

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Teoria de Nielsen para Raízes**

**Warley Mendes Batista**

**UNIFEI - ITAJUBÁ**

**Março / 2013**

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Warley Mendes Batista

Teoria de Nielsen para Raízes

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de **Mestre em Ciências em Matemática.**

Área de Concentração: Geometria/Topologia

Orientador: Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille

**Março de 2013**

**Itajubá**

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Warley Mendes Batista

Teoria de Nilsen para Raízes

Dissertação aprovada por banca examinadora em 04 de março de 2013, conferido ao autor o título de **Mestre em Ciências em Matemática.**

**Banca examinadora:**

Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille

Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto

Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

**Itajubá**

**Março de 2013**

*Dedico este trabalho a meus queridos pais, Luciano e Maria, que sempre me incentivaram a buscar meus objetivos, e a minha esposa Érida, cujo carinho me foi de grande inspiração.*

# Agradecimentos

A Deus pela vida, por ter me dado forças para superar as dificuldades e assim realizar este sonho.

A minha esposa Érida, pelo carinho, companheirismo e apoio nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Luciano e Maria, e a meus irmãos Rodrigo e Luciana, pelo carinho e amor sempre presentes em minha vida.

Aos meus familiares e amigos que sempre me apoiaram e torceram pelo meu sucesso.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille, pelos ensinamentos que me proporcionou e pelas dicas valiosas que possibilitaram a realização deste trabalho.

Aos professores do curso de ciências exatas e biológicas da FACIC (em particular, ao Prof. Newton da Fonseca Horta que me fez acreditar que poderia seguir meus estudos em matemática), por terem despertado em mim a vontade de continuar buscando meus objetivos.

Aos professores do departamento de matemática da UNIMONTES (em particular, Rosivaldo, Sebastião e Valdomiro), pela amizade e pela participação na construção do meu conhecimento.

Aos professores do departamento de matemática da UNIFEI (em particular, Alexander, Antônio Fernandes, Jacson, Luis Fernando, Mariza e Rick), pela amizade, pelos conhecimentos e atenção.

Aos meus colegas de mestrado, Adriano Braga, Alexandre (Limoeiro), Antônio Melo, Edson (Pelé), Fernando Guimarães, Fernando Félix, Filipe, Franco, Giancarlo, Hugo, Jarne, Luiz Fernando, Paulo Henrique (PH), Tiago Ribeiro e Vanessa, cuja convivência me foi muito enriquecedora.

Aos amigos de Itajubá, pela amizade e convívio.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Obrigado a todos!

**Warley Mendes Batista**

*“Muitas vezes uma ideia matemática deve viver sua própria vida, existindo como que num limbo, sendo desdobrada e discutida em si mesma, como um objeto puramente matemático, até que seus segredos íntimos sejam desvendados e sua significância física seja percebida.”*

*Ian Stewart*

# Resumo

Apresentamos um estudo da Teoria de Nielsen para Raízes desde seus primeiros conceitos até seus principais problemas e resultados. Iniciamos com a apresentação da teoria em seu aspecto mais amplo e, posteriormente, nos concentramos no estudo de aplicações entre variedades compactas de mesma dimensão, contexto em que se demonstram os Teoremas de Hopf, os resultados principais apresentados neste trabalho.

**Palavras-chave:** Número de Nielsen para raízes, número de Reidemeister, índice de raízes, grau absoluto.

# Abstract

We present a study of the Nielsen Root Theory since its early concepts until its main problems and results. We start presenting the theory in its more general aspect and so we focus on the study of maps between compact manifolds of the same dimension, approach in which it are proved the Hopf Theorems, the main results presented in this text.

**Keywords and phrases.** Nielsen root number, Reidemeister number, root index, absolute degree.

# Lista de Figuras

1.1	Um exemplo em que vale a desigualdade estrita $N(f, y_0) < MR(f, y_0)$ . . . . .	13
1.2	Aplicações da figura oito no toro . . . . .	22
2.1	Aplicações da figura oito em $S^1$ . . . . .	38
2.2	$MR(f, y_0)$ não é um invariante por tipo de homotopia . . . . .	40
2.3	Aplicações do anel no anel pinçado . . . . .	41
2.4	Um 2-complexo simplicial . . . . .	43
2.5	Um 2-complexo obtido colando-se três toros . . . . .	45
3.1	O contra-exemplo de Lin . . . . .	50
3.2	O recobrimento duplo orientado de $\mathbb{K}$ . . . . .	53
3.3	Esquema da prova do Lema 3.29 . . . . .	66
3.4	Esquema da prova do Lema 3.30 . . . . .	67

# Índice

<b>Agradecimentos</b> . . . . .	ii
<b>Resumo</b> . . . . .	iv
<b>Abstract</b> . . . . .	v
<b>Lista de Figuras</b> . . . . .	vi
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 O número de Nielsen para raízes e o número de Reidemeister</b>	<b>5</b>
1.1 O número de Nielsen . . . . .	5
1.2 O número de Reidemeister . . . . .	14
1.3 Exemplos . . . . .	21
<b>2 Teoria de Índice de Raízes</b>	<b>23</b>
2.1 Índices para raízes . . . . .	23
2.2 Construção de índices para raízes . . . . .	26
2.3 Exemplos . . . . .	37
<b>3 Teoria do Grau de Hopf</b>	<b>47</b>
3.1 Os Teoremas de Hopf . . . . .	47
3.2 Multiplicidade e grau absoluto . . . . .	51
3.3 Pré-requisitos para a prova dos Teoremas de Hopf . . . . .	64
3.4 Prova dos Teoremas de Hopf . . . . .	71
<b>Bibliografia</b>	<b>78</b>

# Introdução

Os primeiros grandes teoremas topológicos de pontos fixos e coincidências, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, o Teorema de Borsuk-Ulam e o Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz, se utilizam de métodos homológicos que implicam, sobre as devidas hipóteses, na existência, e somente na existência, de pontos fixos ou coincidências, conforme o caso. Mas estes teoremas não conduzem à qualquer estimativa sobre o número de pontos fixos ou coincidências. Em 1927, J. Nielsen iniciou o que hoje chamamos a Teoria de Nielsen para Pontos Fixos, uma teoria que faz uso de métodos homotópicos para apresentar estimativas do número de pontos fixos não somente de uma dada aplicação, mas de qualquer aplicação a ela homotópica. Esta teoria forneceu, em particular, resultados que servem como uma espécie de recíproca ao Teorema de Lefschetz. O sucesso no tratamento de pontos fixos logo se estendeu para o estudo de coincidências e, por fim, a uma teoria completa de raízes, conhecida atualmente como Teoria de Nielsen para Raízes. Este trabalho faz uma apresentação desta teoria desde seus primeiros conceitos até seus principais problemas e resultados. Iniciamos com a apresentação da teoria em seu aspecto mais amplo e, posteriormente, nos concentramos no estudo de aplicações entre variedades compactas de mesma dimensão, contexto em que se demonstram os Teoremas de Hopf, os resultados principais apresentados neste trabalho. Todo o trabalho é baseado principalmente em [1], uma obra recente que faz uma revisão de toda a teoria que passamos a descrever de maneira introdutória.

Dados uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  entre espaços topológicos (bem comportados) e um ponto  $y_0 \in Y$ , uma *raiz* de  $f$  em  $y_0$  é um ponto  $x \in X$  tal que  $f(x) = y_0$ . Um dos problemas centrais da teoria topológica de raízes é encontrar um limite inferior para o número de raízes de  $f$  em  $y_0$ . Estendendo o problema à classe de homotopia de  $f$ , isto nos leva a definir o chamado *número mínimo de raízes* de  $f$ , denotado por  $MR(f, y_0)$ , como sendo a cardinalidade mínima de  $f_1^{-1}(y_0)$ , onde o mínimo é tomado sobre todas as aplicações  $f_1$  homotópicas a  $f$ . Em símbolos

$$MR(f, y_0) = \min_{f_1 \simeq f} \#f_1^{-1}(y_0).$$

Note que, definido desta forma,  $MR(f, y_0)$  é invariante por homotopia e qualquer aplicação homotópica a  $f$  tem pelo menos  $MR(f, y_0)$  raízes em  $y_0$ .

É claro que, em geral, gostaríamos de desenvolver técnicas capazes de calcular  $MR(f, y_0)$ . No entanto, a definição deste número não inspira meios para isso. Para resolver esse impasse, sempre que possível, nos valem da Teoria de Nielsen que toma as seguintes providências acerca deste problema: Primeiro agrupamos as raízes de  $f$  em classes, chamadas as *classes de Nielsen* de  $f$ , e então classificamos essas classes em *essenciais* ou *inessenciais*. Grosso modo, as classes inessenciais são aquelas cujas raízes podem ser todas aniquiladas deformando-se  $f$  por homotopia; as classes essenciais são aquelas que permanecem com pelo menos uma raiz após qualquer deformação de  $f$  por homotopia. O número de classes essenciais é chamado o *número de Nielsen* para raízes de  $f$  em  $y_0$  (que chamaremos mais simplesmente de o número de Nielsen de  $f$ , quando não houver dúvida ou não importar o ponto  $y_0$ ) e é denotado por  $N(f, y_0)$ . A partição de  $f^{-1}(y_0)$  em classes é definida de tal modo que o número de Nielsen seja invariante por homotopias de  $f$  e seja um limitante inferior para o número mínimo de raízes de  $f$ , ou seja,

$$N(f, y_0) \leq MR(f, y_0).$$

Apresentamos toda a construção até a prova desta desigualdade no início do Capítulo 1. Esta desigualdade nos dá uma primeira estimativa para o número  $MR(f, y_0)$ , mas não resolve o problema. Aliás, isto nos revela dois novos problemas. O primeiro deles se refere ao cálculo do número de Nielsen  $N(f, y_0)$ , uma tarefa bastante árdua, em geral. O segundo, saber decidir quando a desigualdade  $N(f, y_0) \leq MR(f, y_0)$  se reduz a uma igualdade ou a uma desigualdade estrita; este é o problema central da Teoria de Nielsen para Raízes.

O problema envolvendo o cálculo do número de Nielsen é tratado nos Capítulos 1 e 2 por duas vias. No Capítulo 1 apresentamos os conceitos de classes de Nielsen em termos dos assim chamados *recobrimento de Hopf* e *levantamento de Hopf* de uma aplicação. Esta formulação possibilita o uso de resultados da teoria de espaços de recobrimento para relacionar o número de Nielsen ao assim chamado *número de Reidemeister* de uma aplicação, um número com definição bastante algébrica e de manipulação mais simples. No Capítulo 2 apresentamos a Teoria de Índice para raízes. Iniciamos definindo a noção de par admissível e fornecendo (através de um teorema) alguns exemplos de pares admissíveis. Em seguida, definimos axiomáticamente o que se espera de um índice de raízes e apresentamos alguns resultados que relacionam um tal índice à teoria de Nielsen para raízes. Feito isso, usamos a teoria de (co)homologia para construir índices de raízes que traduzam a (in)essencialidade de uma classe de Nielsen em termos

de números passíveis de cálculo, o que possibilita, em boas situações, o cálculo também do número de Nielsen.

O problema envolvendo a desigualdade  $N(f, y_0) \leq MR(f, y_0)$  é tratado no Capítulo 3 num contexto mais específico; tratamos apenas de aplicações entre variedades compactas de mesma dimensão. Os resultados principais deste capítulo podem ser considerados parte da chamada Teoria do Grau de Hopf e serão chamados, neste trabalho, de os Teoremas de Hopf, por serem originalmente da autoria de H. Hopf [2]. Para chegar a prova destes teoremas, vários resultados preliminares e conceitos serão trabalhados, sendo os principais conceitos a *transversalidade*, a *multiplicidade* e o *grau absoluto* de uma aplicação. O 1º Teorema de Hopf (Teorema 3.4) relaciona o número mínimo de raízes de uma aplicação  $f$  (entre  $n$ -variedades compactas) ao grau absoluto  $\mathcal{A}(f)$  desta aplicação. O 2º Teorema de Hopf (Teorema 3.6) afirma que toda aplicação  $f$  entre  $n$ -variedades compactas, com  $n \neq 2$ , é homotópica a uma aplicação tendo exatamente  $N(f, y_0)$  raízes, o que implica na identidade  $N(f, y_0) = MR(f, y_0)$ . O caso  $n = 2$  é patológico e será devidamente exemplificado.

Antes de passarmos ao primeiro capítulo, gostaríamos de fazer referência à terminologia e pré-requisitos básicos para a leitura do texto.

Assumimos o prévio domínio da teoria de grupo fundamental e espaços de recobrimento, ao nível da referência [3]. O mesmo assumimos com relação a teoria básica de homologia e cohomologia, incluindo a teoria de orientação de variedades topológicas. Boas referências neste caso são [4] e [5]. Resultados específicos destas teorias utilizados no texto de forma explícita serão devidamente citados sempre que possível e necessário for.

Salvo indicação em contrário, todos os espaços topológicos  $X$  e  $Y$  dados a priori serão considerados normais, conexos, localmente conexos por caminhos (e portanto conexos por caminho) e semilocalmente simplesmente conexos. Todas as variedades são topológicas (espaços paracompactos, localmente euclidianos e sem bordo), tudo conforme a terminologia de [3]. Também, todas as aplicações dadas a priori são consideradas contínuas.

O intervalo unitário fechado  $[0, 1]$  será denotado por  $I$ , o espaço euclidiano  $n$ -dimensional por  $\mathbb{R}^n$ , os números complexos por  $\mathbb{C}$ , o grupo aditivo dos inteiros por  $\mathbb{Z}$  e a  $n$ -bola unitária fechada por  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ . Um subespaço  $B \subset X$  será chamado uma  $n$ -bola se for homeomorfo a  $B^n$ .

Para um dado caminho  $\alpha : I \rightarrow X$  num espaço  $X$ , a notação  $[\alpha]$  indica sua classe de homotopia com pontos finais fixados. A justaposição (ou produto) de dois caminhos  $\alpha$  e  $\beta$ , quando

definida, será denotada por  $\alpha\beta$ . O caminho reverso de  $\alpha$  será denotado por  $\alpha^{-1}$ . Para dizer que dois caminhos  $\alpha$  e  $\beta$  são homotópicos com pontos finais fixados escrevemos  $\alpha \simeq_p \beta$ .

Consideramos uma homotopia como uma coleção  $\{h_t : X \rightarrow Y\}$  de aplicações indexadas pelo intervalo unitário tal que  $(x, t) \mapsto h_t(x)$  é uma aplicação contínua de  $X \times I$  em  $Y$ . Usualmente escrevemos uma tal homotopia simplesmente como  $\{h_t : X \rightarrow Y\}$  ou  $\{h_t\}$ . Para dizer que aplicações  $f, g : X \rightarrow Y$  são homotópicas usamos a notação  $f \simeq g$ .

Uma aplicação de pares  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  define uma aplicação  $f' : (X', A') \rightarrow (Y', B')$  se as duas aplicações são as mesmas exceto por modificações do domínio e contradomínio; mais precisamente, se  $X' \subset X$ ,  $f(X') \subset Y'$ ,  $f(A') \subset B'$  e  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x \in X'$ .

O homomorfismo induzido em grupos fundamentais por uma aplicação  $f$  é denotado por  $f_{\#}$  e o homomorfismo induzido em homologia (respectivamente em cohomologia) é denotado por  $f_*$  (respectivamente por  $f^*$ ). Para indicar o homomorfismo induzido numa dimensão específica da homologia usaremos às vezes a notação  $f_{*n}$ .

Se  $\phi : G \rightarrow H$  é um homomorfismo de grupos, vamos nos referir ao conjunto  $H/\phi(G)$  das classes laterais à esquerda de  $\phi(G)$  em  $H$  como o  $\text{coker}(\phi)$ . Quando  $\phi(G)$  é normal em  $H$ , este conjunto, munido do produto óbvio, torna-se o chamado grupo quociente de  $H$  por  $\phi(G)$ . Usamos  $\#\text{coker}(\phi)$  para denotar a cardinalidade de  $\text{coker}(\phi)$ . Mais geralmente,  $\#S$  denota a cardinalidade de  $S$  para qualquer conjunto  $S$ .

# Capítulo 1

## O número de Nielsen para raízes e o número de Reidemeister

Neste primeiro capítulo fundamental do texto, apresentamos as definições principais da teoria a ser tratada. Definimos as chamadas classes de Nielsen para raízes (que abreviaremos por classes de Nielsen), a essencialidade de uma classe de Nielsen e o número de Nielsen. Introduzimos também os conceitos de recobrimento e levantamento de Hopf para uma aplicação, que estão fortemente relacionados ao conceito de classes de Nielsen. Por fim, definimos o número de Reidemeister que será muito utilizado para se calcular o número de Nielsen.

### 1.1 O número de Nielsen

**Definição 1.1** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação e  $y_0 \in Y$  um ponto. Uma raiz  $x_0$  de  $f$  em  $y_0$  é *f-equivalente* a outra raiz  $x_1$  de  $f$  em  $y_0$  se existe um caminho  $\gamma$  em  $X$  de  $x_0$  para  $x_1$  tal que o laço  $f \circ \gamma$  em  $y_0$  é homotópico com pontos finais fixados ao caminho constante em  $y_0$ . Esta relação é uma relação de equivalência (conforme Teorema 1.4), e as classes de equivalência por ela determinadas são chamadas *classes de Nielsen* de  $f$  em  $y_0$ . O conjunto dessas classes de equivalência é denotado por  $f^{-1}(y_0)/NR$  e constitui uma partição do conjunto  $f^{-1}(y_0)$  de todas as raízes de  $f$  em  $y_0$ .

Dada uma homotopia  $\{f_t : X \rightarrow Y\}$ , estabelecemos uma maneira de relacionar as raízes da aplicação  $f_0$ , do início da homotopia, com as raízes da aplicação  $f_1$ , do final da homotopia. Consideramos a seguinte definição que generaliza a anterior.

**Definição 1.2** Seja  $\{f_t : X \rightarrow Y\}$  uma homotopia e  $y_0 \in Y$  um ponto. Diz-se que uma raiz  $x_0$  de  $f_0$  em  $y_0$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a uma raiz  $x_1$  de  $f_1$  em  $y_0$  se existe um caminho  $\gamma$  em  $X$  de  $x_0$  para  $x_1$  tal que o laço  $\{f_t \circ \gamma(t)\}$  em  $y_0$  é homotópico com pontos finais fixados ao caminho constante em  $y_0$ .

Nesta definição,  $\{f_t \circ \gamma(t)\}$  indica o laço  $I \rightarrow Y$  definido por  $t \mapsto f_t(\gamma(t))$ .

Note que uma raiz  $x_0$  de  $f : X \rightarrow Y$  é  $f$ -equivalente a outra raiz  $x_1$  de  $f$  se, e somente se,  $x_0$  está relacionada a  $x_1$  pela homotopia constante em  $f$ .

Mostraremos a seguir que se  $\{f_t\}$  é uma homotopia e uma raiz em uma classe de Nielsen  $\alpha$  de  $f_0$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a uma raiz da classe de Nielsen  $\beta$  de  $f_1$ , então toda raiz em  $\alpha$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a toda raiz em  $\beta$ . Assim, a  $\{f_t\}$ -relação entre raízes induz uma relação, um-a-um entre as classes de raízes de  $f_0$  e  $f_1$ .

**Definição 1.3** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação. Segue do Teorema 82.1 (Teorema da existência de recobrimentos) página 495 de [3] e do Lema 79.1 (Lema geral do levantamento) página 478 de [3] que existem um recobrimento  $\hat{q} : \hat{Y} \rightarrow Y$  e um levantamento  $\hat{f} : X \rightarrow \hat{Y}$  de  $f$  através de  $\hat{q}$  com a propriedade que para qualquer  $x \in X$  a imagem do grupo fundamental  $\pi_1(\hat{Y}, \hat{f}(x))$  pelo homomorfismo induzido por  $\hat{q}$  é a mesma que a imagem de  $\pi_1(X, x)$  pelo homomorfismo induzido por  $f$ ; em símbolos

$$f_{\#}(\pi_1(X, x)) = \hat{q}_{\#}(\pi_1(\hat{Y}, \hat{f}(x))).$$

Chamamos  $\hat{f}$  um *levantamento de Hopf* e  $\hat{q}$  um *recobrimento de Hopf* para  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} & & \hat{Y} \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow \hat{q} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Segue do Teorema 79.2 pág 480 de [3] que este recobrimento é único a menos de uma equivalência de espaços de recobrimento. Além disso, segue do Lema 79.1 pág 478 de [3] que dado qualquer  $x \in X$ , existe para cada  $\hat{y} \in \hat{q}^{-1}(f(x)) \subset \hat{Y}$ , um único levantamento  $\hat{f}$  de  $f$  ao longo de  $\hat{q}$  tal que  $\hat{f}(x) = \hat{y}$ . Note também que se  $\hat{q} : \hat{Y} \rightarrow Y$  é um recobrimento de Hopf para  $f$ , então ele é um recobrimento de Hopf para qualquer aplicação homotópica a  $f$  que aplique no mesmo ponto que  $f$  o ponto base fixado em  $X$ . (Se este não for o caso, mas sendo  $Y$  conexo por caminhos, é possível realizar um procedimento de mudança de ponto base em  $Y$ ).

Os dois teoremas seguintes estabelecem a correlação dos conceitos de recobrimento e levantamento de Hopf com o de classes de Nielsen.

**Teorema 1.4** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação e  $y_0 \in Y$ . Seja  $\hat{q} : \hat{Y} \rightarrow Y$  um recobrimento de Hopf para  $f$  e seja  $\hat{f} : X \rightarrow \hat{Y}$  um levantamento de  $f$  através de  $\hat{q}$ . Seja  $\{f_t : X \rightarrow Y\}$  uma homotopia de  $f = f_0$  a  $f_1$  e seja  $\{\hat{f}_t : X \rightarrow \hat{Y}\}$  um levantamento de  $\{f_t\}$  através de  $\hat{q}$ . Então:*

- (1) *Uma raiz  $x_0$  de  $f$  em  $y_0$  é  $f$ -equivalente a outra raiz  $x_1$  de  $f$  em  $y_0$  se, e somente se,  $\hat{f}(x_0) = \hat{f}(x_1)$ .*
- (2) *Consequentemente, a  $f$ -equivalência é uma relação de equivalência, e as classes de equivalência, chamadas as classes de Nielsen, são precisamente aqueles conjuntos não vazios da forma  $\hat{f}^{-1}(\hat{y})$  com  $\hat{y} \in \hat{q}^{-1}(y_0)$ .*
- (3) *Mais geralmente, uma raiz  $x_0$  de  $f = f_0$  em  $y_0$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a uma raiz  $x_1$  de  $f_1$  em  $y_0$  se, e somente se,  $\hat{f}_0(x_0) = \hat{f}_1(x_1)$ .*
- (4) *Consequentemente, as relação de  $\{f_t\}$ -equivalência das raízes de  $f_0$  para as de  $f_1$  induzem uma relação “um-a-um” entre as classes de Nielsen de  $f_0$  em  $y_0$  e as classes de Nielsen de  $f_1$  em  $y_0$ , através da qual uma classe de Nielsen  $\alpha$  de  $f_0$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a uma classe de Nielsen  $\beta$  de  $f_1$  se pelo menos uma (e logo toda) raiz  $x_0$  de  $\alpha$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a pelo menos uma (e logo toda) raiz  $x_1$  de  $\beta$ , e isto acontece se, e somente se,  $\hat{f}_0(\alpha) = \hat{f}_1(\beta)$ .*

Antes de provar o teorema, explicamos as aspas no termo “um-a-um” da sentença (4): Queremos enfatizar que a relação se dá da seguinte maneira: Se uma classe de Nielsen de  $f_0$  está relacionada a alguma classe de Nielsen de  $f_1$ , então esta tal classe de  $f_1$  é única, ou seja, cada classe de Nielsen de  $f_0$  pode estar relacionada a no máximo uma classe de Nielsen de  $f_1$ . É, no entanto, perfeitamente possível que uma classe de Nielsen de  $f_0$  não esteja relacionada a qualquer classe de Nielsen de  $f_1$ . Este fato é a inspiração à Definição 1.7 adiante.

**Prova:**[do Teorema 1.4] Começamos provando o item (3). Primeiro, suponha  $\hat{f}_0(x_0) = \hat{f}_1(x_1)$ . Mostraremos que  $x_0$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a  $x_1$ . Seja  $\gamma$  um caminho em  $X$  de  $x_0$  para  $x_1$ . Então  $\{\hat{f}_t \circ \gamma(t)\}$  é um laço em  $\hat{Y}$  em  $\hat{f}(x_0)$ , pois  $\hat{f}_0 \circ \gamma(0) = \hat{f}_0(x_0) = \hat{f}_1(x_1) = \hat{f}_1 \circ \gamma(1)$ , e ainda temos que  $\hat{q} \circ \hat{f}_0 \circ \gamma(0) = f(x_0) = y_0$ . Assim, a projeção  $\{\hat{q} \circ \hat{f}_t \circ \gamma(t)\} = \{f_t \circ \gamma(t)\}$  é um laço em  $Y$  em  $y_0$ . E portanto, como  $\hat{q}$  é um recobrimento de Hopf para  $f$ , existe um laço  $\beta$  em  $X$  em  $x_0$  tal que  $f_\#([\beta]) = \hat{q}_\#([\{\hat{f}_t \circ \gamma(t)\}])$ . Logo  $[f \circ \beta] = [\{f_t \circ \gamma(t)\}]$ .

Note que  $[(f \circ \beta)^{-1}\{f_t \circ \gamma(t)\}] = [(f \circ \beta)^{-1}][\{f_t \circ \gamma(t)\}] = [f \circ \beta]^{-1}[\{f_t \circ \gamma(t)\}] = [y_0]$ , pois segue do fato de  $[f \circ \beta] = [\{f_t \circ \gamma(t)\}]$  que  $[f \circ \beta]^{-1}[f \circ \beta] = [f \circ \beta]^{-1}[\{f_t \circ \gamma(t)\}]$ . De modo que

$[f \circ \beta]^{-1}[\{f_t \circ \gamma(t)\}] = [y_0]$ . Mas,  $(f \circ \beta)^{-1}\{f_t \circ \gamma(t)\} \simeq \{f_t \circ (\beta^{-1}\gamma)(t)\}$ . Portanto,  $\beta^{-1}\gamma$  é um caminho de  $x_0$  para  $x_1$  tal que  $\{f_t \circ (\beta^{-1}\gamma)(t)\} \simeq y_0$ . Segue que  $x_0$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a  $x_1$ .

Reciprocamente, suponha que  $x_0$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a  $x_1$ . Então existe um caminho  $\gamma$  em  $X$  de  $x_0$  para  $x_1$  tal que  $\{f_t \circ \gamma(t)\} \simeq_p y_0$ . O caminho  $\{\widehat{f}_t \circ \gamma(t)\}$  é um levantamento de  $\{f_t \circ \gamma(t)\}$  através de  $\widehat{q}$ , o caminho  $\widehat{f}_0(y_0)$  é o levantamento do caminho constante em  $y_0 \in Y$  através de  $\widehat{q}$ , e além disso os pontos finais do caminho constante em  $y_0 \in Y$  e do caminho  $\{f_t \circ \gamma(t)\}$  são todos iguais a  $y_0$ . O Teorema 54.3 pág 344 de [3] implica que os caminhos  $\{\widehat{f} \circ e_{x_0}(t)\} = \widehat{f}(x_0)$  e  $\{\widehat{f}_t \circ \alpha(t)\}$  terminam no mesmo ponto  $\widehat{f}(x_0)$ . Portanto  $\widehat{f}_0(x_0) = \widehat{f}_1(x_1)$ .

Vamos mostrar agora que (3) implica (1). De fato: Vimos que uma raiz  $x_0$  de  $f$  em  $y_0$  é  $f$ -equivalente a outra raiz  $x_1$  de  $f$  em  $y_0$  se, e somente se,  $x_0$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a  $x_1$ , onde  $\{f_t\}$  é a homotopia constante em  $f$ . Assim (1) pode ser enunciado da seguinte maneira: Uma raiz  $x_0$  de  $f$  em  $y_0$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a outra raiz  $x_1$  de  $f$  em  $y_0$ , onde  $\{f_t\}$  é a homotopia constante em  $f$  se, e somente se,  $\widehat{f}(x_0) = \widehat{f}(x_1)$ . Mas este é um caso particular de (3).

Agora usaremos (1) para provar (2). Seja  $x$  uma raiz de  $f$  em  $y_0$ . É óbvio que  $\widehat{f}(x) = \widehat{f}(x)$  e segue de (1) que  $x$  é  $f$ -equivalente a si próprio. Sejam  $x_0$  e  $x_1$  raízes de  $f$  em  $y_0$ . Se tivermos  $\widehat{f}(x_0) = \widehat{f}(x_1)$ , então  $\widehat{f}(x_1) = \widehat{f}(x_0)$ . Assim, segue de (1) que se  $x_0$  é  $f$ -equivalente a  $x_1$ , então  $x_1$  é  $f$ -equivalente a  $x_0$ . Sejam  $x_0, x_1$  e  $x_2$  raízes de  $f$  em  $y_0$ . Se  $\widehat{f}(x_0) = \widehat{f}(x_1)$  e  $\widehat{f}(x_1) = \widehat{f}(x_2)$ , então  $\widehat{f}(x_0) = \widehat{f}(x_2)$ , logo se  $x_0$  é  $f$ -equivalente a  $x_1$  e  $x_1$  é  $f$ -equivalente a  $x_2$ , então  $x_0$  é  $f$ -equivalente a  $x_2$ . Portanto,  $f$ -equivalência é uma relação de equivalência. Segue que o conjunto das classes de equivalência constitui uma partição de  $f^{-1}(y_0)$ . Além disso, cada classe é da forma  $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$ , com  $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$ .

Finalmente, provaremos o ítem (4). Seja  $\alpha$  a classe de Nielsen de  $f_0$  contendo  $x_0$  e seja  $\beta$  a classe de Nielsen de  $f_1$  contendo  $x_1$ , com  $x_0$   $\{f_t\}$ -relacionada a  $x_1$ . Suponha que  $x'_0$  seja outra raiz em  $\alpha$ , então segue de (1) que  $\widehat{f}(x'_0) = \widehat{f}(x_0)$ . Como  $x_0$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a  $x_1$ , então  $\widehat{f}(x_0) = \widehat{f}_1(x_1)$ . Logo  $\widehat{f}(x'_0) = \widehat{f}_1(x_1)$ . Analogamente mostra-se que  $\widehat{f}(x_0) = \widehat{f}_1(x'_1)$  para qualquer raiz  $x'_1 \in \beta$ , o que implica  $\widehat{f}(\alpha) = \widehat{f}_1(\beta)$ . Reciprocamente, se  $\widehat{f}(\alpha) = \widehat{f}_1(\beta)$ , então para qualquer raiz  $x'_0$  em  $\alpha$  e qualquer raiz  $x'_1$  em  $\beta$  temos  $\widehat{f}(x'_0) = \widehat{f}_1(x'_1)$ . Portanto qualquer raiz de  $\alpha$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a qualquer raiz de  $\beta$ . ■

**Teorema 1.5** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação e  $y_0 \in Y$ . Então existe uma família  $\{U_\alpha\}$  de conjuntos abertos mutuamente disjuntos, um para cada classe de Nielsen  $\alpha$  de  $f$  em  $y_0$ , tal que  $\alpha \subset U_\alpha$ . Consequentemente, cada classe de Nielsen  $\alpha$  é aberta e fechada em  $f^{-1}(y_0)$ .*

**Prova:** Como  $\widehat{q}$  é um recobrimento,  $y_0$  possui uma vizinhança  $V$  que é uniformemente recoberta por  $\widehat{q}$ . Então podemos escrever  $\widehat{q}^{-1}(V) = \bigcup_{\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)} V_{\widehat{y}}$ , onde cada  $V_{\widehat{y}}$  é uma vizinhança de  $\widehat{y}$  aplicada homeomorficamente por  $\widehat{q}$  sobre  $V$  e a reunião  $\bigcup_{\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)} V_{\widehat{y}}$  é disjunta. Portanto, a coleção  $\{\widehat{f}^{-1}(V_{\widehat{y}}) : \widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0) \text{ e } \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}) \neq \emptyset\}$  é uma coleção de conjuntos abertos em  $X$ , mutuamente disjunta. Além disso, pelo item (2) do Teorema 1.4, cada classe de Nielsen  $\alpha$  é da forma  $\alpha = \widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$ , logo cada  $\alpha \subset \widehat{f}^{-1}(V_{\widehat{y}}) = U_\alpha$ , como desejado. Consequentemente cada classe de Nielsen  $\alpha$  é fechada em  $f^{-1}(y_0)$ , pois  $\alpha = \widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$  para algum  $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0) \subset \widehat{Y}$  e cada  $\{\widehat{y}\}$  é fechado no espaço Hausdorff  $\widehat{Y}$ . Logo  $\alpha$  é fechado em  $X$ . Além disso  $\alpha \subset f^{-1}(y_0)$ , assim  $\alpha = \alpha \cap f^{-1}(y_0)$ , o que implica que  $\alpha$  é fechado em  $f^{-1}(y_0)$ .

E ainda, cada classe  $\alpha$  é aberta em  $f^{-1}(y_0)$ . De fato, pela primeira parte do teorema, se  $\alpha$  é uma classe de Nielsen de  $f$  em  $y_0$ , então  $\alpha \subset U_\alpha \cap f^{-1}(y_0)$  que é aberto em  $f^{-1}(y_0)$ . Basta mostrar que  $U_\alpha \cap f^{-1}(y_0) \subset \alpha$ . Para isto tomemos  $\bar{x} \in U_\alpha \cap f^{-1}(y_0)$ , isto implica que  $\bar{x} \in U_\alpha = f^{-1}(V_{\widehat{y}_*})$  e  $\bar{x} \in f^{-1}(y_0)$ . Como  $\bar{x} \in f^{-1}(y_0)$ , então  $\bar{x} \in (\widehat{q} \circ \widehat{f})^{-1}(y_0) = \widehat{f}^{-1}(\widehat{q}^{-1}(y_0))$ , donde  $\widehat{f}(\bar{x}) = \widehat{y}_*$ . Pois temos que  $\widehat{f}(\bar{x}) \in V_{\widehat{y}_*}$  e o único elemento de  $V_{\widehat{y}_*}$  aplicado em  $y_0$  por  $\widehat{q}$  é  $\widehat{y}_*$ , já que  $\widehat{q}|_{V_{\widehat{y}_*}} : V_{\widehat{y}_*} \rightarrow V$  é um homeomorfismo e  $\widehat{q}(\widehat{y}_*) = y_0$ . Portanto,  $\bar{x} \in \alpha$ . ■

**Corolário 1.6** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação e  $y_0 \in Y$ . Se  $X$  é compacto, então existe apenas um número finito de classes de Nielsen de  $f$  em  $y_0$ .*

**Prova:** Como  $Y$  é Hausdorff, o conjunto unitário  $y_0$  é fechado em  $Y$ . Assim  $f^{-1}(y_0)$  é fechado em  $X$  e, portanto, compacto. Pelo teorema anterior, o conjunto das classes de raízes de  $f$  em  $y_0$  é uma cobertura aberta de  $f^{-1}(y_0)$  que, portanto, admite uma subcobertura finita. Logo, existe apenas um número finito de classes de Nielsen de  $f$  em  $y_0$ . ■

Passamos à definição de classe de Nielsen essencial e inessencial que, como dissemos, está inspirada na relação entre classes enunciada no item (4) do Teorema 1.4.

**Definição 1.7** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação e  $y_0 \in Y$ . Uma raiz de  $f$  em  $y_0$  é *essencial* se para qualquer homotopia  $\{f_t\}$  iniciando em  $f$ , ela está  $\{f_t\}$ -relacionada a uma raiz de  $f_1$  em  $y_0$ . Similarmente, uma classe de Nielsen de  $f$  em  $y_0$  é *essencial* se dada qualquer homotopia  $\{f_t\}$  a partir de  $f$ , ela está  $\{f_t\}$ -relacionada a uma classe de Nielsen de  $f_1$  em  $y_0$ . O número de classes de Nielsen essenciais de  $f$  em  $y_0$  é chamado o *número de Nielsen* para raízes de  $f$  em  $y_0$  e é denotado por*

$$N(f, y_0).$$

Do Teorema 1.4 temos uma descrição óbvia e alternativa de essencialidade de uma classe de Nielsen em termos do levantamento de Hopf da aplicação.

**Teorema 1.8** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação,  $y_0 \in Y$ ,  $\widehat{q} : \widehat{Y} \rightarrow Y$  e  $\widehat{f} : X \rightarrow \widehat{Y}$  um recobrimento e um levantamento de Hopf para  $f$ . Então, para qualquer  $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$ , o conjunto  $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$  é uma classe de Nielsen essencial se, e somente se,  $\widehat{f}_1^{-1}(\widehat{y}) \neq \emptyset$  para qualquer homotopia  $\{\widehat{f}_t\}$  iniciando em  $\widehat{f}$ .*

A seguir, o primeiro dos teoremas fundamentais deste texto:

**Teorema 1.9** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação e  $y_0 \in Y$ . Então  $N(f, y_0)$  é um invariante homotópico de  $f$  e é um limite inferior para o número de classes de Nielsen de  $f'$  em  $y_0$ , entre todas as aplicações  $f'$  homotópicas a  $f$ . Consequentemente,  $N(f, y_0)$  é um limite inferior ao número de raízes de  $f'$  em  $y_0$ , entre todas as aplicações  $f'$  homotópicas a  $f$ , ou seja,*

$$N(f, y_0) \leq MR(f, y_0).$$

**Prova:** Pelo item (4) do Teorema 1.4, basta provar que a  $f_t$ -relação entre as classes de Nielsen faz corresponder a cada classe essencial outra classe essencial. Seja  $\alpha$  uma classe de Nielsen essencial de  $f$  em  $y_0$ . Pelo Teorema 1.4,  $\alpha = \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_\alpha)$  para algum  $\widehat{y}_\alpha \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$ . Como  $\alpha$  é essencial, existe  $\beta = \widehat{f}_1^{-1}(\widehat{y}_\alpha)$  tal que  $\alpha$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a  $\beta$ . Vamos provar que  $\beta$  também é essencial. Pelo teorema anterior,  $\beta$  é essencial se, e somente se,  $\widehat{f}_2^{-1}(\widehat{y}_\alpha) \neq \emptyset$ , para todo  $\widehat{f}_2 \simeq \widehat{f}_1$ . Mas dada uma tal  $\widehat{f}_2$  temos que  $\widehat{f}_2 \simeq \widehat{f}$  e, como  $\alpha$  é essencial,  $\widehat{f}_2^{-1}(\widehat{y}_\alpha) \neq \emptyset$ . Portanto  $\beta$  é essencial. ■

Um dos pontos centrais da teoria de Nielsen para raízes é o estudo de condições sobre os espaços  $X$  e  $Y$  para que se tenha a igualdade  $N(f, y_0) = MR(f, y_0)$  para quaisquer aplicações de  $X$  em  $Y$ . Este problema é conhecido como problema de Wecken e será tratado no último capítulo do texto. Antes, ao final desta seção, apresentamos um exemplo em que ocorre a desigualdade estrita  $N(f, y_0) < MR(f, y_0)$ .

