

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS NÃO
PARAMÉTRICAS EM MODELOS ESTRUTURAIS
DINÂMICOS**

Autora: Luciana Bernardo Justino

Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior

Itajubá, Novembro de 2012

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá
Bibliotecária Jacqueline Balducci – CRB_6/1698

J96q

Justino, Luciana Bernardo.

Qualificação de incertezas não paramétricas em modelos estruturais dinâmicos. / Luciana Bernardo Justino. -- Itajubá, (MG) : [s.n.], 2012.
204 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Abordagem não Paramétrica. 2. Incertezas Epistêmicas.
3. Incertezas de Modelo. 4. Modelos Dinâmicos. 5. Quantificação de Incertezas. I. José Juliano de Lima Junior, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS NÃO
PARAMÉRICAS EM MODELOS ESTRUTURAIS
DINÂMICOS**

Autora: Luciana Bernardo Justino

Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior

Curso: Mestrado em Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Projeto e Fabricação

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em
Engenharia Mecânica.

Itajubá, Novembro de 2012

M.G. – Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS NÃO
PARAMÉTRICAS EM MODELOS ESTRUTURAIS
DINÂMICOS**

Autora: Luciana Bernardo Justino

Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando José de Oliveira Moreira - EMBRAER

Prof. Dr. Antônio Carlos Ancelotti Junior - IEM/UNIFEI

Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior, Presidente - IEM/UNIFEI

Dedicatória

*Aos meus pais Aparecida e Geraldo, aos meus irmãos Lucimary e José e às minhas
afilhadas Beatriz e Patrícia.*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por ter me conduzido sempre às escolhas certas e por me permitir realizar mais esta conquista.

Ao meu Orientador, Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior, pela competência e dedicação.

À UNIFEI pela oportunidade e ao Instituto de Engenharia Mecânica, representado pelos seus dedicados Professores e Funcionários, pelo grande apoio e convívio profissional.

A CAPES pelo apoio financeiro por meio do Programa de bolsas de estudos.

Aos amigos Alberto Cardoso Almeida, Aureliano Rodrigues Ribeiro, Felipe Eloy, Julio César Silva de Souza, Leonardo Albergaria e Nanci Delducca pelo permanente incentivo, amizade e companheirismo.

À minha família pelo apoio e incentivo na minha formação profissional.

Enfim, a todos os meus verdadeiros amigos, que de alguma forma contribuíram para que mais esta conquista fosse possível em minha vida.

“Se és incapaz de sonhar, nasceste velho. Se o teu sonho te impede de agir segundo as realidades, nasceste inútil; se, porém sabes transformar sonhos em realidade que encontram com a luz do teu sonho, então serás grande na tua pátria e a tua pátria será grande em ti.”

Plínio Salgado

Resumo

JUSTINO, L. B. (2012), *Quantificação de Incertezas Não Paramétricas em Modelos Estruturais Dinâmicos*, Dissertação (Mestrado em Projeto e Fabricação), Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá - MG, 204 p.

Incertezas são inevitáveis em projetos de engenharia e, nesta dissertação, um procedimento detalhado é apresentado para a quantificação das incertezas epistêmicas, também denominadas incertezas de modelo ou não paramétricas, em modelos estruturais dinâmicos amortecidos com n graus de liberdade. Tais incertezas ocorrem devido à falta de conhecimento do sistema em estudo e podem ser quantificadas por meio da abordagem não paramétrica, a mais adequada para este tipo de problema estocástico que se caracteriza por ser uma função temporal que varia aleatoriamente. A primeira fase de desenvolvimento é a modelagem estocástica que envolve a obtenção da função densidade de probabilidade para as matrizes aleatórias de um sistema linear dinâmico com n graus de liberdade. Tal desenvolvimento conta com a aplicação da teoria da matriz aleatória e do método da máxima entropia e consiste na resolução de um problema de otimização em que ocorre a maximização da incerteza sujeita às informações disponíveis. Posteriormente, a fase de simulação estocástica, baseada no processo de simulação de Monte Carlo, é realizada obtendo-se assim as respostas a serem comparadas com resultados experimentais realizados para uma viga com condições de contorno fixa-livre. Estudos relacionados às simulações e aos experimentos são conduzidos de maneira que seja possível a verificação da influência do parâmetro de dispersão na quantificação das incertezas de modelo e a importância em se determiná-lo corretamente. Contudo, espera-se que a quantificação destas incertezas aumente o grau de confiabilidade dos modelos estruturais dinâmicos.

