UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Inclusões Diferenciais Governadas por Operadores do tipo Subdiferencial em Espaços de Banach Reflexivos

Franco Bassi Rocha

Itajubá, fevereiro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Franco Bassi Rocha

Inclusões Diferenciais Governadas por Operadores do tipo Subdiferencial em Espaços de Banach Reflexivos

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise Matemática

Orientadora: Profª. Drª. Mariza Stefanello Simsen
Co-orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Fevereiro de 2013
Itajubá

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Franco Bassi Rocha

Inclusões Diferenciais Governadas por Operadores do tipo Subdiferencial em Espaços de Banach Reflexivos

Dissertação aprovada por banca examinadora em 18 de Fevereiro de 2013, conferindo ao autor o título de **Mestre em Ciências em Matemática.**

Banca examinadora:
Prof^{a}. Dr^{a}. Mariza Stefanello Simsen (Orientadora)
Prof. Dr. Jacson Simsen (Co-orientador)
Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo
Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes

Itajubá

2013

*Aos meus pais, Maria Olenca Bassi Rocha e Indalécio Rocha Júnior e a minha noiva,
Fernanda Maris, por serem os responsáveis por essa conquista.*

Agradecimentos

Quando eu estive angustiado, o Senhor me acalmou. Quando me senti sozinho, o Senhor me fez companhia. Quando estive doente, o Senhor me curou. Quando estive triste, o Senhor me alegrou. Quando pensei em desistir, o Senhor me fez continuar. Resumindo, nos momentos mais difíceis desta caminhada o Senhor cuidou de mim debaixo de suas asas e nos melhores momentos, fiz questão de entregá-los nas suas mãos. Obrigado Senhor Jesus Cristo, por me capacitar a concluir esta jornada dura.

Quero expressar meus eternos agradecimentos ao meu pai e à minha mãe, que viveram esse sonho comigo e partilharam de cada momento ao longo de todos os anos da minha vida. Comecei o mestrado com a alegria estampada no rosto dos meus pais (e no meu também!), meio que misturados com a dor da minha partida para Itajubá, a qual era inevitável. Ofereço a vocês, pai e mãe, toda minha gratidão e amor. Me orgulho muito de terminar esta caminhada, mas me orgulho muito mais de ser filho de pessoas dignas, honestas e boas como vocês!

À minha noiva Fernanda, muito, mas muito importante nesta jornada. Graças ao seu amor incondicional, seu pulso forte, paciência, companheirismo eu tive condições de suportar sua ausência física. Isso só é mais um exemplo de que, quando duas pessoas se amam verdadeiramente e Deus abençoa este amor, não existe nada que possa romper essa ligação, nem mesmo a distância. Apesar da ausência física, você esteve sempre em meu pensamento.

Não menos importante, ao meu irmão Bruno Bassi Rocha, pela sua torcida e a minha avó Ana (ausente) por sempre me incentivar em seguir a carreira de docência. Ao meu sogro e sogra, Paulo Fernando e Elisa, pelo carinho, atenção e consideração sempre para comigo.

Quero agradecer a minha orientadora Profª. Drª. Mariza Stefanello Simsen e ao meu co-orientador Prof. Dr. Jacson Simsen, pelos vários ensinamentos no mestrado, pela competência nas orientações, pela paciência e pelo comprometimento para comigo. Aos demais membros do corpo docente, em especial ao Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello, pelas grandes contribuições ao programa de pós-graduação. Ao prof. Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel, coordenador do programa de mestrado em Física e Matemática aplicada da Universidade Federal de Itajubá, pelo suporte e pela boa organização do mestrado.

Faço questão de agradecer meus professores da Universidade Federal de Alfenas, em especial ao prof. Dr. José Paulo Carvalho dos Santos e prof. Dr. José Carlos de Souza Júnior por me proporcionarem uma formação sólida e de qualidade.

Aos meus amigos de mestrado, Warley Mendes Batista, Edson Júnior pelos ensinamentos, pelo companheirismo e acima de tudo pelos momentos de angústia compartilhados. Nesses dois anos vocês foram a minha família em Itajubá. Ao colegas Jarne, Felipe Mendonça, Tiago Ribeiro, PH Silva e Adriano Braga pela convivência sempre tranquila e amistosa.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Franco Bassi Rocha

" Eu tentei noventa e nove vezes e falhei, mas na centésima tentativa eu consegui, nunca desista de seus objetivos mesmo que esses pareçam impossíveis, a próxima tentativa pode ser vitoriosa."

Albert Einstein.

Resumo

Este trabalho apresenta resultados de existência, unicidade e regularidade de solução forte para o problema de Cauchy com inclusão de evolução $\dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t)$, $t \in]0,T[$, onde $\partial\varphi$ é um operador do tipo subdiferencial em um espaço de Banach reflexivo V com dual V^*. No último capítulo, apresentamos resultados inéditos de existência de solução para uma classe de problemas parabólicos envolvendo o operador $p(x)$-Laplaciano em um espaço de Hilbert H.

Palavras-chave: existência e unicidade, regularidade, subdiferencial, problemas parabólicos, $p(x)$-Laplaciano.

Abstract

This work shows results on existence, uniqueness and regularity of strong solutions for Cauchy problem with evolution inclusion $\frac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t)$, $t \in]0,T[$, where $\partial\varphi$ is the so-called subdifferential operator from a real reflexive Banach space V with dual V^*. In the last chapter, we show unpublished results on existence of solutions for a class of parabolic problems involving the $p(x)$-Laplacian operator in a Hilbert space.

Keywords: existence and uniqueness, regularity, subdifferential, parabolic problems, $p(x)$-Laplacian.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho estudamos resultados de existência, unicidade e regularidade de soluções fortes de uma inclusão de evolução governada por um operador do tipo subdiferencial em um espaço de Banach reflexivo, sendo o artigo [1] a parte central e [2, 4, 3] as complementações. São resultados que garantem a existência, unicidade e regularidade do seguinte problema de evolução

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) \text{ em } V^*, 0 < t < T \ ; \\ u(0) = u_o \ , \end{cases}$$

onde $\partial\varphi$ é a subdiferencial de uma função $\varphi : V \to]-\infty, +\infty]$ semicontínua inferiormente, convexa e própria, u_o pertencente ao fecho do domínio de φ em um espaço de Hilbert H, $f \in L^{p'}(0,T;V^*)$. A técnica estudada estende os resultados de existência obtidos em H para o contexto $V - V^*$ em que $V \subset H \subset V^*$ com inclusões densas e contínuas.

Inicialmente, no Capítulo 2 apresentamos algumas definições e resultados importantes da teoria de Análise Funcional, Medida e Integração e principalmente sobre espaços de Sobolev e operadores do tipo subdiferencial. No Capítulo 3, consideramos a tripla de evolução $V \subset H \subset V^*$ e exigimos as condições

$$||u||_V^p - C_1||u||_H^2 - C_2 \leq C_3\varphi(u), \forall u \in D(\varphi),\ p \in (1,\infty),$$

$$||g||_{V^*}^{p'} \leq l(||u||_H)\{\varphi(u)+1\},\ \forall g \in \partial\varphi(u), u \in D(\varphi),$$

onde $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, $l : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função não decrescente para garantir a existência da solução forte para a inclusão da evolução acima. Adicionando a hipótese $t\dfrac{df(t)}{dt} \in L^{p'}(0,T;V^*)$ garantimos o resultado sobre regularidade dessa solução. Finalizando este capítulo, apresentamos algumas observações e extensões dos resultados de existência e regularidade obtidos anteriormente.

No Capítulo 4 damos um exemplo onde a teoria estudada no Capítulo 3 poderá ser aplicada. Mais especificamente, garantimos a tripla de evolução para alguns espaços particulares e mostramos que o operador p-Laplaciano é a subdiferencial de uma função semicontínua inferiormente, convexa e própria.

Por fim, no Capítulo 5 apresentamos de forma inédita resultados de existência e unicidade de solução para um problema parabólico envolvendo o operador $p(x)$-Laplaciano em um espaço de Hilbert H. Neste capítulo, fazemos um apanhado sobre os espaços de Lebesgue generalizados $L^{p(x)}(\Omega)$ e espaços de Sobolev generalizados $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Posteriormente, mostramos que o operador $A : V \to V^*$ em que $V = W^{1,p(x)}(\Omega)$ dado por

$$A(u)(v)=\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla v dx+\int_{\Omega}|u|^{p(x)-2}uv dx.$$

onde $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $p(x)\in C(\overline{\Omega})$ com $p(x)>2$ para q.t.p $x\in\Omega$, é monótono, coercivo e hemicontínuo. Mostramos também que a sua realização no espaço de Hilbert $H=L^2(\Omega)$ é a subdiferencial da função convexa, semicontínua inferiormente e própria

$$\varphi_{p(x)}(u)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx+\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}dx \ \ ,se \ \ u\in V\\ +\infty, \ \ se \ \ u\in H-V\end{cases}$$

e por fim, apresentamos como consequências obtidas dessas propriedades, resultados de existência de solução para equações parabólicas envolvendo o operador $p(x)$-Laplaciano no espaço de Hilbert H.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados utilizados ao longo deste trabalho.

2.1 Uma coletânea de resultados

As definições e resultados dessa seção podem ser encontrados em [6, 5, 7].

Definição 2.1.1 *Uma norma num espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{F}$ (real ou complexo) é uma aplicação $||.|| : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz*

(i) $||\xi|| \geq 0$ *para todo* $\xi \in V$, *e* $||\xi|| = 0$ *se, e somente se,* $\xi = 0$.

(ii) $||\alpha\xi|| = |\alpha|||\xi||$, *para todo* $\xi \in V$ *e qualquer* $\alpha \in \mathbb{F}$, *(*$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$*).*

(iii) $||\xi + \eta|| \leq ||\xi|| + ||\eta||$ *para todos* $\xi, \eta \in V$.

Definição 2.1.2 *Seja $(V, ||\cdot||)$ um espaço normado e seja (ξ_n) uma sequência em $(V, ||\cdot||)$. Então (ξ_n) é uma sequência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > M$ implica em $||\xi_m - \xi_n|| < \varepsilon$.*

Definição 2.1.3 *Um espaço normado $(V, ||\cdot||)$ é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em $(V, ||\cdot||)$ é convergente.*

Definição 2.1.4 *Um operador linear entre os espaços vetoriais V e W é uma aplicação $T :$ dom $T \subset V \to W$ em que seu domínio dom T é um subespaço vetorial e*

$$T(\xi + \alpha\eta) = T(\xi) + \alpha T(\eta)$$

para todos $\xi, \eta \in$ dom T e todo escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ (em que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Observação 2.1.1 *Se $W = \mathbb{F}$ então temos que $T :$ dom $T \subset V \to W$ é chamado de funcional linear.*

Teorema 2.1.1 *Seja $T : V \to W$ um operador linear entre espaços normados. Então as seguintes proposições são equivalentes:*

(i) $\sup\limits_{||\xi|| \leq 1} ||T\xi|| < \infty$, *ou seja, a imagem da bola unitária é limitada;*

(ii) *Existe* $C > 0$ *de modo que* $||T\xi|| \leq C||\xi||$, *para todo* $\xi \in V$*;*

(iii) *T é uniformemente contínuo;*

(iv) *T é contínuo;*

(v) *T é contínuo em zero.*

Definição 2.1.5 *Um operador linear contínuo é também chamado de limitado, e o conjunto dos operadores lineares limitados de V em W será denotado por $B(V,W)$.*

Definição 2.1.6 *Se V é um espaço normado, então o espaço de Banach $B(V,\mathbb{F})$ será denotado por V^* e chamado de espaço dual de V. Cada elemento de V^* é chamado de funcional linear contínuo em V. A norma em V^* será dada por*

$$||f||_{V^*} = \sup\{|f(x)|; x \in V, ||x|| \leq 1\}.$$

Definição 2.1.7 *O espaço bidual, V^{**} de V é o espaço dual de V^*, isto é, $V^{**} = (V^*)^*$. A norma em V^{**} será dada por*

$$||f||_{V^{**}} = \sup\{f(g); g \in V^*, ||g||_{V^*} \leq 1\}.$$

Observação 2.1.2 *Como V^* é um espaço de Banach, está definido $V^{**} = (V^*)^*$. Há uma forma natural de identificar elementos de V com elementos do seu bidual: a cada $\xi \in V$ associa-se $\hat{\xi} \in V^{**}$ por*

$$\hat{\xi}(f) := f(\xi), \text{ para } f \in V^*.$$

Definição 2.1.8 *Sejam V e W espaços normados. Uma aplicação $f : V \to W$ é uma imersão isométrica quando $||f(x) - f(y)||_W = ||x-y||_V$ para todo $x, y \in V$.*

Definição 2.1.9 *Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetora.*

Observação 2.1.3 *A aplicação $\hat{}: V \to V^{**}$ mencionada na Observação 2.1.2 é uma imersão isométrica linear e consequentemente injetora.*

Definição 2.1.10 *Se a aplicação $\hat{}$ é sobrejetora, então o espaço normado V é chamado de espaço reflexivo. Em outras palavras V é reflexivo se ele é isomorfo a V^{**} e o isomorfismo sendo dado por essa aplicação.*

Definição 2.1.11 *Seja $0 < p < \infty$ e um espaço de medida $(X, \sum, \mu)$. O espaço $L^p_\mu(X)$ é definido como o conjunto de todas as funções complexas mensuráveis em X tais que*

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Teorema 2.1.2 *Seja $(X, \sum, \mu)$ um espaço de medida finita. Então $L^p_\mu(X)$ é um espaço reflexivo para cada $1 < p < \infty$.*

Definição 2.1.12 *Um produto interno no espaço vetorial V é um funcão de $V \times V \to \mathbb{F}$ que para cada $(\xi,\eta) \in V \times V$ associa-se o elemento $\langle \xi, \eta \rangle \in \mathbb{F}$ e que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\langle \xi + \eta, \zeta \rangle = \langle \xi, \zeta \rangle + \langle \eta, \zeta \rangle$ *para todo* $\xi, \eta, \zeta \in V$*;*

(ii) $\langle \alpha\xi, \eta \rangle = \alpha \langle \xi, \eta \rangle$ *para todo* $\xi, \eta \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{F}$*;*

(iii) $\langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \xi \rangle}$ *para todo* $\xi, \eta \in V$*;*

(iv) $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$ *para todo* $\xi \in V$ *e* $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ *se, e somente se* $\xi = 0$.

Proposição 2.1.1 *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja V um espaço com produto interno. Então para* $\xi, \eta \in V$ *vale:*

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \leq ||\xi||_V \, ||\eta||_V.$$

onde $||\xi||_V = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$.

Definição 2.1.13 *Um espaço de Hilbert H é um espaço com produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno.*

Teorema 2.1.3 *(Teorema da Representação de Riesz) Seja H um espaço de Hilbert. Dado* $f \in H^*$ *existe um único* $y \in H$ *tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

para todo $x \in H$*. Além disso*

$$||f||_{H^*} = ||y||_H.$$

Em particular, $H^* = H$ *no sentido que esses espaços são isomorfos.*

Definição 2.1.14 *Seja* V_1 *e* V_2 *espaços normados. Dizemos que* $V_1 \subset V_2$ *com imersão contínua se existe* $c > 0$ *tal que*

$$||x||_{V_2} \leq c||x||_{V_1}, \;\; \forall x \in V_1,$$

e a inclusão $V_1 \subset V_2$ *é densa se* $\overline{V_1}^{V_2} = V_2$.

Lema 2.1.1 *(Desigualdade de Young) Sejam* $\theta, \theta' > 1$ *expoentes conjugados, ou seja* $\dfrac{1}{\theta} + \dfrac{1}{\theta'} = 1$*. Então para quaisquer números reais positivos* a, b *temos que*

$$ab \leq \frac{1}{\theta} a^{\theta} + \frac{1}{\theta'} b^{\theta'}.$$

Definição 2.1.15 *Uma função* $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *é absolutmente contínua se para cada* $\varepsilon > 0$ *existir algum* $\delta > 0$*, tal que se* $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,2,\ldots,n}$ *é uma família de intervalos disjuntos contidos em* $[a,b]$ *com* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) < \delta$*, então* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$.

Definição 2.1.16 *Seja V um espaço normado. Uma sequência* $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ *converge fracamente a* $\xi \in V$ *se* $||f(\xi_n) - f(\xi)||_V \to 0$ *quando* $n \to \infty$ *para todo* $f \in V^*$*. Iremos denotar essa convergência por* $\xi_n \rightharpoonup \xi$.

Definição 2.1.17 *Uma sequência* $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (V, ||\cdot||_V)$ *converge a* $\xi \in V$ *se* $||\xi_n - \xi||_V \to 0$ *quando* $n \to \infty$*. Iremos denotar essa convergência por* $\xi_n \to \xi$.

Teorema 2.1.4 *Seja V um espaço de Banach reflexivo e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em V. Então podemos extrair de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsequência que converge fracamente.*

Lema 2.1.2 ***(Desigualdade de Gronwall)*** *Seja $m \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ q.t.p em $(0,T)$ e seja $a \geq 0$. Seja ϕ uma função contínua de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$ tal que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds$$

para todo $t \in [0,T]$. Então,

$$|\phi(t)| \leq a + \int_0^t m(s)ds$$

para todo $t \in [0,T]$.

Lema 2.1.3 ***(Desigualdade de Gronwall-Bellman)*** *Seja $m \in L^1(0,T;R)$ tal que $m \geq 0$ q.t.p em $(0,T)$ e seja $a \geq 0$. Seja ϕ uma função contínua de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$ verificando*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\phi(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

Então

$$\phi(t) \leq ae^{\int_0^t m(s)ds}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Definição 2.1.18 *A topologia fraca em V é a topologia $\tau(V,V^*)$ gerada pelos funcionais lineares em V^*, ou seja, é a topologia menos fina em V na qual todos os elementos de V^* permanecem contínuos. Uma sub-base (aberta) de $\tau(V,V^*)$ é a coleção*

$$V(\xi;f;r) = f^{-1}B_{\mathbb{F}}(f(\xi);r) = \{\eta \in V : |f(\xi) - f(\eta)| < r\}$$

com $\xi \in V$, $r > 0$ e $f \in V^*$.

Definição 2.1.19 *Dizemos que $\varphi : [0,T] \to V$ é uma função fracamente contínua se para cada aberto A de V na topologia fraca, então $\varphi^{-1}(A)$ é aberto em $[0,T]$.*

Lema 2.1.4 *(Fatou) Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequencia de funções mensuráveis não negativas em um espaço de medida (X,Σ,μ). Então*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Teorema 2.1.5 *(Convergência Dominada) Seja (X,Σ,μ) um espaço de medida e considere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções complexas mensuráveis em X tal que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

exista para cada $x \in X$. Suponha também exista $g \in L^1(X)$ satisfazendo

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Então $f \in L^1(X)$ e vale:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$*;*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$

Definição 2.1.20 *Seja V um espaço vetorial normado. Dizemos que V é uniformemente convexo se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in V$ satisfazendo $||x||_V, ||y||_V \leq 1$ e $||x - y||_V > \varepsilon$ então*

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|_V < 1 - \delta.$$

Teorema 2.1.6 *Se V é um espaço de Banach uniformemente convexo e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ é uma sequência tal que $x_n \rightharpoonup x$ e $||x||_V \geq \limsup\limits_{n\to\infty} ||x_n||_V$ então $x_n \to x$.*

2.2 Espaços de Sobolev

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [2, 4, 8].

2.2.1 O espaço $L^p(\Omega)$

Dada $f \in V^*$ e $u \in V$ usaremos a seguinte notação: $\langle f, u\rangle_{V^*,V} = f(u)$. Dado Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis à Lebesgue $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $x \mapsto |u(x)|^p$ é integrável em Ω, no sentido de Lebesgue. A norma de $u \in L^p(\Omega)$ é dada por

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis à Lebesgue e essencialmente limitadas em Ω, isto é, existe $C > 0$ tal que $|u(x)| \leq C$ para q.t. $x \in \Omega$. Cada constante C é denominada majorante essencial de $|u|$ e a norma de $u \in L^\infty(\Omega)$ é definida por

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leq C,\ q.t.\ x \in \Omega\} = \sup\text{ess}\,|u|.$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, munido de sua respectiva norma torna-se um espaço de Banach.

Definição 2.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) | \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, \ldots, n\right\},$$

onde a derivada $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ é definida pela expressão

$$-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi = \int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

$\forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. *$W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right|_{L^p(\Omega)}$$

Proposição 2.2.1 *O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$.*

Proposição 2.2.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, limitado, conexo com fronteira suave e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$. Temos*

(i) *Se $1 \leq p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;*

(ii) *Se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, \infty)$;*

(iii) *Se $p > n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$*

com imersões contínuas. Além disso, se $p > n$ temos para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq c||u||_{W^{1,p}(\Omega)}||x - y||^\alpha$$

para q.t.p em Ω, com $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ e c dependendo somente de Ω, p, n. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Teorema 2.2.1 *(Rellich-Kondrachov) Suponha Ω limitado de classe C^1. Temos*

(i) *se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p')$ onde $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,*

(ii) *se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$,*

(iii) *se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,*

com imersões compactas. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com imersões compactas para todo p.

Definição 2.2.2 *Seja $1 \leq p < \infty$, $W_o^{1,p}(\Omega)$ designa o fecho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Corolário 2.2.1 *(Desigualdade de Poincaré) Suponha que Ω é um aberto limitado. Então existe uma constante C, dependendo de Ω e p, tal que*

$$||u||_{L^p} \leq C||\nabla u||_{L^p}$$

para todo $u \in W_o^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Em particular, a expressão $||\nabla u||_{L^p}$ é uma norma sobre $W_o^{1,p}(\Omega)$ que é equivalente a norma $||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$.

O espaço $W_o^{1,p}(\Omega)$ munido da norma induzida por $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável pata $1 \leq p < \infty$ e é reflexivo se $1 < p < \infty$.

2.2.2 O espaço $L^p(0,T;V)$

Definição 2.2.3 *Seja V um espaço de Banach e* $0 < T < \infty$.

(a) *O espaço* $C^m([0,T];V)$ *com* $m = 1,2,\ldots$ *consiste de todas as funções* $u : [0,T] \to V$ *que são m vezes diferenciáveis e cujas derivadas são contínuas em [0,T]. A norma neste espaço é dada por*

$$||u|| := \sum_{i=0}^{m} \max_{0\leq t\leq T} ||u^{(i)}(t)||_V. \tag{2.1}$$

Aqui, apenas as derivadas a esquerda e as derivadas a direita precisam existir nos pontos $t = 0$ *e* $t = T$ *respectivamente. Na expressão acima,* $u^{(0)} = u$.

(b) *O espaço* $L^p(0,T;V)$ *com* $1 \leq p < \infty$ *consiste de todas as funções mensuráveis* $u :]0,T[\to V$ *cuja norma*

$$||u||_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T ||u(t)||_V^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{2.2}$$

Quando $p = \infty$, *denotamos por* $L^\infty(0,T;V)$ *o espaço vetorial das classes de funções* $u :]0,T[\to V$ *mensuráveis à Lebesgue e essencialmente limitadas em]0,T[, isto é, existe* $C > 0$ *tal que*

$$||u(t)||_V \leq C, \quad q.t.p\ t \in]0,T[.$$

e a norma de $u \in L^\infty(0,T;V)$ *é definida por*

$$||u||_{L^\infty(0,T;V)} = \inf\{C; ||u(t)||_V \leq C,\ q.t.p\ t \in]0,T[\} = sup\,ess\ ||u(t)||_V.$$

Proposição 2.2.3 *Seja* $m = 0,1\ldots$ *e* $1 \leq p < \infty$, V_1 *e* V_2 *espaços de Banach sobre* $\mathbb{F}$. *Então:*

(a) $C^m([0,T];V_1)$ *com a norma (2.1) é um espaço de Banach sobre* $\mathbb{F}$.

(b) $L^p(0,T;V_1)$ *com a norma (2.2) é um espaço de Banach sobre* $\mathbb{F}$.

(c) $C([0,T],V_1)$ *é denso em* $L^p(0,T;V_1)$ *e a imersão* $C([0,T],V_1) \subseteq L^p(0,T;V_1)$ *é contínua.*

(d) *O conjunto de todos os polinômios* $w : [0,T] \to V_1$, *isto é*

$$w(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

com $a_i \in V_1$ *para todo* $i = 0,1,\ldots,n$ *e* $n = 0,1,\ldots$ *é denso em* $C([0,T];V_1)$ *e* $L^p(0,T;V_1)$.

(e) *Se* V_1 *é um espaço de Hilbert com produto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_1}$, *então* $L^2(0,T;V_1)$ *é também um espaço de Hilbert com produto interno*

$$\langle u,v\rangle_{L^2(0,T;V_1)} = \int_0^T \langle u(t),v(t)\rangle_{V_1} dt.$$

(f) $L^p(0,T;V_1)$ *é separável caso* V_1 *seja separável e* $1 \leq p < \infty$.

(g) *Se* $1 < p < \infty$ *e* V_1 *é uniformemente convexo então* $L^p(0,T;V_1)$ *é uniformemente convexo .*

(h) *Se* $V_1 \subseteq V_2$ *com imersão contínua, e* $1 \leq q \leq r \leq \infty$ *então*

$$L^r(0,T;V_1) \subseteq L^q(0,T;V_2)$$

com imersão contínua.

Teorema 2.2.2 *Seja V um espaço de Banach e seja $u \in L^p(a,b;V)$, $1 \leq p \leq \infty$ e denote por $A^{1,p}([a,b];V)$ o espaço de todas as funções $u : [a,b] \to V$ absolutamente contínuas, diferenciáveis q.t.p em (a,b) e que $\dfrac{du}{dt} \in L^p(a,b;V)$. São equivalentes:*

(i) $u \in W^{1,p}([a,b];V)$*;*

(ii) *Existe $u^o \in A^{1,p}([a,b];V)$ tal que $u(t) = u^o(t)$ para q.t.p $t \in (a,b)$. Além disso, $u' = \dfrac{du^o}{dt}$ q.t.p em (a,b).*

2.2.3 O espaço dual de $L^p(0,T;V)$ e tripla de evolução

Vamos introduzir primeiramente a desigualdade de Hölder que é basica para muitas aplicações:

$$\int_0^T |\langle v(t),u(t)\rangle_{V^*,V}|dt \leq \left(\int_0^T ||v(t)||_{V^*}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T ||u(t)||_V^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3}$$

Proposição 2.2.4 *Seja V um espaço de Banach. Então a desigualdade de Hölder (2.3) vale para todo $u \in L^p(0,T;V)$ e $v \in L^q(0,T;V^*)$ com $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.*

Proposição 2.2.5 *Seja V um espaço de Banach reflexivo e separável e seja $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Então:*

(a) *Para cada função $v \in L^q(0,T;V^*)$ existe um único funcional $\overline{v} \in X^*$, onde $X = L^p(0,T;V)$, com*

$$\langle \overline{v},u\rangle_{X^*,X} = \int_0^T \langle v(t),u(t)\rangle_{V^*,V} dt$$

para todo $u \in X$.

(b) *Reciprocamente, para cada $\overline{v} \in X^*$, onde $X = L^p(0,T;V)$, corresponde um único $v \in L^q(0,T;V^*)$ satisfazendo $\langle \overline{v},u\rangle_{X^*,X} = \int_0^T \langle v(t),u(t)\rangle_{V^*,V} dt$. Ambos os casos $||\overline{v}||_{X^*} = ||v||_{L^q(0,T;V^*)}$.*

(c) *O espaço de Banach $L^p(0,T;V)$ é reflexivo e separável.*

Proposição 2.2.6 *Seja V um espaço de Banach reflexivo e separável e $1 < p,q < \infty$ tais que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, e $0 \leq t \leq T < \infty$. São verdadeiros:*

(a) *Se $u \in L^p(0,T;V)$, então para $v^* \in V^*$*

$$\left\langle v^*, \int_0^t u(s)ds \right\rangle_{V^*,V} = \int_0^t \langle v^*,u(s)\rangle_{V^*,V} ds.$$

(b) *Se $u \in L^p(0,T;V^*)$, então para $v \in V$*

$$\left\langle \int_0^t u(s)ds, v \right\rangle_{V^*,V} = \int_0^t \langle u(s), v\rangle_{V^*,V} ds.$$

(c) *Se $u_n \to u$ em $L^p(0,T;V)$ quando $n \to \infty$, então*

$$\int_0^t u_n(s)ds \to \int_0^t u(s)ds \ \text{ em } \ V$$

quando $n \to \infty$.

(d) *Se $u_n \to u$ em $L^p(0,T;V)$ e $v_n \to v$ em $L^q(0,T;V^*)$ quando $n \to \infty$, então*

$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s)\rangle_{V^*,V} ds \to \int_0^t \langle v(s), u(s)\rangle_{V^*,V} ds$$

quando $n \to \infty$.

As afirmações (a), (b) e (c) são válidas para qualquer espaço de Banach V.

Definição 2.2.4 *Diremos que $V \subseteq H \subseteq V^*$ é uma tripla de evolução se*

(a) *V é um espaço de Banach real, reflexivo e separável;*

(b) *H é um espaço de Hilbert real separável;*

(c) *A imersão $V \subseteq H$ é contínua e V é denso em H.*

Proposição 2.2.7 *Seja $V \subseteq H \subseteq V^*$ uma tripla de evolução. Então são verdadeiras:*

(a) *Para cada $h \in H$ existe um correspondente funcional linear contínuo $\overline{h} : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\langle \overline{h}, v\rangle_{V^*,V} = \langle h, v\rangle_H$ para todo $v \in V$.*

(b) *A aplicação $h \mapsto \overline{h}$ de H em V^* é linear, injetiva e contínua.*

Proposição 2.2.8 *Seja $V \subseteq H \subseteq V^*$ uma tripla de evolução e seja $1 < p < \infty$ tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ e $0 < T < \infty$. Então:*

(a) *O espaço $W^{1,p}(0,T;V,H)$ que é o conjunto de todas as funções $u \in L^p(0,T;V)$ com $u' \in L^q(0,T;V^*)$ é um espaço de Banach com a norma $||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(0,T;V)} + ||u'||_{L^q(0,T;V^*)}$.*

(b) *A imersão $W^{1,p}(0,T;V,H) \subseteq C([0,T];H)$ é contínua e vale*

$$\frac{1}{2}||u(t)||_H^2 - \frac{1}{2}||u(s)||_H^2 = \int_s^t \left\langle \frac{du}{d\tau}(\tau), u(\tau) \right\rangle_{V^*,V} d\tau$$

para todo $s,t \in [0,T]$ com $s < t$.

