathcal{L}' = i\psi^\dagger e^{-ix}\psi e^{ix} + i\psi^\dagger e^{-ix}\hat{\alpha} \cdot \nabla(\psi e^{ix}) - m\psi^\dagger e^{-ix}\hat{\beta}\psi e^{ix} \quad (2.32)$$

$$= \mathcal{L} \quad (2.33)$$

nos fornecendo um vetor de corrente conservada $j_\mu(x, t) = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$. Note que incluímos a carga na definição de j_μ , pois ela representa a densidade de corrente elétrica do campo de Dirac, o que nos leva a uma quantidade conservada dada pela carga total

$$Q = \int d^3x j_0(\mathbf{x}, t) = e \int d^3x \psi^\dagger \psi \quad (2.34)$$

2.3 Quantização do campo de Dirac

A fim de quantizar o campo de Dirac vamos substituir os spinores $\psi(\mathbf{x}, t)$ e $\psi^\dagger(\mathbf{x}, t)$ pelos operadores do campo $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ e $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$. Devemos agora decidir se utilizaremos as regras de comutação ou de anticomutação. Uma vez que o campo de Dirac descreve um campo de partículas de spin semi-inteiros, vamos utilizar a relação de anticomutação [13]

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger_\beta(\mathbf{x}', t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.35)$$

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t)\} = \{\hat{\psi}^\dagger_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger_\beta(\mathbf{x}', t)\} = 0 \quad (2.36)$$

O que nos permite calcular a equação de movimento de Heisenberg

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\psi}} &= -i[\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{H}] \\ &= - \int d^3x' [\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', t)(\hat{\alpha} \cdot \nabla')\hat{\psi}(\mathbf{x}', t) + im\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', t)\hat{\beta}\hat{\psi}(\mathbf{x}', t)] \end{aligned}$$

Agora, considerando a identidade

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \{\hat{A}, \hat{B}\}\hat{C} - \hat{B}\{\hat{A}, \hat{C}\}.$$

Podemos escrever a variação temporal do operador de campo $\hat{\psi}_\sigma$ como [13]

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\psi}}_\sigma(\mathbf{x}, t) &= - \int d^3x' \{\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger_\alpha(\mathbf{x}', t)\}(\hat{\alpha} \cdot \nabla')^{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t) - \hat{\psi}^\dagger_\alpha(\mathbf{x}', t)(\hat{\alpha} \cdot \nabla')^{\alpha\beta}\{\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t)\} \\ &\quad + im\{\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger_\alpha(\mathbf{x}', t)\}\hat{\beta}^{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t) - im\hat{\psi}^\dagger_\alpha(\mathbf{x}', t)\hat{\beta}^{\alpha\beta}\{\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t)\} \\ &= - \int d^3x' (\delta_{\sigma\alpha}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')(\hat{\alpha} \cdot \nabla')^{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t) + im\delta_{\sigma\alpha}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\hat{\beta}^{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t)) \\ &= -(\hat{\alpha} \cdot \nabla)_\sigma{}^\beta\hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}, t) - im\hat{\beta}_\sigma{}^\beta\hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}, t) \\ &= -(\hat{\alpha} \cdot \nabla + im\hat{\beta})_{\sigma\beta}\hat{\psi}^\beta(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

2.4 Expansão em base de ondas planas

Vamos considerar agora a expansão do campo de Dirac na base de ondas planas. Para tanto seja o movimento de uma “partícula” livre de Dirac como

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}_f\psi = (\hat{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\hat{\beta})\psi, \quad (2.37)$$

Considerando o *ansatz* dado por,

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x})e^{-ict}, \quad (2.38)$$

temos que de Eq.(2.37)

$$\epsilon\psi(\mathbf{x}) = \hat{H}_f\psi(\mathbf{x}). \quad (2.39)$$

Por sua vez, ψ pode ser reescrito como um vetor coluna 2x1 contendo dois vetores coluna 2x1 que juntos formam um vetor coluna 4x1

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \psi_2(\mathbf{x}) \\ \psi_3(\mathbf{x}) \\ \psi_4(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{x}) \\ \chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \psi_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \chi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_3(\mathbf{x}) \\ \psi_4(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Assim podemos escrever Eq.(2.39) na sua forma matricial a partir de Eq.(2.40) como:

$$\epsilon \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

o que nos leva ao sistema dado por:

$$\epsilon\varphi = \hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi + m\varphi \quad (2.41a)$$

$$\epsilon\chi = \hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}\varphi - m\chi. \quad (2.41b)$$

Agora, como a função de onda ψ obedece à equação de Klein-Gordon, então deve possuir uma solução como base de onda plana, onde estados com momento \mathbf{p} são definidos como:

$$\begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{x}) \\ \chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.42)$$

O que nos leva a um novo sistema dado por

$$\epsilon\varphi_0 = \hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi_0 + m\varphi_0 \quad (2.43a)$$

$$\epsilon\chi_0 = \hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}\varphi_0 - m\chi_0 \quad (2.43b)$$

ou ainda

$$(\epsilon - m)\mathbb{1}\varphi_0 - \hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi_0 = 0 \quad (2.44a)$$

$$-\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}\varphi_0 + (\epsilon + m)\mathbb{1}\chi_0 = 0. \quad (2.44b)$$

Desta forma, para que o sistema formado por Eq.(2.44a) e Eq.(2.44b) tenha uma solução não trivial, de forma que o determinante da matriz de seus coeficientes deve ser igual a zero, logo

$$\begin{vmatrix} (\epsilon - m)\mathbb{1} & -\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p} & (\epsilon + m)\mathbb{1} \end{vmatrix} = 0$$

assim:

$$(\epsilon - m)(\epsilon + m)\mathbb{1} - (\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = 0 \quad (2.45)$$

Vamos agora considerar uma relação das matrizes de Pauli dada por:

$$(\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{A}})(\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}) = (\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}})\mathbb{1} + i\hat{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{B}}) \quad (2.46)$$

podemos então reescrever Eq.(2.45) como:

$$(\epsilon^2 - m^2)\mathbb{1} - \mathbf{p}^2\mathbb{1} = 0 \rightarrow \epsilon^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$$

O que nos retorna uma energia $\epsilon = \epsilon_r \omega_p$ tal que

$$\omega_p^2 = m^2 + \mathbf{p}^2 \quad e \quad \epsilon_r = \pm 1. \quad (2.47)$$

para a qual assumiremos $\omega_p > 0$.

Agora, retornando em Eq.(2.44b) temos

$$\chi_0 = \frac{\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m + \epsilon} \varphi_0 \quad (2.48)$$

onde podemos definir

$$\varphi_0 = U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

sendo U uma quantidade unitária, ou seja:

$$U^\dagger U = U_1^* U_1 + U_2^* U_2 = 1.$$

Finalmente substituindo Eq.(2.48) e Eq.(2.49) em Eq.(2.42), que por sua vez é substituída em Eq.(2.38), temos o conjunto completo das soluções de uma partícula livre das equações de Dirac, com energias negativa e positiva dada por:

$$\psi_{\mathbf{p}, \epsilon_r}(\mathbf{x}, t) = C \begin{pmatrix} U \\ \frac{\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m + \epsilon_r \omega_p} U \end{pmatrix} \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \epsilon_r \omega_p t)] \quad (2.50)$$

com fator de normalização C tal que

$$\int d^3x \psi_{\mathbf{p}, \epsilon_r}^\dagger \psi_{\mathbf{p}', \epsilon_{r'}} = \delta_{rr'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (2.51)$$

Logo¹

$$|C|^2 (2\pi)^3 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(m + \epsilon_r \omega_p)(m + \epsilon_{r'} \omega_p)} \right) e^{i(\epsilon_{r'} - \epsilon_r) \omega_p t} = \delta_{rr'}$$

Esta expressão é identicamente nula se $\epsilon_r \neq \epsilon_{r'}$, donde é proporcional a $\delta_{rr'}$ como desejado.

Porém o coeficiente de proporcionalidade depende de ϵ_r . Assim para $\epsilon_r = \epsilon_{r'}$ teremos

$$\begin{aligned} |C|^2 (2\pi)^3 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(m + \epsilon_r \omega_p)^2} \right) &= 1 \\ |C|^2 (2\pi)^3 \left(\frac{2\epsilon_r \omega_p}{m + \epsilon_r \omega_p} \right) &= 1 \end{aligned}$$

portanto, teremos um fator de normalização dependente de ϵ_r , de forma que o valor de C será diferente para cada r , tal que

$$C_r = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m + \epsilon_r \omega_p}{2\epsilon_r \omega_p} \right)^{1/2} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{\epsilon_r m + \omega_p}{2\omega_p} \right)^{1/2}.$$

Vamos agora introduzir um novo número quântico denominado helicidade, definido como a projeção do momento na direção do spin tal que

$$\hat{\Lambda}_s = \frac{1}{2} \hat{\Sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \hat{S} \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|},$$

onde $\hat{\Sigma}$ é dado por Eq.(2.27). Para um elétron propagando-se na direção positiva do eixo z

$$\hat{\Lambda}_s = \hat{S}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

com autovalores $\pm \frac{1}{2}$ e autovetores

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ U_{-1} \end{pmatrix},$$

onde

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¹Vide Apêndice B.

Assim podemos classificar completamente a onda livre de Dirac se propagando na direção z, denominada $\psi_{p_z, \epsilon_r, S_z}$

$$\psi_{p_z, \epsilon_r, +1/2} = C \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\hat{\sigma}_z p}{m + \epsilon_r \omega_p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i(p_z z - \epsilon_r \omega_p t)} \quad (2.52a)$$

$$\psi_{p_z, \epsilon_r, -1/2} = C \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\hat{\sigma}_z p}{m + \epsilon_r \omega_p} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i(p_z z - \epsilon_r \omega_p t)}. \quad (2.52b)$$

Tal que,

$$\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}.$$

Podemos encontrar uma relação de ortonormalização dada por

$$\int d^3x \psi_{p_z, \epsilon_r, S_z}^\dagger \psi_{p'_z, \epsilon_{r'}, S'_z} = \delta_{rr'} \delta^3(p_z - p'_z) \delta_{S_z S'_z}$$

Uma vez que não devemos ter direções privilegiadas, devemos encontrar a mesma relação para as outras direções e podemos escrever a função de onda ψ de uma forma mais compacta

$$\psi_{\mathbf{p}}^{(r)}(x, t) = (2\pi)^{-3/2} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} w_r(\mathbf{p}) e^{-i\epsilon_r(\omega_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} = (2\pi)^{-3/2} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} w_r(\mathbf{p}) e^{-i\epsilon_r(p \cdot x)} \quad (2.53)$$

onde de Eq.(2.52a) e Eq.(2.52b)

$$w_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\omega_p + \epsilon_r m}{2m}} \begin{pmatrix} U_r \\ \frac{\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m + \epsilon_r \omega_p} U_r \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

de forma que o índice r enumera aqui as quatro soluções. Para uma partícula de spin +1/2, temos as soluções para r=1,2 com energia positiva $E_p = +\omega_p = +\sqrt{p^2 + m^2}$ e $\epsilon = +1$, para os valores de spin iguais a -1/2, temos as soluções para r=3,4 com energia negativa $E_p = -\omega_p = -\sqrt{p^2 + m^2}$ e $\epsilon = -1$. Sendo $U_r = U_1$ para r=1,3 e $U_r = U_{-1}$ para r=2,4. Assim abrindo em componentes:

$$w_1(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\omega_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{m + \omega_p} \\ \frac{p_x + ip_y}{m + \omega_p} \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

$$w_2(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\omega_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{m + \omega_p} \\ \frac{-p_z}{m + \omega_p} \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

$$w_3(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\omega_p - m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{m - \omega_p} \\ \frac{p_x + ip_y}{m - \omega_p} \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

$$w_4(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\omega_p - m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{m - \omega_p} \\ \frac{-p_z}{m - \omega_p} \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Naturalmente a função de onda satisfaz à equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1})\psi_{\mathbf{p}}^{(r)}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.59)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1})(2\pi)^{-3/2} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} w_r(\mathbf{p}) e^{-i\epsilon_r(p \cdot x)} = 0.$$

Logo

$$(\gamma^\mu p_\mu - \epsilon_r m\mathbb{1})w_r(\mathbf{p}) = 0. \quad (2.60)$$

Temos ainda que os spinores $w_r(\mathbf{p})$ devem obedecer² às relações de ortonormalização e fechamento dadas por

$$w_{r'}^\dagger(\mathbf{p})w_r(\mathbf{p}) = \frac{\omega_p}{m} \delta_{rr'} \quad (2.61)$$

$$\sum_{r=1}^4 w_{r\alpha}(\mathbf{p})w_{r\beta}^\dagger(\mathbf{p}) = \frac{\omega_p}{m} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.62)$$

Podemos então escrever a relação de normalização para a função de onda como²

$$\int d^3x \psi_{\mathbf{p}'}^{\dagger(r')}(x) \psi_{\mathbf{p}}^{(r)}(x) = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{rr'}$$

²Vide Apêndice B.

Tendo definido a função de onda $\psi_{\mathbf{p}}^{(r)}$, podemos escrever o campo $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ como uma expansão em ondas planas

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^4 \int d^3p \hat{a}(\mathbf{p}, r) \psi_{\mathbf{p}}^{(r)}(\mathbf{x}, t) \quad (2.63)$$

$$= \sum_{r=1}^4 \int d^3p \frac{\hat{a}(\mathbf{p}, r)}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} w_r(\mathbf{p}) e^{-i\epsilon_r p \cdot x} \quad (2.64)$$

Com o conjugado hermitiano igual a

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^4 \int d^3p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \psi_{\mathbf{p}}^{\dagger(r)}(\mathbf{x}, t) \quad (2.65)$$

$$= \sum_{r=1}^4 \int d^3p \frac{\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r)}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} w_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{i\epsilon_r p \cdot x} \quad (2.66)$$

Devemos agora derivar as relações de anticomutação para os operadores de criação e aniquilação, assim

$$\begin{aligned} \int d^3x \psi_{\mathbf{p}}^{\dagger(r)}(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{r=1}^4 \int d^3p' \hat{a}(\mathbf{p}', r') \int d^3x \psi_{\mathbf{p}}^{\dagger(r)}(\mathbf{x}, t) \psi_{\mathbf{p}'}^{(r')}(\mathbf{x}, t) \\ &= \sum_{r=1}^4 \int d^3p' \hat{a}(\mathbf{p}', r') \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{rr'} \\ &= \hat{a}(\mathbf{p}, r) \end{aligned}$$

ou seja

$$\hat{a}(\mathbf{p}, r) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} e^{i\epsilon_r p \cdot x} w_r^\dagger(\mathbf{p}) \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \quad (2.67)$$

Similarmente para o operador conjugado hermitiano

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) &= \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi_{\mathbf{p}}^{(r)}(\mathbf{x}, t) \\ &= \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} e^{-i\epsilon_r p \cdot x} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) w_r(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Podemos então encontrar a relação de anticomutação entre os operadores $\hat{a}(\mathbf{p}, r)$ e $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}', r')$, considerando as relações de anticomutação Eq.(2.35)

$$\begin{aligned} \{\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r), \hat{a}(\mathbf{p}', r')\} &= \int d^3x d^3x' \psi_{\mathbf{p}\alpha}^{\dagger(r)}(\mathbf{x}, t) \psi_{\mathbf{p}'\beta}^{(r')}(\mathbf{x}', t) \{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t)\} \\ &= \int d^3x d^3x' \psi_{\mathbf{p}\alpha}^{\dagger(r)}(\mathbf{x}, t) \psi_{\mathbf{p}'\beta}^{(r')}(\mathbf{x}', t) \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= \int d^3x \psi_{\mathbf{p}\alpha}^{\dagger(r)}(\mathbf{x}, t) \psi_{\mathbf{p}'\alpha}^{(r')}(\mathbf{x}, t) \\ &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{rr'} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Similarmente temos

$$\{\hat{a}(\mathbf{p}, r), \hat{a}(\mathbf{p}', r')\} = \int d^3x d^3x' \psi_{\mathbf{p}\alpha}^{\dagger(r)}(\mathbf{x}, t) \psi_{\mathbf{p}'\beta}^{\dagger(r')}(\mathbf{x}', t) \{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t)\} = 0 \quad (2.70)$$

ainda

$$\{\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}', r')\} = \int d^3x d^3x' \psi_{\mathbf{p}\alpha}^{(r)}(\mathbf{x}, t) \psi_{\mathbf{p}'\beta}^{(r')}(\mathbf{x}', t) \{\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = 0 \quad (2.71)$$

Uma vez calculados os campos $\hat{\psi}$ em termos das bases de onda plana, podemos reescrever a Hamiltoniana Eq.(2.22) como

$$\hat{H} = \sum_{rr'} \int d^3p' \int d^3p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \hat{a}(\mathbf{p}', r') \int d^3x \psi_{\mathbf{p}}^{\dagger(r)}(-i\hat{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi_{\mathbf{p}'}^{(r')} \quad (2.72)$$

Entretanto da relação Eq.(2.59) podemos deduzir a relação

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1})\psi_{\mathbf{p}}^{(r)} = 0 & \quad \rightarrow \quad (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - m\mathbb{1})\psi_{\mathbf{p}}^{(r)} = 0 \\ (i\gamma^0 \gamma^0 \partial_0 + i\gamma^0 \gamma^i \partial_i - \gamma^0 m)\psi_{\mathbf{p}}^{(r)} = 0 & \quad \rightarrow \quad (-i\hat{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)\psi_{\mathbf{p}}^{(r)} = i\partial_0 \psi_{\mathbf{p}}^{(r)} \end{aligned}$$

Então

$$(-i\hat{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)\psi_{\mathbf{p}}^{(r)} = \epsilon_r \omega_p \psi_{\mathbf{p}}^{(r)} \quad (2.73)$$

Assim substituindo Eq.(2.73) em Eq.(2.72) temos

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{rr'} \int d^3p' \int d^3p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \hat{a}(\mathbf{p}', r') \epsilon_{r'} \omega_{p'} \int d^3x \psi_{\mathbf{p}}^{\dagger(r)} \psi_{\mathbf{p}'}^{(r')} \\ &= \sum_{rr'} \int d^3p' \int d^3p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \hat{a}(\mathbf{p}', r') \epsilon_{r'} \omega_{p'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{rr'} \\ &= \sum_{r=1}^4 \int d^3p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \hat{a}(\mathbf{p}, r) \epsilon_r \omega_p \end{aligned}$$

Separando em frequências positivas e negativas temos

$$\hat{H} = \int d^3p \left(\sum_{r=1}^2 \omega_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \hat{a}(\mathbf{p}, r) - \sum_{r=3}^4 \omega_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \hat{a}(\mathbf{p}, r) \right) \quad (2.74)$$

Agora se considerarmos o operador número de partículas

$$\hat{n}_{\mathbf{p}, r} = \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \hat{a}(\mathbf{p}, r) \quad (2.75)$$

nesse momento encontramos um problema no tratamento da Hamiltoniana, uma vez que podemos criar partículas com energia negativa indiscriminadamente de forma a termos uma energia

total negativa com magnitude arbitrariamente grande. Assim, o espectro de Eq.(2.74) não é limitado inferiormente.

Com o intuito de resolver esse impasse, Dirac definiu o que chamamos de mar de Dirac, o qual prediz a existência de antipartículas fermiônicas ocupando todos os estados com energia menores que zero, desta forma podemos remover a contribuição de energia negativa por uma simples subtração.

Devemos, então, eliminar o infinito gerado pela divergência na parte de energia negativa, subtraindo sua contribuição que é igual a

$$E_0 = - \int dp \sum_{r=3}^4 \omega_p \quad (2.76)$$

Logo, subtraindo Eq.(2.76) de Eq.(2.74) teremos

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \hat{H} - E_0 \\ &= \int d^3p \left(\sum_{r=1}^2 \omega_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \hat{a}(\mathbf{p}, r) - \sum_{r=3}^4 \omega_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \hat{a}(\mathbf{p}, r) \right) + \int dp \sum_{r=3}^4 \omega_p \\ &= \int d^3p \left(\sum_{r=1}^2 \omega_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \hat{a}(\mathbf{p}, r) + \sum_{r=3}^4 \omega_p (1 - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \hat{a}(\mathbf{p}, r)) \right) \\ &= \int d^3p \left(\sum_{r=1}^2 \omega_p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \hat{a}(\mathbf{p}, r) + \sum_{r=3}^4 \omega_p \hat{a}(\mathbf{p}, r) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \right) \\ &= \int d^3p \left(\sum_{r=1}^2 \omega_p \hat{n}_{\mathbf{p},r} + \sum_{r=3}^4 \omega_p \hat{\bar{n}}_{\mathbf{p},r} \right) \end{aligned}$$

onde introduzimos o operador número de partículas $\hat{n}_{\mathbf{p},r}$ como sendo o número de buracos, ou seja, partículas com as mesmas características que o elétron, mas com carga contrária, designadas como antipartículas

$$\hat{\bar{n}}_{\mathbf{p},r} = 1 - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \hat{a}(\mathbf{p}, r) = \hat{a}(\mathbf{p}, r) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r)$$

Desta forma, vamos interpretar o operador $\hat{a}(\mathbf{p}, r)$ não como operador de aniquilação de partículas, decrementando a energia, mas como operador de criação de antipartículas, incrementando com energia negativa. Temos então um estado de vácuo caracterizado não somente partículas, mas também antipartículas, onde $\hat{a}(\mathbf{p}, r)$ é operador de aniquilação para $r = 1, 2$ e operador de criação para $r = 3, 4$.

$$\hat{a}(\mathbf{p}, r)|0\rangle = 0 \quad \text{para } r = 1, 2$$

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r)|0\rangle = 0 \quad \text{para } r = 3, 4$$

assim

$$\hat{n}_{\mathbf{p},r}|0\rangle = 0$$

$$\hat{n}_{\mathbf{p},r}^\dagger|0\rangle = 0$$

Na tentativa de evitarmos confusões vamos definir uma nova nomenclatura para as funções de onda $w_r(\mathbf{p})$ e para os operadores $\hat{a}(\mathbf{p}, r)$ e $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r)$

$$w_1(\mathbf{p}) = u(\mathbf{p}, +s) \quad \hat{b}(\mathbf{p}, +s) = \hat{a}(\mathbf{p}, 1) \quad (2.77a)$$

$$w_2(\mathbf{p}) = u(\mathbf{p}, -s) \quad \hat{b}(\mathbf{p}, -s) = \hat{a}(\mathbf{p}, 2) \quad (2.77b)$$

$$w_3(\mathbf{p}) = v(\mathbf{p}, +s) \quad \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, +s) = \hat{a}(\mathbf{p}, 3) \quad (2.77c)$$

$$w_4(\mathbf{p}) = v(\mathbf{p}, -s) \quad \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, -s) = \hat{a}(\mathbf{p}, 4) \quad (2.77d)$$

Deixando invariantes as relações de anticomutação:

$$\{\hat{b}(\mathbf{p}, s), \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = \delta_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}^3 \delta_{ss'} \quad \{\hat{d}(\mathbf{p}, s), \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = \delta_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}^3 \delta_{ss'} \quad (2.78a)$$

$$\{\hat{b}(\mathbf{p}, s), \hat{b}(\mathbf{p}', s')\} = \{\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s), \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = \{\hat{b}(\mathbf{p}, s), \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = 0 \quad (2.78b)$$

$$\{\hat{d}(\mathbf{p}, s), \hat{d}(\mathbf{p}', s')\} = \{\hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s), \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = \{\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s), \hat{d}(\mathbf{p}', s')\} = 0 \quad (2.78c)$$

$$\{\hat{b}(\mathbf{p}, s), \hat{d}(\mathbf{p}', s')\} = \{\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s), \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = 0 \quad (2.78d)$$

Podemos então reescrever a função de onda $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t)$ em termos desses novos operadores $u(\mathbf{p}, s)$ e $v(\mathbf{p}, s)$ como

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-2/3} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} \sum_s (u(\mathbf{p}, s)e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, s)e^{ip \cdot x})$$

consequentemente podemos reescrever o operador

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{2/3}} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} (\hat{b}(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s)e^{-ip \cdot x} + \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s)e^{ip \cdot x}).$$

Agora, visando facilitar os cálculos vamos escrever explicitamente os spinores $u(\mathbf{p}, s)$ como

$$u(\mathbf{p}, s) = \frac{\not{p} + m\mathbb{1}}{\sqrt{2m(\omega_p + m)}} u(0, s) \quad (2.79)$$

onde $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$. Similarmente podemos escrever $v(\mathbf{p}, s)$ como

$$v(\mathbf{p}, s) = \frac{-\not{p} + m\mathbb{1}}{\sqrt{2m(\omega_p + m)}} v(0, s). \quad (2.80)$$

As quais obedecem à equação de Dirac na forma

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}, s) = 0 \quad e \quad (\not{p} + m)v(\mathbf{p}, s) = 0.$$

Assim, vamos reescrever a Hamiltoniana como

$$\hat{H}' = \hat{H} - E_0 = \sum_s \int d^3p \omega_p (\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s) \hat{b}(\mathbf{p}, s) + \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s) \hat{d}(\mathbf{p}, s))$$

de forma que podemos então interpretar os operadores previamente definidos como

$$\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s) = \text{criador de partícula}$$

$$\hat{b}(\mathbf{p}, s) = \text{aniquilador de partícula}$$

$$\hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s) = \text{criador de antipartícula}$$

$$\hat{d}(\mathbf{p}, s) = \text{aniquilador de antipartícula}$$

O que possibilita a construção de um espaço de Fock, tanto para partículas quanto para antipartículas, atuando os respectivos operadores de criação no estado de vácuo definido como

$$\hat{b}|0\rangle = 0 \quad \hat{d}|0\rangle = 0.$$

Os quais obedecem ao princípio de exclusão de Pauli.