Palavras-chave

Abordagem não Paramétrica, Incertezas Epistêmicas, Incertezas de Modelo, Modelos Dinâmicos, Quantificação de Incertezas.

Abstract

JUSTINO, L. B. (2012), *Quantification of Non Parametric Uncertainties of Structural Dynamic Models*, MSc. (Dissertation), Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá – MG, 204 p.

Uncertainties are unavoidable in engineering projects and, in this dissertation, a detailed procedure is presented for the quantification of epistemic uncertainty, also called model uncertainties or nonparametric uncertainties, in structural dynamic models damped with n degrees of freedom. Such uncertainties occur due to lack of knowledge about the system being studied and can be quantified by non-parametric approach, the most appropriate for this type of stochastic problem that is characterized by a temporal function which varies randomly. The first phase of development is the stochastic modeling which involves the determination of the probability density function for the random matrix of a dynamic linear system with n degrees of freedom. This development includes the application of random matrix theory and maximum entropy method and consists in solving an optimization problem in which occurs the maximization of uncertainty subject to available information. Subsequently, the stochastic simulation phase based on process Monte Carlo simulation is performed to obtain the responses to be compared with experimental results performed for a beam with boundary conditions fixed-free. Studies related to the simulations and experiments are conducted so that it is possible to verify the influence of the dispersion parameter in the quantification of model uncertainty and the importance in determining it correctly. However, it is expected that the quantification of these uncertainties increase the degree of reliability of the dynamic structural models.

Keywords

Non Parametric Approach, Epistemic Uncertainties, Model Uncertainty, Dynamic Models, Uncertainty Quantification.

Sumário

SUMÁRIO	I
LISTA DE FIGURAS	VI
LISTA DE TABELAS	X
SIMBOLOGIA	XI
LETRAS LATINAS	XI
LETRAS GREGAS	XVI
SOBRESCRITOS	XVII
SUBSCRITOS	XVII
ABREVIATURAS	XVII
OPERADORES	XVIII
SIGLAS	XVIII
CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO	1
1.1 Revisão da Literatura	4
1.2 Objetivo da Pesquisa	11
1.3 Motivação	12
1.4 Conteúdo	13
CAPÍTULO 2	16
MODELAGEM ESTOCÁSTICA	16
2.1 Definição do Problema a ser Resolvido	19
2.2 Definição do Modelo Médio	19
2.3 Banda de Frequência	20
2.4 Resposta do Sistema Dinâmico	21
2.5 Resposta do Sistema Dinâmico Médio	21
2.6 Informações Disponíveis e Restrições do Problema de Otimização	21
2.6.1 Primeira restrição	22
2.6.2 Segunda restrição	23

2.6.3 Terceira restrição-----	23
2.7 O Problema de Otimização-----	27
2.8 Resolução do Problema de Otimização-----	28
2.8.1 Multiplicador escalar de Lagrange-----	29
2.8.2 Multiplicador matricial de Lagrange-----	32
2.8.3 Obtenção da FDP-----	36
2.8.4 Cálculos algébricos e obtenção do resultado final para a FDP-----	37
2.8.5 FDP do sistema inverso de matrizes-----	40
2.8.6 Propriedades estatísticas do sistema de matrizes-----	41
2.8.7 Distribuição Wishart ótima-----	43
CAPÍTULO 3 _____	47
PROGRAMA COMPUTACIONAL _____	47
3.1 Sub-Rotinas do Programa-----	48
3.1.1 Sub-rotina entrada de dados-----	50
3.1.1.1 matrizes médias de massa e rigidez-----	50
3.1.1.2 matriz de amortecimento-----	50
3.1.1.3 parâmetro de dispersão-----	50
3.1.1.4 número de graus de liberdade-----	51
3.1.1.5 número inicial de simulações-----	51
3.1.1.6 nanda de frequência estudada-----	51
3.1.1.7 força de excitação e leitura de resultados-----	51
3.1.1.8 desvio-----	52
3.1.1.9 número máximo de simulações-----	52
3.1.2 Sub-rotina construção da resposta do modelo médio-----	52
3.1.3 Sub-rotina cálculo dos parâmetros da distribuição considerada-----	52
3.1.4 Sub-rotina simulação de Monte Carlo-----	52
CAPÍTULO 4 _____	54
VALIDAÇÃO _____	54
4.1 Informações de Entrada no Programa Computacional-----	55
4.1.1 Sub-rotina entrada de dados-----	55
4.1.1.1 matrizes médias de massa, amortecimento e rigidez-----	55
4.1.1.2 parâmetro de dispersão-----	56
4.1.1.3 número de graus de liberdade-----	56