O número de Nielsen não é apenas um invariante homotópico, mas também um invariante topológico, no seguinte sentido:

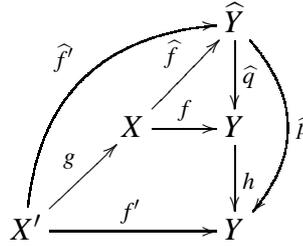
**Teorema 1.10** *Suponha que seja comutativo o seguinte diagrama, com  $g$  e  $h$  homeomorfismos:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & (Y, Y - y_0) \\ g^{-1} \downarrow & & \downarrow h \\ X' & \xrightarrow{f'} & (Y, Y - y'_0) \end{array}$$

Então  $g^{-1}$  aplica o conjunto das classes de Nielsen de  $f$  em  $y_0$  bijetivamente no conjunto das classes de Nielsen de  $f'$  em  $y'_0$ , e  $g(\alpha)$  é uma classe essencial de  $f$  se, e somente se,  $\alpha$  é uma classe essencial de  $f'$ . Portanto,

$$N(f, y_0) = N(f', y'_0).$$

**Prova:** Considere o seguinte diagrama onde  $\hat{q}$  e  $\hat{f}$  são os respectivos recobrimento e levantamento de Hopf de  $f$ :



Note que  $\hat{f}' = \hat{f} \circ g$  é um levantamento de  $f'$  através de  $\hat{p} = h \circ \hat{q}$ . De fato,

$$\hat{p} \circ \hat{f}' = h \circ \hat{q} \circ \hat{f} \circ g = h \circ f \circ g = f'.$$

Pelo Teorema 1.4, as classes de Nielsen de  $f$  são os conjuntos da forma  $\hat{f}^{-1}(\hat{y})$  tal que  $\hat{y} \in \hat{q}^{-1}(y_0)$ . De modo análogo, as classes de Nielsen de  $f'$  são os conjuntos não vazios da forma  $\hat{f}'^{-1}(\hat{y}) = g^{-1}(\hat{f}^{-1}(\hat{y}))$  com  $\hat{y} \in \hat{p}^{-1}(y'_0) = (h \circ \hat{q})^{-1}(y'_0) = \hat{q}^{-1}(h^{-1}(y'_0)) = \hat{q}^{-1}(y_0)$ . Assim  $g^{-1}$  aplica o conjunto das classes de Nielsen de  $f$  bijetivamente no conjunto das classes de Nielsen de  $f'$ .

Agora, vamos mostrar que  $\alpha$  é uma classe inessencial de  $f'$  se, e somente se,  $g(\alpha)$  é uma classe inessencial de  $f$ .

Suponha que  $\alpha = \hat{f}'^{-1}(\hat{y}_\alpha)$  seja inessencial; então pelo Teorema 1.8, existe  $\hat{f}'_1 \simeq \hat{f}'$  tal que  $\hat{f}'_1^{-1}(\hat{y}_\alpha) = \emptyset$ . Da primeira parte da prova temos  $g(\alpha) = \hat{f}^{-1}(\hat{y}_\alpha)$ . Tome  $\hat{f}_1 : X \rightarrow \hat{Y}$  dada pela composição  $\hat{f}_1 = \hat{f}'_1 \circ g^{-1}$ . Temos

- $\hat{f} = \hat{f}' \circ g^{-1} \simeq \hat{f}'_1 \circ g^{-1} = \hat{f}_1$
- $\hat{f}_1^{-1}(\hat{y}_\alpha) = (\hat{f}'_1 \circ g^{-1})^{-1}(\hat{y}_\alpha) = g(\hat{f}'_1^{-1}(\hat{y}_\alpha)) = g(\emptyset) = \emptyset$ .

Segue do Teorema 1.8 que  $g(\alpha)$  é inessencial.

Reciprocamente, suponha  $g(\alpha) = \hat{f}^{-1}(\hat{y}_\alpha)$  inessencial, então pelo Teorema 1.8 existe  $\hat{f}_1 \simeq \hat{f}$  tal que  $\hat{f}_1^{-1}(\hat{y}_\alpha) = \emptyset$ . Da primeira parte da prova temos que  $\alpha = \hat{f}'^{-1}(\hat{y}_\alpha)$ . Tome  $\hat{f}'_1 : X' \rightarrow \hat{Y}$  dada pela composição  $\hat{f}'_1 \circ g$ . Temos

- $\widehat{f}' = \widehat{f} \circ g \simeq \widehat{f}_1 \circ g = \widehat{f}'_1$
- $\widehat{f}'_1^{-1}(\widehat{y}_\alpha) = (\widehat{f}_1 \circ g)^{-1}(\widehat{y}_\alpha) = g^{-1}(\widehat{f}_1^{-1}(\widehat{y}_\alpha)) = g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ .

Segue do Teorema 1.8 que  $\alpha$  é inessencial. ■

**Observação 1.11** Também é verdade que  $N(f, y_0)$  é um invariante por tipo de homotopia no seguinte sentido: Se  $g$  e  $h$  não são necessariamente homeomorfismos, mas tem inversas homotópicas fazendo o diagrama do teorema acima comutar em nível de homotopia, então pode-se mostrar que  $g$  aplica o conjunto das classes de Nielsen essenciais de  $f$  em  $y_0$  no conjunto de classes de Nielsen essenciais de  $f'$  em  $y'_0$  e, portanto,  $N(f, y_0) = N(f', y'_0)$ . É interessante ressaltar que  $MR(f, y_0)$  é um invariante topológico, mas não um invariante por tipo de homotopia como veremos no exemplo 2.18.

A Definição 1.7 se dá em analogia com a Teoria de Nielsen para pontos fixos. Em teoria de pontos fixos define-se um índice de ponto fixo local que associa a cada classe de Nielsen para pontos fixos de uma auto aplicação de um espaço  $ANR$  compacto um inteiro chamado seu índice. Uma classe de pontos fixos é então dita ser essencial se seu índice é não nulo. Prova-se que se uma classe de pontos fixos é essencial neste sentido, então ela é essencial em um sentido análogo ao da Definição 1.7. Prova-se também, sobre circunstâncias bastante gerais, que se uma classe é essencial em um sentido análogo ao da Definição 1.7, então seu índice é não nulo. Um dos aspectos mais importantes que a teoria de pontos fixos difere da teoria de raízes é que, exceto no caso onde ambos  $X$  e  $Y$  são variedades, a teoria de raízes não parece ter uma teoria de índice bem desenvolvida. Por esta razão, temos adotado uma definição que não depende de uma escolha particular do índice ou mesmo da existência de um índice.

Nossa definição de essencialidade diz, grosso modo, que uma classe de Nielsen é essencial se ela não pode ser eliminada deformando-se  $f$  por uma homotopia. Pode-se pensar então que deva ser possível deformar a aplicação  $f$  por uma homotopia de modo a eliminar todas as classes não essenciais e, assim, encontrar uma aplicação  $f'$  com apenas  $N(f') = N(f)$  classes de raízes. Isto então provaria que  $N(f)$  é o número mínimo realizável de classes de Nielsen de aplicações homotópicas a  $f$ . No entanto, pode acontecer que a homotopia necessária para eliminar uma certa classe inessencial não baste para eliminar uma outra classe inessencial, ou ainda que uma tal homotopia faça surgir novas classes inessenciais. Por isso, pode ocorrer que  $N(f)$  seja estritamente menor que número mínimo de classes de Nielsen de aplicações homotópicas a  $f$ . Este

problema foi abordado por Brooks em [6] utilizando-se técnicas que ultrapassam os propósitos deste trabalho. Para nosso uso posterior (especificamente na última demonstração apresentada neste texto), nos basta conhecer uma das mais importantes consequências do referido trabalho de Brooks: “Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação entre variedades de mesma dimensão maior ou igual a três. Então existe uma aplicação  $f'$  homotópica a  $f$  tendo exatamente  $N(f) = N(f')$  classes de Nielsen.”

Mesmo quando  $N(f, y_0)$  é o mínimo realizável do número de classes de Nielsen de aplicações homotópicas a  $f$ , pode acontecer que seja impossível reduzir cada classe de Nielsen essencial a um único ponto. Neste caso, teremos a desigualdade estrita  $N(f, y_0) < MR(f, y_0)$ . É o que ocorre no seguinte exemplo:

**Exemplo 1.12** Seja  $S^n = \{s \in \mathbb{R}^{n+1} : \|s\| = 1\}$  a  $n$ -esfera em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , com  $n \geq 2$ . Seja  $X$  o espaço obtido pela união de duas cópias de  $S^n$  por um cilindro  $n$  dimensional cujas extremidades foram coladas a seus equadores (ver figura a seguir):

$$X = \{(s_1, \dots, s_{n+1}, t) \in S^n \times [0, 1] : t \in \{0, 1\} \text{ ou } s_{n+1} = 0\}$$

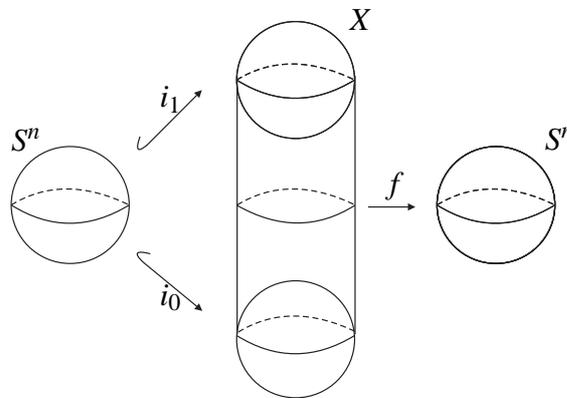


Figura 1.1: Um exemplo em que vale a desigualdade estrita  $N(f, y_0) < MR(f, y_0)$

Seja  $Y = S^n$  e  $y_0 = (1, 0, \dots, 0)$ . Defina  $f : X \rightarrow Y$  por  $f(s, t) = s$  para todo  $(s, t) \in X$ . Como  $Y$  é simplesmente conexo,  $f$  possui apenas uma classe de Nielsen em  $y_0$ . Por outro lado, toda aplicação homotópica a  $f$  possui pelo menos duas raízes em  $y_0$ . Para ver isso, suponha  $f'$  homotópica a  $f$  e defina  $i_0 : S^n \rightarrow X$  e  $i_1 : S^n \rightarrow X$  por  $i_0(s) = (s, 0)$  e  $i_1(s) = (s, 1)$ .

Então  $f \circ i_0$  é a identidade em  $S^n$ . Assim  $f' \circ i_0$  é homotópica à identidade em  $S^n$  e conseqüentemente sobrejetora. De fato, suponha que  $f' \circ i_0$  não seja sobrejetora, então existe  $p \in S^n$  tal que  $f' \circ i_0(x) \neq p$  para todo  $x \in S^n$ . Logo  $f' \circ i_0 : S^n \rightarrow S^n - \{p\} \cong \mathbb{R}^n$ , isto implica que  $f' \circ i_0$

é nulohomotópica. Mas  $id : S^n \rightarrow S^n$  não é nulohomotópica, portanto  $f' \circ i_0$  deve ser sobrejetora. Logo existe  $s_0 \in S^n$  com  $f' \circ i_0(s_0) = y_0$ . Similarmente,  $f' \circ i_1(s_1) = y_0$  para algum  $s_1 \in S^n$ . Deste modo  $i_0(s_0) = (s_0, 0)$  e  $i_1(s_1) = (s_1, 1)$  são duas raízes distintas de  $f'$  em  $y_0$ .

Em particular, temos um exemplo em que ocorre a desigualdade estrita  $N(f, y_0) < MR(f, y_0)$ .

## 1.2 O número de Reidemeister

**Definição 1.13** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação e escolha um ponto  $x \in X$ . Então  $f$  induz um homomorfismo de grupos fundamentais  $f_\# : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ . Os elementos do  $\text{coker}(f_\#)$  são chamados as *classes de Reidemeister* de  $f$  em  $x$ . O número desses elementos é chamado o *número de Reidemeister* de  $f$  e é denotado por  $\mathcal{R}(f)$ . Assim

$$\mathcal{R}(f) = \#\text{coker}(f_\#).$$

Note que o conjunto  $\text{coker}(f_\#) = \pi_1(Y, f(x)) / f_\#(\pi_1(X, x))$  depende da escolha do ponto base  $x \in X$ ; porém, sua cardinalidade,  $\mathcal{R}(f)$ , não. Isso segue da asserção (1) do próximo teorema e do fato de  $Y$  ser conexo.

**Teorema 1.14** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação e  $y_0 \in Y$ . Sejam  $\widehat{q} : \widehat{Y} \rightarrow Y$  e  $\widehat{f} : X \rightarrow \widehat{Y}$  um recobrimento e um levantamento de Hopf para  $f$ . Então*

- (1)  $\mathcal{R}(f)$  é a cardinalidade de  $\widehat{q}^{-1}(y)$  para qualquer  $y \in Y$ .
- (2)  $\#(f^{-1}(y_0)/NR) \leq \mathcal{R}(f)$ .
- (3)  $N(f, y_0) \leq \mathcal{R}(f)$ .

**Prova:** Prova de (1). Como  $Y$  é conexo por caminhos, segue do teorema 54.6 pág 346 de [3] que para qualquer  $y \in Y$  a fibra  $\widehat{q}^{-1}(y)$  está em correspondência um-a-um com o conjunto  $\text{coker}(f_\#)$ . Logo  $\mathcal{R}(f) = \#\text{coker}(f_\#) = \#\widehat{q}^{-1}(y)$  para qualquer  $y \in Y$ .

Prova de (2). Pelo Teorema 1.4, o conjunto das classes de Nielsen está em correspondência um-a-um com um subconjunto da fibra  $\widehat{q}^{-1}(y_0)$ , conseqüentemente em correspondência um-a-um com um subconjunto da fibra  $\widehat{q}^{-1}(y)$  para qualquer  $y \in Y$ . Logo

$$\#(f^{-1}(y_0)/NR) \leq \mathcal{R}(f).$$

A prova de (3) segue imediatamente de (2) e do fato de  $N(f, y_0) \leq \#(f^{-1}(y_0)/NR)$ . ■

Nos resultados acima, primeiro fizemos uma correspondência a partir das classes de Nielsen para a fibra  $\widehat{q}^{-1}(y_0)$ , então a partir da fibra  $\widehat{q}^{-1}(y_0)$  para as classes de Reidemeister. Também é interessante exibir uma injeção diretamente nas classes de Reidemeister. Para fazer isto, suponha  $f^{-1}(y_0) \neq \emptyset$ , pois caso contrário não há o que fazer, e seja  $x_0$  uma raiz de  $f$  em  $y_0$ . Definimos uma injeção

$$\phi : f^{-1}(y_0)/NR \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)/f_{\#}(\pi_1(X, x_0))$$

como segue: Seja  $\alpha$  uma classe de Nielsen. Escolha uma raiz  $x \in \alpha$  e um caminho  $\gamma$  em  $X$  de  $x$  para  $x_0$ . Então  $f \circ \gamma$  é um laço em  $Y$  em  $y_0$  e, portanto, podemos usá-lo como um representante para a classe  $[f \circ \gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$ . Defina  $\phi(\alpha) = [f \circ \gamma] * f_{\#}(\pi_1(X, x_0))$ . Vamos mostrar que  $\phi$  está bem definida. Para isto mostraremos que  $\phi(\alpha)$  independe da escolha do ponto  $x \in \alpha$  e da escolha do caminho  $\gamma$  de  $x$  para  $x_0$ . Sejam  $x_1$  e  $x_2 \in \alpha$ ,  $\gamma$  um caminho de  $x_1$  para  $x_0$  e  $\beta$  um caminho de  $x_2$  para  $x_0$ . Como  $x_1$  e  $x_2 \in \alpha$ , existe um caminho  $\sigma$  de  $x_1$  para  $x_2$  tal que  $[f \circ \sigma] = [y_0]$ . Precisamos mostrar que  $[f \circ \gamma] * f_{\#}(\pi_1(X, x_0)) = [f \circ \beta] * f_{\#}(\pi_1(X, x_0))$ . Para fazer isto, é suficiente mostrar que

$$[f \circ \gamma^{-1}][f \circ \beta] \in f_{\#}(\pi_1(X, x_0)).$$

$$\text{Note que } [(f \circ \sigma)(f \circ \beta)] = [f \circ \sigma][f \circ \beta] = [y_0][f \circ \beta] = [f \circ \beta].$$

Assim,

$$\begin{aligned} [f \circ \gamma^{-1}][f \circ \beta] &= [f \circ \gamma^{-1}][(f \circ \sigma)(f \circ \beta)] \\ &= [f \circ \gamma^{-1}][f \circ (\sigma\beta)] = [(f \circ \gamma^{-1})(f \circ (\sigma\beta))] \\ &= [f \circ (\gamma^{-1}\sigma\beta)] = f_{\#}([\gamma^{-1}\sigma\beta]) \in f_{\#}(\pi_1(X, x_0)). \end{aligned}$$

Às vezes será mais conveniente usar o primeiro grupo de homologia que o grupo fundamental para calcular  $\mathcal{R}(f)$ . Podemos fazer isto se  $\pi_1(Y)$  é abeliano.

**Teorema 1.15** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação e suponha que  $\pi_1(Y, y)$  é abeliano para algum  $y \in Y$ . Então  $\mathcal{R}(f) = \# \text{coker}(f_{*1})$  onde  $f_{*1} : H_1(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(Y; \mathbb{Z})$  é o homomorfismo induzido por  $f$  no primeiro grupo de homologia com coeficientes inteiros.*

**Prova:** Como  $X$  é conexo por caminhos, o homomorfismo de Hurewicz  $h' : \pi_1(X, x) \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$  é sobrejetor, e como  $Y$  é conexo por caminhos e  $\pi_1(Y, y)$  é abeliano, o homomorfismo de Hurewicz  $h : \pi_1(Y, f(x)) \rightarrow H_1(Y; \mathbb{Z})$  é um isomorfismo (ver [5]). Além disso, o seguinte diagrama

comuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{f_{\#}} & \pi_1(Y, f(x)) \\ h' \downarrow \text{epi} & & \text{iso} \downarrow h \\ H_1(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_{*1}} & H_1(Y, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Disso e do fato de  $h'$  ser sobrejetor segue que  $h(f_{\#}(\pi(X, x))) = f_{*1}(H_1(X; \mathbb{Z}))$ .

Seja  $k : H_1(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(Y; \mathbb{Z})/f_{*1}(H_1(X; \mathbb{Z}))$  o epimorfismo quociente e considere

$$k \circ h : \pi_1(Y, f(x)) \rightarrow H_1(Y; \mathbb{Z})/f_{*1}(H_1(X; \mathbb{Z}))$$

que é um homomorfismo sobrejetor, por ser composição de homomorfismos sobrejetores.

Note que,  $\ker(k \circ h) = h^{-1}(k^{-1}(f_{*1}(H_1(X; \mathbb{Z})))) = h^{-1}(f_{*1}(H_1(X; \mathbb{Z}))) = f_{\#}(\pi_1(X, x))$ . Pelo teorema do isomorfismo,  $\pi_1(Y, f(x))/f_{\#}(\pi_1(X, x)) \approx H_1(Y; \mathbb{Z})/f_{*1}(H_1(X; \mathbb{Z}))$

Portanto,  $\mathcal{R}(f) = \#\text{coker}(f_{*1})$ . ■

Nossas principais ferramentas para calcular o número de Nielsen são o teorema a seguir e seus corolários. Antes, porém, provamos um lema.

**Lema 1.16** *Seja  $\hat{q} : \hat{Y} \rightarrow Y$  um recobrimento e seja  $h : Y \rightarrow Y$  um homeomorfismo. Considere  $\hat{h} : \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}$  uma aplicação fazendo comutar o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \hat{Y} & \xrightarrow{\hat{h}} & \hat{Y} \\ \hat{q} \downarrow & & \downarrow \hat{q} \\ Y & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

Então  $\hat{h}$  é um homeomorfismo.

**Prova:** Se  $\hat{q}$  é um-a-um, o resultado é trivial. Suponhamos o caso geral.

Provaremos primeiro que  $\hat{h}$  é sobrejetora. Seja  $\hat{y}_* \in \hat{Y}$  e seja  $y_* = \hat{q}(\hat{y}_*)$ . Como  $h$  é sobrejetora, existe  $y \in Y$  tal que  $h(y) = y_*$ . Considere  $\hat{q}^{-1}(y) = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots\}$ .

Se  $\hat{h}(\hat{x}_1) = \hat{y}_*$ , então terminamos. Senão, tome um caminho  $\gamma$  em  $Y$  de  $\hat{h}(\hat{x}_1)$  para  $\hat{y}_*$ . Considere os laços  $\hat{q}\gamma$  e  $h^{-1}(\hat{q}\gamma)$  em  $Y$  baseados em  $y_*$  e  $y$ , respectivamente. Como  $\gamma$  é um caminho aberto (não é um laço), a classe  $[\hat{q}\gamma] \neq 0$  em  $\pi_1(Y, y_*)$  e, portanto, também  $[h^{-1}(\hat{q}\gamma)] \neq 0$  em  $\pi_1(Y, y)$ . Logo,  $h^{-1}(\hat{q}\gamma)$  levanta a um caminho  $\sigma$  iniciando em  $\hat{x}_1$  e terminando num ponto  $\hat{x}_i$  de  $\hat{q}^{-1}(y)$ , com  $\hat{x}_i \neq \hat{x}_1$ . Agora, o caminho  $\hat{h}(\sigma)$  é, assim como  $\gamma$ , um levantamento de  $\hat{q}\gamma$ , através de  $\hat{q}$ , iniciando em  $\hat{h}(\hat{x}_1)$ . Pela unicidade do levantamento segue-se que  $y_* = \hat{h}(\hat{x}_i)$ .

Agora provaremos que  $\widehat{h}$  é injetora. Suponha  $\widehat{y}_1$  e  $\widehat{y}_2$  pontos de  $\widehat{Y}$  tais que  $\widehat{h}(\widehat{y}_1) = \widehat{h}(\widehat{y}_2)$ .

Temos:

$$\widehat{h}(\widehat{y}_1) = \widehat{h}(\widehat{y}_2) \Rightarrow \widehat{q}(\widehat{h}(\widehat{y}_1)) = \widehat{q}(\widehat{h}(\widehat{y}_2)) \Rightarrow h(\widehat{q}(\widehat{y}_1)) = h(\widehat{q}(\widehat{y}_2)) \Rightarrow \widehat{q}(\widehat{y}_1) = \widehat{q}(\widehat{y}_2).$$

Isto implica que  $\widehat{y}_1$  e  $\widehat{y}_2$  estão na fibra  $\widehat{q}^{-1}(y_*)$  de um mesmo ponto  $y_* \in Y$ .

Suponha  $\widehat{y}_1 \neq \widehat{y}_2$  e tome um caminho  $\gamma$  em  $\widehat{Y}$  de  $\widehat{y}_1$  a  $\widehat{y}_2$ . Então  $\widehat{q}\gamma$  é um laço em  $Y$  baseado em  $y_*$ . Como  $\gamma$  é aberto, a classe  $[\widehat{q}\gamma] \neq 0$  em  $\pi_1(Y, y_*)$ . Logo, também  $[h\widehat{q}\gamma] \neq 0$  em  $\pi_1(Y, h(y_*))$ . Agora, o laço  $h\widehat{q}\gamma$  levanta ao caminho  $\widehat{h}\gamma$  que deve, portanto, ser aberto. Isto contradiz o fato que  $\widehat{h}(\widehat{y}_1) = \widehat{h}(\widehat{y}_2)$ . ■

**Teorema 1.17** *Suponha  $Y$  um espaço,  $y_0 \in Y$  um ponto e que  $Y$  e  $y_0$  tem a propriedade que para qualquer laço  $\gamma$  em  $y_0$  existe uma homotopia  $\{h_t : Y \rightarrow Y\}$  tal que*

1.  $h_0 : Y \rightarrow Y$  é a aplicação identidade de  $Y$ ,
2.  $h_1 : Y \rightarrow Y$  é um homeomorfismo, e
3. O caminho  $\{h_t(y_0)\} \simeq_p \gamma$ .

*Então, para qualquer aplicação  $f : X \rightarrow Y$ , ou  $N(f, y_0) = 0$  ou  $N(f, y_0) = \mathcal{R}(f)$ .*

**Prova:** Sejam  $\widehat{q} : \widehat{Y} \rightarrow Y$  e  $\widehat{f} : X \rightarrow \widehat{Y}$  um recobrimento e um levantamento de Hopf para  $f$  e suponha que  $N(f, y_0) \neq 0$ . Mostraremos que  $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$  é uma classe de Nielsen essencial para todo  $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$ , o que provará o teorema, segundo o item (1) do Teorema 1.14. Seja  $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$ .

Como  $N(f, y_0) \neq 0$ , existe um  $\widehat{y}_0 \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$  tal que  $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0)$  é uma classe de Nielsen essencial de  $f$  em  $y_0$ . Seja  $\widehat{\gamma}$  um caminho em  $\widehat{Y}$  de  $\widehat{y}$  para  $\widehat{y}_0$ . Então  $\gamma = \widehat{q} \circ \widehat{\gamma}$  é um laço em  $Y$  em  $y_0$  e, por hipótese, existe uma homotopia  $\{h_t : Y \rightarrow Y\}$  satisfazendo (1), (2) e (3) acima.

Seja  $\{\widehat{h}_t : \widehat{Y} \rightarrow \widehat{Y}\}$  um levantamento de  $\{h_t\}$  com  $\widehat{h}_0$  a identidade em  $\widehat{Y}$ .

$$\begin{array}{ccc} \widehat{Y} & \xrightarrow{\widehat{h}_t} & \widehat{Y} \\ \widehat{q} \downarrow & & \downarrow \widehat{q} \\ Y & \xrightarrow{h_t} & Y \end{array}$$

Como  $\gamma \simeq_p \{h_t(y_0)\}$ , segue do Teorema 54.3 pág 344 de [3] que  $\widehat{\gamma} \simeq_p \{\widehat{h}_t(\widehat{y})\}$  e, portanto,  $\widehat{h}_1(\widehat{y}) = \widehat{\gamma}(1) = \widehat{y}_0$ . Agora  $\{h_t \circ f\}$  é uma homotopia iniciando em  $h_0 \circ f = f$  e  $\{\widehat{h}_t \circ \widehat{f}\}$  é seu levantamento iniciando em  $\widehat{h}_0 \circ \widehat{f} = \widehat{f}$ . Além disso,  $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0)$  é uma classe essencial de  $f$ , o

que implica  $(\widehat{h}_1 \circ \widehat{f})^{-1}(\widehat{y}_0) \neq \emptyset$ . Existe, portanto, um ponto  $x_1 \in X$  tal que  $(\widehat{h}_1 \circ \widehat{f})(x_1) = \widehat{y}_0$ . Como  $h_1$  é um homeomorfismo, segue do Lema 1.16 que seu levantamento  $\widehat{h}_1$  também é um homeomorfismo. Também  $\widehat{h}_1(\widehat{y}) = \widehat{\gamma}(1) = \widehat{y}_0$ . Segue que  $\widehat{f}(x_1) = \widehat{y}$ . Deste modo,  $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}) \neq \emptyset$  e é, portanto, uma classe de Nielsen de  $f$  em  $y_0$ . Para ver que ela é essencial, seja  $\{f_t\}$  uma homotopia com  $f_0 = f$  e  $\{\widehat{f}_t : X \rightarrow \widehat{Y}\}$  seu levantamento, ao longo de  $\widehat{q}$ , iniciando em  $\widehat{f}$ . Como  $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0)$  é uma classe de Nielsen essencial de  $f$ , então  $\widehat{f}_1^{-1}(\widehat{y}_0)$  é uma classe de Nielsen essencial de  $f_1$ . Assim podemos aplicar exatamente o mesmo argumento acima para  $f_1$  para mostrar que  $\widehat{f}_1^{-1}(\widehat{y}) \neq \emptyset$ . Portanto,  $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$  é essencial. ■

A aplicação mais importante do Teorema 1.17 se dá quando  $Y$  é uma variedade. Para esta e outras aplicações precisamos do seguinte:

**Teorema 1.18** *Sejam  $Y$  uma variedade,  $\gamma$  um caminho em  $Y$  e  $N$  uma vizinhança de  $\gamma(I)$ . Então existe uma isotopia  $\{h_t : Y \rightarrow Y\}$  tal que  $h_0$  é a identidade em  $Y$ ,  $h_t$  é a identidade fora de  $N$  e  $h_t(\gamma(0)) = \gamma(t)$  para todo  $t \in I$ .*

**Prova:** Primeiro suponha que o caminho  $\gamma$  esteja contido no interior de uma  $n$ -bola  $B \subset N$  e considere um homeomorfismo  $\phi : B^n \rightarrow B$ . Seja  $\psi : \text{int}B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o homeomorfismo dado por  $\psi(x) = x/(1 - \|x\|)$  com inversa  $\psi^{-1}(x) = x/(1 + \|x\|)$ . Então para qualquer  $v \in \mathbb{R}^n$  e  $x_0$  na fronteira de  $B^n$  temos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi^{-1}(\psi(x) + v) = x_0$ . De fato:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} \psi^{-1}(\psi(x) + v) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \psi^{-1}(x/(1 - \|x\|) + v) \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \psi^{-1}((x + (1 - \|x\|)v)/(1 - \|x\|)) \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x + (1 - \|x\|)v)/(1 - \|x\|)}{1 + ((\|x + (1 - \|x\|)v\|)/(1 - \|x\|))} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x + (1 - \|x\|)v)/(1 - \|x\|)}{1 + ((\|x + (1 - \|x\|)v\|)/(1 - \|x\|))} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x + (1 - \|x\|)v)/(1 - \|x\|)}{(1 - \|x\| + \|x + (1 - \|x\|)v\|)/(1 - \|x\|)} \\
&= \frac{x_0 + (1 - \|x_0\|)v}{1 - \|x_0\| + \|x_0 + (1 - \|x_0\|)v\|} \\
&= \frac{x_0}{1 - \|x_0\| + \|x_0\|} \\
&= x_0.
\end{aligned}$$

Assim, podemos definir  $h_t : Y \rightarrow Y$  continuamente por

$$h_t(y) = \begin{cases} \phi \circ \psi^{-1}(\psi \circ \phi^{-1}(y) + \psi \circ \phi^{-1}(\gamma(t)) - \psi \circ \phi^{-1}(\gamma(0))), & \text{para } y \in \text{int}B, \\ y, & \text{para } y \in Y - \text{int}B. \end{cases}$$

Pois caso  $y_0 \in \partial B^n$ , teremos  $\lim_{y \rightarrow y_0} \phi \circ \psi^{-1}(\psi \circ \phi^{-1}(y) + \psi \circ \phi^{-1}(\gamma(t)) - \psi \circ \phi^{-1}(\gamma(0))) = \phi(\lim_{y \rightarrow y_0} \psi^{-1}(\psi \circ \phi^{-1}(y) + \psi \circ \phi^{-1}(\gamma(t)) - \psi \circ \phi^{-1}(\gamma(0))))$ . Tome  $x = \phi^{-1}(y)$  e  $v = \psi \circ \phi^{-1}(\gamma(t)) - \psi \circ \phi^{-1}(\gamma(0))$ .

Assim, o limite acima torna-se

$$\phi \left( \lim_{x \rightarrow \phi^{-1}(y_0)} \psi^{-1}(\psi(x) + v) \right) = \phi(\phi^{-1}(y_0)) = y_0.$$

Note ainda que  $h_t$  é um homeomorfismo para cada  $t \in I$ , pois é composição de homeomorfismos para  $y \in \text{int}B$  e a identidade para  $y \in Y - \text{int}B$ .

Então  $\{h_t : Y \rightarrow Y\}$  é uma isotopia tal que  $h_0$  é a identidade em  $Y$ ,  $h_t$  é a identidade fora de  $N$  e  $h_t(\gamma(0)) = \gamma(t)$  para todo  $t \in I$ . Isto prova o teorema neste caso particular.

No caso geral,  $\gamma$  pode ser dividido em uma sequência  $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n$  de caminhos

$$\gamma^k(t) = \gamma \left( \frac{k-1+t}{m} \right), t \in I,$$

tal que cada  $\gamma^k$  está no interior de uma  $n$ -bola em  $N$ , pois  $\gamma(I)$  é compacto. Para cada  $\gamma^k$  construímos uma isotopia  $\{h_t^k\}$  como acima e juntamos essas homotopias definindo

$$h_t = \begin{cases} h_{mt}^1 & \text{para } 0 \leq t \leq 1/m \\ h_{mt-k+1}^k \circ h_1^{k-1} \circ \dots \circ h_1^1 & \text{para } k-1/m \leq t \leq k/m, k = 2, 3, \dots, m \end{cases}$$

para formar a desejada isotopia  $\{h_t\}$ . Isto, de fato, funciona:

Para  $m = 2$ , temos  $\gamma^1(t) = (\frac{t}{2})$  e  $\gamma^2(t) = (\frac{1+t}{2})$ , assim

$$h_t = \begin{cases} h_{2t}^1 & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 \\ h_{2t-1}^2 \circ h_1^1 & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Para  $i = 1, 2$ , mostramos que  $h_0^i = id_Y$ ,  $h_t^i = id_{Y-B_n^i}$  e  $h_t^i(\gamma^i(0)) = \gamma^i(t)$ , para todo  $t \in I$ . Tome  $N = B_1^n \cup B_2^n$ .

- $h_0 = h_0^1 = id_Y$

- Se  $x \notin N$ , então

$$h_t(x) = \begin{cases} h_{2t}^1(x) = x & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 \\ h_{2t-1}^2 \circ h_1^1(x) = x & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

pois  $h_t^1 = id_{Y-B_n^1}$  e  $h_t^2 = id_{Y-B_n^2}$ . Ainda

$$h_t(\gamma(0)) = \begin{cases} h_{2t}^1(\gamma(0)) = h_{2t}^1(\gamma^1(0)) = \gamma^1(2t) & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 \\ h_{2t-1}^2 \circ h_1^1(\gamma(0)) = h_{2t-1}^2 \circ \gamma^1(1) = h_{2t-1}^2 \circ \gamma^2(0) = \gamma^2(2t-1) & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$h_t((\gamma(0))) = \gamma(t) = \begin{cases} \gamma^1(2t) & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma^2(2t-1) & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Logo, para  $m = 2$ ,  $\{h_t\}$  é a homotopia desejada.

Para  $m = 3$ , temos que  $\gamma$  pode ser dividido em uma sequência  $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$  de caminhos com  $\gamma^i \subset B_i^n$  para  $i = 1, 2, 3$ , pelo que discutimos acima temos para cada  $i$  vale  $h_0^i = id_Y$ ,  $h_t^i = id_{Y-B_i^n}$  e  $h_t^i(\gamma^i(0)) = \gamma^i(t)$ , para todo  $t \in I$ . Tome  $N = B_1^n \cup B_2^n \cup B_3^n$ .

Note que  $h_t$  como definimos acima, satisfaz:

- $h_0 = h_0^1 = id_Y$
- Se  $x \notin N$ , então

$$h_t(x) = \begin{cases} h_{3t}^1(x) = x & \text{para } 0 \leq t \leq 1/3 \\ h_{3t-1}^2 \circ h_1^1(x) = x & \text{para } 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ h_{3t-2}^3 \circ h_1^2 \circ h_1^1(x) = x & \text{para } 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

pois  $h_t^1 = id_{Y-B_1^n}$ ,  $h_t^2 = id_{Y-B_2^n}$  e  $h_t^3 = id_{Y-B_3^n}$ . Ainda

$$h_t(\gamma(0)) = \gamma(t) = \begin{cases} h_{3t}^1(\gamma(0)) = h_{3t}^1(\gamma^1(0)) = \gamma^1(3t) & \text{para } 0 \leq t \leq 1/3 \\ h_{3t-1}^2 \circ h_1^1(\gamma(0)) = h_{3t-1}^2 \circ \gamma^1(0) = h_{3t-1}^2 \circ \gamma^1(1) = h_{3t-1}^2 \circ \gamma^2(0) = \gamma^2(3t-1) & \text{para } 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ h_{3t-2}^3 \circ h_1^2 \circ h_1^1(\gamma(0)) = h_{3t-2}^3 \circ h_1^2(\gamma^1(0)) = h_{3t-2}^3(\gamma^2(1)) = & \\ = h_{3t-2}^3(\gamma^3(0)) = \gamma^3(3t-2) & \text{para } 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Logo, para  $m = 3$ ,  $\{h_t\}$  é a isotopia desejada.

Indutivamente mostra-se que para qualquer inteiro positivo  $m$ ,  $\{h_t\}$  é a isotopia desejada. ■

O teorema anterior implica que se  $Y$  é uma variedade, então ficam satisfeitas as hipóteses do Teorema 1.17 para qualquer  $y_0 \in Y$ , o que prova o seguinte corolário:

**Corolário 1.19** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação, com  $Y$  uma variedade, e seja  $y_0 \in Y$  um ponto. Então ou  $N(f, y_0) = 0$  ou  $N(f, y_0) = \mathcal{R}(f)$ .*

O Teorema 1.18 também implica que quando  $Y$  é uma variedade, então  $N(f, y_0)$  é independente do ponto  $y_0 \in Y$ . Por esta razão, quando  $Y$  é uma variedade, frequentemente escrevemos  $N(f, y_0)$  simplesmente como  $N(f)$ .