Vamos agora discutir a viabilidade de considerarmos o tratamento do campo de Dirac utilizando comutadores ao invés de anticomutadores, ou seja, quantizar o campo de Dirac usando a estatística de Bose-Einstein. Note que se utilizarmos a álgebra de comutadores não poderemos eliminar o sinal menos em Eq.2.74, uma vez que ao invés de subtrair uma energia E_0 deveríamos somar essa quantidade de energia a fim de definir o operador número de buracos. Desta forma, a Hamiltoniana não seria mais limitada inferiormente e poderíamos adicionar antipartículas arbitrariamente de forma a eliminar a Hamiltoniana com energia negativa indefinidamente, o que não é fisicamente viável. Portanto, a quantização do campo de Dirac utilizando a estatística de Bose-Einstein é inconsistente.

2.5 Tensor momento-energia

Até o presente momento consideramos o campo de Dirac somente no espaço tempo de Minkowski. Vamos agora tratar do campo de Dirac em espaços curvos, especificamente no espaço de Friedmann. O tratamento dado para campos spinoriais como o campo Dirac em espaços curvos é via formalismo de tetradas, ou vierbeins³, o que nos leva a reescrever a lagrangeana

³Vide Apêndice D

em termos destas quantidades [3], tal que

$$\mathcal{L}(x) = \frac{i}{2}[\bar{\psi}\gamma^a V_a{}^\mu \nabla_\mu \psi - V_a{}^\mu (\nabla_\mu \bar{\psi})\gamma^a \psi] - m\bar{\psi}\psi \quad (2.81)$$

onde γ_a são as matrizes gamma de Dirac no espaço de Minkowski⁴. Podemos escrever $\gamma_\mu = \gamma^a V_a{}^\mu$ de forma que, γ_μ são as matrizes gamma de Dirac no espaço curvo. Note que estamos considerando a lagrangeana em sua forma simetrizada, a qual difere da forma usual utilizada em Eq.(2.21) somente por um termo de derivada total, de forma a não influenciar as equações de movimento do campo em questão.

A derivada parcial da lagrangeana de Dirac no espaço plano, Eq.(2.21), é promovida a uma derivada covariante de gauge⁵ ∇_μ e apresenta um termo extra [3], sendo

$$\nabla_\mu \psi = (\partial_\mu + i\Gamma_\mu)\psi \quad \nabla_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - i\bar{\psi}\Gamma_\mu \quad (2.82)$$

O termo extra representado por Γ_μ é denominada conexão de spin. Ele tem um papel análogo aos campos de gauge A_μ , que aparecem no caso de teorias de gauge conforme estudado no capítulo 3. Neste contexto, ele garante que a lagrangeana seja invariante sob transformações de Lorentz locais (isto é, dependentes do ponto espaço temporal x_μ). Sendo determinado por [18]

$$\Gamma_\nu = \frac{1}{4}V_{\mu a}V^\mu{}_{b;\nu}\sigma^{ab} \quad (2.83)$$

onde σ^{ab} são os geradores do grupo de Lorentz, introduzidos na seção 2.2 e definidos por Eq.(2.25), tal que

$$\sigma^{ab} = \frac{i}{2}[\gamma^a, \gamma^b]$$

e $V^\mu{}_{b;\nu}$ é a derivada covariante da relatividade geral, apresentada como

$$V^\mu{}_{b;\nu} = \partial_\nu V^\mu{}_{b;\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\sigma{}_{b;\nu}$$

Devemos agora, escolher uma vierbein representado o espaço de Friedmann (existe uma família de possibilidades a serem escolhidas, associadas com a invariância de Lorentz local),

⁴Note que essa lagrangeana difere da lagrangeana discutida ao longo do capítulo, por um termo simétrico, o qual pode ser reduzido à uma derivada total, conservando as equações de movimento.

⁵Apesar do nome não devemos confundir com a derivada covariante da relatividade, a qual se origina em função da curvatura do espaço (denotamos essa derivada como ${}_{;\mu}$).

vamos optar pela vierbein dada por [18]

$$V_{\mu a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t) \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

a qual apresenta uma conveniente forma diagonal. Essa forma da vierbein preservar as relações usuais das vierbeins Eq.(D.3) e Eq.(D.4), tais que, sendo

$$V_{\mu}{}^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t) \end{pmatrix}$$

e

$$V^{\mu}{}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^{-1}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^{-1}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^{-1}(t) \end{pmatrix}$$

temos as relações

$$V_{\mu}{}^a V_{\nu a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t) \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}$$

e

$$V^{\mu}{}_a V_{\mu b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta_{ab}$$

Definida qual a vierbein que será utilizada, podemos calcular a conexão de spin, de acordo com Eq.(2.83), a qual iremos calcular em componentes, assim para a componente temporal,

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{1}{4} V_{\mu a} V^{\mu}{}_{b;0} \sigma^{ab} \\ &= \frac{1}{4} (V^0{}_{0;0} \sigma^{00} + V_{ij} V^i{}_{k;0} \sigma^{kj}) \\ &= \frac{1}{4} (V^0{}_{0;0} \sigma^{00} + 3V_{11} V^1{}_{1;0} \sigma^{11}) \end{aligned}$$

de forma que

$$V^0{}_{0;0} = \partial_0 V^0{}_{0;0} + \Gamma_{0\sigma}^0 V^\sigma{}_{0;0} = \Gamma_{00}^0 V^0{}_{0;0} + \Gamma_{0i}^0 V^i{}_{0;0} = 0,$$

e

$$\begin{aligned} V^1{}_{1;0} &= \partial_0 V^1{}_{1;0} + \Gamma_{00}^1 V^0{}_{1;0} + \Gamma_{01}^1 V^1{}_{1;0} + \Gamma_{02}^1 V^2{}_{1;0} + \Gamma_{03}^1 V^3{}_{1;0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{a(t)} \right) + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \left(-\frac{1}{a(t)} \right) = \frac{\dot{a}(t)}{a^2(t)} - \frac{\dot{a}(t)}{a^2(t)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Segue que

$$\Gamma_0 = 0. \quad (2.85)$$

Agora, para a componente espacial da conexão de spin, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \frac{1}{4} V_{\mu a} V^\mu{}_{b;i} \sigma^{ab} \\ &= \frac{1}{4} (V^0{}_{0;i} \sigma^{00} + V^0{}_{j;i} \sigma^{j0} + V_{jk} V^j{}_{0;i} \sigma^{0k} + V_{jk} V^j{}_{h;i} \sigma^{hk}) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} V^0{}_{0;i} &= \partial_i V^0{}_{0;0} + \Gamma_{i\sigma}^0 V^\sigma{}_{0;0} = \Gamma_{i0}^0 V^0{}_{0;0} + \Gamma_{i0}^0 V^j{}_{0;0} = 0, \\ V^0{}_{j;i} &= \partial_i V^0{}_{j;0} + \Gamma_{i\sigma}^0 V^\sigma{}_{j;0} = \Gamma_{00}^0 V^0{}_{j;0} + \Gamma_{ik}^0 V^k{}_{j;0} = \Gamma_{ik}^0 V^k{}_{j;0}, \\ V^j{}_{0;i} &= \partial_i V^j{}_{0;0} + \Gamma_{i\sigma}^j V^\sigma{}_{0;0} = \Gamma_{i0}^j V^0{}_{0;0} + \Gamma_{ik}^j V^k{}_{0;0} = \Gamma_{i0}^j, \end{aligned}$$

e

$$V^j{}_{h;i} = \partial_i V^j{}_{h;0} + \Gamma_{i\sigma}^j V^\sigma{}_{h;0} = \Gamma_{i0}^j V^0{}_{h;0} + \Gamma_{ik}^j V^k{}_{h;0} = 0.$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \frac{1}{4} (\Gamma_{ik}^0 V^k{}_{j;0} \sigma^{j0} + V_{jk} \Gamma_{i0}^j \sigma^{0k}) \\ &= -\frac{1}{4} \dot{a}(t) a^2(t) \left(-\frac{1}{a^2(t)} \right) \sigma^{0i} + \frac{1}{4} a(t) \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) \sigma^{0i} \\ &= \frac{1}{2} \dot{a}(t) \sigma^{0i} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Sendo a componente dos geradores do grupo de Lorentz σ^{0i} , calculados a partir das matrizes gamma de Dirac, tais que

$$\begin{aligned} \sigma^{0i} &= \frac{i}{2} [\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^i - \gamma^i \gamma^0) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Definida a forma da vierbein do campo de Friedmann, podemos enfim calcular o tensor momento-energia associado ao campo de Dirac em espaços curvos. Assim, o tensor momento energia é dado por [3]

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}i[\bar{\psi}\gamma_{(\mu}\nabla_{\nu)}\psi - (\nabla_{(\mu}\bar{\psi})\gamma_{\nu)}\psi] \\ &= \frac{i}{2}[V_{a\mu}\bar{\psi}\gamma^a\nabla_{\nu}\psi + V_{a\nu}\bar{\psi}\gamma^a\nabla_{\mu}\psi - V_{a\mu}(\nabla_{\nu}\bar{\psi})\gamma^a\psi - V_{a\nu}(\nabla_{\mu}\bar{\psi})\gamma^a\psi] \end{aligned}$$

Entretanto, podemos reescrever essa relação de forma a reincorporar o termo de massa na definição do tensor momento energia. Assim, considerando a equação de movimento de Dirac, Eq.(2.20), e tomando sua conjugada temos,

$$\begin{aligned} (i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\psi - m\psi)^{\dagger} &= (i\gamma^{\mu}(\psi_{\mu} + i\Gamma_{\mu})\psi - m\psi)^{\dagger} \\ &= -iV_a^{\mu}[(\partial_{\mu}\psi^{\dagger})\gamma^a - i\psi^{\dagger}\Gamma_{\mu}\gamma^a] \end{aligned}$$

Agora, procurando escrever em função $\bar{\psi}$ iremos multiplicar a equação por γ^0 pela esquerda, assim considerando a relação de anticomutação das matrizes gamma, Eq.(2.35), temos

$$\begin{aligned} -iV_a^{\mu}[(\partial_{\mu}\psi^{\dagger})\gamma^a\gamma^0 - m\bar{\psi}] &= -iV_a^{\mu}[(\partial_{\mu}\psi^{\dagger}) - i\psi^{\dagger}\Gamma_{\mu}](\gamma^0\gamma^a + 2\eta^{a0}) - m\bar{\psi} \\ &= i(\partial_0\bar{\psi})\gamma^0 - \frac{i}{a}(\partial_i\bar{\psi})\gamma^i - \frac{1}{a}\psi^{\dagger}\Gamma_i\gamma^0\gamma^i - 2i\partial_0\psi^{\dagger} - m\bar{\psi} \\ &= i(\partial_0\bar{\psi})\gamma^0 - \frac{i}{a}(\partial_i\bar{\psi})\gamma^i - \frac{1}{a}\psi^{\dagger}(\gamma^0\Gamma_i - 2\dot{a}\gamma_i)\gamma^i - 2i(\partial_0\bar{\psi})\gamma^0 - m\bar{\psi} \\ &= i(\partial_0\bar{\psi})\gamma^0 - \frac{i}{a}(\partial_i\bar{\psi})\gamma^i - \frac{\bar{\psi}}{a}\Gamma_i\gamma^i + \frac{2\dot{a}}{a}\psi^{\dagger}\gamma_i\gamma^i - 2i(\partial_0\bar{\psi})\gamma^0 - m\bar{\psi} \\ &= i(\partial_0\bar{\psi})\gamma^0 - \frac{i}{a}(\partial_i\bar{\psi})\gamma^i - \frac{\dot{a}}{2a}\bar{\psi}\sigma^{0i}\gamma^i + \frac{6\dot{a}}{a}\bar{\psi}\gamma^0 - 2i(\partial_0\bar{\psi})\gamma^0 - m\bar{\psi} \\ &= -i(\partial_0\bar{\psi})\gamma^0 - \frac{i}{a}(\partial_i\bar{\psi})\gamma^i - \frac{9\dot{a}}{a}\bar{\psi}\gamma^0 - m\bar{\psi} \end{aligned}$$

ARRUMAR considerando a relação para a derivada covariante Γ_{μ} , Eq.(2.82) e as relações para as conexões de spin, Eq.(2.85) e Eq.(2.85). onde nós utilizamos o resultado dado por

$$\gamma^1\sigma^{01} = -2 \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = -2\gamma^0 \quad (2.88)$$

Note que $\sigma^{01}\gamma^1 = -\gamma^1\sigma^{01}$. Ainda, note que as componentes 2 e 3, apresentam o mesmo resultado.

Escrevendo em componentes, os quais os únicos termos relevantes são as componentes da diagonal do tensor momento-energia, em função das equações de Einstein, Eq.(1.28) e Eq.(1.29),

temos

$$\begin{aligned}
T_{00} &= i[V_{a0}\bar{\psi}\gamma^a\nabla_0\psi - V_{a0}(\nabla_0\bar{\psi})\gamma^a\psi] \\
&= i\bar{\psi}\gamma^0\nabla_0\psi - i(\nabla_0\bar{\psi})\gamma^0\psi \\
&= i\bar{\psi}\gamma^0(\partial_0 + i\Gamma_0)\psi - i(\partial_0\bar{\psi} - i\bar{\psi}\Gamma_0)\gamma^0\psi \\
&= i\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi - i(\partial_0\bar{\psi})\gamma^0\psi \\
&= i\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi + \frac{i}{a}(\partial_i\bar{\psi})\gamma^i\psi + \frac{9\dot{a}}{a}\bar{\psi}\gamma^0\psi + m\bar{\psi}\psi
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Considerando agora as componentes espaciais do tensor momento-energia,

$$\begin{aligned}
T_{11} &= i[V_{a1}\bar{\psi}\gamma^a\nabla_1\psi - V_{a1}(\nabla_1\bar{\psi})\gamma^a\psi] \\
&= ia\bar{\psi}\gamma^1\nabla_1\psi - ia(\nabla_1\bar{\psi})\gamma^1\psi \\
&= ia\bar{\psi}\gamma^1(\partial_1 + i\Gamma_1)\psi - ia(\partial_1\bar{\psi} - i\bar{\psi}\Gamma_1)\gamma^1\psi \\
&= ia\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi - a\bar{\psi}\gamma^1\Gamma_1\psi - a\bar{\psi}\Gamma_1\gamma^1\psi + ia(\partial_2\bar{\psi})\gamma^2\psi \\
&\quad + ia(\partial_3\bar{\psi})\gamma^3\psi + ia^2(\partial_0\bar{\psi})\psi + 9\dot{a}a\bar{\psi}\gamma^0\psi + ma^2\bar{\psi}\psi \\
&= ia\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi + ia(\partial_2\bar{\psi})\gamma^2\psi + ia(\partial_3\bar{\psi})\gamma^3\psi + ia^2(\partial_0\bar{\psi})\psi \\
&\quad + 9\dot{a}a\bar{\psi}\gamma^0\psi + ma^2\bar{\psi}\psi
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Similarmente

$$T_{22} = ia\bar{\psi}\gamma^2\partial_2\psi + ia(\partial_1\bar{\psi})\gamma^1\psi + ia(\partial_3\bar{\psi})\gamma^3\psi + ia^2(\partial_0\bar{\psi})\psi + 9\dot{a}a\bar{\psi}\gamma^0\psi + ma^2\bar{\psi}\psi \tag{2.91}$$

e

$$T_{11} = ia\bar{\psi}\gamma^3\partial_3\psi + ia(\partial_1\bar{\psi})\gamma^1\psi + ia(\partial_2\bar{\psi})\gamma^2\psi + ia^2(\partial_0\bar{\psi})\psi + 9\dot{a}a\bar{\psi}\gamma^0\psi + ma^2\bar{\psi}\psi. \tag{2.92}$$

Capítulo 3

Campos de Calibre

Campos de calibre são definidos como campos cujas lagrangeanas são invariantes sob uma transformação local de um grupo de simetria contínuo. O termo calibre é referente aos graus de liberdade redundantes presentes na Lagrangeana, permitindo transformações internas nas variáveis dinâmicas da teoria sem alterar as quantidades físicas dela decorrentes, sendo que a primeira teoria contendo simetria de calibre foi a eletrodinâmica clássica, formulada por Maxwell em 1864.

Neste capítulo trataremos de duas teorias de calibre oriundas da teoria de Maxwell. A primeira teoria de calibre é uma descrição da eletrodinâmica não-linear considerando um modelo efetivo clássico para efeitos quânticos a 1-loop provindos da QED. A segunda é uma teoria não-abeliana, onde a simetria do grupo é não-abeliana (isto é, os geradores do grupo não comutam entre si). Esta classe de teorias recebe o nome de teoria de Yang-Mills.

Vamos iniciar com uma breve descrição do eletromagnetismo de Maxwell, para então introduzir cada um dos casos separadamente.

3.1 Eletromagnetismo de Maxwell

Partículas de spin 1, como por exemplo os fótons ou os bósons de calibre do modelo padrão (Z^0 , W^+ , W^-), são descritas por campos de calibre, apresentando portanto graus de liberdades redundantes. O número de graus de liberdade é maior em partículas massivas do que em partículas sem massa, de forma que devemos tratar cada caso separadamente. Assim, campos de partículas sem massa são descritos pela eletrodinâmica de Maxwell, enquanto campo de

partículas massivas são descritas pela eletrodinâmica de Proca. Iremos nos restringir, neste trabalho, ao estudo de partículas sem massa, por representarem os campos de calibre nos quais estamos interessados.

As partículas que serão objetos do nosso estudo são partículas fotônicas, as quais apresentam uma lagrangeana dada por [13]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

onde $F^{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem, antissimétrico, denominado tensor de campo eletromagnético, sendo definido como [22]

$$F^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{B} são os campos elétrico e magnético respectivamente. O dual do tensor de campo eletromagnético $*F^{\mu\nu}$ é definido pela contração do tensor de campo eletromagnético com o pseudo-tensor antissimétrico de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ tal que

$$*F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (3.3)$$

Podemos ainda escrever as equações de Maxwell na forma tensorial, via tensor de campo eletromagnético, conforme relacionado abaixo [13]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (3.4)$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0, \quad (3.5)$$

onde $j^\mu = (\rho, \mathbf{J})$, é o quadri vetor densidade de corrente. De forma que, abrindo em componentes¹, teremos as equações de Maxwell usuais

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (3.9)$$

¹Vide Apêndice C

Sendo a Eq.(3.6) denominada a lei de Gauss, a Eq.(3.7) a lei que indica a ausência de monopolo magnético, a Eq.(3.8) chamada lei de Ampère e a Eq.(3.9) conhecida como a lei de Faraday para a indução. Podemos ainda, utilizando as relações tensoriais para as equações de Maxwell, deduzir a equação da continuidade. Assim, contraindo Eq.(3.5) com o pseudo-tensor de Levi-Civita temos

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon_{\lambda\nu\rho\sigma}(\partial^\lambda F^{\rho\sigma} + \partial^\sigma F^{\lambda\rho} + \partial^\rho F^{\sigma\lambda}) \\ &= (\epsilon_{\lambda\nu\rho\sigma} + \epsilon_{\rho\nu\sigma\lambda} + \epsilon_{\sigma\nu\lambda\rho})\partial^\lambda F^{\rho\sigma} \\ &= 6\partial^\lambda *F_{\lambda\nu} \end{aligned}$$

logo, tomando a quadri-divergência da Eq.(3.4) e substituindo na relação acima temos a equação da continuidade

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

O potencial escalar, V e o potencial vetor, \mathbf{A} , também podem ser definidos como um quadri-vetor onde $A^\mu = (V, \mathbf{A})$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (3.10)$$

onde novamente abrindo em componentes², temos os campos elétrico e magnético em termos do potencial.

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.12)$$

O que nos permite, recuperar as equações de Maxwell a partir da equação²

$$\square A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\mu. \quad (3.13)$$

Note que essa equação é invariante sob uma transformação de calibre, ou seja se tomarmos

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \phi(x)$$

onde $\phi(\mathbf{x}, t)$ é uma função escalar, isto não implica em uma mudança nas quantidades físicas do problema, uma vez que, o potencial A^μ não é uma quantidade observável.

Para a realização dos cálculos, um calibre pode ser fixado de forma a tornar o processo operacional mais simples, sendo que os mais comuns são dados por

²Vide Apêndice C

- $\partial^\nu A_\nu = 0 \Rightarrow$ calibre de Lorentz,
- $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow$ calibre de Gauss,
- $A_0 = 0 \Rightarrow$ calibre temporal,
- $A_3 = 0 \Rightarrow$ calibre axial.

3.2 Eletrodinâmica não-linear

O campo eletromagnético apresentado até o presente momento, se referia a um campo clássico. No entanto se examinarmos o problema do ponto de vista quântico, devemos computar contribuições devido a criação de pares elétron-pósitron, os quais causam flutuações no campo, sendo necessária uma correção da lagrangeana do campo. Vamos, então, considerar uma lagrangeana efetiva obtida acrescentando à lagrangeana clássica, \mathcal{L} , um termo perturbativo, $\delta\mathcal{L}$ [20], ou seja,

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}.$$

Assim, \mathcal{L}_0 é a lagrangeana do campo eletromagnético dada por

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2). \quad (3.14)$$

Agora, consideraremos o campo variando localmente, logo $\delta\mathcal{L}$ pode ser escrito em termos dos invariantes $(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$ e $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2$, tal que

$$\delta\mathcal{L} \equiv \delta\mathcal{L}[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2].$$

Entretanto, sabemos que em um meio material as propriedades de polarização do meio são introduzidas através dos campo elétrico \mathbf{D} e magnético \mathbf{H} . Para efeitos quânticos essas perturbações são consideradas como ocorrendo no vácuo, caracterizando uma polarização do vácuo, sendo representadas por $\delta\mathcal{L}$, que contém a informação quântica da interação do campo eletromagnético com os pares elétron-positron. Assim, vamos definir um propagador $\phi_0(A)$ representando a dinâmica de vácuo para os efeitos eletromagnéticos, o qual irá nos fornecer uma definição para $\delta\mathcal{L}$, tal que

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \phi_0(A) = \exp\left(i \int d^4x \delta\mathcal{L}\right),$$

onde a parte real descreve a dispersão e a parte imaginária descreve a absorção. Assim, para pequenas variações de $\delta\mathcal{L}$ temos [33]

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \left(e^2 ab \frac{\cosh(eas) \cos ebs}{\sinh eas \sin ebs} - \frac{1}{s^2} \right) \quad (3.15)$$

de forma que expandindo, Eq.(3.15), até contribuições de segunda ordem em função de e , considerando um campo fraco, e tomando $a^2 - b^2 \equiv \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$, $ab \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ temos a lagrangeana de Euler-Heisenberg

$$\delta\mathcal{L} = \frac{2\alpha^2}{45m^4} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2] \quad (3.16)$$

onde definimos $\varepsilon_0 = c = \hbar = 1$ e por conseguinte $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$, referente à constante de estrutura fina. Podemos, então escrever a lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg completa como

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{2\alpha^2}{45} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2] \quad (3.17)$$

Logo, temos uma langrangeana com componentes clássicos \mathbf{E} e \mathbf{B} , descrevendo um comportamento quântico, ao menos em primeira ordem. Sendo que se desconsiderarmos contribuições quânticas, ou seja, se tomarmos α igual a zero, recuperamos a lagrangeana clássica para o campo eletrodinâmico, caracterizado pelo primeiro termo.