4.1.1.4 número inicial de simulações-----	56
4.1.1.5 banda de frequência-----	56
4.1.1.6 força de excitação e leitura de resultados-----	57
4.1.1.7 desvio-----	57
4.1.1.8 número máximo de simulações-----	57
4.1.2 Sub-rotina construção da resposta do modelo médio-----	57
4.1.3 Sub-rotina cálculo dos parâmetros da distribuição considerada-----	57
4.1.4 Sub-rotina simulação de Monte Carlo-----	58
4.2 Resultados da Simulação-----	58
4.2.1 Curvas de convergência-----	58
4.2.2 Intervalos de confiança-----	61
4.3 Comparação entre Distribuições Gama e Wishart-----	67
4.4 Conclusões sobre a Validação-----	69
CAPÍTULO 5 _____	71
SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA _____	71
5.1 Informações de Entrada no Programa Computacional-----	72
5.1.1 Sub-rotina entrada de dados-----	72
5.1.1.1 matrizes médias de massa e rigidez-----	72
5.1.1.2 matriz média de amortecimento-----	78
5.1.1.3 parâmetro de dispersão-----	78
5.1.1.4 número de graus de liberdade-----	78
5.1.1.5 número inicial de simulações-----	78
5.1.1.6 banda de frequência estudada-----	79
5.1.1.7 força de excitação e leitura de resultados-----	79
5.1.1.8 desvio-----	79
5.1.1.9 número máximo de simulações-----	79
5.1.2 Sub-rotina construção da resposta do modelo médio-----	79
5.1.3 Sub-rotina cálculo dos parâmetros da distribuição considerada-----	80
5.1.4 Sub-rotina simulação de Monte Carlo com a obtenção das respostas-----	80
5.2 Resultados da Simulação-----	80
CAPÍTULO 6 _____	81
EXPERIMENTO _____	81
6.1 Procedimento Experimental-----	82

6.1.1 Configurações do experimento-----	82
6.1.2 Descrição do experimento -----	83
6.2 Respostas Impulsivas e FRF Obtidas no Ensaio -----	86
6.2.1 Faixa de frequência: 0 – 800 Hz -----	86
6.2.2 Faixa de frequência: 800 – 1200 Hz-----	88
6.3 Frequências Teóricas -----	89
6.4 Comparativo das Frequências Naturais-----	89
6.5 Conclusões Sobre o Experimento -----	93
CAPÍTULO 7 _____	95
RESULTADOS SIMULADOS E EXPERIMENTAIS _____	95
7.1 Apresentação das Respostas-----	96
7.1.1 Faixa de frequência: 0 – 800 Hz -----	96
7.1.1.1 respostas para parâmetro de dispersão igual a 0,11 -----	96
7.1.1.2 respostas para parâmetro de dispersão igual a 0,2-----	100
7.1.2 Faixa de frequência: 800 – 1200 Hz-----	104
7.1.2.1 respostas para parâmetro de dispersão igual a 0,11 -----	104
7.1.2.2 respostas para parâmetro de dispersão igual a 0,2-----	108
7.2 Conclusões sobre os Resultados Simulados e Experimentais -----	112
CAPÍTULO 8 _____	115
CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS _____	115
8.1 Conclusões -----	115
8.2 Perspectivas Futuras -----	118
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS _____	119
APÊNDICE A _____	128
MÉTODO DA MÁXIMA ENTROPIA _____	128
A.1 Evolução Histórica -----	128
A.2 Definição da Entropia -----	132
A.3 Princípio da Máxima Entropia -----	138
APÊNDICE B _____	144
TEORIA DA MATRIZ ALEATÓRIA _____	144
B.1 Conjunto Positivo Definido (CPD) -----	146
B.2 FDP de algumas Matrizes Aleatórias-----	147

