

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**Flutuações quânticas do vácuo na presença de uma
fronteira e suas implicações sobre o comportamento
de uma partícula teste nas suas proximidades**

Malú Maira da Silva

ITAJUBÁ, AGOSTO DE 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Malú Maira da Silva

**Flutuações quânticas do vácuo na presença de uma
fronteira e suas implicações sobre o comportamento
de uma partícula teste nas suas proximidades**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física
como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em
Ciências em Física e Matemática Aplicada.

Área de Concentração: Teoria Quântica de Campos

Orientador: Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci

AGOSTO DE 2013

ITAJUBÁ

S586f

SILVA, Malú Maira da

Flutuações quânticas do vácuo na presença de uma
fronteira e suas implicações sobre o comportamento
de uma partícula teste nas suas proximidades / Malú
Maira da Silva. – Itajubá, (MG) :[s.n.], 2013.

56 p.:il.

Orientador: Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de
Itajubá.

1. Movimento browniano. 2. Campo escalar. 3.
Flutuações aleatórias. I. De Lorenci, Vitorio Alberto,
orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Malú Maira da Silva

**Flutuações quânticas do vácuo na presença de uma
fronteira e suas implicações sobre o comportamento
de uma partícula teste nas suas proximidades**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 14 de agosto de
2013, conferindo à autora o título de **Mestre em Ciências em
Física e Matemática Aplicada**.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci (Orientador)

Prof. Dr. Nami Fux Svaiter

Prof. Dr. Fabricio Augusto Barone Rangel

ITAJUBÁ

2013

*A meus pais, Manoel e Lucinéia, com todo meu amor,
pelo apoio, confiança e presença em minha vida.*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus; se eu estou aqui hoje com certeza é pela vontade Dele.

Ao meu orientador, Professor Vitorio Alberto De Lorenci, pesquisador brilhante e ser humano admirável. Sem dúvida alguma meu aprendizado ao longo desse período de trabalho foi muito além de profissional, evolui como pessoa. Serei eternamente grata pelo conhecimento adquirido, pelas ricas discussões, pela inspiração como profissional e como pessoa humana, pelo incentivo em ir além, pelos conselhos, pela convivência, pela paciência. Certamente o principal responsável por confirmar em mim a paixão pela física teórica.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional, mesmo muitas vezes não compreendendo as minhas escolhas. Foi por eles que nos momentos de desânimo e dúvida eu ergui a cabeça e segui adiante, mais forte, para não decepcioná-los. Às minhas irmãs, Fernanda e Ariane, pelo laço fraterno, por sempre estarem do meu lado; nossos vínculos são inquebráveis. Em especial, agradeço a existência do Padre Paulo, a sua amizade, confiança, carinho, por sempre ter acreditado em mim e por sua presença constante, nas alegrias e dificuldades da vida. E ainda, à Branquinha pelos longos anos de amizade.

A todos os professores do programa de mestrado em física pelo comprometimento e competência mostrados nas disciplinas, pelos seminários e discussões que nos renderam mais que enriquecimento científico. Obrigada pela excelente formação que proporcionaram a mim e meus colegas.

Aos colegas que se tornaram grandes amigos, compartilhando as conquistas e desesperos da vida de estudante. Em especial agradeço a Marina, ao Marlon e ao Mateus. Aos meus amigos Marcelo, Ibrahim e Gustavo. Às minhas parceiras de república, responsáveis por tantos bons momentos, por tantas gargalhadas e descontrações. Ainda, agradeço a Nicole e a Pâmela, pessoas iluminadas que Deus colocou em minha vida num momento

providencial. Companheiras pra todas as horas. Amizades que levarei comigo onde eu estiver.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para mais essa etapa da minha vida, meu muito obrigada!

“As grandes ideias surgem da observação dos pequenos detalhes.”

Augusto Cury

Resumo

Neste trabalho, investigamos o movimento browniano de uma partícula teste carregada próxima a uma fronteira plana perfeitamente refletora. Primeiramente discutimos os resultados recentemente apresentados na literatura [1], que abordam o movimento de uma partícula devido às flutuações do vácuo do campo eletromagnético na presença de uma fronteira plana perfeitamente refletora. Calculamos as dispersões quadráticas nos valores da velocidade e posição da partícula e obtemos alguns resultados negativos, que são justificados ao considerarmos a incerteza na posição da partícula na ausência da fronteira. Além disso, a presença da placa provoca divergências em determinados pontos. Sugere-se que essas divergências ocorram pela hipótese de uma fronteira perfeita, idealizada. Um tratamento um pouco mais realista, no qual a posição da fronteira flutue em torno de um valor médio através de uma distribuição de probabilidade, pode regularizar essas divergências. Motivados pelo caso eletromagnético, nossa proposta aqui é examinar em detalhes o modelo simplificado em dimensão $(1+1)$ do movimento browniano de uma partícula carregada, provocado agora pelas flutuações do vácuo do campo escalar, próxima a uma fronteira plana perfeitamente refletora, no qual as questões levantadas no primeiro caso relacionadas às divergências na dispersão quadrática da velocidade são devidamente consideradas e solucionadas.

Palavras-chave: Movimento browniano, Campo escalar, Flutuações aleatórias.

Abstract

In this work we investigate the Brownian motion of a charged test particle near a reflecting plane boundary. First we discuss the results recently reported in the literature [1], which addresses the motion of a particle due to the vacuum fluctuations of the electromagnetic field in the presence of a perfectly reflecting plane boundary. We calculate the squared dispersion in the velocity and position of the particle and we find some negative results, which are justified by considering the uncertainty in the position of the particle in the absence of the boundary. Furthermore, the presence of the plane boundary causes divergences at particular points. It is suggested that these divergences occur because we consider a perfect and idealized boundary. A somewhat more realistic treatment, in which the position of the plane boundary fluctuates around a mean value over a probability distribution can regularize these divergences. Motivated by the electromagnetic case our proposal here is to examine in detail the simplified model in (1+1) dimension of the Brownian motion of a charged particle caused now by the vacuum fluctuations of the scalar field near a perfectly reflecting plane boundary, in which the questions that were raised in the first case related to the divergences in the squared dispersion in the velocity are properly considered and solved.

Keywords: Brownian motion, Scalar field, Random fluctuations.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
2 O comportamento de uma partícula carregada eletromagnética próxima a uma fronteira refletora perfeita em (3+1) dimensões	4
2.1 A Equação de Langevin	4
2.1.1 Soluções da equação de Langevin	9
2.2 Natureza quântica da partícula	19
2.2.1 Pacote de ondas gaussiano	20
2.2.2 Evolução do pacote de ondas gaussiano unidimensional	22
2.2.3 Natureza quântica da partícula	24
3 Quantização do campo escalar em N dimensões	26
3.1 Equação de Klein-Gordon	26
3.2 Funções de Green	27
3.3 Segunda quantização	28
4 O comportamento de uma partícula carregada escalar próxima a uma fronteira refletora flutuante em (1+1) dimensões	34
4.1 Propagador de Feynman	35
4.2 Equação de Langevin	35

4.3	Flutuação da fronteira	43
4.4	Natureza quântica da partícula	50
5	Conclusão	52
	Referências Bibliográficas	55

Lista de Figuras

2.1	<i>Comportamento do quadrado da dispersão na velocidade, nas direções paralelas à placa, de uma partícula carregada próxima a uma fronteira plana perfeitamente refletora que se encontra na origem.</i>	12
2.2	<i>Comportamento do quadrado da dispersão na velocidade, na direção z, de uma partícula carregada próxima a uma fronteira plana perfeitamente refletora que se encontra na origem.</i>	13
2.3	<i>Comportamento da energia cinética de uma partícula carregada localizada próxima a uma fronteira plana perfeitamente refletora que se encontra na origem.</i>	14
2.4	<i>Comportamento do quadrado da dispersão na componente $x = y$ da posição de uma partícula carregada próxima a uma fronteira plana perfeitamente refletora que se encontra na origem.</i>	17
2.5	<i>Comportamento do quadrado da dispersão na componente z da posição de uma partícula carregada próxima a uma fronteira plana perfeitamente refletora que se encontra na origem.</i>	19
4.1	<i>Comportamento da energia cinética de uma partícula escalar próxima a uma fronteira perfeitamente refletora que se encontra na origem.</i>	40
4.2	<i>Comportamento do quadrado da dispersão na posição de uma partícula escalar próxima a uma fronteira perfeitamente refletora que se encontra na origem.</i>	42
4.3	<i>Comportamento do quadrado da dispersão na posição de uma partícula escalar próxima a uma fronteira perfeitamente refletora que se encontra na origem, com $g/m = 0,1$.</i>	43
4.4	<i>Comportamento do quadrado da dispersão na posição de uma partícula escalar próxima a uma fronteira perfeitamente refletora que se encontra na origem, com $g/m = 0,01$.</i>	44

- 4.5 *Comportamento, em função do tempo, da energia cinética de uma partícula escalar localizada em x , na presença de uma fronteira refletora flutuante cuja posição média é $\bar{q}$, no limite em que $x \rightarrow \bar{q}$, com $g/m = 0,1$ e $\sigma = 0,01$* 48
- 4.6 *Comportamento, em função do tempo, da energia cinética de uma partícula escalar localizada em $x = 2\bar{q}$, na presença de uma fronteira refletora flutuante cuja posição média é $\bar{q}$, com $g/m = 0,1$ e $\sigma = 0,01$. A divergência que apareceria em $\theta = 1$, ou seja, em $t = 2(x - \bar{q}) = 2\bar{q}$, foi regularizada pela introdução da flutuação.* 49
- 4.7 *Superposição dos resultados encontrados para o comportamento, em função do tempo, da energia cinética de uma partícula escalar localizada em $x = 2\bar{q}$, na presença de uma fronteira refletora fixa localizada em $\bar{q}$, no qual $\overline{\langle E_k \rangle}$ é divergente para $t = 2(x - \bar{q}) = 2\bar{q}$, e na presença de uma fronteira refletora flutuante cuja posição média é $\bar{q}$, no qual a divergência é regularizada, com $g/m = 0,1$. Como podemos observar, σ é o regularizador, a medida que ele diminui a profundidade do poço aumenta.* 50
- 4.8 *Comportamento, em função da posição, da energia cinética de uma partícula escalar na presença de uma fronteira refletora flutuante cuja posição média é $\bar{q}$, para $\theta = \zeta$, com $g/m = 0,1$ e $\sigma = 0,01$, que resulta em uma função regular para qualquer valor de ζ* 50

Capítulo 1

Introdução

O movimento aleatório, ou randômico, de uma pequena partícula imersa em um fluido térmico em equilíbrio foi primeiramente percebido por Robert Brown em 1827, ao observar, por meio de um microscópio, grãos de pólen na água, e ficou então conhecido como movimento browniano [2]. Esse movimento randômico de pequenas partículas testes em um fluido foi visto por Einstein como um possível meio de demonstrar a natureza atômica da matéria. Independentemente das observações feitas anteriormente por Brown, na sua teoria de 1905 [3], Einstein afirma que um caminho browniano é dividido em passos finitos cujos comprimentos tendem a zero. Cada passo, independentemente do seu tamanho, é o resultado de um grande número de passos menores, que é a idéia de variável estocástica [4].

De acordo com a teoria cinética [4], os fluidos são formados por moléculas que movem-se randomicamente devido às flutuações térmicas. Por isso, se o fluido possui uma partícula externa, que denominaremos partícula browniana, as moléculas do fluido irão colidir com a partícula browniana, assim como colidem entre si, conferindo portanto à partícula externa o movimento randômico observado. Então, o movimento browniano nos permite observar as flutuações estatísticas que ocorrem em um sistema em equilíbrio térmico. Foi considerado a base da teoria cinética dos fluidos, além de sua importância na confirmação da teoria estatística.

Em física, o termo estocástico está relacionado às considerações probabilísticas e a noção de probabilidade é baseada na frequência com que ocorrem os eventos randômicos. Uma variável estocástica é uma quantidade cujos possíveis valores ocorrem através de uma distribuição de probabilidade [4]. Sua definição consiste na determinação dos seus possíveis

valores a e na probabilidade $P(a)$ de ocorrência de a . Uma distribuição de probabilidade de particular interesse é a gaussiana, já que o chamado Teorema do Limite Central nos afirma que a soma de um grande número de variáveis estocásticas obedecem a uma distribuição gaussiana, independentemente das distribuições das variáveis estocásticas individuais. A distribuição gaussiana, ou normal, de uma variável x é definida por:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2},$$

onde $\sigma > 0$ é uma constante associada à largura da gaussiana.

No estudo do movimento browniano, o campo estocástico é o responsável pelo movimento randômico das partículas brownianas. Do mesmo modo que um campo estocástico clássico causa movimento randômico de uma partícula teste, pode-se esperar um movimento browniano devido às flutuações quânticas [5]. Pequenas partículas interagindo com um campo em temperatura finita apresentam movimento browniano devido às flutuações térmicas [6,7]. Ainda, mesmo em temperatura zero, onde as flutuações térmicas não estão presentes, campos quânticos possuem flutuações do vácuo [8]. Assim, se as flutuações estão presentes mesmo no estado de vácuo, uma pequena partícula interagindo com o campo exibe movimento browniano no vácuo quântico.

Ainda não é bem estabelecido se o movimento browniano pode ser observado no estado de vácuo de Minkowski. Entretanto, pequenas mudanças nas flutuações quânticas podem produzir efeitos observáveis. Na eletrodinâmica quântica, o efeito Casimir é um exemplo disso [9].

Uma simples e não trivial alteração nas flutuações quânticas é introduzir uma fronteira refletora. A presença da fronteira modifica as flutuações quânticas, modificando então o movimento da partícula teste.

A introdução de uma modificação, por sua vez, pode nos conduzir a divergências em quantidades físicas observáveis que deveriam ser finitas [9]. Acredita-se que essas divergências sejam consequências da idealização do problema. Ao considerar, por exemplo, uma fronteira plana perfeitamente refletora estamos assumindo que a placa possui uma posição fixa. Além disso, trata-se de uma fronteira perfeitamente plana e idealmente refletora, de tal modo que todos os modos do campo que chegam à ela são refletidos. Uma maneira de fazer com que o sistema descreva uma situação um pouco mais próxima da realidade seria tratar a fronteira como um objeto que possui uma incerteza não nula na determinação de sua posição [9]. A fronteira não apresentaria uma posição fixa, mas

flutuaria em torno de seu valor médio através de uma distribuição de probabilidade. Por exemplo, considerando que a fronteira localiza-se na posição x teríamos uma função distribuição de probabilidade $f(x)$, associada à posição da placa, normalizada, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Neste caso, o valor médio de uma certa quantidade física $\mathcal{F}(x)$ com respeito a esta distribuição torna-se

$$\langle \mathcal{F}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x) f(x) dx.$$

Neste trabalho, inicialmente revisaremos os resultados recentemente publicados em Ref. [1] acerca do movimento browniano de uma partícula carregada acoplada ao campo eletromagnético quântico na presença de uma fronteira plana perfeitamente refletora. Obteremos os efeitos das flutuações do vácuo do campo eletromagnético modificadas pela presença da placa sobre o movimento da partícula teste carregada. Tratando o campo quântico como uma variável estocástica, obteremos a equação de Langevin para a partícula e calcularemos as flutuações quadráticas médias na velocidade e na posição, enfatizando as possíveis divergências devido à idealização da fronteira.

Motivados pelo caso eletromagnético, discutiremos em detalhes o caso simplificado de uma partícula escalar carregada interagindo com um campo escalar quântico em dimensão (1+1) na presença de uma fronteira perfeitamente refletora. A partir da equação de Langevin para este caso, obteremos as flutuações quadráticas médias na velocidade e na posição. Partiremos então para a questão de maior interesse: a regularização das divergências presentes na dispersão quadrática da velocidade devido à idealização da placa. Com essa finalidade, tornaremos nosso problema mais realista, considerando a fronteira como um objeto descrito por uma distribuição de probabilidade normal, cuja posição flutua em torno do seu valor médio. Adotaremos em nossa abordagem um sistema de unidades tal que a velocidade da luz c e a constante de Planck $\hbar$ valem um: $c = \hbar = 1$.

Capítulo 2

O comportamento de uma partícula carregada eletromagnética próxima a uma fronteira refletora perfeita em $(3+1)$ dimensões

Os efeitos provocados pelas flutuações do vácuo do campo eletromagnético sobre um elétron no espaço vazio não são muitas vezes observáveis. Por outro lado, mudanças nas flutuações do vácuo produzem efeitos observáveis.

Neste capítulo discutiremos o movimento browniano de uma partícula carregada na presença do campo eletromagnético quântico [1]. Tal movimento browniano é causado pelas flutuações quânticas. Nosso interesse estará em mudanças devido ao estado quântico do campo, diferente do vácuo de Minkowski. Um modo simples de realizar essa mudança é introduzir uma fronteira refletora. Vamos, pois, discutir o caso de uma placa perfeitamente refletora e calcular os efeitos das flutuações do vácuo do campo eletromagnético, modificadas pela presença dessa fronteira plana, sobre o movimento de uma partícula teste.

2.1 A Equação de Langevin

O sistema que vamos considerar é descrito pela ação

$$S = S_{part} + S_{campo} + S_{int}, \quad (2.1)$$

sendo S_{part} correspondente à ação devido ao movimento browniano da partícula, S_{campo} denota a ação do campo e S_{int} , por sua vez, trata-se da ação de interação entre a partícula e o campo.

Trataremos de uma partícula pontual browniana na presença do campo eletromagnético. Sabemos que a ação do campo eletromagnético é descrita por [10]

$$S_{campo} = \int dt \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (2.2)$$

sendo $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ o tensor do campo eletromagnético, dado por

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

com E_i e B_i a i -ésima componente do campo elétrico e do campo magnético, respectivamente e $A^\mu = (\vec{A}, \phi)$ o quadripotencial, sendo $\vec{A}$ o potencial vetor e ϕ o potencial escalar do campo.

Fará parte de nossas hipóteses que a partícula browniana se move classicamente, ou seja, estamos trabalhando num regime de baixas velocidades. Então, a ação S_{part} que descreve a partícula não relativística de massa m e carga e é dada por

$$S_{part} = \int dt \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2, \quad (2.4)$$

sendo $\dot{\vec{x}} = d\vec{x}/dt$.

