



*Ministério da Educação*  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
Criada pela Lei 10.435, de 24 de Abril de 2002

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**  
**EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**Arranjo de Misturas Generalizado para Otimização de**  
**Portfólio de Ativos Financeiros: Teoria e Aplicação**

**Pedro José Papandréa**

**Itajubá**

**Maio de 2013**



*Ministério da Educação*  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
Criada pela Lei 10.435, de 24 de Abril de 2002

# **UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**

## **PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**

### **EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**Pedro José Papandréa**

## **Arranjo de Misturas Generalizado para Otimização de**

### **Portfólio de Ativos Financeiros: Teoria e Aplicação**

**Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção**

**Área de Concentração: Otimização de Operações**

**Orientador: Prof. Dr. Rafael Coradi Leme**

**Mai de 2013**

**Itajubá – MG**



Ministério da Educação  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
Criada pela Lei 10.435, de 24 de Abril de 2002

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**Pedro José Papandréa**

## **Arranjo de Misturas Generalizado para Otimização de Portfólio de Ativos Financeiros: Teoria e Aplicação**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 10 de maio de 2013, conferindo ao autor o título de *Mestre em Ciências em Engenharia de Produção*.

**Banca examinadora:**

Prof. Dr. Rafael Coradi Leme

Prof. Dr. Anderson Paulo de Paiva

Prof. Dr. Ronã Rinston Amaury Mendes

**Itajubá 2013**

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por fazer parte da minha vida, me abençoando com a força, a sabedoria e a persistência necessárias para o alcance dos meus objetivos.

À minha mãe, por me dar seu pão na fome, seu cobertor no frio, seu amor incondicional, por ser forte, incansável e batalhadora. E por sempre me ensinar que o saber não ocupa lugar e há sempre espaço para mais.

Ao professor e amigo Rafael Coradi Leme, pela orientação, pela paciência, pelas importantes contribuições no desenvolvimento deste trabalho, as quais nunca serei capaz de retribuir a altura e por sempre acreditar em mim.

A todos os professores do Programa de Mestrado em Engenharia de Produção da UNIFEI, pela formação e conhecimento adquirido.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos os meus amigos, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos amigos do GEPE por sempre estarem comigo e sempre dispostos a ajudar, mas principalmente pela simples amizade.

Aos professores Dr. Anderson Paulo de Paiva e Dr. Ronã Rinston Amaury Mendes pela clareza e grandes contribuições na banca avaliadora.

## RESUMO

O processo de compra e venda de ações em Bolsas de Valores está cada vez mais difundido entre os investidores. Compor uma carteira ou portfólio eficiente é um grande desafio e está em constante processo de desenvolvimento, utiliza-se para tal as teorias de portfólio. Por outro lado o uso de arranjo de misturas em projetos de experimentos também é uma técnica continuamente estudada e melhorada. Utilizar estas duas técnicas em conjunto é uma inovação pouco estudada e que é explorada neste trabalho. Para estabelecer as relações entre as proporções das misturas são utilizados modelos polinomiais, no caso dos ativos, polinômios canônicos de grau dois, quadrático. Além do uso da função *desirability* e pontos interiores como métodos de otimização multiobjetivo lançou-se mão do teorema central do limite para reamostragem de dados determinísticos pelo método *bootstrap* permitindo que fossem feitas réplicas do experimento de misturas e tornando possível a análise dos erros e intervalo de confiança, intervalo este considerado também na fronteira eficiente do portfólio. O modelo de misturas escolhido foi o *simplex lattice*. Quanto aos tipos de investimentos, há dois tipos básicos: comprado e vendido. O primeiro diz respeito à compra de ativos, os quais se espera vender quando estiverem a um preço maior. O segundo, venda a descoberto, é a venda de um ativo que ainda não foi comprado, neste caso espera-se compra-lo a um preço menor do que foi vendido. O caso de venda a descoberto é considerado para escolha dos portfólios propostos neste trabalho como forma de aplicação nos experimentos permitindo que as misturas gerassem valores negativos, ou seja, poderá haver misturas que variem de valores negativos a positivos e vice-versa. Compor portfólios ótimos com o auxílio computacional, neste caso o programa Matlab®, em projetos de experimentos e otimização multiobjetivo será ainda uma das grandes contribuições da otimização de processos para o campo econômico.

Palavras-chave: Teoria de Portfólio, Ativos Financeiros, Ações, Projetos de Experimentos de Mistura.

## ABSTRACT

Portfolios are commonly used by investors of stock exchanges. To compose an efficient portfolio is a great challenge and it is in constant process of development, is used for such theories of portfolio. Nevertheless the use of mixtures designs of experiments is also a tool continuously studied and improved. Each ratio was considered as an active component in the mixture. Do work these two techniques together are an innovation and that is no longer studied and has been explored in this paper. To establish the relationship between the mixing ratios polynomial models have been used. As regards assets, canonical polynomials with degree two, quadratic, this has the advantage that no component in the mixture is suppressed from the regression model. Besides the use of the desirability function and interior point methods such as multi-objective optimization, it has been used the central limit theorem for deterministic data by bootstrap method allowing replicas were made of the experimental mixtures and making possible to analyze the errors confidence interval, which is also considered the efficient frontier of the portfolio. The model chosen was the mixtures simplex lattice. As for the types of investments, there are two basic types: long and short position. The first concerns the investor makes money when asset price raises. The second, short operation, the investor profits when assets price goes down, one sell an asset without owing. The case of short operation is considered for the choice of portfolios proposed in this study to application in experiments allowing mixtures generate negative values, so there may be mixtures vary from negative to positive and vice versa, expanding the experimental domain, forming optimal portfolios with auxiliary computer programs, in this case the Matlab® in projects and experiments multi-objective optimization.

Keywords: Portfolio Theory, Financial Assets, Design of Experiments, Design Mixture Experiments.

## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 1.1 – Ganho x Perda Potencial de um Investimento .....                        | 17 |
| Figura 2.1 – A Barra de Preços de Ações .....  | 20 |
| Figura 2.2 – Risco em Função do Retorno .....  | 20 |
| Figura 2.3 - Fronteira eficiente média-variância .....                               | 24 |
| Figura 3.1 - Espaço fatorial restrito para misturas com 2 componentes.....           | 32 |
| Figura 3.2 - Espaço fatorial restrito para misturas com 3 componentes.....           | 32 |
| Figura 3.3 - Sistema de coordenadas trilinear .....                                  | 33 |
| Figura 3.4 - Arranjo de misturas com restrições .....                                | 33 |
| Figura 3.5 - Arranjo de misturas com centróide .....                                 | 34 |
| Figura 3.6 - Outros arranjos de mistura clássicos.....                               | 34 |
| Figura 3.7 - Arranjo de misturas para 4 fatores .....                                | 35 |
| Figura 3.8 - Arranjo com Regiões Irregulares.....                                    | 35 |
| Figura 3.9 - Arranjo de Misturas com Restrições.....                                 | 36 |
| Figura 4.1 - Mistura <i>simplex lattice</i> para análise fatorial tamanho três.....  | 38 |
| Figura 4.2 - <i>Mixture lattice</i> para análise de portfólio com três fatores ..... | 41 |
| Figura 5.1 - Otimização individual para maximização.....                             | 44 |
| Figura 5.2 - Otimização individual para minimização .....                            | 45 |
| Figura 5.3 - Otimização multiobjetivo .....  | 46 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 5.4 – Histograma dos Dados Originais .....                                       | 50 |
| Figura 5.5 – Histograma dos Dados Transformados .....                                   | 50 |
| Figura 5.6 - Teste de Normalidade dos Dados Originais .....                             | 50 |
| Figura 5.7 - Teste de Normalidade dos Dados Transformados .....                         | 50 |
| Figura 6.1 - Gráfico de superfície de resposta para a equação (6.6) .....               | 55 |
| Figura 6.2 - Fronteira eficiente e de resultados experimentais para o pri. exemplo..... | 57 |
| Figura 6.3 - Gráficos de dispersão dos resultados experimentais.....                    | 59 |
| Figura 6.4 - Histogramas dos resultados experimentais.....                              | 60 |
| Figura 6.5 - Valores Estimados de Portfólios Viáveis.....                               | 61 |
| Figura 6.6 - Portfólios Viáveis com Intervalo de Confiança.....                         | 63 |
| Figura 7.1 - Fronteira Estimada e Intervalo de Confiança .....                          | 69 |

## LISTA DE TABELAS

|  |    |
|--|----|
| Tabela 6.1 - Projeto experimental e respostas para o primeiro exemplo..... | 54 |
| Tabela 7.1 - Códigos das Ações BOVESPA .....                               | 64 |
| Tabela 7.2 - Arranjo de misturas, 1 réplica .....                          | 65 |
| Tabela 7.3 - Retornos dos ativos .....                                     | 66 |
| Tabela 7.4 - Matriz de covariância .....                                   | 66 |
| Tabela 7.5 - Matriz de Correlação .....                                    | 67 |
| Tabela 7.6 - Coeficientes de Correlação.....                               | 67 |
| Tabela 7.7 - Portfólios 13 Ativos .....                                    | 71 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

|             |   |
|-------------|---|
| AG          | Algoritmos Genéticos  |
| BM&FBOVESPA | Bolsa de Mercadorias e Futuro - Bolsa de Valores de São Paulo                               |
| Bovespa     | Bolsa de Valores de São Paulo   |
| BVRJ        | Bolsa de Valores do Rio de Janeiro  |
| CAPM        | Modelo de precificação de ações   |
| CVaR        | Valor em Risco Condicional  |
| DOE         | Projeto de experimentos   |
| GLS         | Mínimos quadrados generalizados   |
| GMDEPO      | Modelo generalizado para Análise de Portfólio Baseado no Projeto de Experimentos de Mistura |
| IBOVESPA    | Página da Bolsa de Valores de São Paulo   |
| MDE         | Projetos de Experimentos de Mistura   |
| MVP         | Média-Variância do Portfólio  |
| NASD        | Associação Nacional de Agentes de Seguros   |
| S/A         | Sociedades Anônimas   |
| SEC         | Comissão de Seguros e Ações   |
| SPAN        | Margem de análise de sistema do risco padrão do portfólio                                   |
| VaR         | Valor em Risco  |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|              |                                      |
|--------------|--------------------------------------|
| $\alpha$     | Alfa                                 |
| $\beta$      | Beta                                 |
| $\mathbb{R}$ | Conjunto dos números Reais           |
| $\sigma^2$   | Variância                            |
| $\epsilon$   | Épsilon (pertence a)                 |
| $\mu$        | Média populacional                   |
| $N$          | Número de ensaios diferentes         |
| $u$          | Número de medições replicadas        |
| $n$          | Número de tentativas repetidas       |
| $\phi$       | Phi (variante)                       |
| $w$          | Proporção do componente              |
| $\psi$       | Psi                                  |
| $q$          | Quantidade de componentes da mistura |
| $\sum$       | Somatório                            |
| $X_i$        | Valor de cada componente             |
| $\lambda$    | Valor para transformação Box-Cox     |
| $\tilde{X}$  | Variável de transformação Box-Cox    |

## SUMÁRIO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. INTRODUÇÃO.....</b>                                   | <b>13</b> |
| 1.1 Problema de pesquisa.....                               | 15        |
| 1.2 Metodologia de Pesquisa .....                           | 15        |
| 1.3 Importância do tema.....                                | 16        |
| 1.4 Objetivos .....   | 17        |
| <b>2. SELEÇÃO POR PORTFÓLIOS.....</b>                       | <b>18</b> |
| 2.1 Mercado de Capitais.....                                | 18        |
| 2.2 Bolsa de Valores .....                                  | 19        |
| 2.3 Ações.....  | 21        |
| 2.4 Teoria de Portfólios.....                               | 21        |
| 2.5 Reamostragem, método <i>bootstrap</i> .....             | 27        |
| 2.6 Máxima verossimilhança .....                            | 27        |
| <b>3. PROJETO de EXPERIMENTOS APLICADO a PORTFÓLIO.....</b> | <b>28</b> |
| 3.1 Projeto de Experimentos .....                           | 28        |
| 3.1.1 Determinação do Erro Experimental.....                | 29        |
| 3.2 Projeto de Experimentos de Misturas .....               | 30        |
| 3.2.1 Modelos para Componentes de Mistura.....              | 31        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>4. ANÁLISE DE PORTFÓLIO BASEADO NO PROJETO DE EXPERIMENTOS DE MISTURAS .....</b>                   | <b>37</b>  |
| 4.1 Modelo generalizado para Análise de Portfólio Baseado no Projeto de Experimentos de Mistura ..... | 39         |
| <b>5. OTIMIZAÇÃO DE EXPERIMENTOS .....</b>  | <b>43</b>  |
| 5.1 Método dos Pontos Interiores .....  | 43         |
| 5.2 Método <i>Desirability</i> .....  | 43         |
| 5.3 Função <i>Desirability</i> para Portfolio Multiobjetivo .....                                     | 46         |
| 5.4 Modelos Econométricos e Regressivos .....   | 48         |
| 5.4.1 Regressão Linear .....  | 48         |
| 5.4.2 Modelos de Transformação .....  | 49         |
| <b>6. DISCUSSÃO SOBRE EXEMPLOS NUMÉRICOS.....</b>   | <b>53</b>  |
| 6.1.1 Casos com três empresas.....  | 53         |
| 6.1.2 A Influência dos Erros de Estimação .....   | 58         |
| <b>7. RESULTADOS .....</b>  | <b>64</b>  |
| 7.1 Aplicação: IBOVESPA com 11 empresas, 13 ativos .....  | 64         |
| <b>8. CONCLUSÕES.....</b>   | <b>72</b>  |
| 8.1 Sugestões para estudos futuros .....  | 73         |
| <b>9. APÊNDICE – CÓDIGOS MATLAB® .....</b>  | <b>74</b>  |
| <b>10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>   | <b>100</b> |

# 1. INTRODUÇÃO

“Nunca colocar todos os ovos em uma mesma cesta!” Este conhecido ditado popular pode ser comparado com a diversificação de investimentos em ações da bolsa de valores. Neste mercado, o portfólio, ou carteira é uma estratégia que auxilia na redução dos riscos envolvendo esses ativos financeiros.

Markowitz é conhecido como o pai da teoria moderna de portfólio. Ele provou o teorema fundamental da média-variância do portfólio, em que para uma dada variância haverá um retorno esperado, produzindo assim uma fronteira eficiente. O objetivo foi desenvolver um portfólio que maximizasse o retorno esperado com um risco mínimo possível.

Embora o trabalho seminal de Markowitz tenha sido amplamente utilizado, vários autores têm contribuído para este estudo e modificado aspectos importantes. Artzner et al. (1999), por exemplo, investigou medidas coerentes de risco, tais como, o Valor em Risco (*Value-at-Risk* - VaR).

Da mesma forma, outras abordagens têm sido propostas, tais como otimização média-variância-assimetria-curtose baseado no portfólio (LAI et al., 2006), ou média-semivariância-entrópica do modelo (ZHANG et al., 2012).

Rockafellar e Uryasev (2002) propuseram o uso do Valor em Risco Condicional (*Conditional Value at Risk* - CVaR) como medida de risco para otimização do portfólio. Neste contexto os modelos de portfólios também evoluíram para uma abordagem de otimização multiobjetivo, a fim de maximizar o retorno esperado e minimizar o risco diversificável, simultaneamente. Essas abordagens, no entanto não levam em consideração, por exemplo a venda a descoberto. Está é uma importante modalidade de investimento que será discutida aqui.

Para resolver o problema de portfólio, várias técnicas de otimização podem ser utilizadas, tais como, programação quadrática (BEST, 2010), método de pontos interiores (GONDZIO e GROTHEY, 2007), programação linear inteira mista (BENATI e RIZZI, 2007), otimização sequencial mínima (ZHANG et al., 2009), programação estocástica (ABDELAZIZ

et al., 2007), as abordagens bayesianas (SOYER e TANYERI, 2006), algoritmos genéticos (LIN e LIU, 2008), métodos de inicialização (BAI et al., 2009), algoritmo evolutivo (BRANKE et al., 2009) entre outros. No entanto, estas abordagens, geralmente não incorporam erros de estimação para as proporções ideais de cada ativo no portfólio. Em tais casos, o investidor deve contratar exatamente o valor obtido a partir de um modelo matemático. Contudo quando este valor flutua, o lucro máximo pode ser fortemente afetado.

Os erros de estimação, na verdade, desempenham um papel importante na seleção de portfólio. Michaud (1989) e Chopra e Ziemba (1993) discutiram o impacto do erro de estimação na escolha do portfólio ótimo. Além disso, Ben-Tal e Nemirovski (1998), Goldfarb e Iyengar (2003) e Halldórsson e Tutuncu (2003) propuseram a utilização de modelos de otimização robusta, ou seja, que consideram erros de estimação, para reduzir esses impactos do erro de estimação no portfólio, mencionados anteriormente.

Uma alternativa para estes métodos é proposta por Oliveira et al. (2011), por meio da otimização de portfólios com a ajuda de Projetos de Experimentos de Mistura (*Mixture Design of Experiments* - MDE). Projetos de experimentos têm sido amplamente utilizados em aplicações relacionadas à análise de simulação. Balestrassi et al. (2009), por exemplo, usou arranjos fracionários e fatoriais completos para melhor determinar os parâmetros de uma Rede Neural Artificial (RNA) em um problema não linear de previsão de séries temporais de curto prazo, os preços diários e retornos.

Utilizando os mesmos conceitos, Oliveira et al. (2011) apresentaram uma nova abordagem para ajustar o Valor em Risco Condicional (CVaR – *conditional value at risk*) na métrica para um mix de contratos nos mercados de energia usando MDE. Neste tipo de estratégia experimental, os fatores de concepção são tratados como proporções de um sistema de mistura, considerados bastante adequados para o tratamento de portfólios de uma forma geral. A função de otimização (*desirability*) é utilizada para combinar o objetivo multivariado que irá maximizar o retorno, enquanto minimiza o risco e irá retornar o portfólio ótimo. Esta função substitui o uso direto da programação linear e não linear. No entanto, a aplicação de modelos de otimização de portfólios utilizando as técnicas de DOE são pouco exploradas, de modo que este trabalho tem a intenção contribuir com esta abordagem. Outra contribuição deste trabalho

é a reamostragem dos dados para análise dos erros de estimação e também a fronteira eficiente real com intervalos de confiança.

Para tanto, neste trabalho as aplicações da função MDE e da função *desirability* para otimização de portfólios são generalizadas e as medidas de risco de comportamentos diferentes, tais como as medidas de variância, são consideradas. Além disso, as operações de venda a descoberto que são aquelas em que o investidor vende a ação sem tê-la comprado comprando-a quando seu preço estiver mais baixo, são avaliados. O objetivo deste trabalho é desenvolver um método genérico de otimização multiobjetivo utilizando a técnica MDE por meio da abordagem da teoria do portfólio tradicional permitindo a inclusão de erros de estimação e intervalo de confiança para a tomada de decisão.

## 1.1 Problema de pesquisa

Conforme apresentado pelo Capítulo 1, o presente trabalho tem como principal objetivo propor o uso de um Arranjo de Misturas Generalizado para Otimização de Portfólio de Ativos Financeiros (GMDEPO). Busca-se identificar a combinação ótima dos parâmetros de um projeto de misturas que permita a maximização do lucro (média) e minimização dos riscos (variância) de portfólios em ativos financeiros.

A descrição do objeto de estudo anterior o caracteriza como um problema complexo de otimização, na medida em que se deseja a otimização de múltiplas respostas e considerando que o modelo de portfólio é empregado para a escolha da proporção de dinheiro a investir em cada empresa deste. Portanto, uma abordagem científica para este tipo de problema se torna importante para que as técnicas de análise sejam corretamente definidas, permitindo que os resultados alcançados sejam coerentes e significativos. Além disso, utilizando uma técnica pouco usada na escolha de portfólios.

## 1.2 Metodologia de Pesquisa

Para a otimização do objeto de estudo descrito anteriormente, o presente trabalho utilizou, como método de pesquisa, uma abordagem quantitativa, aplicada com experimentação. Assim, entre as técnicas de experimentação, foi empregado o Projeto e Análise de Experimen-

tos, definido no **Capítulo 2.5** como o processo de planejamento dos experimentos para que dados apropriados sejam coletados e depois analisados por métodos estatísticos, o que resulta em conclusões válidas e objetivas (MONTGOMERY, 2009).

### 1.3 Importância do tema

Alocar diferentes ativos em um portfólio rentável é um dos principais problemas de estudo em várias áreas do conhecimento. Para o investidor isso consiste na estratégia de compra e venda de ativos por meio de uma carteira de investimento.

Embora existam muitos métodos de otimização de portfólio e também para otimização de misturas, a utilização conjunta destas duas técnicas para a otimização de portfólio é escassa na literatura tendo sido introduzida por Oliveira et al. (2011).

Investir de forma mais rentável sem grandes riscos de perda é fundamental para aqueles que decidem utilizar ações de empresas como forma de aplicação. Para diminuir as chances de perdas, os investidores optam por compor carteiras de ações, dividindo assim os valores por grupos de ações de empresas diferentes. Entretanto, o grande desafio é quanto investir em cada uma dessas ações do portfólio para se obter o maior rendimento com o menor risco possível.

Tier (2005) diz que a maioria dos investidores é prejudicada por convicções equivocadas sobre como alcançar o sucesso nos investimentos. Na **Figura 1.1** ele acrescenta que o ganho ou retorno potencial também pode ser a perda potencial, ou seja, o mesmo potencial que o investidor tem de ganhar com certo ativo, ele terá de perder com ele. Ainda, a chance de lucro de uma ação é a mesma chance de prejuízo. No entanto, não considerou a possibilidade de trabalhar com portfólios que maximizam os retornos com minimização das variâncias, o que pode tornar os riscos menores.

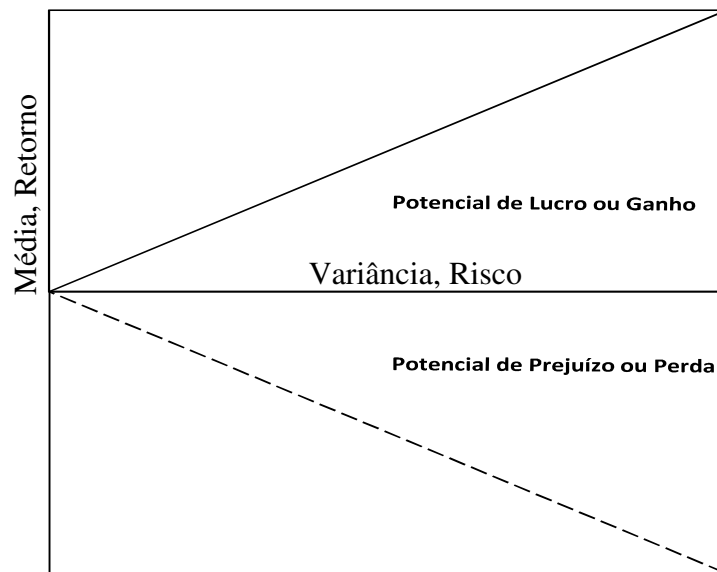


Figura 1.1 – Ganho x Perda Potencial de um Investimento

Fonte: TIER, 2005.

Há diversas formas de aplicação na Bolsa de Valores. Neste contexto, gestores estão preocupados com o efeito de suas decisões sobre o capital dos acionistas que é afetado pelo preço das ações, tendo isto como o seu principal indicador. McConnell et al. (1996) afirmam que o risco do investimento é medido como a volatilidade do preço das ações (variância). Esta volatilidade diz respeito ao quanto os preços dessas ações variam no decorrer do tempo, quanto mais variam, mais incerto é o retorno.

## 1.4 Objetivos

Em função do que foi exposto no item anterior, este trabalho foi desenvolvido com o propósito de cumprir com o objetivo principal: Desenvolver um modelo generalizado de arranjo de misturas para otimização de portfólios aplicando-o em ativos financeiros com otimização multiobjetivo. Possibilitar análise de sensibilidade dos erros de estimação sobre os erros do portfólio e intervalo de confiança na fronteira eficiente.

## 2. SELEÇÃO POR PORTFÓLIOS

### 2.1 Mercado de Capitais

Mercado de capitais é o mercado voltado para a transferência de recursos entre os agentes econômicos. Neste mercado, são efetuadas transações com títulos de prazos médios, longos e indeterminados, geralmente dirigidas ao financiamento dos capitais de giro e fixo (McCONNELL et al.,1996). Basicamente, trata-se de um mercado como qualquer outro, onde existem compradores e vendedores, portanto, desmistificando qualquer outro tipo de imagem que possa surgir, quando se trata de mercado de capitais, trata-se de comprar e vender contratos a um determinado preço.

Nomenclaturas: (BRADESCO, 2011).