APÊNDICE C _____	150
MÉTODO DE MONTE CARLO _____	150
APÊNDICE D _____	153
PROBABILIDADE – CONCEITUAÇÃO E CÁLCULO _____	153
D.1 Escola Objetiva -----	155
D.2 Escola Subjetiva -----	156
D.3 Escola Clássica -----	159
D.4 Escola Axiomática -----	161
D.5 Escola Ortodoxa ou Frequentista -----	163
D.6 Escola Bayesiana -----	167
D.6.1 Distribuição a priori ou anterior -----	168
D.6.2 Verossimilhança -----	169
D.6.3 Distribuição a posteriori ou posterior -----	170
D.6.4 Teorema de Bayes -----	170
D.7 Escolha do Método Adequado -----	172
APÊNDICE E _____	174
INSTRUMENTAÇÃO _____	174

Lista de Figuras

Figura 1 – FDP Gama e Normal para a variável aleatória K. -----	17
Figura 2 – FDP Gama e Normal da variável aleatória U. -----	18
Figura 3 – Fluxograma simplificado do programa construído pela autora.-----	49
Figura 4 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta K = 0,05$.-----	59
Figura 5 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta K = 0,1$.-----	59
Figura 6 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta K = 0,2$.-----	60
Figura 7 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta K = 0,3$.-----	60
Figura 8 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta K = 0,65$.-----	61
Figura 9 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta K = 0,05$. Fonte: Sampaio et al (2007). -----	62
Figura 10 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta K = 0,05$.	62
Figura 11 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta K = 0,1$. Fonte: Sampaio et al (2007). -----	63
Figura 12 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta K = 0,1$.	63
Figura 13 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta K = 0,2$. Fonte: Sampaio et al (2007). -----	64
Figura 14 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta K = 0,2$.	64
Figura 15 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta K = 0,3$. Fonte: Sampaio et al (2007). -----	65
Figura 16 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta K = 0,3$.	65
Figura 17 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta K = 0,65$. Fonte: Sampaio et al (2007). -----	66
Figura 18 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta K = 0,65$.	66
Figura 19 – Simulação para $n = 3$. Fonte: Adhikari (2008). -----	68
Figura 20 – Simulação para $n = 50$. Fonte: Adhikari (2008). -----	69
Figura 21 – Configuração geral do equipamento e software Sonelastic®. -----	73
Figura 22 – Simulação para estimação da frequência adequada.-----	74

Figura 23 – Configuração de aquisição de sinal do software Sonelastic®.	75
Figura 24 – Configuração da saída de resultados do software Sonelastic®.	75
Figura 25 – Desvio relativo entre frequências teóricas e de elementos finitos.	77
Figura 26 – Excitação da viga para obtenção da resposta impulsiva.	83
Figura 27 – Excitação da viga para obtenção da FRF.	84
Figura 28 – Montagem dos componentes de ensaio.	84
Figura 29 – Configuração do sistema com acréscimo de 2 imãs.	85
Figura 30 – Configuração do sistema com acréscimo de 4 imãs.	85
Figura 31 – FRF e Resposta impulsiva do experimento sem o acréscimo de imãs.	86
Figura 32 – FRF e Resposta impulsiva do experimento com acréscimo de dois imãs.	87
Figura 33 – FRF e Resposta impulsiva do experimento com acréscimo de quatro imãs.	87
Figura 34 – FRF e Resposta impulsiva do experimento sem o acréscimo de imãs.	88
Figura 35 – FRF e Resposta impulsiva do experimento com acréscimo de dois imãs.	88
Figura 36 – FRF e Resposta impulsiva do experimento com acréscimo de quatro imãs.	89
Figura 37 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta M = 0,11$. Modelo sem acréscimo de imãs.	97
Figura 38 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta M = 0,11$. Modelo sem acréscimo de imãs.	97
Figura 39 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta M = 0,11$. Modelo com acréscimo de 2 imãs.	98
Figura 40 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta M = 0,11$. Modelo com acréscimo de 2 imãs.	98
Figura 41 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta M = 0,11$. Modelo com acréscimo de quatro imãs.	99
Figura 42 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta M = 0,11$. Modelo com acréscimo de quatro imãs.	99
Figura 43 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta M = 0,2$. Modelo sem acréscimo de imãs.	101
Figura 44 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta M = 0,2$. Modelo sem acréscimo de imãs.	101
Figura 45 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta M = 0,2$. Modelo com acréscimo de 2 imãs.	102