**Corolário 1.20** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação com  $Y$  uma variedade. Então  $N(f, y_0)$  é independente do ponto  $y_0 \in Y$ , isto é,  $N(f, y_0) = N(f, y_1)$  para quaisquer  $y_0, y_1 \in Y$ .*

**Prova:** Sejam  $y_0, y_1 \in Y$  e  $\gamma$  um caminho em  $Y$  de  $y_0$  para  $y_1$ . Pelo Teorema 1.18 existe uma isotopia  $\{h_t : Y \rightarrow Y\}$  tal que  $h_0$  é a identidade em  $Y$  e  $h_1(y_0) = h_1(\gamma(0)) = \gamma(1) = y_1$ . Então  $\{h_t \circ f\}$  é uma homotopia de  $f$  para  $h_1 \circ f$ . Logo  $N(f, y_1) = N(h_1 \circ f, y_1)$ . Mas, pelo Teorema 1.10 tem-se  $N(h_1 \circ f, y_1) = N(f, h_1^{-1}(y_1)) = N(f, y_0)$ . ■

A partir dos Corolários 1.6 e 1.19 temos:

**Corolário 1.21** *Considere  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação com  $Y$  uma variedade e  $X$  compacto. Se  $\mathcal{R}(f) = \infty$ , então  $N(f) = 0$ .*

O Teorema 1.17 e o Corolário 1.19 são as principais ferramentas para se calcular o número de Nielsen. A fim de aplicá-los, porém, precisamos de um método para determinar se o número de Nielsen é ou não nulo. Esta é a meta da teoria de índice que apresentamos no próximo capítulo. Antes porém, apresentamos uma breve seção de exemplos.

## 1.3 Exemplos

**Exemplo 1.22** Mostraremos com este exemplo um caso em que o número de Nielsen é nulo e o número de Reidemeister pode ser qualquer número inteiro positivo ou mesmo infinito. Seja a circunferência unitária no plano complexo,  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ . Considere o toro  $\mathbb{T}$  e o espaço figura oito  $X = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1$ , ambos munidos de estrutura celular minimal. Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{T}$  uma aplicação arbitrária.

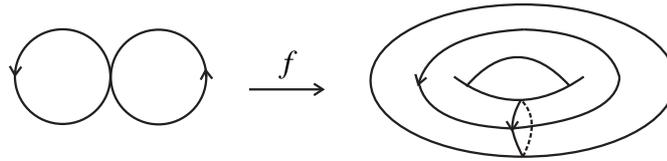


Figura 1.2: Aplicações da figura oito no toro

Pelo Teorema da Aproximação Celular (pag 64 de [7]), sabemos que existe uma aplicação celular  $g : X \rightarrow \mathbb{T}$  homotópica a  $f$ . É claro que para um ponto  $y_0$  no interior da 2-célula de  $\mathbb{T}$  tem-se  $g^{-1}(y_0) = \emptyset$ . E assim,  $MR(f, y_0) = 0$  e, conseqüentemente,  $N(f, y_0) = 0$ .

Vamos mostrar que  $f$  pode ser escolhida de modo que  $\mathcal{R}(f)$  seja qualquer número inteiro positivo ou mesmo infinito. Para se ter  $\mathcal{R}(f) = \infty$ , basta escolher  $f$  como uma aplicação constante. Agora, dado um número inteiro positivo  $n$ , tomamos  $f : X \rightarrow \mathbb{T}$  como a aplicação celular que aplica a primeira das circunferências que compõem  $X$  homeomorficamente na circunferência que corresponde ao meridiano celular do toro  $\mathbb{T}$  e faz com que a outra circunferência que compõe  $X$  percorra  $n$  vezes, num mesmo sentido, a circunferência celular longitudinal do toro  $\mathbb{T}$ . Então o homomorfismo  $f_{\#} : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T})$  tem  $\text{coker}(f_{\#}) \approx (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / (\mathbb{Z} \oplus n\mathbb{Z})$  que tem cardinalidade  $\mathcal{R}(f) = \#\text{coker}(f_{\#}) = n$ .

**Exemplo 1.23** Seja  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  uma aplicação da 2-esfera no plano projetivo. Como  $S^2$  é simplesmente conexa e  $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \approx \mathbb{Z}_2$  tem cardinalidade 2, é claro que o homomorfismo  $f_{\#} : \pi_1(S^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^2)$  tem  $\text{coker}(f_{\#}) \approx \mathbb{Z}_2$  e, portanto,  $\mathcal{R}(f) = 2$ . Agora, pelos teoremas da Seção 5 de [8], para qualquer  $y_0 \in \mathbb{RP}^2$  tem-se ou  $MR(f, y_0) = 0$  ou  $MR(f, y_0) = 2$ . Se  $MR(f, y_0) = 0$ , então é claro que  $N(f, y_0) = 0$ . Por outro lado, segue do Teorema 3.6 de [9] (que será comentado no final da Seção 3.1) que  $MR(f, y_0) \neq 0$  implica em  $N(f, y_0) \neq 0$ . Assim, segue do Corolário 1.19 que  $MR(f, y_0) = 2$  implica em  $N(f, y_0) = \mathcal{R}(f) = 2$ .

O caso particular em que  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  é o recobrimento duplo será discutido em detalhes no Exemplo 2.13.

# Capítulo 2

## Teoria de Índice de Raízes

Dedicamos este capítulo ao tratamento da teoria de índices para raízes. Apresentamos os principais resultados associando o índice de raízes à teoria de Nielsen para raízes e finalizamos com alguns exemplos que fazem uso dos resultados desenvolvidos no capítulo.

### 2.1 Índices para raízes

Em teoria de pontos fixos, uma tríada  $(X, f, U)$  é dita *admissível* se  $X$  é um espaço topológico (adequado) e  $f : X \rightarrow X$  é uma auto-aplicação que não possui pontos fixos na fronteira do conjunto  $U \subset X$ . Um índice de ponto fixo  $l$  é uma função atribuindo a cada tríada admissível  $(X, f, U)$  um número racional  $l(X, f, U)$  que, grosso modo, é uma medida do número de pontos fixos de  $f$  situados em  $U$ . Em nossa definição de admissibilidade, relaxamos a exigência de ser aberto o conjunto  $U$ .

**Definição 2.1** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $y_0 \in Y$ . Um par  $(f, A)$  é um *par admissível* para a tríada  $X, Y, y_0$  se  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação,  $A \subset X$ , e  $A$  possui uma vizinhança fechada<sup>1</sup>  $N$  tal que  $N - A$  não contém raízes de  $f$  em  $y_0$ , ou seja,

$$(N - A) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset.$$

Note que se  $U$  é aberto, então  $(f, U)$  é admissível se, e somente se,  $\partial U \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$ . De fato: Suponhamos que  $(f, U)$  seja admissível; então existe uma vizinhança fechada  $N$  de  $U$  tal que  $(N - U) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$ . Como  $U \subset (U \cup \partial U) \subset N$  e a união  $U \cup \partial U$  é disjunta, então

---

<sup>1</sup>Por uma vizinhança fechada de um conjunto  $A$  entendemos um conjunto fechado contendo  $A$  em seu interior.

$\partial U \subset N - U$  e segue que  $\partial U \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$ . Suponha agora  $\partial U \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$ . Sendo  $U$  aberto, temos  $\partial U = \overline{U} - U$ . Logo  $\overline{U}$  é uma vizinhança fechada de  $U$  tal que  $(\overline{U} - U) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$ .

Para um par admissível  $(f, A)$ , as vezes exigiremos que  $N$  seja uma vizinhança não apenas de  $A$ , mas também de  $\overline{A}$ . Isto não acarreta exigência extra se  $X$  for normal e, por convenção, assumimos  $X$  normal em todo o texto.

**Teorema 2.2** *Suponha  $(f, A)$  um par admissível para  $X, Y, y_0$ . Então  $\overline{A}$  tem uma vizinhança fechada  $N$  tal que  $N - A$  não contém raízes de  $f$  em  $y_0$ .*

**Prova:** Suponha que  $N'$  é uma vizinhança fechada de  $A$  tal que  $(N' - A) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$ . Então  $f^{-1}(y_0) - N' = f^{-1}(y_0) - \text{int}N'$  é um conjunto fechado disjunto do conjunto fechado  $N'$ . Pela normalidade de  $X$ , existem vizinhanças abertas disjuntas  $U$  de  $f^{-1}(y_0) - N'$  e  $V$  de  $N'$ . Seja  $N = \overline{V}$ . Note que  $N$  é uma vizinhança de  $\overline{A}$ , pois  $A \subset \text{int}N' \Rightarrow \overline{A} \subset N'$  e  $N' \subset \overline{V} = N \Rightarrow \overline{A} \subset \text{int}N$ .

Mostraremos que  $(N - A) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$ . De fato, suponha que exista  $x \in (N - A) \cap f^{-1}(y_0)$ . Então  $x \in (N - N') \cap f^{-1}(y_0)$ , pois  $(N' - A) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$ . Logo  $x \in f^{-1}(y_0) - N'$  e  $x \in N$ , donde  $x \in U$  e  $x \in N$ , o que é absurdo, como  $N = \overline{V}$  e  $U \cap V = \emptyset$ . Portanto  $(N - A) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$  e  $N$  é uma vizinhança de  $\overline{A}$  como desejada. ■

Como exemplos de pares admissíveis temos:

**Proposição 2.3** *Suponha  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação e  $y_0 \in Y$ . Então  $(f, X)$  e  $(f, \emptyset)$  são admissíveis, e assim são todos os pares  $(f, \alpha)$  com  $\alpha$  uma classe de Nielsen de  $f$  em  $y_0$ . Para cada raiz isolada  $x$  de  $f$  em  $y_0$ , é admissível o par  $(f, x)$ .*

**Prova:** Para  $(f, X)$  a requerida vizinhança  $N$  de  $X$  é o próprio  $X$ . Para  $(f, \emptyset)$ , tomamos  $N = \emptyset$ . Para  $(f, \alpha)$ , seja  $N = \overline{U}_\alpha$  onde  $U_\alpha$  é a vizinhança aberta de  $U_\alpha$  garantida pelo Teorema 1.5. E para  $(f, x)$ , podemos escolher  $N = \overline{U}_x$  onde  $U_x$  é uma vizinhança de  $x$  em  $X$  cujo fecho não encontra o fecho de uma vizinhança de  $f^{-1}(y_0)$  em  $X$ . ■

**Definição 2.4** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $y_0 \in Y$  um ponto. Um índice de raízes para  $X, Y, y_0$  é uma função  $\omega$  do conjunto dos pares admissíveis para  $X, Y, y_0$  em um grupo abeliano satisfazendo o seguintes axiomas:*

**(Aditividade)** *Suponha  $A \subset X$  e  $A_1, \dots, A_n$  subconjuntos de  $A$  tais que:*

- (a)  $(f, A)$  é admissível e  $(f, A_i)$  é admissível para cada  $i$ ,

(b)  $f^{-1}(y_0) \cap (A - \cup_i A_i) = \emptyset$ , e

(c)  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ .

Então  $\omega(f, A) = \sum_i \omega(f, A_i)$ .

**(Invariância por Homotopia)** Suponha  $\{f_t : X \rightarrow Y\}$  uma homotopia,  $A$  aberto em  $X$  e  $(f_t, A)$  admissível para todo  $t \in I$ . Então  $\omega(f_1, A) = \omega(f_0, A)$ .

Como uma consequência fácil da aditividade temos:

**Teorema 2.5** *Suponha  $(f, A)$  um par admissível para  $X, Y, y_0$ . Então  $\omega(f, A) \neq 0$  implica que  $f(x) = y_0$  para algum  $x \in A$ .*

**Prova:** Provaremos a contrapositiva. Suponha que não exista  $x$  em  $A$  verificando a equação  $f(x) = y_0$ . Aplicando a aditividade com  $A_1 = \emptyset$  temos  $\omega(f, A) = \omega(f, \emptyset)$  e aplicando-a também com  $A_2 = \emptyset$  temos que  $\omega(f, A) = \omega(f, \emptyset) + \omega(f, \emptyset)$ . Segue da unicidade do elemento neutro de grupos que  $\omega(f, \emptyset) = 0$ . Portanto,  $\omega(f, A) = 0$ . ■

O seguinte é um importante resultado sobre índices de classes de Nielsen.

**Teorema 2.6** *Suponha  $X$  compacto,  $\{f_t : X \rightarrow Y\}$  uma homotopia,  $y_0 \in Y$  um ponto e  $\alpha_0$  uma classe de Nielsen de  $f$  em  $y_0$ . Então:*

(1) *Se  $\alpha_0$  está  $\{f_t\}$ -relacionada a uma classe de Nielsen  $\alpha_1$  de  $f_1$ , então  $\omega(f, \alpha_0) = \omega(f_1, \alpha_1)$*

(2) *Caso contrário,  $\alpha_0$  não está  $\{f_t\}$ -relacionada a qualquer classe de Nielsen de  $f_1$  e, neste caso,  $\omega(f, \alpha_0) = 0$ .*

**Prova:** Sejam  $\hat{q} : \hat{Y} \rightarrow Y$  e  $\{\hat{f}_t : X \rightarrow \hat{Y}\}$  um recobrimento e um levantamento de Hopf para  $\{f_t\}$ . Pelo Teorema 1.4,  $\alpha_0 = \hat{f}_0^{-1}(\hat{y}_0)$  para algum  $\hat{y}_0 \in \hat{q}^{-1}(y_0)$ . Precisamos mostrar que  $\omega(f_0, \hat{f}_0^{-1}(\hat{y}_0)) = \omega(f_1, \hat{f}_1^{-1}(\hat{y}_0))$ . Como  $I$  é conexo, é suficiente mostrar que  $\omega(f_t, \hat{f}_t^{-1}(\hat{y}_0))$  é uma função localmente constante de  $t$ . Para tanto, dado  $t \in I$ , encontraremos uma vizinhança  $J$  de  $t$  tal que  $\omega(f_s, \hat{f}_s^{-1}(\hat{y}_0))$  é constante para  $s \in J$ .

O conjunto  $\{(x, t) \in X \times I : f_t(x) = y_0\}$  é um subconjunto fechado do espaço compacto  $X \times I$  e, portanto, compacto. Seja  $C = \bigcup_t f_t^{-1}(y_0) \subset X$  sua projeção em  $X$ . Então  $C$  é a imagem contínua de um conjunto compacto e portanto compacto.

Como na prova do Teorema 1.5, existe uma família  $\{U_{\hat{y}} : \hat{y} \in \hat{q}^{-1}(y_0)\}$  de subconjuntos abertos de  $X$  mutuamente disjuntos, tal que  $\hat{f}_t^{-1}(\hat{y}) \subset U_{\hat{y}}$  para todo  $\hat{y} \in \hat{q}^{-1}(y_0)$ . Considere o

conjunto  $\Omega$  das aplicações de  $X$  em  $\widehat{Y}$  munido da topologia compacto-aberta. Então a atribuição  $s \mapsto \widehat{f}_s$  é uma função contínua de  $I$  em  $\Omega$ . O conjunto  $C - U_{\widehat{y}_0}$  é compacto e  $\widehat{f}_t$  leva  $C - U_{\widehat{y}_0}$  no conjunto aberto  $\widehat{Y} - \widehat{y}_0$ . Assim  $t$  possui uma vizinhança  $J_0 \subset I$  tal que  $\widehat{f}_s(C - U_{\widehat{y}_0}) \subset \widehat{Y} - \widehat{y}_0$  para todo  $s \in J_0$ . Logo

$$\widehat{f}_s^{-1}(\widehat{y}_0) \subset U_{\widehat{y}_0} \text{ para todo } s \in J_0. \quad (2.1)$$

Similarmente, existe uma vizinhança  $J_1$  de  $t$  tal que  $\widehat{f}_s(C - \cup_{\widehat{y} \neq \widehat{y}_0} U_{\widehat{y}}) \subset \widehat{Y} - (\widehat{q}^{-1}(y_0) - \widehat{y}_0)$  para todo  $s \in J_1$ . Logo

$$f_s^{-1}(y_0) - \widehat{f}_s^{-1}(\widehat{y}_0) \subset \cup_{\widehat{y} \neq \widehat{y}_0} U_{\widehat{y}} \text{ para todo } s \in J_1. \quad (2.2)$$

Seja  $J = J_0 \cap J_1$ . Então, das Equações 2.1 e 2.2,  $\partial U_{\widehat{y}_0} \cap f_s^{-1}(y_0) = \emptyset$  e, portanto,  $(f_s, U_{\widehat{y}_0})$  é admissível para todo  $s \in J$ . As equações 2.1 e 2.2 implicam que  $U_{\widehat{y}_0} \cap f_s^{-1}(y_0) = \widehat{f}_s^{-1}(\widehat{y}_0)$ . Pela aditividade  $\omega(f_s, \widehat{f}_s^{-1}(\widehat{y}_0)) = \omega(f_s, U_{\widehat{y}_0})$  para todo  $s \in J$ . Pela invariância por homotopia,  $\omega(f_s, U_{\widehat{y}_0})$  é constante para  $s \in J$ . Portanto  $\omega(f_s, \widehat{f}_s^{-1}(\widehat{y}_0))$  é constante para  $s \in J$ . ■

**Corolário 2.7** *Suponha  $X$  compacto,  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação,  $y_0 \in Y$  e  $\omega$  um índice de raízes para  $X, Y, y_0$ . Para qualquer classe de Nielsen  $\alpha$  de  $f$  em  $y_0$ , se  $\omega(f, \alpha) \neq 0$ , então  $\alpha$  é essencial.*

**Prova:** Provaremos a contrapositiva. Se  $\alpha$  é inessencial, então por definição, existe uma homotopia  $\{f_t\}$  iniciando em  $f$  tal que  $\alpha$  não está  $\{f_t\}$ -relacionada a qualquer classe de Nielsen de  $f_1$ . Pelo teorema anterior,  $\omega(f, \alpha) = 0$ . ■

## 2.2 Construção de índices para raízes

Na seção anterior, utilizamos as propriedades axiomáticas do índice para raízes para obter resultados em teoria de Nielsen, embora sequer tenhamos comprovado a existência de um tal índice. Nesta seção, faremos construções explícitas de índices para raízes. Iniciamos com uma construção simples que usa teoria de homologia ordinária, qualquer teoria  $H_*$  satisfazendo os axiomas de Eilenberg-Steenrod (ver [7]), para detectar a existência de raízes.

Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação e seja  $y_0 \in Y$  um ponto. Considere a composição:

$$X \xrightarrow{f} Y \overset{j}{\subset} (Y, Y - y_0).$$

Esta composição induz o seguinte diagrama de homomorfismos em nível de homologia:

$$H_*(X) \xrightarrow{f_*} H_*(Y) \xrightarrow{j_*} H_*(Y, Y - y_0) .$$

Afirmamos que se a composição  $j_* \circ f_* \neq 0$ , então  $f$  (e qualquer aplicação homotópica a  $f$ ) possui pelo menos uma raiz em  $y_0$ . Para ver isto, suponha que  $f$  não possui raízes em  $y_0$ . Então podemos restringir o contradomínio de  $f$  para obter uma aplicação  $f' : X \rightarrow Y - y_0$ . A composição de aplicações acima pode ser então reescrita como

$$X \xrightarrow{f'} Y - y_0 \subset (Y - y_0, Y - y_0) \subset (Y, Y - y_0) .$$

E assim obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & H_*(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_*(Y, Y - y_0) \\ & \nearrow f_* & & \uparrow k_* \\ H_*(X) & & & \\ & \searrow f'_* & & \\ & H_*(Y - y_0) & \xrightarrow{j'_*} & H_*(Y - y_0, Y - y_0) \end{array}$$

Como  $H_*(Y - y_0, Y - y_0) = 0$ , isto implica que  $j_* \circ f_* = 0$ .

Isto mostra que  $j_* \circ f_*$  pode ser usado como uma medida algébrica para aferir se  $f$  pode ser deformada para se tornar livre de raízes. Isto também nos motiva a definir um índice de raízes específico. Aqui está a construção:

Suponha que  $(f, A)$  seja um par admissível para  $X, Y, y_0$ . Seja  $N$  uma vizinhança fechada de  $A$  tal que  $N - A$  não contém raízes de  $f$  em  $y_0$ . Então  $f$  define uma aplicação de pares

$$f' : (N, N - A) \rightarrow (Y, Y - y_0) .$$

Se  $f$  não possui raízes em  $A$ , então  $f'$  pode ser fatorado através do par  $(Y - y_0, Y - y_0)$ , cuja homologia é trivial. Deste modo, se  $f$  não possui raízes em  $A$ , o homomorfismo

$$f'_* : H_*(N, N - A) \rightarrow H_*(Y, Y - y_0)$$

é trivial. Podemos, portanto, usar  $f'_*$  como uma medida algébrica do número de raízes em  $A$ . O problema é, porém, que apesar de  $f'_*$  ser um membro de um grupo, a saber, o grupo dos homomorfismos de  $H_*(N, N - A)$  em  $H_*(Y, Y - y_0)$ , este grupo depende do conjunto  $A$ . Para  $f'_*$  ser considerado um índice, o grupo deve ser o mesmo para diferentes conjuntos  $A$  e depender apenas de  $X, Y, y_0$ . A solução é usar o diagrama ampliado

$$X \subset (X, X - A) \supset (N, N - A) \xrightarrow{f'} (Y, Y - y_0) .$$

Pelo Teorema 2.2, podemos assumir  $N$  sendo uma vizinhança fechada de  $\bar{A}$ . Assim, a inclusão  $e : (N, N - A) \subset (X, X - A)$  é uma excisão e, portanto, induz isomorfismo em grupos de homologia. Logo temos o seguinte diagrama induzido:

$$H_*(X) \xrightarrow{i_*} H_*(X, X - A) \xleftarrow[\approx]{e_*} H_*(N, N - A) \xrightarrow{f'_*} H_*(Y, Y - y_0).$$

Como  $e_*$  é um isomorfismo, podemos formar a composição

$$L_*(f, A) = f'_* \circ e_*^{-1} \circ i_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y, Y - y_0).$$

**Teorema-Definição 2.8** *Na discussão acima, o homomorfismo  $L_*(f, A)$  é independente da escolha da vizinhança fechada  $N$  de  $A$  e, portanto, depende apenas da tríada  $X, Y, y_0$  e do par  $(f, A)$ . Deste modo,  $L_*$  é uma função do conjunto de todos os pares admissíveis para  $X, Y, y_0$  no grupo abeliano  $\text{hom}(H_*(X), H_*(Y, Y - y_0))$  de todos os homomorfismos de  $H_*(X)$  em  $H_*(Y, Y - y_0)$ . Além disso,  $L_*$  satisfaz as condições de aditividade e invariância por homotopia da Definição 2.4 e é, portanto, um índice de raízes para  $X, Y, y_0$  chamado o índice de raízes por homomorfismos em homologia.*

Escreveremos  $L_*(f, A; G)$  quando desejarmos indicar que  $G$  é o grupo de coeficientes da homologia. Também escreveremos  $L_n(f, A)$  para denotar a restrição de  $L_*(f, A)$  ao  $n$ -ésimo grupo de homologia. Deste modo  $L_n(f, A; G) : H_n(X; G) \rightarrow H_n(Y, Y - y_0; G)$ . A composição dual em cohomologia  $L^*(f, A) = i^* \circ e^{*-1} \circ f'^* : H^*(Y, Y - y_0) \rightarrow H^*(X)$  também é independente de  $N$  e a função  $L^*$  dos pares admissíveis de  $X, Y, y_0$  em  $\text{hom}(H^*(Y, Y - y_0), H^*(X))$  é também um índice de raízes, chamado o índice de raízes por homomorfismos em cohomologia.

**Prova:** Provamos somente para homologia; a prova para cohomologia é dual.

Primeiro provamos a independência da escolha de  $N$ . Seja  $N'$  outra vizinhança de  $\bar{A}$  tal que  $N' - A$  é livre de raízes. Seja  $N'' = N \cup N'$  e considere o diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & (X, X - A) & & \\ & \searrow e & \uparrow e'' & \swarrow e' & \\ (N, N - A) & \xrightarrow{j} & (N'', N'' - A) & \xleftarrow{j'} & (N', N' - A) \\ & \searrow f' & \downarrow f''' & \swarrow f'' & \\ & & (Y, Y - y_0) & & \end{array}$$

no qual  $f', f'', f'''$  são restrições de  $f$  e todas as outras aplicações são inclusões. Esse diagrama revela que

$$f'_* \circ e_*^{-1} \circ i_* = f'''_* \circ e''_*^{-1} \circ i_* = f''_* \circ e'^*{}^{-1} \circ i_*,$$

o que prova que  $L_*(f, A)$  não depende da escolha de  $N$ .

Para provar a aditividade, sejam  $A$  e  $A_1, \dots, A_n$  como na Definição 2.4. Seja  $N$  uma vizinhança fechada de  $\bar{A}$  tal que  $(N - A) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$ . Assim temos

$$(N - \cup_i A_i) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$$

Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & i \swarrow & & \searrow i' & \\
 (X, X - A) & \xrightarrow{j} & & (X, X - \cup_{\alpha} A_{\alpha}) & \\
 e \uparrow & & & & e' \uparrow \\
 (N, N - A) & \xrightarrow{k} & & (N, N - \cup_{\alpha} A_{\alpha}) & \\
 & f' \searrow & & \swarrow f'' & \\
 & & (Y, Y - y_0) & & 
 \end{array}$$

Em nível de homologia, resulta da comutatividade que:

$$L_*(f, A) = f'_* \circ e_*^{-1} \circ i_* = f''_* \circ e'^{-1}_* \circ i'_* = L_*(f, \cup_{\alpha} A_{\alpha}).$$

Para completar a prova da aditividade, devemos mostrar que  $L_*(f, \cup_{\alpha} A_{\alpha}) = \sum_{\alpha} L_*(f, A_{\alpha})$ . Usando a normalidade de  $X$ , selecione para cada  $\alpha$  uma vizinhança fechada  $N_{\alpha}$  de  $\bar{A}_{\alpha}$  de modo que as  $N_{\alpha}$  sejam mutuamente disjuntas e cada  $N_{\alpha} - A_{\alpha}$  seja livre de raízes. Tome  $N = \cup_{\alpha} N_{\alpha}$  e  $A' = \cup_{\alpha} A_{\alpha}$  e considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_*(X) & & \\
 & \oplus i_{\alpha*} \swarrow & & \searrow i_* & \\
 \oplus_{\alpha} H_*(X, X - A_{\alpha}) & \xleftarrow{\oplus j_{\alpha*}} & & H_*(X, X - A') & \\
 \oplus e_{\alpha*} \uparrow \approx & & & & \approx \uparrow e_* \\
 \oplus_{\alpha} H_*(N_{\alpha}, N_{\alpha} - A_{\alpha}) & \xrightarrow{\oplus k_{\alpha*}} & & H_*(N, N - A') & \\
 & \oplus f'_{\alpha*} \searrow & & \swarrow f'_* & \\
 & & H_*(Y, Y - y_0) & & 
 \end{array}$$

As aplicações  $f'_{\alpha}$  e  $f'$  são restrições de  $f$ , as aplicações  $i_{\alpha}, i, j_{\alpha}, e_{\alpha}, e$  são todas inclusões. Pelo Teorema da soma direta de homologia que pode ser encontrado em [10] página 33,  $\oplus_{\alpha} k_{\alpha*}$  é um isomorfismo. As aplicações  $e_{\alpha}$  e  $e$  são excisões e, portanto, induzem isomorfismos. Pela comutatividade do diagrama temos  $\oplus_{\alpha} e_{\alpha*} = (\oplus_{\alpha} j_{\alpha*}) \circ e_* \circ (\oplus_{\alpha} k_{\alpha*})$ . Resolvendo isto para

$e_*^{-1}$  obtemos  $e_*^{-1} = \bigoplus_{\alpha} k_{\alpha^*} \circ e_{\alpha^*}^{-1} \circ j_{\alpha^*}$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} L_*(f, A') &= f'_* \circ e_*^{-1} \circ i_* = f'_* \circ \left( \bigoplus_{\alpha} k_{\alpha^*} \circ e_{\alpha^*}^{-1} \circ j_{\alpha^*} \right) \circ i_* = \\ &= \bigoplus_{\alpha} f'_* \circ k_{\alpha^*} \circ e_{\alpha^*}^{-1} \circ j_{\alpha^*} \circ i_* = \bigoplus_{\alpha} f'_{\alpha^*} \circ e_{\alpha^*}^{-1} \circ i_{\alpha^*} = \bigoplus_{\alpha} L_*(f, A_{\alpha}), \end{aligned}$$

o que completa a prova da aditividade.

Vamos agora provar a invariância por homotopia. Sejam  $\{f_t : X \rightarrow Y\}$  e  $A$  como na definição 2.4. Então para cada  $x \in \partial A$  e  $t \in I$ , temos  $f_t(x) \in Y - y_0$ , pois  $\partial A \cap f_t^{-1}(y_0) = \emptyset$  para todo  $t$ . Assim, existe uma vizinhança  $U_{xt}$  de  $x$  e uma vizinhança  $V_{xt}$  de  $t$  tal que  $f_s(x') \neq y_0$  para todo  $x' \in U_{xt}$  e  $s \in V_{xt}$ . De fato, denote  $F(x, t) = f_t(x)$ , de tal modo  $F(x, t) \neq y_0$ . Como  $Y - y_0$  é aberto em  $Y$ , existe uma vizinhança  $W$  de  $f_t(x)$  tal que  $y_0 \notin W$ . Tome  $F^{-1}(W)$  que é um aberto de  $X \times I$  contendo  $(x, t)$ . Existe um aberto básico  $U_{xt} \times V_{xt}$  tal que  $(x, t) \in U_{xt} \times V_{xt} \subset F^{-1}(W)$ . Logo, para todo  $x' \in U_{xt}$  e  $s \in V_{xt}$  temos  $f_s(x') = F(x', s) \in W$  e, portanto,  $f_s(x') \neq y_0$ .

Para cada  $x \in \partial A$  fixado, a coleção  $\{V_{xt} : t \in I\}$  é uma cobertura aberta de  $I$  e, portanto, possui uma subcobertura finita  $\{V_{xt_1}, \dots, V_{xt_n}\}$ . Seja  $U_x = \bigcap_i U_{xt_i}$  e  $U = \bigcup_{x \in \partial A} (U_x \cup A)$ . Então  $U$  é uma vizinhança de  $\bar{A}$  tal que  $(U - A) \cap f_t^{-1}(y_0) = \emptyset$  para todo  $t \in I$ , pois se  $y \in U - A$ , então  $y \in U_x - A$  para algum  $x \in \partial A$  e assim  $y \in \bigcap U_{xt_i} - A$ . Como  $\{V_{xt_1}, \dots, V_{xt_n}\}$  cobre  $I$ , para cada  $t \in I$ ,  $t \in V_{xt_j}$  para algum  $j = 1, \dots, n$ . Assim  $(y, t) \in U_{xt_j} \times V_{xt_j}$ , portanto  $f_t(y) \neq y_0$ .

Pela normalidade de  $X$ , o aberto  $U$  contém uma vizinhança fechada  $N$  de  $\bar{A}$  e  $\{f_t\}$  define uma homotopia  $\{f'_t : (N, N - A) \rightarrow (Y, Y - y_0)\}$ . Assim  $f'_{0*} = f'_{1*}$ . Sejam  $i : X \subset (X, X - A)$  e  $e : (N, N - A) \subset (Y, Y - y_0)$  as inclusões indicadas. Então

$$L_*(f_0, A) = f'_{0*} \circ e_*^{-1} \circ i_* = f'_{1*} \circ e_*^{-1} \circ i_* = L_*(f_1, A).$$

■

**Observação 2.9** Note que para  $A = X$ , escolhemos  $N = X$  e obtemos

$$L_*(f, A) = j_* \circ f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y, Y - y_0),$$

onde  $j : Y \subset (Y, Y - y_0)$  é a inclusão. Deste modo, o índice  $L_*$  pode ser entendido como uma localização da medida global.

Podemos usar  $L_*$  e  $L^*$  para definir outros índices. O mais importante desses é o índice de raízes integral, que definiremos em breve. Antes, recordemos alguns fatos de Topologia Algébrica que serão úteis na prova do próximo lema.

Dados uma  $n$ -variedade  $Y$ , um ponto  $y_0 \in Y$  e  $D$  uma vizinhança fechada de  $y_0$  homeomorfa a uma bola fechada de  $\mathbb{R}^n$ , temos que  $Y - y_0$  e  $Y - \text{int}D$  tem o mesmo tipo de homotopia. Logo  $H_*(Y - \text{int}D) \approx H_*(Y - y_0) = 0$ , devendo-se a igualdade ao fato de  $Y - y_0$  ser uma variedade aberta. (Ver, por exemplo, o Corolário 22.25 página 166 de [4]).

Um interessante (e correto) exercício de [4] afirma o seguinte fato relacionado a orientabilidade de uma variedade:

**Exercício 22.45 de [4]:** *Seja  $Y$  uma  $n$ -variedade fechada (compacta e sem bordo) e seja  $S^{n-1}$  o bordo de um disco  $n$ -dimensional  $D^n \subset X$ . Considere o espaço de colagem  $D^n \cup_{\varphi} Y_*$ , onde  $Y_* = Y - \text{int}D^n$  e  $\varphi : S^{n-1} \rightarrow Y_*$  é a inclusão natural de  $S^{n-1}$  como o bordo de  $Y_*$ . Então  $Y$  é orientável se, e somente se,  $f_* : H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(Y_*)$  é trivial.*

Utilizamos este fato para provar uma parte do seguinte lema:

**Lema 2.10** *Sejam  $Y$  uma  $n$ -variedade compacta orientável (respectivamente não-orientável) e  $y_0 \in Y$  um ponto. Então a inclusão  $j : Y \rightarrow (Y, Y - y_0)$  induz isomorfismo em homologia  $n$ -dimensional com coeficientes em  $\mathbb{Z}$  (respectivamente com coeficientes em  $\mathbb{Z}_2$ ).*

**Prova:** Iniciamos provando o caso em que  $Y$  é orientável. Consideremos a sequência de homologia do espaço de colagem  $D^n \cup_{\varphi} Y_*$ , a saber,

$$\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\varphi_*} \tilde{H}_{n-1}(Y_*) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(Y) \longrightarrow \tilde{H}_{n-2}(S^{n-1}).$$

Pelo exercício citado acima, esta sequência pode ser fatorada em

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(Y_*) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_{n-1}(Y) \longrightarrow 0,$$

onde  $\tilde{H}_{n-1}(Y_*) \approx \tilde{H}_{n-1}(Y)$ . Por outro lado, é exata a sequência do par  $(Y, Y_*)$ , a saber,

$$H_n(Y_*) \xrightarrow{\pi_*} H_n(Y) \xrightarrow{j_*} H_n(Y, Y_*) \xrightarrow{\Delta} \tilde{H}_{n-1}(Y_*) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_{n-1}(Y).$$

Como  $H_n(Y_*) = 0$ , segue que  $j_*$  é injetora. Vimos acima que  $\pi_* : \tilde{H}_{n-1}(Y_*) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(Y)$  é isomorfismo, segue que  $\text{Im} \Delta = 0$ , o que implica que  $j_*$  é sobrejetora. Portanto  $j_*$  é um isomorfismo.

Agora, suponhamos que  $Y$  seja não-orientável. Neste caso, a sequência exata

$$H_n(Y_*; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_*} H_n(Y; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j_*} H_n(Y, Y_*; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Delta} \tilde{H}_{n-1}(Y_*; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_{n-1}(Y; \mathbb{Z}_2)$$

torna-se simplesmente

$$0 \xrightarrow{\pi_*} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{j_*} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\Delta} \tilde{H}_{n-1}(Y_*; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_{n-1}(Y; \mathbb{Z}_2).$$

Segue que  $j_*$  é monomorfismo de  $\mathbb{Z}_2$  em  $\mathbb{Z}_2$  e, portanto, um isomorfismo. ■

**Teorema-Definição 2.11** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $y_0 \in Y$  um ponto. Use coeficientes inteiros para homologia e assuma que para algum inteiro  $n > 0$  se tenha*

1.  $H_n(X)$  cíclico infinito e
2.  $y_0$  possui uma vizinhança euclidiana  $n$ -dimensional.

Então  $H_p(Y, Y - y_0)$  é trivial para  $p \neq n$  e é cíclico infinito para  $p = n$ . Selecione geradores  $\mu$  de  $H_n(X)$  e  $\nu$  de  $H_n(Y, Y - y_0)$  e defina uma função  $\lambda$  dos pares admissíveis no grupo dos inteiros pela fórmula

$$L_n(f, A)(\mu) = \lambda(f, A)\nu. \quad (2.3)$$

Então  $\lambda$  é um índice de raízes para  $X, Y, y_0$ , chamado o índice de raízes integral. As hipóteses acima são verificadas quando  $X$  e  $Y$  são variedades orientáveis compactas. Neste caso  $\lambda(f, X)$  é o grau ordinário de Brouwer de  $f$ , ou seja,  $\lambda(f, X) = \deg(f)$ .

Note que, como ocorre com o grau de Brouwer, a definição de  $\lambda$  depende apenas da escolha do gerador. Uma escolha diferente pode resultar em um índice de sinal oposto.

**Prova:** Seja  $B$  uma vizinhança fechada de  $y_0$  homeomorfa à bola unitária fechada em  $\mathbb{R}^n$ . Como  $\overline{Y - B} \subset Y - y_0$ , a inclusão  $(B, B - y_0) \subset (Y, Y - y_0)$  é uma excisão e, portanto, induz um isomorfismo de  $H_p(B, B - y_0)$  em  $H_p(Y, Y - y_0)$ . Consideremos a seguinte porção da sequência exata de homologia relativa do par  $(B, B - y_0)$ ,

$$H_p(B) \rightarrow H_p(B, B - y_0) \rightarrow \tilde{H}_{p-1}(B - y_0) \rightarrow \tilde{H}_{p-1}(B).$$

Como  $B$  é contrátil, temos  $H_p(B, B - y_0) \approx \tilde{H}_{p-1}(B - y_0)$ . E, como  $B - y_0$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $S^{n-1}$ , temos que  $H_p(B, B - y_0)$  é trivial para  $p \neq n$  e é cíclico infinito para  $p = n$ . Pelo que foi discutido acima, o mesmo vale para  $H_p(Y, Y - y_0)$ . Deste modo,  $\lambda$  é uma função bem definida dos pares admissíveis de  $X, Y, y_0$  em  $\mathbb{Z}$ .