Ainda, a ação de interação entre a partícula e o campo é escrita como [11]

$$S_{int} = \int dt (e \vec{A} \cdot \vec{v} - e\phi). \quad (2.5)$$

Além de sofrer a ação do campo, a partícula exerce influência sobre este, alterando-o. Todavia, para pequenos valores da carga e a ação da partícula sobre o campo pode ser negligenciada [11]. No que segue, assumiremos que essa condição se cumpre. A influência que a partícula exerce sobre o campo está relacionada a efeitos de dissipação. Então, em nossa abordagem não estaremos interessados em aspectos relativos à dissipação [5]. Para este caso, a variação da ação, Eq. (2.1), com respeito ao quadripotencial A_μ e à trajetória $\vec{x}(t)$ da partícula nos fornece que as equações de movimento satisfeitas pelo campo eletromagnético e pela partícula são dadas, respectivamente, por

$$\partial_\mu F^{\alpha\mu} = 0 \quad (2.6)$$

e

$$m\ddot{\vec{x}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}(\vec{x}, t) + e\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t). \quad (2.7)$$

Admitindo que a partícula parte do repouso em $t = 0$ e adotando um modelo simplificado no qual o campo magnético possa ser desprezado, para um dado tempo t , Eq. (2.7) nos dá

$$m\ddot{\vec{x}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}(\vec{x}, t) \quad (2.8)$$

e, então, a velocidade $\vec{v}$ é dada por

$$\vec{v} = \frac{e}{m} \int_0^t \vec{E}(\vec{x}, t') dt'. \quad (2.9)$$

Até este momento trabalhamos em um domínio completamente clássico. Nós obtivemos uma equação de movimento para a partícula assumindo que esta, bem como o campo eletromagnético, são quantidades clássicas. A partir de agora vamos tratar $\vec{E}$ como um campo quântico que deve, portanto, ser visto como um operador [12]. Quantizando o campo elétrico obteríamos uma equação similar à (2.8), mas que apresentaria uma inconsistência: teríamos do lado esquerdo da equação uma quantidade física, um observável, e do lado direito um operador. Devemos, a fim de eliminar essa inconsistência, substituir o operador do lado direito pelo seu valor esperado [12]. Como estamos interessados no estudo do movimento no vácuo quântico, o valor esperado pode ser avaliado no estado de vácuo do campo quântico.

A característica principal de um campo quântico é que ele sempre exhibe flutuações, as quais induzem flutuações no movimento das partículas brownianas [5]. Desejamos então considerar essas flutuações, com o intuito de estudar seus efeitos sobre o movimento da partícula. Não é completamente claro se o movimento browniano da partícula pode ser observado no estado de vácuo de Minkowski [1]. Neste trabalho, consideraremos o estado de vácuo modificado através da introdução de uma fronteira plana perfeitamente refletora. Estaremos interessados nos efeitos das flutuações do vácuo do campo eletromagnético sobre o movimento de uma partícula teste carregada.

Trataremos o campo elétrico como um campo estocástico, cujos momentos estão relacionados às funções de n pontos do agora operador $\vec{E}$. Em outras palavras, estamos assumindo que o movimento da partícula é descrito por uma equação de Langevin da forma

$$m\ddot{\vec{x}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}(\vec{x}, t), \quad (2.10)$$

que apresenta-se idêntica à Eq. (2.8), mas deve ser interpretada de outra forma, já que $\vec{E}(\vec{x}, t)$ trata-se de um operador. Vamos nos restringir ao caso em que a partícula não se move significativamente e então podemos assumir que a posição $\vec{x}$ é uma constante.

O primeiro e segundo momentos do campo estocástico $\vec{E}$ são dados por

$$\langle \vec{E}(\vec{x}, t) \rangle$$

e

$$\langle T(\vec{E}(\vec{x}, t)\vec{E}(\vec{x}', t')) \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{E}(\vec{x}, t)\vec{E}(\vec{x}', t') + \vec{E}(\vec{x}', t')\vec{E}(\vec{x}, t) \rangle.$$

Estamos, pois, realizando médias no *ensemble* e os valores esperados dos operadores estão sendo avaliados no estado de vácuo do campo elétrico quântico.

A presença do campo estocástico implica que quantidades tais como $\vec{v}(t)$ e $\vec{x}(t)$ que descrevem o movimento da partícula exibem flutuações. Portanto, essas quantidades devem ser tratadas como variáveis estocásticas. Vamos então avaliar $\langle \vec{v}(t) \rangle$ e $\langle v^2(t) \rangle$ relacionando essas quantidades com o primeiro e segundo momentos do campo.

Das considerações acima, temos que o valor esperado da velocidade $\langle \vec{v} \rangle$ é dado por

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{e}{m} \int_0^t \langle \vec{E}(\vec{x}, t') \rangle dt'. \quad (2.11)$$

Agora, faremos uso do resultado bem conhecido em teoria de campos [13] de que o valor esperado no vácuo do campo quântico é zero, ou seja, $\langle \vec{E} \rangle = 0$. Então, segue que

$$\langle \vec{v} \rangle = 0, \quad (2.12)$$

já que a partícula parte do repouso em $t = 0$.

Ainda, para o valor esperado do quadrado da velocidade temos

$$\langle v^2 \rangle \doteq \langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle, \quad (2.13)$$

sendo a i -ésima componente $\langle v_i^2 \rangle$ dada por

$$\langle v_i^2 \rangle = \frac{e^2}{m^2} \int_0^t \int_0^t \langle T(E_i(\vec{x}, t')E_i(\vec{x}, t'')) \rangle dt' dt''. \quad (2.14)$$

A incerteza na determinação da i -ésima componente da velocidade, por sua vez, é definida por

$$\Delta v_i \doteq \sqrt{\langle v_i^2 \rangle - \langle v_i \rangle^2}. \quad (2.15)$$

Assim, Eqs. (2.12) e (2.14) nos fornecem

$$(\Delta v_i)^2 = \frac{e^2}{m^2} \int_0^t \int_0^t \langle T(E_i(\vec{x}, t') E_i(\vec{x}, t'')) \rangle dt' dt''. \quad (2.16)$$

Vale ressaltar que $\langle T(E_i(\vec{x}, t') E_i(\vec{x}, t'')) \rangle$ nada mais é do que o produto temporalmente ordenado dos campos.

Na presença de uma fronteira, esta função de dois pontos é expressa como a soma do termo de vácuo de Minkowski $\langle T(E_i(\vec{x}, t') E_i(\vec{x}, t'')) \rangle_0$ e o termo de correção devido à fronteira $\langle T(E_i(\vec{x}, t') E_i(\vec{x}, t'')) \rangle_R$:

$$\langle T(E_i(\vec{x}, t') E_i(\vec{x}, t'')) \rangle = \langle T(E_i(\vec{x}, t') E_i(\vec{x}, t'')) \rangle_0 + \langle T(E_i(\vec{x}, t') E_i(\vec{x}, t'')) \rangle_R, \quad (2.17)$$

sendo o termo de correção finito. O termo do vácuo de Minkowski produz uma contribuição divergente em $(\Delta v)^2$. Entretanto, essa contribuição não produz consequências observáveis. Assim, nós utilizaremos apenas a contribuição advinda da presença da fronteira e então, teremos, a partir de Eq. (2.16),

$$(\Delta v_i)^2 = \frac{e^2}{m^2} \int_0^t \int_0^t \langle T(E_i(\vec{x}, t') E_i(\vec{x}, t'')) \rangle_R dt' dt''. \quad (2.18)$$

Para o caso de uma fronteira plana perfeitamente refletora localizada em $z = 0$, a função de dois pontos do campo eletromagnético renormalizada $\langle T(E_i(\vec{x}, t') E_i(\vec{x}, t'')) \rangle_R$, obtida a partir de Eq. (2.6) e da identidade

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0, \quad (2.19)$$

para $i = x = y$, já que o problema é simétrico em xy , é dada por [14]

$$\langle T(E_x(\vec{x}, t') E_x(\vec{x}, t'')) \rangle_R = \langle T(E_y(\vec{x}, t') E_y(\vec{x}, t'')) \rangle_R = -\frac{\Delta t^2 + 4z^2}{\pi^2(\Delta t^2 - 4z^2)^3}, \quad (2.20)$$

onde definimos $\Delta t \doteq t' - t''$. E para a componente z , $i = z$, temos

$$\langle T(E_z(\vec{x}, t') E_z(\vec{x}, t'')) \rangle_R = \frac{1}{\pi^2(\Delta t^2 - 4z^2)^2}. \quad (2.21)$$

Vamos agora discutir mais a fundo o significado de $(\Delta v_i)^2$ no problema. Em geral, o valor de uma quantidade física A é dado por $A = \langle A \rangle \pm \Delta A$ [15], sendo $\langle A \rangle$ o valor médio de A e ΔA a incerteza determinação de A . Do mesmo modo, a velocidade da partícula é escrita na forma $\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle \pm \Delta \vec{v}$. Entretanto, como vimos, no nosso estudo em questão o valor esperado da velocidade da partícula é nulo, ou seja, $\langle \vec{v} \rangle = 0$ e assim temos que a velocidade $\vec{v}$ encontra-se no intervalo $-\Delta \vec{v} \leq \vec{v} \leq \Delta \vec{v}$.

Ainda, a energia cinética E_k é dada por $E_k = \langle E_k \rangle \pm \Delta E_k$. Mas Eq. (2.15) nos dá que $(\Delta v_i)^2 = \langle v_i^2 \rangle$ e então o valor esperado da energia cinética $\langle E_k \rangle$ pode ser escrito como

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}m(\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle) = \frac{1}{2}m[(\Delta v_x)^2 + (\Delta v_y)^2 + (\Delta v_z)^2]. \quad (2.22)$$

Observe agora que a energia cinética é uma função da velocidade, $E_k = E_k(v_x, v_y, v_z)$. Portanto, a incerteza na determinação da energia cinética ΔE_k é dada, em primeira ordem na velocidade, por [15]

$$(\Delta E_k) = \left[\left(\frac{\partial E_k}{\partial v_x} \right) \Big|_{\langle v_x \rangle} \right]^2 (\Delta v_x)^2 + \left[\left(\frac{\partial E_k}{\partial v_y} \right) \Big|_{\langle v_y \rangle} \right]^2 (\Delta v_y)^2 + \left[\left(\frac{\partial E_k}{\partial v_z} \right) \Big|_{\langle v_z \rangle} \right]^2 (\Delta v_z)^2 \quad (2.23a)$$

$$= m^2 [\langle v_x \rangle^2 (\Delta v_x)^2 + \langle v_y \rangle^2 (\Delta v_y)^2 + \langle v_z \rangle^2 (\Delta v_z)^2] = 0, \quad (2.23b)$$

já que $\langle v_i \rangle = 0$. Disso, conclui-se que, em primeira ordem, a energia cinética e seu valor esperado se confundem:

$$E_k = \langle E_k \rangle = \frac{1}{2}m[(\Delta v_x)^2 + (\Delta v_y)^2 + (\Delta v_z)^2]. \quad (2.24)$$

2.1.1 Soluções da equação de Langevin

A fim de estudar o comportamento da energia cinética, calculemos, então, $(\Delta v_x)^2 = (\Delta v_y)^2$. Substituindo Eq. (2.20) em Eq. (2.16) temos que

$$(\Delta v_x)^2 = (\Delta v_y)^2 = -\frac{e^2}{\pi^2 m^2} \int_0^t \int_0^t \frac{\Delta t^2 + 4z^2}{(\Delta t^2 - 4z^2)^3} dt' dt''. \quad (2.25)$$

Antes, porém, de iniciar o cálculo, demonstraremos um resultado matemático que nos auxiliará em Eq. (2.25).

Teorema 2.1.1. *Seja a integração*

$$I(t) = \int_0^t \int_0^t f(x, y) dx dy, \quad (2.26)$$

sendo que a dependência em $f(x, y)$ se dá na forma $f(x, y) = f(|x - y|)$.

Então, $I(t)$ pode ser escrita como

$$I(t) = 2 \int_0^t (t - w) f(w) dw. \quad (2.27)$$

Demonstração. Vamos introduzir novas variáveis u e v tais que

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y). \quad (2.28)$$

Então, em termos das novas coordenadas, x e y são escritas como

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v). \quad (2.29)$$

O Jacobiano da transformação em questão é dado por

$$\mathcal{J} = \left\| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right\| = 1. \quad (2.30)$$

Agora, a função $f(x, y) = f(|v|)$. E a integração Eq. (2.26) em termos das novas variáveis fica

$$I(t) = \int_{-t/\sqrt{2}}^{t/\sqrt{2}} \int_{|v|}^{\sqrt{2}t-|v|} f(|v|) du dv \quad (2.31a)$$

$$= \int_{-t/\sqrt{2}}^{t/\sqrt{2}} (\sqrt{2}t - 2|v|) f(|v|) dv \quad (2.31b)$$

$$= 2 \int_0^{t/\sqrt{2}} (\sqrt{2}t - 2v) f(v) dv. \quad (2.31c)$$

Seja, por fim, $w = \sqrt{2}v$. Então, $w = x - y$ e teremos Eq. (2.31c) escrita na forma

$$I(t) = 2 \int_0^t (t - w) f(w) dw. \quad (2.32)$$

■

Retornemos ao cálculo de $\Delta v_x = \Delta v_y$.

Utilizando o resultado obtido acima, Eq. (2.32), Eq. (2.25) pode ser escrita como

$$(\Delta v_x)^2 = (\Delta v_y)^2 = -\frac{2e^2}{\pi^2 m^2} \int_0^t (t - \tau) \frac{\tau^2 + a^2}{(\tau^2 - a^2)^3} d\tau, \quad (2.33)$$

onde estamos fazendo $a \doteq 2z$. Como vemos, em $\tau = a$ o integrando em Eq. (2.33) é divergente. Vamos introduzir uma nova variável adimensional $\eta = \tau/a$. Em termos da nova variável η , Eq. (2.33) fica

$$(\Delta v_x)^2 = (\Delta v_y)^2 = -\frac{2e^2}{\pi^2 m^2 a^2} \int_0^{t/a} \left(\frac{t}{a} - \eta \right) \frac{\eta^2 + 1}{(\eta^2 - 1)^3} d\eta. \quad (2.34)$$

A divergência no integrando agora está localizada em $\eta = 1$. Seja a integral

$$I\left(\frac{t}{a}\right) = \int_0^{t/a} \left(\frac{t}{a} - \eta \right) \frac{\eta^2 + 1}{(\eta^2 - 1)^3} d\eta. \quad (2.35)$$

Vamos separar a integral em Eq. (2.35) em dois domínios diferentes:

$$I\left(\frac{t}{a}\right) = \int_0^1 \left(\frac{t}{a} - \eta\right) \frac{\eta^2 + 1}{(\eta^2 - 1)^3} d\eta + \int_1^{t/a} \left(\frac{t}{a} - \eta\right) \frac{\eta^2 + 1}{(\eta^2 - 1)^3} d\eta. \quad (2.36)$$

Seja agora

$$I_\epsilon\left(\frac{t}{a}\right) = \int_0^{1-\epsilon} \left(\frac{t}{a} - \eta\right) \frac{\eta^2 + 1}{(\eta^2 - 1)^3} d\eta + \int_{1+\epsilon}^{t/a} \left(\frac{t}{a} - \eta\right) \frac{\eta^2 + 1}{(\eta^2 - 1)^3} d\eta. \quad (2.37)$$

Mas temos que

$$\int \frac{\eta^3 + \eta}{(\eta^2 - 1)^3} d\eta = -\frac{\eta^2}{2(\eta^2 - 1)^2} + \text{const}, \quad (2.38a)$$

$$\int \frac{\eta^2 + 1}{(\eta^2 - 1)^3} d\eta = \frac{1}{4} \frac{\eta^3 - 3\eta}{(\eta^2 - 1)^2} - \frac{1}{16} \ln\left(\frac{\eta + 1}{\eta - 1}\right)^2 + \text{const}. \quad (2.38b)$$

De Eqs. (2.38a) e (2.38b) podemos inferir que Eq. (2.37) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} I_\epsilon\left(\frac{t}{a}\right) &= \frac{t}{a} \left[\frac{1}{4} \frac{\eta^3 - 3\eta}{(\eta^2 - 1)^2} - \frac{1}{16} \ln\left(\frac{\eta + 1}{\eta - 1}\right)^2 \right] \Big|_0^{1-\epsilon} + \frac{\eta^2}{2(\eta^2 - 1)^2} \Big|_0^{1-\epsilon} \\ &+ \frac{t}{a} \left[\frac{1}{4} \frac{\eta^3 - 3\eta}{(\eta^2 - 1)^2} - \frac{1}{16} \ln\left(\frac{\eta + 1}{\eta - 1}\right)^2 \right] \Big|_{1+\epsilon}^{t/a} + \frac{\eta^2}{2(\eta^2 - 1)^2} \Big|_{1+\epsilon}^{t/a}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Avaliando, em Eq. (2.39), os limites de integração:

$$\begin{aligned} I_\epsilon\left(\frac{t}{a}\right) &= \frac{t}{a} \left\{ -\frac{1}{4} \frac{2}{[(1-\epsilon)^2 - 1]^2} - \frac{1}{16} \ln\left(\frac{2-\epsilon}{-\epsilon}\right)^2 \right\} + \frac{1-2\epsilon}{2[(1-\epsilon)^2 - 1]^2} \\ &+ \frac{t}{a} \left\{ \frac{1}{4} \frac{(t/a)^3 - 3t/a}{[(t/a)^2 - 1]^2} - \frac{1}{16} \ln\left(\frac{t/a+1}{t/a-1}\right)^2 \right\} + \frac{(t/a)^2}{2[(t/a)^2 - 1]^2} \\ &- \frac{t}{a} \left\{ -\frac{1}{4} \frac{2}{[(1+\epsilon)^2 - 1]^2} - \frac{1}{16} \ln\left(\frac{2+\epsilon}{\epsilon}\right)^2 \right\} - \frac{1+2\epsilon}{2[(1+\epsilon)^2 - 1]^2} \end{aligned} \quad (2.40)$$

ou, ainda, tendo em mente que $\epsilon \ll 1$,

$$\begin{aligned} I_\epsilon\left(\frac{t}{a}\right) &= \frac{t}{a} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{4\epsilon^2} - \frac{1}{16} \ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{1}{4\epsilon^2} \\ &+ \frac{t}{a} \left\{ \frac{1}{4} \frac{(t/a)^3 - 3t/a}{[(t/a)^2 - 1]^2} - \frac{1}{16} \ln\left(\frac{t/a+1}{t/a-1}\right)^2 \right\} + \frac{(t/a)^2}{2[(t/a)^2 - 1]^2} \\ &- \frac{t}{a} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{4\epsilon^2} - \frac{1}{16} \ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{1}{4\epsilon^2}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Agora, tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$ em Eq. (2.41) nós obtemos a seguinte solução para a integral $I(t/a)$ dada em Eq. (2.35):

$$I\left(\frac{t}{a}\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon. \quad (2.42)$$

Logo,

$$I\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \frac{(t/a)^2 - 3}{[(t/a)^2 - 1]^2} - \frac{1}{16} \frac{t}{a} \ln \left(\frac{t/a + 1}{t/a - 1}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \frac{1}{[(t/a)^2 - 1]^2}. \quad (2.43)$$

Reorganizando os termos e fazendo as devidas simplificações, Eq. (2.43) fica

$$I\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \frac{1}{(t/a)^2 - 1} - \frac{1}{16} \frac{t}{a} \ln \left(\frac{t/a + 1}{t/a - 1}\right)^2. \quad (2.44)$$

Retornando o resultado acima em Eq. (2.34) temos que a dispersão na velocidade nas direções x e y é dada por

$$(\Delta v_x)^2 = (\Delta v_y)^2 = \frac{e^2}{8\pi^2 m^2 a^2} \left[\frac{t}{a} \ln \left(\frac{t+a}{t-a}\right)^2 - \frac{4t^2}{t^2 - a^2} \right]. \quad (2.45)$$

Em termos da variável z temos

$$(\Delta v_x)^2 = (\Delta v_y)^2 = \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \left[\frac{t}{64z^3} \ln \left(\frac{t+2z}{t-2z}\right)^2 - \frac{t^2}{8z^2(t^2 - 4z^2)} \right]. \quad (2.46)$$

O comportamento de $(\Delta v_x)^2 = (\Delta v_y)^2$ é dado em Fig. (2.1). Conforme vemos, o quadrado da dispersão na velocidade nas direções paralelas à placa é divergente em $t = 2z$.