3.2.1 Tensor Momento-Energia

Para o cálculo do tensor momento-energia³ devemos considerar a lagrangeana de Euler-Heisenberg, Eq.(3.17) dado por

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{F}{4} + \frac{2\alpha^2}{45} \left(\frac{F^2}{4} + \frac{7G^2}{16} \right) \quad (3.18)$$

De forma que, consideraremos esse campo em um universo de Friedmann, assim escrevendo $F_{\mu\nu}$ em termos da métrica, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -a^2(t), -a^2(t), -a^2(t))$ tal que

$$F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = 2(B^2 - E^2)$$

$$G = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

O que nos permite escrever o tensor momento-energia como

$$(T_{\mu\nu})_{EH} = - \left(1 - \frac{4\alpha^2 F}{45} \right) F_{\mu}{}^{\gamma} F_{\gamma\nu} + \left[\frac{F}{4} - \frac{\alpha^2 F^2}{90} - \frac{7\alpha^2 G^2}{72} \right] g_{\mu\nu} \quad (3.19)$$

³Vide Apêndice A

Em componentes teremos,

$$(T_{00})_{EH} = \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) F_0 \gamma F_{\gamma 0} + \frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{45} \left(\frac{7G^2}{4} - \frac{F^2}{2} \right) \quad (3.20)$$

$$(T_{11})_{EH} = \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) F_1 \gamma F_{\gamma 1} - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{45} \left(\frac{7G^2}{4} - \frac{F^2}{2} \right) \right] a^2(t) \quad (3.21)$$

$$(T_{22})_{EH} = \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) F_2 \gamma F_{\gamma 2} - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{45} \left(\frac{7G^2}{4} - \frac{F^2}{2} \right) \right] a^2(t) \quad (3.22)$$

e

$$(T_{33})_{EH} = \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) F_3 \gamma F_{\gamma 3} - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{45} \left(\frac{7G^2}{4} - \frac{F^2}{2} \right) \right] a^2(t) \quad (3.23)$$

Tomando o observador do tipo tempo, $v^\mu = \delta_0^\mu$, introduzido no capítulo (1), os campos E_μ e B_μ podem ser escritos como,

$$E_\mu = F_{\mu\nu} v^\nu \quad (3.24)$$

$$B_\mu = F_{\mu\nu}^* v^\nu \quad (3.25)$$

assim, podemos escrever $F_{\mu\nu}$ em termos de E_μ e B_μ , tal que

$$F_{\mu\nu} = E_\mu v_\nu - E_\nu v_\mu + \eta_{\mu\nu} \alpha^\beta v_\alpha B_\beta. \quad (3.26)$$

Portanto, o tensor momento-energia pode ser escrito em componetes como

$$(T_{00})_{EH} = -E^2 \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) + \frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{45} \left(\frac{7G^2}{4} - \frac{F^2}{2} \right) \quad (3.27)$$

$$(T_{11})_{EH} = \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) [-(E_1)^2 + (B_2)^2 + (B_3)^2] - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{45} \left(\frac{7G^2}{4} - \frac{F^2}{2} \right) \right] a^2(t) \quad (3.28)$$

$$(T_{22})_{EH} = \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) [-(E_2)^2 + (B_1)^2 + (B_3)^2] - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{45} \left(\frac{7G^2}{4} - \frac{F^2}{2} \right) \right] a^2(t) \quad (3.29)$$

e

$$(T_{33})_{EH} = \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) [-(E_3)^2 + (B_1)^2 + (B_2)^2] - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{45} \left(\frac{7G^2}{4} - \frac{F^2}{2} \right) \right] a^2(t) \quad (3.30)$$

3.3 Campos de Yang-Mills

No ano de 1954, Chen Ning Yang e Robert Mills estenderam o conceito de teoria de calibre para grupos não abelianos, provendo uma explicação para as interações fortes. Podemos construir de maneira linear e didática a lagrangeana de Yang-Mills através da promoção de uma simetria global para uma simetria local, passando de grupos abelianos para grupos não abelianos. Vamos apresentar primeiro a idéia básica utilizando o caso mais simples possível do grupo $U(1)$, para então estender para o caso de grupos não-abelianos e chegar ao modelo de Yang-Mills. Vimos no capítulo 2, que a lagrangeana de Dirac é invariante sob uma transformação global, Eq.(2.32), logo

$$\mathcal{L}' = i\psi^\dagger e^{-i\chi} \psi e^{i\chi} + i\psi^\dagger e^{-i\chi} \hat{\alpha} \cdot \nabla(\psi e^{i\chi}) - m\psi^\dagger e^{-i\chi} \hat{\beta} \psi e^{i\chi} \quad (3.31)$$

$$= \mathcal{L}. \quad (3.32)$$

Agora se promovermos essa transformação do tipo global para uma transformação local, tal que $\chi = -q\theta(x)$ (onde q é a carga do campo de Dirac), teremos $\psi \rightarrow U\psi$ e $\psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger U^\dagger$. Sendo $U = e^{iq\theta(x)}$ um operador unitário⁴ tal que $UU^\dagger = 1$. A nova lagrangeana \mathcal{L}' , calculada ao realizarmos uma transformação local na lagrangeana de Dirac \mathcal{L} é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \psi^\dagger e^{-iq\theta(x)} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{iq\theta(x)} \psi \\ &= \psi^\dagger i\gamma^\mu [\partial_\mu \psi + \psi (iq\partial_\mu \theta(x))] - m\psi^\dagger \psi \\ &= \mathcal{L} - q\psi^\dagger \gamma^\mu \psi (\partial_\mu \theta(x)). \end{aligned} \quad (3.33)$$

A solução seria introduzir um novo termo A_μ , que se transforma sob esta transformação local simultaneamente como $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta(x)$.

Consequentemente, a lagrangeana de Dirac não é invariante perante uma transformação local. Vamos então induzir uma invariância local, o que pode ser feito somando-se um termo conveniente na lagrangeana de forma a eliminar esse termo não invariante. Podemos inserir esse termo via a promoção da derivada parcial na lagrangeana de Dirac a uma derivada covariante, denominada regra de acoplamento mínimo, tal que

$$\mathcal{D} \equiv \partial_\mu + iqA_\mu$$

⁴Vide apêndice C

de forma que o segundo termo da derivada covariante cancela o termo não invariante, tornando a lagrangeana invariante local. Assim a lagrangeana de Dirac pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \psi^\dagger(i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu - m)\psi \\ &= \psi^\dagger(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + q\psi^\dagger\gamma^\mu\psi A_\mu\end{aligned}\quad (3.34)$$

Note que o procedimento de promover a simetria global para local introduziu mais um campo A_μ à teoria. Porém, até este ponto, esse novo campo não possui dinâmica. Para obter uma teoria auto-consistente, seria interessante que fôssemos capazes de descrever também a dinâmica deste campo. Devemos então acrescentar a esta lagrangeana um termo livre responsável pela evolução dinâmica de A_μ . Vamos então introduzir o campo de calibre clássico, dado pelo campo de Maxwell

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\quad (3.35)$$

E teremos assim uma lagrangeana invariante de calibre

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + q\psi^\dagger\gamma^\mu\psi A_\mu\quad (3.36)$$

onde A_μ pode ser reconhecido agora como o potencial vetor associado ao campo eletromagnético, citado na seção 3.1.

Concluindo, temos que ao promover um campo de Dirac de invariante global para invariante local surge naturalmente um termo referente ao campo de Maxwell mais um termo de interação entre os campos. A proposta de Yang-Mills foi realizar o mesmo procedimento anterior, com a diferença de que agora consideraremos duas partículas fermiônicas. Desta forma, a lagrangeana do sistema será composta pela soma de duas lagrangeanas de Dirac, cada qual representando uma partícula, logo

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_1(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_1)\psi_1 + \bar{\psi}_2(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_2)\psi_2\quad (3.37)$$

Por simplicidade podemos escrever ψ como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}\quad (3.38)$$

e ainda definimos M como uma “matriz das massas” dada por

$$M \equiv \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

onde ψ_1 e ψ_2 são matrizes individualmente, spinores conforme visto anteriormente no capítulo 2. De forma que devemos manter em mente que a matriz em questão remete somente às diferentes partículas, não esquecendo dos índices de cada ψ individualmente. Ainda $\bar{\psi}$ será dado por $\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2)$. Segue que podemos reescrever Eq.(3.37) como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi$$

Agora, se considerarmos as duas partículas idênticas, teremos que $m_1 = m_2 = m$, logo

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

Realizando o mesmo procedimento para um partícula, devemos promover a invariância global, desta lagrangeana a uma invariância local, de forma que $\psi \rightarrow U\psi$, ainda $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}U^\dagger$, onde $U^\dagger U = 1$. Note que a diferença neste caso, em relação ao problema com uma partícula, é que ao considerarmos duas partículas, ψ é representado pela matriz dada por Eq.(3.38), o que nos remete a um operador unitário U , na forma matricial. No caso anterior, na descrição para uma partícula, o operador U se tratava de uma matriz 1×1 , que é um número, agora para duas partículas temos um operador matricial 2×2 . Assim, escrevendo o operador unitário matricial da forma mais geral possível⁵ temos que $U = e^{iH}$ onde $H = \theta \mathbb{1} + \vec{\sigma} \cdot \mathbf{a}$ sendo H uma matriz hermitiana dependente dos números θ , a_1 , a_2 e a_3 , e das matrizes de Pauli σ_1 , σ_2 e σ_3 ,

$$U = e^{i\theta} e^{i\vec{\sigma} \cdot \mathbf{a}}.$$

A parte de $U = e^{i\theta}$, foi estudada anteriormente. Vamos então nos concentrar na parte onde $U = e^{i\vec{\sigma} \cdot \mathbf{a}}$. Para isto vamos considerar uma substituição de variável tal que, $\mathbf{a}(x) = -q\vec{\varphi}(x)$, onde q é a carga do elétron. O que nos leva a uma transformação do tipo $\psi \rightarrow e^{-iq\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}(x)}\psi$ e $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{iq\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}(x)}$ e a uma lagrangeana transformada dada por

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \bar{\psi}e^{iq\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}(x)}\gamma^\mu q\vec{\sigma} \cdot (\partial_\mu \vec{\varphi}(x))e^{-iq\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi}(x)}\psi$$

O que nos motiva a definir novamente um termo $A_\mu^{(a)}$ representando um campo de calibre, o qual deverá conter três componentes representados pelo índice (a) . Assim, novamente substituímos a derivada parcial da equação de Dirac por uma nova derivada covariante, definida por

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + iq\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)}.$$

⁵Vide Apêndice C.

Tais que possuem a propriedade $A_\mu^{(a)} \rightarrow A'_\mu^{(a)}$, com $A'_\mu^{(a)}$ dado por⁶

$$\sigma^{(a)} A'_\mu^{(a)} = e^{-iq\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}(x)} (\sigma^{(a)} A_\mu^{(a)}) e^{iq\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}(x)} + \frac{i}{q} (\partial_\mu e^{-iq\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}(x)}) e^{iq\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}(x)}$$

Tomando a aproximação no limite para $\varphi(x)$ muito pequeno teremos

$$e^{-iq\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}} \cong 1 - iq\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi},$$

$$e^{iq\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}} \cong 1 + iq\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi},$$

e

$$\partial_\mu e^{-iq\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}} \cong -iq\vec{\sigma} \cdot \partial_\mu \vec{\varphi},$$

o que nos retorna uma relação para $A'_\mu^{(a)}$ dada por

$$\sigma^{(a)} A'_\mu^{(a)} \cong \sigma^{(a)} A_\mu^{(a)} - \sigma^{(a)} \partial_\mu \varphi^{(a)}$$

ou ainda ⁷

$$A'_\mu^{(a)} \cong A_\mu^{(a)} + \partial_\mu \varphi^{(a)} + 2q\epsilon^{abc} \varphi^{(b)} A_\mu^{(c)}$$

Portanto, a lagrangeana modificada será

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - q(\bar{\psi}\gamma^\mu \sigma^{(a)}\psi)A_\mu^{(a)} \end{aligned}$$

Novamente, temos um termo que não possui dinâmica. Vamos então procurar um termo livre para compor esta lagrangeana, dentre os campos conhecidos, com as características necessárias. Segue que o campo em questão é um campo semelhante ao campo eletromagnético, uma vez que $A_\mu^{(a)}$ possui três componentes, então o campo de força também deverá apresentar três componentes, tal que a lagrangeana do Maxwell será reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} &= -\frac{1}{4} [F^{(1)\mu\nu} F_{\mu\nu}^{(1)} - F^{(2)\mu\nu} F_{\mu\nu}^{(2)} - F^{(3)\mu\nu} F_{\mu\nu}^{(3)}] \\ &= -\frac{1}{4} F^{(a)\mu\nu} F_{\mu\nu}^{(a)} \end{aligned}$$

A relação para $F^{\mu\nu}$ em termos de A_μ , apresentará a forma [8]

$$F^{(a)\mu\nu} = \partial^\mu A^{(a)\nu} - \partial^\nu A^{(a)\mu} - 2q\epsilon^{abc} A^{(b)\mu} A^{(c)\nu} \quad (3.39)$$

⁶Vide Apêndice C.

⁷Vide Apêndice C

E temos finalmente a lagrangeana de Yang-Mills, com um termo referente ao campo de Dirac, um termo de Maxweel com três componentes e um termo de interação entre os campos.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{(a)\mu\nu}F_{\mu\nu}^{(a)} - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\sigma^{(a)}\psi)A_\mu^{(a)}$$

É importante salientar que a dedução realizada acima para a lagrangeana de Yang-Mills, deve ser tratada como um particularização para o grupo SU(2). Para uma generalização desta transformação, devemos substituir o termo de Levi-Civita (ϵ^{abc}) em todas as expressões nas quais ele aparece, pela constante C^{abc} , a qual representa a constante de estrutura do grupo. Devemos, ainda considerar a soma dos índices internos (a) não mais de 1 a 3, como no caso do grupo SU(2), mas como sendo igual ao número de geradores do grupo.

3.3.1 Lagrangeana Efetiva

Para campos assintoticamente livres, do tipo Yang-Mills não é possível estabelecer um paralelo entre a teoria clássica, encontrada anteriormente, e a teoria quântica destes campos. A configuração de vácuo quântico para os campos de Yang-Mills são controladas por um regime de acoplamento forte. Este regime não necessariamente vai a zero, de forma que não é possível estabelecer uma relação com a teoria clássica, onde o vácuo sempre vai a zero. [29]. Devemos então considerar uma lagrangeana efetiva, representando uma lagrangeana clássica com informações quânticas do campo, dada por [29]

$$\mathcal{L}_{eff}(x) = \frac{1}{4} \frac{(F_{\mu\nu}^{(a)})^2}{\bar{g}^2(t)} \quad (3.40)$$

sendo $t \equiv \ln(F/\mu^4)$, tal que $\bar{g}(t)$ é encontrado através da relação

$$t = \int_g^{\bar{g}(t)} dg/\beta(g)$$

onde $\beta(g)$ a função β de Callan-Symanzik, a qual para acoplamento fraco temos [30, 15, 21, 4]

$$\beta(g) = -\frac{1}{2}b_0g^3 + b_1g^5 + \dots$$

$$b_0 = \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{11}{3}\right) C_2(G), \quad b_1 = \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left(\frac{-34}{3}\right) C_2^2(G)$$

Sendo que para $(F_{\mu\nu}^{(a)}) \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\bar{g}^2(t)} = b_0t - \frac{2b_1}{b_0} \ln t + \dots$$

Isto nos remete a uma lagrangeana efetiva

$$\mathcal{L}_{eff}(F) \approx \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^4}, \quad (3.41)$$

de forma que, essa é uma lagrangeana invariante de calibre local, uma vez que ela só depende de F o qual é invariante. Sendo F definido como,

$$F = F^{(a)\mu\nu} F_{\mu\nu}^{(a)}$$

onde $F^{(a)\mu\nu}$ é dado de acordo com a teoria de Yang-Mills, Eq.(3.39). Esse modelo descreve de maneira eficaz o comportamento quântico dos campos de Yang-Mills, sendo invariante local de calibre de forma que a lagrangeana depende exclusivamente de campos de calibre. Ainda possui características interessantes como, a de liberdade assintótica e de transmutação dimensional, assim como do grupo de renormalização.

3.3.2 Tensor momento-energia

O tensor momento-energia é calculado a partir de Eq.(??), similarmente ao problema para o campo eletrodinâmico não-linear, onde utilizamos a lagrangeana referente ao campo de Yang-Mill dada por

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^4}. \quad (3.42)$$

Em termos da métrica de Friedmann F é dada na forma

$$F = F^{(a)\mu\nu} F_{\mu\nu}^{(a)} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta}^{(a)} F_{\mu\nu}^{(a)}. \quad (3.43)$$

O que nos permite escrever o tensor momento-energia⁸, através de Eq.(??), da mesma forma como para a lagrangeana de Euler-Heisenberg, onde

$$(T_{\mu\nu})_{YM} = -4\mathcal{L}_F F_{\mu}^{(a)\sigma} F_{\sigma\nu}^{(a)} + \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^4} g_{\mu\nu} \quad (3.44)$$

Utilizando o mesmo observador, do tipo tempo v_μ , para o caso anterior, podemos escrever $F_{\mu\nu}^{(a)}$ como,

$$F_{\mu\nu}^{(a)} = E_\mu^{(a)} v_\nu - E_\nu^{(a)} v_\mu + \eta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} v_\alpha B_\beta^{(a)} \quad (3.45)$$

O que nos fornece um tensor momento-energia dado, em componentes, por

$$(T_{00})_{YM} = b_0 E^2 \left(\ln \frac{F}{\mu^2} + 1 \right) + \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^2}, \quad (3.46)$$

⁸Vide apêndice A

$$(T_{11})_{YM} = b_0(E_1^{(a)}E_1^{(a)} - B_2^{(a)}B_2^{(a)} - B_3^{(a)}B_3^{(a)}) \left(\ln \frac{F}{\mu^2} + 1 \right) - a^2(t) \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^2}, \quad (3.47)$$

$$(T_{22})_{YM} = b_0(E_2^{(a)}E_2^{(a)} - B_1^{(a)}B_1^{(a)} - B_3^{(a)}B_3^{(a)}) \left(\ln \frac{F}{\mu^2} + 1 \right) - a^2(t) \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^2}, \quad (3.48)$$

e

$$(T_{33})_{YM} = b_0(E_3^{(a)}E_3^{(a)} - B_1^{(a)}B_1^{(a)} - B_2^{(a)}B_2^{(a)}) \left(\ln \frac{F}{\mu^2} + 1 \right) - a^2(t) \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^2}, \quad (3.49)$$

Capítulo 4

Modelos gravitacionais devido aos campos de calibre acoplados ao campo de Dirac

Neste capítulo iremos apresentar os modelos de interesse deste trabalho, onde consideraremos primeiramente um modelo de eletrodinâmica não-linear acoplado a um campo de Dirac, na presença da constante cosmológica, em um universo de Friedmann. Em seguida analisaremos um modelo do tipo Yang-Mills acoplado a um campo de Dirac, na presença de constante cosmológica, novamente em um universo de Friedmann.

Uma vez consolidados os modelos acima, discutiremos como eles irão se comportar quando tomarmos o tempo tendendo a zero.

4.1 Campos de Dirac e eletrodinâmica não-linear acoplados

Com base nos campos definidos nos capítulos anteriores, vamos considerar um modelo de interação entres eles, para então, analisarmos o comportamento destes campos em um universo de Friedmann. Desta forma, construímos um modelo composto pela lagrangeana de eletrodinâmica não-linear somada à lagrangeana de Dirac na presença da constante cosmológica,

dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{F}{4} + \frac{2\alpha^2}{45} \left(\frac{F^2}{4} + \frac{7G^2}{16} \right) + \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^a V_a{}^\mu \nabla_\mu \psi - V_a{}^\mu (\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^a \psi] - \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\nu e A_\nu \psi - e A_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi) - m \bar{\psi} \psi + \Lambda. \quad (4.1)$$

Note que o termo de interação entre os campos aparece na derivada parcial na lagrangeana de Dirac, de forma que, sendo o campo de Dirac descrito em um espaço curvo, essa derivada parcial estará embutida no ∇_μ , representado por Eq.(2.82). Essa derivada parcial passa a ser uma derivada covariante, incluindo o termo de interação entre os campos. Desta forma, a lagrangeana total, do campo estudado, é dada por um termo referente ao campo eletrodinâmico não-linear, um termo referente ao campo de Dirac, um termo de interação e um termo representando a constante cosmológica.

A partir da lagrangeana dada, podemos encontrar o tensor momento-energia referente ao campo. Entretanto este cálculo não precisa ser feito novamente com a lagrangeana completa. Sendo o tensor momento-energia dado por uma derivada (seja em função da métrica ou seja em função das vierbeins conforme veremos a seguir), então podemos calculá-lo termo a termo, para cada campo em questão. Entretanto, o cálculo para os campos de Dirac e eletrodinâmico não-linear já foram realizados anteriormente. Nos resta então calcular o tensor momento-energia referente ao termo de interação entre os campos.

Agora, uma vez que o termo de interação é descrito em um espaço curvo, podendo ser representado em termos das vierbeins como $V_a{}^\nu \bar{\psi} i \gamma^a e A_\nu \psi$, então podemos calcular o tensor momento-energia agora, não mais em termos da métrica como apresentado em Eq.(1.9), mas em termos da própria vierbein, tal que [3]

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{2}{[-g(x)]^{1/2}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}(x)} = \frac{V_{a\mu}(x)}{V(x)} \frac{\delta S}{\delta V_a{}^\nu} \\ &= \frac{V_{a\mu}(x)}{V(x)} \frac{\delta}{\delta V_a{}^\nu} \int d^4x' V(x') \mathcal{L}(x') \\ &= \frac{V_{a\mu}(x)}{V(x)} \int d^4x' \frac{\delta}{\delta V_a{}^\nu(x)} [V(x') \mathcal{L}(x')] \\ &= \frac{V_{a\mu}(x)}{V(x)} \int d^4x' \frac{\delta V^\theta{}_b(x')}{\delta V_a{}^\nu(x)} \frac{\partial}{\partial V_b{}^\theta(x')} [V(x') \mathcal{L}(x')] \\ &= \frac{V_{a\mu}(x)}{V(x)} \int d^4x' \left[\frac{\partial V(x')}{\partial V_b{}^\theta(x')} \mathcal{L}(x') + V(x') \frac{\partial \mathcal{L}(x')}{\partial V_b{}^\theta(x')} \right] \delta_b^a \delta_\nu^\theta \delta(x - x') \\ &= \frac{V_{a\mu}(x)}{V(x)} \left[\frac{\partial V(x)}{\partial V_a{}^\nu(x)} \mathcal{L}(x) + V(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial V_a{}^\nu(x)} \right] \end{aligned}$$

onde $V(x)$ é o determinante da Vierbein e $[-g(x)] = V(x)$. Entretanto temos que a diferencial

do determinante a de uma matriz $A = (a_{ij})$ qualquer, é dada por [6],

$$\frac{\partial a}{\partial a_{ij}} = A^{ij}$$

onde A^{ij} é matriz dos cofatores de a_{ij} , tal que

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{a}(A^{ji})$$

Logo, para a matriz das tetradas, $V_{a\mu}$ temos

$$\frac{\partial V(x)}{\partial V_a{}^\nu} = \mathbb{V}^a{}_\nu = V(x)V_\nu{}^a = V(x)V^a{}_\nu \quad (4.2)$$

sendo $V(x)$ a determinante da matriz $V_{a\mu}$ e $\mathbb{V}^a{}_\nu$ a matriz dos cofatores. Note que utilizamos o fato da matriz das tetradas ser diagonal. Assim, podemos calcular o tensor momento-energia de acordo com a relação Eq.(4.2) como

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{V_{a\mu}(x)}{V(x)} \left[V(x)V^a{}_\nu(x)\mathcal{L}(x) + V(x)\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial V_a{}^\nu(x)} \right] \\ &= g_{\mu\nu}(x)\mathcal{L}(x) + V_{a\mu}(x)\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial V_a{}^\nu(x)} \end{aligned}$$

Assim, para o termo de interação temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial V_a{}^\nu(x)} &= \frac{\partial}{\partial V_a{}^\nu(x)} \frac{i}{2} (-V_b{}^\sigma \bar{\psi} \gamma^b e A_\sigma \psi + V_b{}^\sigma e A_\sigma \bar{\psi} \gamma^b \psi) \\ &= \frac{i}{2} \left(-\frac{\partial V_b{}^\sigma}{\partial V_a{}^\nu} \bar{\psi} \gamma^b e A_\sigma \psi + \frac{\partial V_b{}^\sigma}{\partial V_a{}^\nu} e A_\sigma \bar{\psi} \gamma^b \psi \right) \\ &= \frac{i}{2} (-\bar{\psi} \gamma^b \delta_b^a \delta_\nu^\sigma e A_\sigma \psi + e A_\sigma \bar{\psi} \gamma^b \delta_b^a \delta_\nu^\sigma \psi) \\ &= \frac{i}{2} (-\bar{\psi} \gamma^a e A_\nu \psi + e A_\nu \bar{\psi} \gamma^a \psi) \end{aligned}$$

Temos, então o tensor momento-energia do termo de interação entre os campos, dado por

$$(T_{\mu\nu})_I = \frac{i}{2} [V_{a\mu} (-\bar{\psi} \gamma^a e A_\nu \psi + e A_\nu \bar{\psi} \gamma^a \psi) + (-V_b{}^\sigma \bar{\psi} \gamma^b e A_\sigma \psi + V_b{}^\sigma e A_\sigma \bar{\psi} \gamma^b \psi) g_{\mu\nu}] \quad (4.3)$$

Finalmente, podemos escrever o tensor momento-energia com a contribuição de todos os termos tal que

$$T_{\mu\nu} = (T_{\mu\nu})_{EH} + (T_{\mu\nu})_D + (T_{\mu\nu})_I \quad (4.4)$$

os quais foram previamente calculados, nos capítulos 2 e 3, em Eq.(2.89-2.92) e Eq.(3.27-3.30) respectivamente, nos retornando a equação completa para o tensor momento-energia, em

componentes, dada por

$$\begin{aligned}
T_{00} &= -E^2 \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) + \frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{45} \left(\frac{7G^2}{4} - \frac{F^2}{2} \right) + i\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi + \frac{i}{a}(\partial_i\bar{\psi})\gamma^i\psi + \frac{9\dot{a}}{a}\bar{\psi}\gamma^0\psi \\
&\quad + m\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}[-\bar{\psi}\gamma^0 eA_0\psi + eA_0\bar{\psi}\gamma^0\psi - V_b{}^\sigma\bar{\psi}\gamma^b eA_\sigma\psi + V_b{}^\sigma eA_\sigma\bar{\psi}\gamma^b\psi], \\
T_{11} &= \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) [-(E_1)^2 + (B_2)^2 + (B_3)^2] - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{45} \left(\frac{7G^2}{4} - \frac{F^2}{2} \right) \right] a^2(t) \\
&\quad + ia\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi + ia(\partial_2\bar{\psi})\gamma^2\psi + ia(\partial_3\bar{\psi})\gamma^3\psi + ia^2(\partial_0\bar{\psi})\psi + 9\dot{a}a\bar{\psi}\gamma^0\psi \\
&\quad + ma^2\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}[a(-\bar{\psi}\gamma^1 eA_1\psi + eA_1\bar{\psi}\gamma^1\psi) + a^2(V_b{}^\sigma\bar{\psi}\gamma^b eA_\sigma\psi - V_b{}^\sigma eA_\sigma\bar{\psi}\gamma^b\psi)], \\
T_{22} &= \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) [-(E_2)^2 + (B_1)^2 + (B_3)^2] - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{45} \left(\frac{7G^2}{4} - \frac{F^2}{2} \right) \right] a^2(t) \\
&\quad + ia\bar{\psi}\gamma^2\partial_2\psi + ia(\partial_1\bar{\psi})\gamma^1\psi + ia(\partial_3\bar{\psi})\gamma^3\psi + ia^2(\partial_0\bar{\psi})\psi + 9\dot{a}a\bar{\psi}\gamma^0\psi \\
&\quad + ma^2\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}[a(-\bar{\psi}\gamma^2 eA_2\psi + eA_2\bar{\psi}\gamma^2\psi) + a^2(V_b{}^\sigma\bar{\psi}\gamma^b eA_\sigma\psi - V_b{}^\sigma eA_\sigma\bar{\psi}\gamma^b\psi)],
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T_{33} &= \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) [-(E_3)^2 + (B_1)^2 + (B_2)^2] - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{45} \left(\frac{7G^2}{4} - \frac{F^2}{2} \right) \right] a^2(t) \\
&\quad + ia\bar{\psi}\gamma^3\partial_3\psi + ia(\partial_1\bar{\psi})\gamma^1\psi + ia(\partial_2\bar{\psi})\gamma^2\psi + ia^2(\partial_0\bar{\psi})\psi + 9\dot{a}a\bar{\psi}\gamma^0\psi \\
&\quad + ma^2\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}[a(-\bar{\psi}\gamma^3 eA_3\psi + eA_3\bar{\psi}\gamma^3\psi) + a^2(V_b{}^\sigma\bar{\psi}\gamma^b eA_\sigma\psi - V_b{}^\sigma eA_\sigma\bar{\psi}\gamma^b\psi)].
\end{aligned}$$