- a) Posição Comprada – O investidor comprou um contrato futuro a um determinado preço e até então não o vendeu, ou a soma das quantidades que comprou em um determinado período é maior que a que vendeu, exemplo: Comprou 10 contratos de Dólar Futuro e vendeu 3, portanto, está comprado em 7 contratos de Dólar Futuro.
- b) Posição Vendida – O investidor vendeu um contrato futuro a um determinado preço e até então não o comprou, ou a soma das quantidades que vendeu em um determinado período é maior que a que comprou, exemplo: Vendeu 10 contratos de Ibovespa Futuro e comprou 4, portanto, está vendido em 6 contratos de Ibovespa Futuro.
- c) Posição Zerada – O investidor vendeu e comprou, ou comprou e vendeu a mesma quantidade de contratos futuros a um determinado preço, exemplo: Comprou 10 contratos Futuros de Boi Gordo e vendeu 10, está zerado.
- d) Contratos em aberto – Entende-se que para cada posição comprada existe uma posição vendida, o número de contratos em aberto de um determinado mercado é um dos indicadores que demonstra a liquidez que ele apresenta.
- e) Preço de ajuste – É o preço que o contrato atingiu no final do dia. Cada contrato tem uma característica particular de apuração. No caso do Dólar e do Ibovespa Futuro, o preço é apurado pela média ponderada dos últimos 15 minutos de negociação. Nos agrícolas existe um *call* de fechamento no qual em um determinado horário os compradores e vendedores fecham negócios, prevalecendo como ajuste o preço do último negócio, salvo alguns critérios especiais.
- f) Mercado futuro é o mercado no qual são realizadas operações envolvendo lotes padronizados de *commodities*, moedas de câmbio ou ativos financeiros, para liquidação em datas prefixadas. Há um compromisso de compra ou venda de determinado ativo numa data futura específica,

dada por um preço pré-estabelecido. O cliente assume, em determinado dia, uma posição comprada ou vendida em um mercado. Dessa forma, ganhará ou perderá de acordo com a oscilação dos preços nos dias posteriores. No caso de comprado, ganha com a alta dos preços e o vendido com a baixa.

- g) Mercado primário é no qual ocorre a colocação de ações ou outros títulos, provenientes de novas emissões. As empresas recorrem ao mercado primário para completar os recursos de que necessitam, visando o financiamento de seus projetos de expansão ou seu emprego em outras atividades.
- h) Mercado secundário é onde ocorre a negociação dos títulos adquiridos no mercado primário, proporcionando a liquidez necessária.

## 2.2 Bolsa de Valores

Bolsas de valores são associações civis e sem fins lucrativos que funcionam como se fossem clubes privados. É a sede das corretoras de títulos e valores mobiliários. Essas corretoras compram um título da instituição que lhes permite, como associada, fazer as negociações. A administração é feita por um conselho de corretores, eleito entre os membros associados, que indicam o presidente da entidade, para um mandato de quatro anos (SERIFSOY, 2006).

As bolsas de valores de todo o mundo são geralmente classificadas como leilão ou mercados revendedores, sendo este um local de encontro central em que os lances de compradores e vendedores convergem. São grandes mercados nos quais são negociados lotes de ações que podem ou não ter corretores (especialistas). Em um mercado de ações, o cliente coloca uma ordem com um corretor e o corretor é responsável por pesquisar o melhor preço entre as empresas que fazem parte da bolsa de valores (McCONNELL et al., 1996).

Uma barra de preços (**Figura 2.1**), simbolizada por uma barra vertical, é o registro pictográfico (ou traçado) de um dia de atividade do preço (um pregão) de um ativo financeiro (podem ser índices, ações ou mercadorias agropecuárias/financeiras), na qual cada preço é um consenso momentâneo de valor de todos os participantes do mercado, expresso em movimento. Cada barra de preço fornece alguns pedaços de informação sobre o equilíbrio de forças entre compradores e vendedores (TIER, 2005). Na barra vertical, através de um traço (tique) horizontal à sua esquerda está representado o nível de preço do primeiro negócio do dia, a abertura. O último negócio do dia, o fechamento, é representado por um tique horizontal à sua direita. As extremidades superior e inferior representam respectivamente à máxima e à mínima atingidas neste dia.

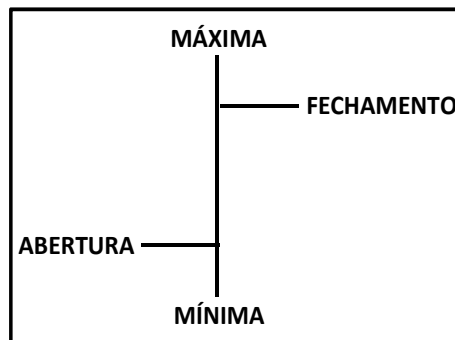


Figura 2.1 – A Barra de Preços de Ações

Fonte: TIER, 2005.

Travers (2004) classifica risco em função do retorno conforme **Figura 2.2:**

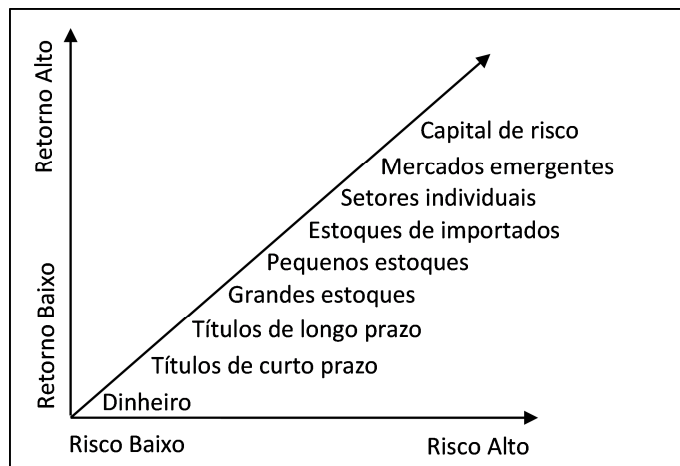


Figura 2.2 – Risco em Função do Retorno

Fonte: TRAVERS, 2004.

Segundo Baier et al. (2004), a Bolsa de Valores facilita a negociação de ações ajudando o crescimento do comércio, sendo que todas as transações são feitas de forma impessoal e possibilitam a compra e venda de ativos das empresas para os consumidores ou investidores. Ela é formada para diminuir o custo de negociação dos direitos de propriedade das empresas.

Cabem às bolsas orientar e fiscalizar os serviços prestados por seus membros (e, se for o caso, receber reclamações contra as corretoras), facilitar a divulgação constante de informações sobre as empresas de capital aberto (que têm ações) e os negócios realizados nos pregões diários. Além de central de negócios, as bolsas também controlam a efetivação das operações realizadas e garantem negó-

cios a médio e longo prazo. As duas maiores bolsas do Brasil são a Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa) e a Bolsa de Valores do Rio de Janeiro (BVRJ), (GIAMBIAGI, 2010).

Há três formas de negociação: à vista, a termo e por meio do mercado de opções. As operações nesses mercados podem ser feitas por meio de pregões eletrônicos, no qual os negócios são realizados diretamente por meio de computador (GIAMBIAGI, 2010).

Além do efeito de novas listagens no preço de ações, a covariância entre o retorno de várias ações tem despertado o interesse dos investidores por causa de seu papel de destaque como a medida adequada do risco de uma ação no modelo de precificação de ações (CAPM - *Capital asset pricing model*). As motivações para os estudos das covariâncias são duas: Primeiro, a covariância tem sido estudada como uma questão de curiosidade científica. Segundo, tem sido analisada como uma possível explicação para o aumento no preço das ações, que acompanham os novos anúncios. O argumento é que, se o CAPM está correto, a covariância mede o risco de uma empresa que determina o seu custo de capital. Se a lista reduz o risco, então a consequente redução, retorno exigido da ação poderia explicar o aumento de preços de ações no momento da listagem (McCONNELL et al., 1996).

## 2.3 Ações

Ação é a menor parte do capital de uma empresa. São títulos de renda variável, emitidos por empresas de capital aberto ou Sociedades Anônimas (S/A). As ações podem ser escriturais (existirem apenas nos registros da empresa) ou representadas por cautelas e certificados. O investidor em ações é um coproprietário da sociedade anônima da qual é acionista, participando de seus resultados. As ações são convertidas em dinheiro, a qualquer tempo, por meio de negociação em bolsas de valores ou no mercado de balcão (GIAMBIAGI, 2010).

## 2.4 Teoria de Portfólios

Como investir? A Teoria de portfólios fornece uma resposta a esta pergunta com base em dois princípios: deseja-se maximizar o retorno esperado e minimizar o risco. Essas metas são um tanto divergentes, porque os ativos mais arriscados geralmente têm um maior retorno esperado, uma vez que os investidores exigem uma recompensa maior para o risco de perda com esses ativos. A diferença entre o retorno esperado e a taxa de retorno de um ativo livre de risco é chamada de prêmio de risco. Sem prêmios de risco, poucos investidores iriam investir

em ativos de risco. No entanto, existem medidas ideais entre retorno esperado e o risco. A teoria de portfólios demonstra como maximizar o retorno esperado sujeito a um limite superior sobre o risco, ou como minimizar o risco sujeito a um limite inferior sob o retorno esperado. Um conceito chave é a redução do risco com a diversificação da carteira (RUPPER, 2011).

A decisão mais importante que um investidor pode fazer sobre seu investimento está no nível de risco que ele está disposto a suportar. O desejo no investimento é obter o maior retorno com o menor risco mesmo sabendo que retornos maiores estão sempre associados a riscos maiores (BRENTANI, 2004). O objetivo da gestão de portfólio é, portanto, reunir diversos títulos e outros ativos em carteiras que atendam às necessidades dos investidores. É trabalho do gestor da carteira gerir o vasto leque de informações disponíveis e transformar esta carteira em um investimento bem sucedido. A gestão de investimentos inclui a formação de um portfólio ótimo, ou seja, a determinação da melhor relação risco-retorno.

“O processo de seleção de uma carteira pode ser dividido em duas etapas. A primeira etapa começa com a observação e experiência e termina com crenças sobre os desempenhos futuros de títulos disponíveis. A segunda etapa começa com as crenças relevantes sobre desempenhos futuros e termina com a escolha da carteira” (MARKOWITZ, 1952).

A abordagem proposta por Markowitz foi pioneira na construção de modelos que buscam o portfólio ótimo de ativos com o uso da manipulação do binômio risco/retorno. Markowitz modelou o risco como sendo a variância dos retornos e com o uso da programação quadrática conseguiu determinar o quanto deve ser investido em cada um dos ativos candidatos, de modo a se atingir um determinado retorno a um mínimo risco (OLIVEIRA, 2011). Esta primeira abordagem motivou muitos trabalhos e é ainda amplamente citada em publicações.

Markowitz (1959) mostra ainda a relação entre o retorno esperado, concebido como a média dos retornos, e a variância do retorno, concebido como o risco do ativo. É analisado que, se houver um ativo com uma variância (risco) muito alta em relação aos outros ou uma média (retorno) muito baixa em relação aos outros ativos do portfólio, é possível que a formulação descarte este ativo. Importante também: se dois ou mais ativos tiverem o mesmo com-

portamento média-variância, a escolha de qualquer um deles ou a combinação deles resultará em peso igual na composição do portfólio.

Cass e Stiglitz (1970) descrevem que primeiro o investidor deve decidir qual proporção dos ativos de risco deve comprar. Então decide como dividir seu investimento total entre os ativos. Este tipo de separação é um caso especial mais generalizado de alocação ótima do investimento em um portfólio, ou seja, em um dado mercado em que existem ativos diferentes, todas as oportunidades relevantes para a decisão do investidor poder ser fornecidas por um conjunto de fundos de investimentos, um conjunto que pode ser definido por combinações lineares das proporções de cada ativo no portfólio.

A administração da carteira pode ser ativa ou passiva. As carteiras mais produtivas são geralmente aquelas que tratam o investimento como ativo. Ao contrário de títulos de investimentos, o ativo pode ser melhorado de inúmeras maneiras (referido na indústria como tendo "potencial de crescimento"). Portanto, o desempenho da carteira depende da elaboração e execução de um plano de ação ideal de longo prazo para cada propriedade. O desempenho do investimento é marcadamente sensível a fatores ambientais externos. Além das condições gerais de negócios, o sucesso do investimento é sensível às taxas de juros, taxas de inflação (por exemplo, o custo de cláusulas de escalção, aluguel em locações), as políticas fiscais e fatores locais (TRIPPI, 1989).

A Teoria de Portfólio permite gerenciar o risco em um grupo de ativos para determinar uma combinação que ofereça o menor risco e o maior retorno esperado. Esse grupo é chamado de portfólio ótimo. O portfólio de ativos é uma combinação de  $n$  ativos de interesse, cada um tendo retorno  $r_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), o retorno do portfólio, doravante denotado por  $r_p$ , é a média ponderada do retorno do ativo componente, com as proporções de investimentos como  $w_i$  sendo os pesos. Organizando  $r_i$  e  $w_i$  em vetores colunas  $r^T = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n]$  e  $w^T = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]$ , a equação,  $r_p$  do portfólio de retorno pode ser definida como:

$$r_p = w^T \cdot r \quad (2.1)$$

A média da distribuição de probabilidade do retorno, ou o rendimento esperado, é uma indicação da rentabilidade esperada. A variância da distribuição indica a amplitude dos resul-

tados possíveis em torno da média, isto é, quanto maior for a variância, o mais incerto é o resultado. Assim, a variância da distribuição é uma indicação intuitiva do risco envolvido.

Se a taxa de retorno evolui de maneira pelo menos fracamente estacionária ao longo do tempo, cada retorno do ativo pode ser representado por um processo estocástico com retorno esperado  $\mu_i = E[r_i]$  e a variância  $\sigma_i^2 = E[r_i^2]$ . Além disso, considerando a covariância entre ativos e  $\sigma_{ij} = E[r_i r_j]$ , como o retorno esperado do portfólio e sua variância podem ser escritos como:

$$\mu_p = w^T \cdot \mu \quad (2.2)$$

$$\sigma_p^2 = w^T \Sigma w \quad (2.3)$$

no qual  $\mu^T = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n]$ , e  $\Sigma$  é a matriz de covariância, com diagonal contendo  $\sigma_i^2$ , e fora da diagonal com  $\sigma_{ij}$ . Note-se que o  $\sigma_{ij}$  da covariância mede quantos dos retornos de dois ativos se movem em relação uns aos outros. Este é o conhecido modelo abordado por Markowitz: Média-Variância do Portfólio (MVP), estabelecendo a melhor estratégia para minimizar o risco e maximizar o retorno. Ao fazer isso, atinge-se a fronteira eficiente, na qual para um dado nível de variância, não existe outro portfólio com maior retorno esperado. Da mesma forma, para um dado nível de retorno esperado, não existe qualquer outro portfólio com menor variância. A **Figura 2.3** mostra a fronteira eficiente.

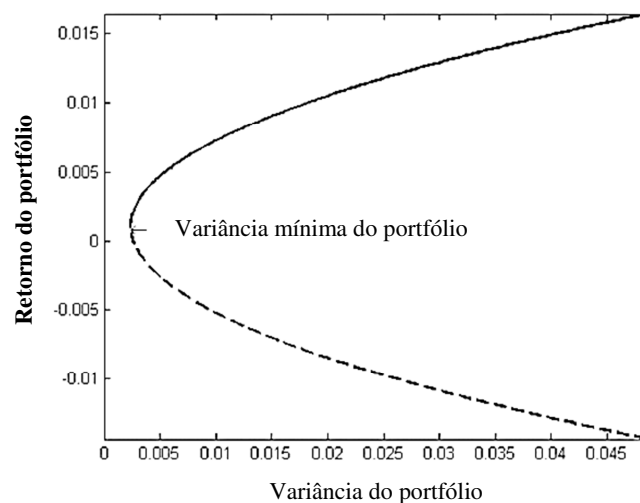


Figura 2.3 - Fronteira eficiente média-variância

Souza e Bignotto (1999) replicam o trabalho de Markowitz e reforçam que o objetivo geral da teoria de portfólio é o gerenciamento de carteiras de investimentos, com a seleção de portfólios (chamados portfólios eficientes) que maximizem os retornos esperados, dado um nível de risco. Para construção de um portfólio eficiente, supõe-se que o investidor seja avesso ao risco, ou seja, se há dois investimentos com o mesmo retorno esperado, mas com riscos diferentes, o investidor prefere aquele com menor risco. Para medir o risco de um portfólio, Markowitz (1952) propôs que fosse utilizada a técnica estatística da variância, que por definição, é a medida de dispersão em torno de um valor esperado. No entanto o mercado de capitais usa com maior frequência o desvio padrão como medida de risco, devido à característica de possuir a mesma unidade dos ativos, mas que, conceitualmente, é equivalente à variância. Outra técnica importante utilizada pela teoria é a quantificação da correlação entre os ativos, que permite identificar o quanto os ativos estão relacionados. As administradoras de recursos de terceiros, ou gestores de investimentos optam por aperfeiçoar o atendimento aos seus clientes, como aumentar o conjunto de informações disponíveis, central de dúvidas e consultoria, atendimento eletrônico e, principalmente, ter mais domínio dos riscos, conforme o retorno.

Souza e Bignotto (1999) não afirmam que a diversificação é superior à não diversificação, mas apenas que com ela é possível, combinando ativos de maneira correta, diminuir o risco envolvido, fato que hoje é muito considerado. Citam como exemplo, o caso de dividir uma aplicação em dois ativos diferentes (ação de duas empresas diferentes). Se os dois ativos tiverem mesma variância, contudo com correlações opostas, é possível concluir que: uma combinação deles terá variância menor que cada um dos ativos separadamente. O único caso no qual a variância resultante seria maior do que a de cada ativo isoladamente.

Dados os avanços da matemática e da estatística, bem como dos recursos computacionais, torna-se cada vez mais plausível encontrar as combinações eficientes de retorno-risco que atendem às expectativas do cliente-investidor. Vale ressaltar que, apesar da tecnologia racional envolvida, a decisão final de onde e como investir acaba por ser do administrador dos recursos, que vai, de acordo com o cenário, aplicar todo seu conhecimento e *feeling* para tomar as decisões no gerenciamento dos recursos.

Silva (2000) aplica a teoria de Markowitz em Mix de Produção e afirma que se tratando de finanças, se um investidor decide trabalhar com um investimento de risco mínimo como

a poupança ou Títulos do Governo, ele tem também um retorno mínimo de 1% ao mês. Da mesma forma, este investidor pode optar por uma aplicação cambial ou mercado de ações, tendo um risco maior de obter um rendimento altamente positivo ou negativo. O risco, no mercado financeiro, pode ser conceitualmente dividido em dois tipos básicos segundo o risco diversificável e o risco não diversificável. O primeiro refere-se aos riscos que afetam um número pequeno de empresas, ou seja, se algo der errado apenas uma ou poucas empresas serão afetadas. Pode-se ter um determinado evento que atinja todo o mercado e assim todos os ativos estariam afetados. Daí a possibilidade de investir em setores diferentes na carteira de investimento se torna mais factível.

Li e NG (2000) propuseram pela primeira vez a análise de portfólio multi-período fazendo uma analogia da até então mencionada teoria de Markowitz (1952) que analisa os portfólios em períodos únicos. A maior contribuição é que o portfólio sofre constantes alterações, à medida que o tempo passa e novas médias-variâncias são disponibilizadas, melhorando assim a compressão dos investidores quanto ao comportamento do portfólio escolhido.

Corrêa e Souza (2001), aplicaram a teoria de Markowitz (1952) a três ativos de empresas brasileiras. Citaram também que a crescente sofisticação dos mercados globais, têm exigido dos investidores a utilização de estratégias que maximizem a rentabilidade das suas carteiras de investimentos, minimizando o risco do portfólio. A partir de uma série histórica de preços de ações de três empresas do mercado brasileiro, foram determinadas, com o uso de métodos estatísticos, as medidas básicas de risco de investimento. Em seguida, os ativos foram agrupados em uma carteira para determinar a melhor combinação entre eles como forma de diluir o risco através do efeito de diversificação. A carteira de mínima variância é aquela cuja combinação de ativos proporciona o menor risco possível. A carteira ótima é aquela cuja composição dos ativos envolvidos resulta numa melhor relação risco/retorno possível. Tal fato reflete-se no menor coeficiente de correlação que pode ser obtido com o ativo a disposição na carteira. Esse trabalho limitou-se ao risco, diferentemente do que será tratado aqui.

É importante entender as diferenças entre o risco sistemático e o risco não sistemático. O risco não sistemático é o risco do portfólio em si, e será considerado neste trabalho, enquanto que o risco não sistemático, não diversificável ou risco de mercado é aquele relacionado às flutuações do sistema econômico como um todo e não é abordado na teoria de portfólio.

Costa e Araújo (2008), utilizaram o trabalho de Li e NG (2000) para melhor responder aos movimentos drásticos do mercado, como resultado de situações de mudanças devidas a descontinuidades de fatores externos. Formulando um modelo no qual o portfólio pode ser reavaliado de período em período e seus parâmetros possam ser modificados a contento.

## 2.5 Reamostragem, método *bootstrap*

O nome *bootstrap* é uma referência à história do Barão Von Münchhausee, o qual se livrou de um pântano por seus próprios esforços, fazendo alusão pelo método ser uma reamostragem gerada a partir dos próprios dados de uma amostra. Usando técnicas clássicas, não é fácil obter erros padrão ou intervalos de confiança para os parâmetros de uma série. Usando o *bootstrap*, no entanto, eles são facilmente encontrados. São criadas novas amostras, a partir de um conjunto de dados originais, por reamostragem dos dados com reposição de valores. Ao realizar este procedimento de reamostragem muitas vezes, uma boa estimativa pode ser obtida da distribuição das estatísticas de interesse. Tais distribuições podem ser vistas como uma aproximação às verdadeiras distribuições dos estimadores e, portanto, estatísticas de interesse, (WEHRENS, 2000).

Efron (1979) propõem que o uso deste método amplia o tipo de problema para que possa ter suas estatísticas analisadas, reduz os pressupostos necessários para validar as análises, e elimina os cálculos teóricos associados com a avaliação de precisão.

A principal aplicação do *bootstrap* não paramétrico é na determinação dos intervalos de confiança. Ele responde a perguntas como: qual é o intervalo de confiança de uma média, mediana, ou um quartil. Assim, a determinação de um erro padrão utilizando *bootstrap* é relevante (HENDERSON, 2005).

## 2.6 Máxima verossimilhança

Um dos melhores métodos de obtenção de um estimador pontual de um parâmetro é o método de máxima verossimilhança ou máxima probabilidade. Esta técnica foi desenvolvida por Fisher (1920), um famoso estatístico britânico. Como o nome indica, o estimador será o valor do parâmetro que maximiza a função de verossimilhança (MONTGOMERY, 2003).

### **3. PROJETO DE EXPERIMENTOS APLICADO A PORTFÓLIO**

Uma alternativa para os métodos de otimização de portfólios é proposto por Oliveira et al. (2011), por meio da otimização de portfólios com a ajuda de Projetos de Experimentos de Mistura (MDE). Apresentaram uma abordagem de projeto de experimentos de misturas para otimização de portfólios de contratos de energia elétrica. Nesse trabalho, no entanto, recursos de otimização de portfólios simulados foram pouco explorados. Para tentar preencher esta lacuna, a seguir será apresentada uma breve revisão sobre planejamento de experimentos e planejamento de experimentos de misturas.

#### **3.1 Projeto de Experimentos**

O Projeto de Experimentos (DOE) tem sido aplicado em diferentes disciplinas. De fato, é uma visão científica de processos e um caminho para o estudo sobre como os sistemas ou processos funcionam. É uma importante técnica para melhoria de desempenho em processos de manufatura. Também se estendendo ao desenvolvimento de novos processos. As aplicações das técnicas de DOE em desenvolvimento de processos podem resultar em: Melhoria do rendimento dos processos; redução de variabilidade e aproximação dos resultados reais aos valores nominais ou requisitos alvo do processo; redução do tempo de desenvolvimento; redução dos custos externos (MONTGOMERY, 2009).

Um experimento tem um lugar central na ciência, especialmente, devido à complexidade dos problemas com os quais a ciência. A questão de eficiência de utilização de um experimento é, portanto, imposta. Para aumentar a eficiência da pesquisa, é necessário introduzir algo completamente novo na pesquisa experimental clássica. Um tipo de inovação pode ser aplicar métodos estatísticos ou matemáticos para desenvolver o projeto de experimentos. Por este meio, o que se segue é essencial: redução ou minimização do número total de ensaios; análise simultânea de variação de todos os fatores que formalizam as atividades do objeto experimentador; escolha de uma estratégia clara que permita soluções confiáveis para serem obtidas após cada sequência de experimentos (ZIVORAD, 2004).

Portanto, algumas grandes vantagens do planejamento de experimentos são:

- Melhorar as características dos produtos: o DOE permite aos engenheiros compreender quais são as variáveis que influenciam a qualidade dos produtos e desta forma mudar ou controlar estas variáveis;
- Diminuir o tempo necessário para o desenvolvimento de um produto novo: a experimentação clássica de uma variável por vez pode durar indefinidamente. Com DOE os engenheiros sabem exatamente o que fazer para atingir as respostas que estão procurando;
- Maximizar a produtividade do processo: DOE mostra aos pesquisadores como trabalha o processo, de forma que eles podem incrementar a produtividade, se for possível;
- Minimizar a sensibilidade dos produtos às variações nas condições do processo: com DOE podemos mapear a relação entre variáveis e respostas de forma que os pesquisadores podem conhecer quais são as variações nas variáveis de controle que tem pouco ou nenhum efeito na resposta. As áreas onde o efeito na resposta é pequeno ou nulo. Ao mudar as variáveis de controle, são denominadas “áreas planas”. Se trabalhar com o processo nestas áreas planas, manter-se a qualidade dos produtos e minimizando a sensibilidade do mesmo;
- Explorar determinadas regiões de interesse para estimar parâmetros de modelos teóricos e para testar o ajuste destes modelos;
- Realizar estudos em plantas pilotos, antes de começar a produção na planta; realizar uma sintonia fina de novos processos ou processos em lançamento, incluindo aqui tanto processos produtivos como métodos analíticos;
- Maximizar o quociente custo/benefício dos ensaios: o DOE produz a máxima quantidade de informação por ensaio. Usando DOE o pesquisador pode planejar e orçar os gastos de forma que o quociente custo/benefício pode ser determinado com antecedência. Explorar modelos teóricos muito complexos: os resultados do modelo de um processo complexo podem ser amostrados segundo um plano experimental para visualizar as relações entre as variáveis e para realizar estudos de sensibilidade (BONANNI, 2005).

