UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Teoria de Semigrupos Multívocos: Atratores para Inclusões Diferenciais

Edson do Nascimento Neres Júnior

UNIFEI - ITAJUBÁ
Fevereiro / 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Edson do Nascimento Neres Júnior

Teoria de Semigrupos Multívocos: Atratores para Inclusões Diferenciais

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de **Mestre em Ciências em Matemática.**

Área de Concentração: Análise Matemática

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Fevereiro de 2013
Itajubá

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Edson do Nascimento Neres Júnior

Teoria de Semigrupos Multívocos: Atratores para inclusões diferenciais

Dissertação aprovada por banca examinadora em 20 de fevereiro de 2013, conferido ao autor o título de **Mestre em Ciências em Matemática.**

Banca examinadora:
Prof. Dr Jacson Simsen
Prof. Dr Marcos Roberto Teixeira Primo
Prof.ª Dr.ª Márcia Sayuri Kaschimoto

Itajubá
Fevereiro de 2013

Dedico este trabalho aos meus pais Edson e Alaide,
pois sem eles este sonho não se realizaria.

Agradecimentos

A Deus pela vida, por ter me dado forças para superar as dificludades e assim realizar este sonho.

Aos meus pais, Edson e Alaide, e minha irmã Ellen (Pioia), pelo amor e carinho sempre presentes na minha vida.

Aos meus padrinhos, João Antônio e Maria de Fátima, pelo amor e carinho. A todos os meus familiares em particular aos meus avós pelo apoio e torcida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Jacson Simsen, por ter sido não apenas um excelente orientador, mas também, um verdadeiro amigo.

Aos professores do departamento de matemática da UNIFEI e da UNIMONTES pela participação na construção do meu conhecimento.

Aos meus amigos de mestrado, Adriano Braga, Adriana, Fernando Guimarães, Fernando Felix, Franco Bassi, Jarne Donizetti, Luiz Fernando, Paulo Henrrique, Rafael Faria, Tiago Ribeiro, Warley Ferreira, Warley Batista pelo bom ambiente de trabalho e companheirismo.

Aos amigos de república, Celso (mãe), Fernando Felix, Fernando Guimarães, Jarne, José pelo convívio.

Aos amigos, Cláudio (Chula), Rivanildo (Pimba), Warley, PH Silva, Tiago Ribeiro, Celso, Franco, Marlon Peixoto, Henrrique, Rosângela (Rosa), Célia, Elizângela pela amizade.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Obrigado a todos!

Edson do Nascimento Neres Júnior

“ O correr da vida embrulha tudo. A vida é assim: esquenta e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e depois desinquieta. O que ela quer da gente é coragem. ”

João Guimarães Rosa.

Resumo

Este trabalho trata-se do estudo da teoria abstrata de semigrupos multívocos e da aplicação desta teoria à inclusões diferenciais em espaços de Banach.

Palavras-chave:
Semigrupo multívoco, m-semifluxo, ω-limite, atrator global, inclusões diferenciais.

Abstract

This work deals with the study of the abstract theory of multivalued semigroups and application of this theory to differential inclusions in Banach spaces.

Keywords.
Multivalued semigroup, m-semiflow, ω-limit, global attractor, differential inclusions.

Índice

Resumo iv
Abstract v

Introdução **1**

1 Pré Requisitos **2**
1.1 Coletânea de Resultados 2

2 Teoria de Semigrupos Multívocos **10**
2.1 Preliminares 10
2.2 Conjuntos ω-Limites e Atratores Globais para Semigrupos Multívocos 13

3 Atratores de Inclusões em Espaços de Banach **24**
3.1 Atratores de Inclusões de Evolução Governado por Operadores m-Dissipativos 24
3.2 Aplicações 34
3.2.1 Inclusões Diferenciais em Espaços de Hilbert 34
3.2.2 Inclusões Diferenciais Parciais com p-Laplaciano 39

Apêndice **46**

Bibliografia **50**

Introdução

A proposta deste trabalho é reunir num texto resultados abstratos sobre a teoria de semigrupos multívocos em espaços de Banach, tal teoria é uma importante ferramenta matemática para estudar o comportamento qualitativo de problemas de evolução temporal, sendo o artigo [1] a parte central e as referências [2, 3, 4] complementações. São apresentados resultados que garantem a existência do B-atrator global negativamente invariante compacto, o qual é o minimal entre todos os B-atratores globais fechados. Também é possível definir semigrupos multívocos definidos por semifluxos generalizados veja [5].

Além disso, aplicaremos estes resultados abstratos para inclusões de evolução do tipo

$$\frac{dy}{dt}(t) \in A(y(t)) + F(y(t)), \text{ com } y(0) = y_0 \in X,$$

em que $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to 2^X$, $F : X \to 2^X$ são aplicações multívocas. Consideraremos o caso especial $A = \partial\varphi$ em que $\partial\varphi$ é a subdiferencial de um aplicação própria, convexa e semicontínua inferiormente φ.

Por último, aplicaremos os resultados apresentados para o seguinte problema de inclusões diferenciais governadas pelo p-Laplaciano

$$(P_{N_\lambda}) \begin{cases} \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial t} - div(D^\lambda |\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda) + |u_\lambda|^{p-2} u_\lambda \in F(u_\lambda) + h & \text{em } (0,T) \times \Omega \\ u_\lambda(0,x) = u_{0,\lambda}(x) & \text{em } \Omega \end{cases}$$

sendo que $h, u_{0,\lambda} \in L^2(\Omega)$, $D^\lambda \in L^\infty(\Omega)$, $D^\lambda(x) \geq \sigma > 0$ q.t.p. em Ω, $\lambda \in [0, \lambda_0]$ e $D^\lambda \to D^0$, em $L^\infty(\Omega)$ quando $\lambda \to 0$, Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$.

Neste trabalho adotamos a convenção [ ] para indicar onde as definições e os resultados podem ser encontrados, caso o leitor queira saber mais detalhes.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 1 enunciaremos algumas definições e resultados de Análise Funcional, Espaços Métricos e Topologia. No capítulo 2 apresentaremos a teoria abstrata de semigrupos multívocos. Finalmente no capitulo 3 aplicaremos esta teoria à inclusões de evolução governadas por operadores m-Dissipativos e à resolução de um problema envolvendo inclusões diferenciais governadas pelo p-Laplaciano.

Capítulo 1

Pré Requisitos

1.1 Coletânea de Resultados

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados que utilizamos ao longo deste trabalho. As definições e resultados dessa seção podem ser encontrados em [3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

Denotaremos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ para definições e resultados.

Definição 1.1.1 *Uma norma num espaço vetorial V (real ou complexo) é uma aplicação $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz*

(i) $||\xi|| \geq 0$ *para todo* $\xi \in V$, *e* $||\xi|| = 0$ *se, e somente se,* $\xi = 0$.

(ii) $||\alpha\xi|| = |\alpha|||\xi||$, *para todo* $\xi \in V$ *e qualquer* $\alpha \in \mathbb{F}$.

(iii) $||\xi + \eta|| \leq ||\xi|| + ||\eta||$ *para todos* $\xi, \eta \in V$.

Definição 1.1.2 *Um espaço métrico (X, d) é completo se toda sequência de Cauchy converge a um elemento desse espaço.*

Definição 1.1.3 *Um espaço normado V que é completo com a métrica induzida pela norma é chamado espaço de Banach.*

Definição 1.1.4 *Um operador linear entre os espaços vetoriais V e W é uma aplicação $T : dom\, T \subset V \to W$ em que seu domínio $dom\, T$ é um subespaço vetorial e*

$$T(\xi + \alpha\eta) = T(\xi) + \alpha T(\eta)$$

para todos $\xi, \eta \in dom\, T$ *e todo escalar* $\alpha \in \mathbb{F}$.

Observação 1.1.1 *Se $W = \mathbb{F}$ então temos que $T : dom\, T \subset V \to W$ é chamado de funcional linear.*

Teorema 1.1.1 *Seja $T : V \to W$ um operador linear entre espaços normados. Então as seguintes proposições são equivalentes:*

(i) $\sup\limits_{||\xi|| \leq 1} ||T\xi|| < \infty$, *ou seja, a imagem da bola unitária é limitada;*

(ii) *Existe* $C > 0$ *de modo que* $||T\xi|| \leq C||\xi||$, *para todo* $\xi \in V$;

(iii) *T é uniformemente contínuo;*

(iv) *T é contínuo;*

(v) *T é contínuo em zero.*

Definição 1.1.5 *Um operador linear contínuo é também chamado de limitado, e o conjunto dos operadores limitados de V em W será denotado por $B(V,W)$.*

Definição 1.1.6 *Se V é um espaço normado, então o espaço de Banach $B(V,\mathbb{F})$ será denotado por V^* e chamado de espaço dual de V. Cada elemento de V^* é chamado de funcional linear contínuo em V. A norma em V^* será dada por*

$$||f||_{V^*} = \sup\{|f(x)|; x \in V, ||x|| \leq 1\}.$$

Definição 1.1.7 *O espaço bidual, V^{**} de V é o espaço dual de V^*, isto é, $V^{**} = (V^*)^*$. A norma em V^{**} será dada por*

$$||f||_{V^{**}} = \sup\{|f(g)|; g \in V^*, ||g||_{V^*} \leq 1\}.$$

Observação 1.1.2 *Como V^* é um espaço de Banach, está definido $V^{**} = (V^*)^*$. Há uma forma natural de identificar elementos de V com elementos do seu bidual: a cada $\xi \in V$ associa-se $\hat{\xi} \in V^{**}$ por*

$$\hat{\xi}(f) := f(\xi).$$

Definição 1.1.8 *Sejam V e W espaços métricos. Uma aplicação $f : V \to W$ é uma imersão isométrica quando $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ para quaisquer $x, y \in V$.*

Definição 1.1.9 *Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetora.*

Observação 1.1.3 *A aplicação $\hat{\xi} : V \to V^{**}$ mencionada na Observação 1.1.2 é uma isometria linear e consequentemente injetora.*

Definição 1.1.10 *Se a aplicação $\hat{\xi}$ é sobrejetora, então o espaço normado V é chamado de espaço reflexivo. Em outras palavras V é reflexivo se ele é isomorfo a V^{**} e o isomorfismo sendo dado por essa aplicação.*

Definição 1.1.11 *Seja $0 < p < \infty$ e um espaço de medida $(X, \sum, \mu)$. O espaço $L^p_\mu(X)$ é definido como o conjunto de todas as funções complexas mensuráveis em X tais que*

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Teorema 1.1.2 *Seja $(X, \sum, \mu)$ um espaço de medida finita. Então $L^p_\mu(X)$ é um espaço reflexivo para cada $1 < p < \infty$.*

Definição 1.1.12 *Um produto interno no espaço vetorial V é um funcão de $V \times V \to \mathbb{F}$ que para cada $(\xi, \eta) \in V \times V$ associa-se o elemento $\langle \xi, \eta \rangle \in \mathbb{F}$ e que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\langle \xi + \eta, \zeta \rangle = \langle \xi, \zeta \rangle + \langle \eta, \zeta \rangle$ *para todo $\xi, \eta, \zeta \in V$;*

(ii) $\langle \alpha\xi, \eta \rangle = \alpha \langle \xi, \eta \rangle$ *para todo $\xi, \eta \in V$ e $\alpha \in \mathbb{F}$;*

(iii) $\langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \xi \rangle}$ *para todo* $\xi, \eta \in V$;

(iv) $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$ *para todo* $\xi \in V$ *e* $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ *se, e somente se* $\xi = 0$.

Proposição 1.1.1 *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja* V *um espaço com produto interno. Então para* $\xi, \eta \in V$ *vale:*

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \leq ||\xi||_V \, ||\eta||_V.$$

Definição 1.1.13 *Um espaço de Hilbert* H *é um espaço com produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno.*

Teorema 1.1.3 *(Teorema de Representação de Riesz) Seja* H *um espaço de Hilbert. Dado* $f \in H^*$ *existe um único* $y \in H$ *tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

para todo $x \in H$. *Além disso*

$$||f||_{H^*} = ||y||_H.$$

Em particular, $H^* = H$ *no sentido que esses espaços são isometricamente isomorfos.*

Definição 1.1.14 *Sejam* V_1 *e* V_2 *espaços normados. Dizemos que* $V_1 \subset V_2$ *com imersão contínua se existe* $c > 0$ *tal que*

$$||x||_{V_2} \leq c||x||_{V_1}, \; \forall \, x \in V_1,$$

e a inclusão $V_1 \subset V_2$ *é densa se* $\overline{V_1}^{V_2} = V_2$.

Lema 1.1.1 *(Desigualdade de Young) Sejam* $\theta, \theta' \geq 1$ *expoentes conjugados, ou seja* $\dfrac{1}{\theta} + \dfrac{1}{\theta'} = 1$. *Então para quaisquer números reais positivos* a, b *temos que*

$$ab \leq \frac{1}{\theta} a^{\theta} + \frac{1}{\theta'} b^{\theta'}.$$

Definição 1.1.15 *Uma função* $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *é absolutamente contínua se para cada* $\varepsilon > 0$ *existir algum* $\delta > 0$, *tal que se* $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,2,\ldots,n}$ *é uma família de intervalos disjuntos contidos em* $[a,b]$ *com* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) < \delta$, *então* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$.

Definição 1.1.16 *Seja* V *um espaço normado. Uma sequência* $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ *converge fracamente a* $\xi \in V$ *se* $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f(\xi_n) = f(\xi)$ *para todo* $f \in V^*$. *Iremos denotar essa convergência por* $\xi_n \rightharpoonup \xi$.

Definição 1.1.17 *Uma sequência* $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (V, || \cdot ||_V)$ *converge a* $\xi \in V$ *se* $||\xi_n - \xi||_V \to 0$ *quando* $n \to \infty$. *Iremos denotar essa convergência por* $\xi_n \to \xi$.

Teorema 1.1.4 *Seja* V *um espaço de Banach reflexivo e seja* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência limitada em* V. *Então podemos extrair uma subsequência que converge fracamente.*

Lema 1.1.2 *(Desigualdade de Gronwall-Bellman) Seja $m \in L^1(0,T;R)$ tal que $m \geq 0$ q.t.p em $(0,T)$ e seja $a \geq 0$ constante. Seja ϕ uma função contínua de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$ verificando*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\phi(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

Então

$$\phi(t) \leq ae^{\displaystyle\int_0^t m(s)ds}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Definição 1.1.18 *Seja V um espaço vetorial normado. Dizemos que V é uniformemente convexo se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in V$ satisfazendo $||x||_V, ||y||_V \leq 1$ e $||x-y||_V > \varepsilon$ então*

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|_V < 1 - \delta.$$

Introduziremos a seguir o espaço $L^p(\Omega)$: Dada $f \in V^*$ e $u \in V$ usaremos a seguinte notação: $\langle f, u\rangle_{V^*,V} = f(u)$. Note que $\langle u, v\rangle_{V^*,V} = \langle u, v\rangle$ para todo $u \in H$ e $v \in V$ em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno em H.

Dado Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis à Lebesgue $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $x \mapsto |u(x)|^p$ é integrável em Ω, no sentido de Lebesgue. A norma de $u \in L^p(\Omega)$ é dada por

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis à Lebesgue e essencialmente limitadas em Ω, isto é, existe $C > 0$ tal que $|u(x)| \leq C$ para q.t.p $x \in \Omega$. Cada constante C é denominada majorante essencial de $|u|$ e a norma de $u \in L^\infty(\Omega)$ é definida por

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \inf_{x\in\Omega}\{C; |u(x)| \leq C,\ q.t.p\ x \in \Omega\} = \sup \text{ess}\ |u|.$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, munido de sua respectiva norma torna-se um espaço de Banach.

Definição 1.1.19 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) | \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, \ldots, n\right\}$$

em que a derivada $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ é definida pela expressão

$$\int_\Omega u\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right|_{L^p(\Omega)}$$

Proposição 1.1.2 *O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$.*

Teorema 1.1.5 *(Rellich-Kondrachov) Suponha Ω limitado de classe C^1. Temos*

(i) *se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p')$ onde $\dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,*

(ii) *se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$,*

(iii) *se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,*

com imersões compactas. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com imersões compactas para todo p.

Definição 1.1.20 *Seja $1 \leq p < \infty$, $W_o^{1,p}(\Omega)$ designa o fecho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.*

O espaço $W_o^{1,p}(\Omega)$ munido da norma induzida por $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável; é reflexivo se $1 < p < \infty$.

Teorema 1.1.6 *Seja $F : X \to Y$ função entre espaços topológicos. São equivalentes:*

(i) *F é contínua*

(ii) *Para cada $A \subset X$, tem-se $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$*

(iii) *Para cada fechado $B \subset Y$, o conjunto $F^{-1}(B)$ é fechado em X.*

(iv) *Para cada $x \in X$ e cada vizinhança V de $F(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $F(U) \subset V$.*

Definição 1.1.21 *Um espaço métrico é separável se existe um subconjunto contável denso nesse espaço.*

Definição 1.1.22 *Uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um espaço X é dita cobrir X ou ser uma cobertura de X se a reunião dos elementos de $\mathcal{A}$ contém X. Ela é chamada uma cobertura aberta de X se seus elementos são abertos de X.*

Definição 1.1.23 *Um espaço topológico X é dito ser compacto se toda cobertura aberta $\mathcal{A}$ de X contém uma subcoleção finita que também cobre X.*

Definição 1.1.24 *Um espaço topológico X é dito localmente compacto em x se existe algum subespaço compacto C de X que contém uma vizinhança de x. Se X é localmente compacto em cada um de seus pontos, X é dito localmente compacto.*

Definição 1.1.25 *Um espaço topológico para o qual toda cobertura aberta contém uma subcobertura enumerável é chamado espaço Lindelöf.*

Definição 1.1.26 *Um conjunto A em um espaço métrico (X,d) é chamado relativamente compacto se o fecho $\overline{A}$ é compacto.*

Teorema 1.1.7 *Um conjunto A em um espaço métrico (X,d) é relativamente compacto se, e somente se, toda sequência $\{x_n\}$ cujos elementos pertencem a A, tem uma subsequência convergente.*

Definição 1.1.27 *Um conjunto A em um espaço métrico* (X,d) *é chamado precompacto se para cada* $\varepsilon > 0$*, existe um conjunto finito de pontos em X,* $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$*, tal que A está contido na união das bolas abertas* $B(x_i, \varepsilon)$*,* $i = 1, ..., n$ *, onde* $B(x_i, \varepsilon) = \{x : d(x, x_i) < \varepsilon\}$.

Teorema 1.1.8 *Um conjunto relativamente compacto em um espaço métrico é precompacto.*

Teorema 1.1.9 *Um conjunto A em um espaço métrico completo* (X,d) *é relativamente compacto, se e somente se, é precompacto.*

Definição 1.1.28 *Um espaço topológico X é chamado um espaço de Hausdorff se para cada par* x_1, x_2 *de pontos disjuntos de X existem vizinhanças* V_1 *e* V_2 *de* x_1 *e* x_2*, respectivamente, que são disjuntas, ou seja,* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Definição 1.1.29 *Um espaço X é chamado um espaço de Baire se dada qualquer coleção enumerável* $\{\mathcal{A}_n\}_n$ *de conjuntos fechados de X, cada um dos quais com interior vazio em X, a reunião* $\bigcup\limits_n \mathcal{A}_n$ *também tem interior vazio em X.*

Teorema 1.1.10 *(Teorema de Baire) Se X é um espaço Hausdorff compacto ou um espaço métrico completo, então X é um espaço de Baire.*

Definição 1.1.30 *Um espaço topológico X é dito regular se para cada* $x \in X$ *e cada fechado* $B \subset X$ *que não contém x, existem abertos disjuntos contendo x e B.*

Definição 1.1.31 *Um espaço topológico X é dito normal se para cada par A, B de fechados disjuntos de X, existem abertos disjuntos contendo A e B.*

Lema 1.1.3 *Um espaço topológico X é regular se, e somente se, dado um ponto x de X e uma vizinhança U de x, existe uma vizinhança V de x tal que* $\overline{V} \subset U$.

Teorema 1.1.11 *Todo espaço Hausdorff compacto é normal.*

Lema 1.1.4 *(Lema da colagem) Seja* $X = A \cup B$*, em que A e B são fechados em X. Sejam* $f : A \to Y$ *e* $g : B \to Y$ *funções contínuas. Se* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in A \cap B$*, então f e g combinadas geram uma função contínua* $h : X \to Y$ *definida tomando-se* $h(x) = f(x)$ *se* $x \in A$ *e* $h(x) = g(x)$ *se* $x \in B$.

Lema 1.1.5 *(Desigualdade de Tartar) Seja* $p \geq 2$*. Então, para todo* $a, b \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$

$$\left\langle \|a\|^{p-2}a - \|b\|^{p-2}b, a - b \right\rangle \geq \gamma_0 \|a - b\|^p$$

em que γ_0 *é positivo e depende apenas de p e de m.*

Corolário 1.1.1 *(Riez-Fischer) Se* $f_n \to f$ *em* $L^p_\mu(X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$*, então existe uma subsequência* (f_{n_j}) *tal que* $f_{n_j}(x) \to f(x)$ *μ-q.t.p. em X.*

Definição 1.1.32 *Seja V um espaço de Banach. Uma função convexa e própria em V é uma função* $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ *para o qual existe* $u \in V$ *com* $\varphi(u) < \infty$ *e satisfaz a desigualdade* $\varphi((1-t)u + tv) \leq (1-t)\varphi(u) + t\varphi(v)$ *para todo u,* $v \in V$, $t \in [0,1]$.

Definição 1.1.33 *A função* $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ *é dita ser semicontínua inferiormente (s.c.i.) se* $\varphi(u) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \varphi(u_n)$ *para toda sequência* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $u_n \to u$ *em V.*

Definição 1.1.34 *Um funcional sublinear no espaço vetorial* X *é uma aplicação* $p : X \to \mathbb{R}$ *que satisfaz, para todos* ξ, $\eta \in X$,

$$p(\xi+\eta) \leq p(\xi)+p(\eta) \text{ (subaditividade)}$$

$$p(\alpha\xi) = \alpha p(\xi), \ \alpha \geq 0.$$

Teorema 1.1.12 *(Hahn-Banach real) Sejam* X *um espaço vetorial real e* $p : X \to \mathbb{R}$ *um funcional sublinear. Se* $f : Z \to \mathbb{R}$ *é um funcional linear definido no subespaço* $Z \subset X$ *que é dominado por* p*, ou seja,*

$$f(\varsigma) \leq p(\varsigma), \ \forall\, \varsigma \in Z,$$

então f *possui uma extensão linear* $F : X \to \mathbb{R}$ *que também é dominada por* p*, ou seja,*

$$F(\xi) \leq p(\xi), \ \forall\, \xi \in X.$$

F *é chamada de extensão de Hahn-Banach de* f.

Teorema 1.1.13 *(Hahn-Banach complexo) Seja* X *um espaço vetorial (real ou complexo) e* $p : X \to [0,\infty)$ *satisfazendo*

$$p(\xi+\eta) \leq p(\xi)+p(\eta), \ \forall\, \xi, \ \eta \in X,$$

$$p(\alpha\xi) = |\alpha|\, p(\xi), \ \forall\, \xi \in X, \ \alpha \in \mathbb{F}.$$

Se $f : Z \to \mathbb{F}$ *é um funcional linear definido no subespaço* $Z \subset X$ *com* $|f(\varsigma)| \leq p(\varsigma)$, $\forall\, \varsigma \in Z$ *(i.e.,* f *é dominado por* p*), então* f *possui uma extensão linear* $F : X \to \mathbb{K}$ *dominada por* p*, ou seja,*

$$|F(\xi)| \leq p(\xi), \ \forall\, \xi \in X.$$

F *é chamada de extensão de Hahn-Banach de* f.

Corolário 1.1.2 *Seja* M *um subespaço vetorial de* $\mathcal{N}$ *(ambos sobre o mesmo corpo). Então todo* f *em* M^**, o dual de* M*, possui uma extensão* $F \in \mathcal{N}^*$ *com* $\|F\| = \|f\|$.

Teorema 1.1.14 *Sejam* $\mathcal{N}$ *um espaço normado não-trivial e* $\mathcal{N}^*$ *seu espaço dual. Então:*

(i) *Se* $0 \neq \xi \in \mathcal{N}$*, então existe* $f \in \mathcal{N}^*$ *com* $f(\xi) = \|\xi\|$ *e* $\|f\| = 1$.

(ii) *Se* η *e* ξ *são elementos distintos de* $\mathcal{N}$*, então existe* $f \in \mathcal{N}^*$ *de modo que* $f(\xi) \neq f(\eta)$ *(separa pontos).*

(iii) *Se* $\xi \in \mathcal{N}$ *satisfaz* $f(\xi) = 0$*, para todo* $f \in \mathcal{N}^*$*, então* $\xi = 0$.