Figura 46 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta M = 0,2$. Modelo com acréscimo de 2 imãs. -----	102
Figura 47 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta M = 0,2$. Modelo com acréscimo de quatro imãs. -----	103
Figura 48 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta M = 0,2$. Modelo com acréscimo de quatro imãs. -----	103
Figura 49 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta M = 0,11$. Modelo sem acréscimo de imãs. -----	105
Figura 50 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta M = 0,11$. Modelo sem acréscimo de imãs. -----	105
Figura 51 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta M = 0,11$. Modelo com acréscimo de 2 imãs. -----	106
Figura 52 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta M = 0,11$. Modelo com acréscimo de 2 imãs. -----	106
Figura 53 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta M = 0,11$. Modelo com acréscimo de quatro imãs. -----	107
Figura 54 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta M = 0,11$. Modelo com acréscimo de quatro imãs. -----	107
Figura 55 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta M = 0,2$. Modelo sem acréscimo de imãs. -----	109
Figura 56 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta M = 0,2$. Modelo sem acréscimo de imãs. -----	109
Figura 57 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta M = 0,2$. Modelo com acréscimo de 2 imãs. -----	110
Figura 58 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta M = 0,2$. Modelo com acréscimo de 2 imãs. -----	110
Figura 59 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta M = 0,2$. Modelo com acréscimo de quatro imãs. -----	111
Figura 60 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta M = 0,2$. Modelo com acréscimo de quatro imãs. -----	111
Figura 61 – Efeito da distribuição a priori. (a) priori não informativa; (b) priori informativa. priori (linha pontilhada); verossimilhança (linha tracejada); posteriori (linha cheia).	
Fonte: Costa (2004). -----	169

Figura 62 – Vibrômetro a laser. -----	175
Figura 63 – Analisador de sinais. -----	175
Figura 64 – Programa Sonelastic®. -----	176
Figura 65 – Balança digital. -----	177

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Dimensões e massa da amostra-----	73
Tabela 2 – Dimensões, massa e propriedades da viga de aço analisada.-----	76
Tabela 3 – Valores das frequências naturais da resposta impulsiva, FRF e teóricas para faixa de frequência de 0 – 1200 Hz -----	91
Tabela 4 – Comparativo entre frequências naturais da resposta impulsiva, FRF e teóricas para faixa de frequência de 0 – 1200 Hz-----	92
Tabela 5 – Sistema de restrições. Fonte: Mattos et al (2002). -----	141

Simbologia

Letras Latinas

a	parâmetro escalar	
a_r	momento de ordem r	
A	subconjuntos	
\mathbf{A}	matriz aleatória quadrada	
\mathbb{B}	banda de frequência	Hz
c	variável constante	
\mathbf{C}	matriz aleatória de amortecimento	Ns/m
$\bar{\mathbf{C}}$	matriz média de amortecimento	Ns/m
E_j	energia de uma molécula	J/mol
E_p	energia potencial	J
E_t	energia total de uma molécula	J/mol
$E[\cdot]$	valor esperado de $[\cdot]$	
f	frequência natural	Hz
$f(\cdot)$	função	

$f(t)$	função real ou complexa para todo $t > 0$	
$f(x)$	função cuja derivada seja conhecida	
$F(\cdot)$	função de uma matriz (\cdot)	
$\langle f \rangle$	média probabilística	
$\bar{f}(\cdot)$	força média	N
$\mathbf{f}(\cdot)$	vetor de força externa	N
$g(\cdot)$	função real	
$g_{ri}(\cdot)$	representa as restrições de consistência	
G	variável aleatória	
\mathbf{G}	matriz aleatória que pode representar \mathbf{M} , \mathbf{C} ou \mathbf{K}	
$\bar{\mathbf{G}}$	matriz média de \mathbf{G}	
$\mathbf{H}(\cdot)$	função resposta em frequência	
i	número imaginário unitário	$\sqrt{-1}$
I	matriz identidade	
k	número real ou constante positiva	
K	variável aleatória de rigidez	N/m
\bar{K}	rigidez média da variável aleatória	N/m
$K(\cdot)$	função geradora de cumulantes	
\mathbf{K}	matriz aleatória de rigidez	N/m
$\bar{\mathbf{K}}$	matriz média de rigidez	N/m