### **3.1.1 Determinação do Erro Experimental**

Um pesquisador que consegue um estudo da aplicação do projeto de experimentos deve ter uma ideia clara sobre os métodos de processamento dos resultados experimentais no caso real e antes de colocar em funcionamento, de modo a facilitar a pesquisa que define o objetivo e na elaboração das conclusões. A teoria matemática de experimentos diferencia vários tipos de erros no processamento de resultados experimentais, cada um dos quais, é característico de uma fase definitiva da análise dos dados. (ZIVORAD, 2004).

Cada experiência é constituída por certo número de pontos experimentais do projeto, cada projeto do ponto experimental com um ou mais ensaios replicados ou não, e um ponto único de uma ou mais medidas replicadas (determinações). De acordo com esta experiência podemos distinguir os erros (variância da reprodutibilidade), o teste da variância dos erros dos ensaios replicados e dos erros de medição (erro de determinação). Ao determinar um erro experimental, estima-se o desvio padrão dos ensaios replicados. Isso pode ser estimado pelo cálculo do desvio padrão dos vários ensaios cujo fator de controle, configurações, são os mesmos. O ideal seria criar e executar o mesmo processo várias vezes. As pequenas diferenças em uma configuração são um componente importante do erro experimental. O erro de replicação é composto de duas partes: o erro do experimento e o erro de medição. A variância da réplica é o quadrado do desvio padrão replicado. No caso de erro experimental estimamos a variância de reprodutibilidade. Antes do cálculo do erro experimental é necessário verificar a homogeneidade da variância em diferentes ensaios (ZIVORAD, 2004).

### 3.2 Projeto de Experimentos de Misturas

O Projeto de Experimentos de Misturas é um tipo de Projeto de Experimentos (DOE). Muitos produtos são feitos com a mistura de vários componentes. Tintas, alimentos, produtos químicos e farmacêuticos são alguns exemplos. Para tais produtos, o interesse é determinar qual é a proporção dos componentes que conduz a um resultado desejado em termos de uma variável que caracteriza a qualidade do produto. Quando não se sabe de antemão qual é a proporção ideal de cada componente, deve-se realizar experimentos. Nesses experimentos, são arbitradas várias combinações de proporções dos componentes e, então, são observados os valores correspondentes da característica de qualidade. Estes valores são denominados respostas do experimento (VIEIRA e DAL BELLO, 2006).

No modelo geral de experimentos de misturas, as restrições de cada um dos níveis dos fatores correspondentes é expressa conforme abaixo:

$$\sum_{i=1}^q X_i = 1 \quad (3.1)$$

Quer dizer, em experimentos envolvendo mistura, a soma das proporções dos componentes é sempre igual a 1. Ao modificar a formulação no sentido de alterar as propriedades de uma determinada mistura em estudo, as novas proporções devem continuar obedecendo a essa restrição. Assim sendo, no planejamento dos experimentos com mistura devem ser adotados projetos que considerem esta restrição (VIEIRA e DAL BELLO, 2006).

Com base nos resultados do experimento, procura-se estabelecer a relação entre a variável resposta e as variáveis que representam as proporções de cada componente. Para tanto são utilizados modelos polinomiais (VIEIRA e DAL BELLO, 2006).

### 3.2.1 Modelos para Componentes de Mistura

Experimentos com misturas são experimentos nos quais a resposta depende da proporção de cada componente envolvido. Assumindo que a resposta depende apenas das proporções, mas não da quantidade real das misturas, a resposta esperada pode ser escrita como: (CHAN, 1988).

$$\eta(x) = \eta(x_1, \dots, x_k)$$

no qual  $k \geq 2$  e  $x = (x_1, \dots, x_k)'$  residente na região de solução  $(k - 1)$ .

Então:

$$S^{k-1} = \{(x_1, \dots, x_k)': \sum x_i = 1, x_i \geq 0 (i = 1, \dots, k)\} \quad (3.2)$$

Sejam  $x_i, i = 1, \dots, q$ , as variáveis que representam as proporções dos  $q$  componentes da mistura, temos então:

$$\sum_{i=1}^q x_i = 1 \text{ e } x_i \geq 0, i = 1, \dots, q \quad (3.3)$$

A região factível da mistura de dois componentes é representada por um segmento de reta e para o caso de três componentes é representada por um triângulo.

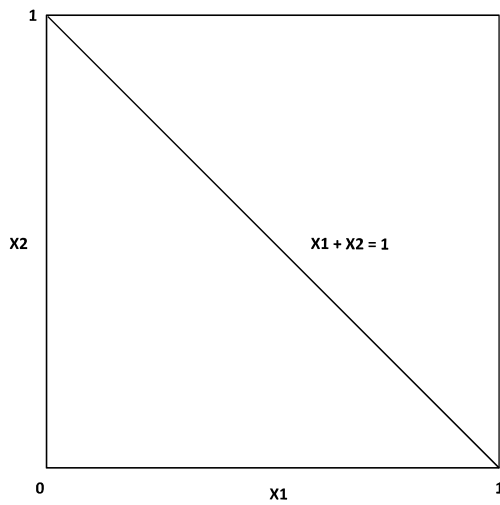


Figura 3.1 - Espaço fatorial restrito para misturas com 2 componentes

Fonte: MONTGOMERY (2001).

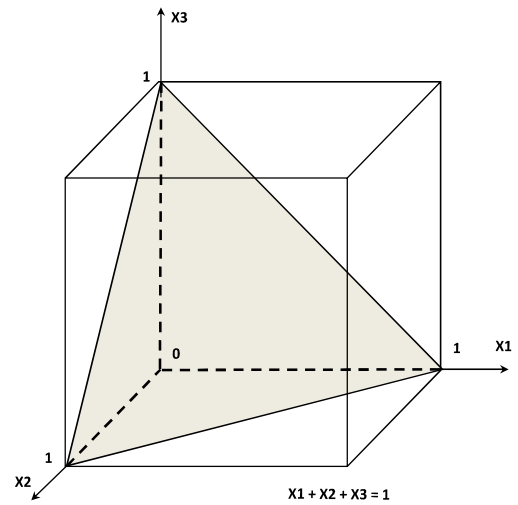


Figura 3.2 - Espaço fatorial restrito para misturas com 3 componentes

Fonte: MONTGOMERY (2001).

A soma de todos os componentes é uma constante e todas as proporções estarão situadas entre zero e a soma dos componentes individuais (BOX, HUNTER e HUNTER, 2005).

Por uma questão prática, no caso de experimentos com misturas de três componentes, a região experimental restrita pode ser representada com a utilização de um sistema de coordenadas trilinear, como mostrado na **Figura 3.3**. Cada lado do triângulo corresponde a uma mistura binária e os vértices dos triângulos correspondem às formulações de componentes puros. No interior do triângulo, estão situadas as possíveis misturas ternárias. Neste caso, são necessárias apenas duas dimensões para representar graficamente o experimento. Como cada componente é representado por um vértice, uma figura geométrica com três vértices e duas dimensões, ou seja, um triângulo equilátero representa o espaço fatorial restrito de uma mistura ternária ( **Figura 3.4**).

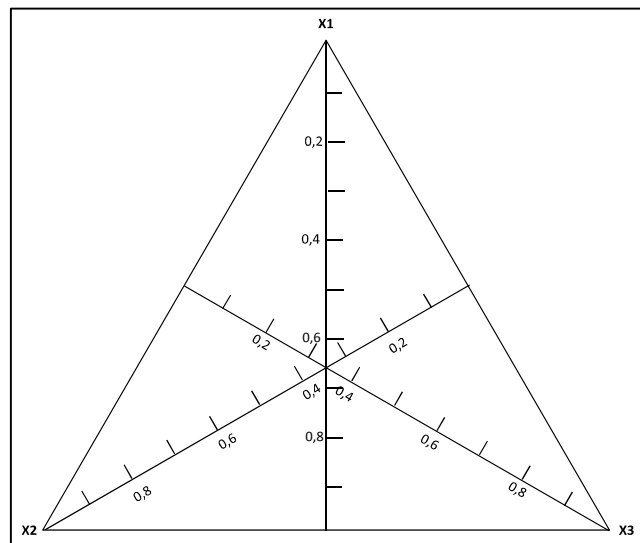


Figura 3.3 - Sistema de coordenadas trilinear

Fonte: MONTGOMERY (2001).

Quando o modelo agrega restrições, os valores máximos de cada peso são limitados, deformando a figura da mistura sem restrições. As restrições (2.3) são mostradas graficamente na **Figura 3.4**, para o caso de dois e três componentes.

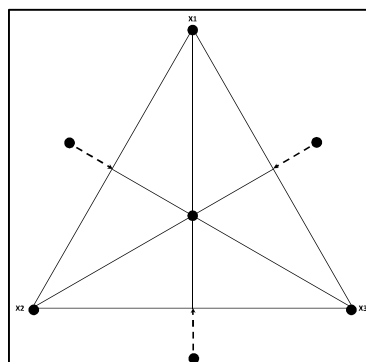


Figura 3.4 - Arranjo de misturas com restrições

Fonte: VIEIRA e DAL BELLO (2006).

A **Figura 3.5** apresenta uma visão geral da região em uma mistura simples com três componentes. A parte esquerda do gráfico mostra uma situação na qual os três componentes A, B e C podem variar entre 0 e 1. Cada vértice da região corresponde a uma mistura pura do componente. As linhas tracejadas simbolizam o eixo principal de cada componente, e na sua

interseção comum geral  $1/3, 1/3, 1/3$  o centróide é encontrado. O gráfico da direita mostra a mesma região triangular, mas com linhas de grade de 0,1 unidade de espaçamento sobrepostas.

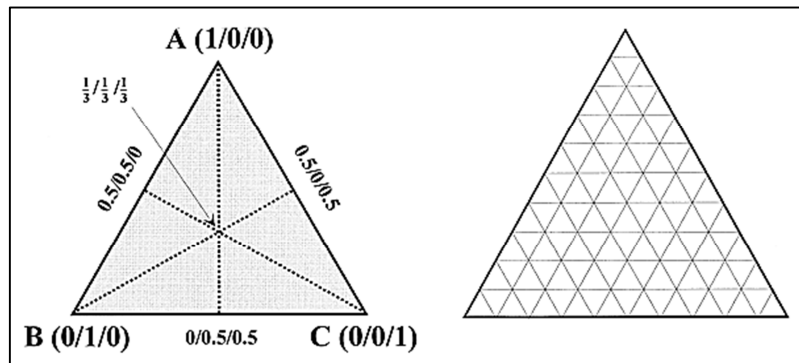


Figura 3.5 - Arranjo de misturas com centróide

Fonte: ERIKSSON et al. (1998).

Três projetos de mistura clássicos, muito úteis, de três componentes são apresentados a seguir, modelo linear, quadrático e cúbico especial. O desenho da esquerda é tomado a partir da família axial, e os outros a partir da família *centroid simplex*. Os Pontos sólidos denotam experimentos obrigatórios, e os círculos abertos são opcionais e úteis experimentos extras. Os três círculos abertos posicionados no *centroid* geral correspondem a experiências replicadas.

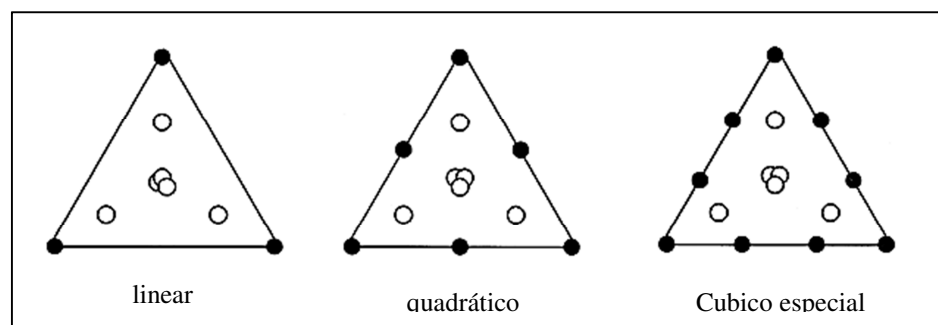


Figura 3.6 - Outros arranjos de mistura clássicos

Fonte: ERIKSSON et al. (1998).

A **Figura 3.8** mostra também a forma de regiões regulares de mistura no caso de quatro fatores de mistura correspondendo a um tetraedro.

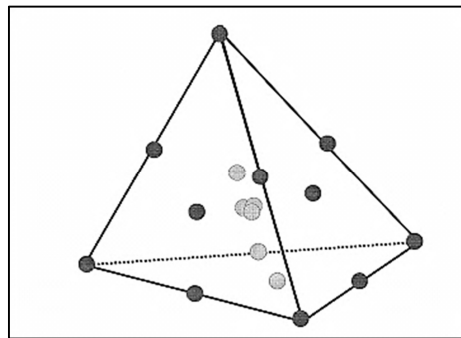


Figura 3.7 - Arranjo de misturas para 4 fatores

Fonte: ERIKSSON et al. (1998).

E finalmente, exemplos de regiões irregulares de mistura de três e de quatro componentes de misturas. As propriedades destas regiões irregulares da mistura são causadas por limites inferiores e superiores diferentes de 0 e 1, mais possíveis restrições relacionadas a fatores da própria mistura ou do processo.

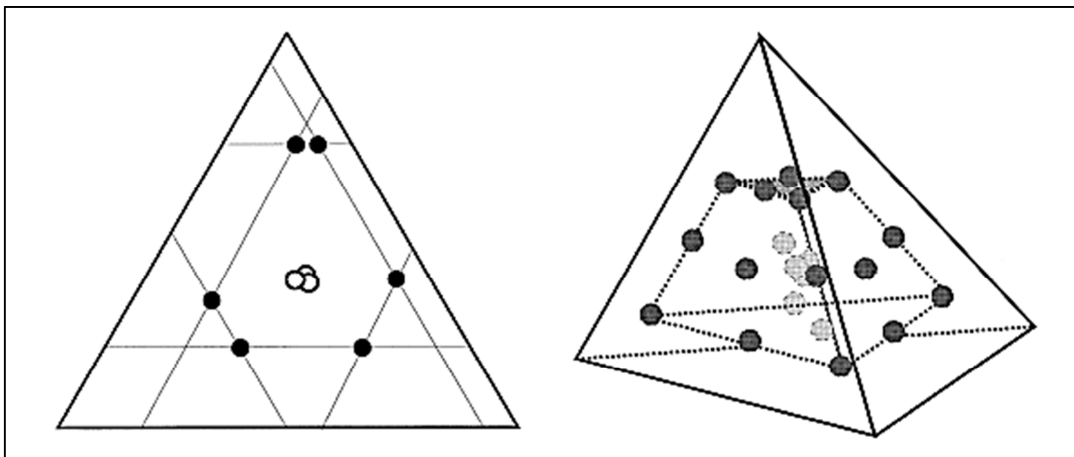


Figura 3.8 - Arranjo com Regiões Irregulares

Fonte: ERIKSSON et al. (1998)

Khmiri, Samet e Chaabouni (2012) utilizaram dois campos experimentais diferentes: o campo definido pela composição do cimento: o que é % de cimento *Portland*, % de resíduos de vidro e % de pó de sílica, e o campo de duas variáveis de processo: o tipo de resíduos de vidro e sua espessura.

O problema residiu na determinação das proporções dos três componentes do cimento e do tipo e da finura do vidro moído necessário para obter a resistência máxima à compressão do cimento aos 28 e 90 dias.

Numa experiência em que as variáveis do processo são estudadas juntamente com os componentes da mistura, o projeto mais simples possível configura um desenho de mistura em cada ponto do arranjo fatorial nas variáveis do processo. Em outras palavras, o método consistiu na repetição de cada execução da mistura em todas as possíveis combinações de níveis das variáveis de processo.

No arranjo de mistura, a composição das misturas do cimento com as duas adições minerais (resíduos de vidro e pó de sílica) está limitado por ambas as condições de limite superior e inferior selecionadas no trabalho, com base nos resultados de experiências preliminares. Isso resultou em uma região experimental com área triangular, como mostrado na **Figura 3.9**.

Os vértices do triângulo do conjunto representam os três componentes. Se  $Z_j$  representa a fração em peso do componente  $j$ , para o primeiro vertice, por exemplo, temos  $Z_1 = 1$ ,  $Z_2 = Z_3 = 0$ . A composição do seu correspondente mistura  $Z_0$  JTH é definida como:

$$Z'_1 = Z_1 \quad (3.4)$$

$$Z'_2 = 0,7 Z_1 + 0,3 Z_2 \quad (3.5)$$

$$Z'_3 = 0,7 Z_1 + 0,3 Z_3 \quad (3.6)$$

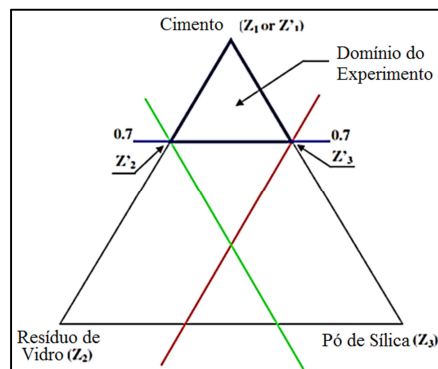


Figura 3.9 - Arranjo de Misturas com Restrições

Fonte: KHMIRI, SAMET e CHAABOUNI (2012).

## 4. ANÁLISE DE PORTFÓLIO BASEADO NO PROJETO DE EXPERIMENTOS DE MISTURAS

Diariamente são feitas milhares de transações de compra e venda de ações na Bolsa de Valores, sendo que a maioria destas é executada por operadores de ações, empresas ou pessoas contratadas para fazerem movimentações de forma a gerarem lucro para seus clientes.

O portfólio de ações é largamente usado para pulverizar o dinheiro do investidor, reduzindo assim suas margens de risco. O projeto de experimentos de misturas é considerado aqui como uma forma eficiente, no quesito computacional, e que pode ser usada para, além de minimizar os riscos, maximizar os retornos, lucros dos investidores. Além disso, é um método embasado teoricamente que vai auxiliar na tomada de decisão dos investidores, que outrora criavam seus portfólios com métodos pobres e menos consistentes.

O projeto de experimentos com misturas é amplamente utilizado em vários setores produtivos, por exemplo, indústrias farmacêuticas e outras que em que seus produtos são fabricados a partir da mistura de certos componentes em certas quantidades. Por sua característica relativamente simples, seu uso é bem difundido.

Quando se compara o MDE para a abordagem Média-Variância do Portfolio (MVP) tradicional, é possível perceber que as equações de média-variância podem ser escritas como uma superfície de resposta da mistura, em que os montantes de investimento de capital em ativos  $n$  são definidos pelo tipo de experimento de mistura (*simplex lattice* ou *simplex centroid*). Além disso, a restrição orçamentária é análoga à restrição de convexidade do MDE. Uma vez que o experimento de misturas é definido, pode-se estimar a superfície de resposta para a média, variância e qualquer outra resposta de interesse, de modo que se pode comparar a influência de cada ativo para o desempenho do portfólio (OLIVEIRA et al. 2011).

No entanto, o modelo tradicional MDE não considera, por exemplo, venda a descoberto na análise do portfólio, de forma que uma generalização deve ser considerada. Oliveira et.al. (2011) foi pioneiro na abordagem de experimentos de misturas para otimização de portfólios.

MDE (*mixture design of experiments*) é um tipo especial de experimento de superfície de resposta, em que os fatores são proporções dos componentes de uma mistura (MYERS e MONTGOMERY, 2002; CORNELL, 2002). Ao avaliar a resposta experimental para a combinação de vários fatores, pode-se estimar a superfície de resposta do processo em análise. O projeto é escolhido de tal forma que os pontos se espalham ao longo do espaço experimental viável. No MDE, em particular, este espaço é conhecido como espaço *simplex*. *Centroid simplex* e *simplex-lattice* são amplamente utilizados na análise de experimentos MDE. A fim de se obter um modelo polinomial de, pelo menos, grau  $m$  de componentes  $q$ , deve-se ter  $m + 1$  valores igualmente espaçados, para cada componente da mistura. **Figura 4.1** mostra um *simplex lattice*  $\{q, m\}$  combinado, em que  $q = 3$  e  $m = 2$ .

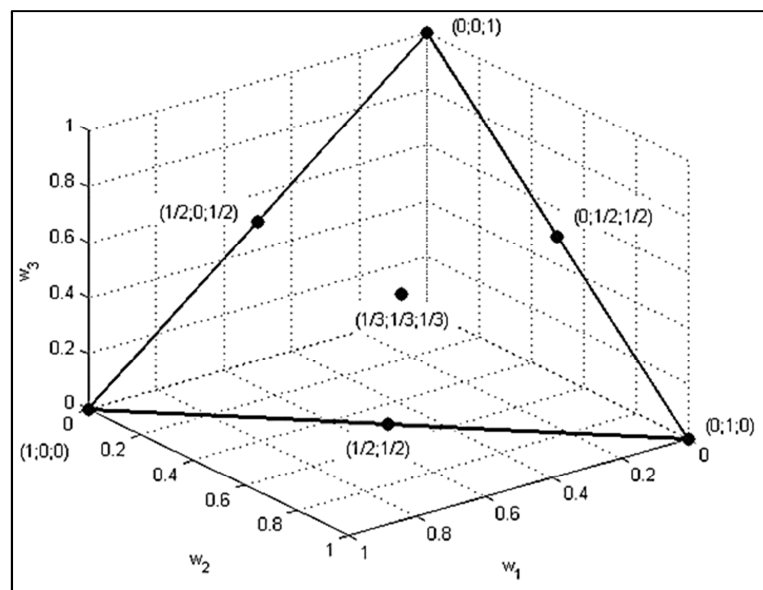


Figura 4.1 - Mistura *simplex lattice* para análise fatorial tamanho três.

Fonte: MYERS e MONTGOMERY (2002).

O espaço representado na **Figura 4.1** pelo experimento de mistura para os componentes do sistema de coordenadas descreve o *simplex*. Os vértices da região convexa representam a mistura pura; os pontos dentro da região são misturas em que nenhum dos componentes está ausente. O centroide é a mistura com proporções iguais de cada componente.

Suponha agora que os pesos  $w_i$  ou quantidades do modelo MVP são considerados proporções de uma mistura com as restrições de convexidade, por exemplo,  $\sum_i w_i = 1$  e  $w_i \geq 0$ . Este é exatamente o caso de um projeto de experimentos de misturas conhecido como MDE.

Uma vez que os experimentos são realizados, o MDE permite estabelecer a relação entre as variáveis de resposta e a proporção relativa dos componentes em termos de uma equação matemática. Ele fornece a identificação da influência da proporção de cada elemento e as interações entre fatores sobre a variável de resposta. Geralmente, a relação funcional entre a variável de resposta e as proporções dos elementos  $n$  é definida por um polinômio de grau  $m$ , que pode ser estimado com a ajuda de uma regressão linear, quadrática, cúbica ou dependendo dos objetivos do praticante. As equações (4.1) e (4.2) descrevem o modelo quadrático para estimativa de superfície de resposta.

$$y_p = \beta_o \sum_{i=1}^n \beta_i^* w_i + \sum_{i,j=1,i < j}^q \beta_{ij}^* w_i w_j \quad (4.1)$$

$$y_p = \beta^{*T} w + w^T B w \quad (4.2)$$

Fonte: MYERS e MONTGOMERY (2002).

O coeficiente  $\beta_o$  é desconsiderado por se tratarem de dados determinísticos,  $\beta_i^*$  mostra como cada componente contribui para a variável de resposta. Da mesma forma, os termos  $\beta_{ij}^*$  indicam a interação entre os fatores  $i$  e  $j$ . Se um polinômio de ordem superior é usado, os componentes, tais como  $\beta_{ijk}^*$  descrevem interações entre fatores de  $i$ ,  $j$  e  $k$ , e assim por diante. Esses coeficientes podem ser calculados com a ajuda do algoritmo de mínimos quadrados ordinário ou abordagem de máxima verossimilhança.

## 4.1 Modelo generalizado para Análise de Portfólio Baseado no Projeto de Experimentos de Mistura

Na seção anterior, a correspondência entre a análise de MDE (*mixture design of experiment*) e portfólio foi apresentada. Discutiui-se a análise de portfólio em longo prazo com a ajuda de MDE. Ao operar a prazo, o investidor ganha dinheiro quando o preço de ativos au-

menta, ou seja, ele compra o ativo a preço baixo, e espera vendê-lo a um ponto no tempo por um preço maior.

