

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

ESTUDO DO 16º PROBLEMA DE HILBERT
COM ÊNFASE NO CASO ALGÉBRICO

Fernando Félix Oliveira e Silva

Itajubá, setembro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Fernando Félix Oliveira e Silva

ESTUDO DO 16º PROBLEMA DE HILBERT
COM ÊNFASE NO CASO ALGÉBRICO

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Setembro de 2013

Itajubá

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Fernando Félix Oliveira e Silva

**ESTUDO DO 16º PROBLEMA DE HILBERT
COM ÊNFASE NO CASO ALGÉBRICO**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 10 de setembro de 2013, conferido ao autor o título de **Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.**

Banca examinadora:

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello (Orientador)

Prof. Dr. Jaume Llibre

Prof. Dr. Fábio Scalco Dias

Itajubá

2013

Dedico este trabalho aos meus pais Félix e Cida, a meus irmãos Daniel e Lívia, pois sem eles este sonho não se realizaria.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que, diretamente ou não, contribuíram para que eu chegasse até aqui e para que este trabalho fosse realizado. Em especial, agradeço:

A Deus pela vida, por ter me dado forças para superar as dificuldades e assim realizar este sonho, por tudo.

Aos meus pais: Félix Ferreira e Maria Aparecida, por serem meu maior exemplo de superação, orgulho e de pessoas batalhadoras. Agradeço pela educação, por todos os sacrifícios que fizeram para que nada faltasse nessa minha caminhada, pelo apoio e por todo o carinho em todas as vezes em que eu estive em Montes Claros. Agradeço também aos meus irmãos Daniel Oliveira e Livia Oliveira pelos vários momentos descontraídos. Não poderia esquecer da minha avó maria e meus outros avós, vô Mário, vó tutu em memória. Muito obrigado, vocês são o meu pilar central, sem o qual eu desabaria em um instante. Amo vocês! Obrigado por existirem.

Aos meus familiares de Monte Azul-MG que sempre me apoiaram e torceram pelo meu sucesso.

Ao meu orientador Prof. Dr. Luis Fernando Osório Mello, pelos ensinamentos que me proporcionou, pelo exemplo pessoal e profissional que é, pelas dicas valiosas que possibilitaram a realização deste trabalho.

À minha namorada Kelly Jaciara, pelo amor, carinho, incentivo, compreensão e paciência nos vários momentos em que o stress e o mau humor me dominaram, pelo ombro amigo nas horas difíceis e de alegria. Agradeço também a sua família, seu pai Nelson, sua mãe Luciene, seus irmãos Michael (Bura), Luisim, Albaninha e Pedro Anésio (Peu) pela amizade, e sua avó Albânia pelos momentos de descontração.

Aos amigos Rosivaldo Antônio Gonçalves, Daniel Oliveira, Livia Oliveira, Ps Souza,

Pedro Anésio e Hugo Costa pela confiança, amizade, ensinamentos, etc do primeiro e amizade dos demais.

Aos professores do departamento de matemática da UNIMONTES (em particular, Rosivaldo, Rosina, Grazi, Sebastião (Tiãozinho), Edson, Carine, Ezequiel Barbosa, Sérgio), pela amizade e pela participação na construção do meu conhecimento.

Aos professores do departamento de matemática da UNIFEI (em particular, Luis Fernando, Alexander, Antônio Fernandes, Jacson, Mariza, Márcio, Fábio), pela amizade, pelos conhecimentos e atenção.

Aos professores de toda minha vida, da pré-escola à pós-graduação, que me inspiraram e incentivaram.

Aos meus colegas de mestrado, Adriana, Adriano Braga, Alexandre (Limoeiro), Antônio Melo, Cleuber, Edson (Pelé), Fernando Guimarães, Filipe, Franco, Giancarlo, Hemily, Hugo Costa, Jarne, Luiz Fernando, Mariane, Marina, Marlon (Pinduca), Paulo Henrique (PH), Thais, Cléia Niz, Tatiane e Warley Cunha, Tiago Ribeiro cuja convivência me foi muito enriquecedora.

Aos amigos de Itajubá, Adriano Braga, Celso, Cleuber, Edson, Elaine, Fernando Guimarães, Franco, Giancarlo, Hugo, Jarne, José Lucas, Néia, Paulo Henrique e Tiago Ribeiro, pela amizade e convívio.

Agradeço à banca examinadora: Prof. Dr. Jaume Llibre e prof. Dr. Fábio Scalco Dias pela disponibilidade.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Obrigado a todos.

“Podemos facilmente perdoar uma criança que tem medo do escuro; a real tragédia da vida é quando os homens têm medo da luz.”

Platão.

Resumo

O objetivo desta dissertação é apresentar um estudo do 16º Problema de Hilbert enfatizando o caso algébrico. Iniciamos com a teoria geral. Estudaremos os ciclos limites algébricos e não algébricos, posteriormente estudaremos a realização de uma configuração de ciclos limites e finalizamos com o estudo de uma prova para o 16º Problema de Hilbert para ciclos limites algébricos que estão contidos em curvas algébricas invariantes genéricas.

Palavras-chave: 16º Problema de Hilbert, ciclo limite algébrico, curva algébrica invariante genérica.

Abstract

The objective of this dissertation is to present a study of the 16th Hilbert Problem emphasizing the algebraic case. We begin with the general theory. We will study the algebraic and not algebraic limit cycles, later we will focus on the study of a realization of a configuration of limit cycles. Finally, we give a proof of the 16th Hilbert Problem for algebraic limit cycles that are contained in generic invariant algebraic curves.

Keywords: 16th Hilbert Problem, algebraic limit cycle, generic invariant algebraic curve.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Índice	vii
Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Definições e resultados preliminares	3
3 Sistemas de equações diferenciais com ciclos limites não algébricos	15
3.1 O ciclo limite da equação de van der Pol é não algébrico	15
3.2 Aplicação de Poincaré	21
3.3 Compactificação de Poincaré	25
3.4 Exemplo de um sistema com ciclo limite não algébrico explícito	30
4 Realização de uma configuração de ciclos limites	37
4.1 Realização de uma configuração de ciclos limites, 1ª versão	38
4.2 Realização de uma configuração de ciclos limites, 2ª versão	44
4.3 Aplicações dos Teoremas 4.1.2 e 4.2.1	45
5 Sobre o 16º Problema de Hilbert para ciclos limites algébricos	51
Conclusões	63

Bibliografia

Lista de Figuras

2.1	Trajétórias do campo χ	4
2.2	Esboço do retrato de fase do sistema associado ao campo (2.2).	7
2.3	Configuração de ciclos $C = \{C_1, C_2, C_3\}$ do Exemplo 2.0.5.	13
3.1	Gráfico da transformação de Poincaré em ciclos limites estáveis e instáveis.	22
3.2	Gráfico da transformação de Poincaré em ciclos limites semi-estáveis.	23
3.3	Esboço da transformação de Poincaré do Exemplo 3.2.1.	24
3.4	Projeção central.	26
3.5	Retrato de fase no disco de Poincaré do sistema (3.18).	36
4.1	Esboço do retrato de fase do sistema do Exemplo 4.3.1.	47
4.2	Esboço do retrato de fase do sistema do Exemplo 4.3.2.	48
4.3	Esboço do retrato de fase do sistema do Exemplo 4.3.3.	50

Capítulo 1

Introdução

Considere a equação diferencial no plano

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1.1)$$

onde P e Q são polinômios nas variáveis x e y .

O grau do sistema (1.1) é o máximo entre os graus dos polinômios P e Q , ou seja, se $d_1 = \text{grau}(P)$ e $d_2 = \text{grau}(Q)$, então o grau do sistema (1.1) é igual ao máximo entre d_1 e d_2 .

Em Paris, no ano de 1900, Hilbert [10] no Segundo Congresso Internacional de matemáticos propôs uma lista de 23 problemas relevantes para serem resolvidos. Na segunda parte do 16º problema da lista proposta por Hilbert ele pergunta sobre o número máximo e a posição relativa dos ciclos limites do sistema (1.1). Se o grau do sistema (1.1) é 1, ou seja, (1.1) é um sistema linear, então ele não tem ciclo limite. Este tem sido um dos principais problemas na teoria qualitativa das equações diferenciais planares no século XX. Neste trabalho enfatizaremos a versão algébrica deste problema.

Em [14], J. Llibre, R. Ramirez e N. Sadovskaia perguntam: É $1 + (n - 1)(n - 2)/2$ o número máximo de ciclos limites algébricos que um campo vetorial polinomial de grau n pode ter?

A noção de ciclo limite apareceu nos anos 1891 e 1897 nos trabalhos do Poincaré [18].

Em 1986, Bamon [1] demonstrou para o caso de campos de vetores quadráticos, que o sistema (1.1) tem finitos ciclos limites. Em 1991, (e 1992), Ilyashenko [11], (e Écalle [8]) mostraram em trabalhos independentes que qualquer campo vetorial polinomial tem uma

quantidade finita de ciclos limites, mas não provam a existência de um limitante superior uniforme. Esse problema permanece aberto até para o campo de vetores polinomial quadrático. Esses resultados (Bamon, e principalmente Ilyashenko e Écalle) tem sido os principais resultados nessa área.

A dissertação está disposta da seguinte forma:

No Capítulo 2 será feita uma abordagem geral da teoria fundamental utilizada na dissertação e será baseada em [7] e [15].

Neste trabalho enfatizaremos o caso algébrico, porém no Capítulo 3 trataremos os ciclos limites não algébricos. K. Odani em [16] foi o primeiro a mostrar que o ciclo limite da equação de van der Pol é não algébrico, no entanto a expressão do ciclo limite não é dada explicitamente. Este assunto será tratado na Seção 3.1. J. Llibre e R. Benterki em [2] exibem um sistema diferencial polinomial de grau três com um ciclo limite não algébrico explícito. Este assunto será tratado na Seção 3.4.

Será estudado no Capítulo 4 uma espécie de recíproca do 16º Problema de Hilbert, isto é, dado um conjunto finito de curvas de Jordan disjuntas no plano é possível exibir um sistema diferencial polinomial tendo essas curvas como ciclos limites. Dois teoremas (Teorema 4.1.2 e Teorema 4.2.1) exibem campos vetoriais polinomiais realizando a configuração de ciclos limites dada a menos de um homeomorfismo. Esses resultados estão em [13] e [17], respectivamente.

Em [14], J. Llibre, R. Ramirez e N. Sadovskaia provam que para um campo vetorial polinomial planar de grau $n \geq 2$ com curvas algébricas invariantes genéricas o número máximo de ciclos limites algébricos é $1 + (n - 1)(n - 2)/2$, quando n é par, e $(n - 1)(n - 2)/2$, quando n é ímpar e que, além disso, esses limitantes superiores são alcançados, ou seja, resolvem o 16º Problema de Hilbert para a classe das curvas algébricas invariantes genéricas. Este assunto será tratado no Capítulo 5.

Por fim, teremos uma conclusão, onde iremos sugerir alguns trabalhos a serem feitos nessa área que estudamos.

Capítulo 2

Definições e resultados preliminares

Neste capítulo enunciaremos as definições mais utilizadas em nosso texto, tais como ciclos limites algébricos, configurações de ciclos limites, etc. Apresentaremos alguns resultados relevantes para nosso trabalho. Convencionaremos que funções aplicadas em letras maiúsculas denotará funções aplicadas em vetores e funções aplicadas em letras minúsculas denotará funções aplicadas em números reais. Este capítulo será baseado em [7] e [15].

Considere o sistema diferencial

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (2.1)$$

onde P e Q são polinômios reais de graus m e n , respectivamente nas variáveis x e y , \dot{x} e \dot{y} denotam derivadas com respeito a variável independente t ; x' e y' também denotarão derivadas com respeito a variável independente t .

Definição 2.0.1. *O grau do sistema (2.1) é o máximo entre os graus dos polinômios P e Q , ou seja, é o máximo entre os valores m e n .*

Exemplo 2.0.1. *Considere o sistema*

$$\dot{x} = P(x, y) = x^2 + y^3, \quad \dot{y} = Q(x, y) = y^5.$$

O grau deste sistema é o máximo entre o graus dos polinômios P e Q , logo é 5.

Definição 2.0.2. *Um campo de vetores de classe C^r , $r \geq 1$ em \mathbb{R}^n é uma aplicação $\chi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde U é aberto em \mathbb{R}^n .*

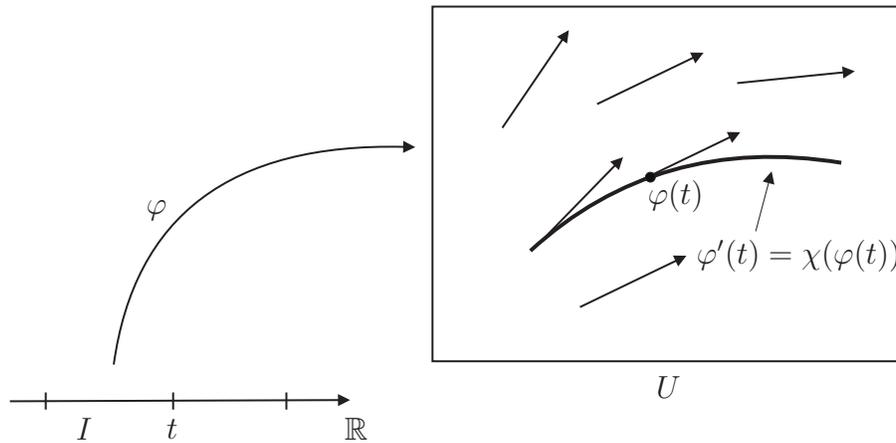


Figura 2.1: Trajetórias do campo χ .

Ao campo vetorial χ está associado a equação diferencial autônoma $X' = \chi(X)$, onde

$$X' = \frac{dX}{dt}$$

e reciprocamente, à equação diferencial autônoma está associado o campo de vetores χ , onde $X \in U$ e U é aberto em \mathbb{R}^n . As soluções desta equação, isto é, as aplicações diferenciáveis $\varphi : I \rightarrow U$ (I intervalo da reta) tais que

$$\varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t) = \chi(\varphi(t))$$

para todo $t \in I$, são chamadas trajetórias ou curvas integrais de χ . Veja Figura 2.1.

Definição 2.0.3. *Seja $\chi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores em \mathbb{R}^n , onde U é um aberto em \mathbb{R}^n e $X_0 \in U$, X_0 é dito ponto singular ou ponto de equilíbrio do campo χ se $\chi(X_0) = 0$ e X_0 é dito ponto regular de χ se $\chi(X_0) \neq 0$.*

Definição 2.0.4. *Um ponto singular X_0 de um campo vetorial $\chi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^r , $r \geq 1$, chama-se hiperbólico se todos os autovalores da matriz jacobiana de χ em X_0 , $D\chi(X_0)$, tem partes reais diferente de zero.*

O próximo teorema garantirá que o comportamento numa vizinhança de um ponto singular hiperbólico é sempre modelado pelo comportamento da parte linear.

Teorema 2.0.1 (Hartman-Grobman). *Sejam $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e X_0 um ponto singular hiperbólico. Então existem vizinhanças V de X_0 em U e W de 0 em \mathbb{R}^n tais que $\chi|_V$ é topologicamente conjugado a $D\chi(X_0)|_W$.*

A demonstração deste teorema, assim como a teoria para entendê-lo, podem ser encontrados em [20], página 294.

Definição 2.0.5. *Se a solução $X(t) = (u(t), v(t))$ do sistema (2.1) é uma função periódica não constante de t , ela é dita periódica. O lugar geométrico desta solução em U é uma trajetória fechada do sistema.*

Definição 2.0.6. *Seja U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e $\chi \in C^1(U)$ um campo de vetores. Para $X_0 \in U$, considere a solução $\phi(t, X_0)$ de um problema de valor inicial (PVI) definido sobre seu intervalo maximal de existência I . Então a aplicação $\phi : \Delta \subset \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ é chamada de fluxo da equação diferencial ou fluxo gerado pelo campo de vetores χ .*

Exemplo 2.0.2. *O sistema linear*

$$\dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = -y$$

tem fluxo dado por

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \phi(t, (x, y)) &= (xe^{2t}, ye^{-t}). \end{aligned}$$

Definição 2.0.7. *Um ciclo limite do sistema (2.1) é uma solução periódica isolada do conjunto de todas as órbitas periódicas do sistema (2.1), mais precisamente, γ é um ciclo limite quando existe uma vizinhança V de γ tal que, em V , γ é a única órbita periódica do sistema (2.1). Se um ciclo limite está contida em uma curva algébrica do plano, então ele é algébrico, caso contrário é chamado não algébrico.*

Exemplo 2.0.3. *Considere o campo*

$$\chi(x, y) = (-y - x(-1 + x^2 + y^2), x - y(-1 + x^2 + y^2)). \quad (2.2)$$

Fazendo a mudança de coordenadas polares $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, obtemos que

$$x = r \cos \theta \Rightarrow x' = r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta,$$

$$y = r \sin \theta \Rightarrow y' = r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta.$$

Mas,

$$x' = -y - x(-1 + x^2 + y^2) = -r \sin \theta - r \cos \theta(-1 + r^2),$$

$$y' = x - y(-1 + x^2 + y^2) = r \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta(-1 + r^2),$$

e assim, temos

$$-r \operatorname{sen} \theta - r \cos \theta(-1 + r^2) = r' \cos \theta - r \theta' \operatorname{sen} \theta,$$

$$r \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta(-1 + r^2) = r' \operatorname{sen} \theta + r \theta' \cos \theta.$$

Multiplicando

$$(-r \operatorname{sen} \theta - r \cos \theta(-1 + r^2) = r' \cos \theta - r \theta' \operatorname{sen} \theta) \quad \text{por} \quad \cos \theta \quad e$$

$$(r \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta(-1 + r^2) = r' \operatorname{sen} \theta + r \theta' \cos \theta) \quad \text{por} \quad \operatorname{sen} \theta$$

e em seguida somando as duas equações obtidas, temos

$$r' = -r(-1 + r^2).$$

Agora multiplicando a equação

$$(-r \operatorname{sen} \theta - r \cos \theta(-1 + r^2) = r' \cos \theta - r \theta' \operatorname{sen} \theta) \quad \text{por} \quad -\operatorname{sen} \theta \quad e$$

$$(r \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta(-1 + r^2) = r' \operatorname{sen} \theta + r \theta' \cos \theta) \quad \text{por} \quad \cos \theta$$

e em seguida somando as duas equações obtidas, temos

$$\theta' = 1.$$

- $\theta' = 1 > 0$, portanto, a componente angular é crescente.
- $r' = -r(-1 + r^2)$, portanto, a componente radial é crescente para $0 < r < 1$ e decrescente para $r > 1$. Se $r = 1$, temos $r' = 0$, e portanto, descrevemos um círculo C de raio 1, já que a componente radial é constante.