(c) *O conjunto de todos os polinômios $w : [0,T] \to V$, isto é, $w(t) = a_o t + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ com $a_i \in V$ para $i = 1, 2 \ldots, n$ é denso em $W^{1,p}(0,T;V,H)$.*

(d) *$C^\infty([0,T];H)$ é denso em $W^{1,p'}(0,T;V^*)$.*

2.3 Funções convexas e subdiferenciais

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [2, 9, 5, 3].

Definição 2.3.1 *Seja V um espaço de Banach com dual V^*. Uma função convexa e própria em V é uma função $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ para o qual existe $u_o \in V$ com $\varphi(u_o) < \infty$ e satisfaz a desigualdade*

$$\varphi((1-t)u + tv) \leq (1-t)\varphi(u) + t\varphi(v)$$

para todo $u, v \in V$ e $t \in [0,1]$.

Definição 2.3.2 *A função $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ é dita ser semicontínua inferiormente (s.c.i) se*

$$\varphi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n)$$

para toda sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $u_n \to u$ em V.

Dada uma função $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ convexa, própria e s.c.i denotamos por $D(\varphi)$, o domínio de φ, o conjunto

$$D(\varphi) = \{u \in V : \varphi(u) < \infty\}.$$

Vamos agora descrever algumas propriedades elementares das funções s.c.i e convexas.

Proposição 2.3.1 *Seja $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i. Então existem $f \in V^*$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi(u) \geq \langle f, u \rangle_{V^*,V} + \beta$$

para todo $u \in V$.

Definição 2.3.3 *Dada uma função $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ convexa, própria e s.c.i, a aplicação $\partial\varphi : V \to V^*$ dada por*

$$\partial\varphi(u) = \{f \in V^* : \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u \rangle_{V^*,V}, \forall\, v \in D(\varphi)\}$$

é chamada a subdiferencial de φ. Denotamos $D(\partial\varphi) = \{u \in V : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$.

Em geral, $\partial\varphi$ é um operador multívoco de V em V^* que pode ser visto como um subconjunto de $V \times V^*$.

Proposição 2.3.2 *Seja $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i. Então $D(\partial\varphi)$ é um subconjunto denso de $D(\varphi)$.*

Se X e Y são dois espaços lineares, denotaremos por $X \times Y$ o produto cartesiano entre eles. Os elementos de $X \times Y$ serão representados como $[x, y]$ onde $x \in X$ e $y \in Y$.

Se A é um operador multívoco de X em Y, podemos identificar ele com o seu gráfico em $X \times Y$:

$$\{[x,y] \in X \times Y : y \in Ax\}.$$

Recíprocamente, se $A \subset X \times Y$, definimos

(a) $Ax = \{y \in Y : [x,y] \in A\}$;

(b) $D(A) = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\}$;

(c) $R(A) = \bigcup_{x \in D(A)} Ax$;

(d) $A^{-1} = \{[y,x] : [x,y] \in A\}$.

Desta maneira, podemos identificar os operadores de X em Y com seus gráficos em $X \times Y$ e assim estaremos tratando dos subconjuntos de $X \times Y$ em vez de operadores de X em Y. Como exemplo de uma aplicação subdiferencial, considere H um espaço de Hilbert real (identificado com seu dual) com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma $|\cdot|$ e seja A um operador linear auto-adjunto positivo em H. Então $A = \partial\varphi$ onde

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left|A^{\frac{1}{2}}x\right|^2 & , se \ x \in D(A^{\frac{1}{2}}) \\ +\infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que $A^{\frac{1}{2}}$ é a raiz quadrada do operador A.

Definição 2.3.4 *Seja V um espaço de Banach real, um operador $A : V \to V^*$ é dito ser monótono se para todo $u, v \in D(A)$*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{V^*,V} \geq 0.$$

Um operador monótono $A : V \to V^*$ é dito ser maximal monótono se ele não está propriamente contido em qualquer outro operador monótono de V em V^*.

Teorema 2.3.1 *[9] Seja V um espaço de Banach real e $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i. Então $\partial\varphi : V \to V^*$ é um operador maximal monótono.*

Além disso, $\partial\varphi$ tem várias propriedades interessantes. Seguem alguns resultados que serão usados no decorrer do trabalho.

Lema 2.3.1 *[3] Seja H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i e seja $u \in W^{1,2}(0,T;H)$ tal que $u(t) \in D(\partial\varphi)$ para q.t.p $t \in]0,T[$. Suponha que exista $g \in L^2(0,T;H)$ tal que $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ para q.t.p $t \in]0,T[$. Então a função $t \mapsto \varphi(u(t))$ é absolutamente contínua em [0,T] e vale a igualdade*

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = \left\langle h(t), \frac{du}{dt}(t) \right\rangle_H$$

para q.t.p $t \in]0,T[$ e para toda $h(\cdot) \in \partial\varphi(u(\cdot))$.

Definição 2.3.5 *Seja H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i. Considere o seguinte problema de Cauchy com dado inicial $u_o \in \overline{D(\varphi)}^H$*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) \ , 0 < t < T \\ u(0) = u_o \end{cases} . \tag{2.4}$$

Uma função $u \in C([0,T];H)$ é uma solução forte do problema (2.4) em $[0,T]$ se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) *$u : [0,T] \to H$ é uma função absolutamente contínua em $[0,T]$;*

(ii) *$u(0) = u_o$;*

(iii) *$u(t) \in D(\partial\varphi)$ para q.t.p $t \in]0,T[$ e existe uma função $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ satisfazendo:*

$$\frac{du}{dt}(t) + g(t) = f(t) \text{ em } H \text{ para q.t.p } t \in]0,T[.$$

Proposição 2.3.3 *[3] Seja H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i. Então, para cada $u_o \in D(\varphi)$ e $f \in L^2(0,T;H)$ existe uma única solução forte u do problema de Cauchy (2.4) satisfazendo:*

(i) *$u(t) \in D(\partial\varphi)$ para q.t.p $t \in]0,T[$;*

(ii) *$u \in W^{1,2}(0,T;H)$, $u(0) = u_o$;*

(iii) *$t \mapsto \varphi(u(t))$ é absolutamente contínua em [0,T].*

Proposição 2.3.4 *[3] Seja $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i e seja $B : [0,T] \times \overline{D(\varphi)}^H \to H$ satisfazendo:*

(a) *existe $w \geq 0$ tal que $||B(t,x_1) - B(t,x_2)||_H \leq w||x_1 - x_2||_H$ para todo $t \in [0,T]$ e $x_1, x_2 \in \overline{D(\varphi)}^H$;*

(b) *para todo $x \in \overline{D(\varphi)}^H$, a aplicação $t \mapsto B(t,x) \in L^2(0,T;H)$.*

Então para todo $u_o \in \overline{D(\varphi)}^H$ existe uma única solução da equação

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) + B(t,u(t)) \ni 0 \text{ em } H, 0 < t < T \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

tal que $t^{\frac{1}{2}} \dfrac{du}{dt}(t) \in L^2(0,T;H)$.

Capítulo 3

Existência e regularidade das soluções das inclusões diferenciais

Neste capítulo, assegurado por [1], apresentamos primeiramente resultados de existência e unicidade de soluções fortes para uma inclusão diferencial governada por um operador do tipo subdiferencial ($\partial\varphi$) em um espaço de Banach reflexivo V com dado inicial u_o pertencente ao fecho do domínio de uma função $\varphi : V \to]-\infty, +\infty]$ convexa, própria e s.c.i. Posteriormente, iremos apresentar resultados sobre a regularidade dessas soluções.

3.1 Existência e unicidade do problema de Cauchy

Seja V um espaço de Banach real reflexivo e V^* seu espaço dual. Iremos assumir que existe um espaço de Hilbert real H identificado com seu dual via o Teorema de Riesz tal que

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*$$

em que $V \subset H$ e $H^* \subset V^*$ são imersões densas e contínuas.

Lembremos que dada $f \in V^*$ e $u \in V$ usaremos a seguinte notação: $\langle f, u \rangle_{V^*,V} = f(u)$

Observação 3.1.1 *Note que $\langle u, v \rangle_{V^*,V} = \langle u, v \rangle$ para todo $u \in H$ e $v \in V$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno em H.*

Definição 3.1.1 *Denotaremos por $\Phi(V)$ o conjunto de todas as funções φ tais que $\varphi : V \to]-\infty, +\infty]$ é s.c.i, convexa e própria.*

Seja $\varphi \in \Phi(V)$. Nesta seção estudamos a existência e unicidade de soluções fortes do seguinte problema de Cauchy com dado inicial $u_o \in \overline{D(\varphi)}^H$:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) \text{ em } V^*, 0 < t < T \\ u(0) = u_o \end{cases} . \tag{3.1}$$

Definição 3.1.2 *Uma função $u \in C([0,T]; V^*)$ é uma solução forte do problema (3.1) em $[0,T]$ se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *$u : [0,T] \to V^*$ é uma função absolutamente contínua em $[0,T]$;*

(ii) *$u(0) = u_o$;*

(iii) *$u(t) \in D(\partial\varphi)$ q.t.p $t \in]0,T[$ e existe uma função $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ satisfazendo:*

$$\frac{du}{dt}(t) + g(t) = f(t) \ \ em \ \ V^* \ \ para \ \ q.t.p \ \ t \in \ ]0,T[. \tag{3.2}$$

Ao longo deste trabalho, para cada $i \in \mathbb{N}$, vamos denotar por C_i constantes não negativas que não dependem dos elementos do conjunto ou espaço correspondente.

Lema 3.1.1 *Seja p' o expoente conjugado de $p \in]1,\infty[$, isto é $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$. Então para todo $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $k > 0$ temos*

$$ab \leq ka^p + \mathcal{M}_p(k)b^{p'},$$

onde $\mathcal{M}_p(k) = \{p'(pk)^{\frac{p'}{p}}\}^{-1}$.

Demonstração: Sejam $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $k > 0$. Pelo Desigualdade de Young (Lema 2.1.1) temos

$$\begin{aligned} ab = (pk)^{\frac{1}{p}} ab \frac{1}{(pk)^{\frac{1}{p}}} &\leq \frac{1}{p}\left[(pk)^{\frac{1}{p}} a\right]^p + \frac{1}{p'}\left[\frac{b}{(pk)^{\frac{1}{p}}}\right]^{p'} \\ &= \frac{1}{p} pka^p + \frac{1}{p'} \frac{b^{p'}}{(pk)^{\frac{p'}{p}}} \\ &= ka^p + \mathcal{M}_p(k)b^{p'}. \end{aligned}$$

■

Lema 3.1.2 *Sejam $\xi, \eta \in H$. Então $\langle \xi - \eta, \eta \rangle \leq \frac{1}{2}\langle \xi - \eta, \xi + \eta \rangle$.*

Demonstração: Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 2.1.1) e pela Desigualdade de Young (Lema 2.1.1) temos

$$\langle \xi, \eta \rangle \leq ||\xi|| \, ||\eta|| \leq \frac{1}{2}||\xi||^2 + \frac{1}{2}||\eta||^2 \Leftrightarrow 2\langle \xi, \eta \rangle \leq \langle \xi, \xi \rangle + \langle \eta, \eta \rangle,$$

logo

$$2\langle \xi, \eta \rangle - 2\langle \eta, \eta \rangle \leq \langle \xi, \xi \rangle - \langle \eta, \eta \rangle,$$

ou equivalentemente,

$$2\langle \xi - \eta, \eta \rangle \leq \langle \xi - \eta, \xi + \eta \rangle.$$

Portanto $\langle \xi - \eta, \eta \rangle \leq \frac{1}{2}\langle \xi - \eta, \xi + \eta \rangle$. ■

Podemos assumir, sem perda de generalidade que $\varphi \in \Phi(V)$ é tal que $\varphi \geq 0$ e $0 \in D(\varphi)$. De fato, se $\varphi \in \Phi(V)$, então pela Proposição 2.3.1 existem $v^* \in V^*$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi(u) \geq \langle v^*, u \rangle_{V^*,V} + \mu$ para todo $u \in V$. Sendo assim, escolhemos a função não negativa $\widetilde{\varphi}(u) := \varphi(u) - \langle v^*, u \rangle_{V^*,V} - \mu$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\widetilde{\varphi} \in \Phi(V)$;

(ii) $D(\widetilde{\varphi}) = D(\varphi)$;

(iii) $\partial\varphi(u) = \partial\widetilde{\varphi}(u) + v^*$.

Com efeito, considere $u_n \to u$ em V. Então

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(u) &= \varphi(u) - \langle v^*, u\rangle_{V^*,V} - \mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n) - \limsup_{n\to\infty} \langle v^*, u_n\rangle_{V^*,V} - \limsup_{n\to\infty} \mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n) + \liminf_{n\to\infty}(-\langle v^*, u_n\rangle_{V^*,V}) + \liminf_{n\to\infty}(-\mu) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}(\varphi(u_n) - \langle v^*, u_n\rangle_{V^*,V} - \mu) \\
&= \liminf_{n\to\infty}(\widetilde{\varphi}(u_n))
\end{aligned}$$

e isto mostra que $\widetilde{\varphi}$ é semicontínua inferiormente. Mostremos agora a convexidade de $\widetilde{\varphi}$. Sejam $x, y \in V$ e $t \in [0,1]$, temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(tx+(1-t)y) &= \varphi(tx+(1-t)y) - \langle v^*, tx+(1-t)y\rangle_{V^*,V} - \mu \\
&\leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) - tv^*(x) - (1-t)v^*(y) - \mu - t\mu + t\mu \\
&= t(\varphi(x) - v^*(x) - \mu) + (1-t)(\varphi(y) - v^*(y) - \mu) \\
&= t\widetilde{\varphi}(x) + (1-t)\widetilde{\varphi}(y).
\end{aligned}$$

e $\widetilde{\varphi}$ é própria uma vez que φ é própria, e isto finaliza a prova do item (i).

Para provar (ii) seja $x \in D(\varphi)$, então temos que $\varphi(x) < \infty$. Logo $\widetilde{\varphi}(x) < \infty$, e portanto $x \in D(\widetilde{\varphi})$. Por outro lado seja $x \in D(\widetilde{\varphi})$. Então $\widetilde{\varphi}(x) < \infty$, logo cada componente de $\widetilde{\varphi}$ deve ser finita, e assim $\varphi(x) < \infty$ o que implica $x \in D(\varphi)$.

Para mostrar (iii) seja $f \in \partial\varphi(u)$. Então$f \in V^*$ e $\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u\rangle_{V*,V}$ $\forall v \in D(\varphi)$. Seja $v \in D(\widetilde{\varphi})$, então

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(v) - \widetilde{\varphi}(u) &= \varphi(v) - \langle v^*, v\rangle_{V^*,V} - \mu - (\varphi(u) - \langle v^*, u\rangle_{V^*,V} - \mu) \\
&= \varphi(v) - \varphi(u) - \langle v^*, v\rangle_{V^*,V} + \langle v^*, u\rangle_{V^*,V} \\
&= \varphi(v) - \varphi(u) - \langle v^*, v-u\rangle_{V^*,V} \\
&\geq \langle f, v-u\rangle_{V^*,V} - \langle v^*, v-u\rangle_{V^*,V} \\
&= \langle f - v^*, v-u\rangle_{V^*,V}.
\end{aligned}$$

Considerando $g = f - v^*$ temos que $f = g + v^*$, $g \in V^*$ e $\widetilde{\varphi}(v) - \widetilde{\varphi}(u) \geq \langle g, v-u\rangle_{V*,V}$. Logo $\partial\varphi(u) \subset \partial\widetilde{\varphi}(u) + v^*$. Seja agora $f \in \partial\widetilde{\varphi}(u) + v^*$, logo $f = g + v^*$ sendo que $g \in V^*$ e $\widetilde{\varphi}(v) - \widetilde{\varphi}(u) \geq \langle g, v-u\rangle_{V*,V}$ para todo $v \in D(\widetilde{\varphi})$. Note que

$$\begin{aligned}
\varphi(v) - \varphi(u) &= \widetilde{\varphi}(v) + \langle v^*, v\rangle_{V*,V} + \mu - (\widetilde{\varphi}(u) + \langle v^*, u\rangle_{V*,V} + \mu) \\
&= \widetilde{\varphi}(v) - \widetilde{\varphi}(u) + \langle v^*, v\rangle_{V*,V} - \langle v^*, u\rangle_{V*,V} \\
&\geq \langle g, v-u\rangle_{V*,V} + \langle v^*, v-u\rangle_{V*,V} \\
&= \langle g + v^*, v-u\rangle_{V*,V} \\
&= \langle f, v-u\rangle_{V*,V}
\end{aligned}$$

e portanto $\partial\widetilde{\varphi}(u) + v^* \subset \partial\varphi(u)$, e assim (iii) está provado.

Agora, para um elemento arbitrário $v_o \in D(\varphi)$ seja $\widehat{\varphi}(u) := \widetilde{\varphi}(u + v_o)$. Então $\widehat{\varphi}$ satisfaz

(a) $\widehat{\varphi}(u) \in \Phi(V)$;

(b) $D(\widehat{\varphi}) = D(\widetilde{\varphi}) - v_o \ni 0$;

(c) $\partial\widetilde{\varphi}(u) = \partial\widehat{\varphi}(u - v_o)$.

De fato, para provar (a) considere $u_n \to u$ em V. Então temos que $u_n + v_o$ converge para $u + v_o$. Agora observe que

$$\widehat{\varphi}(u) = \widetilde{\varphi}(u + v_o) \leq \liminf(\widetilde{\varphi}(u_n + v_o)) = \liminf \widehat{\varphi}(u_n),$$

onde concluímos que $\widehat{\varphi}$ é semicontínua inferiormente. Agora como $\widetilde{\varphi}$ é própria, então existe $v \in V$ tal que $\widetilde{\varphi}(v) < \infty$. Considere $v_1 = v - v_o$ e teremos que

$$\widehat{\varphi}(v_1) = \widetilde{\varphi}(v_1 + v_o) = \widetilde{\varphi}(v) < \infty$$

logo $\widehat{\varphi}$ é própria. Seja agora $x, y \in V$ e $t \in [0,1]$. Então,

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(tx + (1-t)y) &= \widetilde{\varphi}(tx + (1-t)y + v_o) \\
&= \widetilde{\varphi}(tx + (1-t)y + v_o - tv_o + tv_o) \\
&= \widetilde{\varphi}(t(x + v_o) + (1-t)(y + v_o)) \\
&\leq t\widetilde{\varphi}(x + v_o) + (1-t)\widetilde{\varphi}(y + v_o) \\
&= t\widehat{\varphi}(x) + (1-t)\widehat{\varphi}(y),
\end{aligned}$$

onde concluímos que $\widehat{\varphi}$ é convexa e isto finaliza a prova do item (a). Para provar o item (b) seja $x \in D(\widehat{\varphi})$, então $\widehat{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(x + v_o) < \infty$, logo $x + v_o \in D(\widetilde{\varphi})$. Portanto $x = (x + v_o) - v_o \in D(\widetilde{\varphi}) - v_o$. Por outro lado seja $x \in D(\widetilde{\varphi}) - v_o$, então $x = y - v_o$ com $y \in D(\widetilde{\varphi})$. Assim $\widehat{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(y - v_o + v_o) = \widetilde{\varphi}(y) < \infty$ e, portanto, $x \in D(\widehat{\varphi})$. Para mostrarmos o item (c) seja $f \in \partial\widehat{\varphi}(u - v_o)$, logo $f \in V^*$ e

$$\widehat{\varphi}(v) - \widehat{\varphi}(u - v_o) \geq \langle f, v - (u - v_o)\rangle_{V^*,V} \ \forall v \in D(\widehat{\varphi}) = D(\widetilde{\varphi}) - v_o.$$

Seja $w \in D(\widetilde{\varphi}) = D(\widehat{\varphi}) + v_o$. Logo $w = v + v_o$ com $v \in D(\widehat{\varphi})$. Então

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(w) - \widetilde{\varphi}(u) &= \widetilde{\varphi}(v + v_o) - \widetilde{\varphi}(u) \\
&= \widehat{\varphi}(v) - \widetilde{\varphi}(u - v_o + v_o) \\
&= \widehat{\varphi}(v) - \widehat{\varphi}(u - v_o) \\
&\geq \langle f, v - (u - v_o)\rangle_{V^*,V} \\
&= \langle f, w - u\rangle_{V^*,V},
\end{aligned}$$

onde concluímos que $f \in \partial\widetilde{\varphi}(u)$. Em contrapartida seja $f \in \partial\widetilde{\varphi}(u)$. Então $f \in V^*$ e

$$\widetilde{\varphi}(v) - \widetilde{\varphi}(u) \geq \langle f, v - u\rangle_{V^*,V} \ \forall v \in D(\widetilde{\varphi}).$$

Seja $w \in D(\widehat{\varphi}) = D(\widetilde{\varphi}) - v_o$. Logo $w = v - v_o$ com $v \in D(\widetilde{\varphi})$. Então

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(w) - \widehat{\varphi}(u - v_o) &= \widehat{\varphi}(v - v_o) - \widehat{\varphi}(u - v_o) \\
&= \widetilde{\varphi}(v) - \widetilde{\varphi}(u) \\
&\geq \langle f, v - u\rangle_{V^*,V} \\
&= \langle f, w + v_o - u\rangle_{V^*,V} \\
&= \langle f, w - (u - v_o)\rangle_{V^*,V}
\end{aligned}$$

e assim segue que $f \in \partial\widehat{\varphi}(u - v_o)$.

Agora, observe que fazendo $\widehat{u} = u - v_o$ e $\widehat{f} = f - v^*$ segue que o problema $\dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t)$ é equivalente a seguinte equação de evolução:

$$\frac{d\widehat{u}}{dt}(t)+\partial\widehat{\varphi}(\widehat{u}(t))\ni\widehat{f}(t),\, t\in]0,T[.$$

Com efeito, assuma que $\frac{du}{dt}(t)+\partial\varphi(u(t))\ni f(t),\ t\in]0,T[$. Logo existe $\eta(t)\in\partial\varphi(u(t))$ satisfazendo

$$\frac{du(t)}{dt}+\eta(t)=f(t),\, t\in]0,T[.$$

Considere $\theta(t)=\eta(t)-v^*\in\partial\widehat{\varphi}(\widehat{u}(t))=\partial\widehat{\varphi}(u(t)-v_o)=\partial\widetilde{\varphi}(u(t))=\partial\varphi(u(t))-v^*$. Temos:

$$\begin{aligned}\frac{d\widehat{u}}{dt}+\theta(t) &= \frac{d(u(t)-v_o)}{dt}+\theta(t)\\ &= \frac{du(t)}{dt}+\eta(t)-v^*\\ &= f(t)-v^*\\ &= \widehat{f}(t),\quad t\in]0,T[.\end{aligned}$$

Assuma agora que $\frac{d\widehat{u}}{dt}(t)+\partial\widehat{\varphi}(\widehat{u}(t))\ni\widehat{f}(t),\, t\in]0,T[$. Logo existe $\theta(t)\in\partial\widehat{\varphi}(\widehat{u}(t))$ satisfazendo:

$$\frac{d\widehat{u}(t)}{dt}+\theta(t)=\widehat{f}(t),\, t\in]0,T[.$$

Como $\partial\widehat{\varphi}(\widehat{u}(t))=\partial\varphi(u(t))-v^*$ temos que

$$\theta(t)=\eta(t)-v^*,$$

onde $\eta(t)\in\partial\varphi(u(t))$. Portanto

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt}+\eta(t) &= \frac{d(\widehat{u}(t)+v_o)}{dt}+\theta(t)+v^*\\ &= \frac{d\widehat{u}(t)}{dt}+\theta(t)+v^*\\ &= \widehat{f}(t)+v^*\\ &= f(t),\quad t\in]0,T[.\end{aligned}$$

Para assegurar a existência de soluções fortes para (3.1) vamos introduzir as seguintes condições: suponha que existem constantes não negativas C_1, C_2 e C_3 e uma função não decrescente $l:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ (veja [1]) tais que

$$||u||_V^p-C_1||u||_H^2-C_2\leq C_3\varphi(u),\forall u\in D(\varphi),\ p\in(1,\infty), \tag{3.3}$$

$$||g||_{V^*}^{p'}\leq l(||u||_H)\{\varphi(u)+1\},\ \forall g\in\partial\varphi(u),u\in D(\varphi). \tag{3.4}$$

Teorema 3.1.1 *Sejam (3.3) e (3.4) satisfeitas. Então para cada $u_o\in\overline{D(\varphi)}^H$ e $f\in L^{p'}(0,T;V^*)$ existe uma única solução forte u do problema (3.1) satisfazendo*

$$u\in L^p(0,T;V)\cap C([0,T];H)\cap W^{1,p'}(0,T;V^*),$$

a função $g(t)\in\partial\varphi(u(t))$ dada em (3.2) pertence a $L^{p'}(0,T;V^*)$ e $\varphi(u(\cdot))\in L^1(0,T)$.

Demonstração: Vamos provar a unicidade. Sejam u, v soluções fortes de (3.1). Defina $w(t) = u(t) - v(t)$. Como $u(t)$ é solução forte de (3.1) existe $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ satisfazendo

$$\frac{du}{dt}(t) + g(t) = f(t) \quad em \quad V^*, \; q.t.p \; em \;]0,T[. \tag{3.5}$$

Do mesmo modo, como $v(t)$ é solução forte de (3.1) existe $h(t) \in \partial\varphi(v(t))$ tal que

$$\frac{dv}{dt}(t) + h(t) = f(t) \quad em \quad V^*, \; q.t.p \; em \;]0,T[. \tag{3.6}$$

De (3.5) e (3.6) temos

$$\frac{du}{dt}(t) + g(t) - \frac{dv}{dt}(t) - h(t) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}[u(t) - v(t)] + g(t) - h(t) = 0$$

e assim $w(t)$ satisfaz

$$\frac{dw}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) - \partial\varphi(v(t)) \ni 0, \qquad q.t.p. \quad em \quad]0,T[. \tag{3.7}$$

Multiplicando agora (3.7) por $w(t)$, obtemos

$$\left\langle \frac{dw}{dt}(t), w(t) \right\rangle_{V^*,V} + \langle \partial\varphi(u(t)) - \partial\varphi(v(t)), u(t) - v(t) \rangle_{V^*,V} = 0$$

e pela monotonicidade de $\partial\varphi$ segue que $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_H^2 \leq 0$. Integrando esta última desigualdade de 0 a t temos que

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}||w(\tau)||_H^2 d\tau = \frac{1}{2}||w(t)||_H^2 - \frac{1}{2}||w(0))||_H^2 \leq 0$$

logo,

$$\frac{1}{2}||w(t)||_H^2 \leq \frac{1}{2}||w(0))||_H^2 = 0$$

o que implica $||w(t)||_H^2 = 0$ e, portanto, $w(t) = 0$, isto é, $u(t) = v(t)$ para todo $t \in [0,T]$.

A demonstração da existência da solução u será dividida em três etapas.

1ª Etapa: Vamos considerar o problema de aproximação em H para o problema (3.1). Para tanto vamos introduzir a função $\varphi_H : H \to [0,\infty]$ definida por

$$\varphi_H(u) = \begin{cases} \varphi(u), & u \in V \\ \infty, & u \in H - V, \end{cases}$$

onde $\varphi : V \to [0,\infty]$ é a função própria, convexa e semicontínua inferiormente do problema (3.1) com $\varphi \geq 0$ e $0 \in D(\varphi)$. Claramente φ_H é convexa e própria. Mostremos que φ_H é semicontínua inferiormente em H. Com efeito, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ tal que $u_n \to u$ em H quando $n \to \infty$ e considere $\alpha = \liminf \varphi_H(u_n) \geq 0$. Se α é finito então existe subsequência u_{n_k} de u_n tal que $\varphi_H(u_{n_k}) \to \alpha$ quando $n_k \to \infty$. Por (3.3) segue que

$$||u_{n_k}||_V^p \leq C_1||u_{n_k}||_H^2 + C_2 + C_3\varphi_H(u_{n_k})$$

e como (u_{n_k}) e $\varphi_H(u_{n_k})$ são convergentes seque $||u_{n_k}||_V$ é limitada. Sendo V reflexivo, segue do Teorema 2.1.4 que existe uma subsequência $u_{n_{k_j}} \subset V$ de u_{n_k} tal que $u_{n_{k_j}}$ converge fracamente para $v \in V$ quando $j \to \infty$. Como $u_{n_{k_j}} \to u$ em H quando $j \to \infty$ temos que $u_{n_{k_j}} \rightharpoonup u$. Pela unicidade do limite fraco, $u = v$. Como φ é semicontínua inferiormente concluímos que

$$\varphi_H(u) = \varphi(u) \leq \liminf \varphi(u_{n_{k_j}}) = \liminf \varphi_H(u_{n_{k_j}}) = \alpha.$$

Para o caso em que $\alpha = +\infty$ segue trivialmente que $\varphi_H(u) \leq \alpha$. Isto nos dá que φ_H é s.c.i e, portanto, $\varphi_H \in \Phi(H)$. Pela definição de φ_H segue imediatamente que $D(\varphi_H) = D(\varphi)$. Mostremos que $\partial\varphi_H \subset \partial\varphi$. Seja $f \in \partial\varphi_H(u)$. Então $f \in H^* \subset V^*$ e

$$\varphi_H(w) - \varphi_H(u) \geq \langle f, w-u \rangle_{V^*,V} \text{ para todo } w \in D(\varphi_H) = D(\varphi).$$

Como $w \in D(\varphi_H) = D(\varphi)$ e $\varphi_H(u) \geq \varphi(u)$ segue que

$$\varphi(w) - \varphi(u) = \varphi_H(w) - \varphi(u) \geq \varphi_H(w) - \varphi_H(u) \geq \langle f, w-u \rangle_{V^*,V}$$

e, portanto, $f \in \partial\varphi(u)$.