No entanto, na prática, situações de compra a descoberto podem ser desejáveis e a abordagem básica de MDE não considera seu funcionamento. Na operação de curto prazo, os lucros dos investidores acontecem quando os preços dos ativos caem. Nesta situação, vende um ativo sem o devido investimento. Para tanto, ele deve ser emprestado de um corretor. A posição é fechada quando o investidor compra o ativo e devolve para o credor. O modelo geral para a otimização de portfólios por meio do MDE é discutido nesta seção. Para tanto, o domínio experimental pode ser expandido, e a restrição linear deve ser considerada.

A primeira diferença do tradicional MDE diz respeito aos valores dos pesos  $w_i$ . Em operações de curta duração, os pesos das equações (2.1), (2.2) e (2.3) são negativos, de modo que a restrição  $w_i \geq 0$  já não é cumprida. Quando a venda a descoberto é permitida, os pesos pertencem ao intervalo dado por:

$$-sl \leq w_i \leq [1 + (q - 1) \cdot sl] \quad (4.3)$$

no qual  $sl \in \mathbb{R}_+$ , e representa o limite de venda a descoberto. Note que este limite de pesos novos expande a região simples, na qual se pode vender alguns ativos para comprar outros. Além da nova região de cada variável, o *simplex-lattice* é também limitado pela superfície  $\sum_i w_i = 1$ . Assim, a região *lattice* expandida é limitada pela equação de equilíbrio do portfólio. A **Figura 4.2** mostra o caso particular em que  $q = 3$ ,  $m = 2$  e  $sl = 1$ .

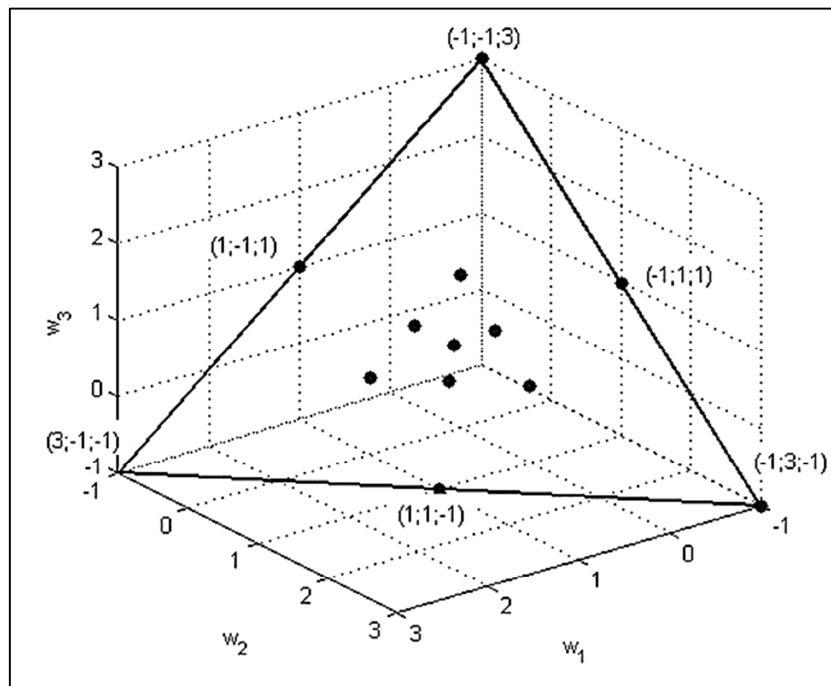


Figura 4.2 - *Mixture lattice* para análise de portfólio com três fatores

Para construir este projeto experimental, como na **Figura 4.2**, pode-se definir  $q - 1$  pesos, como nos tradicionais modelos *simplex-lattice*, considerando os novos limites variáveis de desigualdade, e o  $q^{th}$  componente é limitado pela equação de equilíbrio, de modo que  $w_q = 1 - \sum_{j=1}^{q-1} w_j$ . Note-se também, a partir da **Figura 4.2**, que o *simplex-lattice* de Projetos de Experimentos de Mistura (MDE) tradicional está contido na região *lattice* expandida.

O delineamento experimental discutido acima preenche a lacuna de análise de portfólio, quando a venda a descoberto é permitida, desde que generalize o MDE para a otimização de portfólio, com o Modelo Generalizado para Análise de Portfólio Baseado no Projeto de Experimentos de Mistura (GMDEPO)<sup>1</sup>.

Uma vez que as experiências são realizadas, GMDEPO permite estabelecer a relação entre as respostas de interesse e proporção relativa dos componentes em termos de um modelo

---

<sup>1</sup> Com efeito, GMDEPO é o modelo tradicional MDE no qual a restrição de convexidade  $\sum_i w_i = \xi$  é definida por  $\xi = [1 + q \cdot sl]$  traduzindo o espaço experimental por  $-sl$ .

matemático, tal a equação (4.1) (4.2). Ele fornece a identificação da influência da proporção de cada um dos fatores, e as interações entre fatores, sobre a variável de resposta.

Foi possível o entendimento do método de análise de portfólio com o uso de arranjos de misturas e também que pode ser utilizado com eficiência. No **Capítulo 5** será feita a revisão de métodos de otimização, fundamentais para atingir os objetivos propostos.

## 5. OTIMIZAÇÃO DE EXPERIMENTOS

### 5.1 Método dos Pontos Interiores

O método dos pontos interiores está entre os métodos mais eficientes para resolver problemas de otimização linear e convexa (TERLAKY, 2001). O método *simplex* busca uma solução ótima por deslocamentos entre os pontos extremos da fronteira da região de factibilidade (vértices), usando a informação de que um desses pontos é solução ótima do problema. Ao contrário, este algoritmo baseia-se em pontos interiores à região factível e em sucessivas transformações projetivas que levam a um bom comportamento do processo.

### 5.2 Método *Desirability*

Há muitas técnicas numéricas que podem ser usadas para resolver problemas de otimização. Algumas dessas técnicas referem-se a métodos de programação não linear.

Montgomery (2009) explica que uma forma generalizada de otimização multiobjetivo é utilizando a função *desirability* que irá converter as respostas  $y_i$  em uma função de otimização  $d_i$ , estas estarão dentro do intervalo:

$$0 \leq d_i \leq 1 \quad (5.1)$$

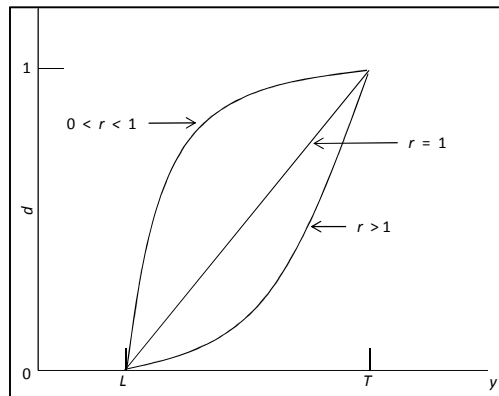
No qual a resposta, quando  $y_i$  é o alvo ou ponto ótimo, então  $d_i = 1$  e se a resposta está fora da região de solução ou região de aceitação,  $d_i = 0$ . As variáveis do modelo escolhido para maximizar a função *desirability* serão:

$$D = (d_1 * d_2 * \dots * d_m)^{1/m} \quad (5.2)$$

Fonte: CASTILLO (2007).

Poderá ser resolvido por programação linear ou quadrática.

Na **Figura 5.1** estão demonstradas as estruturas de otimização individual quando a função *desirability* é linear. Escolhendo  $r > 1$  será dado ênfase nos pontos mais próximos do valor alvo e escolhendo  $0 < r < 1$  então este será menos importante.



45

Figura 5.1 - Otimização individual para maximização

Fonte: MONTGOMERY (2001).

Sendo sua função:

$$d = \begin{cases} 0 & y < L \\ \left(\frac{y-L}{T-L}\right)^r & L \leq y \leq T \\ 1, & y > T \end{cases} \quad (5.3)$$

Fonte: MONTGOMERY (2001).

Quando o objetivo (alvo) é maximizar  $y$  no qual o peso  $r = 1$ , da função *desirability*.

Se o alvo da resposta for a minimização de um valor:

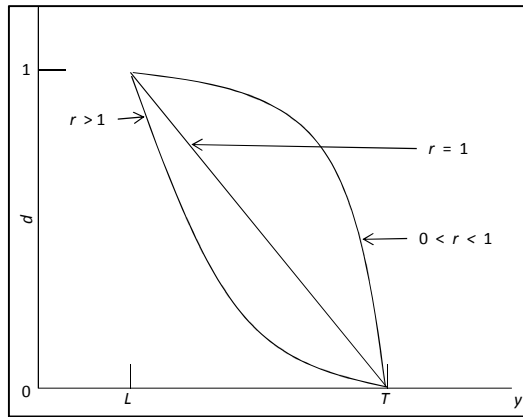


Figura 5.2 - Otimização individual para minimização

Fonte: MONTGOMERY (2001).

Sendo sua função:

$$d = \begin{cases} 1 & y < T \\ \left(\frac{U - y}{U - T}\right)^r & T \leq y \leq U \\ 0 & y > U \end{cases} \quad (5.4)$$

Fonte: MONTGOMERY (2001).

Quando objetivo (alvo) é minimizar  $y$ .

A função multiobjetivo demonstrada na **Figura 5.3** se refere a um alvo que está situado entre um valor mínimo (*Lower*) –  $L$  e um valor máximo (*Upper*) –  $U$ .

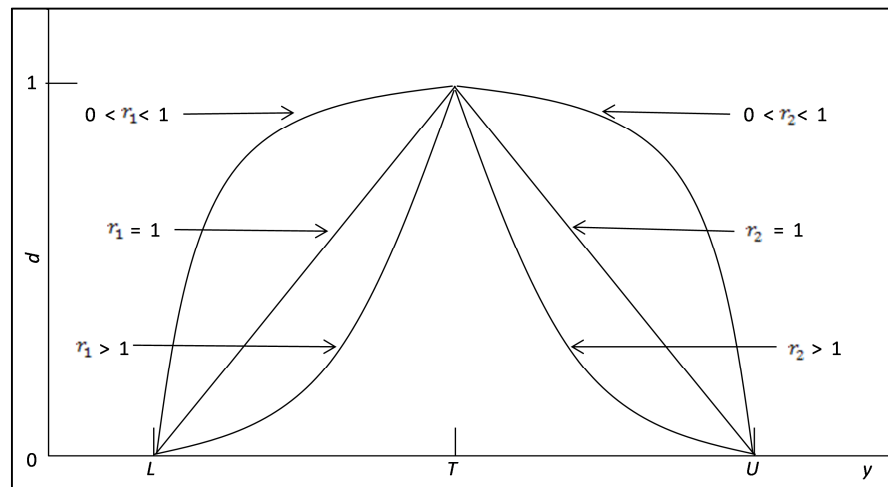


Figura 5.3 - Otimização multiobjetivo

Fonte: MONTGOMERY (2001).

Sendo sua função:

$$d = \begin{cases} 0 & y < L \\ \left(\frac{y-L}{T-L}\right)^{r_1} & L \leq y \leq T \\ \left(\frac{U-y}{U-T}\right)^{r_2} & T \leq y \leq U \\ 0 & y > U \end{cases} \quad (5.5)$$

Fonte: MONTGOMERY (2001).

Quando o objetivo é que  $y$  fique o mais próximo possível do alvo.

Há programas computacionais que resolvem de maneira rápida e eficiente problemas dessa natureza, este é um dos motivos do método *desirability* ser tão difundido como um ótimo algoritmo de otimização multiobjetivo. Neste trabalho foi utilizado o programa Matlab®.

### 5.3 Função *Desirability* para Portfolio Multiobjetivo

A concepção de uma carteira ótima pode ser vista como um problema de otimização não linear multiobjetivo por tratar a minimização do risco e maximização do retorno. Para cumprir com este objetivo, equações de risco e retorno são geralmente combinadas na forma

de uma função de utilidade, como:  $U = \lambda\mu_p + \frac{1}{2}\sigma_p^2$ , no qual  $\lambda$  é o fator de ponderação que reflete a preferência do decisor ou aversão ao risco. Ao lidar com o GMDEPO, pode-se também adaptar os conceitos de risco, retorno e utilidade por meio da função *desirability*. Esta função é uma transformação da função de otimização multiobjetivo, que permite a combinação do risco e do retorno e também permite a introdução da aversão do investidor ao risco  $\lambda$ . Além disso, podem-se definir as regiões e faixas de respostas para cada variável, no qual o máximo de retorno e risco mínimo não varia.

A abordagem da função *desirability* é um método de otimização não linear capaz de lidar com problemas de resposta única ou múltipla (MONTGOMERY, 2009). Neste método, o modelo estatístico é primeiramente obtido. Em seguida, utilizando um conjunto de transformações com base nos limites impostos sobre as respostas, a conversão é realizada para cada uma das respostas decorrentes de uma função individual *desirability*  $d_i$  com  $0 \leq d_i \leq 1$ . Estes valores individuais são então combinados com uma média geométrica:

$$D = [d_1(y_1) \times d_2(y_2) \times \dots \times d_k(y_k)]^{1/k} \quad (5.6)$$

Fonte: MONTGOMERY (2009).

O índice global de  $D$  é uma função convexa, e é maximizada utilizando um algoritmo de *Hooke* irrestrito e não linear de *Jeeves* (Rao, 1996), retornando uma solução restringida ao intervalo  $[0, 1]$ .  $D$  é um índice próximo de 1, quando as respostas estão perto de sua especificação. O tipo de transformação depende do sentido de otimização desejado, sendo utilizado o algoritmo não linear. A abordagem da função *desirability* para um problema de otimização é simples, fácil de aplicar, e permite ao usuário julgar a importância de cada resposta. Para o caso de maximização, por exemplo, a transformação da função *desirability*  $d_i$  é:

$$d_i = \begin{cases} 0 & \hat{y}_i < L_i \\ \left[ \frac{\hat{y}_i - L_i}{T_i - L_i} \right]^{\lambda_i} & L_i < \hat{y}_i < T_i \\ 1 & \hat{y}_i > T_i \end{cases} \quad (5.7)$$

Fonte: RAO (1996).

em que  $\hat{y}_i$  é a resposta prevista de interesse, e  $L_i$  e  $T_i$  são, respectivamente, o limite inferior e o alvo para a resposta  $i$  de interesse. Além disso,  $\lambda_i$  são os pesos para a importância da resposta da função *desirability*.

Dessa forma, a partir da discussão dos conceitos relacionados a projeto de experimentos de misturas e análise de portfólios, foi verificado que estes procedimentos em conjunto se caracterizam como uma alternativa eficiente quando se deseja atender a otimização multiobjetivo com minimização de riscos e maximização de retornos. Além disso, foi mostrado que a um grande potencial de exploração desta abordagem e que esta ainda é escassa (MONTGOMERY, 2009).

## 5.4 Modelos Econométricos e Regressivos

### 5.4.1 Regressão Linear

A Regressão linear foi usada por muitos anos no desenvolvimento de modelos matemáticos para aplicação em *marketing*, gestão e previsão de vendas. A relação entre a variável dependente e as variáveis independentes é acentuada na regressão linear clássica.

Na regressão linear os resíduos ou os desvios entre o valor real e os valores estimados são causados pelos erros de observação ou pelos erros de especificação.

Na regressão linear, a variável dependente é prevista a partir dos valores das variáveis independentes com base em suas relações. Esta é dada da seguinte forma:  $\hat{y} = B_0 + B_1x + e$  para regressão linear simples, onde  $\hat{y}$  é a variável dependente,  $B_0$  e  $B_1$  são os coeficientes da regressão estimada,  $B_0$  é o y-interceptor ou quando  $x = 0$ , teoricamente  $x$  é a variável independente e  $e$  é o termo de erro (HESHMATY e KANDEL, 1986). Então:

$$B_0 = \bar{y} - B_1\bar{x}, B_1 = n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i / n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad (5.8)$$

Fonte: HESHMATY e KANDEL (1986).

Em que  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são a média aritmética para as variáveis independentes e dependentes.

Se incluir todas as variáveis que são assumidas para causar a mudança na variável dependente, então chamamos de análise de regressão múltipla:

$$\hat{y} = B_0 + B_1x_{1i} + B_2x_{2i} + \dots + B_nx_{ni} + e \quad (5.9)$$

Fonte: HESHMATY e KANDEL (1986).

Em que  $\hat{y}$  e  $e$  são os mesmos citados anteriormente e os  $B_i$ 's são os coeficientes das variáveis independentes  $x_i$  da regressão. As variáveis independentes  $x_{2i}$  representam a  $i$ ésima observação para a variável independente  $x_2$ . Neste caso, a variável independente é uma função linear com um número de variáveis independentes maiores do que um (HESHMATY e KANDEL, 1986).

#### 5.4.2 Modelos de Transformação

Uma transformação é útil e necessária quanto uma variável de resposta não atende aos pressupostos de normalidade e/ou homoscedasticidade (fenômeno estatístico em que os dados regredidos encontram-se monogênicos e pouco dispersos em torno de uma reta de regressão do modelo). (BOX e COX, 1964).

Um modelo geral de transformação foi proposto por George Edward Pelham Box e David Cox em 1964 para corrigir vieses na distribuição, variâncias desiguais e principalmente corrigir a não linearidade em uma correlação, e melhorar a correlação estatística entre variáveis. A fórmula de Box-Cox é genericamente escrita por:

$$\tilde{X} \begin{cases} \frac{(x + \alpha)^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \log(x + \alpha) & \lambda = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Fonte: BOX e COX (1964).

Em que:  $\tilde{X}$  é a variável de transformação e  $\alpha$  é o parâmetro de transformação. O objetivo da transformação é convergir a variável  $x$  de tal forma que  $\tilde{X}$  resulte em uma distribuição normal com  $\tilde{X} \sim N(\mu, \sigma)$  sendo sua função:

$$f(\tilde{X}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(\tilde{x} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (5.11)$$

Fonte: BOX e COX (1964).

Exemplo: A seguir está o gráfico sumário de uma função exponencial aleatoriamente gerada que foi submetida à transformação Box-Cox.

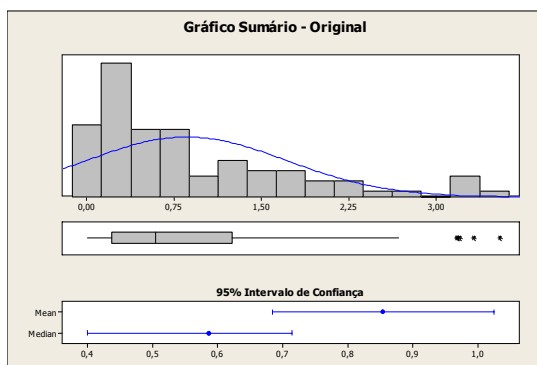


Figura 5.4 – Histograma dos Dados Originais

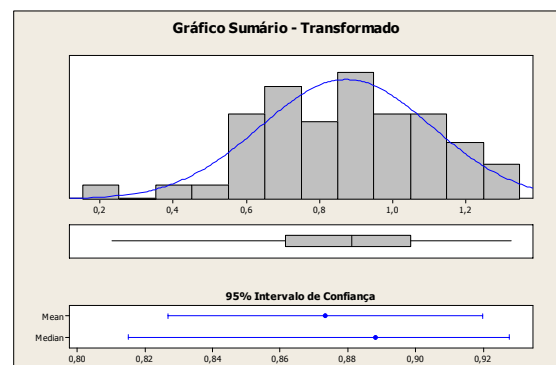


Figura 5.5 – Histograma dos Dados Transformados

Teste de Normalidade (não normal)

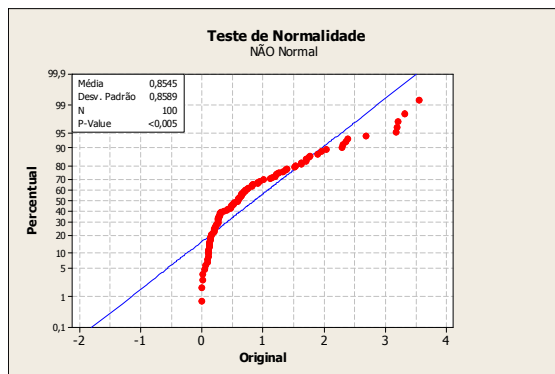


Figura 5.6 - Teste de Normalidade dos Dados Originais

Teste de Normalidade (normal)

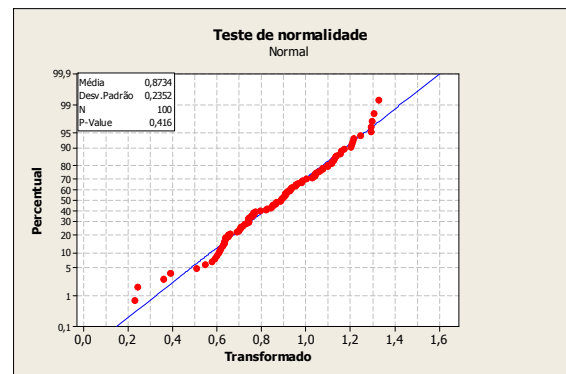


Figura 5.7 - Teste de Normalidade dos Dados Transformados

Para aplicar a transformação é necessário encontrar um valor de  $\lambda$  mais adequado, denotado por  $\tilde{\lambda}$ , que produza uma variável transformada com distribuição próxima da normal. A aproximação mais utilizada é a máxima probabilidade em que se constrói uma função de probabilidade (mais um erro  $E$  definido como o  $\log$  negativo da verossimilhança – função de probabilidade):

$$E(\lambda) = -\frac{N}{2} \log(\tilde{\sigma}^2) + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \log(\tilde{x}_i) \quad (5.12)$$

Em que:  $\tilde{\sigma}^2(\lambda)$  é o desvio padrão de  $\tilde{x}$  transformado. O valor de  $\lambda$  que minimiza a função anterior é o valor de  $\lambda$  para a transformação Box-Cox e é iterativo.

Recorde-se que o modelo MVP é descrito pelas equações (2.2) e (2.3), de que modo quando a variância da amostra é mais elevada, maior média de erro da amostra é obtida, dando origem a variações diferentes para diferentes proporções de ativos. Este resultado sugere que o método dos mínimos quadrados não é adequado para se obter o modelo estatístico de otimização MVP. Fora do comumente usado, podem-se usar mínimos quadrados generalizados (GLS) e modelo de erros padrão robusto. O modelo de GLS pode ser escrito de acordo com a equação (5.13).

$$Gy_p = Gw\beta^* + w^T GBw + G\varepsilon \quad (5.13)$$

Na equação (5.13),  $G$  é uma matriz de transformação quadrática que considera a covariância entre os ensaios experimentais. Neste trabalho, a transformação da diagonal da matriz  $G$  é considerada, cada execução experimental é composta pelo inverso da variância, considerando-se réplicas de  $s = 10$ .

O GLS é capaz de considerar erros Heteroscedásticos e correlacionados, no qual o primeiro é exatamente o caso estudado neste trabalho.

Este capítulo teve como objetivo apresentar todo o suporte teórico necessário para o desenvolvimento do presente trabalho. Dessa forma, a partir da discussão dos conceitos relacionados a projeto de experimentos de misturas e análise de portfólios, foi verificado que estes procedimentos em conjunto se caracterizam como uma alternativa eficiente quando se deseja atender a otimização multiobjectivo com minimização de riscos e maximização de retornos. Além disso, foi mostrado que a um grande potencial de exploração desta abordagem e que esta ainda é escassa.

Diariamente são feitas milhares de transações de compra e venda de ações na Bolsa de Valores, sendo que a maioria destas é executada por operadores de ações, empresas ou pessoas contratadas para fazerem movimentações de forma a gerarem lucro para seus clientes.

O portfólio de ações é largamente usado para pulverizar o dinheiro do investidor, reduzindo assim suas margens de risco. O projeto de experimentos de misturas é considerado aqui como uma forma eficiente, no quesito computacional, e que pode ser usada para, além de minimizar os riscos, maximizar os retornos, lucros dos investidores. Além disso, é um método embasado teoricamente que vai auxiliar na tomada de decisão dos investidores, que outrora criavam seus portfólios com métodos pobres e menos consistentes.

O projeto de experimentos com misturas é amplamente utilizado em vários setores produtivos, por exemplo, indústrias farmacêuticas e outras que em que seus produtos são fabricados a partir da mistura de certos componentes em certas quantidades. Por sua característica relativamente simples e computacionalmente ágil, seu uso é bem difundido. Nos próximos capítulos serão demonstrados como este método de otimização pode se aliar a métodos de escolha eficiente de portfólios.

## 6. DISCUSSÃO SOBRE EXEMPLOS NUMÉRICOS

O uso de GMDEPO para tomada de decisão sobre otimização de portfólios é apresentado nesta seção. Para tanto, um simples caso de três ativos extraídos de Best (2010) é usado para que se possa explorar as funcionalidades da aplicação proposta. Da mesma forma, o GMDEPO pode ser comparado à bem conhecida análise de portfólio teórica.

### 6.1.1 Casos com três empresas

O primeiro caso estudado é extraído de Best (2010), no qual três ativos independentes são usados. O vetor de retornos e a matriz de covariância são dados por:

$$\mu = [1,05 \quad 1,08 \quad 1,10]^T \quad (6.1)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{0,01} & \sigma_{12}^2 & \sigma_{13}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \mathbf{0,02} & \sigma_{23}^2 \\ \sigma_{31}^2 & \sigma_{32}^2 & \mathbf{0,03} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

A análise realizada considera o GMDEPO no qual as vendas a descoberto são limitadas a  $sl = 1$ . Neste caso, a região *simplex* é a mesma, conforme ilustrado na **Figura 3.4**.