O retrato de fase é descrito na Figura 2.2.

Definição 2.0.8. *Considere o caso planar. Dizemos que um ciclo limite γ é um ciclo limite estável se existir um aberto $U_0 \subset U$ tal que $\gamma \subset U_0$ e $\omega(X) = \gamma$ para cada $X \in U_0$. γ é um ciclo limite instável se existir um aberto $U_0 \subset U$ tal que $\gamma \subset U_0$ e $\alpha(X) = \gamma$ para cada $X \in U_0$. γ é um ciclo limite semi-estável se existir um aberto $U_0 \subset U$ tal que $\gamma \subset U_0$ e $\omega(X) = \gamma$ para cada $X \in U_0 \cap \operatorname{ext}\gamma$ e $\alpha(X) = \gamma$, para cada $X \in U_0 \cap \operatorname{int}\gamma$ ou então $\omega(X) = \gamma$, para cada $X \in U_0 \cap \operatorname{int}\gamma$ e $\alpha(X) = \gamma$, para cada $X \in U_0 \cap \operatorname{ext}\gamma$, onde α e ω são conjuntos limites.*

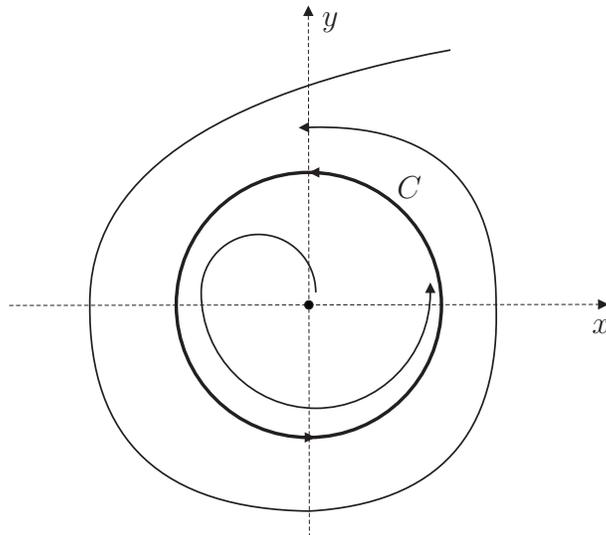


Figura 2.2: Esboço do retrato de fase do sistema associado ao campo (2.2).

Observação 2.0.1. *O ciclo limite γ é dito estável quando para todo $X_0 \in U_0$ tivermos*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi(t, X_0), \gamma) = 0.$$

γ será instável quando para todo $X_0 \in U_0$ tivermos

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi(t, X_0), \gamma) = 0.$$

Finalmente γ será semi-estável quando para todo $X_0 \in U_0 \cap \text{ext}\gamma$ tivermos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi(t, X_0), \gamma) = 0$$

e para todo $X_0 \in U_0 \cap \text{int}\gamma$ tivermos

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi(t, X_0), \gamma) = 0,$$

ou para todo $X_0 \in U_0 \cap \text{int}\gamma$ tivermos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi(t, X_0), \gamma) = 0$$

e para todo $X_0 \in U_0 \cap \text{ext}\gamma$ tivermos

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi(t, X_0), \gamma) = 0.$$

Note que no Exemplo 2.0.3 o ciclo limite é estável.

Definição 2.0.9. *Sejam χ um campo de vetores C^1 definido em um aberto U de \mathbb{R}^2 e $H : U \rightarrow \mathbb{R}$, $C^1(U)$ não constante. Dizemos que H é uma **integral primeira** de χ em U se H permanece constante ao longo das trajetórias de χ contidas em U .*

Definição 2.0.10. *Sejam U um subconjunto aberto do \mathbb{R}^2 e $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^2 . Um sistema da forma*

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (x, y) \in U$$

*é chamado um sistema **Hamiltoniano**.*

Exemplo 2.0.4. *Considere o sistema*

$$x' = y, \quad y' = -kx.$$

Tomemos

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 + kx^2).$$

Segue que

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = kx \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = y.$$

Logo, o sistema acima pode ser reescrito da seguinte forma

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

ou seja, é Hamiltoniano.

Definição 2.0.11. *Um difeomorfismo $h : E \rightarrow E$, onde E é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n , preserva volume quando, para qualquer aberto limitado $E_1 \subset E$, os conjuntos $h(E_1)$ e E_1 tem o mesmo volume.*

O próximo resultado pode ser encontrado em [6], p. 266.

Teorema 2.0.2. *Um difeomorfismo $h : E \rightarrow E$ de classe C^1 de um aberto $E \subset \mathbb{R}^n$ preserva volume se, e somente se, o determinante jacobiano de h tem valor absoluto constante e igual a 1, ou seja se, e somente se,*

$$|\det(Dh(X_0))| = 1.$$

para qualquer $X_0 \in E$.

Demonstração: Usaremos vol para indicar volume, por exemplo: $\text{vol } U = \text{volume de } U$.

A demonstração segue da definição de volume em \mathbb{R}^n e do teorema de mudança de variáveis em integrais múltiplas para abertos limitados $U \subset E$ e difeomorfismos $h : E \rightarrow E$ de classe C^1 . Vale

$$\text{vol } U = \int_U dX = \int_{h^{-1}(U)} |\det(Dh(X))| dX$$

e, portanto, em particular,

$$\text{vol } h(U) = \int_{h(U)} dX = \int_U |\det(Dh(X))| dX$$

(note que escrevemos as integrais múltiplas em conjuntos do \mathbb{R}^n com um sinal de integração só e com dX em vez do costumeiro $dx_1 \dots dx_n$ do cálculo, mas isso não deve causar confusão com as integrais em uma variável).

Se $|\det(Dh(X_0))| = 1$ para qualquer $X_0 \in E$, então temos

$$\text{vol } h(U) = \int_U |\det(Dh(X))| dX = \int_U dX = \text{vol } U,$$

ou seja, h preserva volume. Reciprocamente, supondo que $|\det(Dh(X))|$ não é constante igual a 1 em E , por exemplo $|\det(Dh(Y_0))| > 1$ para algum ponto $Y_0 \in E$, pela continuidade de $\det(Dh(X))$, obtemos $a > 1$ e um aberto limitado $U \subset E$ tal que $|\det(Dh(Y))| \geq a > 1$ para cada $Y \in U$ e, portanto,

$$\text{vol } h(U) \geq \int_U a \cdot dX = a \cdot \text{vol } U > \text{vol } U,$$

ou seja, h não preserva volume. ■

Agora, considere $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores polinomial cujo fluxo $\phi_t : E \rightarrow E$ está definido para todo t real.

Definição 2.0.12. Dizemos que o fluxo do campo χ preserva volume A se

$$A(\phi_t(E_1)) = A(E_1),$$

para cada $E_1 \subset E$ de volume finito e para cada $t \in \mathbb{R}$.

Seja $\chi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, U aberto em \mathbb{R}^n ,

$$\chi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

um campo vetorial $C^1(U)$. Recorde que a divergência (denotado por div) do campo χ no ponto $X \in U$ é o traço (tr) da matriz jacobiana de χ aplicado em X , ou seja,

$$\text{div}\chi(X) = \text{tr}D\chi(X) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X).$$

O teorema a seguir (Teorema de Liouville) garante que a divergência de um campo determina a taxa de variação do volume pela ação do fluxo do campo. Para mais detalhes veja [6], p. 267.

Teorema 2.0.3 (Teorema de Liouville). *Se um campo de classe C^1 tem divergência nula, então seu fluxo preserva volume.*

Demonstração: Pela fórmula de Liouville,

$$\det(D\phi_t(X)) = \exp\left(\int_0^t \text{tr}D\chi(\phi_s(X))(X)ds\right).$$

Como $\text{div}\chi = 0$, temos

$$A(\phi_t(E_1)) = \int_{E_1} \det(D\phi_t(X))dX = \int_{E_1} \exp\left(\int_0^t \text{tr}D\chi(\phi_s(X))(X)ds\right) dX = \int_{E_1} dX = A(E_1).$$

Portanto, o fluxo preserva volume. ■

O Teorema de Liouville assegura que o volume de $\phi_t(E_1)$ é constante em t , de modo que não é possível que todas estas trajetórias se afastem umas das outras, pois, isto causaria uma expansão do volume de E_1 : se existir uma direção em que as trajetórias se afastem umas das outras, deveria também existir uma outra direção em que as trajetórias se aproximam umas das outras.

O próximo resultado garante que o fluxo de campos Hamiltonianos preserva volume.

Proposição 2.0.1. *O fluxo de um campo Hamiltoniano preserva volume.*

Demonstração: Consideremos um sistema Hamiltoniano χ , ou seja,

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (x, y) \in U.$$

Pelo Teorema de Liouville, basta mostrarmos que $\operatorname{div} \chi = 0$. Note que, de H ser de classe C^2 , segue

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right),$$

portanto,

$$\operatorname{div} \chi = \operatorname{tr} D\chi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0.$$

Logo, todo campo Hamiltoniano tem divergência nula, o que implica que o fluxo do campo χ preserva volume. ■

Definição 2.0.13. *Seja χ um campo de vetores como no sistema (2.1), C^1 definido em um aberto U de \mathbb{R}^2 . Então, χ é exato em U se*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$$

para todo $(x, y) \in U$. Além disso, se U é simplesmente conexo, então existe uma função $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$P = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad Q = \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Portanto, a função H é a Hamiltoniana do campo de vetores Hamiltoniano χ .

Definição 2.0.14. *Sejam χ um campo vetorial definido em um aberto U e $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Definimos a derivada de V na direção do campo χ no ponto $X \in U$, denotado por χV , por*

$$\chi V = \nabla V(X) \cdot \chi(X).$$

Proposição 2.0.2. *Se um sistema é Hamiltoniano, então a aplicação H é uma integral primeira do sistema Hamiltoniano, ou seja, $H(x, y)$ permanece constante ao longo das trajetórias do sistema.*

Demonstração: Observe que

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} \left(\frac{-\partial H}{\partial x} \right) = 0.$$

Portanto, H é constante ao longo das soluções. ■

Definição 2.0.15. Uma função $R : U \rightarrow \mathbb{R}$, $C^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$ é um fator integrante do campo de vetores $\chi = (P, Q)$, quando

$$\frac{\partial(RP)}{\partial x} = -\frac{\partial(RQ)}{\partial y}.$$

Uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, $C^1(U)$ é um fator integrante inverso do campo de vetores χ quando satisfaz a equação

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V$$

em U .

Proposição 2.0.3. Se V é um fator integrante inverso do sistema (2.1), então o sistema associado ao campo

$$\frac{1}{V}(P, Q)$$

é Hamiltoniano.

Demonstração: Como V é um fator integrante inverso do sistema (2.1), V é solução da equação diferencial parcial linear

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V, \quad (x, y) \in U.$$

Tomemos

$$H(x, y) = \int \frac{1}{V} P dy + c,$$

onde c é uma constante. Daí,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{V} P \right) dy = \int \left(-\frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial x} P + \frac{1}{V} \frac{\partial P}{\partial x} \right) dy = \int -\frac{1}{V^2} \left(P \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} V \right) dy.$$

De V ser um fator integrante inverso

$$P \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} V = \frac{\partial Q}{\partial y} V - Q \frac{\partial V}{\partial y},$$

assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \int -\frac{1}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} P - V \frac{\partial P}{\partial x} \right) dy = \int -\frac{1}{V^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial y} V - Q \frac{\partial V}{\partial y} \right) dy = \\ &= \int \left(\frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial y} Q - \frac{1}{V} \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dy = \int \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{V} Q \right) dy = -\frac{1}{V} Q. \end{aligned}$$

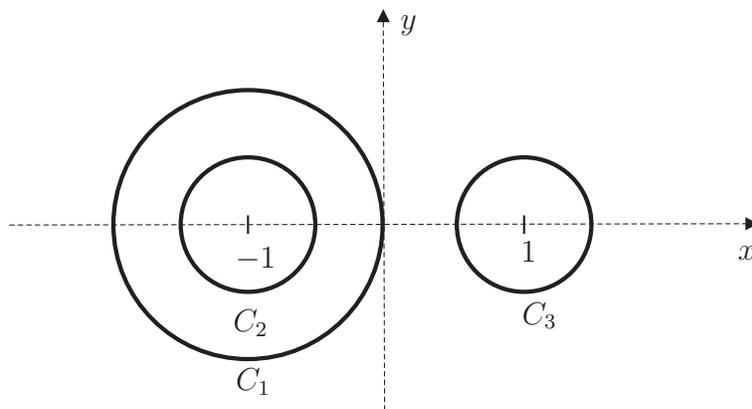


Figura 2.3: Configuração de ciclos $C = \{C_1, C_2, C_3\}$ do Exemplo 2.0.5.

Por outro lado, temos

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{V} P \right) dy = \frac{1}{V} P.$$

Por fim, como H é de classe C^2 , o sistema associado ao campo

$$\frac{1}{V}(P, Q)$$

é Hamiltoniano. ■

Definição 2.0.16. *Uma configuração de ciclos é um conjunto finito $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ de curvas simples, fechadas e disjuntas do plano.*

Definição 2.0.17. *Dada uma configuração de ciclos $C = \{C_1, \dots, C_n\}$, a curva C_j é dita primária se não existe uma curva $C_i \in C$ no interior da região limitada por C_j .*

Exemplo 2.0.5. *Considere $C = \{C_1, C_2, C_3\}$, onde*

$$C_1 = (x + 1)^2 + y^2 - 1, \quad C_2 = (x + 1)^2 + y^2 - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad C_3 = (x - 1)^2 + y^2 - \frac{1}{2}.$$

As curvas C_2 e C_3 são primárias, visto que não existe uma curva $C_i \in C$, no interior da região limitada por C_2 e C_3 . Veja Figura 2.3.

Definição 2.0.18. *Duas configurações de ciclos $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ e $C' = \{C'_1, \dots, C'_m\}$ são (topologicamente) equivalentes se existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que*

$$h \left(\bigcup_{i=1}^n C_i \right) = \left(\bigcup_{i=1}^m C'_i \right).$$

Proposição 2.0.4. *Sejam $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ e $C' = \{C'_1, \dots, C'_m\}$ duas configurações equivalentes de ciclos, então $n = m$.*

Demonstração: Sejam $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ e $C' = \{C'_1, \dots, C'_m\}$ duas configurações equivalentes de ciclos e suponha que $m \neq n$, ou seja, $m < n$ ou $m > n$. Faremos o caso $m > n$, o outro caso é análogo. Como cada C_i , $1 \leq i \leq n$, é compacto e conexo e h é um homeomorfismo, temos que $h(C_1), \dots, h(C_n)$ é compacto e conexo e como

$$h\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) = \left(\bigcup_{i=1}^m C'_i\right)$$

segue que o número de curvas no domínio deve ser igual ao número de curvas no contradomínio, o que é uma contradição com nossa hipótese. ■

Definição 2.0.19. *Dizemos que uma equação diferencial polinomial realiza a configuração de ciclos C se o conjunto de todos ciclos de χ é equivalente a C .*

Capítulo 3

Sistemas de equações diferenciais com ciclos limites não algébricos

Neste capítulo trataremos os ciclos limites não algébricos. Na primeira seção mostraremos que o ciclo limite da equação de van der Pol é não algébrico e não explícito. Na verdade o resultado que será mostrado na primeira seção é mais amplo. Na Seção 3.4 exibiremos um sistema diferencial polinomial de grau três com ciclo limite não algébrico explícito. Tal ciclo limite será também estável e hiperbólico e ilustraremos seu retrato de fase no disco de Poincaré. As seções 3.2 e 3.3 (Aplicação de Poincaré e Compactificação de Poincaré) serão úteis para entendermos melhor ciclo limite hiperbólico, estabilidade de ciclos limites e compactificação de Poincaré. Com a compactificação de Poincaré é possível fazer um estudo das órbitas de um campo polinomial no infinito e com a aplicação de Poincaré podemos estudar a estabilidade de ciclos limites. A Seção 3.1 é baseada em [16] e a Seção 3.4 é baseada em [2].

3.1 O ciclo limite da equação de van der Pol é não algébrico

Nesta seção mostraremos que as curvas soluções de sistemas de Liénard satisfazendo algumas exigências, que serão especificadas, são não algébricas. Como corolário desse teorema seguirá que o sistema de van der Pol não tem soluções algébricas, em particular, o ciclo

limite da equação de van der Pol é não algébrico. f_x e f_y denotará derivada com respeito a variável subscrita. Nesta seção apenas teremos como variáveis x e y .

Teorema 3.1.1. *Se um sistema polinomial de Liénard*

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x)y - g(x), \quad (3.1)$$

satisfaz:

$$(i) \ f, g \neq 0,$$

$$(ii) \ \text{grau}(f) \geq \text{grau}(g),$$

$$(iii) \ g/f \neq \text{constante},$$

então, o sistema 3.1 não tem curvas soluções algébricas.

O lema a seguir será essencial para a prova do Teorema 3.1.1.

Lema 3.1.1. *Se a curva solução do sistema polinomial*

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (3.2)$$

está contida em uma curva algébrica irredutível $\Phi = 0$, então existe um polinômio $h(x, y)$ satisfazendo

$$P(x, y)\Phi_x(x, y) + Q(x, y)\Phi_y(x, y) = h(x, y)\Phi(x, y). \quad (3.3)$$

Reciprocamente, se a equação (3.3) é satisfeita, então a curva algébrica $\Phi = 0$ é uma curva invariante do sistema (3.2).

Demonstração: Diferenciando a equação $\Phi = 0$, temos $\Phi_x \dot{x} + \Phi_y \dot{y} = 0$, ou seja, o lado esquerdo da equação (3.3) é identicamente nulo. Isto implica que o produto interno $(\Phi_x, \Phi_y) \cdot (\dot{x}, \dot{y})$ é identicamente nulo, e portanto, (Φ_x, Φ_y) é ortogonal a (\dot{x}, \dot{y}) em todo ponto. Logo o lado esquerdo tem Φ como fator comum pelo Teorema III.3.1 de [23], isso prova a primeira parte do lema.