Como $u_o \in \overline{D(\varphi)}^H$ e $f \in L^{p'}(0,T;V^*)$ existem $u_{o_n} \in D(\varphi)$ e $f_n \in C^\infty([0,T];H)$ tais que

(i) $u_{o_n} \to u_o$ em H quando $n \to \infty$;

(ii) $f_n \to f$ em $L^{p'}(0,T;V^*)$ quando $n \to \infty$;

e considere para cada $n \in \mathbb{N}$ o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt}(t) + \partial\varphi_H(u_n(t)) \ni f_n(t) \text{ em } H, \ 0 < t < T \\ u_n(0) = u_{o_n}. \end{cases} \tag{3.8}$$

A existência de uma única solução forte u_n de (3.8) é garantida pela Proposição 2.3.3. Para investigar a convergência de u_n vamos fazer algumas estimativas nas próximas etapas que irão garantir a convergência da solução u_n de (3.8) para uma função u que será a solução forte de (3.1).

2ª Etapa: Sendo u_n solução forte de (3.8) existe $g_n(t) \in \partial\varphi_H(u_n(t))$ tal que

$$\frac{du_n}{dt}(t) + g_n(t) = f_n(t) \quad em\ H,\ 0 < t < T.$$

Multiplicando a equação acima por $u_n(t)$ obtemos

$$\left\langle \frac{du_n}{dt}(t), u_n(t) \right\rangle_{V^*,V} + \langle g_n(t), u_n(t) \rangle_{V^*,V} = \langle f_n(t), u_n(t) \rangle_{V^*,V}.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 + \langle g_n(t), u_n(t) \rangle_{V^*,V} = \langle f_n(t), u_n(t) \rangle_{V^*,V} \leq ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V \tag{3.9}$$

q.t.p. em $]0,T[$. Agora como $g_n(t) \in \partial\varphi_H(u_n(t))$ temos que

$$\varphi_H(v) - \varphi_H(u_n(t)) \geq \langle g_n(t), v - u_n(t) \rangle_{V^*,V}$$

$\forall v \in D(\varphi_H) = D(\varphi)$ e como $0 \in D(\varphi_H) = D(\varphi)$ segue que

$$\varphi_H(0) - \varphi_H(u_n(t)) \geq \langle g_n(t), -u_n(t)\rangle_{V^*,V}$$

e usando que $\varphi_H(0) = \varphi(0)$ e que $u_n(t) \in D(\varphi_H) = D(\varphi)$ temos

$$\varphi(0) - \varphi(u_n(t)) \geq -\langle g_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V}$$

o que implica

$$\varphi(u_n(t)) \leq \langle g_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} + \varphi(0). \tag{3.10}$$

A condição (3.3) nos dá que

$$||u_n(t)||_V^p \leq C_1||u_n(t)||_H^2 + C_2 + C_3\varphi(u_n(t)). \tag{3.11}$$

De (3.11) podemos obter

$$C_4||u_n(t)||_V^p \leq C_5||u_n(t)||_H^2 + C_6 + \frac{1}{2}\varphi(u_n(t)), \tag{3.12}$$

em que $C_4 = \dfrac{1}{2C_3}$, $C_5 = \dfrac{C_1}{2C_3}$ e $C_6 = \dfrac{C_2}{2C_3}$. Daqui segue que $C_3 > 0$ na condição 3.3. Observe também que de (3.9) e (3.10) temos respectivamente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 \leq -\langle g_n(t), u_n(t)\rangle + ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V$$

e

$$\frac{1}{2}\varphi(u_n(t)) \leq \frac{1}{2}\langle g_n(t), u_n(t)\rangle + \frac{1}{2}\varphi(0).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 + \frac{1}{2}\varphi(u_n(t)) + C_4||u_n(t)||_V^p \quad &\leq \quad C_5||u_n(t)||_H^2 + C_6 + \frac{1}{2}\varphi(u_n(t)) + \frac{1}{2}\langle g_n(t), u_n(t)\rangle \\
&+ \quad \frac{1}{2}\varphi(0) - \langle g_n(t), u_n(t)\rangle + ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V \\
&\leq \quad C_5||u_n(t)||_H^2 + C_6 + \frac{1}{2}\langle g_n(t), u_n(t)\rangle + \frac{1}{2}\varphi(0) \\
&+ \quad \frac{1}{2}\langle g_n(t), u_n(t)\rangle + \frac{1}{2}\varphi(0) - \langle g_n(t), u_n(t)\rangle \\
&+ \quad ||f_n(t)||_V^*||u_n(t)||_V \\
&= \quad C_5||u_n(t)||_H^2 + C_7 + ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V,
\end{aligned}$$

onde $C_7 = C_6 + \varphi(0)$. Usando o Lema 3.1.1 para $a = ||u_n(t)||_V$, $b = ||f_n(t)||_{V^*}$ e $k = \dfrac{C_4}{2}$ concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 + \frac{1}{2}\varphi(u_n(t)) + C_4||u_n(t)||_V^p \quad &\leq \quad C_5||u_n(t)||_H^2 + C_7 + \frac{C_4}{2}||u_n(t)||_V^p \\
&+ \quad \mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)||f_n(t)||_{V^*}^{p'}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Agora vamos verificar as seguintes limitações:

(i) u_n é limitada em $C([0,T];H)$;

(ii) u_n é limitada em $L^p(0,T;V)$;

(iii) $\varphi(u_n(t))$ é limitada em $L^1(0,T)$.

(iv) g_n é limitada em $L^{p'}(O,T;V^*)$ e u_n é limitada em $W^{1,p'}(0,T;V^*)$.

Com efeito, observe que de (3.13) e pelo fato de que $||f_n(t)||_{V^*}^{p'} \leq C||f_n(t)||_H^{p'}$ temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 \leq C_5||u_n(t)||_H^2 + C_7 + \mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)C||f_n(t)||_H^{p'}$$

agora, integrando esta expressão de 0 até t, obtemos

$$||u_n(t)||_H^2 \leq ||u_{o_n}||_H^2 + \int_0^t \{2C\mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)||f_n(s)||_H^{p'} + 2C_7\}ds + \int_0^t 2C_5||u_n(s)||_H^2 ds. \qquad (3.14)$$

Aplicando o Lema 2.1.3 para $\phi(t) = ||u_n(t)||_H^2$, $a(t) = ||u_{o_n}||_H^2 + \int_0^t \{2C\mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)||f_n(s)||_H^{p'} + 2C_7\}ds$ segue que

$$||u_n(t)||_H^2 \leq \left(||u_{o_n}||_H^2 + \int_0^t \{2C\mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)||f_n(s)||_H^{p'} + 2C_7\}ds\right)e^{2C_5T} \leq K$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,T]$. Logo,

$$\sup_{t\in[0,T]} ||u_n(t)||_H \leq \sqrt{K}$$

o que mostra (i). Para verificar (ii) novamente de (3.13) temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 + \frac{C_4}{2}||u_n(t)||_V^p \leq C_5K + C_7 + \mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)\sup_{\tau\in[0,T]}||f_n(\tau)||_H^{p'},$$

onde $\sup_{t\in[0,T]} ||u_n(t)||_H \leq \sqrt{K}$. Integrando esta expressão de 0 até T obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}||u_n(T)||_H^2 + \frac{1}{2}C_4\int_0^T ||u_n(t)||_V^p dt \leq T\left\{C_5K + C_7 + \mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)\sup_{\tau\in[0,T]}||f_n(\tau)||_H^{p'}\right\}\\
+ \quad &\frac{1}{2}||u_{o_n}||_H^2 \leq \widetilde{J}
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\frac{1}{2}||u_n(T)||_H^2 \geq 0$ temos

$$\left(\int_0^T ||u_n(t)||_V^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{2\widetilde{J}}{C_4}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

e (ii) segue. Para justificar a ocorrência de (iii), usando (3.13) e $||f_n(t)||_{V^*}^{p'} \leq C||f_n(t)||_H^{p'}$ obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 + \frac{1}{2}\varphi(u_n(t)) + \frac{C_4}{2}||u_n(t)||_V^p \leq C_5K + C_7 + C\mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)||f_n(t)||_H^{p'}$$

e como $||u_n(t)||_V^p \geq 0$ segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 + \frac{1}{2}\varphi(u_n(t)) \leq C_5K + C_7 + C\mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)||f_n(t)||_H^{p'} \leq D,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Integrando a expressão acima de 0 até T obtemos

$$\frac{1}{2}||u_n(T)||_H^2 + \int_0^T \frac{1}{2}\varphi(u_n(t))dt \leq \frac{1}{2}||u_{o_n}||_H^2 + TD$$

logo, lembrando que $\frac{1}{2}||u_n(T)||_H^2 \geq 0$, obtemos

$$\int_0^T \varphi(u_n(t))dt \leq ||u_{o_n}||_H^2 + 2TD \leq R,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ concluindo que $\varphi(u_n(t))$ é limitada em $L^1(0,T)$. Para verificar (iv), decorre de (3.4) que

$$||g_n(t)||_{V^*}^{p'} \leq l(||u_n(t)||_H\{\varphi(u_n(t)) + 1\}.$$

Pelo fato de que $||u_n(t)||_H \leq K$ para todo $t \in [0,T]$ e que $l : [0,\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é não decrescente, tem-se que $l(||u_n(t)||_H) \leq l(K)$, logo

$$||g_n(t)||_{V^*}^{p'} \leq l(K)\{\varphi(u_n(t)) + 1\}.$$

Integrando de 0 até T obtemos

$$\left(\int_0^T ||g_n(t)||_{V^*}^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(l(K)\int_0^T (\varphi(u_n(\tau)) + 1)d\tau\right)^{\frac{1}{p'}}$$

e isso nos dá que g_n é limitada em $L^{p'}(0,T;V^*)$ pois $\varphi(u_n(\cdot))$ é limitada em $L^1(0,T)$.

Como $\frac{du_n}{dt}(t) = f_n(t) - g_n(t)$ segue que

$$\begin{aligned}
||u_n||_{W^{1,p'}(0,T,V^*)} &= ||u_n||_{L^{p'}(0,T;V^*)} + \left|\left|\frac{du_n}{dt}\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)} \\
&= \left(\int_0^T ||u_n(t)||_{V^*}^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} + \left|\left|\frac{du_n}{dt}\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)} \\
&\leq C\left(\int_0^T ||u_n(t)||_H^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} + ||f_n||_{L^{p'}(0,T;V^*)} + ||g_n||_{L^{p'}(0,T;V^*)} \\
&\leq C\left(\int_0^T \left(\sqrt{K}\right)^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} + ||f_n||_{L^{p'}(0,T;V^*)} + ||g_n||_{L^{p'}(0,T;V^*)} \\
&= CT^{\frac{1}{p'}}\sqrt{K} + ||f_n||_{L^{p'}(0,T;V^*)} + ||g_n||_{L^{p'}(0,T;V^*)} \leq L,
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e isto nos dá que u_n é limitada em $W^{1,p'}(0,T,V^*)$.

3ª Etapa: Mostraremos a convergência de u_n para uma função u que é solução de (3.1). Sendo $u_n - u_m$ solução forte de

$$\frac{d}{dt}(u_n(t) - u_m(t)) + \partial\varphi_H(u_n(t)) - \partial\varphi_H(u_m(t)) \ni f_n(t) - f_m(t) \text{ em } H, 0 < t < T$$

existe $g_n(t)-g_m(t)\in\partial\varphi_H(u_n(t))-\partial\varphi_H(u_m(t))$ tal que

$$\frac{d}{dt}(u_n(t)-u_m(t))+(g_n(t)-g_m(t))=f_n(t)-f_m(t).$$

Multiplicando a equação acima por $u_n(t)-u_m(t)$ obtemos

$$\begin{aligned}&\left\langle\frac{d}{dt}(u_n(t)-u_m(t)),u_n(t)-u_m(t)\right\rangle_{V^*,V}+\langle g_n(t)-g_m(t),u_n(t)-u_m(t)\rangle_{V^*,V}\\ =\ &\langle f_n(t)-f_m(t),u_n(t)-u_m(t)\rangle_{V^*,V}\end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)-u_m(t)||_H^2+\langle g_n(t)-g_m(t),u_n(t)-u_m(t)\rangle_{V^*,V}=\langle f_n(t)-f_m(t),u_n(t)-u_m(t)\rangle_{V^*,V}$$

e como $\partial\varphi_H$ é monótona, ou seja, $\langle g_n(t)-g_m(t),u_n(t)-u_m(t)\rangle_{V^*,V}\geq 0$ segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)-u_m(t)||_H^2\leq\langle f_n(t)-f_m(t),u_n(t)-u_m(t)\rangle_{V^*,V}\ \ q.t.p\ \ t\ \ em\ \ ]0,T[. \tag{3.15}$$

Integrando (3.15) de 0 até t temos

$$\int_0^t\frac{1}{2}\frac{d}{ds}||u_n(s)-u_m(s)||_H^2ds\leq\int_0^t\langle f_n(s)-f_m(s),u_n(s)-u_m(s)\rangle_{V^*,V}ds$$

e concluímos que

$$\frac{1}{2}\left(||u_n(t)-u_m(t)||_H^2-||u_n(0)-u_m(0)||_H^2\right)\leq\int_0^t\langle f_n(s)-f_m(s),u_n(s)-u_m(s)\rangle_{V^*,V}ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned}||u_n(t)-u_m(t)||_H^2&\leq||u_{o_n}-u_{o_m}||_H^2+2\int_0^t\langle f_n(s)-f_m(s),u_n(s)-u_m(s)\rangle_{V^*,V}ds\\&\leq||u_{o_n}-u_{o_m}||_H^2+2\int_0^t||f_n(s)-f_m(s)||_{V^*}||u_n(s)-u_m(s)||_Vds\\&\leq||u_{o_n}-u_{o_m}||_H^2+2||f_n-f_m||_{L^{p'}(0,T;V^*)}||u_n-u_m||_{L^p(0,T;V)}.\end{aligned}$$

Como u_n é limitada em $L^p(0,T;V)$ e u_{o_n}, f_n são sequências convergentes em H e $L^{p'}(0,T;V^*)$ respectivamente concluímos que u_n é uma sequência de Cauchy em $C([0,T];H)$. Como este espaço é completo, existe $u\in C([0,T];H)$ tal que $u_n\to u$ em $C([0,T];H)$. Como u_n é limitada em $L^p(0,T;V)$ e $W^{1,p'}(0,T;V^*)$ e g_n é limitada em $L^{p'}(0,T;V^*)$ e esses espaços são reflexivos, pelo Teorema 2.1.4 podemos extrair uma subsequência n_k de n tal que

$$u_{n_k}\rightharpoonup u\ \ em\ \ L^p(0,T;V)$$

$$u_{n_k}\rightharpoonup u\ \ em\ \ W^{1,p'}(0,T;V^*)$$

$$g_{n_k}\rightharpoonup g\ \ em\ \ L^{p'}(0,T;V^*).$$

Para completar a demonstração, é suficiente mostrar que $g(t)\in\partial\varphi(u(t))$ q.t.p t em]0,T[. Para tanto, seja $v\in D(\partial\varphi)$ e $h\in\partial\varphi(v)$ fixada. Multiplicando (3.8) por $u_n(t)-v$ obtemos

$$\left\langle\frac{d}{dt}u_n(t),u_n(t)-v\right\rangle_{V^*,V}+\langle g_n(t),u_n(t)-v\rangle_{V^*,V}=\langle f_n(t),u_n(t)-v\rangle_{V^*,V}$$

e como v é constante em t temos que

$$\left\langle \frac{du_n}{dt}(t), u_n(t)-v \right\rangle_{V^*,V} = \left\langle \frac{d}{dt}(u_n(t)-v), u_n(t)-v \right\rangle_{V^*,V} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)-v||_H^2$$

e consequentemente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)-v||_H^2 + \langle g_n(t), u_n(t)-v\rangle_{V^*,V} = \langle f_n(t), u_n(t)-v\rangle_{V^*,V} \text{ q.t.p t em }]0,T[.$$

Pela monotonicidade de $\partial\varphi$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle g_n(t), u_n(t)-v\rangle_{V^*,V} &= \langle g_n(t)-h, u_n(t)-v\rangle_{V^*,V} + \langle h, u_n(t)-v\rangle_{V^*,V} \\ &\geq \langle h, u_n(t)-v\rangle_{V^*,V}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)-v||_H^2 \leq \langle -h+f_n(t), u_n(t)-v\rangle_{V^*,V}.$$

Integrando a expressão anterior de s até t, $0 \leq s \leq t \leq T$ obtemos

$$\frac{1}{2}\left(||u_n(t)-v||_H^2 - ||u_n(s)-v||_H^2\right) \leq \int_s^t \langle -h+f_n(\tau), u_n(\tau)-v\rangle_{V^*,V} d\tau. \tag{3.16}$$

Como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(||u_n(t)-v||_H^2 - ||u_n(s)-v||_H^2\right) = \frac{1}{2}\langle u_n(t)-v, u_n(t)-v\rangle \\ - & \frac{1}{2}\langle u_n(s)-v, u_n(s)-v\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle u_n(t), u_n(t)\rangle - \langle u_n(t), v\rangle - \langle v, u_n(t)\rangle + \langle v, v\rangle\right) \\ - & \frac{1}{2}\left(\langle u_n(s), u_n(s)\rangle - \langle u_n(s), v\rangle - \langle v, u_n(s)\rangle - \langle v, v\rangle\right) \\ = & \frac{1}{2}\left(-\langle u_n(t)-u_n(s), v\rangle - \langle v, u_n(t)-u_n(s)\rangle\right) + \frac{1}{2}\left(\langle u_n(t), u_n(t)\rangle - \langle u_n(s), u_n(s)\rangle\right) \\ = & \frac{1}{2}\left(\langle u_n(t)-u_n(s), -2v\rangle + \langle u_n(t), u_n(t)\rangle + \langle u_n(s), u_n(s)\rangle\right) = \frac{1}{2}\langle u_n(t)-u_n(s), -2v\rangle \\ + & \frac{1}{2}\left(\langle u_n(t)-u_n(s), u_n(t)+u_n(s)\rangle\right) = \frac{1}{2}\langle u_n(t)-u_n(s), u_n(t)+u_n(s)-2v\rangle \end{aligned}$$

de (3.16) concluímos que

$$\frac{1}{2}\langle u_n(t)-u_n(s), u_n(t)+u_n(s)-2v\rangle \leq \int_s^t \langle -h+f_n(\tau), u_n(\tau)-v\rangle d\tau. \tag{3.17}$$

Pelo Lema 3.1.2 com $\xi = u_n(t)-v$ e $\eta = u_n(s)-v$ temos que

$$\langle u_n(t)-u_n(s), u_n(s)-v\rangle \leq \frac{1}{2}\langle u_n(t)-u_n(s), u_n(t)+u_n(s)-2v\rangle$$

e por (3.17) obtemos

$$\langle u_n(t)-u_n(s), u_n(s)-v\rangle \leq \int_s^t \langle -h+f_n(\tau), u_n(\tau)-v\rangle d\tau.$$

Então, para todo $s,t \in [0,T]$ com $s < t$, temos

$$\left\langle \frac{u_n(t)-u_n(s)}{t-s}, u_n(s)-v \right\rangle \leq \frac{1}{t-s}\int_s^t \langle -h+f_n(\tau), u_n(\tau)-v\rangle d\tau. \tag{3.18}$$

Agora, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{t-s}\displaystyle\int_s^t \langle -h+f_n(\tau), u_n(\tau)-v\rangle d\tau = \dfrac{1}{t-s}\displaystyle\int_s^t \langle -h+f(\tau), u(\tau)-v\rangle d\tau.$

De fato, seja $A(\tau) = \langle -h+f_n(\tau), u_n(\tau)-v\rangle - \langle -h+f(\tau), u(\tau)-v\rangle$. Temos

$$\begin{aligned}
|A(\tau)| &= |\langle -h, u_n(\tau)-v\rangle + \langle f_n(\tau), u_n(\tau)-v\rangle - \langle -h, u(\tau)-v\rangle - \langle f(\tau), u(\tau)-v\rangle| \\
&= |\langle -h, u_n(\tau)-u(\tau)\rangle - \langle f(\tau), u(\tau)-v\rangle + \langle f_n(\tau)-f(\tau)+f(\tau), u_n(\tau)-v\rangle| \\
&= |\langle -h, u_n(\tau)-u(\tau)\rangle + \langle f(\tau), u_n(\tau)-u(\tau)\rangle + \langle f_n(\tau)-f(\tau), u_n(\tau)-v\rangle|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& |A(\tau)| \leq |\langle -h, u_n(\tau)-u(\tau)\rangle| + |\langle f(\tau), u_n(\tau)-u(\tau)\rangle| + |\langle f_n(\tau)-f(\tau), u_n(\tau)-v\rangle| \\
\leq\ & ||-h||_H ||u_n(\tau)-u(\tau)||_H + ||f_n(\tau)-f(\tau)||_{V^*} ||u_n(\tau)-v||_V \\
+\ & ||f(\tau)||_{V^*} ||u_n(\tau)-u(\tau)||_V.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{t-s}\int_s^t |A(\tau)| d\tau \leq \frac{||-h||_H}{t-s}\int_s^t ||u_n(\tau)-u(\tau)||_H d\tau \\
+\ & \frac{1}{t-s}\int_s^t ||f_n(\tau)-f(\tau)||_{V^*} ||u_n(\tau)-v||_V d\tau + \frac{1}{t-s}\int_s^t ||f(\tau)||_{V^*} ||u_n(\tau)-u(\tau)||_V d\tau \\
\leq\ & \frac{||-h||_H}{t-s}\int_s^t ||u_n(\tau)-u(\tau)||_H d\tau + \frac{1}{t-s} ||f_n - f||_{L^{p'}(0,T;V^*)} ||u_n - v||_{L^p(0,T;V)} \\
+\ & \frac{1}{t-s}\int_s^t ||f(\tau)||_{V^*} ||u_n(\tau)-u(\tau)||_V d\tau.
\end{aligned}$$

Notemos que $||u_n - v||_{L^p(0,T;V)} \leq C$. Seja então $\varepsilon > 0$, logo existem $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tais que

$$||u_n(\tau)-u(\tau)||_H < \frac{\varepsilon}{3||-h||_H}, \forall \tau \in (s,t),\ n \geq n_1,$$

$$||f_n - f||_{L^{p'}(0,T;V^*)} < \frac{(t-s)\varepsilon}{3C},\ n \geq n_2,$$

$$||u_n - u||_{L^p(0,T;V)} < \frac{(t-s)\varepsilon}{3||f||_{L^{p'}(0,T;V^*)}},\ n \geq n_3.$$

Tome agora $N = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ e teremos que para todo $n \geq N$

$$\left|\frac{1}{t-s}\int_s^t A(\tau) d\tau\right| \leq \frac{1}{t-s}\int_s^t |A(\tau)| d\tau < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

e isso mostra que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t-s}\int_s^t (\langle -h+f_n(\tau), u_n(\tau)-v\rangle = \frac{1}{t-s}\int_s^t \langle -h+f(\tau), u(\tau)-v\rangle d\tau.$$

Fazendo $n \to \infty$ em (3.18) segue que $\forall s,t \in [0,T]$ com $s < t$

$$\left\langle \frac{u(t)-u(s)}{t-s}, u(s)-v \right\rangle_{V^*,V} \leq \frac{1}{t-s}\int_s^t \langle -h+f(\tau), u(\tau)-v\rangle d\tau.$$

Agora, fazendo $s \to t$ temos que

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{du}{dt}(t), u(t)-v \right\rangle_{V^*,V} &\leq \lim_{s\to t} \frac{1}{t-s}\int_s^t \langle -h+f(\tau), u(\tau)-v\rangle d\tau \\ &= \lim_{s\to t} \frac{F(t)-F(s)}{t-s} = F'(t),\end{aligned}$$

onde $F(y) = \int_0^y \langle -h+f(\tau), u(\tau)-v\rangle d\tau$ para $0 \leq y \leq T$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que $F'(t) = \langle -h+f(t), u(t)-v\rangle$. Logo

$$\left\langle \frac{du}{dt}(t), u(t)-v \right\rangle_{V^*,V} \leq \langle -h+f(t), u(t)-v\rangle$$

e portanto concluímos que

$$\left\langle \frac{du}{dt}(t) - f(t) + h, u(t)-v \right\rangle_{V^*,V} \leq 0, \text{ q.t.p em }]0,\mathrm{T}[.$$

Pela arbitrariedade de $v \in D(\varphi)$ e $h \in \partial\varphi(v)$ bem como pela monotonicidade maximal de $\partial\varphi$ em $V \times V^*$ temos que $g(t) = f(t) - \frac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi(u(t))$ para q.t.p em]0,T[e assim $u(t) \in D(\partial\varphi)$ q.t.p. $t \in [0,T]$. Vamos mostrar agora que $\varphi(u(t)) \in L^1(0,T)$. Realmente, sendo u solução forte de (3.1) existe $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ tal que

$$\frac{du}{dt}(t) + g(t) = f(t) \quad em \ V^*, \ 0 < t < T.$$

Multiplicando esta equação por $u(t)$ obtemos

$$\left\langle \frac{du}{dt}(t), u(t) \right\rangle_{V^*,V} + \langle g(t), u(t)\rangle_{V^*,V} = \langle f(t), u(t)\rangle_{V^*,V}.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(t)||_H^2 + \langle g(t), u(t)\rangle = \langle f(t), u(t)\rangle \leq ||f(t)||_{V^*}||u(t)||_V \tag{3.19}$$

q.t.p. t em $]0,T[$. Agora como $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ temos que

$$\varphi(v) - \varphi(u(t)) \geq \langle g(t), v-u(t)\rangle_{V^*,V},$$

para todo $v \in D(\varphi)$ e como $0 \in D(\varphi)$ segue que

$$\varphi(0) - \varphi(u(t)) \geq \langle g(t), -u(t)\rangle_{V^*,V},$$

ou seja,

$$\varphi(0) - \varphi(u(t)) \geq -\langle g(t), u(t)\rangle_{V^*,V},$$

o que implica

$$\varphi(u(t)) \leq \langle g(t), u(t)\rangle + \varphi(0). \tag{3.20}$$

A condição (3.3) nos dá que

$$||u(t)||_V^p \leq C_1||u(t)||_H^2 + C_2 + C_3\varphi(u(t)). \tag{3.21}$$

De (3.21) podemos obter

$$C_4||u(t)||_V^p \leq C_5||u(t)||_H^2 + C_6 + \frac{1}{2}\varphi(u(t)),$$

em que $C_4 = \dfrac{1}{2C_3}$, $C_5 = \dfrac{C_1}{2C_3}$ e $C_6 = \dfrac{C_2}{2C_3}$. Observe também que de (3.19) e (3.20) temos respectivamente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(t)||_H^2 \leq -\langle g(t), u(t)\rangle + ||f(t)||_{V^*}||u(t)||_V$$

e

$$\frac{1}{2}\varphi(u(t)) \leq \frac{1}{2}\langle g(t), u(t)\rangle + \frac{1}{2}\varphi(0).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(t)||_H^2 + \frac{1}{2}\varphi(u(t)) + C_4||u(t)||_V^p &\leq C_5||u(t)||_H^2 + C_6 + \frac{1}{2}\varphi(u(t)) + \frac{1}{2}\langle g(t), u(t)\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\varphi(0) - \langle g(t), u(t)\rangle + ||f(t)||_{V^*}||u(t)||_V \\
&\leq C_5||u(t)||_H^2 + C_6 + \frac{1}{2}\langle g(t), u(t)\rangle + \frac{1}{2}\varphi(0) \\
&+ \frac{1}{2}\langle g(t), u(t)\rangle + \frac{1}{2}\varphi(0) - \langle g(t), u(t)\rangle \\
&+ ||f(t)||_V^*||u(t)||_V \\
&= C_5||u(t)||_H^2 + C_7 + ||f(t)||_{V^*}||u(t)||_V,
\end{aligned}$$

onde $C_7 = C_6 + \varphi(0)$. Usando o Lema 3.1.1 para $a = ||u(t)||_V$, $b = ||f(t)||_{V^*}$ e $k = \dfrac{C_4}{2}$ concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(t)||_H^2 + \frac{1}{2}\varphi(u(t)) + C_4||u(t)||_V^p &\leq C_5||u(t)||_H^2 + C_7 + \frac{C_4}{2}||u(t)||_V^p \\
&+ \mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)||f(t)||_{V^*}^{p'}
\end{aligned}$$

e como $\sup\limits_{t\in[0,T]} ||u(t)||_H^p \leq K$ e $||u(t)||_V^p \geq 0$ segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(t)||_H^2 + \frac{1}{2}\varphi(u(t)) \leq C_5K + C_7 + \mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)||f_n(t)||_{V^*}^{p'}$$

Integrando esta expressão de 0 até T obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \varphi(u(t))dt &\leq -||u(T)||_H^2 + ||u_o||_H^2 + TC_5K + TC_7 + \mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)\int_0^T ||f(t)||_{V^*}^{p'}dt \\
&= -||u(T)||_H^2 + ||u_o||_H^2 + TC_5K + TC_7 + \mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)||f||_{L^{p'}(0,T;V^*)}^{p'} < \infty
\end{aligned}$$

observando que $f \in L^{p'}(0,T;V^*)$. Sendo assim $\varphi(u(t)) \in L^1(0,T)$. ■

Observação 3.1.2 *Como $\varphi(u(t)) \in L^1(0,T)$ segue que $u(t) \in D(\varphi)$ para q.t.p $t \in]0,T[$.*

3.2 Regularidade das soluções do problema de Cauchy

Nesta seção, de acordo com [1], sob algumas condições, apresentaremos um resultado sobre a regularidade da solução forte u de (3.1).

Lema 3.2.1 *[7] (Desigualdade de Hardy) Se $p > 1$, $f(x) > 0$ e $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ então*

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p dx.$$

Lema 3.2.2 *Se $f \in L^{p'}(0,T;V^*)$ com $t\dfrac{df}{dt} \in L^{p'}(0,T;V^*)$ então existe uma sequência $f_n \in L^\infty(0,T;V^*) \cap C^\infty(]0,T];H)$ satisfazendo:*

(i) $tf_n \in C^\infty([0,T];H)$;

(ii) $f_n \to f$ *em* $L^{p'}(0,T;V^*)$;

(iii) $t\dfrac{df_n}{dt} \to t\dfrac{df}{dt}$ *em* $L^{p'}(0,T;V^*)$;

(iv) $\lim\limits_{t\to 0^+} tf_n(t) = 0$.