(iv) *Se* $\xi \in \mathcal{N}$*, então*

$$\|\xi\| = \sup_{0\neq f\in\mathcal{N}^*} \frac{|f(\xi)|}{\|f\|} = \max_{0\neq f\in\mathcal{N}^*} \frac{|f(\xi)|}{\|f\|}.$$

Proposição 1.1.3 *Sejam* X *um subespaço vetorial fechado próprio de* $\mathcal{N}$ *e* $\xi \in \mathcal{N} - X$*. Se* $\delta = d(\xi, X) := \inf_{\eta\in X} \|\xi-\eta\|$*, então existe* $f \in \mathcal{N}^*$ *satisfazendo*

$$\|f\| = 1, \ f(\xi) = \delta \text{ e } f|_X = 0.$$

Definição 1.1.35 *Uma aplicação $G : U \to \mathcal{P}(X)$ é semicontínua superiormente em $u \in U$, se para cada subconjunto D aberto em X com $G(u) \subset D$, existe uma vizinhança V de u, tal que $G(v) \subset D$, para cada $v \in V$. Se G é semicontínua superiormente em cada $u \in U$, então ela é semicontínua superiormente em U.*

Definição 1.1.36 *Uma aplicação $G : U \to \mathcal{P}(X)$ é semicontínua inferiormente em $u_0 \in U$, se para qualquer $v_0 \in G(u_0)$ e qualquer vizinhança D de v_0, existe uma vizinhança V de u_0 tal que $\forall\ u \in V$, $G(u) \cap D \neq \emptyset$. Se G é semicontínua inferiormente em cada $u \in U$, então G é semicontínua inferiormente em U.*

Definição 1.1.37 *Uma aplicação $G : U \to \mathcal{P}(X)$ é contínua em U se, e somente se, G é semicontínua superiormente e semicontínua inferiormente em todo $u \in U$.*

Consideremos para os próximos resultados e definições que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suficientemente suave $\partial\Omega$.

Definição 1.1.38 *Sejam X, Y espaços métricos e $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma aplicação multívoca $G : \Omega \times X \to Y$ com valores fechados é chamada uma aplicação de Carathéodory se para cada $x \in X$ a aplicação $\omega \mapsto G(\omega, x)$ é mensurável e para cada $\omega \in \Omega$ a aplicação $x \mapsto G(\omega, x)$ é contínua.*

Definição 1.1.39 *Seja $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensuravél e X um espaço métrico completo e separável. Considere $G : \Omega \to X$. Uma aplicação mensurável $g : \Omega \to X$ satisfazendo $g(\omega) \in G(\omega)$ para $\omega \in \Omega$ q.t.p., é chamada uma seleção de G.*

Teorema 1.1.15 *Sejam X um espaço métrico separável, $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, G uma aplicação mensurável com valores de Ω em subconjuntos não vazios e fechados de X. Então, existe uma seleção mensurável de G.*

Capítulo 2

Teoria de Semigrupos Multívocos

2.1 Preliminares

Sejam X um espaço métrico completo com métrica denotada por ρ, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ e 2^X o conjunto de todos os subconjuntos de X.

Durante o restante desta seção, usaremos as seguintes notações:
$\mathcal{P}(X) := \{A \subset X : A \neq \emptyset\}$.
$\mathcal{B}(X) := \{B \subset X : B \neq \emptyset$ é um conjunto limitado em $X\}$.
$\mathcal{C}(X) := \{C \subset X : C \neq \emptyset$ é um conjunto fechado em $X\}$.
$\mathcal{K}(X) := \{K \subset X : K \neq \emptyset$ é um conjunto compacto em $X\}$.

Para a aplicação multívoca $F : X \to 2^X$ denote $\mathcal{D}(F) = \{x \in X : F(x) \in \mathcal{P}(X)\}$.

Definição 2.1.1 *[1] A aplicação multívoca $G : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ é chamada um semigrupo multívoco (ou m-semifluxo) se satisfazer as seguintes condições:*

(i) $G(0,\cdot) = I$ *é aplicação identidade.*

(ii) $G(t_1+t_2,x) \subset G(t_1,G(t_2,x))$, $\forall\, t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+$, $\forall\, x \in X$ *para o qual*

$$G(t,B) = \bigcup_{x\in B} G(t,x),\ B \subset X.$$

Definição 2.1.2 *[1] Dizemos que a aplicação $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to X$ é uma trajetória do semigrupo multívoco $G : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ correspondente à condição inicial x_0, se*

$$x(t+\tau) \in G(t,x(\tau)),\ \forall\, t,\tau \in \mathbb{R}_+,\ x(0) = x_0.$$

Denotemos por $\mathcal{D}(x_0)$ o conjunto de todas as trajetórias correspondentes a x_0.
Para $x \in X$, $A,B \subset X$ definiremos

$$\operatorname{dist}(x,B) = \inf_{y\in B}\{\rho(x,y)\}.$$

A distância entre A e B é definida por

$$\operatorname{dist}(A,B) = \sup_{x\in A}\{\operatorname{dist}(x,B)\}.$$

Para $\varepsilon > 0$, $B \in \mathcal{B}(X)$, o conjunto $O_\varepsilon(B) = \{y \in X : \operatorname{dist}(y,B) < \varepsilon\}$ é uma ε-vizinhança de B.

Observação 2.1.1 $O_\varepsilon(\overline{B}) = \bigcup\limits_{x\in\overline{B}} B(x,\varepsilon)$

Definição 2.1.3 *[1] Diz-se que o conjunto $A \subset X$ atrai o conjunto B pelo semigrupo multívoco $G : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ se $dist(G(t,B),A) \to 0$, quando $t \to +\infty$. O conjunto M é um B-atrator global se ele atrai cada $B \in \mathcal{B}(X)$.*

Observação 2.1.2 *Note que A atrai B se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, $\exists\, T(B,\varepsilon) \geq 0$ tal que $G(t,B) \subset O_\varepsilon(A)$ $\forall\, t \geq T(B,\varepsilon)$.*

Para cada $M \subset X$ vamos denotar

$$\gamma_t^+(M) = \bigcup_{\tau\geq t} G(\tau,M) \text{ e } \gamma^+(M) = \gamma_0^+(M),\ \gamma_{[t_1,t_2]}^+(M) = \bigcup_{\tau\in[t_1,t_2]} G(\tau,M).$$

O conjunto $\omega(M) := \bigcap\limits_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(M)}$ é chamado ω-limite do conjunto M.

Observação 2.1.3 $\gamma_{t_1}^+(M) \subset \gamma_{t_2}^+(M)$, *$\forall\, t_1 \geq t_2$. De fato, seja $y \in \gamma_{t_1}^+(M) \Rightarrow y \in \gamma_{t_1}^+(x_0)$ para algum $x_0 \in M$, daí $y \in G(\ell,x_0)$, para algum $\ell \in [t_1,\infty) \subset [t_2,\infty)$. Logo $y \in \gamma_{t_2}^+(x_0)$ para algum $x_0 \in M$. Portanto $y \in \gamma_{t_2}^+(M)$.*

Proposição 2.1.1 $\omega(M_1) \subset \omega(M_2)$ *se $M_1 \subset M_2$.*

Demonstração: Mostremos que para cada $t \geq 0$, $\gamma_t^+(M_1) \subset \gamma_t^+(M_2)$. Realmente, seja $y \in \gamma_t^+(M_1) = \bigcup\limits_{\tau\geq t} G(\tau,M_1) \Rightarrow y \in G(\tau_0,M_1) = \bigcup\limits_{x\in M_1} G(\tau_0,x)$ para algum $\tau_0 \geq t$. Logo $y \in G(\tau_0,x_0)$ para algum $x_0 \in M_1 \subset M_2$. Assim $y \in \bigcup\limits_{\tau\geq t} G(\tau,M_2) = \gamma_t^+(M_2)$. Logo $\overline{\gamma_t^+(M_1)} \subset \overline{\gamma_t^+(M_2)}$ e portanto $\omega(M_1) \subset \omega(M_2)$. ■

Proposição 2.1.2 *[1]* $\omega(M) = \{\xi : \xi = \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n,\ \xi_n \in G(t_n,M), t_n \to \infty\}$.

Demonstração: Seja $\xi \in \omega(M) = \bigcap\limits_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(M)}$, então $\xi \in \overline{\bigcup\limits_{\tau\geq t} G(\tau,M)}$, $\forall\, t \geq 0$. Assim, para cada $t \geq 0$ existe uma sequência $\xi_n^t \in \bigcup\limits_{\tau\geq t} G(\tau,M)$ tal que $\xi_n^t \to \xi$, $n \to \infty$. Note que $\xi_n^t \in G(\tau_n,M)$, para algum $\tau_n \geq t$. Considere a sequência $\{\xi_n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\xi_n^n \in G(\tau_n,M)$ com $\tau_n \geq n$. Portanto temos que $\xi_n^n \to \xi$ e $\xi_n^n \in G(\tau_n,M)$, $\tau_n \to \infty$.

Por outro lado, seja $D = \{\xi : \xi = \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n,\ \xi_n \in G(t_n,M), t_n \to \infty\}$. Mostremos que $D \subset \omega(M)$. De fato, seja $\xi \in D$. Então existe uma sequência $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $\xi_n \in G(t_n,M)$, $t_n \to \infty$ tal que $\xi_n \to \xi$, $n \to \infty$. Seja $t \geq 0$, podemos considerar sem perda de generalidade que $t_n \geq t$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Logo, $\xi \in \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} G(t_n,M)} \subset \overline{\bigcup\limits_{\tau\geq t} G(\tau,M)}$. Como $t \geq 0$ foi arbitrário $\xi \in \bigcap\limits_{t\geq 0} \overline{\bigcup\limits_{\tau\geq t} G(\tau,M)} = \omega(M)$. ■

Definição 2.1.4 *[1] O semigrupo multívoco $G : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ é chamado assintoticamente semicompacto superior se $\forall\, B \in \mathcal{B}(X)$ tal que existe $T(B) \in \mathbb{R}_+$, de modo que $\gamma_{T(B)}^+(B) \in \mathcal{B}(X)$, qualquer sequência $\xi_n \in G(t_n,B)$, $t_n \to \infty$, é précompacta em X.*

Definição 2.1.5 *[1] O conjunto A é negativamente invariante se* $A \subset G(t,A)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$. *A é positivamente invariante se* $G(t,A) \subset A$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$. *A é invariante se ele é positivamente e negativamente invariante, isto é,* $A = G(t,A)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$.

Proposição 2.1.3 *[1] Seja* $M \in \mathcal{B}(X)$ *um conjunto negativamente invariante com relação ao semigrupo multívoco G e seja* $Z \subset X$ *um conjunto que atrai M, então* $M \subset \overline{Z}$.

Demonstração: Como Z atrai M, dado $\varepsilon > 0$ existe $T(M,\varepsilon) \geq 0$ tal que $M \subset G(t,M) \subset O_\varepsilon(Z)$, $\forall\, t \geq T(M,\varepsilon)$. Portanto, $M \subset \bigcap_{\varepsilon>0} O_\varepsilon(Z) = \overline{Z}$. ■

Proposição 2.1.4 *[2] Se uma aplicação multívoca* $G(t,\cdot)$ *for semicontínua superiormente e tem valores fechados, isto é,* $G(t,\cdot) : X \to \mathcal{C}(X)$, *então o gráfico da* $G(t,\cdot)$ *é fechado.*

Demonstração: Seja (x_n, y_n) uma sequência de elementos do gráfico de $G(t,\cdot)$ de modo que $(x_n, y_n) \to (x,y) \in X \times \mathcal{P}(X)$. Devemos mostrar que $(x,y) \in \text{graf}\, G(t,\cdot)$, ou seja $y \in G(t,x)$. De fato, seja D vizinhança de $G(t,x)$ (qualquer). Considere um aberto $\widetilde{D}$ tal que $G(t,x) \subset \widetilde{D} \subset D$ com $\widetilde{D} \cap \partial(D) = \emptyset$ em que $\partial(D)$ é a fronteira de D. Como $G(t,\cdot)$ é semicontinuo superiormente existe uma vizinhança V_x de x tal que $G(t,V_x) \subset \widetilde{D}$. Como $x_n \to x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0$, $x_n \in V_x$. Logo, $y_n \in G(t,x_n) \subset G(t,V_x) \subset \widetilde{D}$. Como $y_n \to y$ então $y \in \overline{\widetilde{D}} \subset D$. Portanto $y \in \overline{G(t,x)} = G(t,x)$. ■

Proposição 2.1.5 *[2] Seja* $G(t,\cdot) : X \to \mathcal{K}(X)$ *uma aplicação semicontínua superiormente. Se* $W \subset X$ *é compacto então* $G(t,W)$ *é compacto.*

Demonstração: Devemos mostrar que toda cobertura aberta $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $G(t,W)$ contém uma cobertura aberta finita cobrindo $G(t,W) = \bigcup_{x\in W} G(t,x)$. De fato, como cada imagem $G(t,x)$ é compacta, então existe uma cobertura finita de U_λ cobrindo $G(t,x)$, isto é, $\exists\, n(x) \in \mathbb{N}$, tal que

$$G(t,x) \subset U_x := \bigcup_{1 \leq i \leq n(x)} U_{\lambda_i}.$$

Como $G(t,\cdot)$ é semicontínua superiormente, existe uma vizinhança V_x de x tal que $G(t,V_x) \subset U_x$. Note que $\bigcup_{x\in W} V_x$ é uma cobertura aberta de W. Como W é compacto $W \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} V_{x_j}$. Logo

$$G(t,W) \subset G(t, \bigcup_{1\leq j\leq p} V_{x_j}) \subset \bigcup_{1\leq j\leq p} G(t,V_{x_j}) \subset \bigcup_{1\leq j\leq p} U_{x_j} = \bigcup_{1\leq j\leq p} \bigcup_{1\leq i\leq n(x_j)} U_{\lambda_i}.$$

Assim, a partir da cobertura aberta $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, nos encontramos uma cobertura finita aberta $\{U_{\lambda_i} : 1 \leq j \leq p;\ 1 \leq i \leq n(x_j)\}$ de $G(t,W)$. Portanto $G(t,W)$ é compacto. ■

Proposição 2.1.6 *[3] Uma aplicação* $G(t,\cdot) : X \to \mathcal{P}(X)$ *é semicontínua superiormente se, e somente se, a imagem inversa* $G^{-1}(t,A)$ *de um conjunto fechado* $A \subset X$ *é fechado em X.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja $A \subset X$ fechado. Mostremos que $X - G^{-1}(t,A)$ é aberto em X. De fato, seja $x \in X - G^{-1}(t,A)$. Logo $G(t,x) \subset X - A$. Como $G(t,\cdot)$ é semicontínua superiormente, existe uma vizinhança V_x de x tal que $G(t,V_x) \subset X - A$. Então $V_x \subset X - G^{-1}(t,A)$. Logo $x \in \text{int}\{X - G^{-1}(t,A)\}$. Portanto, como $x \in X - G^{-1}(t,A)$ foi arbitrário temos que $X - G^{-1}(t,A)$

é aberto e assim o resultado segue.

($\Leftarrow$) Por outro lado, seja D uma vizinhança aberta de $G(t,x)$. Logo $D = X - A$ para algum fechado A em X. Assim $x \in X - G^{-1}(t,A)$. Por hipótese temos que $G^{-1}(t,A)$ é fechado, logo $x \in \text{int}\{X - G^{-1}(t,A)\}$. Então existe V_x vizinhança de x tal que $V_x \subset X - G^{-1}(t,A)$. Logo $G(t,V_x) \subset D$. Portanto $G(t,\cdot)$ é semicontínua superiormente. ■

Proposição 2.1.7 *[15] Uma aplicação multívoca $G(t,\cdot) : X \to \mathcal{P}(X)$ semicontínua superiormente com valores conexos leva conexos em conexos.*

2.2 Conjuntos ω-Limites e Atratores Globais para Semigrupos Multívocos

Teorema 2.2.1 *[1] Seja G um semigrupo multívoco assintoticamente semicompacto superior. Então para qualquer $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\gamma^+_{T(B)}(B) \in \mathcal{B}(X)$ para algum $T(B) \in \mathbb{R}_+$ temos que $\omega(B) \neq \emptyset$ e $\omega(B) \in \mathcal{K}(X)$. Se além disso, se para cada $t \in \mathbb{R}_+$, $G(t,\cdot) : X \to \mathcal{C}(X)$ é semicontínua superiormente, então $\omega(B)$ é negativamente invariante e é o conjunto minimal fechado que atrai B. Mais ainda, $\omega(B)$ é conexo se ele atrai algum conjunto conexo limitado $B_1 \supset \omega(B)$ e $G(t,x)$ é conexo $\forall\, t \geq t_0$, $\forall\, x \in X$, para algum $t_0 \geq 0$.*

Demonstração: Seja G um semigrupo multívoco assintoticamente semicompacto superior e seja $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\gamma^+_{T(B)}(B) \in \mathcal{B}(X)$, para algum $T(B) \in \mathbb{R}_+$.

Mostremos que $\omega(B) \neq \emptyset$. De fato, seja $\xi_n \in G(t_n,B)$, em que $t_n \to \infty$, uma sequência arbitrária. Como o semigrupo multívoco G é assintoticamente semicompacto superior então, $\{\xi_n\}$ contém uma subsequência, que continuaremos chamando de $\{\xi_n\}$, convergente. Digamos $\{\xi_n\} \to \xi$, então pela Proposição 2.1.2, temos que $\xi \in \omega(B)$, portanto $\omega(B) \neq \emptyset$.

Mostremos agora que $\omega(B) \in \mathcal{K}(X)$. Realmente, seja $\{y_n\}$ uma sequência pertencente a $\omega(B)$. Então pela Proposição 2.1.2 $y_n = \lim\limits_{k\to\infty} z^n_k$, com $z^n_k \in G(t^n_k,B)$, $t^n_k \to \infty$ quando $k \to \infty$, logo $\rho(y_n, z^n_{k_0(n)}) < \dfrac{1}{n}$, para algum $k_0(n) \in \mathbb{N}$, $k_0(n) \geq n$. Tome $z_n = z^n_{k_0(n)}$, $z_n \in G(t^n_{k_0(n)},B)$. Considerando $\tau_n = t^n_{k_0(n)}$, temos $\rho(y_n,z_n) < \dfrac{1}{n}$, $z_n \in G(\tau_n,B)$ com $\tau_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Uma vez que G é assintoticamente semicompacto superior, podemos escolher uma subsequência $z_m \in G(\tau_m,B)$ tal que $z_m \to z_0$ em X. Assim, $z_0 \in \omega(B)$ e $\rho(y_m,z_0) \leq \rho(y_m,z_m) + \rho(z_m,z_0) < \dfrac{1}{m} + \rho(z_m,z_0) \to 0$ quando $m \to +\infty$. Portanto existe uma subsequência $y_m \to z_0 \in \omega(B)$ o que implica que $\omega(B) \in \mathcal{K}(X)$.

Suponhamos agora $G(t,\cdot) : X \to \mathcal{C}(X)$ é semicontínua superiormente. Mostremos que $\omega(B)$ é negativamente invariante. De fato, seja $\xi \in \omega(B)$ e $t \geq 0$. Então pela Proposição 2.1.2 existe $\xi_n \in G(t_n,B)$ com $t_n \to \infty$ tal que $\xi_n \to \xi$. Assim para $t_n \geq t$ temos $G(t_n,B) = G(t_n - t + t, B) \subset G(t, G(t_n - t, B))$. Então $\xi_n \in G(t,\theta_n)$ com $\theta_n \in G(t_n - t, B)$. Como G é assintoticamente semicompacto superior e $t_n - t \to \infty$ quando $n \to \infty$, existe uma subsequência $\{\theta_{n_m}\}$, tal que $\theta_{n_m} \to \theta \in \omega(B)$. Note que $\xi_{n_m} \to \xi$ e $\xi_{n_m} \in G(t,\theta_{n_m})$ com $\theta_{n_m} \to \theta \in \omega(B)$. Logo $(\theta_{n_m}, \xi_{n_m}) \to (\theta,\xi)$. Pela proposição 2.1.4 temos que $\xi \in G(t,\theta) \subset G(t,\omega(B))$. Portanto $\omega(B) \subset G(t,\omega(B))$ *para todo* $t \geq 0$.

Mostremos que $\omega(B)$ atrai B. Com efeito, suponha que isto não ocorra, então existe $\varepsilon_0 > 0$ uma sequência $\xi_n \in G(t_n,B)$, $t_n \to \infty$ tal que

$$\text{dist}(\xi_n, \omega(B)) \geq \varepsilon_0. \tag{2.1}$$

Por outro lado, como G é assintoticamente semicompacto superior, $\xi_n \to \xi \in \omega(B)$ (veja a Proposição 2.1.2). Logo $\mathrm{dist}(\xi_n, \omega(B)) < \varepsilon_0$, $\forall\, n$ suficiente grande, o que contradiz (2.1), Portanto $\omega(B)$ atrai B.

Mostremos agora que $\omega(B)$ é o conjunto minimal fechado que atrai B. De fato, note que $\omega(B)$ é fechado. Seja F um conjunto fechado que atrai B, logo dado $\varepsilon > 0$, existe $T(\varepsilon, B)$ tal que $G(t,B) \subset O_\varepsilon(F)$, $\forall\, t \geq T(\varepsilon, B)$. Logo $\overline{\gamma_t^+(B)} \subset \overline{O_\varepsilon(F)}$, $\forall\, t \geq T(\varepsilon, B)$, consequentemente $\bigcap\limits_{t \geq T(\varepsilon,B)} \overline{\gamma_t^+(B)} \subset \overline{O_\varepsilon(F)}$, $\forall\, \varepsilon > 0$. Portanto $\omega(B) \subset \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \overline{O_\varepsilon(F)} = \overline{F} = F$.

Mostremos que $\omega(B)$ é conexo se ele atrai algum conjunto conexo limitado $B_1 \supset \omega(B)$ e $G(t,x)$ é conexo $\forall\, t \geq t_0$, $\forall x \in X$. Suponha que $\omega(B)$ não é conexo. Então existem dois conjuntos fechados não vazios W_1 e W_2 de modo que $\omega(B) = W_1 \cup W_2$, com $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Daí $O_\varepsilon(\omega(B)) = O_\varepsilon(W_1 \cup W_2) = O_\varepsilon(W_1) \cup O_\varepsilon(W_2)$ é uma ε-vizinhança de $\omega(B)$. Como $\omega(B)$ atrai B_1, podemos encontrar $t_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que $G(t,B_1) \subset O_\varepsilon(\omega(B))$, $\forall\, t \geq t_1$. Pela Proposição 2.1.7, temos que $G(t,B_1)$ é conexo e $G(t,B_1) \subset O_\varepsilon(W_1)$ ou $G(t,B_1) \subset O_\varepsilon(W_2)$. Como $\omega(B)$ é negativamente invariante $\omega(B) \subset G(t_1, \omega(B)) \subset G(t_1, B_1)$ o que implica $\omega(B) \subset O_\varepsilon(W_1)$ ou $\omega(B) \subset O_\varepsilon(W_2)$, como $\omega(B) = W_1 \cup W_2$, $W_1 = \emptyset$ ou $W_2 = \emptyset$, absurdo pois W_1 *e* W_2 são diferentes do vazios. ■

Observação 2.2.1 *[1] Decorre da prova do teorema anterior que todas as afirmações com exceção da conexidade que a condição do semigrupo multívoco $G(t,\cdot) : X \to \mathcal{P}(X)$ ser semicontínuo superiormente pode ser trocada pela condição do gráfico de G ser fechado.*

Observação 2.2.2 *[1] Quando nos restringimos ao caso unívoco a condição de assintoticamente semicompacto superior para o semigrupo multívoco coincide com a condição de classe $A\mathcal{K}$ para o semigrupo. Lembrando que um semigrupo $\{G(t,\cdot)\}_{t \geq 0}$ é de classe $A\mathcal{K}$, se para cada $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\gamma^+(B) \in \mathcal{B}(X)$, cada sequência da forma $\{G(t_n, x_n)\}$, onde $\{x_n\} \subset B$ e $t_n \to +\infty$, contém uma subsequência convergente.*

As três proposições seguintes são úteis para verificar em aplicações que um semigrupo multívoco é assintoticamente semicompacto superior.