4.1.1 Cálculo de médias

A fim de garantir a propriedade de isotropia e homogeneidade previstas na descrição do universo de Friedmann devemos tomar médias dos campos em questão. Vamos considerar um procedimento de médias em um volume V tal que este seja pequeno, relacionado ao tamanho do espaço total, mas grande o suficiente para englobar flutuações quânticas [7, 8], tais que

$$\langle X \rangle_V = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} x dV \quad (4.5)$$

Vamos considerar, o tratamento de médias separadamente para cada campo. Assim, para o campo de Dirac e o termo de interação, a média volumétrica para os componentes do tensor de momento-energia (consideraremos somente um componente do tipo espaço por serem semelhantes), é dada por

$$\begin{aligned}
\langle (T_{00})_D \rangle_V &= \langle i\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi + \frac{i}{a}(\partial_i\bar{\psi})\gamma^i\psi + \frac{9\dot{a}}{a}\bar{\psi}\gamma^0\psi + m\bar{\psi}\psi + iV_{a0}\bar{\psi}\gamma^a eA_0\psi + V_a{}^\sigma\bar{\psi}i\gamma^a eA_\sigma\psi \rangle_V \\
&= i\langle \bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi \rangle_V + \frac{i}{a}\langle (\partial_i\bar{\psi})\gamma^i\psi \rangle_V + \frac{9\dot{a}}{a}\langle \bar{\psi}\gamma^0\psi \rangle_V + m\langle \bar{\psi}\psi \rangle_V + iV_{a0}\langle \bar{\psi}\gamma^a eA_0\psi \rangle_V \\
&\quad + V_a{}^\sigma\langle \bar{\psi}i\gamma^a eA_\sigma\psi \rangle_V
\end{aligned} \quad (4.6)$$

ainda

$$\begin{aligned}
\langle (T_{11})_D \rangle_V &= \langle ia\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi + ia(\partial_2\bar{\psi})\gamma^2\psi + ia(\partial_3\bar{\psi})\gamma^3\psi + ia^2(\partial_0\bar{\psi})\psi \\
&\quad + 9\dot{a}a\bar{\psi}\gamma^0\psi + ma^2\bar{\psi}\psi + iV_{a1}\bar{\psi}\gamma^a eA_1\psi - a^2V_a{}^\sigma\bar{\psi}i\gamma^a eA_\sigma\psi \rangle_V \\
&= ia\langle\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi\rangle_V + ia\langle(\partial_2\bar{\psi})\gamma^2\psi\rangle_V + ia\langle(\partial_3\bar{\psi})\gamma^3\psi\rangle_V + ia^2\langle(\partial_0\bar{\psi})\psi\rangle_V \quad (4.7) \\
&\quad + 9\dot{a}a\langle\bar{\psi}\gamma^0\psi\rangle_V + ma^2\langle\bar{\psi}\psi\rangle_V + iV_{a1}\langle\bar{\psi}\gamma^a eA_1\psi\rangle_V - a^2V_a{}^\sigma\langle\bar{\psi}i\gamma^a eA_\sigma\psi\rangle_V \quad (4.8)
\end{aligned}$$

e

$$\langle (T_{\mu\nu})_I \rangle_V = \frac{i}{2}[V_{a\mu}(-\langle\bar{\psi}\gamma^a eA_\nu\psi\rangle_V + eA_\nu\langle\bar{\psi}\gamma^a\psi\rangle_V) + (-V_b{}^\sigma\langle\bar{\psi}\gamma^b eA_\sigma\psi\rangle_V + V_b{}^\sigma\langle eA_\sigma\bar{\psi}\gamma^b\psi\rangle_V)g_{\mu\nu}]$$

Agora, podemos escrever ψ e $\bar{\psi}$, como uma expansão em onda planas conforme tratado no capítulo 2, de acordo com as equações, Eq.(2.63) e Eq.(2.65), tais que

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x}, t) &= \int d^3p \sum_r f(\mathbf{p}, r)\psi_{\mathbf{p}}^{(r)}(\mathbf{x}, t) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r f(\mathbf{p}, r)\sqrt{\frac{m}{\omega_p}}w_r(\mathbf{p})e^{-i\epsilon_r p x} \\
\bar{\psi}(\mathbf{x}, t) &= \int d^3p \sum_r f^*(\mathbf{p}, r)\gamma^0\psi_{\mathbf{p}}^{(r)}(\mathbf{x}, t) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r f^*(\mathbf{p}, r)\gamma^0\sqrt{\frac{m}{\omega_p}}w_r^\dagger(\mathbf{p})e^{i\epsilon_r p x}
\end{aligned}$$

Logo, substituindo em Eq.(4.6) e Eq.(4.7), teremos

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi\rangle_V &= \frac{-i}{V} \int d^3x \int d^3p \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\sqrt{\omega_p\omega_{p'}}} \sum_{rr'} f^*(\mathbf{p}, r)w_r^\dagger e^{i\epsilon_r p \cdot x} \gamma^1 \times \\
&\quad \gamma_0 p'_x f(\mathbf{p}', r')w_{r'} e^{-i\epsilon_{r'} p' \cdot x} \\
&= \frac{-i}{V} \int d^3p \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\sqrt{\omega_p\omega_{p'}}} \sum_{rr'} f^*(\mathbf{p}, r)w_r^\dagger \gamma^1 \times \\
&\quad \gamma_0 p'_x f(\mathbf{p}', r')w_{r'} e^{-i(\epsilon_{r'}\omega_{p'} - \epsilon_r\omega_p)t} \int d^3x e^{-i(\epsilon_{r'}p' - \epsilon_r p)x} \\
&= \frac{-i}{V} \int d^3p d^3p' \frac{m^2}{\sqrt{\omega_p\omega_{p'}}} \sum_{rr'} f^*(\mathbf{p}, r)w_r^\dagger \gamma^1 \times \\
&\quad \gamma_0 p'_x f(\mathbf{p}', r')w_{r'} e^{-i(\epsilon_{r'}\omega_{p'} t - \epsilon_r\omega_p t)} \delta^3(p - p') \\
&= \frac{-i}{V} \int d^3p \frac{m}{\omega_p} \sum_{rr'} f^*(\mathbf{p}, r)w_r^\dagger \gamma^1 \gamma_0 p_x f(\mathbf{p}, r')w_{r'} e^{-i(\epsilon_{r'} - \epsilon_r)\omega_p t} \\
&= 0 \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Note que, este mesmo procedimento pode ser considerado para os outros termos espaciais, assim como os termos da interação entre os campos, de forma que estes termos não irão

contribuir para o tratamento do campo, assim,

$$\langle \bar{\psi} \gamma^2 \partial_2 \psi \rangle_V = \langle \bar{\psi} \gamma^3 \partial_3 \psi \rangle_V = \langle \bar{\psi} \gamma^0 A_0 \psi \rangle_V = \langle \bar{\psi} \gamma^1 A_1 \psi \rangle_V = \langle \bar{\psi} \gamma^2 A_2 \psi \rangle_V = \langle \bar{\psi} \gamma^3 A_3 \psi \rangle_V = 0.$$

Os únicos termos que irão contribuir serão os que não possuem uma direção específica, sendo eles

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi \rangle_V &= \frac{-i}{V} \int d^3x \int d^3p \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}} \sum_{rr'} f^*(\mathbf{p}, r) w_r^\dagger e^{i\epsilon_r p \cdot x} \gamma^0 \gamma_0 \times \\ &\quad \omega_{p'} f(\mathbf{p}', r') w_{r'} e^{-i\epsilon_{r'} p' \cdot x} \\ &= \frac{-i}{V} \int d^3p d^3p' \omega_{p'} \frac{m}{\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}} \sum_{rr'} f^*(\mathbf{p}, r) w_r^\dagger f(\mathbf{p}', r') w_{r'} e^{-i(\epsilon_{r'} \omega_{p'} - \epsilon_r \omega_p) t} \delta^3(p - p') \\ &= \frac{-i}{V} \int d^3p m \sum_{rr'} f^*(\mathbf{p}, r) \frac{\omega_p}{m} \delta_{rr'} f(\mathbf{p}, r') e^{-i(\epsilon_{r'} - \epsilon_r) \omega_p t} \\ &= -i \int d^3p \sum_r f^*(\mathbf{p}, r) \frac{\omega_p}{V} f(\mathbf{p}, r) \\ &= -i \frac{\langle \omega_p \rangle}{V} \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde $\omega_p = \sqrt{p^2 + m^2}$. Note que esta média de ω_p é a representação de uma média quântica.

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle_V &= \frac{1}{V} \int d^3x \int d^3p \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m^2}{\omega_p \omega_{p'}}} \sum_{rr'} f^*(\mathbf{p}, r) w_r^\dagger e^{i\epsilon_r p \cdot x} \gamma^0 \gamma_0 \times \\ &\quad f(\mathbf{p}', r') w_{r'} e^{-i\epsilon_{r'} p' \cdot x} \\ &= \frac{1}{V} \int d^3p d^3p' \sqrt{\frac{m^2}{\omega_p \omega_{p'}}} \sum_{rr'} f^*(\mathbf{p}, r) w_r^\dagger f(\mathbf{p}', r') w_{r'} e^{-i(\omega_{p'} t - \omega_p t)} \delta^3(p - p') \\ &= \frac{1}{V} \int d^3p \frac{m}{\omega_p} \sum_{rr'} f^*(\mathbf{p}, r) \frac{\omega_p}{m} \delta_{rr'} f(\mathbf{p}, r') e^{-i(\epsilon_{r'} - \epsilon_r) \omega_p t} \\ &= \frac{1}{V} \int d^3p \sum_r f^*(\mathbf{p}, r) f(\mathbf{p}, r) \\ &= \frac{1}{V} \end{aligned} \tag{4.11}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_V &= \frac{1}{V} \int d^3x \bar{\psi} \psi \\ &= \frac{1}{V} \end{aligned} \tag{4.12}$$

De forma que consideramos este volume suficientemente grande garantindo que essa integral de a soma de todas as configurações quânticas, permitindo que esta integral seja igual a 1.

Agora, sendo $\langle \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \rangle_V = -\langle (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \rangle_V$ e $\langle \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \rangle_V = -\langle \psi^\dagger A_\mu^\dagger \gamma^\mu \bar{\psi} \rangle_V$, então podemos escrever a média do tensor momento-energia para o campo de Dirac e do termo de interação, como

$$\langle (T_{\mu\nu})_I \rangle_V = 0,$$

$$\langle T_{00} \rangle = \frac{\langle \omega_p \rangle}{V} + \frac{9\dot{a}}{aV} + \frac{m}{V},$$

e

$$\langle T_{11} \rangle = -\frac{a^2 \langle \omega_p \rangle}{V} + \frac{9\dot{a}a}{V} + \frac{ma^2}{V}.$$

Podemos reescrever estas quantidades definindo $E_p = \langle \omega_p \rangle$. Ainda, note que este não é um volume comóvel, de forma que devemos tomar $V = a^3(t)V_c$ [32], então

$$\langle T_{00} \rangle = \frac{E_p}{a^3 V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{m}{a^3 V_c} \quad (4.13)$$

e

$$\langle T_{11} \rangle = -\frac{E_p}{a V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^2 V_c} + \frac{m}{a V_c} \quad (4.14)$$

Para o campo eletrodinâmico não-linear podemos reescrever seu tensor momento-energia dado por Eq.(3.19), utilizando um procedimento de médias, onde devemos considerar as relações dadas por

$$\begin{aligned} \langle E_i \rangle &= 0 & \langle B_i \rangle &= 0 \\ \langle E_i B_j \rangle &= -\frac{1}{3} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) g_{ij} \Rightarrow \langle E_i B_j - B_i E_j \rangle = 0 \\ \langle E_i E_j \rangle &= -\frac{1}{3} E^2 g_{ij} & \langle B_i B_j \rangle &= -\frac{1}{3} B^2 g_{ij} \end{aligned}$$

Agora, uma vez que no universo primordial a contribuição do campo elétrico é evanescente [24] podemos tomar $E = 0$, resultando em

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{EH} &= \frac{B^2}{2} \left(1 - \frac{4\alpha^2 B^2}{45} \right) \\ \langle T_{11} \rangle_{EH} &= \left(\frac{B^2}{6} - \frac{10\alpha^2 B^4}{135} \right) a^2(t) \end{aligned}$$

O que nos permite escrever as componentes do tensor momento-energia para o acoplamento dos campos de Dirac e eletrodinâmica não-linear, como

$$\langle T_{00} \rangle_{EH} = \frac{B^2}{2} \left(1 - \frac{4\alpha^2 B^2}{45} \right) + \frac{E_p}{a^3 V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{m}{a^3 V_c} - \Lambda \quad (4.15)$$

$$\langle T_{11} \rangle_{EH} = a^2 \frac{B^2}{6} - a^2 \frac{10\alpha^2 B^4}{135} - \frac{E_p}{a V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^2 V_c} + \frac{m}{a V_c} + a^2 \Lambda \quad (4.16)$$

4.1.2 Conservação de energia

No capítulo 2 foi mostrado que a derivada covariante do tensor momento-energia é zero, garantindo, desta forma, a conservação de energia do sistema. Vamos então, calcular a derivada covariante do tensor momento-energia para os campos eletrodinâmico não-linear e Dirac acoplados. A derivada covariante para o tensor momento-energia é dada por

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} T^{\beta\nu} + \Gamma_{\nu\beta}^{\nu} T^{\mu\beta}$$

Agora, considerando $\mu = 0$, representando a energia do sistema, temos

$$T^{0\nu}{}_{;\nu} = T^{0\nu}{}_{,\nu} + \Gamma_{\nu\beta}^0 T^{\beta\nu} + \Gamma_{\nu\beta}^{\nu} T^{0\beta}$$

Para o nosso caso, onde $T^{\mu\nu}$ é diagonal, e os Γ_{i0}^i e Γ_{ii}^0 são iguais, devemos ter

$$T^{0\nu}{}_{;\nu} = T^{00}{}_{,0} + 3\Gamma_{11}^0 T^{11} + 3\Gamma_{10}^1 T^{00}$$

Desta forma, considerando as componentes do tensor momento-energia, Eq.(4.15) e Eq.(4.16), temos

$$\begin{aligned} T^{0\nu}{}_{;\nu} &= T^{00}{}_{,0} + 3\Gamma_{11}^0 T^{11} + 3\Gamma_{10}^1 T^{00} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{B^2}{2} \left(1 - \frac{4\alpha^2 B^2}{45} \right) + \frac{E_p}{a^3 V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{m}{a^3 V_c} - \Lambda \right] \\ &\quad + 3 \frac{\dot{a}}{a^3} \left[a^2 \frac{B^2}{6} - a^2 \frac{10\alpha^2 B^4}{135} - \frac{E_p}{a V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^2 V_c} + \frac{m}{a V_c} + a^2 \Lambda \right] \\ &\quad + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left[\frac{B^2}{2} \left(1 - \frac{4\alpha^2 B^2}{45} \right) + \frac{E_p}{a^3 V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{m}{a^3 V_c} - \Lambda \right] \\ &= B\dot{B} - \frac{8\alpha^2 B^3 \dot{B}}{4} - \frac{3E_p \dot{a}}{a^4 V_c} - \frac{3m\dot{a}}{a^4 V_c} - \frac{36\dot{a}^2}{a^5 V_c} + \frac{9\ddot{a}}{a^4 V_c} + \frac{B^2 \dot{a}}{2a} \\ &\quad - \frac{10B^4 \dot{a}}{45a} - \frac{3E_p \dot{a}}{a^5 V_c} + \frac{27\dot{a}^2}{a^5 V_c} + \frac{3m\dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{3\Lambda \dot{a}}{a} + \frac{3B^2 \dot{a}}{2a} \left(1 - \frac{4\alpha^2 B^2}{45} \right) \\ &\quad + \frac{3E_p \dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{27\dot{a}^2}{a^5 V_c} - \frac{3\Lambda \dot{a}}{a} + \frac{3m\dot{a}}{a^4 V_c} \\ &= \left(B\dot{B} + \frac{2B^2 \dot{a}}{a} \right) \left(1 - \frac{8\alpha^2 B^2}{45} \right) + \frac{3\dot{a}}{a} \left(\frac{6\dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{m}{a^3 V_c} - \frac{E_p}{a^4 V_c} \right) + \frac{9\ddot{a}}{a^4 V_c} \end{aligned}$$

Ainda pela lei de conservação de energia $T^{0\mu}{}_{;\mu} = 0$, então

$$\frac{9\ddot{a}}{a^4 V_c} = - \left(B\dot{B} + \frac{2B^2 \dot{a}}{a} \right) \left(1 - \frac{8\alpha^2 B^2}{45} \right) - \frac{3\dot{a}}{a} \left(\frac{6\dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{m}{a^3 V_c} - \frac{E_p}{a^4 V_c} \right) \quad (4.17)$$

4.1.3 Análise do fator de escala $a(t)$, para o acoplamento entre os campos eletrodinâmico não-linear e Dirac

Finalmente temos todas as equações necessárias para o cálculo a variação do fator de escala $a(t)$. A equação de conservação de energia, Eq.(4.17), fornece uma relação entre $a(t)$, e o campo magnético $B(t)$. Agora, escrevendo as equações de Einstein, definidas no capítulo 2, para as componentes do tensor momento-energia dados por Eq.(4.15) e Eq.(4.16), teremos a equação de Friedmann,

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{B^2}{2} \left(1 - \frac{4\alpha^2 B^2}{45}\right) + \frac{E_p}{a^3 V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{m}{a^3 V_c} - \Lambda \quad (4.18)$$

e

$$2\ddot{a}a + \dot{a}^2 = a^2 \frac{B^2}{6} - a^2 \frac{10\alpha^2 B^4}{135} - \frac{E_p}{a V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^2 V_c} + \frac{m}{a V_c} + a^2 \Lambda \quad (4.19)$$

o que completa o quadro de equações ao nosso dispor. Assim, igualando as duas equações de Einstein, podemos isolar o termo de derivada segunda, tal que

$$\frac{2\ddot{a}}{a} = -\frac{8\alpha^2 B^4}{135} + \frac{6\dot{a}}{a^4 V_c} - \frac{4E_p}{3a^3 V_c} + \frac{2m}{3a^3 V_c} + \frac{2\Lambda}{3}$$

o que nos permite substituir na equação de conservação de forma a termos uma equação de primeira ordem dada por

$$\dot{B} = \left[\frac{2B^2 \dot{a}}{a} \left(1 - \frac{8\alpha^2 B^2}{45}\right) - \frac{3\dot{a}}{a} \left(\frac{6\dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{m}{a^3 V_c} - \frac{E_p}{a^4 V_c}\right) - \frac{3}{a^3 V_c} \left(\frac{2E_p}{a^4 V_c} + \frac{m}{a^3 V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^4 V_c} - \frac{4\alpha^2 B^4}{45} + \Lambda\right) \right] \left[B \left(1 - \frac{8\alpha^2 B^2}{45}\right) \right]^{-1}$$

Segue que, considerando a equação de Friedmann, Eq.(4.18), e Eq.(4.1.3) podemos construir um sistema de equações diferenciais, as quais poderão ser resolvidas numericamente.

Entretanto, estas equações ainda dependem dos parâmetros m , E_p , Λ e V_c (uma vez que α é a constante de estrutura fina, igual a $1/137$). Realizamos diversas experiências, para estudar a melhor escolha desses valores. Escolhemos os valores de forma a evitar que a faixa de valores de t possíveis se torne muito pequena, resultando em um gráfico sem possibilidade de interpretação. Apresentaremos somente os gráficos interessante, descartando aqueles cuja forma seja ou muito semelhante, ou sem significado físico.

A quantidade V_c se refere ao tamanho do volume escolhido para analisarmos o problema. Note que se tomarmos V_c muito grande ele irá reduzir a sensibilidade da equação em relação à variação dos outros parâmetros, o mesmo problema ocorre se tomarmos ele muito pequeno. Consideramos então, para este problema, um valor igual a 10 para todos os casos.

Avaliamos ainda o efeito da condição inicial no problema, o qual não pareceu influenciar no comportamento do gráfico. Desta forma, afim de observar melhor o comportamento do fator $a(t)$ próximo de zero tomamos $a(10^{-23}) = B(0) = 1$, visando nos aproximar de zero, uma vez que para $t = 0$ a equação apresenta problemas na solução. A configuração dos gráficos se deu com a presença ou ausência dos valores dos parâmetros, no intuito de analisarmos a influência desses valores na evolução temporal do fator $a(t)$.

Para $m = 0$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 0$, temos um campo fermiônico não massivo (mesmo tomando $m = 0$, ainda sobram os termos referentes à conexão de spin), cujo comportamento é apresentado na figura 1. Apresentando duas soluções não-singulares, sendo uma representando uma expansão desacelerada e a outra um colapso inicial que posteriormente estabiliza, passando a expandir muito suavemente. Note que este segundo gráfico não atinge valores iguais a zero. Tomamos como base esse gráfico, comparando os gráficos posteriores conforme o acréscimo de valores.

Assim, incluindo somente um valor para massa igual a 3 (valores maiores diminuem a faixa de valores possíveis para t), observamos que o gráfico, representado pela figura 2, apresenta um comportamento aparentemente semelhante. De forma que, nos gráficos em que o eixo das abscissas não cruza as ordenadas em zero, fizemos uma observação, a grosso, modo com o gráfico padrão.

Para o caso de um gráfico contendo somente o valor de $E_p = 2$ (a variação de valores desse parâmetro não parece causar uma mudança muito drástica no gráfico), representado pelo gráfico 3, o comportamento é essencialmente o mesmo, com a diferença que apresenta um ligeiro aumento na taxa com o primeiro gráfico expande e o segundo contrai, ou seja, ele atinge uma determinada configuração mais rápido do que no gráfico padrão.

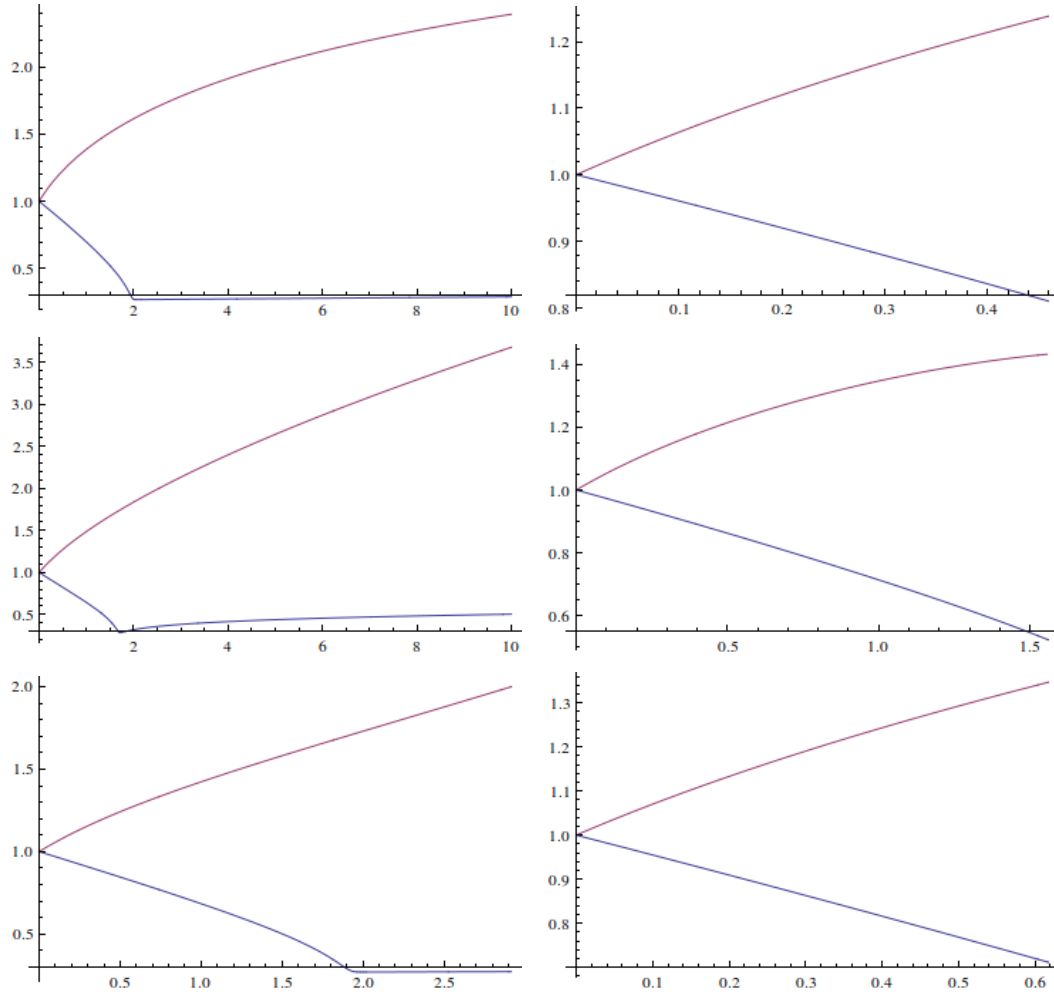


Figura 4.1: Gráficos enumerados de cima para baixo, da esquerda para a direita: 1. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0, E_p = 0$ e $\Lambda = 0$; 2. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3, E_p = 0$ e $\Lambda = 0$; 3. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0, E_p = 2$ e $\Lambda = 0$; 4. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0, E_p = 0$ e $\Lambda = 0,05$; 5. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0, E_p = 0$ e $\Lambda = -0,05$; 6. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3, E_p = 2$ e $\Lambda = 0$

Se considerarmos agora, uma valor para a constante cosmológica, igual 0.05, representado no gráfico 4, (valores maiores do que 1 inutilizam a análise gráfica, tornando a faixa de possíveis valores de t muito pequena) não observamos uma mudança muito significativa no gráfico. Assim como para a constante cosmológica negativa, representada no gráfico 5.