Demonstração: A partir do fato de que $f \in L^{p'}(0,T;V^*)$ segue que $tf \in W^{1,p'}(0,T;V^*)$ pois

$$\begin{aligned} ||tf||_{p'} = \left(\int_0^T ||tf(t)||^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} &= \left(\int_0^T t^{p'}||f(t)||^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \left(T^{p'}\int_0^T ||f(t)||^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} = T||f||_{p'} < \infty \end{aligned}$$

e $\dfrac{d(tf)}{dt} = f + t\dfrac{df}{dt} \in L^{p'}(0,T;V^*)$. Pelo Teorema 2.2.2 $W^{1,p'}(0,T;V^*) \subset C([0,T];V^*)$, logo temos que tf é uma função contínua de [0,T] com valores em V^*. Então,

$$\lim_{t\to 0^+} ||tf(t)||_{V^*} = \alpha$$

existe e $\alpha \geq 0$. Mostremos que $\alpha = 0$. Com efeito, se $\alpha > 0$, sendo $\lim\limits_{t\to 0^+} ||tf(t)||_{V^*} = \alpha$, dado $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < t < \delta$ então $|\ ||tf(t)||_{V^*} - \alpha| < \dfrac{\alpha}{2}$, isto é

$$-\frac{\alpha}{2} < ||tf(t)||_{V^*} - \alpha < \frac{\alpha}{2}$$

logo$||f(t)||_{V^*} \geq \dfrac{\alpha}{2t}$ para $0 < t < \delta$, o que contradiz o fato de que $f \in L^1(0,T;V^*)$, pois

$$\begin{aligned} &\int_0^T ||f(t)||_{V^*}dt \geq \int_0^\delta ||f(t)||_{V^*}dt \geq \alpha\int_0^\delta \frac{1}{2t}dt = \frac{\alpha}{2}\lim_{a\to 0}\int_a^\delta \frac{1}{t}dt = \frac{\alpha}{2}\lim_{a\to 0} \ln t\Big|_a^\delta \\ = &\ \frac{\alpha}{2}\lim_{a\to 0}(\ln\delta - \ln a) = \infty. \end{aligned}$$

Logo $\lim\limits_{t\to 0^+} ||tf(t)||_{V^*} = 0$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$tf(t) = \int_0^t \frac{d}{d\tau}[\tau f(\tau)]d\tau$$

e

$$f(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{d\tau}[\tau f(\tau)]d\tau. \tag{3.22}$$

Sendo $H \subset V^*$ uma imersão contínua e densa escolhemos uma sequência $\rho_n \in C^\infty([0,T];H)$ com $\rho_n(0) = 0$ e $\rho_n \to tf$ em $W^{1,p'}(0,T;V^*)$. Considere $f_n(t) = \dfrac{1}{t}\rho_n(t)$. Então temos que $f_n \in C^\infty(]0,T];H)$ visto que $\rho_n \in C^\infty([0,T];H)$. Agora

$$tf_n(t) = \rho_n(t) - \rho_n(0) = \int_0^t \frac{d}{d\tau}\rho_n(\tau)d\tau$$

e portanto

$$f_n(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{d\tau}\rho_n(\tau)d\tau. \tag{3.23}$$

Observe que como $\rho_n \in C^\infty([0,T];H)$ temos

$$\begin{aligned} ||f_n(t)||_{V^*} = \left|\left|\frac{1}{t}\int_0^t \frac{d\rho_n}{d\tau}(\tau)d\tau\right|\right|_{V^*} &\leq \frac{1}{t}\int_0^t \left|\left|\frac{d\rho_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*} d\tau \\ &\leq \frac{c}{t}\int_0^t \left|\left|\frac{d\rho_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{H} d\tau \\ &\leq c \sup_{t\in[0,T]} \left|\left|\frac{d\rho_n}{dt}(t)\right|\right|_{H}. \end{aligned}$$

Logo, $\sup \text{ess} ||f_n(t)||_{V^*} \leq c \sup\limits_{t\in[0,T]} \left|\left|\dfrac{d}{dt}\rho_n(t)\right|\right|_H < \infty$ e segue que $f_n \in L^\infty(0,T;V^*)$. Como $tf_n(t) = \rho_n(t) \in C^\infty([0,T];H)$ segue (i). Por (3.22) e (3.23)

$$f_n(t) - f(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{d\tau}\rho_n(\tau)d\tau - \frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{d\tau}[\tau f(\tau)]d\tau = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{d\tau}[\rho_n(\tau) - \tau f(\tau)]d\tau.$$

Logo

$$\begin{aligned} ||f_n(t) - f(t)||_{V^*}^{p'} &= \frac{1}{t^{p'}}\left|\left|\int_0^t \frac{d}{d\tau}[\rho_n(\tau) - \tau f(\tau)]d\tau\right|\right|_{V^*}^{p'} \\ &\leq \frac{1}{t^{p'}}\left(\int_0^t \left|\left|\frac{d}{d\tau}[\rho_n(\tau) - \tau f(\tau)]\right|\right|_{V^*} d\tau\right)^{p'}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Então, por (3.24) e pelo Lema 3.2.1 (Desigualdade de Hardy) temos

$$\begin{aligned} ||f_n - f||_{L^{p'}(0,T;V^*)}^{p'} &= \int_0^T ||f_n(t) - f(t)||_{V^*}^{p'} dt \\ &\leq \int_0^T \left(\frac{1}{t}\left(\int_0^t \left|\left|\frac{d}{d\tau}[\rho_n(\tau) - \tau f(\tau)]\right|\right|_{V^*} d\tau\right)\right)^{p'} dt \\ &\leq \left(\frac{p'}{p'-1}\right)^{p'} \int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt}[\rho_n(t) - tf(t)]\right|\right|_{V^*}^{p'} dt \\ &= p^{p'} \left|\left|\frac{d}{dt}(\rho_n - tf)\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)}^{p'}. \end{aligned}$$

Assim,

$$||f_n - f||_{L^{p'}(0,T;V^*)} \leq p\left|\left|\frac{d}{dt}[\rho_n - tf]\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)}.$$

Como $\rho_n \to tf$ em $W^{1,p'}(0,T;V^*)$ temos que $\dfrac{d\rho_n}{dt} \to \dfrac{d(tf)}{dt}$ em $L^{p'}(0,T;V^*)$ e concluímos que $f_n \to f$ em $L^{p'}(0,T;V^*)$ e (ii) está provado. Além disso,

$$\frac{d\rho_n}{dt}(t) = \frac{d}{dt}[tf_n(t)] = f_n(t) + t\frac{df_n}{dt}(t) \to \frac{d}{dt}[tf(t)] = f(t) + t\frac{d}{dt}f(t)$$

em $L^{p'}(0,T;V^*)$ e (iii) segue. Para finalizar a demonstração do lema, basta observar que

$$\lim_{t\to 0^+} tf_n(t) = \lim_{t\to 0^+} \rho_n(t) = \rho_n(0) = 0$$

o que garante (iv). ■

Lema 3.2.3 *Seja $F_V : V \to V^*$ a aplicação dualidade que a cada $v \in V$ associa o conjunto $F_V(v) = \{f \in V^*; f(v) = ||v||_V^2 = ||f||_{V^*}^2\}$. Então $v \in F_V^{-1}(f)$ se, e somente se, $v \in F_{V^*}(f)$.*

Demonstração: Observe primeiramente que pelo Teorema de Hanh-Banach $F_V(v) \neq \emptyset$, $\forall v \in V$. Suponha que $v \in F_V^{-1}(f)$, logo $f \in F_V(v)$. Temos

$$\langle v, f\rangle_{V,V^*} = \langle f, v\rangle_{V^*,V} = f(v) = ||v||_V^2 = ||f||_{V^*}^2$$

e como $F_{V^*} : V^* \to (V^*)^* \equiv V$ é tal que

$$F_{V^*}(f) = \{h \in V; \langle h, f\rangle_{V,V^*} = ||f||_{V^*}^2 = ||h||^2\}$$

segue que $v \in F_{V^*}(f)$. Reciprocamente, suponha que $v \in F_{V^*}(f)$. Então

$$\langle v, f\rangle_{V,V^*} = ||f||_{V^*}^2 = ||v||^2 = f(v) = \langle f, v\rangle_{V^*,V}.$$

Logo, $f \in F_V(v)$, isto é, $v \in F_V^{-1}(f)$. ■

Lema 3.2.4 *[2] Seja X um espaço normado e $u(t)$ uma função com valores em X definida em um intervalo da reta real. Suponha que $u(t)$ tem derivada fraca $u'(s) \in X$ em $t = s$. Assuma também que $t \to ||u(t)||$ seja diferenciável em $t = s$. Então*

$$||u(s)||_X \frac{d}{ds}||u(s)||_X = f(u'(s)) = \langle f, u'(s)\rangle_{X^*,X}$$

$\forall f \in F_X(u(s))$.

Agora estamos em condições de demonstrar os resultados a respeito da regularidade da solução de (3.1).

Teorema 3.2.1 *[1] Sejam (3.3) e (3.4) satisfeitas. Então para cada $u_o \in \overline{D(\varphi)}^H$ e $f \in L^{p'}(0,T;V^*)$ com $t\dfrac{df}{dt}(t) \in L^{p'}(0,T;V^*)$, a solução u de (3.1) satisfaz:*

(a) $u \in C(]0,T];V_w) \cap C([0,T];H) \cap W^{1,p'}(0,T;V^*)$;

(b) $u(t) \in D(\varphi)$ $\forall t > 0$, $\sup_{t\in[0,T]} t\varphi(u(t)) < \infty$;

(c) $t^{\frac{1}{p'}}\dfrac{du}{dt}(t) \in L^{\infty}(0,T;V^*)$, $t^{\frac{1}{2}}\dfrac{du}{dt}(t) \in L^2(0,T;H)$,

onde $C(]0,T];V_w)$ representa o conjunto de todas as funções de]0,T] com valores em V que são fracamente contínuas.

Demonstração: Do Teorema 3.1.1 temos que

$$u \in C([0,T];H) \cap W^{1,p'}(0,T;V^*) \cap L^p(0,T;V).$$

Agora, seja $u_o \in \overline{D(\varphi)}^H$ e considere a sequência $u_{o_n} \to u_o$ em H como na demonstração do Teorema 3.1.1. Considere $f_n \in L^{\infty}(0,T;V^*) \cap C^{\infty}(]0,T];H)$ satisfazendo as condições do Lema 3.2.2. Vamos considerar a equação (3.8) como no Teorema 3.1.1. Multiplicando esta equação por $t\dfrac{du_n}{dt}(t)$ obtemos

$$t\left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 + t\langle g_n(t), \frac{du_n}{dt}(t)\rangle_{V^*,V} = t\langle f_n(t), \frac{du_n}{dt}(t)\rangle_{V^*,V}$$

e pelo Lema 2.3.1 segue que

$$\langle g_n(t), \frac{du_n}{dt}(t)\rangle_{V^*,V} = \frac{d}{dt}\varphi_H(u_n(t)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} & t\left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 + t\frac{d}{dt}\varphi_H(u_n(t)) + \varphi_H(u_n(t)) - \varphi_H(u_n(t)) = t\left\langle f_n(t), \frac{du_n}{dt}(t)\right\rangle_{V^*,V} \\ + \quad & \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} - \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} + t\left\langle \frac{df_n}{dt}(t), u_n(t)\right\rangle_{V^*,V} - t\left\langle \frac{df_n}{dt}(t), u_n(t)\right\rangle_{V^*,V}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} & t\left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 + \frac{d}{dt}\{t\varphi_H(u_n(t))\} = \varphi_H(u_n(t)) + \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} + t\frac{d}{dt}\langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} \\ - \quad & \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} - t\left\langle \frac{df_n}{dt}(t), u_n(t)\right\rangle_{V^*,V} = \varphi_H(u_n(t)) + \frac{d}{dt}\{t\langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V}\} \\ - \quad & \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} - t\left\langle \frac{df_n}{dt}(t), u_n(t)\right\rangle_{V^*,V} \end{aligned} \tag{3.25}$$

q.t.p $t \in]0,T[$. Integrando (3.25) de 0 até t e notando que $\lim\limits_{t\to 0^+} tf_n(t) = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \tau\left|\left|\frac{du_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + \int_0^t \frac{d}{d\tau}\{\tau\varphi_H(u_n(\tau))\}d\tau = \int_0^t \varphi_H(u_n(\tau))d\tau \\ - \quad & \int_0^t \langle f_n(\tau), u_n(\tau)\rangle_{V^*,V}d\tau + \int_0^t \frac{d}{d\tau}\{\tau\langle f_n(\tau), u_n(\tau)\rangle_{V^*,V}\}d\tau - \int_0^t \tau\left\langle \frac{df_n}{d\tau}(\tau), u_n(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau. \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo segue que $\int_0^t \frac{d}{d\tau}\{\tau\varphi_H(u_n(\tau))\}d\tau = t\varphi_H(u_n(t))$ e assim

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \tau \left|\left|\frac{du_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + t\varphi_H(u_n(t)) = \int_0^t \varphi_H(u_n(\tau))d\tau + t\langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} \\
- & \int_0^t \langle f_n(\tau), u_n(\tau)\rangle_{V^*,V} d\tau - \int_0^t \tau \left\langle \frac{df_n}{d\tau}(\tau), u_n(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau \leq t|\langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V}| \\
+ & \int_0^T \varphi_H(u_n(\tau))d\tau + \left|\int_0^t \langle f_n(\tau), u_n(\tau)\rangle_{V^*,V}\right| + \left|\int_0^t \tau \left\langle \frac{df_n}{d\tau}(\tau), u_n(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau\right| \\
\leq & \int_0^T \varphi_H(u_n(\tau))d\tau + \left(\int_0^T ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^T ||u_n(\tau)||_V^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} + t||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V \\
+ & \left(\int_0^T \left|\left|\tau\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^T ||u_n(\tau)||_V^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$. Pela condição (3.3) e por (3.11) obtemos

$$\frac{1}{2C_3}||u_n(t)||_V^p \leq \frac{C_1}{2C_3}||u_n(t)||_H^2 + \frac{C_2}{2C_3} + \frac{1}{2}\varphi_H(u_n(t)). \qquad (3.27)$$

Pelo Lema 3.1.1 com $k = \frac{1}{2C_3}$ e (3.27) temos

$$\begin{aligned}
& t||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V \leq t\mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{1}{2C_3}t||u_n(t)||_V^p \\
\leq & \ t\mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + T\left\{\frac{C_1}{2C_3}||u_n(t)||_H^2 + \frac{C_2}{2C_3}\right\} + \frac{t}{2}\varphi_H(u_n(t)). \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Portanto, usando (3.28) em (3.26) concluímos que

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \tau \left|\left|\frac{du_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + \frac{t}{2}\varphi_H(u_n(t)) \leq \int_0^T \varphi_H(u_n(\tau))d\tau + \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)\sup_{t\in[0,T]} t||f_n(t)||_{V^*}^{p'} \\
+ & \frac{C_1}{2C_3}T\sup_{t\in[0,T]}||u_n(t)||_H^2 + \frac{C_2}{2C_3}T + \left(\int_0^T ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^T ||u_n(\tau)||_V^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \\
+ & \left(\int_0^T ||u_n(\tau)||_V^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T \left|\left|\tau\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$. Tomando agora uma sequência (t_m) de forma que

$$||f_n(t_m)||_{V^*} \leq ||f_n||_{L^\infty(0,T;V^*)}$$

e $t_m \to 0$ temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$t||f_n(t)||_{V^*}^{p'} - t_m||f_n(t_m)||_{V^*}^{p'} = \int_{t_m}^t \frac{d}{d\tau}\{\tau||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'}\}d\tau.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
t||f_n(t)||_{V^*}^{p'} &= \int_{t_m}^{t} \frac{d}{d\tau}\{\tau||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'}\}d\tau + t_m||f_n(t_m)||_{V^*}^{p'} \\
&= \int_{t_m}^{t} \left(||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} + \tau\frac{d}{d\tau}||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'}\right) d\tau + t_m||f_n(t_m)||_{V^*}^{p'} \\
&= \int_{t_m}^{t} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + \int_{t_m}^{t} \tau\frac{d}{d\tau}||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + t_m||f_n(t_m)||_{V^*}^{p'} \\
&= \int_{t_m}^{t} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + \int_{t_m}^{t} \tau\frac{d}{d\tau}\left(||f_n(\tau)||_{V^*}^{2}\right)^{\frac{p'}{2}} d\tau + t_m||f_n(t_m)||_{V^*}^{p'} \\
&= \int_{t_m}^{t} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + \int_{t_m}^{t} \tau\frac{p'}{2}\left\{||f_n(\tau)||_{V^*}^{2}\right\}^{\frac{p'-2}{2}} \frac{d}{d\tau}||f_n(\tau)||_{V^*}^{2} d\tau \\
&+ t_m||f_n(t_m)||_{V^*}^{p'} = \int_{t_m}^{t} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + \frac{p'}{2}\int_{t_m}^{t} \tau||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'-2}\frac{d}{d\tau}||f_n(\tau)||_{V^*}^{2} d\tau \\
&+ t_m||f_n(t_m)||_{V^*}^{p'}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2.4 com $X = V^*$ temos que para $h_n(\tau) \in F_V^{-1}(f_n(\tau))$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}||f_n(\tau)||_{V^*}^{2} &= 2||f_n(\tau)||_{V^*}\frac{d}{d\tau}||f_n(\tau)||_{V^*} \\
&= 2\left\langle \frac{df_n}{d\tau}(\tau), h_n(\tau)\right\rangle_{V^*,V} \\
&\leq 2\left|\left\langle \frac{df_n}{d\tau}(\tau), h_n(\tau)\right\rangle_{V^*,V}\right| \\
&\leq 2\left|\left|\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*} ||h_n(\tau)||_V = 2\left|\left|\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*} ||f_n(\tau)||_{V^*}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
t||f_n(t)||_{V^*}^{p'} &\leq \int_{t_m}^{t} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + p'\int_{t_m}^{t} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'-1}\left|\left|\tau\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*} d\tau + t_m||f_n(t_m)||_{V^*}^{p'} \\
&\leq \int_{t_m}^{t} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + p'\left(\int_{t_m}^{t} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{p'-1}{p'}} \left(\int_{t_m}^{t} \left|\left|\tau\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&+ t_m||f_n(t_m)||_{V^*}^{p'}.
\end{aligned}$$

Fazendo $t_m \to 0$ obtemos

$$t||f_n(t)||_{V^*}^{p'} \leq \int_{0}^{t} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + p'\left(\int_{0}^{t} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{p'-1}{p'}} \left(\int_{0}^{t} \left|\left|\tau\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Como $f_n \to f$ e $t\dfrac{df_n}{dt}(t) \to t\dfrac{df}{dt}(t)$ em $L^{p'}(0,T;V^*)$ podemos extrair uma subsequência n' de n tal que $f_{n'}(t) \to f(t)$ em V^* q.t.p $t \in]0,T[$. Como $f_n \to f$ em $L^{p'}(0,T;V^*)$ temos que $f_n \to f$ em $L^{p'}(0,t;V^*)$ para cada $t \in [0,T]$. Logo $||f_n||_{L^{p'}(0,t;V^*)}^{p'} \to ||f||_{L^{p'}(0,t;V^*)}^{p'}$ e, portanto,

$\int_0^t ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau \to \int_0^t ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau$. Analogamente vemos que $\left(\int_0^t ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{p'-1}{p'}}$ converge para $\left(\int_0^t ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{p'-1}{p'}}$. Pelo fato de que $t\frac{df_n}{dt}(t) \to t\frac{df}{dt}(t)$ em $L^{p'}(0,T;V^*)$ temos que $t\frac{df_n}{dt}(t) \to t\frac{df}{dt}(t)$ em $L^{p'}(0,t;V^*)$ para cada $t \in [0,T]$. Sendo assim, podemos concluir que $\left(\int_0^t \left|\left|\tau\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \to \left(\int_0^t \left|\left|\tau\frac{df}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}}$. Fazendo $n' \to \infty$ com n substituído por n' temos

$$t||f(t)||_{V^*}^{p'} \leq \int_0^t ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + p'\left(\int_0^t ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{p'-1}{p'}} \left(\int_0^t \left|\left|\tau\frac{df}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{3.30}$$

Logo, decorre de (3.30) que $t||f(t)||_{V^*}^{p'} \in L^\infty(0,T)$ e $\lim_{t\to 0^+} t||f(t)||_{V^*}^{p'} = 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} t||f(t)||_{V^*}^{p'} &\leq \int_0^t ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + p'\left(\int_0^t ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{p'-1}{p'}} \left(\int_0^t \left|\left|\tau\frac{df}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq ||f||_{L^{p'}(0,T;V^*)}^{p'} + p'||f||_{L^{p'}(0,T;V^*)}^{p'-1} \left|\left|t\frac{df}{dt}\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)} < \infty \end{aligned}$$

q.t.p $t \in]0,T[$. Logo $||t||f(t)||_{V^*}^{p'}||_{L^\infty(0,T)} < \infty$. Como $0 \leq t||f(t)||_{V^*}^{p'}$ e

$$\int_0^t ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + p'\left(\int_0^t ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{p'-1}{p'}} \left(\int_0^t \left|\left|\tau\frac{df}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \to 0$$

quando $t \to 0^+$ segue, pelo Teorema do Sanduíche que $\lim_{t\to 0^+} t||f(t)||_{V^*}^{p'} = 0$. Mostraremos agora que $t^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$ e $\sup_{t\in[0,T]} t\varphi(u(t)) < \infty$. De fato, lembremos primeiramente que

$$-2\int_0^T t\left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt \leq 0.$$

Agora, por (3.29) temos

$$\begin{aligned} & t\varphi(u_n(t)) \leq -2\int_0^T t\left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt + 2\int_0^T \varphi(u_n(\tau))d\tau + 2\mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)\sup_{t\in[0,T]} t||f_n(t)||_{V^*}^{p'} \\ + \;& \frac{C_1}{C_3}T\sup_{t\in[0,T]}||u_n(t)||_H^2 + 2\left(\int_0^T ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^T ||u_n(\tau)||_V^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{C_2}{C_3}T \\ + \;& 2\left(\int_0^T ||u_n(\tau)||_V^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T \left|\left|\tau\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \leq 2\int_0^T \varphi(u_n(\tau))d\tau + \frac{C_2}{C_3}T \\ + \;& 2\mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)\sup_{t\in[0,T]} t||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{C_1}{C_3}T\sup_{t\in[0,T]}||u_n(t)||_H^2 + 2||f_n||_{L^{p'}(0,T;V^*)}||u_n||_{L^p(0,T;V)} \\ + \;& 2||u_n||_{L^p(0,T;V)}\left|\left|t\frac{df_n}{dt}\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)} \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, como u_n é limitada em $L^p(0,T;V)$, $\varphi(u_n(t))$ é limitada em $L^1(0,T)$, f_n e $t\dfrac{df_n}{dt}$ são limitadas em $L^{p'}(0,t;V^*)$ e que

$$\begin{aligned} t||f_n(t)||_{V^*}^{p'} &\leq \int_0^t ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + p'\left(\int_0^T ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{p'-1}{p'}} \left(\int_0^T \left|\left|\tau\frac{d}{d\tau}f_n(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= ||f_n||_{L^{p'}(0,T;V^*)} + p'||f_n||_{L^{p'}(0,T;V^*)}^{p'-1} \left|\left|t\frac{df_n}{dt}\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)} \leq K \end{aligned}$$

q.t.p $t \in]0,T[$ e todo $n \in \mathbb{N}$ concluímos que $t\varphi(u_n(t)) \leq C$ e, portanto,

$$\sup_{t\in[0,T]} t\varphi(u_n(t)) \leq C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $u_n \to u$ em $C([0,T];H)$ temos que $u_n(t) \to u(t)$ para cada $t \in [0,T]$. Pela semicontinuidade inferior de φ decorre que,

$$\varphi(u(t)) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n(t))$$

ou de forma equivalente

$$t\varphi(u(t)) \leq \liminf_{n\to\infty} t\varphi(u_n(t)) < \infty.$$

Logo, $\sup\limits_{t\in[0,T]} t\varphi(u(t)) < \infty$. Agora lembrando que $-\dfrac{1}{2}t\varphi(u_n(t)) \leq 0$ obtemos, novamente de (3.29)

$$\begin{aligned} &\int_0^T t\left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt \leq -\frac{1}{2}t\varphi(u_n(t)) + \int_0^T \varphi(u_n(\tau))d\tau + \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)\sup_{t\in[0,T]} t||f_n(t)||_{V^*}^{p'} \\ &+ \frac{C_1}{2C_3}T\sup_{t\in[0,T]}||u_n(t)||_H^2 + \left(\int_0^T ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^T ||u_n(\tau)||_V^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{C_2}{2C_3}T \\ &+ \left(\int_0^T ||u_n(\tau)||_V^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T \left|\left|\tau\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \int_0^T \varphi(u_n(\tau))d\tau + \frac{C_2}{C_3}T \\ &+ \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)\sup_{t\in[0,T]} t||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{C_1}{2C_3}T\sup_{t\in[0,T]}||u_n(t)||_H^2 + ||f_n||_{L^{p'}(0,T;V^*)}||u_n||_{L^p(0,T;V)} \\ &+ ||u_n||_{L^p(0,T;V)}\left|\left|t\frac{df_n}{dt}\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)} \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelos mesmos argumentos apresentados anteriormente concluímos que

$$\left|\left|t^{\frac{1}{2}}\frac{du_n}{dt}\right|\right|_{L^2(0,T;H)}^2 = \int_0^T t\left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt \leq C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $t^{\frac{1}{2}}\dfrac{du_n}{dt} \in L^2(0,T;H)$. Como $u_n \to u$ em $C([0,T];H)$ temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\left|t^{\frac{1}{2}}\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 &= \lim_{n\to\infty}\left\langle t^{\frac{1}{2}}\frac{du_n}{dt}(t), t^{\frac{1}{2}}\frac{du_n}{dt}(t)\right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\langle t^{\frac{1}{2}}\lim_{x\to t}\frac{u_n(x)-u_n(t)}{x-t}, t^{\frac{1}{2}}\lim_{x\to t}\frac{u_n(x)-u_n(t)}{x-t}\right\rangle \\
&= \left\langle t^{\frac{1}{2}}\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to t}\frac{u_n(x)-u_n(t)}{x-t}, t^{\frac{1}{2}}\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to t}\frac{u_n(x)-u_n(t)}{x-t}\right\rangle \\
&= \left\langle t^{\frac{1}{2}}\lim_{x\to t}\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(x)-u_n(t)}{x-t}, t^{\frac{1}{2}}\lim_{x\to t}\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(x)-u_n(t)}{x-t}\right\rangle \\
&= \left\langle t^{\frac{1}{2}}\lim_{x\to t}\frac{u(x)-u(t)}{x-t}, t^{\frac{1}{2}}\lim_{x\to t}\frac{u(x)-u(t)}{x-t}\right\rangle \\
&= \left\langle t^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dt}(t), t^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dt}(t)\right\rangle = \left|\left|t^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dt}(t)\right|\right|_H^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^T \left|\left|t^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt = \int_0^T \lim_{n\to\infty}\left|\left|t^{\frac{1}{2}}\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt$$

e pelo Lema de Fatou

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|\left|t^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt &= \int_0^T \lim_{n\to\infty}\left|\left|t^{\frac{1}{2}}\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt = \int_0^T \liminf_{n\to\infty}\left|\left|t^{\frac{1}{2}}\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\int_0^T \left|\left|t^{\frac{1}{2}}\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt \leq C
\end{aligned}$$

e portanto $t^{\frac{1}{2}}\dfrac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$. Vamos mostrar agora que

(i) $t^{\frac{1}{p}}u \in L^\infty(0,T;V) \cap C([0,T];V_w)$;

(ii) $t^{\frac{1}{p'}}g \in L^\infty(0,T;V^*)$;

(iii) $t^{\frac{1}{p'}}\dfrac{du}{dt} \in L^\infty(0,T;V^*)$.

onde$g(t) = f(t) - \dfrac{du}{dt}(t)$. De fato, decorre de (3.3) e $\sup_{t\in[0,T]} t\varphi(u(t)) < \infty$ que

$$\begin{aligned}
||t^{\frac{1}{p}}u(t)||_V^p = t||u(t)||_V^p &\leq t\left(C_1||u(t)||_H^2 + C_2 + C_3\varphi(u(t))\right) \\
&= C_1t||u(t)||_H^2 + C_2t + C_3t\varphi(u(t)) \\
&\leq C_1T||u(t)||_H^2 + C_2T + C_3\sup_{t\in[0,T]} t\varphi(u(t)) \\
&\leq C_1T\sup_{t\in[0,T]}||u_n(t)||_H^2 + C_2T + C_3\sup_{t\in[0,T]} t\varphi(u(t)) < \infty
\end{aligned}$$

q.t.p. $t \in]0,T[$. Portanto $t^{\frac{1}{p}}u \in L^\infty(0,T;V)$. Para mostrar que a função

$$t \mapsto t^{\frac{1}{p}} u(t)$$

é fracamente contínua em [0,T] basta ver que como $u(t) \in C([0,T];H)$ então $u(t)$ é contínua restringindo-se o contradomínio $V \subset H$. Como todo aberto da topologia fraca é um aberto da topologia forte segue que $t^{\frac{1}{p}} u(t)$ é fracamente contínua em [0,T] e (i) segue. Observe que

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{p}}} t^{\frac{1}{p}} u(t) = u(t) \in C(]0,T];V_w).$$

Para mostrar (ii) decorre de (3.4) que

$$||t^{\frac{1}{p'}} g(t)||_{V^*}^{p'} = t||g(t)||_{V^*}^{p'} \leq l(||u(t)||_H)\{t\varphi(u(t)) + t\}$$

e como $||u(t)||_H \leq \sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_H = C < \infty$ temos que $l(||u(t)||_H) \leq l(C)$. Sendo assim,

$$||t^{\frac{1}{p'}} g(t)||_{V^*}^{p'} \leq l(C)\{ \sup_{t\in[0,T]} t\varphi(u(t)) + T\} < \infty$$

e, portanto, $t^{\frac{1}{p'}} g \in L^\infty(0,T;V^*)$. Para provar (iii) observemos que

$$\left|\left| t^{\frac{1}{p'}} \frac{du}{dt} \right|\right|_{V^*} = \left|\left| t^{\frac{1}{p'}} f(t) - t^{\frac{1}{p'}} g(t) \right|\right|_{V^*} \leq \left|\left| t^{\frac{1}{p'}} f(t) \right|\right|_{V^*} + \left|\left| t^{\frac{1}{p'}} g(t) \right|\right|_{V^*}$$

e como $t||f(t)||_{V^*}^{p'} \in L^\infty(0,T;V^*)$ e $t^{\frac{1}{p'}} g \in L^\infty(0,T;V^*)$ segue que $\left|\left| t^{\frac{1}{p'}} \frac{d}{dt} u \right|\right|_{V^*} < \infty$ e (iii) está provada. ■

Corolário 3.2.1 *Sejam (3.3) e (3.4) satisfeitas. Então para cada $u_o \in D(\varphi)$ e $f \in W^{1,p'}(0,T;V^*)$ a solução u de (3.1) satisfaz*

(i) $u \in C([0,T];V_w) \cap C([0,T];H) \cap W^{1,p'}(0,T;V^*)$;

(ii) $u(t) \in D(\varphi)$, $\forall t \geq 0$ *e* $\sup_{t\in[0,T]} \varphi(u(t)) < \infty$;

(iii) $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V^*)$.