A recíproca pode ser feita de maneira análoga. ■

A seguir faremos a prova do Teorema 3.1.1.

Demonstração: Assumamos que uma curva solução do sistema (3.1) está contida em uma curva algébrica irreduzível $\Phi = 0$, então usando o Lema 3.1.1 obtemos

$$h(x, y)\Phi(x, y) - y\Phi_x(x, y) + yf(x)\Phi_y(x, y) + g(x)\Phi_y(x, y) = 0. \quad (3.4)$$

Reescreveremos $\Phi(x, y)$ e $h(x, y)$ da seguinte forma:

$$\Phi(x, y) = \sum_{j=0}^k \Phi_j(x)y^j, \text{ onde } \Phi_k(x) \neq 0,$$

$$h(x, y) = \sum_{j=0}^l h_j(x)y^j,$$

$$M = \text{grau}(f) \text{ e } N = \text{grau}(g).$$

Reescrevendo agora a equação (3.4) e colocando o termo y^i , $0 \leq i \leq k + l$, em evidência conseguimos

$$0 = y^0[\Phi_0(x)h_0(x) + g(x)\Phi_1(x)] + y[h_0(x)\Phi_1(x) + h_1(x)\Phi_0(x) - \Phi'_0(x) + 2g(x)\Phi_2(x)] \\ + \dots + y^{k+l-1}[\Phi_k(x)h_{l-1}(x) + \Phi_{k-1}(x)h_l(x)] + y^{k+l}[\Phi_k(x)h_l(x)].$$

Como $\Phi_k(x) \neq 0$, temos que $h_l(x) = 0$. Continuando analisando os termos de y^{k+j} , $2 \leq j \leq l$, vemos que

$$h_j(x) = 0, \quad j = 2, \dots, l.$$

Analisando agora o termo de y^{k+1} , temos

$$-\Phi'_k(x) + h_1(x)\Phi_k(x) = 0.$$

Como $h_1(x)$ é um polinômio conseguimos que $h_1(x) = 0$ e $\Phi'_k(x) = 0$, o que implica $\Phi_k(x) = \text{constante}$. Assim, obtemos que $h(x, y) = h_0(x)$.

A partir de agora omitiremos a variável x nas funções. Comparando os termos de y^j , temos

$$-\Phi'_{j-1} + h_0\Phi_j + jf\Phi_j + (j+1)g\Phi_{j+1} = 0. \quad (3.5)$$

Sejam m o grau máximo dos polinômios Φ_j e n o sufixo tal que $\text{grau}(\Phi_n) = m$. Colocando $j = n$ na equação (3.5), temos

$$[h_0 + nf]\Phi_n = \Phi'_{n-1} - (n+1)g\Phi_{n+1}. \quad (3.6)$$

Note que o lado direito da equação (3.6) tem grau menor do que $m + N$. Como $M \geq N$, o lado direito da equação (3.6) tem grau menor do que $m + M - 1$. Assim, obtemos $\text{grau}(h_0 + nf) < M$ e, portanto, $\text{grau}(h_0 + jf) = M$, para $j \neq n$.

Colocando $j = k$ na equação (3.5), temos

$$\Phi'_{k-1} = [h_0 + kf]\Phi_k.$$

Como Φ_k é constante não nulo, temos que $\text{grau}(\Phi'_{k-1}) = \text{grau}([h_0 + kf]) = M$. Portanto, $\text{grau}(\Phi_{k-1}) = M + 1$. Colocando $j = k - 1$ na equação (3.5), temos

$$\Phi'_{k-2} = [h_0 + (k - 1)f]\Phi_{k-1} + kg\Phi_k,$$

assim, $\text{grau}(\Phi'_{k-2}) = \text{grau}([h_0 + (k - 1)f]\Phi_{k-1}) = M + M + 1$. Portanto, $\text{grau}(\Phi_{k-2}) = 2(M + 1)$. Repetindo esse processo, temos

$$\text{grau}(\Phi_{k-j}) = j(M + 1), \quad 0 \leq j \leq k - n. \quad (3.7)$$

Colocando $j = k - n$ na equação (3.7), temos

$$\text{grau}(\Phi_n) = (k - n)(M + 1), \text{ portanto, } m = r(M + 1), \text{ onde } r = k - n.$$

Aplicando (3.7) com $j = k - (n + 1)$, temos que $\text{grau}(\Phi_{n+1}) = m - M - 1$. Assim, o grau do lado direito de (3.6) é menor ou igual a $m - 1$. Portanto, $h_0 = -nf$.

Agora suporemos que $\Phi_k = 1$, ou seja, esteja normalizado em certo sentido.

Colocando $j = k$ em (3.5), temos

$$\Phi'_{k-1} = [h_0 + kf]\Phi_k = [-nf + kf]\Phi_k = rf.$$

De $\Phi'_{k-1} = rf$, temos, por integração,

$$\Phi_{k-1} = rF + R_0, \text{ onde } F' = f.$$

Denotaremos R_j por um polinômio de grau até j .

Colocando $j = k - 1$ em (3.5), conseguimos

$$\Phi'_{k-2} = [h_0 + (k - 1)f]\Phi_{k-1} + kg\Phi_k = r(r - 1)fF + (r - 1)fR_0 + kg,$$

onde integrando, temos

$$\Phi_{k-2} = \frac{r(r - 1)}{2}F^2 + R_{M+1}.$$

Repetindo esse procedimento, temos

$$\Phi_{k-j} = C_j F^j + R_{(j-1)(M+1)}, \quad 1 \leq j \leq r, \quad C_j = \frac{r!}{j!(r-j)!}. \quad (3.8)$$

Colocando $j = n$ em (3.5) e lembrando que $h_0 = -nf$, temos

$$\Phi'_{n-1} = (n+1)g\Phi_{n+1}.$$

Usando (3.8) com $j = k - (n+1) = r - 1$, temos

$$\Phi_{n+1} = r[F^{r-1}] + R_{(r-2)(M+1)},$$

e, portanto,

$$\Phi'_{n-1} = r(n+1)gF^{r-1} + R_{m-M-2}. \quad (3.9)$$

Por outro lado, colocando $j = n - 1$ em (3.5), conseguimos

$$\Phi'_{n-2} = [h_0 + (n-1)f]\Phi_{n-1} + ng\Phi_n = -f\Phi_{n-1} + ng\Phi_n,$$

o que implica que

$$\Phi_{n-1} = \frac{ng\Phi_n - \Phi'_{n-2}}{f}.$$

Usando (3.8), temos $\Phi_n = F^r + R_{m-M-1}$ e assim, conseguimos

$$\Phi_{n-1} = \frac{ngF^r + R_{M-1} - \Phi'_{n-2}}{f},$$

logo

$$\Phi_{n-1} = \frac{ngF^r + R_{M-1}}{f},$$

já que o grau(Φ'_{n-2}) $< m$. Agora diferenciando, temos

$$\Phi'_{n-1} = \frac{f[ngF^r + R_{M-1}]' - [ngF^r + R_{M-1}]f'}{f^2},$$

logo

$$f^2\Phi'_{n-1} = nfg'F^r + rngf^2F^{r-1} - ngf'F^r + R_{m+M-2}. \quad (3.10)$$

Usando (3.9) e (3.10), obtemos

$$nfg'F^r + rngf^2F^{r-1} - ngf'F^r + R_{m+M-2} = f^2(r(n+1)gF^{r-1} + R_{m-M-2}),$$

portanto,

$$r f^2 g F^{r-1} + n F^r [g f' - f g'] = R_{m+M-2}.$$

Comparando os termos de maior grau conseguimos

$$r(M+1) + n(M-N) = 0,$$

como $n(M-N) \geq 0$ e $r(M+1) = m$ é não negativo, temos

$$r(M+1) = m = 0.$$

Análise acima implica que $\Phi_j(x) = 0$, para todo $j = 1, \dots, k$, portanto, $\Phi(x, y)$ depende apenas da variável y , ou seja, $\Phi(x, y) = \Phi(y)$. Afirmamos que Φ pode ser escrito da forma

$$\Phi(y) = y + C,$$

onde C é uma constante, de fato, Φ é irredutível em uma só variável sobre o corpo dos reais, suponha que Φ possa ser escrito na forma $ay^2 + by + c$, com $a \neq 0$, então

$$b^2 - 4ac < 0. \tag{3.11}$$

Usando essa escrita de Φ em (3.3), temos

$$2af = naf, \tag{3.12}$$

$$fb + 2ag = nfb, \tag{3.13}$$

$$gb = nfc. \tag{3.14}$$

Portanto, de (3.12), temos $n = 2$, já que $a \neq 0$ e $f \neq 0$. De (3.14), temos que se $b = 0$, então $c = 0$, mas isso é uma contradição com (3.11). Então, $b \neq 0$ e $c \neq 0$. De (3.13) e (3.14), conseguimos, respectivamente,

$$g = \frac{fb}{2a} \text{ e } g = \frac{2fc}{b},$$

portanto,

$$\frac{fb}{2a} = \frac{2fc}{b}.$$

Logo, $4ac = b^2$. Isso implica que $b^2 - 4ac = 0$, que é uma contradição com (3.11). Portanto $a = 0$. Ou seja, Φ é um polinômio de grau 1 da seguinte forma

$$\Phi(y) = y + C.$$

Usando (3.4), temos

$$g/f = C,$$

o que é uma contradição com (iii) do teorema. ■

Corolário 3.1.1. *O sistema de van der Pol*

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\mu(x^2 - 1)y - x, \quad \mu \neq 0,$$

não tem curvas soluções algébricas. Em particular, seu ciclo limite é não algébrico.

3.2 Aplicação de Poincaré

A transformação de Poincaré associada a uma órbita fechada γ de um campo vetorial é um difeomorfismo π que descreve o comportamento do campo em uma vizinhança de γ .

Sejam $\{\varphi(t, p) : 0 \leq t \leq T\}$ uma órbita periódica de período T de um campo χ de classe C^r , $r \geq 1$ ou $r = \omega$, definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e Σ uma seção transversal a χ em p . Em virtude da continuidade do fluxo φ de χ , para todo ponto $q \in \Sigma$ próximo de p a trajetória $\varphi(t, p)$ permanece próxima a γ , com t em um intervalo compacto pré-fixado, por exemplo, $[0, 2T]$. Define-se $\pi(q)$ como o primeiro ponto onde esta órbita intercepta Σ . Seja Σ_0 o domínio de π . Naturalmente $p \in \Sigma_0$ e $\pi(p) = p$.

É possível mostrar que $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ é um difeomorfismo de classe C^r , $r \geq 1$ ou $r = \omega$, sobre sua imagem $\Sigma_1 = \pi(\Sigma_0)$.

Observação 3.2.1. *Relacionaremos ciclos limites com a aplicação de Poincaré: γ será um ciclo limite de χ passando por p se, e somente se, p é um ponto fixo isolado de π .*

Ainda,

1. γ é estável se, e somente se, $|\pi(x) - p| < |x - p|$, para todo $x \neq p$ suficientemente próximo de p .
2. γ é instável se, e somente se, $|\pi(x) - p| > |x - p|$, para todo $x \neq p$ suficientemente próximo de p .

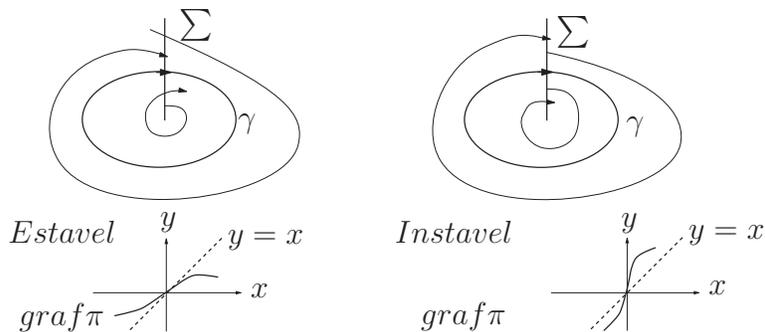


Figura 3.1: Gráfico da transformação de Poincaré em ciclos limites estáveis e instáveis.

3. γ é semi-estável se, e somente se, $|\pi(x) - p| < |x - p|$, para todo $x \in \Sigma \cap \text{ext}\gamma$ suficientemente próximo de p e $|\pi(x) - p| > |x - p|$, para todo $x \in \Sigma \cap \text{int}\gamma$ suficientemente próximo de p , ou o contrário, (*int* denota interior e *ext* denota exterior).

Em particular, se χ é analítico e $\pi(x)$ não é a identidade, então

$$\pi(x) = p + a_k(x - p)^k + \dots,$$

com $a_k \neq 0$.

Portanto, se k é ímpar, então γ é estável se $a_k < 0$ e instável se $a_k > 0$. Se k é par, então γ é semi-estável. Se $\pi(x) = x$, isto é, todos os a_k são zero, então γ está no interior de um anel de órbitas periódicas de χ .

No caso em que χ é C^1 , se $\pi'(x) < 1$, podemos aplicar o teorema do valor médio e concluir que γ é estável. Por outro lado, γ é instável se $\pi'(x) > 1$. As Figuras 3.1 e 3.2 ilustram as aplicações de Poincaré e seus gráficos.

O resultado a seguir fornece a expressão de $\pi'(x)$.

Teorema 3.2.1. *Sejam U um subconjunto aberto do \mathbb{R}^2 e $\chi = (P, Q) \in C^1(U)$ um campo de vetores. Sejam γ uma órbita periódica do sistema diferencial correspondente de período T e $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ a aplicação de Poincaré em uma seção transversal Σ em $x \in \gamma$. Então*

$$\pi'(x) = \exp\left(\int_0^T \text{div}\chi(\gamma(t))dt\right).$$

Em particular, se

$$\int_0^T \text{div}\chi(\gamma(t))dt < 0,$$

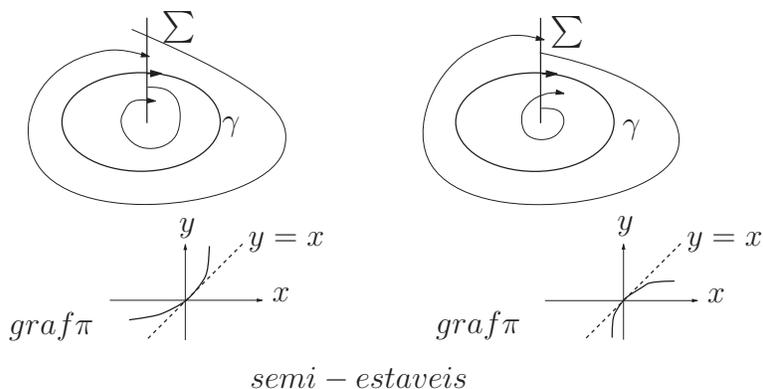


Figura 3.2: Gráfico da transformação de Poincaré em ciclos limites semi-estáveis.

então, γ é um ciclo limite estável e se

$$\int_0^T \operatorname{div} \chi(\gamma(t)) dt > 0,$$

então, γ é um ciclo limite instável. No caso do valor da integral ser zero, podemos ter um ciclo limite estável, instável ou semi-estável, ou pertencer a um anel de ciclos.

A demonstração deste teorema não será feita aqui, mas pode ser encontrada em [21], página 30.

Definição 3.2.1. *Sejam U um subconjunto aberto do \mathbb{R}^2 e $\chi = (P, Q) \in C^1(U)$ um campo de vetores. Sejam γ uma órbita periódica do sistema diferencial correspondente de período T e $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ a aplicação de Poincaré em uma seção transversal Σ em $x \in \gamma$. Dizemos que γ é hiperbólico quando $\pi'(x) \neq 1$, quando $\pi'(x) = 1$ dizemos que γ é não hiperbólico.*

Exemplo 3.2.1. *Considere o sistema*

$$x' = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad y' = x + y(1 - x^2 - y^2).$$

Fazendo as mudanças de coordenadas polares e os devidos passos, obtemos

$$r' = r(1 - r^2), \quad \theta' = 1,$$

que possui um ciclo limite γ parametrizado por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Analisemos, então a aplicação de Poincaré do sistema

$$r' = r(1 - r^2), \quad \theta' = 1.$$

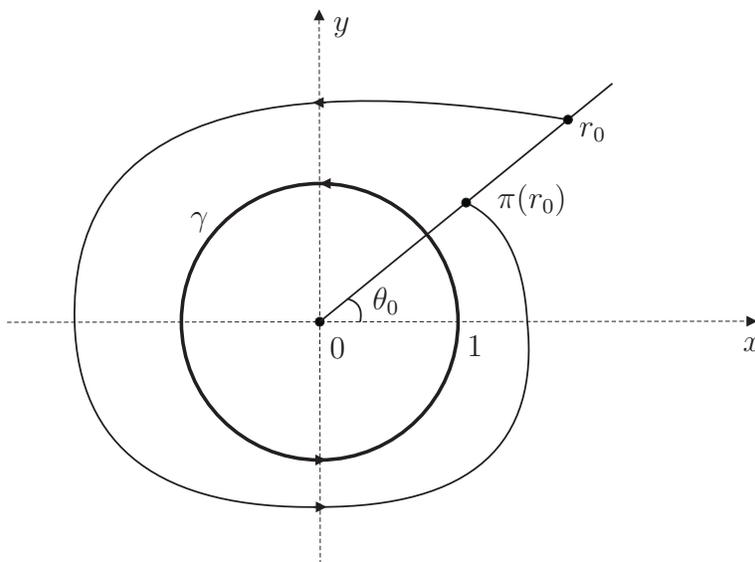


Figura 3.3: Esboço da transformação de Poincaré do Exemplo 3.2.1.

Consideremos que no tempo inicial $t_0 = 0$, temos a condição inicial $r(0) = r_0$ e $\theta(0) = \theta_0$.

Resolvendo o sistema (coordenadas polares), obtemos

$$r(t, r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{-1/2}, \quad \theta(t, \theta_0) = t + \theta_0.$$

Se Σ é o raio que passa pela origem com o ângulo $\theta = \theta_0$, então, Σ é perpendicular à γ e a órbita passando pelo ponto (r_0, θ_0) em $t = 0$, cruza o raio novamente em $t = 2\pi$, conforme a Figura 3.3.