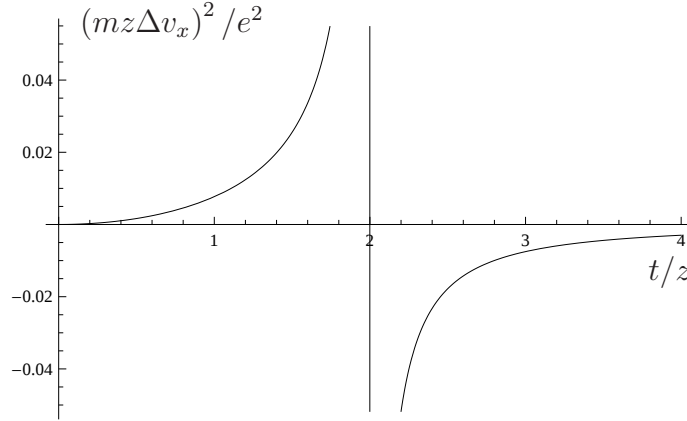


Figura 2.1: *Comportamento do quadrado da dispersão na velocidade, nas direções paralelas à placa, de uma partícula carregada próxima a uma fronteira plana perfeitamente refletora que se encontra na origem.*

Determinemos agora a dispersão na velocidade na direção z . Substituindo Eq. (2.21) em Eq. (2.16), temos que $(\Delta v_z)^2$ é dado por

$$(\Delta v_z)^2 = \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \int_0^t \int_0^t \frac{1}{(\Delta t^2 - 4z^2)^2} dt' dt'', \quad (2.47)$$

que, como já vimos, pode ser escrita na forma

$$(\Delta v_z)^2 = \frac{2e^2}{\pi^2 m^2} \int_0^t (t - \tau) \frac{1}{(\tau^2 - a^2)^2} dt' dt''. \quad (2.48)$$

Seguindo passos totalmente análogos aos do cálculo de $(\Delta v_x)^2$ podemos obter o seguinte resultado para $(\Delta v_z)^2$:

$$(\Delta v_z)^2 = \frac{e^2}{4\pi^2 m^2 a^2} \frac{t}{a} \ln \left(\frac{t+a}{t-a} \right)^2, \quad (2.49)$$

ou, ainda,

$$(\Delta v_z)^2 = \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \frac{t}{32z^3} \ln \left(\frac{t+2z}{t-2z} \right)^2. \quad (2.50)$$

A Fig. (2.2) nos dá o comportamento de $(\Delta v_z)^2$ em função do tempo t , para um dado valor da coordenada z . Assim como $(\Delta v_x)^2$, em $t = 2z$ há uma divergência.

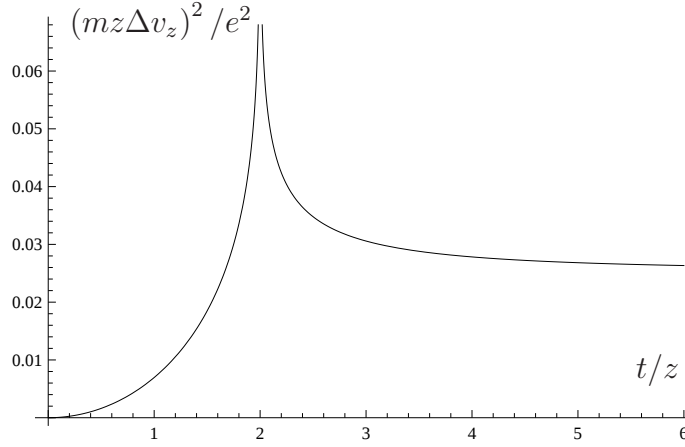


Figura 2.2: Comportamento do quadrado da dispersão na velocidade, na direção z , de uma partícula carregada próxima a uma fronteira plana perfeitamente refletora que se encontra na origem.

Finalmente, substituindo Eqs. (2.46) e (2.50) em Eq. (2.24) obtemos o valor da energia cinética:

$$E_k = \frac{e^2}{\pi^2 m} \left[\frac{t}{32z^3} \ln \left(\frac{t+2z}{t-2z} \right)^2 - \frac{t^2}{8z^2(t^2 - 4z^2)} \right]. \quad (2.51)$$

O comportamento da energia cinética em função do tempo t , para um dado valor de z , é dado em Fig. (2.3).

Um ponto que deve ser ressaltado é que o quadrado da dispersão na velocidade nas três direções $(\Delta v_x)^2 = (\Delta v_y)^2$ e $(\Delta v_z)^2$ e consequentemente a energia cinética E_k divergem para $t = 2z$. Curiosamente esse é o tempo de viagem de ida e volta da luz para percorrer a distância entre a placa e a partícula [16].

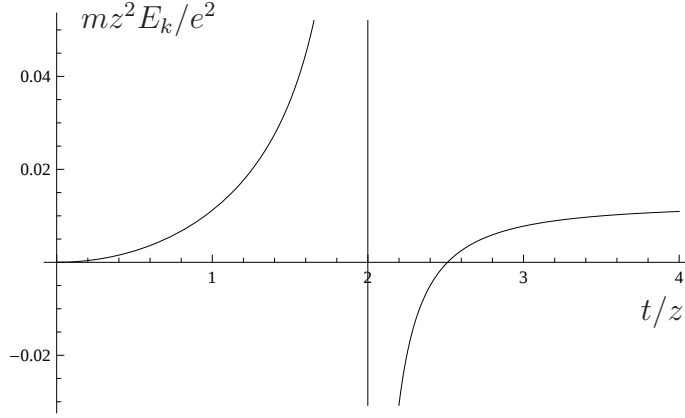


Figura 2.3: *Comportamento da energia cinética de uma partícula carregada localizada próxima a uma fronteira plana perfeitamente refletora que se encontra na origem.*

Essa divergência pode ser devido ao fato de termos assumido uma fronteira plana perfeitamente refletora idealizada. Um tratamento mais realista seria considerar por exemplo que a fronteira não mais está fixa, mas sim que flutua em torno de um valor médio.

Outro ponto que merece destaque nos resultados obtidos é que o quadrado da dispersão na velocidade nas direções x e y são quantidades negativas, o que causa espanto a princípio. Uma justificativa para tal resultado será dada ainda nesse capítulo.

Podemos também obter os valores de $(\Delta v_i)^2$ para $t \gg z$. Realizando expansões em torno de z/t próximo de zero obtemos que neste limite

$$(\Delta v_x)^2 = (\Delta v_y)^2 \approx -\frac{e^2}{3\pi^2 m^2} \frac{1}{t^2} - \frac{8e^2}{5\pi^2 m^2} \frac{z^2}{t^4} \quad (2.52)$$

e

$$(\Delta v_z)^2 \approx \frac{e^2}{4\pi^2 m^2} \frac{1}{z^2} + \frac{e^2}{3\pi^2 m^2} \frac{1}{t^2}. \quad (2.53)$$

Observe ainda que o processo de medida é assumido ser tal que o detector é ligado e desligado instantaneamente no tempo 0 e t , respectivamente. Considerar um processo de medida não mais instantâneo e sim suave pode trazer influências significativas aos resultados [17]. Um tratamento ainda mais realista no qual, além de um processo de medida suave, é considerado que a partícula teste é descrita por uma distribuição gaussiana na direção temporal é dado em Ref. [18].

Analogamente ao que foi feito para a velocidade $\vec{v}$ da partícula vamos obter agora valores esperados relacionados à posição $\vec{x}$.

Como vimos em Eq. (2.11), o valor esperado da velocidade é dado por

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{e}{m} \int_0^t \langle \vec{E}(\vec{x}, t') \rangle dt'.$$

Para a i -ésima componente temos então

$$\langle v_i \rangle = \frac{e}{m} \int_0^t \langle E_i(\vec{x}, t') \rangle dt'. \quad (2.54)$$

Concluimos, assim, que o valor esperado da i -ésima componente da posição $\langle x_i \rangle$, é escrito como

$$\langle x_i \rangle = \langle x_0 \rangle + \frac{e}{m} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt' \langle E_i(\vec{x}, t') \rangle = \langle x_0 \rangle = x, \quad (2.55)$$

visto que $\langle E_i(\vec{x}, t') \rangle = 0$ e que a posição da partícula é assumida ser constante.

Por sua vez, para o valor esperado do quadrado da i -ésima componente da posição $\langle x_i^2 \rangle$, temos

$$\langle x_i^2 \rangle = x^2 + \frac{e^2}{m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt' \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt'' \langle T(E_i(\vec{x}, t') E_i(\vec{x}, t'')) \rangle_R. \quad (2.56)$$

A incerteza na determinação da posição será portanto dada por

$$\begin{aligned} (\Delta x_i)^2 &= \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2 \\ &= \frac{e^2}{m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt' \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt'' \langle T(E_i(\vec{x}, t') E_i(\vec{x}, t'')) \rangle_R. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Calculemos, pois, a dispersão na posição da partícula $(\Delta x_i)^2$. Para $i = 1$, temos

$$(\Delta x)^2 = (\Delta y)^2 = \frac{e^2}{m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt' \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt'' \langle T(E_x(\vec{x}, t') E_x(\vec{x}, t'')) \rangle_R \quad (2.58a)$$

$$= \frac{e^2}{m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_2} dt'' \langle T(E_x(\vec{x}, t') E_x(\vec{x}, t'')) \rangle_R. \quad (2.58b)$$

Substituindo Eq. (2.20) em Eq. (2.58b), ficamos com

$$(\Delta x)^2 = (\Delta y)^2 = -\frac{e^2}{\pi^2 m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_2} dt'' \frac{\Delta t^2 + 4z^2}{(\Delta t^2 - 4z^2)^3}. \quad (2.59)$$

Resolvendo a integração em t'' temos

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 = (\Delta y)^2 &= -\frac{e^2}{4\pi^2 m^2 a^3} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_1} dt' \left\{ -a(t' - t_2) \frac{(t' - t_2)^2 - 3a^2}{[(t' - t_2)^2 - a^2]^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{t' - t_2 + a}{t' - t_2 - a} \right)^2 + at' \frac{t'^2 - 3a^2}{(t'^2 - a^2)^2} - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{t' + a}{t' - a} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde novamente estamos fazendo $a = 2z$. A integração em t' , por sua vez, nos dá

$$\begin{aligned}
(\Delta x)^2 &= -\frac{e^2}{4\pi^2 m^2 a^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \left[\frac{a^2}{t_2^2 - a^2} - \frac{1}{4} \frac{t_2}{a} \ln \left(\frac{t_2 + a}{t_2 - a} \right)^2 - \frac{a^2}{(t_2 - t_1)^2 - a^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{t_2 - t_1}{4a} \ln \left(\frac{t_2 - t_1 + a}{t_2 - t_1 - a} \right)^2 + \frac{a^2}{t_1^2 - a^2} - \frac{t_1}{4a} \ln \frac{t_1 + a}{t_1 - a} + 1 \right] \\
&= -\frac{e^2}{4\pi^2 m^2 a^2} \left\{ \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \left[\frac{a^2}{t_2^2 - a^2} - \frac{1}{4} \frac{t_2}{a} \ln \left(\frac{t_2 + a}{t_2 - a} \right)^2 \right] \right. \\
&\quad + \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \left[\frac{a^2}{t_1^2 - a^2} - \frac{t_1}{4a} \ln \left(\frac{t_1 + a}{t_1 - a} \right)^2 \right] + \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \\
&\quad \left. + \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \left[\frac{t_2 - t_1}{4a} \ln \left(\frac{t_2 - t_1 + a}{t_2 - t_1 - a} \right)^2 - \frac{a^2}{(t_2 - t_1)^2 - a^2} \right] \right\}. \tag{2.61}
\end{aligned}$$

Agora, fazendo uso do que foi obtido em Eq. (2.32) e solucionando as integrais imediatas, obtemos

$$\begin{aligned}
(\Delta x)^2 &= \frac{e^2}{4\pi^2 m^2 a^2} \left\{ \int_0^t dt_2 t \left[\frac{a^2}{t_2^2 - a^2} - \frac{t_2}{4a} \ln \left(\frac{t_2 + a}{t_2 - a} \right)^2 \right] \right. \\
&\quad + \int_0^t dt_1 t \left[\frac{a^2}{t_1^2 - a^2} - \frac{t_1}{4a} \ln \left(\frac{t_1 + a}{t_1 - a} \right)^2 \right] + t^2 \\
&\quad \left. + 2 \int_0^t d\tau (t - \tau) \left[\frac{\tau}{4a} \ln \left(\frac{\tau + a}{\tau - a} \right)^2 - \frac{a^2}{\tau^2 - a^2} \right] \right\}. \tag{2.62}
\end{aligned}$$

Fazendo, nas integrações em t_1 e t_2 , a mudança de variável $t_1 = t_2 = \tau$ e simplificando os termos teremos

$$(\Delta x)^2 = -\frac{e^2}{4\pi^2 m^2 a^2} \left\{ t^2 + 2 \int_0^t d\tau \tau \left[\frac{a^2}{\tau^2 - a^2} - \frac{\tau}{4a} \ln \left(\frac{\tau + a}{\tau - a} \right)^2 \right] \right\}, \tag{2.63}$$

que, por fim, resulta em

$$(\Delta x)^2 = \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \left[\frac{t^3}{24a^3} \ln \left(\frac{t + a}{t - a} \right)^2 - \frac{t^2}{6a^2} - \frac{1}{6} \ln \left(\frac{t^2 - a^2}{a^2} \right) \right]. \tag{2.64}$$

Em termos da variável z temos

$$(\Delta x)^2 = \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \left[\frac{t^3}{192z^3} \ln \left(\frac{t + 2z}{t - 2z} \right)^2 - \frac{t^2}{24z^2} - \frac{1}{6} \ln \left(\frac{t^2 - 4z^2}{4z^2} \right) \right]. \tag{2.65}$$

O comportamento de $(\Delta x)^2$ em função do tempo, para um dado valor de z , é dado em Fig. (2.4). Note que o quadrado da dispersão na posição nas direções paralelas à placa também diverge em $t = 2z$.

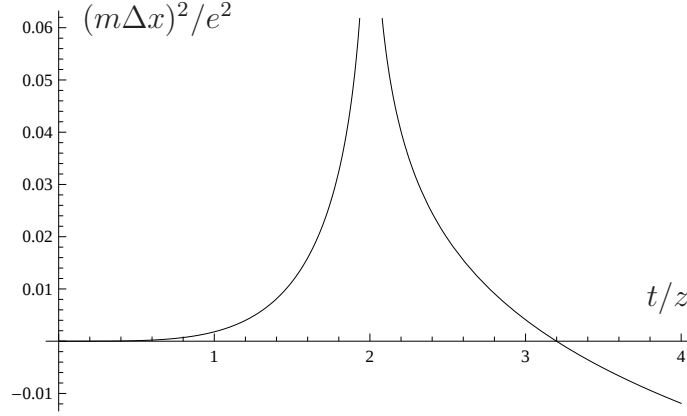


Figura 2.4: Comportamento do quadrado da dispersão na componente $x = y$ da posição de uma partícula carregada próxima a uma fronteira plana perfeitamente refletora que se encontra na origem.