Vamos mostrar agora que  $\lambda(f, A)$  satisfaz a aditividade. Para isto, sejam  $A, A_1, \dots, A_n$  como na Definição 2.4. Então

$$\lambda(f, A)(\nu) = L_n(f, A)(\mu) = \sum_{i=1}^n L_n(f, A_i)(\mu) = \sum_{i=1}^n \lambda(f, A_i)\nu,$$

o que já demonstra o ora desejado. Note que usamos apenas o fato mostrado no Teorema 2.8, que  $L_*(f, A)$  é um índice de raízes.

Para concluir que  $\lambda$  é um índice de raízes, resta mostrar que  $\lambda(f, A)$  satisfaz a propriedade de invariância por homotopia. Para isto, sejam  $A$  e  $\{f_t : X \rightarrow Y\}$  como na Definição 2.4. Então

$$\lambda(f_0, A)v = L_n(f_0, A)(\mu) = L_n(f_1, A)(\mu) = \lambda(f_1, A)v.$$

Isso conclui a prova de que  $\lambda$  é um índice de raízes.

Agora assumamos que  $X$  e  $Y$  sejam variedades orientáveis compactas. Então ambos  $H_n(X)$  e  $H_n(Y)$  são cíclicos infinitos. E ainda, pelo lema anterior, a inclusão  $j : Y \rightarrow (Y, Y - y_0)$  induz isomorfismo  $j_{*n} : H_n(Y) \rightarrow H_n(Y, Y - y_0)$ .

Escolha  $v' = j_{*n}^{-1}(v)$  como gerador de  $H_n(Y)$ . Com esta escolha de geradores o grau de Brouwer de  $f$  satisfaz a seguinte equação  $f_{*n}(\mu) = (\deg f)v'$ . Isto implica que, em particular, vale a igualdade  $j_{*n} \circ f_{*n}(\mu) = j_{*n}((\deg f)v') = (\deg f)j_{*n}(v') = (\deg f)v$ , onde  $f_{*n}$  e  $j_{*n}$  são as respectivas restrições de  $f_*$  e  $j_*$  ao  $n$ -ésimo grupo de homologia.

Mas segue da Observação 2.9 e da Equação 2.3, que  $j_{*n} \circ f_{*n}(\mu) = L_n(f, X)(\mu) = \lambda(f, X)v$ , deste modo

$$\deg f = \lambda(f, X). \quad \blacksquare$$

Quando  $X$  é uma variedade compacta não-orientável, podemos utilizar homologia com coeficientes em  $\mathbb{Z}_2$  para obter resultado semelhante:

**Teorema-Definição 2.12** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços e  $y_0 \in Y$  um ponto. Use o grupo  $\mathbb{Z}_2$  dos inteiros mod 2 como grupo de coeficientes para homologia e assumamos que para algum  $n > 0$ , valham*

1.  $H_n(X; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2$  e
2.  $y_0$  possui uma vizinhança euclidiana  $n$ -dimensional.

Então  $H_p(Y, Y - y_0; \mathbb{Z}_2)$  é trivial para  $p \neq n$  e é isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$  para  $p = n$ . Sejam  $\mu \in H_n(X; \mathbb{Z}_2)$  e  $v \in H_n(Y, Y - y_0; \mathbb{Z}_2)$  os geradores e defina uma função  $\lambda_2$  do conjunto dos pares admissíveis em  $\mathbb{Z}_2$  pela fórmula

$$L_n(f, A; \mathbb{Z}_2)(\mu) = \lambda_2(f, A)v. \quad (2.4)$$

Então  $\lambda_2$  é um índice de raízes para  $X, Y, y_0$ , chamado o índice de raízes integrais mod 2. As hipóteses acima são atendidas quando  $X$  e  $Y$  são variedades compactas sejam elas orientáveis ou não. Neste caso  $\lambda_2(f, X)$  é o grau de Brouwer mod 2 de  $f$ , ou seja,  $\lambda_2(f, X) = \deg_2(f)$ .

Usando coeficiente inteiros mod 2, não existe ambiguidade na escolha de geradores.

**Prova:** Tome  $B$  como na prova do teorema anterior, então a inclusão  $(B, B - y_0) \subset (Y, Y - y_0)$  é uma excisão e, portanto, induz um isomorfismo  $H_p(B, B - y_0; \mathbb{Z}_2) \approx H_p(Y, Y - y_0; \mathbb{Z}_2)$ . Como  $B$  é contrátil,  $H_p(B, B - y_0; \mathbb{Z}_2) \approx \tilde{H}_{p-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$ . Assim, temos que  $H_n(Y, Y - y_0; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2$  e  $H_p(Y, Y - y_0; \mathbb{Z}_2) = 0$  para  $p \neq n$ .

Deste modo,  $\lambda_2$  é uma função bem definida dos pares admissíveis para  $X, Y, y_0$  em  $\mathbb{Z}_2$ . As propriedades de índice seguem diretamente das propriedades de  $L_*$ .

Agora assumamos que  $X$  e  $Y$  sejam variedades compactas. Como  $X$  e  $Y$  são também variedades conexas (por convenção todos espaços que estamos trabalhando são conexos), segue que  $H_n(X; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2$  e  $H_n(Y; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2$ . Além disso, pelo Lema 2.10, a inclusão  $j : Y \subset (Y, Y - y_0)$  induz isomorfismo  $j_{*n} : H_n(Y; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(Y, Y - y_0; \mathbb{Z}_2)$ . Então  $v' = j_{*n}^{-1}(v)$  é o gerador de  $H_n(Y; \mathbb{Z}_2)$  e temos  $f_{*n}(\mu) = \deg_2(f)v'$ . Logo  $j_{*n} \circ f_{*n}(\mu) = j_{*n}((\deg_2 f)v') = (\deg_2 f)j_{*n}(v') = (\deg_2 f)v$ . E segue da Observação 2.9 e da Equação 2.4 que  $j_{*n} \circ f_{*n}(\mu) = L_n(f, X; \mathbb{Z}_2)(\mu) = \lambda_2(f, X)(v)$ . Deste modo,  $\deg_2 f = \lambda_2(f, X)$ . ■

**Exemplo 2.13** (*O recobrimento de  $\mathbb{R}P^2$  por  $S^2$* ). Considere a 2-esfera  $S^2$  como a esfera unitária em  $\mathbb{R}^3$  e o plano projetivo  $\mathbb{R}P^2$  como  $S^2$  com pontos antípodas identificados. Seja  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  a função que realiza essa identificação. Sejam  $n = (0, 0, 1)$  e  $s = (0, 0, -1)$  os polos norte e sul de  $S^2$  e  $y_0 = f(\{n, s\}) \in \mathbb{R}P^2$ . Então  $f$  possui duas raízes,  $n$  e  $s$ , em  $y_0$ . Seja  $\gamma$  qualquer caminho em  $S^2$  de  $n$  para  $s$ ; então  $f \circ \gamma$  é um laço em  $y_0$ . Pelo Teorema 54.3 da pág 344 de [3], a classe de homotopia com pontos finais fixados de  $f \circ \gamma$  gera o grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{R}P^2, y_0) \approx \mathbb{Z}_2$ . Assim  $n$  e  $s$  não podem ser  $f$ -equivalentes. Deste modo  $f$  possui exatamente duas classes de Nielsen, a saber  $\{n\}$  e  $\{s\}$ . Sejam  $N$  uma vizinhança fechada de  $n$  contida no interior do hemisfério norte de  $S^2$  e  $f'' : (N, N - n) \rightarrow (f(N), f(N) - y_0)$  a aplicação induzida por  $f$ . Considere as aplicações

$$S^2 \overset{i}{\subset} (S^2, S^2 - \{n\}) \overset{e}{\supset} (N, N - \{n\}) \xrightarrow{f''} (f(N), f(N) - y_0) \overset{e'}{\subset} (\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^2 - y_0).$$

As inclusões  $e$  e  $e'$  são excisões e  $f''$  é um homeomorfismo. Assim todas essas aplicações induzem isomorfismo de homologia. Pelo Lema 2.10, a inclusão  $i$  induz isomorfismo em dimensão 2. Note que  $f' = e' \circ f''$  é uma restrição de  $f$ . Também, para qualquer grupo de coeficientes  $G$ , tem-se  $H_2(S^2; G) \approx G$ . Deste modo, para qualquer  $G$  não trivial temos que

$$L_2(f, \{n\}; G) = e'_2 \circ f'_2 \circ e_2^{-1} \circ i_2 : H_2(S^2; G) \xrightarrow{\cong} H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^2 - y_0; G)$$

é não trivial. Segue do Corolário 2.7 que a classe  $\{n\}$  é essencial. Similarmente mostra-se que  $\{s\}$  é essencial. Portanto  $N(f) = 2$ . Como  $f^{-1}(y_0) = \{s, n\}$ , segue que também  $MR(f, y_0) = 2$ .

Como  $L_2(f, \{n\}; \mathbb{Z})$  é um isomorfismo, temos  $\lambda(f, \{n\}) = \pm 1$ , onde o sinal depende apenas da escolha dos geradores para  $H_2(S^2; \mathbb{Z})$  e  $H_2(\mathbb{RP}^2, \mathbb{RP}^2 - y_0; \mathbb{Z})$ .

Vamos olhar para  $L_*(f, \{s\})$  também. Seja  $a : S^2 \rightarrow S^2$  a aplicação antipodal,  $a(x) = -x$ . Então podemos usar  $a(N)$  como uma vizinhança fechada de  $\{s\}$  a fim de calcular  $L_*(f, \{s\})$ . Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} S^2 & \xrightarrow{i} & (S^2, S^2 - \{n\}) & \xleftarrow{e} & (N, N - \{n\}) & \xrightarrow{f'} & (\mathbb{RP}^2, \mathbb{RP}^2 - y_0) \\ \uparrow a & & \uparrow a' & & \downarrow a'' & & \parallel \\ S^2 & \xrightarrow{j} & (S^2, S^2 - \{s\}) & \xleftarrow{e'} & (a(N), a(N) - \{s\}) & \xrightarrow{f''} & (\mathbb{RP}^2, \mathbb{RP}^2 - y_0) \end{array}$$

onde  $a'$  e  $a''$  são definidas por  $a$  e  $f'$  e  $f''$  são definidas por  $f$ . Todas as aplicações  $e, e', a'$  e  $a''$  induzem isomorfismos em homologia e, assim, tem-se prontamente  $e'^{-1}_* = a''_* \circ e_*^{-1} \circ a'_*$ . A partir disso e da comutatividade do diagrama tem-se

$$L_*(f, \{s\}) = f''_* \circ e'^{-1}_* \circ i'_* = f''_* \circ a''_* \circ e_*^{-1} \circ a'_* \circ i'_* = f'_* \circ e_*^{-1} \circ i_* \circ a_* = L_*(f, \{n\}) \circ a_*.$$

Pela Proposição 1.23 pág 28 de [7] temos que  $a_{*2} = -\text{id}_{H_2(S^2)}$ . Assim  $L_2(f, \{s\}) = -L_2(f, \{n\})$ . Em dimensões 0 e 1, o Teorema 2.11 implica que os grupos de homologia  $H_0(\mathbb{RP}^2, \mathbb{RP}^2 - y_0)$  e  $H_1(\mathbb{RP}^2, \mathbb{RP}^2 - y_0)$  são ambos triviais. Deste modo

$$L_*(f, \{s\}) = -L_*(f, \{n\}) \quad \text{e} \quad \lambda(f, \{s\}) = -\lambda(f, \{n\}).$$

Como  $\{n\}$  e  $\{s\}$  são as únicas classes de Nielsen de  $f$ , segue da aditividade que

$$L_*(f, X) = L_*(f, \{s\}) + L_*(f, \{n\}) = 0.$$

Este exemplo nos mostra que não podemos, em geral, utilizar  $L_*(f, X)$  ou qualquer índice derivado dele para detectar a existência de raízes de  $f$ . Pode ocorrer que os índices das classes de Nielsen se cancelem uns com os outros resultando em  $L_*(f, X) = 0$ , mesmo quando alguma classe de raízes tenha índice não nulo e seja essencial. Os seguintes teoremas mostram que este tipo de cancelamento não pode ocorrer, porém, quando  $X$  é compacto e  $Y$  é uma variedade compacta orientável.

**Teorema 2.14** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação,  $y_0 \in Y$  um ponto, suponha que  $X$  é compacto e  $Y$  é uma variedade compacta. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  duas classes de Nielsen de  $f$  em  $y_0$  e use  $G = \mathbb{Z}$  ou*

$\mathbb{Z}_2$  para o grupo de coeficientes para (co)homologia. Então  $L_*(f, \alpha; G) = \pm L_*(f, \beta; G)$ . Além disso, se  $Y$  é orientável, então  $L_*(f, \alpha; G) = L_*(f, \beta; G)$ . O mesmo vale para  $L^*$  e, se estiverem também definidos, para  $\lambda$  e  $\lambda_2$ .

**Prova:** Provamos o teorema para  $L_*$ ; a prova para  $L^*$ , com mudanças óbvias, é essencialmente a mesma. O caso para  $\lambda$  e  $\lambda_2$  segue facilmente do caso para  $L_*$ , pois

$$\lambda(f, \alpha)v = L_n(f, \alpha; \mathbb{Z})(\mu) = L_n(f, \beta; \mathbb{Z})(\mu) = \lambda(f, \beta)v, \text{ e}$$

$$\lambda_2(f, \alpha)v = L_n(f, \alpha; \mathbb{Z}_2)(\mu) = L_n(f, \beta; \mathbb{Z}_2)(\mu) = \lambda_2(f, \beta)v.$$

Seja  $\hat{q}: \hat{Y} \rightarrow Y$  e  $\hat{f}: X \rightarrow \hat{Y}$  um recobrimento e um levantamento de Hopf para  $f$  e sejam  $\hat{y}_0, \hat{y}_1 \in \hat{q}^{-1}(y_0)$ . É suficiente mostrar que

$$L_*(f, \hat{f}^{-1}(\hat{y}_1); G) = \begin{cases} L_*(f, \hat{f}^{-1}(\hat{y}_0); G) & \text{se } Y \text{ é orientável} \\ \pm L_*(f, \hat{f}^{-1}(\hat{y}_0); G) & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Seja  $\hat{\gamma}$  um caminho em  $\hat{Y}$  de  $\hat{y}_0$  para  $\hat{y}_1$  e seja  $\gamma = \hat{q} \circ \hat{\gamma}$ . Assim  $\gamma$  é um laço em  $y_0$ . Pelo Teorema 1.18, existe uma isotopia  $\{h_t: Y \rightarrow Y\}$  tal que  $h_0$  é a identidade e  $h_t(y_0) = \gamma(t)$  para todo  $t \in I$ . Levante  $\{h_t\}$  a uma isotopia  $\{\hat{h}_t: \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}\}$  iniciando na identidade em  $\hat{Y}$ . Então  $\{\hat{h}_t(\hat{y}_0)\}$  é um levantamento de  $\gamma$  iniciando em  $\hat{y}_0$  e é, portanto, o mesmo que  $\hat{\gamma}$ . Em particular  $\hat{h}_1(\hat{y}_0) = \hat{\gamma}(1) = \hat{y}_1$ . Note que para cada  $t \in I$  fixado temos  $\widehat{h_t \circ f} = \hat{h}_t \circ \hat{f}$ , pois

$$\hat{q} \circ (\hat{h}_t \circ \hat{f}) = (h_t \circ \hat{q}) \circ \hat{f} = h_t \circ (\hat{q} \circ \hat{f}) = h_t \circ f.$$

Pelo Teorema 1.4,  $(\hat{h}_0 \circ \hat{f})^{-1}(\hat{y}_1) = \hat{f}^{-1}(\hat{h}_0^{-1}(\hat{y}_1)) = \hat{f}^{-1}(\hat{y}_1)$  está  $\{h_t \circ f\}$ -relacionada a  $(\hat{h}_1 \circ \hat{f})^{-1}(\hat{y}_1) = \hat{f}^{-1}(\hat{h}_1^{-1}(\hat{y}_1)) = \hat{f}^{-1}(\hat{y}_0)$ , pois se tivermos  $z_0 \in \hat{f}^{-1}(\hat{y}_0)$  e  $z_1 \in \hat{f}^{-1}(\hat{y}_1)$  temos que  $(\hat{h}_0 \circ \hat{f})(z_0) = \hat{h}_0(\hat{f}(z_0)) = \hat{h}_0(\hat{y}_1) = \hat{y}_1$  e  $(\hat{h}_1 \circ \hat{f})(z_1) = \hat{h}_1(\hat{f}(z_1)) = \hat{h}_1(\hat{y}_0) = \hat{y}_1$ . E portanto, pelo Teorema 2.6,

$$L_*(f, \hat{f}^{-1}(\hat{y}_1); G) = L_*(h_0 \circ f, \hat{f}^{-1}(\hat{y}_1); G) = L_*(h_1 \circ f, \hat{f}^{-1}(\hat{y}_0); G).$$

Assim, é suficiente provar que  $L_*(h_1 \circ f, \hat{f}^{-1}(\hat{y}_0); G) = \pm L_*(f, \hat{f}^{-1}(\hat{y}_0); G)$ . Seja  $N$  uma vizinhança fechada de  $\hat{f}^{-1}(\hat{y}_0)$  tal que  $N - \hat{f}^{-1}(\hat{y}_0)$  não possui raízes de  $f$  em  $y_0$ . Então temos as aplicações

$$X \overset{i}{\subset} (X, X - \hat{f}^{-1}(\hat{y}_0)) \overset{e}{\supset} (N, N - \hat{f}^{-1}(\hat{y}_0)) \xrightarrow{f'} (Y, Y - y_0) \xrightarrow{h'_1} (Y, Y - y_0),$$

onde  $f'$  é a aplicação definida por  $f$  e  $h'_1$  é o homeomorfismo definido por  $h_1 : Y \rightarrow Y$ . Note que  $h'_1$  está bem definida porque  $h_1(y_0) = \gamma(1) = y_0$ . Então  $L_*(f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0); G) = f'_* \circ e_*^{-1} \circ i_*$  e  $L_*(h_1 \circ f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0); G) = h'_{1*} \circ f'_* \circ e_*^{-1} \circ i_*$ . Assim,

$$L_*(h_1 \circ f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0)) = (h'_1)_* \circ L_*(f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0)).$$

O homomorfismo  $h'_{1*}$  é induzido por um homeomorfismo e é portanto um isomorfismo. Agora, para uma variedade  $Y$ ,  $H_n(Y, Y - y_0; G) \approx G$  e  $H_p(Y, Y - y_0; G) = 0$  para  $p \neq n$ . Deste modo, para  $G = \mathbb{Z}$  os únicos automorfismos de  $H_*(Y, Y - y_0; G)$  são  $\mu \mapsto \mu$  e  $\mu \mapsto -\mu$ , e para  $G = \mathbb{Z}_2$  o único automorfismo de  $H_*(Y, Y - y_0; G)$  é a identidade  $\mu \mapsto \mu$ . Assim, temos que  $L_*(h_1 \circ f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0); G) = \pm L_*(f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0); G)$ , como queríamos mostrar.

Agora suponha que  $Y$  seja orientável. Mostraremos que  $h'_{1*}$  é a identidade. Como  $h_1 : Y \rightarrow Y$  é homotópico a identidade, a aplicação induzida  $h_{1*} : H_*(Y) \rightarrow H_*(Y)$  é a identidade, deste modo o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} Y \xrightarrow{j} (Y, Y - y_0) & \text{induz} & H_*(Y; G) \xrightarrow{j_*} H_*(Y, Y - y_0; G) \\ \downarrow h_1 & & \parallel & \downarrow h'_{1*} \\ Y \xrightarrow{j} (Y, Y - y_0) & & H_*(Y; G) \xrightarrow{j_*} H_*(Y, Y - y_0; G) \end{array}$$

Como  $Y$  é compacta e orientável, temos que  $j_{*n} : H_n(Y; G) \rightarrow H_n(Y, Y - y_0; G)$  é um isomorfismo e  $H_p(Y, Y - y_0; G) = 0$  para  $p \neq n$ . Então  $j_*$  é um epimorfismo o que implica que  $h'_{1*}$  é também a identidade. De fato, suponha que exista  $a \in H_n(Y, Y - y_0)$  tal que  $h'_{1*}(a) \neq a$ . Como  $j_{*n}$  é sobrejetora, existe  $b \in H_n(Y; G)$  tal que  $j_{*n}(b) = a$ . Mas, neste caso,  $a \neq h'_{1*}(a) = h'_{1*} \circ j_{*n}(b) = j_{*n} \circ h_{1*}(b) = j_{*n}(b) = a$ .

Ficou provado que  $L_*(h_1 \circ f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0); G) = h'_{1*} \circ L_*(f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0); G) = L_*(f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0); G)$ . ■

Terminamos este capítulo com uma seção de exemplos.

## 2.3 Exemplos

**Exemplo 2.15** (Auto aplicações da esfera  $S^n$ , com  $n \geq 2$ ). Seja  $f : S^n \rightarrow S^n$  uma auto aplicação da  $n$ -esfera, com  $n \geq 2$ , e seja  $y_0 \in S^n$  um ponto arbitrário. Então existe no máximo uma classe de Nielsen para  $f$ , pois se  $x_0, x_1 \in f^{-1}(y_0)$  e  $\gamma$  é um caminho qualquer em  $S^n$  de  $x_0$  para  $x_1$ , então  $f \circ \gamma$  é um laço em  $S^n$  baseado em  $y_0$ . Como  $S^n$  é simplesmente conexo para  $n \geq 2$ ,  $f \circ \gamma \simeq_p y_0$ . Como  $\lambda(f, S^n) = \deg(f)$ , segue do Corolário 2.7 que  $N(f, y_0) = 1$  se  $\deg(f) \neq 0$ . Por outro lado,

pelo Teorema Hn pág 53 de [11] (teorema devido a Hopf), se  $\deg(f) = 0$  então  $f$  é homotópica a uma aplicação constante que pode ser tomada diferente de  $y_0$ . Assim  $N(f, y_0) = 0$  se  $\deg(f) = 0$ . Além disso, segue dos Lemas 5.1 e 5.2 de [8] que  $MR(f, y_0) = 0$  se  $\deg(f) = 0$  (isto é óbvio, pelo o que acabamos de dizer) e  $MR(f, y_0) = 1$  se  $\deg(f) \neq 0$ . Em particular, segue-se que para qualquer aplicação  $f : S^n \rightarrow S^n$ , com  $n \geq 2$ , vale a identidade  $N(f, y_0) = MR(f, y_0)$ . O próximo exemplo mostra que isso também vale em dimensão 1.

**Exemplo 2.16** (*Auto aplicações da circunferência  $S^1$* ). Sejam  $f : S^1 \rightarrow S^1$  uma auto aplicação da circunferência  $S^1$  e  $y_0 \in S^1$  um ponto. Como  $\pi_1(S^1, x) \approx \mathbb{Z}$  é abeliano, podemos usar o Teorema 1.15 para calcular  $\mathcal{R}(f) = \#\text{coker}(f_{*1}) : H_1(S^1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S^1; \mathbb{Z})$ . Pela definição de grau,  $f_{*1}(c) = \deg(f)c$  para qualquer  $c \in H_1(S^1; \mathbb{Z})$ . Assim

$$\mathcal{R}(f) = \#\text{coker}(f_{*1}) = \#(\mathbb{Z}/\deg(f)\mathbb{Z}) = \begin{cases} \infty & \text{se } \deg(f) = 0 \\ |\deg(f)| & \text{se } \deg(f) \neq 0 \end{cases}.$$

De acordo com o Teorema-Definição 2.11,  $\lambda(f, X) = \deg(f)$ . Assim se  $\deg(f) \neq 0$ , então  $N(f, y_0) > 0$  e, pelo Corolário 1.19,  $N(f, y_0) = \mathcal{R}(f) = |\deg(f)|$ . Por outro lado, se  $\deg(f) = 0$  então  $\mathcal{R}(f) = \infty$ . E pelo Corolário 1.21,  $N(f, y_0) = 0$ . Concluimos que, em qualquer dos casos,  $N(f, y_0) = |\deg(f)|$ . Agora, como no exemplo anterior, usamos o Teorema de Hopf Hn pag 53 de [11], que afirma que duas auto-aplicações de  $S^1$  são homotópicas se, e somente se, tem o mesmo grau, para calcular  $MR(f, y_0)$ . Se  $\deg(f) = 0$ , então  $f$  é homotópica a uma constante e é claro que  $MR(f) = 0$ . Por outro lado, se  $\deg(f) = d \neq 0$ , então  $f$  é homotópica a aplicação  $z \mapsto z^d$  que possui  $d$  raízes. Como, neste caso,  $N(f, y_0) = d$ , segue que também  $MR(f, y_0) = d$ .

**Exemplo 2.17** (*Aplicações da figura oito em  $S^1$* ). Seja  $S^1$  a circunferência unitária no plano complexo,  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ . Então  $X = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1$  é chamado a figura oito. Seja  $f : X \rightarrow S^1$  uma aplicação e fixe o ponto  $1 \in S^1$ . Vamos investigar  $N(f, 1)$  e  $MR(f, 1)$ .

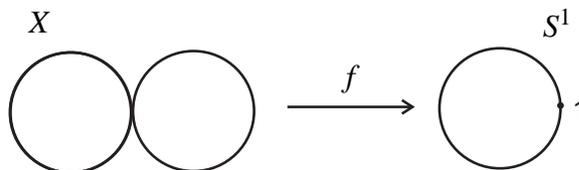


Figura 2.1: Aplicações da figura oito em  $S^1$

Sejam  $l : S^1 \rightarrow X$  e  $r : S^1 \rightarrow X$  as inclusões  $l(z) = (z, 1)$  e  $r(z) = (1, z)$ . Sejam também  $j : S^1 \subset (S^1, S^1 - 1)$ ,  $\mu$  um gerador de  $H_1(S^1)$  e  $f_{*1}$  como no Teorema 1.15. Então  $H_1(X)$  é um grupo abeliano gerado por  $l_1(\mu)$  e  $r_1(\mu)$  temos

$$f_{*1}(al_1(\mu) + br_1(\mu)) = af_{*1}(l_1(\mu)) + bf_{*1}(r_1(\mu)) = (a \deg(f_{*1} \circ l_1) + b \deg(f_{*1} \circ r_1))\mu. \quad (2.5)$$

Como  $j_{*1} : H_1(S^1) \rightarrow H_1(S^1, S^1 - 1)$  é um isomorfismo, temos

$$L_*(f, X) = j_* \circ f_* \neq 0.$$

Assim, se  $\deg(f \circ l) \neq 0$  ou  $\deg(f \circ r) \neq 0$ , então  $N(f, 1) > 0$ .

Como  $\pi_1(S^1, s)$  é abeliano para qualquer  $s$ , segue do Teorema 1.15 que  $\mathcal{R}(f) = \#\text{coker} f_{*1}$ . Da Equação 2.5 temos  $\text{coker}(f_{*1}) \approx \mathbb{Z}/(\deg(f \circ l)\mathbb{Z} + \deg(f \circ r)\mathbb{Z})$ . Portanto

$$\mathcal{R}(f) = \begin{cases} \text{mdc}(|\deg(f \circ l)|, |\deg(f \circ r)|), & \text{se qualquer grau é não nulo,} \\ \infty, & \text{se são ambos nulos.} \end{cases}$$

No primeiro caso,  $N(f, 1) > 0$ . Assim, pelo Corolário 1.19,  $N(f, 1) = \mathcal{R}(f)$ . No último caso,  $N(f, 1) = 0$ , pelo Corolário 1.21. Deste modo,

$$N(f, 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } \deg(f \circ l) = \deg(f \circ r) = 0, \\ \text{mdc}(|\deg(f \circ l)|, |\deg(f \circ r)|) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em particular, para a aplicação  $f(z_1, z_2) = z_1^2 z_2$  temos  $f \circ l(z) = f(l(z)) = f(z, 1) = z^2$  e  $f \circ r(z) = f(r(z)) = f(1, z) = z$ . Assim  $N(f, 1) = \text{mdc}(2, 1) = 1$ . Note que, neste caso, apesar do número de Nielsen ser igual a 1, qualquer aplicação homotópica a  $f$  terá pelo menos duas raízes. Isto acontece porque para qualquer aplicação  $f'$  homotópica a  $f$ , a composição  $f' \circ l$  terá de grau 2 e possuirá, portanto, pelo menos duas raízes,  $z_0$  e  $z_1$  digamos. Então  $(z_0, 1)$  e  $(z_1, 1)$  serão raízes de  $f'$ . Portanto, temos neste caso particular,  $MR(f, 1) = 2 > N(f, 1) = 1$ .

**Exemplo 2.18** Seja  $X$  o espaço constituído de uma circunferência  $S^1$  conectada por um segmento de reta a outra circunferência  $S^1$  e seja  $X' = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1$  a figura oito do Exemplo 2.17. Seja  $r : X \rightarrow X'$  a aplicação que colapsa o segmento de reta que une as duas circunferências.

Note que  $r$  definida desta forma é uma equivalência de homotopia. Seja  $\psi : X' \rightarrow S^1$  a aplicação que restrita a cada circunferência  $S^1$  de  $X'$  é homotópica a aplicação identidade de  $S^1$ . Temos que  $MR(\psi, 1) = 1$ . Por outro lado, argumentos simples semelhantes aos utilizados no Exemplo 1.12 mostram que  $MR(\psi \circ r, 1) = 2$ . Isto mostra que o número mínimo de raízes  $MR(\cdot, y_0)$  não é um invariante do tipo de homotopia do espaço domínio das aplicações, conforme havíamos adiantado na Observação 1.11. Para mais detalhes a este respeito, ver [12].

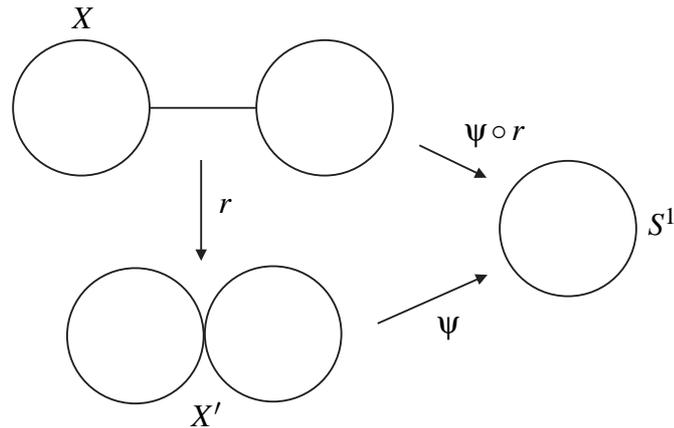


Figura 2.2:  $MR(f, y_0)$  não é um invariante por tipo de homotopia

**Exemplo 2.19** Seja  $X = \bigvee_{\alpha \in \mathbb{Z}} S_\alpha$  um bouquet com uma quantidade infinita enumerável de circunferências  $S_\alpha$ . Considere  $X$  munido da topologia fraca com relação às circunferências  $S_\alpha$ . Nesta topologia, um conjunto é aberto em  $X$  se, e somente se, sua interseção com cada  $S_\alpha$  é aberto. Seja  $f : X \rightarrow S^1$  uma aplicação. Para cada  $\alpha \in \mathbb{Z}$  seja  $i_\alpha : S_\alpha \subset X$  a inclusão. Então, como no Exemplo 2.17, mostra-se que

$$N(f, 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } \deg(f \circ i_\alpha) = 0 \text{ para todo } \alpha, \\ \text{mdc}_\alpha(|\deg(f \circ i_\alpha)|) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isto nos dá um exemplo não trivial de uma aplicação de um espaço não compacto  $X$ . Ele também nos fornece uma fonte de exemplos onde  $N(f, 1) < \infty$ , mas  $MR(f, 1) = \infty$ .

**Exemplo 2.20** (*Aplicações de  $S^1$  na figura oito*). Como no Exemplo 2.17, seja  $S^1$  a circunferência unitária em  $\mathbb{C}$  e seja a  $Y$  figura oito,  $Y = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1$ . Seja  $y_0 = (1, 1)$ . Analisamos a aplicação  $l : S^1 \rightarrow Y$  do Exemplo 2.17. Temos  $l(1) = y_0$  e 1 é a única raiz de  $l$  em  $y_0$ . Deste modo existe uma única classe de Nielsen para  $l$  e  $N(f, y_0) \leq 1$ . O espaço  $Y - y_0$  é a reunião de duas componentes por caminho contráteis; portanto  $H_1(Y - y_0) = 0$ . Segue da exatidão da sequência

$$0 = H_1(Y - y_0) \rightarrow H_1(Y) \xrightarrow{j_{*1}} H_1(Y, Y - y_0) \rightarrow$$

que  $j_{*1}$  é um monomorfismo. Deste modo  $L_1(l, X) = j_{*1} \circ l_{*1} = 0$  se, e somente se,  $l_{*1} = 0$ . Agora, seja  $p_l : Y \rightarrow S^1$  a projeção a esquerda,  $p_l(z_1, z_2) = z_1$ . Então  $p_l \circ l$  é a identidade em  $S^1$ . Assim, usando qualquer grupo de coeficientes não trivial, segue que  $l_{*1} \neq 0$ . Isto prova que  $L_1(l, X) \neq 0$ . Logo  $N(l, y_0) > 0$  e, portanto,  $N(l, y_0) = 1$ . Também é claro que  $MR(l, y_0) = 1$ .

Note que neste exemplo  $\mathcal{R}(l) = \#\text{coker}(l_{\#}) = \infty$ . Assim, a desigualdade  $N(l, y_0) < \mathcal{R}(l)$  vale apesar do fato de  $N(l, y_0) > 0$ . Contudo, esse fato não contradiz os resultados de Seção 1.2, pois neste exemplo  $Y$  não é uma variedade, hipótese essencial daqueles resultados.

**Exemplo 2.21** (*Aplicações do anel no anel pinçado*). Seja  $X$  o anel aberto no plano complexo,

$$X = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < \|z\| < 2\}.$$

Seja  $J$  o intervalo no eixo  $x$ ,  $J = \{x + iy \in X : 1/2 < x < 2 \text{ e } y = 0\} \subset X$ . Pinçamos o conjunto  $J$  a um ponto no espaço  $X$  para obter um espaço  $Y = X/J$ . Seja  $f : X \rightarrow Y$  a projeção  $f(z) = [[z]]$ , onde  $[[z]]$  é a classe de equivalência contendo  $z$ , isto é,  $f(z) = \{z\}$  se  $z \notin J$  e  $f(z) = J$  se  $z \in J$ .

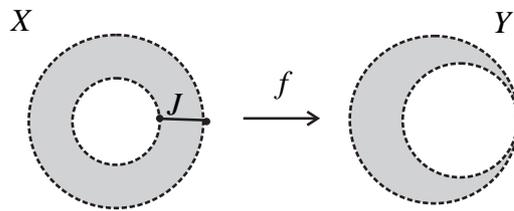


Figura 2.3: Aplicações do anel no anel pinçado

Seja  $y_0 = J \in Y$ . Então  $f^{-1}(y_0) = J$ . Mas dados dois pontos  $z_0, z_1 \in J$  podemos definir um caminho  $\gamma$  em  $X$  por  $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$  e então  $f \circ \gamma$  é o caminho constante em  $y_0$ . Deste modo,  $f^{-1}(y_0) = J$  é a única classe de Nielsen de  $f$ . Portanto  $N(f, y_0) \leq 1$ . A aplicação  $r : X \rightarrow S^1$  dada por  $r(z) = z/\|z\|$  é um retrato por deformação e induz retrações por deformação  $r' : Y \rightarrow S^1$  e  $r'' : (Y, Y - y_0) \rightarrow (S^1, S^1 - 1)$  tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{j} & (Y, Y - y_0) \\ r \downarrow & & r' \downarrow & & r'' \downarrow \\ S^1 & \xlongequal{\quad} & S^1 & \xrightarrow{k} & (S^1, S^1 - 1). \end{array}$$

As retrações por deformação  $r, r', r''$  induzem isomorfismos em todos os níveis de homologia e  $k$  induz um isomorfismo no primeiro grupo de homologia. Segue que  $f_{*1}$  e  $j_{*1}$  são isomorfismos. Assim  $L_1(f, X) = j_{*1} \circ f_{*1} : H_1(S^1) \rightarrow H_1(Y, Y - y_0)$  é diferente de zero. Deste modo  $N(f, y_0) > 0$  e, portanto,  $N(f, y_0) = 1$ . Note que  $X$  e  $Y$  são ambos não compactos.

Agora seja  $y_0$  qualquer outro ponto em  $Y$ ; então  $y_0 = \{z_0\}$  para um único ponto  $z_0 \in X$ . Se  $\|z_0\| \neq 1$ , então a aplicação  $f' = f \circ r$  é homotópica a  $f$  mas não possui raízes em  $y_0$ . Se  $\|z_0\| = 1$ , então podemos redefinir  $r$  por  $r(z) = 3z/2\|z\|$  e, então,  $f' = f \circ r$  é homotópica a  $f$  mas não possui raízes em  $y_0$ .

Isto prova que  $N(f, y_0) = 0$ , a menos que  $y_0 = J$ , caso em que  $N(f, z_0) = 1$ . Isto nos faz concluir que quando  $Y$  não é uma variedade, o número de Nielsen  $N(f, y_0)$  pode ser dependente da escolha do ponto  $y_0 \in Y$ .

A maior parte dos exemplos acima tem sido escolhidos por uma patologia ou outra. Nosso próximo exemplo talvez seja o menos patológico dos exemplos.

**Exemplo 2.22** Seja  $X = Y = \mathbb{T}^n$  um toro  $n$ -dimensional, quer dizer, o produto cartesiano a  $n$  componentes da circunferência  $S^1$ . Sejam  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  uma aplicação e  $y_0 \in \mathbb{T}^n$  um ponto. Como  $\pi_1(\mathbb{T}^n, x)$  é abeliano, segue do Teorema 1.15 que  $\mathcal{R}(f) = \#\text{coker}(f_{*1})$ , onde  $f_{*1}$  é o homomorfismo induzido no primeiro grupo de homologia com coeficientes inteiros.