Portanto, a aplicação de Poincaré é dada por

$$\pi(r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-1/2}, \quad \theta(t, \theta_0) = t + \theta_0.$$

Vemos que $\pi(1) = 1$ corresponde ao ciclo γ e segue que

$$\pi'(r_0) = e^{-4\pi} r_0^{-3} \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-3/2},$$

e $\pi'(1) = e^{-4\pi} < 1$, o que comprova que γ é estável e hiperbólico. Por outro lado, em coordenadas cartesianas, como $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, segue que

$$\operatorname{div} \chi(\gamma(t)) = 2 - 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t,$$

e

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{div} \chi(\gamma(t)) dt = \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t) dt = -4\pi.$$

Assim, pelo Teorema 3.2.1, temos

$$\pi'(x_0) = e^{-4\pi},$$

que confere com o cálculo direto.

3.3 Compactificação de Poincaré

Faremos agora uma discussão sobre a compactificação de Poincaré.

Definição 3.3.1. *Chamaremos a esfera*

$$\mathbb{S}^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$$

de esfera de Poincaré. O plano

$$T_{P_N}\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 1\}$$

é tangente a esfera \mathbb{S}^2 em $P_N = (0, 0, 1)$.

Nesta seção convencionaremos que as coordenadas y_i se referirão à esfera \mathbb{S}^2 e as coordenadas x_i ao plano $T_{P_N}\mathbb{S}^2$.

Definição 3.3.2. *Definiremos*

$$H_+ = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2; y_3 > 0\}$$

como sendo o hemisfério norte,

$$H_- = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2; y_3 < 0\}$$

como sendo o hemisfério sul e

$$\mathbb{S}^1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2; y_3 = 0\}$$

como sendo o equador.

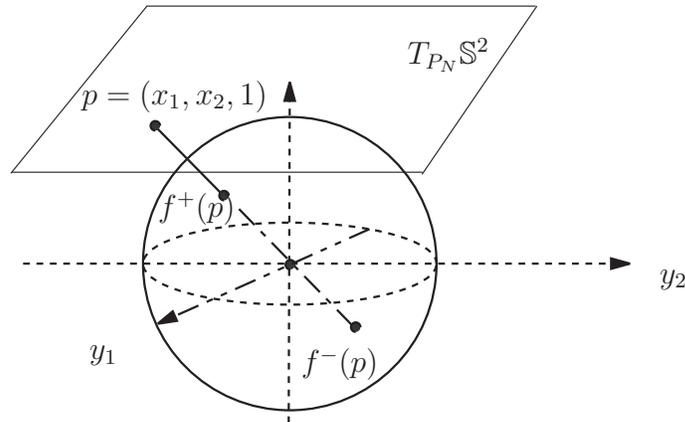


Figura 3.4: Projeção central.

A compactificação de Poincaré de um campo de vetores χ consiste em fazer duas cópias do fluxo de χ , uma sobre H_+ e a outra sobre H_- , usando a projeção central. Para isso consideremos uma reta $L(t)$ que une a origem a um ponto do $T_{P_N}\mathbb{S}^2$,

$$L(t) = (0, 0, 0) + t(x_1, x_2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esta reta intercepta a esfera \mathbb{S}^2 em dois pontos, um no hemisfério norte e o outro no sul. Veja Figura 3.4.

Agora considerando a projeção do campo vetorial χ de $\mathbb{R}^2 \approx T_{P_N}\mathbb{S}^2$ para \mathbb{S}^2 dada pelas projeções centrais, temos dois difeomorfismos

$$f^+ : T_{P_N}\mathbb{S}^2 \rightarrow H_+, \quad f^- : T_{P_N}\mathbb{S}^2 \rightarrow H_-$$

isto é, $f^+(p)$, (resp $f^-(p)$) é a intersecção da reta que passa pelo ponto p ligando a origem com o hemisfério norte, (resp. sul), de \mathbb{S}^2 , cujas expressões são dadas por

$$f^+(x_1, x_2, 1) = \frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)}, \quad f^-(x_1, x_2, 1) = -\frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)},$$

onde $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$.

Sem perda de generalidade, podemos considerar o campo χ definido no plano tangente à esfera, isto é, $\chi : T_{P_N}\mathbb{S}^2 \rightarrow T_{P_N}\mathbb{S}^2$ e assim, é possível definir um novo campo em \mathbb{S}^2 . O campo $\bar{\chi}$ induzido em \mathbb{S}^2 , a partir de χ , através dos difeomorfismos f^+ e f^- será dado por

$$\bar{\chi}(y) = Df^+(x) \cdot \chi(x) \quad \text{se } y = f^+(x) \in H_+$$

$$\bar{\chi}(y) = Df^-(x) \cdot \chi(x) \text{ se } y = f^-(x) \in H_-.$$

Destacamos que $\bar{\chi}$ é um campo vetorial em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$, que é tangente à esfera. Para estudar o comportamento assintótico das órbitas não limitadas de χ analisando $\bar{\chi}$, é necessário estender $\bar{\chi}$ para o equador \mathbb{S}^1 , obtendo um campo na esfera.

O estudo de $\bar{\chi}$ em uma vizinhança do equador nos dará informações sobre o comportamento do campo χ no infinito. Entretanto, nem sempre é possível estender $\bar{\chi}$ ao equador. Veremos adiante que, quando χ for um campo polinomial, podemos estender $\bar{\chi}$ analiticamente ao equador.

Antes de estudar a extensão de $\bar{\chi}$ ao equador, vamos escolher um sistema de coordenadas conveniente para \mathbb{S}^2 e calcular a expressão de $\bar{\chi}$ nessas coordenadas.

Para \mathbb{S}^2 usamos seis cartas locais dadas por

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\}, \quad V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\},$$

para $k = 1, 2, 3$. As aplicações locais correspondentes são dadas por $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ e definidas como

$$\phi_k(y) = -\psi_k(y) = \left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right),$$

para $m < n$ e $m, n \neq k$.

Iremos agora encontrar a expressão do campo na carta local (U_1, ϕ_1) .

Seja $y \in U_1 \cap H_+$, então, $y = f^+(x)$, $x \in T_{P_N} \mathbb{S}^2$:

$$\begin{aligned} (\phi_1 \circ f^+)(x) &= \phi_1(f^+(x)) = \phi_1 \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \\ &= \left(\frac{x_2}{\Delta(x)} \frac{\Delta(x)}{x_1}, \frac{1}{\Delta(x)} \frac{\Delta(x)}{x_1} \right) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi_1(x_1, x_2, 1) = (u, v), \text{ onde } u = \frac{x_2}{x_1} \text{ e } v = \frac{1}{x_1}.$$

Observe que como $y \in U_1 \cap H_+$, segue que $x_1 \neq 0$. Como $\bar{\chi}(y) = Df^+(x) \cdot \chi(x)$ quando $y = f^+(x)$, temos

$$D\phi_1(y)\bar{\chi}(y) = D\phi_1(y) \circ Df^+(x)\chi(x) = D(\phi_1 \circ f^+)(x)\chi(x).$$

Seja $\bar{\chi}(y) |_{U_1 \cap H_+}$ denotando o sistema de coordenadas definido como $D\phi_1(y)\bar{\chi}(y)$ e, portanto, segue da equação acima que

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(y) |_{U_1 \cap H_+} &= D(\phi_1 \circ f^+)(x)\chi(x) = \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^2}(-x_2P(x_1, x_2) + x_1Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)), \end{aligned}$$

esta é a expressão de $\bar{\chi}$ em $U_1 \cap H_+$ nas coordenadas ϕ_1 . Vamos colocá-las em função de u e v para facilitar a análise. Usando o fato de que

$$x_1 = \frac{1}{v}, \quad x_2 = \frac{u}{v}$$

e substituindo em

$$\frac{1}{x_1^2}(-x_2P(x_1, x_2) + x_1Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)),$$

temos

$$\bar{\chi}(y) |_{U_1 \cap H_+} = \left(-uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).$$

Em geral, $\bar{\chi}$ não permanece limitado quando nos aproximamos de \mathbb{S}^1 . Mas, se multiplicarmos o campo por um fator $\rho(y) = y_3^{d-1}$, onde d é o grau do campo χ , a extensão se torna possível, então

$$\rho(f^+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}},$$

onde $z = (u, v)$. Assim, $\rho \cdot \bar{\chi}$ nas coordenadas (u, v) é dado por

$$\begin{aligned} \rho \cdot \bar{\chi}(u, v) &= \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} \left(-uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right) \\ &= \frac{v^d}{\Delta(z)^{d-1}} \left(-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -vP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right), \end{aligned}$$

assim, esta é a expressão em $U_1 \setminus \mathbb{S}^1$. Pode-se verificar que se $y \in U_1 \cap H_-$, obtém-se a mesma expressão.

Faremos algumas considerações a respeito do que foi visto. Inicialmente observamos que os pontos do equador $\mathbb{S}^1 \cap U_1$ são representados por $v = 0$ nas coordenadas ϕ_1 . Por outro lado, estes pontos correspondem ao infinito do plano $T_{P_N}\mathbb{S}^2$. Observe também, que é possível fazer $v = 0$ na expressão acima resultando em

$$\rho \cdot \bar{\chi}(u, 0) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}^{d-1}}(-ua_d + b_d, 0),$$

onde a_d e b_d são os termos de maior grau em P e Q , respectivamente. Na expressão de $\rho.\bar{\chi}(u, 0)$ temos a segunda componente do vetor igual a zero. Isto significa que o vetor $\rho.\bar{\chi}(u, 0)$ é tangente ao equador quando olhado na esfera \mathbb{S}^2 . Podemos concluir então que o equador $\mathbb{S}^1 \cap U_1$ é invariante pelo campo de $\rho.\bar{\chi}$. É Possível remover de $\rho.\bar{\chi}(u, v)$ o fator

$$\frac{1}{\Delta(z)^{d-1}}$$

por uma reparametrização do tempo. Assim, a expressão para o campo $\rho.\bar{\chi}$ na carta local (U_1, ϕ_1) é dada por

$$u' = v^d \left(-uP \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right), \quad v' = -v^{d+1} P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \quad (3.15)$$

e podemos calcular analogamente, a expressão do campo $\rho.\bar{\chi}$ na carta (U_2, ϕ_2) que será dada por

$$u' = v^d \left(P \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) - uQ \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right), \quad v' = -v^{d+1} \left(Q \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right) \quad (3.16)$$

e a expressão do campo $\rho.\bar{\chi}$ na carta (U_3, ϕ_3) dada por

$$u' = P(u, v), \quad v' = Q(u, v). \quad (3.17)$$

Por outro lado, as expressões para $\rho.\bar{\chi}$ nas cartas (V_1, ϕ_1) , (V_2, ϕ_2) , (V_3, ϕ_3) serão respectivamente, as mesmas expressões (3.15), (3.16) e (3.17) multiplicadas por $(-1)^{d-1}$. Observe que o fator $(-1)^{d-1}$ desempenha um papel fundamental no estudo das estabilidades dos equilíbrios em \mathbb{S}^1 . Assim, para conhecermos o comportamento dos pontos do infinito, basta olharmos as cartas (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2) .

Proposição 3.3.1. *Seja χ um campo polinomial em \mathbb{R}^2 de grau d . Seja $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho(y) = y_3^{d-1}$ e seja $\bar{\chi}$ o campo induzido em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ através de f^+ e f^- como definido acima. Então, $\rho.\bar{\chi}$ pode ser estendido a um campo analítico de \mathbb{S}^2 com equador invariante.*

Demonstração: Vimos acima que as expressões de $\rho.\bar{\chi}$ nas cartas

$$(U_1, \phi_1), (V_1, \psi_1), (U_2, \phi_2) \text{ e } (V_1, \psi_1)$$

são dadas por (3.15) ou (3.16) onde podemos ainda multiplicar pelo fator $(-1)^{d-1}$ quando for o caso. Vê-se que as expressões (3.15) e (3.16) são perfeitamente definidas para $v = 0$,

isto é, no equador \mathbb{S}^1 e, como tais expressões são analíticas, podemos estendê-las, analiticamente ao equador. Fazendo $v = 0$ em (3.15) ou (3.16) obtemos respectivamente

$$\rho.\bar{\chi}(u, 0) = (-ua_d + b_d, 0) \text{ e } \rho.\bar{\chi}(u, 0) = (a_d, 0)$$

e podemos concluir que o equador será invariante por $\bar{\chi}$. ■

Definição 3.3.3. *O campo vetorial estendido na esfera \mathbb{S}^2 pelas cartas locais (U_k, ϕ_k) e (V_k, ψ_k) chama-se Compactificação de Poincaré.*

3.4 Exemplo de um sistema com ciclo limite não algébrico explícito

Nesta seção será exibido um sistema polinomial de grau três com um ciclo limite não algébrico explícito.

Teorema 3.4.1. *O sistema de equações diferenciais de grau três,*

$$x' = x + (y - x)(x^2 - xy + y^2), \quad y' = y - (y + x)(x^2 - xy + y^2) \quad (3.18)$$

possui um único ciclo limite não algébrico cuja expressão em coordenadas polares (r, θ) , é

$$r(\theta) = e^\theta \sqrt{r_*^2 - f(\theta)}, \quad (3.19)$$

onde

$$r_* = e^{2\pi} \sqrt{\frac{f(2\pi)}{e^{4\pi} - 1}} \approx 1,1911644871948721\dots,$$

$$f(\theta) = 4 \int_0^\theta \frac{e^{-2s}}{2 - \sin(2s)} ds.$$

Além disso, este ciclo limite é estável e hiperbólico.

Demonstração: Fazendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ e substituindo em (3.18), temos

$$\begin{aligned} r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta &= r \cos \theta \\ &+ (r \sin \theta - r \cos \theta)(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta = r \sin \theta - (r \sin \theta + r \cos \theta)(r^2(1 - \sin \theta \cos \theta)) \quad (3.21)$$

multiplicando a equação (3.20) por $\cos \theta$ e a equação (3.21) por $\sin \theta$ e somando as equações resultantes obtemos,

$$\begin{aligned} r' &= r \cos^2 \theta + \cos \theta (r \sin \theta - r \cos \theta)(r^2(1 - \sin \theta \cos \theta)) + r \sin^2 \theta \\ &\quad - \sin \theta (r \sin \theta + r \cos \theta)(r^2(1 - \sin \theta \cos \theta)) = r + r^2(1 - \sin \theta \cos \theta)r \\ &= r + r^3(1 - \sin \theta \cos \theta) = r + \frac{1}{2}r^3(\sin(2\theta) - 2). \end{aligned}$$

Para achar θ' , multiplicamos a equação (3.20) por $\sin \theta$ e equação (3.21) por $\cos \theta$ e subtraindo a segunda equação resultante da primeira equação resultante obtemos,

$$\begin{aligned} r\theta' &= -r \cos \theta \sin \theta - \sin \theta (r \sin \theta - r \cos \theta)(r^2(1 - \sin \theta \cos \theta)) \\ &\quad + r \cos \theta \sin \theta - \cos \theta (r \sin \theta + r \cos \theta)(r^2(1 - \sin \theta \cos \theta)) \\ &= r^3(1 - \sin \theta \cos \theta). \end{aligned}$$

Logo

$$\theta' = r^2(1 - \sin \theta \cos \theta) \Rightarrow \theta' = \frac{1}{2}r^2(\sin(2\theta) - 2),$$

assim, temos o sistema

$$r' = r + \frac{1}{2}r^3(\sin(2\theta) - 2), \quad \theta' = \frac{1}{2}r^2(\sin(2\theta) - 2) \quad (3.22)$$

Portanto,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r + \frac{1}{2}r^3(\sin(2\theta) - 2)}{\frac{1}{2}r^2(\sin(2\theta) - 2)} = r + \frac{2}{r(\sin(2\theta) - 2)}. \quad (3.23)$$

Como θ' é negativo, as órbitas $r(\theta)$ da equação diferencial (3.23) possuem orientação invertida em relação as órbitas $(r(t), \theta(t))$ ou $(x(t), y(t))$ dos sistemas (3.22) e (3.18).

Verifiquemos que a solução $r(\theta, r_0)$ tal que $r(0, r_0) = r_0$ é $r(\theta, r_0) = e^\theta \sqrt{r_0^2 - f(\theta)}$,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= e^\theta \sqrt{r_0^2 - f(\theta)} + e^\theta \left(\sqrt{r_0^2 - f(\theta)} \right)' = e^\theta \sqrt{r_0^2 - f(\theta)} + e^\theta \left(\frac{-4e^{-2\theta}}{2 - \sin(2\theta)} \right) \\ &= r(\theta) + \left(-\frac{4e^{-\theta}}{2 - \sin(2\theta)} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{r_0^2 - f(\theta)}} \right) = r(\theta) + \frac{4}{2(\sin(2\theta) - 2) \left(e^\theta \sqrt{r_0^2 - f(\theta)} \right)} \\ &= r(\theta) + \frac{2}{(\sin(2\theta) - 2)r(\theta)}, \end{aligned}$$

onde $f(\theta)$ é a função definida no Teorema 3.4.1. Que $r(0, r_0) = r_0$ é direto.

Vemos que o único ponto de equilíbrio do sistema (3.18) é a origem de coordenadas e 1 é autovalor de multiplicidade 2 da matriz do sistema linearizado associado. De fato, a matriz A do sistema linearizado é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde se verifica rapidamente a afirmação feita.

Na forma polar o ponto $r = 0$ do sistema (3.23) não está definido, porém estenderemos seu fluxo sendo $r = 0$ nó instável. As órbitas periódicas da equação (3.23) devem satisfazer $(r(2\pi), r_0) = r_0$. A solução de $(r(2\pi), r_0) = r_0$ é $r_0 = r_*$. De fato,

$$(r(2\pi), r_0) = r_0 \Rightarrow e^{2\pi} \sqrt{r_0^2 - f(2\pi)} = r_0 \Rightarrow r_0^2 = e^{4\pi} (r_0^2 - f(2\pi)),$$

assim,

$$r_0^2 e^{4\pi} - e^{4\pi} f(2\pi) = r_0^2 \Rightarrow r_0^2 - e^{4\pi} r_0^2 = -e^{4\pi} f(2\pi) \Rightarrow r_0^2 (1 - e^{4\pi}) = -e^{4\pi} f(2\pi),$$

portanto,

$$r_0^2 = \frac{-e^{4\pi} f(2\pi)}{1 - e^{4\pi}} = \frac{e^{4\pi} f(2\pi)}{e^{4\pi} - 1} \Rightarrow r_0 = e^{2\pi} \sqrt{\frac{f(2\pi)}{e^{4\pi} - 1}} = r_*,$$

já que $r_0 > 0$.