O projeto experimental utilizado é o *simplex lattice* com  $q = 3$  e  $m = 4$  e grau *lattice* = 3 (*degree of lattice*), de modo que a matriz experimental e as respostas associadas são dadas na **Tabela 6.1**. Com as respostas obtidas para cada experimento, a relação entre as variáveis de resposta e a proporção relativa dos componentes pode ser calculada como na equação (4.1) e (4.2).

Tabela 6.1 - Projeto experimental e respostas para o primeiro exemplo

| Proporções dos Componentes |           |           | Respostas |              |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|--------------|
| Empresa 1                  | Empresa 2 | Empresa 3 | $\mu_p$   | $\sigma_p^2$ |
| 3,000                      | -1,000    | -1,000    | 0,970     | 0,140        |
| 1,667                      | 0,333     | -1,000    | 1,010     | 0,060        |
| 1,667                      | -1,000    | 0,333     | 1,037     | 0,051        |
| 0,333                      | 1,667     | -1,000    | 1,050     | 0,087        |
| 0,333                      | 0,333     | 0,333     | 1,077     | 0,007        |
| 0,333                      | -1,000    | 1,667     | 1,103     | 0,104        |
| -1,000                     | 3,000     | -1,000    | 1,090     | 0,220        |
| -1,000                     | 1,667     | 0,333     | 1,117     | 0,069        |
| -1,000                     | 0,333     | 1,667     | 1,143     | 0,096        |
| -1,000                     | -1,000    | 3,000     | 1,170     | 0,300        |

$$y_p = \sum_{i=1}^n \beta_i^* w_i + \sum_{i,j=1,i < j}^q \beta_{ij}^* w_i w_j \quad (6.3)$$

$$y_p = \beta^{*T} w + w^T B w \quad (6.4)$$

Conforme descrito no **Capítulo 4**, o coeficiente  $\beta_i^*$  mostra como cada componente contribui para a variável de resposta. Da mesma forma, os termos  $\beta_{ij}^*$  indicam a interação entre os fatores  $i$  e  $j$ . Se um polinômio de ordem superior é usado, os componentes, tais como  $\beta_{ijk}^*$  descrevem interações entre fatores de  $i$ ,  $j$  e  $k$ , e assim por diante. Esses coeficientes podem ser calculados com a ajuda do algoritmo de mínimos quadrados ordinário ou abordagem de máxima verossimilhança. Note que a matriz não possuirá a coluna identidade relativa ao termo independente do modelo de regressão linear. Isto ocorre porque os polinômios canônicos em experimentos com misturas não possuem esse termo (VIEIRA e BELLO, 2006).

Considerando que o retorno esperado e variância, têm respectivamente, um comportamento linear e quadrático, para que essas abordagens sejam utilizadas na estimativa de um modelo. As equações (6.5) e (6.6) mostram o modelo estimado para essas respostas.

$$\hat{\mu}_p = 0,97 \cdot w_1 + 1,09 \cdot w_2 + 1,17 \cdot w_3 \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_p^2 = & 0,14 \cdot w_1 + 0,22 \cdot w_2 + 0,30 \cdot w_3 - 0,48 \cdot w_1 w_2 - 0,64 \cdot w_1 w_3 \\ & - 0,80 \cdot w_2 w_3 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Como exemplo, a **Figura 6.1** mostra o gráfico de superfície de resposta das equações estimadas (6.5) e (6.6). A partir desta figura pode-se ver a forma linear da média e quadrática da variância e a presença de um portfólio de variância mínima, como marcado na **Figura 6.1**.

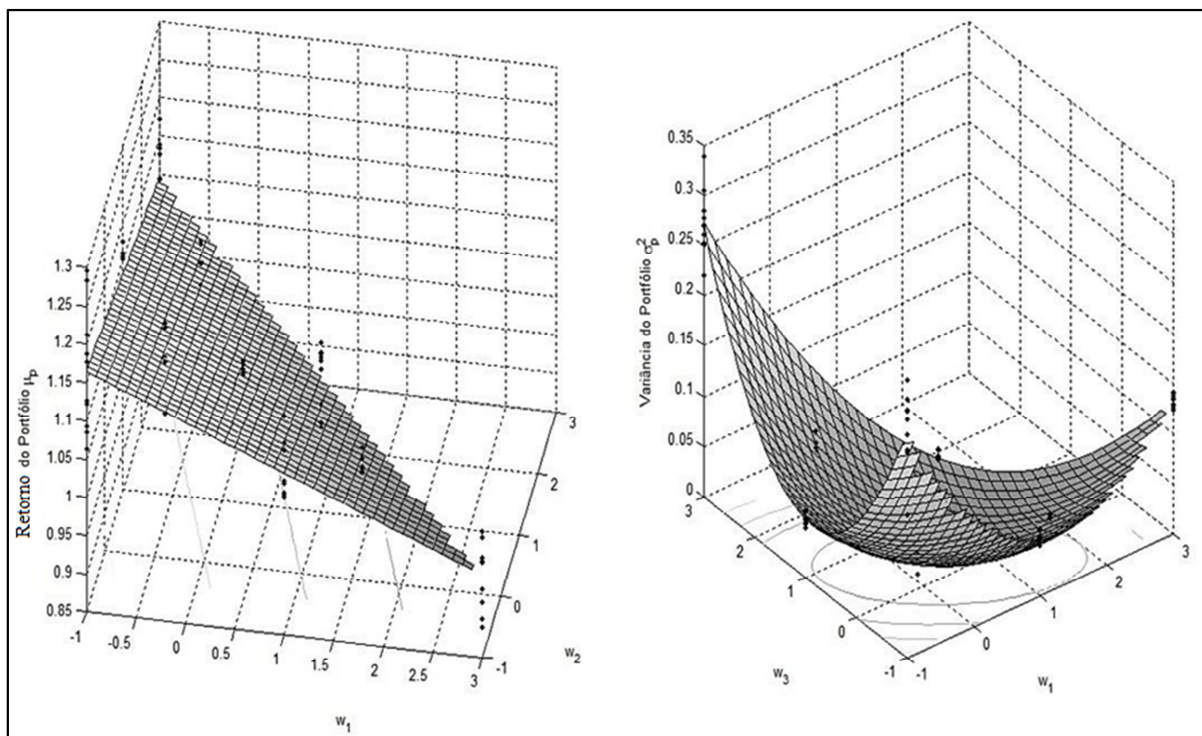


Figura 6.1 - Gráfico de superfície de resposta para a equação (6.6)

Observe que a partir das Equações (6.5) e (6.6) se produz um modelo determinístico para previsão da média e da variância. Este é o caso, uma vez que os experimentos são baseados na simulação e nenhuma função de erro é considerada.

Observando que o comportamento da resposta é estimado, pode-se utilizar a função *desirability*, discutida nas seções anteriores, para otimizar o problema de portfólio multiobjetivo, minimizando e maximizando de acordo com os limites de operação e aversão ao risco.

Por exemplo, considere que  $d_1$  representa a resposta *desirability* da média, enquanto  $d_2$  representa a resposta *desirability* da variância. Além disso, o alvo e limite dos retornos do portfólio são definidos pelos resultados apresentados na **Tabela 6.1**. Como para a variância, o limite superior é definido em 0,3 e a variância alvo é 0,02 (mesmo que não se possa alcançar esta meta, buscar-se-á a carteira de variância mínima). Se alguém está interessado em descobrir o portfólio de variância mínima pode-se definir  $\lambda_1 = 0,1$  e  $\lambda_2 = 1,0$ , de modo que prioriza a função *desirability* para minimizar a variação no processo de otimização. Da mesma forma, não se pode desejar dar prioridade a qualquer resposta: fixando  $\lambda_1 = 1,0$  e  $\lambda_2 = 1,0$ . Neste caso, a função do ponto ótimo difere da variância mínima. Estes dois resultados da otimização são apresentados na **Figura 6.2** como asteriscos.

A **Figura 6.2** também mostra a fronteira eficiente para o caso em estudo e as respostas obtidas com o projeto de experimento da **Tabela 6.1** (pontos). Note que todos os pontos experimentais são dominados pela fronteira eficiente. Cada resultado de otimização da função *desirability* estará exatamente na fronteira eficiente, produzindo um ponto de Pareto ótimo. As alterações dos parâmetros das funções *desirability* irão se dirigir para a solução nos pontos da fronteira, de modo que este método pode também ser usado para obter a fronteira inteira.

No exemplo discutido anteriormente, a única restrição considerada é o limite de vendas a descoberto, para definir uma região do experimento *simplex*. Esta abordagem pode reduzir o esforço computacional, pois os cálculos são feitos com base em equações simples - como as equações (2.2) e (2.3) - e uma estimativa de máxima verossimilhança que podem ser utilizados na construção do modelo. Quanto a otimização, a função *desirability* com base no modelo estimado transforma o modelo MVP (Média-Variância do Portfólio) em uma otimização multiobjetivo sem restrições.

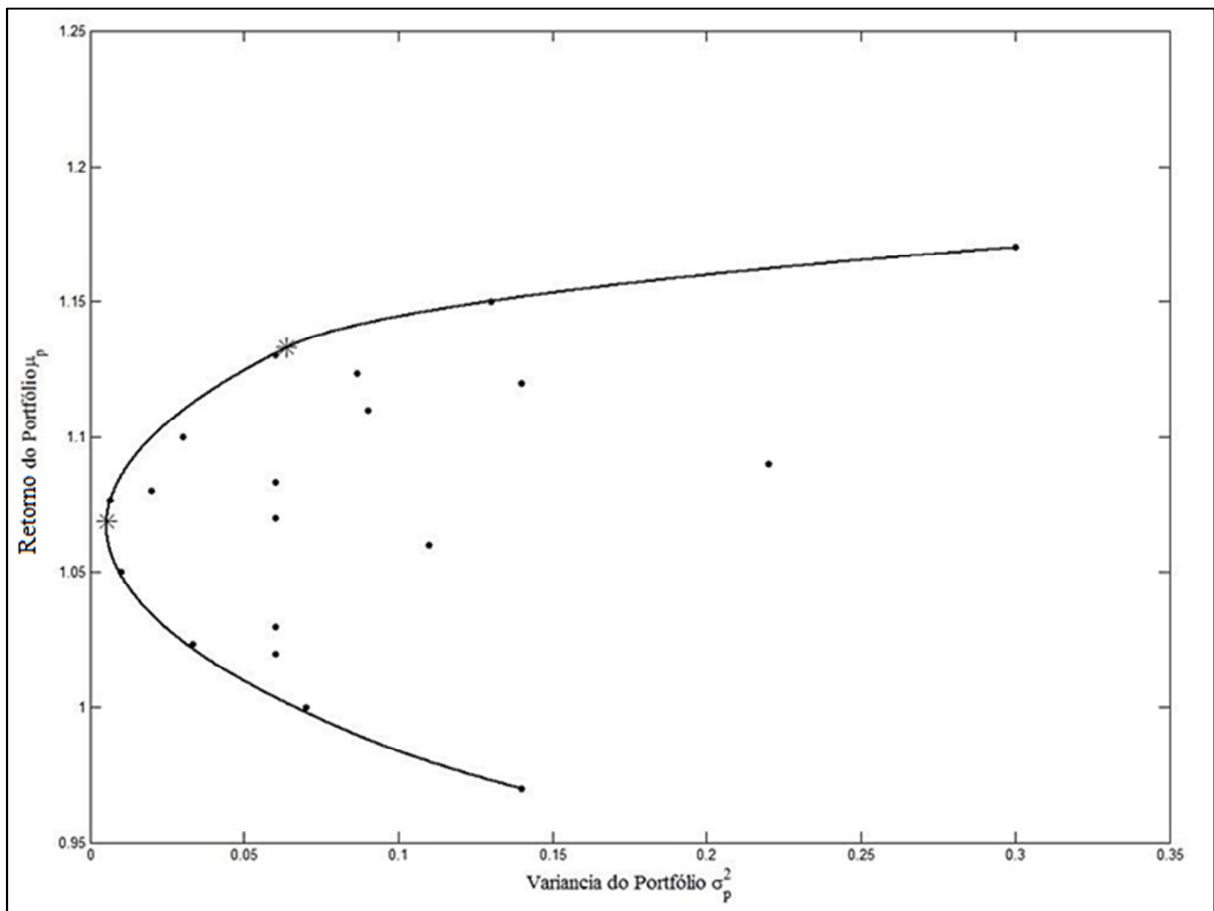


Figura 6.2 - Fronteira eficiente e de resultados experimentais para o primeiro exemplo

Fonte: Próprio autor

Contudo, a principal característica dos experimentos de mistura é ignorada quando a análise MVP com o uso do GMDEPO é feita com base na distribuição normal multivariada dos rendimentos com parâmetros conhecidos. Esta característica refere-se a possibilidade de lidar com erros na estimativa dos parâmetros. Quando esse tipo de ruído é apresentado nas experiências, obtém-se um modelo estatístico de análise. Por exemplo, se os erros aleatórios são considerados na média e na covariância estimada, pode-se obter um modelo baseado no intervalo de confiança, para que o investidor possa tomar decisões com base em testes de hipóteses. O impacto da estimativa do erro sobre o desempenho da carteira é discutido no próximo capítulo.

### 6.1.2 A Influência dos Erros de Estimação

O modelo MVP (Média-Variância do Portfolio) discutido neste trabalho depende de dois parâmetros: o vetor dos retornos e a matriz de variância-covariância. Na prática, estes parâmetros não são conhecidos, mas podem ser estimados a partir de dados históricos da distribuição por meio da teoria das amostras. A incerteza sobre a estimativa dos parâmetros da amostra pode levar a um desempenho ruim do portfólio. Jobson e Korkie (1980), Michaud (1989), Chopra e Ziemba (1993) e Best e Grauer (1991) discutiram o impacto do erro de estimação na escolha de portfólios ótimos, mostrando que ele desempenha um papel importante na seleção destes portfólios. No mesmo sentido, Lim et al. (2011) mostram que esta desvantagem é também observada quando outras métricas de risco coerentes são usadas.

Se a distribuição dos retornos estimados é considerada normal multivariada, a estimativa dos parâmetros com base nos dados históricos da média dos retornos e da matriz de covariância podem ser utilizados. Além disso, com base no ponto de estimativa e horizonte de tempo, podem-se construir intervalos de confiança. Assim, podem-se gerar amostras de retornos do vetor e da matriz de covariância, e replicar o GMDEPO quantas vezes forem desejadas. Este procedimento considera apenas o cálculo direto das equações (2.2) e (2.3), e produz um modelo estatístico para a construção da fronteira eficiente, de modo que um investidor pode fazer suas inferências considerando os erros de estimação, tornando assim suas decisões mais robustas.

O GMDEPO é aplicado neste capítulo considerando o erro de estimativa dos parâmetros da distribuição. Para tanto, os três dados de ativos utilizados são aplicados. No entanto, além da independência entre os retornos dos ativos, considera-se neste ponto que os parâmetros são obtidos sobre os retornos mensais com  $n = 60$  normalmente distribuídos, de modo que os parâmetros estimados são agora considerados como estatísticas de amostragem, sendo:

$$\bar{r} = [1,05 \quad 1,08 \quad 1,10]^T \quad (6.7)$$

$$S^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0,01} & \sigma_{12}^2 & \sigma_{13}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \mathbf{0,02} & \sigma_{23}^2 \\ \sigma_{31}^2 & \sigma_{32}^2 & \mathbf{0,03} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

É possível perceber, com o teorema central do limite, que a média da amostra é normalmente distribuída com valor esperado  $E[\bar{x}_i] = \mu_i$  e a variância  $Var[\bar{x}_i] = Var[x_i]/n$ . Além disso, a relação de  $(n - 1)s_i^2/\sigma_i^2$  tem distribuição de qui-quadrado com  $(n - 1)$  graus de liberdade. A distribuição dos retornos da distribuição é assumida como uma multivariada normal, assim os parâmetros de estimação são baseados nos dados históricos da média e da matriz de covariância. Com base na estimativa de pontos em um horizonte de tempo, é possível construir intervalos de confiança. Podem-se gerar amostras dos retornos (média) e da variância, sendo esta:

$$S_{\ell}^2 = \frac{\chi_{n-1}^2 * \sigma^2}{n - 1} \quad (6.9)$$

Feito isso se pode replicar o GMDEPO tantas vezes quanto necessário.

Considerando agora o GMDEPO com  $\nu$  replicas em um conjunto com a média e a matriz de variância-covariância da amostra e, a distribuição da variância, consegue-se estimar os modelos estatísticos considerando os erros de estimação. A **Tabela 6.1** com  $q = 3$  e  $m = 4$  agora é replicada 10 vezes, de modo que poderemos analisar suas propriedades estatísticas.

A **Figura 6.3** mostra o diagrama de dispersão dos resultados experimentais para o retorno do portfolio  $r_p$  e para a variância  $s_p^2$  para cada proporção de ativos.

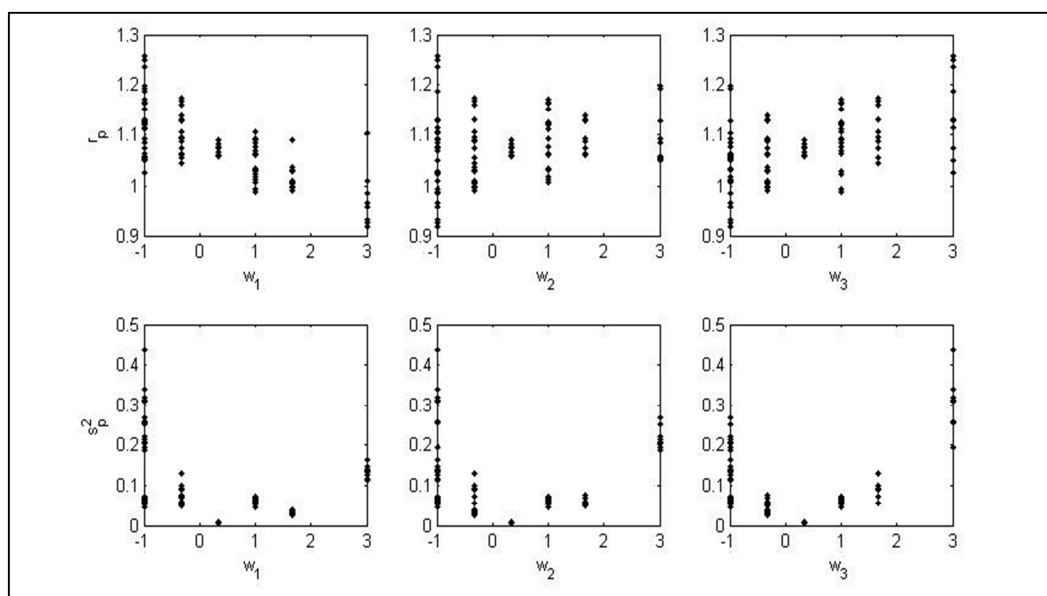


Figura 6.3 - Gráficos de dispersão dos resultados experimentais.

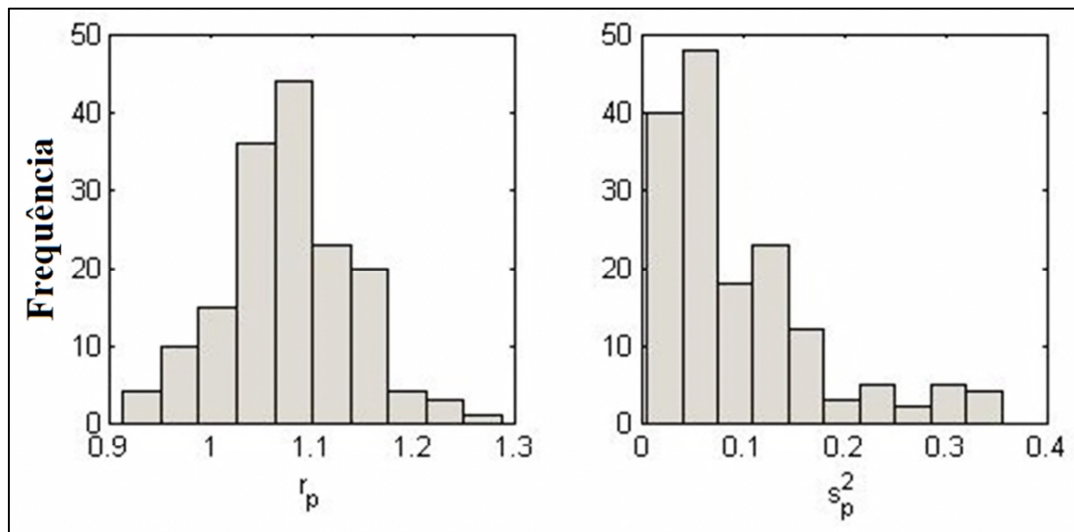


Figura 6.4 - Histogramas dos resultados experimentais.

Ao analisar modelos lineares, pressupostos comuns para a variável de resposta são: a independência, normalidade e homocedasticidade (variâncias iguais para todas as amostras). No entanto, note a partir da **Figura 6.3**, que os resultados experimentais apresentam comportamento heteroscedástico, isto é, cada execução experimental, resultado experimental, parece apresentar variação diversa. Isto era esperado, uma vez que o retorno de cada ativo tem uma variação modelada por uma distribuição de amostras. Além disso, a partir da **Figura 6.4** pode-se verificar que, enquanto os retornos do portfólio parecem se ajustar a uma distribuição normal, a variância não segue a mesma simetria, o que também era esperado já que está limitada a valores positivos.

Os retornos do portfólio  $r_p$  são primeiramente modelados pela regressão linear, considerando cada proporção dos ativos. A variância  $s_p^2$  é modelada pelo modelo quadrático baseado na **equação (2.3)** repetida abaixo.

$$\sigma_p^2 = w^T \Sigma w \quad (6.10)$$

A estimativa dos parâmetros pode ser realizada por meio, dentre outros métodos, dos mínimos quadrados ou pelo método da máxima verossimilhança. Ambas produzem um estimador consistente  $\beta_i^*$  e  $\beta_{ij}^*$ . As **equações (6.11)** e **(6.12)** demonstram o modelo estimado no qual todos os coeficientes são estatisticamente significantes com nível de significância de 5%.

$$\hat{\mu}_p = 1.0523 \cdot w_1 + 1.0684 \cdot w_2 + 1.0957 \cdot w_3 \quad (6.11)$$

$$\hat{\sigma}_p^2 = 0.0051 \cdot w_1 + 0.0142 \cdot w_2 + 0.0241 \cdot w_3 - 0.0302 \cdot w_1 w_2 - 0.0399 \cdot w_1 w_3 - 0.0486 \cdot w_2 w_3 \quad (6.12)$$

Note-se que o modelo acima é o mesmo dado nas **equações (6.5) e (6.6)** porém, seus coeficientes são diferentes por não serem mais determinísticos, já que estão sendo considerados os erros de estimação, tanto para o retorno, quanto para a variância.

Usando então o modelo econométrico destas **equações (6.11) e (6.12)**, pode-se determinar portfólios ótimos MVP (Média-Variância do Portfólio), tal como mostrado **Figura 6.5** que também mostra a fronteira eficiente quando somente um ponto estimado é considerado e considerando também os erros de estimação.

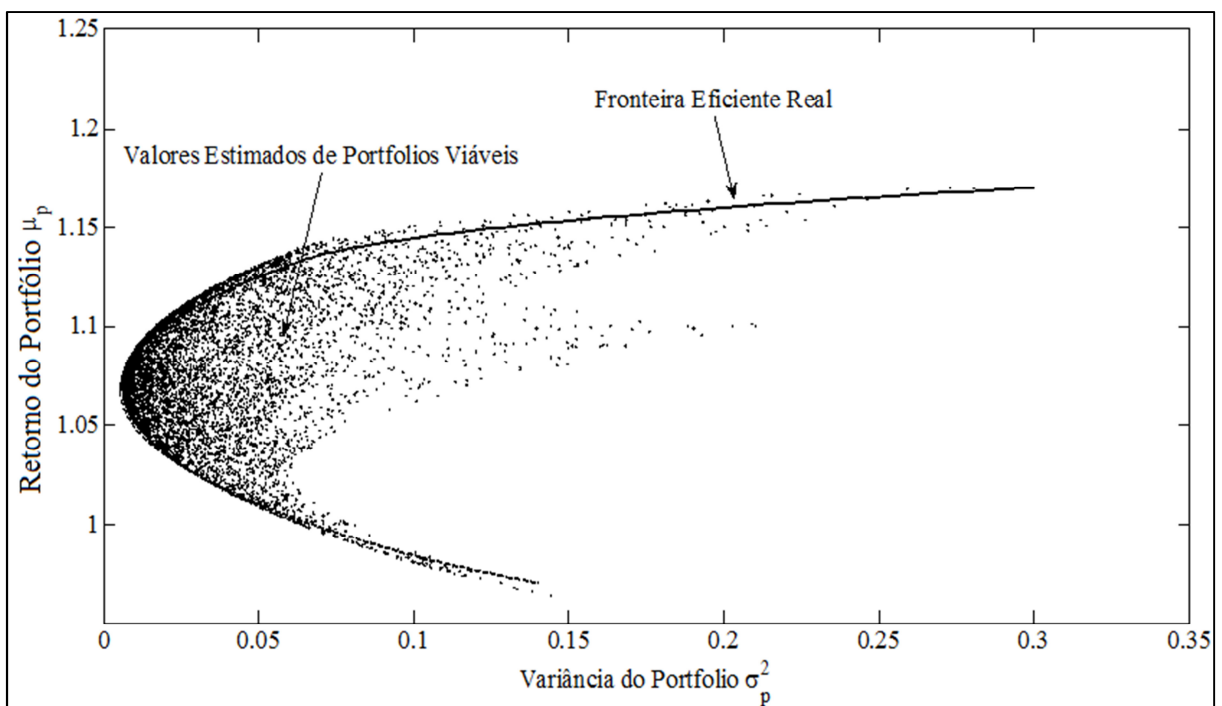


Figura 6.5 - Valores Estimados de Portfólios Viáveis

Observe ainda na **Figura 6.5** que a estimativa do intervalo considerado para o retorno e para a variância podem ser significativamente diferentes na tomada de decisão. Suponha, por exemplo, que um investidor deseja um retorno de 12%. Considerando-se a fronteira estimada, com base nos modelos de regressão das equações **(6.11) e (6.12)**, este investidor consi-

deraria uma variância, um risco, de 0,036. No entanto, no modelo verdadeiro, esta é cerca de 0,043, ou seja, 20% maior. Conhecendo a verdadeira variância, este investidor poderia mudar sua decisão quanto ao portfólio a adotar.