Demonstração: Quando $u_o \in D(\varphi) \subset \overline{D(\varphi)}^H$ e $f \in W^{1,p'}(0,T;V^*)$ basta tomar a sequência $(u_{o_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset D(\varphi)$ como $u_{o_n} := u_o$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e sendo $f \in L^{p'}(0,T;V^*)$ com $\frac{df}{dt} \in L^{p'}(0,T;V^*)$ podemos tomar uma sequência $f_n \in C^\infty([0,T];H)$ tal que $f_n \to f$ em $L^{p'}(0,T;V^*)$ e $\frac{df_n}{dt} \to \frac{df}{dt}$ em $L^{p'}(0,T;V^*)$. Multiplicando (3.8) por $\frac{du_n}{dt}(t)$ obtemos

$$\left|\left| \frac{du_n}{dt}(t) \right|\right|_H^2 + \left\langle g_n(t), \frac{du_n}{dt}(t) \right\rangle_{V^*,V} = \left\langle f_n(t), \frac{du_n}{dt}(t) \right\rangle_{V^*,V}$$

e pelo Lema (2.3.1) concluímos que

$$\begin{aligned} \left|\left| \frac{du_n}{dt}(t) \right|\right|_H^2 + \frac{d\varphi_H(u_n)}{dt}(t) &= \left\langle f_n(t), \frac{du_n}{dt}(t) \right\rangle_{V^*,V} + \left\langle \frac{df_n}{dt}(t), u_n(t) \right\rangle_{V^*,V} \\ - \left\langle \frac{df_n}{dt}(t), u_n(t) \right\rangle_{V^*,V} &= \frac{d}{dt}\langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} - \left\langle \frac{df_n}{dt}(t), u_n(t) \right\rangle_{V^*,V} \end{aligned}$$

q.t.p $t \in]0,T[$. Integrando esta expressão no intervalo]0,t[temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left|\left|\frac{du_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + \int_0^t \frac{d}{d\tau}\varphi_H(u_n(\tau))d\tau = \int_0^t \frac{d}{d\tau}\langle f_n(\tau),u_n(\tau)\rangle_{V^*,V}d\tau \\
- &\int_0^t \left\langle \frac{df_n}{d\tau}(\tau),u_n(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau
\end{aligned}$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo segue que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left|\left|\frac{du_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + \varphi_H(u_n(t)) - \varphi_H(u_o) = \langle f_n(t),u_n(t)\rangle_{V^*,V} - \langle f_n(0),u_o\rangle_{V^*,V} \\
- &\int_0^t \left\langle \frac{df_n}{d\tau}(\tau),u_n(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau \leq \int_0^T \left|\left\langle \frac{df_n}{d\tau}(\tau),u_n(\tau)\right\rangle_{V^*,V}\right| d\tau + |\langle f_n(t),u_n(t)\rangle_{V^*,V}| \\
+ &|\langle f_n(0),u_o\rangle_{V^*,V}| \leq ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V + ||f_n(0)||_{V^*}||u_o||_V \\
+ &\int_0^T \left|\left|\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*} ||u_n(\tau)||_V d\tau \leq \left(\int_0^T \left|\left|\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^T ||u_n(\tau)||_V^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \\
+ &||f_n(0)||_{V^*}||u_o||_V + ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Pelo Lema 3.1.1 com $k = \dfrac{1}{2C_3}$ e (3.27) tem-se

$$\begin{aligned}
||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V &\leq \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{1}{2C_3}||u_n(t)||_V^p \\
&\leq \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + T\left\{\frac{C_1}{2C_3}||u_n(t)||_H^2 + \frac{C_2}{2C_3}\right\} + \frac{1}{2}\varphi_H(u_n(t))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
||f_n(0)||_{V^*}||u_o||_V &\leq \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)||f_n(0)||_{V^*}^{p'} + \frac{1}{2C_3}||u_o||_V^p \\
&\leq \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)||f_n(0)||_{V^*}^{p'} + T\left\{\frac{C_1}{2C_3}||u_o||_H^2 + \frac{C_2}{2C_3}\right\} + \frac{1}{2}\varphi(u_o).
\end{aligned}$$

Observando que $W^{1,p'}(0,T;V^*)$ está imerso em $C([0,T];V^*)$ vamos mostrar que

(a) $u \in C([0,T];V_w) \cap W^{1,2}(0,T;H) \cap W^{1,\infty}(0,T;V^*)$;

(b) $g \in L^\infty(0,T;V^*)$;

(c) $\sup\limits_{t\in[0,T]} \varphi(u(t)) < \infty$,

onde$g(t) = f(t) - \dfrac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi(u(t))$. De fato, como $u(t) \in C([0,T];H)$ temos que $u(t)$ é contínua restringindo-se o contradomínio $V \subset H$. Como todo aberto da topologia fraca é um aberto da topologia forte segue que $u(t)$ é fracamente contínua e portanto $u(t) \in C([0,T];V_w)$. Novamente, sendo $u(t) \in C([0,T];H)$, ou seja, $u(t)$ contínua no compacto [0,T] temos que $||u(t)||_H \leq C$. Sendo assim,

$$||u||_{L^2(0,T;H)}^2 = \int_0^T ||u(t)||_H^2 dt \leq \int_0^T C^2 dt = C^2 T$$

e isso nos dá que $||u||_{L^2(0,T;H)} < \infty$ e, portanto, $u \in L^2(0,T;H)$. Agora como u_n é limitada em $L^p(0,T;V)$ e $C([0,T];H)$ temos que $\left(\int_0^T ||u_n(\tau)||_V^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} < K_1$ e $\sup_{t\in[0,T]} ||u_n(t)||_H^2 < K_2$. Como $f_n \to f$, $\frac{df_n}{dt} \to \frac{df}{dt}$ em $L^{p'}(0,T;V^*)$ concluímos que $||f_n(t)||_{V^*}^{p'} < K_3$ e $\left(\int_0^T \left|\left|\frac{df_n}{dt}(t)\right|\right|_{V^*}^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} < K_4$. Lembrando que $\varphi_H(u_n(t)) \geq 0$, isto é, $-\varphi_H(u_n(t)) \leq 0$, então de (3.31) segue

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 \leq -\varphi_H(u_n(t)) + \varphi_H(u_o) + \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right) ||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{1}{2}\varphi_H(u_n(t)) \\
+ \;& T\left\{\frac{C_1}{2C_3}\sup_{t\in[0,T]} ||u_n(t)||_H^2 + \frac{C_2}{2C_3}\right\} + \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right) ||f_n(0)||_{V^*}^{p'} + \frac{1}{2}\varphi_H(u_o) \\
+ \;& \left(\int_0^T \left|\left|\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^T ||u_n(\tau)||_V^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} + T\left\{\frac{C_1}{2C_3}||u_o||_H^2 + \frac{C_2}{2C_3}\right\} \\
\leq \;& T\left\{\frac{C_1}{2C_3}||u_o||_H^2 + \frac{C_2}{2C_3}\right\} + 2K_3\mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right) + T\left\{K_2\frac{C_1}{2C_3} + \frac{C_2}{2C_3}\right\} + \frac{3}{2}\varphi_H(u_o) \\
+ \;& K_1K_4 = K_5 < \infty.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Agora, como $u_n \to u$ em $C([0,T];H)$ tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 &= \lim_{n\to\infty}\left\langle \frac{du_n}{dt}(t), \frac{du_n}{dt}(t)\right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\langle \lim_{x\to t}\frac{u_n(x)-u_n(t)}{x-t}, \lim_{x\to t}\frac{u_n(x)-u_n(t)}{x-t}\right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to t}\frac{u_n(x)-u_n(t)}{x-t}, \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to t}\frac{u_n(x)-u_n(t)}{x-t}\right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{x\to t}\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(x)-u_n(t)}{x-t}, \lim_{x\to t}\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(x)-u_n(t)}{x-t}\right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{x\to t}\frac{u(x)-u(t)}{x-t}, \lim_{x\to t}\frac{u(x)-u(t)}{x-t}\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{du}{dt}(t), \frac{du}{dt}(t)\right\rangle = \left|\left|\frac{du}{dt}(t)\right|\right|_H^2
\end{aligned}$$

e assim $\int_0^T \left|\left|\frac{du}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt = \int_0^T \lim_{n\to\infty}\left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt$. Logo, pelo Lema 2.1.4

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left|\left|\frac{du}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt = \int_0^T \lim_{n\to\infty}\left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt = \int_0^T \liminf_{n\to\infty}\left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt \\
\leq \;& \liminf_{n\to\infty}\int_0^T \left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt \leq \liminf_{n\to\infty} K_5 = K_5 < \infty.
\end{aligned}$$

Logo $\left|\left|\frac{du}{dt}\right|\right|_{L^2(0,T;H)} \leq \sqrt{K_5} < \infty$, concluindo que $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$. Com isso, podemos concluir que $u \in W^{1,2}(0,T;H)$. Para finalizar a demonstração de (a) vamos provar (c) e (b) nesta ordem. De (3.32) obtemos

$$
\begin{aligned}
\varphi_H(u_n(t)) &\le -2\int_0^T \left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt + 4k_3\mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right) + 2T\left\{\frac{C_1}{2C_3}||u_o||_H^2 + \frac{C_2}{2C_3}\right\} \\
&+ 2T\left\{k_2\frac{C_1}{2C_3} + \frac{C_2}{2C_3}\right\} + 2k_1k_4 < \infty
\end{aligned}
$$

e como $u_n \to u$ em $C([0,T];H)$ temos que $u_n(t) \to u(t)$, $\forall t \in [0,T]$. Assim, pela semicontinuidade inferior de φ

$$\varphi(u(t)) \le \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n(t)) < \infty$$

e, portanto, $\sup_{t\in[0,T]} \varphi(u(t)) < \infty$. Para mostrar (b), por (3.4) temos

$$||g(t)||_{V^*}^{p'} \le l(||u(t)||_H)\{\varphi(u(t)) + 1\}$$

e devido $u \in C([0,T];H)$ sabemos que $||u(t)||_H \le C$ para todo $t \in [0,T]$. Notando que $\varphi(u(t)) \le \sup_{t\in[0,T]} \varphi(u(t))$ e como l é uma função não decrescente temos que $l(||u(t)||_H) \le l(C)$. Logo

$$||g(t)||_{V^*}^{p'} \le l(C)\left\{\sup_{t\in[0,T]} \varphi(u(t)) + 1\right\} < \infty.$$

Portanto $g \in L^\infty(0,T;V^*)$. Para completar a demonstração de (a), precisamos mostrar que $u \in W^{1,\infty}(0,T;V^*)$. Para isso, mostremos primeiramente que $f \in L^\infty(0,T;V^*)$. De fato, por (3.30) com t substituído por 1 temos

$$
\begin{aligned}
||f(t)||_{V^*}^{p'} &\le \int_0^t ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + p'\left(\int_0^t ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{p'-1}{p'}} \left(\int_0^t \left|\left|\frac{df}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\le \int_0^T ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + p'\left(\int_0^T ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{p'-1}{p'}} \left(\int_0^T \left|\left|\frac{df}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= ||f||_{L^{p'}(0,T;V^*)}^{p'} + p'||f||_{L^{p'}(0,T;V^*)}^{p'-1} \left|\left|\frac{df}{dt}\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)}
\end{aligned}
$$

q.t.p. $t \in]0,T[$, logo $f \in L^\infty(0,T;V^*)$. Mostraremos agora que $u \in L^\infty(0,T;V^*)$. Como $H \subset V^*$ com imersão contínua temos que $||u(t)||_{V^*} \le K||u(t)||_H$, para todo $t \in [0,T]$. Assim

$$||u(t)||_{V^*} \le K||u(t)||_H \le K \sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_H < \infty, \forall t \in [0,T]$$

e, portanto, $u \in L^\infty(0,T;V^*)$. Finalmente, como $f \in L^\infty(0,T;V^*)$ e por (b) temos

$$\left|\left|\frac{du}{dt}\right|\right|_{V^*} = ||f(t) - g(t)||_{V^*} \le ||f(t)||_{V^*} + ||g(t)||_{V^*}$$

e isso nos fornece que $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0,T;V^*)$ e portanto (a) vale e o corolário está demonstrado. ■

3.3 Algumas observações e extensões dos teoremas de existência e regularidade do problema de Cauchy

Nesta seção veremos que algumas hipóteses do teorema de existência e regularidade vistos anteriormente podem ser enfraquecidas.

Observação 3.3.1 *No Teorema 3.2.1 não é necessário assumir que (3.4) seja satisfeita.*

Com efeito, (3.29) garante que $t^{\frac{1}{2}}\dfrac{du_n}{dt}(t)$ é limitada em $L^2(0,T;H)$. Como

$$||t^{\frac{1}{2}}f_n||_{L^2(0,T;V^*)} \leq ||tf_n||^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(0,T;V^*)}||f_n||^{\frac{1}{2}}_{L^1(0,T;V^*)} < \infty$$

pois $tf_n \in C^\infty(0,T;H)$ e $f_n \in L^\infty(0,T;V^*)$ segue que

$$t^{\frac{1}{2}}g_n = t^{\frac{1}{2}}\left(f_n - \frac{du_n}{dt}\right) \in L^2(0,T;V^*).$$

Neste caso apenas não podemos concluir que $t^{\frac{1}{p'}}\dfrac{du}{dt} \in L^\infty(0,T;V^*)$.

Observação 3.3.2 *A função $h:[0,T]\to H$ dada por $h(t) = ||u(t)||^2_H$ é absolutamente contínua, onde u é a solução de (3.1) dada no Teorema 3.1.1.*

De fato, seja $\varepsilon > 0$ e $\{(x_i,y_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ uma sequência de intervalos disjuntos contidos em [0,T]. Tome

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2\left|\left|\dfrac{du}{dt}\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)}||u||_{L^p(0,T;V)}}$$

e teremos que se $\displaystyle\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta$ então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |h(y_i)-h(x_i)| &= \sum_{i=1}^n \left|||u(y_i)||^2_H - ||u(x_i)||^2_H\right| = \sum_{i=1}^n 2\left|\int_{x_i}^{y_i}\left\langle\frac{du}{d\tau}(\tau),u(\tau)\right\rangle d\tau\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n 2\int_{x_i}^{y_i}\left|\left\langle\frac{du}{d\tau}(\tau),u(\tau)\right\rangle\right| d\tau \leq \sum_{i=1}^n 2\int_{x_i}^{y_i}\left|\left|\frac{du}{dt}\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)}||u||_{L^p(0,T;V)}d\tau \\
&= \sum_{i=1}^n 2(y_i-x_i)\left|\left|\frac{du}{dt}\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)}||u||_{L^p(0,T;V)} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Observe que se $||u||_{L^p(0,T;V)} = 0$ então $u = 0$ q.t.p. $t \in]0,T[$, logo $h(t) = 0$ e portanto h é absolutamente contínua. Se $\left|\left|\dfrac{du}{dt}\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)} = 0$ então $\dfrac{du}{dt} = 0$ q.t.p. $t \in]0,T[$ e portanto $u(t)$ é constante e assim $h(t)$ é absolutamente contínua.

Observação 3.3.3 *Se u^i $(i=1,2)$ são soluções de (3.1) com f e u_o substituídos por f^i e u^i_o então*

$$||u^1(t)-u^2(t)||^2_H \leq ||u^1_o - u^2_o||^2_H + \widetilde{C}\left(\int_0^t ||f^1(s)-f^2(s)||^{p'}_{V^*}ds\right)^{\frac{1}{p'}},$$

onde $\widetilde{C}$ depende de T e K.

Realmente, seja u^i $(i=1,2)$ soluções de (3.1) com f e u_o substituídos por f^i e u_o^i. Assim como na demosntração do Teorema 3.1.1 definimos $u_n^i(t)$ as soluções das equações aproximadas (3.8) com f_n e u_{o_n} substituídas por f_n^i e $u_{o_n}^i$. Multiplicando a expressão

$$\frac{d}{dt}(u_n^1(t)-u_n^2(t))+\partial\varphi_H(u_n^1(t))-\partial\varphi_H(u_n^2(t))\ni f_n^1(t)-f_n^2(t) \text{ em } H, 0<t<T$$

por $u_n^1(t)-u_n^2(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d}{dt}(u_n^1(t)-u_n^2(t)), u_n^1(t)-u_n^2(t)\right\rangle_{V^*,V} + \langle g_n^1(t)-g_n^2(t), u_n^1(t)-u_n^2(t))\rangle_{V^*,V} \\ = \ & \langle f_n^1(t)-f_n^2(t), u_n^1(t)-u_n^2(t)\rangle_{V^*,V} \end{aligned}$$

logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n^1(t)-u_n^2(t)||_H^2+\langle g_n^1(t)-g_n^2(t), u_n^1(t)-u_n^2(t)\rangle_{V^*,V}=\langle f_n^1(t)-f_n^2(t), u_n^1(t)-u_n^2(t)\rangle_{V^*,V}$$

e como $\partial\varphi_H$ é monótona, isto é, $\langle g_n^1(t)-g_n^2(t), u_n^1(t)-u_n^2(t)\rangle_{V^*,V}\geq 0$ temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n^1(t)-u_n^2(t)||_H^2\leq\langle f_n^1(t)-f_n^2(t), u_n^1(t)-u_n^2(t)\rangle_{V^*,V}$$

q.t.p. $t\in]0,T[$. Integrando a desigualdade anterior de 0 até t obtemos

$$\int_0^t\frac{1}{2}\frac{d}{ds}||u_n^1(s)-u_n^2(s)||_H^2 ds\leq\int_0^t\langle f_n^1(s)-f_n^2(s), u_n^1(s)-u_n^2(s)\rangle_{V^*,V}ds,$$

donde

$$\frac{1}{2}\left(||u_n^1(t)-u_n^2(t)||_H^2-||u_n^1(0)-u_n^2(0)||_H^2\right)\leq\int_0^t\langle f_n^1(s)-f_n^2(s), u_n^1(s)-u_n^2(s)\rangle_{V^*,V}ds,$$

logo

$$\begin{aligned} ||u_n^1(t)-u_n^2(t)||_H^2 &\leq ||u_{o_n}^1-u_{o_n}^2||_H^2+2\int_0^t\langle f_n^1(s)-f_n^2(s), u_n^1(s)-u_n^2(s)\rangle_{V^*,V}ds \\ &\leq ||u_{o_n}^1-u_{o_n}^2||_H^2+2\int_0^t||f_n^1(s)-f_n^2(s)||_{V^*}||u_n^1(s)-u_n^2(s)||_V ds. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Sendo $u_n^i\to u^i$ em $C([0,T];H)$ $(i=1,2)$, e u_n^i limitada em $L^p(0,T;V)$, isto é

$$\left(\int_0^T||u_n^i(t)||_V^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\leq K$$

segue que $||u_n^i(t)||_V$ é limitada em $L^p(0,T)$. Fazendo $n\to\infty$ em (3.33) e notando que $||u_n^1(s)-u_n^2(s)||_{L^p(0,T)} \leq ||u_n^1(s)||_{L^p(0,T)}+||u_n^2(s)||_{L^p(0,T)} \leq K+K=2K$ obtemos

$$
\begin{aligned}
&||u^1(t)-u^2(t)||_H^2 \leq ||u_o^1-u_o^2||_H^2+2\lim_{n\to\infty}\int_0^t ||f_n^1(s)-f_n^2(s)||_{V^*}||u_n^1(s)-u_n^2(s)||_V ds\\
\leq\;& ||u_o^1-u_o^2||_H^2+2\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^t ||f_n^1(s)-f_n^2(s)||_{V^*}^{p'}ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^T ||u_n^1(s)-u_n^2(s)||_V^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\\
=\;& 2\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^t ||f_n^1(s)-f^1(s)+f^1(s)-f^2(s)+f^2(s)-f_n^2(s)||_{V^*}^{p'}ds\right)^{\frac{1}{p'}}||u_n^1(s)-u_n^2(s)||_{L^p(0,T)}\\
+\;& ||u_o^1-u_o^2||_H^2 \leq ||u_o^1-u_o^2||_H^2+4K\lim_{n\to\infty}||f_n^1-f^1+f^1-f^2+f^2-f_n^2||_{L^{p'}(0,t;V^*)}\\
\leq\;& 4K\left(\lim_{n\to\infty}||f_n^1-f^1||_{L^{p'}(0,t;V^*)}+||f^1-f^2||_{L^{p'}(0,t;V^*)}+\lim_{n\to\infty}||f^2-f_n^2||_{L^{p'}(0,t;V^*)}\right)\\
+\;& ||u_o^1-u_o^2||_H^2
\end{aligned}
$$

e como $\lim_{n\to\infty}||f_n^1-f^1||_{L^{p'}(0,t;V^*)}=0=\lim_{n\to\infty}||f^2-f_n^2||_{L^{p'}(0,t;V^*)}$ segue que

$$
\begin{aligned}
||u^1(t)-u^2(t)||_H^2 &\leq ||u_o^1-u_o^2||_H^2+4K||f^1-f^2||_{L^{p'}(0,t;V^*)}\\
&= ||u_o^1-u_o^2||_H^2+4K\left(\int_0^t ||f^1(s)-f^2(s)||_{V^*}^{p'}ds\right)^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}
$$

logo,

$$
||u^1(t)-u^2(t)||_H^2 \leq ||u_o^1-u_o^2||_H^2+\widetilde{C}\left(\int_0^t ||f^1(s)-f^2(s)||_{V^*}^{p'}ds\right)^{\frac{1}{p'}},
$$

onde $\widetilde{C}$ depende de T e K.

Observação 3.3.4 *Para cada $u_o\in\overline{D(\varphi)}^H$ e $f\in L^{p'}(0,T;V^*)$ com $t\dfrac{df}{dt}\in L^{p'}(0,T;V^*)$ a solução forte u de (3.1) satisfaz $\varphi(u(\cdot))\in C(]0,T])$.*

Para ver isto, defina

$$
\varphi^t(v) := \varphi(v)-\langle f(t),v\rangle_{V^*,V},\ v\in V.
$$

Mostremos agora que $\varphi^t\in\Phi(V)$ e $D(\varphi^t)=D(\varphi)$ $\forall t\in[0,T]$. Com efeito, vamos mostrar primeiramente que φ^t é convexa. Sejam $x,y\in V$ e $\lambda\in[0,1]$. Então para $t\in[0,T]$ e pela convexidade de φ

$$
\begin{aligned}
\varphi^t(\lambda x+(1-\lambda)y) &= \varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)-\langle f(t),\lambda x+(1-\lambda)y\rangle_{V^*,V}\\
&\leq \lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)-(\langle f(t),\lambda x\rangle_{V^*,V}+\langle f(t),(1-\lambda)y\rangle_{V^*,V})\\
&= \lambda\varphi(x)-\lambda\langle f(t),x\rangle_{V^*,V}+(1-\lambda)\varphi(y)-(1-\lambda)\langle f(t),y\rangle_{V^*,V}\\
&= \lambda(\varphi(x)-\langle f(t),x\rangle_{V^*,V})+(1-\lambda)(\varphi(y)-\langle f(t),y\rangle_{V^*,V})\\
&= \lambda\varphi^t(x)+(1-\lambda)\varphi^t(y).
\end{aligned}
$$

Como φ é própria, isto é, existe $v_o\in D(\varphi)$. Logo, para $t\in[0,T]$ temos

$$
\varphi^t(v_o)=\varphi(v_o)-\langle f(t),v_o\rangle_{V^*,V}<\infty
$$

e isso nos dá que $v_o \in D(\varphi^t)$ e portanto φ^t é própria para $t \in [0,T]$. Mostremos agora que φ^t é semicontínua inferiormente. Seja $(u_n) \subset V$ uma sequência convergente para u em V, então pela semicontinuidade inferior de φ

$$\begin{aligned}
\varphi^t(u) &= \varphi(u) - \langle f(t), u\rangle_{V^*,V} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n) - \langle f(t), u\rangle_{V^*,V} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n) - \lim_{n\to\infty} \langle f(t), u_n\rangle_{V^*,V} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \{\varphi(u_n) - \langle f(t), u_n\rangle_{V^*,V}\} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \varphi^t(u_n)
\end{aligned}$$

para $t \in [0,T]$. Logo $\varphi^t \in \Phi(V)$ para todo $t \in [0,T]$. Seja agora $v_o \in D(\varphi)$, logo $\varphi(v_o) < \infty$. Sendo assim $\varphi^t(v_o) = \varphi(v_o) - \langle f(t), v_o\rangle_{V^*,V} < \infty$ e portanto $v_o \in D(\varphi^t)$ para $t \in [0,T]$. Por outro lado, seja $v_o \in D(\varphi^t)$, então $\varphi^t(v_o) = \varphi(v_o) - \langle f(t), v_o\rangle_{V^*,V} < \infty$, logo $\varphi(v_o) < \infty$ e assim $v_o \in D(\varphi)$.

Vamos definir agora φ^t_H como no Teorema 3.1.1, ou seja

$$\varphi^t_H(u) = \begin{cases} \varphi^t(u), & u \in V \\ \infty, & u \in H - V \end{cases}$$

e como no Teorema 3.1.1 vemos que $\varphi^t_H \in \Phi(H)$ para cada $t \in [0,T]$. Temos também que φ^t_H satisfaz a condição de suavidade $(A\varphi^t)$ com $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ introduzida em [10] e [11] para todo $t \in [\delta, T]$ com δ arbitrário positivo. φ^t satisfaz também $\partial\varphi^t(v) = \partial\varphi(v) - f(t)$ para $t \in [0,T]$. Com efeito, seja $h \in \partial\varphi^t(v)$, logo $h \in V^*$ e $\varphi^t(w) - \varphi^t(v) \geq \langle h, w - v\rangle_{V^*,V}$ para todo $w \in D(\varphi^t) = D(\varphi)$. Seja $z \in D(\varphi^t)$, então

$$\begin{aligned}
\varphi(z) - \varphi(v) &= \varphi^t(z) - \langle f(t), z\rangle_{V^*,V} - \big(\varphi^t(v) + \langle f(t), v\rangle_{V^*,V}\big) \\
&= \varphi^t(z) - \varphi^t(v) + \langle f(t), z\rangle_{V^*,V} - \langle f(t), v\rangle_{V^*,V} \\
&= \varphi^t(z) - \varphi^t(v) + \langle f(t), z - v\rangle_{V^*,V} \\
&\geq \langle h, z - v\rangle_{V^*,V} + \langle f(t), z - v\rangle_{V^*,V} \\
&= \langle h + f(t), z - v\rangle_{V^*,V}.
\end{aligned}$$

Considerando $g = h + f(t)$ temos então que $h = g - f(t) \in V^*$ e $\varphi(z) - \varphi(v) \geq \langle g, z - v\rangle_{V^*,V}$ qualquer que seja $z \in D(\varphi^t) = D(\varphi)$, logo $\partial\varphi^t(v) \subset \partial\varphi(v) - f(t)$ para $t \in [0,T]$. Por outro lado, seja $h \in \partial\varphi(v) - f(t)$, então $h = g - f(t)$ com $g \in V^*$ e $\varphi(w) - \varphi(v) \geq \langle g, w - v\rangle_{V^*,V}$ para todo $w \in D(\varphi)$. Note que

$$\begin{aligned}
\varphi^t(w) - \varphi^t(v) &= \varphi(w) - \langle f(t), w\rangle_{V^*,V} - (\varphi(v) - \langle f(t), v\rangle_{V^*,V}) \\
&= \varphi(w) - \varphi(v) - \langle f(t), w\rangle_{V^*,V} + \langle f(t), v\rangle_{V^*,V} \\
&= \varphi(w) - \varphi(v) - \langle f(t), w - v\rangle_{V^*,V} \\
&\geq \langle g, w - v\rangle_{V^*,V} - \langle f(t), w - v\rangle_{V^*,V} \\
&= \langle g - f(t), w - v\rangle_{V^*,V}
\end{aligned}$$

qualquer que seja $w \in D(\varphi) = D(\varphi^t)$ e, portanto, $h \in \partial\varphi^t(v)$ e a igualdade segue. Pelo Teorema 3.2.1 segue que

(i) $\partial\varphi^t(u(t)) = \partial\varphi(u(t)) - f(t) \ni -\dfrac{du}{dt}$;

(ii) $t^{\frac{1}{2}}\dfrac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$.