Assim, se $r(\theta, r_*) > 0$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, teremos que $r(\theta, r_*)$ será uma órbita periódica e

conseqüentemente um ciclo limite. Mostremos então que $r(\theta, r_*) > 0$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} r(\theta, r_*) &= e^\theta \sqrt{\frac{e^{4\pi}(f(2\pi))}{e^{4\pi} - 1} - f(\theta)} \geq e^\theta \sqrt{f(2\pi) - f(\theta)} \\ &= e^\theta \sqrt{4 \left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{-2s}}{2 - \text{sen}(2s)} ds \right) - 4 \left(\int_0^\theta \frac{e^{-2s}}{2 - \text{sen}(2s)} ds \right)} \\ &= 2e^\theta \sqrt{\int_\theta^{2\pi} \frac{e^{-2s}}{2 - \text{sen}(2s)} ds} > 0, \end{aligned}$$

visto que

$$\frac{e^{-2s}}{2 - \text{sen}(2s)} > 0,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Mostraremos agora que o ciclo limite do sistema (3.23) é instável e hiperbólico, mostrando que

$$\frac{dr(2\pi; r_0)}{dr_0} \Big|_{r_0=r_*} = e^{4\pi} > 1.$$

Para isso, note que

$$\begin{aligned} r(2\pi, r_0) &= e^{2\pi} \sqrt{r_0^2 - f(2\pi)} \quad \text{e} \\ \left(\frac{dr(2\pi; r_0)}{dr_0} \right) \Big|_{r_0=r_*} &= \frac{e^{2\pi}}{2} \left(\frac{2r_0}{\sqrt{r_0^2 - f(2\pi)}} \right) \Big|_{r_0=r_*} = e^{2\pi} \left(\frac{r_*}{\sqrt{r_*^2 - f(2\pi)}} \right) \\ &= e^{2\pi} \left(\frac{e^{2\pi} \sqrt{\frac{f(2\pi)}{e^{4\pi} - 1}}}{\sqrt{r_*^2 - f(2\pi)}} \right) = e^{4\pi} \left(\frac{\frac{\sqrt{f(2\pi)}}{\sqrt{e^{4\pi} - 1}}}{\sqrt{f(2\pi)} \sqrt{\frac{e^{4\pi}}{e^{4\pi} - 1} - 1}} \right) = e^{4\pi}. \end{aligned}$$

Assim, como

$$\frac{dr(2\pi; r_0)}{dr_0} \Big|_{r_0=r_*} = e^{4\pi} > 1,$$

a equação (3.23) tem ciclo limite instável e hiperbólico, conseqüentemente o sistema (3.18) tem ciclo limite estável e hiperbólico.

A curva $(r(\theta) \cos \theta, r(\theta), \text{sen } \theta)$ no plano xy com

$$r(\theta)^2 = e^{2\theta}(r_*^2 - f(\theta)),$$

é não algébrico. De fato,

$$r(\theta)^2 = e^{2\theta}(r_*^2 - f(\theta))$$

está em sua forma irredutível. Para mostrar isso, suponhamos que possamos dividir a equação acima por $e^{2\theta}r_*^2$, então

$$r(\theta)^2 = e^{2\theta}(r_*^2 - f(\theta)) \Rightarrow e^{2\theta}r_*^2 = e^{2\theta}f(\theta) + (r(\theta))^2,$$

simplificando esta expressão por $e^{2\theta}r_*^2$, temos,

$$1 = \frac{e^{2\theta}f(\theta)}{e^{2\theta}r_*^2} + \frac{(r(\theta))^2}{e^{2\theta}r_*^2} \Rightarrow 1 = \frac{(f(\theta))^2}{r_*^2} + \frac{(r(\theta))^2}{e^{2\theta}r_*^2}.$$

Assim,

$$1 = \frac{(f(\theta))^2}{r_*^2} + \frac{e^{2\theta}(r_*^2 - f(\theta))}{e^{2\theta}r_*^2} = \frac{(f(\theta))^2}{r_*^2} + \frac{r_*^2 - f(\theta)}{r_*^2} = \frac{(f(\theta))^2 + r_*^2 - f(\theta)}{r_*^2},$$

portanto,

$$f(\theta) = 1 \text{ ou } f(\theta) = 0.$$

Por outro lado,

$$f(1) = 4 \int_0^1 \frac{e^{-2s}}{2 - \sin(2s)} ds \approx 1,24786$$

ou seja, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$4 \int_0^\theta \frac{e^{-2s}}{2 - \sin(2s)} ds = f(\theta) \neq 0 \text{ e } f(\theta) \neq 1,$$

o que é uma contradição.

Para mostrar que o ciclo limite não é algébrico usaremos o fato de que a função f que define o ciclo limite não é um polinômio, ou seja, não existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\partial f^n}{\partial x^n} = 0,$$

em coordenadas cartesianas, a equação $r(\theta)$ torna-se

$$x^2 + y^2 - e^{2\arctan(\frac{y}{x})} \left(r_*^2 - 4 \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \frac{e^{-2s}}{2 - \sin(2s)} ds \right) = 0, \text{ e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{2ye^{2\arctan(\frac{y}{x})}}{x^2 + y^2} \left(r_*^2 - 4 \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \frac{e^{-2s}}{2 - \sin(2s)} ds \right) - \frac{-4y}{(x^2 + y^2)(2 - \sin(2\arctan(\frac{y}{x})))}.$$

Notemos que sempre ocorrerá o termo

$$e^{2\arctan(\frac{y}{x})} \left(r_*^2 - 4 \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \frac{e^{-2s}}{2 - \sin(2s)} ds \right)$$

para qualquer ordem de derivação, o que demonstra que o ciclo limite não é algébrico. Daremos uma pausa nessa demonstração para enunciar um teorema que nos ajudará a terminar essa demonstração.

Com o próximo teorema será mostrado que o ciclo limite dado por $r(\theta, r_*)$ é a única órbita periódica do sistema diferencial e conseqüentemente o único ciclo limite.

Agora enunciaremos um teorema conhecido como Teorema generalizado de Dulac que nos ajudará concluir a demonstração do Teorema 3.4.1. Sua demonstração pode ser encontrada em [7], p. 189.

Teorema 3.4.2. (Teorema generalizado de Dulac) *Seja R uma região n -multiplemente conexa de \mathbb{R}^2 (ou seja, R tem uma borda exterior e $n - 1$ bordas interiores). Assuma que a função divergência*

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

do sistema (2.1) é C^1 e tem sinal constante na região R e é não identicamente zero em qualquer subregião de R . Então esse sistema tem no máximo $n - 1$ órbitas periódicas que se encontram inteiramente em R .

Demonstração: Continuação da prova do Teorema 3.4.1: Definindo uma nova variável independente τ por $d\tau = (x^2 + y^2)(x^2 - xy + y^2)dt$, temos

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{x + (y - x)(x^2 - xy + y^2)}{(x^2 + y^2)(x^2 - xy + y^2)}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{y - (y + x)(x^2 - xy + y^2)}{(x^2 + y^2)(x^2 - xy + y^2)},$$

como $(x^2 + y^2)(x^2 - xy + y^2)$ somente se anula na origem de coordenadas, o sistema diferencial (3.18) e o sistema

$$\dot{x} = \frac{x + (y - x)(x^2 - xy + y^2)}{(x^2 + y^2)(x^2 - xy + y^2)}, \quad \dot{y} = \frac{y - (x + y)(x^2 - xy + y^2)}{(x^2 + y^2)(x^2 - xy + y^2)}, \quad (3.24)$$

onde o \dot{x} denota derivação com respeito a variável τ , tem o mesmo retrato de fase em $R = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Calculando-se a divergência do sistema diferencial (3.24), temos

$$-\frac{2}{(x^2 + y^2)(x^2 - xy + y^2)} < 0, \quad \text{em } R.$$

Assim, pelo Teorema 3.4.2 e usando o fato de que R é uma região 2 - multiplemente conexa de \mathbb{R}^2 , segue que o sistema diferencial (3.24) e conseqüentemente o sistema (3.18)

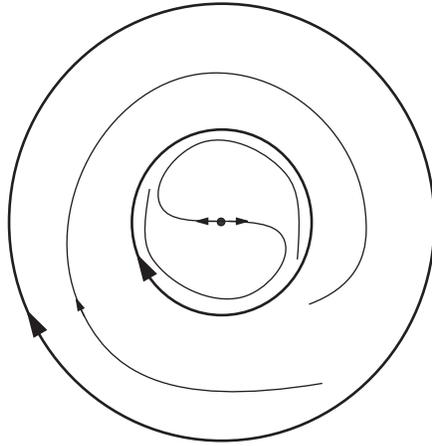


Figura 3.5: Retrato de fase no disco de Poincaré do sistema (3.18).

tem no máximo 1 solução periódica inteiramente contida em R . Logo a única solução periódica do sistema (3.18) é $r(\theta, r_*)$, o que completa a prova do Teorema 3.4.1. ■

Apresentaremos agora o retrato de fase do sistema (3.18) no disco de Poincaré. Como o polinômio

$$\begin{aligned} \dot{x}y - y\dot{x} &= (x + (y - x)(x^2 - xy + y^2))y - (y - (y + x)(x^2 - xy + y^2))x \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

não tem fatores lineares reais, a compactificação de Poincaré do sistema (3.18) não tem equilíbrio no infinito, ou seja, o infinito é uma órbita periódica. Fazendo

$$r = \frac{1}{\rho}$$

temos

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\frac{d\rho}{d\theta}}{\rho^2} \Rightarrow \frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{dr}{d\theta}\rho^2 \Rightarrow \frac{d\rho}{d\theta} = -\rho - \frac{2\rho^3}{\sin(2\theta) - 2}.$$

O infinito da equação diferencial (3.23) passa a ser a origem com essa mudança de variáveis e $\rho = 0$ é um ponto de equilíbrio estável dessa equação diferencial, logo a órbita periódica no infinito da equação (3.19) é um ciclo limite instável. Veja Figura 3.5.

Capítulo 4

Realização de uma configuração de ciclos limites

Dedicamos este capítulo, que terá três seções, a uma espécie de recíproca do 16º Problema de Hilbert, isto é, dada uma configuração finita de curvas de Jordan disjuntas qualquer no plano é possível exibir um sistema diferencial polinomial (nos teoremas será fornecido um limitante superior para o grau do sistema diferencial polinomial) realizando essa tal configuração como ciclos limites deste sistema. Na primeira e segunda seções enunciaremos e demonstraremos os Teoremas 4.1.2 e 4.2.1 e na terceira seção faremos três casos particulares, construindo campos vetoriais polinomiais realizando a configuração dada. A diferença do Teorema 4.2.1 em relação ao Teorema 4.1.2 é que neste podemos controlar a estabilidade dos ciclos limites (eles são estáveis), enquanto que os ciclos limites no Teorema 4.1.2 podem ser estáveis, semi-estáveis ou instáveis, e não temos controle sobre eles. Além disso, a construção em \mathbb{R}^2 origina ciclos limites hiperbólicos, e portanto, estruturalmente estáveis sob pequenas perturbações do campo vetorial. Não se sabe, a priori, se no Teorema 4.1.2 os ciclos limites são estruturalmente estáveis. Outra diferença é que, em geral, o campo polinomial que se obtém no Teorema 4.2.1 tem grau maior do que no Teorema 4.1.2. A Seção 4.1 é baseada em [13] e a Seção 4.2 é baseada em [17]. Nesta linha está em preprint um resultado mostrando que toda configuração finita de ciclos é topologicamente realizável como conjunto de ciclos limites de uma equação polinomial de Liénard, para mais detalhes, veja [5].

4.1 Realização de uma configuração de ciclos limites, 1ª versão

O teorema a seguir se deve a Giacomini, Llibre e Viano [9] e relaciona a localização de um ciclo limite com o fator integrante inverso de χ (χ é um campo de vetores em um aberto de \mathbb{R}^2), o Teorema 4.1.1 ajudará a demonstrar o Teorema 4.1.2, que é um dos teoremas de realização de configuração de ciclos.

Teorema 4.1.1. *Seja χ um campo de vetores C^1 definido em $U \subset \mathbb{R}^2$, U aberto e seja V um fator integrante inverso de χ . Se γ é um ciclo limite de χ , então, γ está contido em $\Sigma = \{(x, y) \in U : V(x, y) = 0\}$.*

Demonstração: Por hipótese, existe um fator integrante inverso V definido em U , então, $(1/V)\chi$ é Hamiltoniano em $U \setminus \Sigma$, (veja Proposição 2.0.3), $(1/V)\chi$ e χ são topologicamente equivalentes. Sabemos que o fluxo de um campo de vetores Hamiltoniano preserva área (o Teorema de Liouville garante que se um campo de classe C^1 tem divergência nula, então seu fluxo preserva volume) e em uma vizinhança de um ciclo limite a área não é preservada, assim, temos que o ciclo limite $\gamma \not\subset U \setminus \Sigma$, portanto, $\gamma \subset \Sigma$. ■

Teorema 4.1.2. *Seja $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ uma configuração de ciclos e r seu número de curvas primárias. Então valem as afirmações:*

- (a) *A configuração C é realizável para um campo vetorial polinomial.*
- (b) *A configuração C é realizável como ciclo limite algébrico por um campo vetorial polinomial de grau menor ou igual a $2(n + r) - 1$.*

A afirmação (a) do Teorema 4.1.2 foi obtida pela primeira vez por Schecter e Singer [19] e Sverdlove [22], mas eles não fornecem um campo vetorial polinomial explícito satisfazendo a dada configuração de ciclos limites, como foi fornecido na afirmação (b) do Teorema 4.1.2. Para provar este teorema será fornecido explicitamente um campo vetorial polinomial de grau menor ou igual a $2(n + r) - 1$ realizando C por ciclos limites algébricos. O Teorema 4.1.2 se deve a Llibre e Rodriguez [13].

Demonstração: Seja $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ uma configuração finita de ciclos e r seu número de curvas primárias. Para cada $C_j, 1 \leq j \leq r$, selecione um ponto p_j no interior da componente limitada por C_j . Trabalharemos com uma configuração de ciclos equivalente, onde cada $C_i \in C$ é um círculo de raio r_i , ou seja, C_i é definido por

$$f_i(x, y) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2 = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

As curvas primárias de C são as curvas C_j e os pontos p_j selecionados tem coordenadas (x_j, y_j) .

Para todo p_j , defina

$$f_{n+2j-1}(x, y) = (x - x_j) + i(y - y_j), \quad f_{n+2j}(x, y) = (x - x_j) - i(y - y_j).$$

Defina também

$$\tilde{H} = \prod_{k=1}^{n+2r} f_k^{\lambda_k},$$

com $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$, $\lambda_{n+2j-1} = 1 + i$ e $\lambda_{n+2j} = 1 - i$, $j = 1, \dots, r$.

Podemos escrever \tilde{H} como

$$\tilde{H}(x, y) = A(x, y)B(x, y)C(x, y),$$

onde,

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \prod_{i=1}^n ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2), \\ B(x, y) &= \prod_{j=1}^r ((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2), \\ C(x, y) &= \exp \left(-2 \sum_{j=1}^r \arctan \left(\frac{y - y_j}{x - x_j} \right) \right). \end{aligned}$$

Para justificar a escrita de \tilde{H} note que

$$A(x, y) = \prod_{k=1}^n f_k^{\lambda_k}(x, y),$$

visto que $\lambda_k = 1$, para $1 \leq k \leq n$. Por outro lado,

$$B(x, y)C(x, y) = \prod_{k=n+1}^{n+2r} f_k^{\lambda_k}(x, y),$$

$B(x, y)$ é o produto da parte em que λ_k não depende do número complexo i e $C(x, y)$ é o produto da parte em que λ_k depende do número complexo i . Uma justificativa para $C(x, y)$ é

$$((x - x_j) + i(y - y_j))^i ((x - x_j) - i(y - y_j))^{-i} = \left(\frac{(x - x_j) + i(y - y_j)}{(x - x_j) - i(y - y_j)} \right)^i,$$

chamando $z = (x - x_j) + i(y - y_j)$, temos, $(z/\bar{z})^i$ e podemos escrever z e \bar{z} como

$$z = z_0(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad \text{e} \quad \bar{z} = z_0(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta),$$

com $z_0 > 0$, onde,

$$\cos \theta = \frac{(x - x_j)}{z_0} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{y - y_j}{z_0} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{(y - y_j)}{(x - x_j)} \quad \text{e}$$

$$z = z_0 e^{i\theta}, \quad \bar{z} = z_0 e^{-i\theta} \Rightarrow \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^i = \left(\frac{z_0 e^{i\theta}}{z_0 e^{-i\theta}} \right)^i = e^{-2\theta},$$

onde

$$\theta = \arctan \left(\frac{y - y_j}{x - x_j} \right).$$

Note que a multiplicação fornece

$$(e^{-2\theta_1}) \cdot (e^{-2\theta_2}) = e^{-2(\theta_1 + \theta_2)} = \exp \left(-2 \sum_{j=1}^2 \arctan \left(\frac{y - y_j}{x - x_j} \right) \right).$$

Segue por indução que

$$(e^{-2\theta_1}) \cdot (e^{-2\theta_2}) \cdot \dots \cdot (e^{-2\theta_n}) = e^{-2(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)} = \exp \left(-2 \sum_{j=1}^n \arctan \left(\frac{y - y_j}{x - x_j} \right) \right) = C(x, y).$$

Como \tilde{H} é uma função real, a função H definida por

$$H = \ln \tilde{H} = \ln \prod_{k=1}^{n+2r} f_k^{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \ln f_k,$$

é também real.