Proposição 2.2.1 *[1] Seja $G(t_1,\cdot) : X \to \mathcal{P}(X)$ uma aplicação compacta para algum $t_1 \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$, isto é, $\forall\, B \in \mathcal{B}(X)$, $G(t_1, B)$ é precompacto em X. Então o semigrupo multívoco G é assintoticamente semicompacto superior.*

Demonstração: Seja $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que existe $T(B) \in \mathbb{R}$ para o qual $\gamma^+_{T(B)}(B) \in \mathcal{B}(X)$. Seja $\xi_n \in G(t_n, B)$ uma sequência arbitrária, onde $t_n \to \infty$. Queremos mostrar que ξ_n é precompacta em X. De fato, pela Observação 2.1.3 tem-se que $\gamma^+_\tau(B) \subset \gamma^+_{T(B)}(B)$, $\forall\, \tau \geq T(B)$, logo $\gamma^+_\tau(B) \in \mathcal{B}(X)$, se $\forall\, \tau \geq T(B)$. Como G é um semigrupo multívoco, temos:

$$\gamma^+_{t_1+\tau}(B) = \bigcup_{s \geq \tau} G(t_1 + s, B) \subset \bigcup_{s \geq \tau} G(t_1, G(s,B)) = G(t_1, \gamma^+_\tau(B)).$$

Como $\gamma^+_\tau(B) \in \mathcal{B}(X)$, $\forall\, \tau \geq T(B)$, temos que $G(t_1, \gamma^+_\tau(B))$ é precompacto $\forall\, \tau \geq T(B)$ e então $\gamma^+_{t_1+\tau}(B)$ é precompacto $\forall\, \tau \geq T(B)$. Logo, para cada n tal que $t_n \geq \tau + t_1$ temos que $\xi_n \in \gamma^+_{t_1+\tau}(B)$. Portanto podemos encontrar uma subsequência convergente de $\{\xi_n\}$. ■

Proposição 2.2.2 *[1] Seja $G(t,\cdot) : X \to \mathcal{K}(X)$ semicontínua superiormente $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$ e seja a aplicação $G(t_1,\cdot)$ compacta para algum $t_1 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Então a aplicação $G(t_1 + t, \cdot)$ também é compacta para qualquer $t \in \mathbb{R}_+$.*

Demonstração: Seja $B \in \mathcal{B}(X)$. Queremos mostrar que $G(t_1+t,B)$ é precompacto. De fato, como G é um semigrupo multívoco

$$G(t_1+t,B) \subset G(t,G(t_1,B)) \subset G(t,\overline{G(t_1,B)}).$$

Por hipótese temos que G é semicontínua superiormente e tem valores compactos. Então pela Proposição 2.1.5 o conjunto $G(t,\overline{G(t_1,B)})$ é compacto em X. Uma vez que

$$\overline{G(t_1+t,B)} \subset \overline{G(t,\overline{G(t_1,B)})} = G(t,\overline{G(t_1,B)}),$$

e, como fechado em um compacto é compacto temos que, $\overline{G(t_1+t,B)}$ é compacto, i.é., $G(t_1+t,B)$ é precompacto. ■

Proposição 2.2.3 *[1] Seja X um espaço de Banach e seja $G(t,\cdot)=F(t,\cdot)+K(t,\cdot)$ um semigrupo multívoco onde $K(t_0,\cdot): X \to \mathcal{P}(X)$ é uma aplicação compacta para algum $t_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ e $F(t,\cdot): X \to \mathcal{P}(X)$ satisfaz*

$$dist(F(t,x),F(t,y)) \leq m_1(t)m_2(diam\gamma^+_{T(B)}(B)), \forall\, x,y \in B \in \mathcal{B}(X), \forall\, t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.2}$$

em que $m_2: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua e $m_1: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma aplicação decrescente tal que $m_1(t) \to 0$, quando $t \to \infty$. Então G é assintoticamente semicompacto superior.

Demonstração: Seja $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\exists\, T(B) \in \mathbb{R}_+$ de modo que $\gamma^+_{T(B)}(B) \in \mathcal{B}(X)$. Considere $N = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência arbitrária, com $\xi_n \in G(t_n,B)$, $t_n \to \infty$. Queremos mostrar que N é precompacto em X. De fato, para $\varepsilon > 0$, tome $t_1 = t_1(\varepsilon) \geq t_0 > 0$ tal que

$$m_1(t_1) \leq \frac{\varepsilon}{2m_2(\mathrm{diam}\gamma^+_{T(B)}(B))}$$

e decomponha N em dois conjuntos, $N = N_1 \cup N_2$ de forma que, $N_1 = \{\xi_n\}_{n=1}^{n_1}$, $t_n < t_1 + T(B)$ e $N_2 = \{\xi_n\}_{n=n_1+1}^{\infty}$, $t_n \geq t_1 + T(B)$. Note que $N_2 \subset G(t_1,\gamma^+_{T(B)}(B))$ pois

$$\gamma_{t_1+T(B)}(B) = \bigcup_{t \geq T(B)} G(t_1+t,B) \subset \bigcup_{t \geq T(B)} G(t_1,G(t,B)) = G(t_1,\gamma^+_{T(B)}(B)).$$

Por outro lado, como $\gamma^+_{T(B)}(B) \in \mathcal{B}(X)$, temos pela Proposição 2.2.2 que $K(t_1,\gamma^+_{T(B)}(B))$ é precompacto. Usando (2.2) temos,

$$\begin{aligned}
\dim F(t_1,\gamma^+_{T(B)}(B)) &= \sup_{x,y \in \gamma^+_{T(B)}(B)} \{dist(F(t_1,x),F(t_1,y)\} \\
&\leq \sup_{x,y \in \gamma^+_{T(B)}(B)} \{m_1(t_1)m_2(\mathrm{diam}\gamma^+_{T(B)}(B))\} \\
&\leq \frac{\varepsilon m_2(\mathrm{diam}\gamma^+_{T(B)}(B))}{2m_2(\mathrm{diam}\gamma^+_{T(B)}(B))} = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Assim podemos encontrar uma cobertura aberta finita para $G(t_1,\gamma^+_{T(B}(B))$. Consequentemente, existe também uma cobertura aberta finita para N_2. Portanto N pode ser coberto por finitas bolas, i.é., N é precompacto. Portanto G é assintoticamente semicompacto superior. ■

Corolário 2.2.1 *[1] Seja X um espaço métrico completo e seja o semigrupo multívoco $G(t,\cdot): X \to \mathcal{P}(X)$ satisfazendo* (2.2)*. Então, G é assintoticamente semicompacto superior.*

Proposição 2.2.4 *[1] Seja R um B-atrator global. Então valem as seguintes propriedades.*

(i) *Para qualquer conjunto A limitado e negativamente invariante, tem-se que $A \subset \overline{R}$.*

(ii) *Se R é limitado e negativamente invariante, então para qualquer B-atrator global Z fechado, tem-se $R \subset Z$. Portanto se R é também fechado ele é o minimal entre todos os B-atratores globais fechados.*

Demonstração: i): Seja $A \in \mathcal{B}(X)$ e $A \subset G(t,A)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$. Então R atrai A, i.é., para todo $\varepsilon > 0$, $\exists\, T(A,\varepsilon) \geq 0$ tal que $G(t,A) \subset O_\varepsilon(R)$, $\forall\, t \geq T(A,\varepsilon)$. Portanto, como ε é arbitrário, $A \subset \bigcap\limits_{\varepsilon>0} O_\varepsilon(R) = \overline{R}$.

ii): Pela letra anterior $R \subset \overline{Z} = Z$. ■

Definição 2.2.1 *[1] O semigrupo multívoco G é chamado ponto dissipativo se $\exists\, B_0 \in \mathcal{B}(X)$ atraindo qualquer ponto $x \in X$.*

Teorema 2.2.2 *[1] Seja G um semigrupo multívoco assintoticamente semicompacto superior. Suponha que $G(t,\cdot): X \to \mathcal{C}(X)$ seja semicontinua superiormente para qualquer $t \in \mathbb{R}_+$. Se $\forall\, B \in \mathcal{B}(X)$, $\exists\, T(B) \in \mathbb{R}_+$ tal que $\gamma^+_{T(B)}(B) \in \mathcal{B}(X)$, então G possui um B-atrator global negativamente invariante R definido por $\bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(B)$, que é localmente compacto em alguma topologia $\tau_\oplus$. Além disso, para qualquer conjunto fechado Z atraindo cada $B \in \mathcal{B}(X)$, $R \subset Z$. O espaço $(R,\tau_\oplus)$ é Lindelöf.*

Demonstração: Seja G um semigrupo multívoco assintoticamente semicompacto superior e $G(t,\cdot): X \to \mathcal{C}(X)$ semicontínua superiormente para qualquer $t \in \mathbb{R}_+$. Seja $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\exists\, T(B) \in \mathbb{R}_+$ para o qual $\gamma^+_{T(B)}(B) \in \mathcal{B}(X)$. Pelo Teorema 2.2.1 temos que $\omega(B) \subset G(t,\omega(B))$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$ e é o conjunto minimal fechado que atrai B. Logo R é um B-atrator global negativamente invariante, já que

$$R = \bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(B) \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} G(t,\omega(B)) \subset G(t,R), \forall\, t \in \mathbb{R}_+.$$

Segue também que para qualquer conjunto fechado Z atraindo cada conjunto $B \in \mathcal{B}(X)$ tem-se $R = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(B) \subset Z$.

Mostremos agora que R é localmente compacto. De fato, pela Proposição 2.1.1 $\omega(B_1) \subset \omega(B_2)$ se $B_1 \subset B_2$, assim temos que $R \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \omega(B_i)$ sendo $B_i = \{x \in X : \|x\| \leq i\}$. Por outro lado $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \omega(B_i) \subset R$, logo $R = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \omega(B_i)$. Note que cada $\omega(B_i)$ é homeomorfo ao conjunto $D_i = \{(x,i) : x \in \omega(B_i)\}$, pois considerando a aplicação projeção $\pi : D_i \to \omega(B_i)$ dada por $\pi(x,i) = x$, temos:

. π é bijetiva, já que, dados $x,y \in \omega(B_i)$ com $\pi(x,i) = \pi(y,i)$ então $x = y$ além disso, dado $x \in \omega(B_i)$ existe $(x,i) \in \omega(B_i) \times \mathbb{N}$ tal que $\pi(x,i) = x$.

. π é contínua pois π é aplicação projeção.

. π^{-1} é continua, de fato, seja $x \in \omega(B_i)$ e V uma vizinhança de $\pi^{-1}(x)$, tome $U_x = \pi(V)$, logo U_x é uma vizinhança de x (pois π é aplicação aberta) tal que $\pi^{-1}(U_x) \subset V$, então pelo Teorema 1.1.6 π^{-1} é continua.

Daí $R = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, com cada D_i compacto (pois pelo Teorema 2.2.1 $\omega(B_i)$ é compacto) e $D_i \cap D_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Note que cada D_i é um espaço topológico com a topologia τ_i induzida por X, isto é, $\tau_i = \{A \cap D_i : A\ aberto\ em\ X\}$. Considere a família $B_{\oplus} = \{U \subset R : U \cap D_i \in \tau_i\ para\ qualquer\ i \geq 1\} = \{U \subset R$:U é aberto em X $\}$ que é uma sub base de uma topologia $\tau_{\oplus}$ em R, em que $\tau_{\oplus}$ é a topologia formada por reuniões de interseções finitas de elementos de $B_{\oplus}$. Cada D_i é aberto e fechado em $(R, \tau_{\oplus})$. Daí $(R, \tau_{\oplus})$ é localmente compacto pois, se $x \in R$, então $x \in D_i$ para algum i, assim D_i é uma vizinhança de x na topologia $\tau_{\oplus}$. Como D_i é Hausdorff e compacto então pelo Teorema 1.1.11 D_i é regular. Assim podemos encontrar um conjunto aberto $V_x \in \tau_{\oplus}$ tal que $\overline{V_x} \subset D_i$, portanto $\overline{V_x}$ é um compacto que contém uma vizinhança V_x de x.

Afirmação: A_n é Lindelöf então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ é Lindelöf. De fato, seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta de $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, como $\mathcal{A}$ cobre $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mathcal{A}$ cobre cada A_n, como cada A_n é Lindelöff, existem para cada n uma sub cobertura enumerável de $\mathcal{A}$ cobrindo A_n, digamos $\mathcal{A}_n$. Logo $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ é uma sub cobertura enumerável de $\mathcal{A}$ que cobre $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (note que reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável).

Portanto como $R = \bigcup_{i=0}^{\infty} D_i$, com cada D_i compacto na topologia de $\tau_{\oplus}$ e consequentemente cada D_i Lindelöf, temos pela afirmação acima que R também é Lindelöf. ■

Observação 2.2.3 *[1] Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então visto que,* $R = \bigcup_{i=1}^{\infty} \omega(B_i)$, *segue-se do Teorema de Baire, que* $R \neq X$. *No entanto, notemos que R pode ser denso em X.*

Agora apresentaremos alguns teoremas que afirmam a existência de atratores compactos para semigrupos multívocos.

Teorema 2.2.3 *[1] Seja G um semigrupo multívoco, ponto dissipativo e assintoticamente semicompacto superior. Suponha que* $G(t,\cdot) : X \to C(X)$ *seja semicontínua superiormente para qualquer* $t \in \mathbb{R}_+$. *Se* $\forall\, B \in \mathcal{B}(X)$, $\exists\, T(B) \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $\gamma^+_{T(B)}(B) \in \mathcal{B}(X)$, *então G possui o B-atrator global compacto, negativamente invariante R que é o minimal entre todos os B-atratores globais fechados.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.1, $\forall\, B \in \mathcal{B}(X)$ tem-se que $\omega(B) \neq \emptyset$, compacto, negativamente invariante e é o conjunto minimal fechado atraindo B. Defina $B_1 = O_{\varepsilon_1}(B_0)$, em que $\varepsilon_1 > 0$ é fixado e B_0 é o conjunto limitado que atrai cada $x \in X$. Em particular, como $B_1 \in \mathcal{B}(X)$ temos que $R = \omega(B_1) \neq \emptyset$, compacto e negativamente invariante. Seja $R = \omega(B_1)$ e mostremos que R é um B-atrator global negativamente invariante. De fato, seja $B \in \mathcal{B}(X)$ e $x \in \omega(B)$ arbitrário. Como B_0 atrai x, pela Observação 2.1.2 existe $T(x) \in \mathbb{R}_+$ tal que $G(t,x) \subset B_1$, $\forall\, t \geq T(x)$. Por outro lado, uma vez que $G(t,\cdot) : X \to P(X)$ é semicontínua superiormente, existe uma vizinhança aberta $O(x)$ de x, tal que $G(T(x),O(x)) \subset B_1$. Além disso, seja $\bigcup_{x\in\omega(B)} O(x)$ uma cobertura aberta do compacto $\omega(B)$, então existe uma subcobertura finita $O(\omega(B)) = \bigcup_{i=1}^{n(B)} O(x_i)$, $x_i \in \omega(B)$. Para cada $x_i \in \omega(B)$ temos que $G(t+T(x_i),O(x_i)) \subset G(t,G(T(x_i),O(x_i))) \subset G(t,B_1) \subset O_{\varepsilon_2}(\omega(B_1))$, $\varepsilon_2 > 0$, $\forall\, t \geq T(\varepsilon_2,B_1)$. Daí, $G(t,O(\omega(B))) \subset O_{\varepsilon_2}(\omega(B_1))$, $\forall\, t \geq T(\varepsilon_2,B_1)+\widehat{t}$ em que $\widehat{t} = \max_{1\leq i\leq n(B)} \{T(x_i)\}$. Mais ainda, como $\omega(B)$ atrai $B \in \mathcal{B}(X)$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, T(\varepsilon,B)$ tal que $G(t,B) \subset O_\varepsilon(\omega(B))$, $\forall\, t \geq T(\varepsilon,B)$, $O(\omega(B))$ contém alguma $\varepsilon(B)$-vizinhança $O_{\varepsilon(B)}(\omega(B))$ do conjunto $\omega(B)$. Então $G(t,B) \subset O_{\varepsilon(B)}(\omega(B)) \subset O(\omega(B))$, $\forall\, t \geq T(\varepsilon(B),B)$. Logo $G(t,B) \subset O_{\varepsilon_2}(\omega(B_1))$, $\forall\, t \geq T(\varepsilon(B),B)+T(\varepsilon_2,B_1)+\widehat{t}$. Portanto $R = \omega(B_1)$ é um B-atrator global. Como $\omega(B_1)$ é compacto em particular é limitado, logo pela Proposição 2.2.4 segue que R é o minimal entre todos os B-atratores globais fechados. ∎

Teorema 2.2.4 *[1] Seja $G(t,\cdot): X \to \mathcal{C}(X)$ uma aplicação semicontínua superiormente, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$. Se existe um compacto $K \subset X$ tal que*

$$\forall\, B \in \mathcal{B}(X),\ dist(G(t,B),K) \to 0,\ quando\ t \to \infty, \tag{2.3}$$

então o semigrupo multívoco G possui um B-atrator global compacto negativamente invariante $R \subset K$ o qual é o minimal entre todos os B-atratores globais fechados.

Demonstração: Seja $B \in \mathcal{B}(X)$. Primeiramente mostremos que $\omega(B) \subset K$. De fato, seja $y \in \omega(B)$ assim pela Proposição 2.1.2 $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, $y_n \in G(t_n,B)$, $t_n \to \infty$. Por (2.3) temos que, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0$, $y_n \in O_{\varepsilon/2}(K)$. Logo, para cada $n \geq n_0$, existe $z_n \in K$, tal que $\rho(y_n,z_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Como K é compacto existe uma subsequência de $\{z_n\}$, que continuaremos chamando de $\{z_n\}$ tal que $z_n \to z \in K$. Note que $y_n \to z \in K$ pois, $\rho(y_n,z) \leq \rho(y_n,z_n)+\rho(z_n,z) < \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_1$, para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, portanto $y_n \to z$. Como $y_n \to y$, pela unicidade de limite $y = z \in K$. Portanto $\omega(B) \subset K$. Em particular $\omega(K) \subset K$.

Mostremos agora que $\omega(B) \neq \emptyset$. De fato, sejam $\xi_n \in G(t_n,B)$, $t_n \to \infty$. Por (2.3) existe uma sequência $\varsigma_n \in K$ tal que $\rho(\xi_n,\varsigma_n) \to 0$. Como K é compacto, existe uma subsequência de $\{\varsigma_n\}$ que continuaremos chamando de $\{\varsigma_n\}$ tal que $\varsigma_n \to \varsigma \in K$, o que implica que $\xi_n \to \varsigma$. Portanto pela Proposição 2.1.2 $\varsigma \in \omega(B)$. Logo $\omega(B) \neq \emptyset$. Além disso, como $\omega(B)$ é fechado contido no compacto K temos que $\omega(B)$ é compacto. Em particular $\omega(K) \subset K$ é compacto.

Mostremos que $\omega(B)$ é negativamente invariante. De fato, seja $\xi \in \omega(B)$, então pela Proposição 2.1.2 existe $\xi_n \in G(t_n,B)$, $t_n \to \infty$ tal que $\xi_n \to \xi$. Além disso para $t_n \geq t$ temos $G(t_n,B) = G(t_n - t + t,B) \subset G(t,G(t_n - t,B))$, logo $\xi_n \in G(t,\varsigma_n)$ em que $\varsigma_n \in G(t_n - t,B)$. Por outro lado $\text{dist}(G(t_n - t,B),K) \to 0$, quando $n \to \infty$. Assim existe uma subsequência $a_n \subset K$, tal que $\rho(\varsigma_n,a_n) \to 0$, $n \to \infty$. Como a aplicação $G(t,\cdot): X \to \mathcal{C}(X)$ é semicontinua superiormente e de valores fechados, pela Proposição 2.1.4 o gráfico da $G(t,\cdot)$ é fechado. Assim como $\xi_n \to \xi$, $\varsigma_n \to \varsigma$ e $\xi_n \in G(t,\varsigma_n)$ tem-se que $\xi \in G(t,\varsigma)$. Pela Proposição 2.1.2 $\varsigma \in \omega(B)$. Assim, $\xi \in G(t,\omega(B))$. Portanto $\omega(B) \subset G(t,\omega(B))$, $t \in \mathbb{R}_+$. Em particular $\omega(K) \subset G(t,\omega(K))$, $t \in \mathbb{R}_+$. Defina $R = \omega(K)$ e mostremos que R é um B-atrator global. De fato, suponha que $R = \omega(K)$ não seja um B-atrator global, i.é., para algum $B \in \mathcal{B}(X)$, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$, $\exists\, s \geq t$ e $\xi_s \in G(s,B)$ com $\text{dist}(\xi_s,R) \geq \varepsilon_0$. Em particular, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, t_n \geq n$ e $\xi_n \in G(t_n,B)$ com

$$\text{dist}(\xi_n,R) \geq \varepsilon_0. \tag{2.4}$$

Por outro lado, não há perda de generalidade em assumir que $\xi_n \to \xi$ em K, $n \to \infty$. Logo pela Proposição 2.1.2 $\xi \in \omega(B)$.

Afirmação: $\omega(B) \subset \omega(K)$. De fato, seja $\xi \in \omega(B)$. Assim, pela Proposição 2.1.2 existe $\xi_n \in G(t_n, B), t_n \to \infty$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$. Como $\omega(K)$ é compacto, para toda sequência $\{\delta_n\} \subset \omega(K) \subset K$ existe uma subsequência de $\{\delta_n\}$ que continuaremos chamando de $\{\delta_n\}$ tal que $\delta_n \to \delta \in \omega(K) \subset K$. Por outro lado, por (2.3) tem-se que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0$, $\xi_n \in O_{\varepsilon/2}(K)$. Como $\{\delta_n\} \subset \omega(K) \subset K$, logo para cada $n \geq n_0$, $\rho(\xi_n, \delta_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Daí, $\rho(\xi_n, \delta) \leq \rho(\xi_n, \delta_n) + \rho(\delta_n, \delta) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, portanto $\xi_n \to \delta$. Logo pela unicidade de limite $\xi = \delta \in \omega(K)$. Portanto $\omega(B) \subset \omega(K)$.

Sendo assim $\xi \in \omega(B) \subset \omega(K) = R$, o que contradiz (2.4). Portanto $R = \omega(K)$ é um B-atrator global compacto. Portanto pela Proposição 2.2.4 R é o minimal entre todos os B-atratores globais fechados. ■

Observação 2.2.4 *[1] Nos Teoremas 2.2.3 e 2.2.4 se,*

$$G(t_1 + t_2, x) = G(t_1, G(t_2, x)),\ \forall\, x \in X,\ \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+. \tag{2.5}$$

Então $R = G(t, R)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$.

De fato, pelos Teoremas 2.2.3 e 2.2.4 temos que

$$R \subset G(t, R),\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.6}$$

Devemos mostrar que $G(t, R) \subset R$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$. Com efeito, de (2.6) e (2.5) temos, $G(t, R) \subset G(t, G(s, R)) \subset G(t + s, R)$ $\forall\, s, t \in \mathbb{R}_+$. Seja $t \geq 0$ dado, como R é um conjunto e é um B-atrator global, para qualquer vizinhança $O_\varepsilon(R)$ de R, existe $S_\varepsilon \geq 0$ tal que $G(t + s, R) \subset O_\varepsilon(R)$, $\forall\, s \geq S_\varepsilon$. Como $O_\varepsilon(R)$ é arbitrário, temos $G(t, R) \subset \bigcap\limits_{\varepsilon>0} O_\varepsilon(R) = \overline{R} = R$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$, logo $G(t, R) \subset R$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$. Portanto $R = G(t, R)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$, c.q.d..

Definição 2.2.2 *[1] O semigrupo multívoco $G : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ é dito ser contínuo em todo $t \in \mathbb{R}_+$ se é a união de trajetórias contínuas isto é,*

$$G(t, x_0) = \{x(t) : x(\cdot) \in D(x_0),\ x(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+, X)\},\ \forall\, x_0 \in X.$$

Teorema 2.2.5 *[1] Suponha que as hipóteses dos Teoremas 2.2.3 e 2.2.4 são satisfeitas. Assuma também que o semigrupo multívoco G seja contínuo em todo $t \in \mathbb{R}_+$ com valores conexos de modo que, $G(t_1 + t_2, x) = G(t_1, G(t_2, x))$, $\forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $\forall\, x \in X$. Se o espaço X é conexo, então o B-atrator global, compacto invariante R é conexo.*

Demonstração: Suponha que o B-atrator global R não seja conexo. Então existem dois conjuntos fechados não vazios A_1 *e* A_2 de modo que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A_1 \cup A_2 = R$. Assim, como X é normal, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $O_{\varepsilon_0}(A_1) \cap O_{\varepsilon_0}(A_2) = \emptyset$. Note que $O_{\varepsilon_0}(R) = O_{\varepsilon_0}(A_1 \cup A_2) = O_{\varepsilon_0}(A_1) \cup O_{\varepsilon_0}(A_2)$. Defina os conjuntos disjuntos $X_1 = \{x \in X : G(t, x) \subset O_{\varepsilon_0}(A_1),\ \forall\, t \geq t_1(x)$ para algum $t_1(x) \geq 0\}$ e $X_2 = \{x \in X : G(t, x) \subset O_{\varepsilon_0}(A_2),\ \forall\, t \geq t_2(x)$ para algum $t_2(x) \geq 0\}$. Se provarmos que $X_1 \cup X_2 = X$ e que X_1 *e* X_2 são abertos e diferentes de vazio, obtemos uma contradição, uma vez que por hipótese X é conexo.