Com efeito, como u é solução forte de (3.1) temos que

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t),$$

isto é, existe $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ tal que $\dfrac{du}{dt}(t) + g(t) = f(t)$, ou equivalentemente,

$$g(t) - f(t) = -\frac{du}{dt}(t).$$

Logo $-\dfrac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi(u(t)) - f(t) = \partial\varphi^t(u(t))$, isto prova (i). Agora (ii) segue diretamente do Teorema 3.2.1. Mostremos agora que $-\dfrac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi^t_H(u(t))$. Seja $w \in D(\varphi^t_H) = D(\varphi^t)$, como $-\dfrac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi^t(u(t))$ temos

$$\varphi^t(w) - \varphi^t(u(t)) \geq \left\langle -\frac{du}{dt}(t), w - u(t) \right\rangle_{V^*,V}$$

agora como

$$\varphi^t_H(w) - \varphi^t_H(u(t)) = \varphi^t(w) - \varphi^t(u(t)) \geq \left\langle -\frac{du}{dt}(t), w - u(t) \right\rangle_{V^*,V}$$

temos que $-\dfrac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi^t_H(u(t))$. Assim por [10, 11] temos que a função

$$t \mapsto \varphi^t(u(t)) = \varphi(u(t)) - \langle f(t), u(t)\rangle_{V^*,V}$$

é absolutamente contínua em]0,T]. Claramente temos que a função

$$t \mapsto \langle f(t), u(t)\rangle_{V^*,V}$$

é contínua em]0,T]. Pelo fato que $f \in C(]0,T];V^*)$ e $u \in C(]0,T];V_w)$ então para todo $s,t \in]0,T]$ temos

$$\begin{aligned}
& \lim_{s\to t}\langle f(t), u(t)\rangle_{V^*,V} - \langle f(s), u(s)\rangle_{V^*,V} = \lim_{s\to t}\langle f(t) - f(s), u(t)\rangle_{V^*,V} \\
+ \quad & \lim_{s\to t}\langle f(s), u(t) - u(s)\rangle_{V^*,V} = \left\langle \lim_{s\to t} f(t) - f(s), \lim_{s\to t} u(t) \right\rangle_{V^*,V} \\
+ \quad & \left\langle \lim_{s\to t} f(s), \lim_{s\to t} u(t) - u(s) \right\rangle_{V^*,V} = 0.
\end{aligned}$$

Com isso concluímos que $\varphi(u(\cdot)) \in C(]0,T])$. Mais ainda, repetindo os mesmos argumentos quando $u_o \in D(\varphi)$ e $f \in W^{1,p'}(0,T;V^*)$ temos que $\varphi(u(\cdot)) \in C([0,T])$.

Observação 3.3.5 *Assuma que exista uma aplicação contínua*

$$\mathcal{N} : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\to [0,+\infty[\tag{3.34}$$

tal que $||\cdot||_\varphi := \mathcal{N}(\varphi(\cdot), ||\cdot||_H)$ *seja uma norma em* V *equivalente a norma usual de* V *e que* $(V, ||\cdot||_\varphi)$ *seja uniformemente convexo. Então para cada* $u_o \in \overline{D(\varphi)}^H$ *e* $f \in L^{p'}(0,T;V^*)$ *com* $t\dfrac{df}{dt} \in L^{p'}(0,T;V^*)$ *a solução forte de (3.1) pertence a* $C(]0,T];V)$.

De fato, pelas Observações 3.3.2 e 3.3.4 as funções

$$t \mapsto \varphi(u(t)) \text{ e } t \mapsto ||u(t)||_H$$

são contínuas em]0,T]. Então a função

$$t \mapsto ||u(t)||_\varphi = \mathcal{N}(\varphi(u(t)), ||u(t)||_H)$$

é contínua em]0,T]. Sendo $u \in C(]0,T];V_w)$ temos que $u(s) \rightharpoonup u(t)$ quando $s \to t$ em $(V, ||\cdot||_\varphi)$. Para ver isto seja $t_n, t \in]0,T]$ de forma que $t_n \to t$ quando $n \to \infty$ e $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ em $(V, ||\cdot||_V)$. Logo $||u(t_n)||_V$ é limitada e por (3.34) $u(t_n)$ é limitada em $(V, ||\cdot||_\varphi)$. Sendo $(V, ||\cdot||_\varphi)$ reflexivo podemos extrair uma subsequência n' de n de forma que $u(t_{n'}) \rightharpoonup \chi$ em $(V, ||\cdot||_\varphi)$ quando $n' \to \infty$. Como $(V, ||\cdot||_V)$ está imerso em H continuamente, (3.34) implica que $(V, ||\cdot||_\varphi)$ está imerso em H continuamente. Então podemos extrair uma subsequência n'' de n de forma que $u(t_{n''}) \rightharpoonup \chi$ em H quando $n'' \to \infty$ e $\chi = u(t)$. Como este argumento não depende da escolha da subsequência podemos deduzir que $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ em $(V, ||\cdot||_\varphi)$ quando $n \to \infty$. Usando a continuidade de $\mathcal{N}$, de $\varphi(u(t))$ e pelo fato de $u \in C([0,T];H)$ segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} ||u(t_n)||_\varphi &= \lim_{n\to\infty} \mathcal{N}(\varphi(u(t_n)), ||u(t_n)||_H) = \mathcal{N}(\lim_{n\to\infty} \varphi(u(t_n)), \lim_{n\to\infty} ||u(t_n)||_H) \\ &= \mathcal{N}(\lim_{n\to\infty} \varphi(u(t)), \lim_{n\to\infty} ||u(t)||_H) = ||u(t)||_\varphi \end{aligned}$$

e pelo Teorema 2.1.6 concluímos que $u(t_n) \to u(t)$ quando $n \to \infty$. Logo, como $||\cdot||_\varphi$ e $||\cdot||_V$ são equivalentes concluímos que $u \in C(]0,T];V)$. Podemos enfraquecer a condição (3.3) no Teorema 3.1.1. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.1 *Seja (3.4) satisfeita e assuma que existam constantes não-negativas C_1, C_2 e C_3 tais que*

$$||u||_V^p - C_1||u||_H^q - C_2 \le C_3\varphi(u) \tag{3.35}$$

para todo $u \in D(\varphi)$ com $q \in [0,2p]$. Então para $f \in L^r(0,T;V^*)$ com $r = \max\left\{p', \dfrac{2p}{2p-q}\right\}$ (se $q = 2p$ então $r = \infty$) e $u_o \in \overline{D(\varphi)}^H$ existe uma única solução forte do problema (3.1) satisfazendo

$$u \in L^p(0,T;V) \cap C([0,T];H) \cap W^{1,p'}(0,T;V^*),$$

a função $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ dada em (3.2) pertence a $L^{p'}(0,T;V^*)$ e $\varphi(u(\cdot)) \in L^1(0,T)$.

Demonstração: A unicidade segue a mesma demonstração do Teorema 3.1.1. Para a existência, assim como na demonstração do teorema 3.1.1 vamos considerar o problema de aproximação (3.8) com $f_n \to f$ em $L^r(0,T;V^*)$, $f_n \in C^\infty([0,T];H)$ sendo a semicontinuidade inferior de φ_H em H assegurada agora por (3.35). Sendo u_n solução forte de (3.8) existe $g_n(t) \in \partial\varphi_H(u_n(t))$ tal que

$$\frac{du_n}{dt}(t) + g_n(t) = f_n(t) \;\; em \;\; H, \;\; 0 < t < T.$$

Multiplicando esta expressão por $u_n(t)$ obtemos

$$\left\langle \frac{du_n}{dt}(t), u_n(t) \right\rangle_{V^*,V} + \langle g_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} = \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V}.$$

Logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 + \langle g_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} = \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} \leq ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V$$

q.t.p. $t \in]0,T[$. Como $0 \in D(\varphi)$ segue de (3.10) que $\varphi(u_n(t)) \leq \langle g_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} + \varphi(0)$, ou seja,

$$-\langle g_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} - \varphi(0) \leq -\varphi(u_n(t)).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 &\leq -\langle g_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} + ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V \\ &\leq \varphi(0) - \varphi(u_n(t)) + ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V,\end{aligned}$$

e concluímos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 + \varphi(u_n(t)) \leq \varphi(0) + ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V \tag{3.36}$$

q.t.p. t em]0,T[. Para o caso em que $q \in [0, 2p[$, por (3.35) temos

$$\begin{aligned}||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V &\leq ||f_n(t)||_{V^*}\left\{C_1||u_n(t)||_H^q + C_2 + C_3\varphi(u_n(t))\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq ||f_n(t)||_{V^*}\left\{C_1^{\frac{1}{p}}||u_n(t)||_H^{\frac{q}{p}} + C_2^{\frac{1}{p}} + C_3^{\frac{1}{p}}\varphi(u_n(t))^{\frac{1}{p}}\right\} \\ &= C_1^{\frac{1}{p}}||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_H^{\frac{q}{p}} + C_2^{\frac{1}{p}}||f_n(t)||_{V^*} + C_3^{\frac{1}{p}}||f_n(t)||_{V^*}\varphi(u_n(t))^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.1 com os expoentes $\theta = \dfrac{2p}{q}$ e $\theta' = \dfrac{2p}{2p-q}$, p e p' temos que

$$||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_H^{\frac{q}{p}} \leq \frac{2p-q}{2p}||f_n(t)||_{V^*}^{\frac{2p}{2p-q}} + \frac{q}{2p}||u_n(t)||_H^2$$

$$||f_n(t)||_{V^*} \leq \frac{1}{p'}||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{1}{p} \tag{3.37}$$

$$C_3^{\frac{1}{p}}||f_n(t)||_{V^*}\varphi(u_n(t))^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_3^{\frac{p'}{p}}}{p'}||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{1}{p}\varphi(u_n(t)). \tag{3.38}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V \leq C_1^{\frac{1}{p}}\left[\frac{2p-q}{2p}||f_n(t)||_{V^*}^{\frac{2p}{2p-q}} + \frac{q}{2p}||u_n(t)||_H^2\right] + C_2^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{p'}||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{1}{p}\right] \\ &+ \frac{C_3^{\frac{p'}{p}}}{p'}||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{1}{p}\varphi(u_n(t)) \leq \widetilde{C}\left[||f_n(t)||_{V^*}^{\frac{2p}{2p-q}} + ||f_n(t)||_{V^*}^{p'}\right] + \frac{C_1^{\frac{1}{p}}q}{2p}||u_n(t)||_H^2 + \frac{C_2^{\frac{1}{p}}}{p} \\ &+ \frac{\varphi(u_n(t))}{p},\end{aligned} \tag{3.39}$$

onde $\widetilde{C} = \max\left\{\dfrac{C_1^{\frac{1}{p}}(2p-q)}{2p}, \dfrac{C_2^{\frac{1}{p}} + C_3^{\frac{p'}{p}}}{p'}\right\}$. Agora para o caso em que $q = 2p$ temos

$$\begin{aligned}||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V &\leq ||f_n(t)||_{V^*}\left\{C_1||u_n(t)||_H^{2p} + C_2 + C_3\varphi(u_n(t))\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq ||f_n(t)||_{V^*}\left\{C_1^{\frac{1}{p}}||u_n(t)||_H^2 + C_2^{\frac{1}{p}} + C_3^{\frac{1}{p}}\varphi(u_n(t))^{\frac{1}{p}}\right\}.\end{aligned}$$

Logo, por (3.37), (3.38) e por $||f_n(t)||_{V^*} \leq \sup_{t\in[0,T]} ||f_n(t)||_{V^*}$ segue que

$$||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V \leq C_1{}^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{t\in[0,T]} ||f_n(t)||_{V^*} \right) ||u_n(t)||_H^2 + C_2{}^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p'}||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{1}{p} \right)$$

$$+ \quad \frac{C_3{}^{\frac{p'}{p}}}{p'}||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{1}{p}\varphi(u_n(t)). \tag{3.40}$$

Assim, para o caso em que $q \in [0,2p[$ segue de (3.36) e (3.39) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 + \varphi(u_n(t)) \leq \varphi(0) + \widetilde{C}\left(||f_n(t)||_{V^*}^{\frac{2p}{2p-q}} + ||f_n(t)||_{V^*}^{p'} \right) + \frac{C_1{}^{\frac{1}{p}}q}{2p}||u_n(t)||_H^2$$

$$+ \quad \frac{C_2{}^{\frac{1}{p}}}{p} + \frac{\varphi(u_n(t))}{p}$$

donde

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 + \left(1 - \frac{1}{p}\varphi(u_n(t))\right) \leq \varphi(0) + \frac{C_2{}^{\frac{1}{p}}}{p} + \widetilde{C}\left(||f_n(t)||_{V^*}^{\frac{2p}{2p-q}} + ||f_n(t)||_{V^*}^{p'} \right)$$

$$+ \quad \frac{C_1{}^{\frac{1}{p}}q}{2p}||u_n(t)||_H^2. \tag{3.41}$$

E para o caso em que $q = 2p$, por (3.36) e (3.40) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 + \left(1 - \frac{1}{p}\varphi(u_n(t))\right) \leq \varphi(0) + \frac{C_2{}^{\frac{1}{p}}}{p} + \left(\sup_{t\in[0,T]} ||f_n(t)||_{V^*} \right) ||u_n(t)||_H^2$$

$$+ \quad \frac{C_2{}^{\frac{1}{p}}}{p'}||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{C_3{}^{\frac{p'}{p}}}{p'}||f_n(t)||_{V^*}^{p'}. \tag{3.42}$$

De (3.41) e (3.42) como na demonstração do Teorema 3.1.1 obtemos que u_n é limitada em $C([0,T];H)$ e $\varphi(u_n(t))$ é limitada em $L^1(0,T)$. Como por (3.35) tem-se

$$||u_n(t)||_V^p \leq C_1||u_n(t)||_H^q + C_2 + C_3\varphi(u_n(t))$$

concluímos que u_n é limitada em $L^p(0,T;V)$. Além disso, como na demonstração do Teorema 3.1.1 usando (3.4) segue que g_n é limitada em $L^{p'}(0,T;V^*)$ e u_n é limitada em $W^{1,p'}(0,T;V^*)$. O restante da demonstração segue inteiramente análogo à demonstração do Teorema 3.1.1. ■
No Teorema 3.2.1 podemos substituir (3.3) por (3.35) com $q \in [0,2p]$ quando f atender todas as condições requeridas no Teorema 3.2.1, isto é $f \in L^{p'}(0,T;V^*)$, $t\frac{df}{dt}(t) \in L^{p'}(0,T;V^*)$ e $f \in L^r(0,T;V^*)$ com $r = \max\left\{p', \frac{2p}{2p-q}\right\}$. Assim, seguindo os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 3.2.1 obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.2 *Sejam (3.35) com $q \in [0,2p]$ e (3.4) satisfeitas. Então para cada $u_o \in \overline{D(\varphi)}^H$ e $f \in L^{p'}(0,T;V^*)$ com $t\frac{df}{dt}(t) \in L^{p'}(0,T;V^*)$ e $f \in L^r(0,T;V^*)$ com $r = \max\left\{p', \frac{2p}{2p-q}\right\}$, a solução de u de (3.1) satisfaz:*

(a) $u \in C(]0,T];V_w) \cap C([0,T];H) \cap W^{1,p'}(0,T;V^*)$;

(b) $u(t) \in D(\varphi)$ $\forall t > 0$, $\sup_{t\in[0,T]} t\varphi(u(t)) < \infty$;

(c) $t^{\frac{1}{p'}}\dfrac{du}{dt}(t) \in L^\infty(0,T;V^*)$, $t^{\frac{1}{2}}\dfrac{du}{dt}(t) \in L^2(0,T;H)$.

em que $C(]0,T];V_w)$ representa o conjunto de todas as funções de]0,T] com valores em V que são fracamente contínuas.

Vamos agora considerar o problema de Cauchy (3.1) com uma pertubação Lipschitziana:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) - Bu(t) \text{ em } V^*, 0 < t < T \\ u(0) = u_o \end{cases} \tag{3.43}$$

em que B é um operador Lipschitziano contínuo de H em H, ou seja, existe $L \geq 0$ tal que

$$||Bu - Bv||_H \leq L||u - v||_H$$

para todo $u, v \in H$.

Definição 3.3.1 *Uma função $u \in C([0,T];V^*)$ é uma solução forte do problema (3.43) em $[0,T]$ se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $u : [0,T] \to V^*$ *é uma função absolutamente contínua em* $[0,T]$;

(ii) $u(0) = u_o$;

(iii) $u(t) \in D(\partial\varphi)$ *para q.t.p* $t \in]0,T[$ *e existe uma função* $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ *satisfazendo:*

$$\frac{du}{dt}(t) + g(t) = f(t) - Bu(t) \ \text{ em } \ V^* \ \text{ para } \ q.t.p \ t \in \ ]0,T[. \tag{3.44}$$

Teorema 3.3.3 *Sejam (3.3) e (3.4) satisfeitas. Então para cada $u_o \in \overline{D(\varphi)}^H$ e $f \in L^{p'}(0,T;V^*)$ existe uma única solução forte u do problema (3.43) satisfazendo*

$$u \in L^p(0,T;V) \cap C([0,T];H) \cap W^{1,p'}(0,T;V^*),$$

a função $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ dada em (3.44) pertence a $L^{p'}(0,T;V^*)$, $\varphi(u(\cdot)) \in L^1(0,T)$ e $Bu \in C([0,T];H)$.

Demonstração: A unicidade segue usando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 3.1.1. Para averiguar a existência da solução forte do problema (3.43) vamos considerar o seguinte problema de aproximação

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt}(t) + \partial\varphi_H(u_n(t)) + Bu_n(t) \ni f_n(t) \text{ em } H, \ 0 < t < T \\ u_n(0) = u_{o_n} \end{cases}. \tag{3.45}$$

Considere agora a função $\widetilde{B} : [0,T] \times \overline{D(\varphi_H)}^H \to H$ definida por $\widetilde{B}(t,u) = Bu - f_n(t)$. Então para $t \in [0,T]$ e $u_1, u_2 \in \overline{D(\varphi_H)}^H$ temos

$$||\widetilde{B}(t,u_1) - \widetilde{B}(t,u_2)||_H = ||Bu_1 - f_n(t) - Bu_2 + f_n(t)||_H = ||Bu_1 - Bu_2||_H \leq L||u_1 - u_2||_H$$

e a condição (a) da Proposição 2.3.4 vale. Além disso, fixando $u \in \overline{D(\varphi_H)}^H$ segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T ||\widetilde{B}(t,u)||_H^2 dt &= \int_0^T ||Bu - f_n(t)||_H^2 dt \le \int_0^T ||Bu||_H^2 dt + 2\int_0^T ||Bu||_H ||f_n(t)||_H dt \\ &+ \int_0^T ||f_n(t)||_H^2 dt = ||Bu||_H^2 T + 2T||Bu||_H \sup_{t\in[0,T]} ||f_n(t)||_H + T \sup_{t\in[0,T]} ||f_n(t)||_H^2 < \infty \end{aligned}$$

e a condição (b) da Proposição 2.3.4 vale. Portanto a existência da solução forte u_n de (3.45) é assegurada pela Proposição 2.3.4. Note que para todo $u \in H$ temos

$$||Bu||_H = ||Bu - B0 + B0||_H \le ||B0||_H + ||Bu - B0||_H \le C_9 + L||u||_H. \tag{3.46}$$

Sendo u_n solução forte de (3.45) existe $p_n(t) \in \partial\varphi_H(u_n(t)) + Bu_n(t)$ ou seja $p_n(t) = g_n(t) + Bu_n(t)$ com $g_n(t) \in \partial\varphi_H(u_n(t))$ tal que

$$\frac{du_n}{dt}(t) + g_n(t) + Bu_n(t) = f_n(t) \quad em\ H,\ 0 < t < T.$$

Multiplicando a expressão anterior por $u_n(t)$ obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 + \langle g_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} + \langle Bu_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} = \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V}$$

logo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 + \langle g_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} + \langle Bu_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} = \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} \\ \le\ & ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V \end{aligned} \tag{3.47}$$

para q.t.p. $t \in]0,T[$. Agora como $g_n(t) \in \partial\varphi_H(u_n(t))$ temos que

$$\varphi_H(v) - \varphi_H(u_n(t)) \ge \langle g_n(t), v - u_n(t)\rangle_{V^*,V}$$

$\forall v \in D(\varphi_H) = D(\varphi)$ e como $0 \in D(\varphi_H) = D(\varphi)$ segue que

$$\varphi_H(0) - \varphi_H(u_n(t)) \ge \langle g_n(t), -u_n(t)\rangle_{V^*,V}$$

e usando que $\varphi_H(0) = \varphi(0)$ e que $u_n(t) \in D(\varphi_H) = D(\varphi)$ temos

$$\varphi(0) - \varphi(u_n(t)) \ge -\langle g_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V}$$

o que implica

$$\varphi(u_n(t)) \le \langle g_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} + \varphi(0). \tag{3.48}$$

A condição (3.3) nos dá que

$$||u_n(t)||_V^p \le C_1||u_n(t)||_H^2 + C_2 + C_3\varphi(u_n(t))$$

logo,

$$C_4||u_n(t)||_V^p \le C_5||u_n(t)||_H^2 + C_6 + \frac{1}{2}\varphi(u_n(t)) \tag{3.49}$$

em que $C_4 = \dfrac{1}{2C_3}$, $C_5 = \dfrac{C_1}{2C_3}$ e $C_6 = \dfrac{C_2}{2C_3}$. De (3.47) e (3.48) obtemos respectivamente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 \le -\langle g_n(t), u_n(t)\rangle - \langle Bu_n(t), u_n(t)\rangle + ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V \tag{3.50}$$

e

$$\frac{1}{2}\varphi(u_n(t)) \leq \frac{1}{2}\langle g_n(t), u_n(t)\rangle + \frac{1}{2}\varphi(0). \tag{3.51}$$

Logo, de (3.46), (3.49), (3.50) e (3.51) obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||_H^2 + \frac{1}{2}\varphi(u_n(t)) + C_4||u_n(t)||_V^p \leq -\langle g_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} - \langle Bu_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V}\\
+ \quad & ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V + \frac{1}{2}\langle g_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} + \frac{1}{2}\varphi(0) + C_5||u_n(t)||_H^2 + C_6 + \frac{1}{2}\varphi(u_n(t))\\
= \quad & C_5||u_n(t)||_H^2 + C_6 + \frac{1}{2}\varphi(u_n(t)) - \frac{1}{2}\langle g_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} + \frac{1}{2}\varphi(0) - \langle Bu_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V}\\
+ \quad & ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V \leq C_5||u_n(t)||_H^2 + ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V - \langle Bu_n(t), u_n(t)\rangle_{V^*,V} + C_7\\
\leq \quad & C_5||u_n(t)||_H^2 + ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V + ||Bu_n(t)||_H||u_n(t)||_H + C_7 \leq C_5||u_n(t)||_H^2 + C_7\\
+ \quad & ||f_n(t)||_{V^*}||u_n(t)||_V + (C_9 + L||u_n(t)||_H)\,||u_n(t)||_H \leq (C_5+L)||u_n(t)||_H^2 + \frac{C_4}{2}||u_n(t)||_V^p\\
+ \quad & \mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + C_9||u_n(t)||_H + C_7 \leq (C_5+L)||u_n(t)||_H^2 + \frac{C_4}{2}||u_n(t)||_V^p + C_{11}\\
+ \quad & \frac{C_9}{2}||u_n(t)||_H^2 + \mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)||f_n(t)||_{V^*}^{p'} = C_{10}||u_n(t)||_H^2 + \mathcal{M}_p\left(\frac{C_4}{2}\right)||f_n(t)||_{V^*}^{p'} + C_{11}\\
+ \quad & \frac{C_4}{2}||u_n(t)||_V^p
\end{aligned}$$

em que $C_7 = C_6 + \varphi(0)$, $C_{10} = C_5 + L + \dfrac{C_9}{2}$ e $C_{11} = \dfrac{C_9}{2} + C_7$. Usando a expressão anterior podemos verificar como na demonstração do Teorema 3.1.1 que u_n é limitada em $C([0,T];H)$, u_n é limitada em $L^p(0,T;V)$, $\varphi(u_n(t))$ é limitada em $L^1(0,T)$, g_n é limitada em $L^{p'}(0,T;V^*)$ e u_n é limitada em $W^{1,p'}(0,T;V^*)$. Agora, quando $u_n \to u$ em $C([0,T];H)$ quando $n \to \infty$ segue da continuidade de B que $Bu_n \to Bu$ em $C([0,T];H)$ quando $n \to \infty$. A partir desses fatos, podemos obter a convergência de u_n para uma função u que é solução do problema (3.43) de maneira inteiramente análoga ao Teorema 3.1.1. ■

Quando $f \in L^{p'}(0,T;V^*)$ e $t\dfrac{df}{dt} \in L^{p'}(0,T;V^*)$ como na demonstração do Teorema 3.2.1 obtemos o seguinte teorema:

Teorema 3.3.4 *Sejam (3.3) e (3.4) satisfeitas. Então para cada $u_o \in \overline{D(\varphi)}^H$ e $f \in L^{p'}(0,T;V^*)$ com $t\dfrac{df}{dt}(t) \in L^{p'}(0,T;V^*)$, a solução u de (3.43) satisfaz:*

(a) $u \in C(]0,T];V_w) \cap C([0,T];H) \cap W^{1,p'}(0,T;V^*)$;

(b) $u(t) \in D(\varphi)\ \ \forall t > 0,\ \sup_{t\in[0,T]} t\varphi(u(t)) < \infty$;

(c) $t^{\frac{1}{p'}}\dfrac{du}{dt}(t) \in L^\infty(0,T;V^*)$, $t^{\frac{1}{2}}\dfrac{du}{dt}(t) \in L^2(0,T;H)$, $t^{\frac{1}{2}}\dfrac{dBu}{dt}(t) \in L^2(0,T;H)$.

Além disso,

Corolário 3.3.1 *Sejam (3.3) e (3.4) satisfeitas. Então para cada $u_o \in D(\varphi)$ e $f \in W^{1,p'}(0,T;V^*)$ a solução u de (3.43) satisfaz*

(i) $u \in C([0,T];V_w) \cap C([0,T];H) \cap W^{1,p'}(0,T;V^*)$;

(ii) $u(t) \in D(\varphi)$, $\forall t \geq 0$ *e* $\sup_{t\in[0,T]} \varphi(u(t)) < \infty$;

(iii) $\dfrac{du}{dt} \in L^2(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V^*)$, $\dfrac{dBu}{dt} \in L^2(0,T;H)$.

Capítulo 4

Aplicações envolvendo o operador p-Laplaciano

Neste capítulo daremos um exemplo onde esta teoria pode ser aplicada para o operador p-Laplaciano.

4.1 O Operador p-Laplaciano

Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$, isto é, um conjunto aberto e conexo com fronteira suave $\partial\Omega$ e $p \in]1,\infty[$. Considere agora o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta_p u(x,t) = f(x,t) \ \ ,(x,t) \in \Omega \times]0,T[\\ u(x,t) = 0 \ \ ,(x,t) \in \partial\Omega \times]0,T[\end{cases} \tag{4.1}$$

em que Δ_p denota o operador p-Laplaciano, definido por

$$\Delta_p u := \nabla.(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad 1 < p < \infty.$$

A técnica estudada no Capítulo 3 para existência e regularidade de soluções pode ser aplicada não só para o caso em que Ω é um domínio limitado, mas também para o caso em que Ω é um domínio não-limitado.

Seja $X_p := \left\{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^p(\Omega)\right\}$ com a norma

$$||u||_{X_p} := \left(||u||^p_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

em que $||u||_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ e $||\nabla u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$. Considere $V_p := \overline{C_o^\infty(\Omega)}^{X_p}$ com a norma $||\cdot||_{V_p} := ||\cdot||_{X_p}$. Temos que V_p é um espaço de Banach uniformemente convexo pois V_p é um subespaço fechado de X_p que, por [8] é um espaço de Banach uniformemente convexo. Além disso, pela definição de V_p, é facilmente obtido que V_p está imerso em $L^2(\Omega)$ continuamente pois

$$||u||^p_{L^2(\Omega)} \leq ||u||^p_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)} = ||u||^p_{X_p}, \ \ \forall u \in V_p.$$

Como $\overline{C_o^\infty(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$ (veja [8]) temos que

$$V_p = \overline{C_o^\infty(\Omega)}^{X_p} \subset \overline{L^2(\Omega)}^{X_p} \subset \overline{L^2(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$$

e portanto $\overline{V_p}^{L^2(\Omega)} \subset L^2(\Omega)$. Por outro lado como $C_o^\infty(\Omega) \subset V_p$ temos que

$$L^2(\Omega) = \overline{C_o^\infty(\Omega)}^{L^2(\Omega)} \subset \overline{V_p}^{L^2(\Omega)}$$

onde concluímos que $\overline{V_p}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$. Considerando agora $V = V_p$ e $H = L^2(\Omega)$ com $||\cdot||_V := ||\cdot||_{V_p}$ e $||\cdot||_H = ||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ vemos que

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*$$

com imersões contínuas e densas. Vamos definir agora $\varphi_p : V \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi_p(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx, \;\; u \in V.$$

Mostremos que a função φ_p definida acima é convexa e própria. Realmente, dado $u \in V$, temos que $\nabla u \in L^p(\Omega)$, logo

$$\varphi_p(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx < \infty$$

e isso nos dá que φ_p é própria e além disso $D(\varphi_) = V$. Sendo a função $f(\lambda) = \lambda^p$ convexa, então para $u, v \in V$ e $0 \leq t \leq 1$ obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi_p(tu - (1-t)v) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(tu(x) + (1-t)v(x))|^p dx \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega |t\nabla u(x) + (1-t)\nabla v(x)|^p dx \\
&\leq \frac{1}{p}\int_\Omega t|\nabla u(x)|^p + (1-t)|\nabla v(x)|^p dx \\
&= t\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx + (1-t)\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v(x)|^p dx \\
&= t\varphi_p(u) + (1-t)\varphi_p(v).
\end{aligned}$$

Logo, a aplicação φ_p é convexa. Mostraremos agora que φ_p é semicontínua inferiormente. Com efeito, devemos provar que se $u_n \to u$ em V, então $\varphi_p(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi_p(u_n)$. Seja então $u_n \to u$ em V. Se $\liminf_{n\to\infty} \varphi_p(u_n) = +\infty$, então $\varphi_p(u) \leq +\infty = \liminf_{n\to\infty} \varphi_p(u_n)$. Agora, se $\liminf_{n\to\infty} \varphi_p(u_n) = a < +\infty$, então existe uma subsequência $\{u_{n_j}\} \subset V$ de $\{u_n\}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_p(u_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_{n_j}(x)|^p dx = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{p}||\nabla u_{n_j}||_p^p = a.$$

Assim,

$$\varphi_p(u) = \frac{1}{p}||\nabla u||_p^p = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{p}||\nabla u_{n_j}||_p^p = \liminf_{n\to\infty} \varphi_p(u_n)$$

e portanto φ_p é semicontínua inferiormente. Daí φ_p é convexa, própria e s.c.i.. Pelo Teorema 2.3.1 temos que $\partial\varphi_p$ é maximal monótono em V.