Para $t \gg z$ Eq. (2.65) fica

$$(\Delta x)^2 \approx -\frac{e^2}{3\pi^2 m^2} \ln \frac{t}{2z}. \quad (2.66)$$

Ainda, para a direção z temos

$$(\Delta z)^2 = \frac{e^2}{m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt' \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt'' \langle T(E_z(\vec{x}, t') E_z(\vec{x}, t'')) \rangle_R \quad (2.67a)$$

$$= \frac{e^2}{m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_2} dt'' \langle T(E_z(\vec{x}, t') E_z(\vec{x}, t'')) \rangle_R. \quad (2.67b)$$

Substituindo Eq. (2.20) em Eq. (2.67b), ficamos com

$$(\Delta z)^2 = \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_2} dt'' \frac{1}{(\Delta t^2 - 4z^2)^2}. \quad (2.68)$$

A integração em t'' nos dá

$$(\Delta z)^2 = \frac{e^2}{2\pi^2 m^2 a^3} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_1} dt' \left[a \frac{t' - t_2}{(t' - t_2)^2 - a^2} - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{t' - t_2 + a}{t' - t_2 - a} \right)^2 \right. \\ \left. - a \frac{t'}{t'^2 - a^2} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{t' + a}{t' - a} \right)^2 \right]. \quad (2.69)$$

Solucionando a integração em t' ficamos com

$$\begin{aligned}
(\Delta z)^2 &= -\frac{e^2}{8\pi^2 m^2 a^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \left[\frac{t_2 - t_1}{a} \ln \left(\frac{t_2 - t_1 + a}{t_2 - t_1 - a} \right)^2 - \frac{t_2}{a} \ln \left(\frac{t_2 + a}{t_2 - a} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{t_1}{a} \ln \left(\frac{t_1 + a}{t_1 - a} \right)^2 \right] \\
&= -\frac{e^2}{8\pi^2 m^2 a^2} \left[\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \frac{t_2 - t_1}{a} \ln \left(\frac{t_2 - t_1 + a}{t_2 - t_1 - a} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \frac{t_2}{a} \ln \left(\frac{t_2 + a}{t_2 - a} \right)^2 - \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \frac{t_1}{a} \ln \left(\frac{t_1 + a}{t_1 - a} \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Calculando as integrais imediatas e utilizando o resultado em Eq. (2.32) temos

$$\begin{aligned}
(\Delta z)^2 &= -\frac{e^2}{8\pi^2 m^2 a^2} \left[2 \int_0^t d\tau (t - \tau) \frac{\tau}{a} \ln \left(\frac{\tau + a}{\tau - a} \right)^2 - t \int_0^t dt_2 \frac{t_2}{a} \ln \left(\frac{t_2 + a}{t_2 - a} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - t \int_0^t dt_1 \frac{t_1}{a} \ln \left(\frac{t_1 + a}{t_1 - a} \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Fazendo, nas integrações em t_1 e t_2 , $t_1 = t_2 = \tau$ e simplificando os termos obtemos

$$(\Delta z)^2 = \frac{e^2}{4\pi^2 m^2 a^2} \int_0^t d\tau \frac{\tau^2}{a} \ln \left(\frac{\tau + a}{\tau - a} \right)^2, \tag{2.72}$$

que resulta em

$$(\Delta z)^2 = \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \left[\frac{t^2}{6a^2} + \frac{t^3}{12a^3} \ln \left(\frac{t + a}{t - a} \right)^2 + \frac{1}{6} \ln \left(\frac{t^2 - a^2}{a^2} \right) \right]. \tag{2.73}$$

Em termos de z , Eq. (2.73) fica

$$(\Delta z)^2 = \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \left[\frac{t^2}{24z^2} + \frac{t^3}{96z^3} \ln \left(\frac{t + 2z}{t - 2z} \right)^2 + \frac{1}{6} \ln \left(\frac{t^2 - 4z^2}{4z^2} \right) \right]. \tag{2.74}$$

A Fig. (2.5) nos mostra como $(\Delta z)^2$ comporta-se, a medida que o tempo passa, para um dado valor de z . Diferentemente de $(\Delta x)^2$, podemos observar que o quadrado da dispersão na posição na direção z , que corresponde à direção em que está situada a placa, não diverge em $t = 2z$.

Para $t \gg z$ Eq. (2.74) pode ser aproximada por

$$(\Delta z)^2 \approx \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \left(\frac{t^2}{8z^2} + \frac{1}{3} \ln \frac{t}{2z} \right). \tag{2.75}$$

Observe ainda que inicialmente assumimos que a partícula não se move significativamente, ou seja, devemos ter $(\Delta z)^2 \ll z^2$ e, então, utilizando Eq. (2.75),

$$(\Delta z)^2 \approx \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \frac{t^2}{8z^2} \ll z^2, \tag{2.76}$$

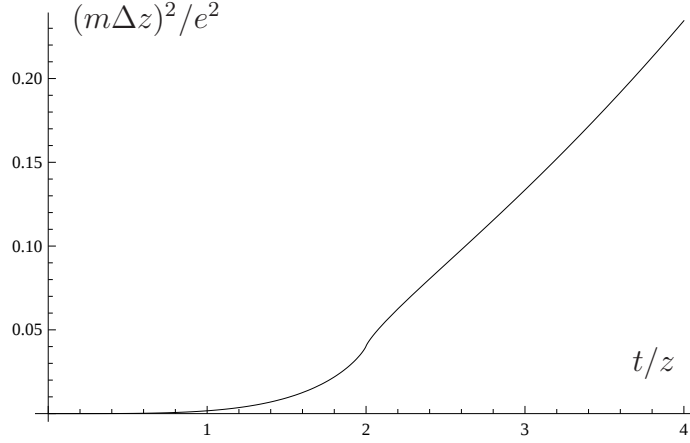


Figura 2.5: *Comportamento do quadrado da dispersão na componente z da posição de uma partícula carregada próxima a uma fronteira plana perfeitamente refletora que se encontra na origem.*

ficamos com a seguinte desigualdade:

$$t \ll \frac{2\sqrt{2}\pi m}{e} z^2. \quad (2.77)$$

Temos, pois, um limite para o qual os resultados obtidos até agora são válidos.

Como vimos, o movimento browniano de uma partícula teste carregada sujeita às flutuações do vácuo do campo eletromagnético não é isotrópico, já que o comportamento das direções x e z é diferente. O aspecto menos intuitivo dos resultados é que $(\Delta v_x)^2$ e $(\Delta x)^2$ são ambos negativos. Foi sugerido em Ref. [1] que esse resultado se deve ao processo de renormalização que foi utilizado. Note que ao longo dos nossos cálculos fizemos uso da função de dois pontos renormalizada, ou seja, extraímos a contribuição advinda do vácuo de Minkowski. As quantidades $(\Delta v_x)^2$ e $(\Delta x)^2$ serem negativas implica, portanto, que a incerteza na posição e na velocidade na ausência da placa é maior do que na presença desta. Ao subtrairmos, portanto, o termo correspondente ao vácuo de Minkowski, ignoramos uma contribuição maior do que a que restou, ou seja, uma contribuição maior do que se obtém quando se considera a presença da placa. Uma possível maneira de contabilizar isso é considerar a natureza quântica da partícula, o que faremos na seção a seguir.

2.2 Natureza quântica da partícula

De acordo com a mecânica quântica, uma partícula é descrita por um pacote de ondas e a posição e o momento apresentam uma determinada incerteza [19]. A medida que o tempo

passa o pacote de ondas se espalha e a incerteza na posição aumenta. Se considerarmos que $(\Delta x)^2$ é a diferença entre a situação com a fronteira e a situação sem esta, o sinal negativo de $(\Delta x)^2$ pode ser entendido como uma redução do espalhamento do pacote de ondas nas direções paralelas à placa, comparando com o que obteríamos se a placa não estivesse presente, ou seja, no vácuo de Minkowski. Faremos agora o tratamento do espalhamento do pacote de ondas devido à natureza quântica da partícula, ou seja, na situação em que a placa não está presente.

2.2.1 Pacote de ondas gaussiano

Vamos admitir que a partícula seja descrita, em um dado tempo inicial $t_0 = 0$, pela seguinte função de ondas:

$$\psi(x) = Ae^{-(x-a)^2/4\sigma^2}, \quad (2.78)$$

sendo A uma constante de normalização, a qual podemos obter através da relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = 1. \quad (2.79)$$

De Eqs. (2.78) e (2.79) concluimos que

$$|A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} = |A|^2 \sqrt{2\pi\sigma^2} = 1 \quad (2.80)$$

e, assim,

$$|A|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}. \quad (2.81)$$

Supondo que A seja real, Eq. (2.81) nos dá

$$A = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}. \quad (2.82)$$

Então, substituindo Eq. (2.82) em Eq. (2.78), temos

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-(x-a)^2/4\sigma^2}. \quad (2.83)$$

A solução dada em Eq. (2.83) é conhecida por pacote de ondas gaussiano [19].

A largura do pacote de ondas é obtida efetuando o cálculo da raiz quadrada do desvio quadrático médio, ou seja,

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad (2.84)$$

sendo

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n |\psi(x)|^2 dx. \quad (2.85)$$

Assim,

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx. \quad (2.86)$$

A mudança de variável $y = x - a$ nos fornece

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (y + a) e^{-y^2/2\sigma^2} dy = a \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma^2} dy = a. \quad (2.87)$$

Do mesmo modo,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (y + a)^2 e^{-y^2/2\sigma^2} dy = a^2 + \sigma^2. \quad (2.88)$$

De Eqs. (2.87) e (2.88), a incerteza na posição Δx , dada em Eq. (2.84), fica

$$\Delta x = \sigma. \quad (2.89)$$

A transformada de Fourier de $\psi(x)$ é dada por

$$\bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-ipx}. \quad (2.90)$$

Introduzindo $\psi(x)$, dada em Eq. (2.83), na equação acima, ficamos com

$$\bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-a)^2/4\sigma^2 - ipx} \quad (2.91a)$$

$$= \frac{e^{-ipa}}{\sqrt{2\pi}(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2/4\sigma^2 - ipy} \quad (2.91b)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2\pi\sigma^2)^{1/4} e^{-p^2\sigma^2 - ipa}. \quad (2.91c)$$

Tomando agora o módulo ao quadrado da função $\bar{\psi}(p)$ dada em Eq. (2.91c) teremos

$$|\bar{\psi}(p)|^2 = \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\pi} e^{-2p^2\sigma^2}. \quad (2.92)$$

Como era de se esperar,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp |\bar{\psi}(p)|^2 = \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2p^2\sigma^2} dp = \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^2}} = 1. \quad (2.93)$$

Vamos determinar agora a largura do pacote de ondas descrito por $|\bar{\psi}(p)|$. Analogamente ao que foi feito para $\psi(x)$, vamos primeiramente calcular os valores médios $\langle p^2 \rangle$ e $\langle p \rangle$. Para $\langle p \rangle$ temos:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p |\bar{\psi}(p)|^2 dp = \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p e^{-2p^2\sigma^2} dp = 0 \quad (2.94)$$

e para $\langle p^2 \rangle$:

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p^2 |\bar{\psi}(p)|^2 dp = \frac{1}{4\sigma^2}. \quad (2.95)$$

Assim, de Eqs. (2.94) e (2.95), concluimos que

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{1}{4\sigma^2} \quad (2.96)$$

e, portanto,

$$\Delta p = \frac{1}{2\sigma}. \quad (2.97)$$

Assim, a partir de Eqs. (2.89) e (2.97) obtemos que

$$\Delta p \Delta x = \frac{1}{2}. \quad (2.98)$$

Como vemos, Δp e Δx tratam-se, respectivamente, das incertezas na determinação dos momentum linear e posição da partícula. O resultado obtido em Eq. (2.98) mostra que essas incertezas estão relacionadas, o produto é uma constante. Este resultado é um caso particular do princípio da incerteza de Heisenberg [19] e mostra que as precisões nas medidas de posição e momentum linear da partícula são dependentes uma da outra. Diminuir Δp significa aumentar Δx , e vice-versa.

Os resultados obtidos anteriormente são válidos para o caso de um pacote gaussiano. No caso geral vale

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{1}{2}, \quad (2.99)$$

que é o chamado princípio da incerteza de Heisenberg. Ou seja, Eq. (2.98) nos mostra que para o caso do pacote gaussiano obtemos o limite inferior determinado pelo princípio da incerteza.

2.2.2 Evolução do pacote de ondas gaussiano unidimensional

Como vimos, a transformada de Fourier da função $\bar{\psi}(p)$ é a função de onda $\psi(x)$, dada por

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \bar{\psi}(p) e^{ipx}.$$

Para o caso dependente do tempo, a solução da equação de Schrödinger obtida pelo princípio da superposição de ondas planas é dada por [19]

$$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \bar{\psi}(p) e^{ipx - i\omega t}, \quad (2.100)$$

com $\bar{\psi}(p)$ dada em Eq. (2.91c) e $\omega = \omega(k)$ é tal que

$$\omega(k) = \frac{k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}. \quad (2.101)$$

Disso, concluímos que

$$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\sigma^2 p^2 - ipa} e^{ipx - ip^2 t/2m}, \quad (2.102)$$

ou, ainda,

$$\psi(t, x) = \left(\frac{\pi\sigma^2}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp \left[- \left(\sigma^2 + \frac{it}{2m} \right) p^2 + i(x-a)p \right] \quad (2.103a)$$

$$= \left(\frac{\pi\sigma^2}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{\pi} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 + it/m}} \exp \left[- \frac{m(x-a)^2}{4m\sigma^2 + 2it} \right] \quad (2.103b)$$

$$= \left(\frac{2\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 + it/m}} \exp \left[- \frac{m(x-a)^2}{4m\sigma^2 + 2it} \right]. \quad (2.103c)$$

A densidade de probabilidade $|\psi(x, t)|^2$ será dada por

$$|\psi(x, t)|^2 = \left(\frac{2\sigma^2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(4\sigma^4 + t^2/m^2)^{1/2}} \exp \left[- \frac{2m^2(x-a)^2\sigma^2}{4m^2\sigma^4 + t^2} \right]. \quad (2.104)$$

Mas, uma gaussiana dada por $e^{-\theta z^2}$ tem como largura $\Delta z = 1/\sqrt{2\theta}$. Logo, para a gaussiana em Eq. (2.104) temos que

$$\Delta x = \left(\frac{4m^2\sigma^2}{4m^2\sigma^4 + t^2} \right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{4m^2\sigma^4 + t^2}{4m^2\sigma^2}} \quad (2.105a)$$

$$= \sigma \sqrt{1 + \frac{t^2}{4m^2\sigma^4}}. \quad (2.105b)$$

Assim, a medida que o tempo passa, o pacote de ondas evolui de acordo com $\psi(t, x)$, dado em Eq. (2.103c), e sua largura aumenta conforme nos mostra Eq. (2.105b). Uma vez que $|\bar{\psi}(t, p)| = \bar{\psi}(p)$, esse alargamento do pacote de ondas não afeta Δp .

Por fim, concluímos que o produto das incertezas será dado por

$$\Delta p \Delta x = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{t^2}{4m^2\sigma^4}}. \quad (2.106)$$

Note que para $t = 0$ recuperamos o resultado anterior

$$\Delta p \Delta x = \frac{1}{2}.$$

2.2.3 Natureza quântica da partícula

Vamos considerar a partícula descrita por um pacote de ondas gaussiano unidimensional na direção z com posição e momentum medidos simultaneamente, obedecendo o princípio da incerteza. Vamos assumir que inicialmente, em $t = 0$, a largura do pacote de ondas é Δz_{q0} . Então, de Eq. (2.105b) podemos inferir que

$$\Delta z_q = \sigma \sqrt{1 + \frac{t^2}{4m^2\sigma^4}}. \quad (2.107)$$

Do que foi desenvolvido anteriormente, σ é justamente a largura inicial do pacote de ondas, conforme vimos em Eq. (2.89). Então, temos que $\sigma = \Delta z_{q0}$ e ficamos com

$$\Delta z_q = \Delta z_{q0} \sqrt{1 + \frac{t^2}{4m^2\Delta z_{q0}^4}} \quad (2.108a)$$

$$= \sqrt{\Delta z_{q0}^2 + \frac{t^2}{4\Delta z_{q0}^2 m^2}} \doteq \Delta z_{qm}. \quad (2.108b)$$

Nosso objetivo é comparar a incerteza na posição devido às flutuações do vácuo, na presença da placa, com esta devido ao princípio da incerteza e ao espalhamento do pacote de ondas. Para isso, vamos manipular a largura inicial do pacote de ondas Δz_{q0} tal que a largura para um dado tempo t , Δz_q , seja mínima, ou seja,

$$\frac{d(\Delta z_q)}{d(\Delta z_{q0}^2)} = 0. \quad (2.109)$$

Assim, encontramos que

$$\Delta z_{q0}^2 = \frac{t}{2m}. \quad (2.110)$$

Substituindo, pois, Eq. (2.110) em Eq. (2.108b) obteremos

$$\Delta z_{qm} = \sqrt{\frac{t}{m}}. \quad (2.111)$$

E, analogamente, a incerteza em qualquer direção será dada por

$$\Delta x_{qm} = \Delta y_{qm} = \Delta z_{qm} = \sqrt{\frac{t}{m}}. \quad (2.112)$$

Uma vez que desejamos comparar magnitudes, seja

$$\Delta x_f = \sqrt{|\Delta x|^2} \quad (2.113)$$

a incerteza na posição, na direção x , devido às flutuações do vácuo. No limite $t \gg z$, considerando o que foi obtido em Eq. (2.66), temos, para o caso em que a partícula carregada trata-se por exemplo de um elétron,

$$\frac{\Delta x_f}{\Delta x_{qm}} = \frac{e}{\pi} \sqrt{\frac{\ln(t/2z)}{3mt}} = 2 \sqrt{\frac{e^2 \ln(t/2z)}{4\pi \cdot 3\pi mt}} = 2 \sqrt{\frac{\alpha \ln(t/2z)}{3\pi mt}}, \quad (2.114)$$

sendo $\alpha \doteq e^2/4\pi$ a constante de estrutura fina. Essa razão é sempre muito pequena. Ou seja, a incerteza devido à natureza quântica da partícula é sempre muito maior que a incerteza devido às flutuações do vácuo. Então, conforme esperávamos, ao subtrairmos a contribuição proveniente do vácuo de Minkowski ignoramos uma parcela maior que a devido às flutuações do vácuo na presença da fronteira, o que justifica os resultados negativos obtidos.

Para a direção z , considerando o termo predominante em Eq. (2.75),

$$\langle z^2 \rangle \approx \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \frac{t^2}{8z^2},$$

temos que

$$\frac{\Delta z_f}{\Delta z_{qm}} = \frac{e}{2\pi z} \sqrt{\frac{t}{2m}} = \frac{1}{z} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi} \frac{t}{2\pi m}} = \frac{1}{z} \sqrt{\frac{\alpha t}{2\pi m}} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \frac{\Delta z_{qm}}{z}, \quad (2.115)$$

que também é muito menor que um, já que Δz_{qm} deve ser menor que z . Então, temos mais uma ilustração de que a incerteza relativa às flutuações do vácuo do campo eletromagnético na presença da placa é menor que na situação em que a fronteira plana não está presente. A presença da placa suprime o espalhamento do pacote de ondas.

Capítulo 3

Quantização do campo escalar em N dimensões

Neste capítulo, quantizaremos o campo escalar em N dimensões via formalismo das funções de Green, também chamado de segunda quantização. No capítulo seguinte, particularizaremos este resultado para $N = 2$, que nos será útil no estudo do movimento de uma partícula na presença do campo escalar em dimensão $(1+1)$.

3.1 Equação de Klein-Gordon

Consideremos a métrica de Minkowski:

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu, \quad (3.1)$$

com $g_{\mu\nu}$ o chamado tensor métrico, que corresponde à matriz $N \times N$ dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Vamos prosseguir considerando a segunda quantização do campo escalar $\Psi(\vec{x})$, $\vec{x} = (x^0 = t, x^1, x^2, \dots, x^{n-1})$. A equação que descreve o campo escalar é a chamada equação de Klein-Gordon e é dada por [20]

$$(\square + M^2)\Psi(\vec{x}) = 0, \quad (3.3)$$

sendo M a massa do campo $\Psi(\vec{x})$ e $\square$ o operador d'Alembertiano:

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial^\mu (\sqrt{-g} \partial_\mu), \quad (3.4)$$

com g definido como o determinante de $g^{\mu\nu}$: $g \doteq \det |g^{\mu\nu}|$.