Na manipulação do erro de estimação, o analista poderá usar o intervalo de confiança sobre a resposta média, ou seja, poderá calcular os limites inferior e superior da resposta estimada da média a um certo nível de confiança. A **equação (6.13)** demonstra a variância estimada para o portfólio com retorno  $w_0$ .

$$\text{var}(\hat{r}_p) = s_{r_p}^2 w_0^T (W_{r_p}^T W_{r_p})^{-1} w_0 \quad (6.13)$$

Nesta,  $w_0$  é o vetor dos pesos ou proporções de cada ativo,  $s_{r_p}^2$  é a variância estimada a partir do modelo da regressão dos retornos do portfólio, dado pela **equação (6.12)**,  $W_{r_p}$  é uma matriz  $n \times p$  com os valores dos pesos dos ativos obtidos pela matriz experimental. Assim o intervalo de confiança  $(1 - \alpha)$  sobre a resposta média  $w_0$  é obtido a partir da **equação (6.14)**:

$$\mu_p = r_p(w_0) \pm t_{\alpha/2, n-p} \cdot \sqrt{s_{r_p}^2 w_0^T (W_{r_p}^T W_{r_p})^{-1} w_0} \quad (6.14)$$

Na qual,  $t_{\alpha/2, n-p}$  é a inversa de uma distribuição  $t$  com nível  $\alpha/2$  e grau de liberdade  $n - p$ . Uma equação similar pode ser obtida para a variância do portfólio, como mostrado na **equação (6.15)**.

$$\sigma_p^2 = s_p^2(w_0) \pm t_{\alpha/2, n-p} \cdot \sqrt{s_{s_p}^2 w_0^T (W_{s_p}^T W_{s_p})^{-1} w_0} \quad (6.16)$$

Utilizando as **equações (6.14)** e **(6.12)** pode-se controlar o nível de confiança sobre a fronteira eficiente. Como exemplo, a **Figura 6.6** mostra, com intervalo de confiança de 95%, a média e a variância estimadas, dadas pelas equações **(6.11)** e **(6.12)** – linhas tracejadas. Esta figura também mostra a fronteira esperada (linha sólida fina) e a fronteira real (linha tracejada).

Finalmente, usando a abordagem do intervalo de confiança, o investidor que procura um retorno de 12% iria se confrontar com uma variação do risco de 0,05, sendo este o limite

superior da variância. Assim, o processo de decisão pode ser considerado com um nível maior de precisão. Na verdade a abordagem do intervalo de confiança permite ao analista fazer testes de hipóteses sobre qualquer decisão, podendo tomar decisões de uma forma mais robusta.

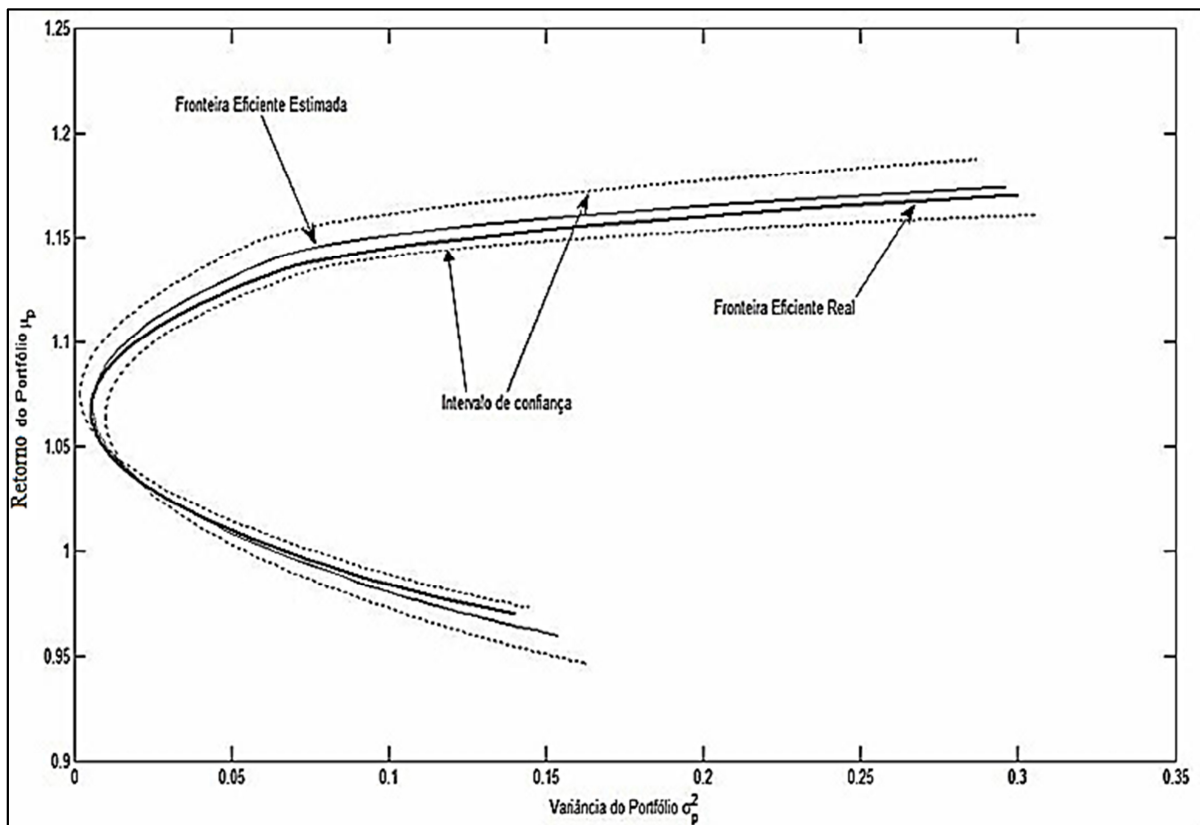


Figura 6.6 - Portfólios Viáveis com Intervalo de Confiança

## 7. RESULTADOS

A partir dos conceitos apresentados no capítulo anterior, este capítulo tem o objetivo de descrever o método experimental utilizado neste trabalho. A definição do método de pesquisa a ser seguido é importante para que o processo estudado seja tratado de forma sistemática, contribuindo para a obtenção de informações objetivas e de relevância científica. Sendo assim, inicia-se com uma reafirmação do problema de pesquisa para, em seguida, ocorrer a definição do método experimental.

### 7.1 Aplicação: IBOVESPA com 11 empresas, 13 ativos

O GMDEPO é aplicado na seleção de portfólio com 13 ativos listados no *website* da Bolsa de Valores de São Paulo - BM&FBOVESPA. As ações selecionadas são as mais negociadas, compondo o principal índice do mercado local brasileiro, conhecido como IBovespa. Os dados referem-se aos anos de 2001 a 2012.

A seleção foi feita em 11 empresas sendo 13 ativos de capital aberto que possuem suas ações listadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BM&FBOVESPA). Entre estas, empresas de energia, bancos, varejo, *internet*. Para que o portfólio seja o mais diversificado possível.

Tabela 7.1 - Códigos das Ações BOVESPA

| Código | Nome da Empresa                             |
|--------|---|
| BBAS3  | Banco do Brasil                             |
| BBDC4  | Banco Bradesco                              |
| BVMF3  | BM&F Bovespa                                |
| GGBR4  | Gerdau                                      |
| HYPE3  | Hypermarcas                                 |
| ITUB4  | Banco Itaú                                  |
| OGXP3  | OGX Petróleo e Gás Participações            |
| PDGR3  | Realty S.A. Empreendimentos e Participações |
| PETR3  | Petrobrás                                   |
| PETR4  | Petrobrás                                   |
| USIM5  | Usiminas                                    |
| VALE3  | Vale  |
| VALE5  | Vale  |

Tabela 7.2 - Arranjo de misturas, 1 réplica

| BBAS3  | BBDC4  | BVMF3  | GGBR4  | HYPE3  | ITUB4  | OGXP3  | PDGR3  | PETR3  | PETR4 | USIM5 | VALE3 | VALE5 | Rp eff | S2 eff |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| 13,000 | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,129  | 4,567  |
| 6,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,148  | 1,484  |
| 6,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,806  | 1,753  |
| 6,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,010  | 2,090  |
| 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,054  | 2,008  |
| 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,203  | 1,772  |
| 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,063  | 1,651  |
| 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,146  | 1,291  |
| 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,941  | 1,616  |
| 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,959  | 1,005  |
| 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,354  | 2,271  |
| 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 1,055  | 1,499  |
| 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,121  | 1,466  |
| 1,000  | 13,000 | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,166  | 1,605  |
| 1,000  | 6,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,825  | 1,362  |
| 1,000  | 6,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,029  | 1,028  |
| 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,073  | 0,931  |
| 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,222  | 1,112  |
| 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,082  | 2,037  |
| 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,165  | 1,098  |
| 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,960  | 0,735  |
| 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,978  | 0,731  |
| 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,373  | 1,169  |
| 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 1,074  | 0,824  |
| 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,140  | 0,723  |
| 1,000  | 1,000  | 13,000 | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,484  | 5,676  |
| 1,000  | 1,000  | 6,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,688  | 1,677  |
| 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,731  | 1,532  |
| 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,881  | 2,182  |
| 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,741  | 2,796  |
| 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,824  | 2,578  |
| 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,619  | 1,807  |
| 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,637  | 1,808  |
| 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,032  | 1,977  |
| 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 0,733  | 1,666  |
| 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 0,799  | 1,433  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 13,000 | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,891  | 2,687  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,935  | 1,509  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,085  | 1,502  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,944  | 1,339  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,027  | 0,993  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,823  | 0,882  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,841  | 0,865  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,235  | 1,602  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 0,936  | 1,296  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,002  | 0,881  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 13,000 | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,979  | 3,290  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,128  | 2,179  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,988  | 1,164  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,071  | 1,462  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,866  | 1,156  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 5,000  | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,884  | 1,209  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,279  | 1,520  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 0,980  | 1,090  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,046  | 1,371  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 13,000 | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,278  | 3,190  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,138  | 1,551  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,221  | 1,132  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,016  | 1,093  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,034  | 1,010  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,429  | 1,487  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 1,129  | 1,231  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,196  | 0,667  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 13,000 | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,998  | 4,698  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,081  | 1,648  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,876  | 1,777  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,894  | 1,849  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,289  | 1,613  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 0,989  | 1,274  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,056  | 1,566  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 13,000 | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,164  | 3,100  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 6,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,959  | 1,169  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,977  | 1,305  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,372  | 1,590  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,000 | 1,072  | 1,216  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 1,000  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 6,000 | 1,139  | 1,277  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 13,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,754  | 1,534  |
| 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 1,000  | 6,000  | 6,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,772  | 0,691  |
| 1,000  | 1,000  |        |        |        |        |        |        |        |       |       |       |       |        |        |

Considerando as empresas listadas na **Tabela 7.1**, podem-se obter, então, os retornos mensais (**Tabela 7.3**) baseados no preço de fechamento dos ativos, conforme a **equação (7.1)**.

$$r_{ti} = \frac{p_{ti}}{p_{ti-1}} \quad (7.1)$$

na qual  $r_{ti}$  é o retorno ou rendimento da ação  $i$  no tempo  $t$ ,  $p_{ti}$  é o preço da ação  $i$  no mês atual,  $p_{ti-1}$  é o preço da ação  $i$  mês anterior. Esses valores foram, então, o conjunto de dados observados que serão considerados neste trabalho.

Primeiramente foi analisado o problema sem reamostragem, dessa forma, então, foi possível estimar os retornos médios de cada ação e a matriz de covariância, conforme mostrado na **Tabela 7.4**.

Tabela 7.3 - Retornos dos ativos

| Ativo   | BBAS3 | BBDC4 | BVMF3 | GGBR4 | HYPE3 | ITUB4 | OGXP3 | PDGR3 | PETR3 | PETR4 | USIM5 | VALE3 | VALE5 |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Retorno | 1,036 | 1,008 | 1,018 | 1,031 | 1,016 | 1,017 | 1,033 | 1,015 | 1,016 | 1,013 | 1,035 | 1,035 | 1,030 |

Tabela 7.4 - Matriz de covariância

| Ativos | BBAS3        | BBDC4        | BVMF3        | GGBR4        | HYPE3        | ITUB4        | OGXP3        | PDGR3        | PETR3        | PETR4        | USIM5        | VALE3        | VALE5        |
|--------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| BBAS3  | <b>0,020</b> |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| BBDC4  | 0,011        | <b>0,011</b> |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| BVMF3  | -0,013       | -0,014       | <b>0,029</b> |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| GGBR4  | 0,000        | 0,000        | -0,001       | <b>0,013</b> |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| HYPE3  | 0,002        | 0,000        | 0,001        | 0,002        | <b>0,015</b> |              |              |              |              |              |              |              |              |
| ITUB4  | 0,009        | 0,010        | -0,013       | 0,002        | -0,002       | <b>0,012</b> |              |              |              |              |              |              |              |
| OGXP3  | -0,002       | 0,001        | -0,001       | -0,002       | -0,001       | 0,000        | <b>0,024</b> |              |              |              |              |              |              |
| PDGR3  | -0,003       | -0,001       | -0,001       | -0,005       | -0,001       | -0,003       | 0,005        | <b>0,020</b> |              |              |              |              |              |
| PETR3  | 0,006        | 0,006        | -0,010       | 0,001        | -0,002       | 0,007        | 0,000        | 0,000        | <b>0,008</b> |              |              |              |              |
| PETR4  | 0,006        | 0,006        | -0,010       | 0,002        | -0,002       | 0,007        | 0,001        | 0,000        | 0,007        | <b>0,007</b> |              |              |              |
| USIM5  | 0,006        | 0,003        | 0,005        | -0,001       | 0,002        | 0,001        | -0,001       | 0,005        | 0,000        | 0,000        | <b>0,023</b> |              |              |
| VALE3  | 0,000        | 0,001        | 0,001        | -0,002       | -0,002       | 0,002        | -0,002       | -0,004       | 0,001        | 0,001        | 0,001        | <b>0,010</b> |              |
| VALE5  | -0,001       | 0,000        | 0,002        | -0,002       | -0,002       | 0,002        | -0,002       | -0,004       | 0,001        | 0,001        | 0,001        | 0,009        | <b>0,009</b> |

Tabela 7.5 - Matriz de Correlação

| Ativos | BBAS3  | BBDC4  | BVMF3  | GGBR4  | HYPE3  | ITUB4  | OGXP3  | PDGR3  | PETR3  | PETR4 | USIM5 | VALE3 | VALE5 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| BBAS3  | 1,000  |        |        |        |        |        |        |        |        |       |       |       |       |
| BBDC4  | 0,738  | 1,000  |        |        |        |        |        |        |        |       |       |       |       |
| BVMF3  | -0,558 | -0,776 | 1,000  |        |        |        |        |        |        |       |       |       |       |
| GGBR4  | 0,024  | 0,005  | -0,046 | 1,000  |        |        |        |        |        |       |       |       |       |
| HYPE3  | 0,129  | 0,018  | 0,043  | 0,112  | 1,000  |        |        |        |        |       |       |       |       |
| ITUB4  | 0,600  | 0,849  | -0,693 | 0,142  | -0,146 | 1,000  |        |        |        |       |       |       |       |
| OGXP3  | -0,075 | 0,032  | -0,023 | -0,120 | -0,037 | -0,009 | 1,000  |        |        |       |       |       |       |
| PDGR3  | -0,132 | -0,040 | -0,029 | -0,298 | -0,040 | -0,171 | 0,242  | 1,000  |        |       |       |       |       |
| PETR3  | 0,460  | 0,618  | -0,670 | 0,112  | -0,226 | 0,716  | 0,033  | -0,013 | 1,000  |       |       |       |       |
| PETR4  | 0,479  | 0,635  | -0,672 | 0,154  | -0,198 | 0,722  | 0,079  | -0,012 | 0,974  | 1,000 |       |       |       |
| USIM5  | 0,274  | 0,222  | 0,176  | -0,036 | 0,113  | 0,083  | -0,036 | 0,238  | -0,019 | 0,022 | 1,000 |       |       |
| VALE3  | 0,008  | 0,067  | 0,043  | -0,157 | -0,200 | 0,184  | -0,155 | -0,301 | 0,142  | 0,097 | 0,072 | 1,000 |       |
| VALE5  | -0,065 | 0,016  | 0,092  | -0,207 | -0,208 | 0,156  | -0,148 | -0,275 | 0,127  | 0,076 | 0,035 | 0,955 | 1,000 |

Tabela 7.6 - Coeficientes de Correlação

| Ativo | BBAS3  | BBDC4   | BVMF3   | GGBR4   | HYPE3   | ITUB4   | OGXP3   | PDGR3   | PETR3   | PETR4   | USIM5   | VALE    |         |
|-------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| BBDC4 | 0,738  | Person  |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
|       | 0,000  | P-Vaule |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| BVMF3 | -0,558 | -0,776  | Person  |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
|       | 0,000  | 0,000   | P-Vaule |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| GGBR4 | 0,024  | 0,005   | -0,046  | Person  |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
|       | 0,876  | 0,974   | 0,771   | P-Vaule |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| HYPE3 | 0,129  | 0,018   | 0,043   | 0,112   | Person  |         |         |         |         |         |         |         |         |
|       | 0,410  | 0,907   | 0,782   | 0,476   | P-Vaule |         |         |         |         |         |         |         |         |
| ITUB4 | 0,600  | 0,849   | -0,693  | 0,142   | -0,146  | Person  |         |         |         |         |         |         |         |
|       | 0,000  | 0,000   | 0,000   | 0,363   | 0,352   | P-Vaule |         |         |         |         |         |         |         |
| OGXP3 | -0,075 | 0,032   | -0,023  | -0,120  | -0,037  | -0,009  | Person  |         |         |         |         |         |         |
|       | 0,631  | 0,837   | 0,882   | 0,445   | 0,815   | 0,953   | P-Vaule |         |         |         |         |         |         |
| PDGR3 | -0,132 | -0,040  | -0,029  | -0,298  | -0,040  | -0,171  | 0,242   | Person  |         |         |         |         |         |
|       | 0,401  | 0,800   | 0,852   | 0,053   | 0,800   | 0,271   | 0,118   | P-Vaule |         |         |         |         |         |
| PETR3 | 0,460  | 0,618   | -0,670  | 0,112   | -0,226  | 0,716   | 0,033   | -0,013  | Person  |         |         |         |         |
|       | 0,002  | 0,000   | 0,000   | 0,474   | 0,144   | 0,000   | 0,832   | 0,932   | P-Vaule |         |         |         |         |
| PETR4 | 0,479  | 0,635   | -0,672  | 0,154   | -0,198  | 0,722   | 0,079   | -0,012  | 0,974   | Person  |         |         |         |
|       | 0,001  | 0,000   | 0,000   | 0,324   | 0,204   | 0,000   | 0,615   | 0,940   | 0,000   | P-Vaule |         |         |         |
| USIM5 | 0,274  | 0,222   | 0,176   | -0,036  | 0,113   | 0,083   | -0,036  | 0,238   | -0,019  | 0,022   | Person  |         |         |
|       | 0,075  | 0,152   | 0,259   | 0,818   | 0,471   | 0,595   | 0,817   | 0,124   | 0,904   | 0,889   | P-Vaule |         |         |
| VALE3 | 0,008  | 0,067   | 0,043   | -0,157  | -0,200  | 0,184   | -0,155  | -0,301  | 0,142   | 0,097   | 0,072   | Person  |         |
|       | 0,958  | 0,670   | 0,785   | 0,314   | 0,200   | 0,238   | 0,322   | 0,050   | 0,362   | 0,534   | 0,647   | P-Vaule |         |
| VALE5 | -0,065 | 0,016   | 0,092   | -0,207  | -0,208  | 0,156   | -0,148  | -0,275  | 0,127   | 0,076   | 0,035   | 0,955   | Person  |
|       | 0,680  | 0,917   | 0,559   | 0,183   | 0,181   | 0,319   | 0,345   | 0,074   | 0,416   | 0,630   | 0,824   | 0,000   | P-Vaule |

Como discutido no capítulo anterior, a principal motivação para o uso do GMDEPO é a possibilidade de considerar os erros de estimação na análise. Portanto, é necessário considerar, além da estimativa pontual, uma forma de incorporar os intervalos de confiança das estatísticas utilizadas. Isso pode ser feito gerando-se novas amostras que consideram os valores observados.

A fim de gerar amostras para o vetor de retornos e matriz de covariância, podem-se utilizar as técnicas de simulação de Monte Carlo ou de *bootstrap* (ou reamostragem). A primeira utiliza o ponto de estimação para gerar amostras aleatórias considerando a Cadeia de Markov e a distribuição assumida, enquanto que a *bootstrap* gera uma nova amostra a partir de uma função de distribuição paramétrica ou empírica. A reamostragem será utilizada nesse trabalho.

De fato, a ideia inicial, proposta por Efron (1979), considera uma distribuição da amostra de interesse, simulando o processo de geração dos dados. Como este trabalho não se concentra na modelagem dos retornos dos ativos, outros resultados numéricos, de *bootstrap* são então considerados, nesta abordagem, a reamostragem é feita com base na função de distribuição empírica com reposição dos valores, então se pode construir uma amostra de qualquer tamanho a partir dos dados originais.

Os métodos de reamostragem baseiam-se na geração de uma nova amostra de mesmo tamanho da amostra original, a partir do sorteio aleatório com reposição de seus elementos. Se  $\hat{F}$  é a distribuição empírica, por exemplo, cada valor observado tem probabilidade de  $1/n$ , um conjunto de reamostrado é definido como uma amostra aleatória de tamanho  $n$  obtido de  $\hat{F}$ . Em outras palavras, uma reamostragem nos dados é a obtenção de uma amostra aleatória de tamanho  $n$  obtida com reposição de uma “população” de  $n$  observações. Efron (1979) mostra que essa técnica é bastante útil na análise de intervalos de confiança de qualquer estatística a ser analisada, pois depende apenas do conjunto de dados observados.

Portanto, podem ser formadas tantas amostras quanto forem necessárias para análise de portfólio, considerando os retornos observados e, com isso, analisar os erros de estimação dos parâmetros como a média e a matriz de covariância. No presente trabalho, o número de reamostragem utilizado é o mesmo número de réplicas a ser considerado no GMDEPO.

Aplicando o método GMDEPO, conforme capítulo anterior, tem-se o projeto experimental, *simplex lattice* com  $q=13$  e  $m=14$  com grau *lattice*=2 (*degree of lattice*) resultando em 105 corridas, replicado 10 vezes, gerando uma matriz 1050 x 13. Estes parâmetros são escolhidos, uma vez que queremos selecionar um portfólio ótimo de 13 ações e sabendo que a variância é uma função quadrática dos dados. Uma vez que os experimentos são calculados, pode-se estimar o comportamento esperado da média e da variância, bem como seus intervalos de confiança.

A **Figura 7.1** apresenta a fronteira eficiente estimada (linha contínua) e seu intervalo de confiança utilizando os dados das 13 ações, bem como o portfólio considerando a aversão ao risco, com a ajuda da função *desirability* discutida no **Capítulo 5**. Os pontos representam retorno esperado ótimo, enquanto os “x” referem-se ao retorno esperado robusto para o portfólio ótimo considerando o intervalo de confiança.