Vamos mostrar agora que $-\Delta_p(u) = \partial\varphi_p(u)$. Como $\partial\varphi_p$ é maximal monótono, é suficiente mostrar que $-\Delta_p(u) \subset \partial\varphi_p(u)$ para todo $u \in V$. Seja $u \in V$ e $v = -\Delta_p(u)$, então para todo $\xi \in V$ temos

$$\begin{aligned}\langle v, \xi - u\rangle_{V^*,V} &= \langle \Delta_p(u), \xi - u\rangle_{V^*,V} \\ &= \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot(\nabla\xi - \nabla u)dx \\ &= \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot\nabla\xi dx - \int_\Omega (|\nabla u|^p dx.\end{aligned}$$

Considerando agora p' de forma que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ obtemos

$$\begin{aligned}\langle v, \xi - u\rangle_{V^*,V} + \int_\Omega |\nabla u|^p dx &= \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot\nabla\xi dx \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla\xi| dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{1}{q}|\nabla u|^{(p-1)q}dx + \int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla\xi|^p dx \\ &= \int_\Omega \frac{1}{q}|\nabla u|^p dx + \int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla\xi|^p dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle v, \xi - u\rangle_{V^*,V} + \int_\Omega \left(1 - \frac{1}{q}\right)|\nabla u|^p dx \leq \int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla\xi|^p dx$$

ou equivalentemente

$$\langle v, \xi - u\rangle_{V^*,V} + \int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla u|^p dx \leq \int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla\xi|^p dx.$$

Logo,

$$\langle v, \xi - u\rangle_{V^*,V} + \varphi_p(u) \leq \varphi_p(\xi) \Leftrightarrow \langle v, \xi - u\rangle_{V^*,V} \leq \varphi_p(\xi) - \varphi_p(u),$$

para todo $\xi \in V$ e assim $-\Delta_p(u) = v \in \partial\varphi_p(u)$ e isso nos dá que $-\Delta_p = \partial\varphi_p$.

4.2 Ω é um domínio limitado

Considere $\dfrac{2N}{N+2} \leq p < +\infty$ e Ω um domínio limitado. Pelo Teorema da Imersão de Sobolev e pela desigualdade de Poincaré, juntamente com a limitação de Ω, $X_p = W^{1,p}(\Omega)$ e $V_p = W_o^{1,p}(\Omega)$ e podemos considerar a norma $||u||_V = ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$.

Relembrando que $V = V_p = W_o^{1,p}(\Omega)$ e que $||u||_V$ e $||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$ são normas equivalentes podemos redefinir

$$\varphi_p(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx = \frac{1}{p}||u||_V^p.$$

Assim, temos que

$$||u||_V^p = p\varphi_p(u), \;\; \forall u \in D(\varphi_p) = V$$

e portanto (3.3) é satisfeita com $C_1 = C_2 = 0$ e $C_3 = p$. Agora note que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\cdot\nabla w(x)dx &\leq \left|\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\cdot\nabla w(x)dx\right| \\
&\leq \int_\Omega \left||\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\cdot\nabla w(x)\right| dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-1}|\nabla w(x)|dx \\
&\leq ||\nabla u||_p^{p-1}||\nabla w||_p. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Logo

$$\sup_{\substack{w\in V\\ ||\nabla w||_{L^p(\Omega)}=1}} \left\{\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\cdot\nabla w(x)dx\right\} \leq ||\nabla u||_p^{p-1}$$

e com isso podemos concluir que para $u \in D(\varphi_p) = V$

$$\begin{aligned}
||\partial\varphi_p(u)||_{V^*}^{p'} &= \left[\sup_{\substack{w\in V\\ ||w||_V=1}} |\langle\partial\varphi_p(u), w\rangle_{V^*,V}|\right]^{p'} = \left[\sup_{\substack{w\in V\\ ||w||_V=1}} \left|\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla w dx\right|\right]^{p'} \\
&\leq \left[||\nabla u||_p^{p-1}\right]^{p'} = ||u||_V^p = p\varphi_p(u) \leq p\varphi_p(u) + p = p\left(\varphi_p(u)+1\right) \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

e isso valida (3.4) com $l(||u||_H) \equiv p$. Tome agora $||u||_\varphi = \mathcal{N}(\varphi_p(u), ||u||_H) = p^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_p(u)\right)^{\frac{1}{p}} + ||u||_H^p$ e teremos que

$$||u||_\varphi = p^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_p(u)\right)^{\frac{1}{p}} + ||u||_H^p = p^{\frac{1}{p}}\frac{1}{p^{\frac{1}{p}}}\left(||u||_V^p\right)^{\frac{1}{p}} + ||u||_H^p = ||u||_V + ||u||_H^p$$

e $\left(W_o^{1,p}(\Omega), ||\cdot||_\varphi\right)$ é uniformemente convexo, o que torna verificada a condição (3.34). Sendo assim, podemos aplicar os Teoremas 3.1.1, 3.2.1 e a Observação 3.3.5 para o problema (4.1).

Para $1 < p < \dfrac{2N}{N+2}$, pelo Teorema da imersão de Sobolev e pela limitação de Ω tem-se $X_p = W^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$ e $||\cdot||_{X_p}$ é equivalente a norma $||\cdot||_{W^{1,p}(\Omega)} + ||\cdot||_{L^2(\Omega)}$. Além disso podemos verificar que $V_p = \overline{C_o^\infty(\Omega)}^{X_p} = W_o^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$. De fato, é claro que $\overline{C_o^\infty(\Omega)}^{X_p} \subset W_o^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$. Por outro lado, tome $u \in W_o^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$, então $u \in W_o^{1,p}(\Omega)$ e $u \in L^2(\Omega)$, logo existe $(u_j) \subset C_o^\infty(\Omega)$ tal que

$$||u_j - u||_{W_o^{1,p}(\Omega)} \to 0 \;\text{ e }\; ||u_j - u||_{L^2(\Omega)} \to 0$$

quando $j \to \infty$. Como $1 < p < \dfrac{2N}{N+2} < \dfrac{2N}{N} = 2$ temos que $L^2(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com imersão contínua, e assim $||u_j - u||_{L^p(\Omega)} \leq C||u_j - u||_{L^2(\Omega)}$, logo

$$\begin{aligned}
||u_j - u||_{V_p} &= ||u_j - u||_{W^{1,p}(\Omega)} + ||u_j - u||_{L^2(\Omega)} \\
&= ||u_j - u||_{L^p(\Omega)} + ||\nabla(u_j - u)||_{L^p(\Omega)} + ||u_j - u||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C||u_j - u||_{L^2(\Omega)} + ||u_j - u||_{W_o^{1,p}(\Omega)} + ||u_j - u||_{L^2(\Omega)} \to 0
\end{aligned}$$

quando $j \to \infty$, portanto $W_o^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega) \subset \overline{C_o^\infty(\Omega)}^{X_p}$.

Pela definição de $||\cdot||_V$, $||\cdot||_H$ e φ_p temos

$$\begin{aligned} ||u||_V^p &= ||u||_{V_p}^p = ||u||_{L^2(\Omega)}^p + ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}^p = ||u||_H^p + ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}^p \\ &= p\varphi_p(u) + ||u||_H^p \\ &\leq p\varphi_p(u) + ||u||_H^2 + \mathcal{M}_{\frac{2}{p}}(1), \end{aligned}$$

sendo que $\mathcal{M}_{\frac{2}{p}}(1)$ foi definido no Lema 3.1.1. Assim, (3.3) vale com $C_1 = 1$, $C_2 = \mathcal{M}_{\frac{2}{p}}(1)$ e $C_3 = p$. A condição (3.4) é garantida por (4.3). Tome agora $||u||_\varphi = \mathcal{N}(\varphi_p(u), ||u||_H) = p^{\frac{1}{p}}(\varphi_p(u))^{\frac{1}{p}} + ||u||_H + ||u||_{L^p(\Omega)}^p$ e teremos

$$\begin{aligned} ||u||_\varphi &= \mathcal{N}(\varphi_p(u), ||u||_H) = p^{\frac{1}{p}}[\varphi_p(u)]^{\frac{1}{p}} + ||u||_H + ||u||_{L^p(\Omega)}^p \\ &= p^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(u)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + ||u||_H + ||u||_{L^p(\Omega)}^p \\ &= ||u||_{W^{1,p}(\Omega)} + ||u||_H = ||u||_{X_p} \end{aligned}$$

e assim (3.34) é verificada. Podemos então aplicar os Teoremas 3.1.1 e 3.2.1, Corolário 3.2.1 e a Observação 3.3.5 para o problema (4.1) e obter o seguinte resultado:

Teorema 4.2.1 *Quando $1 < p < \infty$ e Ω é um domínio limitado, para cada $u_o \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^{p'}(0,T;V_p^*)$ existe uma única solução forte do problema (4.1) com condição u_o tal que*

$$u \in L^p(0,T;V_p) \cap C([0,T];L^2(\Omega)) \cap W^{1,p'}(0,T;V_p^*).$$

Além disso, se $t\dfrac{df}{dt} \in L^{p'}(0,T;V_p^*)$ então

$$u \in C([\delta,T];(V_p)_w) \cap W^{1,2}(\delta,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\delta,T;V_p^*), \quad \delta > 0 \tag{4.4}$$

e se $u_o \in V_p$ e $f \in W^{1,p'}(0,T;V_p^*)$ então (4.4) vale com $\delta = 0$.

4.3 Ω é um domínio não-limitado

Pela definição de φ_p temos

$$\begin{aligned} \varphi_p(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx = \frac{1}{p}||\nabla u||_{L^p(\Omega)}^p \\ &= \frac{1}{p}\left(||\nabla u||_{L^p(\Omega)}^p + ||u||_{L^2(\Omega)}^p - ||u||_{L^2(\Omega)}^p\right) \\ &= \frac{1}{p}\left(||u||_V^p - ||u||_H^p\right) \end{aligned}$$

logo

$$||u||_V^p = ||u||_H^p + 0 + p\varphi_p(u)$$

e portanto vale (3.35) com $q = p$. Vamos verificar agora que (3.4) e (3.34) também são satisfeitas. De fato, usando (4.2) obtemos

$$\sup_{\substack{w\in V \\ ||w||_V=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\cdot\nabla w(x)dx \right\} \leq ||\nabla u||_p^{p-1}$$

logo, para $u \in D(\varphi_p)$ temos

$$||\partial\varphi_p(u)||_{V^*}^{p'} \leq \left[||\nabla u||_p^{p-1} \right]^{p'} = ||\nabla u||_p^p = p\varphi_p(u) \leq p\varphi_p(u) + p = p\left(\varphi_p(u)+1\right)$$

e isso valida (3.4) com $l(||\cdot||_H) \equiv p$. Tome agora

$$||u||_\varphi = \mathcal{N}(\varphi_p(u), ||u||_H) = \left(p\varphi_p(u) + ||u||_H^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e teremos

$$||u||_\varphi = \mathcal{N}(\varphi_p(u), ||u||_H) = \left(p\varphi_p(u) + ||u||_H^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(||u||_V^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(||u||_{X_p}^p\right)^{\frac{1}{p}} = ||u||_{X_p}$$

e isso valida (3.34). Então o Teorema 3.3.1 e o Corolário 3.2.1 pode ser aplicado para o problema (4.1). Sendo assim, obtemos:

Teorema 4.3.1 *Quando $1 < p < \infty$ e Ω é um domínio não-limitado, para cada $u_o \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^q(0,T;V_p^*)$ com $q = \max\{p', 2\}$ existe uma única solução forte u de (4.1) com condição inicial u_o satisfazendo*

$$u \in L^p(0,T;V_p) \cap C([0,T];L^2(\Omega)) \cap W^{1,p'}(0,T;V_p^*).$$

Além disso, se $f, t\dfrac{df}{dt} \in L^p(0,T;V_p^*)$ (resp. $u_o \in V_p$ e $f \in W^{1,p'}(0,T;V_p^*)$) então

$$u \in C([\delta,T];(V_p)_w) \cap W^{1,2}(\delta,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\delta,T;V_p^*)$$

se $\delta > 0$ (resp. se $\delta = 0$).

Capítulo 5

Existência e unicidade de solução de alguns problemas parabólicos envolvendo o operador $p(x)$-Laplaciano em um espaço de Hilbert

Neste capítulo, mediante algumas estimativas e propriedades verificadas para o operador $p(x)$-Laplaciano perturbado, iremos garantir resultados de existência para um problema parabólico em um espaço de Hilbert H. Provaremos também que a realização deste operador no espaço H é a subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i. Para o operador $p(x)$-Laplaciano não perturbado, estes resultados podem se encontrados em [12, 13]. Destacamos que este capítulo gerou o preprint [14].

5.1 Algumas definições e resultados importantes

Nesta seção, iremos evidenciar algumas definições e resultados que serão úteis ao longo do capítulo.

Definição 5.1.1 *O espaço de Lebesgue generalizado $L^{p(x)}(\Omega)$ é definido por*

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ é mensurável}, \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um conjunto mensurável e $p \in L^\infty(\Omega)$, com $p \geq 1$.

Para $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $p \in L^\infty_+ := \{q \in L^\infty(\Omega) : \inf \text{ess} \geq 1\}$ denotaremos

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx,$$

$$p^- = \inf \text{ess}\, p \text{ e } p^+ = \sup \text{ess}\, p.$$

Por [16, 17, 15] $L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$||u||_{p(x)} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

Definição 5.1.2 *O espaço de Sobolev generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega) \right\}.$$

Por [16, 18, 15] temos que $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$||u||_* := ||u||_{p(x)} + ||\nabla u||_{p(x)}.$$

Definição 5.1.3 $W_o^{1,p(x)} = \overline{C_o^\infty(\Omega)}^{W^{1,p(x)}(\Omega)}$.

Proposição 5.1.1 *[19, 15] As normas $||\nabla u||_{p(x)}$ e $||u||_*$ são equivalentes em $W_o^{1,p(x)}$.*

Teorema 5.1.1 *[16, 15] Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Então*

(i) $||u||_{p(x)} < 1 (= 1; > 1)$ *se e somente se* $\rho(u) < 1 (= 1; > 1)$*;*

(ii) *Se $||u||_{p(x)} > 1$, então $||u||_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq ||u||_{p(x)}^{p^+}$;*

(iii) *Se $||u||_{p(x)} < 1$, então $||u||_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq ||u||_{p(x)}^{p^-}$.*

Teorema 5.1.2 *[22, 20, 15] Sejam $p(x)$ e $q(x)$ funções mensuráveis tais que $p(x) \in L^\infty(\Omega)$ e $1 \leq p(x)q(x) \leq +\infty$ para q.t.p $x \in \Omega$. Seja $f \in L^q(\Omega)$, $f \neq 0$. Então*

$$||f||_{p(x)q(x)}^{p^+} \leq |||f|^{p(x)}||_{q(x)} \leq ||f||_{p(x)q(x)}^{p^-}, \text{ se } ||f||_{p(x)q(x)} \leq 1$$

e

$$||f||_{p(x)q(x)}^{p^-} \leq |||f|^{p(x)}||_{q(x)} \leq ||f||_{p(x)q(x)}^{p^+}, \text{ se } ||f||_{p(x)q(x)} \geq 1.$$

Em particular, se $p(x) \equiv p$ é constante, então $|||f|^p||_{q(x)} = ||f||_{pq(x)}^p$.

Proposição 5.1.2 *[18, 21, 15] O espaço conjugado de $L^{p(x)}(\Omega)$ é $L^{q(x)}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$. Além disso, para $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, $g \in L^{q(x)}(\Omega)$ vale a desigualdade*

$$\left| \int_\Omega f(x)g(x)dx \right| \leq 2||f||_{p(x)}||g||_{q(x)}.$$

Teorema 5.1.3 *[16, 19, 15]*

(i) *O espaço $(L^{p(x)}(\Omega), ||\cdot||_{p(x)})$ é separável;*

(ii) *Se $p^- > 1$, então $L^{p(x)}(\Omega)$ é reflexivo;*

(iii) *Se $p^- > 1$, então $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é separável e reflexivo.*

Segue imediatamente da definição de $W_o^{1,p(x)}$ e das propriedades de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ que $W_o^{1,p(x)}$ é um espaço de Banach reflexivo e separável.

Teorema 5.1.4 *[16, 19, 15] Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$. Então*

$$L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

se e somente se $q(x) \leq p(x)$ para q.t.p $x \in \Omega$, e neste caso a imersão é contínua.

Teorema 5.1.5 *[19, 15] Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e seja $p,q \in C(\overline{\Omega})$ tal que $p^-, q^- \geq 1$. Assuma que*

$$q(x) < p^*(x) := \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N-p(x)}, & p(x) < N \\ \infty, & p(x) \geq N \end{cases},$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$. Então

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

e a imersão é contínua e compacta.

Definição 5.1.4 *Seja V um espaço de Banach. Dizemos que um operador $A : V \to V^*$ é hemicontínuo se para todo $u, v \in V$*

$$A(u + \lambda v) \rightharpoonup Au$$

quando $\lambda \to 0$.

Definição 5.1.5 *Seja V um espaço de Banach. Dizemos que um operador $A : V \to V^*$ é coercivo se*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\langle Au_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{||u_j||_V} = \infty$$

qualquer que seja $(u_j) \subset V$ com $\lim\limits_{j\to\infty} ||u_j||_V = \infty$.

5.2 O operador $p(x)$-Laplaciano perturbado

Nesta seção, iremos fazer algumas estimativas para o operador $p(x)$-Laplaciano perturbado com uma não-linearidade e provaremos algumas propriedades para esse operador, como monotonicidade, coercividade e hemicontinuidade.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e consideremos $V = W^{1,p(x)}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $p(x) \in C(\overline{\Omega})$ com $p(x) > 2$ para q.t.p $x \in \Omega$. Pelos Teoremas 5.1.4 e 5.1.5 temos que $V \subset H \subset V^*$ com imersões contínuas e densas. Consideremos agora o operador $A : V \to V^*$ dado por

$$A(u)(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u . \nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2} u . v dx.$$

Lema 5.2.1 *Sejam a e b números reais positivos e $q > 1$. Então $(a+b)^q \leq 2^{q-1}(a^q + b^q)$.*

Lema 5.2.2 *[19] Sejam $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ e $p \geq 2$ uma constante. Vale a desigualdade*

$$\left(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right)(\xi - \eta) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^p |\xi - \eta|^p.$$

Lema 5.2.3 *Seja $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{q(x)} = 1$ e $\widetilde{p}(x) := p(x) - 1$. Se $||u||_V \leq 1$ então*

(i) $\langle Au, u\rangle_{V^*,V} \geq \dfrac{1}{2^{p^+-1}} ||u||_V^{p^+}$;

(ii) $||Au||_{V^*} \leq ||\nabla u||_{p(x)}^{p^-} + ||u||_{p(x)}^{p^-} + 1$;

(iii) $||Au||_{V^*} \leq 2\left(||\nabla u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^-} + ||u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^-}\right)$.

Demonstração: Observemos primeiramente que $||u||_V \leq 1$ implica em

$$||u||_{p(x)} \leq 1 \text{ e } ||\nabla u||_{p(x)} \leq 1.$$

Assim, pelo Teorema 5.1.1 e pelo Lema 5.2.1 temos

$$\begin{aligned}
\langle Au, u\rangle_{V^*,V} &= \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla u dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}u.u dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_\Omega |u|^{p(x)} dx \\
&= \rho(\nabla u) + \rho(u) \geq ||\nabla u||_{p(x)}^{p^+} + ||u||_{p(x)}^{p^+} \geq \frac{1}{2^{p^+-1}}\left(||\nabla u||_{p(x)} + ||u||_{p(x)}\right)^{p^+} \\
&= \frac{1}{2^{p^+-1}}||u||_V^{p^+}
\end{aligned}$$

e (i) está provado.

(ii): Usando o Lema 2.1.1 e o Teorema 5.1.1 obtemos

$$\begin{aligned}
||Au||_{V^*} &= \sup_{||w||_V \leq 1} |Au(w)| = \sup_{||w||_V \leq 1} \left| \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla w dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}u.w dx \right| \\
&\leq \sup_{||w||_V \leq 1} \left(\left| \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla w dx \right| + \left| \int_\Omega |u|^{p(x)-2}u.w dx \right| \right) \\
&\leq \sup_{||w||_V \leq 1} \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla w| dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-1}|w| dx \right) \\
&\leq \sup_{||w||_V \leq 1} \int_\Omega \left[\frac{1}{q(x)}|\nabla u|^{(p(x)-1)q(x)} + \frac{1}{p(x)}|\nabla w|^{p(x)} \right] dx \\
&+ \sup_{||w||_V \leq 1} \int_\Omega \left[\frac{1}{q(x)}|u|^{(p(x)-1)q(x)} + \frac{1}{p(x)}|w|^{p(x)} \right] dx \leq \sup_{||w||_V \leq 1} \int_\Omega \left[|\nabla u|^{p(x)} + \frac{1}{2}|\nabla w|^{p(x)} \right] dx \\
&+ \sup_{||w||_V \leq 1} \int_\Omega \left[|u|^{p(x)} + \frac{1}{2}|w|^{p(x)} \right] dx = \sup_{||w||_V \leq 1} \left[\rho(\nabla u) + \frac{1}{2}\rho(\nabla w) \right] + \sup_{||w||_V \leq 1} \left[\rho(u) + \frac{1}{2}\rho(w) \right] \\
&= \rho(\nabla u) + \frac{1}{2} \sup_{||w||_V \leq 1} \rho(\nabla w) + \rho(u) + \frac{1}{2} \sup_{||w||_V \leq 1} \rho(w) \leq ||\nabla u||_{p(x)}^{p^-} + \frac{1}{2} + ||u||_{p(x)}^{p^-} + \frac{1}{2} \\
&= ||\nabla u||_{p(x)}^{p^-} + ||u||_{p(x)}^{p^-} + 1
\end{aligned}$$

e (ii) segue.

(iii): Usando o Teorema 5.1.2 e a Proposição 5.1.2 temos

$$\begin{aligned}
||Au||_{V^*} &= \sup_{||w||_V \leq 1} |Au(w)| = \sup_{||w||_V \leq 1} \left| \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla w dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}u.w dx \right| \\
&\leq \sup_{||w||_V \leq 1} \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla w| dx + \sup_{||w||_V \leq 1} \int_\Omega |u|^{p(x)-1}|w| dx \\
&\leq \sup_{||w||_V \leq 1} \left[2|||\nabla u|^{p(x)-1}||_{q(x)}|||\nabla w|||_{p(x)} \right] + \sup_{||w||_V \leq 1} \left[2|||u|^{p(x)-1}||_{q(x)}|||w|||_{p(x)} \right] \\
&\leq 2|||\nabla u|^{p(x)-1}||_{q(x)} + 2||u^{p(x)-1}||_{q(x)} = 2|||\nabla u|^{\widetilde{p}(x)}||_{q(x)} + 2||u^{\widetilde{p}(x)}||_{q(x)} \\
&\leq 2||\nabla u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^-} + 2||u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^-} = 2\left(||\nabla u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^-} + ||u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^-} \right)
\end{aligned}$$

e (iii) está provado. ■

Lema 5.2.4 *Seja* $\dfrac{1}{p(x)}+\dfrac{1}{q(x)}=1$ *e* $\widetilde{p}(x):=p(x)-1$. *Se* $||u||_V\geq 1$ *então*

(i)

$$\langle Au,u\rangle_{V^*,V}\geq\begin{cases}\dfrac{1}{2^{p^--1}}||u||_V^{p^-}\ ,\ se\ ||u||_{p(x)}\geq 1\ \ e\ \ ||\nabla u||_{p(x)}\geq 1\\ ||\nabla u||_{p(x)}^{p^-}+||u||_{p(x)}^{p^+}\ ,\ se\ ||u||_{p(x)}\leq 1\ \ e\ \ ||\nabla u||_{p(x)}\geq 1\\ ||\nabla u||_{p(x)}^{p^+}+||u||_{p(x)}^{p^-}\ ,\ se\ ||u||_{p(x)}\geq 1\ \ e\ \ ||\nabla u||_{p(x)}\leq 1\end{cases};$$

(ii)

$$||Au||_{V^*}\leq\begin{cases}||\nabla u||_{p(x)}^{p^+}+||u||_{p(x)}^{p^+}+1\ ,\ se\ ||u||_{p(x)}\geq 1\ \ e\ \ ||\nabla u||_{p(x)}\geq 1\\ ||\nabla u||_{p(x)}^{p^+}+||u||_{p(x)}^{p^-}+1\ ,\ se\ ||u||_{p(x)}\leq 1\ \ e\ \ ||\nabla u||_{p(x)}\geq 1\\ ||\nabla u||_{p(x)}^{p^-}+||u||_{p(x)}^{p^+}+1\ ,\ se\ ||u||_{p(x)}\geq 1\ \ e\ \ ||\nabla u||_{p(x)}\leq 1\end{cases};$$

(iii)

$$||Au||_{V^*}\leq\begin{cases}2\left(||\nabla u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^+}+||u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^+}\right)\ ,\ se\ ||u||_{p(x)}\geq 1\ \ e\ \ ||\nabla u||_{p(x)}\geq 1\\ 2\left(||\nabla u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^+}+||u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^-}\right)\ ,\ se\ ||u||_{p(x)}\leq 1\ \ e\ \ ||\nabla u||_{p(x)}\geq 1\\ 2\left(||\nabla u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^-}+||u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^+}\right)\ ,\ se\ ||u||_{p(x)}\geq 1\ \ e\ \ ||\nabla u||_{p(x)}\leq 1\end{cases}.$$

Demonstração: Para provar (i), consideremos primeiramente $||u||_{p(x)}\geq 1$ e $||\nabla u||_{p(x)}\geq 1$. Pelo Teorema 5.1.1 e Lema 5.2.1 temos

$$\begin{aligned}\langle Au,u\rangle_{V^*,V} &= \int_\Omega|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla u dx+\int_\Omega|u|^{p(x)-2}u.u dx\\ &= \int_\Omega|\nabla u|^{p(x)}dx+\int_\Omega|u|^{p(x)}dx=\rho(\nabla u)+\rho(u)\\ &\geq ||\nabla u||_{p(x)}^{p^-}+||u||_{p(x)}^{p^-}\geq\frac{1}{2^{p^--1}}\left(||\nabla u||_{p(x)}+||u||_{p(x)}\right)^{p^-}\\ &= \frac{1}{2^{p^--1}}||u||_V^{p^-}.\end{aligned}$$

Notando que $\langle Au,u\rangle_{V^*,V}=\rho(\nabla u)+\rho(u)$ os casos $||u||_{p(x)}\geq 1$ e $||\nabla u||_{p(x)}\leq 1$, $||u||_{p(x)}\leq 1$ e $||\nabla u||_{p(x)}\geq 1$ seguem diretamente do Teorema 5.1.1. Para provar (ii) observe que do Lema 2.1.1 e Teorema 5.1.1

$$\begin{aligned}||Au||_{V^*}=\sup_{||w||_V\leq 1}|Au(w)| &= \sup_{||w||_V\leq 1}\left|\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla w dx+\int_\Omega|u|^{p(x)-2}u.w dx\right|\\ \leq &\sup_{||w||_V\leq 1}\left(\left|\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla w dx\right|+\left|\int_\Omega|u|^{p(x)-2}u.w dx\right|\right)\\ \leq &\sup_{||w||_V\leq 1}\left(\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla w|dx+\int_\Omega|u|^{p(x)-1}|w|dx\right)\\ \leq &\sup_{||w||_V\leq 1}\int_\Omega\left[\frac{1}{q(x)}|\nabla u|^{(p(x)-1)q(x)}+\frac{1}{p(x)}|\nabla w|^{p(x)}\right]dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sup_{||w||_V \leq 1} \int_\Omega \left[\frac{1}{q(x)}|u|^{(p(x)-1)q(x)} + \frac{1}{p(x)}|w|^{p(x)}\right] dx \leq \sup_{||w||_V \leq 1} \int_\Omega \left[|\nabla u|^{p(x)} + \frac{1}{2}|\nabla w|^{p(x)}\right] dx \\
&+ \sup_{||w||_V \leq 1} \int_\Omega \left[|u|^{p(x)} + \frac{1}{2}|w|^{p(x)}\right] dx = \sup_{||w||_V \leq 1} \left[\rho(\nabla u) + \frac{1}{2}\rho(\nabla w)\right] + \sup_{||w||_V \leq 1} \left[\rho(u) + \frac{1}{2}\rho(w)\right] \\
&= \rho(\nabla u) + \frac{1}{2} \sup_{||w||_V \leq 1} \rho(\nabla w) + \rho(u) + \frac{1}{2} \sup_{||w||_V \leq 1} \rho(w) = \rho(\nabla u) + \rho(u) + 1.
\end{aligned}
$$

Basta aplicar agora o Teorema 5.1.1 e (ii) está provado. Para o item (iii) usando a Proposição 5.1.2 obtemos

$$
\begin{aligned}
||Au||_{V^*} &= \sup_{||w||_V \leq 1} |Au(w)| = \sup_{||w||_V \leq 1} \left| \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u . \nabla w dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2} u . w dx \right| \\
&\leq \sup_{||w||_V \leq 1} \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla w| dx + \sup_{||w||_V \leq 1} \int_\Omega |u|^{p(x)-1} |w| dx \\
&\leq \sup_{||w||_V \leq 1} \left[2|| \, |\nabla u|^{p(x)-1} ||_{q(x)} || \, |\nabla w| \, ||_{p(x)}\right] + \sup_{||w||_V \leq 1} \left[2|| \, |u|^{p(x)-1} ||_{q(x)} || \, |w| \, ||_{p(x)}\right] \\
&\leq 2|| \, |\nabla u|^{p(x)-1} ||_{q(x)} + 2|| \, |u|^{p(x)-1} ||_{q(x)} = 2|| \, |\nabla u|^{\widetilde{p}(x)} ||_{q(x)} + 2|| \, |u|^{\widetilde{p}(x)} ||_{q(x)}.
\end{aligned}
$$