A equação de Klein-Gordon Eq. (3.3) é obtida a partir da densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi - \frac{m^2}{2} \Psi^2, \quad (3.5)$$

por construção da ação

$$S = \int \mathcal{L} d^n x \quad (3.6)$$

e utilizando o princípio da mínima ação $\delta S = 0$ para variações com respeito ao campo Ψ .

3.2 Funções de Green

Os valores esperados no vácuo dos produtos dos campos podem ser identificados com as funções de Green da equação de onda. Para o campo escalar, o valor esperado do comutador e do anticomutador dos campos tem particular importância [20]. Eles são dados, respectivamente, por

$$iG(\vec{x}, \vec{x}') = \langle 0 | [\Psi(\vec{x}), \Psi(\vec{x}')] | 0 \rangle, \quad (3.7a)$$

$$G^{(1)}(\vec{x}, \vec{x}') = \langle 0 | \{ \Psi(\vec{x}), \Psi(\vec{x}') \} | 0 \rangle, \quad (3.7b)$$

sendo $G(\vec{x}, \vec{x}')$ a função de Pauli-Jordan ou Schwinger e $G^{(1)}(\vec{x}, \vec{x}')$ a função de Hadamard. Essas funções de Green podem ser divididas em parcelas de frequência positiva e negativa como

$$iG(\vec{x}, \vec{x}') = G^+(\vec{x}, \vec{x}') - G^-(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (3.8a)$$

$$G^{(1)}(\vec{x}, \vec{x}') = G^+(\vec{x}, \vec{x}') + G^-(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (3.8b)$$

com $G^+(\vec{x}, \vec{x}')$ e $G^-(\vec{x}, \vec{x}')$ as funções de Wightman, dadas por

$$G^+(\vec{x}, \vec{x}') = \langle 0 | \Psi(\vec{x}) \Psi(\vec{x}') | 0 \rangle, \quad (3.9a)$$

$$G^-(\vec{x}, \vec{x}') = \langle 0 | \Psi(\vec{x}') \Psi(\vec{x}) | 0 \rangle. \quad (3.9b)$$

O propagador de Feynman é definido como o produto temporalmente ordenado dos campos

$$iG_F(\vec{x}, \vec{x}') = \langle 0 | T(\Psi(\vec{x}), \Psi(\vec{x}')) | 0 \rangle, \quad (3.10a)$$

$$= \theta(t - t') G^+(\vec{x}, \vec{x}') + \theta(t' - t) G^-(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (3.10b)$$

sendo $\theta(t)$ a função degrau

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Ainda, as funções de Green retardada e avançada são definidas, respectivamente, por

$$G_R(\vec{x}, \vec{x}') = -\theta(t - t')G(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (3.12a)$$

$$G_A(\vec{x}, \vec{x}') = \theta(t' - t)G(\vec{x}, \vec{x}') \quad (3.12b)$$

e sua média denotada por

$$\bar{G}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{2} [G_R(\vec{x}, \vec{x}') + G_A(\vec{x}, \vec{x}')], \quad (3.13)$$

a qual relaciona-se com a função de Feynman através de

$$G_F(\vec{x}, \vec{x}') = -\bar{G}(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{2}iG^{(1)}(\vec{x}, \vec{x}'). \quad (3.14)$$

3.3 Segunda quantização

De acordo com a métrica dada em Eq. (3.2), a equação de Klein-Gordon é escrita como

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x^{n2}} + M^2 \right) \Psi(\vec{x}) = 0. \quad (3.15)$$

Consideremos a derivação da função de Green G_F (propagador de Feynman).

Para um campo escalar massivo, G_F deve satisfazer a seguinte equação [20]:

$$(\square + M^2)G_F(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta^N(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (3.16)$$

Observe que, em N dimensões, o determinante da métrica é dado por $\det |g^{\mu\nu}| = -1$.

Assim, a função de Green deve satisfazer a seguinte equação diferencial:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x^{n2}} + M^2 \right) G_F(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta^N(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (3.17)$$

Com o intuito de resolver o problema, vamos procurar pelas autofunções do operador $\square + M^2$. Precisamos, pois, resolver a equação de autovalores

$$(\square + M^2)\psi = \lambda\psi. \quad (3.18)$$

Nosso objetivo é quantizar o campo escalar na presença de uma fronteira perfeitamente refletora localizada em $x^1 = 0$, o que pode ser traduzido como a condição de contorno de Dirichlet:

$$\psi(t, x^1 = 0, x^2, \dots, x^{N-1}) = 0. \quad (3.19)$$

Logo, estamos assumindo que o campo se anula em $x^1 = 0$.

Assim, devemos procurar por soluções do tipo

$$\psi(\vec{x}) = c_0 e^{-i\omega t} e^{ik_j x^j} \sin(k_1 x^1), \quad (3.20)$$

sendo

$$k_j x^j = \sum_{n=2}^{N-1} k_n x^n. \quad (3.21)$$

Tomando as derivadas de $\psi(\vec{x})$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{x}) = -\omega^2 \psi(\vec{x}), \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{n^2}} \psi(\vec{x}) = -k_n^2 \psi(\vec{x}), \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.23)$$

Então, das derivadas em Eqs. (3.22) e (3.23) concluimos que Eq. (3.18) é dada por

$$\left(-\omega^2 + \sum_{n=1}^{N-1} k_n^2 + M^2 \right) \psi = \lambda \psi \quad (3.24)$$

ou, simplificando os termos,

$$\lambda = M^2 + \sum_{n=1}^{N-1} k_n^2 - \omega^2. \quad (3.25)$$

A condição de contorno dada por Eq. (3.19) aplicada em nossa proposta de solução, Eq. (3.20), nos fornece

$$\psi(x^1 = 0) = c_0 e^{-i\omega t} e^{ik_j x^j} \sin 0 = 0, \quad (3.26)$$

e a autofunção escolhida satisfaz naturalmente a condição de Dirichlet. Logo,

$$\psi(\vec{x}) = c_0 e^{-i\omega t} e^{ik_j x^j} \sin(k_1 x^1)$$

são as autofunções de $\square + M^2$ com autovalores

$$\lambda = M^2 + \sum_{n=1}^{N-1} k_n^2 - \omega^2. \quad (3.27)$$

Vamos requerer que as autofunções dadas em Eq. (3.20) sejam ortonormais, ou seja, que obedecem a relação

$$\int dk_1 \int dk_2 \dots \int dk_{N-1} \int d\omega \psi(\vec{x}) \psi^*(\vec{x}') = \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta(t - t') \delta(x^1 - x'^1) \delta(x^2 - x'^2) \dots \delta(x^{N-1} - x'^{N-1}), \quad (3.28)$$

o que nos possibilitará determinar a constante c_0 . As integrais cujos limites de integração estão ocultos representam integrais que vão de $-\infty$ a ∞ . Observe que

$$\psi(\vec{x}) \psi^*(\vec{x}') = |c_0|^2 e^{ik_j(x^j - x'^j)} \sin(k_1 x^1) \sin(k_1 x'^1) e^{-i\omega(t - t')} \quad (3.29)$$

e, então, temos

$$\begin{aligned} \int dk_1 \int dk_2 \dots \int dk_{N-1} \int d\omega \psi(\vec{x}) \psi^*(\vec{x}') = \\ |c_0|^2 \int d\omega e^{-i\omega(t - t')} \int dk_1 \sin(k_1 x^1) \sin(k_1 x'^1) \prod_{n=2}^{N-1} \int dk_n e^{ik_n(x^n - x'^n)}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Agora, utilizando as representações da função Delta de Dirac [21]:

$$\delta(x^1 - x'^1) = \frac{1}{\pi} \int dk_1 \sin(k_1 x^1) \sin(k_1 x'^1), \quad (3.31a)$$

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega(t - t')}, \quad (3.31b)$$

$$\delta(x^n - x'^n) = \frac{1}{2\pi} \int dk_n e^{ik_n(x^n - x'^n)}, \quad (3.31c)$$

Eq. (3.30) resulta em

$$\int dk_1 \int dk_2 \dots \int dk_{N-1} \int d\omega \psi(\vec{x}) \psi^*(\vec{x}') = |c_0|^2 2^{N-1} \pi^N \delta^N(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (3.32)$$

Então, comparando Eqs. (3.28) e (3.32), determinamos que

$$|c_0|^2 = \frac{1}{2^{N-1} \pi^N}. \quad (3.33)$$

Escolhendo c_0 como uma constante real, obtemos

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2^{N-1} \pi^N}}. \quad (3.34)$$

Desta forma, substituindo o valor de c_0 acima em Eq. (3.20) concluímos que

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2^{N-1} \pi^N}} e^{-i\omega t} e^{ik_j x^j} \sin(k_1 x^1). \quad (3.35)$$

Vamos agora encontrar o propagador de Feynman. Para isso nos valem da seguinte relação [22]:

$$G_F(\vec{x}, \vec{x}') = -i \int_0^\infty d\eta \int dk_1 \int dk_2 \dots \int dk_{N-1} \int d\omega e^{-i\lambda\eta} \psi(\vec{x}) \psi^*(\vec{x}'), \quad (3.36)$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned} G_F(\vec{x}, \vec{x}') &= -\frac{i}{\pi^N 2^{N-1}} \int_0^\infty d\eta \int dk_1 \dots \int dk_{N-1} \int d\omega e^{-i\lambda\eta} e^{-i\omega(t-t')} e^{ik_j(x^j - x'^j)} \\ &\quad \times \sin(k_1 x^1) \sin(k_1 x'^1) \\ &= -\frac{i}{\pi^N 2^{N-1}} \int_0^\infty d\eta e^{-iM^2\eta} \int dk_1 e^{-ik_1^2\eta} \sin(k_1 x^1) \sin(k_1 x'^1) \\ &\quad \times \int d\omega e^{i\omega^2\eta - i\omega(t-t')} \prod_{n=2}^{N-1} \int dk_n e^{-ik_n^2\eta + ik_n(x^n - x'^n)}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

utilizando o que foi obtido em Eq. (3.25).

Primeiramente efetuaremos as integrações nas variáveis ω e k_n . Para isso, vamos utilizar o seguinte resultado [23]:

$$\int dx e^{-p^2 x^2 \pm qx} = e^{q^2/4p^2} \frac{\sqrt{\pi}}{p}. \quad (3.38)$$

Logo, fazendo as devidas identificações,

$$\int d\omega e^{i\omega^2\eta - i\omega(t-t')} = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{\eta}} e^{-i(t-t')^2/4\eta}, \quad (3.39a)$$

$$\int dk_n e^{-ik_n^2\eta + ik_n(x^n - x'^n)} = e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{\eta}} e^{i(x^n - x'^n)^2/4\eta}. \quad (3.39b)$$

Assim, estes resultados bem como uma reorganização dos termos nos conduzem a

$$\begin{aligned} G_F(\vec{x}, \vec{x}') &= \frac{e^{-i\pi(N-1)/4}}{2^{N-1}\pi^{(N+1)/2}} \int dk_1 \sin(k_1 x^1) \sin(k_1 x'^1) \\ &\quad \times \int_0^\infty d\eta \eta^{-(N-1)/2} \exp \left\{ -i(M^2 + k_1^2) \left[\eta + \frac{(t-t')^2 - \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2}{4(M^2 + k_1^2)\eta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Solucionemos agora a integração em η . Para isso, façamos uso do seguinte resultado [23]:

$$\int_0^\infty dx x^{\nu-1} \exp \left\{ \frac{i\mu}{2} \left(x + \frac{\beta^2}{x} \right) \right\} = i\pi\beta^\nu e^{-i\nu\pi/2} H_{-\nu}^{(1)}(\beta\mu), \quad (3.41)$$

sendo $H_{-\nu}^{(1)}(z)$ as funções de Bessel do terceiro tipo, também conhecidas por funções de Hankel [23]. Logo, a integral em η presente em Eq. (3.40) é dada por

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty d\eta \eta^{-(N-1)/2} \exp \left\{ -i(M^2 + k_1^2) \left[\eta + \frac{(t-t')^2 - \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2}{4(M^2 + k_1^2)\eta} \right] \right\} = \\ &\pi e^{i\pi(N-1)/4} \left[\frac{(t-t')^2 - \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2}{4(k_1^2 + M^2)} \right]^{-(N-3)/4} H_{(N-3)/2}^{(1)}(\beta\mu), \end{aligned} \quad (3.42)$$

com $\beta\mu$ dado por:

$$\beta\mu = - \left[(t - t')^2 - \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2 \right]^{1/2} \sqrt{k_1^2 + M^2}. \quad (3.43)$$

De posse desses resultados e organizando os termos, o propagador de Feynman $G_F(\vec{x}, \vec{x}')$ fica

$$G_F(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{2^{N-1} \pi^{(N-1)/2}} \left[\frac{(t - t')^2 - \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2}{4} \right]^{-(N-3)/4} \times \int dk_1 (k_1^2 + M^2)^{(N-3)/4} \sin(k_1 x^1) \sin(k_1 x'^1) H_{(N-3)/2}^{(1)}(\beta\mu). \quad (3.44)$$

Utilizando a seguinte relação [21]:

$$H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{2}{i^{\nu+1} \pi} K_\nu(z) \quad (3.45)$$

podemos escrever o propagador de Feynman como

$$G_F(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{2^{N-2} i^{(N-1)/2} \pi^{(N+1)/2}} \left[\frac{(t - t')^2 - \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2}{4} \right]^{-(N-3)/4} \times \int dk_1 (k_1^2 + M^2)^{(N-3)/4} \sin(k_1 x^1) \sin(k_1 x'^1) K_{(N-3)/2}(-i\beta\mu), \quad (3.46)$$

onde $K_\nu(z)$ é a função de Macdonald, também chamada de função de Bessel modificada do terceiro tipo [24]. Ainda, a relação trigonométrica

$$\sin(k_1 x^1) \sin(k_1 x'^1) = \frac{1}{2} \left[\cos k_1(x^1 - x'^1) - \cos k_1(x^1 + x'^1) \right] \quad (3.47)$$

nos permite escrever, substituindo $\beta\mu$ pelo seu valor dado em Eq. (3.43),

$$G_F(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{2^{N-2} i^{(N-1)/2} \pi^{(N+1)/2}} \left[\frac{(t - t')^2 - \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2}{4} \right]^{-(N-3)/4} \times \left\{ \int_0^\infty dk_1 (k_1^2 + M^2)^{(N-3)/4} \cos k_1(x^1 - x'^1) \times K_{(N-3)/2} \left(i \left[(t - t')^2 - \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2 \right]^{1/2} \sqrt{k_1^2 + M^2} \right) - \int_0^\infty dk_1 (k_1^2 + M^2)^{(N-3)/4} \cos k_1(x^1 + x'^1) \times K_{(N-3)/2} \left(i \left[(t - t')^2 - \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2 \right]^{1/2} \sqrt{k_1^2 + M^2} \right) \right\}. \quad (3.48)$$

Façamos agora uso do seguinte resultado [23]:

$$\int_0^\infty (x^2 + b^2)^{\mp\nu/2} K_\nu(a\sqrt{x^2 + b^2}) \cos cx dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} q^{\mp\nu} b^{1/2 \mp \nu} (a^2 + c^2)^{\pm\nu/2 - 1/4} K_{\pm\nu - 1/2}(b\sqrt{a^2 + c^2}). \quad (3.49)$$

Fazendo as devidas identificações e simplificando os termos, concluímos que

$$\begin{aligned} G_F(\vec{x}, \vec{x}') &= -\frac{iM^{(N-2)/2}}{(2\pi)^{N/2}} \left[\sum_{n=1}^{N-1} (x^n - x'^n)^2 - (t - t')^2 \right]^{-(N-2)/4} \\ &\quad \times K_{-(N-2)/2} \left(M \sqrt{\sum_{n=1}^{N-1} (x^n - x'^n)^2 - (t - t')^2} \right) \\ &\quad + \frac{iM^{(N-2)/2}}{(2\pi)^{N/2}} \left[(x^1 + x'^1)^2 + \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2 - (t - t')^2 \right]^{-(N-2)/4} \\ &\quad \times K_{-(N-2)/2} \left(M \sqrt{(x^1 + x'^1)^2 + \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2 - (t - t')^2} \right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Finalmente, o propagador de Feynman $G_F(\vec{x}, \vec{x}')$ pode ser escrito como uma soma de dois termos, o primeiro devido unicamente ao vácuo de Minkowski, na ausência da placa, o qual denotaremos por $G_0(\vec{x}, \vec{x}')$, e o segundo devido a presença da placa, o propagador renormalizado $G_R(\vec{x}, \vec{x}')$ [9]. Logo,

$$G_F(\vec{x}, \vec{x}') = G_0(\vec{x}, \vec{x}') + G_R(\vec{x}, \vec{x}'). \quad (3.51)$$

Na quantização do campo escalar, temos essas duas parcelas visivelmente determinadas.

A saber,

$$\begin{aligned} G_0(\vec{x}, \vec{x}') &= -\frac{iM^{(N-2)/2}}{(2\pi)^{N/2}} \left[\sum_{n=1}^{N-1} (x^n - x'^n)^2 - (t - t')^2 \right]^{-(N-2)/4} \\ &\quad \times K_{-(N-2)/2} \left(M \sqrt{\sum_{n=1}^{N-1} (x^n - x'^n)^2 - (t - t')^2} \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

e

$$\begin{aligned} G_R(\vec{x}, \vec{x}') &= \frac{iM^{(N-2)/2}}{(2\pi)^{N/2}} \left[(x^1 + x'^1)^2 + \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2 - (t - t')^2 \right]^{-(N-2)/4} \\ &\quad \times K_{-(N-2)/2} \left(M \sqrt{(x^1 + x'^1)^2 + \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2 - (t - t')^2} \right). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Capítulo 4

O comportamento de uma partícula carregada escalar próxima a uma fronteira refletora flutuante em $(1+1)$ dimensões

Neste capítulo, motivados pelo caso eletromagnético [1], discutiremos o movimento browniano de uma partícula carregada na presença do campo escalar quântico em dimensão $(1+1)$. Novamente, estaremos interessados nas mudanças devido ao estado quântico do campo, as quais são introduzidas pela presença de uma fronteira refletora, diferente, pois, do vácuo de Minkowski. Trataremos, assim, o caso de uma placa perfeitamente refletora e calcularemos os efeitos das flutuações do vácuo, modificadas pela presença dessa fronteira, sobre o movimento de uma partícula teste. Atenção especial será dada às possíveis divergências devido à idealização da placa e, a fim de regularizá-las, o procedimento de flutuação da distância entre a placa e a partícula será considerado.