Primeiro mostremos que $X_1 \cup X_2 = X$. Que $X_1 \cup X_2 \subset X$ é óbvio. Mostremos então que $X \subset X_1 \cup X_2$. De fato, seja $x \in X$ arbitrário. Então existe $T \geq 0$ tal que $G(t, x) \subset O_{\varepsilon_0}(R)$, $\forall\, t \geq T$, pois R é B-atrator global. Como G leva conexos em conexos, para cada $t \geq T$, $G(t,x) \subset O_{\varepsilon_0}(A_i)$ em que $i = 1$ *ou* $i = 2$. Note que para cada trajetória continua $x(\cdot)$ correspondente a x, o conjunto $x([T,\infty)) = \bigcup_{t \geq T} x(t)$ é conexo. Então $x([T,\infty)) = \bigcup_{t \geq T} x(t)$ está contido em $O_{\varepsilon_0}(A_i)$ em que $i = 1$ *ou* $i = 2$. Considere o conjunto $G([T,\infty),x) = \bigcup_{t \geq T} G(t,x)$. Como $[T,\infty) \times \{x\}$ é conexo e G é semicontínua superiormente temos pela Proposição 2.1.7 que $G([T,\infty),x) = G([T,\infty) \times \{x\})$ é conexo.

Afirmação: $G([T,\infty),x) \subset O_{\varepsilon_0}(A_i)$ em que $i = 1$ *ou* $i = 2$. Realmente, note que $G([T,\infty),x) = \bigcup_{x(\cdot) \in D(x)} x([T,\infty))$. Como $G([T,\infty),x)$ é conexo, $x([T,\infty)) \subset O_{\varepsilon_0}(A_i)$, $\forall\, x(\cdot) \in D(x)$ em que $i = 1$ *ou* $i = 2$. Portanto $G([T,\infty),x) \subset O_{\varepsilon_0}(A_i)$ em que $i = 1$ *ou* $i = 2$.

Logo pela afirmação acima $X \subset X_1 \cup X_2$.

Mostremos agora que $X_1 \neq \emptyset$ *e* $X_2 \neq \emptyset$. Para isto mostremos então que $\emptyset \neq A_1 \subset X_1$ *e* $\emptyset \neq A_2 \subset X_2$. De fato, como R é invariante ($G(t,R) = R$), para qualquer $x \in A_1$, $G(t,x) \subset A_1$, $t \geq 0$, em particular $G(t,x) \subset O_\varepsilon(A_1)$, $t \geq 0$. Logo $x \in X_1$. Portanto $\emptyset \neq A_1 \subset X_1$. Resultado análogo para $\emptyset \neq A_2 \subset X_2$.

Mostremos agora que X_1 *e* X_2 são abertos. De fato, seja $x \in X_1$ *e* B_1 uma vizinhança limitada de x. Então como R é B-atrator global, existe $T \geq 0$ tal que $G(t,B_1) \subset O_\varepsilon(R)$, $\forall\, t \geq T$. Sendo a aplicação $G(T,\cdot)$ semicontínua superiormente, existe uma vizinhança $V \subset B_1$ de x tal que $G(t,V) \subset O_{\varepsilon_0}(A_1)$, $\forall\, t \geq T$. Assim, para cada $y \in V$, temos que $G(t,y) \subset O_{\varepsilon_0}(A_1)$, $\forall\, t \geq T$. Portanto $V \subset X_1$. Como x é arbitrário, X_1 é aberto. Resultado análogo para X_2. ■

Definição 2.2.3 *[1] Seja $D \subset X$ um espaço topológico Hausdorff. Iremos denotar o fecho de $A \subset D$ em D por $\overline{A}^D$. O conjunto $K \subset D$ é chamado (X,D)-B-atrator global se $\forall\, B \in \mathcal{B}(X)$, $\exists\, T(B) \geq 0$ tal que $G(t,B) \subset D$, $\forall\, t \geq T(B)$, e qualquer vizinhança O(K) existe $T \in \mathbb{R}_+$ tal que $G(t,B) \subset O(K)$, $\forall\, t \geq T$. O conjunto $K \subset D$ é chamado X-absorvente se $\forall\, B \in \mathcal{B}(X)$, $\exists\, T(B) \geq 0$ tal que $G(t,B) \subset K$, $\forall\, t \geq T(B)$.*

Teorema 2.2.6 *[1] Suponha que $G(t,x) \in 2^D$ $\forall\, t > 0$, $x \in X$ e que exista um X-absorvente $K \subset D$ com K compacto em D e limitado em X. Além disso, suponha $\overline{G(t,S)}^D \subset G(t,\overline{S}^D)$, $\forall\, t > 0$ e $S \subset K$ e também que o conjunto $\{y \in X : G(t,y) \cap \{y_0\} \neq \emptyset\} \cap K$ é compacto em D, $\forall\, y_0 \in D$, $\forall\, t > 0$. Então o semigrupo multívoco G possui o (X,D)-B-atrator global negativamente invariante R, que é compacto em D e limitado em X. Ele é o conjunto minimal fechado em D que atrai qualquer $B \in \mathcal{B}(X)$.*

Demonstração: Para qualquer $B \in \mathcal{B}(X)$, $\exists\, T(B) \geq 0$ tal que $G(t,B) \subset K \subset D$, $\forall\, t \geq T(B)$ (pois $K \subset D$ é X-absorvente). Defina

$$R := \omega(K) = \bigcap_{\tau \geq t_0} \overline{\gamma_\tau^+(K)}^D, \text{ sendo } t_0 = T(K).$$

Provemos que R é limitado em X. Seja $y \in R = \omega(K)$. Logo $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ tal que $y_n \in G(t_n,K)$ com $t_n \to \infty$. Como $G(t_n,K) \subset K \in \mathcal{B}(X)$, $\forall\, n$ suficientemente grande, então $y_n \in K \in \mathcal{B}(X)$, $\forall\, n$ suficientemente grande. Assim, $\exists\, c > 0$ tal que $\rho(y_n,0) \leq c$, $\forall\, n$ suficientemente grande. Então $\rho(y,0) = \rho(\lim_{n\to\infty} y_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n,0) \leq c$, logo $\rho(y,0) \leq c$, $\forall\, y \in R$. Portanto $R \in \mathcal{B}(X)$.

Mostremos que $R \neq \emptyset$. Seja $x \in K$ e considere uma sequência de números reais $t_n \to \infty$. Também considere os conjuntos $G(t_n,x)$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ tome $y_n \in G(t_n,x)$. Temos para n suficientemente grande $y_n \in G(t_n,x) \subset G(t_n,K) \subset K$. Como K é compacto em D, existe uma subsequência de y_n, que continuaremos chamando de y_n, tal que $y_n \to y$ em D. Logo pela Proposição 2.1.2 $y \in \omega(K) = R$. portanto $R \neq \emptyset$.

Provemos que R é compacto. Como $\gamma_{t_0}^+(K) \subset K$ então $\overline{\gamma_{t_0}^+(K)}^D \subset \overline{K}^D = K$. Logo $\overline{\gamma_{t_0}^+(K)}^D$ é compacto. Por outro lado $R = \bigcap_{\tau \geq t_0} \overline{\gamma_\tau^+(K)}^D \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(K)}^D \subset K$. Logo R é fechado em um compacto. Portanto R é compacto.

Mostremos que R é (X,D)-B-atrator. Sabendo que $G(t+T(B),B) \subset G(t, G(T(B),B)) \subset G(t,K)$, então para provar que R é (X,D)-B-atrator é suficiente mostrar que R atrai K. Suponha que R não atrai K. Isto é, existe uma vizinhança aberta O(R) tal que $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$, $\exists\, t_\ell \geq \ell$ para o qual $G(t_\ell,K) \cap (D \setminus O(R)) \neq \emptyset$. Então existem sequências $t_\ell \to \infty$, $\xi_\ell \in G(t_\ell,K) \cap (D \setminus O(R)) = G(t_\ell,K) \cap (K \setminus O(R))$ tal que $\xi_\ell \to \xi$ em D. Então pela Proposição 2.1.2 $\xi \in R = \omega(K)$. Por outro lado, $\xi_\ell \in K \setminus O(R)$. Então $\xi \in \overline{K \setminus O(R)}^D$. Note que $\overline{K \setminus O(R)}^D = K \setminus O(R)$ pois, seja $x \in \overline{K \setminus O(R)}^D$, $\exists\, x_n \in K \setminus O(R)$ tal que $x_n \to x \in D$. Em particular $x \in \overline{K}^D = K$. Observe que $x \notin O(R)$, pois $x_n \notin O(R)$ *e* $x_n \to x$ em D. Por outro lado como $\overline{K}^D = K$ temos que $K \setminus O(R) \subset \overline{K \setminus O(R)}^D$. Portanto $\xi \in R \cap (K \setminus O(R))$, o que é um absurdo. Portanto, R atrai K.

Mostremos agora que R é negativamente invariante. Para isto mostremos primeiramente que

$$\bigcap_{\tau \geq t_0} G(t, \overline{\gamma_\tau^+(K)}^D) = G\left(t, \bigcap_{\tau \geq t_0} \overline{\gamma_\tau^+(K)}^D\right) \tag{2.7}$$

Sejam $\xi \in \bigcap_{\tau \geq t_0} G(t, \overline{\gamma_\tau^+(K)}^D)$ e $\tau_j \to \infty$ (logo podemos supor $\tau_j \geq t_0$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$). Temos que $\forall\, j \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_{\tau_j} \in \overline{\gamma_{t_0}^+(K)}^D$ tal que $\xi \in G(t, x_{\tau_j})$. Como $\overline{\gamma_{t_0}^+(K)}^D$ é compacto, podemos supor que $x_{\tau_j} \to x$ em D. Note que $x_{\tau_j} = \lim_{j \to \infty} w_{j_\ell}$, $w_{j_\ell} \in G(j\ell, K)$, $j\ell \geq t_0$. Como

$$\begin{array}{cccc}
w_{1_1} & w_{1_2} & \cdots & w_{1_\ell} \longrightarrow x_{\tau_1} \\[2em]
w_{2_1} & w_{2_2} & \cdots & w_{2_\ell} \longrightarrow x_{\tau_2} \\[2em]
. & & & \\[2em]
. & & & \\[2em]
. & & & \\[2em]
w_{\ell_1} & w_{\ell_2} & \cdots & w_{\ell_\ell} \longrightarrow x_{\tau_\ell}
\end{array}$$

e $x_{\tau_\ell} \to x$ então $w_{\ell_\ell} \to x$. Denotando $w_\ell = w_{\ell_\ell}$ temos que $x \in \omega(K) = R$, pois $x = \lim_{\ell \to \infty} w_\ell$, $w_\ell \in G(\ell, K)$, $\ell \to \infty$.

Afirmação: $\xi \in G(t,x)$. De fato, note que $x_{\tau_j} \in \{y \in X : G(t,y) \ni \xi\}$. Por outro lado, $x_{\tau_j} \in \overline{\gamma_\tau^+(K)}^D \subset K$, isto é, $x_{\tau_j} \in \{y \in X : G(t,y) \ni \xi\} \cap K = \{y \in X : G(t,y) \cap \{\xi\} \neq \emptyset\} \cap K$, que é compacto por hipótese. Portanto $x \in \overline{\{y \in X : G(t,y) \ni \xi\} \cap K} = \{y \in X : G(t,y) \ni \xi\} \cap K$, isto é, $\xi \in G(t,x)$.

Assim pela afirmação acima $\xi \in G(t,R) = G\left(t, \bigcap_{\tau\geq t_0} \overline{\gamma_\tau^+(K)}^D\right)$. Por outro lado, seja $\xi \in G\left(t, \bigcap_{\tau\geq t_0} \overline{\gamma_\tau^+(K)}^D\right)$. Então $\xi \in G(t, \overline{\gamma_\tau^+(K)}^D)$, $\forall\, \tau \geq t_0$. Portanto $\xi \in \bigcap_{\tau\geq t_0} G(t, \overline{\gamma_\tau^+(K)}^D)$. Portanto (2.7) é verdadeiro. Usando (2.7) e o fato de que $\forall\, S \subset K$, $\overline{G(t,S)}^D \subset G(t, \overline{S}^D)$, $\forall\, t \geq 0$ temos,

$$
\begin{aligned}
G(t,R) &= G\left(t, \bigcap_{\tau\geq t_0} \overline{\gamma_\tau^+(K)}^D\right) = \bigcap_{\tau\geq t_0} G(t, \overline{\gamma_\tau^+(K)}^D) \supset \bigcap_{\tau\geq t_0} \overline{G(t,\gamma_\tau^+(K))}^D \\
&= \bigcap_{\tau\geq t_0} \overline{G\left(t, \bigcup_{s\geq\tau} G(s,K)\right)}^D = \bigcap_{\tau\geq t_0} \overline{\bigcup_{s\geq\tau} G(t,G(s,K))}^D \supset \bigcap_{\tau\geq t_0} \overline{\bigcup_{s\geq\tau} G(t+s,K)}^D \\
&= \bigcap_{\tau\geq t_0} \overline{\gamma_{\tau+t}^+(K)}^D = \bigcap_{\ell\geq t_0+t} \overline{\gamma_\ell^+(K)}^D = \omega(K) = R,\ \forall\, t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que R é o minimal fechado atraindo cada $B \in \mathcal{B}(X)$ na topologia de D. De fato, seja $Z \subset D$ um (X,D)-B-atrator global fechado. Então, $\forall\, B \in \mathcal{B}(X)$ e para qualquer vizinhança O(Z) existe $T \geq 0$ tal que $G(t,B) \subset O(Z)$, $\forall\, t \geq T$. Como $R \in \mathcal{B}(X)$ e é negativamente invariante temos que $R \subset G(t,R) \subset O(Z)$, $\forall\, t \geq T$. Logo $R \subset \overline{Z}^D = Z$. ■

Observação 2.2.5 *[1] Se $D = X$, então R é um B-atrator global compacto com respeito ao semigrupo multívoco G. Este resultado foi provado em [17], no caso em que X é espaço de Banach.*

Observação 2.2.6 *[1] Se no Teorema 2.2.6, $G(t_1+t_2,x) = G(t_1, G(t_2,x))$, $\forall\, t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+$, $\forall\, x \in X$. Então o (X,D)-B-atrator global R é invariante.*

De fato, sabemos que $R \subset G(t,R)$, $\forall\, t \geq 0$. Provemos que $G(t,R) \subset R$, $\forall\, t \geq 0$. Seja $t \geq 0$. Para $\tau \geq 0$, temos,

$$G(t,R) \subset G(t, G(\tau,R)) \subset G(t+\tau,R).$$

Como R é (X,D)-B-atrator global para qualquer vizinhança O(R) de R em D, existe $T \geq 0$ tal que $G(t+\tau,R) \subset O(R)$, $\forall\, \tau \geq T$. Como O(R) é arbitrário, temos $G(t,R) \subset \overline{R}^D = R$. Portanto, $R = G(t,R)$, $\forall\, t \geq 0$, c.q.d..

Proposição 2.2.5 *[1] Seja D um espaço normal. Suponha que as hipóteses do Teorema 2.2.6 são satisfeitas. Considere também que o conjunto K é conexo em D e que $G(t,\cdot) : K \to 2^D$ é semicontinuo superiormente e de valores conexos para cada $t > 0$ (com respeito a topologia D). Então, o (X,D)-B-atrator global R negativamente invariante é conexo em D.*

Demonstração: Suponha que R não seja conexo. Então $R = A_1 \cup A_2$ com $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, em que $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$ são fechados em D. Como D é normal, existem vizinhanças, $O(A_1)$ e $O(A_2)$ tal que $O(A_1) \cap O(A_2) = \emptyset$. Em particular, $O(R) := O(A_1) \cup O(A_2)$ é uma vizinhança de R. Como R é (X,D)-B-atrator global e $K \in \mathcal{B}(X)$, existe $T \geq 0$ tal que $G(t,K) \subset O(R)$, $\forall\, t \geq T$. Como G é semicontínua superiormente, pela Proposição 2.1.7 $G(t,K)$ é conexo. Logo $G(t,K) \subset O(A_1)$ ou $G(t,K) \subset O(A_2)$. Pela minimalidade de R temos que $R \subset K$. Logo $R \subset G(t,R) \subset G(t,K) \subset O(A_i)$ para $i = 1$ ou $i = 2$. Portanto $R \subset O(A_i)$ para $i = 1$ ou $i = 2$, o que implica que $A_1 = \emptyset$ ou $A_2 = \emptyset$ o que é uma contradição. Portanto R é conexo. ■

Lema 2.2.1 *[1] Seja $G(t,\cdot):X\to\mathcal{C}(X)$ uma aplicação multívoca semicontínua superiormente e $D\subset X$ com inclusão contínua. Se o conjunto K é compacto em D e $G(t,K)\subset D$, $\forall\, t\geq 0$ então as duas condições do Teorema 2.2.6 são satisfeitas, isto é, $\overline{G(t,M)}^D\subset G(t,\overline{M}^D)$, $\forall\, M\subset K$ e $\{y\in X: G(t,y)\ni y_0\}\cap K$ é compacto em D, $\forall\, y_0\in D$ e $t\geq 0$.*

Demonstração: Mostremos primeiramente que

$$\overline{G(t,M)}^D\subset G(t,\overline{M}^D),\ \forall\, M\subset K.$$

De fato, seja $M\subset K$ e $\xi\in\overline{G(t,M)}^D$. Então existem sequências $\{x_j\}$ *e* $\{\xi_j\}$, com $x_j\in M$, $\xi_j\in G(t,x_j)$ tal que $\xi_j\to\xi$ em D. Como $\overline{M}^D\subset\overline{K}^D=K$, i.é., $\overline{M}^D$ é fechado em um compacto, logo $\overline{M}^D$ é compacto em D. Assim, podemos supor que $x_j\to x\in\overline{M}^D$. Como $G(t,\cdot):X\to\mathcal{C}(X)$ é semicontínua superiormente, então pela Proposição 2.1.4 $G(t,\cdot)$ tem o gráfico fechado em X. Como $(x_j,\xi_j)\to(x,\xi)$ em D e a inclusão $D\subset X$ é contínua, temos $(x_j,\xi_j)\to(x,\xi)$ em X. Portanto, como $(x_j,\xi_j)\in\operatorname{graf}G(t,\cdot)$, temos que $(x,\xi)\in\operatorname{graf}G(t,\cdot)$, i.é., $\xi\in G(t,x)\subset G(t,\overline{M}^D)$. Portanto $\overline{G(t,M)}^D\subset G(t,\overline{M}^D)$, $\forall\, M\subset X$.

Mostremos agora que $\{y\in X: G(t,y)\ni y_0\}\cap K$ é compacto em D, $\forall\, y_0\in D$. Realmente, seja $y_0\in D$ arbitrário. Como $G(t,\cdot)$ é semicontínua superiormente temos pela Proposição 2.1.6 que $G^{-1}(t,y_0):=\{y\in X: y_0\in G(t,y)\}$ é fechado em X. Logo $G^{-1}(t,y_0)$ é fechado em D, pois a inclusão $D\subset X$ é contínua. Como $K\subset D$ é um compacto em um Hausdoff, logo K é fechado em D. Logo, $\{y\in X: G(t,y)\ni y_0\}\cap K\subset K$ é um fechado em um compacto. Portanto $\{y\in X: G(t,y)\ni y_0\}\cap K$ é compacto em D. ■

Capítulo 3

Atratores de Inclusões em Espaços de Banach

Agora aplicaremos a teoria abstrata que foi vista no capítulo anterior em inclusões diferenciais.

3.1 Atratores de Inclusões de Evolução Governado por Operadores m-Dissipativos

Seja X um espaço de Banach real separável. Considere as inclusões de evolução do tipo

$$\frac{dy}{dt}(t) \in A(y(t)) + F(y(t)),\ t \in [0,T] \tag{3.1}$$

com condição inicial

$$y(0) = y_0 \in X, \tag{3.2}$$

em que $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to 2^X$, $F : X \to 2^X$ são aplicações multívocas. Denotemos por X^* o espaço dual de X, e por $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X^* \to \mathbb{R}$ a aplicação dualidade. Seja $J : X \to 2^{X^*}$ a aplicação dual, isto é, $J(y) = \{\xi \in X^* : \langle y,\xi\rangle = \| y \|_X^2 = \| \xi \|_{X^*}^2\}$. Sabemos das consequências do Teorema de Hanh Banach que $\mathrm{Dom} J = X$.

Introduziremos as seguintes condições:

(A) A aplicação A é m-Dissipativa, isto é, $\forall\, y_1, y_2 \in \mathcal{D}(A)$, $\forall\, \xi_i \in A(y_i)$, $i = 1,2$, $\exists\, j = j(y_i,\xi_i) \in J(y_1 - y_2)$ tal que $\langle \xi_1 - \xi_2, j\rangle \leq 0$ e $Im(A - \lambda I) = X$, $\forall\, \lambda > 0$.

(F_1) $F : X \to \mathcal{C}_v(X)$, em que $\mathcal{C}_v(X)$ é o conjunto de todos subconjuntos não vazios, limitados, fechados e convexos de X.

(F_2) A aplicação F é Lipschitz em $\overline{\mathcal{D}(A)}$, isto é, $\exists\, c \geq 0$ tal que $\forall\, y_1, y_2 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$,

$$\mathrm{dist}_H(F(y_1),F(y_2)) \leq c \,\| y_1 - y_2 \|_X,$$

em que $\mathrm{dist}_H(\cdot,\cdot)$ denota a métrica Hausdorff de conjuntos limitados, isto é, $\mathrm{dist}_H(A,B) := \max\{\mathrm{dist}(A,B), \mathrm{dist}(B,A)\}$.

Observação 3.1.1 *[4] Se a condição (A) é satisfeita, então o operador A gera um semigrupo não-linear de operadores $S(t,\cdot) : \overline{\mathcal{D}(A)} \to \overline{\mathcal{D}(A)}$.*

Note que $\overline{\mathcal{D}(A)}$ munido da métrica $\rho(x,y) = \| x-y \|$ é um espaço métrico completo, já que $\overline{\mathcal{D}(A)}$ é um subconjunto fechado do espaço métrico completo X.

Considere também a próxima inclusão

$$\frac{dy}{dt}(t) \in A(y(t)) + f(t),\ t \in [0,T] \tag{3.3}$$

com condição inicial

$$y(0) = y_0 \in X, \tag{3.4}$$

em que $f(\cdot) \in L^1([0,T],X)$ *e* $L^1([0,T],X)$ é o espaço das funções Bochner integráveis.

Definição 3.1.1 *[1] A função $y : [0,T] \to X$ é chamada solução forte do problema* (3.1), (3.2) (*respectivamente* (3.3), (3.4)) *se:*

(i) *$y(\cdot)$ é contínua em $[0,T]$ e $y(0) = y_0$;*

(ii) *$y(\cdot)$ é absolutamente contínua em qualquer subconjunto compacto de $(0,T)$ e diferenciável t-q.t.p. em $(0,T)$*

(iii) *$y(\cdot)$ satisfaz* (3.1) (*respectivamente* (3.3)) *t-q.t.p. em $(0,T)$.*

Definição 3.1.2 *[1] A função contínua $y : [0,T] \to X$ é chamada solução integral do problema* (3.3), (3.4) *se:*

(i) *$y(0) = y_0$;*

(ii) *$\forall\, u \in \mathcal{D}(A)$, $\forall\, v \in A(u)$,*

$$\|y(t)-u\|_X^2 \leq \|y(s)-u\|_X^2 + 2\int_s^t \langle f(\tau)+v, y(\tau)-u\rangle_+ d\tau,\ t \geq s, \tag{3.5}$$

em que $\langle \xi, y\rangle_+ = \sup\limits_{j \in J(y)} \langle \xi, j\rangle.$

Observação 3.1.2 *[4] Qualquer solução forte do problema* (3.3), (3.4) *é uma solução integral.*

Definição 3.1.3 *[1] A função contínua $y : [0,T] \to X$ é chamada uma solução integral do problema* (3.1), (3.2) *se:*

(i) *$y(0) = y_0$;*

(ii) *Existe uma seleção $f \in L^1([0,T],X)$, $f(t) \in F(y(t))$ t-q.t.p. em $[0,T]$ em que a desigualdade* (3.5) *vale.*

Dizemos que $f(\cdot)$ é uma seleção com respeito a solução integral $y(\cdot)$.