Vamos passar a considerar a combinação de dois parâmetros juntos. Assim, para $m = 3$ e $E_p = 2$, na figura 6, temos uma pequena mudança na taxa no avanço de ambos os gráficos. Semelhante ao gráfico de massa igual a 3 e constante cosmológica positiva iguala 0.05, dado pelo gráfico 7 e ao gráfico 8, para o mesmo valor de massa, com constante cosmológica negativa.

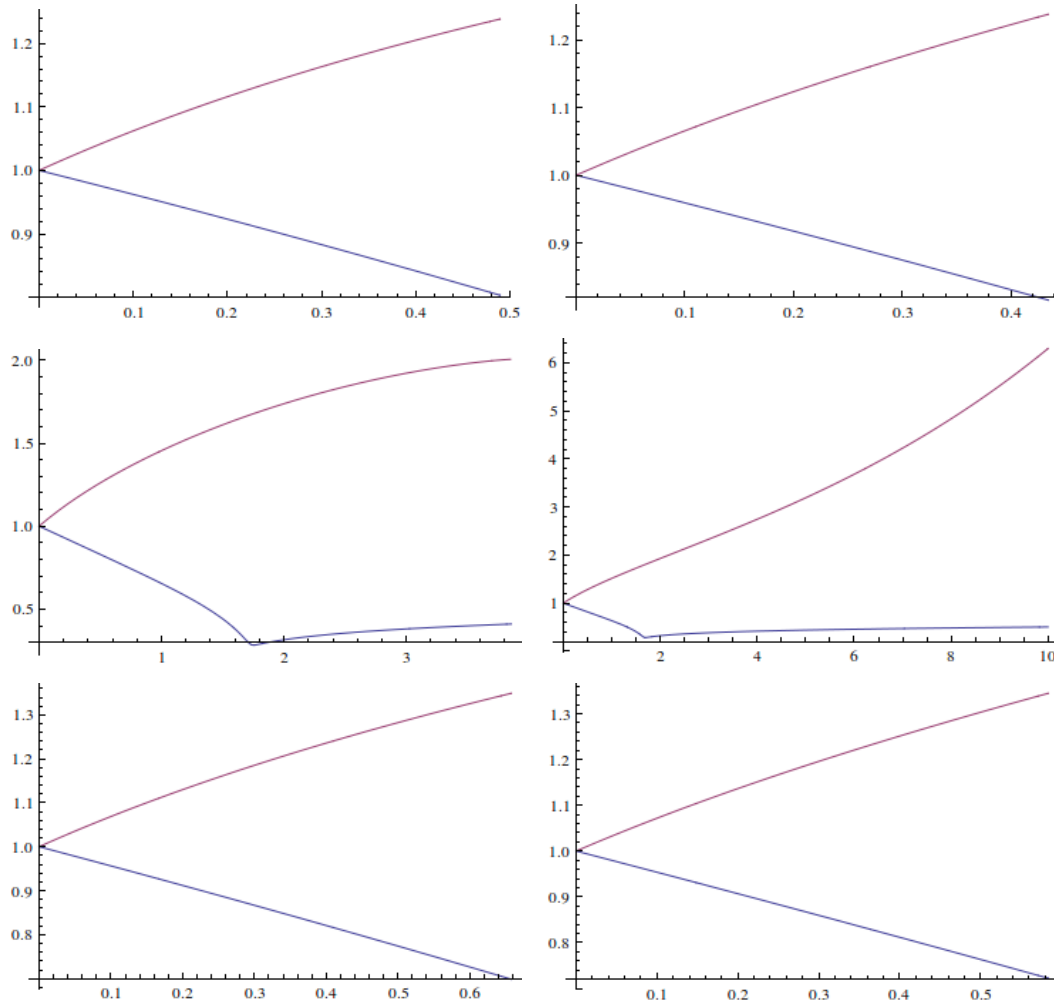


Figura 4.2: Gráficos enumerados de cima para baixo, da esquerda para a direita: 7. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 0,05$; 8. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3$, $E_p = 0$ e $\Lambda = -0,05$; 9. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 2$ e $\Lambda = 0,05$; 10. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 2$ e $\Lambda = -0,05$; 11. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3$, $E_p = 2$ e $\Lambda = 0,05$; 12. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3$, $E_p = 2$ e $\Lambda = -0,05$

Para os gráficos 9 e 10, para valores de $E_p = 2$ e constantes cosmológicas positiva e negativa respectivamente, um ligeiro abrandamento do “cotovelo” no segundo gráfico é apresentado. Sendo que no gráfico 10, ocorre uma passagem para uma fase de expansão acelerada.

Os gráficos 11 e 12, onde consideramos todos os valores dos parâmetros presentes, nenhuma mudança em relação ao gráfico 1 foi apresentada.

Percebemos que nenhum parâmetro agiu como um transformador do comportamento de $a(t)$, causando somente mudanças leves, tornando seu avanço mais rápido ou mais lento.

4.2 Campos de Dirac e Yang-Mills acoplados

Vamos analisar agora, a descrição do universo de FLRW, permeado pelos campos de Yang-Mills acoplados a um campo de Dirac na presença da constante cosmológica. O campo de matéria que caracteriza este modelo cosmológico é descrito pela lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^4} + \bar{\psi}(i\gamma^\nu \nabla_\nu - m\mathbb{1})\psi - \bar{\psi}i\gamma^\nu eA_\nu\psi + \Lambda. \quad (4.20)$$

a qual representa as lagrangeanas de seus respectivos campos somados ao termo de interação e à constante cosmológica.

Devemos agora calcular o tensor momento-energia para esta lagrangeana, de forma que

$$T_{\mu\nu} = (T_{\mu\nu})_{YM} + (T_{\mu\nu})_D + (T_{\mu\nu})_I \quad (4.21)$$

onde $(T_{\mu\nu})_{YM}$ e $(T_{\mu\nu})_D$ são os tensores momento-energia produzidos pelos campos de Yang-Mills e Dirac, respectivamente, os quais já foram calculados nos capítulos anteriores e foram apresentados pelas equações Eq.(3.44) e Eq.(2.89-2.92).

Finalmente somando Eq.(4.9), calculado na seção 4.1, Eq.(3.46-3.49) e Eq.(2.89-2.92) temos o tensor momento-energia total do problema

$$\begin{aligned} T_{00} = & b_0 E^2 \left(\ln \frac{F}{\mu^2} + 1 \right) + \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^2} + i\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi + \frac{i}{a}(\partial_i\bar{\psi})\gamma^i\psi + \frac{9\dot{a}}{a}\bar{\psi}\gamma^0\psi \\ & + m\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}[-\bar{\psi}\gamma^0 eA_0\psi + eA_0\bar{\psi}\gamma^0\psi - V_b{}^\sigma\bar{\psi}\gamma^b eA_\sigma\psi + V_b{}^\sigma eA_\sigma\bar{\psi}\gamma^b\psi], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{11} = & b_0(E_1^{(a)}E_1^{(a)} - B_2^{(a)}B_2^{(a)} - B_3^{(a)}B_3^{(a)}) \left(\ln \frac{F}{\mu^2} + 1 \right) - a^2(t)\frac{b_0}{4}F \ln \frac{F}{\mu^2} \\ & + ia\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi + ia(\partial_2\bar{\psi})\gamma^2\psi + ia(\partial_3\bar{\psi})\gamma^3\psi + ia^2(\partial_0\bar{\psi})\psi + 9\dot{a}a\bar{\psi}\gamma^0\psi \\ & + ma^2\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}[a(-\bar{\psi}\gamma^1 eA_1\psi + eA_1\bar{\psi}\gamma^1\psi) + a^2(V_b{}^\sigma\bar{\psi}\gamma^b eA_\sigma\psi - V_b{}^\sigma eA_\sigma\bar{\psi}\gamma^b\psi)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T_{22})_{YM} = & b_0(E_2^{(a)}E_2^{(a)} - B_1^{(a)}B_1^{(a)} - B_3^{(a)}B_3^{(a)}) \left(\ln \frac{F}{\mu^2} + 1 \right) - a^2(t)\frac{b_0}{4}F \ln \frac{F}{\mu^2} \\ & + ia\bar{\psi}\gamma^2\partial_2\psi + ia(\partial_1\bar{\psi})\gamma^1\psi + ia(\partial_3\bar{\psi})\gamma^3\psi + ia^2(\partial_0\bar{\psi})\psi + 9\dot{a}a\bar{\psi}\gamma^0\psi \\ & + ma^2\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}[a(-\bar{\psi}\gamma^2 eA_2\psi + eA_2\bar{\psi}\gamma^2\psi) + a^2(V_b{}^\sigma\bar{\psi}\gamma^b eA_\sigma\psi - V_b{}^\sigma eA_\sigma\bar{\psi}\gamma^b\psi)], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(T_{33})_{YM} = & b_0(E_3^{(a)} E_3^{(a)} - B_1^{(a)} B_1^{(a)} - B_2^{(a)} B_2^{(a)}) \left(\ln \frac{F}{\mu^2} + 1 \right) - a^2(t) \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^2} \\
& + ia\bar{\psi}\gamma^3\partial_3\psi + ia(\partial_1\bar{\psi})\gamma^1\psi + ia(\partial_2\bar{\psi})\gamma^2\psi + ia^2(\partial_0\bar{\psi})\psi + 9\dot{a}a\bar{\psi}\gamma^0\psi \\
& + ma^2\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}[a(-\bar{\psi}\gamma^3eA_3\psi + eA_3\bar{\psi}\gamma^3\psi) + a^2(V_b{}^\sigma\bar{\psi}\gamma^b eA_\sigma\psi - V_b{}^\sigma eA_\sigma\bar{\psi}\gamma^b\psi)].
\end{aligned}$$

4.2.1 Cálculo de médias

Devemos agora fazer um tratamento de médias semelhante ao feito para na seção anterior. Note que o procedimento realizado no caso anterior foi feito separadamente para cada um dos campos e para o termo de interação, o qual, por sua vez se mostrou não apresentar nenhuma contribuição em média, de acordo com a equação Eq.(4.21). Podemos, assim, utilizar o resultado obtido para o campo de Dirac, Eq.(4.13) e Eq.(4.14), e devemos calcular somente a média para o $T_{\mu\nu}$ referente ao termo dos campos de Yang-Mills.

Para os campos de Yang-Mills, devemos considerar o tensor momento-energia em componentes, conforme calculado no capítulo 3, dados por Eqs.(3.46-3.49). Devemos, assim considerar novamente as mesmas relações anteriores para as médias dos campos E e B , onde no caso dos campos de Yang-Mills são campos semelhantes aos campos elétrico e magnético respectivamente, tal que

$$\begin{aligned}
\langle E_i \rangle &= 0 & \langle B_i \rangle &= 0 \\
\langle E_i B_j \rangle &= -\frac{1}{3}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})g_{ij} \Rightarrow \langle E_i B_j - B_i E_j \rangle = 0 \\
\langle E_i E_j \rangle &= -\frac{1}{3}E^2 g_{ij} & \langle B_i B_j \rangle &= -\frac{1}{3}B^2 g_{ij}
\end{aligned}$$

Assim, de acordo com as equações, Eq.(3.27-3.30), podem ser reescritas na forma

$$\begin{aligned}
\langle T_{00} \rangle_{YM} &= E^2 b_0 \left(\ln \frac{F}{\mu^4} + 1 \right) + \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^4} \\
\langle T_{11} \rangle_{YM} &= -b_0 \left(-\frac{1}{3}E^2 g_{11} + \frac{1}{3}B^2 g_{22} + \frac{1}{3}B^2 g_{33} \right) \left(\ln \frac{F}{\mu^4} + 1 \right) - a^2(t) \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^4} \\
&= -a^2(t) \left[\frac{b_0}{3}(E^2 - 2B^2) \left(\ln \frac{F}{\mu^4} + 1 \right) + \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^4} \right]
\end{aligned}$$

de forma que $\langle T_{11} \rangle_{YM} = \langle T_{22} \rangle_{YM} = \langle T_{33} \rangle_{YM}$.

Novamente desconsiderando a contribuição do campo elétrico no universo primordial [24],

podemos tomar $\mathbf{E} = 0$, considerando um universo puramente magnético. Logo,

$$\begin{aligned}\langle T_{00} \rangle_{YM} &= \frac{b_0}{2} B^2 \ln \frac{2B^2}{\mu^4} \\ \langle T_{11} \rangle_{YM} &= -a^2(t) \left[-\frac{2b_0}{3} B^2 \left(\ln \frac{2B^2}{\mu^4} + 1 \right) + \frac{b_0}{2} B^2 \ln \frac{2B^2}{\mu^4} \right]\end{aligned}$$

Finalmente podemos escrever o tensor momento-energia para o campo de Dirac acoplado ao campo de Yang-Mills, tomadas as médias no volume V .

$$\begin{aligned}T_{00} &= \frac{b_0}{2} B^2 \ln \frac{2B^2}{\mu^4} + \frac{E_p}{a^3 V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{m}{a^3 V_c} - \Lambda \\ T_{11} &= a^2 \frac{b_0}{6} B^2 \left(\ln \frac{2B^2}{\mu^4} + 4 \right) - \frac{E_p}{a V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^2 V_c} + \frac{m}{a V_c} + a^2 \Lambda\end{aligned}$$

onde $T_{11} = T_{22} = T_{33}$.

4.2.2 Conservação de energia

Novamente, podemos calcular a derivada covariante da componente de energia do tensor momento-energia tal que

$$T^{0\nu}{}_{;\nu} = T^{0\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^0_{\nu\beta} T^{\beta\nu} + \Gamma^\nu_{\nu\beta} T^{0\beta}$$

Semelhante ao caso anterior, temos $T^{\mu\nu}$ diagonal, ainda, os Γ^i_{i0} e Γ^0_{ii} são iguais, assim

$$T^{0\nu}{}_{;\nu} = T^{00}{}_{,0} + 3\Gamma^0_{11} T^{11} + 3\Gamma^1_{10} T^{00}$$

Portanto, substituindo os valores dos tensores de momento-energia e dos símbolos de Christoffel,

$$\begin{aligned}T^{0\nu}{}_{;\nu} &= T^{00}{}_{,0} + 3\Gamma^0_{11} T^{11} + 3\Gamma^1_{10} T^{00} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{b_0}{2} B^2 \ln \frac{2B^2}{\mu^4} + \frac{E_p}{a^3 V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{m}{a^3 V_c} - \Lambda \right] \\ &\quad + 3 \frac{\dot{a}}{a^3} \left[a^2 \frac{b_0}{6} B^2 \left(\ln \frac{2B^2}{\mu^4} + 4 \right) - \frac{E_p}{a V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^2 V_c} + \frac{m}{a V_c} + a^2 \Lambda \right] \\ &\quad + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left[\frac{b_0}{2} B^2 \ln \frac{2B^2}{\mu^4} + \frac{E_p}{a^3 V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{m}{a^3 V_c} - \Lambda \right] \\ &= b_0 B \dot{B} \ln \frac{2B^2}{\mu^4} + b_0 B \dot{B} - \frac{3E_p \dot{a}}{a^4 V_c} - \frac{3m \dot{a}}{a^4 V_c} - \frac{36\dot{a}^2}{a^5 V_c} + \frac{\dot{a} b_0 B^2}{2a} \left(\ln \frac{2B^2}{\mu^4} + 4 \right) \\ &\quad - \frac{3E_p \dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{27\dot{a}^2}{a^5 V_c} + \frac{3m \dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{3\dot{a} b_0 B^2}{2a} \ln \frac{2B^2}{\mu^4} + \frac{3E_p \dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{3m \dot{a}}{a^4 V_c} + \frac{27\dot{a}^2}{a^5 V_c} + \frac{9\ddot{a}}{a^4 V_c} \\ &= \left(b_0 B \dot{B} + \frac{2\dot{a} b_0 B^2}{a} \right) \left(\ln \frac{2B^2}{\mu^4} + 1 \right) + \frac{3\dot{a}}{a} \left(-\frac{E_p}{a^3 V_c} + \frac{m}{a^3 V_c} + \frac{6\dot{a}}{a^4 V} \right) + \frac{9\ddot{a}}{a^4 V_c}\end{aligned}$$

Agora, pela lei de conservação de energia devemos ter que $T^{0\nu}_{;\nu} = 0$, portanto

$$\frac{9\ddot{a}}{a^4V_c} = - \left(b_0B\dot{B} + \frac{2\dot{a}b_0B^2}{a} \right) \left(\ln \frac{2B^2}{\mu^4} + 1 \right) - \frac{3\dot{a}}{a} \left(-\frac{E_p}{a^3V_c} + \frac{m}{a^3V_c} + \frac{6\dot{a}}{a^4V_c} \right) \quad (4.22)$$

4.2.3 Análise do fator de escala $a(t)$

Finalmente, de posse das quantidades previamente definidos, estamos aptos a fazer uma análise do fator de escala do universo $a(t)$. Todo o processo de análise que segue será muito semelhante ao realizado para o caso anterior onde foi considerado o campo eletrodinâmico não-linear.

Iremos então, primeiramente, considerar as equações de movimento que caracterizam esta expansão. Assim, escrevendo as equações de Einstein, calculadas no capítulo 1, dadas pelas Eq.(1.28) e Eq.(1.29), juntamente com os tensores momento-energia, Eq.(4.22) e Eq.(4.22), temos

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{b_0}{2}B^2 \ln \frac{2B^2}{\mu^4} + \frac{E_p}{a^3V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^4V_c} + \frac{m}{a^3V_c} - \Lambda$$

denominada equação de Friedmann e

$$2\ddot{a}a + \dot{a}^2 = a^2\frac{b_0}{6}B^2 \left(\ln \frac{2B^2}{\mu^4} + 4 \right) - \frac{E_p}{aV_c} + \frac{9\dot{a}}{a^2V_c} + \frac{m}{aV_c} + a^2\Lambda$$

Assim, temos em mãos três equações que relacionam o fator de escala $a(t)$ com o campo magnético $B(t)$, dadas pelas duas equações de Einstein e a equação de conservação de energia. Devemos então manipular estas quantidades a fim de estudar o comportamento de $a(t)$.

Podemos relacionar as equações de Einstein, afim de isolar o termo de derivada segunda, tal que,

$$\frac{2\ddot{a}}{a} = \frac{2b_0B^2}{3} + \frac{6\dot{a}}{a^4V_c} - \frac{4E_p}{3a^3V_c} + \frac{2m}{3a^3V_c} + \frac{2\Lambda}{3}$$

De forma que, ao substituirmos na equação de conservação de energia, Eq.(4.22), teremos uma equação de primeira ordem envolvendo \dot{a} e \dot{B} ,

$$\dot{B} = \left[\frac{2\dot{a}b_0B^2}{a} \left(\ln \frac{2B^2}{\mu^4} + 1 \right) - \frac{3\dot{a}}{a} \left(-\frac{E_p}{a^3V_c} + \frac{m}{a^3V_c} + \frac{6\dot{a}}{a^4V_c} \right) - \frac{3}{a^3V_c} \left(b_0B^2 - \frac{2E_p}{a^3V_c} + \frac{9\dot{a}}{a^4V_c} + \Lambda \right) \right] \left[b_0B \left(\ln \frac{2B^2}{\mu^4} + 1 \right) \right]^{-1} \quad (4.23)$$

Novamente, temos um sistema de equações de primeira ordem constituídas pelas equações de Friedmann, e pela Eq.(4.23), a qual podemos resolver numericamente.

Temos novamente, o problema com os parâmetros, que no caso são em maior número, sendo eles b_0 , μ , m , E_p , Λ e V_c . O parâmetro μ pode ser incorporado ao campo $B(t)$. Ainda o parâmetro b_0 , atua como uma escala, sendo portanto tomado igual a 1. Vamos novamente considerar um valor baixo, mas não muito para o volume em questão, tal que $V = 2$. Os outros parâmetros foram variados afim de analisarmos sua influência.

O valor inicial considerado foi $a(0) = 1$, de forma a observarmos o comportamento da função no tempo próximo de zero.

Agora considerando, novamente, todos os valores iguais a zero, $m = 0$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 0$, plotamos um gráfico, figura 1, apresentando duas soluções, sendo uma solução singular com um expansão desacelerada, atingindo a singularidade em aproximadamente $t = -0,014$, e a outra praticamente constante. Iremos novamente considerar esse gráfico como modelo de comparação.

O gráfico 2, representa aquele com $m = 3$, a qual apresenta um pequeno avanço no ponto de singularidade, avanço esse que causa um evolução mais acentuada do universo ao longo do tempo. Entretanto ainda caracteriza um gráfico singular com expansão desacelerada e outra solução praticamente constante.

Tomando $E_p = 10$, temos um gráfico representado na figura 3, o qual apresenta o mesmo comportamento, porém um avanço no ponto singularidade aparece, sendo maior do que no gráfico 2.

O gráfico 4, para uma constante cosmológica positiva igual a 2, temos um retrocesso no ponto onde ocorre a singularidade, causando uma amenizada na expansão. Temos que o gráfico constante passa para uma fase de expansão acelerada.

Para a constante cosmológica negativa igual a -2 , apresentada no gráfico 5, também ocorre um retrocesso com um gráfico bem ameno, porém a outra solução permanece constante.

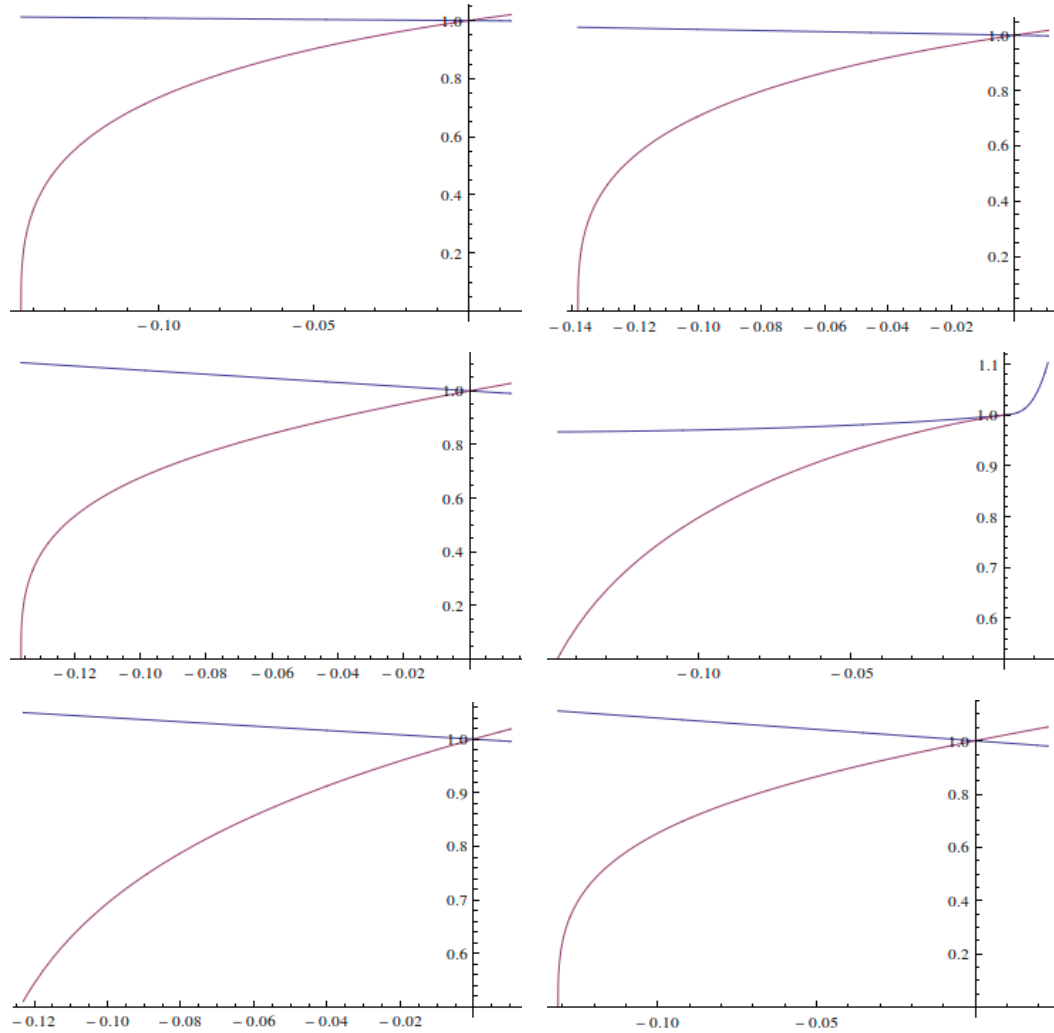


Figura 4.3: Gráficos enumerados de cima para baixo, da esquerda para a direita: 1. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 0$; 2. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 1,5$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 0$; 3. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 10$ e $\Lambda = 0$; 4. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 2$; 5. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3$, $E_p = 2$ e $\Lambda = -2$; 6. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 1,5$, $E_p = 0$ e $\Lambda = -2$

A partir do gráfico 6, passamos a considerar mais de um parâmetro diferente de zero, sendo que na figura 6 temos a combinação da massa e da constante cosmológica positiva, causando um avanço considerável no ponto de singularidade, atingindo a singularidade aproximadamente em $t = -0,013$, semelhante ao gráfico 10, onde consideramos a contribuição da energia e da constante cosmológica negativa e o gráfico 12 para contendo os três parâmetros, sendo a constante cosmológica negativa.