4.1 Propagador de Feynman

Como foi obtido no capítulo anterior, o propagador de Feynman renormalizado de um campo escalar massivo em N dimensões é dado por

$$G_R(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{iM^{(N-2)/2}}{(2\pi)^{N/2}} \left[(x^1 + x'^1)^2 + \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2 - (t - t')^2 \right]^{-(N-2)/4} \\ \times K_{-(N-2)/2} \left(M \sqrt{(x^1 + x'^1)^2 + \sum_{n=2}^{N-1} (x^n - x'^n)^2 - (t - t')^2} \right).$$

Para o caso de dimensão (1+1) temos, assim,

$$G_R(x, t; x', t') = \frac{i}{2\pi} K_0(M \sqrt{(x + x')^2 - (t - t')^2}). \quad (4.1)$$

4.2 Equação de Langevin

Trataremos aqui o caso simplificado de uma partícula pontual browniana e um campo escalar massivo em dimensão (1+1) na presença de uma fronteira perfeitamente refletora, ou seja, estamos assumindo que o campo escalar satisfaz uma condição de contorno de Dirichlet. Como estamos trabalhando com apenas uma dimensão espacial, a saber x , omitiremos o caráter vetorial da maioria de nossas equações. Neste caso, a ação do campo é descrita por [13]

$$S_{campo} = \int dt \int dx \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{M^2}{2} \phi^2 \right), \quad (4.2)$$

obedecendo a condição de contorno

$$\phi(x = 0, t) = 0, \quad (4.3)$$

sendo ϕ o campo escalar.

Consideraremos um regime não relativístico. Então, a ação S_{part} que descreve a partícula não relativística de massa m e carga mesônica g que se move ao longo do eixo x é dada por

$$S_{part} = \int dt \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad (4.4)$$

sendo $\dot{x} = dx/dt$.

Ainda, para a ação de interação S_{int} entre a partícula e o campo temos [5]

$$S_{int} = \int dt \int dx \rho \phi, \quad (4.5)$$

sendo ρ a densidade de carga da partícula escalar.

Novamente, consideraremos que a alteração que a partícula exerce sobre o campo pode ser negligenciada. Então, a variação da ação $S = S_{part} + S_{campo} + S_{int}$ com relação à ϕ e à trajetória $x(t)$ da partícula nos mostra que as equações de movimento satisfeitas pelo campo e pela partícula são dadas, respectivamente, por

$$(\square + M^2)\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + M^2\right)\phi = 0, \quad \phi(x=0, t) = 0, \quad (4.6)$$

que é a equação de Klein-Gordon em dimensão $(1+1)$, e

$$m\ddot{x} = m\frac{dv}{dt} = -g\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, t). \quad (4.7)$$

Vamos assumir, assim como no caso eletromagnético, que a posição da partícula pode ser considerada constante e ainda admitiremos que a partícula parte do repouso em $t = 0$. Então, para um dado tempo t , Eq. (4.7) nos dá

$$v = -\frac{g}{m}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \phi(x, t')dt'. \quad (4.8)$$

Considerando agora que ϕ é um campo quântico temos que o primeiro e segundo momentos deste campo estocástico [12] são dados por

$$\langle\phi(x, t)\rangle$$

e

$$\langle T(\phi(x, t)\phi(x', t'))\rangle = \frac{1}{2}\langle\phi(x, t)\phi(x', t') + \phi(x', t')\phi(x, t)\rangle.$$

Assim, o valor esperado no vácuo da velocidade da partícula é dado por

$$\langle 0|v|0\rangle \doteq \langle v\rangle = -\frac{g}{m}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \langle\phi(x, t')\rangle dt' = 0, \quad (4.9)$$

uma vez que $\phi(x, t')$ pode ser expandido em modos normais da forma [20]

$$\phi(x, t') = \sum_k \left[u_k(x, t')a_k + u_k^*(x, t')a_k^\dagger \right], \quad (4.10)$$

sendo a o operador destruição e $a^\dagger$ o operador criação, os quais satisfazem

$$\langle 0|a|0\rangle = \langle 0|a^\dagger|0\rangle = 0. \quad (4.11)$$

Ainda, para o valor esperado no vácuo do quadrado da velocidade temos

$$\langle v^2\rangle \doteq \langle v_x^2\rangle. \quad (4.12)$$

Então, $\langle v^2 \rangle$ pode ser escrita como

$$\langle v^2 \rangle = \frac{g^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \left[\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle T(\phi(x, t_1) \phi(x', t_2)) \rangle \right]_{x=x'} \quad (4.13a)$$

$$= \frac{g^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 [\langle \phi(x, t_1) \phi(x', t_2) \rangle + \langle \phi(x', t_2) \phi(x, t_1) \rangle] \right\}_{x=x'} \quad (4.13b)$$

$$= \frac{g^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 [G^+(x, t_1; x', t_2) + G^-(x, t_1; x', t_2)] \right\} \quad (4.13c)$$

$$= \frac{g^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \left[\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 G^{(1)}(x, t_1; x', t_2) \right]_{x=x'}, \quad (4.13d)$$

sendo $G^{(1)}(x, t; x', t_2)$ o propagador de Hadamard. Agora, usando a relação para o propagador de Feynman $G_F(x, t_1; x', t_2)$ [20]

$$G_F(x, t_1; x', t_2) = -\overline{G}(x, t_1; x', t_2) - \frac{i}{2} G^{(1)}(x, t_1; x', t_2), \quad (4.14)$$

e descartando sua parte real, já que esta é identicamente nula quando se iguala os pontos [22], nós obtemos

$$\langle v^2 \rangle = i \frac{g^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \left[\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 G_F(x, t_1; x', t_2) \right]_{x=x'}. \quad (4.15)$$

A incerteza na determinação da velocidade, por sua vez, é dada por

$$\Delta v = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}. \quad (4.16)$$

Assim, Eqs. (4.9) e (4.15) nos fornecem

$$(\Delta v)^2 = \langle v^2 \rangle = i \frac{g^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \left[\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 G_F(x, t_1; x', t_2) \right]_{x=x'}. \quad (4.17)$$

Ainda, a energia cinética será escrita como

$$E_k = \langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m (\Delta v)^2. \quad (4.18)$$

Sem perda de generalidade, vamos considerar em nossos cálculos que a massa M do campo escalar é muito pequena, ou seja, $M \ll 1$. Note que [24], neste limite,

$$K_0(z) \approx \ln \frac{2}{z}, \quad z \rightarrow 0. \quad (4.19)$$

Então, Eq. (4.1) resulta em

$$G_R(x, t; x', t') \approx \frac{i}{2\pi} \ln \left[\frac{2}{M \sqrt{(x+x')^2 - (t-t')^2}} \right]. \quad (4.20)$$

Assim, substituindo Eq. (4.20) em Eq. (4.17) temos que o quadrado da dispersão na velocidade é dado por

$$(\Delta v)^2 = -\frac{g^2}{2\pi m^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \int_0^t \int_0^t \ln \left[\frac{2}{M \sqrt{(x+x')^2 - (t_1 - t_2)^2}} \right] dt_1 dt_2 \right\}_{x=x'}. \quad (4.21)$$

Utilizando agora o resultado obtido no Capítulo 2

$$\int_0^t dx \int_0^t dy f(|x-y|) = 2 \int_0^t (t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (4.22)$$

a equação acima nos leva a

$$(\Delta v)^2 = -\frac{g^2}{\pi m^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \int_0^t (t-\tau) \ln \left[\frac{2}{M \sqrt{(x+x')^2 - \tau^2}} \right] d\tau \right\}_{x=x'}. \quad (4.23)$$

Fazendo $a \doteq x + x'$ e reorganizando os termos ficamos com

$$(\Delta v)^2 = -\frac{g^2}{4\pi m^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \int_0^t (t-\tau) \ln \left[\frac{16}{M^4 (a^2 - \tau^2)^2} \right] d\tau \right\}_{x=x'} \quad (4.24a)$$

$$= -\frac{g^2}{4\pi m^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \left[\int_0^t (t-\tau) \ln \left(\frac{16}{M^4} \right) d\tau - \int_0^t (t-\tau) \ln(\tau^2 - a^2)^2 d\tau \right]_{x=x'} \quad (4.24b)$$

$$= -\frac{g^2}{4\pi m^2} \left[\int_0^t (t-\tau) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \ln \left(\frac{16}{M^4} \right) d\tau - \int_0^t (t-\tau) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \ln(\tau^2 - a^2)^2 d\tau \right]_{x=x'}. \quad (4.24c)$$

Como vemos, o primeiro termo da igualdade em Eq. (4.24c) não depende de x nem de x' e, então, ao efetuar as derivadas, se anula. Logo,

$$(\Delta v)^2 = \frac{g^2}{4\pi m^2} \int_0^t (t-\tau) \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \ln(\tau^2 - a^2)^2 \right]_{x=x'} d\tau. \quad (4.25)$$

Efetuando as derivadas, Eq. (4.25) fica:

$$(\Delta v)^2 = -\frac{g^2}{\pi m^2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{a(t-\tau)}{\tau^2 - a^2} \right]_{x=x'} d\tau \quad (4.26a)$$

$$= -\frac{g^2}{\pi m^2} \int_0^t \left[\frac{t-\tau}{(\tau^2 - a^2)^2} (\tau^2 + a^2) \right]_{x=x'} d\tau. \quad (4.26b)$$

Retornando em termos de x e x' e igualando os pontos, ou seja, fazendo $x = x'$, obtemos

$$(\Delta v)^2 = -\frac{g^2}{\pi m^2} \int_0^t \frac{t-\tau}{(\tau^2 - 4x^2)^2} (\tau^2 + 4x^2) d\tau. \quad (4.27)$$

Seja a seguinte mudança de variável: $\eta = \tau/2x$. Assim, Eq. (4.27) nos fornece

$$(\Delta v)^2 = -\frac{g^2}{2\pi m^2 x} \int_0^{t/2x} \frac{(t-2x\eta)(\eta^2 + 1)}{(\eta^2 - 1)^2} d\eta. \quad (4.28)$$

O ponto $\eta = 1$ aparece como um ponto singular no integrando em Eq. (4.28). Temos, pois, uma integral imprópria. Vamos desmembrá-la em duas integrais:

$$(\Delta v)^2 = -\frac{g^2}{2\pi m^2 x} \int_0^1 \frac{(t - 2x\eta)(\eta^2 + 1)}{(\eta^2 - 1)^2} d\eta - \frac{g^2}{2\pi m^2 x} \int_1^{t/2x} \frac{(t - 2x\eta)(\eta^2 + 1)}{(\eta^2 - 1)^2} d\eta. \quad (4.29)$$

Seja a integral própria

$$(\Delta v)^2_\epsilon = -\frac{g^2}{2\pi m^2 x} \int_0^{1-\epsilon} \frac{(t - 2x\eta)(\eta^2 + 1)}{(\eta^2 - 1)^2} d\eta - \frac{g^2}{2\pi m^2 x} \int_{1+\epsilon}^{t/2x} \frac{(t - 2x\eta)(\eta^2 + 1)}{(\eta^2 - 1)^2} d\eta. \quad (4.30)$$

Observe que

$$(\Delta v)^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Delta v)^2_\epsilon. \quad (4.31)$$

Então, resolvendo cada integração em Eq. (4.30),

$$(\Delta v)^2_\epsilon = -\frac{g^2}{2\pi m^2 x} \left[\frac{2x - t\eta}{\eta^2 - 1} \Big|_0^{1-\epsilon} - \frac{x}{2} \ln(1 - \eta^2)^2 \Big|_0^{1-\epsilon} + \frac{2x - t\eta}{\eta^2 - 1} \Big|_{1+\epsilon}^{t/2x} - \frac{x}{2} \ln(1 - \eta^2)^2 \Big|_{1+\epsilon}^{t/2x} \right], \quad (4.32)$$

ou,

$$(\Delta v)^2_\epsilon = -\frac{g^2}{2\pi m^2 x} \left\{ \frac{2x - t(1 - \epsilon)}{(1 - \epsilon)^2 - 1} + 2x - \frac{x}{2} \ln[1 - (1 - \epsilon)^2]^2 + \frac{2x - t^2/2x}{t^2/4x^2 - 1} - \frac{2x - t(1 + \epsilon)}{(1 + \epsilon)^2 - 1} - \frac{x}{2} \ln(1 - t^2/4x^2)^2 + \frac{x}{2} \ln[1 - (1 + \epsilon)^2]^2 \right\}. \quad (4.33)$$

Agora, tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$ e fazendo as devidas simplificações, obtemos

$$(\Delta v)^2 = -\frac{g^2}{4\pi m^2} \ln \left(\frac{4x^2}{t^2 - 4x^2} \right)^2. \quad (4.34)$$

E então, a partir de Eq. (4.34), a energia cinética E_k pode ser escrita como

$$E_k = \frac{1}{2} m (\Delta v)^2 = -\frac{g^2}{8\pi m} \ln \left(\frac{4x^2}{t^2 - 4x^2} \right)^2. \quad (4.35)$$

Como vemos, há duas divergências nesse resultado. A primeira ocorre em $x = 0$, a qual corresponderia a situar a partícula na origem, ou seja, na mesma posição da placa. Essa é uma divergência familiar em teoria quântica de campos e é devida à fronteira de Dirichlet [9]. A segunda divergência acontece em $t = 2x$ que é novamente, assim como no caso eletromagnético, o tempo de viagem de ida e volta da luz para percorrer a distância entre a placa e a partícula.

Outro aspecto que deve ainda ser ressaltado é que, a princípio, no limite $t \rightarrow \infty$ a energia é divergente, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_k = \infty. \quad (4.36)$$

Será visto mais adiante que essa divergência é eliminada considerando-se a hipótese de que a partícula não se move significativamente.

O comportamento para a energia cinética da partícula em função do tempo, para um dado valor de x , é dado em Fig. (4.1).

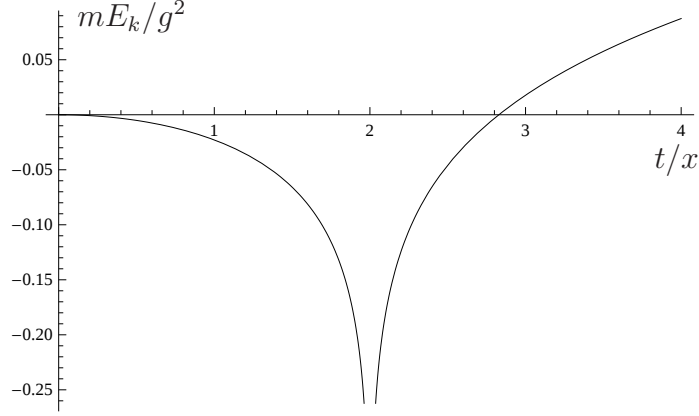


Figura 4.1: Comportamento da energia cinética de uma partícula escalar próxima a uma fronteira perfeitamente refletora que se encontra na origem.

Vamos nos direcionar agora a cálculos de valores esperados relativos à posição da partícula. A partir de Eq. (4.9)

$$\langle v \rangle = -\frac{g}{m} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \langle \phi(x, t') \rangle dt',$$

podemos obter que o valor esperado na posição da partícula é dado por

$$\langle x \rangle - \langle x_0 \rangle = -\frac{g}{m} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt' \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi(x, t') \rangle \Rightarrow \langle x \rangle = \langle x_0 \rangle = x, \quad (4.37)$$

já que $\langle \phi(x, t') \rangle = 0$ e $\langle x_0 \rangle = x$, pois estamos assumindo que a posição x da partícula pode ser considerada constante.

Ainda, para o valor esperado do quadrado da posição $\langle x^2 \rangle$ temos

$$\langle x^2 \rangle = x^2 + \frac{g^2}{m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt' \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt'' \left[\frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x''} \langle \phi(x', t') \phi(x'', t'') \rangle \right]_{x'=x''=x}. \quad (4.38)$$

A incerteza Δx será dada por

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (4.39a)$$

$$= \frac{g^2}{m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt' \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt'' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x''} [\langle \phi(x', t') \phi(x'', t'') \rangle]_{x'=x''=x} \quad (4.39b)$$

$$= i \frac{g^2}{m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt' \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt'' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x''} [G_R(x', t'; x'', t'')]_{x'=x''=x}. \quad (4.39c)$$

Vamos obter, então, a dispersão na posição da partícula $(\Delta x)^2$. Substituindo Eq. (4.20) em Eq. (4.39c) ficamos com

$$(\Delta x)^2 = -\frac{g^2}{4\pi m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_2} dt'' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x''} \left\{ \ln \left[\frac{4}{M^2 ((x' + x'')^2 - (t' - t'')^2)} \right] \right\}_{x'=x''=x}, \quad (4.40a)$$

$$= \frac{g^2}{4\pi m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_2} dt'' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x''} \left\{ \ln [(x' + x'')^2 - (t' - t'')^2] \right\}_{x'=x''=x}, \quad (4.40b)$$

já que $\ln(4/M^2)$ não depende de x' e x'' .

Efetuada as derivadas e fazendo $x' = x'' = x$, segue que

$$(\Delta x)^2 = -\frac{g^2}{2\pi m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_2} dt'' \frac{(t' - t'')^2 + 4x^2}{[(t' - t'')^2 - 4x^2]^2}. \quad (4.41)$$

Seguindo passos análogos aos do cálculo de $(\Delta v)^2$ a integração em t'' nos fornece

$$(\Delta x)^2 = -\frac{g^2}{2\pi m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_1} dt' \left[\frac{t' - t_2}{(t' - t_2)^2 - 4x^2} - \frac{t'}{t'^2 - 4x^2} \right]. \quad (4.42)$$

A integral em t' por sua vez nos dá

$$(\Delta x)^2 = -\frac{g^2}{8\pi m^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \left\{ \ln [(t_1 - t_2)^2 - 4x^2]^2 - \ln(t_2^2 - 4x^2)^2 \right. \\ \left. - \ln(t_1^2 - 4x^2)^2 + \ln(4x^2)^2 \right\} \quad (4.43)$$

ou

$$(\Delta x)^2 = -\frac{g^2}{8\pi m^2} \left\{ \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \ln [(t_1 - t_2)^2 - 4x^2]^2 - \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \ln(t_2^2 - 4x^2)^2 \right. \\ \left. - \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \ln(t_1^2 - 4x^2)^2 + \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \ln(4x^2)^2 \right\}. \quad (4.44)$$

Utilizando (4.22) e calculando as integrais imediatas, ficamos com

$$(\Delta x)^2 = -\frac{g^2}{8\pi m^2} \left\{ 2 \int_0^t d\tau (t - \tau) \ln(\tau^2 - 4x^2)^2 - t \int_0^t dt_2 \ln(t_2^2 - 4x^2)^2 \right. \\ \left. - t \int_0^t dt_1 \ln(t_1^2 - 4x^2)^2 + t^2 \ln(4x^2)^2 \right\}. \quad (4.45)$$

Fazendo, nas integrais em t_1 e t_2 , a mudança de variável $t_1 = t_2 = \tau$ e simplificando os termos, obtemos

$$(\Delta x)^2 = -\frac{g^2}{8\pi m^2} \left[t^2 \ln(4x^2)^2 - 2 \int_0^t d\tau \tau \ln(\tau^2 - 4x^2)^2 \right], \quad (4.46)$$

que resulta em

$$(\Delta x)^2 = \frac{g^2}{8\pi m^2} \left[(t^2 - 4x^2) \ln \left(\frac{t^2 - 4x^2}{4x^2} \right)^2 - 2t^2 \right]. \quad (4.47)$$

O comportamento, em função do tempo, para um dado valor de x , do quadrado da dispersão na posição da partícula é dado em Fig. (4.2).