$\mathbb{L}[\cdot]$	Lagrangeano	J
$\mathcal{L}(\cdot)$	transformada de Laplace	
m	parâmetro escalar da distribuição Wishart inversa ou o número de restrições de um problema de otimização	
mt	mensagem transmitida	
$M(\cdot)$	função geradora de momentos	
\mathbf{M}	matriz aleatória de massa	kg
$\bar{\mathbf{M}}$	matriz média de massa	kg
$M_n^+(\mathbb{R})$	conjunto de matrizes reais quadradas, reais, simétricas e positiva-definidas	
$M_{n,m}(\mathbb{R})$	conjunto de matrizes reais $n \times m$	
$M_n(\mathbb{R})$	conjunto de matrizes reais quadradas	
$M_n^S(\mathbb{R})$	conjunto de matrizes reais quadradas simétricas	
$M_n^{+0}(\mathbb{R})$	conjunto de matrizes reais simétricas semi-positiva-definidas	
n	dimensão da matriz ou número de graus de liberdade do sistema	
n_s	número de simulações de Monte Carlo	
nt	número de níveis de tensão para cada intervalo de tempo	
n_v	número total de variáveis	
N	número total de casos igualmente possíveis	
N_i	número de moléculas	
N_t	número total de moléculas	

p	parâmetro escalar da distribuição Wishart ou distribuição de probabilidade
$p_{\mathbf{C}}[\mathbf{C}]$	FDP da matriz aleatória de amortecimento
$p_{\mathbf{G}^{-1}}(\mathbf{G}^{-1})$	FDP da distribuição Wishart invertida
$p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$	FDP da matriz aleatória \mathbf{G}
$p_{\mathbf{K}}[\mathbf{K}]$	FDP da matriz aleatória de rigidez
$p_{\mathbf{M}}[\mathbf{M}]$	FDP da matriz aleatória de massa
$p_{\mathbf{X}}(X)$	FDP da matriz aleatória \mathbf{X} em função do valor que pode ser assumido por ela
$q(\cdot)$	peso positivo determinado por um grau de conhecimento ou experiência
$Q^n(\omega; \theta_k)$	resposta do sistema estocástico calculada para cada simulação k com resultado correspondente θ_k
R_j	região pequena correspondente à dimensão da j -ésima célula
\mathbb{R}	conjunto de números reais
\mathbb{R}^+	conjunto de números reais positivos
\Re	parte real
$S(\cdot)$	entropia de Shannon
\mathbf{S}	matriz aleatória simétrica positiva-definida
t	tempo
T	número de símbolos possíveis de serem distinguidos pelo usuário
u	número de símbolos na transmissão

$\mathbf{u}(\cdot)$	vetor de deslocamento em função de (\cdot)	m
$\dot{\mathbf{u}}(\cdot)$	vetor de velocidade em função de (\cdot)	m/s
$\ddot{\mathbf{u}}(\cdot)$	vetor de aceleração em função de (\cdot)	m/s^2
U	variável aleatória de deflexão	m
V	volume delimitado no espaço de uma variável aleatória contínua	
\mathbf{V}	matriz aleatória simétrica positiva-definida	
W	velocidade de transmissão da inteligência	
\mathbf{W}	matriz aleatória	
x	variável	
X	variável aleatória	
\mathbf{x}	vetor aleatório de observações	
\mathbf{X}	matriz aleatória	
y	variável	
γ_C	inteiro positivo relacionado à matriz aleatória de amortecimento	
γ_K	inteiro positivo relacionado à matriz aleatória de rigidez	
γ_M	inteiro positivo relacionado à matriz aleatória de massa	
\mathbf{Y}	matriz aleatória	
z	número complexo	
\mathbf{Z}	matriz quadrada, simétrica e complexa	
\mathbf{Z}	matriz simétrica $n \times n$ complexa	