Observação 3.1.3 *[4] Se a condição (A) é satisfeita e $f \in L^1([0,T],X)$, então $\forall\, y_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, existe uma única solução integral $y(\cdot)$ do problema* (3.3), (3.4) *para todo $T > 0$. Denotemos $y(\cdot) = I(y_0)f(\cdot)$. Além disso, para todas as soluções integrais $y_i(\cdot) = I(y_i0)f_i(\cdot)$, $i = 1,2$, vale a desigualdade*

$$\|y_1(t)-y_2(t)\| \leq \|y_1(s)-y_2(s)\| + \int_s^t \|f_1(\tau)-f_2(\tau)\| d\tau,\ t \geq s. \tag{3.6}$$

Observação 3.1.4 *[16] Se as condições* (A), (F_1), (F_2) *são satisfeitas, então* $\forall\, y_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ *existe pelo menos uma solução integral do problema* (3.1), (3.2) *para cada* $T > 0$. *Além disso, para qualquer* $z(\cdot) = I(z_0)g(\cdot)$, $g(\cdot) \in L^1([0,T],X)$ *e qualquer* $y_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ *existe uma solução integral* $y(\cdot) = I(y_0)f(\cdot)$ *tal que*

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \xi(t),\ \forall\, t \in [0,T], \tag{3.7}$$

$$\|f(t) - g(t)\| \leq \rho(t) + 2c\xi(t),\ t - q.t.p.\ em\ (0,T), \tag{3.8}$$

em que

$$\rho(t) := 2\mathrm{dist}(g(t), F(z(t))),$$

$$\xi(t) := \|y_0 - z_0\| \exp(2ct) + \int_0^t \exp(2c(t-s))\rho(s)ds,\ c > 0\ constante.$$

Assumiremos para os próximos resultados que as propriedades (A), (F_1), (F_2) são satisfeitas. Denotemos por $D(y_0)$ o conjunto de todas as soluções integrais de (3.1) tal que $y(0) = y_0$. Para cada $t \geq 0$ definiremos a aplicação multívoca $G(t,\cdot) : \overline{\mathcal{D}(A)} \to \overline{\mathcal{D}(A)}$ por $G(t,y_0) := \{y(t) : y(\cdot) \in D(y_0)\}$.

Lema 3.1.1 *[1] A aplicação multívoca* $G : \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathcal{D}(A)} \to \mathcal{P}(\overline{\mathcal{D}(A)})$ *é um semigrupo multívoco.*

Demonstração: Queremos mostrar que $G : \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathcal{D}(A)} \to \mathcal{P}(\overline{\mathcal{D}(A)})$ satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 2.1.1. Realmente, primeiramente temos que $G(0,\cdot) = I$ pois, seja $y_0 \in \overline{D(A)}$ (qualquer). Temos $G(0,y_0) = \{y(0) : y(\cdot) \in D(y_0)\} = \{y_0\} = y_0$.

Mostremos agora que $G(t_1+t_2,x) \subset G(t_1, G(t_2,x)),\ \forall\, t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. De fato, sejam $t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+$ e $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ (quaisquer) e considere $y \in G(t_1+t_2,x)$. Então $y = y(t_1+t_2)$, em que $y(\cdot)$ é solução integral da inclusão (3.1) com $y(0) = x$. Uma vez que $y(t_2) \in G(t_2,x)$, é suficiente mostrar que $y \in G(t_1, y(t_2))$. Defina as funções $z(t) := y(t+t_2)$, $\forall\, t \geq 0$ e $g(t) := f(t+t_2)$ t-q.t.p. em $[0,\infty)$, em que $f(\cdot)$ é uma seleção com respeito a $y(\cdot)$.

Afirmação: Para qualquer $T > 0$, $z(\cdot)$ é solução integral do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt}(t) \in A(z(t)) + g(t),\ t \in [0,T], \\ z(0) = y(t_2), \end{cases} \tag{3.9}$$

com $g \in L^1([0,T],X)$ e $g(t) \in F(z(t))$ t-q.t.p. em $[0,T]$. Queremos mostrar que a desigualdade (3.5) é verdadeira para $t \geq s$. De fato, sejam $u \in \mathcal{D}(A)$, $v \in A(u)$ (quaisquer).

$$\|z(t) - u\|_X^2 = \|y(t+t_2) - u\|_X^2 \leq \|y(s+t_2) - u\|_X^2 + 2\int_{s+t_2}^{t+t_2} \langle f(\tau) + v, y(\tau) - u\rangle_+ d\tau.$$

Fazendo $\tau = \ell + t_2$ temos que $d\tau = d\ell$. Logo,

$$\|z(t) - u\|_X^2 \leq \|z(s) - u\|_X^2 + 2\int_s^t \langle g(\ell) + v, z(\ell) - u\rangle_+ d\ell,\ \forall\, t \geq s.$$

Portanto $z(\cdot)$ é solução integral do problema (3.9).

Logo, pela afirmação acima $y = y(t_1+t_2) = z(t_1) \in G(t_1, y(t_2))$. ■

Definição 3.1.4 (*Concatenação*) *Sejam as aplicações* $\varphi,\psi:[0,\infty)\to X$. *Definimos a aplicação concatenada* $\theta:[0,\infty)\to X$ *dada por*

$$\theta(\tau):=\begin{cases}\varphi(\tau), & se \quad \tau\in[0,t]\\ \psi(\tau-t), & se \quad \tau\in(t,\infty).\end{cases}$$

Proposição 3.1.1 *Concatenada de duas funções mensuráveis é mensurável.*

Demonstração: Considere a aplicação concatenada $\theta:[0,\infty)\to X$ dada por

$$\theta(\tau):=\begin{cases}\varphi(\tau), & \text{se} \quad \tau\in[0,t]\\ \psi(\tau-t), & \text{se} \quad \tau\in(t,\infty),\end{cases}$$

com φ, $\psi:[0,\infty)\to X$ mensuráveis. Note que a aplicação $\tau\mapsto h(\tau):=\tau-t$ é contínua logo mensurável. Portanto a aplicação composta $r(\tau)=\psi(\tau-t)$ é mensurável. Seja M um aberto de X logo, $\theta^{-1}(M)=\{\tau\in[0,\infty);\theta(\tau)\in M\}=\{\tau\in[0,t];\varphi(\tau)\in M\}\cup\{\tau\in(t,\infty);r(\tau)\in M\}=\{[0,t]\cap\varphi^{-1}(M)\}\cup\{(t,\infty)\cap r^{-1}(M)\}$ é mensurável em $[0,\infty)$. ■

Proposição 3.1.2 *Seja a aplicação concatenada*

$$\theta(\tau):=\begin{cases}\varphi(\tau), & se \quad \tau\in[0,t]\\ \psi(\tau-t), & se \quad \tau\in(t,T],\end{cases}$$

com $\varphi,\psi:[0,T]\to X$. *Se* $\varphi\in D(y_0)$, $\psi\in D(y_1)$ *com* $\psi(0)=y_1=\varphi(t)$ *para algum* $t\geq 0$, *então a concatenada* $\theta\in D(y_0)$.

Demonstração: Considere a aplicação

$$f(\tau):=\begin{cases}f_1(\tau) & , \quad \text{se} \quad \tau\in[0,t],\\ f_2(\tau-t), & \text{se} \quad \tau\in(t,T],\end{cases}$$

em que f_1, f_2 são as seleções correspondentes com as soluções φ e ψ, respectivamente.

Queremos mostrar que $\theta(\cdot)$ é solução integral do problema

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta}{d\tau}(\tau) & \in & A(\theta(\tau)) & + & f(\tau),\ \tau\in[0,T],\\ \theta(0) & = & y_0.\end{cases}\tag{3.10}$$

Note que $f(\cdot)\in L^1([0,T],X)$, pois f é mensurável como concatenada de duas funções mensuráveis pela Proposição 3.1.1. Além disso,

$$\int_0^T\|f(\tau)\|_X d\tau=\int_0^t\|f(\tau)\|_X d\tau+\int_t^T\|f(\tau)\|_X d\tau=\int_0^t\|f_1(\tau)\|_X d\tau+\int_t^T\|f_2(\tau-t)\|_X d\tau.$$

Fazendo $s=\tau-t$, $ds=d\tau$ temos:

$$\int_t^T\|f_2(\tau-t)\|_X d\tau=\int_0^{T-t}\|f_2(s)\|_X ds\leq\int_0^T\|f_2(s)\|_X ds<\infty$$

e

$$\int_0^t\|f_1(\tau)\|_X d\tau\leq\int_0^T\|f_1(\tau)\|_X d\tau<\infty.$$

Portanto

$$\int_0^T\|f(\tau)\|_X d\tau<\infty.$$

Observe que $f(\tau)\in F(\theta(\tau))$ τ-q.t.p. em $[0,T]$, pois $f_1(\tau)\big|_{[0,t]}\in F(\varphi(\tau))$ τ-q.t.p. em $[0,t]$ e $f_2(\tau)\big|_{[0,T-t]}\in F(\psi(\tau))$ τ-q.t.p. em $[0,T-t]$. Queremos mostrar que a desigualdade (3.5) é verdadeira para $0\leq s\leq\tau\leq T$ em que $\theta(0)=y_0$. Sejam $u\in\mathcal{D}(A)$, $v\in A(u)$ (quaisquer) e analizemos os seguintes casos:

Caso 1: Se $\tau \leq t$, tem-se que $f(\tau) = f_1(\tau)$ e $\theta(\tau) = \varphi(\tau)$. Logo

$$\begin{aligned}
\|\theta(\tau)-u\|_X^2 &= \|\varphi(\tau)-u\|_X^2 \leq \|\varphi(s)-u\|_X^2 + 2\int_s^\tau \langle f_1(\ell)+v, \varphi(\ell)-u\rangle_+ \, d\ell \\
&= \|\theta(s)-u\|_X^2 + 2\int_s^\tau \langle f(\ell)+v, \theta(\ell)-u\rangle_+ \, d\ell
\end{aligned}$$

Caso 2: Se $t \leq s$, temos que $f(\tau) = f_2(\tau - t)$ e $\theta(\tau) = \psi(\tau - t)$. Logo

$$\begin{aligned}
\|\theta(\tau)-u\|_X^2 &= \|\psi(\tau-t)-u\|_X^2 \leq \|\psi(s-t)-u\|_X^2 \\
&+ 2\int_{s-t}^{\tau-t} \langle f_2(\ell)+v, \psi(\ell)-u\rangle_+ \, d\ell.
\end{aligned}$$

Fazendo $\ell = x - t,\ d\ell = dx$ temos:

$$\begin{aligned}
\|\theta(\tau)-u\|_X^2 &\leq \|\theta(s)-u\|_X^2 + 2\int_s^\tau \langle f_2(x-t)+v, \psi(x-t)-u\rangle_+ \, dx \\
&= \|\theta(s)-u\|_X^2 + 2\int_s^\tau \langle f(x)+v, \theta(x)-u\rangle_+ \, dx.
\end{aligned}$$

Caso 3: Se $s < t < \tau$, temos que $f(\tau) = f_2(\tau - t)$ e $\theta(\tau) = \psi(\tau - t)$. Logo

$$\begin{aligned}
\|\theta(\tau)-u\|_X^2 &= \|\psi(\tau-t)-u\|_X^2 \leq \|\psi(0)-u\|_X^2 \\
&+ 2\int_0^{\tau-t} \langle f_2(\ell)+v, \psi(\ell)-u\rangle_+ \, d\ell.
\end{aligned}$$

Fazendo $\ell = x - t,\ d\ell = dx$ temos:

$$\begin{aligned}
\|\theta(\tau)-u\|_X^2 &\leq \|\varphi(t)-u\|_X^2 + 2\int_t^\tau \langle f_2(x-t)+v, \psi(x-t)-u\rangle_+ \, dx \\
&= \|\varphi(t)-u\|_X^2 + 2\int_t^\tau \langle f(x)+v, \theta(x)-u\rangle_+ \, dx \\
&\leq \|\varphi(s)-u\|_X^2 + 2\int_s^t \langle f_1(x)+v, \varphi(x)-u\rangle_+ \, dx \\
&+ 2\int_t^\tau \langle f(x)+v, \theta(x)-u\rangle_+ \, dx \\
&= \|\theta(s)-u\|_X^2 + 2\int_s^t \langle f(x)+v, \theta(x)-u\rangle_+ \, dx \\
&+ 2\int_t^\tau \langle f(x)+v, \theta(x)-u\rangle_+ \, dx \\
&= \|\theta(s)-u\|_X^2 + 2\int_s^\tau \langle f(x)+v, \theta(x)-u\rangle_+ \, dx.
\end{aligned}$$

Logo, $\theta(\cdot)$ é uma solução integral do problema (3.10). ■

Lema 3.1.2 *[1] O semigrupo multívoco G satisfaz a propriedade*

$$G(t_1+t_2, x) = G(t_1, G(t_2, x)),\ \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, x \in \overline{\mathcal{D}(A)}.$$

Demonstração: Tendo em vista o Lema 3.1.1, basta provar que $G(t_1, G(t_2, x)) \subset G(t_1 + t_2, x)$, $\forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $\forall\, x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. De fato, sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ e $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ (quaisquer) e considere $y \in G(t_1, G(t_2, x))$ arbtrário. Então existem $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ soluções integrais da inclusão (3.1) com $y_1(0) = x$, $y_2(0) = y_1(t_2)$, $y = y_2(t_1)$. Considere as seguintes funções concatenadas

$$z(t) := \begin{cases} y_1(t) & , \text{ se } \; 0 \le t \le t_2, \\ y_2(t - t_2), & \text{ se } \; t_2 \le t, \end{cases}$$

$$f(t) := \begin{cases} f_1(t) & , \text{ se } \; 0 \le t \le t_2, \\ f_2(t - t_2), & \text{ se } \; t_2 \le t, \end{cases}$$

em que f_1, f_2 são as seleções correspondentes às soluções integrais y_1, y_2 respectivamente. Logo pela Proposição 3.1.2, $z(\cdot)$ é uma solução integral do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt}(t) & \in & A(z(t)) & + & f(t),\, t \in [0, T], \\ z(0) & = & x. \end{cases}$$

Portanto, $y = z(t_1 + t_2) \in G(t_1 + t_2, x)$. ■

Seja $C([0, T], X)$ (respectivamente $C([0, \infty), X)$) o espaço de Banach das funções contínuas de $[0, T]$ em X. Seja a aplicação $\pi_T : C([0, \infty), X) \to C([0, T], X)$ e denotemos o operador

$$\pi_T(y(\cdot)) = \{\tilde{y}(\cdot) \in C([0, T], X) : \tilde{y}(s) = y(s),\, \forall\, s \in [0, T]\}.$$

Lema 3.1.3 *[1] Assuma que as condições* (A), (F_1), (F_2) *sejam satisfeitas. Então para cada* $t \ge 0$ *a aplicação* $G(t, \cdot) : \overline{\mathcal{D}(A)} \to \overline{\mathcal{D}(A)}$ *possui valores limitados. Além disso,* $\pi_T D(y_0) := \{\pi_T(y(\cdot)) : y(\cdot) \in D(y_0)\}$ *é limitado em* $C([0, T], X)$ *para qualquer* $T \ge 0$, $y_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$.

Demonstração: Sabendo que as condições (F_1), (F_2) são satisfeitas, existem constantes D_1, $D_2 \ge 0$ tal que

$$\|y\| = \|y - y_0 + y_0\| \le \|y - y_0\| + \|y_0\| \le D_1 + D_2\|x\|, \tag{3.11}$$

$\forall\, x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, $\forall\, y \in F(x)$ em que $y_0 \in F(0)$.
Além disso, como as condições (A), (F_1) e (F_2) são satisfeitas, então pela Observação 3.1.1 existe uma única solução integral $z(\cdot) \in C([0, T], X)$ do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt}(t) & \in & A(z(t)),\, t \in [0, T], \\ z(0) & = & y_0. \end{cases}$$

Seja $r_0 = max\{\|z(t)\|,\, 0 \le t \le T\} < \infty$. Consideremos uma solução arbitrária $y(\cdot) \in D(y_0)$, $y(\cdot) = I(y_0)f(\cdot)$. Então, segue-se das desigualdades (3.6) e (3.11) que

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \|y(t) - z(t) + z(t)\| \le \|z(t)\| + \|y(t) - z(t)\| \le \|z(t)\| \\ &+ \|y(0) - z(0)\| + \int_0^t \|f(\tau)\| d\tau = \|z(t)\| + \int_0^t \|f(\tau)\| d\tau \\ &\le r_0 + \int_0^t (D_1 + D_2\|y(\tau)\|) d\tau,\, \forall\, t \le T. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Sendo assim, se $D_2 = 0$ temos que $\|y(t)\| \leq r_0 + D_1 t \leq r_0 + D_1 T$, $\forall\, t \in [0,T]$. Por outro lado, se $D_2 \neq 0$ e reescrevendo (3.12) por

$$\|y(t)\| + \frac{D_1}{D_2} \leq \left(r_0 + \frac{D_1}{D_2}\right) + \int_0^t D_2 \left(\frac{D_1}{D_2} + \|y(\tau)\|\right) d\tau$$

temos pelo Lema de Gronwall-Bellmam

$$\|y(t)\| + \frac{D_1}{D_2} \leq \left(r_0 + \frac{D_1}{D_2}\right) e^{\int_0^t D_2 d\tau} = \left(r_0 + \frac{D_1}{D_2}\right) e^{D_2 t} \leq \left(r_0 + \frac{D_1}{D_2}\right) e^{D_2 T},\ \forall\, t \in [0,T].$$

Logo $\|y(t)\| \leq \left(r_0 + \frac{D_1}{D_2}\right) e^{D_2 T} - \frac{D_1}{D_2}$, $\forall\, t \in [0,T]$. Portanto, $\pi_T D(y_0)$ é limitado em $C([0,T],X)$, $\forall\, T \geq 0$, $\forall\, y_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Portanto, é óbvio que o conjunto $G(t,y_0) = \{y(t) : y(\cdot) \in \mathcal{D}(y_0)\}$ é limitado para cada $t \geq 0$, $y_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. ■

Lema 3.1.4 *[1] Assuma que as condições (A), (F_1), (F_2) sejam satisfeitas. Então para qualquer $t \geq 0$ fixado existe $c > 0$ tal que*

$$\mathrm{dist}_H(G(t,x), G(t,y)) \leq \exp(2ct)\|x - y\|,\ \forall\, x,\ y \in \overline{\mathcal{D}(A)}. \tag{3.13}$$

Demonstração: Seja $\bar{x} \in G(t,x)$ arbitrário, $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, $t \geq 0$ e seja $x(\cdot) \in \mathcal{D}(x)$ com $x(\cdot) = I(x)f(\cdot)$, tal que $x(t) = \bar{x}$. Como $x(\cdot)$ é solução integral da inclusão (3.1) com $x(0) = x$, temos que $f(\tau) \in F(x(\tau))$ τ-t.q.p. em $[0,T]$. Logo $\mathrm{dist}(f(\tau), F(x(\tau))) = 0$, τ-q.t.p. em $[0,T]$. Seja $y \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Então pela Observação 3.1.4 existe pelo menos uma solução integral $y(\cdot) \in D(y)$, com $y(\cdot) = I(y)g(\cdot)$ tal que

$$\|x(\tau) - y(\tau)\| \leq \|x - y\| \exp(2c\tau) + \int_0^\tau \exp(2c(\tau - s))\rho(s) ds,\ \forall\, \tau \in [0,t],\ c > 0 \text{ constante.}$$

Como $\rho(\tau) = 2\mathrm{dist}(f(\tau), F(x(\tau))) = 0$ τ-q.t.p. em $[0,t]$ temos que,

$$\|x(\tau) - y(\tau)\| \leq \|x - y\| \exp(2c\tau), \text{em } [0,t].$$

Visto que $\bar{x} \in G(t,x)$ é arbitrário, temos

$$\mathrm{dist}(G(t,x), G(t,y)) \leq \exp(2ct)\|x - y\|.$$

Analogamente, podemos provar que

$$\mathrm{dist}(G(t,y), G(t,x)) \leq \exp(2ct)\|x - y\|.$$

Portanto a desigualdade (3.13) é verdadeira. ■

Para $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathcal{D}(A)})$ denotemos $D(B) := \bigcup_{x \in B} D(x)$, $\mathcal{M}(B,T) := \{f(\cdot) \in L^1([0,T],X) : y(\cdot) = I(x)f(\cdot),\ y(\cdot) \in \pi_T D(B)\}$.

Lema 3.1.5 *[1] Assuma que as condições (A), (F_1), (F_2) sejam satisfeitas. Então para cada $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathcal{D}(A)})$ e $T > 0$ os conjuntos $\mathcal{M}(B,T)$, $\pi_T D(B)$ são limitados em $L^\infty([0,T],X)$ e $C([0,T],$ $X)$ respectivamente.*

Demonstração: Seja $x \in B \in \mathcal{B}(\overline{\mathcal{D}(A)})$, $T > 0$ arbitrário. Tendo em vista o Lema 3.1.3 existe $K_1 > 0$ dependendo de B e T tal que para qualquer $x(\cdot) \in D(x)$

$$\|x(t)\| \leq K_1, \ \forall\, t \in [0,T].$$

Considere $y(\cdot) = I(y)g(\cdot)$ arbitrário em $D(B)$ com $g(\cdot) \in L^1([0,T],X)$ e $y(0) = y \in B$. Assim, do mesmo modo como no Lema 3.1.4 obtem-se a existência de $x(\cdot) = I(x)f(\cdot) \in D(x)$ com $f(\cdot) \in L^1([0,T],X)$ tal que $\|x(t) - y(t)\| \leq \exp(2ct)\|x - y\|$, $\forall\, t \in [0,T]$. Logo,

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \|y(t) - x(t) + x(t)\| \leq \|y(t) - x(t)\| + \|x(t)\| \leq \|x(t)\| + \exp(2ct)\|x - y\| \\ &\leq K_1 + \exp(2ct)K_2 \leq K_1 + \exp(2cT)K_2, \ \forall\, t \in [0,T], \end{aligned}$$

em que K_1, K_2 dependem de B. Portanto $\pi_T D(B)$ é limitado em $C([0,T],X)$.

Provemos agora que $\mathcal{M}(B,T)$ é limitado em $L^\infty([0,T],X)$. Seja $f(\cdot) \in \mathcal{M}(B,T)$ arbitrário. Então existem $x \in B$, $x(\cdot) \in D(x)$, tal que $x(\cdot) = I(x)f(\cdot)$ e $f(t) \in F(x(t))$ t-q.t.p. em $(0,T)$. Seja $\bar{x} \in D(x)$ fixado. Como a condição (F_1) é satisfeita então F possui valores limitados logo, $\|\bar{y}\| \leq D < \infty$, $\forall\, \bar{y} \in F(\bar{x})$. Dados $\varepsilon > 0$, $t \in (0,T)$ existe $y_\varepsilon(t) \in F(\bar{x})$ tal que

$$\operatorname{dist}(f(t), F(\bar{x})) \geq \|f(t) - y_\varepsilon(t)\| - \varepsilon.$$

Então, como a condição (F_2) é satisfeita existe $c \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|f(t)\| &= \|f(t) - y_\varepsilon(t) + y_\varepsilon(t)\| \\ &\leq \|f(t) - y_\varepsilon(t)\| + \|y_\varepsilon(t)\| \\ &\leq \|y_\varepsilon(t)\| + \varepsilon + \operatorname{dist}(f(t), F(\bar{x})) \\ &\leq \|y_\varepsilon(t)\| + \varepsilon + c\|x(t) - \bar{x}\| \\ &\leq D + \varepsilon + c\|x(t) - \bar{x}\| \\ &\leq D + \varepsilon + c(\|x(t)\| + \|\bar{x}\|) \ t\text{-q.t.p. em } (0,T). \end{aligned}$$

Visto que $\pi_T D(B)$ é limitado em $C([0,T],X)$

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \sup_{0<t<T} \operatorname{ess}\|f(t)\|_X \leq D + \varepsilon + c(\|x(t)\|_{L^\infty([0,T],X)} + \|\bar{x}\|_X) \\ &= D + \varepsilon + c(\|x(t)\|_{C([0,T],X)} + \|\bar{x}\|_X) \leq \tilde{c}. \end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{M}(B,T)$ é limitado em $L^\infty([0,T],X)$. ■

Observação 3.1.5 *[16] Suponha X^* um espaço uniformemente convexo. Se o semigrupo $S(t,\cdot)$ gerado por A é compacto (isto é, o operador $S(t,\cdot)$ é compacto $\forall\, t > 0$) então para qualquer $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, $T > 0$ o conjunto $\pi_T D(x)$ é compacto em $C([0,T],X)$.*

Corolário 3.1.1 *[1] Assuma que as condições (A), (F_1), (F_2) sejam satisfeitas. Seja X^* uniformemente convexo e suponha o semigrupo $S(t,\cdot)$ compacto, então o semigrupo multívoco $G(t,\cdot)$ possui valores compactos para cada $t \geq 0$.*

Demonstração: Devemos mostrar que $G(t,x) = \{y(t) : y(\cdot) \in D(x)\}$ é compacto para cada $t \geq 0$. De fato, seja $t \geq 0$ e $\{z_n\}$ uma sequência em $G(t,x)$. Logo $z_n = y_n(t)$, $y_n \in D(x)$. Tome $T > t$. Pela observação anterior $\pi_T D(x) = \{y : [0,T] \to X : y \in D(x)\}$ é compacto em $C([0,T],X)$. Como $y_n \in \pi_T \mathcal{D}(x)$ logo, existe uma subsequência $\{y_{n_j}\}$ de $\{y_n\}$ tal que $y_{n_j} \to y \in \pi_T D(x)$ em $C([0,T],X)$, isto é,

$$\sup_{\tau \in [0,T]} \|y_{n_j}(\tau) - y(\tau)\|_X \to 0,$$

quando $j \to \infty$. Em particular, $\|y_{n_j}(t) - y(t)\|_X \to 0$, quando $j \to \infty$. Portanto $z_{n_j} = y_{n_j}(t) \to y(t) \in G(t,x)$, quando $j \to \infty$. Portanto $G(t,\cdot)$ é compacto em X. ■

Lema 3.1.6 *[4] Seja $u(t)$ uma função com valores em X em um intervalo real. Suponha que $u(t)$ adimite derivada fraca $u'(s) \in X$ em $t = s$ (isto é, $\frac{d}{dt}(u(t), x^*)\,|_{t=s} = (u'(s), x^*)$ para cada $x^* \in X^*$). Suponha que $t \to \|u(t)\|$ é diferenciável em $t = s$. Então*

$$\|u(s)\| \frac{d}{ds} \|u(s)\| = \langle u'(s), f \rangle$$

para cada $f \in J(u(s))$.