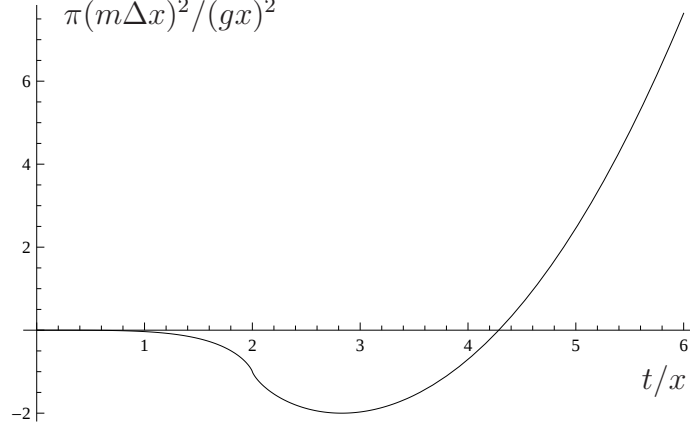


Figura 4.2: *Comportamento do quadrado da dispersão na posição de uma partícula escalar próxima a uma fronteira perfeitamente refletora que se encontra na origem.*

Observe que diferentemente do quadrado da incerteza na velocidade $(\Delta v)^2$, o quadrado da incerteza na posição da partícula $(\Delta x)^2$ não diverge em $t = 2x$:

$$(\Delta x)^2_{t=2x} = -\frac{g^2}{\pi m^2} x^2. \quad (4.48)$$

Este comportamento também esteve presente no caso eletromagnético, onde obtivemos que o quadrado da dispersão na direção da placa, ou seja, na direção z , também não apresentou divergência em $t = 2z$, ao contrário do que ocorreu com as dispersões quadráticas nas direções paralelas à placa.

Além disso, há uma região em que $(\Delta x)^2$ é negativo, a qual, conforme no caso eletromagnético, deve estar relacionada à redução na incerteza da posição comparada com o caso em que a placa não está presente.

Fez parte de nossas hipóteses iniciais que a partícula não se move significativamente, de modo que a sua posição x pode ser considerada constante. Então, devemos ter

$$|(\Delta x)^2| \ll x^2. \quad (4.49)$$

Assim, para $t = 2x$, Eq. (4.48) nos fornece

$$\frac{g^2}{\pi m^2} x^2 \ll x^2 \Rightarrow \frac{g^2}{\pi m^2} \ll 1. \quad (4.50)$$

Como g e m são constantes, essa desigualdade deve ser satisfeita para quaisquer valores de x e t .

Gostaríamos de ressaltar ainda que a desigualdade em Eq. (4.49) impõe um limite natural de validade para os nossos resultados. Por exemplo, para $g/m = 0,1$, que obedece Eq. (4.50), obtemos que $t \approx 10x$ pode ser considerado um limite superior de validade para o quadrado da dispersão na velocidade e posição da partícula, já que nesse ponto $|(\Delta x)^2|/x^2 \approx 0,16$. Então, para $t > 10x$ a desigualdade Eq. (4.49) não é mais cumprida e portanto os resultados obtidos até agora não são mais válidos, já que fez parte de nossas hipóteses iniciais que a partícula não se move significativamente. A Fig. (4.3) ilustra esse comportamento.

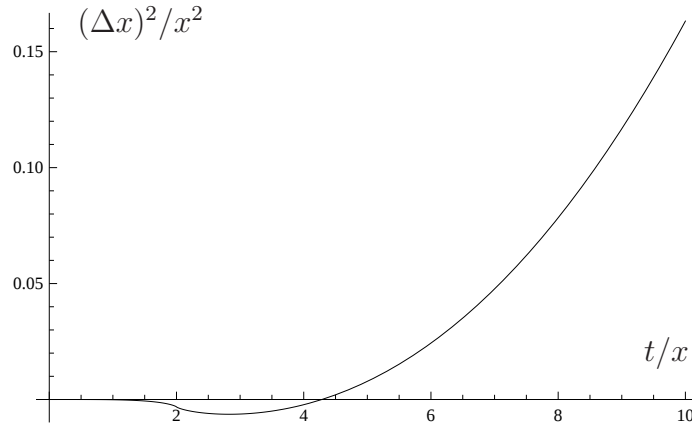


Figura 4.3: *Comportamento do quadrado da dispersão na posição de uma partícula escalar próxima a uma fronteira perfeitamente refletora que se encontra na origem, com $g/m = 0,1$.*

Considerando agora $g/m = 0,01$ encontramos que para $t \approx 50x$ temos $|(\Delta x)^2|/x^2 \approx 0,11$ e então, neste cenário, este é um limite razoável de validade para $(\Delta v)^2$ e $(\Delta x)^2$, conforme nos mostra Fig. (4.4).

Observe que quanto menor for a razão g/m maior será o alcance de validade dos valores obtidos para as dispersões quadráticas na velocidade e posição da partícula.

4.3 Flutuação da fronteira

Vimos na seção anterior que a energia cinética de uma partícula browniana em um campo escalar com condição de contorno de Dirichlet apresenta duas divergências: $x = 0$ e $t = 2x$. Até agora consideramos que partícula e a placa são objetos clássicos, idealizados e situados em posições fixas. Um tratamento um pouco mais realista, que deve controlar

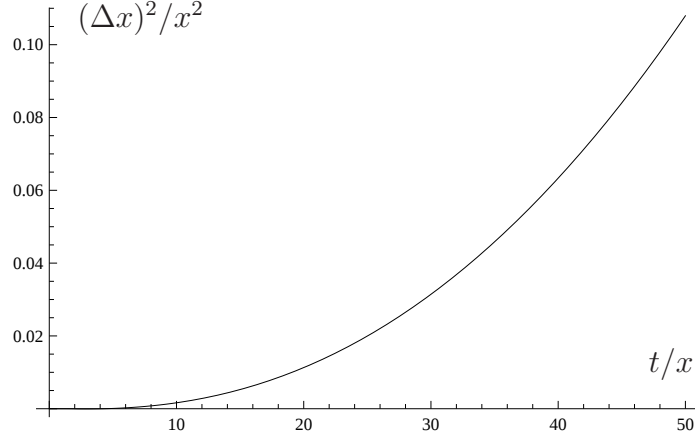


Figura 4.4: *Comportamento do quadrado da dispersão na posição de uma partícula escalar próxima a uma fronteira perfeitamente refletora que se encontra na origem, com $g/m = 0,01$.*

essas divergências presentes no valor da energia, as quais são devidas às idealizações do problema, seria considerar que a distância entre a placa e a partícula não é mais fixa. Para isso, podemos assumir que a posição da partícula ou do plano não é mais fixa, mas que flutua em torno de um valor médio [9].

No que segue, faremos com que a posição da fronteira flutue ao redor de um valor médio. Com o objetivo de implementar esse procedimento, vamos primeiro considerar que a placa está localizada em $x = q$. Neste caso, é fácil concluir que Eq. (4.35) é escrita como

$$E_k = -\frac{g^2}{8\pi m} \ln \left[\frac{4(x-q)^2}{t^2 - 4(x-q)^2} \right]^2. \quad (4.51)$$

Observe que as divergências encontram-se agora em $x = q$ e $t = 2(x - q)$.

Vamos assumir que q é uma variável randômica descrita por uma distribuição de probabilidade. Seja, pois,

$$q = \bar{q}(1 + \epsilon), \quad (4.52)$$

onde ϵ é descrita por uma distribuição gaussiana:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\epsilon^2/2\sigma^2}, \quad (4.53)$$

sendo σ uma constante.

Note que a incerteza em ϵ é dada por:

$$(\Delta\epsilon)^2 = \langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2. \quad (4.54)$$

Mas para $\langle \epsilon \rangle$ temos

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon = 0 \quad (4.55)$$

e $\langle \epsilon^2 \rangle$ fica

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon^2 f(\epsilon) d\epsilon = \sigma^2. \quad (4.56)$$

Então, Eq. (4.54) resulta em

$$\Delta\epsilon = \sigma. \quad (4.57)$$

Assim, σ está relacionada à largura da gaussiana.

Ainda, para o valor esperado $\langle q \rangle$ temos

$$\langle q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} q f(\epsilon) d\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}(1 + \epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = \bar{q}. \quad (4.58)$$

A fim de lidar com quantidades adimensionais vamos definir as coordenadas (adimensionais) de tempo e posição como

$$\theta \doteq \frac{t}{2\bar{q}}, \quad \zeta \doteq \frac{x}{\bar{q}} - 1, \quad (4.59)$$

respectivamente.

Em termos dessas novas variáveis e utilizando o fato de que $q = \bar{q}(1 + \epsilon)$ a energia dada em Eq. (4.51) é escrita da seguinte forma:

$$E_k = -\frac{g^2}{8\pi m} \ln \left[\frac{(\zeta - \epsilon)^2}{(\theta - \zeta + \epsilon)(\theta + \zeta - \epsilon)} \right]^2 \quad (4.60a)$$

$$= -\frac{g^2}{8\pi m} [2 \ln(\zeta - \epsilon)^2 - \ln(\theta - \zeta + \epsilon)^2 - \ln(\theta + \zeta - \epsilon)^2]. \quad (4.60b)$$

Nosso objetivo é eliminar as divergências que aparecem em $\zeta = 0$ e em $\zeta = \theta$, ou seja, em $x = \bar{q}$ e $t = 2(x - \bar{q})$.

Agora, a energia cinética é escrita em termos da variável randômica ϵ . Seu valor esperado é dado por

$$\overline{\langle E_k \rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} E_k f(\epsilon) d\epsilon. \quad (4.61)$$

Portanto, substituindo Eqs. (4.53) e (4.60b) em Eq. (4.61), o valor médio da energia é escrito como

$$\begin{aligned} \overline{\langle E_k \rangle} = & -\frac{g^2}{8\pi m \sqrt{2\pi}\sigma} \left[2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon^2/2\sigma^2} \ln(\zeta - \epsilon)^2 d\epsilon - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon^2/2\sigma^2} \ln(\theta - \zeta + \epsilon)^2 d\epsilon \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon^2/2\sigma^2} \ln(\theta + \zeta - \epsilon)^2 d\epsilon \right]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Ressaltamos que o procedimento de flutuação pode ser entendido como uma média sobre um *ensemble* de sistemas onde a posição da placa pode ocupar qualquer valor descrito pela função distribuição de probabilidade $f(\epsilon)$.

Seja a integral

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon^2/2\sigma^2} \ln(\zeta - \epsilon)^2 d\epsilon. \quad (4.63)$$

Fazendo a mudança de variável $y = \zeta - \epsilon$, a integração I_1 fica dada por

$$I_1 = e^{-\zeta^2/2\sigma^2} \int_{\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma^2 + \zeta y/\sigma^2} \ln y^2 dy. \quad (4.64)$$

Com o auxílio do software Mathematica obtemos o seguinte resultado para I_1 :

$$I_1 = -\sqrt{2\pi}\sigma \left\{ \gamma + \ln 2 - 2 \ln \sigma + \Phi^{(1,0,0)} \left(0, \frac{1}{2}; -\frac{\zeta^2}{2\sigma^2} \right) \right\}, \quad (4.65)$$

sendo γ a constante de Euler [23] e $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ a chamada função hipergeométrica confluyente [24], cuja representação em séries pode ser dada por

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < 0, \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (4.66)$$

$$(\lambda)_0 = 1; \quad (\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda + 1) \dots (\lambda + k - 1), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.67)$$

Então,

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\gamma(\gamma + 1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{\gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)} \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (4.68)$$

Ainda, a notação $\Phi^{(1,0,0)}(\alpha, \gamma; z)$ refere-se à derivada da função hipergeométrica confluyente com relação ao primeiro parâmetro, ou seja, com relação a α . No nosso caso, por exemplo,

$$\Phi^{(1,0,0)} \left(0, \frac{1}{2}; -\frac{\zeta^2}{2\sigma^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi \left(x, \frac{1}{2}; -\frac{\zeta^2}{2\sigma^2} \right) \right]_{x=0}. \quad (4.69)$$

Do mesmo modo, definindo as integrais

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon^2/2\sigma^2} \ln(\theta - \zeta + \epsilon)^2 d\epsilon, \quad (4.70a)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon^2/2\sigma^2} \ln(\theta + \zeta - \epsilon)^2 d\epsilon, \quad (4.70b)$$

e fazendo em I_2 a mudança de variável $y = \theta - \zeta + \epsilon$ e em I_3 a mudança $y = \theta + \zeta - \epsilon$ vamos obter os seguintes resultados:

$$I_2 = e^{-(\theta-\zeta)^2/2\sigma^2} \int_{\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma^2 + (\theta-\zeta)y/\sigma^2} \ln y^2 dy \quad (4.71a)$$

$$= \sqrt{2\pi}\sigma \left\{ \gamma + \ln 2 - 2 \ln \sigma + \Phi^{(1,0,0)} \left(0, \frac{1}{2}; -\frac{(\zeta - \theta)^2}{2\sigma^2} \right) \right\}, \quad (4.71b)$$

$$I_3 = e^{-(\theta+\zeta)^2/2\sigma^2} \int_{\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma^2 + (\theta+\zeta)y/\sigma^2} \ln y^2 dy \quad (4.71c)$$

$$= \sqrt{2\pi}\sigma \left\{ \gamma + \ln 2 - 2 \ln \sigma + \Phi^{(1,0,0)} \left(0, \frac{1}{2}; -\frac{(\zeta + \theta)^2}{2\sigma^2} \right) \right\}. \quad (4.71d)$$

Dos resultados obtidos em Eqs. (4.65), (4.71b) e (4.71d), concluimos que o valor esperado da energia cinética é dado por

$$\begin{aligned}\overline{\langle E_k \rangle} &= -\frac{g^2}{8\pi m\sqrt{2\pi\sigma}} (2I_1 - I_2 - I_3) \\ &= -\frac{g^2}{8\pi m} \left\{ -2\Phi^{(1,0,0)} \left[0, \frac{1}{2}; -\frac{\zeta^2}{2\sigma^2} \right] + \Phi^{(1,0,0)} \left[0, \frac{1}{2}; -\frac{(\zeta - \theta)^2}{2\sigma^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \Phi^{(1,0,0)} \left[0, \frac{1}{2}; -\frac{(\zeta + \theta)^2}{2\sigma^2} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (4.72)$$

Ou, ainda, utilizando a identidade [24],

$$\Phi^{(1,0,0)} \left(0, \frac{1}{2}; z \right) = \sqrt{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k\Gamma(1/2 + k)} = 2z {}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; z \right), \quad (4.73)$$

sendo

$${}_2F_2(\alpha_1, \alpha_2; \gamma_1, \gamma_2; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k (\alpha_2)_k}{(\gamma_1)_k (\gamma_2)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (4.74)$$

as chamadas funções hipergeométricas generalizadas, Eq. (4.72) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\overline{\langle E_k \rangle} &= -\frac{g^2}{8\pi m\sigma^2} \left\{ 2\zeta^2 {}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; -\frac{\zeta^2}{2\sigma^2} \right) - (\zeta - \theta)^2 {}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; -\frac{(\zeta - \theta)^2}{2\sigma^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - (\zeta + \theta)^2 {}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; -\frac{(\zeta + \theta)^2}{2\sigma^2} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (4.75)$$

Observe que retornar ao caso em que a placa encontra-se na origem não é algo imediato. Para tal devemos substituir

$$x \rightarrow x + \bar{q}, \quad \sigma \rightarrow \frac{\sigma}{\bar{q}}, \quad (4.76)$$

já que definimos nossa variável randômica ϵ como adimensional. Assim, em termos das coordenadas originais x e t Eq. (4.75), para o caso em que a placa encontra-se na origem, fica dada por

$$\begin{aligned}\overline{\langle E_k \rangle}_0 &= -\frac{g^2}{8\pi m\sigma^2} \left\{ 2x^2 {}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) - \frac{1}{4}(t - 2x)^2 {}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; -\frac{(t - 2x)^2}{8\sigma^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4}(t + 2x)^2 {}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; -\frac{(t + 2x)^2}{8\sigma^2} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (4.77)$$

Vamos agora analisar o comportamento da energia cinética $\overline{\langle E_k \rangle}$ obtida em Eq. (4.75).

Primeiramente vamos expandir Eq. (4.75) em torno de $\sigma \rightarrow 0$. Note que [24]

$$z {}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; -z \right) \approx \frac{\gamma}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln z, \quad z \rightarrow \infty. \quad (4.78)$$

Então, utilizando Eq. (4.78), nós obtemos que no limite $\sigma \rightarrow 0$ Eq. (4.75) fica dada por

$$\begin{aligned} \overline{\langle E_k \rangle}_{\sigma \rightarrow 0} \approx & -\frac{g^2}{4\pi m} \left\{ 2 \left(\frac{\gamma}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta^2}{2\sigma^2} \right) - \left[\frac{\gamma}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{(\zeta - \theta)^2}{2\sigma^2} \right] \right. \\ & \left. - \left[\frac{\gamma}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{(\zeta + \theta)^2}{2\sigma^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.79)$$

ou ainda,

$$\overline{\langle E_k \rangle}_{\sigma \rightarrow 0} \approx -\frac{g^2}{8\pi m} \ln \left(\frac{\zeta^2}{\theta^2 - \zeta^2} \right)^2 \quad (4.80a)$$

$$= -\frac{g^2}{8\pi m} \ln \left[\frac{4(x - \bar{q})^2}{t^2 - 4(x - \bar{q})^2} \right]^2, \quad (4.80b)$$

que se reduz à Eq. (4.51), ou seja, se reduz ao que foi obtido para a energia no caso sem flutuação, conforme era de se esperar. Quando $\sigma \rightarrow 0$ recuperamos o caso de uma fronteira com posição fixa.