Explicitemos agora o campo χ da condição (b) do Teorema 4.1.2:

$$\chi(x, y) = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

onde,

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \left(\prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l(x, y) \right) \frac{\partial f_k(x, y)}{\partial y}$$

e

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \left(\prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l(x, y) \right) \frac{\partial f_k(x, y)}{\partial x}.$$

Agora note que

$$\frac{\partial H}{\partial x} \left(\prod_{k=1}^{n+2r} f_k \right) = \left(\sum_{k=1}^{n+2r} \frac{\lambda_k}{f_k} \frac{\partial f_k}{\partial x} \right) \left(\prod_{k=1}^{n+2r} f_k \right) = \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \left(\prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l \right) \frac{\partial f_k}{\partial x} = Q,$$

logo

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{Q}{\prod_{k=1}^{n+2r} f_k}.$$

Analogamente, temos

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{P}{\prod_{k=1}^{n+2r} f_k}.$$

Portanto,

$$\prod_{k=1}^{n+2r} f_k$$

é um fator integrante inverso de χ .

Vamos mostrar agora que P e Q são reais. Faremos o caso para P , raciocínio análogo garante Q real. Como vimos,

$$P = \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \left(\prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l \right) \frac{\partial f_k}{\partial y}.$$

Note que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l \right) \frac{\partial f_k}{\partial y}$$

é polinômio, pois, para cada par de funções f_{n+2k-1} e f_{n+2k} , temos

$$(f_{n+2j-1})(f_{n+2j}) = ((x - x_j) + i(y - y_j))((x - x_j) - i(y - y_j)) = (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2,$$

que é um polinômio real.

P poderá deixar de ser real apenas com influência de termos seguintes, mas veremos que isso não ocorre, pois

$$P = \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l \right) \frac{\partial f_k}{\partial y} + \lambda_{n+1}(f_1 \dots f_n f_{n+2} \dots f_{n+2r}) \frac{\partial f_{n+1}}{\partial y} + \dots + \lambda_{n+2r}(f_1 \dots f_{n+2r-1}) \frac{\partial f_{n+2r}}{\partial y}.$$

Restrinjamos a parte em que P poderia deixar de ser real, para a soma

$$\lambda_{n+1}(f_1 \dots f_n f_{n+2} \dots f_{n+2r}) \frac{\partial f_{n+1}}{\partial y} + \lambda_{n+2}(f_1 \dots f_{n+1} f_{n+3} \dots f_{n+2r}) \frac{\partial f_{n+2}}{\partial y}.$$

Temos

$$\begin{aligned} & ((1+i)((x-x_1) - i(y-y_1))Di + ((1-i)((x-x_1) + i(y-y_1))(-Di)) = \\ & = (Di(x-x_1) - y - y_1 - x - x_1 + i(y-y_1) - i(x-x_1) + y - y_1 - x - x_1 - i(y-y_1)) = D(-2(x-x_1)), \end{aligned}$$

onde $D = f_1 \dots f_n f_{n+3} \dots f_{n+2r}$, o mesmo acontecendo em todos os outros pares de somas. Como D é real segue que P é real. O mesmo ocorre para Q , mais que isso, P e Q são polinômios.

Quanto ao grau de P e Q , temos que, no máximo, P e Q tem grau $2(n+r) - 1$, visto que $f_1 \dots f_n$ tem grau $2n$, $f_{n+1} \dots f_{n+2r-1}$ tem grau $2r - 1$, $\partial f_1, \dots, \partial f_n$ tem grau 1 e $\partial f_{n+1}, \dots, \partial f_{n+2r}$ tem grau 0, logo, P e Q tem grau no máximo $2n + 2r - 1 = 2(n+r) - 1$.

De

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{Q}{\prod_{k=1}^{n+2r} f_k} \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{P}{\prod_{k=1}^{n+2r} f_k},$$

segue que

$$V = \prod_{k=1}^{n+2r} f_k$$

é um fator integrante inverso polinomial de χ e H é uma Hamiltoniana para o campo de vetores

$$\frac{1}{V}\chi = \frac{P}{V} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{Q}{V} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Como V é um polinômio, V está definido em todo \mathbb{R}^2 , logo pelo Teorema 4.1.1 e de

$$V(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \cup_{i=1}^n C_i \cup \{P_1, \dots, P_r\}$$

temos que se χ possui ciclos limites, eles devem ser os círculos C_i , $1 \leq i \leq n$. Assim, resta mostrar que os círculos C_i são ciclos limites.

Mostraremos agora que se $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma integral primeira de χ , então $\tilde{H} = e^H$ é também uma integral primeira de χ . De fato, como H é constante ao longo das soluções de χ , então

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Assim,

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) (e^{H(x,y)}) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) (e^{H(x,y)}) = 0 \Rightarrow \tilde{H}(x, y) = c,$$

onde c é uma constante. Logo, \tilde{H} permanece constante ao longo das soluções de χ , portanto, \tilde{H} é uma integral primeira de χ .

De \tilde{H} ser uma integral primeira do campo χ , os círculos são formados por soluções, visto que, eles estão contidos na curva $\tilde{H} = 0$. Logo os círculos contém soluções de χ . Mostraremos agora que sobre cada C_i não existe um ponto singular de χ . Para isso, assumamos que (x_0, y_0) seja um ponto singular de χ em C_i , isto é

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = f_i(x_0, y_0) = 0,$$

já que,

$$P(x_0, y_0) = \frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) \prod_{k=1}^{n+2r} f_k(x_0, y_0) = 0. \quad \left(f_i(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow \prod_{k=1}^{n+2r} f_k(x_0, y_0) \right).$$

Mas

$$P(x_0, y_0) = -\lambda_i \left(\prod_{l=1, l \neq i}^{n+2r} f_l(x_0, y_0) \right) \frac{\partial f_i}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

$$Q(x_0, y_0) = \lambda_i \left(\prod_{l=1, l \neq i}^{n+2r} f_l(x_0, y_0) \right) \frac{\partial f_i}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Como $f_l(x_0, y_0) = 0$, para todo $l \neq i$, obtemos

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_i}{\partial x} = 0.$$

Assim, $2(x - x_0) = 0$ e $2(y - y_0) = 0$, o que implica que $x_0 = x$ e $y_0 = y$. Portanto, (x_0, y_0) é um ponto do centro do círculo C_i , o que é uma contradição.

Os círculos C_i e todos os pontos p_j estão na curva de nível zero de \tilde{H} e eles são as únicas órbitas de χ nesse nível. Suponha que C_i não seja ciclo limite. Então existe uma órbita periódica $\gamma(t) = \{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ diferente de C_i , $1 \leq i \leq n$, e suficientemente próxima de C_i tal que na componente limitada B por γ há os mesmos pontos de $\{p_1, \dots, p_r\}$ que na componente limitada por C_i . Sem perda de generalidade, assumamos que esses pontos são $\{p_1, \dots, p_s\}$. Como γ é diferente de $\{C_1, \dots, C_n\}$, existe $h \neq 0$ tal que

$$\tilde{H}(x(t), y(t)) = A(x(t), y(t))B(x(t), y(t)) \exp \left(-2 \sum_{j=1}^r \theta_j(t) \right) = h,$$

onde,

$$\theta_j(t) = \arctan \left(\frac{y(t) - y_j}{x(t) - x_j} \right).$$

Note que $A(x(t), y(t))B(x(t), y(t))$ é limitada por γ . Pela definição de θ_j , os ângulos $\theta_1(t), \dots, \theta_s(t)$ tendem simultaneamente para $+\infty$ ou $-\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, enquanto os ângulos $\theta_{s+1}(t), \dots, \theta_r(t)$ permanecem limitados quando $t \rightarrow +\infty$, o que é uma contradição. ■

4.2 Realização de uma configuração de ciclos limites, 2ª versão

Nesta seção, baseada em [17], será mostrado uma outra forma de construir campos realizando uma configuração de ciclos.

Teorema 4.2.1. *Seja $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ uma configuração de n ciclos. Então, C é realizável (como ciclos limites algébricos, estáveis) por um campo de vetores χ de grau menor ou igual a $4n - 1$.*

Demonstração: Seja $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ uma configuração de n ciclos em \mathbb{R}^2 . Aplicando um homeomorfismo H podemos deformar esses ciclos em círculos de centro (x_i, y_i) e raio r_i , $i = 1, \dots, n$,

$$H(C_i) = f_i(x, y) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2 = 0.$$

Defina a função

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^n f_i(x, y).$$

f é um polinômio de grau $2n$. O conjunto $f(x, y) = 0$ define exatamente o conjunto $H(C)$, visto que tais círculos não se intersectam. Afirmamos que $(\nabla f)|_{f=0} \neq 0$. De fato, notemos primeiramente que $f = 0 \Rightarrow f_1 = 0$ ou $f_2 = 0$ ou ... $f_n = 0$, não pode ocorrer de $f_i = 0$ e $f_j = 0$, já que tais círculos C_i e C_j são disjuntos. Assim,

$$\nabla f = \left(f_{1x} \prod_{i=2}^n f_i + f_{2x} \prod_{i=1, i \neq 2}^n f_i + \dots + f_{nx} \prod_{i=1}^{n-1} f_i, f_{1y} \prod_{i=2}^n f_i + f_{2y} \prod_{i=1, i \neq 2}^n f_i + \dots + f_{ny} \prod_{i=1}^{n-1} f_i \right).$$

Suponha $f_j = 0$, $j = 1, \dots, n$, então

$$(\nabla f)|_{f=0} = \left(f_{jx} \prod_{i=1, i \neq j}^n f_i, f_{jy} \prod_{i=1, i \neq j}^n f_i \right) = \prod_{i=1, i \neq j}^n f_i (f_{jx}, f_{jy}) = \prod_{i=1, i \neq j}^n f_i (\nabla f_j)$$

e como

$$\prod_{i=1, i \neq j}^n f_i \neq 0 \quad \text{e} \quad \nabla f_j = 2((x - x_j), (y - y_j)) \neq 0$$

segue que $(\nabla f)|_{f=0} \neq 0$.

Agora considere o campo de vetores

$$\chi = (-f_y - f f_x) \frac{\partial}{\partial x} + (f_x - f f_y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Note que $\chi|_{f=0} \neq 0$, já que $\chi|_{f=0} = (-f_y, f_x) \neq 0$, visto que $(\nabla f)|_{f=0} \neq 0$.

Como

$$\operatorname{div} \chi = -f_x^2 - f_y^2 - f(f_{xx} + f_{yy}),$$

temos que

$$\operatorname{div} \chi|_{(f=0)} = -(f_x^2 + f_y^2) < 0.$$

Portanto, pelo Teorema 3.2.1, segue que as órbitas $f_i = 0$ são ciclos limites estáveis.

χ não possui outras órbitas periódicas que não sejam $H(C)$. Suponha γ uma órbita periódica diferente de $H(C_i)$, para todo $i = 1, \dots, n$. Como essa órbita não intersecta qualquer um dos ciclos de $H(C)$, temos por exemplo que $f|_\gamma > 0$, já que f é contínua, γ é conexo e $f|_\gamma \neq 0$, segue que f não pode mudar de sinal em γ . Exigiremos também que $(\nabla f)|_\gamma \neq 0$, em visto que $\chi|_\gamma \neq 0$. Logo, temos $\chi f|_\gamma < 0$, já que

$$\chi f = (f_x, f_y) \cdot (-f_y - f f_x, f_x - f f_y) = -f_x f_y - f f_x^2 + f_y f_x - f f_y^2 = -f(f_x^2 + f_y^2)$$

e assim, $\chi f|_\gamma$ é menor que zero. Portanto, χ não possui outras órbitas periódicas que não sejam $H(C)$, já que qualquer órbita que tenha sempre um ângulo obtuso ou agudo com o gradiente ∇f não pode ser fechada.

χ é um campo de vetores polinomial de grau até $4n - 1$, visto que, f tem grau $2n$ e, tanto f_x , como f_y , tem grau no máximo $2n - 1$. Portanto, χ tem grau no máximo $4n - 1$. ■

4.3 Aplicações dos Teoremas 4.1.2 e 4.2.1

Nesta seção exemplificaremos os teoremas vistos neste capítulo, ou seja, construiremos campos vetoriais polinomiais realizando particulares configurações de ciclos.

Exemplo 4.3.1. Considere $C = \{C_1, C_2\}$, onde

$$C_1 = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad e \quad C_2 = x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Neste caso apenas a curva C_1 é primária. Defina

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0,$$

$$f_3(x, y) = x + iy \quad e \quad f_4(x, y) = x - iy$$

e considere a função

$$(\tilde{H})(x, y) = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} f_3^{\lambda_3} f_4^{\lambda_4}(x, y) = \prod_{k=1}^4 f_k^{\lambda_k}(x, y),$$

com $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 + i$ e $\lambda_4 = 1 - i$. Assim,

$$\tilde{H}(x, y) = \left((x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2) \left(e^{-2 \arctan(\frac{y}{x})} \right) \right),$$

De onde vemos que a função \tilde{H} é uma função real. Defina

$$H = \ln \tilde{H} = \sum_{k=1}^4 \lambda_k \ln f_k,$$

e note que H é também uma função real.

Defina o campo de vetores

$$\begin{aligned} \chi = & \left(-\lambda_1(f_2 f_3 f_4) \frac{\partial f_1}{\partial y} - \lambda_2(f_1 f_3 f_4) \frac{\partial f_2}{\partial y} - \lambda_3(f_1 f_2 f_4) \frac{\partial f_3}{\partial y} - \lambda_4(f_1 f_2 f_3) \frac{\partial f_4}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ & + \left(\lambda_1(f_2 f_3 f_4) \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2(f_1 f_3 f_4) \frac{\partial f_2}{\partial x} + \lambda_3(f_1 f_2 f_4) \frac{\partial f_3}{\partial x} + \lambda_4(f_1 f_2 f_3) \frac{\partial f_4}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

que no nosso caso torna-se

$$\begin{aligned} \chi = & -(6x^4y + 12x^2y^3 - 20x^2y + 6y^5 - 20y^3 - 2x^5 - 2y^4x - 4x^3y^2 + 10x^3 + 10y^2x + 8y - 8x) \frac{\partial}{\partial x} \\ & + (6x^5 + 12x^3y^2 - 20x^3 + 6y^4x - 20y^2x + 2x^4y + 2y^5 + 4y^3x^2 - 10yx^2 - 10y^3 + 8x + 8y) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

O retrato de fase possui 2 ciclos limites (C_1 e C_2) e um equilíbrio na origem, seu esboço se encontra na Figura 4.1.

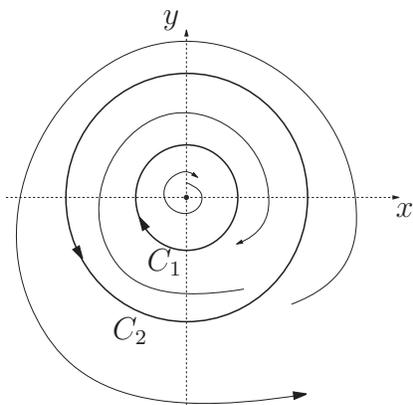


Figura 4.1: Esboço do retrato de fase do sistema do Exemplo 4.3.1.

Exemplo 4.3.2. Considere $C = \{C_1, C_2\}$, onde

$$C_1 = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad e \quad C_2 = x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Neste caso a curva C_1 é primária. Defina

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0, \quad e$$

$$f(x, y) = (f_1 \cdot f_2)(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 5x^2 - 5y^2 + 4.$$

Considere

$$\chi = (-f_y - f f_x) \frac{\partial}{\partial x} + (f_x - f f_y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

No nosso caso $f_x = 4x^3 + 4xy^2 - 10x$ e $f_y = 4y^3 + 4yx^2 - 10y$.

Assim,

$$\begin{aligned} \chi = & (-4x^7 - 12x^5y^2 - 12x^3y^4 - 4xy^6 + 30x^5 + 60x^3y^2 + 30xy^4 - 66x^3 - 4x^2y \\ & - 66xy^2 - 4y^3 + 40x + 10y) \frac{\partial}{\partial x} + (-4x^6y - 12x^4y^3 - 12x^2y^5 - 4y^7 \\ & + 30x^4y + 60x^2y^3 + 30y^5 - 66y^3 + 4x^3 - 66x^2y + 4xy^2 - 10x + 40y) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Note que se $\nabla f = 0$, temos $\chi = 0$, assim,

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (4x^3 + 4xy^2 - 10x, 4y^3 + 4yx^2 - 10y)$$

e

$$\nabla f = (0, 0) \Leftrightarrow (4x^3 + 4xy^2 - 10x, 4y^3 + 4yx^2 - 10y) = (0, 0),$$

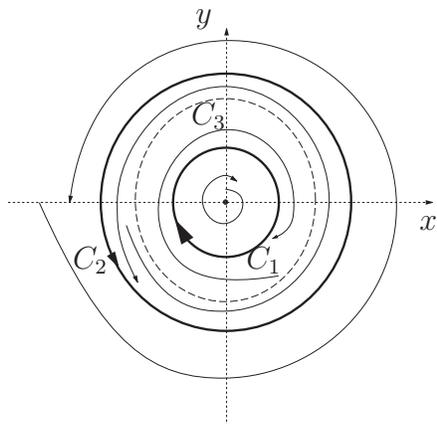


Figura 4.2: Esboço do retrato de fase do sistema do Exemplo 4.3.2.

assim

$$x(4x^2 + 4y^2 - 10) = 0 \quad \text{e} \quad y(4y^2 + 4x^2 - 10) = 0,$$

o que implica $x = y = 0$, ou

$$4x^2 + 4y^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{5}{2},$$

ou seja, a circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{5/2}$. Assim, temos uma circunferência de equilíbrios C_3 entre a primeira circunferência C_1 e a segunda circunferência C_2 . O outro equilíbrio é o ponto $(0,0)$. A matriz Jacobiana do campo em consideração em $(0,0)$ é

$$B = \begin{bmatrix} 40 & 10 \\ -10 & 40 \end{bmatrix},$$

cujos determinante é $1700 > 0$ e o traço é $80 > 0$. Portanto, pelo Teorema 2.0.1 de Hartmann-Grobman o equilíbrio $(0,0)$ é um nó instável. Além disso, temos 2 ciclos limites (C_1 e C_2), os quais são ambos estáveis, e uma circunferência de equilíbrios C_3 . Veja a Figura 4.2.