\mathbf{Z}_r matriz quadrada, simétrica e real

Letras Gregas

α parâmetro escalar

Γ função Gama

Θ parâmetro matricial da distribuição Wishart inversa

δ parâmetro de dispersão

θ parâmetro escalar

λ autovalor rad^2/s^2

μ multiplicador escalar de Lagrange

Λ multiplicador matricial de Lagrange

ν ordem do momento inverso

ρ densidade g/cm^3

Σ parâmetro matricial da distribuição Wishart

$\varphi(t)$ função característica

Φ matriz que contém os autovetores de \mathbf{G}

Ψ matriz que contém os autovalores de \mathbf{G}

ω frequência natural angular rad/s

Ω matriz simétrica

Sobrescritos

-1 índice que indica a inversa de uma matriz

k índice inteiro positivo

t índice que indica o transposto de uma matriz

Subscritos

i índice que indica a i -ésima mensagem transmitida

j índice que indica a j -ésima célula

min mínimo

$mán$ máximo

n número de termos

Abreviaturas

<i>conv</i>	convergência
<i>det</i> [·]	determinante
<i>exp</i> {·}	exponencial
<i>ln</i> [·]	logaritmo natural
<i>log</i> [·]	logaritmo decimal
<i>tr</i> (·)	Traço

Operadores

$\ \cdot\ _F$	norma de Frobenius
$ \cdot $	determinante

Siglas

CPD	conjunto positivo definido
FDP	função densidade de probabilidade
FGC	função geradora de cumulantes
FGM	função geradora de momentos
FRF	função resposta em frequência

gdl	graus de liberdade
GOE	conjunto ortogonal gaussiano
IC	intervalo de confiança
IEM	Instituto de Engenharia Mecânica
MEF	método dos elementos finitos
MMC	método de Monte Carlo
MME	método da máxima entropia
PME	princípio da máxima entropia
SMC	simulações de Monte Carlo
TMA	teoria da matriz aleatória
UNIFEI	Universidade Federal de Itajubá
VA	variável aleatória

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Incertezas tem um papel fundamental no estabelecimento da confiabilidade de um modelo numérico. De acordo Vandepitte (2011), ela é uma deficiência potencial em qualquer fase ou atividade do processo de modelagem, que ocorre devido à falta de conhecimento do sistema. É causada por informações incompletas resultante de imprecisões, falta de especificações (disponibilidade de um número de diferentes modelos que descrevem o mesmo fenômeno) ou discordância (conflito evidente na descrição do fenômeno em questão).

O estudo das incertezas tem sido alvo de constantes pesquisas devido a sua importância em diversas áreas na engenharia principalmente quando se trata de projetos complexos como em caso de aeronaves, automóveis, dentre outros. Sistemas reais complexos são difíceis e caros de serem ensaiados. Segundo Soize (2005b), “[...] para sistemas reais complexos, apenas um sistema manufaturado pode ser considerado como disponível para se realizar experimentos de modo a reduzir o nível de incertezas”. Além disso, mesmo que tais experimentos sejam possíveis de serem realizados, apenas algumas informações ou conclusões podem ser deles deduzidas.

Contudo, modelos matemáticos mecânicos são construídos para que seja possível simular situações reais em *softwares* adequados considerando que tal simulação possa substituir experimentos reais que seriam realizados por sistemas manufaturados a partir de

sistemas projetados. Nesse processo pode-se distinguir três tipos de modelos considerados na análise. São eles: (a) Modelo projetado, que corresponde ao sistema concebido por engenheiros projetistas. (b) Modelo real, que se refere ao sistema fabricado a partir do sistema projetado. Neste caso, têm-se diferenças em parâmetros geométricos, condições de contorno, materiais etc. entre os dois sistemas, projetado e real. (c) Modelo médio que diz respeito ao sistema modelado a partir do sistema projetado, ele representa o sistema real.

A intenção, portanto é fazer com que o modelo médio possa representar com fidelidade máxima o modelo real, e nesse processo de modelagem média do sistema projetado são introduzidas incertezas que, por sinal, devem ser quantificadas para que se possa aumentar a confiabilidade do modelo numérico construído.

Com isso, no caso de sistemas dinâmicos lineares, podem ser identificados principalmente três tipos de incertezas. (1) A incerteza no carregamento: está relacionada com as incertezas das forças de excitação a qual o sistema é submetido. (2) A incerteza nos parâmetros: está relacionada com as incertezas dos parâmetros físicos do sistema, tais como a geometria e o material. (3) A incerteza no modelo (condições de contorno, modelo de viga, modelo de placa, dentre outros) está relacionada às aproximações feitas no modelo matemático (Sampaio *et al*, 2008).