Para $\zeta \rightarrow 0$, o que significa $x \rightarrow \bar{q}$, Eq. (4.75) se reduz a

$$\overline{\langle E_k \rangle}_{\zeta \rightarrow 0} = \frac{g^2}{4\pi m \sigma^2} \theta^2 {}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; -\frac{\theta^2}{2\sigma^2} \right), \quad (4.81)$$

que é uma função regular de t , conforme nos mostra Fig. (4.5).

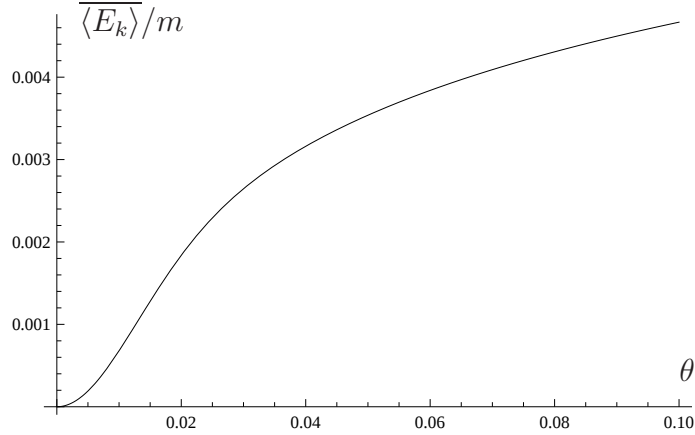


Figura 4.5: *Comportamento, em função do tempo, da energia cinética de uma partícula escalar localizada em x , na presença de uma fronteira refletora flutuante cuja posição média é $\bar{q}$, no limite em que $x \rightarrow \bar{q}$, com $g/m = 0,1$ e $\sigma = 0,01$.*

Então, como vemos, a divergência que estava presente na energia em Eq. (4.51) no ponto $x = q$ foi regularizada com a introdução da flutuação.

A segunda divergência ocorria em $\theta = \zeta$, ou seja, $t = 2(x - \bar{q})$. Para este caso, Eq. (4.75) se reduz a

$$\overline{\langle E_k \rangle}_{\zeta = \theta} = \frac{g^2}{4\pi m \sigma^2} \zeta^2 \left\{ {}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; -\frac{2\zeta^2}{\sigma^2} \right) - {}_2F_2 \left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; -\frac{\zeta^2}{2\sigma^2} \right) \right\}, \quad (4.82)$$

que é uma função regular de x . Assim, a divergência presente em $t = 2(x - q)$ também foi regularizada pela flutuação, conforme vemos em Fig. (4.6).

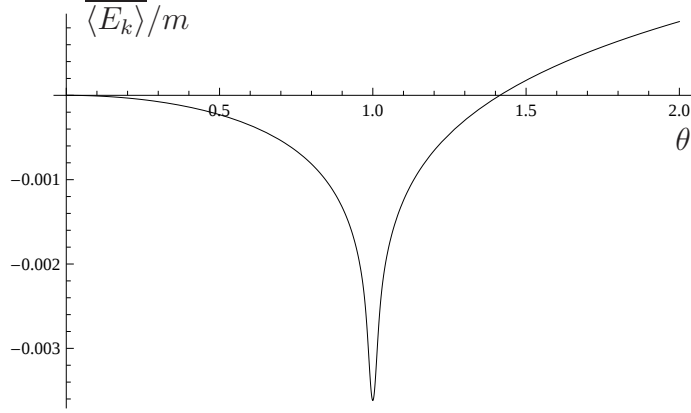


Figura 4.6: Comportamento, em função do tempo, da energia cinética de uma partícula escalar localizada em $x = 2\bar{q}$, na presença de uma fronteira refletora flutuante cuja posição média é $\bar{q}$, com $g/m = 0,1$ e $\sigma = 0,01$. A divergência que apareceria em $\theta = 1$, ou seja, em $t = 2(x - \bar{q}) = 2\bar{q}$, foi regularizada pela introdução da flutuação.

Utilizando novamente Eq. (4.78), vamos tomar o limite $\sigma \rightarrow 0$ em Eq. (4.82). Temos que

$$\overline{\langle E_k \rangle}_{\zeta=\theta; \sigma \rightarrow 0} \approx \frac{g^2}{4\pi m} \left[\frac{\gamma}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{2\zeta^2}{\sigma^2} - 2 \left(\frac{\gamma}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta^2}{2\sigma^2} \right) \right] \quad (4.83a)$$

$$= -\frac{g^2}{8\pi m} \left(\gamma + \ln \frac{\zeta^2}{2} - \ln \sigma^2 \right) \quad (4.83b)$$

$$\approx \frac{g^2}{8\pi m} \ln \sigma^2. \quad (4.83c)$$

Vemos, pois, que a altura do poço em Fig. (4.6) aumenta de forma logarítmica à medida que σ diminui, e é infinita para $\sigma \rightarrow 0$, que corresponde ao caso sem flutuação. Esse resultado condiz com o esperado, já que a divergência em $t = 2(x - q)$ presente em Eq. (4.51) é logarítmica. A Figura (4.7) mostra os resultados obtidos para a energia para o caso de uma fronteira fixa e uma fronteira flutuante, para diferentes valores de σ , o que confirma o comentário anterior.

Ainda, Fig. (4.8) nos dá o comportamento de Eq. (4.82) em função de ζ , que corresponde a uma função regular em $\theta = \zeta$, para qualquer valor de ζ .

Assim, o procedimento de flutuação regularizou as divergências presentes na energia cinética. Conforme foi comprovado, essas divergências deviam-se à idealização da placa.

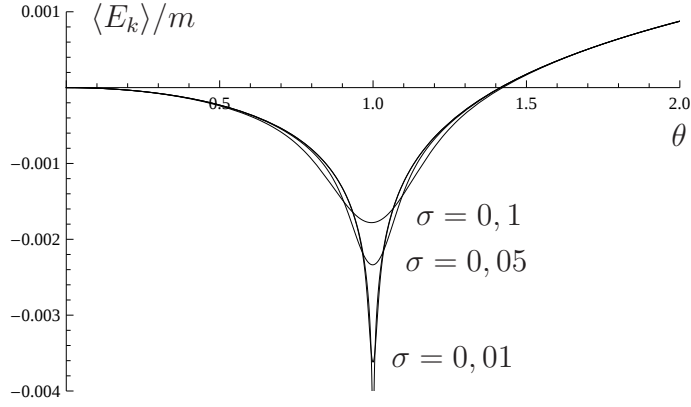


Figura 4.7: Superposição dos resultados encontrados para o comportamento, em função do tempo, da energia cinética de uma partícula escalar localizada em $x = 2\bar{q}$, na presença de uma fronteira refletora fixa localizada em $\bar{q}$, no qual $\overline{\langle E_k \rangle}$ é divergente para $t = 2(x - \bar{q}) = 2\bar{q}$, e na presença de uma fronteira refletora flutuante cuja posição média é $\bar{q}$, no qual a divergência é regularizada, com $g/m = 0,1$. Como podemos observar, σ é o regularizador, a medida que ele diminui a profundidade do poço aumenta.

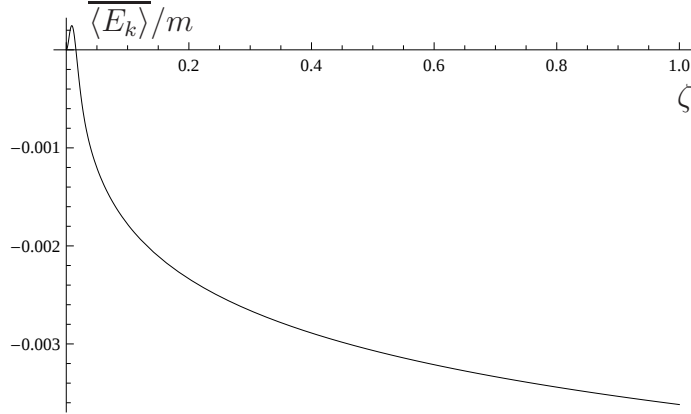


Figura 4.8: Comportamento, em função da posição, da energia cinética de uma partícula escalar na presença de uma fronteira refletora flutuante cuja posição média é $\bar{q}$, para $\theta = \zeta$, com $g/m = 0,1$ e $\sigma = 0,01$, que resulta em uma função regular para qualquer valor de ζ .

4.4 Natureza quântica da partícula

Tanto o quadrado da dispersão na velocidade $(\Delta v)^2$ quanto o quadrado da dispersão na posição da partícula $(\Delta x)^2$ são negativos em determinadas regiões. Assim como no caso eletromagnético, a justificativa para esses resultados é dada considerando-se a natureza quântica da partícula [19].

Consideremos, pois, que a partícula seja descrita por um pacote de ondas gaussiano unidimensional na direção x com posição e momentum medidos simultaneamente, obede-

cendo ao princípio da incerteza. Então, como vimos na Seção (2.2), a incerteza na posição da partícula devido a sua natureza quântica pode ser estimada por

$$(\Delta x_{qm})^2 = \frac{t}{m}. \quad (4.84)$$

Como nosso objetivo é comparar magnitudes, seja

$$(\Delta x)_f^2 = |(\Delta x)^2| = \frac{g^2}{8\pi m^2} \left| (t^2 - 4x^2) \ln \left(\frac{t^2 - 4x^2}{4x^2} \right)^2 - 2t^2 \right|, \quad (4.85)$$

utilizando Eq. (4.47).

Assim, para que a incerteza devido à natureza quântica da partícula Δx_{qm} seja maior que a incerteza devido às flutuações do vácuo Δx_f devemos ter

$$\frac{(\Delta x_f)^2}{(\Delta x_{qm})^2} = \frac{g^2 x^2}{8\pi m t} \left| \left(\frac{t^2}{x^2} - 4 \right) \ln \left(\frac{t^2 - 4x^2}{4x^2} \right)^2 - 2 \frac{t^2}{x^2} \right| < 1. \quad (4.86)$$

Observe que além de Eq. (4.86), devemos satisfazer também a condição dada por Eq. (4.49), ou seja,

$$\frac{g^2}{8\pi m^2} \left| \left(\frac{t^2}{x^2} - 4 \right) \ln \left(\frac{t^2 - 4x^2}{4x^2} \right)^2 - 2 \frac{t^2}{x^2} \right| \ll 1, \quad (4.87)$$

a qual, como vimos, corresponde a $g^2/\pi m^2 \ll 1$ para $t = 2x$.

Podemos notar que tanto Eq. (4.86) quanto Eq. (4.87) são altamente dependentes da razão g/m . Os valores dessas constantes são essenciais para uma estimativa dessas grandezas. Como não temos disponíveis na literatura resultados experimentais relativos à uma partícula escalar elementar carregada não é possível comparar essas grandezas utilizando esse procedimento.

Entretanto, certamente os resultados negativos devem estar associados ao processo de renormalização utilizado, ou seja, ao fato de termos subtraído em nossos cálculos a contribuição do vácuo de Minkowski. Assim, desconsideramos uma parcela maior do que a que foi obtida na presença da placa. A incerteza na posição da partícula na ausência da placa deve ser maior do que na presença desta.

Capítulo 5

Conclusão

Como vimos, as flutuações quânticas provocam movimento browniano em uma partícula teste mesmo no estado de vácuo do campo quântico. O vácuo de Minkowski geralmente nos fornece observáveis que divergem, de modo que não é trivial identificar os efeitos das flutuações quânticas em uma partícula no espaço vazio. Entretanto, pequenas modificações no vácuo de Minkowski nos possibilitam estudar as implicações dessas flutuações no movimento da partícula. A introdução de uma fronteira refletora, ou seja, a imposição de que o campo se anula em um determinado ponto, que se trata de uma modificação simples, já nos proporciona resultados bastante interessantes com relação ao movimento de uma partícula browniana.

Revisamos os resultados obtidos em Ref. [1] sobre o movimento browniano de uma partícula teste carregada na presença do campo eletromagnético quântico. As flutuações do vácuo modificadas pela presença da fronteira refletora, localizada em $z = 0$, provocam um movimento anisotrópico da partícula. O quadrado da incerteza na determinação da velocidade nas direções paralelas à placa, $(\Delta v_x)^2$ e $(\Delta v_y)^2$, difere de $(\Delta v_z)^2$. A presença da placa modifica o movimento da partícula browniana. Além disso, os resultados apresentam divergências que podem estar associadas à idealização da fronteira e à simetria do problema. Uma delas ocorre em $z = 0$, que significa considerarmos que a partícula ocupa a mesma posição que a placa, uma divergência comum em teoria quântica de campos, e a outra em $t = 2z$, que corresponde ao tempo de viagem de ida e volta da luz para percorrer a distância entre a placa e a partícula. Essas divergências aparecem porque nosso sistema é idealizado. Consideramos uma fronteira refletora perfeita, cuja posição é fixa. A princípio, podemos pensar que permitir que a posição dessa placa não seja mais

fixa, mas que flutue em torno de um valor médio, pode regularizar essas divergências que aparecem pela presença da fronteira. Entretanto, levando em conta a simetria do problema, acreditamos que flutuar a placa não solucionaria por completo a questão da divergência. A introdução do procedimento de flutuação deve ser suficiente no caso em que consideramos os efeitos das flutuações do vácuo, modificadas pela presença de fronteiras refletoras em $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, no movimento de uma partícula, ou seja, consideramos a presença de uma fronteira em cada dimensão espacial do problema. Ainda, observamos que os quadrados da incerteza na velocidade e posição nas direções paralelas à placa, ou seja, $(\Delta v_x)^2 = (\Delta v_y)^2$ e $(\Delta x)^2 = (\Delta y)^2$, são negativos. À primeira vista, essa constatação parece algo intrigante. Porém, ao recordarmos que em nossos cálculos, subtraímos a contribuição vinda do vácuo de Minkowski, concluimos que esses valores devem ser maiores no espaço vazio. Subtrair, pois, uma quantidade maior de uma menor nos leva a um resultado negativo. Esse pensamento foi confirmado através de considerações relativas à natureza quântica da partícula. Tratando a partícula como um pacote de ondas gaussiano, obtivemos estimativas que nos permitiram comparar os resultados encontrados na presença da placa com aqueles que obteríamos se esta não estivesse presente.

Propusemo-nos, então, seguindo a mesma abordagem do caso eletromagnético, a discutir em detalhes o modelo simplificado de uma partícula carregada na presença do campo escalar em dimensão $(1+1)$. A presença da fronteira refletora perfeita, localizada em $x = 0$, nos trouxe as mesmas questões anteriores. O quadrado da incerteza na velocidade $(\Delta v)^2$ e, conseqüentemente, a energia cinética E_k , apresentou divergências em $x = 0$ e em $t = 2x$. Conforme esperávamos, a introdução do procedimento de flutuação foi capaz de regularizar essas divergências. Fazendo com que a posição da placa, localizada agora em $x = q$, flutuasse em torno de um valor médio $\bar{q}$ através de uma distribuição de probabilidade, eliminamos a divergência devido à condição de contorno de Dirichlet, ou seja, em $x = \bar{q}$, e a que ocorria em $t = 2(x - \bar{q})$. De fato, as divergências ocorriam devido à idealização do problema. Também para o campo escalar, encontramos que o quadrado da incerteza na velocidade $(\Delta v)^2$ e na posição $(\Delta x)^2$ são quantidades negativas, cuja interpretação já foi discutida no caso eletromagnético. A incerteza na determinação da velocidade e da posição na ausência da placa deve ser maior do que na presença desta. Subtrair a contribuição relativa à ausência da placa teve como consequência a obtenção de resultados negativos.

Por fim, gostaríamos de apontar aspectos que são de nosso interesse em um estudo posterior. Observe que em nossa abordagem não estivemos interessados em consequências relativas à dissipação e ignoramos, assim, a alteração que a presença da partícula provoca no campo quântico. Um tratamento mais abrangente seria incluir a dissipação em nosso problema e estudar que modificações essa inclusão provocará no movimento da partícula. Além disso, poderíamos considerar também que o sistema não seja mais ligado e desligado instantaneamente, e sim que o procedimento de medida seja suave. Outra questão a ser respondida: o procedimento de flutuação seria também capaz de regularizar as divergências nos casos de uma partícula escalar carregada interagindo com o campo escalar em dimensão $(2+1)$ e $(3+1)$? E no caso eletromagnético?

Bibliografia

- [1] Hongwei Yu e L. H. Ford, *Phys. Rev. D*, **70**, 065009 (2004).
- [2] R. Brown, *Philos. Mag.*, **4**, 161 (1828).
- [3] A. Einstein, *Ann. Physik*, **17**, 549 (1905).
- [4] K. Huang, *Introduction to Statistical Physics*, Taylor & Francis, London and New York (2002).
- [5] G. Gour and L. Sriramkumar, *Foundations of Physics*, **29**, 1917 (1999).
- [6] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, Pergamon, Oxford (1972).
- [7] Hongwei Yu, Jun Chen e Puxun Wu, *JHEP* **02**, 058 (2006).
- [8] P. W. Milloni, *The Quantum Vacuum*, Academic, Boston (1994).
- [9] L. H. Ford e N. F. Svaiter, *Phys. Rev. D*, **58**, 065007 (1998).
- [10] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3^a ed., John Wiley & Sons, New York (1999).
- [11] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, New York (1971).
- [12] P. Roman, *Quantum Field Theory*, Wiley, New York (1962).
- [13] M. E. Peskin e D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts (1996).
- [14] L. S. Brown e G. J. Maclay, *Phys. Rev.*, **184**, 1272 (1969).
- [15] J. H. Vuolo, *Teoria dos Erros*, Edgard Blücher, São Paulo (1992).

- [16] L. H. Ford, M. L. Lyra e N. F. Svaiter, *Phys. Rev. A*, **49**, 1378 (1994).
- [17] M. Seriu e C. H. Wu, *Phys. Rev. A*, **77**, 022107 (2008).
- [18] M. Seriu e C. H. Wu, *Phys. Rev. A*, **80**, 052101 (2009).
- [19] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Lalöe *Quantum Mechanics*, John Wiley, New York (1977).
- [20] N. D. Birrell e P. C. W. Davies , *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, New York (1994).
- [21] G. B. Arfken, H. J. Weber e F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*, Elsevier, (2007).
- [22] E. S. Moreira, Jr., *Aspects of quantum theory in conical backgrounds*, PhD thesis, Queen Mary College, London (1997).
- [23] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Elsevier (2007).
- [24] N. N. Lebedev, *Special Functions and Their Applications*, Dover Publications, (1972).