Se $||u||_{p(x)} \geq 1$ e $||\nabla u||_{p(x)} \geq 1$ segue do Teorema 5.1.2 que

$$
\begin{aligned}
||Au||_{V^*} &\leq 2|| \, |\nabla u|^{\widetilde{p}(x)} ||_{q(x)} + 2|| \, |u|^{\widetilde{p}(x)} ||_{q(x)} \\
&\leq 2||\nabla u||_{\widetilde{p}(x)q(x)}^{\widetilde{p}^+} + 2||u||_{\widetilde{p}(x)q(x)}^{\widetilde{p}^+} = 2\left(||\nabla u||_{\widetilde{p}(x)q(x)}^{\widetilde{p}^+} + ||u||_{\widetilde{p}(x)q(x)}^{\widetilde{p}^+}\right).
\end{aligned}
$$

Se $||u||_{p(x)} \leq 1$ e $||\nabla u||_{p(x)} \geq 1$ segue do Teorema 5.1.2 que

$$
\begin{aligned}
||Au||_{V^*} &\leq 2|| \, |\nabla u|^{\widetilde{p}(x)} ||_{q(x)} + 2|| \, |u|^{\widetilde{p}(x)} ||_{q(x)} \\
&\leq 2||\nabla u||_{\widetilde{p}(x)q(x)}^{\widetilde{p}^+} + 2||u||_{\widetilde{p}(x)q(x)}^{\widetilde{p}^-} = 2\left(||\nabla u||_{\widetilde{p}(x)q(x)}^{\widetilde{p}^+} + ||u||_{\widetilde{p}(x)q(x)}^{\widetilde{p}^-}\right).
\end{aligned}
$$

E por último, se $||u||_{p(x)} \geq 1$ e $||\nabla u||_{p(x)} \leq 1$ novamente do Teorema 5.1.2 obtemos

$$
\begin{aligned}
||Au||_{V^*} &\leq 2|| \, |\nabla u|^{\widetilde{p}(x)} ||_{q(x)} + 2|| \, |u|^{\widetilde{p}(x)} ||_{q(x)} \\
&\leq 2||\nabla u||_{\widetilde{p}(x)q(x)}^{\widetilde{p}^-} + 2||u||_{\widetilde{p}(x)q(x)}^{\widetilde{p}^+} = 2\left(||\nabla u||_{\widetilde{p}(x)q(x)}^{\widetilde{p}^-} + ||u||_{\widetilde{p}(x)q(x)}^{\widetilde{p}^+}\right)
\end{aligned}
$$

e o lema está provado. ■

Observação 5.2.1 *Observe que se $||u||_V \geq 1$ podemos ter $||u||_{p(x)} \leq 1$ e $||\nabla u||_{p(x)} \leq 1$. Neste caso temos as estimativas no Lema 5.2.3.*

Lema 5.2.5 *O operador $A : V \to V^*$ é monótono.*

Demonstração: Sejam $u, v \in V$. Usando o Lema 5.2.2 para cada $x \in \Omega$ fixado obtemos

$$
\begin{aligned}
&\langle Au - Av, u - v\rangle_{V^*,V} = \langle Au, u - v\rangle_{V^*,V} - \langle Av, u - v\rangle_{V^*,V} \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u . \nabla (u - v) dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2} u . (u - v) dx - \int_\Omega |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v . \nabla (u - v) dx \\
&- \int_\Omega |v|^{p(x)-2} v . (u - v) dx = \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v\right) (\nabla u - \nabla v) \, dx \\
&+ \int_\Omega \left(|u|^{p(x)-2} u - |v|^{p(x)-2} v\right) (u - v) \, dx \geq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\right)^{p(x)} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} dx \\
&+ \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\right)^{p(x)} |u - v|^{p(x)} dx \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{p^+} \left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} dx + \int_\Omega |u - v|^{p(x)} dx\right) \geq 0.
\end{aligned}
$$

■

Lema 5.2.6 *O operador $A : V \to V^*$ é coercivo.*

Demonstração: Observemos primeiramente que para $u \in V = W^{1,p(x)}(\Omega)$ com $||u||_V \geq 1$ temos pelo Lema 5.2.4 que se $||\nabla u||_{p(x)} \geq 1$ e $||u||_{p(x)} \geq 1$

$$\frac{\langle Au, u\rangle_{V^*,V}}{||u||_V} \geq \frac{1}{2^{p^- -1}} \frac{||u||_V^{p^-}}{||u||_V} = \frac{1}{2^{p^- -1}} ||u||_V^{p^- -1}, \tag{5.1}$$

se $||u||_{p(x)} \leq 1$ e $||\nabla u||_{p(x)} \geq 1$

$$\frac{\langle Au, u\rangle_{V^*,V}}{||u||_V} \geq \frac{||\nabla u||_{p(x)}^{p^-} + ||u||_{p(x)}^{p^+}}{||\nabla u||_{p(x)} + ||u||_{p(x)}} \geq \frac{||\nabla u||_{p(x)}^{p^-}}{||\nabla u||_{p(x)} + 1} \geq \frac{||\nabla u||_{p(x)}^{p^-}}{2||\nabla u||_{p(x)}} = \frac{1}{2} ||\nabla u||_{p(x)}^{p^- -1}, \tag{5.2}$$

e se $||\nabla u||_{p(x)} \leq 1$ e $||u||_{p(x)} \geq 1$

$$\frac{\langle Au, u\rangle_{V^*,V}}{||u||_V} \geq \frac{||\nabla u||_{p(x)}^{p^+} + ||u||_{p(x)}^{p^-}}{||\nabla u||_{p(x)} + ||u||_{p(x)}} \geq \frac{||u||_{p(x)}^{p^-}}{1 + ||u||_{p(x)}} \geq \frac{||u||_{p(x)}^{p^-}}{2||u||_{p(x)}} = \frac{1}{2} ||u||_{p(x)}^{p^- -1}. \tag{5.3}$$

Seja agora uma sequência $(u_j) \subset V$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} ||u_j||_V = \infty$. Como $||u_j||_V = ||\nabla u_j||_{p(x)} + ||u_j||_{p(x)}$ temos os seguintes casos

1º caso: $\lim\limits_{j\to\infty} ||\nabla u_j||_{p(x)} = \infty$ e $\lim\limits_{j\to\infty} ||u_j||_{p(x)} = \infty$;

2º caso: $\lim\limits_{j\to\infty} ||\nabla u_j||_{p(x)} = \infty$;

3º caso: $\lim\limits_{j\to\infty} ||u_j||_{p(x)} = \infty$.

No 1º caso temos que existe $j_o \in \mathbb{N}$ tal que $||\nabla u_j||_{p(x)} \geq 1$ e $||u_j||_{p(x)} \geq 1$ se $j \geq j_o$. Logo, segue de (5.1) que

$$\frac{\langle Au_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{||u_j||_V} \geq \frac{1}{2^{p^- -1}} ||u_j||_V^{p^- -1}$$

para todo $j \geq j_o$. Como $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{1}{2^{p^- -1}} ||u_j||_V^{p^- -1} = \infty$ segue que $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{\langle Au_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{||u_j||_V} = \infty$. Para o 2º caso existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $||\nabla u_j||_{p(x)} \geq 1$ se $j \geq j_1$. Sejam $N_1 = \{j \geq j_1; ||u_j||_{p(x)} < 1\}$ e $N_2 = \{j \geq j_1; ||u_j||_{p(x)} \geq 1\}$. Se N_1 é finito basta analisarmos $j \geq j_1$ tal que $j \in N_2$. Assim, segue de (5.1) que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\langle Au_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{||u_j||_V} = \infty.$$

Se N_2 é finito basta analisarmos $j \geq j_1$ tal que $j \in N_1$. Logo, de (5.2) concluímos que

$$\frac{\langle Au_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{||u_j||_V} \geq \frac{1}{2} ||\nabla u_j||_{p(x)}^{p^- -1}$$

para todo $j \geq j_1,\ j \in N_1$. Como $\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2}||\nabla u_j||_{p(x)}^{p^- -1} = \infty$ segue que $\lim_{j\to\infty} \frac{\langle Au_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{||u_j||_V} = \infty$. Se N_1 e N_2 são infinitos então temos por (5.1) e (5.2)

$$\frac{\langle Au_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{||u_j||_V} \geq \begin{cases} \frac{1}{2^{p^- -1}}||u||_V^{p^-} \ , \ se \ \ j \geq j_1 \ \ e \ \ j \in N_2 \\ \frac{||\nabla u_j||_{p(x)}^{p^- -1}}{2} \ , \ se j \geq j_1 \ \ e \ \ j \in N_1 \end{cases}$$

e portanto $\lim_{j\to\infty} \frac{\langle Au_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{||u_j||_V} = \infty$. Para o 3º caso existe $j_2 \in \mathbb{N}$ tal que $||u_j||_{p(x)} \geq 1$ se $j \geq j_2$. Sejam $\widetilde{N}_1 = \{j \geq j_2; ||\nabla u_j||_{p(x)} < 1\}$ e $\widetilde{N}_2 = \{j \geq j_2; ||\nabla u_j||_{p(x)} \geq 1\}$. Se $\widetilde{N}_1$ é finito basta analisarmos $j \geq j_2$ tal que $j \in \widetilde{N}_2$. Assim, segue de (5.1) que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\langle Au_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{||u_j||_V} = \infty.$$

Se $\widetilde{N}_2$ é finito basta analisarmos $j \geq j_2$ tal que $j \in \widetilde{N}_1$. Logo, de (5.3) concluímos que

$$\frac{\langle Au_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{||u_j||_V} \geq \frac{1}{2}||u_j||_{p(x)}^{p^- -1}$$

e como $\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2}||u_j||_{p(x)}^{p^- -1} = \infty$ segue que $\lim_{j\to\infty} \frac{\langle Au_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{||u_j||_V} = \infty$. Se $\widetilde{N}_1$ e $\widetilde{N}_2$ são infinitos então temos por (5.1) e (5.3) que

$$\frac{\langle Au_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{||u_j||_V} \geq \begin{cases} \frac{1}{2^{p^- -1}}||u_j||_V^{p^-} \ , \ se \ \ j \geq j_2 \ \ e \ \ j \in \widetilde{N}_2 \\ \frac{||u_j||_{p(x)}^{p^- -1}}{2} \ , \ se \ \ j \geq j_2 \ \ e \ \ j \in \widetilde{N}_1 \end{cases}$$

e portanto $\lim_{j\to\infty} \frac{\langle Au_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{||u_j||_V} = \infty$ e o lema está provado. ■

Lema 5.2.7 *O operador $A : V \to V^*$ é hemicontínuo.*

Demonstração: Vamos provar que $A(u+tv) \rightharpoonup Au$ quando $t \to 0$ para todo $u, v \in V = W^{1,p(x)}(\Omega)$. Como $p^- > 1$ segue do Teorema 5.1.3 que V é reflexivo. Logo, precisamos provar que

$$\lim_{t\to 0}\langle A(u+tv), \phi\rangle_{V^*,V} = \langle Au, \phi\rangle_{V^*,V}$$

para toda $\phi \in V$. Sejam $u, v, \phi \in V$ e $t \in (-1, 1)$. Por conveniência vamos denotar

$$f_t(x) = |\nabla(u+tv)|^{p(x)-2}\nabla(u+tv).\nabla\phi + |u+tv|^{p(x)-2}(u+tv)\phi$$

e

$$f(x) = |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla\phi - |u|^{p(x)-2}u\phi.$$

Então

$$|\langle A(u+tv),\phi\rangle_{V^*,V}-\langle Au,\phi\rangle_{V^*,V}|=\left|\int_\Omega f_t(x)dx-\int_\Omega f(x)dx\right|=\left|\int_\Omega [f_t(x)-f(x)]\,dx\right|.$$

Observe agora que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f_t(x) &= \lim_{t\to 0}|\nabla(u+tv)|^{p(x)-2}\nabla(u+tv).\nabla\phi+|u+tv|^{p(x)-2}(u+tv)\phi\\ &= |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla\phi+|\nabla u|^{p(x)-2}u\phi\\ &= f(x)\end{aligned}$$

e para todo $x\in\Omega$

$$\begin{aligned} & |f_t(x)|=||\nabla(u+tv)|^{p(x)-2}\nabla(u+tv).\nabla\phi+|u+tv|^{p(x)-2}(u+tv)\phi|\\ \leq\ & ||\nabla(u+tv)|^{p(x)-2}\nabla(u+tv).\nabla\phi|+||u+tv|^{p(x)-2}(u+tv)\phi|=|\nabla(u+tv)|^{p(x)-1}|\nabla\phi|\\ +\ & |u+tv|^{p(x)-1}|\phi|\leq(|\nabla u|+|t||\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla\phi|+(|u|+|t||v|)^{p(x)-1}|\phi|\\ \leq\ & 2^{p(x)-2}\left(|\nabla u|^{p(x)-1}+|\nabla v|^{p(x)-1}\right)|\nabla\phi|+2^{p(x)-2}\left(|u|^{p(x)-1}+|v|^{p(x)-1}\right)|\phi|\\ =\ & 2^{p(x)-2}\left[\left(|\nabla u|^{p(x)-1}+|\nabla v|^{p(x)-1}\right)|\nabla\phi|+\left(|u|^{p(x)-1}+|v|^{p(x)-1}\right)|\phi|\right].\end{aligned}$$

Como $\phi,u,v\in V=W^{1,p(x)}(\Omega)$, $p(x)\in L^\infty(\Omega)$ e $p(x)\geq 2$, isto é $p(x)-1\geq 1$ o que implica $L^{p(x)-1}(\Omega)\subset L^1(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega|2^{p(x)-2}|\left|\left[\left(|\nabla u|^{p(x)-1}+|\nabla v|^{p(x)-1}\right)|\nabla\phi|+\left(|u|^{p(x)-1}+|v|^{p(x)-1}\right)|\phi|\right]dx\right|<\infty$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\begin{aligned}0\leq\lim_{t\to 0}|\langle A(u+tv),\phi\rangle_{V^*,V}-\langle Au,\phi\rangle_{V^*,V}| &= \lim_{t\to 0}\left|\int_\Omega [f_t(x)-f(x)]\,dx\right|\\ &\leq \lim_{t\to 0}\int_\Omega |f_t(x)-f(x)|dx=0\end{aligned}$$

onde concluímos que

$$\lim_{t\to 0}\langle A(u+tv),\phi\rangle_{V^*,V}=\langle Au,\phi\rangle_{V^*,V}.$$

■

Provamos que o operador $A:V\to V^*$, $V=W^{1,p(x)}(\Omega)$ definido por

$$A(u)(v)=\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla v dx+\int_\Omega|u|^{p(x)-2}u.v dx.$$

é monótono, coercivo e hemicontínuo para cada $u,v,\phi\in V$ e portanto A é maximal monótono (veja [2]). Seja Agora A_H a realização de A em $H=L^2(\Omega)$ dada por

$$\begin{cases} D(A_H):=\{u\in V; A(u)\in H\}\\ A_H(u)=A(u),\ se\ u\in D(A_H)\end{cases}.$$

Usualmente, podemos representar $\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla v dx$ por $-\Delta_{p(x)}$. Mostraremos que A_H é a subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i. Considere

$$\varphi_{p(x)}(u)=\begin{cases}\displaystyle\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx+\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}dx\ ,se\ u\in V\\ +\infty,\ se\ u\in H-V\end{cases}.$$

Lema 5.2.8 *A Aplicação $\varphi_{p(x)}$ é convexa e própria.*

Demonstração: Seja $u \in V = W^{1,p(x)}(\Omega)$. Então $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $\nabla u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Assim,

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}dx \leq \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}dx\right] < \infty$$

donde $\varphi_{p(x)}$ é própria. Como a aplicação λ^p é convexa para $\lambda > 0$ então para $u, v \in V$ e $0 \leq t \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
& \varphi_{p(x)}(tu+(1-t)v) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla(tu+(1-t)v)|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|tu+(1-t)v|^{p(x)}dx \\
= \; & \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|t\nabla u+(1-t)\nabla v|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|tu+(1-t)v|^{p(x)}dx \\
\leq \; & \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(t|\nabla u|+(1-t)|\nabla v|\right)^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(t|u|+(1-t)|v|\right)^{p(x)}dx \\
\leq \; & \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(t|\nabla u|^{p(x)}+(1-t)|\nabla v|^{p(x)}\right)dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(t|u|^{p(x)}+(1-t)|v|^{p(x)}\right)dx \\
= \; & t\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + t\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}dx + (1-t)\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla v|^{p(x)}dx \\
+ \; & (1-t)\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|v|^{p(x)}dx = t\varphi_{p(x)}(u) + (1-t)\varphi_{p(x)}(v)
\end{aligned}$$

logo $\varphi_{p(x)}$ é convexa e o lema está provado. ■

Lema 5.2.9 *A Aplicação $\varphi_{p(x)}$ é semicontínua inferiormente.*

Demonstração: Devemos mostrar que $\varphi_{p(x)}(u) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_n)$ se $u_n \to u$ em H. Seja então (u_n) tal sequência. Se $\liminf_{n\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_n) = +\infty$, então

$$\varphi_{p(x)}(u) \leq +\infty = \liminf_{n\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_n).$$

Caso contrário, se $\liminf\limits_{n\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_n) = a < +\infty$ então existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset V$ de (u_n) tal que

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_{n_j}) = \lim_{j\to\infty}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_{n_j}|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u_{n_j}|^{p(x)}dx\right) = a.$$

Como $\varphi_{p(x)}(u_{n_j}) \to a$ quando $j \to \infty$ temos que $\varphi_{p(x)}(u_{n_j})$ é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que

$$|\varphi_{p(x)}(u_{n_j})| \leq M$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Usando o Teorema 5.1.1 obtemos que

$$||u_{n_j}||_{p(x)} \leq \begin{cases} (p^+M)^{\frac{1}{p^-}}, & se \;\; ||u_{n_j}||_{p(x)} \geq 1 \\ (p^+M)^{\frac{1}{p^+}}, & se \;\; ||u_{n_j}||_{p(x)} < 1 \end{cases}$$

e

$$||\nabla u_{n_j}||_{p(x)} \leq \begin{cases} (p^+M)^{\frac{1}{p^-}}, & se \;\; ||\nabla u_{n_j}||_{p(x)} \geq 1 \\ (p^+M)^{\frac{1}{p^+}}, & se \;\; ||\nabla u_{n_j}||_{p(x)} < 1 \end{cases}.$$

e assim podemos concluir que $||u_{n_j}||_V$ é uma sequência limitada no espaço de Banach reflexivo $V = W^{1,p(x)}(\Omega)$. Logo (u_{n_j}) possui uma subsequência (que também iremos denotar por (u_{n_j})) tal que $u_{n_j} \rightharpoonup v$ em V para algum $v \in V$. Como $H^* \subset V^*$ temos que $u_{n_j} \rightharpoonup v$ em H e pela unicidade do limite fraco $u = v \in V$. Considerando agora a subdiferencial $\partial\varphi_{p(x)}$ de $\varphi_{p(x)}$ obtemos

$$\langle \partial\varphi_{p(x)}(u), u_{n_j} - u\rangle_{V^*,V} \leq \varphi_{p(x)}(u_{n_j}) - \varphi_{p(x)}(u)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo

$$\langle \partial\varphi_{p(x)}(u), u_{n_j} - u\rangle_{V^*,V} + \varphi_{p(x)}(u) \leq \varphi_{p(x)}(u_{n_j})$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $u_{n_j} \rightharpoonup u$ em V e $\varphi_{p(x)}(u) \in V^*$ segue que

$$\langle \partial\varphi_{p(x)}(u), u_{n_j} - u\rangle_{V^*,V} \to 0$$

quando $j \to \infty$. Portanto, quando $j \to \infty$

$$\varphi_{p(x)}(u) \leq \lim_{j\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_{n_j}) = a = \liminf_{j\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_n).$$

■

Teorema 5.2.1 *A_H é a subdifirencial $\partial\varphi_{p(x)}$ de $\varphi_{p(x)}$.*

Demonstração: Temos que $\partial\varphi_{p(x)}$ e A_H, que é a realização de A em H, são maximais monótonos em H. Então, é suficiente provar que

$$\partial\varphi_{p(x)}(u) \subset A_H(u)$$

qualquer que seja $u \in H$. Assim, basta mostrar que $A_H(u) \subset \partial\varphi_{p(x)}(u)$. Seja então $u \in D(A_H) := \{u \in V; A(u) \in H\}$ e seja $v \in A(u) = A_H(u)$. Então para todo $\xi \in V$ temos

$$\begin{aligned}
&\langle v, \xi - u\rangle_{V^*,V} = \langle A_H(u), \xi - u\rangle_{V^*,V} = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.(\nabla\xi - \nabla u)dx \\
+ &\int_\Omega |u|^{p(x)-2}u.(\xi - u)dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla\xi dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \\
+ &\int_\Omega |u|^{p(x)-2}u.\xi dx - \int_\Omega |u|^{p(x)}dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla\xi dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}u.\xi dx \\
- &\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega |u|^{p(x)}dx.
\end{aligned}$$

Considerando $q(x)$ de forma que $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{q(x)} = 1$ temos

$$\begin{aligned}
&\langle v, \xi - u\rangle_{V^*,V} + \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla\xi dx \\
+ &\int_\Omega |u|^{p(x)-2}u.\xi dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla\xi|dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-1}|\xi|dx \\
\leq &\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|\nabla u|^{(p(x)-1)q(x)} + \frac{1}{p(x)}|\nabla\xi|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{(p(x)-1)q(x)} + \frac{1}{p(x)}|\xi|^{p(x)}dx \\
= &\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla\xi|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\xi|^{p(x)}dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\langle v,\xi-u\rangle_{V^*,V}+\int_\Omega\left(1-\frac{1}{q(x)}\right)|\nabla u|^{p(x)}dx+\int_\Omega\left(1-\frac{1}{q(x)}\right)|u|^{p(x)}dx\\ \leq\ &\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\nabla\xi|^{p(x)}dx+\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\xi|^{p(x)}dx.\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que

$$\langle v,\xi-u\rangle_{V^*,V}+\varphi_{p(x)}(u)\leq\varphi_{p(x)}(\xi)$$

o de forma equivalente

$$\langle v,\xi-u\rangle_{V^*,V}\leq\varphi_{p(x)}(\xi)-\varphi_{p(x)}(u)$$

para todo $\xi\in V$. Se $\xi\in H-V$ então $\varphi_{p(x)}(\xi)=\infty$ e a desigualdade acima vale. Isso mostra que $A_H(u)=v\in\partial\varphi_{p(x)}(u)$. ■

Pelo Corolário 2.1 em [9] sabemos que o domínio de A_H é um subconjunto denso de $D(\varphi_{p(x)})$, em que $D(\varphi_{p(x)})=\{u\in H:\varphi_{p(x)}(u)<\infty\}=V$. Como $V\subset H$ e as imersões são contínuas e compactas, temos que $V\subset\overline{D(A_H)}^H$. Consequentemente obtemos que $\overline{D(A_H)}^H=H$.

5.3 Resultados de existência

Nesta seção, em decorrência das estimativas e propriedades obtidas da seção anterior iremos apresentar algumas consequências importantes.

Definição 5.3.1 *[3] Seja A um operador atuando em um espaço de Hilbert H e $f\in L^1(0,T;H)$. A função $u\in C([0,T];H)$ é uma solução forte da inclusão*

$$\frac{du}{dt}+Au\ni f \tag{5.4}$$

se u é absolutamente contínua em qualquer subconjunto compacto de $(0,T)$, $u(t)\in D(A)$ para q.t.p $t\in(0,T)$ e $\frac{du}{dt}(t)+Au(t)\ni f(t)$ para q.t.p $t\in(0,T)$.

Definição 5.3.2 *[3] Dizemos que $u\in C([0,T];H)$ é uma solução fraca da inclusão (5.4) se existem sequencias $f_n\in L^1(0,T;H)$ e $u_n\in C([0,T];H)$ tal que u_n é solução forte da inclusão*

$$\frac{du_n}{dt}+Au_n\ni f_n,$$

com $f_n\to f$ em $L^1(0,T;H)$ e $u_n\to u$ uniformemente em $[0,T]$.

Definição 5.3.3 *[23] A função $u\in C([0,T];H)$ é uma solução forte do problema*

$$\begin{cases}\frac{du}{dt}(t)+A(u(t))+B(u(t))=0\ ,\ t>0\\ u(o)=u_o\in H\end{cases} \tag{5.5}$$

em que A é um operador maximal monótono e B uma aplicação globalmente Lipschitziana em um espaço de Hilbert H, se u é absolutamente contínua em qualquer subintervalo compacto de $(0,T)$, $u(t)\in D(A)$ para q.t.p $t\in(0,T)$ e

$$\frac{du}{dt}(t)A(u(t)) + B(u(t)) = 0$$

para q.t.p $t \in (0,T)$. A função $u \in C([0,T];H)$ é dita uma solução fraca de (5.5) se existe uma sequência (u_n) de soluções fortes convergindo para u em $C([0,T];H)$.

Com isso, concluímos os seguintes resultados de existência e unicidade de soluções para equações envolvendo o operador $p(x)$-Laplaciano em que Ω é um domínio suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $p(x) \in C(\overline{\Omega})$ com $p(x) > 2$ para q.t.p $x \in \Omega$, $u_o \in \overline{D(A_H)}^H = H$ e $f \in L^1(0,T;H)$. Temos as seguintes consequências:

Consequência 1: O problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = f \\ u(o) = u_o \end{cases}$$

tem uma única solução fraca, pois pelo que provamos $-\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u$ é maximal monótono, e assim a unicidade da solução é garantida pelo Teorema 3.4 em [3].

Consequência 2: Pelo Teorema 3.17 em [3], se $\omega > 0$, $f \in L^1(0,T;H)$ e $u_o \in \overline{D(A_H)}^H = H$ então existe uma única solução fraca do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u - \omega u = f \\ u(o) = u_o \end{cases} .$$

Consequência 3: Pela Proposição 1, p.695 em [23] segue que a equação

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) - \Delta_{p(x)}u(t) + |u(t)|^{p(x)-2}u(t) = B(u(t))\ ,\ t > 0 \\ u(o) = u_o \in H \end{cases} ,$$

em que $B : H \to H$ é uma aplicação globalmente Lipschitziana determina um semigrupo contínuo de operadores não lineares

$$\{T(t) : H \to H\ ,\ t \geq 0\}$$

onde para cada $u_o \in H$, $t \mapsto T(t)u_o$ é uma solução fraca global da equação acima começando em u_o. Este semigrupo é tal que

$$\mathbb{R}^+ \times H \ni (t, u_o) \mapsto T(t)u_o \in H$$

é uma aplicação contínua e, se $u_o \in D(A_H)$ então $u(\cdot) := T(\cdot)u_o$ é uma solução forte Lipschitziana contínua da equação dada.

Bibliografia

[1] G.Akagi,M. Ôtani, “Evolution inclusions governed by subdifferentials in reflexive Banach spaces”, J. evol. equ. n.4, p.519-541, 2004.

[2] V. Barbu, Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces, New York: Springer, 2010.

[3] H. Brezis, Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert, Amsterdam/New York: Math Studies, vol. 5, North-Holland, 1973.

[4] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II/A, New York: Linear Monotone Operators, Springer-Verlag, 1990.

[5] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, New York: Springer, 2011.

[6] C.R. Oliveira, Introdução a análise funcional, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, Impa, 2010.

[7] W. Rudin, Real and Complex Analysis, New York: McGraw-Hill, 1970.

[8] A.R. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, 1978.

[9] V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space, Noordhoff International, 1976.

[10] M. Ôtani, “Nonlinear evolution equations with time-dependent constraints”. Advances in Mathematical Sciences and Applications, n.3, p.383-399, 1993-1994.

[11] M. Ôtani, “Nonmonotone Pertubations for Nonlinear Parabolic Equations Associated with Subdifferential Operators, Cauchy Problems”, Journal of Differential Equations, n.46, p.268-299, 1982.

[12] J.Simsen, M.S. Simsen, “On $p(x)$-Laplacian parabolic problems”, Nonlinear Studies, n.3, p.393-403, 2011.

[13] J Simsen, M.S. Simsen, “Existence and upper semicontinuity of global attractors for $p(x)$-Laplacian systems”. J. Math. Anal. Appl., n.388, p.23-38, 2012.

[14] J. Simsen, M.S Simsen, F.B Rocha,“Existence of solutions for some classes of parabolic problems involving variable exponents”, preprint, 2012.

[15] L. Diening, “Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents”, Springer-Verlag, Heidelberg, 2011.

[16] X.L. Fan, D. Zhao, “On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$”, J. Math. Anal.Appl, n.263, p.424-446, 2001.

[17] H. Musielak, “Orlicz spaces and modular spaces”, Lecture Notes in Mathematics, v.1034, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[18] H. Hudzik, “On generalized Orlicz-Sobolev space”, Funct. Approx., n.4, p.37-51, 1977.

[19] X.L. Fan, Q.H. Zhang, “Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems”, Nonlinear Anal. n.52, p.1843-1852, 2003.

[20] M. Sanchon, J.M. Urbano, “ Entropy solutions for the $p(x)$-Laplace equation, Trans. Amer. Soc., n.361, p.6387-6405, 2009.

[21] X.L.Fan, Y. Zhao, D.Zhao, “Compact imbedding theorems with symmetry os Strauss-Lions type for the space $W^{1,p(x)}(\Omega)$”. J. Math. Anal. Appl., n.255, p.333-348, 2001.

[22] D. Edmunds, J. Rakosnik, “Sobolev embeddings with variable exponent”. Studia Math., n.143, p.267-293, 2000.

[23] A.N. Carvalho, J.W. Cholewa, T. Dlotko, “Global attractors for problems with monotone operators”. Boll. U.M.I., n.(3)2, p.693-706, 1999.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB_6/1700

R672i

Rocha, Franco Bassi
Inclusões Diferenciais Governadas por Operadoras do Tipo Subdiferencial em Espaços de Banach Reflexivos / Franco Bassi Rocha. -- Itajubá, (MG) : [s.n.], 2013.
75 p. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Mariza Stefanello Simsen.
Coorientador: Prof. Dr. Jacson Simsen.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Existência e unicidade. 2. Subdiferencial. 3. p(x)-Laplaciano. I. Simsen, Mariza Stefanello, orient. II. Simsen, Jacson, coorient. III. Universidade Federal de Itajubá. IV. Título.