Usamos o seguinte fato<sup>2</sup> sobre homomorfismos de grupos abelianos livres: Seja  $\phi : G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos abelianos livres de mesmo posto (finito) e seja  $A$  a matriz de  $\phi$  relativa a uma base de  $G$  e uma base de  $H$  fixadas. Então, ou  $\det(A) = 0$ , caso em que  $\#\text{coker}(\phi) = \infty$ , ou  $\det(A) \neq 0$  e, neste caso,  $\#\text{coker}(\phi) = |\det(A)|$ .

O grupo  $H_1(\mathbb{T}^n)$  é abeliano livre de posto  $n$ . Escolha uma base  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  para  $H_1(\mathbb{T}^n)$  e seja  $A = \{a_{ij}\}$  a matriz de  $f_{*1}$  relativa a esta base. Então

$$\mathcal{R}(f) = \begin{cases} \infty & \text{se } \det(A) = 0, \\ |\det(A)| & \text{se } \det(A) \neq 0. \end{cases}$$

Mas também temos<sup>3</sup>  $\deg(f) = \det(A)$ . Como  $\lambda(f, \mathbb{T}^n) = \deg(f)$ , temos  $N(f) > 0$  se  $\deg(f) = \det(A) \neq 0$ . Por outro lado, como acabamos de ver, se  $\det(A) = 0$ , então  $\mathcal{R}(f) = \infty$ . E neste caso, pelo Corolário 1.21,  $N(f) = 0$ . Concluimos que, em qualquer dos casos,

$$N(f, y_0) = |\deg(f)| = |\det(A)|.$$

Para finalizar esta seção, apresentamos mais dois exemplos interessantes. Neles será importante considerar os espaços envolvidos munidos de uma estrutura celular. Estes dois exemplos foram primeiramente desenvolvidos em [12] e posteriormente publicados em [8], onde mais informações podem ser encontradas, além das apresentadas aqui.

---

<sup>2</sup>Uma prova resumida deste fato pode ser vista no rodapé da página 402 de [1].

<sup>3</sup>Este resultado é um exercício clássico de Topologia Algébrica que se faz utilizando-se da estrutura do anel de cohomologia  $H^*(\mathbb{T}^n)$ .

**Exemplo 2.23** Seja  $p_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  o recobrimento duplo orientado de  $\mathbb{R}P^2$ . Vamos construir um 2-complexo  $K$  e uma aplicação  $f : K \rightarrow \mathbb{R}P^2$  tendo um levantamento  $\tilde{f} : K \rightarrow S^2$  e satisfazendo:

$$N(f) = 2 \quad \text{e} \quad MR(f) = 3.$$

Iniciamos construindo o 2-complexo  $K$ . Sejam  $S_1, S_2$  e  $S_3$  três cópias da 2-esfera consideradas como o bordo do 3-simplexo padrão  $\Delta^3$ ,

$$S_1 = \partial\langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle, \quad S_2 = \partial\langle y_0, y_1, y_2, y_3 \rangle, \quad S_3 = \partial\langle z_0, z_1, z_2, z_3 \rangle.$$

Seja  $K$  o 2-complexo (simplicial) obtido da união disjunta  $S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3$  identificando-se  $[x_0, x_1] = [y_0, y_1]$  e  $[y_0, y_2] = [z_0, z_1]$ . Assim, cada  $S_i, i = 1, 2, 3$ , está mergulhada em  $K$  de modo que

$$S_1 \cap S_2 = [x_0, x_1] = [y_0, y_1] \quad \text{e} \quad S_2 \cap S_3 = [y_0, y_2] = [z_0, z_1].$$

Então,  $S_1 \cap S_2 \cap S_3$  é um único ponto  $x_0 = y_0 = z_0$ . Veja a figura abaixo.

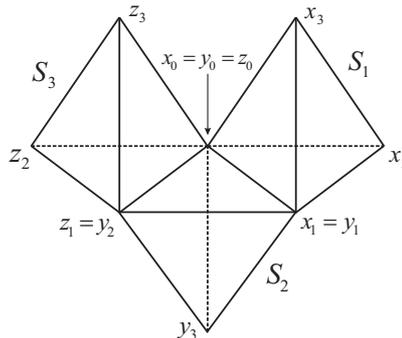


Figura 2.4: Um 2-complexo simplicial

Dois complexos simpliciais  $A$  e  $B$  são isomorfos se, e somente se, existe uma bijeção  $\phi$  entre o conjunto de vértices de  $A$  e de  $B$  tal que  $\{v_1, \dots, v_s\}$  é um simplexo de  $A$  se, e somente se,  $\{\phi(v_1), \dots, \phi(v_s)\}$  é um simplexo de  $B$  (veja [13], página 128). Usando este fato, podemos construir homeomorfismos  $h_{21} : S_2 \rightarrow S_1$  e  $h_{32} : S_3 \rightarrow S_2$  tais que  $h_{21}|_{S_1 \cap S_2} = \text{identidade}$  e  $h_{32}|_{S_2 \cap S_3} = \text{identidade}$ .

Seja  $\hat{f}_1 : S_1 \rightarrow S^2$  qualquer homeomorfismo de  $S_1$  sobre  $S^2$ . Defina  $\hat{f}_2 = \hat{f}_1 \circ h_{21} : S_2 \rightarrow S^2$  e note que  $\hat{f}_2(x) = \hat{f}_1(x)$  para  $x \in S_1 \cap S_2$ . Agora, defina  $\hat{f}_3 = \hat{f}_2 \circ h_{32} : S_3 \rightarrow S^2$  e note que  $\hat{f}_3(x) = \hat{f}_2(x)$  para  $x \in S_2 \cap S_3$ . Em particular,  $\hat{f}_1(x_0) = \hat{f}_2(x_0) = \hat{f}_3(x_0)$ . Assim,  $\hat{f}_1, \hat{f}_2$  e  $\hat{f}_3$  podem ser conjuntamente utilizadas para se definir uma aplicação  $\hat{f} : K \rightarrow S^2$  tal que  $\hat{f}|_{S_i} = \hat{f}_i$  para  $i = 1, 2, 3$ .

Seja  $f : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$  a composição  $f = p_2 \circ \widehat{f}$ , onde  $p_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  é o recobrimento duplo canônico. Note que  $f_{\#}(\pi_1(K)) = (p_2)_{\#}(\pi_1(S^2))$ . Assim, podemos utilizar o Teorema 1.8 para estudar as classes de Nielsen de  $f$  através do seu levantamento  $\widehat{f}$ .

Seja  $a = f(x_0) \in \mathbb{RP}^2$  e seja  $p_2^{-1}(a) = \{\hat{a}, -\hat{a}\}$  a fibra de  $p_2$  sobre  $a$ .

O homomorfismo  $\widehat{f}_* : H_2(K) \rightarrow H_2(S^2)$  é sobrejetor, com  $H_2(K) \approx \mathbb{Z}^3$  e  $H_2(S^2) \approx \mathbb{Z}$ . Logo, toda aplicação de  $K$  em  $S^2$  homotópica a  $\widehat{f}$  é sobrejetora. Segue-se que, para toda aplicação  $\widehat{g} : K \rightarrow S^2$  homotópica a  $\widehat{f}$ , tem-se  $\widehat{g}^{-1}(\hat{a}) \neq \emptyset$  e  $\widehat{g}^{-1}(-\hat{a}) \neq \emptyset$ . Pelo Teorema 1.8,  $\widehat{f}^{-1}(\hat{a})$  e  $\widehat{f}^{-1}(-\hat{a})$  são as classes de Nielsen para raízes de  $f$  e ambas são essenciais. Portanto,  $N(f) = 2$ .

Para provar que  $\mu(f) \geq 3$ , note que, segue do fato de cada restrição  $\widehat{f}|_{S_i}$  ser um homeomorfismo e  $p_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  ser um recobrimento duplo, que para cada aplicação  $g$  homotópica a  $f$ , a equação  $g(x) = a$  deve possuir ao menos duas raízes em cada  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Pela decomposição de  $K$ , isto implica que  $\mu(f) \geq 3$ . Agora, para provar que  $\mu(f) = 3$ , basta exibir uma aplicação  $\phi$  homotópica a  $f$  que possua três raízes. Sejam  $a_0 = \widehat{f}(x_0)$  e  $a_1 = \widehat{f}(x_1)$ . Então  $a_0$  e  $a_1$  são pontos distintos da esfera  $S^2$  e, pelo Lema 3.3 de [8] existe um recobrimento duplo  $q_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ , isomorfo e homotópico a  $p_2$  tal que  $q_2^{-1}(a) = \{a_0, a_1\}$ , onde, como antes,  $a = f(x_0)$ . Defina  $\phi : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$  pela composição  $\phi = q_2 \circ \widehat{f}$ . Então  $\phi$  é homotópica a  $f$  e temos  $\phi^{-1}(a) = \widehat{f}^{-1}(\{a_0, a_1\}) = \{x_0, x_1, b\}$ , onde  $b \in S_3$  é o ponto  $h_{32}^{-1}(x_1)$ . Isto prova que  $\mu(f) = 3$ .

Agora, apresentamos um exemplo similar onde o contra-domínio da aplicação  $f$  construída é o toro  $\mathbb{T}^2$ . Neste exemplo, o complexo  $K$ , domínio da aplicação  $f$ , é um pouco mais complicado.

**Exemplo 2.24** Seja  $p_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  um recobrimento duplo. Vamos construir um 2-complexo  $K$  e uma aplicação  $f : K \rightarrow \mathbb{T}^2$  tendo um levantamento  $\widehat{f} : K \rightarrow \mathbb{T}^2$  ao longo de  $p_2$  e satisfazendo:

$$N(f) = 2 \quad \text{e} \quad MR(f) = 3.$$

Iniciamos construindo o 2-complexo  $K$ . Considere três cópias  $\mathbb{T}_1$ ,  $\mathbb{T}_2$  e  $\mathbb{T}_3$  do toro com decomposição celular minimal. Seja  $\alpha_i$  (respectivamente  $\beta_i$ ) a 1-célula fechada longitudinal (respectivamente meridional) do toro  $\mathbb{T}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Seja  $K$  o 2-complexo obtido da união disjunta  $\mathbb{T}_1 \sqcup \mathbb{T}_2 \sqcup \mathbb{T}_3$  identificando-se

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \beta_2.$$

Isto é,  $K$  é obtido colando-se os toros  $\mathbb{T}_1$  e  $\mathbb{T}_2$  através das 1-células fechadas longitudinais e, em seguida, colando-se a 1-célula fechada longitudinal do toro  $\mathbb{T}_3$  na 1-célula fechada meridional do toro  $\mathbb{T}_2$ .

Cada toro  $\mathbb{T}_i$  está mergulhado em  $K$  de modo que

$$\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 = \alpha_1 = \alpha_2, \quad \mathbb{T}_2 \cap \mathbb{T}_3 = \alpha_3 = \beta_2 \quad \text{e} \quad \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_3 = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 \cap \mathbb{T}_3 = \{e^0\},$$

onde  $e^0$  é a (única) 0-célula de  $K$ , correspondendo as 0-células de  $\mathbb{T}_1$ ,  $\mathbb{T}_2$  e  $\mathbb{T}_3$  através das identificações. O 2-complexo  $K$  está ilustrado na figura abaixo.

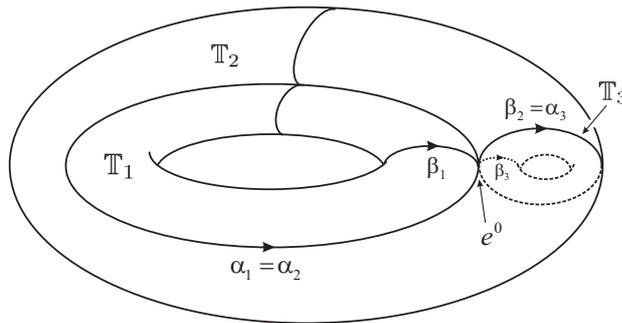


Figura 2.5: Um 2-complexo obtido colando-se três toros

Daqui em diante, escrevemos  $\mathbb{T}_i$  para denotar a imagem do toro original  $\mathbb{T}_i$  em  $K$ .

Existem homeomorfismos  $h_{21} : \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{T}_1$  e  $h_{32} : \mathbb{T}_3 \rightarrow \mathbb{T}_2$  com  $h_{21}|_{\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2} = \text{identidade}$ ,  $h_{32}|_{\mathbb{T}_2 \cap \mathbb{T}_3} = \text{identidade}$  e tais que  $h_{21}$  aplica  $\beta_2$  sobre  $\beta_1$  e  $h_{32}$  aplica  $\beta_3$  sobre  $\alpha_2$ . Assim, dado um ponto  $x_3 \in \beta_3$ , tem-se  $h_{32}(x_3) \in \alpha_1 = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ . Utilizaremos este fato mais adiante.

Seja  $\widehat{f}_1 : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}^2$  um homeomorfismo aplicando longitude em longitude e meridiano em meridiano. Defina  $\widehat{f}_2 = \widehat{f}_1 \circ h_{21} : \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  e note que  $\widehat{f}_2(x) = \widehat{f}_1(x)$  para  $x \in \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ . Agora, defina  $\widehat{f}_3 = \widehat{f}_2 \circ h_{32} : \mathbb{T}_3 \rightarrow \mathbb{T}^2$  e note que  $\widehat{f}_3(x) = \widehat{f}_2(x)$  para  $x \in \mathbb{T}_2 \cap \mathbb{T}_3$ . Em particular, temos que  $\widehat{f}_1(e^0) = \widehat{f}_2(e^0) = \widehat{f}_3(e^0)$ . Assim,  $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2$  e  $\widehat{f}_3$  podem ser conjuntamente utilizadas para se definir uma aplicação  $\widehat{f} : K \rightarrow \mathbb{T}^2$  tal que  $\widehat{f}|_{\mathbb{T}_i} = \widehat{f}_i$  para  $i = 1, 2, 3$ .

Seja  $p_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  um recobrimento duplo arbitrário. (Podemos considerar, por exemplo, o recobrimento duplo longitudinal que associa a cada ponto  $z \in \mathbb{T}^2$ , considerado como um par  $(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1$ , o ponto  $p_2(z) = (z_1^2, z_2)$ ).

Defina a aplicação  $f : K \rightarrow \mathbb{T}^2$  pela composição  $f = p_2 \circ \widehat{f}$ .

Para que se possa utilizar o Teorema 1.8 para estudar as classes de Nielsen para raízes de  $f$  através das informações sobre  $\widehat{f}$ , precisamos provar que  $f_{\#}(\pi_1(K)) = (p_2)_{\#}(\pi_1(\mathbb{T}^2))$ . Agora, como  $f_{\#} = (p_2)_{\#} \circ \widehat{f}_{\#}$ , é suficiente provar que  $\widehat{f}_{\#}$  é um epimorfismo. É isto o que faremos. Considere a composição  $\widehat{f} \circ l : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , onde  $l : \mathbb{T}_1 \hookrightarrow K$  é a inclusão óbvia. Esta composição é exatamente o homeomorfismo  $\widehat{f}_1$  e, portanto, o homomorfismo induzido  $\widehat{f}_{\#} \circ l_{\#} = (\widehat{f}_1)_{\#}$  é um isomorfismo. Segue-se que  $\widehat{f}_{\#}$  é um epimorfismo.

Seja  $a = f(e^0) \in \mathbb{T}^2$  e seja  $p_2^{-1}(a) = \{\hat{a}, \hat{a}'\}$  a fibra de  $p_2$  sobre  $a$ . (Se  $p_2$  é o recobrimento duplo longitudinal, como acima, então se  $\hat{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ , tem-se  $\hat{a}' = (-\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ ).

O homomorfismo  $\hat{f}_* : H_2(K) \rightarrow H_2(\mathbb{T}^2)$  é sobrejetor, com  $H_2(K) \approx \mathbb{Z}^3$  e  $H_2(\mathbb{T}^2) \approx \mathbb{Z}$ . Logo, toda aplicação de  $K$  em  $\mathbb{T}^2$  homotópica a  $\hat{f}$  é sobrejetora. Segue-se que, para toda aplicação  $\hat{g} : K \rightarrow \mathbb{T}^2$  homotópica a  $\hat{f}$ , tem-se  $\hat{g}^{-1}(\hat{a}) \neq \emptyset$  e  $\hat{g}^{-1}(\hat{a}') \neq \emptyset$ . Pelo Teorema 1.8,  $\hat{f}^{-1}(\hat{a})$  e  $\hat{f}^{-1}(\hat{a}')$  são as classes de Nielsen para raízes de  $f$  e ambas são essenciais. Portanto,  $N(f) = 2$ .

Para provar que  $\mu(f) = 3$ , note que, cada restrição  $\hat{f}|_{\mathbb{T}_i}$  é um homeomorfismo e  $p_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  é um recobrimento duplo, então para cada aplicação  $g$  homotópica a  $f$ , a equação  $g(x) = a$  deve possuir ao menos duas raízes em cada  $\mathbb{T}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Pela decomposição de  $K$ , isto implica que  $\mu(f) \geq 3$ . Agora, suponha que  $x_3$  é um ponto em  $\beta_3$ , diferente de  $e^0$ . Como temos visto,  $h_{32}(x_3) \in \alpha_1 \subset \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ . Seja  $x_{12} = h_{32}(x_3)$ . Pela definição de  $\hat{f}$ , temos  $\hat{f}(x_{12}) = \hat{f}(x_3) \neq \hat{f}(e^0)$ . Denote  $y_0 = \hat{f}(e^0)$  e  $y_1 = \hat{f}(x_{12})$ .

Seja  $a \in \mathbb{T}^2$  e seja  $p_2^{-1}(a) = \{\hat{a}, \hat{a}'\}$  a fibra de  $p_2$  sobre  $a$ . Como  $\mathbb{T}^2$  é uma superfície, existe um homeomorfismo  $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  homotópico a aplicação identidade tal que  $h(y_0) = \hat{a}$  e  $h(y_1) = \hat{a}'$ . Seja  $q_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  a composição  $q_2 = p_2 \circ h$  e seja  $\varphi : K \rightarrow \mathbb{T}^2$  a composição  $\varphi = q_2 \circ \hat{f}$ . Então  $\varphi$  é homotópica a  $f$  e  $\varphi^{-1}(a) = \{e^0, x_{12}, x_3\}$ . Como  $\mu(f) \geq 3$ , isto mostra que  $\mu(f) = 3$ .

**Observação 2.25** (O papel da compacidade). Para a maior parte da teoria como desenvolvida até agora não temos assumido se  $X$  ou  $Y$  é compacto. No Exemplo 2.19, o espaço  $X$  (o bouquet de um número infinito de circunferências) não é compacto, e a aplicação  $f$  pode ser construída para ter qualquer número de Nielsen finito desejado. No Exemplo 2.21, os espaços  $X$  e  $Y$  são ambos não compactos e  $N(f, y_0) = 1$ . Por outro lado, o importante Teorema 2.6 e seus corolários requerem que  $X$  seja compacto.

# Capítulo 3

## Teoria do Grau de Hopf

Neste capítulo trataremos apenas de aplicações entre variedades de mesma dimensão. Nossa meta é apresentar dois dos teoremas mais importantes da teoria topológica de raízes, Teoremas 3.4 e 3.6 abaixo, ambos devidos originalmente a Hopf [2]. Vamos restringir nossa apresentação a variedades compactas (sem bordo), orientáveis ou não. Versões de ambos teoremas são verdadeiras para aplicações de variedades de mesma dimensão, com ou sem bordo, compactas ou não-compactas e orientáveis ou não-orientáveis. Boa parte deste capítulo será dedicada à exposição de técnicas para lidar com a não-orientabilidade.

### 3.1 Os Teoremas de Hopf

Os Teoremas de Hopf, pontos centrais deste capítulo, fazem uso de dois conceitos, ainda não definidos, associados a uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  de duas variedades de mesma dimensão. O primeiro deles é a propriedade de  $f$  ser *transversal* a um ponto  $y_0 \in Y$ . O segundo é o *grau absoluto* de  $f$ , denotado por  $\mathcal{A}(f)$ . Damos a definição de transversalidade logo. A definição de grau absoluto é mais envolvente e levará mais tempo para ser desenvolvida. É suficiente dizer neste ponto que  $\mathcal{A}(f)$  é um invariante homotópico de  $f$  e que, quando  $f$  é uma aplicação de variedades compactas orientáveis, tem-se  $\mathcal{A}(f) = | \deg(f) |$ . Deste modo  $\mathcal{A}(f)$  generaliza o grau ordinário de Brouwer para variedades não necessariamente orientáveis.

**Definição 3.1** Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de variedades  $n$ -dimensionais e  $y_0 \in Y$  um ponto. Diz-se que  $f$  é *transversal* a  $y_0$  se  $y_0$  possui uma vizinhança  $N$  uniformemente recoberta por  $f$ ,

isto é, a pré-imagem  $f^{-1}(N)$  pode ser escrita como uma reunião disjunta

$$f^{-1}(N) = \bigcup_{x \in f^{-1}(y_0)} N_x$$

onde cada  $N_x$  é uma vizinhança de  $x \in f^{-1}(y_0)$  que é aplicada homeomorficamente em  $N$  por  $f$ .

Observe que ser transversal a  $y_0$  é ser um recobrimento (local) no ponto  $y_0$ . Logo,  $f : X \rightarrow Y$  é um recobrimento se, e somente se,  $f$  é transversal a todo ponto  $y_0 \in Y$ .

Nesta definição, podemos exigir que as vizinhanças sejam homeomorfas a bolas abertas, já que toda vizinhança de  $y_0$  contém uma vizinhança homeomorfa a uma bola aberta ( $Y$  é uma variedade) e qualquer aberto contido em um outro que seja uniformemente recoberto é também uniformemente recoberto.

Para  $f$  ser transversal em  $y_0$  é necessário que  $f$  seja um homeomorfismo local em cada ponto  $x \in f^{-1}(y_0)$ , isto é, que cada  $x \in f^{-1}(y_0)$  possua uma vizinhança que é aplicada homeomorficamente sobre sua imagem. Em geral, esta condição não é suficiente, exceto quando  $f$  é própria. Como trataremos de aplicações cujo domínio, a variedade  $X$ , é compacta, isto sempre ocorre.

**Observação 3.2** Suponha  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de  $n$ -variedades,  $y_0 \in Y$  e ambas  $X$  e  $Y$  triangularizáveis. Então podemos triangularizar  $Y$  de modo que  $y_0$  esteja em um simplexo aberto  $s$  de dimensão  $n$ . Pelo Teorema da Aproximação Simplicial (ver pag 177 de [5]), existe uma triangularização de  $X$  suficientemente fina de modo que podemos aproximar  $f$  por uma aplicação simplicial  $g$  homotópica a  $f$ . Então  $g^{-1}(s)$  é a reunião disjunta de  $n$ -simplexos abertos cada um dos quais é aplicado homeomorficamente sobre  $s$ . Assim  $g$  é transversal em  $y_0$ . Isto mostra que para qualquer aplicação  $f : X \rightarrow Y$  de  $n$ -variedades triangularizáveis e qualquer  $y_0 \in Y$ , existe uma aplicação homotópica a  $f$  que é transversal em  $y_0$ .

Mais geralmente, temos o seguinte teorema para aplicações entre variedades topológicas:

**Teorema 3.3 (Teorema 4.3 de [14])** *Suponha  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação entre  $n$ -variedades e  $y_0 \in Y$ . Então existe uma aplicação  $f' : X \rightarrow Y$  homotópica a  $f$  que é transversal a  $y_0$ .*

Como os principais entes matemáticos manipulados neste trabalho são invariantes por homotopia, o Teorema 3.3 nos mostra que exigir que as aplicações dadas a priori sejam transversais a  $y_0$  não acarreta em hipótese extra.

Antes de definir os novos conceitos envolvidos no enunciado e demonstração dos Teoremas de Hopf, passamos já ao enunciado e a breve exploração destes dois teoremas.

**Teorema 3.4 (1º Teorema de Hopf)** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de  $n$ -variedades compactas e  $y_0 \in Y$  um ponto. Então*

- (1) *Toda aplicação homotópica a  $f$  e transversal a  $y_0$  possui pelo menos  $\mathcal{A}(f)$  raízes em  $y_0$ .*
- (2) *Existe uma aplicação homotópica a  $f$  e transversal a  $y_0$  que possui  $\mathcal{A}(f)$  raízes em  $y_0$ .*

Em dimensão 1, a circunferência  $S^1$  é a única variedade compacta e sabemos que auto aplicações de  $S^1$  são homotópicas se, e somente se, tem o mesmo grau. Vimos no Exemplo 2.16 que toda aplicação  $f : S^1 \rightarrow S^1$  possui pelo menos  $|\deg(f)|$  raízes. Por outro lado, a aplicação  $z \mapsto z^r$  do círculo unitário possui exatamente  $r$  raízes em  $y_0$ , possui grau  $r$ , e é transversal a  $y_0$  para qualquer  $y_0 \in Y$ . Isto mostra que o Teorema 3.4 vale em dimensão 1. A prova para  $n = 2$  requer métodos bem diferentes do que os utilizados no caso  $n > 2$  e de todo ferramental utilizado neste trabalho. Por esse motivo, não apresentamos esta prova, indicamos ao leitor ver a prova em [15]. Provaremos o Teorema 3.4 para o caso  $n > 2$  no final deste capítulo.

Veremos também no Corolário 3.26 que  $\mathcal{A}(f) > 0$  implica  $N(f) > 0$ . Assim o Teorema 3.4 possui o seguinte corolário importante:

**Corolário 3.5** *Sejam  $f$  um aplicação de  $n$ -variedades compactas e  $y_0 \in Y$  um ponto. Então são equivalentes as desigualdades:*

$$\mathcal{A}(f) > 0, \quad N(f) > 0 \quad \text{e} \quad MR(f, y_0) > 0.$$

**Prova:** Pelo Corolário 3.26,  $\mathcal{A}(f) > 0$  implica  $N(f) > 0$ . Já sabemos que  $N(f) > 0$  implica  $MR(f, y_0) > 0$ . Certamente se  $\#g^{-1}(y_0) > 0$  para toda aplicação  $g$  homotópica a  $f$ , então  $\#g^{-1}(y_0) > 0$  para toda aplicação  $g$  homotópica a  $f$  e transversal a  $y_0$ . Deste modo, segue do Teorema 3.4 que  $MR(f, y_0) > 0$  implica  $\mathcal{A}(f) > 0$ . ■

O Segundo Teorema de Hopf responde uma das questões centrais da Teoria de Raízes para aplicações entre variedades compactas, a saber, o já mencionado problema de Wecken.

**Teorema 3.6 (2º Teorema de Hopf)** *Sejam  $f$  uma aplicação de  $n$ -variedades compactas, com  $n \neq 2$ , e  $y_0 \in Y$  um ponto. Então existe uma aplicação homotópica a  $f$  que possui exatamente  $N(f, y_0)$  raízes em  $y_0$ . Portanto  $N(f, y_0) = MR(f, y_0)$ .*

Em dimensão 1, toda aplicação  $f : S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$  é homotópica a uma aplicação da forma  $f(z) = z^r$  que possui exatamente  $r$  raízes em qualquer ponto  $y_0 \in S^1$ . Pelo Exemplo 2.16, temos  $N(f) = |\deg(f)| = r$ . Assim o Teorema vale para  $n = 1$ . Faremos a prova para o caso  $n > 2$  no final da última seção deste capítulo.

Para  $n = 2$ , o resultado do 2º Teorema de Hopf é falso! Contra-exemplos não são triviais; abaixo apresentamos (sem muitos detalhes) o primeiro contra-exemplo que se conhece da literatura. Acredita-se que ele já fosse conhecido por Hopf, embora sua publicação se deva a Lin [16], referência onde todos os detalhes podem ser encontrados.

Antes de apresentar o exemplo, destacamos que, em 2005, Gonçalves e Wong [9] demonstraram uma versão do Teorema 3.6 para o caso em que o número de Nielsen é nulo. Eles provaram que, neste caso, o número  $MR(f, y_0)$  também é nulo. Utilizaremos este fato para simplificar alguns argumentos do exemplo que apresentamos agora.

**Exemplo 3.7** Sejam  $X$  o bitoro (a soma conexa de dois toros) e seja  $Y$  o toro. Seja  $f_1 : X \rightarrow Y$  um recobrimento ramificado a 2-folhas com dois pontos de ramificação  $y_1, y_2 \in Y$ . Então ambos  $f_1^{-1}(y_1)$  e  $f_1^{-1}(y_2)$  contêm apenas um ponto. Seja  $f_2 : Y \rightarrow Y$  um recobrimento longitudinal a 3-folhas com  $f_2(y_1) = y_0$  e  $f_2(y_2) = y_0$ . Seja  $f = f_2 \circ f_1 : X \rightarrow Y$ . Então  $f$  é um recobrimento ramificado com apenas o ponto  $y_0$  de ramificação.

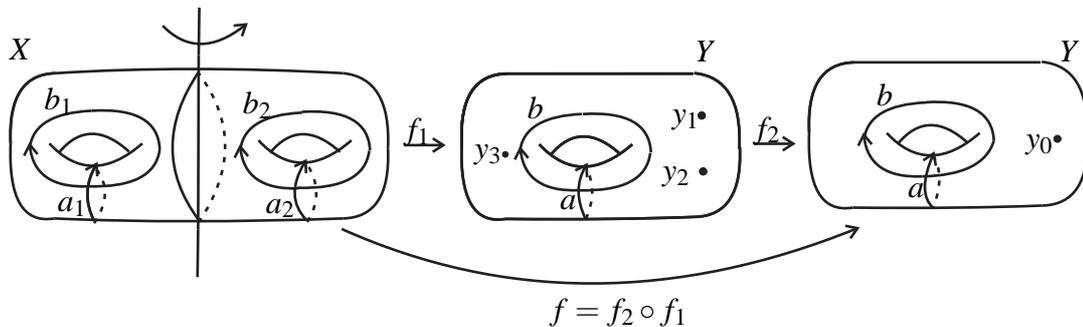


Figura 3.1: O contra-exemplo de Lin

De acordo com os argumentos (da teoria de recobrimentos ramificados) apresentados por [16], temos  $MR(f, y_0) = \# f^{-1}(y_0) = 4$ . Sendo  $f$  uma aplicação entre variedades compactas, segue do Teorema 2.1 de [9] que  $N(f) > 0$ . E do Corolário 1.19 resulta  $N(f) = \mathcal{R}(f)$ .

Por definição  $\mathcal{R}(f) = \#(\pi_1(Y)/f_{\#}(\pi_1(X)))$ . Para determinar  $f_{\#}(\pi_1(X))$  vejamos como  $f_{\#}$  atua nos geradores de  $\pi_1(X)$ . Sabemos que  $\pi_1(X) \approx \langle a_1, b_1, a_2, b_2 | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \rangle$ , e  $\pi_1(Y) \approx \langle a, b | [a, b] \rangle$ . Pelas características de  $f_1$  e  $f_2$  temos que  $f_{1\#}(a_1) = f_{1\#}(a_2) = a$ ,  $f_{1\#}(b_1) = f_{1\#}(b_2) = b$ ,  $f_{2\#}(a) = a$  e  $f_{2\#}(b) = 3b$ . Então  $f_{\#} = (f_{2\#} \circ f_{1\#})(a_1) = (f_{2\#} \circ f_{1\#})(a_2) = a$  e  $(f_{2\#} \circ f_{1\#})(b_1) = (f_{2\#} \circ f_{1\#})(b_2) = 3b$ . Logo  $f_{\#}(\pi_1(X)) \approx \mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$ . Assim,

$$\mathcal{R}(f) = \#(\pi_1(Y)/f_{\#}(\pi_1(X))) = \#(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}) = \#\mathbb{Z}_3 = 3.$$

Portanto,  $3 = \mathcal{R}(f) = N(f) < MR(f, y_0) = 4$ .

## 3.2 Multiplicidade e grau absoluto

Nesta seção apresentamos os conceitos envolvidos no enunciado e demonstração dos Teoremas de Hopf. Os principais deles são multiplicidade, grau absoluto e orientabilidade de funções.

Iniciamos recordando alguns fatos importantes da teoria de espaços de recobrimento. Detalhes podem ser vistos em [3].

Seja  $X$  uma variedade e  $p : \mathfrak{X} \rightarrow X$  seu recobrimento universal. Fixe um ponto  $x_0 \in X$  para ser o ponto base e escolha  $\mathbf{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ . Cada laço  $\beta$  em  $X$  baseado em  $x_0$  se levanta, através de  $p$ , a um único caminho  $\tilde{\beta}$  em  $\mathfrak{X}$  iniciando em  $\mathbf{x}_0$ . O ponto final  $\tilde{\beta}(1)$  deste caminho depende somente da classe de homotopia de  $\beta$ . Isto nos dá uma associação

$$\pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0) \quad \text{definida por} \quad [\beta] \mapsto \tilde{\beta}(1),$$

que, pelo Teorema 54.4 [3] é uma bijeção.

Agora, seja  $\mathcal{G}_X$  o grupo das transformações do recobrimento  $p : \mathfrak{X} \rightarrow X$ . Pelo Teorema 79.2 de [3], cada transformação  $\tau \in \mathcal{G}_X$  é univocamente determinada pelo seu valor no ponto base  $\mathbf{x}_0$ , quer dizer, dado um ponto  $\mathbf{x}_1 \in \mathfrak{X}$ , existe uma única transformação de recobrimento  $\tau \in \mathcal{G}_X$  tal que  $\tau(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_1$ .

Os resultados descritos neste dois últimos parágrafos no permitem construir uma aplicação

$$\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathcal{G}_X$$

que associa a cada  $[\beta] \in \pi_1(X, x_0)$  a única transformação de recobrimento  $\tau_{\beta} \in \mathcal{G}_X$  tal que  $\tau_{\beta}(\mathbf{x}_0) = \tilde{\beta}(1)$ . Segue dos resultados do §81 de [3] que  $\Phi$  é um isomorfismo de grupos.

Dizemos que um laço  $\beta$  em  $X$  baseado em  $x_0$  é um laço *preservando orientação* ou *invertendo orientação* conforme  $\tau_{\beta}$  é um homeomorfismo preservando ou invertendo orientação (o

espaço de recobrimento universal  $\tilde{X}$ , por ser simplesmente conexo, é orientável). Como  $\tau_\beta$  depende apenas da classe de homotopia com pontos finais fixados de  $\beta$ , assim é a propriedade de preservar ou inverter orientação. Se o laço  $\beta$  está preservando (invertendo) orientação, assim está o laço  $\alpha\beta\alpha^{-1}$ , para qualquer caminho  $\alpha$  em  $X$  terminando no ponto base  $x_0$ . A classe de homotopia com pontos finais fixados de laços preservando orientação em  $X$  (baseados em  $x_0$ ) forma um subgrupo  $\pi_1^0(X, x_0)$  de  $\pi_1(X, x_0)$ . Se  $\pi_1^0(X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$ , então  $X$  é orientável. Caso contrário,  $\pi_1^0(X, x_0)$  tem índice 2 em  $\pi_1(X, x_0)$ , pois o produto de dois laços invertendo orientação está preservando orientação. Neste caso existe um recobrimento duplo  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$  tal que  $\tilde{p}_\#(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \pi_1^0(X, \tilde{p}(\tilde{x}_0))$ . A variedade  $\tilde{X}$  é orientável e o recobrimento é único a menos de homeomorfismos e é chamado o *recobrimento duplo orientado de  $X$* .

**Proposição 3.8 (Critério de orientabilidade de laços)** *Sejam  $X$  uma variedade,  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$  o recobrimento duplo orientado de  $X$  e  $\beta$  um laço em  $X$  baseado em  $x_0$ . Então  $[\beta] \in \pi_1^0(X, x_0)$  se, e somente se,  $\beta$  se levanta a um laço em  $\tilde{X}$  através de  $\tilde{p}$ .*

**Prova:** Primeiro selecione um ponto  $\tilde{x}_0 \in \tilde{p}^{-1}(x_0)$ .

Suponhamos que  $[\beta] \in \pi_1^0(X, x_0)$ . Como  $\tilde{p}_\#(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \pi_1^0(X, x_0)$ , existe  $\sigma \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  tal que  $\tilde{p}_\#([\sigma]) = [\tilde{p} \circ \sigma] = [\beta] = [\tilde{p} \circ \tilde{\beta}]$ , onde  $\tilde{\beta}$  é o levantamento de  $\beta$  em  $\tilde{X}$ . Pelo Teorema 54.3 pág 344 de [3],  $\sigma$  e  $\tilde{\beta}$  tem os mesmos pontos finais, o que implica que  $\tilde{\beta}$  é um laço.

Suponhamos agora que  $\beta$  se levanta a um laço em  $\tilde{X}$ , digamos  $\tilde{\beta}$ . Assim  $[\tilde{\beta}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  e  $\tilde{p}_\#([\tilde{\beta}]) = [\tilde{p} \circ \tilde{\beta}] = [\beta]$ , o que mostra que  $[\beta] \in \pi_1^0(X, x_0)$ . ■

A classificação que definiremos agora é fundamental para estudar aplicações  $f : X \rightarrow Y$  de variedades quando ou  $X$  ou  $Y$  é não-orientável.

**Definição 3.9** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de variedades. Então:*

1. Dizemos que  $f$  é do **tipo I** se dado qualquer laço  $\gamma$  em  $X$ , o laço  $f \circ \gamma$  preserva orientação se, e somente se,  $\gamma$  preserva orientação. Estas aplicações são também chamadas *verdadeiramente orientáveis*.
2. Dizemos que  $f$  é do **tipo II** se não é tipo I, mas também não existe laço  $\gamma$  em  $X$  invertendo orientação tal que  $f \circ \gamma$  é contrátil.
3. Dizemos que  $f$  é do **tipo III** se existe laço  $\gamma$  em  $X$  invertendo orientação tal que  $f \circ \gamma$  é contrátil.

Aplicações que são do tipo I ou do tipo II são chamadas *orientáveis*. Aplicações do tipo III são chamadas *não-orientáveis*.