Demonstração: Sejam $h > 0$ e $f \in J(u(s))$. Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela definição da aplicação dual J temos

$$\begin{aligned} \langle u(s+h) - u(s), f \rangle &= \langle u(s+h), f \rangle - \langle u(s), f \rangle \le \|u(s+h)\| \|f\| - \|u(s)\|^2 \\ &= \|u(s+h)\| \|f\| - \|u(s)\| \|u(s)\| \\ &= \|u(s+h)\| \|f\| - \|u(s)\| \|f\| \\ &= (\|u(s+h)\| - \|u(s)\|) \|f\| \end{aligned} \tag{3.14}$$

Dividindo a inequação (3.14) por h temos

$$\left\langle \frac{u(s+h) - u(s)}{h}, f \right\rangle \le \frac{1}{h} (\|u(s+h)\| - \|u(s)\|) \|f\|.$$

Como $u(t)$ é fracamente diferenciável em $t = s$ e $t \to \|u(t)\|$ é diferenciavél em $t = s$,

$$\langle u'(s), f \rangle \le \|f\| \frac{d}{ds} \|u(s)\| = \|u(s)\| \frac{d}{ds} \|u(s)\|.$$

De modo análogo, para $h < 0$ temos

$$\langle u'(s), f \rangle \ge \|u(s)\| \frac{d}{ds} \|u(s)\|.$$

Portanto,

$$\langle u'(s), f \rangle = \|u(s)\| \frac{d}{ds} \|u(s)\|.$$

■

Proposição 3.1.3 *[2] Uma aplicação multívoca com valores não-vazios, compactos é contínua se, e somente se, é contínua no sentido da métrica de Hausdorff.*

Vamos formular agora o principal resultado sobre a existência de um B-atrator global compacto para o semigrupo multívoco $G(t, \cdot)$.

Teorema 3.1.1 *[1] Assuma que as condições (A), (F_1), (F_2) sejam satisfeitas e que X^* seja uniformemente convexo. Sejam $S(t, \cdot)$ o semigrupo compacto gerado por A e $G(t, \cdot)$ o semigrupo multívoco compacto para algum $t_0 > 0$ (isto é, $\forall\, B \in \mathcal{B}(\overline{\mathcal{D}(A)})$ o conjunto $\overline{G(t_0, B)}$ é pré-compacto em X). Assuma que qualquer solução integral $y(\cdot) \in D(y_0)$, $y_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ do problema (3.1), (3.2) é solução forte do Problema (3.3), (3.4) em que $f(\cdot)$ é a seleção com respeito a solução integral $y(\cdot)$, e que a seguinte condição vale:*

$$\begin{gathered} \exists\, \delta > 0,\ M > 0 \text{ tal que } \forall\, x \in \mathcal{D}(A), \|x\| > M, \\ \forall\, y \in A(x) + F(x),\ \exists\, j \in J(x) \text{ para o qual } \langle y, j \rangle \le -\delta. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Então o semigrupo multívoco G possui o B-atrator global compacto negativamente invariante R que é o minimal entre todos os B-atratores globais fechados. Além disso, R é invariante e é o conjunto maximal entre todos os subconjuntos limitados em X e negativamente invariante pelo semigrupo multívoco G.

Demonstração: Provaremos que todas as hipóteses do Teorema 2.2.3 são satisfeitas. Primeiro notemos que, como $G(t,\cdot)$ é compacto para algum $t_0 > 0$ então, pela Proposição 2.2.1 o semigrupo multívoco $G(t,\cdot)$ é assintoticamente semicompacto superior.

Note que, a aplicação multívoca $G(t,\cdot)$ é contínua no sentido da métrica de Hausdorff, pois, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/\exp(2ct)$ e teremos, pelo Lema 3.1.4, que $\forall\, t \geq 0$ fixado vale

$$\mathrm{dist}_H(G(t,x),G(t,y)) \leq \exp(2ct)\|x-y\| < \exp(2ct)\varepsilon/\exp(2ct) = \varepsilon,\ \forall\, x,y \in \overline{\mathcal{D}(A)},$$

com $\|x-y\| < \delta$. Por outro lado, segue-se do Corolário 3.1.1 que $G(t,\cdot)$ possui valores compactos, isto é, $G(t,\cdot) : \overline{\mathcal{D}(A)} \to K(\overline{\mathcal{D}(A)})$. Logo, segue da Proposição 3.1.3 que $G(t,\cdot)$ é semicontínua superiormente.

Afirmação: $G(t,B_0) \subset B_0$, $\forall\, t \geq 0$ em que $B_0 := \{u \in \overline{\mathcal{D}(A)} : \|u\| \leq M + \varepsilon_0\}$, sendo $\varepsilon_0 > 0$ fixado. De fato, é suficiente mostrar que qualquer solução integral com condição inicial em B_0 encontra-se inteiramente em B_0. Seja $x(\cdot) \in D(x)$ arbitrário com $x \in B_0$ e suponhamos por contradição que existe $t_0 > 0$ tal que $x(t_0) \notin B_0$. Então $\|x(t_0)\| > M + \varepsilon_0$. Considere $y(t) = \|x(t)\| - M - \varepsilon_0$. Note que $y(t_0) > 0$. Por outro lado, como $x \in B_0$, então $\|x\| = \|x(0)\| \leq M + \varepsilon_0$. Logo, $y(0) \leq 0$. Portanto, pelo teorema do valor intermediário existe $t_{B_0} \geq 0$ tal que $y(t_{B_0}) = 0$, logo $\|x(t_{B_0})\| = M + \varepsilon$, $\|x(\tau)\| > M + \varepsilon$, $t_{B_0} < \tau < t_0$. Pela inclusão (3.1) temos que existe uma seleção $f(t) \in F(x(t))$ t-q.t.p. em $[t_{B_0}, t_0]$ tal que $\dfrac{dx}{dt}(t) \in A(x(t)) + f(t)$. Logo, existe $y(t) \in A(x(t))$ de modo que

$$\frac{dx}{dt}(t) = y(t) + f(t). \tag{3.16}$$

Pela hipótese existe $j \in J(x(\tau))$ tal que $\langle y(t) + f(t), j\rangle \leq -\delta$. Multiplicando (3.16) por $j \in J(x(\tau))$ temos:

$$\left\langle \frac{dx}{dt}(t), j \right\rangle = \langle y(\tau) + f(\tau), j\rangle \leq -\delta.$$

Pelo Lema 3.1.6 temos $\|x(\tau)\| \dfrac{d}{d\tau}\|x(\tau)\| \leq -\delta$. Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|x(\tau)\|^2 \leq -\delta,\ t_{B_0} \leq \tau \leq t_0. \tag{3.17}$$

Integrando (3.17) sobre $[t_{B_0}, t_0]$ temos:

$$\frac{1}{2}\|x(t_0)\|^2 - \frac{1}{2}\|x(t_{B_0})\|^2 \leq -\delta(t_0 - t_{B_0}).$$

Logo

$$\|x(t_0)\|^2 \leq \|x(t_{B_0})\|^2 - 2\delta(t_0 - t_{B_0}) = (M+\varepsilon_0)^2 - 2\delta(t_0 - t_{B_0}) < (M+\varepsilon_0)^2.$$

Portanto $\|x(t_0)\| < M + \varepsilon_0$ o que contradiz $\|x(t_0)\| > M + \varepsilon_0$. Portanto, $G(t,B_0) \subset B_0$, $\forall\, t \geq 0$.

Mostremos que $G(t,\cdot)$ é ponto dissipativo. Mostremos então que para todo $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ existe $t_1 > 0$ tal que $G(t_1,x) \subset B_0$. Suponhamos, por contradição, que existe $x_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ tal que $G(t,x_0) \not\subset B_0$, $\forall\, t \geq 0$. Tome $t_2 \geq \max\left\{\frac{\|x_0\|^2 - (M+\varepsilon_0)^2}{2\delta}, 0\right\}$. Como B_0 é positivamente invariante, existe $x(\cdot) \in D(x_0)$ tal que $x(\tau) \notin B_0$, $\forall\, \tau \in [0,t_2]$. Usando a condição (3.15) e procedendo como antes temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|x(\tau)\|^2 \leq -\delta,\ \forall\, \tau \in [0,t_2]. \tag{3.18}$$

Integrando (3.18) sobre $[0,t_2]$ temos

$$\frac{1}{2}\|x(t_2)\|^2 - \frac{1}{2}\|x(0)\|^2 \leq -\delta t_2,$$

logo

$$\|x(t_2)\|^2 \leq \|x_0\|^2 - 2\delta t_2 < \|x_0\|^2 - 2\delta\left(\frac{\|x_0\|^2 - (M+\varepsilon_0)^2}{2\delta}\right) = (M+\varepsilon_0)^2.$$

Então $\|x(t_2)\| < M+\varepsilon_0$. Portanto $x(t_2) \in B_0$ que é uma contradição já que $x(\tau) \notin B_0$, $\forall\, \tau \in [0,t_2]$. Logo $G(t,\cdot)$ é ponto dissipativo.

Resta mostrar que, para qualquer $B \in B(\overline{\mathcal{D}(A)})$ existe $T(B) \in \mathbb{R}_+$ tal que $\gamma^+_{T(B)}(B) \in B(\overline{\mathcal{D}(A)})$. Do mesmo modo que mostramos que $G(t,B_0) \subset B_0$, $\forall\, t \geq 0$ podemos mostrar que para qualquer $N > M$, $G(t,B_N) \subset B_N$, $\forall\, t \geq 0$, em que $B_N := \{x \in \overline{\mathcal{D}(A)} : \|x\| \leq N\}$. De fato, seja $B \in B(\overline{\mathcal{D}(A)})$ arbitrário. Logo, existe $c > 0$ tal que $\|b\|_X < c$, $\forall\, b \in B$. Considere $N > \max\{c,M\}$, logo $B \subset B_N$. Portanto, $\gamma^+_0(B) = \bigcup_{t\geq 0} G(t,B) \subset \bigcup_{t\geq 0} G(t,B_N) \subset B_N \in B(\overline{\mathcal{D}(A)})$. Logo, pelo Teorema 2.2.3 $G(t,\cdot)$ possui o B-atrator global compacto, negativamente invariante R que é o minimal entre todos os B-atratores globais fechados. Note ainda que, pela Proposição 2.2.4 (i), $\forall\, B \subset B(\overline{\mathcal{D}(A)})$ negativamente invariante, tem-se que $B \subset \overline{R} = R$. Portanto R é o maximal entre todos os subconjuntos limitados negativamente invariante de $G(t,\cdot)$. Além disso, R é invariante, pois pelo Lema 3.1.2 $G(t_1+t_2,x) = G(t_1,G(t_2,x))$ $\forall\, t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+$, $\forall\, x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Portanto pela Observação 2.2.4 $R = G(t,R)$, $\forall\, t \geq 0$. ■

3.2 Aplicações

Vejamos alguns exemplos de inclusões diferenciais para os quais os resultados anteriores possam ser aplicados.

3.2.1 Inclusões Diferenciais em Espaços de Hilbert

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e $\varphi : \mathcal{H} \to (-\infty,+\infty]$ uma função própria convexa, semicontínua inferiormente e $\partial\varphi : D(\partial\varphi) \subset \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ a subdiferencial, isto é,

$$\partial\varphi(x) = \{y \in \mathcal{H} : \varphi(x) - \varphi(u) \leq (y, x-u),\ \forall\, u \in \mathcal{H}\}$$

em que $(\cdot,\cdot)$ denotará o produto interno em $\mathcal{H}$. Denote $D(\varphi)$ o domínio de φ, isto é,

$$D(\varphi) = \{x \in \mathcal{H} : \varphi(x) < +\infty\}.$$

Considere o problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) & \in & -\partial\varphi(y) + F(u),\ t \in [0,T], \\ y(0) & = & u_0 \in \mathcal{H}, \end{cases} \tag{3.19}$$

em que $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ é uma aplicação multívoca, satisfazendo as condições (F_1), (F_2) para $X = \mathcal{H}$ e $A(y) = \partial\varphi(y)$.

Proposição 3.2.1 *[4] O operador $-\partial\varphi$ é m-Dissipativo. Além disso, $\overline{D(\varphi)} = \overline{D(\partial\varphi)}$.*

Proposição 3.2.2 *[4] O operador $\partial\varphi$ gera um semigrupo não linear de operadores $S(t,\cdot):\overline{D(\varphi)}\to\overline{D(\varphi)}$.*

Observação 3.2.1 *Segue do Lema 3.1.1 que a inclusão (3.19) define um semigrupo multívoco $G(t,\cdot):\overline{\mathcal{D}(\varphi)}\to\mathcal{P}(\overline{\mathcal{D}(\varphi)})$.*

Teorema 3.2.1 *[18] Seja φ uma funcão convexa própria e semicontínua inferiormente em $\mathcal{H}$ e seja $S(t,\cdot)$ o semigrupo gerado por $\partial\varphi$ em $\overline{\mathcal{D}(\partial\varphi)}$. Então para todo $u_0\in\overline{\mathcal{D}(\partial\varphi)}$ e todo $t>0$, $S(t,u_0)\in\mathcal{D}(\partial\varphi)$, e $t\mapsto S(t)u_0$ é Lipschitz em $(\delta,+\infty]$, $\forall\,\delta>0$.*

A noção de operador monótono em um espaço de Hilbert aparece como um caso particular de operador monótono de um espaço de Banach no seu dual. Seja X um espaço de Banach de norma $\|\cdot\|$ e X^* seu dual.

Definição 3.2.1 *[4] Seja V um espaço de Banach real, um operador $A:V\to V^*$ é dito ser monótono se para todo $u,v\in\mathcal{D}(A)$*

$$(Au-Av,u-v)_{V^*,V}\geq 0.$$

Um operador monótono $A:V\to V^*$ é dito ser maximal monótono se ele não esta propriamente contido em qualquer outro operador monótono de V em V^*.

Teorema 3.2.2 *[4] Seja V um espaço de Banach real e $\varphi:V\to(-\infty,+\infty]$ uma função convexa, própria e semicontínua inferiormente. Então $\partial\varphi:V\to V^*$ é um operador maximal monótono.*

Definição 3.2.2 *[4] Seja V um espaço de Banach. Dizemos que um operador $A:V\to V^*$ é coercivo se*

$$\lim_{j\to\infty}\frac{(Au_j,u_j)_{V^*,V}}{\|u_j\|_V}=\infty$$

qualquer que seja $(u_j)\subset V$ com $\lim\limits_{j\to\infty}\|u_j\|_V=\infty$.

Definição 3.2.3 *[4] Seja V um espaço de Banach. Dizemos que um operador $A:V\to V^*$ é hemicontínuo se para todo $u,v\in V$ tivermos*

$$A(u+\lambda v)\rightharpoonup Au$$

quando $\lambda\to 0$.

Teorema 3.2.3 *[4] Se X é um espaco de Banach reflexivo e B é um operador monótono, definido em toda parte e hemicontínuo de X em X^*, então B é o maximal monótono. Se em adição B for coercivo, então $Im(B)=X^*$.*

Observação 3.2.2 *[19] O semigrupo $S(t,\cdot)$ é compacto se a seguinte condição é satisfeita:*

(H) O conjunto $M_K=\{u\in D(\varphi):\|u\|\leq K,\ \varphi(u)\leq K\}$ é compacto em $\mathcal{H}$ para qualquer $K>0$.

Observação 3.2.3 *[1] Se a condição (H) é satisfeita decorre do Corolário 3.1.1 que o semigrupo multívoco $G(t,\cdot)$ possui valores compactos, isto é, $G(t,\cdot):\overline{D(\varphi)}\to\mathcal{K}(\overline{D(\varphi)})$.*

Considere o problema

$$\frac{du}{dt} + \partial\varphi(u) \ni f(t),\ t \in [0,T], \tag{3.20}$$
$$u(0) = u_0 \in \overline{D(\varphi)}. \tag{3.21}$$

Proposição 3.2.3 *[4] Sejam $f \in L^2([0,T],\mathcal{H})$ e $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\varphi)}$. Então, existe uma única solução forte $u(\cdot) \in C([0,T],\mathcal{H})$ do problema $(3.20)-(3.21)$ satisfazendo:*

(i) *$u(\cdot) \in W^{1,2}([\delta,T],\mathcal{H})$ para cada $0 < \delta < T$.*

(ii) *$u(t) \in \mathcal{D}(A)$, t-q.t.p. em $(0,T)$.*

(iii) *Se $u_0 \in \mathcal{D}(\varphi)$ então $\dfrac{du}{dt} \in L^2([0,T],\mathcal{H})$, $\varphi(u) \in L^\infty([0,T])$.*

(iv) *$\varphi(u(t))$ é absolutamente contínua em $[\delta,T]$, $\forall\, 0 < \delta < T$.*

(v) *$t\left\|\dfrac{du}{dt}(t)\right\|^2 + t\dfrac{d\varphi}{dt}(u(t)) = t\left(f(t),\dfrac{du}{dt}(t)\right)$ t-q.t.p. em $(0,T)$.*

(vi) *$\sqrt{t}\,\dfrac{du}{dt} \in L^2([0,T],\mathcal{H})$, $\varphi(u) \in L^1([0,T])$.*

A demonstração deste resultado será feita no Apêndice, assim como a definição formal do espaço $W^{k,p}([0,T],\mathcal{H})$ que tem como caso particular $W^{1,2}([\delta,T],\mathcal{H})$ que aparece no Teorema anterior.

Observemos a seguinte consequência importante da Proposição anterior. Tomemos uma solução integral $u(\cdot) \in D(u_0)$ arbitrária da inclusão (3.19) com $u(\cdot) = I(u_0)f(\cdot)$. Pelo Lema 3.1.5 $f(\cdot) \in L^2([0,T],\mathcal{H})$. Assim, uma vez que a solução de (3.20) é única para qualquer $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\varphi)}$ segue da Proposição 3.2.3 que $u(\cdot)$ é uma solução forte de (3.20).

Além disso, a proposição anterior e o Lema 3.1.5 nos permitem provar uma propriedade importante do semigrupo multívoco G.

Teorema 3.2.4 *[1] Assuma que a Propriedade (H) seja satisfeita. Então o semigrupo multívoco G é compacto.*

Demonstração: Devemos mostrar que para cada $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathcal{D}(\varphi)})$ e qualquer $T > 0$ o conjunto $G(T,B)$ é precompacto em $\mathcal{H}$. Como as condições (A), (F_1), (F_2) são satisfeitas, pelo Lema 3.1.5 temos que para qualquer $T > 0$ o conjunto $\mathcal{M}(B,T)$ é limitado em $L^\infty([0,T],\mathcal{H})$, em particular, $\mathcal{M}(B,T)$ é limitado em $L^2([0,T],\mathcal{H})$. Seja $u(\cdot) \in D(B)$ arbitrária. Então pela proposição anterior temos

$$t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 + t\,\frac{d\varphi}{dt}(u(t)) = t\left(f(t),\frac{du}{dt}(t)\right) \text{ t-q.t.p. em } (0,T). \tag{3.22}$$

Integrando (3.22) sobre o intervalo $[0,T]$ temos

$$\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 dt + \int_0^T t\frac{d\varphi}{dt}(u(t))dt = \int_0^T t\left(f(t),\frac{du}{dt}(t)\right)dt$$

$$\Longrightarrow \int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 dt + T\varphi(u(T)) = \int_0^T t\left(f(t),\frac{du}{dt}(t)\right)dt + \int_0^T \varphi(u(t))dt \tag{3.23}$$

Assim, como $\varphi(u) \geq 0$ e usando a equação (3.23) e as desigualdades de Cauchy Schwarz e Young temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 dt &\leq \int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 dt + T\varphi(u(T)) \\
&= \int_0^T t\left(f(t), \frac{du}{dt}(t)\right) dt + \int_0^T \varphi(u(t))dt \\
&\leq \int_0^T \sqrt{t}\;\|f(t)\|\sqrt{t}\;\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| dt + \int_0^T \varphi(u(t))dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^T t\,\|f(t)\|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 dt + \int_0^T \varphi(u(t))dt
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 dt \leq \frac{1}{2}\int_0^T t\,\|f(t)\|^2 dt + \int_0^T \varphi(u(t))dt.
$$

Portanto,

$$
\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 dt \leq \int_0^T t\,\|f(t)\|^2 dt + 2\int_0^T \varphi(u(t))dt. \tag{3.24}
$$

Novamente, como $\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 dt \geq 0$ e usando a equação (3.23) e as desigualdades de Cauchy Schwarz, Young e (3.24) temos

$$
\begin{aligned}
T\varphi(u(T)) &\leq \int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 dt + T\varphi(u(T)) \\
&= \int_0^T t\left(f(t), \frac{du}{dt}(t)\right) dt + \int_0^T \varphi(u(t))dt \\
&\leq \int_0^T \sqrt{t}\;\|f(t)\|\sqrt{t}\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| dt + \int_0^T \varphi(u(t))dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^T t\;\|f(t)\|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 dt + \int_0^T \varphi(u(t))dt \\
&\leq \int_0^T t\;\|f(t)\|^2 dt + 2\int_0^T \varphi(u(t))dt.
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

Sejam $x_0 \in \mathcal{D}(\partial\varphi)$ e $y_0 \in \partial\varphi(x_0)$ e considere $\tilde{\varphi}(u) = \varphi(u) - \varphi(x_0) - (y_0, u - x_0)$. Então a inclusão (3.20) é equivalente a inclusão (ver na demonstração da Proposição 3.2.3 em Apêndice)

$$
\frac{du}{dt} + \partial\tilde{\varphi}(u) \ni f(t) - y_0 = \tilde{f}(t).
$$

Portanto, sem perda de generalidade podemos assumir que

$$
\min\{\varphi(u) : u \in \mathcal{H}\} = \varphi(x_0) = 0.
$$

Logo, $\varphi(u(t)) \leq (y(t), u(t) - x_0)$, para todo $y(t) \in \partial\varphi(u(t))$. Ou seja,

$$
\varphi(u(t)) \leq \left(f(t) - \frac{du}{dt}(t), u(t) - x_0\right) \text{ t-q.t.p. em } (0,T).
$$

Assim, usando a desigualdade de Cauchy Schwarz temos

$$\begin{aligned}
\varphi(u(t)) &\leq \left(f(t)-\frac{du}{dt}(t),u(t)-x_0\right)=(f(t),u(t)-x_0)+\left(-\frac{du}{dt}(t),u(t)-x_0\right)\\
&\leq \|f(t)\|\|u(t)-x_0\|+\left(-\frac{du}{dt}(t),u(t)-x_0\right)
\end{aligned}$$

Integrando a inequação acima sobre o intervalo $[0,T]$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \varphi(u(t))dt &\leq \int_0^T \|f(t)\|\,\|u(t)-x_0\|\,dt+\int_0^T\left(-\frac{du}{dt}(t),u(t)-x_0\right)dt\\
&= \int_0^T \|f(t)\|\,\|u(t)-x_0\|\,dt+\int_0^T\left(-\frac{du}{dt}(t)+\frac{dx_0}{dt},u(t)-x_0\right)dt\\
&= \int_0^T \|f(t)\|\,\|u(t)-x_0\|\,dt-\frac{1}{2}\int_0^T\frac{d}{dt}\|u(t)-x_0\|^2\,dt\\
&= \int_0^T \|f(t)\|\,\|u(t)-x_0\|\,dt-\frac{1}{2}\left[\|u(T)-x_0\|^2-\|u(0)-x_0\|^2\right]\\
&\leq \int_0^T \|f(t)\|\,\|u(t)-x_0\|\,dt+\frac{1}{2}\|u(0)-x_0\|^2. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $0\in\partial\varphi(x_0)$, temos pela desigualdade (3.6) que

$$\|u(t)-x_0\|\leq\|u(0)-x_0\|+\int_0^t\|f(\tau)\|d\tau,\ \ 0\leq t\leq T.$$

Logo,

$$\|f(t)\|\|u(t)-x_0\|\leq\|f(t)\|\|u(0)-x_0\|+\|f(t)\|\int_0^t\|f(\tau)\|d\tau.$$

Integrando a inequação acima sobre $[0,T]$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T\|f(t)\|\|u(t)-x_0\|dt &\leq \|u(0)-x_0\|\int_0^T\|f(t)\|dt+\int_0^T\|f(t)\|\int_0^t\|f(\tau)\|d\tau dt\\
&= \|u(0)-x_0\|\int_0^T\|f(t)\|dt+\frac{1}{2}\left(\int_0^T\|f(t)\|dt\right)^2 \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Portanto de (3.26) e (3.27) temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T\varphi(u(t))dt &\leq \frac{1}{2}\|u(0)-x_0\|^2+\|u(0)-x_0\|\int_0^T\|f(t)\|dt+\frac{1}{2}\left(\int_0^T\|f(t)\|dt\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\left(\|u(0)-x_0\|+\int_0^T\|f(t)\|dt\right)^2\leq D<\infty. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Uma vez que o conjunto $\mathcal{M}(B,T)$ é limitado em $L^\infty([0,T],\mathcal{H})$ para $B\in\mathcal{B}(\overline{\mathcal{D}(\varphi)})$, D não depende de $u(\cdot)\in D(B)$. Portanto de (3.25) e (3.28), para qualquer $T>0$ existe uma constante $K>0$ que não depende de u de modo que

$$\begin{aligned}
\varphi(u(T)) &\leq \frac{1}{T}\left(\int_0^T t\|f(t)\|^2dt+D\right)\leq\frac{1}{T}\left(\int_0^T T\|f(t)\|^2dt+D\right)\\
&\leq \left(\int_0^T\|f(t)\|^2dt+\frac{D}{T}\right)\leq K.
\end{aligned}$$

Por outro lado, Pelo Lema 3.1.5 $D(B)$ é limitado em $C([0,T],\mathcal{H})$. Logo, $\|u(T)\|_{\mathcal{H}} \leq L < \infty$, $\forall\, u(\cdot) \in D(B)$. Então $G(T,B) \subset M_{K_0} := \{u(\cdot) \in D(B) : \|u(T)\|_{\mathcal{H}} \leq K_0,\ \varphi(u(T)) \leq K_0\}$ em que $K_0 = \max\{K,L\}$. Logo, $\overline{G(T,B)} \subset \overline{M_{K_0}} = M_{K_0}$. Portanto, pela Propriedade (H) $\overline{G(T,B)}$ é um fechado no compacto M_{K_0}. Logo $G(T,B)$ é precompacto. ■

Corolário 3.2.1 *[1]* $\forall\, T > 0$, $\exists\, K > 0$ *tal que* $G(T,B) \subset M_K$.