Exemplo 4.3.3. Considere as curvas C_1 e C_2 , onde

$$C_1 = (x - 2)^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad C_2 = (x + 2)^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Defina

$$f_1(x, y) = (x - 2)^2 + y^2 - 1 = 0, \quad f_2(x, y) = (x + 2)^2 + y^2 - 1 = 0,$$

$$f(x, y) = (f_1 \cdot f_2)(x, y) = ((x-2)^2 + y^2 - 1)((x+2)^2 + y^2 - 1) = x^4 - 10x^2 + 2x^2y^2 + 9 + 6y^2 + y^4.$$

Considere

$$\chi = (-f_y - f f_x) \frac{\partial}{\partial x} + (f_x - f f_y) \frac{\partial}{\partial y},$$

onde $f_x = 4x^3 - 20x + 4xy^2$, $f_y = 4yx^2 + 12y + 4y^3$.

Assim,

$$\begin{aligned} \chi = & (-4x^7 + 60x^5 - 12x^5y^2 + 56x^3y^2 - 236x^3 - 12x^3y^4 - 4xy^4 - 4xy^6 \\ & - 4x^2y - 4y^3 - 12y + 180x + 84xy^2) \frac{\partial}{\partial x} + (-4x^6y + 28x^4y - 12x^4y^3 \\ & - 8x^2y^3 + 84x^2y + 4x^3 - 12x^2y^5 + 4y^2x - 20x - 108y - 108y^3 - 36y^5 - 4y^7) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio desse sistema são: $(0, 0)$, $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$.

Em $(0, 0)$, o sistema linearizado pode ser expresso pela matriz

$$M_1 = \begin{bmatrix} 180 & -12 \\ -20 & -108 \end{bmatrix},$$

cujos determinante é $-19680 < 0$ e o traço é $72 > 0$, pelo Teorema 2.0.1 de Hartmann-Grobman $(0, 0)$ é uma sela. Assim, automaticamente temos separatrizes oriundas da sela.

Em $(\sqrt{5}, 0)$, o sistema linearizado pode ser expresso pela matriz

$$M_2 = \begin{bmatrix} 640 & -32 \\ 40 & 512 \end{bmatrix},$$

cujos determinante é $328960 > 0$ e o traço é $1152 > 0$, pelo Teorema 2.0.1 de Hartmann-Grobman $(\sqrt{5}, 0)$ é um nó instável.

Em $(-\sqrt{5}, 0)$, o sistema linearizado pode ser expresso pela matriz

$$M_3 = \begin{bmatrix} 640 & -32 \\ 40 & 512 \end{bmatrix},$$

cujos determinante é $328960 > 0$ e o traço é $1152 > 0$, pelo Teorema 2.0.1 de Hartmann-Grobman $(-\sqrt{5}, 0)$ é um nó instável. Temos também 2 ciclos limites (C_1 e C_2), os quais são estáveis. Veja Figura 4.3.

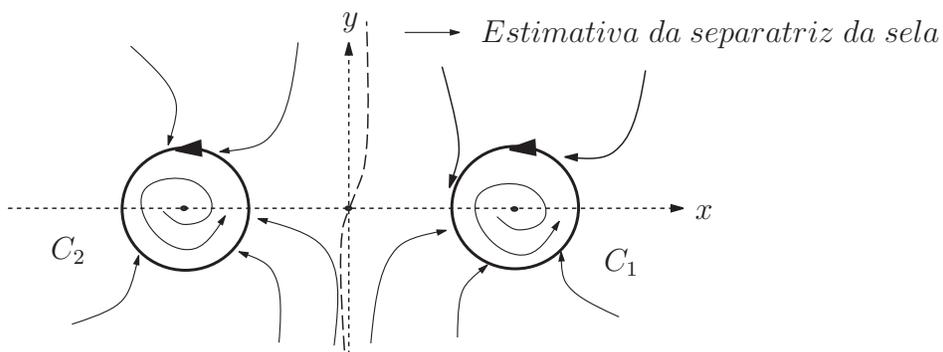


Figura 4.3: Esboço do retrato de fase do sistema do Exemplo 4.3.3.

Capítulo 5

Sobre o 16º Problema de Hilbert para ciclos limites algébricos

Neste capítulo, baseado em [14], o 16º Problema de Hilbert é resolvido em condições especiais que serão descritas a seguir.

Consideremos $\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial de grau n , $\chi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, onde P e Q são polinômios reais nas variáveis x e y , ou seja, χ é como em (2.1).

$\mathbb{C}[x, y]$ (respectivamente $\mathbb{R}[x, y]$) denotará o anel de todos os polinômios complexos (respectivamente reais) nas variáveis x e y .

A próxima definição é motivada pelo Lema 3.1.1.

Definição 5.0.1. *A curva algébrica $f(x, y) = 0$ de \mathbb{C}^2 é uma curva algébrica invariante do campo vetorial polinomial real χ quando para algum $k \in \mathbb{C}[x, y]$ tivermos*

$$\chi f = P f_x + Q f_y = k f,$$

onde χf é derivada direcional de χ na direção de f , f_x e f_y são derivadas parciais de f com respeito à variável subscrita. A função k é chamada cofator da curva algébrica invariante $f = 0$.

Note que k tem grau no máximo $n - 1$, onde n é o grau do campo χ . Basta notar que $P f_x + Q f_y$ tem grau no máximo $n + m - 1$, onde n é o grau de P e/ou Q e $m - 1$ é o grau máximo de f_x e/ou f_y . Note que estamos supondo o grau de f igual a m , chamando d de

grau máximo de k , temos $n + m - 1 = d + m$, logo $d = n - 1$. Portanto, o grau de k é, no máximo, $n - 1$.

Como χ é real, no caso que a curva algébrica invariante $f = 0$ é complexa não real, então $\bar{f} = 0$ também é uma curva algébrica invariante de cofator \bar{k} , já que

$$\chi f = Pf_x + Qf_y = kf \Rightarrow \overline{Pf_x + Qf_y} = \bar{k}\bar{f} \Rightarrow \chi\bar{f} = P\bar{f}_x + Q\bar{f}_y = \bar{k}\bar{f}.$$

A curva redutível $f\bar{f} = 0$ em $\mathbb{C}[x, y]$ é tal que $f\bar{f} = 0$ é uma curva algébrica invariante irredutível em $\mathbb{R}[x, y]$.

Uma vez que nos pontos da curva algébrica invariante $f = 0$, o gradiente (f_x, f_y) da curva é ortogonal ao campo χ , segue que o campo χ é tangente a curva $f = 0$. Logo, a curva $f = 0$ é formada por órbitas de χ , o que justifica o termo curva algébrica invariante, uma vez que é invariante sob o fluxo definido por χ .

Definição 5.0.2. *Um ciclo limite algébrico de grau m de χ é um oval de uma curva algébrica invariante irredutível real $f = 0$ de grau m que é um ciclo limite de χ .*

Definição 5.0.3. *Dizemos que o conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ de curvas algébricas irredutíveis é genérico se satisfaz as seguintes 5 condições:*

- (i) *Não existe pontos em que $f_j = 0$ e suas primeiras derivadas sejam todas nulas, isto é, $\nabla f_j \neq 0$ nos pontos onde $f_j = 0$.*
- (ii) *Os termos homogêneos de maior ordem de f_j não tem fatores repetidos.*
- (iii) *Se duas curvas se intersectam em um ponto do plano afim, elas são transversais.*
- (iv) *Não há mais do que 2 curvas $f_j = 0$ encontrando qualquer ponto do plano afim.*
- (v) *Não existem 2 curvas tendo um fator comum nos termos homogêneos de ordem maior.*

Os dois próximos resultados garantirão que podemos restringir nossa atenção às curvas algébricas invariantes irredutíveis, suas demonstrações serão feitas aqui, para mais detalhes veja [7].

Lema 5.0.1. *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$. Assumamos que f e g sejam relativamente primos em $\mathbb{C}[x, y]$. Então, para o sistema (2.1), $fg = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator k_{fg} se, e somente se, $f = 0$ e $g = 0$ são curvas algébricas invariantes com cofatores k_f e k_g respectivamente. Além disso $k_{fg} = k_f + k_g$.*

Demonstração: Afiramos primeiramente que $\chi(fg) = (\chi f)g + f(\chi g)$. De fato,

$$\begin{aligned}\chi(fg) &= \nabla(fg) \cdot \chi = (f_x g + f g_x, f_y g + f g_y) \cdot (P, Q) \\ &= f_x g P + f g_x P + f_y g Q + f g_y Q = (f_x P + f_y Q)g + f(g_x P + g_y Q) \\ &= (\chi f)g + f(\chi g).\end{aligned}$$

(\Rightarrow) Assuma que $fg = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator k_{fg} do sistema (2.1), então, $\chi(fg) = k_{fg}fg \Rightarrow k_{fg}fg = (\chi f)g + f(\chi g)$. Como f e g são relativamente primos, obtemos que f divide χf e g divide χg . Denote $k_f = \chi f/f$ e $k_g = \chi g/g \Rightarrow f k_f = \chi f$ e $g k_g = \chi g$. Então $f = 0$ e $g = 0$ são curvas algébricas invariantes e além disso $k_{fg} = k_f + k_g$.

(\Leftarrow) Assuma que $f = 0$ e $g = 0$ são curvas algébricas invariantes com cofatores k_f e k_g , respectivamente. Então, $\chi f = k_f f$ e $\chi g = k_g g$. Além disso, $\chi(fg) = (\chi f)g + f(\chi g) = fg(k_f + k_g)$, logo, $fg = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator $k_{fg} = k_f + k_g$. ■

Proposição 5.0.1. *Suponhamos que $f \in \mathbb{C}[x, y]$ e seja $f = f_1^{n_1} \dots f_r^{n_r}$ sua fatoração em fatores irredutíveis sobre $\mathbb{C}[x, y]$. Então, para o campo vetorial $\chi = (P, Q)$, $f = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator k_f se, e somente se, $f_i = 0$ é uma curva algébrica invariante para cada $i = 1, \dots, r$, com cofator k_{f_i} . Além disso, $k_f = n_1 k_{f_1} + \dots + n_r k_{f_r}$.*

Demonstração: A partir do Lema 5.0.1 acima, temos que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator k_f se, e somente se, $f_i^{n_i} = 0$ é uma curva algébrica invariante para cada $i = 1, \dots, r$, com cofator $k_{f_i}^{n_i}$. Além disso, $k_f = k_{f_1}^{n_1} + \dots + k_{f_r}^{n_r}$. Agora, para provar essa proposição é suficiente mostrar que para cada $i = 1, \dots, r$, $f_i^{n_i} = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator $k_{f_i}^{n_i}$ se, e somente se, $f_i = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator k_{f_i} e que $k_{f_i}^{n_i} = n_i k_{f_i}$.

(\Rightarrow) Assuma $f_i^{n_i} = 0$ uma curva algébrica invariante com cofator $k_{f_i}^{n_i}$. Então, $k_{f_i}^{n_i} f_i^{n_i} = \chi f_i^{n_i} = n_i f_i^{n_i-1} \chi f_i$ ou equivalentemente $\chi f_i = (1/n_i) k_{f_i}^{n_i}$, definindo $k_{f_i} = k_{f_i}^{n_i}/n_i$, obtemos que $f_i = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator k_{f_i} tal que $k_{f_i}^{n_i} = n_i k_{f_i}$.

(\Leftarrow) Agora assumamos $f_i = 0$ uma curva algébrica invariante com cofator k_{f_i} , então, $\chi f_i = k_{f_i} f_i$, por outro lado, por definição

$$(\chi f_i^{n_i}) = n_i f_i^{n_i-1} \chi f_i \Rightarrow \chi f_i = \frac{\chi f_i^{n_i}}{n_i f_i^{n_i-1}} = \frac{f_i \chi f_i^{n_i}}{n_i f_i^{n_i}},$$

ou seja,

$$k_{f_i} = \frac{\chi f_i^{n_i}}{n_i f_i^{n_i}} \Rightarrow \chi f_i^{n_i} = n_i k_{f_i} (f_i^{n_i}),$$

portanto, $f_i^{n_i} = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator $k_{f_i^{n_i}} = n_i k_{f_i}$. ■

O próximo resultado está provado em [4] e é essencial para a prova do Teorema 5.0.5.

Teorema 5.0.1. *Sejam $f_i = 0$ para $i = 1, \dots, k$, curvas algébricas invariantes irredutíveis em \mathbb{C}^2 e $l = \text{grau}(f_1) + \dots + \text{grau}(f_k)$. Assuma que todas as curvas f_j satisfazem as condições de genericidade listadas na Definição 5.0.3, então, qualquer campo vetorial polinomial real χ de grau n tangente a todas as curvas f_j satisfaz uma das 3 seguintes condições:*

(a) *Se $l < n + 1$, então*

$$\chi = \left(\prod_{i=1}^k f_i \right) Y + \sum_{i=1}^k h_i \left(\prod_{j=1, j \neq i}^k f_j \right) \chi_{f_i}, \quad (5.1)$$

onde $\chi_{f_i} = (-f_{iy}, f_{ix})$ é um campo de vetores Hamiltoniano. Se f_i é um polinômio real, então h_i é um polinômio real arbitrário de grau até $n - l + 1$. Se f_i é um polinômio complexo não real, então h_i é um polinômio complexo arbitrário de grau até $n - l + 1$. O polinômio h para \bar{f}_i é \bar{h}_i , e Y é um campo vetorial polinomial real de grau até $n - l$.

(b) *Se $l = n + 1$, então*

$$\chi = \sum_{i=1}^k \alpha_i \left(\prod_{j=1, j \neq i}^k f_j \right) \chi_{f_i}, \quad (5.2)$$

com $\alpha_i \in \mathbb{R}$, se f_i é um polinômio real. $\alpha_i \in \mathbb{C}$, se f_i é um polinômio complexo não real, no caso de $\alpha_i \in \mathbb{C}$ não real, o α de \bar{f}_i é $\bar{\alpha}_i$.

(c) *Se $l > n + 1$, então $\chi = 0$.*

O próximo resultado é devido a Christopher e Kooij [12].

Proposição 5.0.2. *O campo vetorial (5.2) tem um fator integrante $R = \left(\prod_{i=1}^k f_i\right)^{-1}$.*

Demonstração: Iremos mostrar que $\text{div}(RP, RQ) = 0$. De

$$RP = \frac{-\sum_{i=1}^k \alpha_i \left(\prod_{j=1, j \neq i}^k f_j\right) f_{iy}}{\prod_{j=1}^k f_j} = -\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i f_{iy}}{f_i}, \quad RQ = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i f_{ix}}{f_i},$$

note que

$$(RP)_x + (RQ)_y = \sum_{i=1}^k \alpha_i \left(\frac{-f_{iyx} f_i + f_{iy} f_{ix} + f_{ixy} f_i - f_{ix} f_{iy}}{f_i^2} \right) = 0.$$

Portanto, $\text{div}(RP, RQ) = 0$, o que implica R é um fator integrante. ■

O teorema a seguir mostra que as condições de genericidade do Teorema 5.0.1 são necessárias. A sua demonstração pode ser encontrada em [4].

Teorema 5.0.2. *Se uma das condições (i) – (v) das condições de genericidade não é satisfeita, então as conclusões do Teorema 5.0.1 não são necessariamente válidas.*

Alguns resultados técnicos serão necessários para concluir o resultado que queremos.

Lema 5.0.2. *Seja $D \subset \mathbb{R}^s$ o conjunto compacto*

$$D = \{(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s : x_j \geq 1, j = 1, \dots, s, \sum_{j=1}^s x_j \leq l\},$$

com $l \geq s$ inteiro, e seja $k : D \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$k(x_1, \dots, x_s) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (x_j - 1)(x_j - 2).$$

Então, o valor máximo de k é $(l - s)(l - s - 1)/2 \geq 0$, que é alcançado no vértice $(l + 1 - s, 1, \dots, 1)$ do simplexo D .

Demonstração: Primeiramente observemos que

$$k(x_1, \dots, x_s) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \left(x_j - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{s}{8}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
k(x_1, \dots, x_s) &= \frac{1}{2} ((x_1 - 1)(x_1 - 2) + \dots + (x_s - 1)(x_s - 2)) \\
&= \frac{1}{2} (x_1^2 - 3x_1 + 2 + \dots + x_s^2 - 3x_s + 2) \\
&= \frac{1}{2} \left(x_1^2 - 3x_1 + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} + \dots + x_s^2 - 3x_s + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(x_1^2 - 3x_1 + \frac{9}{4} + \dots + x_s^2 - 3x_s + \frac{9}{4} \right) - \frac{s}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \left(x_j - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{s}{8}.
\end{aligned}$$

Note que k é uma função contínua definida em um compacto D , logo k possui máximo e mínimo. Estamos interessados no máximo de k . Agora vamos justificar o fato de que o valor máximo de k é alcançado em algum vértice do simplexo D . A função $2k$ é o quadrado da distância mais a constante $s/4$ entre os ponto (x_1, \dots, x_s) do simplexo D e o ponto $(3/2, \dots, 3/2)$. Isso justifica o valor máximo de k ser alcançado no vértice do simplexo D .

Determinaremos o valor máximo da função k . Se $s = 1$, então, $D = [1, l]$ e o valor máximo da função $(x_1 - 1)(x_1 - 2)/2$ sobre o intervalo D é $(l - 1)(l - 2)/2$, que ocorre no ponto $x_1 = l$. Portanto, o lema está provado para $s = 1$.

Se $s = 2$, então D é o triângulo $T \subset \mathbb{R}^2$ de vértices $(1, 1)$, $(l - 1, 1)$ e $(1, l - 1)$ e o valor máximo da função $\sum_{j=1}^2 (x_j - 1)(x_j - 2)/2$ é $(l - 2)(l - 3)/2$, que ocorre nos pontos $(l - 1, 1)$ e $(1, l - 1)$. Portanto, o lema está provado para $s = 2$.

Para $s > 2$, D é o simplexo $S \subset \mathbb{R}^s$ de vértices $(1, 1, \dots, 1)$, $(l - s + 1, 1, \dots, 1)$, $(1, l - s + 1, \dots, 1)$, \dots , $(1, 1, \dots, l - s + 1)$ e o valor máximo da função k é $(l - s)(l - s + 1)/2$, que ocorre em todos os vértices de S exceto em $(1, 1, \dots, 1)$. Portanto, o lema está provado para $s > 2$. ■

O próximo resultado, que pode ser encontrado em [24], fornece o número máximo de ovals de uma curva algébrica real de grau dado.