**Exemplo 3.10** (*Aplicações do tipo I*). Qualquer aplicação  $f : X \rightarrow Y$  de variedades orientáveis é tipo I. Mais geralmente, qualquer homeomorfismo é tipo I. Ainda mais geralmente, qualquer recobrimento  $\bar{q} : \bar{Y} \rightarrow Y$  é tipo I. Para ver isso note que se  $\alpha$  é um laço em  $\bar{Y}$ , então ambos  $\alpha$  e  $\bar{q} \circ \alpha$  induzem a mesma transformação de recobrimento  $\tau_\alpha : Y^U \rightarrow Y^U$  em seu espaço de recobrimento universal comum. De fato: Seja  $\bar{p} : Y^U \rightarrow Y$  o recobrimento universal de  $Y$ . Então, pelo Teorema 80.3 pág 486 de [3], existe um recobrimento  $r : Y^U \rightarrow \bar{Y}$  tal que  $\bar{q} \circ r = \bar{p}$ . Isto implica que os levantamentos de  $\alpha$  a  $Y^U$  através de  $r$  e de  $\bar{q} \circ \alpha$  a  $Y^U$  através de  $\bar{p}$  coincidem. Portanto eles induzem a mesma transformação de recobrimento, ou seja,  $\tau_\alpha = \tau_{\bar{q} \circ \alpha} : Y^U \rightarrow Y^U$ . Assim  $\bar{q} \circ \alpha$  preserva orientação se, e somente se,  $\alpha$  preserva orientação.

**Exemplo 3.11** (*Aplicação do tipo II*). Considere o toro  $\mathbb{T}$  como o espaço quociente do quadrado unitário com  $(s, 0)$  identificado a  $(s, 1)$  e  $(0, t)$  identificado a  $(1, t)$ . Considere a garrafa de Klein  $\mathbb{K}$  como o espaço quociente do quadrado unitário com  $(s, 0)$  identificado a  $(s, 1)$  e  $(0, t)$  identificado a  $(1, 1 - t)$ . Defina  $\tilde{p} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{K}$  por

$$\tilde{p}([(s, t)]) = \begin{cases} [(2s, t)] & \text{para } 0 \leq s \leq 1/2, \\ [(2s - 1, t)] & \text{para } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Então  $\tilde{p}$  é um recobrimento a duas folhas de  $\mathbb{K}$  pela variedade orientável  $\mathbb{T}$ , sendo portanto o recobrimento duplo orientado de  $\mathbb{K}$ .

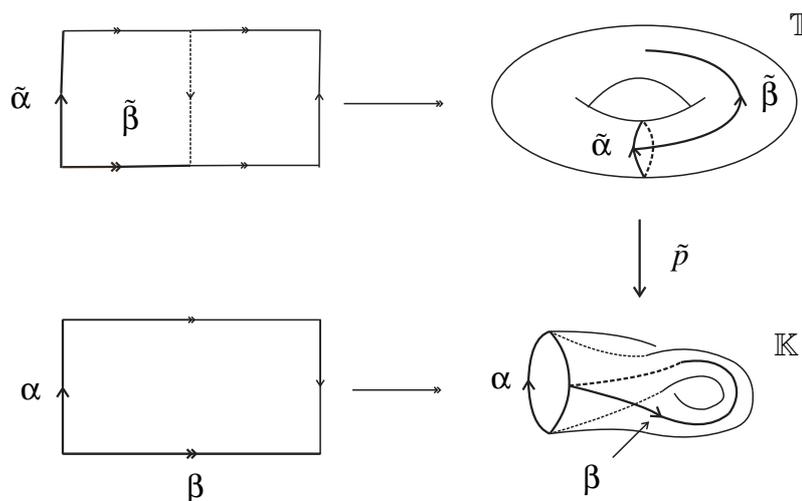


Figura 3.2: O recobrimento duplo orientado de  $\mathbb{K}$

Sejam  $\beta$  o laço em  $\mathbb{K}$  dado por  $\beta(s) = [(s, 0)]$  e  $\gamma$  o laço  $\gamma(t) = [(0, t)]$ . Então  $\pi_1(\mathbb{K}, [(0, 0)])$  é gerado por  $[\beta]$  e  $[\gamma]$ . O laço  $\beta$  levanta através de  $\tilde{p}$  ao caminho  $\tilde{\beta}$  dado por  $\tilde{\beta}(s) = [(s/2, 0)]$ .

Como  $\tilde{\beta}$  não é um laço, então  $\beta$  inverte orientação, pela Proposição 3.8. Por outro lado,  $\gamma$  levanta ao caminho  $\tilde{\gamma}(t) = [(0, t)]$  que é um laço e, assim,  $\gamma$  preserva orientação. Agora defina  $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{T}$  por  $f([(s, t)]) = [(s, 0)]$ . Então  $f \circ \beta(s) = [(s, 0)]$ . E assim  $[f \circ \beta]$  é um dos geradores usuais de  $\pi_1(\mathbb{T}, [(0, 0)])$  e, portanto, não é contrátil. Também  $f \circ \beta$  é um laço no espaço orientável  $\mathbb{T}$  e portanto preserva orientação.

Deste modo  $f$  não pode ser do tipo I. Também temos  $f \circ \gamma(t) = f([(0, t)]) = [(0, 0)]$ . Embora  $\pi_1(\mathbb{K}, [(0, 0)])$  não seja abeliano, o fato de  $\beta\gamma\beta^{-1}\gamma$  ser contrátil pode ser usado para escrever qualquer elemento de  $\pi_1(\mathbb{K}, [(0, 0)])$  na forma  $[\beta]^m[\gamma]^n$ . Mas  $f_{\#}([\beta]^m[\gamma]^n) = [f \circ \beta]^m[f \circ \gamma]^n = [f \circ \beta]^m$ . Como  $\pi_1(\mathbb{T}, [(0, 0)])$  é abeliano livre com  $[f \circ \beta]$  sendo um de seus geradores,  $[f \circ \beta]^m$  não pode ser trivial, a menos que  $m = 0$ . Deste modo, os únicos laços em  $\mathbb{K}$  que são aplicados a laços contráteis são aqueles homotópicos com pontos finais fixados a  $\gamma^n$  para algum  $n$ , e todos estes preservam orientação. Portanto  $f$  não é do tipo III, sendo então do tipo II.

**Exemplo 3.12** (*Aplicação do tipo III*). Considere a 2-esfera  $S^2$  como o disco unitário fechado  $D^2$  com o bordo identificado a um ponto e seja  $q : D^2 \rightarrow S^2$  a aplicação quociente correspondente. Considere o plano projetivo  $\mathbb{RP}^2$  como o disco  $D^2$  com pontos antípodos do bordo identificados e seja  $p : D^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  a aplicação quociente correspondente. Então  $p$  e  $q$  induzem, por passagem ao quociente, uma aplicação  $f : \mathbb{RP}^2 \rightarrow S^2$  tal que  $f \circ p = q$ .

$$\begin{array}{ccc} D^2 & & \\ p \downarrow & \searrow q & \\ \mathbb{RP}^2 & \xrightarrow{f} & S^2 \end{array}$$

Como  $\mathbb{RP}^2$  é não-orientável, ele possui um laço  $\beta$  invertendo orientação. Como  $S^2$  é simplesmente conexo,  $f \circ \beta$  é contrátil. Portanto  $f$  é tipo III.

**Teorema 3.13** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de  $n$ -variedades com  $X$  não-orientável e seja  $y_0 \in Y$ . Sejam  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$  o recobrimento duplo orientado de  $X$  e  $\hat{q} : \hat{Y} \rightarrow Y$  e  $\hat{f} : \tilde{X} \rightarrow \hat{Y}$  um recobrimento e um levantamento de Hopf para  $f$ .*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \hat{Y} \\ \tilde{p} \downarrow & \nearrow \hat{f} & \downarrow \hat{q} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Então:

- (1) A aplicação  $f$  é tipo III se, e somente se,  $\widehat{q}$  e  $\widehat{f} \circ \tilde{p}$  são um levantamento e um recobrimento de Hopf para  $f \circ \tilde{p}$ .
- (2) Se  $f$  é tipo III, então  $\tilde{p}^{-1}(\alpha)$  é uma classe de Nielsen de  $f \circ \tilde{p}$  em  $y_0$  se, e somente se,  $\alpha$  é uma classe de Nielsen de  $f$  em  $y_0$ . Neste caso  $\tilde{p}$  leva o conjunto das classes de Nielsen de  $f \circ \tilde{p}$  bijectivamente sobre o conjunto das classes de Nielsen de  $f$ .

**Prova:** Para provar (1), seja  $\tilde{x}$  um ponto arbitrário em  $\tilde{X}$ . Sabemos que  $\widehat{q}$  e  $\widehat{f} \circ \tilde{p}$  são um levantamento e um recobrimento de Hopf para  $f \circ \tilde{p}$  se, e somente se,  $(f \circ \tilde{p})_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = \widehat{q}_{\#}(\pi_1(\widehat{Y}, \widehat{f} \circ \tilde{p}(\tilde{x})))$ . Agora como  $\widehat{q}$  e  $\widehat{f}$  são um recobrimento e um levantamento de Hopf para  $f$ , então  $f_{\#}(\pi_1(X, \tilde{p}(\tilde{x}))) = \widehat{q}_{\#}(\pi_1(\widehat{Y}, \widehat{f} \circ \tilde{p}(\tilde{x})))$ . Segue que  $\widehat{q}$  e  $\widehat{f} \circ \tilde{p}$  são um levantamento e um recobrimento de Hopf para  $f \circ \tilde{p}$  se, e somente se,

$$(f \circ \tilde{p})_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = f_{\#}(\pi_1(X, \tilde{p}(\tilde{x}))). \quad (3.1)$$

Mostraremos que (3.1) vale se, e somente se,  $f$  é do tipo III.

Suponha primeiro que  $f$  seja do tipo III. O lado esquerdo de (3.1) está claramente contido no direito. Precisamos mostrar que o lado direito está contido no esquerdo. Para isso seja  $[\beta] \in f_{\#}(\pi_1(X, \tilde{p}(\tilde{x})))$  arbitrário. Então  $[\beta] = [f \circ \alpha]$  para algum laço  $\alpha$  em  $X$  em  $\tilde{p}(\tilde{x})$ . Se  $\alpha$  preserva orientação, então  $\alpha$  levanta a um laço  $\tilde{\alpha}$  em  $\tilde{X}$  em  $\tilde{x}$  e então  $(f \circ \tilde{p})_{\#}([\tilde{\alpha}]) = [f \circ \tilde{p} \circ \tilde{\alpha}] = [f \circ \alpha] = [\beta]$ , donde  $[\beta] \in (f \circ \tilde{p})_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ . Suponha agora que  $\alpha$  inverta orientação. Como  $f$  é do tipo III, existe um laço  $\alpha'$  em  $X$  baseado em  $\tilde{p}(\tilde{x})$  invertendo orientação e tal que  $[f \circ \alpha']$  é contrátil. Então  $\sigma = \alpha\alpha'$  é um laço preservando orientação. Assim  $\sigma$  levanta a um laço  $\tilde{\sigma}$  em  $\tilde{X}$  em  $\tilde{x}$ . Então  $(f \circ \tilde{p})_{\#}([\tilde{\sigma}]) = [f \circ \tilde{p} \circ \tilde{\sigma}] = [f \circ \sigma] = [f \circ (\alpha\alpha')] = [f \circ \alpha][f \circ \alpha'] = [f \circ \alpha] = [\beta]$ , donde  $[\beta] \in (f \circ \tilde{p})_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ . Isso mostra que se  $f$  é do tipo III, então (3.1) vale.

Agora suponha que (3.1) valha. Para mostrar que  $f$  é tipo III, precisamos encontrar um laço  $\alpha'$  invertendo orientação em  $X$  tal que  $[f \circ \alpha']$  seja contrátil. Como  $X$  é não-orientável, existe um laço  $\alpha$  em  $X$  em  $\tilde{p}(\tilde{x})$  invertendo orientação. De (3.1) existe um laço  $\sigma$  em  $\tilde{X}$  em  $\tilde{x}$  tal que  $[f \circ \tilde{p} \circ \sigma] = [f \circ \alpha]$ . E portanto  $f \circ ((\tilde{p} \circ \sigma)\alpha^{-1})$  é contrátil. Veja que  $\tilde{p} \circ \sigma$  preserva orientação, pois levanta ao laço  $\sigma$  em  $\tilde{X}$ . Pela escolha de  $\alpha$  e conseqüentemente de  $\alpha^{-1}$ , temos que  $\alpha^{-1}$  inverte orientação. Deste modo,  $(\tilde{p} \circ \sigma)\alpha^{-1}$  é o laço  $\alpha'$  desejado. Isto completa a prova da afirmação (1) do teorema.

A segunda afirmação segue facilmente da parte (1) e do fato que  $\tilde{p}$  é sobrejetora. As classes de Nielsen de  $f$  em  $y_0$  são os conjuntos não vazios da forma  $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0)$  e, quando  $f$  é do tipo III, segue de (1) que as classes de raízes de  $f \circ \tilde{p}$  são os conjuntos não vazios da

forma  $(\widehat{f} \circ \widetilde{p})^{-1}(\widehat{y}_0) = \widetilde{p}^{-1}(\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0))$  com  $\widehat{y}_0 \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$ . Segue da sobrejetividade de  $\widetilde{p}$  que  $\widetilde{p}(\widetilde{p}^{-1}(\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0))) = \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0)$ . Assim,  $\widetilde{p}$  aplica o conjunto das classes de Nielsen de  $f \circ \widetilde{p}$  bijectivamente no conjunto das classes de Nielsen de  $f$ . ■

**Teorema 3.14** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação orientável (aplicação do tipo I ou do tipo II) de  $n$ -variedades, com  $X$  não-orientável, e seja  $y_0 \in Y$  um ponto. Seja  $\widetilde{p} : \widetilde{X} \rightarrow X$  o recobrimento duplo orientado de  $X$ , sejam  $\widehat{q} : \widehat{Y} \rightarrow Y$  e  $\widehat{f} : X \rightarrow \widehat{Y}$  o recobrimento e o levantamento de Hopf para  $f$  e sejam  $\check{q} : \check{Y} \rightarrow \widehat{Y}$  e  $\check{f} : \widetilde{X} \rightarrow \check{Y}$  o recobrimento e o levantamento de Hopf para  $\widehat{f} \circ \widetilde{p} : \widetilde{X} \rightarrow \widehat{Y}$ , conforme o diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 & & \check{Y} \\
 & \nearrow \check{f} & \downarrow \check{q} \\
 \widetilde{X} & & \widehat{Y} \\
 \downarrow \widetilde{p} & \nearrow \widehat{f} & \downarrow \widehat{q} \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

Então:

(1) As aplicações  $\widehat{q} \circ \check{q}$  e  $\check{f}$  são um recobrimento e um levantamento de Hopf para  $f \circ \widetilde{p}$ .

(2) O recobrimento  $\check{q}$  possui duas folhas.

(3) Seja  $\alpha$  uma classe de Nielsen de  $f$  em  $y_0$ .

(a) Temos  $\widetilde{p}^{-1}(\alpha) = \widetilde{\alpha}_0 \sqcup \widetilde{\alpha}_1$  para duas classes de Nielsen  $\widetilde{\alpha}_0$  e  $\widetilde{\alpha}_1$  de  $f \circ \widetilde{p}$ .

(b) As duas classes estão relacionadas por  $\tau(\widetilde{\alpha}_0) = \widetilde{\alpha}_1$ , onde  $\tau : \widetilde{X} \rightarrow \widetilde{X}$  é a transformação de recobrimento de período dois de  $\widetilde{X}$ .

(c) Cada uma das classes  $\widetilde{\alpha}_0$  e  $\widetilde{\alpha}_1$  é aplicada bijectivamente sobre  $\alpha$  por  $\widetilde{p}$ .

**Prova:** Para provar (1), tome  $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ . Como  $\check{q}$  é um recobrimento de Hopf para  $\widehat{f} \circ \widetilde{p}$ , temos  $(\widehat{f} \circ \widetilde{p})_{\#}(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})) = \check{q}_{\#}(\pi_1(\check{Y}, \check{f}(\tilde{x})))$ . Usando a comutatividade do diagrama acima, temos:

$$\begin{aligned}
 (f \circ \widetilde{p})_{\#}(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})) &= (\widehat{q} \circ \widehat{f} \circ \widetilde{p})_{\#}(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})) = \widehat{q}_{\#}((\widehat{f} \circ \widetilde{p})_{\#}(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}))) \\
 &= \widehat{q}_{\#}(\check{q}_{\#}(\pi_1(\check{Y}, \check{f}(\tilde{x})))) = (\widehat{q} \circ \check{q})_{\#}(\pi_1(\check{Y}, \check{f}(\tilde{x}))).
 \end{aligned}$$

Assim  $\widehat{q} \circ \check{q}$  é um recobrimento de Hopf para  $f \circ \widetilde{p}$  e, ainda,  $\check{f}$  levanta  $f \circ \widetilde{p}$  através de  $\widehat{q} \circ \check{q}$ , pois  $\widehat{q} \circ \check{q} \circ \check{f}(\tilde{x}) = \widehat{q}(\check{q} \circ \check{f}(\tilde{x})) = \widehat{q}(\widehat{f} \circ \widetilde{p}(\tilde{x})) = (\widehat{q} \circ \widehat{f}) \circ \widetilde{p}(\tilde{x}) = f \circ \widetilde{p}(\tilde{x})$ . Assim  $\check{f}$  é o levantamento de Hopf de  $f \circ \widetilde{p}$  correspondente ao levantamento de Hopf  $\widehat{q} \circ \check{q}$ .

Agora provamos (2). Note que  $\widehat{f}_\# : \pi_1(X, \tilde{p}(\tilde{x})) \rightarrow \pi_1(\widehat{Y}, \widehat{f}(\tilde{p}(\tilde{x})))$  é um epimorfismo. De fato: Segue do fato que  $\widehat{q}$  e  $\widehat{f}$  são um recobrimento e um levantamento de Hopf para  $f$ , que  $\widehat{q}_\#(\widehat{f}_\#(\pi_1(X, \tilde{p}(\tilde{x})))) = f_\#(\pi_1(X, \tilde{p}(\tilde{x}))) = \widehat{q}_\#(\pi_1(\widehat{Y}, \widehat{f}(\tilde{p}(\tilde{x}))))$ . Seja  $[\alpha] \in \pi_1(\widehat{Y}, \widehat{f}(\tilde{p}(\tilde{x})))$ , então  $\widehat{q}_\#([\alpha]) = \widehat{q}_\#([\beta])$  para algum  $[\beta] \in \widehat{f}_\#(\pi_1(X, \tilde{p}(\tilde{x})))$ . Como  $\widehat{q}_\#$  é injetor, pelo teorema 56.6 pág 346 de [3], temos que  $[\alpha] = [\beta]$ . Isto prova que  $\pi_1(\widehat{Y}, \widehat{f}(\tilde{p}(\tilde{x}))) = \widehat{f}_\#(\pi_1(X, \tilde{p}(\tilde{x})))$ .

Pela comutatividade do diagrama,  $\widehat{f}_\#$  induz uma sobrejeção  $\text{coker}(\tilde{p}_\#) \rightarrow \text{coker}(\check{q}_\#)$ . De fato, considere o diagrama correspondente em grupos fundamentais e defina

$$h : \text{coker}(\tilde{p}_\#) \rightarrow \text{coker}(\check{q}_\#),$$

por  $h([\alpha] * \text{Im}(\tilde{p}_\#)) = \widehat{f}_\#([\alpha] * \text{Im}(\check{q}_\#))$ . Para mostrar que  $h$  está bem definida devemos mostrar que se  $[\alpha\beta^{-1}] \in \text{Im}(\tilde{p}_\#)$ , então  $\widehat{f}_\#([\alpha\beta^{-1}]) \in \text{Im}(\check{q}_\#)$ . Pois bem, se  $[\alpha\beta^{-1}] \in \text{Im}(\tilde{p}_\#)$ , então  $[\alpha\beta^{-1}] = \tilde{p}_\#([\sigma])$  para algum  $[\sigma] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ , e conseqüentemente, como queríamos mostrar,  $\widehat{f}_\#([\alpha\beta^{-1}]) = \widehat{f}_\#(\tilde{p}_\#([\sigma])) = \check{q}_\#(\check{f}_\#([\sigma])) \in \text{Im}(\check{q}_\#)$ .

Mostraremos agora que  $h$  é sobrejetora. Seja  $[\beta] * \text{Im}(\check{q}_\#) \in \text{coker}(\check{q}_\#)$ . Como  $\widehat{f}_\#$  é sobrejetora, existe  $[\alpha] \in \pi_1(X, \tilde{p}(\tilde{x}))$  tal que  $\widehat{f}_\#([\alpha]) = [\beta]$ . Logo  $h([\alpha] * \text{Im}(\tilde{p}_\#)) = \widehat{f}_\#([\alpha] * \text{Im}(\tilde{p}_\#)) = [\beta] * \text{Im}(\check{q}_\#)$ . Está provada a sobrejetividade de  $h$ .

Como  $\tilde{p}$  é um recobrimento a duas folhas,  $\#\text{coker}(\tilde{p}_\#) = 2$ . Assim  $\#\text{coker}(\check{q}_\#) \leq 2$ , ou seja,  $\check{q}$  possui uma ou duas folhas. Se  $\check{q}$  possui uma folha, então podemos assumir que  $\check{q}$  é a identidade. Mas isto implicaria que  $\widehat{q}$  é um recobrimento de Hopf para  $f \circ \tilde{p}$  e, portanto, pelo Teorema 3.13,  $f$  seria do tipo III, contradizendo a hipótese de  $f$  ser orientável. Portanto  $\check{q}$  tem duas folhas.

Para provar (3), seja  $\alpha$  uma classe de Nielsen de  $f$  em  $y_0$ , digamos  $\alpha = \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0)$  para um certo  $\widehat{y}_0 \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$ . Como  $\check{q}$  é a duas folhas, existem, para este  $\widehat{y}_0$ , exatamente dois pontos,  $\check{y}_0$  e  $\check{y}_1$  digamos, em  $\check{q}^{-1}(\widehat{y}_0)$ . Seja  $\check{\alpha}_0 = \check{f}^{-1}(\check{y}_0)$  e  $\check{\alpha}_1 = \check{f}^{-1}(\check{y}_1)$ . Como  $\widehat{q} \circ \check{q}$  é um recobrimento de Hopf para  $f \circ \tilde{p}$ , cada  $\check{\alpha}_i$  é uma classe de raízes de  $f \circ \tilde{p}$ . Também temos

$$\tilde{p}^{-1}(\alpha) = \tilde{p}^{-1}(\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0)) = \check{f}^{-1}(\check{q}^{-1}(\widehat{y}_0)) = \check{f}^{-1}(\{\check{y}_0\} \sqcup \{\check{y}_1\}) = \check{\alpha}_0 \sqcup \check{\alpha}_1.$$

Agora mostraremos que  $\check{\alpha}_1 = \tau(\check{\alpha}_0)$ . Seja  $\tilde{x} \in \check{\alpha}_0$ . Então  $\widehat{f}(\tilde{p}(\tau(\tilde{x}_0))) = \widehat{f}(\tilde{p}(\tilde{x}_0)) = \widehat{y}_0$ . Assim,  $\tau(\tilde{x}_0) \in \check{\alpha}_0$  ou  $\tau(\tilde{x}_0) \in \check{\alpha}_1$ , pois  $\tau(\tilde{x}_0) \in \tilde{p}^{-1}(\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0)) = \tilde{p}^{-1}(\alpha) = \check{\alpha}_0 \sqcup \check{\alpha}_1$ . Seja  $\tilde{\gamma}$  qualquer caminho em  $\tilde{X}$  de  $\tilde{x}_0$  para  $\tau(\tilde{x}_0)$ . Então  $\tilde{p} \circ \tilde{\gamma}$  é um laço em  $X$  em  $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = \tilde{p}(\tau(\tilde{x}_0))$ . Além disso,  $\tilde{p} \circ \tilde{\gamma}$  é um laço invertendo orientação, pois seu levantamento a  $\tilde{X}$  é o caminho  $\tilde{\gamma}$ . Como  $f$  é orientável,  $f \circ \tilde{p} \circ \tilde{\gamma}$  não pode ser contrátil. Segue que a raiz  $\tau(\tilde{x}_0)$  não pode estar relacionada a raiz  $\tilde{x}_0$  e, portanto,  $\tau(\tilde{x}_0) \in \check{\alpha}_1$ . Logo  $\tau(\check{\alpha}_0) \subset \check{\alpha}_1$ . Similarmente  $\tau(\check{\alpha}_1) \subset \check{\alpha}_0$  e, portanto,  $\check{\alpha}_1 = \tau(\tau(\check{\alpha}_1)) \subset \tau(\check{\alpha}_0)$ . Portanto  $\check{\alpha}_1 = \tau(\check{\alpha}_0)$ .

Como  $\tilde{p}$  é sobrejetora, a igualdade  $\tilde{p}^{-1}(\alpha) = \tilde{\alpha}_0 \sqcup \tilde{\alpha}_1$  implica que  $\tilde{p}(\tilde{\alpha}_0 \sqcup \tilde{\alpha}_1) = \alpha$ . Disto temos  $\alpha = \tilde{p}(\tilde{\alpha}_0 \sqcup \tilde{\alpha}_1) = \tilde{p}(\tilde{\alpha}_0 \sqcup \tau(\tilde{\alpha}_0)) = \tilde{p}(\tilde{\alpha}_0) \sqcup \tilde{p}(\tau(\tilde{\alpha}_0)) = \tilde{p}(\tilde{\alpha}_0) \sqcup \tilde{p}(\tilde{\alpha}_0) = \tilde{p}(\tilde{\alpha}_0)$ . Assim  $\tilde{p}$  aplica  $\tilde{\alpha}_0$  sobre  $\alpha$ . Similarmente  $\tilde{p}$  aplica  $\tilde{\alpha}_1$  sobre  $\alpha$ . Como  $\tilde{\alpha}_0 \cap \tilde{\alpha}_1 = \emptyset$  e  $\tilde{p}$  é uma aplicação dois-a-um, segue que  $\tilde{p}$  aplica cada  $\tilde{\alpha}_i$  bijectivamente sobre  $\alpha$ . ■

Definiremos agora a multiplicidade de uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  e, em seguida, o seu grau absoluto.

**Definição 3.15** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação entre  $n$ -variedades compactas. Definimos a multiplicidade de  $f$  em  $y_0$ , denotada por  $\text{mult}(f, y_0)$ , como segue: Se  $f$  não possui raízes em  $y_0$ , então  $\text{mult}(f, y_0) = 0$ . Caso contrário, seja  $\alpha$  uma classe de Nielsen de  $f$  em  $y_0$ .

1. Se  $X$  é orientável, então  $\text{mult}(f, y_0) = |\lambda(f, \alpha)|$ .
2. Se  $X$  é não-orientável, mas  $f$  é, então

$$\text{mult}(f, y_0) = |\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{\alpha}_0)| = \text{mult}(f \circ \tilde{p}, y_0),$$

onde  $\tilde{p}$  e  $\tilde{\alpha}_0$  são como no Teorema 3.14.

3. Se  $f$  é não-orientável, então  $\text{mult}(f, y_0) = |\lambda_2(f, \alpha)|$ , onde  $|\lambda_2(f, \alpha)| = 1$  se  $\lambda_2(f, \alpha) \equiv 1 \pmod{2}$  e é 0 caso contrário.

Como estamos usando valores absolutos de  $\lambda$  nos dois primeiros casos e o índice mod 2 no terceiro, a definição é independente da escolha dos geradores usados para calcular  $\lambda$  e  $\lambda_2$ . Pelo Teorema 2.14,  $|\lambda(f, \alpha)|$  e  $|\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{\alpha}_0)|$  são também independentes da escolha de  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}_0$ . Deste modo  $\text{mult}(f, y_0)$  está bem definida. Veremos em breve que  $\text{mult}(f, y_0)$  é também independente do ponto  $y_0 \in Y$ . Assim poderemos escrever  $\text{mult}(f, y_0)$  simplesmente como  $\text{mult}(f)$ .

**Teorema 3.16** *Suponha  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação entre  $n$ -variedades compactas,  $y_0 \in Y$  um ponto e  $\text{mult}(f, y_0) \neq 0$ . Então  $N(f) = \mathcal{R}(f)$ .*

**Prova:** Pelo Corolário 1.19 é suficiente mostrar que  $N(f) \neq \emptyset$  para concluir que  $N(f) = \mathcal{R}(f)$ . Como  $\text{mult}(f, y_0) \neq 0$ , existe pelo menos uma classe de Nielsen  $\alpha$  de  $f$  em  $y_0$ . Se  $f$  é não-orientável, então  $|\lambda_2(f, \alpha)| = \text{mult}(f, y_0) \neq 0$ . Assim  $\alpha$  é essencial pelo Corolário 2.7 e, portanto,  $N(f) \neq \emptyset$ . Similarmente, se tivermos  $f$  e  $X$  orientáveis, então  $|\lambda(f, \alpha)| = \text{mult}(f, y_0) \neq 0$ . Assim  $\alpha$  é essencial e, portanto,  $N(f) \neq \emptyset$ .

Resta considerar o caso em que  $X$  é não-orientável mas  $f$  é orientável. Neste caso usamos os recobrimentos, levantamentos e diagrama do Teorema 3.14.

Como  $\text{mult}(f, y_0) \neq 0$ , então  $f$  possui pelo menos uma raiz  $x$  em  $y_0$ , e  $f \circ \tilde{p}$  possui uma raiz  $\tilde{x} \in \tilde{p}^{-1}(x)$  em  $y_0$ . Sejam  $\hat{y}_0 = \hat{f}(x)$ ,  $\check{y}_0 = \check{f}(\tilde{x})$ ,  $\alpha = \hat{f}^{-1}(\hat{y}_0)$  e  $\tilde{\alpha} = \check{f}^{-1}(\check{y}_0)$ . Assim  $\alpha$  é a classe de Nielsen contendo  $x$  e  $\tilde{\alpha}$  é a classe de Nielsen contendo  $\tilde{x}$ . Pela definição,  $|\lambda_2(f \circ \tilde{p}, \tilde{\alpha})| = \text{mult}(f, y_0) \neq 0$ . Assim  $\tilde{\alpha}$  é uma classe de Nielsen essencial de  $f \circ \tilde{p}$ .

Agora, seja  $g$  homotópica a  $f$ . Então  $g \circ \tilde{p}$  é homotópica a  $f \circ \tilde{p}$ . Sejam  $\hat{g}$  e  $\check{g}$  os levantamentos de Hopf de  $g$  e  $g \circ \tilde{p}$ , de modo que possamos usar o mesmo diagrama mas com  $f, \hat{f}$  e  $\check{f}$  substituídos por  $g, \hat{g}$  e  $\check{g}$ . Como  $\tilde{\alpha} = \check{f}^{-1}(\check{y}_0)$  é essencial, segue que  $\check{g}^{-1}(\check{y}_0) \neq \emptyset$ . Seja  $\tilde{x}' \in \check{g}^{-1}(\check{y}_0)$ . Então  $\hat{g}(\tilde{p}(\tilde{x}')) = \check{g}(\check{g}(\tilde{x}')) = \check{g}(\check{y}_0) = \hat{y}_0$ . Deste modo  $\hat{g}^{-1}(\hat{y}_0) \neq \emptyset$ , o que prova que  $\alpha$  é essencial e, portanto,  $N(f) \neq 0$ . ■

**Corolário 3.17** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de  $n$ -variedades compactas e  $y_0 \in Y$  um ponto. Se  $\mathcal{R}(f) = \infty$ , então  $\text{mult}(f, y_0) = 0$ .*

**Prova:** Pelo Corolário 1.21, se  $\mathcal{R}(f) = \infty$  então  $N(f) = 0$ . Neste caso,  $\mathcal{R}(f) \neq N(f)$  e, pelo Teorema 3.16, devemos ter  $\text{mult}(f, y_0) = 0$ . ■

Os dois próximos teoremas mostram que a multiplicidade de  $f$  pode ser calculada a partir do grau ordinário de Brouwer de certos levantamentos.

**Teorema 3.18** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação orientável de  $n$ -variedades compactas e  $y_0 \in Y$ . Se  $f$  é do tipo I distinguimos dois casos:*

1.  $X$  é orientável. Neste caso, sejam  $\hat{q} : \hat{Y} \rightarrow Y$  e  $\hat{f} : X \rightarrow \hat{Y}$  um recobrimento e um levantamento de Hopf para  $f$ . Então ou  $\mathcal{R}(f) = \infty$ , caso em que  $\text{mult}(f, y_0) = 0$ , ou  $\hat{Y}$  é compacto e orientável e  $\text{mult}(f, y_0) = |\deg(\hat{f})|$ .
2.  $X$  é não-orientável. Como no Teorema 3.14, seja  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$  o recobrimento duplo orientado de  $X$  e sejam  $\check{q} : \check{Y} \rightarrow \hat{Y}$  e  $\check{f} : \tilde{X} \rightarrow \check{Y}$  o recobrimento e o levantamento de Hopf para  $\hat{f} \circ \tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \hat{Y}$ . Então ou  $\mathcal{R}(f) = \infty$ , caso em que  $\text{mult}(f, y_0) = 0$ , ou  $\check{Y}$  é compacta e orientável e  $\text{mult}(f, y_0) = |\deg(\check{f})|$ .

*Se  $f$  é do tipo II, então  $\text{mult}(f, y_0) = 0$  quer seja  $X$  orientável ou não-orientável.*

**Prova:** Primeiro provamos o teorema sob a hipótese de  $X$  ser orientável. Se  $\mathcal{R}(f) = \infty$  então pelo Corolário 1.21, temos  $N(f) = 0$  e, portanto, pelo Corolário 3.17,  $mult(f, y_0) = 0$ . Para continuar, assumamos  $\mathcal{R}(f) < \infty$ . Então como  $\hat{q}: \hat{Y} \rightarrow Y$  possui  $\mathcal{R}(f) < \infty$  folhas e  $Y$  é compacto, segue que  $\hat{Y}$  é compacto. Para mostrar que  $\hat{Y}$  é orientável e  $mult(f, y_0) = |\deg(\hat{f})|$ , iniciamos mostrando que  $mult(f, y_0) = |\lambda(\hat{f}, X)|$ .

Se  $f$  é livre de raízes, então  $mult(f, y_0) = 0$ , mas neste caso  $\hat{f}$  é também livre de raízes e temos  $\lambda(\hat{f}, X) = 0$ . Assumimos então que  $f$  possua pelo menos uma raiz. Seja  $\alpha$  sua classe de Nielsen, de modo que  $\hat{f}(\alpha) = \{\hat{y}_0\}$  para algum  $\hat{y}_0 \in \hat{q}^{-1}(y_0)$ .

Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & (\hat{V}, \hat{V} - \hat{y}_0) & \xrightarrow{\hat{d}} & (\hat{Y}, \hat{Y} - \hat{y}_0) \\ & & & & \uparrow \hat{f} & & \downarrow \hat{q}' \\ X & \xrightarrow{i} & (X, X - \alpha) & \xleftarrow{e} & (N, N - \alpha) & \xrightarrow{f'} & (V, V - y_0) & \xrightarrow{d} & (Y, Y - y_0) \end{array}$$

Aqui  $V$  é uma vizinhança uniformemente recoberta de  $y_0$ ,  $\hat{V}$  é aplicada homeomorficamente sobre  $V$  por  $\hat{q}$ ,  $N$  é uma vizinhança fechada de  $\alpha$  que é aplicada no interior de  $V$  por  $f$  e  $\hat{f}'$ ,  $f'$  e  $\hat{q}'$  são as aplicações definidas por  $\hat{f}$ ,  $f$  e  $\hat{q}$ . Por definição,

$$L_*(f, \alpha) = d_* \circ f'_* \circ e_*^{-1} \circ i_* \quad \text{e} \quad L_*(\hat{f}, \alpha) = \hat{d}_* \circ \hat{f}'_* \circ e_*^{-1} \circ i_*.$$

As inclusões  $\hat{d}$  e  $d$  são excisões e, portanto, induzem isomorfismos em homologia. Além disso,  $\hat{q}'$  é um homeomorfismo, que por sua vez também induz isomorfismo. Deste modo, o diagrama nos revela que

$$L_*(f, \alpha) = d_* \circ \hat{q}'_* \circ \hat{f}'_* \circ e_*^{-1} \circ i_* = d_* \circ \hat{q}'_* \circ \hat{d}_*^{-1} \circ \hat{d}_* \circ \hat{f}'_* \circ e_*^{-1} \circ i_* = d_* \circ \hat{q}'_* \circ \hat{d}_*^{-1} \circ L_*(\hat{f}, \alpha).$$

Como  $d_* \circ \hat{q}'_* \circ \hat{d}_*^{-1}$  é um isomorfismo, isto implica que  $\lambda(f, \alpha) = \pm \lambda(\hat{f}, \alpha)$ . Mas  $\alpha$  contém todas as raízes de  $\hat{f}$  em  $\hat{y}_0$ . Assim  $\lambda(\hat{f}, \alpha) = \lambda(\hat{f}, X)$ . Deste modo

$$mult(f, y_0) = |\lambda(f, \alpha)| = |\lambda(\hat{f}, X)|. \quad (3.2)$$

Agora assumamos que  $f$  é do tipo I. Como  $\hat{q}$  é verdadeiramente orientável ( $\hat{q}$  é um recobrimento), segue que  $\hat{f}$  é também tipo I. Como  $X$  é orientável, o laço  $\hat{f} \circ \sigma$  em  $\hat{Y}$  preserva orientação para todo laço  $\sigma$  em  $X$ . Por outro lado, vemos que  $\hat{f}_\#: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(\hat{Y}, f(x))$  é um epimorfismo para todo  $x \in X$ . Assim, todo laço em  $\hat{Y}$  preserva orientação e, portanto,  $\hat{Y}$  é orientável. Como  $X$  e  $\hat{Y}$  são ambos compactos e orientáveis, então  $\lambda(\hat{f}, X) = \deg(\hat{f})$  pelo Teorema 2.11, e portanto

$\text{mult}(f, y_0) = |\lambda(f, \alpha)| = |\lambda(\widehat{f}, X)| = |\deg(\widehat{f})|$ . Isto completa a prova para  $X$  orientável e  $f$  do tipo I.