O gráfico 7, onde foram considerados a massa e constante cosmológica, tomada positiva,

diferentes de zero, temos um retrocesso do ponto de singularidade atingindo a singularidade em aproximadamente $t = -0,15$.

Para o gráfico 11, onde foram considerados todos os parâmetros, com constante cosmológica positiva, observamos um leve avanço no ponto de singularidade.

Poucas mudanças no processo foram observadas para os gráficos 8 e 9, sendo considerados diferente de zero, os parâmetros massa e constante cosmológica negativa em 8, e energia e constante cosmológica positiva em 9.

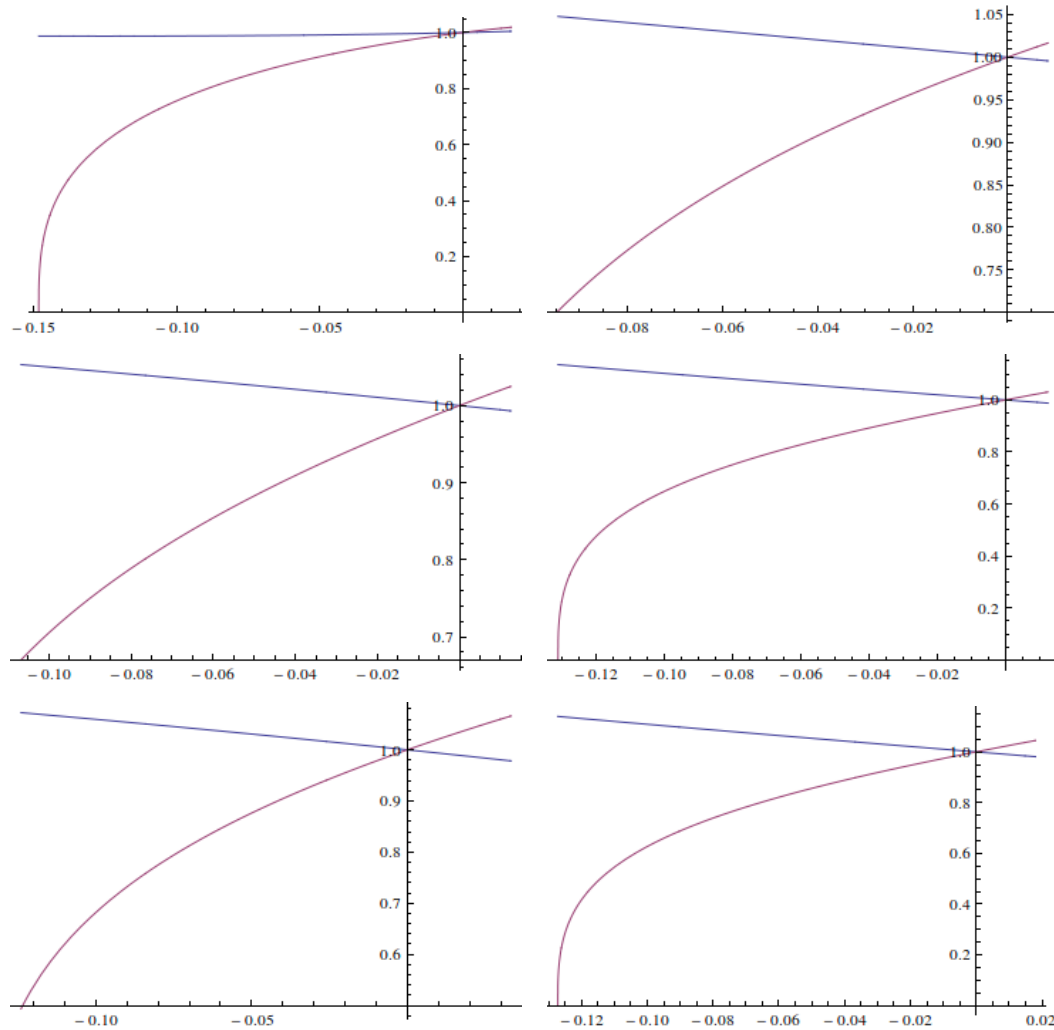


Figura 4.4: Gráficos enumerados de cima para baixo, da esquerda para a direita: 7. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 3$, $E_p = 0$ e $\Lambda = 0,05$; 8. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 1,5$, $E_p = 0$ e $\Lambda = -2$; 9. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 10$ e $\Lambda = 2$; 10. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 0$, $E_p = 10$ e $\Lambda = -2$; 11. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 1,5$, $E_p = 10$ e $\Lambda = 2$; 12. Gráfico de $a(t)$, tomando $m = 1,5$, $E_p = 10$ e $\Lambda = -2$

Novamente não observamos grandes mudanças no comportamento dos gráficos, sendo eles, em sua maioria, singulares com expansões desaceleradas, ou constantes. Em apenas um caso a introdução de um parâmetro, ocasionou uma expansão acelerada.

Conclusão

No presente trabalho propomos uma análise do fator de escala do universo $a(t)$, considerando um universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, dominado por campos de calibre, descritos primeiramente por um campo eletrodinâmico não-linear e posteriormente por um campo de Yang-Mills, ambos acoplados a um campo fermiônico.

Utilizando as equações de Einstein em conjunto com a relação para a conservação de energia encontramos, em ambos os casos, duas equações diferenciais de primeira ordem para $a(t)$ e $B(t)$. De posse dessas equações, montamos um sistema de equações diferenciais, o qual foi resolvido numericamente. As equações diferenciais apresentavam vários parâmetros a serem determinados, de forma que para o cálculo de suas soluções utilizamos inúmeros valores para os parâmetros em questão de modo a cobrir, ao menos qualitativamente, todos os comportamentos possíveis dos parâmetros livres. Obtivemos dois tipos de solução para cada problema, sendo as duas apresentadas em conjunto.

No primeiro caso, somente soluções não-singulares foram observadas, sendo que uma solução apresentou expansões desaceleradas na maioria das soluções. A segunda solução representou um universo em colapso, que atingia um valor mínimo (diferente de zero) para depois iniciar uma evolução constante. As variações dos parâmetros realizadas causaram apenas pequenas modificações em como o gráfico evoluía, fazendo com que ele atingisse um determinado ponto de forma mais rápida ou lenta. Somente no gráfico para valores diferente de zero da energia E_p e constante cosmológica negativa Λ foi observada a mudança de uma evolução desacelerada para uma evolução acelerada.

Para o segundo problema, um tipo de solução apresentou somente soluções singulares, enquanto em uma outra solução foram observadas evoluções constantes, do tipo não-singulares. A variação de parâmetros não alterou os gráficos significativamente. Salvo o caso em que somente a constante cosmológica diferente de zero, assumindo um valor positivo foi considerada,

em que uma aceleração apareceu no gráfico com comportamento constante.

Em suma, o acréscimo de valores de massa, energia e constante cosmológica não alteram o gráfico de maneira significativa, como por exemplo transformar um gráfico singular em um não-singular, alterando somente a evolução de um comportamento padrão para aquele caso.

Comparações com a literatura nos casos onde não foi considerada a contribuição do campo de Dirac, dados por, no caso dos campos de Yang-Mills sem constante cosmológica em [8] e com constante cosmológica em [7], e para o campo eletrodinâmico não-linear em [7], não puderam ser analisadas, uma vez que termos com derivadas de $a(t)$, caracterizando um universo com férmions sem massa se somaram a termos das equações de Einstein. Desta forma, os termos referente ao campo fermiônico não puderam ser eliminados, impedindo a comparação entre os trabalhos.

Apêndice A

Vamos considerar neste apêndice, assim como nos subsequentes, o desenvolvimento das contas apresentadas nos capítulos anteriores. Neste apêndice apresentaremos os cálculos utilizados no capítulo 1.

A.1 Ação de Einstein-Hilbert

Dada a ação de Einstein-Hilbert,

$$S = \int \left[\frac{1}{2}R + \mathcal{L} \right] \sqrt{-g} d^4x \quad (\text{A.1})$$

podemos encontrar as equações de Einstein através da consideração do princípio de mínima ação onde a variação da ação deve ser igual a zero, logo

$$\begin{aligned} 0 &= \int \left[\frac{1}{2} \frac{\delta \sqrt{-g} R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= \int \left[\frac{1}{2} \left(R \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \sqrt{-g} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \end{aligned}$$

Segue que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$$

Logo,

$$\frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (\text{A.2})$$

Podemos, assim definir o tensor momento-energia como

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \quad (\text{A.3})$$

Vamos então calcular o termo da esquerda, referente à parte da geometria. Considerando o primeiro termo referente à métrica, temos

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{gg^{\mu\nu}}{2\sqrt{-g}}\delta\sqrt{-g} \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\end{aligned}$$

onde utilizamos as relações $\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$. Segue que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{g_{\mu\nu}}{2} \quad (\text{A.4})$$

Agora, da definição do escalar de curvatura $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$, temos

$$\delta R = \delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, Eq.(A.37), definido a partir do tensor de Riemann, Eq.(A.38). Logo, a variação do tensor de Riemann é dada por

$$\delta R_{\mu\nu\sigma}^{\gamma} = \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\gamma} - \partial_{\sigma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} + \Gamma_{\nu\theta}^{\gamma}\delta\Gamma_{\sigma\mu}^{\theta} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\theta}\delta\Gamma_{\nu\theta}^{\gamma} - \Gamma_{\sigma\theta}^{\gamma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\theta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\theta}\delta\Gamma_{\sigma\theta}^{\gamma} \quad (\text{A.6})$$

Ainda, uma vez que $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}$ representa somente uma diferença entre dois termos da métrica, ele se comporta como um tensor, e podemos calcular as derivadas covariantes dada por

$$\mathcal{D}_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\gamma}) = \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\gamma} + \Gamma_{\nu\theta}^{\gamma}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\theta} - \Gamma_{\nu\mu}^{\theta}\delta\Gamma_{\sigma\theta}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\theta}\delta\Gamma_{\mu\theta}^{\gamma} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathcal{D}_{\sigma}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}) = \partial_{\sigma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} + \Gamma_{\sigma\theta}^{\gamma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\theta} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\theta}\delta\Gamma_{\nu\theta}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\theta}\delta\Gamma_{\mu\theta}^{\gamma} \quad (\text{A.8})$$

$$(\text{A.9})$$

Logo, substituindo Eqs.(A.7-A.8) em Eq.(A.6), temos a variação do tensor de Riemann em termos da derivada covariante,

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu\sigma}^{\gamma} &= \mathcal{D}_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\gamma}) - \Gamma_{\nu\theta}^{\gamma}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\theta} + \Gamma_{\nu\mu}^{\theta}\delta\Gamma_{\sigma\theta}^{\gamma} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\theta}\delta\Gamma_{\mu\theta}^{\gamma} - \mathcal{D}_{\sigma}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}) + \Gamma_{\sigma\theta}^{\gamma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\theta} \\ &\quad - \Gamma_{\mu\sigma}^{\theta}\delta\Gamma_{\nu\theta}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\theta}\delta\Gamma_{\mu\theta}^{\gamma} + \Gamma_{\nu\theta}^{\gamma}\delta\Gamma_{\sigma\mu}^{\theta} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\theta}\delta\Gamma_{\nu\theta}^{\gamma} - \Gamma_{\sigma\theta}^{\gamma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\theta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\theta}\delta\Gamma_{\sigma\theta}^{\gamma} \\ &= \mathcal{D}_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\gamma}) - \mathcal{D}_{\sigma}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma})\end{aligned}$$

Para o tensor de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\gamma}^{\gamma} = \mathcal{D}_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\gamma}^{\gamma}) - \mathcal{D}_{\gamma}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}) \quad (\text{A.10})$$

Substituindo em Eq.(A.5) temos

$$\delta R = (\mathcal{D}_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\gamma}^{\gamma}) - \mathcal{D}_{\gamma}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}))g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.11})$$

Sendo a derivada covariante da métrica igual a zero podemos escrever

$$(\mathcal{D}_\nu(\delta\Gamma_{\mu\gamma}^\gamma) - \mathcal{D}_\gamma(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\gamma))g^{\mu\nu} = (\mathcal{D}_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\gamma}^\gamma) - \mathcal{D}_\gamma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\gamma))$$

Multiplicando essa igualdade por $\sqrt{-g}$ e considerando $g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\gamma}^\gamma = A^\nu$ podemos calcular a primeira derivada covariante apresentada como

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}\mathcal{D}_\nu(A^\nu) &= \sqrt{-g}\partial_\nu A^\nu + \sqrt{-g}\Gamma_{\nu\theta}^\nu A^\theta \\ &= \sqrt{-g}\partial_\nu A^\nu + \sqrt{-g}\left(\frac{g^{\nu\gamma}}{2}(\partial_\nu g_{\gamma\theta}) + \partial_\theta g_{\gamma\nu} - \partial_\gamma g_{\nu\theta}\right)A^\theta \\ &= \sqrt{-g}\partial_\nu A^\nu + \frac{\sqrt{-g}}{2}(\partial^\gamma g_{\gamma\theta} + g^{\nu\gamma}\partial_\theta g_{\gamma\nu} - \partial^\nu g_{\nu\theta})A^\theta \\ &= \sqrt{-g}\partial_\nu A^\nu + \frac{\sqrt{-g}}{2}(\partial_\theta(g^{\nu\gamma}g_{\gamma\nu}) - g_{\gamma\nu}\partial_\theta g^{\nu\gamma})A^\theta \\ &= \sqrt{-g}\partial_\nu A^\nu - \frac{\sqrt{-g}}{2}A^\theta g_{\gamma\nu}\partial_\theta g^{\nu\gamma} \\ &= \sqrt{-g}\partial_\nu A^\nu + A^\theta\partial_\theta\sqrt{-g} \\ &= \partial_\nu(\sqrt{-g}A^\nu) \\ &= \partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\gamma}^\gamma) \end{aligned}$$

Similarmente $\mathcal{D}_\gamma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\gamma) = \partial_\gamma(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\gamma)$. De forma que estes termos caracterizam uma derivada total, não contribuindo portanto para a variação da ação, e a Eq.(A.11) se reduz a

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

Logo,

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} \quad (\text{A.12})$$

Assim, substituindo Eq(A.12), Eq.(A.4) e Eq.(A.3) em Eq.(A.2), temos as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}.$$

A.2 Métrica de Robertson-Walker

Com o intuito de deduzir a métrica de Robertson-Walker, vamos considerar uma 3-esfera, tal que

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \quad (\text{A.13})$$

Assim tomando a diferencial temos

$$0 = 2xdx + 2ydy + 2zdz + 2wdw \quad (\text{A.14})$$

ou ainda

$$dw = -\frac{(xdx + ydy + zdz)}{w} \quad (\text{A.15})$$

$$= -\frac{(xdx + ydy + zdz)}{(R^2 - x^2 - y^2 - z^2)^{1/2}} \quad (\text{A.16})$$

Agora, substituindo na equação da parte espacial da métrica Eq.(1.21)

$$d\sigma^2 = \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{(R^2 - x^2 - y^2 - z^2)} + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (\text{A.17})$$

Escrevendo em coordenadas esféricas onde:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad \text{e} \quad z = r \cos \theta,$$

ou na forma diferencial:

$$dx = \sin \theta \cos \phi dr - r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi$$

$$dy = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi$$

$$dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

Vamos então, calcular por partes a transformação da equação referente à parte espacial da métrica, Eq.(A.17), em coordenadas esféricas.

$$\begin{aligned} R^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= R^2 - (r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta) \\ &= R^2 - r^2. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

De forma que diferenciando a Eq.(A.18) temos

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad xdx + ydy + zdz = r dr \quad (\text{A.19})$$

Assim

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2} + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &= \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Considerando a seguinte substituição

$$r' = r/\sqrt{R^2} \quad (\text{A.21})$$

de forma que

$$r^2 = R^2 r'^2 \quad (\text{A.22})$$

e

$$dr^2 = R^2 dr'^2 \quad (\text{A.23})$$

teremos

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \frac{R^2 dr'^2}{1 - R^2 r'^2 / R^2} + R^2 r'^2 d\theta^2 + R^2 r'^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &= R^2 \left(\frac{dr'^2}{1 - \epsilon r'^2} + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

onde ϵ assume valores iguais a -1,0 e 1.

Finalmente tomando $R^2 = a^2(t)$ e fazendo a substituição

$$r' = \frac{r}{1 + \epsilon r^2 / 4} \quad (\text{A.25})$$

logo,

$$dr'^2 = \frac{(1 - \epsilon r^2 / 2)^2}{(1 + \epsilon r^2 / 4)^4} dr^2 \quad (\text{A.26})$$

teremos a parte espacial da métrica de Robertson-Walker

$$d\sigma^2 = \frac{a(t)^2}{(1 + \epsilon r^2 / 4)^2} (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)). \quad (\text{A.27})$$

A.3 Modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Vamos agora apresentar os cálculos necessários para a apresentação das equações dinâmicas do campo gravitacional. Primeiramente vamos calcular as conexões tais que

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} (\partial_\mu g_{\gamma\nu} + \partial_\nu g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.28})$$

Assim

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} (\partial_\mu g_{0\nu} + \partial_\nu g_{0\mu} - \partial_0 g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{i0} (\partial_\mu g_{i\nu} + \partial_\nu g_{i\mu} - \partial_i g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} (\partial_\mu g_{0\nu} + \partial_\nu g_{0\mu} - \partial_0 g_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^i &= \frac{1}{2}g^{i0}(\partial_\mu g_{0\nu} + \partial_\nu g_{0\mu} - \partial_0 g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}g^{ij}(\partial_\mu g_{i\nu} + \partial_\nu g_{i\mu} - \partial_i g_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}g^{ii}(\partial_\mu g_{i\nu} + \partial_\nu g_{i\mu})
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Logo, os termos não nulos serão:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}) \\
&= a(t)\dot{a}(t),
\end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{02} - \partial_0 g_{22}) \\
&= a(t)\dot{a}(t),
\end{aligned} \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{03} - \partial_0 g_{33}) \\
&= a(t)\dot{a}(t),
\end{aligned} \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{10}) \\
&= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \\
&= \Gamma_{10}^1,
\end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{20}) \\
&= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \\
&= \Gamma_{20}^2,
\end{aligned} \tag{A.35}$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{30}) \\
&= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \\
&= \Gamma_{30}^3.
\end{aligned} \tag{A.36}$$

Podemos então calcular o tensor de Ricci dado por

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu\gamma}^{\gamma} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\gamma}^{\gamma} - \partial_{\gamma}\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} + \Gamma_{\nu\theta}^{\gamma}\Gamma_{\gamma\mu}^{\theta} - \Gamma_{\gamma\theta}^{\gamma}\Gamma_{\mu\nu}^{\theta} \\
&= \partial_{\nu}\Gamma_{\mu 0}^0 + \partial_{\nu}\Gamma_{\mu i}^i - \partial_0\Gamma_{\mu\nu}^0 - \partial_i\Gamma_{\mu\nu}^i + \Gamma_{\nu 0}^0\Gamma_{0\mu}^0 + \Gamma_{\nu i}^0\Gamma_{0\mu}^i + \Gamma_{\nu 0}^i\Gamma_{i\mu}^0 \\
&\quad + \Gamma_{\nu j}^i\Gamma_{i\mu}^j - \Gamma_{00}^0\Gamma_{\mu\nu}^0 - \Gamma_{0i}^0\Gamma_{\mu\nu}^i - \Gamma_{i0}^0\Gamma_{\mu\nu}^0 - \Gamma_{ij}^i\Gamma_{\mu\nu}^j \\
&= \partial_{\nu}\Gamma_{\mu 0}^0 + \partial_{\nu}\Gamma_{\mu i}^i - \partial_0\Gamma_{\mu\nu}^0 + \Gamma_{\nu 0}^0\Gamma_{0\mu}^0 + \Gamma_{\nu i}^0\Gamma_{0\mu}^i + \Gamma_{\nu 0}^i\Gamma_{i\mu}^0 + \Gamma_{\nu j}^i\Gamma_{i\mu}^j \\
&\quad - \Gamma_{0i}^0\Gamma_{\mu\nu}^i - \Gamma_{i0}^0\Gamma_{\mu\nu}^0 - \Gamma_{ij}^i\Gamma_{\mu\nu}^j
\end{aligned} \tag{A.37}$$

De forma que os termos não nulos são o seguintes:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_0\Gamma_{00}^0 + \partial_0\Gamma_{0i}^i - \partial_0\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{00}^0\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{0i}^0\Gamma_{00}^i + \Gamma_{00}^i\Gamma_{i0}^0 + \Gamma_{0j}^i\Gamma_{i0}^j - \Gamma_{0i}^0\Gamma_{00}^i - \Gamma_{i0}^0\Gamma_{00}^0 - \Gamma_{ij}^i\Gamma_{00}^j \\
&= \partial_0\Gamma_{0i}^i + \Gamma_{0j}^i\Gamma_{i0}^j \\
&= \partial_0\Gamma_{01}^1 + \partial_0\Gamma_{02}^2 + \partial_0\Gamma_{03}^3 + \Gamma_{01}^1\Gamma_{10}^1 + \Gamma_{02}^1\Gamma_{10}^2 + \Gamma_{03}^1\Gamma_{10}^3 + \Gamma_{01}^2\Gamma_{20}^1 + \Gamma_{02}^2\Gamma_{20}^2 + \Gamma_{03}^2\Gamma_{20}^3 \\
&\quad + \Gamma_{01}^3\Gamma_{30}^1 + \Gamma_{02}^3\Gamma_{30}^2 + \Gamma_{03}^3\Gamma_{30}^3 \\
&= \partial_0\Gamma_{01}^1 + \partial_0\Gamma_{02}^2 + \partial_0\Gamma_{03}^3 + \Gamma_{01}^1\Gamma_{10}^1 + \Gamma_{02}^2\Gamma_{20}^2 + \Gamma_{03}^3\Gamma_{30}^3 \\
&= 3\left(\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) + 3\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \\
&= 3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)},
\end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_1\Gamma_{10}^0 + \partial_1\Gamma_{1i}^i - \partial_0\Gamma_{11}^0 + \Gamma_{10}^0\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{1i}^0\Gamma_{01}^i + \Gamma_{10}^i\Gamma_{i1}^0 + \Gamma_{1j}^i\Gamma_{i1}^j - \Gamma_{0i}^0\Gamma_{11}^i - \Gamma_{i0}^0\Gamma_{11}^0 - \Gamma_{ij}^i\Gamma_{11}^j \\
&= -\partial_0\Gamma_{11}^0 + \Gamma_{1i}^0\Gamma_{01}^i + \Gamma_{10}^i\Gamma_{i1}^0 - \Gamma_{i0}^0\Gamma_{11}^0 \\
&= -\partial_0\Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^0\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{12}^0\Gamma_{01}^2 + \Gamma_{13}^0\Gamma_{01}^3 + \Gamma_{10}^1\Gamma_{11}^0 + \Gamma_{10}^2\Gamma_{21}^0 + \Gamma_{10}^3\Gamma_{31}^0 - \Gamma_{10}^1\Gamma_{11}^0 - \Gamma_{20}^2\Gamma_{11}^0 - \Gamma_{30}^3\Gamma_{11}^0 \\
&= -\partial_0\Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^0\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{10}^1\Gamma_{11}^0 - \Gamma_{10}^1\Gamma_{11}^0 - \Gamma_{20}^2\Gamma_{11}^0 - \Gamma_{30}^3\Gamma_{11}^0 \\
&= -(\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)) - \dot{a}^2(t) \\
&= -(\ddot{a}(t)a(t) + 2\dot{a}^2(t)),
\end{aligned} \tag{A.39}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_2\Gamma_{20}^0 + \partial_2\Gamma_{2i}^i - \partial_0\Gamma_{22}^0 + \Gamma_{20}^0\Gamma_{02}^0 + \Gamma_{2i}^0\Gamma_{02}^i + \Gamma_{20}^i\Gamma_{i2}^0 + \Gamma_{2j}^i\Gamma_{i2}^j - \Gamma_{0i}^0\Gamma_{22}^i - \Gamma_{i0}^0\Gamma_{22}^0 - \Gamma_{ij}^i\Gamma_{22}^j \\
&= -\partial_0\Gamma_{22}^0 + \Gamma_{2i}^0\Gamma_{02}^i + \Gamma_{20}^i\Gamma_{i2}^0 - \Gamma_{i0}^0\Gamma_{22}^0 \\
&= -\partial_0\Gamma_{22}^0 + \Gamma_{21}^0\Gamma_{02}^1 + \Gamma_{22}^0\Gamma_{02}^2 + \Gamma_{23}^0\Gamma_{02}^3 + \Gamma_{20}^1\Gamma_{12}^0 + \Gamma_{20}^2\Gamma_{22}^0 + \Gamma_{20}^3\Gamma_{32}^0 - \Gamma_{10}^1\Gamma_{22}^0 - \Gamma_{20}^2\Gamma_{22}^0 - \Gamma_{30}^3\Gamma_{22}^0 \\
&= -\partial_0\Gamma_{22}^0 + \Gamma_{22}^0\Gamma_{02}^2 + \Gamma_{20}^2\Gamma_{22}^0 - \Gamma_{10}^1\Gamma_{22}^0 - \Gamma_{20}^2\Gamma_{22}^0 - \Gamma_{30}^3\Gamma_{22}^0 \\
&= -(\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)) - \dot{a}^2(t) \\
&= -(\ddot{a}(t)a(t) + 2\dot{a}^2(t)),
\end{aligned} \tag{A.40}$$

e

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_3 \Gamma_{30}^0 + \partial_3 \Gamma_{3i}^i - \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{30}^0 \Gamma_{03}^0 + \Gamma_{3i}^0 \Gamma_{03}^i + \Gamma_{30}^i \Gamma_{i3}^0 + \Gamma_{3j}^i \Gamma_{i3}^j - \Gamma_{0i}^0 \Gamma_{33}^i - \Gamma_{i0}^i \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{ij}^i \Gamma_{33}^j \\
&= -\partial_0 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{3i}^0 \Gamma_{03}^i + \Gamma_{30}^i \Gamma_{i3}^0 - \Gamma_{i0}^i \Gamma_{33}^0 \\
&= -\partial_0 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{31}^0 \Gamma_{03}^1 + \Gamma_{32}^0 \Gamma_{03}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{30}^1 \Gamma_{13}^0 + \Gamma_{30}^2 \Gamma_{23}^0 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 \\
&= -\partial_0 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 \\
&= -(\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)) - \dot{a}^2(t) \\
&= -(\ddot{a}(t)a(t) + 2\dot{a}^2(t)).
\end{aligned} \tag{A.41}$$

De posse destas quantidades iremos calcular o escalar de curvatura

$$\begin{aligned}
R &= R_{\mu}^{\mu} = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = R_{00} g^{00} + R_{11} g^{11} + R_{22} g^{22} + R_{33} g^{33} \\
&= 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(-\frac{3}{a^2(t)} \right) (-\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t)) \\
&= \frac{6\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{6\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}.
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Finalmente podemos calcular as equações de Einstein dadas por

$$\begin{aligned}
R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} &= -T_{00} \\
3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{6\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{6\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) &= -T_{00} \\
3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} &= T_{00},
\end{aligned} \tag{A.43}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} - \frac{1}{2} R g_{11} &= -T_{11} \\
-(\ddot{a}(t)a(t) + 2\dot{a}^2(t)) - \frac{1}{2} \left(\frac{6\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{6\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) (-a^2(t)) &= -T_{11} \\
2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t) &= -T_{11},
\end{aligned} \tag{A.44}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} - \frac{1}{2} R g_{22} &= -T_{22} \\
-(\ddot{a}(t)a(t) + 2\dot{a}^2(t)) - \frac{1}{2} \left(\frac{6\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{6\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) (-a^2(t)) &= -T_{22} \\
2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t) &= -T_{22},
\end{aligned} \tag{A.45}$$

e

$$\begin{aligned}
R_{33} - \frac{1}{2} R g_{33} &= -T_{33} \\
-(\ddot{a}(t)a(t) + 2\dot{a}^2(t)) - \frac{1}{2} \left(\frac{6\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{6\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) (-a^2(t)) &= -T_{33} \\
2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t) &= -T_{33},
\end{aligned} \tag{A.46}$$

Apêndice B

Neste apêndice apresentaremos alguns resultado matemáticos apresentados no capítulo 2.