Teorema 5.0.3 (Teorema de Harnack). *O número de ovals de uma curva algébrica real de grau m é no máximo $1 + (m - 1)(m - 2)/2$ quando m é par, e $(m - 1)(m - 2)/2$ quando m é ímpar. Além disso, estes limitantes superiores são alcançados para curvas algébricas convenientes de grau m chamadas M -curvas.*

Sejam χ um campo vetorial polinomial real e $f_j = 0$, para $j = 1, \dots, k$, o conjunto de todas as curvas algébricas invariantes irreduzíveis complexas de χ . Então consideramos o conjunto de todas as curvas algébricas invariantes irreduzíveis reais $g_i = 0$ de χ que são formadas pelas curvas $f_j = 0$, se f_j é um polinômio real ou $f_j \bar{f}_j = 0$ se f_j é um polinômio não real. No que se segue chamaremos o conjunto de curvas $g_i = 0$ para $i = 1, \dots, s$, de conjunto de *curvas algébricas invariantes reais* associadas a $f_j = 0$, para $j = 1, \dots, k$.

Denotaremos por $A(l, s)$ o número máximo de ovais contidos nas curvas algébricas invariantes reais $g_i = 0$, para $i = 1, \dots, s$, de um campo vetorial polinomial tendo exatamente essas s curvas algébricas invariantes com $l = \sum_{i=1}^s \text{grau}(g_i)$. A próxima proposição fornecerá um limitante superior para $A(l, s)$.

Proposição 5.0.3. *Para $j = 1, \dots, s$, seja $g_j = 0$ curvas algébricas irreduzíveis reais tal que*

$$\text{grau}(g_j) = m_j \geq 1, \quad l = \sum_{j=1}^s m_j,$$

e seja k_j o número máximo possível de ovais da curva $g_j = 0$. Para o campo vetorial polinomial χ de grau n para o qual as curvas $g_j = 0$, para $j = 1, \dots, s$, são as únicas curvas algébricas invariantes de χ , temos

$$A(l, s) \leq \frac{1}{2}(l - s)(l - s - 1) + \sum_{j=1}^s a_j,$$

onde $a_j = 1$, se m_j é par, e $a_j = 0$, se m_j é ímpar.

Demonstração: A partir do Teorema 5.0.3, sabemos que

$$k_j = \begin{cases} 1 + (m_j - 1)(m_j - 2)/2, & \text{se } m_j \text{ for par} \\ (m_j - 1)(m_j - 2)/2, & \text{se } m_j \text{ for ímpar} \end{cases}$$

o número máximo de ovais é

$$\begin{aligned} k_1 + \dots + k_s &= ((m_1 - 1)(m_1 - 2)/2 + \dots + (m_s - 1)(m_s - 2)/2) + a_1 + \dots + a_s \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (m_j - 1)(m_j - 2) + \sum_{j=1}^s a_j = k(m_1, \dots, m_s) + \sum_{j=1}^s a_j, \end{aligned}$$

onde aplicando o Lema 5.0.2, temos

$$k(m_1, \dots, m_s) + \sum_{j=1}^s a_j \leq \frac{1}{2}(l - s)(l - s - 1) + \sum_{j=1}^s a_j.$$

Portanto, $A(l, s) \leq \frac{1}{2}(l-s)(l-s-1) + \sum_{j=1}^s a_j$. ■

O próximo resultado é devido a Christopher [3].

Teorema 5.0.4. *Seja $g = 0$ uma curva algébrica não-singular de grau n e h um polinômio de primeiro grau escolhido de modo que a reta real $h = 0$ encontra-se fora dos ovais de $g = 0$. Escolha números reais a e b tais que $ah_x + bh_y \neq 0$. Então o campo vetorial polinomial de grau n ,*

$$\dot{x} = ag - hg_y, \quad \dot{y} = bg + hg_x,$$

tem todos os ovais de $g = 0$ como ciclos limites hiperbólicos. Além disso, esse campo de vetores não tem outros ciclos limites.

Demonstração: Aqui $\chi = (\dot{x}, \dot{y}) = (ag - hg_y, bg + hg_x)$, note que

$$\chi g = (ag - hg_y)g_x + (bg + hg_x)g_y = g(ag_x + bg_y)$$

e assim, temos que $g = 0$ é uma curva algébrica invariante para χ . Além disso, como g é não singular temos $(g_x, g_y) \neq (0, 0)$. Qualquer ponto de equilíbrio de χ sobre $g = 0$ ocorre quando $h = 0$ ou $g_x = g_y = 0$, mas isso não acontece pela definição de h e pelo fato de g ser não singular. Como χ não tem pontos de equilíbrio em $g = 0$, segue que cada componente limitada de $g = 0$ é uma solução periódica de χ . Mostraremos que eles são de fato ciclos limites hiperbólicos.

Considere γ uma componente limitada de $g = 0$. A partir da definição de h , sabemos que γ não cruza a reta $h = 0$, assim,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (\operatorname{div}(\chi)) dt &= \oint_{\gamma} (g_x(a + h_y) + g_y(b - h_x)) dt \\ &= \oint_{\gamma} \left(\frac{1}{h} \right) (a + h_y) dy - \left(\frac{1}{h} \right) (b - h_x) dx \\ &= \pm \int \int_{\operatorname{int}(\gamma)} \left(\frac{1}{h^2} \right) (ah_x + bh_y) dx dy \neq 0. \end{aligned}$$

A escolha do sinal na integral acima depende da direção a qual a curva limitada γ é transversal. Seja $k = ah_x + bh_y \neq 0$. Se $h\nabla g$ aponta para fora da região limitada por γ , então, γ é atravessado no sentido anti-horário e a integral tem o mesmo sinal de $-k$. Se

$h\nabla g$ aponta para dentro da região limitada por γ , então a integral tem o mesmo sinal de k . Assim, a componente limitada de $g = 0$ é um ciclo limite hiperbólico.

Suponhamos agora que exista um outro ciclo limite δ que não se encontra em $g = 0$. Sobre $h = 0$, a derivada direcional de χ na direção de h , $\chi h|_{h=0}$ é tal que $\chi h|_{h=0} = g(ah_x + bh_y)$. Assim, nenhum ciclo limite pode cruzar a reta $h = 0$, por isso δ deve situar-se em uma componente conexa $U \subset \mathbb{R}^2 - \{gh = 0\}$, de modo que g e h devem ter sinais constantes em U . Seja $U' = U \cap \text{int}\delta$ cujo limitante exterior é δ e cujo limitante interior é vazio ou a união de um número de ovais de $g = 0$. Denote ϵ o sinal de $-kgh$ em U . Por discussão já feita acima, a estabilidade desses ovais como ciclos limites de χ é dado pelo sinal de ϵ , estável para $\epsilon > 0$ e instável para $\epsilon < 0$. Em torno de cada um dos ovais no interior de U' escolhamos uma curva orientada positivamente γ_i para os quais o fluxo é sempre apontando para fora quando $\epsilon > 0$ e apontando para dentro quando $\epsilon < 0$. Tome uma nova região U'' consistindo dos pontos de U' para os quais são exteriores a γ_i . A função gh está bem definida sobre U'' e logo o campo vetorial obtido pela divisão de χ por gh também está bem definido. Não há fluxo em U'' atravessando δ e a direção do fluxo transversalmente a γ_i está em U'' para $k < 0$ e fora de U'' para $k > 0$, porém a divergência do campo vetorial em U'' é $-(ah_x + bh_y)/h^2$ que tem sinal oposto a k , o que gera uma contradição. ■

Proposição 5.0.4. *Para um campo vetorial polinomial real χ de grau n com somente uma curva algébrica invariante irredutível não-singular de grau $n \geq 2$, temos*

$$A(n, 1) = \begin{cases} 1 + (n-1)(n-2)/2, & \text{se } n \text{ for par} \\ (n-1)(n-2)/2, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Além disso, esse limitante superior $A(n, 1)$ para o número máximo de ciclos limites de χ é alcançado.

Demonstração: A partir do Teorema de Harnack, segue que

$$A(n, 1) = \begin{cases} 1 + (n-1)(n-2)/2, & \text{se } n \text{ for par} \\ (n-1)(n-2)/2, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Pelo Teorema 5.0.4 esse número de ciclos limites algébricos de χ é alcançado. ■

Proposição 5.0.5. *Assuma que $f_j = 0$, para $j = 1, \dots, k$, são curvas algébricas satisfazendo as hipóteses do Teorema 5.0.1, e que*

$$l = \sum_{j=1}^k \text{grau}(f_j) = n + 1.$$

Seja $g_i = 0$, para $i = 1, \dots, s$, o conjunto de curvas algébricas invariantes associadas a $f_j = 0$, para $j = 1, \dots, k$. Então, para $s = 2, \dots, n$, o campo de vetores (5.2) de grau n satisfaz

$$A(n + 1, s) \leq \begin{cases} 1 + (n - 1)(n - 2)/2, & \text{se } n \text{ for par} \\ (n - 1)(n - 2)/2, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Se $s = 1$, então $A(n + 1, 1) = 0$.

Demonstração: Pela Proposição 5.0.2, sabemos que $\prod_{i=1}^s g_i$ é um fator integrante inverso do campo vetorial polinomial χ em (5.2). Assim, pelo Teorema 4.1.1, todos os ciclos limites de χ estão contidos nas curvas algébricas $g_i = 0$, para $i = 1, \dots, s$. Em particular, os ciclos limites de χ são algébricos. Pela Proposição 5.0.3, se $s = 2, \dots, n$, temos que

$$A(n + 1, s) \leq \frac{1}{2}(n + 1 - s)(n - s) + \sum_{i=1}^s a_j.$$

Note que o máximo de $(n + 1 - s)(n - s)/2 + \sum_{i=1}^s a_j$ ocorre quando $s = 2$ e o grau das duas curvas algébricas invariantes são n e 1 . Então, obtemos

$$A(n + 1, s) \leq \begin{cases} 1 + (n - 1)(n - 2)/2, & \text{se } n \text{ for par} \\ (n - 1)(n - 2)/2, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Assim, a proposição segue para $s = 2, \dots, n$.

Se $s = 1$, o campo vetorial polinomial χ torna-se $\chi = \alpha_1 \chi_{f_1}$, que é Hamiltoniano e, portanto, não tem ciclos limites. ■

Teorema 5.0.5. *Para um campo vetorial polinomial χ de grau $n \geq 2$ tendo todas as suas curvas algébricas invariantes irredutíveis também genéricas, o número máximo de ciclos limites algébricos é $1 + (n - 1)(n - 2)/2$, se n é par e $(n - 1)(n - 2)/2$, se n é ímpar. Além disso, esses limitantes superiores são alcançados.*

Demonstração: Como todas as curvas algébricas invariantes irreduzíveis $f_j = 0$ para $j = 1, \dots, k$, de χ são genéricas, estamos nas suposições do Teorema 5.0.1. Então, χ é um campo vetorial polinomial dado por (5.1), (5.2) ou 0. Se $\chi = 0$, então, χ não tem ciclos limites.

Para o campo vetorial (5.2), a prova segue da Proposição 5.0.5.

Seja $g_i = 0$, para $i = 1, \dots, s$, o conjunto de todas as curvas algébricas invariantes irreduzíveis sobre $\mathbb{R}[x, y]$ associada a $f_j = 0$ para $j = 1, \dots, k$.

Agora, assumamos que χ é um campo vetorial polinomial dado por (5.1), ($l < n + 1$). Aplicaremos a Proposição 5.0.3 a ele (por isso $l \geq s$). O inteiro l definido na Proposição 5.0.3 toma o valor máximo quando $l = n$. Portanto, temos que $l = n$ e $l > s$, pois, se $l = s$ teríamos o grau de cada g_i igual a 1 e nesse caso todas as n curvas algébricas invariantes seriam retas e conseqüentemente χ não teria ciclos limites algébricos.

Aplicando a Proposição 5.0.3 ao campo de vetores χ com $l = n > s$, e como χ tem exatamente s curvas algébricas invariantes irreduzíveis sobre $\mathbb{R}[x, y]$, obtemos

$$A(n, s) \leq \frac{1}{2}(n-s)(n-s-1) + \sum_{j=1}^s a_j.$$

Note que

$$A(n, s) \leq \frac{1}{2}(n-s)(n-s-1) + \sum_{j=1}^s a_j \leq \frac{1}{2}(n-s)(n-s-1) + s.$$

Afirmamos que

$$\frac{1}{2}(n-s)(n-s-1) + s \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1, \quad \text{para } n \geq 3.$$

Para provar essa afirmação, defina a função

$$h(s) = \frac{1}{2}(n-s)(n-s-1) + s - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - 1.$$

O gráfico dessa função é uma parábola em s satisfazendo

$$h(s) \leq 0 \Leftrightarrow s \in [1, 2(n-2)].$$

Portanto, se $n \geq 3$, então $1 \leq s \leq n-1 \leq 2(n-2)$. Assim, $h(s) \leq 0$ se $1 \leq s \leq n-1$ e conseqüentemente a afirmação está provada.

Dividiremos o restante da prova em 2 casos.

Caso 1: Assuma que n é par, com $n \geq 4$. Então

$$A(n, s) \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1.$$

Assim, o teorema está provado para esse caso. Para $n = 2$, como $n > s$ segue que $s = 1$, nesse caso da Proposição 5.0.3 temos $A(2, 1) \leq 1$. Portanto, o teorema está provado para n par.

Pela Proposição 5.0.4 segue que o limitante superior para $A(n, s)$ é alcançado. Isso completa a prova do teorema. ■

Tabela do número máximo \mathcal{N} de ciclos limites algébricos de um campo vetorial polinomial de grau n tendo todas suas curvas algébricas invariantes também genéricas, para $n = 2, \dots, 10$.

n	\mathcal{N}
2	1
3	1
4	4
5	6
6	11
7	15
8	22
9	28
10	37

Conclusões

Para concluir, vimos que nesta dissertação estudamos os sistemas diferenciais com ciclos limites não algébricos. Notamos que não é fácil concluir se um ciclo limite é não algébrico. Estudamos a realização de ciclos limites por campos vetoriais polinomiais. Além disso, estudamos uma prova para o 16º Problema de Hilbert para ciclos limites algébricos satisfazendo algumas exigências.

Como sugestões para próximos trabalhos podemos citar:

- Determinar se sistemas diferenciais polinomiais de grau 2 podem apresentar ciclos limites não algébricos explícitos.
- Resolver o 16º Problema de Hilbert para ciclos limites algébricos sem as exigências do Teorema 5.0.5.

Bibliografia

- [1] R. BAMON, *Quadratic vector fields in the plane have a finite number of limit cycles*, Int. Hautes Études Sci. Publ. Math., **64** (1986), 111–142.
- [2] R. BENTERKI E J. LLIBRE, *Polynomial differential systems with explicit non-algebraic limit cycles*, Electronic Journal of Differential Equations, vol: **2012** (2012), 1–6.
- [3] C. CHRISTOPHER, *Polynomial vector fields with prescribed algebraic limit cycles*, Geom. Dedicata, **88** (2001), 255–258.
- [4] C. CHRISTOPHER, J. LLIBRE, C. PANTAZI E X. ZHANG, *Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems*, J. Phys. A, **35** (2002), 2457–2476.
- [5] B. COLL, F. DUMORTIER, R. PROHENS, *Configurations of limit cycles in Liénard equations*, J. Differential Equations, **255** (2013), 4169–4184.
- [6] C. I. DOERING E A. O. LOPES, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [7] F. DUMORTIER, J. LLIBRE E J.C. ARTÉS, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer–Verlag, New York, 2006.
- [8] J. ÉCALLE, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, 1992.
- [9] H. GIACOMINI, J. LLIBRE, M. VIANO, *On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles*, Nonlinearity, **9** (1996), 501–516.

- [10] D. HILBERT, *Mathematische Probleme*, Lecture, Second Internat. Congr. Math. (Paris, 1900), *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.* (1900), 253–297; English transl., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **8** (1902), 437–479; *Bull. Amer. Math. Soc.*, **37** (2000), 407–436.
- [11] YU. ILYASHENKO, Finiteness Theorems for Limit Cycles, in: *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 94, Amer. Math. Soc., 1991.
- [12] R. KOOIJ E C. CHRISTOPHER, *Algebraic invariant curves and the integrability of polynomial systems*, *Appl. Math. Lett.*, **6** (1993), 51–53.
- [13] J. LLIBRE E G. RODRÍGUEZ, *Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields*, *J. Differential Equations*, **198** (2004), 374–380.
- [14] J. LLIBRE, R. RAMIREZ E N. SADOVSKAIA, *On the 16th Hilbert problem for algebraic limit cycles*, *J. Differential Equations*, **248** (2010), 1401–1409.
- [15] J. LLIBRE, *On the integrability of the differential systems in dimension two and of the polynomial differential systems in arbitrary dimension*, *Journal of Applied Analysis and Computation*, **1** (2011), 33–52.
- [16] K. ODANI, *The limit cycle of the van der Pol equation is not algebraic*, *J. Differential Equations*, **115** (1995), 146–152.
- [17] D. PERALTA-SALAS, *Note on a paper of J. Llibre and G. Rodríguez concerning algebraic limit cycles*, *J. Differential Equations*, **217** (2005), 249–256.
- [18] H. POINCARÉ, *Sur l'intégration des équations différentielles du premier ordre et du premier degré I and II*, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **5** (1891), 161–191; **11** (1897), 193–239.
- [19] S. SCHECTER E F. SINGER, *A class of vectorfields on S^2 that are topologically equivalent to polynomial vectorfields*, *J. Differential Equations*, **57** (1985), 406–435.
- [20] J. SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

- [21] J. SOTOMAYOR, *Curvas Definidas por Equações Diferenciais no Plano*, 13^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1981.
- [22] R. SVERDLOVE, *Inverse problems for dynamical systems*, J. Differential Equations, **42** (1981), 72–105.
- [23] R. J. WALKER, *Algebraic Curves*, Princeton Univ, Press, 1950, reprint, Dover, New York, 1962.
- [24] G. WILSON, *Hilberts sixteenth problem*, Topology, **17** (1978), 53–74.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB_6/1700

S586e

Silva, Fernando Félix Oliveira e
Estudo do 16º Problema de Hilbert com ênfase no caso algébrico
/ Fernando Félix Oliveira e Silva. -- Itajubá, (MG) : [s.n.], 2013.
66 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Luís Fernando de Osório Mello.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. 16º Problema de Hilbert. 2. Ciclo limite algébrico. 3. Curva
algébrica invariante genérica. I. Mello, Luís Fernando de Osório,
orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.