Assuma agora que  $X$  é orientável e  $f$  é do tipo II. Como  $X$  não possui laço invertendo orientação deve existir um laço  $\alpha$  preservando orientação em  $X$  tal que  $f \circ \alpha = \widehat{q} \circ \widehat{f} \circ \alpha$  inverte orientação. Como  $\widehat{q}$  é verdadeiramente orientável, isto implica que  $\widehat{f} \circ \alpha$  também inverte orientação, pois contrário teríamos  $\widehat{q} \circ \widehat{f} \circ \alpha = f \circ \alpha$  preservando orientação, contradizendo a hipótese de  $X$  ser orientável e  $f$  do tipo II. Assim  $\widehat{Y}$  é não-orientável e, portanto,  $H_n(\widehat{Y}; \mathbb{Z}) = 0$ . Mas  $L_n(\widehat{f}, X) = j_{*n} \circ \widehat{f}_{*n}$  onde  $j_{*n}$  é induzido pela inclusão  $j: \widehat{Y} \subset (\widehat{Y}, \widehat{Y} - \widehat{y}_0)$ . Isto significa que  $L_n(\widehat{f}, X)$  pode ser fatorado através de  $H_n(\widehat{Y}) = 0$  e, portanto,  $\lambda(\widehat{f}, X) = 0$ . Segue da Equação 3.2 que  $\text{mult}(f, y_0) = |\lambda(f, \alpha)| = |\lambda(\widehat{f}, X)| = 0$ . Isto completa a prova para  $X$  orientável.

Agora assuma que  $X$  é não-orientável. Então, por definição,  $\text{mult}(f, y_0) = \text{mult}(f \circ \tilde{p}, y_0)$ . Se  $\mathcal{R}(f) = \infty$ , então  $\widehat{q}$  tem um número infinito de folhas. Assim  $\widehat{q} \circ \check{q}$  também tem um número infinito de folhas e, portanto,  $\mathcal{R}(f \circ \tilde{p}) = \infty$ . Como na primeira parte da prova, temos que  $\text{mult}(f, y_0) = \text{mult}(f \circ \tilde{p}, y_0) = 0$ . A partir de agora assuma que  $\mathcal{R}(f) < \infty$ , o que implica em  $\widehat{Y}$  compacto. Como  $\check{q}: \check{Y} \rightarrow \widehat{Y}$  é a duas folhas, isto implica que  $\check{Y}$  é também compacto.

Primeiro assumimos que  $f$  é tipo I. Como  $\tilde{p}$  é tipo I, assim é  $f \circ \tilde{p}$ . Assim aplicando a primeira parte do teorema com  $f \circ \tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow Y$  no lugar de  $f$  e  $\check{f}: \tilde{X} \rightarrow \check{Y}$  no lugar de  $\widehat{f}$  concluímos que  $\check{Y}$  é orientável e  $\text{mult}(f, y_0) = \text{mult}(f \circ \tilde{p}) = |\deg(\check{f})|$ .

Para completar a prova, assuma que  $f$  é tipo II. Precisamos mostrar que  $\text{mult}(f, y_0) = 0$ , o que equivale a mostrar que  $\text{mult}(f \circ \tilde{p}, y_0) = 0$ . Pela primeira parte do teorema sabemos que  $\text{mult}(f \circ \tilde{p}, y_0) = 0$  se  $f \circ \tilde{p}$  é do tipo II. Assim resta considerar o caso onde  $f \circ \tilde{p}$  é tipo I, mas  $f$  é tipo II. Isto pode ocorrer apenas se existe um laço  $\gamma$  invertendo orientação em  $X$  que é aplicado a um laço preservando orientação em  $Y$ . De fato: Suponha que não exista tal laço, então  $f$  leva um laço  $\alpha$  em  $X$  que preserva orientação em um laço  $f \circ \alpha$  invertendo orientação ( $f$  é do tipo II). Como  $\alpha$  preserva orientação, o levantamento  $\tilde{\alpha}$  de  $\alpha$  em  $\tilde{X}$  é um laço. Como  $\tilde{X}$  é orientável e  $f \circ \tilde{p}$  é tipo I,  $f \circ \tilde{p}(\tilde{\alpha}) = f \circ \alpha$  deve preservar orientação, contradizendo a hipótese acima.

Da teoria de espaços de recobrimento, os laços  $\alpha$  e  $f \circ \alpha$  induzem transformações de recobrimento  $\tau_\alpha: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  e  $\tau_{f \circ \alpha}: \check{Y} \rightarrow \check{Y}$  tais que  $\check{f} \circ \tau_\alpha = \tau_{f \circ \alpha} \circ \check{f}$ . Da primeira parte do teorema,  $\check{Y}$  é orientável pois  $f \circ \tilde{p}$  é tipo I. Assim podemos calcular os graus e encontrar  $\deg(\check{f}) \deg(\tau_\alpha) = \deg(\tau_{f \circ \alpha}) \deg(\check{f})$ . Como  $\alpha$  inverte orientação,  $\deg(\tau_\alpha) = -1$ , e como  $f \circ \alpha$  preserva orientação,  $\deg(\tau_{f \circ \alpha}) = 1$ . Portanto  $\deg(\check{f}) = 0$ .

Assim, da primeira parte da prova temos  $\text{mult}(f \circ \tilde{p}) = |\deg(\check{f})| = 0$ . ■

Como o grau mod 2 de uma aplicação de  $n$ -variedades compactas está sempre definido, a primeira parte da prova acima pode ser modificada para provar o seguinte:

**Teorema 3.19** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação tipo III de  $n$ -variedades compactas e  $y_0 \in Y$ . Então, ou  $\mathcal{R}(f) = \infty$ , caso em que  $\text{mult}(f, y_0) = 0$ , ou  $\text{mult}(f, y_0) = |\deg_2(\widehat{f})|$ , onde  $\widehat{f}$  é um levantamento de Hopf para  $f$ ,  $\deg_2(\widehat{f})$  é seu grau mod 2 e  $|\deg_2(\widehat{f})| = 1$  se  $\deg_2(\widehat{f}) \equiv 1 \pmod{2}$  e é 0 caso contrário.*

**Prova:** Se  $\mathcal{R}(f) = \infty$ , então pelo Corolário 1.21 temos que  $N(f) = 0$  e, portanto, pelo Teorema 3.16  $\text{mult}(f, y_0) = 0$ . Assumiremos que  $\mathcal{R}(f) < \infty$ . Então como  $\widehat{q} : \widehat{Y} \rightarrow Y$  possui exatamente  $\mathcal{R}(f) < \infty$  folhas e  $Y$  é compacto, segue que  $\widehat{Y}$  é compacto. Vamos agora mostrar que  $\text{mult}(f, y_0) = |\lambda_2(\widehat{f}, X)|$ , o que completa a prova, pois pelo Teorema 2.11 temos que  $\lambda_2(\widehat{f}, X) = \text{deg}_2(\widehat{f})$ .

Se  $f$  é livre de raízes, então  $\text{mult}(f, y_0) = 0$ . Mas neste caso  $\widehat{f}$  é também livre de raízes e temos  $\lambda_2(\widehat{f}, X) = 0$ . Assumiremos que  $f$  possui pelo menos uma raiz. Seja  $\alpha$  sua classe de raízes, donde  $\widehat{f}(\alpha) = \{\widehat{y}_0\}$  para algum  $\widehat{y}_0 \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$ .

Agora consideremos o mesmo diagrama da prova do Teorema 3.18. Analogamente obtemos que  $L_*(f, \alpha; \mathbb{Z}_2) = d_* \circ \widehat{q}'_* \circ \widehat{d}_*^{-1} \circ L_*(\widehat{f}, \alpha; \mathbb{Z}_2)$ , o que implica  $\lambda_2(f, \alpha) = \lambda_2(\widehat{f}, \alpha)$ . Mas  $\alpha$  contém todas as raízes de  $\widehat{f}$  em  $\widehat{y}_0$ . Assim  $\lambda_2(\widehat{f}, \alpha) = \lambda_2(\widehat{f}, X)$ .

Como  $f$  é tipo III,  $\text{mult}(f, y_0) = |\lambda_2(f, \alpha)| = |\lambda_2(\widehat{f}, \alpha)| = |\lambda_2(\widehat{f}, X)|$ . ■

**Corolário 3.20** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de  $n$ -variedades compactas. Então  $\text{mult}(f, y_0)$  é independente da escolha de  $y_0 \in Y$ .*

**Prova:** Este resultado segue dos Teoremas 3.18 e 3.19 e do fato de  $\mathcal{R}(f), \text{deg}(\widehat{f}), \text{deg}(\check{f})$  e  $\text{deg}_2(\widehat{f})$  serem independentes de  $y_0$ .

Portanto, escreveremos  $\text{mult}(f)$  no lugar de  $\text{mult}(f, y_0)$ . ■

**Corolário 3.21** *Se  $f, g : X \rightarrow Y$  são aplicações homotópicas de  $n$ -variedades compactas, então  $\text{mult}(f) = \text{mult}(g)$ .*

**Prova:** Os recobrimentos do Teorema 3.18 dependem apenas do tipo de homotopia de  $f$ , aplicações homotópicas tem levantamentos homotópicos, e grau é um invariante homotópico. ■

Estamos finalmente em condições de definir o grau absoluto.

**Definição 3.22** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de  $n$ -variedades compactas. O grau absoluto de  $f$  é denotado por  $\mathcal{A}(f)$  e é definido como o produto da multiplicidade de  $f$  pelo número de classes de Nielsen de  $f$ , ou seja,  $\mathcal{A}(f) = \text{mult}(f) \cdot \#(f^{-1}(y_0)/NR)$ .

**Teorema 3.23** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de  $n$ -variedades compactas. Então

$$\mathcal{A}(f) = \text{mult}(f)N(f).$$

Quando  $\mathcal{R}(f) < \infty$ , temos também  $\mathcal{A}(f) = \text{mult}(f)\mathcal{R}(f)$ .

**Prova:** Se  $\text{mult}(f) = 0$ , por definição  $\mathcal{A}(f) = \text{mult}(f)(\#f^{-1}(y_0)/NR) = 0(\#f^{-1}(y_0)/NR) = 0 = 0N(f) = \text{mult}(f)N(f)$ . Se  $\text{mult}(f) > 0$ , vimos na prova do Teorema 3.16 que toda classe de Nielsen é essencial. Assim, existem  $N(f)$  delas. Logo  $\mathcal{A}(f) = \text{mult}(f)(\#f^{-1}(y_0)/NR) = \text{mult}(f)N(f)$ . Pelo Teorema 3.16 sabemos que quando  $\mathcal{R}(f) < \infty$  e  $\text{mult}(f) \neq 0$  tem-se  $\mathcal{R}(f) = N(f)$ , o que implica que, neste caso,  $\mathcal{A}(f) = \text{mult}(f)\mathcal{R}(f)$ . ■

**Corolário 3.24** Se  $f, g : X \rightarrow Y$  são aplicações homotópicas de  $n$ -variedades compactas, então  $\mathcal{A}(f) = \mathcal{A}(g)$ .

**Prova:** Como  $\text{mult}(f)$  e  $N(f)$  são invariantes homotópicos, aplicando o Teorema 3.23 temos

$$\mathcal{A}(f) = \text{mult}(f)N(f) = \text{mult}(g)N(g) = \mathcal{A}(g).$$

**Corolário 3.25** Seja  $f$  uma aplicação do tipo III entre  $n$ -variedades compactas com  $\mathcal{A}(f) > 0$ . Então  $\mathcal{A}(f) = N(f)$ .

**Prova:** Como  $f$  é tipo III, por definição  $\text{mult}(f) = 0$  ou  $\text{mult}(f) = 1$ . Por outro lado, pelo Teorema 3.23 temos  $\mathcal{A}(f) = \text{mult}(f)N(f)$ . Além disso, temos por hipótese que  $\mathcal{A}(f) > 0$ , então  $\text{mult}(f)$  deve ser 1. Isto implica que  $\mathcal{A}(f) = N(f)$ . ■

Uma vez que tenhamos provado o Teorema 3.4 (o que chamamos o 1º Teorema de Hopf), saberemos que  $N(f) > 0$  implica  $\mathcal{A}(f) > 0$ . Assim, para aplicações do tipo III, a igualdade  $\mathcal{A}(f) = N(f)$  valerá indiferente de ser ou não  $\mathcal{A}(f) > 0$ .

**Corolário 3.26** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de  $n$ -variedades compactas. Se  $\mathcal{A}(f) > 0$ , então  $N(f) > 0$ .*

**Prova:** Por definição  $\text{mult}(f) \geq 0$ . Por outro lado, pelo Teorema 3.23  $\mathcal{A}(f) = \text{mult}(f)N(f)$ . Logo,  $\mathcal{A}(f) > 0$  implica  $N(f) > 0$ . ■

### 3.3 Pré-requisitos para a prova dos Teoremas de Hopf

Dedicamos toda esta seção a apresentação de alguns resultados técnicos (cinco lemas) necessários à demonstração dos Teoremas de Hopf 3.4 e 3.6.

**Lema 3.27** *Suponha  $X$  uma  $n$ -variedade com  $n > 1$  e  $x_0 \in X$ . Então:*

(1) *Para qualquer  $x \in X - x_0$ , a inclusão  $k : X - x_0 \subset X$  induz um epimorfismo*

$$k_{\#} : \pi_1(X - x_0, x) \subset \pi_1(X, x) \text{ que é um isomorfismo se } n > 2.$$

(2) *Se  $\gamma$  é um caminho qualquer em  $X$  cujos pontos finais são deferentes de  $x_0$ , então  $\gamma$  é homotópico com pontos finais fixados a um caminho em  $X - x_0$ .*

**Prova:** Seja  $B$  uma  $n$ -bola fechada em  $X$  com  $x_0 \in \text{int}B$ . Escolha um ponto base  $x \in \text{int}B - x_0$ . Como  $n > 1$ , então  $\text{int}B - x_0$ ,  $\text{int}B$  e  $X - x_0$  são conexos por caminhos. Assim, podemos aplicar o Teorema de Seifert-van Kampen a  $\text{int}B$ ,  $X - x_0$ ,  $\text{int}B - x_0$  e  $X = \text{int}B \cup X - x_0$  obtendo o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi(X - x_0, x) & & \\
 & i_{\#} \nearrow & \downarrow i_l \approx & \nwarrow k_{\#} & \\
 \pi_1(\text{int}(B - x_0), x) & \xrightarrow{F} & \pi(X - x_0, x) * \pi_1(\text{int}B, x) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(X, x) \\
 & j_{\#} \searrow & \uparrow \text{trivial } i_r & \nearrow l_{\#} & \\
 & & \pi_1(\text{int}B, x) & & 
 \end{array}$$

onde  $i_{\#}$ ,  $j_{\#}$ ,  $k_{\#}$  e  $l_{\#}$  são induzidos pelas inclusões,  $i_l$  e  $i_r$  são as injeções naturais nas componentes do produto livre,  $F = i_l i_{\#} * i_r j_{\#}$  e  $\phi$  é um epimorfismo cujo nucleo é o subgrupo normal gerado pela imagem de  $F$ . Como  $\pi_1(\text{int}B, x)$  é trivial,  $i_l$  é um isomorfismo e, portanto,  $k_{\#}$  é um epimorfismo por ser composição de epimorfismos. Como  $\text{int}B - x_0$  pode ser retraído por deformação sobre uma  $(n - 1)$ -esfera, então, quando  $n > 2$ , temos que  $\pi_1(\text{int}B - x_0, x)$  é também trivial e,

neste caso,  $\ker \phi$  é trivial. Isso implica que, para  $n > 2$ ,  $\phi$  é um isomorfismo, por ser composição de isomorfismos. Isto prova (1).

Para provar (2), seja  $\gamma$  um caminho em  $X$  cujos pontos finais são diferentes de  $x_0$ . Sejam  $x = \gamma(0)$  e  $\gamma_1$  um caminho em  $X - x_0$  de  $\gamma(1)$  para  $x$ . Então, o caminho  $\gamma\gamma_1$  é um laço em  $X$  baseado em  $x$ . Como, por (1),  $k_{\#}$  é um epimorfismo, existe um laço  $\sigma$  em  $X - x_0$  tal que  $[\sigma] = [\gamma\gamma_1]$  e, portanto,  $[\sigma\gamma_1^{-1}] = [\gamma]$ , onde  $[\cdot]$  representa classe de homotopia em  $X - x_0$ . ■

**Lema 3.28** *Sejam  $X$  uma  $n$ -variedade, com  $n > 1$ , e  $\gamma$  um caminho em  $X$  de  $x_0$  para  $x_1$ ,  $x_1 \neq x_0$ . Então, existe uma  $n$ -bola  $B \subset X$  tal que  $x_0, x_1 \in \text{int}B$  e  $[\rho] = [\gamma]$  para qualquer caminho  $\rho$  em  $B$  de  $x_0$  para  $x_1$ .*

**Prova:** Seja  $B_0$  uma  $n$ -bola com  $x_0 \in \text{int}B_0$  e seja  $\gamma_0$  um caminho em  $\text{int}B_0$  de  $x_0$  para um ponto  $x'_0 \in \text{int}B_0 - x_0$ . Então  $\gamma_0^{-1}\gamma$  é um caminho em  $X$  com pontos finais em  $X - x_0$ . Pelo Lema 3.27, existe um caminho  $\gamma_1$  em  $X$  homotópico com pontos finais fixados a  $\gamma_0^{-1}\gamma$ , donde  $[\gamma] = [\gamma_0\gamma_1]$ . Como  $X - x_0$  é uma vizinhança de  $\gamma_1$ , segue do Teorema 1.18 que existe uma isotopia  $\{h_t : X \rightarrow X\}$  tal que  $\gamma_1(t) = \{h_t(x'_0)\}$ ,  $h_0$  é a identidade em  $X$  e  $\{h_t\}$  é a identidade fora de  $X - x_0$ . Assim,  $h_t(x_0) = x_0$  para todo  $t$ . Seja  $B = h_1(\text{int}B_0)$ . Então  $x_0 = h_1(x_0) \in \text{int}B$  e  $x_1 = h_1(x'_0) \in \text{int}B$ .

Suponhamos que  $\rho$  seja um caminho em  $B$  de  $x_0$  para  $x_1$ . Precisamos mostrar que  $[\gamma] = [\rho]$ .

Defina uma homotopia  $H_t : I \rightarrow X$  por

$$H_t(s) = \begin{cases} h_t \circ \gamma_0(s(2-t)) & \text{para } 0 \leq s \leq 1/2 \\ h_{(2s-1)(1-t)+t} \circ \gamma_0(1+st-t) & \text{para } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Note que

$$H_t(1/2) = \begin{cases} h_t \circ \gamma_0(1/2(2-t)) = h_t \circ \gamma_0(1-t/2) \\ h_{(2(1/2)-1)(1-t)+t} \circ \gamma_0(1+t/2-t) = h_t \circ \gamma_0(1-t/2) \end{cases}.$$

Assim,  $\{H_t\}$  está bem definida e  $\{H_t\}$  é uma homotopia com pontos finais fixados de  $\gamma_0\gamma_1$  para  $h_1 \circ \gamma_0$ . De fato:

$$H_0(s) = \begin{cases} h_0 \circ \gamma_0(s(2-0)) = h_0 \circ \gamma_0(2s) = \gamma_0(2s) \\ h_{(2s-1)(1-0)+0} \circ \gamma_0(1+s0-0) = h_{2s-1}(\gamma_0(1)) = h_{2s-1}(x'_0) = \gamma_1(2s-1) \end{cases}.$$

Logo,  $H_0(s) = \gamma_0\gamma_1(s)$ . E

$$H_1(s) = \begin{cases} h_1 \circ \gamma_0(s(2-1)) \\ h_{(2s-1)(1-1)+1} \circ \gamma_0(1+s-1) \end{cases} = h_1 \circ \gamma_0(s).$$

Ainda  $H_t(0) = h_t \circ \gamma_0(0) = h_t(x_0) = x_0$  e  $H_t(1) = h_{(2-t)(1-t)+t} \circ \gamma_0(1+t-t) = h_1 \circ \gamma_0(1) = h_1(x'_0) = x_1$ . Assim,  $[\gamma_0\gamma_1] = [h_1 \circ \gamma_0]$ . Note que  $h_1 \circ \gamma_0(0) = h_1(x_0) = x_0 = \rho(0)$  e  $h_1 \circ \gamma_0(1) = h_1(x'_0) = x_1 = \rho(1)$ , então  $h_1 \circ \gamma_0$  e  $\rho$  têm os mesmos pontos finais. Além disso,  $B$  é simplesmente conexo. Como quaisquer dois caminhos com os mesmos pontos finais em um conjunto simplesmente conexo são homotópicos, temos  $[h_1 \circ \gamma_0] = [\rho]$ . Portanto,  $[\gamma] = [\gamma_0\gamma_1] = [h_1 \circ \gamma_0] = [\rho]$ . ■

**Lema 3.29** *Sejam  $C_0$  e  $C_1$  duas  $n$ -bolas Euclidianas disjuntas em  $\text{int}B^n$  e  $z_0 \in \partial C_0$  e  $z_1 \in \partial C_1$ . Então, existe um arco  $a$  em  $B^n$  de  $z_0$  para  $z_1$  tal que  $a(I) \cap (C_0 \cup C_1) = \{z_0, z_1\}$  e uma retração por deformação  $\{r_t\}$  de  $(B^n, B^n - (\text{int}C_0 \cup \text{int}C_1))$  sobre  $(C_0 \cup a(I) \cup C_1, \partial C_0 \cup a(I) \cup \partial C_1)$ .*

Por *bola Euclidiana* entendemos uma bola fechada da forma  $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - c\| \leq d\}$  em  $\mathbb{R}^n$ , assim uma bola Euclidiana não é apenas um conjunto homeomorfo a  $B^n$ .

**Prova:** Sejam  $c_0$  e  $c_1$  os centros de  $C_0$  e  $C_1$ . Seja  $l$  o segmento de reta unindo  $c_0$  a  $c_1$ , e sejam  $z'_0$  e  $z'_1$  os pontos onde  $l$  intersecta  $\partial C_0$  e  $\partial C_1$ . Seja  $a'$  o arco de segmento de reta de  $z'_0$  para  $z'_1$ , parametrizada por  $a'(t) = (1-t)z'_0 + tz'_1$ .

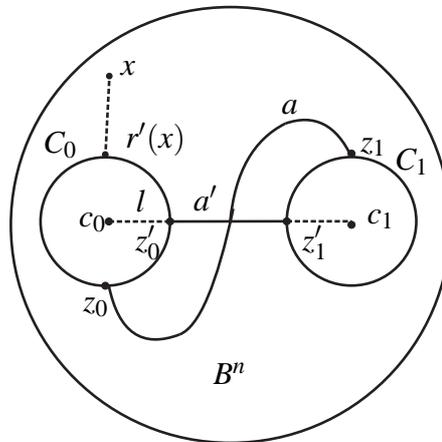


Figura 3.3: Esquema da prova do Lema 3.29

Primeiro contruímos uma retração por deformação  $\{r'_t\}$  de  $B^n$  sobre  $C_0 \cup a'(I) \cup C_1$ . Para cada  $x \in B^n$  existe um ponto em  $l$  que minimiza a distância de  $x$  para  $l$ . Seja  $\alpha(x)$  este ponto. Se  $x \in B^n - (\text{int}C_0 \cup a'(I) \cup \text{int}C_1)$  o segmento de reta de  $x$  para  $\alpha(x)$  intersecta  $\partial C_0 \cup a'(I) \cup \partial C_1$  em um único ponto, que chamamos  $r'(x)$ . Para  $x \in C_0 \cup a'(I) \cup C_1$  seja  $r'(x) = x$ . Defina  $r'_t$  por  $r'_t = (1-t)x + tr'(x)$ .

Note que

$$r'_0(x) = (1-0)x + 0r'(x) = x;$$

$$r'_1(x) = (1-1)x + 1r'(x) = r'(x) \in C_0 \cup a'(I) \cup C_1;$$

$$r'_t(y) = (1-t)y + tr'(y) = (1-t)y + ty = y - ty + ty = y, \text{ para todo } a \in C_0 \cup a'(I) \cup C_1.$$

Isto mostra que  $B^n$  retrain por deformação sobre  $C_0 \cup a'(I) \cup C_1$ .

Sejam  $z_0$  e  $z_1$  pontos arbitrários em  $\partial C_0$  e  $\partial C_1$ . Construa um homeomorfismo  $h : B^n \rightarrow B^n$  como segue: Seja  $\rho_i$  a rotação de  $\mathbb{R}^n$  em torno de  $C_i$  tal que  $\rho_i(z_i) = z'_i$  para  $i = 0, 1$ . Seja  $h|_{C_i} = \rho_i|_{C_i}$  para  $i = 0, 1$  e estenda  $h$  a um homeomorfismo em todo  $B^n$ , retardando as rotações até a identidade fora de  $C_i$ . Defina  $a$  e  $\{r_t\}$  por  $a = h^{-1} \circ a'$  e  $r_t = h^{-1} \circ r'_t \circ h$ .

Por construção, temos que  $a$  e  $\{r_t\}$  possuem as propriedades desejadas. ■

**Lema 3.30** *Suponha  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de  $n$ -variedades, com  $n > 2$ ,  $y_0 \in Y$  e  $f^{-1}(y_0)$  finito. Sejam  $x_0, x_1$  duas raízes de  $f$  em  $y_0$  que estão  $f$ -relacionadas por um caminho  $\gamma$  em  $X$ , de  $x_0$  para  $x_1$ . E suponha  $f$  um homeomorfismo local em  $x_0$  e  $x_1$ . Então, existem  $n$ -bolas  $B, C$  em  $X$  e  $D$  em  $Y$  e, uma homotopia  $\{g_t : X \rightarrow Y\}$  que tem as seguintes propriedades:*

- (1)  $x_0, x_1 \in \text{int}C \subset C \subset \text{int}B$ ,  $B \cap f^{-1}(y_0) = \{x_0, x_1\}$  e  $y_0 \in \text{int}D$ .
- (2) Qualquer caminho em  $B$  de  $x_0$  para  $x_1$  é homotópico com pontos finais fixados a  $\gamma$ .
- (3)  $g_0 = f$ ,  $\{g_t\}$  é constante em  $X - \text{int}B$ ,  $g_t^{-1}(y_0) \cap B = \{x_0, x_1\}$  para todo  $t \in I$ , e  $g_1(C) \subset D$ .

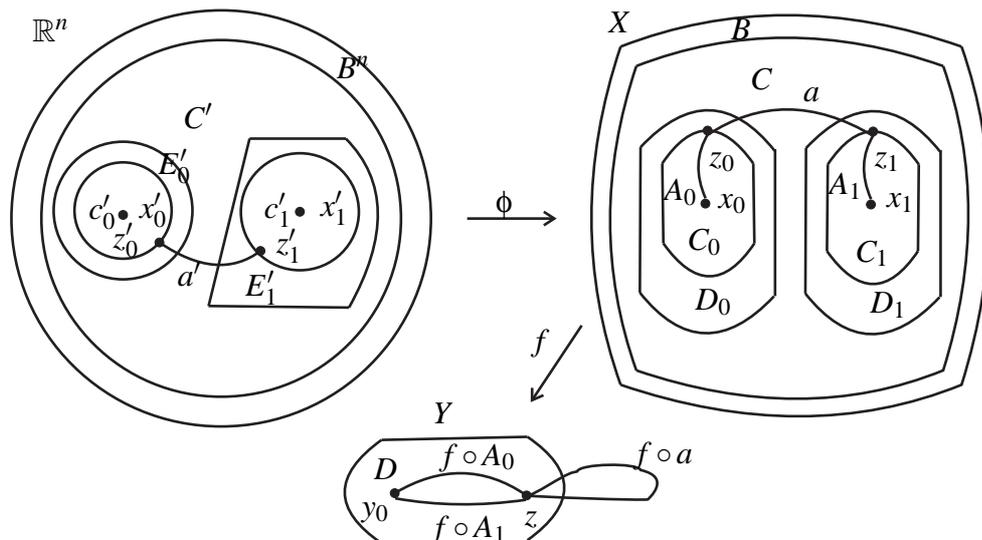


Figura 3.4: Esquema da prova do Lema 3.30

**Prova:** Para provar esse lema usaremos alguns resultados construtivos, a partir de agora descreveremos como eles são realizados.

- $f, X, Y, x_0, x_1, y_0$  e  $\gamma$ , são dados. Assumiremos que  $\gamma$  está em  $X - f^{-1}(y_0) \cup \{x_0\} \cup \{x_1\}$ . Isso pode ser feito aplicando o Lema 3.27 e usando o fato que  $f^{-1}(y_0)$  é finito.
- A  $n$ -bola  $B$  é criada pela aplicação do Lema 3.28 à variedade  $X - f^{-1}(y_0) \cup \{x_0\} \cup \{x_1\}$  e o caminho  $\gamma$ . A  $n$ -bola  $B$  contém  $x_0$  e  $x_1$  em seu interior,  $B \cap f^{-1}(y_0) = \{x_0, x_1\}$  e  $B$  satisfaz (2).
- Seja  $\phi : B^n \rightarrow B$  um homeomorfismo tal que  $x'_0 = \phi^{-1}(x_0)$  e  $x'_1 = \phi^{-1}(x_1)$ .
- Seja  $C'$  uma bola Euclidiana contida em  $B^n$ , concêntrica com  $B^n$  e tendo  $x'_0$  e  $x'_1$  em seu interior. Seja  $C = \phi(C')$ .
- Sejam  $D, D_0$  e  $D_1$   $n$ -bolas tais que  $y_0 \in \text{int}D, x_i \in D_i \subset \text{int}C, D_0 \cap D_1 = \emptyset$  e  $f$  aplica  $D_1$  homeomorficamente sobre  $D$  para  $i = 0, 1$ . Eles são definidos como segue:

Como  $f$  é um homeomorfismo local em  $x_0$  e  $x_1$ , existem vizinhanças  $U_0$  e  $U_1$  de  $x_0$  e  $x_1$  que são aplicadas homeomorficamente sobre vizinhanças  $V_0$  e  $V_1$  de  $y_0$ . Escolhendo os  $U_i$  pequeno suficiente, podemos assumir que eles são disjuntos e contidos no  $\text{int}C$ . Agora, escolha uma  $n$ -bola  $D$  de modo que  $y_0 \in \text{int}D \subset V_0 \cap V_1$  e seja  $D_i = (f|_{U_i})^{-1}(D)$ .

As propriedades (1) e (2) são claramente satisfeitas. Para concluir a prova, precisamos definir  $\{g_t\}$  satisfazendo a propriedade (3). Para isso, faremos mais algumas construções que nos permitirão aplicar o Lema 3.29.

- Construamos  $E'_0$  como  $n$ -uma bola Euclidiana dentro de  $\phi^{-1}(D_0)$  e centrada em  $x'_0$ . Seja  $E'_1 = \phi^{-1} \circ (f|_{D_1})^{-1} \circ (f|_{D_0}) \circ \phi(E'_0)$ . Então  $E'_0$  e  $E'_1$  são disjuntos, pois  $D_0$  e  $D_1$  são.
- Construa  $C'_1$  como uma bola euclidiana centrada em  $x'_1$  e contida em  $E'_1$ . Escolha um ponto  $z'_1$  em seu bordo. Sejam  $z = f \circ \phi(z'_1) \in Y$  e  $z'_0 = \phi^{-1} \circ (f|_{D_0})^{-1}(z_0) \in E'_0$ . Então  $z'_0$  é um ponto na bola euclidiana  $E'_0$ , centrada em  $x'_0$ . Assim, podemos construir uma bola euclidiana concêntrica  $C'_0$  dentro de  $E'_0$  possuindo  $z'_0$  em seu bordo.
- Podemos agora aplicar o Lema 3.29 para  $C'_0, C'_1, z'_0$  e  $z'_1$  para obter um arco  $a'$  de  $z'_0$  para  $z'_1$  tal que  $a'(I) \cap C'_i = z'_i$  e uma retração por deformação  $\{r'_t\}$  do par  $(B^n, B^n - \text{int}C')$  sobre o par  $(C'_0 \cup a'(I) \cup C'_1, \partial C'_0 \cup a'(I) \cup \partial C'_1)$ .
- Seja  $C_i = \phi(C'_i)$ ,  $z_i = \phi(z'_i)$ ,  $a = \phi \circ a'$  e  $\{r_t\} = \{\phi \circ r'_t \circ \phi^{-1}\}$ . Então  $a$  é um arco em  $B$  de  $z_0 \in \partial C_0$  para  $z_1 \in \partial C_1$  tal que  $a(I) \cap C_i = \{z_i\}$ ,  $\{r_t\}$  é uma retração por deformação do par  $(B^n, B^n - \text{int}C)$  sobre o par  $(C_0 \cup a(I) \cup C_1, \partial C_0 \cup a(I) \cup \partial C_1)$  e  $f(z_0) = f(z_1) = z$ .

A partir de agora estamos em condições de construir  $\{g_t\}$ . Antes, porém, vamos mostrar que  $f \circ a$  é contrátil em  $Y - y_0$  no ponto  $z$ . Seja  $\gamma_i$  um caminho em  $C_i$  de  $x_i$  para  $z_i$ , com  $i = 1, 2$ . Então  $\gamma_0(a\gamma_1^{-1})$  é um caminho em  $B$  de  $x_0$  para  $x_1$  e, portanto, pela propriedade (2),  $[\gamma_0 a \gamma_1^{-1}] = [\gamma]$ . Deste modo,  $[f \circ \gamma_0][f \circ a][f \circ \gamma_1^{-1}] = [f \circ \gamma] = [y_0]$ , donde  $[f \circ a] = [(f \circ \gamma_0)^{-1}(f \circ \gamma_1)]$ . Mas  $(f \circ \gamma_0)^{-1}(f \circ \gamma_1)$  é um laço em  $D$  baseado em  $z$  e  $D$  é contrátil, isso implica que  $(f \circ \gamma_0)^{-1}(f \circ \gamma_1)$  é contrátil e, conseqüentemente, que  $f \circ a$  é contrátil a  $z$ .

Como  $f \circ a$  é um laço em  $Y - y_0$  e  $n > 2$ , pelo Lema 3.27, podemos assumir que a contração ocorre em  $Y - y_0$ . (Note que aqui estamos usando fortemente o fato de  $n$  ser maior que 2, pois se  $n$  fosse 2 poderia ocorrer de  $f \circ a$  ser um laço em torno de  $y_0$ , caso em que  $f \circ \alpha$  poderia não ser contrátil em  $Y - y_0$ ). Assim, seja  $\{H_t\}$  uma homotopia com pontos finais fixados em  $Y - y_0$  de  $f \circ a$  para o caminho constante  $z$ . Defina uma homotopia  $\{g_t^1(x) : C_0 \cup a(I) \cup C_1 \rightarrow Y\}$  por

$$g_t^1(x) = \begin{cases} H_t(a^{-1}(x)) & \text{para } x \in a(I), \\ f(x) & \text{para } x \in C_0 \cup C_1. \end{cases}$$

Aqui, usaremos  $a^{-1}$  para denotar a inversa de  $a$  como uma função, não como um caminho. Deste modo,  $a^{-1}(x) = s$  significa  $a(s) = x$ . Note que  $g_t^1(\partial C_0 \cup a(I) \cup \partial C_1) \subset Y - y_0$  durante esta homotopia e no final  $g_1^1$  aplica o par  $C_0 \cup a(I) \cup C_1, \partial C_0 \cup a(I) \cup \partial C_1$  em  $(D, D - y_0)$ . Agora, defina uma homotopia  $\{g_t^2 : B \rightarrow Y\}$  por

$$g_t^2 = \begin{cases} f \circ r_{2t} & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 \\ g_{2t-1}^1 \circ r_1 & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Note que  $\{g_t^2\}$  está bem definida, pois

$$g_{1/2}^2 = \begin{cases} f \circ r_1 \\ g_0^1 \circ r_1 = H_0 \circ a^{-1} \circ r_1 = f \circ a \circ a^{-1} \circ r_1 = f \circ r_1 \end{cases}.$$

Além disso, no início da homotopia temos  $g_0^2 = f \circ r_0 = f|_B$  e  $(g_t^2)^{-1}(y_0) \cap B = \{x_0, x_1\}$  durante a homotopia. No final  $g_1^2$  aplica o par  $(C, \partial C)$  em  $(D, D - y_0)$ .

Estenderemos  $\{g_t^2|_C\}$  a todo  $X$  retardando  $g_t^2$  para baixo quando saímos de  $\partial C$  para  $\partial B$ . Para fazer isso, seja  $\beta : B \rightarrow I$  uma aplicação que é 1 em  $C$  e 0 em  $\partial B$  e defina a homotopia  $\{g_t\}$  por

$$g_t(x) = \begin{cases} g_{\beta(x)t}^2 & \text{para } x \in B \\ f(x) & \text{para } x \in X - B \end{cases}.$$

As duas expressões fornecem  $g_t(x) = f(x)$  para  $x \in \partial B$ . Assim, a homotopia  $\{g_t\}$  está bem definida. Além disso, por construção,  $\{g_t\}$  satisfaz as propriedades listadas em (3). ■

**Lema 3.31** *Suponha  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de  $n$ -variedades, com  $n > 2$ ,  $y_0 \in Y$  um ponto e  $X$  compacto e orientável. Suponha ainda que existam duas raízes  $x_0$  e  $x_1$  de  $f$  em  $y_0$ , uma  $n$ -bola  $C \subset X$  e uma  $n$ -bola  $D \subset Y$  tais que:*

1.  $x_0, x_1 \in \text{int}C$ ,  $\{x_0, x_1\} = C \cap f^{-1}(y_0)$  e  $y_0 \in \text{int}D$ .
2.  $\lambda(f, x_1) = -\lambda(f, x_0)$ .
3.  $f(C) \subset D$ .

Então existe uma homotopia  $\{h_t : X \rightarrow Y\}$  tal que  $h_0 = f$ ,  $\{h_t\}$  é constante em  $X - \text{int}C$  e  $h_1$  não possui raízes em  $C$ .