Teorema 3.2.5 *[1] Assuma que a condição* (H) *seja satisfeita. Suponha que existem* $\delta > 0$, $M > 0$ *tal que* $\forall\, u \in \mathcal{D}(\partial\varphi)$, $\|u\| \geq M$, $\forall\, y \in -\partial\varphi(u) + F(u)$,

$$(y,u) \leq -\delta. \tag{3.29}$$

Então o semigrupo multívoco G possui o B-atrator global compacto negativamente invariante R que é o minimal entre todos os B-atratores globais fechados. Além disso R é invariante e é o conjunto maximal entre todos os subconjuntos limitados em $\mathcal{H}$ *e negativamente invariante pelo semigrupo multívoco G.*

Demonstração: Tendo em vista o Teorema 3.2.4 temos que o semigrupo multívoco G é compacto. Temos por hipótese que existem $\delta > 0$, $M > 0$ tal que $\forall\, u \in \mathcal{D}(\partial\varphi)$, $\|u\| \geq M$, $\forall\, y \in -\partial\varphi(u) + F(u)$ de modo que $(y,u) \leq -\delta$. Como $u \in J(u)$ pois $(u,u) = \|u\|^2_{\mathcal{H}}$ segue que a condição (3.15) é satisfeita. Portanto, a afirmação do teorema segue do Teorema 3.1.1. ■

3.2.2 Inclusões Diferenciais Parciais com p-Laplaciano

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathcal{C}_v(\mathbb{R})$ ($\mathcal{C}_v(\mathbb{R})$ é o conjunto de todos os subconjuntos não vazios, limitados, fechados e convexos de $\mathbb{R}$) uma aplicação multívoca. Assuma que f seja Lipschitz, isto é, $\exists\, C \geq 0$ tal que $\forall\, x,z \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(f(x), f(z)) \leq C\|x - z\|.$$

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suficientemente suave $\partial\Omega$. Assim definimos a seguinte aplicação multívoca em $L^2(\Omega)$, $F : \mathcal{D}(F) \subset L^2(\Omega) \to \mathcal{P}(L^2(\Omega))$, por

$$F(y(\cdot)) := \{\xi(\cdot) \in L^2(\Omega) : \xi(x) \in f(y(x))\ x\text{-q.t.p. em } \Omega\}.$$

Nesta seção consideramos o seguinte problema

$$(P_{N_\lambda}) \begin{cases} \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial t} - div(D^\lambda |\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda) + |u_\lambda|^{p-2} u_\lambda \in F(u_\lambda) + h & \text{em } (0,T) \times \Omega \\ \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial n}(t,x) = 0 & \text{em } (0,T) \times \partial\Omega \\ u_\lambda(0,x) = u_{0,\lambda}(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

com $p > 2$, $h, u_{0,\lambda} \in L^2(\Omega)$, $D^\lambda \in L^\infty(\Omega)$, $D^\lambda(x) \geq \sigma > 0$ q.t.p. em Ω, $\lambda \in [0,\lambda_0]$ e $D^\lambda \to D^0$, em $L^\infty(\Omega)$ quando $\lambda \to 0$, Ω, e F como acima.

Lema 3.2.1 *[1] Existem* D_1, $D_2 \geq 0$ *tal que* $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, y \in f(x)$

$$|y| \leq D_1 + D_2\,|x|\,.$$

Demonstração: Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado. Como f possui valores limitados, temos $|y_0| \leq D_0 < \infty$, $\forall\, y_0 \in f(x_0)$. Note que, $f(x_0)$ é compacto em $\mathbb{R}$ pois, $f(x_0)$ é limitado e fechado em $\mathbb{R}$. Então, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $y \in f(x)$, existe $y_0 \in f(x_0)$ tal que $\operatorname{dist}(y, f(x_0)) = |y - y_0|$. Portanto como f é Lipschitz temos

$$\begin{aligned} |y| &= |y - y_0 + y_0| \leq |y - y_0| + |y_0| = \operatorname{dist}(y, f(x_0)) + |y_0| \\ &\leq C\,|x - x_0| + |y_0| \leq C\,|x| + C\,|x_0| + D_0 \leq D_1 + D_2\,|x|\,. \end{aligned}$$

■

Lema 3.2.2 *[1] Sob as condições mencionadas acima as seguintes propriedades são válidas:*

(1) $\mathcal{D}(F) = L^2(\Omega)$

(2) $F : L^2(\Omega) \to \mathcal{C}_v(L^2(\Omega))$

Demonstração:

(1) Note que f possui valores compactos. Além disso f é contínua no sentido da métrica de Hausdorff, pois f é Lipschitz. Logo, pela Proposição 3.1.3 f é contínua. Então f é uma aplicação Carathéodory. Logo, para qualquer $y(\cdot) \in L^2(\Omega)$ a aplicação multívoca $f(y(\cdot)) : \Omega \to \mathcal{C}_v(\mathbb{R})$ é mensurável. Portanto, pelo Teorema 1.1.15 $f(y(\cdot))$ possui uma seleção mensurável $\xi(\cdot)$ com $\xi(x) \in f(y(x))$ x-q.t.p. em Ω. Além disso, pelo Lema 3.2.1 temos que existe D_1, $D_2 \geq 0$ tal que

$$||\xi||^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\xi(x)|^2\, dx \leq \int_\Omega (D_1 + D_2\,|y(x)|)^2 dx \leq D < \infty,$$

pois $y(\cdot) \in L^2(\Omega)$. Logo, $\xi(\cdot) \in L^2(\Omega)$. Portanto $\xi(\cdot) \in F(y(\cdot))$, concluindo que $F(y(\cdot)) \neq \emptyset$. Portanto $y(\cdot) \in \mathcal{D}(F)$. Como $y(\cdot) \in L^2(\Omega)$ foi arbitrário então concluímos que $\mathcal{D}(F) = L^2(\Omega)$.

(2) Queremos mostrar que para cada $y \in L^2(\Omega)$ tem-se que $F(y)$ é não vazio, limitado, fechado e convexo em $L^2(\Omega)$. De fato, decorre da demonstração de (1) que $F(y) \neq \emptyset$. Além disso, usando o Lema 3.2.1 e integrando sobre Ω temos

$$||\xi||^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\xi(x)|^2\, dx \leq \int_\Omega (D_1 + D_2\,|y(x)|)^2 dx \leq K < \infty,$$

$\forall\, \xi \in F(y)$. Portanto, $F(y)$ é limitado em $L^2(\Omega)$.

Mostremos agora que $F(y)$ é fechado em $L^2(\Omega)$. Seja $\{\xi_n\} \subset F(y)$ uma sequência tal que $\xi_n \to \xi \in L^2(\Omega)$. Então, pelo Corolário de Riesz-Fischer existe uma subsequência, que continuaremos denotando por ξ_n, tal que $\xi_n \to \xi$ x-q.t.p. em Ω. Como $f(y(x))$ é fechado obtemos $\xi(x) \in f(y(x))$ x-q.t.p. em Ω. Portanto $\xi \in F(y)$.

Por fim, mostremos que $F(y)$ é convexo. Seja $\xi_1, \xi_2 \in F(y)$. Então $\xi_1(x)$, $\xi_2(x) \in f(y(x))$ x-q.t.p. em Ω. Como $f(y(x))$ é convexo temos $(\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2)(x) \in f(y(x))$ x-q.t.p. em Ω, $\forall\, \alpha \in [0,1]$. Portanto, $\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2 \in F(y)$, $\forall\, \alpha \in [0,1]$. ■

Lema 3.2.3 *A aplicação $F : L^2(\Omega) \to \mathcal{C}_v(L^2(\Omega))$ é Lipschitz.*

Demonstração: Sejam $u,\ v \in L^2(\Omega)$ e $\xi \in F(u)$ arbitrário. Mostremos que

$$\operatorname{dist}(\xi, F(v)) \leq C\|u-v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Note que pela prova do Lema anterior tem-se que as aplicações $\xi(x),\ f(v(x))$ são mensuráveis. Precisaremos do seguinte resultado:

Proposição 3.2.4 *[3] Dado $\varepsilon > 0$, considere*

$$\rho_\varepsilon(x) := C\,|u(x)-v(x)| + \varepsilon,\ P(x) := B(\xi(x), \rho_\varepsilon(x)),$$

em que $B(c,r)$ é uma bola fechada centrada em c e raio r. Então a aplicação multívoca $D(x) := P(x) \bigcap f(v(x))$ é não vazio x-q.t.p. em Ω e é mensurável.

Logo, Pela proposição acima e pelo Teorema 1.1.15 existe uma seleção mensurável $z_\varepsilon(\cdot)$, com $z_\varepsilon(x) \in D(x)$ x-q.t.p. em Ω. Então $|\xi(x) - z_\varepsilon(x)| \leq \rho_\varepsilon(x) = C\,|u(x)-v(x)| + \varepsilon$ x-q.t.p. em Ω. Logo,

$$|\xi(x) - z_\varepsilon(x)|^2 = C^2\,|u(x)-v(x)|^2 + 2\varepsilon C\,|u(x)-v(x)| + \varepsilon^2 \text{ } x\text{-q.t.p. em } \Omega.$$

Integrando a inequação acima sobre Ω temos

$$\int_\Omega |\xi(x) - z_\varepsilon(x)|^2\,dx \leq C^2 \int_\Omega |u(x)-v(x)|^2\,dx + 2\varepsilon C \int_\Omega |u(x)-v(x)|\,dx + \varepsilon^2 \int_\Omega dx$$

Logo, pela desigualdade de Hölder temos

$$\|\xi - z_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C^2\|u-v\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\varepsilon C\|u-v\|_{L^2(\Omega)}\,|\Omega|^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^2\,|\Omega|\,. \tag{3.30}$$

Como $z_\varepsilon(x) \in f(v(x))$ x-q.t.p. em Ω e como $f(v(x))$ é compacto e $\{z_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0} \subset f(v(x))$ existe uma subsequência que continuaremos chamando de $z_\varepsilon(x)$ tal que $z_\varepsilon(x) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} z(x) \in f(v(x))$. Portanto $z(x) \in f(v(x))$ x-q.t.p. em Ω. Logo, $z \in F(v)$. Fazendo $\varepsilon \to 0$ em (3.30) temos $\|\xi - z\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C^2\|u-v\|^2_{L^2(\Omega)}$. Logo, $\operatorname{dist}(\xi, F(v)) = \inf\limits_{\omega \in F(v)} \|\xi - \omega\| \leq C\|u-v\|_{L^2(\Omega)}$. Como $\xi \in F(u)$ foi arbitrário segue que

$$\operatorname{dist}(F(u), F(v)) = \sup_{\tau \in F(u)} \operatorname{dist}(\tau, F(v)) \leq C\|u-v\|_{L^2(\Omega)}.$$

De maneira analoga pode-se mostrar que

$$\operatorname{dist}(F(v), F(u)) \leq C\|v-u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(F(u), F(v)) = \max\{\operatorname{dist}(F(u), F(v)), \operatorname{dist}(F(v), F(u))\} \leq C\|u-v\|_{L^2(\Omega)}.$$

■

Concluímos portanto que F satisfaz (F_1) e (F_2).

Proposição 3.2.5 *A aplicação $\widetilde{F}(u) := F(u) + h$ satisfaz (F_1) e (F_2).*

De fato, seja $y \in L^2(\Omega)$. Primeiramente como $F(y) \neq \emptyset$ temos que $\widetilde{F}(y) = F(y) + h \neq \emptyset$. Além disso

$$\|\xi + h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\xi\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)} \leq K < \infty, \ \forall\, \xi \in F(y)$$

pois $h \in L^2(\Omega)$ e $F(y)$ é limitado em $L^2(\Omega)$. Portanto $\widetilde{F}(y)$ é limitado em $L^2(\Omega)$.

Mostremos agora que $\widetilde{F}(y)$ é fechado em $L^2(\Omega)$. Seja $\{\xi_n\} \subset \widetilde{F}(y)$ uma sequência tal que $\xi_n \to \xi \in L^2(\Omega)$. Então $\xi_n = \zeta_n + h$ em que $\{\zeta_n\} \subset F(y)$ de modo que $\zeta_n \to \zeta \in L^2(\Omega)$. Logo, como $F(y)$ é fechado em $L^2(\Omega)$ temos que $\zeta \in F(y)$. Portanto $\xi = \zeta + h \in F(y) + h := \widetilde{F}(y)$.

Mostremos que $\widetilde{F}(y)$ é convexo. Sejam $\xi_1,\ \xi_2 \in \widetilde{F}(y)$. Então $\xi_1 = \zeta_1 + h,\ \xi_2 = \zeta_2 + h$ em que $\zeta_1,\ \zeta_2 \in F(y)$. Como $F(y)$ é convexo $\alpha\zeta_1 + (1-\alpha)\zeta_2 \in F(y),\ \forall\, \alpha \in [0,1]$. Assim, $\alpha\zeta_1 + (1-\alpha)\zeta_2 + (\alpha h - \alpha h) + h \in F(y) + h := \widetilde{F}(y),\ \forall\, \alpha \in [0,1]$. Logo, $\alpha(\zeta_1 + h) + (1-\alpha)(\zeta_2 + h) \in \widetilde{F}(y),\ \forall\, \alpha \in [0,1]$. Portanto, $\alpha\xi 1 + (1-\alpha)\xi_2 \in \widetilde{F}(y),\ \forall\, \alpha \in [0,1]$.

Por fim mostremos que $\widetilde{F}$ é Lipschitz, sejam $u,\ v \in L^2(\Omega)$. Note que $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(F(u)+h, F(v)+h) = \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(F(u), F(v))$, pois seja $x \in F(u)$ arbitrário. Então

$$\mathrm{dist}(x+h, F(v)+h) := \inf_{y \in F(v)} \{\rho(x+h, y+h)\} = \inf_{y \in F(v)} \{\rho(x,y)\} := \mathrm{dist}(x, F(v)),$$

com $\rho(x,y) := \|x-y\|_{L^2(\Omega)}$. Logo, $\mathrm{dist}(F(u)+h, F(v)+h) = \mathrm{dist}(F(u), F(v))$. Analogamente, tem-se que $\mathrm{dist}(F(v)+h, F(u)+h) = \mathrm{dist}(F(v), F(u))$. Portanto $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(F(u)+h, F(v)+h) = \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(F(u), F(v))$. Logo, como F é Lipschitz, existe $c \geq 0$ tal que

$$\mathrm{dist}(F(u)+h, F(v)+h) = \mathrm{dist}(F(u), F(v)) \leq c\|u-v\|_{L^2(\Omega)}.$$

■

Descreveremos agora as propriedades do operador principal p-Laplaciano Perturbado com Condição de Fronteira Neumann Homogênea:

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, um aberto (de classe C^1), conexo, limitado, com fronteira $\partial\Omega$ suave, e sejam $H := L^2(\Omega, \mathbb{R})$ e $V := W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$, $2 < p < +\infty$ fixo qualquer. Então H é um espaço de Hilbert real e V é um espaço de Banach real reflexivo.

Sabemos pelo Teorema de Rellich-Kondrachov que $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$ está compactamente contido em $L^p(\Omega, \mathbb{R})$, $\forall\, p \geq 1$. Mas $L^p(\Omega, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\Omega, \mathbb{R})$, $\forall\, p > 2$. Logo $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \subset\subset L^2(\Omega, \mathbb{R})$, $\forall\, p > 2$.

Temos também que a inclusão $V \subset H$ é densa, pois

$$H = L^2(\Omega, \mathbb{R}) = \overline{W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})}^H \subset \overline{W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})}^H \subset \overline{H}^H = H,$$

logo $\overline{V}^H = H$.

Visto que $V \subset H$, considerando o operador restrição temos que $H^* \subset V^*$. Pelo Teorema de representação de Riez, $H \equiv H^*$. Logo, temos $V \subset H \subset V^*$ com inclusões contínuas e densas.

Passemos agora a definição do nosso operador definido em V. Seja $\{D^\lambda\} \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $D^\lambda(x) \geq \delta > 0$ $x-$qtp em Ω para cada $\lambda \in [0, \lambda_0]$ e D^λ converge para D^0 em $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ quando $\lambda \to 0$. Logo existe uma constante $M > 0$ tal que $\|D^\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M,\ \forall\, \lambda \in [0, \lambda_0]$. Consideremos, para cada $\lambda \in [0, \lambda_0]$, o operador A^{D^λ} que a cada elemento $u \in V = W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$ associa o elemento de V^*,

$$A^{D^\lambda} u : V \to \mathbb{R}$$

dado por

$$A^{D^\lambda} u(v) := \int_\Omega D^\lambda(x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla \cdot v(x) dx + \int_\Omega |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx.$$

$A^{D^\lambda}u$ está bem definido, pois para cada $v \in V$ temos

$$A^{D^\lambda}u(v) \leq M \parallel \nabla u \parallel_p^{p-1} \parallel \nabla v \parallel_p + \parallel u \parallel_p^{p-1} \parallel v \parallel_p < \infty$$

visto que $|\nabla u|,\ |\nabla v|, u, v \in L^p(\Omega)$.

Mostremos agora, que se $u \in V$, então $A^{D^\lambda}u \in V^*$. De fato, como $A^{D^\lambda}u$ está bem definido, para cada u, então resta mostrar que $A^{D^\lambda}u$ é linear e limitado. A linearidade segue diretamente da definição de $A^{D^\lambda}u$ e das propriedades da integral. $A^{D^\lambda}u$ é limitado, pois

$$\parallel A^{D^\lambda}u \parallel_{V^*} \leq C \parallel u \parallel_{W^{1,p}(\Omega)}^{p-1} < +\infty,\ C = C(N, p, M) > 0.$$

Lema 3.2.4 *[20] O operador $A^{D^\lambda} : V \to V^*$ é monótono.*

Demonstração: Usando a desigualdade de Tartar temos que para todo $u, v \in V$:

$$\begin{aligned}
\langle A^{D^\lambda}u - A^{D^\lambda}v, u - v\rangle_{V^*,V} &= \langle A^{D^\lambda}u, u - v\rangle_{V^*,V} - \langle A^{D^\lambda}v, u - v\rangle_{V^*,V} \\
&\geq \delta\gamma_1 \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p dx + \gamma_2 \int_\Omega |u - v|^p dx \\
&= \delta\gamma_1 \parallel \nabla u - \nabla v \parallel_p^p + \gamma_2 \parallel u - v \parallel_p^p \geq 0,
\end{aligned}$$

$\gamma_1 = \gamma_1(p, N) \geq 0,\ \gamma_2 = \gamma_2(p, N) \geq 0.$

Portanto A^{D^λ} é monótono. ■

Lema 3.2.5 *[20] O operador $A^{D^\lambda} : V \to V^*$ é coercivo.*

Demonstração: Se $u \in V$,

$$\begin{aligned}
\langle A^{D^\lambda}u, u\rangle_{V^*,V} &\geq \delta \parallel \nabla u \parallel_p^p + \parallel u \parallel_p^p \\
&\geq \tfrac{\delta}{N} \textstyle\sum_{i=1}^N \parallel \frac{\partial u}{\partial x_i} \parallel_p^p + \parallel u \parallel_p^p \\
&\geq C \parallel u \parallel_V^p,\ C = C(N, \delta) > 0.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Logo, se $\{u_j\} \subset V$ for tal que $\lim_{j\to+\infty} \parallel u_j \parallel_V = +\infty$, então $\lim_{j\to+\infty} C \parallel u_j \parallel_V^{p-1} = +\infty$ e $\frac{\langle A^{D^\lambda}u_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{\|u_j\|_V} \geq C \parallel u_j \parallel_V^{p-1}$. Portanto

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\langle A^{D^\lambda}u_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{\parallel u_j \parallel_V} = +\infty.$$

■

Lema 3.2.6 *[20] O operador $A^{D^\lambda} : V \to V^*$ é hemicontínuo.*

Demonstração: Queremos mostrar que $w - \lim_{t\to 0} A^{D^\lambda}(u + tv) = A^{D^\lambda}u$, para quaisquer $u, v \in V$. Como $V = W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$ $(p > 2)$ é reflexivo $(V = V^{**})$, precisamos mostrar que

$$\langle A^{D^\lambda}(u + tv), \varphi\rangle_{V^*,V} \longrightarrow \langle A^{D^\lambda}u, \varphi\rangle_{V^*,V} \text{ quando } t \to 0,\ \forall\, \varphi \in V.$$

De fato, sejam $u, v, \varphi \in V$ e $t \in (-1, 1)$. Temos
$|\langle A^{D^\lambda}(u + tv), \varphi\rangle_{V^*,V} - \langle A^{D^\lambda}u, \varphi\rangle_{V^*,V}| =$
$= |\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla(u + tv)|^{p-2}\nabla(u + tv)\nabla\varphi dx + \int_\Omega |u + tv|^{p-2}(u + tv)\varphi dx$
$- \int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi dx - \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx|$
$\leq \|D^\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\ |\nabla(u + tv)|^{p-2}\nabla(u + tv) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u|\ |\nabla\varphi| dx$
$+ \int_\Omega |\ |u + tv|^{p-2}(u + tv) - |u|^{p-2}u|\ |\varphi| dx \to 0$, quando $t \to 0$,
pois $\phi_p(\ell) := |\ell|^{p-2}\ell,\ \ell \in \mathbb{R}$, é contínua e $\nabla(u + tv) = \nabla u + t\nabla v \to \nabla u$ quando $t \to 0$.

Portanto, O operador $A^{D^\lambda} : V \to V^*$ é hemicontínuo. ■

Observação 3.2.4 *Usando o Teorema 3.2.3 podemos concluir que o operador* $A^{D^\lambda}: V \to V^*$, $D(A^{D^\lambda}) = V$, *é maximal monótono e* $R(A^{D^\lambda}) = Imagem(A^{D^\lambda}) = A^{D^\lambda}(V) = V^*$.

Pelo Exemplo 2.3.7 em [18] concluímos que o operador $A_H^{D^\lambda}$, a realização de A^{D^λ} em H dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A_H^{D^\lambda}) = \{v \in V;\, A^{D^\lambda} v \in H\} \\ A_H^{D^\lambda}(v) = A^{D^\lambda} v, \text{ se } v \in D(A_H^{D^\lambda}), \end{array} \right. \tag{3.32}$$

é um operador maximal monótono em H e $\overline{D(A_H^{D^\lambda})} = H = L^2(\Omega)$. Daqui em diante denotaremos $A_H^{D^\lambda} : D(A_H^{D^\lambda}) \subset H \to H$ por $A_H^{D^\lambda}(u) := -div(D^\lambda |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + |u|^{p-2} u$.