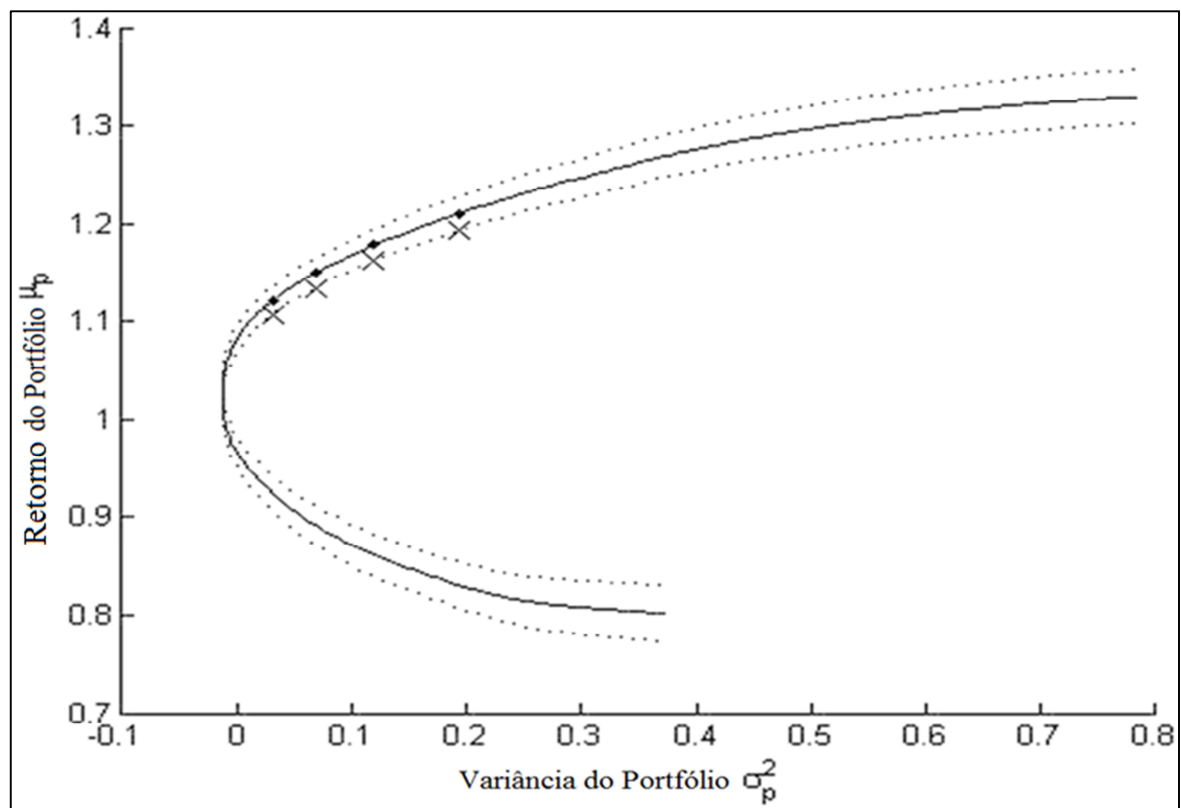


Figura 7.1 - Fronteira Estimada e Intervalo de Confiança

Na **Figura 7.1**, os resultados otimizados são mostrados para quatro cenários diferentes sobre a aversão ao risco do investidor. Além disso,  $\hat{r}_p$  e  $\hat{\sigma}_p^2$  referem-se ao retorno e variância esperados do portfólio, obtidos a partir de análise GMDEPO, enquanto  $\hat{r}_p^*$  representa o retorno esperado robusto, ou seja, o intervalo de confiança de 95% em torno do modelo estimado. Finalmente,  $w_i$  se refere às proporções de cada ativo no portfólio otimizado pela função *desirability*

Note-se, a partir da **Tabela 6.1** que quanto maior  $\lambda_1$ , menor é a aversão dos investidores ao risco, de modo que ele pratica mais venda a descoberto. Por exemplo, conforme  $\lambda_1$  cresce entre 0,50-5,00, a proporção do ativo  $w_3$  é cada vez mais negativa, e as proporções dos ativos  $w_8$  e  $w_9$  se movimentam de comprado para vendido. Note, também, que retorno esperado robusto é de cerca de -1,27% para o caso de A, caindo para -1,45% no caso de C. De fato, como o investidor aceita mais risco, mais incerto é o desempenho da carteira e, portanto, mais incertos são os modelos econométricos que estimam o comportamento do portfólio. Esta conclusão pode ser obtida considerando a distribuição amostral das estatísticas utilizadas para gerar os dados na análise. Se um ativo apresenta uma variação maior, o intervalo de estimação da média mostra um intervalo de confiança maior, de forma que gera mais risco e incerteza no modelo de média estimada.

Curiosamente, o método *desirability* permite lidar com este tipo de problema. Ou seja, uma vez obtida o portfólio otimizado a partir dos modelos econométricos, o nível de confiança pode ser considerado, rendendo uma fronteira eficiente robusta. Dessa forma o investidor pode tomar decisões alto nível de precisão.

Tabela 7.7 - Portfólios 13 Ativos

| Caso                    | A              | B              | C              | D              |
|-------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\lambda_1$             | 0.5000         | 1.0000         | 2.000          | 5.0000         |
| $\lambda_2$             | 1.0000         | 1.0000         | 1.000          | 1.0000         |
| $\hat{r}_p$             | 1.1213         | 1.1493         | 1.1779         | 1.2097         |
| $\hat{r}_p^*$           | 1.1071         | 1.1343         | 1.1618         | 1.1921         |
| $\hat{\sigma}_p^2$      | 0.0311         | 0.0682         | 0.1194         | 0.1924         |
| $w_1$                   | 0.8224         | 1.0393         | 1.2593         | 1.5044         |
| $w_2$                   | -1.0000        | -1.0000        | -1.0000        | -1.0000        |
| <b><math>w_3</math></b> | <b>-0.1040</b> | <b>-0.2665</b> | <b>-0.4497</b> | <b>-0.6539</b> |
| $w_4$                   | 0.4515         | 0.48716        | 0.4846         | 0.4814         |
| $w_5$                   | 0.2438         | 0.03308        | -0.2222        | -0.5070        |
| $w_6$                   | -0.8713        | -0.9998        | -1.0000        | -1.0000        |
| $w_7$                   | 0.6008         | 0.7606         | 0.9258         | 1.1099         |
| <b><math>w_8</math></b> | <b>0.0475</b>  | <b>-0.0972</b> | <b>-0.2676</b> | <b>-0.4576</b> |
| <b><math>w_9</math></b> | <b>0.4592</b>  | <b>0.2040</b>  | <b>-0.0792</b> | <b>-0.3952</b> |
| $w_{10}$                | -1.0000        | -1.0000        | -1.0000        | -1.0000        |
| $w_{11}$                | 0.8524         | 1.0847         | 1.3271         | 1.5973         |
| $w_{12}$                | 0.3549         | 0.6013         | 0.8674         | 1.1639         |
| $w_{13}$                | 0.1430         | 0.1527         | 0.1546         | 0.1565         |

## 8. CONCLUSÕES

Com base nos estudos apresentados, pode-se afirmar que o uso do GMDEPO é válido e eficiente na aplicação em seleção de portfólios de ativos financeiros, permitindo que o analista lide com os erros de estimação. A fronteira eficiente em um investimento foi obtida com a maximização do retorno, dado um nível de risco ou a minimização do risco dado um retorno requerido. Utilizando a otimização multiobjetivo foi possível maximizar o retorno com um risco minimizado, com métodos de otimização, como por exemplo, *desirability*.

As métricas de risco (variância) e de retorno (média) utilizadas são as mais referenciadas para ativos financeiros e demonstraram-se eficientes na escolha dos portfólios. Isto se deve ao fato de poderem ser caracterizadas como uma distribuição de retornos relacionados a uma distribuição de riscos. Além do que suas correlações permitem inferências do comportamento do próprio mercado acionário.

A abordagem proposta foi baseada na metodologia de superfície de resposta utilizando-se a técnica estatística de experimentos de misturas, para que se possa estimar o retorno esperado, variância, e o intervalo de confiança do portfólio. A otimização do portfólio foi então realizada com a ajuda da função *desirability*, que é uma transformação da otimização multiobjetivo que permite a combinação de risco e retorno e também permite a introdução da aversão ao risco do investidor.

Com o uso de projetos de experimentos de misturas foi possível realizar experimentos considerando o portfólio como uma mistura, sendo cada ativo um componente da mistura e suas proporções podem ser consideradas como a contribuição de cada um no resultado da otimização.

Os portfólios devem ser considerados e revistos em períodos de tempo que podem ser definidos pelo conhecimento do investidor, sendo que o modelo apresentado poderá ser sempre recalculado, tendo assim resultados condizentes com os eventos ou oscilações dos mercados. Estes eventos podem então alterar as análises no experimento de mistura, não o invalidando, mas tornando necessárias atualizações periódicas.

Considerar os erros de estimação em modelos de portfólios torna a decisão do investimento mais robusta, sendo esta a grande contribuição deste trabalho. Isto se tornou possível por utilizar-se arranjos de mistura na composição dos portfólios e este modelo permite a análise dos erros. Diferentemente de otimizações de portfólios tradicionais, conseguiu-se inferir de forma mais consistente sobre as variações nos riscos e retornos que um investimento pode sofrer. Por esta razão, o intervalo de confiança estimado da variância e do retorno do portfólio pode conduzir a uma estimativa mais segura da fronteira, permitindo que os investidores tomem decisões de forma mais robusta.

## **8.1 Sugestões para estudos futuros**

O modelos podem ser melhorados com métodos de ajustes dos erros de estimação. Otimizando assim as medidas dos parâmetros de análises. Podem-se criar portfólios por setores da economia, otimizá-los e criar um novo portfólio dos portfólios, para isto poderá serem gerados arranjos de misturas de arranjos de misturas, como uma sequência lexicográfica. Há a possibilidade de uso do conceito de cone de confiança para definição da área do portfólio ótimo, ou seja, há um campo muito vasto de estudo que podem ser feitos a partir do trabalho apresentado.

## 9. APÊNDICE – CÓDIGOS MATLAB®

DADOS PARA O BOOTSTRAP:

```
function [rbar,E] = bootstrap_dados(B)

% data
dados_dissertacao2;

% B=10;

% BBAS3    BBDC4    BVMF3    GGBR4    HYPE3    ITUB4    OGXP3    PDGR3    PETR3
% PETR4    USIM5    VALE3    VALE5

% r = zeros(B,13);

rbar = [];

sample = 43;

for k=1:B

    BBAS3id = random('unid',length(BBAS3),sample,1);
    BBDC4id = random('unid',length(BBDC4),sample,1);
    BVMF3id = random('unid',length(BVMF3),sample,1);
    GGBR4id = random('unid',length(GGBR4),sample,1);
    HYPE3id = random('unid',length(HYPE3),sample,1);
    ITUB4id = random('unid',length(ITUB4),sample,1);
    OGXP3id = random('unid',length(OGXP3),sample,1);
    PDGR4id = random('unid',length(PDGR4),sample,1);
    PETR3id = random('unid',length(PETR3),sample,1);
    PETR4id = random('unid',length(PETR4),sample,1);
    USIM5id = random('unid',length(USIM5),sample,1);
    VALE3id = random('unid',length(VALE3),sample,1);
    VALE5id = random('unid',length(VALE5),sample,1);
```

```

r_aux = [BBAS3(BBAS3id) BBDC4(BBDC4id) BVMF3(BVMF3id) GGBR4(GGBR4id)
...
HYPE3(HYPE3id) ITUB4(ITUB4id) OGXP3(OGXP3id) PDGR4(PDGR4id) ...
PETR3(PETR3id) PETR4(PETR4id) USIM5(USIM5id) VALE3(VALE3id)...
VALE5(VALE5id)];

rbar = [rbar ; mean(r_aux)];
E(:, :, k) = cov(r_aux);
end
rbar = rbar';

```

### CÁLCULO DOS RETORNOS:

```

function [mu,s2] = calc_ret_p(rbar, E ,w)

%rbar = mean(r);
%E = cov(r);

%n = size(r,1); % número de amostras
m = size(w,1); % número de portfolios

for k=1:m
    %Rp(:,k) = ( w(k,:) * r' )';
    mu(k) = w(k,:) * rbar;
    s2(k) = w(k,:) * E * w(k,:)';
end

```

## CÁLCULO DA FRONTEIRA EFICIENTE:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% This routine draws the frontier (three asset case)

% load paper_example_data      % 3 stocks example
load 13stocks                  % 13 stocks example

[b,s,b2,s2,Hmu,Hs2,df,df2] = model_estimate(rbar,E,w);

% [s] = frontier(b,s,b2,s2,df,df2,1,Hmu,Hs2,15,'no');      % confidence in-
interval only in both return variance!

[s] = frontier(b,s,b2,s2,df,df2,1,Hmu,Hs2,15,'yes');      % confidence inter-
val only in return!

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Plot the true efficient frontier of 3 stocks example
%
% ATTENTION: Coment lines 21 and 22 when runing 13 stock example
% load mbest
% plot(sig2vec,mupvec,'--k',sig2lowvec,muplowvec,'--k','LineWidth',2)
%%

hold on
plot(s.sig2vec,s.mupvec,'-k',s.sig2lowvec,s.muplowvec,'-k','LineWidth',1)
plot(s.sig2vec_lower,s.mupvec_lower,':k',s.sig2vec_upper,s.mupvec_upper,':k
','LineWidth',1)
plot(s.sig2lowvec_lower,s.muplowvec_lower,':k',s.sig2lowvec_upper,s.muplow

```

```

ec_upper, ':k', 'LineWidth', 1)

hold off

xlabel('Portfolio Variance \sigma_p^2')
ylabel('Portfolio Mean \mu_p')

hold off

```

#### DADOS DOS ATIVOS:

| BBAS3  | BBDC4  | BVMF3  | GGBR4  | HYPE3  | ITUB4  | OGXP3  | PDGR3  | PETR3  | PETR4  | USIM5  | VALE3  | VALE5  |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,9164 | 0,828  | 1,2266 | 1,0633 | 0,8777 | 0,9142 | 0,7494 | 0,9679 | 1,0495 | 1,0073 | 0,8739 | 0,9608 | 0,9964 |
| 1,0303 | 1,0156 | 1,0593 | 0,9898 | 0,9741 | 1,0061 | 0,7106 | 0,8044 | 0,8955 | 0,8554 | 0,826  | 1,0782 | 1,0709 |
| 1,1131 | 1,0759 | 0,8817 | 0,8076 | 0,8431 | 1,0319 | 1,4    | 1,2936 | 1,1437 | 1,1369 | 1,0197 | 0,918  | 0,9036 |
| 0,9366 | 0,9486 | 1,0701 | 1,0834 | 0,8183 | 1,0791 | 1,3663 | 1,0575 | 1,1375 | 1,1199 | 0,742  | 1,067  | 1,1198 |
| 1,2241 | 1,0151 | 0,9485 | 0,9699 | 0,9021 | 1,0576 | 1,0273 | 1,0312 | 0,9328 | 0,9421 | 1,0062 | 1,0242 | 0,9196 |
| 0,8934 | 0,9628 | 1,0315 | 1,0541 | 1,0803 | 0,9648 | 1,2584 | 1,1659 | 0,9358 | 0,962  | 0,9618 | 0,9962 | 1,0072 |
| 1,0315 | 0,9932 | 0,9234 | 0,9148 | 1,0538 | 0,9008 | 1,2939 | 0,9925 | 0,9848 | 1,0148 | 0,9062 | 0,9716 | 0,9716 |
| 0,8122 | 0,9171 | 1,0535 | 0,8328 | 0,8393 | 0,9684 | 1,0489 | 1,0554 | 0,9366 | 0,9518 | 0,6965 | 0,9844 | 1,0292 |
| 1,0314 | 0,9661 | 1,143  | 0,9607 | 1,2567 | 1,0151 | 1,0354 | 0,9887 | 0,9898 | 0,9914 | 1,0464 | 1,0493 | 1,0665 |
| 1,2237 | 1,1043 | 0,9999 | 1,0242 | 1,2064 | 1,0054 | 1,216  | 0,9542 | 0,9551 | 0,9461 | 1,1421 | 0,9341 | 0,9377 |
| 1,1448 | 1,1041 | 0,8731 | 1,1662 | 1,1015 | 1,0143 | 0,8436 | 0,876  | 1,0292 | 1,0418 | 1,1014 | 1,0505 | 1,017  |
| 0,8372 | 0,964  | 1,1878 | 1,0346 | 1,1928 | 0,963  | 1,3219 | 1,1301 | 0,9448 | 0,9404 | 1,1172 | 1,0482 | 1,0394 |
| 1,1556 | 1,1451 | 0,8942 | 1,121  | 1,0912 | 1,18   | 1,0517 | 0,8323 | 1,1736 | 1,1663 | 0,9376 | 1,1434 | 1,075  |
| 1,1154 | 1,0239 | 0,9863 | 0,9841 | 1,1185 | 0,9275 | 1,0421 | 1,182  | 1,0584 | 1,0348 | 1,0652 | 1,0189 | 1,0167 |
| 1,1848 | 1,0099 | 0,916  | 0,9452 | 1,103  | 1,0384 | 1,1515 | 1,1043 | 0,944  | 0,9461 | 0,984  | 1,0142 | 1,041  |
| 0,9532 | 0,9251 | 0,9092 | 0,9932 | 1,1571 | 0,9013 | 0,9825 | 0,8556 | 1,0036 | 0,9927 | 0,8702 | 1,2158 | 1,2095 |
| 0,6802 | 0,8411 | 0,9268 | 1,1289 | 1,0398 | 0,9218 | 0,9375 | 1,0219 | 0,9479 | 0,9431 | 0,7533 | 0,9924 | 0,9505 |
| 0,9675 | 0,7795 | 1,5229 | 0,8006 | 1,0341 | 0,7658 | 1,0571 | 0,835  | 0,8134 | 0,7956 | 1,1143 | 1,0682 | 1,0411 |

|        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1,2633 | 1,1871 | 0,6564 | 1,2924 | 1,0724 | 1,1998 | 1,0402 | 0,6852 | 1,0733 | 1,0755 | 0,7757 | 0,9036 | 0,9079 |
| 0,7346 | 0,7792 | 1,5477 | 0,9679 | 0,9936 | 0,8056 | 0,9359 | 0,8387 | 0,8323 | 0,8386 | 1,1973 | 1,1559 | 1,2026 |
| 1,267  | 1,2059 | 0,8241 | 1,0486 | 1,0083 | 1,3684 | 1,0315 | 0,8076 | 1,209  | 1,2005 | 1,1442 | 1,1074 | 1,122  |
| 0,9964 | 0,9938 | 1,1593 | 1,0333 | 1,1034 | 0,941  | 1,1118 | 1,2239 | 0,9877 | 1,0034 | 1,0736 | 1,0417 | 0,9988 |
| 0,9703 | 1,1521 | 0,777  | 0,8499 | 1,025  | 1,1245 | 1,1232 | 1,1076 | 1,1    | 1,0439 | 1,128  | 1,029  | 1,0497 |
| 0,9816 | 0,8951 | 1,151  | 1,0967 | 0,9423 | 0,901  | 1,056  | 0,8502 | 0,9811 | 1,0239 | 1,023  | 0,9668 | 0,969  |
| 0,9979 | 1,0303 | 1,1095 | 0,9783 | 0,9879 | 1,0161 | 1,0122 | 1,2324 | 0,9423 | 0,9196 | 1,21   | 1,0454 | 1,0362 |
| 1,1356 | 1,1431 | 0,925  | 0,9751 | 1,01   | 1,1712 | 0,8916 | 1,0903 | 1,0406 | 1,062  | 1,1703 | 0,875  | 0,8939 |
| 1,165  | 1,0574 | 0,9069 | 1,0593 | 1,1366 | 1,0779 | 1,005  | 0,9479 | 1,0671 | 1,0752 | 1,0159 | 0,901  | 0,8841 |
| 1,2047 | 0,9589 | 0,945  | 1,0063 | 1,065  | 1,0089 | 0,8605 | 1,2594 | 1,0701 | 1,0581 | 1,2075 | 1,081  | 1,0939 |
| 0,8556 | 0,9061 | 1,2416 | 1,3131 | 0,9689 | 0,9528 | 1,1302 | 1,0331 | 0,9872 | 0,9956 | 1,1612 | 0,9478 | 0,9242 |
| 1,0848 | 1,1251 | 0,942  | 0,9283 | 0,8304 | 1,1179 | 1,0103 | 1,0136 | 1,0601 | 1,075  | 1,1133 | 1,225  | 1,2031 |
| 1,0845 | 1,0598 | 0,8504 | 1,0134 | 0,8806 | 1,054  | 0,8595 | 1,2081 | 1,0824 | 1,0761 | 1,169  | 1,0768 | 1,0775 |
| 1,0675 | 0,9013 | 1,1683 | 1,1739 | 0,9577 | 0,9335 | 0,9509 | 0,9639 | 1,0023 | 0,9975 | 1,1543 | 1,056  | 1,0296 |
| 1,1436 | 1,053  | 1,1189 | 1,2553 | 1,1368 | 1,1213 | 0,9085 | 0,8651 | 1,0205 | 1,0387 | 1,2162 | 1,111  | 1,0986 |
| 1,3032 | 1,1782 | 0,904  | 0,9958 | 0,9769 | 1,0549 | 0,8855 | 1,0773 | 1,0595 | 1,0616 | 1,2168 | 1,0186 | 1,0263 |
| 0,9796 | 1,0651 | 0,8889 | 1,0171 | 0,7038 | 1,1576 | 0,8878 | 0,9159 | 1,1812 | 1,1423 | 0,906  | 1,28   | 1,2494 |
| 0,85   | 0,9468 | 1,0716 | 1,095  | 0,9899 | 0,9721 | 1,0026 | 1,0777 | 1,0107 | 1,0247 | 1,0809 | 0,9204 | 0,9422 |
| 1,0613 | 1,0146 | 0,9384 | 1,0581 | 0,8109 | 1,0035 | 1,2348 | 0,9593 | 1,0624 | 1,0474 | 1,188  | 1,0801 | 1,0527 |
| 1,0753 | 0,9521 | 0,9395 | 1,1521 | 1,1292 | 0,9894 | 0,9831 | 0,9954 | 1,1097 | 1,08   | 0,7695 | 0,9466 | 0,9349 |
| 0,8453 | 0,8945 | 1,1779 | 1,1429 | 1,0452 | 0,8412 | 0,9756 | 1,2419 | 0,8433 | 0,8435 | 0,9754 | 0,8169 | 0,8352 |
| 1,057  | 1,0537 | 1,0343 | 1,1218 | 0,882  | 1,1244 | 1,2151 | 0,9532 | 0,9525 | 0,9609 | 1,086  | 1,2057 | 1,1843 |
| 1,0817 | 1,0898 | 0,9099 | 1,0105 | 1,0429 | 1,0992 | 1,0272 | 1,117  | 1,093  | 1,1088 | 1,3401 | 0,9392 | 0,9082 |
| 1,0222 | 0,9916 | 1,0858 | 0,9592 | 1,2494 | 0,9791 | 0,8882 | 1,0556 | 0,9741 | 0,9813 | 1,073  | 1,1107 | 1,0913 |
| 1,0543 | 1,0767 | 0,9259 | 0,8984 | 1,0527 | 1,0606 | 0,8762 | 0,9779 | 1,0548 | 1,0499 | 0,9568 | 1,1464 | 1,1431 |

**DESIRABILITY:**

```
function [d, rp, s2p] = desirability(w, b, b2, lower, upper, target, c)
```

```
% lower -> lower limit for the portfolio return
% upper -> upper limit for the portfolio variance

rp = w'*b;

n = size(w,1); %number of assets
w2 = w;
for k=1:n
    for j=k+1:n
        w2 = [w2 ; w(k).*w(j)];
    end
end
s2p = w2'*b2;

if (rp < lower)
    d1 = 0;
elseif (rp > target(1))
    d1 = 1;
else
    d1 = ((rp-lower)./(target(1)-lower)).^c(1);
end

if (s2p < target(2))
    d2 = 1;
elseif (s2p > upper)
    d2 = 0;
else
    d2 = ((upper-s2p)./(upper-target(2))).^c(2);
end
```

```
d = -(d1*d2)^.5;
```

## FRONTEIRA:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% function to obtain the frontier considering econometric model of the mean
% and variance, as well their confidence intervals
%
% inputs
%     b       -> coefficients of expected portfolio return (linear)
%     s       -> estimated variance of the model (**ATENTION: s is a var-
%               iance here)
%     b2      -> coefficients of expected portfolio variance
%     s2      -> in the case of truncated MLE, this is estimated variance
%               of the model
%               in the case of gamma MLE, this is the parameter to
%               compute the variance of the model (depends on the mean
%     df      -> degrees of freedom of return model
%     df2     -> degrees of freedom of variance model
%     sl      -> allowed short selling
%     Hmu, Hs2 -> matrix to construct confidence intervals
%     thigh   -> max value of risk aversion parameter
%     hold_variance -> if ones wants to consider on return confidence
%               interval (yes/no)
%%
function [sout] = frontier(b,s,b2,s2,df,df2,sl,Hmu,Hs2,thigh,hold_variance)
```

```
if ~exist('hold_variance') hold_variance = 'no'; end

% optimization options
options = optimset('Display','off','Algorithm','interior-point');

% equality (budget) constraint
Aeq = ones(1,length(b)); beq = [1];

% bounds
lb = -s1*ones(length(b),1);
ub = length(b)*ones(length(b),1);

% initial guess
x0 = [Aeq/sum(Aeq)]';

alfa = .05;

tlow = .0; tinc = 0.10;
ii = 0;

%% Compute efficient and inefficient frontier
for t = tlow:tinc:thigh;

    disp([t]);

    % efficient frontier
    fun = @(w)myfun(w,b,b2,t);
    [xj,minvalue,exitflag,output,lambda] = fmin-
```

```

con(fun,x0,[],[],Aeq,beq,lb,ub,[],options);

[d,mup,sigma2p] = fun(xj);
x_aux = xj;
for k=1:length(xj)
    for j=k+1:length(xj)
        x_aux = [x_aux ; xj(k).*xj(j)];
    end
end

mup_lower = mup + tinv(alfa/2,df)*( s * (xj'*(Hmu\xj)) )^.5;
mup_upper = mup - tinv(alfa/2,df)*( s * (xj'*(Hmu\xj)) )^.5;

if strcmp(hold_variance , 'no')
    sigma2p_lower = sigma2p + tinv(1-alfa/2,df2)*( ( x_aux'*b2)^2/s2 )
* (x_aux'*(Hs2\x_aux)) )^.5;
    sigma2p_upper = sigma2p - tinv(1-alfa/2,df2)*( ( x_aux'*b2)^2/s2 )
* (x_aux'*(Hs2\x_aux)) )^.5;
else
    sigma2p_lower = sigma2p;
    sigma2p_upper = sigma2p;
end

% Inneficient frontier
fun1 = @(w)myfun(w,b,b2,-t);
[xji,minvaluei,exitflagi,outputi,lambdai] = fmin-
con(fun1,x0,[],[],Aeq,beq,lb,ub,[],options);