B.1 Expansão em base de ondas planas

Podemos calcular o fator de normalização C do conjunto de soluções das equações de Dirac para uma partícula livre, através da relação

$$\int d^3x \psi_{\mathbf{p}, \epsilon_r}^\dagger \psi_{\mathbf{p}', \epsilon_{r'}} = \delta_{rr'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (\text{B.1})$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int d^3x \psi_{\mathbf{p}, \epsilon_r}^\dagger \psi_{\mathbf{p}', \epsilon_{r'}} &= \int d^3x |C|^2 \left(U^\dagger \quad U^\dagger \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}}{m + \epsilon_r \omega_p} \right) \left(\begin{array}{c} U \\ \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}'}{m + \epsilon_{r'} \omega_{p'}} U \end{array} \right) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \epsilon_r \omega_p t)} e^{i(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x} + \epsilon_{r'} \omega_{p'} t)} \\ &= |C|^2 \left(U^\dagger U + U^\dagger \frac{(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}')}{(m + \epsilon_r \omega_p)(m + \epsilon_{r'} \omega_{p'})} U \right) e^{i(\epsilon_{r'} \omega_{p'} - \epsilon_r \omega_p) t} \int d^3x e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} \\ &= |C|^2 U^\dagger \left(\mathbb{1} + \frac{(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}')}{(m + \epsilon_r \omega_p)(m + \epsilon_{r'} \omega_{p'})} \right) U e^{i(\epsilon_{r'} \omega_{p'} - \epsilon_r \omega_p) t} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \end{aligned}$$

considerando a relação de Eq.(2.46) temos

$$\int d^3x \psi_{\mathbf{p}, \epsilon_r}^\dagger \psi_{\mathbf{p}', \epsilon_{r'}} = |C|^2 (2\pi)^3 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(m + \epsilon_r \omega_p)(m + \epsilon_{r'} \omega_{p'})} \right) U^\dagger U e^{i(\epsilon_{r'} - \epsilon_r) \omega_p t} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

Logo,

$$|C|^2 (2\pi)^3 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(m + \epsilon_r \omega_p)(m + \epsilon_{r'} \omega_{p'})} \right) e^{i(\epsilon_{r'} - \epsilon_r) \omega_p t} = \delta_{rr'}$$

Podemos então calcular o fator de normalização como

$$\begin{aligned}
1 &= |C|^2 (2\pi)^3 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(m + \epsilon_r \omega_p)^2} \right) = |C|^2 (2\pi)^3 \left(\frac{m^2 + 2\epsilon_r \omega_p m + \omega_p^2 + p^2}{(m + \epsilon_r \omega_p)^2} \right) \\
&= |C|^2 (2\pi)^3 \left(\frac{2\epsilon_r \omega_p m + 2\omega_p^2}{(m + \epsilon_r \omega_p)^2} \right) = |C|^2 (2\pi)^3 \left(\frac{2\epsilon_r \omega_p (m + \epsilon_r \omega_p)}{(m + \epsilon_r \omega_p)^2} \right) \\
&= |C|^2 (2\pi)^3 \left(\frac{2\epsilon_r \omega_p}{m + \epsilon_r \omega_p} \right)
\end{aligned}$$

assim, teremos um fator de normalização dependente de ϵ_r

$$C_r = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m + \epsilon_r \omega_p}{2\epsilon_r \omega_p} \right)^{1/2}$$

B.1.1 Prova das relações de ortonormalização e fechamento

Considerando os spinores abaixo

$$w_1(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\omega_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{m + \omega_p} \\ \frac{p_x + ip_y}{m + \omega_p} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

$$w_2(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\omega_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{m + \omega_p} \\ \frac{-p_z}{m + \omega_p} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

$$w_3(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\omega_p - m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{m - \omega_p} \\ \frac{p_x + ip_y}{m - \omega_p} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

e

$$w_4(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\omega_p - m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{m - \omega_p} \\ \frac{-p_z}{m - \omega_p} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

sabemos que eles devem obedecer às relações de ortonormalização e fechamento, tais que

$$w_{r'}^\dagger(\mathbf{p})w_r(\mathbf{p}) = \frac{\omega_p}{m}\delta_{rr'} \quad (\text{B.6})$$

$$\sum_{r=1}^4 w_{r\alpha}(\mathbf{p})w_{r\beta}^\dagger(\mathbf{p}) = \frac{\omega_p}{m}\delta_{\alpha\beta} \quad (\text{B.7})$$

Assim da relação de ortonormalização

$$\begin{aligned} w_{r'}^\dagger(\mathbf{p})w_r(\mathbf{p}) &= \sqrt{\frac{\omega_p + \epsilon_{r'}m}{2m}} \begin{pmatrix} U_{r'}^\dagger & U_{r'}^\dagger \frac{\hat{\sigma}^\dagger \cdot \mathbf{p}}{m + \epsilon_{r'}\omega_p} \end{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega_p + \epsilon_r m}{2m}} \begin{pmatrix} U_r \\ \frac{\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m + \epsilon_r \omega_p} U_r \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\omega_p + \epsilon_{r'}m}{2m}\right) \left(\frac{\omega_p + \epsilon_r m}{2m}\right)} \begin{pmatrix} U_{r'}^\dagger U_r + U_{r'}^\dagger \frac{\hat{\sigma}^\dagger \cdot \mathbf{p}}{m + \epsilon_{r'}\omega_p} \frac{\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m + \epsilon_r \omega_p} U_r \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

para $\epsilon_r \neq \epsilon_{r'}$ temos

$$\frac{(\hat{\sigma}^\dagger \cdot \mathbf{p})(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{m^2 - \omega_p^2} = \frac{(\hat{\sigma}^\dagger \cdot \mathbf{p})(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{-\mathbf{p}^2}$$

Ainda, uma vez que as matrizes $\hat{\sigma}$ são hermitianas, então

$$\frac{(\hat{\sigma}^\dagger \cdot \mathbf{p})(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{-\mathbf{p}^2} = \frac{(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\hat{\sigma}^\dagger \cdot \mathbf{p})}{-\mathbf{p}^2} = \frac{\mathbf{1p}^2}{-\mathbf{p}^2} = -\mathbf{1} \quad (\text{B.9})$$

onde utilizamos a relação Eq.(2.46). Assim substituindo Eq.(B.9) em Eq.(B.8)

$$w_{r'}^\dagger(\mathbf{p})w_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\omega_p + m}{2m}} \sqrt{\frac{\omega_p - m}{2m}} (U_{r'}^\dagger U_r - U_{r'}^\dagger U_r) = 0$$

Para $r = r'$ igual a 1 ou 2, ou seja, $\epsilon_r = 1$ teremos

$$\begin{aligned} w_r^\dagger(\mathbf{p})w_r(\mathbf{p}) &= \frac{m + \omega_p}{2m} \left(U_r^\dagger U_r + U_r^\dagger \frac{(\hat{\alpha}^\dagger \cdot \mathbf{p})(\hat{\alpha} \cdot \mathbf{p})}{(m + \omega_p)^2} U_r \right) \\ &= \frac{m + \omega_p}{2m} U_r^\dagger \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{p}^2}{(m + \omega_p)^2} \mathbf{1} \right) U_r \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{\omega_p^2 + m\omega_p}{m + \omega_p} \right) U_r^\dagger U_r \\ &= \frac{\omega_p}{m} U_r^\dagger U_r \end{aligned}$$

Similarmente, para $r = r'$ igual a 3 ou 4, ou seja, $\epsilon_r = -1$ teremos

$$\begin{aligned} w_r^\dagger(\mathbf{p})w_r(\mathbf{p}) &= \frac{\omega_p - m}{2m} \left(U_r^\dagger U_r + U_r^\dagger \frac{(\hat{\alpha}^\dagger \cdot \mathbf{p})(\hat{\alpha} \cdot \mathbf{p})}{(m - \omega_p)^2} U_r \right) \\ &= \frac{-1}{m} \left(\frac{\omega_p^2 - m\omega_p}{m - \omega_p} \right) U_r^\dagger U_r \\ &= \frac{\omega_p}{m} U_r^\dagger U_r \end{aligned}$$

Entretanto para $r = r'$

$$U_r^\dagger U_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{ou} \quad U_r^\dagger U_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Portanto

$$w_{r'}^\dagger(\mathbf{p})w_r(\mathbf{p}) = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq r' \\ \frac{\omega_p}{m} & \text{se } r = r' \end{cases}$$

como queríamos demonstrar. Agora para a relação de fechamento, considerando Eq.(B.2) - (B.5), tomando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^4 w_{r1}(\mathbf{p})w_{r1}^\dagger(\mathbf{p}) &= \left(\sqrt{\frac{\omega_p + m}{2m}} \right)^2 + 0 + \left(\sqrt{\frac{\omega_p - m}{2m}} \right)^2 + 0 \\ &= \frac{\omega_p}{m} \end{aligned}$$

Note que teremos o mesmo resultado para $\alpha = 2$ e $\beta = 2$.

Para $\alpha = 3$ e $\beta = 3$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^4 w_{r3}(\mathbf{p})w_{r3}^\dagger(\mathbf{p}) &= \left(\frac{\omega_p + m}{2m} \right) \frac{p_z^2}{(m + \omega_p)^2} + \left(\frac{m + \omega_p}{2m} \right) \frac{p_x^2 + p_y^2}{(m + \omega_p)^2} \\ &\quad + \left(\frac{\omega_p - m}{2m} \right) \frac{p_z^2}{(m - \omega_p)^2} + \left(\frac{\omega_p - m}{2m} \right) \frac{p_x^2 + p_y^2}{(m - \omega_p)^2} \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m(m + \omega_p)} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m(m - \omega_p)} \\ &= \frac{\omega_p}{m} \end{aligned}$$

Novamente teremos o mesmo resultado para $\alpha = 4$ e $\beta = 4$. Para $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ bem como para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ teremos uma soma de zeros, assim, vamos considerar $\alpha = 1$ e $\beta = 3$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^4 w_{r1}(\mathbf{p})w_{r3}^\dagger(\mathbf{p}) &= \left(\frac{\omega_p + m}{2m} \right) \frac{p_z}{(m + \omega_p)} + 0 + \left(\frac{\omega_p - m}{2m} \right) \frac{p_z}{(m - \omega_p)} + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

o mesmo ocorre para $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ similarmente para $\alpha = 2$ e $\beta = 4$ bem como para $\alpha = 4$ e $\beta = 2$. Agora tomando $\alpha = 1$ e $\beta = 4$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^4 w_{r1}(\mathbf{p})w_{r4}^\dagger(\mathbf{p}) &= \left(\frac{\omega_p + m}{2m} \right) \frac{p_x - ip_y}{(m + \omega_p)} + 0 + \left(\frac{\omega_p - m}{2m} \right) \frac{p_x - ip_y}{(m - \omega_p)} + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

similarmente temos para $\alpha = 4$ e $\beta = 1$ bem como para $\alpha = 2$ e $\beta = 3$ e também para $\alpha = 3$ e $\beta = 2$. Finalmente para $\alpha = 3$ e $\beta = 4$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^4 w_{r3}(\mathbf{p})w_{r4}^\dagger(\mathbf{p}) &= \left(\frac{\omega_p + m}{2m}\right) \frac{p_z(p_x - ip_y)}{(m + \omega_p)^2} - \left(\frac{m + \omega_p}{2m}\right) \frac{p_z(p_x - ip_y)}{(m + \omega_p)^2} \\ &+ \left(\frac{\omega_p - m}{2m}\right) \frac{p_z(p_x - ip_y)}{(m - \omega_p)^2} - \left(\frac{\omega_p - m}{2m}\right) \frac{p_z(p_x - ip_y)}{(m - \omega_p)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

igualmente para $\alpha = 4$ e $\beta = 3$.

Portanto

$$\sum_{r=1}^4 w_{r\alpha}(\mathbf{p})w_{r\beta}^\dagger(\mathbf{p}) = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq r' \\ \frac{\omega_p}{m} & \text{se } r = r' \end{cases}$$

como queríamos demonstrar.

De posse destas quantidade, podemos deduzir a relação de normalização para a função de onda como

$$\begin{aligned} \int d^3x \psi_{p'}^{\dagger(r')}(x) \psi_p^{(r)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \sqrt{\frac{m^2}{\omega_p \omega_{p'}}} e^{-i(\epsilon_r \omega_p - \epsilon_{r'} \omega_{p'})t} e^{-i(\epsilon_{r'} \mathbf{p}' - \epsilon_r \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} w_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') w_r(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{\frac{m^2}{\omega_p \omega_{p'}}} e^{-i(\epsilon_r \omega_p - \epsilon_{r'} \omega_{p'})t} \delta^3(\epsilon_{r'} \mathbf{p}' - \epsilon_r \mathbf{p}) w_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') w_r(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{\frac{m^2}{\omega_p \omega_{p'}}} e^{-i(\epsilon_r \omega_p - \epsilon_{r'} \omega_{p'})t} \delta^3\left(\epsilon_{r'} \left(\mathbf{p}' - \frac{\epsilon_r}{\epsilon_{r'}} \mathbf{p}\right)\right) w_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') w_r(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{\frac{m^2}{\omega_p \omega_{p'}}} e^{-i(\epsilon_r \omega_p - \epsilon_{r'} \omega_{p'})t} \frac{1}{|\epsilon_{r'}|} \delta^3(\mathbf{p}' - \epsilon_{r'} \epsilon_r \mathbf{p}) w_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') w_r(\mathbf{p}) \\ &= \sqrt{\frac{m^2}{\omega_p \omega_{p'}}} e^{-i(\epsilon_r \omega_p - \epsilon_{r'} \omega_{p'})t} \delta^3(\mathbf{p}' - \epsilon_{r'} \epsilon_r \mathbf{p}) w_{r'}^\dagger(\epsilon_{r'} \epsilon_r \mathbf{p}) w_r(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Entretanto, definindo $\tilde{\mathbf{p}} = \epsilon_r \mathbf{p}$, temos que de acordo com a relação de ortonormalização

$$w_{r'}^\dagger(\epsilon_{r'} \epsilon_r \mathbf{p}') w_r(\mathbf{p}') = \omega_{\tilde{p}} \delta_{rr'} = \omega_p \delta_{rr'} \quad (\text{B.10})$$

Assim de Eq.(B.6) temos

$$\begin{aligned} \int d^3x \psi_{p'}^{\dagger(r')}(x) \psi_p^{(r)}(x) &= \sqrt{\frac{m^2}{\omega_p \omega_{p'}}} e^{-i(\epsilon_r \omega_p - \epsilon_{r'} \omega_{p'})t} \delta^3(\mathbf{p}' - \epsilon_{r'} \epsilon_r \mathbf{p}) \frac{\omega_p}{m} \delta_{rr'} \\ &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{rr'} \end{aligned}$$

B.1.2 Definição de $u(\mathbf{p}, s)$ e $v(\mathbf{p}, s)$

Vamos definir os spinores $u(\mathbf{p}, s)$ como

$$u(\mathbf{p}, s) = \frac{\not{p} + m\mathbb{1}}{\sqrt{2m(\omega_p + m)}} u(0, s) \quad (\text{B.11})$$

onde $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu = p_0 \gamma^0 + p_i \gamma^i = p^0 \gamma^0 - p^i \gamma^i = p^0 \hat{\beta} - p^i \hat{\beta} \hat{\alpha}^i = \omega_p \hat{\beta} - p^i \hat{\beta} \hat{\alpha}^i$. Assim, por exemplo para $s = 1/2$ teremos

$$\begin{aligned} u(\mathbf{p}, s) &= \frac{1}{\sqrt{2m(\omega_p + m)}} \begin{pmatrix} \omega_p + m & 0 & -p_z & -p_x + ip_y \\ 0 & \omega_p + m & -p_x - ip_y & p_z \\ p_z & p_x - ip_y & -\omega_p + m & 0 \\ px + ip_y & -p_z & 0 & -\omega_p + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m(\omega_p + m)}} \begin{pmatrix} \omega_p + m \\ 0 \\ p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\omega_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{m + \omega_p} \\ \frac{p_x + ip_y}{m + \omega_p} \end{pmatrix} \\ &= w_1(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Note que para $s = -1/2$ devemos considerar a segunda coluna da matriz $\not{p} + m\mathbb{1}$ e teremos $w_2(\mathbf{p})$. Assim definimos $v(\mathbf{p}, s)$ como

$$v(\mathbf{p}, s) = \frac{-\not{p} + m\mathbb{1}}{\sqrt{2m(\omega_p + m)}} v(0, s). \quad (\text{B.12})$$

Apêndice C

Neste apêndice apresentaremos alguns resultados matemáticos apresentados no capítulo 3.

C.1 Equações de Maxwell

Considerando a relação para o tensor de stress

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (\text{C.1})$$

onde $j^\nu = (\rho, \mathbf{J})$. Abrindo em componentes

$$\partial_0 F^{0\nu} + \partial_i F^{i\nu} = j^\nu.$$

Tomando $\nu = 0$ temos

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} &= j^0 \\ \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= j^0 \\ \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 &= \rho \end{aligned}$$

O que nos leva à equação de Gauss na forma diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho. \quad (\text{C.2})$$

Agora tomando $\nu = k$ temos

$$\partial_0 F^{0k} + \partial_i F^{ik} = j^k,$$

para $k = 1$

$$\begin{aligned}
\partial_0 F^{01} + \partial_i F^{i1} &= j^1 \\
\partial_0 F^1 + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= j^1 \\
-\partial_0 E^1 + \partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 &= j^1 \\
-\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= J_x \\
-\frac{\partial E_x}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_x &= J_x
\end{aligned} \tag{C.3}$$

similarmente, para $k = 2$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_y = J_y, \tag{C.4}$$

e para $k = 3$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_z = J_z. \tag{C.5}$$

Assim, somando Eq.(C.3-C.5) temos a lei de Ampere

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}. \tag{C.6}$$

Vamos então considerar a relação,

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0, \tag{C.7}$$

a qual devemos abrir em componentes. Entretanto, note que por $F^{\mu\nu}$ ser antissimétrico, qualquer combinação com índices iguais nos levam a uma relação trivial. Ainda, em função da relação ser cíclica em seus índices, qualquer permutação cíclica dos índices nos levam a uma redundância. Assim, considerando $\lambda = 0$, $\mu = 1$ e $\nu = 2$, temos

$$\begin{aligned}
\partial^0 F^{12} + \partial^2 F^{01} + \partial^1 F^{20} &= 0 \\
-\partial^0 B^3 - \partial^2 E^1 + \partial^1 E^2 &= 0 \\
\frac{\partial B_z}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{E})_z &= 0
\end{aligned} \tag{C.8}$$

tomando $\lambda = 0$, $\mu = 1$ e $\nu = 3$, temos

$$\begin{aligned}
\partial^0 F^{13} + \partial^3 F^{01} + \partial^1 F^{30} &= 0 \\
\partial^0 B^2 - \partial^3 E^1 + \partial^1 E^3 &= 0 \\
\frac{\partial B_y}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{E})_y &= 0
\end{aligned} \tag{C.9}$$

para $\lambda = 0$, $\mu = 2$ e $\nu = 3$, temos

$$\begin{aligned}\partial^0 F^{23} + \partial^3 F^{02} + \partial^2 F^{30} &= 0 \\ \partial^0 B^2 - \partial^3 E^2 + \partial^2 E^3 &= 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{E})_x &= 0\end{aligned}\tag{C.10}$$

Então, somando Eq.C.8-C.10 temos a equação de Faraday da indução

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0.\tag{C.11}$$

Finalmente tomando $\lambda = 1$, $\mu = 2$ e $\nu = 3$, temos

$$\begin{aligned}\partial^1 F^{23} + \partial^3 F^{12} + \partial^2 F^{31} &= 0 \\ -\partial^1 B^1 - \partial^3 B^3 - \partial^2 B^2 &= 0\end{aligned}$$

o que nos remete à última equação de Maxwell que estabelece a ausência de monopolo magnético.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.\tag{C.12}$$

Agora, da relação

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.\tag{C.13}$$

Novamente, ao abrirmos em componentes devemos desconsiderar os índices repetidos e as permutações de índices. Assim, para $\mu = 0$ e $\nu = 1$

$$\begin{aligned}F^{01} &= \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 \\ -E^1 &= \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 \\ E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}\end{aligned}$$

para $\mu = 0$ e $\nu = 2$

$$\begin{aligned}F^{02} &= \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0 \\ -E^2 &= \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0 \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}\end{aligned}$$

para $\mu = 0$ e $\nu = 3$

$$\begin{aligned}F^{03} &= \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 \\ -E^3 &= \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}\end{aligned}$$

Então, somando as três componentes temos

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{C.14})$$

Ainda se tomarmos, $\mu = 1$ e $\nu = 2$

$$\begin{aligned} F^{12} &= \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 \\ -B^3 &= \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ B_z &= (\nabla \times \mathbf{A})_z, \end{aligned}$$

se $\mu = 1$ e $\nu = 3$

$$\begin{aligned} F^{13} &= \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \\ B^2 &= \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \\ B_y &= \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ B_y &= (\nabla \times \mathbf{A})_y, \end{aligned}$$

e para $\mu = 2$ e $\nu = 3$

$$\begin{aligned} F^{23} &= \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \\ -B^1 &= \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \\ B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_x &= (\nabla \times \mathbf{A})_x \end{aligned}$$

Novamente somando as componentes temos

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{C.15})$$

C.2 Operador unitário

Um operador é dito operador unitário se sua inversa coincidir com seu adjunto, ou seja $U^{-1} = U^\dagger$. Podemos expressar um operador unitário como $U = e^{iH}$, onde H é dado por

$$H = c_0 \mathbb{1} + \mathbf{c} \cdot \vec{\sigma} = c_0 \mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade e $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli. Pretendemos encontrar os coeficientes c_0 e c_i 's que satisfaçam esta igualdade. Assim, vamos primeiramente, relembrar as propriedades das matrizes de Pauli:

1. $Tr(\sigma - i) = 0$
2. $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$
3. $Tr(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$

Vamos então tomar o traço de H , desta forma

$$\begin{aligned} Tr(H) &= c_0 Tr(\mathbb{1}) + \sum_{i=1}^3 c_i Tr(\sigma_i) \\ &= 2c_0 \end{aligned}$$