**Prova:** Seja  $\phi : B^n \rightarrow C$  um homeomorfismo. Seja  $E' \subset \text{int}B^n$  uma bola euclidiana de raio  $d$  concêntrica a  $B^n$  com  $\phi^{-1}(x_0)$  e  $\phi^{-1}(x_1)$  em seu interior. Defina uma retração por deformação  $\{r'_t\}$  de  $(B^n, B^n - E')$  sobre  $(E', \partial E')$  por

$$r'_t(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \in E' \\ (1-t)x + tdx/\|x\| & \text{para } x \in (B^n - E') \end{cases}.$$

Seja  $E = \phi(E')$  e defina  $\{r_t : (C, C - E) \rightarrow (E, \partial E)\}$  por  $r_t = \phi \circ r'_t \circ \phi^{-1}$ . Considere a aplicação  $f'' : (E, \partial E) \rightarrow (D, D - y_0)$  definida por  $f$ . Seja  $s_0 = (1, 0, \dots, 0) \in \partial B^n$ . Defina um homeomorfismo  $\phi_E : (B^n, \partial B^n, s_0) \rightarrow (E, \partial E, \phi_E(s_0))$  por  $\phi_E(x) = \phi(x/d)$ . Então,  $f'' \circ \phi_E$  representa um elemento  $[f'' \circ \phi_E]$  no  $n$ -ésimo grupo de homotopia relativo  $\pi_n(D, D - y_0, f \circ \phi_E(s_0))$ . Primeiramente vamos mostrar que este é o elemento trivial, de modo que exista uma deformação de  $f'' \circ \phi_E$  em  $D - y_0$ . Para fazer isso, considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(E, \partial E, \phi_E(s_0)) & \xrightarrow{f''\pi_n} & \pi_n(D, D - y_0, f'' \circ \phi_E(s_0)) \\ h_E \downarrow & & \approx \downarrow h_D \\ H_n(E, \partial E; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f''_n} & H_n(D, D - y_0; \mathbb{Z}). \end{array}$$

Os homomorfismos horizontais são induzidos por  $f''$ . Os homomorfismos verticais são homomorfismos de Hurewicz. Como  $H_p(D, D - y_0; \mathbb{Z}) = 0$  para  $p < n$  e  $D - y_0$  é simplesmente conexo ( $n > 2$ ), temos  $h_D([f'' \circ \phi_E]) = 0$ . Mas, pela comutatividade do diagrama acima temos  $h_D([f'' \circ \phi_E]) = h_D(f''\pi_n[\phi_E]) = f''_n(h_E([\phi_E]))$ .

Assim, é suficiente mostrar que  $f''_n = 0$ . Para fazer isso, consideremos outro diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & (X, X - \text{int}E) & \xleftarrow{e} & (C, C - \text{int}E) & \xrightarrow{f'} & (D, D - y_0) & \xrightarrow{j} & (Y, Y - y_0) \\ & & & & \uparrow & \nearrow f'' & & & \\ & & & & (E, \partial E) & & & & \end{array}$$

Pela aditividade,  $\lambda(f, \text{int}E) = \lambda(f, x_0) + \lambda(f, x_1) = 0$ , donde  $L_n(f, \text{int}E; \mathbb{Z}) = 0$ .

Mas  $L_n(f, \text{int}E) = j_{*n} \circ f'_{*n} \circ e_{*n}^{-1} \circ i_{*n}$ . Assim,  $j_{*n} \circ f'_{*n} \circ e_{*n}^{-1} \circ i_{*n} = 0$ . Como  $j$  e  $e$  são excisões,  $j_{*n}$  e  $e_{*n}$  são isomorfismos. Além disso,  $(X, X - \text{int}E)$  é retrato por deformação de  $(X, X - x_0)$ . Assim, a inclusão  $(X, X - \text{int}E) \subset (X, X - x_0)$  induz isomorfismo em homologia de dimensão  $n$  e, portanto,  $i_{*n}$  é isomorfismo. Logo,  $f'_{*n} = 0$ . Assim, pela comutatividade do diagrama,  $f''_{*n} = 0$ . Isto completa a prova que  $[f \circ \phi_E] = 0 \in \pi_n(D, D - y_0)$ .

Como  $[f \circ \phi_E] = 0 \in \pi_n(D, D - y_0)$ , existe uma homotopia  $\{h_t^1 : (B^n, \partial B^n) \rightarrow (D, D - y_0)\}$  com  $h_0^1 = f'' \circ \phi_E$  e  $h_1^1(B^n) \subset D - y_0$ . Seja  $\{h_t^2 : (C, C - \text{int}E) \rightarrow (D, D - y_0)\}$  definida por

$$h_t^2 = \begin{cases} f' \circ r_{2t} & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 \\ h_{2t-1}^1 \circ \phi_E^{-1} \circ r_1 & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Então,  $h_0^2 = f'$ ,  $h_t^2(C - \text{int}E) \subset D - y_0$  para todo  $t$  e  $h_1^2(C) \subset D - y_0$ . Seja  $\beta : C \rightarrow I$  uma aplicação que é 0 em  $\partial C$  e 1 em  $E$ . Defina a homotopia final  $\{h_t : X \rightarrow Y\}$  por

$$h_t(x) = \begin{cases} h_{\beta(x)t}^2(x) & \text{para } x \in C \\ f(x) & \text{para } x \in X - C \end{cases} .$$

Se  $x \in \partial C$ , então  $h_{0t}^2(x) = f'(x) = f(x)$ . Assim,  $\{h_t\}$  está bem definida e satisfaz as propriedades desejadas. ■

### 3.4 Prova dos Teoremas de Hopf

Finalmente, estamos prontos para demonstrar o 1º Teorema de Hopf.

**Prova do Teorema 3.4:** Assumiremos que  $X$  e  $Y$  são  $n$ -variedades compactas, com  $n > 2$ , e  $f$  é transversal a  $y_0$ . Também assumiremos que  $f$  possui pelo menos uma raiz em  $y_0$ . Como  $X$  é compacto,  $f^{-1}(y_0)$  é compacto também. Como  $f$  é transversal a  $y_0$ , a pré-imagem  $f^{-1}(y_0)$  é discreta e, portanto, finita.

Dividimos a prova em três casos:  $X$  e  $f$  orientáveis,  $X$  não-orientável mas  $f$  orientável, e  $f$  não-orientável.

**Caso 1:**  $X$  e  $f$  orientáveis. Primeiro mostraremos que  $\lambda(f, x_0) = \pm 1$  para qualquer raiz  $x_0$ . Seja  $U$  uma vizinhança de  $x_0$  que é aplicada homeomorficamente sobre uma vizinhança  $V$  de  $y_0$ . Tal vizinhança de  $x_0$  existe pelo fato de  $f$  ser transversal a  $y_0$ . Considere o diagrama usual.

$$X \xrightarrow{i} (X, X - x_0) \xrightarrow{e} (U, U - x_0) \xrightarrow{f'} (V, V - y_0) \xrightarrow{j} (Y, Y - y_0)$$

onde  $f'$  é restrição de  $f$ . A inclusão  $i$  induz isomorfismo em homologia de dimensão  $n$ . Além disso,  $e$  e  $j$  são excisões e  $f'$  é um homeomorfismo. Assim, todos induzem isomorfismos. Segue que

$$L_n(f, x_0; \mathbb{Z}) = j_{*n} \circ f'_{*n} \circ e_{*n}^{-1} \circ i_{*n} : H_n(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(Y, Y - y_0; \mathbb{Z})$$

é um isomorfismo e, portanto,  $L_n(f, x_0; \mathbb{Z})(\mu) = \pm v$ , onde  $\mu$  e  $v$  são geradores de  $H_n(X; \mathbb{Z})$  e  $H_n(Y, Y - y_0; \mathbb{Z})$  respectivamente. Portanto, pela definição de  $\lambda$ , segue  $\lambda(f, x_0) = \pm 1$ .

Seja  $\alpha = \{x_0, \dots, x_{d-1}\}$  uma classe de raízes de  $f$  em  $y_0$ . Então,

$$\text{mult}(\alpha) = |\lambda(f, \alpha)| = \left| \sum_{i=0}^{d-1} \lambda(f, x_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{d-1} |\lambda(f, x_i)| = d.$$

Deste modo,  $\text{mult}(\alpha)$  é um limite inferior para o número de raízes em cada classe e, portanto,  $\mathcal{A}(f) = \text{mult}(f)$  (número de classes de raízes) é um limite inferior para o número total de raízes. Isso prova a primeira afirmação em 3.4.

Agora, precisamos mostrar que  $f$  pode ser deformada por homotopia a uma aplicação que seja ainda transversal a  $y_0$  e possua exatamente  $\mathcal{A}(f)$  raízes. Suponha que  $f$  tenha mais que  $\mathcal{A}(f)$  raízes, pois caso contrário não haveria o que mostrar. Então, existe pelo menos uma classe de raízes  $\alpha = \{x_0, \dots, x_{d-1}\}$  onde  $d > \text{mult}(f)$ . Assim, devem existir duas raízes,  $x_0$  e  $x_1$  digamos, tais que  $\lambda(f, x_1) = -\lambda(f, x_0)$ . Aplicando o Lema 3.30 obtemos  $n$ -bolas  $C, B$  em  $X$ , uma  $n$ -bola  $D$  em  $Y$  e uma homotopia  $\{g_t\}$  satisfazendo

$$x_0, x_1 \in \text{int}C \subset C \subset \text{int}B, \quad B \cap f^{-1}(y_0) = \{x_0, x_1\} \quad \text{e} \quad y_0 \in D. \quad (3.3)$$

$$g_0 = f, \quad \{g_t\} \text{ constante em } X - B, \quad g_t^{-1}(y_0) \cap B = \{x_0, x_1\} \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad g_1(C) \subset D. \quad (3.4)$$

Então, aplicando as propriedades de invariância por homotopia e aditividade para  $\lambda$ , temos  $0 = \lambda(f, x_0) + \lambda(f, x_1) = \lambda(f, \text{int}C) = \lambda(g_1, \text{int}C) = \lambda(g_1, x_0) + \lambda(g_1, x_1)$ . Assim, podemos aplicar o Lema 3.31 com  $g_1$  no lugar de  $f$  para encontrar uma nova aplicação  $h_1 : X \rightarrow Y$  homotópica a  $g_1$  e portanto, a  $f$ , tal que  $h_1^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0) - \{x_0, x_1\}$ . Deste modo,  $h_1$  é homotópica a  $f$  e possui duas raízes a menos que  $f$ . Como as homotopias eram constantes fora de  $B$ , a nova aplicação  $h_1$  é ainda transversal a  $y_0$ . Podemos continuar removendo raízes até termos uma aplicação homotópica a  $f$  que é transversal a  $y_0$  e possui apenas  $\mathcal{A}(f)$  raízes.

**Caso 2:**  $X$  não-orientável mas  $f$  orientável. Seja  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$  o recobrimento duplo orientado de  $X$ . Como  $f$  é transversal a  $y_0$  e  $\tilde{p}$  é transversal a cada  $x \in X$ , por ser um recobrimento, segue que  $f \circ \tilde{p}$  é transversal a  $y_0$ . Assim, podemos aplicar os resultados do caso (1) para  $f \circ \tilde{p}$ .

Seja  $\alpha$  uma classe de Nielsen de  $f$  em  $y_0$ . Pelo Teorema 3.14, existe uma classe de Nielsen  $\tilde{\alpha}$  de  $f \circ \tilde{p}$  em  $y_0$  que é aplicada bijectivamente sobre  $\alpha$  por  $\tilde{p}$ . Como no caso (1), temos que  $\#\tilde{\alpha} \geq \text{mult}(f \circ \tilde{p})$ . Como  $\tilde{p}$  leva  $\tilde{\alpha}$  bijectivamente sobre  $\alpha$ , temos  $\#\alpha \geq \text{mult}(f \circ \tilde{p}) = \text{mult}(f)$ , onde a igualdade é devida a definição 3.15. Adicionando esta desigualdade sobre todas as classes de Nielsen tem-se  $\#f^{-1}(y_0) \geq \mathcal{A}(f)$ , o que prova a primeira afirmação em 3.4.

Agora precisamos mostrar que  $f$  pode ser deformada por homotopia a uma aplicação que possui exatamente  $\mathcal{A}(f)$  raízes e ainda é transversal a  $y_0$ . Se  $\#f^{-1}(y_0) = \mathcal{A}(f)$  não há nada a ser feito. Caso contrário,  $\#\alpha > \text{mult}(f)$  para alguma classe  $\alpha$ . Seja  $\tilde{\alpha}$  uma das duas classes de Nielsen de  $f \circ \tilde{p}$  que é aplicada bijectivamente sobre  $\alpha$  por  $\tilde{p}$ . Escreva  $\alpha = \{x_0, \dots, x_{d-1}\}$  e  $\tilde{\alpha} = \{\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{d-1}\}$ , onde  $\tilde{p}(\tilde{x}_i) = x_i$  para  $i = 1, \dots, d-1$ . Como no caso anterior, existem duas raízes em  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{x}_0$  e  $\tilde{x}_1$  digamos, tais que  $\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{x}_1) = -\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{x}_0)$ . Seja  $\tilde{\gamma}$  um caminho em  $\tilde{X}$  de  $\tilde{x}_0$  para  $\tilde{x}_1$  tal que  $f \circ \tilde{p} \circ \tilde{\gamma}$  é contrátil. Seja  $\gamma = \tilde{p} \circ \tilde{\gamma}$ . Assim,  $\gamma$  é um caminho em  $X$  de  $x_0$  para  $x_1$  tal que  $f \circ \gamma$  é contrátil. Agora aplique o Lema 3.30 para obter  $n$ -bolas  $B, C, D$  e uma homotopia  $\{g_t\}$  possuindo as propriedades do Lema 3.30. Finalmente, levantaremos tudo o que foi feito em  $X$  para  $\tilde{X}$ .

Como  $B$  é simplesmente conexo,  $B$  é uniformemente recoberto por  $\tilde{p}$ . Seja  $\tilde{B} \subset \tilde{X}$  a componente de  $\tilde{p}^{-1}(B)$  contendo  $\tilde{x}_0$ . Então temos  $\tilde{x}_1 = (\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1}(x_1) \in \tilde{B}$ . Para ver isso, seja  $\rho$  um caminho em  $B$  de  $x_0$  para  $x_1$ . Assim, segue do Lema 3.30 que  $[\rho] = [\tilde{\gamma}]$ . Como  $(\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1} \circ \rho$  é um levantamento de  $\rho$  iniciando em  $\tilde{x}_0$  e  $\tilde{\gamma}$  é um levantamento de  $\gamma$  iniciando em  $\tilde{x}_0$ , temos  $[(\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1} \circ \rho] = [\tilde{\gamma}]$ . Em particular,  $\tilde{x}_1 = \tilde{\gamma}(1) = (\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1} \circ \rho(1) = (\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1}(x_1) \in \tilde{B}$ . Seja  $\tilde{C} = (\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1}(C)$ . Uma vez sabendo que  $\tilde{x}_i = (\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1}(x_i)$  para  $i = 0, 1$ , as propriedades de (1) a (3) valem com  $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{B}, \tilde{C}$  e  $\{g_t \circ \tilde{p}\}$  no lugar de  $x_0, x_1, B, C$  e  $\{g_t\}$ . Argumentando como no caso (1), temos  $\lambda(g_1 \circ \tilde{p}, \tilde{x}_1) = -\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{x}_0)$ . Assim, podemos aplicar o Lema 3.31 para obter outra homotopia  $\{\tilde{h}_t\}$  de  $g_1 \circ \tilde{p}$  para uma aplicação  $\tilde{h}_1 : \tilde{X} \rightarrow Y$  que é constante fora de  $\tilde{C}$  e não possui raízes em  $\tilde{C}$ . Como  $g_1 \tilde{p}$  não tem raízes em  $\tilde{B} - \tilde{C}$ ,  $\tilde{h}_1$  não possui raízes em  $\tilde{B}$ .

Combine as duas homotopias  $\{g_t \circ \tilde{p}\}$  e  $\{\tilde{h}_t\}$  por

$$\tilde{f}_t = \begin{cases} g_{2t} \circ \tilde{p} & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \tilde{h}_{2t-1} & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Então  $\{\tilde{f}_t\}$  é uma homotopia de  $f \circ \tilde{p}$  que é constante em  $\tilde{X} - \text{int}\tilde{B}$  e  $\tilde{f}_1$  não possui raízes em  $\tilde{B}$ . Agora, defina uma homotopia de  $f$  por

$$f_t(x) = \begin{cases} \tilde{f}_t \circ (\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1}(x) & \text{para } x \in B, \\ f(x) & \text{para } x \in X - B. \end{cases}$$

Note que para  $x \in B$ , tem-se  $f_1(x) = \tilde{f}_1 \circ (\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1}(x) = \tilde{h}_1 \circ (\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1}(x)$ . Como  $\tilde{h}_1$  não possui raízes em  $\tilde{B}$ , segue que  $f_1$  não possui raízes em  $B$  e  $f_1$  tem as mesmas raízes em  $X - B$  que  $f$  tinha. Se continuarmos agindo desta maneira podemos remover raízes até termos uma aplicação homotópica a  $f$  com exatamente  $\mathcal{A}(f)$  raízes.

**Caso 3:** Nem  $X$  nem  $f$  é orientável. Neste caso, recorde que usamos o índice  $\lambda_2$  dos inteiros mod 2 para definir a multiplicidade  $mult(f) = |\lambda_2(f, \alpha)| \leq 1 \leq \#\alpha$ , onde  $\alpha$  é uma classe de Nielsen de  $f$  em  $y_0$ . Recorde também que  $|\lambda_2(f, \alpha)| = 1$  se  $\lambda_2(f, \alpha) \equiv 1 \pmod{2}$  e 0 caso contrário. Somando esta desigualdade sobre as classes de Nielsen de  $f$  temos que  $\mathcal{A}(f) \leq \#f^{-1}(y_0)$ . Isso prova a primeira afirmação em 3.4.

Agora devemos mostrar que se  $\mathcal{A}(f) < \#f^{-1}(y_0)$ , então existe uma aplicação homotópica a  $f$  e transversal a  $y_0$  que possui  $\mathcal{A}(f)$  raízes em  $y_0$ . Assuma  $\mathcal{A}(f) < \#f^{-1}(y_0)$ . É suficiente mostrar que existe uma aplicação homotópica a  $f$  e transversal a  $y_0$  que possui menos raízes em  $y_0$  que  $f$ , pois assim poderemos remover raízes até que tenhamos  $\mathcal{A}(f) = \#f^{-1}(y_0)$ . Primeiro, mostraremos que deve haver uma classe de Nielsen de  $f$  que possui mais que um elemento.

Como  $f$  é transversal a  $y_0$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $x_0 \in f^{-1}(y_0)$  que é aplicada homeomorficamente sobre uma vizinhança  $V$  de  $y_0$ . Consideremos o diagrama usual:

$$X \overset{i}{\subset} (X, X - x_0) \overset{e}{\supset} (U, U - x_0) \xrightarrow{f'} (V, V - y_0) \overset{j}{\subset} (Y, Y - y_0)$$

onde  $f'$  é definida por  $f$ . A inclusão  $i$  induz isomorfismo em dimensão  $n$ ,  $e$  e  $j$  são excisões e  $f'$  é um homeomorfismo. Assim, todos induzem isomorfismos. Segue que

$$L_n(f, x_0; \mathbb{Z}_2) = j_{*n} \circ f'_{*n} \circ e_{*n}^{-1} \circ i_{*n} : H_n(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(Y, Y - y_0; \mathbb{Z}_2)$$

é um isomorfismo e, portanto,  $L_n(f, x_0; \mathbb{Z}_2)(\mu) = \nu$ , onde  $\mu$  e  $\nu$  são os geradores de  $H_n(X; \mathbb{Z}_2)$  e  $H_n(Y, Y - y_0; \mathbb{Z}_2)$  respectivamente. Portanto, por definição  $\lambda_2(f, x_0) \equiv 1 \pmod{2}$ . Consequentemente, se existe uma classe de Nielsen de  $f$  em  $y_0$  que possui apenas uma raiz, então  $mult(f) = 1$ . E se todas as outras classes de raízes possuem apenas uma raiz, então somando sobre as classes de raízes temos  $\mathcal{A}(f) = \#(\text{classes de raízes}) = \#f^{-1}(y_0)$ , contradizendo assim a hipótese que  $\mathcal{A}(f) < \#f^{-1}(y_0)$ .

Assim, assumamos uma classe de Nielsen  $\alpha \subset X$  de  $f$  em  $y_0$  tendo mais que um elemento. Seja  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$  o recobrimento duplo orientado de  $X$ . Sejam  $x_0, x_1 \in \alpha$ . Tome  $\tilde{x}_0 \in \tilde{p}^{-1}(x_0)$  e  $\tilde{x}_1 \in \tilde{p}^{-1}(x_1)$ . Então, pelo Teorema 3.13,  $\tilde{x}_0$  e  $\tilde{x}_1$  estão relacionadas. Como  $f$  é transversal a  $y_0$  e  $\tilde{p}$  é um recobrimento temos, como no caso (1), que  $|\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{x}_0)| = |\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{x}_1)|$ . Se  $\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{x}_0) = -\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{x}_1)$ , podemos proceder como no caso (2) para encontrar uma aplicação

homotópica a  $f$  que é transversal em  $y_0$  com menos raízes que  $f$ . Isso conclui a prova. Caso contrário, suponha que  $\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{x}_0) = \lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{x}_1)$  e considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X} & \xrightarrow{i} & (\tilde{X}, \tilde{X} - \tilde{x}_1) & \xleftarrow{e} & (\tilde{U}, \tilde{U} - \tilde{x}_1) & \xrightarrow{\tilde{f}'} & (Y, Y - y_0) \\ \tau \downarrow & & & & & \nearrow & \\ \tilde{X} & \xrightarrow{i'} & (\tilde{X}, \tilde{X} - \tau(\tilde{x}_1)) & \xleftarrow{e'} & (\tau(\tilde{U}), \tau(\tilde{U}) - \tau(\tilde{x}_1)) & \xrightarrow{\tilde{f}''} & \end{array}$$

onde  $\tau : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  é a transformação de recobrimento invertendo orientação de  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$ ,  $\tilde{U}$  é uma vizinhança de  $\tilde{x}_1$  escolhida pequena o suficiente para que  $\tilde{U}$  não possua raízes de  $f \circ \tilde{p}$  diferente de  $\tilde{x}_1$  e  $\tau(\tilde{U})$  não possua raízes de  $f \circ \tilde{p}$  diferente de  $\tau(\tilde{x}_1)$ ,  $\tilde{f}'$  e  $\tilde{f}''$  são aplicações definidas por  $f \circ \tilde{p}$ . Este diagrama revela que  $L_n(f \circ \tilde{p}, \tilde{x}_1; \mathbb{Z}) = L_n(f \circ \tilde{p}, \tau(\tilde{x}_1); \mathbb{Z}) \circ \tau_{*n}$ . Como  $\tau$  é um homeomorfismo invertendo orientação, segue que  $L_n(f \circ \tilde{p}, \tilde{x}_1) = -L_n(f \circ \tilde{p}, \tau(\tilde{x}_1))$ , portanto  $\lambda(f \circ \tilde{p}, \tau(\tilde{x}_1)) = -\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{x}_1) = -\lambda(f \circ \tilde{p}, \tilde{x}_0)$ . Pelo Teorema 3.14, temos que  $\tau(\tilde{x}_1)$  está na mesma classe de Nielsen que  $\tilde{x}_1$  e, portanto, na mesma classe que  $\tilde{x}_0$ . Assim, podemos aplicar os argumentos usados no caso (2) com  $\tau(\tilde{x}_1)$  no lugar de  $\tilde{x}_0$ , eliminando as raízes  $x_1$  e  $\tilde{p}(\tau(\tilde{x}_1))$ , obtendo uma aplicação homotópica a  $f$  que é transversal a  $y_0$  com menos raízes em  $y_0$  que  $f$ . ■

Vamos agora a prova do 2º Teorema de Hopf. Esta prova é baseada nas técnicas que usamos na prova do Teorema 3.4 junto com o lema seguinte:

**Lema 3.32** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de  $n$ -variedades, com  $n > 1$  e  $y_0 \in Y$  um ponto. Suponha que  $x_0$  é raiz de  $f$  em  $y_0$ ,  $f$  é um homeomorfismo local em  $x_0$  e  $\lambda(f, x_0) = 1$ . Seja  $B$  uma  $n$ -bola tal que  $x_0 \in \text{int}B$  e  $f$  aplica  $B$  homeomorficamente sobre uma  $n$ -bola  $C$  possuindo  $y_0$  em seu interior. Então para qualquer inteiro  $d > 0$  existem pontos  $x'_1, \dots, x'_{d-1} \in \text{int}B$  e uma homotopia  $\{g_t\}$  tal que:*

- (1)  $g_0 = f$  e  $\{g_t\}$  é constante fora de  $\text{int}B$ .
- (2)  $g_t(B) \subset C$  e  $g_t(x_0) = y_0$  para todo  $t \in I$ .
- (3)  $g_1^{-1}(y_0) \cap B = \{x_0, x'_1, \dots, x'_{d-1}\}$ ,  $\lambda(g_1, x_0) = d$  e  $\lambda(g_1, x'_i) = -1$  para  $i = 1, \dots, d-1$ .

**Prova:** Inicialmente provaremos a existencia de pontos  $z_1, \dots, z_{d-1} \in B^n$  e de uma homotopia  $\{h_t : B^n \rightarrow B^n\}$  tal que  $h_0$  é a identidade,  $\{h_t\}$  é constante igual a 0 em  $\partial B$  e  $h_1$  é um homeomorfismo local invertendo orientação em cada uma das raízes  $z_1, \dots, z_{d-1}$ . Para fazer isto, defina  $h' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  por  $h'(z) = z^d(\bar{z} - 1) \dots (\bar{z} - d + 1)$ . Então,  $h'$  possui  $0, \dots, d-1$  como raízes em

0 e é um homeomorfismo local invertendo orientação em cada uma das raízes  $1, \dots, d-1$  (a reflexão  $z \mapsto \bar{z}$  inverte orientação). Defina  $\psi : \text{int}B^2 \rightarrow \mathbb{C}$  por  $\psi(z) = z/(1 - \|z\|)$ . Assim,  $\psi^{-1}(z) = z/(1 + \|z\|)$ . Defina  $h_1 : B^2 \rightarrow B^2$  por

$$h_1(x) = \begin{cases} \psi^{-1} \circ h' \circ \psi(x) & \text{para } x \in \text{int}B^2, \\ x & \text{para } x \in \partial B^2. \end{cases}$$

Para qualquer  $x' \in \partial B^2$ , temos  $\lim_{x \rightarrow x'} \psi^{-1} \circ h' \circ \psi(x) = x'$ . Assim,  $h_1$  está bem definida. Como  $\psi$  é um homeomorfismo,  $h_1$  é um homeomorfismo local que inverte orientação em cada uma de suas raízes  $\psi^{-1}(1) = 1/2, \dots, \psi^{-1}(d-1) = (d-1)/d$  em 0. Agora, defina  $\{h_t\}$  sendo a homotopia por segmento de reta  $h_t(x) = (1-t)x + th_1(x)$ . A homotopia  $\{h_t\}$  é a homotopia desejada quando  $n = 2$ . Para  $n > 2$ , substitua  $\{h_t\}$  por sua suspensão a  $n-2$ -folhas. Então 0 é uma raiz de  $h_1$  em zero. Sejam  $z_1, \dots, z_{d-1}$  as outras raízes. Então  $h_1$  é ainda um homeomorfismo local invertendo orientação em cada uma das raízes  $z_1, \dots, z_{d-1}$ . (Para uma construção alternativa, ver pag 204 de [16]).

Para construir  $\{g_t\}$ , seja  $\phi : B^n \rightarrow B$  um homeomorfismo tal que  $\phi(0) = x_0$ . Defina  $\{g_t\}$  por

$$g_t(x) = \begin{cases} f \circ \phi \circ h_t \circ \phi^{-1}(x) & \text{para } x \in B, t \in I, \\ f(x) & \text{para } x \notin B, t \in I. \end{cases}$$

Seja  $x'_i = \phi(z_i)$  para  $i = 1, \dots, d-1$ . Como  $\lambda(f, x_0) = +1$ , os geradores de  $H_n(X; \mathbb{Z})$  e  $H_n(Y, Y - y_0; \mathbb{Z})$  foram escolhidos de modo que  $f|_B$  preserve orientação. Consequentemente  $g_1 = f \circ \phi \circ h_1 \circ \phi^{-1}$  inverte orientação em cada  $x'_1, \dots, x'_{d-1}$  e, portanto,  $\lambda(g_1, x'_i) = -1$  para  $i = 1, \dots, d-1$ . Como  $\phi(0) = x_0$ ,  $x_0$  é ainda raiz de  $g_1$  em  $y_0$ . Pelas propriedades de aditividade e invariância por homotopia temos  $\lambda(g_1, x_0) - (d-1) = \lambda(g_1, x_0) + \sum_i \lambda(g_1, x'_i) = \lambda(g_1, B) = \lambda(f, B) = \lambda(f, x_0) = 1$ . Assim,  $\lambda(g_1, x_0) = d$ . ■

**Prova do Teorema 3.6:** Assuma  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de  $n$ -variedades compactas, com  $n > 2$ , e  $y_0 \in Y$  um ponto. Mostraremos que  $f$  é homotópica a uma aplicação possuindo apenas  $N(f)$  raízes. Consideramos três casos:  $f$  não-orientável,  $X$  orientável, e  $X$  não-orientável com  $f$  é orientável.

Antes de iniciar a prova em cada caso, lembramos que, de acordo com os resultados de Brooks [6] descritos neste texto no segundo parágrafo após a Observação 1.11, podemos assumir que  $f$  possua exatamente  $N(f)$  classes de Nielsen.

**Caso 1:**  $f$  é não-orientável. Neste caso, pelo Corolário 3.25 e os comentários que o seguem, temos  $N(f) = \mathcal{A}(f)$ . Assim, neste caso, a prova do Teorema 3.6 segue diretamente do Teorema 3.4.

**Caso 2:**  $X$  é orientável. Se toda classe de Nielsen possui apenas uma raiz, existem apenas  $N(f)$  raízes e não há nada mais a ser feito. Assuma que exista pelo menos uma classe de Nielsen com mais de um elemento. Procedemos por indução no número de classes de Nielsen que tem uma raiz. Nossa hipótese de indução é que cada classe ou é uma única raiz ou tem um número finito de raízes  $x_0, \dots, x_{d-1}$  tais que  $f$  é um homeomorfismo local em cada raiz  $x_i$  e  $d = \text{mult}(f)$ . Após cada homotopia crescerá o número de classes que tem exatamente uma raiz. Pelo Teorema 3.4,  $f$  é homotópica a uma aplicação que é transversal a  $y_0$  e possui apenas  $\text{mult}(f)$  raízes em cada classe. Deste modo, a hipótese indutiva sempre pode ser satisfeita.

Suponha que nossa hipótese de indução seja satisfeita. Se cada classe de Nielsen contém apenas uma raiz, não há o que fazer. Sendo assim, assumamos que  $\alpha = \{x_0, \dots, x_{d-1}\}$  é uma classe com  $d = \text{mult}(f) > 1$ . Então,  $\lambda(f, x_i) = \pm 1$  tem o mesmo sinal para cada uma das raízes  $x_i$ . Por uma mudança na escolha de geradores para  $H_n(X; \mathbb{Z})$ , se necessário, podemos assumir que  $\lambda(f, x_i) = 1$  para cada uma das raízes  $x_i$ . Como  $f$  é um homeomorfismo local em  $x_0$ , podemos aplicar o Lema 3.32 para obter uma  $n$ -bola vizinhança  $B$  de  $x_0$ , uma  $n$ -bola vizinhança  $C = f(B)$  de  $y_0$ , pontos  $x'_1, \dots, x'_{d-1} \in \text{int}B$  e uma homotopia  $\{g_t\}$  como descrita no referido lema. Para qualquer raiz  $x$  de  $f$  temos  $g_t(x) = y_0$  para todo  $t \in I$ . Assim, podemos ver que duas raízes de  $f$  estão relacionadas se, e somente se, elas estão relacionadas como raízes de  $g_1$ . Cada uma das novas raízes  $x'_i$  de  $g_1$  pode ser unida por um caminho em  $B$  a  $x_0$ . Como  $g_1(B) \subset C$  e  $C$  é contrátil, as novas raízes  $x'_i$  estão relacionadas a  $x_0$ . Deste modo, as classes de Nielsen de  $g_1$  são exatamente as mesmas que as de  $f$  exceto por  $\alpha$ . Esta classe foi substituída por  $\alpha' = \{x_0, \dots, x_{d-1}, x'_1, \dots, x'_{d-1}\}$ . Para esta nova classe temos  $\lambda(g_1, x'_i) = -\lambda(g_1, x_i)$  para  $i = 1, \dots, d-1$ . Assim, podemos aplicar  $d-1$  vezes os Lemas 3.30 e 3.31, como fizemos na prova do Teorema 3.4, para eliminar as raízes  $x_i$  e  $x'_i$  e chegar a uma aplicação homotópica a  $f$  que possui exatamente as mesmas classes de Nielsen que  $f$ , exceto por  $\alpha$  que foi substituída por  $\{x_0\}$ . Portanto, a nova aplicação possui mais uma classe de Nielsen consistindo de uma única raiz. Isso completa a prova para o caso (2).

**Caso 3:**  $X$  é não-orientável mas  $f$  é orientável. Seja  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$  o recobrimento duplo orientado de  $X$ . Procederemos como no caso (2) para reduzir o número de raízes em cada classe de Nielsen para um. A hipótese indutiva é a mesma: Cada classe ou é uma única raiz ou tem

um número finito de raízes  $x_0, \dots, x_{d-1}$  tais que  $f$  é um homeomorfismo local em cada raiz  $x_i$  e  $d = \text{mult}(f)$ . Para o passo indutivo iniciamos com uma classe de Nielsen  $\alpha = \{x_0, \dots, x_{d-1}\}$  do segundo tipo. Selecione uma das duas classes de Nielsen de  $f \circ \tilde{p}$  que é aplicada homeomorficamente sobre  $\alpha$  por  $\tilde{p}$  e chame-a de  $\tilde{\alpha} = \{\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{d-1}\}$ , onde  $\tilde{p}(\tilde{x}_i) = x_i$  para cada  $i$ . Seja  $\tilde{B}$  uma  $n$ -bola vizinhança de  $\tilde{x}_0$  aplicada homeomorficamente sobre uma  $n$ -bola vizinhança  $C$  de  $y_0$  por  $f \circ \tilde{p}$  e assumamos  $\tilde{B}$  pequeno suficiente de modo que ele não possua raízes de  $f \circ \tilde{p}$  diferentes de  $\tilde{x}_0$ . Aplique o Lema 3.32 para encontrar pontos  $\tilde{x}'_1, \dots, \tilde{x}'_{d-1} \in \text{int}\tilde{B}$  e uma homotopia  $\{\tilde{g}_t\}$  a partir de  $f \circ \tilde{p}$  de modo que a nova aplicação  $\tilde{g}_1$  possua as mesmas classes de Nielsen que  $f \circ \tilde{p}$ , exceto por  $\tilde{\alpha}$  que é substituída por  $\tilde{\alpha}' = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{d-1}, \tilde{x}'_1, \dots, \tilde{x}'_{d-1}\}$ , onde  $\lambda(\tilde{g}_1, \tilde{x}'_i) = -\lambda(\tilde{g}_1, \tilde{x}_i)$  para cada  $i = 1, \dots, d-1$ . Escreva  $x'_i = \tilde{p}(\tilde{x}'_i)$  para cada  $i$ . Como  $f \circ \tilde{p}|_{\tilde{B}}$  é um homeomorfismo sobre sua imagem, assim é  $\tilde{p}|_{\tilde{B}}$ . Podemos definir uma homotopia  $\{g_t : X \rightarrow Y\}$  por

$$g_t(x) = \begin{cases} \tilde{g}_t \circ (\tilde{p}|_{\tilde{B}})^{-1} & \text{para } x \in \tilde{p}(\tilde{B}), \\ f(x) & \text{para } x \notin \tilde{p}(\tilde{B}). \end{cases}$$

Agora procedemos como no caso (2) da prova do Teorema 3.4 para eliminar os pares de raízes  $x_i, x'_i$ , um par de cada vez (cada eliminação requer ir até o espaço de recobrimento  $\tilde{X}$  e descer novamente). Depois de repetir este procedimento  $d-1$  vezes ficaremos com uma aplicação  $h$  homotópica a  $f$  que possui uma a mais de suas classes de Nielsen reduzidas a um único ponto  $x_0$ . As outras classes de Nielsen serão as mesmas e cada uma delas consiste de uma única raiz ou  $\text{mult}(f)$  raízes de modo que em cada uma delas  $h$  é um homeomorfismo local. ■

# Bibliografia

- [1] R. Brooks, *Nielsen Root Theory*, in R.F.Brown, M.Furi, L.Górniewicz, B.Jiang, Handbook of Topological Fixed Point Theory, 375-431, Springer, Dordrecht, 2005.
- [2] H. Hopf, *Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten II*, Math. Ann. 102, (1930), 562–623.
- [3] J. R. Munkres, *Topology*, Second Edition, Prentice Hall Inc., 2000.
- [4] M. J. Greenberg and John R. Harper, *Algebraic Topology: A First Course*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1981.
- [5] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press 58, 2002.
- [6] R. Brooks, *On the sharpness of the  $\Delta_1$  and  $\Delta_2$  Nielsen numbers*, J. Reine Angew. Math. 259 (1973), 101–108.
- [7] J. W. Vick, *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*, Second Edition, Springer-Verlag New York Inc., 1994.
- [8] M. C. Fenille and O. M. Neto, *Minimal Nielsen root classes and roots of liftings*, Fixed Point Theory Appl. 2009, Art. ID 346519, 16 pp.
- [9] D. L. Gonçalves and P. Wong, *Wecken property for roots*, Proc. American Math. Soc. 133(9), 2779 - 2782, (2005).
- [10] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1952.
- [11] S. T. Hu, *Homotopy Theory*, Academic Press Inc., 1959.
- [12] M. C. Fenille, *Raízes de aplicações de complexos 2-dimensionais em superfícies fechadas*, Tese, ICMC-USP, São Carlos, Fevereiro de 2010.

- [13] M. A. Armstrong, *Basic Topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York Inc., 1983.
- [14] D. B. A. Epstein, *The degree of a map*, Proc. London Math. Soc. **16** (1966), 369–383.
- [15] H. Kneser, *Glüattung von Flauchenabbildungen*, Math. Ann. 100, (1928), 609–616.
- [16] X. Lin, *On the root classes of mapping*, Acta Math. Sinica 2, (1986), 199–206.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –  
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB\_6/1700

B333t

Batista, Warley Mendes

Teoria de Nielsen para raízes / Warley Mendes Batista. -- Ita\_  
jubá, (MG) : [s.n.], 2013.

80 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Número de Nielsen para raízes. 2. Número de Reidemeister.  
3. Índice de raízes. 4. Grau absoluto. I. Fenille, Marcio Colombo,  
orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.