```

```

[di,muplow,sigma2plow] = fun(xji);
x_aux = xji;
for k=1:length(xji)
    for j=k+1:length(xji)
        x_aux = [x_aux ; xji(k).*xji(j)];
    end
end

muplow_upper = muplow + tinv(alfa/2,df)*( s * (xji'*(Hmu\xji)) )^.5;
muplow_lower = muplow - tinv(alfa/2,df)*( s * (xji'*(Hmu\xji)) )^.5;

if strcmp(hold_variance , 'no')
    sigma2plow_upper = sigma2plow + tinv(1-alfa/2,df2)* (
(x_aux'*b2)^2/s2 ) * (x_aux'*(Hs2\x_aux)) )^.5;
    sigma2plow_lower = sigma2plow - tinv(1-alfa/2,df2)* (
(x_aux'*b2)^2/s2 ) * (x_aux'*(Hs2\x_aux)) )^.5;
else
    sigma2plow_upper = sigma2plow;
    sigma2plow_lower = sigma2plow;
end

ii = ii + 1;

% store the variables
sout.sig2vec(ii) = sigma2p;
sout.mupvec(ii) = mup;
sout.sig2vec_lower(ii) = sigma2p_lower;
sout.mupvec_lower(ii) = mup_lower;
sout.sig2vec_upper(ii) = sigma2p_upper;

```

```

sout.mupvec_upper(ii) = mup_upper;

sout.sig2lowvec(ii) = sigma2plow;
sout.muplowvec(ii) = muplow;
sout.sig2lowvec_upper(ii) = sigma2plow_upper;
sout.muplowvec_upper(ii) = muplow_upper;
sout.sig2lowvec_lower(ii) = sigma2plow_lower;
sout.muplowvec_lower(ii) = muplow_lower;

end

%%

```

## REGRESSÃO:

```
function [b,exitflag] = gamma_mle(x,y)
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Entradas
%
% x -> variáveis independentes
% y -> variável dependente
% l -> truncagem a esquerda
%
% Saída
%
% b -> Parâmetros da regressão

```



```

% Entradas
%
% b -> Parâmetros da regressão
% x -> variáveis independentes
% y -> variável dependente

[m junk] = size(b);
beta = b(1:m-1);          % pull out bhat
r = b(m);                % pull out r

xb = x*beta;

llf = -log(gamma(r)) + r*log(r./xb) + (r-1)*log(y) - (r./xb).*y;
LLF = - sum(llf);
function [LLF] = llikelihood(b,x,y,l)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Entradas
%
% b -> Parâmetros da regressão
% x -> variáveis independentes
% y -> variável dependente
% l -> truncagem a esquerda

h = 1e-6;                % avoid sigma = 0

```









## ESTIMAÇÃO DO MODELO:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Function to estimate the econometric model of the mean and variance
%
% inputs
%   rbar   -> matrix with replicated asset return
%   E      -> tensor of replicated covariance matrix
%   w      -> experimental designs
%
% outputs
%   b      -> coefficients of expected portfolio return (linear)
%   s      -> estimated variance of the model (**ATTENTION: s is a var-
%           iance here)
%   b2     -> coefficients of expected portfolio variance
%   s2     -> in the case of truncated MLE, this is estimated variance
%           of the model
%           in the case of gamma MLE, this is the parameter to
%           compute the variance of the model (depends on the mean
%   Hmu, Hs2 -> matrix to construct confidence intervals
%%

function [b,s,b2,s2,Hmu,Hs2,df,df2] = model_estimate(rbar,E,w)

[n B] = size(rbar);
% n -> number of asstes
% B -> number of replications

w2 = [];

```

```

for i=1:B
    w2 = [w2 ; w];
end

% Computing portfolio return and variance for each experimental run
[rp sp] = gmdepo_ex(rbar, E,w,B);

X = w2;
X2 = [w2];
for k=1:n
    for j=k+1:n
        X2 = [X2 w2(:,k).*w2(:,j)];
    end
end

% X -> regressors of portfolio mean model (only linear)
% X2 -> regressors of portfolio variance model (linea + quadratic)

% matrix to later construct confidence intervals
Hmu = X'*X;
Hs2 = X2'*X2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Estimating portfolio return model

[bb,exitflag] = tobit_1(X,rp,-Inf);
b = bb(1:length(bb)-1);
s = bb(length(bb));
df = length(rp) - length(b);

```

```

% b -> coefficients of expected portfolio return
% s -> estimated variance of the model (**ATTENTION: s is a variance here)
% df -> degrees of freedom of the model

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Estimating portfolio variance model

[b22,exitflag] = tobit_1(X2,y2,0); % truncated MLE
[b22,exitflag] = gamma_mle(X2,sp); % gamma MLE (fits better for variance)
b2 = b22(1:length(b22)-1);
s2 = b22(length(b22)); % ATTENTION: in the case of truncated MLE, this is
estimated variance of the model
%
%           in the case of gamma MLE, this is the
%           parameter to compute the variance of
%           the model (depends on the mean

df2 = length(sp)-length(b2);

% b2 -> coefficients of expected portfolio variance
% df2 -> degrees of freedom of the model

```

## OTIMIZAÇÃO DO PORTFOLIO 1:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%

% This routine optimize the portfolio using desirability function

clear

clc

% Use lines 5 to 13 to generate new sample (comment otherwise)

```

```

% mu = [ 1.05 1.08 1.1 ]';
% S = [1 0 0; 0 2 0; 0 0 3]/100.;
%
% B = 10; % number of replicates to be used
%
% [rbar E] = sampling_ex(mu, S, 60, B);
% rbar = rbar';
%
% misturas3_1;

% load the data used in the paper (Section 6) - uncomment to use!
load paper_example_data

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%% These variables are used to plot the feasible portfolio cloud.

[W1 W2] = meshgrid(-.99:.025:2.99,-.99:.025:2.99);
W3 = 1 - W1 - W2;
ak = find(W3<=-1);
W1(ak) = NaN;    W2(ak) = NaN;    W3(ak) = NaN;

W = random('unif',0,4,6400,3);
parfor k=1:size(W,1)
    W(k,:) = 4*( W(k,:) ./sum(W(k,:)) ) - 1;
end
% Variáveis para o gráfico

W1 = W(:,1);
W2 = W(:,2);

```



```

%% DESIRABILITY

c = [1 1]'; % coefficients c of desirability function
target = [1.205 0.0091]'; % targets on portfolio return and variance
w0 = [1/3 1/3 1/3]'; % initial guess
alfa = .05;
d=@(w)desirability(w,b,b2,1,.3,target,c);

options = optimset('Display','iter','Algorithm','interior-point');
Aeq = [1 1 1]; beq = [1];
lb = [-1 -1 -1]'; ub = [3 3 3]';

[x,fval,exitflag,output,grad,hessian] = fmincon(d,w0,[],[],Aeq,beq,lb,ub,[],options);

[d,rp_opt,s2_opt] = d(x);
n = size(w,2);
x_aux = x;
for k=1:n
    for j=k+1:n
        x_aux = [x_aux ; x(k).*x(j)];
    end
end

rp_opt = rp_opt + norminv(alfa/2,0,1)*( s * (x'*(Hmu\x)) )^.5;
s2_opt = s2_opt + norminv(1-alfa/2,0,1)*( ( (x_aux'*b2)^2/s2 ) *
(x_aux'*(Hs2\x_aux)) )^.5;

% plot the optimized results corrected by confidence interval
hold on

```

```
plot(s2_opt, rp_opt, '.r', 'MarkerSize', 12);
hold off
```

## OTIMIZAÇÃO DADOS REAIS:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% This routine optimize the portfolio using desirability function

clear
clc

% Use lines 9 and 10 to generate new sample (comment otherwise)
% [rbar,E] = bootstrap_dados(10);
% misturas13;

% load the data used in the paper (Section 6) - uncomment to use!
load 13stocks

%% Building models
[b,s,b2,s2,Hmu,Hs2] = model_estimate(rbar,E,w);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% DESIRABILITY
c = [1 1]'; % coefficients c of desirability function
target = [1.205 0.0091]'; % targets on portfolio return and variance
sl = 1; % allowed short selling
alfa = .05;
d=@(w)desirability(w,b,b2,1,.3,target,c);
```

```

options = optimset('Display','iter','Algorithm','interior-point');
Aeq = ones(1,length(b)); beq = [1]; % equality
(budget) constraint
lb = -s1*ones(length(b),1); ub = length(b)*ones(length(b),1); % bounds
w0 = [Aeq/sum(Aeq)]'; % initial
guess

[x,fval,exitflag,output,grad,hessian] = fmin-
con(d,w0,[],[],Aeq,beq,lb,ub,[],options);

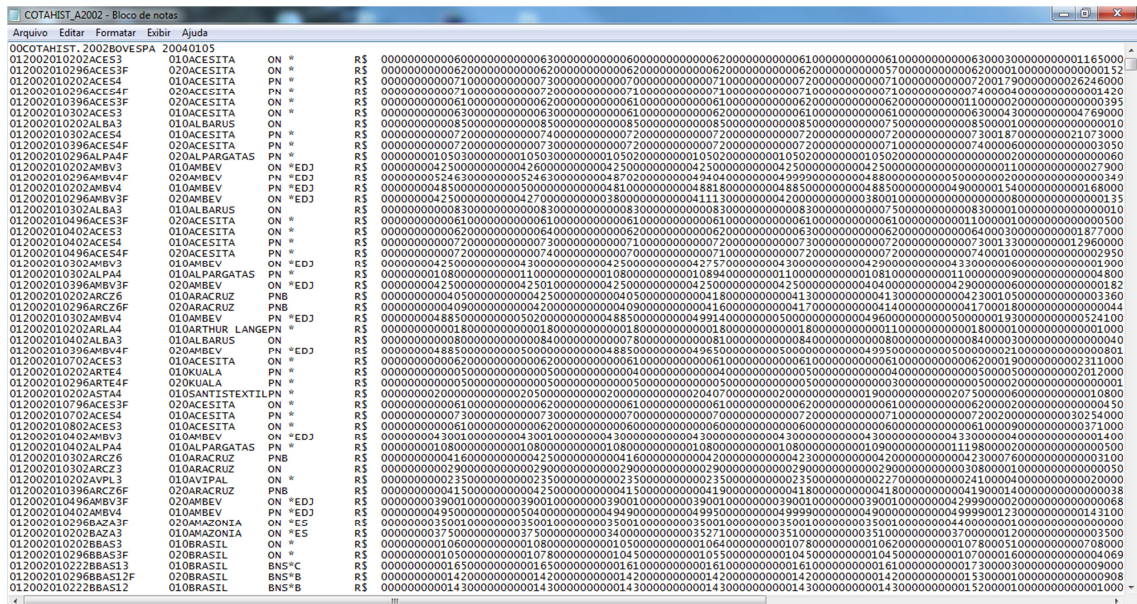
[d,rp_opt,s2_opt] = d(x);
n = size(x,1);
x_aux = [x];
for k=1:n
    for j=k+1:n
        x_aux = [x_aux ; x(k).*x(j)];
    end
end

rp_opt = rp_opt + norminv(alfa/2,0,1)*( s * (x'*(Hmu\x)) )^.5;
s2_opt = s2_opt + norminv(1-alfa/2,0,1)*( ( (x_aux'*b2)^2/s2 ) *
(x_aux'*(Hs2\x_aux)) )^.5;

% plot the optimized results corrected by confidence interval
hold on
plot(s2_opt,rp_opt,'.r','MarkerSize',12);
hold off

```

## EXTRAÇÃO E FORMATAÇÃO DOS DADOS DA IBOVESPA PARA O EXCEL:



|         | TIPREG | DATA | COBBDI | CODNEG | TPMERC | NOMRES | PRAZOT | MODREF | PREABE | PREMAX | PREMIN | PREMED | PREULT |     |
|---------|--------|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| inicial | 1      | 3    | 11     | 13     | 25     | 28     | 40     | 50     | 53     | 57     | 70     | 83     | 96     | 109 |
| tamanho | 2      | 8    | 2      | 12     | 3      | 12     | 10     | 3      | 4      | 13     | 13     | 13     | 13     | 13  |

FÓRMULA DO EXCEL:

=EXT.TEXTO(\$A2;Plan1!B\$2;Plan1!B\$3)

VÍDEO PASSO A PASSO PARA EXTRAÇÃO DOS DADOS IBOVESPA:

<http://www.youtube.com/watch?v=rB2CcyccWfU>

## 10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdelaziz F.B., Aouni B., Fayedh R.E., 2007. Multi-objective stochastic programming for portfolio selection. *European Journal of Operational Research* 177, 1811–1823.

Amihud, Barnea, 1974. Portfolio Selection for Managerial Control *OMEGA*, The Int. J1 of Mgmt Set., Vol. 2, No. 6.

Artzner P., Delbaen F., Eber J., Haeth D., 1999. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* 9 (3), 203–228.

Bai Z.D., Liu H.X., Wong W.K., 2009. Enhancement of the Applicability of Markowitz's Portfolio Optimization by Utilizing Random Matrix Theory. *Mathematical Finance* 19(4), 639-667.

Baier S.L. et al., 2004. Does opening a stock exchange increase economic growth? *Journal of International Money and Finance* 23, 311–331.

Balestrassi P.P. et al., 2009. Design of experiments on neural network's training for nonlinear time series forecasting. *Neurocomputing* 72, 1160–1178.

Benati S., Rizzi R., 2007. A mixed integer linear programming formulation of the optimal mean/Value-at-Risk portfolio problem. *European Journal of Operational Research* 176 423–434.

Ben-Tal A., Nemirovski A., 1998. Robust Convex Programming. *Mathematics and Operations Research*, Vol. 23, pp. 769–805.

Bera A. K., Park S. Y., 2008. Optimal Portfolio Diversification Using the Maximum Entropy Principle. *Econometric Reviews*, 27, 484-512.

Best M. J., Hlouskova J., 2003. Portfolio Selection and Transactions Cost. *Computational Optimization and Applications*, 24, 95-116.

Best M. J., Hlouskova J., 2005. An Algorithm for Portfolio Optimization with Transactions Cost. *Management Science*, 51, 1676-1688.

Best M.J., 2010. *Portfolio Optimization*, Chapman & Hall. CRC Finance, New York.

Best M.J., Grauer R.R., 1991. On the sensitivity of mean–variance-efficient portfolios to changes in asset means: some analytical and computational results. *Review of Financial Studies* 4, 315–342.

Best M.J., Zhang X., 2011. Degeneracy Resolution for Bilinear Utility Functions. *Journal of Optimization theory and Applications*, 150, 615-634.

Bonanni C.G., 2005. Uso combinado das técnicas DOE e simulação de Monte Carlo em um processo de solgagem Mig/Mag pulsado. Universidade Federal de Itajubá.

Box G. E. P., Cox D. R., 1964. An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 26, 211-234.

Box G. E. P., Hunter W., Hunter J., 2005. *Statistics for experimenters: Design, innovation, and discovery* (2nd ed.). New York: Wiley.

Bradesco, 2011. *Mercado futuro e suas aplicações, mesa de operações BM&F*.

Branke J., Scheckenbach B. Stein M., Deb K., Schmeck H, 2009. Portfolio optimization with an envelope-based multi-objective evolutionary algorithm. *European Journal of Operational Research* 199, 684–693.

Brentani C., 2004. *Portfolio Management in Practice, Essential Capital Markets*. Elsevier Butterworth-Heinemann Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP 200 Wheeler Road, Burlington, MA 01803. ISBN 0 7506 5906 8.

Brown D.B, Smith J. E., 2011. Dynamic Portfolio Optimization with Transaction Costs: Heuristics and Dual Bounds. *Management Science* 57, 1752-1770.

- Castillo H., 2007. *Process Optimization A Statistical Approach*, c 2007 by Springer Science+Business Media, LLC. ISBN 978-0-387-71434-9 (HB) ISBN 978-0-387-71435-6 (e-book).
- Chan L.-Y., 1988. Optimal Design for a linear log contrast model for experiments with mixtures. *Journal of Statistical Planning and Inference* 20, 105-113 North-Holland.
- Chopra V.K., Ziemba W.T., 1993. The Effect of Errors in Means, Variance, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. *The Journal of Portfolio Management*.
- Cornell J.A., 2002. *Experiments with Mixtures: Design, Models, and the Analysis of Mixture Data*. New York.
- Corrêa A.C., Souza A.B., 2001. Fronteira eficiente de Marowitz: aplicação com ativos brasileiros, *Adcontar*, Belém, v. 2, nº 1, p.7-10.
- Costa O.L.V., Araújo M.V., 2008. Multi-period mean-variance portfolio optimization with Markov switching parameters. *Revista Controle & Automação/Vol.19 no.2*.
- Edwards L.J., Hamilton S.A., 1995. *Computational Statistics & Data Analysis* 20, 131-140.
- Efron, B., 1979. Bootstrap methods:another look at jackknife. *The Annals of Statistics*,7,1-26.
- Eriksson L., et al., 1998. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* 43, 1–24.
- Giambiagi F., Giambiagi M., 2010. *Risco e regulação: por que o Brasil enfrentou bem a crise e como ela afetou a economia mundial*. Rio de Janeiro: Elsevier.
- Goldfarb D., Iyengar G., 2003. Robust Portfolio Selection Problems, *Mathematics and Operations Research*, 28 (1), 1-38.
- Gondzio J., Grothey A., 2007. Solving non-linear portfolio optimization problems with the primal-dual interior point method, *European Journal of Operational Research* 181 1019–1029.
- Grubb M., Butler L., Twomey P., 2006. Diversity and security in UK electricity generation: The influence of low-carbon objectives. *Energy Policy*, 34, 4050-4062.

Halldórsson B.V., Tutuncu R.H., 2003. An Interior-Point Method for a Class of Saddle-Point Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 116 (3) 559-590.

Henderson A.R., 2005. The bootstrap: A technique for data-driven statistics. Using computer-intensive analyses to explore experimental data / *Clinica Chimica Acta* 359, 1–26.

Heshmaty B., Kandel A., 1986. Fuzzy Linear Regression and its applications to forecasting in uncertain environment. Department of Computer Science, The Florida State University, Tallahassee, FL 32306, USA.

Hickey E. A., Carlson J. L., Loomis D., 2010. Issues in the determination of the optimal portfolio of electricity supply options. *Energy Policy*, 38, 2198-2207.

Janal P., Roy T. K., Mazumder S. K., 2007. Multi-objective Mean-variance-skewness model for Portfolio Optimization. *Advanced Modeling and Optimization*, 9, 181-193.

Jobson J.D., Korkie B., 1980. Estimation for Markowitz efficient portfolios. *Journal of the American Statistical Association* 75, 544–554.

Khmiri A., Samet B., Chaabouni M., 2012. A cross mixture design to optimise the formulation of a ground waste glass blended cement. *Construction and Building Materials* 28, 680–686. Laboratoire de Chimie Industrielle, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, BP W 3038 Sfax, Tunisia.

Krokhmal P., Zabaranin M., Uryasev S., 2011. Modeling and optimization of risk. *Surveys in Operations Research and Management Science*, 16, 49-66.

Lai K.K., Yu L., Wang S., 2006. Mean-variance–skewness–Kurtosis-based portfolio optimization. *IEEE First International Multi-Symposium on Computer and Computational Sciences*, large-dimensional covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis* 88 (2004) 365–411.

Li D., NG W.L., 2000. Optimal dynamic portfolio selection: multiperiod mean-variance formulation. *Mathematical Finance*, Vol. 10, No. 3, 387–406.

- Lim A.E.B., Shanthikumar J. G., Vahn G.-Y., 2011. Conditional value-at-risk in portfolio optimization: Coherent but fragile. *Operations Research Letters* 39, 163–171.
- Lin C.-C., Liu Y.-T., 2008. Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research* 185, 393–404.
- Markowitz H., 1952. Portfolio selection. *Journal of Finance* 7, 77–91.
- Markowitz H., 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Wiley, New York.
- Mayers D., 1974. Portfolio theory and the structure of wages. *Journal of Financial Economics* 1, 23-42.
- McConnell J.J. et al., 1996. A survey of evidence on domestic and international stock exchange listings with implications for markets and managers / *Pacific-Basin Finance Journal* 4, 347-376.
- Michaud R.O., 1989. The Markowitz Optimization Enigma: Is "Optimized" Optimal? *Financial Analysis Journal*.
- Montgomery D.C., 2001. *Design and Analysis of Experiments*, 5th Edition, John Wiley & Sons, Inc, 684 p. ISBN 0-471-31649-0.
- Montgomery D.C., 2009. *Design and Analysis of Experiments*, 7th Edition, John Wiley & Sons, Inc, 656 p.
- Montgomery D.C., Runger G.C. , 2003. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. 3ª edição. Copyright 2003 © John Wiley & Sons, Inc. ISBN 0-471-20454-4.
- Myers R.H., Montgomery D.C., 2002. *Response Surface Methodology*, 2nd ed. Wiley, New York.
- Oliveira F., et al., 2011. Portfolio optimization using Mixture Design of Experiments: Scheduling trades within electricity markets / *Energy Economics* 33, 24–32.

Paiva A.P., 2006. Metodologia de Superfície de Resposta e Análise de Componentes Principais em Otimização de Processos de Manufatura com Múltiplas Respostas Correlacionadas, 229p., Tese (Doutorado em Projeto e Fabricação) - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Piepel G.F., 1988. Programs for generating extreme vertices and centroids of linearity constrained experimental region. *Journal of Quality Technology*, 20, 120-139.

Rao S. S., 1996, 4 edição, *Engineering Optimizarion Theory and Praticce*. Páginas de 693 a 736.

Rockafellar R, Uryasev S., 2002. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance* 26, 1443–71.

Ruppert D., 2011. *Statistics and Data Analysis for Financial Engineering*, Springer Texts in Statistics, DOI 10.1007/978-1-4419-7787-8\_11, © Springer Science+Business Media, LLC. P285.

Serifsoy B., 2007. Stock exchange business models and their operative performance / *Journal of Banking & Finance* 31, 2978–3012.

Silva D.N., 2000. Mix de produtos ideal com aversão ao risco: Uma Aplicação do Teorema de Markowitz e da Diversificação na Produção. VIII Congreso del Instituto Internaional de Costos, I Congreso de la Asociación Uruguaya de Costos.

Souza J.Z., Bognotto E.C., 1999. Teoria de portfólio: composição ótima de uma carteira de investimentos. *Econ. pesqui.*, Araçatuba, v.1, n.1, p.61-78.

Soyer R., Tanyeri K., 2006. Bayesian portfolio selection with multi-variate random variance models. *European Journal of Operational Research* 171 977–990.

Stirling A., 1994. Diversity and ignorance in electricity supply investment. *Energy Policy*, 22, 195-216.

Terlaky T., 2001. An easy way to teach interior-point methods. *European Journal of Operational Research* 130 (2001) 1±19.

Tier M., 2005. *Investimentos: Os Segredos de George Soros & Warren Buffett*, 4ª Edição, Editora Campus Elsevier.

Travers F.J., 2004. *Investment Manager Analysis*. Wiley Finance, *Investment Manager Analysis*.

Trippi R.R., 1989. DSS for Real Estate Investment Portfolio Management *North-Holland Information & Management* 16, 47-54.

Vieira, Bello, 2006. Experimentos com mistura para otimização de processos: uma aplicação com respostas não normais. *Pesquisa Operacional*, v.26, n.3, p.605-623.

Wehrens R., et al., 2000. The bootstrap: a tutorial. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* 54, 35–52

Zhang W.G., Liu Y.J., Xu W.J., 2012. Portfolio selection under possibilistic mean–semivariance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs, *European Journal of Operational Research* 222, 341-349.

Zhang W.G., Zhang X.L., Xiao W.L., 2009. Portfolio selection under possibilistic mean–variance utility and a SMO algorithm, *European Journal of Operational Research* 197, 693–700.

Zivorad R., Lazic, 2004. *Design of Experiments in Chemical Engineering*. Copyright 2004 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim ISBN: 3-527-31142-4.