Os semigrupos gerados por certas classes de operadores maximais monótonos tem um efeito regularizante sobre os dados iniciais, isto é, $S(t, u_0) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ e todo $t > 0$, principalmente no caso onde A é a subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i. (veja Teorema 3.2.1).

Proposição 3.2.6 *[20] O operador* $A_H^{D^\lambda}$ *é do tipo subdiferencial.*

Demonstração: Considere $\psi^{D^\lambda} : L^2(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definido por

$$\psi^{D^\lambda}(u) : \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{p}\left[\displaystyle\int_\Omega D^\lambda(x) |\nabla u|^p dx + \int_\Omega |u|^p \, dx \right], & u \in W^{1,p}(\Omega) \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{array} \right.$$

Temos que $\partial \psi^{D^\lambda}$ é maximal monótono em $L^2(\Omega)$, uma vez que ψ^{D^λ} é uma aplicação convexa, própria e semicontínua inferiormente (veja o Teorema 3.2.2 com $V = \mathcal{H}$). Mostremos que $-div(D^\lambda |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + |u|^{p-2} u = \partial \psi^{D^\lambda} u$. Como ambos são maximais monótonos basta mostrarmos apenas uma das inclusões. Mostraremos então que $-div(D^\lambda |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + |u|^{p-2} u \subset \partial \psi^{D^\lambda} u$:

Seja $u \in \mathcal{D}(-div(D^\lambda |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + |u|^{p-2} u)$ e $v = -div(D^\lambda |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + |u|^{p-2} u$, então para cada $\xi \in V$

$$\begin{aligned} \langle v, \xi - u \rangle &= \langle A^{D^\lambda} u, \xi - u \rangle \\ &= \int_\Omega D^\lambda(x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) (\nabla \xi(x) - \nabla u(x)) dx \\ &\quad + \int_\Omega |u(x)|^{p-2} u(x) (\xi(x) - u(x)) dx \\ &= \int_\Omega D^\lambda(x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla \xi(x) dx - \int_\Omega D^\lambda(x) |\nabla u(x)|^p dx \\ &\quad + \int_\Omega |u(x)|^{p-2} u(x) \xi(x) dx - \int_\Omega |u(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} &\langle v, \xi - u \rangle + \int_\Omega D^\lambda(x) |\nabla u(x)|^p dx + \int_\Omega |u(x)|^p dx = \\ &= \int_\Omega D^\lambda(x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla \xi(x) dx + \int_\Omega |u(x)|^{p-2} u(x) \xi(x) dx \\ &\leq \int_\Omega D^\lambda(x) |\nabla u(x)|^{p-1} |\nabla \xi(x)| dx + \int_\Omega |u(x)|^{p-1} |\xi(x)| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{p'}\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u(x)|^p dx+\frac{1}{p}\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla\xi(x)|^p dx\\
&\quad +\frac{1}{p'}\int_\Omega |u(x)|^p dx+\frac{1}{p}\int_\Omega |\xi(x)|^p dx\\
&= \frac{1}{p'}\left[\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u(x)|^p dx+\int_\Omega |u(x)|^p dx\right]\\
&\quad +\frac{1}{p}\left[\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla\xi(x)|^p dx+\int_\Omega |\xi(x)|^p dx\right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\langle v,\xi-u\rangle+\left(1-\frac{1}{p'}\right)\left[\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla u(x)|^p dx+\int_\Omega |u(x)|^p dx\right]\leq\\
&\leq \frac{1}{p}\left[\int_\Omega D^\lambda(x)|\nabla\xi(x)|^p dx+\int_\Omega |\xi(x)|^p dx\right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle v,\xi-u\rangle+\psi^{D^\lambda}(u)\leq\psi^{D^\lambda}(\xi),\ \forall\,\xi\in V=W^{1,p}(\Omega).$$

Agora note que se $\xi\in L^2(\Omega)\backslash W^{1,p}(\Omega)$ então $\psi^{D^\lambda}(\xi)=\infty$ e o resultado segue.
Logo,

$$\langle v,\xi-u\rangle+\psi^{D^\lambda}(u)\leq\psi^{D^\lambda}(\xi)$$

para todo $\xi\in L^2(\Omega)$, e portanto $v\in\partial\psi^{D^\lambda}(u)$.

Como $A_H^{D^\lambda}$ e $\partial\psi^{D^\lambda}$ são maximais monótonos segue que $A_H^{D^\lambda}=\partial\psi^{D^\lambda}$. ■

Teorema 3.2.6 *Assuma que a seguinte condição seja válida: Existem $M_0>0$, $\varepsilon_0>\frac{1}{2}+\frac{1}{M_0|\Omega|+\frac{1}{2}\|h\|^2}$ talque que $\forall\, s\in\mathbb{R}$, $\forall\, z\in f(s)$,*

$$zs\leq\frac{C_2}{\sigma^p}|s|^p-\varepsilon_0|s|^2+M_0, \tag{3.33}$$

em que σ é a constante de imersão de $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$. Então o semigrupo multívoco associado ao problema (P_{N_λ}) possui o B-atrator global compacto negativamente invariante R^λ que é o minimal entre todos os B-atratores globais fechados. Além disso R^λ é invariante e é o conjunto maximal entre todos os subconjuntos limitados em $L^2(\Omega)$ e negativamente invariante pelo semigrupo multívoco G.

Demonstração: Primeiramente mostraremos que a condição (H) é satisfeita: Visto que $W^{1,p}(\Omega)\subset\subset L^p(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ (portanto $W^{1,p}(\Omega)\subset\subset L^2(\Omega)$) e

$$M_K:=\left\{u\in\mathcal{D}(\psi^{D^\lambda});\|u\|_{\mathcal{H}}\leq K,\ \psi^{D^\lambda}(u)\leq K\right\}=\overline{M_k},$$

é suficiente mostrarmos que para cada $K>0$, M_K é limitado em $W^{1,p}(\Omega)$. Sejam $K>0$ e $u\in M_K$ dados arbitráriamente (fixados). Então, pela inequação (3.31) temos

$$c\|u\|_V^p\leq\frac{p}{p}\left[\delta\|\nabla u\|_p^p+\|u\|_p^p\right]\leq\frac{p}{p}\left[\int_\Omega D^\lambda(x)\,|\nabla u|^p\,dx+\int_\Omega |u|^p\,dx\right]=p\psi^{D^\lambda}(u)\leq pK=:K_1,$$

portanto $\|u\|_V\leq\left[\frac{K_1}{c}\right]^{\frac{1}{p}}$.

Mostremos agora que a condição (3.29) é satisfeita. Seja $u \in \mathcal{D}(A_H^{D^\lambda})$, $\xi \in F(u)$. Então, por Cauchy Schwarz, (3.31) e (3.33) temos

$$
\begin{aligned}
\left\langle -A_H^{D^\lambda}(u) + \xi + h, u \right\rangle &\leq \left\langle -A_H^{D^\lambda}(u), u \right\rangle + \langle \xi, u \rangle + \langle h, u \rangle \\
&\leq -C_2 \|u\|_V^p + \int_\Omega \xi(x) u(x) dx + \|h\|_H \|u\|_H \\
&\leq -C_2 \|u\|_V^p + \int_\Omega \left(\frac{C_2}{\sigma^p} |u(x)|^p - \varepsilon_0 \|u(x)\|^2 + M_0 \right) dx + \|h\|_H \|u\|_H \\
&= -C_2 \|u\|_V^p + \frac{C_2}{\sigma^p} \|u\|_{L^p}^p - \varepsilon_0 \|u\|_H^2 + M_0 |\Omega| + \|h\|_H \|u\|_H \\
&\leq -\frac{C_2}{\sigma^p} \|u\|_{L^p}^p + \frac{C_2}{\sigma^p} \|u\|_{L^p}^p - \varepsilon_0 \|u\|_H^2 + \frac{1}{2} \|h\|_H^2 + \frac{1}{2} \|u\|_H^2 + M_0 |\Omega| \\
&= \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_0 \right) \|u\|_H^2 + \left(M_0 |\Omega| + \frac{1}{2} \|h\|^2 \right).
\end{aligned}
$$

Considerando $M := M_0 |\Omega| + \frac{1}{2} \|h\|^2 > 0$ e $\delta := \left(\varepsilon_0 - \frac{1}{2} \right) M^2 - M > 0$ teremos que $\forall\, u \in \mathcal{D}(A_{\mathcal{H}}^{D^\lambda})$ com $\|u\|_{\mathcal{H}} > M$,

$$
\left\langle -A_{\mathcal{H}}^{D^\lambda}(u) + \xi + h, u \right\rangle \leq -\delta.
$$

Logo, a condição (3.29) é satisfeita e o resultado segue do Teorema 3.2.5. ■

Observação 3.2.5 *O B-atrator global R que aparece no teorema anterior é limitado em $W^{1,P}(\Omega)$. De fato, seja $T > 0$. Como R é negativamente invariante temos que $R \subset G(t, R)$, $\forall\, t \geq 0$. Em particular, $R \subset G(T, R)$. Pelo Corolário 3.2.1 existe $K > 0$ tal que $G(T, R) \subset M_K$. Como M_K é limitado em $W^{1,p}(\Omega)$ (veja a demonstração do teorema anterior) e $R \subset M_K$, obtemos que R é limitado em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Apêndice A

Seja $[0,T]$ um intervalo real fixado e denotemos por $\mathfrak{D}(0,T)$ o espaço de todas as funções reais definidas em $[0,T]$ que são infinitamente diferenciável em $[0,T]$ e tem suporte compacto em $(0,T)$. Denotemos por $\mathfrak{D}^*([0,T],X)$ o espaço de todos os operadores lineares contínuos de $\mathfrak{D}(0,T)$ em X. Se $u \in \mathfrak{D}^*([0,T],X)$, então $D^k u(\varphi) = (-1)^k u(D^k\varphi/dt^k)$, $\forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0,T)$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$, em que $D^k u \in \mathfrak{D}^*([0,T],X)$, é a derivada de ordem k de u. Denota-se por $W^{k,p}([0,T],X)$ com $1 \leq p \leq \infty$, ao espaço vetorial

$$W^{k,p}([0,T],X) := \left\{u \in \mathfrak{D}^*([0,T],X); D^j(u) \in L^p([0,T],X) \text{ para } j = 0,1,...,k\right\}.$$

Teorema 3.2.7 (*Teorema* 2.2. *Cap. III*, [4]) *Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja C um cone fechado convexo de X, isto é, C é um conjunto fechado, convexo e para todo $x \in C$ e $\theta \geq 0$ tem-se $\theta x \in C$. Seja A um conjunto fechado dissipativo em $X \times X$ tal que $\mathcal{D}(A) \subset C$ e $C \subset Im(1-\lambda A)$ para cada $\lambda > 0$. Seja $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $f \in W^{1,2}([0,T],X)$ tal que $f \in C$ em $[0,T]$. Então o problema de valor inicial* (3.3), (3.4) *possui uma única solução $u(t)$ de modo que*

$$u \in W^{1,\infty}([0,T],X),\ u(t) \in \mathcal{D}(A),\ t\text{-q.t.p. em } (0,T). \tag{3.34}$$

$$\left\|\frac{du(t)}{dt}\right\| = |A(u(t)) + f(t)| \leq |A(u_0) + f(0)| + \int_0^t \left\|\frac{df(s)}{ds}\right\| ds,\ t\text{-q.t.p. em } (0,T), \tag{3.35}$$

em que $|A(u)| = \inf\{\|y\|_X : y \in A(u)\}$.

Lema 3.2.7 (*Lema* 2.1. *Cap. IV*, [4]) *Seja $u \in W^{1,2}([0,T],\mathcal{H})$ tal que $u(t) \in \mathcal{D}(\partial\varphi)$ t-q.t.p. em $(0,T)$ e existe $g \in L^2([0,T],\mathcal{H})$ tal que $g \in \partial\varphi(u(t))$, t-q.t.p. em $(0,T)$. Então a função $t \to \varphi(u(t))$ é absolutamente contínua em $[0,T]$ e*

$$\frac{d\varphi}{dt}(u(t)) = \left(h(t), \frac{du}{dt}(t)\right),\ t\text{-q.t.p. em } (0,T),$$

para todo $h(t) \in \partial\varphi(u(t))$.

Demonstraremos agora a Proposição 3.2.3 apresentada no capítulo anterior.

Demonstração: Seja $x_0 \in \mathcal{D}(\partial\varphi)$ e seja $y_0 \in \partial\varphi(x_0)$. Considere $\tilde{\varphi}(u) = \varphi(u) - \varphi(x_0) - (y_0, u - x_0)$. Note que a inclusão (3.20) é equivalente a inclusão

$$\frac{du}{dt} + \partial\tilde{\varphi}(u) \ni f(t) - y_0.$$

De fato, primeiramente temos que

$$\begin{aligned}
\partial\tilde{\varphi}(u) &= \{y \in \mathcal{H} : \tilde{\varphi}(u) - \tilde{\varphi}(x) \leq (y, u-x),\ \forall\, x \in \mathcal{H}\} \\
&= \{y \in \mathcal{H} : \varphi(u) - (y_0, u-x_0) - \varphi(x) + (y_0, x-x_0) \leq (y, u-x),\ \forall\, x \in \mathcal{H}\} \\
&= \{y \in : \varphi(u) - \varphi(x) + (y_0, x-u) \leq (y, u-x),\ \forall\, x \in \mathcal{H}\} \\
&= \{y \in \mathcal{H} : \varphi(u) - \varphi(x) \leq (y + y_0, u-x),\ \forall\, x \in \mathcal{H}\}.
\end{aligned}$$

Assim, é suficiente provar que $\partial\tilde{\varphi}(u)+y_0 = \partial\varphi(u)$. Realmente,
$(\subset)$ seja $z \in \partial\tilde{\varphi}(u)+y_0$. Então $z = y+y_0$, onde y satisfaz $\varphi(u)-\varphi(x) \leq (y+y_0, u-x)\ \forall\, x \in \mathcal{H}$. Logo, $\varphi(u)-\varphi(x) \leq (z, u-x)\ \forall\, x \in \mathcal{H}$. Portanto, $z \in \partial\varphi(u)$.
$(\supset)$ Por outro lado, seja $z \in \partial\varphi(u)$. Logo $\varphi(u)-\varphi(x) \leq (z, u-x)$, $\forall\, x \in \mathcal{H}$. Então, $\varphi(u)-\varphi(x) \leq (z-y_0+y_0, u-x)$, $\forall\, x \in \mathcal{H}$. Logo, $z-y_0 \in \partial\tilde{\varphi}(u)$. Portanto, $z \in \partial\tilde{\varphi}(u)+y_0$ c.q.d..

Logo, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\min\{\varphi(u) : u \in \mathcal{H}\} = \varphi(x_0) = 0.$$

Primeiro vamos assumir que $u_0 \in \mathcal{D}(\partial\varphi)$ e $f \in W^{1,2}([0,T],\mathcal{H})$, isto é, f e $\dfrac{df}{dt}$ pertencem a $L^2([0,T],\mathcal{H})$. Portanto, como $-\partial\varphi$ é um operador m-dissipativo, pelo Teorema 3.2.7 o problema (3.20), (3.21) possui uma única solução forte $u(\cdot) \in C([0,T],\mathcal{H})$ e temos que $u \in W^{1,\infty}([0,T],\mathcal{H})$. Em particular, $u \in W^{1,2}([0,T],\mathcal{H})$. Logo u e $\dfrac{du}{dt}$ pertencem a $L^2([0,T],\mathcal{H})$. Assim $u(\cdot)$ é absolutamente contínua em cada sonjunto compacto de $(0,T)$ e satisfaz (3.20) t-q.t.p. em $(0,T)$. Em particular, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ t-q.t.p. em $(0,T)$. Por outro lado, como $f \in L^2([0,T],\mathcal{H})$ e $\dfrac{du}{dt} \in L^2([0,T],\mathcal{H})$ por (3.20) existe $g := f - \dfrac{du}{dt} \in \partial\varphi(u(t))$ tal que $g(t) \in L^2([0,T],\mathcal{H})$ t-q.t.p. em $(0,T)$. Logo, pelo Lema 3.2.7 $\varphi(u(t))$ é absolutamente contínua em $[0,T]$.
Por (3.20) temos que existe $y(t) \in \partial\varphi(u(t))$ tal que

$$\frac{du}{dt} + y(t) = f(t) \ \text{ t-q.t.p. em } (0,T). \tag{3.36}$$

Multiplicando (3.36) por $t\,\dfrac{du}{dt}$ temos:

$$\left(\frac{du}{dt} + y(t), t\,\frac{du}{dt}\right) = \left(f(t), t\,\frac{du}{dt}\right)$$

$$\Longrightarrow\ t\left(\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\right) + t\left(y, \frac{du}{dt}\right) = t\left(f(t), \frac{du}{dt}\right)$$

$$\Longrightarrow\ t\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + t\left(y, \frac{du}{dt}\right) = t\left(f(t), \frac{du}{dt}\right).$$

Logo, pelo Lema 3.2.7 temos

$$t\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + t\,\frac{d\varphi}{dt}(u(t)) = t\left(f(t), \frac{du}{dt}\right), \text{ t-q.t.p. em } (0,T). \tag{3.37}$$

Integrando (3.37) sobre $[0,T]$ temos

$$\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt + \int_0^T t\frac{d\varphi}{dt}(u(t))dt = \int_0^T t\left(f(t), \frac{du}{dt}(t)\right) dt$$

$$\Longrightarrow\ \int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt + T\varphi(u(T)) = \int_0^T t\left(f(t), \frac{du}{dt}(t)\right) dt + \int_0^T \varphi(u(t))dt$$

Assim, como $\varphi(u) \geq 0$ e usando a equação acima e as desigualdades de Cauchy Schwarz e Young temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt &\leq \int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt + T\varphi(u(T)) \\
&= \int_0^T t\left(f(t), \frac{du}{dt}\right) dt + \int_0^T \varphi(u(t))dt \\
&\leq \int_0^T \sqrt{t}\ \|f(t)\| \sqrt{t}\ \left\|\frac{du}{dt}\right\| dt + \int_0^T \varphi(u(t))dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^T t\,\|f(t)\|^2\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt + \int_0^T \varphi(u(t))dt
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt \leq \frac{1}{2}\int_0^T t\,\|f(t)\|^2\, dt + \int_0^T \varphi(u(t))dt$$

Portanto,

$$\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 dt \leq \int_0^T t\,\|f(t)\|^2\, dt + 2\int_0^T \varphi(u(t))dt \tag{3.38}$$

Em seguida, como $\varphi(x_0) = 0$ temos, $\varphi(u(t)) \leq (y(t), u(t) - x_0)$, para todo $y(t) \in \partial\varphi(u(t))$. Ou seja, $\varphi(u(t)) \leq \left(f(t) - \frac{du}{dt}(t), u(t) - x_0\right)$ t-q.t.p. em $(0,T)$. Assim, usando a desigualdade de Cauchy Schwarz temos

$$\begin{aligned}
\varphi(u(t)) &\leq \left(f(t) - \frac{du}{dt}(t), u(t) - x_0\right) = (f(t), u(t) - x_0) + \left(-\frac{du}{dt}(t), u(t) - x_0\right) \\
&\leq \|f(t)\|\|u(t) - x_0\| + \left(-\frac{du}{dt}(t), u(t) - x_0\right)
\end{aligned}$$

Integrando a inequação acima sobre o intervalo $[0,T]$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \varphi(u(t))dt &\leq \int_0^T \|f(t)\|\,\|u(t) - x_0\|\, dt + \int_0^T \left(-\frac{du}{dt}(t), u(t) - x_0\right) dt \\
&= \int_0^T \|f(t)\|\,\|u(t) - x_0\|\, dt + \int_0^T \left(-\frac{du}{dt}(t) - \frac{dx_0}{dt}, u(t) - x_0\right) dt \\
&= \int_0^T \|f(t)\|\,\|u(t) - x_0\|\, dt - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\,\|u(t) - x_0\|^2\, dt \\
&= \int_0^T \|f(t)\|\,\|u(t) - x_0\|\, dt - \frac{1}{2}\left[\|u(T) - x_0\|^2 - \|u(0) - x_0\|^2\right] \\
&\leq \int_0^T \|f(t)\|\,\|u(t) - x_0\|\, dt + \frac{1}{2}\,\|u(0) - x_0\|^2
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Por outro lado, pela desigualdade (3.6), temos que

$$\|u(t) - x_0\| \leq \|u(0) - x_0\| + \int_0^t \|f(\tau)\| d\tau, \;\; 0 \leq t \leq T.$$

Logo,

$$\|f(t)\|\|u(t) - x_0\| \leq \|f(t)\|\|u(0) - x_0\| + \|f(t)\|\int_0^t \|f(\tau)\| d\tau.$$

Integrando a inequação acima sobre $[0,T]$ temos

$$\begin{aligned}\int_0^T \|f(t)\|\|u(t)-x_0\|dt &\leq \|u(0)-x_0\|\int_0^T \|f(t)\|dt+\int_0^T \|f(t)\|\int_0^t \|f(\tau)\|d\tau dt \\ &= \|u(0)-x_0\|\int_0^T \|f(t)\|dt+\frac{1}{2}\left(\int_0^T \|f(t)\|dt\right)^2 \qquad (3.40)\end{aligned}$$

Portanto, de (3.39) e (3.40) temos

$$\begin{aligned}\int_0^T \varphi(u(t))dt &\leq \frac{1}{2}\|u(0)-x_0\|^2+\|u(0)-x_0\|\int_0^T \|f(t)\|dt+\frac{1}{2}\left(\int_0^T \|f(t)\|dt\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\|u(0)-x_0\|+\int_0^T \|f(t)\|dt\right)^2. \qquad (3.41)\end{aligned}$$

Portanto $\varphi(u(t)) \in L^1([0,T])$. Além disso, de (3.38) e (3.41) temos

$$\begin{aligned}\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 dt &\leq \int_0^T t\,\|f(t)\|^2\,dt+\left(\|u(0)-x_0\|+\int_0^T \|f(t)\|dt\right)^2 \\ &\leq \int_0^T T\,\|f(t)\|^2\,dt+\left(\|u(0)-x_0\|+\int_0^T \|f(t)\|dt\right)^2 \\ &\leq T\int_0^T \|f(t)\|^2\,dt+\left(\|u(0)-x_0\|+\int_0^T \|f(t)\|dt\right)^2<\infty,\end{aligned}$$

pois $f \in L^2([0,T],\mathcal{H})$. Potanto $\sqrt{t}\,\dfrac{du}{dt} \in L^2([0,T],\mathcal{H})$. ∎

Bibliografia

[1] V. S. Melnik, J. Valero, *On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions*, Set-Valued Analysis, 6:83-111, 1998.

[2] J. P. Aubin, A. Cellina, *Differential inclusions: Set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[3] J. P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[4] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Editura Academiei, Bucharest, 1976.

[5] J. Simsen, C. B. Gentile, *On Attractors for Multivalued Semigroups Defined by Generalized Semiflows*, Set-Valued Analysis, 105-124, 2008.

[6] A. R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1978.

[7] V. Barbu, *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*, Springer, New York, 2010.

[8] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.

[9] C. R. Oliveira, *Introdução à análise funcional*, Rio de Janeiro, IMPA, 2010.

[10] R. J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2ª edição, Upper Saddle River, 2000.

[11] A. C. Pereira, *Sistemas de Inclusões Diferenciais Governadas Pelo p-Laplaciano*, Dissertação de mestrado, Programa de Pós-graduação em matemática, UFSCar, 2004.

[12] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1970.

[13] A. E. Taylor, *General Theory Of functions and integration*, Dover Science, 1985.

[14] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[15] A. V. Borisovich, B. I., Gelman, A. D., Myskis, V. V., Obuhovsky, *Introduction to the Theory of Multivalued Maps*, VGU, Voronezh, 1986.

[16] A. A. Tolstonogov, *On solutions of evolution inclusions*, I, Sibirsk. Math. Zh, 161-174, 1992.

[17] A. V. Babin, *Attractor of the generalized semigroup generated by an elliptic equation in a cylindrical domain*, Russian Acad. Sci. Izv. Math., 1995.

[18] H. Brézis, *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1973.

[19] A. Haraux, *Attractors of Asymptotically Compact Processes and Applications to Nonlinear Partial Differential Equations*, Partial Differential Equations, 1383-1414, 1988.

[20] J. Simsen, *Semicontinuidade Superior de Atratores para Semigrupos Multívocos*, Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFSCar, 2007.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB_6/1700

N444t

Neres Júnior, Edson do Nascimento
Teoria de semigrupos multívocos: atratores para inclusões dife_
renciais / Edson do Nascimento Neres Júnior. -- Itajubá, (MG) :
[s.n.], 2013.
52 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Semigrupo multívoco. 2. Atrator global. 3. Inclusões dife_
renciais. I. Simsen, Jacson, orient. II. Universidade Federal de
Itajubá. III. Título.