Ainda, tomando o traço de $\sigma_i H$, temos

$$\begin{aligned} Tr(\sigma_i H) &= c_0 Tr(\sigma_i \mathbb{1}) + \sum_{j=1}^3 c_j Tr(\sigma_i \sigma_j) \\ &= c_0 Tr(\sigma_i) + \sum_{j=1}^3 c_j 2\delta_{ij} \\ &= 2c_i \end{aligned}$$

Podemos então escrever o operador unitário de uma forma geral, dado que, sua formulação depende somente dos termos da matriz H , assim

$$H = \frac{1}{2} [(Tr(H)\mathbb{1}) + \sum_{i=1}^3 Tr(\sigma_i H)\sigma_i]$$

C.3 O potencial $A_\mu^{(a)}$

Para podermos realizar a promoção de invariância global à invariância local, necessária para a tratamento dos campos de Yang-Mills, devemos analisar a transformação $A_\mu^{(a)} \rightarrow A_\mu^{(a)}$, tal que ela contabilize os termos excendentes a esse procedimento. Devemos considerar que $\psi' = K\psi$, com $K = e^{-iq\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}(x)}$. Assim temos que

$$(\partial_\mu + iq\sigma^{(a)} A_\mu^{(a)})\psi' = K(\partial_\mu + iq\sigma^{(a)} A_\mu^{(a)})\psi$$

Tomando a derivada parcial de ψ' , teremos que $\partial_\mu \psi' = \partial_\mu(K\psi) = K(\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu K)\psi$, substituindo na equação acima temos,

$$\begin{aligned} K(\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu K)\psi + iq\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)}K\psi &= K(\partial_\mu \psi) + iqK\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)}\psi \\ (\partial_\mu K) + iq\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)}K &= Kiq\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)} \end{aligned}$$

Multiplicando por K^{-1} pela direita,

$$(\partial_\mu K)K^{-1} + iq\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)} = Kiq\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)}K^{-1}$$

Logo, podemos escrever

$$\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)} = K\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)}K^{-1} + \frac{i}{q}(\partial_\mu K)K^{-1} \quad (\text{C.16})$$

Agora, considerando uma expansão para pequenos valores de q , podemos escrever as relações:

$$K \simeq 1 - iq\sigma \cdot \varphi, \quad K^{-1} \simeq 1 + iq\sigma \cdot \varphi \quad \text{e} \quad \partial_\mu K \simeq -iq\sigma \cdot (\partial_\mu \varphi)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(a)}A_\mu^{(a)} &\approx (1 - iq\sigma \cdot \varphi)(\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)})(1 + iq\sigma \cdot \varphi) + \frac{i}{q}(-iq\sigma \cdot (\partial_\mu \varphi))(1 + iq\sigma \cdot \varphi) \\ &= \sigma^{(a)}A_\mu^{(a)} + iq[(\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)})(\sigma \cdot \varphi) - (\sigma \cdot \varphi)(\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)})] + q^2(\sigma \cdot \varphi)(\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)})(\sigma \cdot \varphi) \\ &\quad + \sigma \cdot (\partial_\mu \varphi) + iq^2\sigma(\partial_\mu \varphi)(\sigma \cdot \varphi) \end{aligned}$$

desconsiderando os termos de segunda ordem,

$$\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)} = \sigma^{(a)}A_\mu^{(a)} + iq[(\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)}), (\sigma \cdot \varphi)] + \sigma \cdot (\partial_\mu \varphi) \quad (\text{C.17})$$

Podemos escrever os produtos escalares presentes nos comutadores em componentes tais que

$$\begin{aligned} [(\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)}), (\sigma \cdot \varphi)] &= [\sigma^{(a)}A^{(a)}, \sigma^{(b)}\varphi^{(b)}] \\ &= \sigma^{(a)}A^{(a)}\sigma^{(b)}\varphi^{(b)} - \sigma^{(b)}\varphi^{(b)}\sigma^{(a)}A^{(a)} \\ &= A^{(a)}\varphi^{(b)}[\sigma^{(a)}, \sigma^{(b)}] \\ &= A^{(a)}\varphi^{(b)}(2i\epsilon^{abc}\sigma^{(c)}) \end{aligned}$$

Portanto substituindo em Eq.(C.17),

$$\sigma^{(a)}A_\mu^{(a)} = \sigma^{(a)}A_\mu^{(a)} + \sigma^{(a)}(\partial_\mu \varphi^{(a)}) + 2q\sigma^{(a)}\epsilon^{abc}\varphi^{(b)}A_\mu^{(c)}$$

ou ainda

$$A_\mu^{(a)} = A_\mu^{(a)} + (\partial_\mu \varphi^{(a)}) + 2q\epsilon^{abc}\varphi^{(b)}A_\mu^{(c)}$$

C.4 Tensor momento-energia

Podemos calcular o tensor momento-energia através da lagrangeana do campo sobre o qual desejamos estudar. Para isto devemos considerar a equação apresentada no capítulo 1, de acordo com a equação, Eq.(1.9), dada por

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \quad (\text{C.18})$$

Para o nosso caso, a lagrangeana utilizada será a de Euler-Heisenberg, Eq.(3.17)

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{F}{4} + \frac{2\alpha^2}{45} \left(\frac{F^2}{4} + \frac{7G^2}{16} \right) \quad (\text{C.19})$$

Vamos tomar esse fluido presente em um universo de Friedmann, podemos então escrever $F_{\mu\nu}$ em termos da métrica, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -a^2(t), -a^2(t), -a^2(t))$ tal que

$$\begin{aligned} F &= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} = 2(B^2 - E^2) \\ G &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Calculando a derivada da lagrangeana, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}_{EH}}{\partial g^{\mu\nu}} &= \frac{\partial\mathcal{L}_{EH}}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{\partial\mathcal{L}_{EH}}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial g^{\mu\nu}} \\ &= \mathcal{L}_F \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (g^{\alpha\chi}g^{\beta\sigma}F_{\alpha\sigma}F_{\beta\chi}) + \mathcal{L}_G \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} \left[-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{\alpha\beta\sigma\chi}F_{\alpha\beta}F_{\sigma\chi} \right] \\ &= \mathcal{L}_F (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\chi g^{\beta\sigma} + \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\sigma g^{\alpha\chi}) F_{\alpha\sigma} F_{\beta\chi} + \frac{\mathcal{L}_G}{4} \frac{9g_{\mu\nu}}{(-g)^{3/2}} \epsilon^{\alpha\beta\sigma\chi} F_{\alpha\beta} F_{\sigma\chi} \\ &= \mathcal{L}_F (F_\mu^\beta F_{\beta\nu} + F_{\mu\chi} F_\nu^\chi) + \frac{\mathcal{L}_G}{2} \frac{1}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{\alpha\beta\sigma\chi} F_{\alpha\beta} F_{\sigma\chi} g_{\mu\nu} \\ &= -2\mathcal{L}_F F_\mu^\sigma F_{\sigma\nu} + \frac{G\mathcal{L}_G g_{\mu\nu}}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

onde \mathcal{L}_F e \mathcal{L}_G são as derivadas da lagrangeana com relação à F e G respectivamente. Temos, então um tensor momento-energia dado por

$$\begin{aligned} (T_{\mu\nu})_{EH} &= 4\mathcal{L}_F F_\mu^\sigma F_{\sigma\nu} - (G\mathcal{L}_G + \mathcal{L})g_{\mu\nu} \\ &= \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) F_\mu^\gamma F_{\gamma\nu} - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{90} \left(\frac{7G^2}{2} - F^2 \right) \right] g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Assim, escrevendo os componentes não nulos,

$$(T_{00})_{EH} = \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) F_0^\gamma F_{\gamma 0} - \frac{F}{4} - \frac{\alpha^2}{90} \left(\frac{7G^2}{2} - F^2 \right) \quad (\text{C.21})$$

$$(T_{11})_{EH} = \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) F_1 \gamma F_{\gamma 1} - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{90} \left(\frac{7G^2}{2} - F^2 \right) \right] a^2(t) \quad (C.22)$$

$$(T_{22})_{EH} = \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) F_2 \gamma F_{\gamma 2} - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{90} \left(\frac{7G^2}{2} - F^2 \right) \right] a^2(t) \quad (C.23)$$

e

$$(T_{33})_{EH} = \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) F_3 \gamma F_{\gamma 3} - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{90} \left(\frac{7G^2}{2} - F^2 \right) \right] a^2(t) \quad (C.24)$$

Agora, considerando um observador do tipo tempo representado pelo tensor $v^\mu = \delta_0^\mu$, conforme discutido no capítulo (1), podemos escrever os campos E_μ e B_μ tais que,

$$E_\mu = F_{\mu\nu} v^\nu \quad (C.25)$$

$$B_\mu = F_{\mu\nu}^* v^\nu \quad (C.26)$$

o que nos leva à relação

$$F_{\mu\nu} = E_\mu v_\nu - E_\nu v_\mu + \eta_{\mu\nu} \alpha^\beta v_\alpha B_\beta. \quad (C.27)$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} F_\mu{}^\sigma F_{\sigma\nu} &= (E_\mu v^\sigma - E^\sigma v_\mu + \eta_\mu{}^{\alpha\beta} v_\alpha B_\beta)(E_\sigma v_\nu - E_\nu v_\sigma + \eta_{\sigma\nu}{}^{\alpha\beta} v_\alpha B_\beta) \\ &= -E_\mu E_\nu - E^2 v_\mu v_\nu - E_i B_j v_\mu v_0 \eta^{i\chi 0j} g_{\chi\nu} + E_i B_j v_\nu v_0 \eta^{\chi i 0j} g_{\chi\mu} + \\ &\quad + B_i B_j \eta^{\chi\sigma 0i} \eta^{\gamma\tau 0j} g_{\gamma\sigma} g_{\chi\mu} g_{\tau\nu} \end{aligned} \quad (C.28)$$

onde consideramos $E^\sigma E_\sigma = -E^2$. Temos que $\eta^{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$, de forma que reescrevendo em componentes, a fim de substituir nas componentes do tensor momento-energia, teremos

$$F_0{}^\sigma F_{\sigma 0} = -E^2 - E^2 v_0 v_0 \quad (C.29)$$

$$F_1{}^\sigma F_{\sigma 1} = -E_1 E_1 + B_i B_j \eta^{1\sigma 0i} \eta^{\gamma 1 0j} g_{\gamma\sigma} g_{11} g_{11} \quad (C.30)$$

$$F_2{}^\sigma F_{\sigma 2} = -E_2 E_2 + B_i B_j \eta^{2\sigma 0i} \eta^{\gamma 2 0j} g_{\gamma\sigma} g_{22} g_{22} \quad (C.31)$$

e

$$F_3{}^\sigma F_{\sigma 3} = -E_3 E_3 + B_i B_j \eta^{3\sigma 0i} \eta^{\gamma 3 0j} g_{\gamma\sigma} g_{33} g_{33} \quad (C.32)$$

Podemos assim, escrever o tensor momento-energia, em componentes, como

$$(T_{00})_{EH} = -E^2 \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) - \frac{F}{4} - \frac{\alpha^2}{90} \left(\frac{7G^2}{2} - F^2 \right) \quad (C.33)$$

$$(T_{11})_{EH} = \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) [-(E_1)^2 + (B_2)^2 + (B_3)^2] - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{90} \left(\frac{7G^2}{2} - F^2 \right) \right] a^2(t) \quad (C.34)$$

$$(T_{22})_{EH} = \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) [-(E_2)^2 + (B_1)^2 + (B_3)^2] - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{90} \left(\frac{7G^2}{2} - F^2 \right) \right] a^2(t) \quad (C.35)$$

e

$$(T_{33})_{EH} = \left(\frac{4\alpha^2 F}{45} - 1 \right) [-(E_3)^2 + (B_1)^2 + (B_2)^2] - \left[\frac{F}{4} + \frac{\alpha^2}{90} \left(\frac{7G^2}{2} - F^2 \right) \right] a^2(t) \quad (C.36)$$

Devemos agora calcular o tensor momento-energia para o campo de Yang Mills. O qual pode ser encontrado novamente utilizando a relação de Eq.(??), dada por

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Se agora, considerarmos a lagrangeana de Yang Mills, podemos calcular seu tensor momento-energia através do mesmo processo via Eq.(C.18). Assim considerando a lagrangeana

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^4}. \quad (C.37)$$

Onde, escrevendo F em termos da métrica de Friedmann teremos

$$F = F^{(a)\mu\nu} F_{\mu\nu}^{(a)} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta}^{(a)} F_{\mu\nu}^{(a)}, \quad (C.38)$$

o que nos permite calcular a derivada da lagrangeana de Yang-Mills em relação à métrica, num processo similar ao primeiro termo da derivada da lagrangeana de Euler-Heisenberg,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial g^{\mu\nu}} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial g^{\mu\nu}} = \mathcal{L}_F \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (g^{\alpha\sigma} g^{\beta\chi} F_{\alpha\sigma}^{(a)} F_{\beta\chi}^{(a)}) \\ &= -2 \mathcal{L}_F F_{\mu}^{\sigma(a)} F_{\sigma\nu}^{(a)} \end{aligned} \quad (C.39)$$

onde \mathcal{L}_F é a derivada da lagrangeana com respeito a F . Considerando, novamente o observador do tipo tempo, temos a relação

$$F_{\mu\nu}^{(a)} = E_{\mu}^{(a)} v_{\nu} - E_{\nu}^{(a)} v_{\mu} + \eta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} v_{\alpha} B_{\beta}^{(a)}. \quad (C.40)$$

Logo,

$$F_{\mu}{}^{\sigma(a)} F_{\sigma\nu}^{(a)} = -E_{\mu}^{(a)} E_{\nu}^{(a)} - E^2 v_{\mu} v_{\nu} - E_i^{(a)} B_j^{(a)} v_{\mu} v_0 \eta^{i\chi 0j} g_{\chi\nu} + E_i^{(a)} B_j^{(a)} v_{\nu} v_0 \eta^{\lambda i 0j} g_{\lambda\mu} + B_i^{(a)} B_j^{(a)} \eta^{\chi\sigma 0i} \eta^{\gamma\tau 0j} g_{\gamma\sigma} g_{\lambda\mu} g_{\tau\nu} \quad (\text{C.41})$$

Novamente considerando $\eta^{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$, podemos escrever Eq.(C.41) em componentes

$$F_0{}^{\sigma(a)} F_{\sigma 0}^{(a)} = -E^2, \quad (\text{C.42})$$

$$F_1{}^{\sigma(a)} F_{\sigma 1}^{(a)} = -E_1^{(a)} E_1^{(a)} + B_2^{(a)} B_2^{(a)} + B_3^{(a)} B_3^{(a)}, \quad (\text{C.43})$$

$$F_2{}^{\sigma(a)} F_{\sigma 2}^{(a)} = -E_2^{(a)} E_2^{(a)} + B_1^{(a)} B_1^{(a)} + B_3^{(a)} B_3^{(a)}, \quad (\text{C.44})$$

e

$$F_3{}^{\sigma(a)} F_{\sigma 3}^{(a)} = -E_3^{(a)} E_3^{(a)} + B_1^{(a)} B_1^{(a)} + B_2^{(a)} B_2^{(a)}. \quad (\text{C.45})$$

Portanto substituindo os componentes de $F_{\mu}{}^{\sigma(a)} F_{\sigma\nu}^{(a)}$ em $T_{\mu\nu}$, temos

$$(T_{00})_{YM} = b_0 E^2 \left(\ln \frac{F}{\mu^2} + 1 \right) + \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^2}, \quad (\text{C.46})$$

$$(T_{11})_{YM} = b_0 (E_1^{(a)} E_1^{(a)} - B_2^{(a)} B_2^{(a)} - B_3^{(a)} B_3^{(a)}) \left(\ln \frac{F}{\mu^2} + 1 \right) - a^2(t) \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^2}, \quad (\text{C.47})$$

$$(T_{22})_{YM} = b_0 (E_2^{(a)} E_2^{(a)} - B_1^{(a)} B_1^{(a)} - B_3^{(a)} B_3^{(a)}) \left(\ln \frac{F}{\mu^2} + 1 \right) - a^2(t) \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^2}, \quad (\text{C.48})$$

e

$$(T_{33})_{YM} = b_0 (E_3^{(a)} E_3^{(a)} - B_1^{(a)} B_1^{(a)} - B_2^{(a)} B_2^{(a)}) \left(\ln \frac{F}{\mu^2} + 1 \right) - a^2(t) \frac{b_0}{4} F \ln \frac{F}{\mu^2}, \quad (\text{C.49})$$

Apêndice D

Vierbeins

A formulação usual da teoria da relatividade consiste em uma generalização da teoria da relatividade especial. Para isto consideramos uma métrica com curvatura representada por $g_{\mu\nu}$ ao invés do espaço plano de Minkowski, dado por $\eta_{\mu\nu}$. Ainda trocamos as derivadas parciais por derivadas. Por fim substituímos todos os tensores de Lorentz $T_{\beta\dots}^{\alpha\dots}$ por $T_{\nu\dots}^{\mu\dots}$ que se comportam como tensor. Este é um método muito eficaz, entretanto não pode ser aplicado para objetos que não se transformam como tensores. Este é o caso de campos spinoriais, como por exemplo o campo de Dirac. Ao considerarmos campos spinoriais devemos introduzir uma outra abordagem [37]. Para isto, vamos nos valer do princípio da equivalência, que nos garante que todos os observadores são equivalentes, para introduzir em cada ponto x^μ , no espaço curvo, um conjunto de coordenadas $\chi_a(x)$ definindo um espaço plano, denominado espaço interno, tangente ao espaço curvo no ponto x^μ . Agora, uma vez que, a métrica pode ser escrita em qualquer referencial não-inercial como

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial\chi^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial\chi^b}{\partial x^\nu} \eta_{ab}$$

então, podemos escrever

$$g_{\mu\nu} = V^a{}_{\mu}(x) V^b{}_{\nu}(x) \eta_{ab} \tag{D.1}$$

onde definimos

$$V^a{}_{\mu}(x) \equiv \left(\frac{\partial\chi^a}{\partial x^\mu} \right)_{x=X}$$

a qual é chamada vierbein ou tetrada. Note que fixamos a coordenada localmente inercial χ^a em x para todo ponto X , então quando mudamos de coordenadas, de x^μ , para x'^μ , a derivada parcial

muda de acordo com a regra

$$V^a{}_{\mu} \rightarrow V'^a{}_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} V^a{}_{\nu}.$$

Assim, pensamos em $V^a{}_{\mu}$ formando quatro campos vetoriais covariantes, não como um único tensor. Constituindo um grupo de quatro vetores, justificando o nome tetradas.

Os objetos no espaço curvo em um dado ponto x^{μ} , estão relacionados com grandezas no correspondentes espaço interno, sendo que, quem estabelece a conexão entre os espaços são as vierbeins, tal que, podemos escrever um objeto $A^a(x)$, definido no espaço interno, associado à um objeto $A^{\mu}(x)$, definido no espaço curvo, tal que

$$A^a(x) = V^a{}_{\mu} A^{\mu}(x). \quad (\text{D.2})$$

De forma que os índices latinos $a, b = 0, 1, 2, 3$, são referentes ao espaço interno, e os índices gregos, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ referem ao espaço curvo.

Agora, podemos escrever uma relação inversa à Eq.(D.2), de forma a conectar um objeto no espaço curvo a um objeto no espaço plano, sendo

$$A^{\mu}(x) = V^{\mu}{}_{a} A^a(x)$$

onde $V^{\mu}{}_{a}$ é a vierbein inversa, a qual odecede a seguinte relação

$$V_a{}^{\mu} V_{b\mu} = \eta_{ab}. \quad (\text{D.3})$$

Ainda, da relação Eq.(D.1), podemos escrever

$$V^a{}_{\mu}(x) V_{a\nu}(x) = g_{\mu\nu}. \quad (\text{D.4})$$

Agora se realizarmos uma transformação de Lorentz no espaço interno teremos,

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= V'^a{}_{\mu} V'^b{}_{\nu} \eta_{ab} = \Lambda_c^a V^c{}_{\mu} \Lambda_d^b V^d{}_{\nu} \eta_{ab} \\ &= (\Lambda^t)_c^a \eta_{ab} \Lambda_d^b V^c{}_{\mu} V^d{}_{\nu} = \eta_{cd} V^c{}_{\mu} V^d{}_{\nu} \\ &= g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

ou seja, transformações de Lorentz mantém a métrica invariante. Finalmente, uma vez definido o comportamento das vierbeins, podemos analisar o campo spinorial em espaços curvos. Sabemos, do capítulo 2, que o campo spinorial é caracterizado pela lagrangeana de Dirac dada por

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(\gamma^a \partial_a - m)\psi$$

onde γ^μ são as matrizes gamma de Dirac as quais obedecem a relação de comutação $\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}$, as quais são válidas somente no espaço de Minkowski. Devemos então, reescrever γ^a , em termos das vierbeins para representá-las no espaço curvo, tal que

$$\gamma^\mu = V_a{}^\mu \gamma^a$$

Devemos ainda, modificar o termo da derivada que deve passar a ser um derivada covariante (não confunda com a derivada covariante da relatividade geral). De forma que, esta derivada parcial da lagrangeana deve ser acrescida de um termo tal que,

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu + i\Gamma_\mu$$

onde Γ_μ é a conexão de spin definida no capítulo 2

$$\Gamma_\nu = \frac{1}{4} V_{\mu a} V^\mu{}_{b;\nu} \sigma^{ab}$$

sendo σ^{ab} e $V^\mu{}_{b;\nu}$ definidos anteriormente como

$$\sigma^{ab} = \frac{i}{2} [\gamma^a, \gamma^b]$$

e

$$V^\mu{}_{b;\nu} = \partial_\nu V^\mu{}_{b;\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\sigma{}_{b;\nu}$$

Assim, a lagrangeana de Dirac em espaços curvos será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}(V_a^\mu \gamma^a \nabla_\mu - m)\psi \\ &= i\bar{\psi}(\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi. \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] Bamba K., Nojiri S. e Odintsov S. D., *Physical Review D* **77**, (2008)
- [2] Barreto A. B., *Modelo cosmológico de FLRW com constante cosmológica e dominado por um fluido de Yang-Mills*, dissertação de mestrado, Unifei, (2012).
- [3] Birrell N. D., Davies P. C. W., *Quantum Fields in Curved Space*, Ed. Cambridge University Press (1984)
- [4] Caswell W. E., *Phys. Rev. Lett.* **33**, 532 (1974).
- [5] Corless, R. M., Jeffrey. D. J., Knuth, D. E. *A sequence of series for the Lambert W function*, Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, Pages 197-204, (1997).
- [6] D’Inverno R., *Introducing Einstein’s Relativity*, Ed. Oxford University Press, New York, (1998)
- [7] De Lorenci V. A., Klippert R., Novello M. e Salim J. M., *Phys. Rev. D* **65**, 063501 (2002).
- [8] De Lorenci V. A., *Class. Quantum Grav.*, **27**, 065007 (2010).
- [9] Falciano F. T., Pinto-Neto N., and Santini E. S., *Phys. Rev. D* **76**, 083521 (2007).
- [10] Foster J., Nightingale J. D., *A short course in General Relativity*, 3ª Ed., Springer, (2006).
- [11] Friedmann A., *Zeitschrift fs Physik* **10**, 377 (1922); **21**, 326 (1924).
- [12] Griffiths D., *Introduction to Elementary Particles*, Wiley, (1987).
- [13] Greiner W., Reinhardt J., *Field Quantization*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1996).

- [14] Greiner W., Reinhardt J., *Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations*, 3^a Ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2000).
- [15] Gross D. J. and Wilczek F., *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973).
- [16] Hartle J. B., Hawking S. W., *Physical Review D*, **28**, (1983)
- [17] Hawking S. W. and Ellis G. F. R., *The Large Scale Structure of Spacetime* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973); R. M. Wald, *General Relativity* (Univ. Chicago Press, Chicago, 1984).
- [18] Gao X., Fu J., Shen J., *The European Physical Journal C* **13** 527-541, (2000).
- [19] Hinshaw G. et al., arXiv:0803.0732.
- [20] Itzykson C., Zuber J. B. *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, (1980).
- [21] Jones T., *Nucl. Phys.* **B75**, 531 (1974).
- [22] Landau L. D. e Lifshitz E. M., *The Classical Theory of Fields*, New York: Pergamon Press, (1971).
- [23] Lemaitre G., *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **A 47**, 49 (1927).
- [24] Lemoine D., *Physical Review D*, **52**, 4 (1995)
- [25] Mukhanov V., *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge: Cambridge University, (2005).
- [26] Narlikar J. V., *An Introduction to Cosmology* 3^a Ed. Cambridge University Press (2002).
- [27] Novello M., Perez Bergliaffa S.E., *Physics Reports* **463** 127-213, (2008).
- [28] Novello M., *Cosmologia* 1^a Ed., Livraria da Física, (2010).
- [29] Pagels H. e Tomboulis E., *Nuclear Physics* **B143** 485-502, (1978).
- [30] Politzer H. D., *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346 (1973).
- [31] Robertson H. P., *Kinematics and world structure*, *Ap. J.* **82**, 248 (1935).
- [32] Ryden, B., *Introduction to Cosmology* San Francisco, Ed. Addison Wesley (2003).

- [33] Schwinger J., *Physical Review* **82**, 5, 664-679 (1951).
- [34] Spergel D. N. et al, *Astrophys. J. Suppl.* **170**, 377 (2007).
- [35] Vilenkin A., *Physical Review D*, **33**, (1986)
- [36] Walker A. G., *On Milne's theory of world-structure*, *Proc. Lond. Math. Soc.* **42**, 90 (1936).
- [37] Weinberg S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Ed. John Wiley & Sons, (1972)
- [38] Yadav A. P. S. and Wandelt B.D., *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008).