Considerando os últimos dois tipos descritos e caracterizando-os, de forma generalizada por Adhikari (2007), como incertezas do modelo, são colocadas pelo autor duas abordagens para quantificá-las: a paramétrica e a não paramétrica. A primeira é utilizada para a quantificação das incertezas relativas aos parâmetros do sistema tais como o módulo de elasticidade, a densidade, o coeficiente de Poisson, o coeficiente de amortecimento e os parâmetros geométricos. A segunda abordagem trata da quantificação das incertezas decorrentes principalmente devido à falta de conhecimento do sistema e não dependem de seus parâmetros. Como exemplos podem ser citados os erros associados com a equação de movimento (linear ou não linear), e o modelo de amortecimento (viscoso ou não-viscoso), entre outros.

É de extrema importância que os dois tipos de incertezas citadas no parágrafo anterior sejam quantificadas, porém, nesta dissertação será estudado um sistema estrutural dinâmico linear amortecido com n graus de liberdade cuja incerteza a ser quantificada é a incerteza não

paramétrica, também denominada incerteza de modelo ou incerteza epistêmica. Para tal quantificação a abordagem não paramétrica será utilizada.

Os princípios de construção da abordagem não paramétrica para quantificação de incertezas aleatórias foram definidos por Soize (1998) e Soize (2000) para que fosse possível a propagação das incertezas de modelo das matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez de sistemas dinâmicos não lineares. O autor mostra todos os passos para a quantificação de incertezas epistêmicas por meio desta construção que tem por base o Princípio da Máxima Entropia (PME) e da Teoria da Matriz Aleatória (TMA). Análises e validações da abordagem não paramétrica foram realizadas em alguns artigos como, por exemplo, em Soize (2001), Soize (2003a), Soize (2003b) e Chebli *et al* (2004), além de um *overview* a respeito da abordagem em Soize (2005b).

A TMA, que pode ser vista no Apêndice B, é utilizada devido ao fato de se tratar de matrizes aleatórias que tem como característica possuírem suas linhas como sendo vetores aleatórios. Tais matrizes são utilizadas, pois segundo Sampaio *et al* (2008), “[...] algumas realizações das matrizes aleatórias acoplam os modos do sistema”, o que não ocorre com realizações, ou simulações, de variáveis aleatórias. O PME corresponde ao método de inferência estatística adotado e é descrito em detalhes no Apêndice A. Tal método faz uso das informações disponíveis que se tem para análise e, neste caso, tais informações são referentes às matrizes médias de massa, amortecimento e rigidez, além do parâmetro de dispersão de cada uma delas. As matrizes médias para cada uma das três matrizes aleatórias citadas podem ser obtidas de duas maneiras, a primeira é considerando o modelo de elemento finito médio e a segunda é por meio da construção do modelo de matriz reduzida média. Então, com as informações disponíveis em mãos, um problema de otimização é resolvido, nele ocorre a maximização da entropia (neste caso sinônimo de incerteza) sujeita às restrições que são determinadas em torno das informações disponíveis. É por meio desse processo que Soize (2005a) obteve a FDP (Função Densidade de Probabilidade) apropriada para propagação da incerteza nas matrizes de massa, amortecimento e rigidez de sistemas dinâmicos lineares para uma ampla faixa de frequência.

Dando sequência ao processo de quantificação, a simulação estocástica é realizada para as matrizes aleatórias já citadas anteriormente para que seja possível a obtenção e análise das funções resposta em frequência (FRF) obtidas. De uma maneira simplificada, a simulação estocástica pode ser descrita como sendo um procedimento que envolve geração de números

aleatórios correspondentes aos valores que podem ser assumidos pelas variáveis ou matrizes aleatórias consideradas na análise. Ela é utilizada para se avaliar modelos não determinísticos, também chamados de modelos estocásticos, cujo comportamento pode ou não mudar mesmo com o fornecimento dos mesmos parâmetros de entrada. Com isso, o método da Simulação de Monte Carlo (SMC) é utilizado com o propósito de se avaliar o mesmo modelo quantas vezes forem necessárias, o que é limitado pelo número de simulações obtidas pelo Método dos Mínimos Quadrados, para que se possa então organizar os dados e com isso analisá-los adequadamente.

1.1 REVISÃO DA LITERATURA

Segundo Ribeiro *et al* (2007) existem dificuldades na definição de modelos que representem de forma adequada o comportamento dinâmico das estruturas. Disso resulta que a resposta dinâmica e a confiabilidade podem ser muito sensíveis às variações dessas características, visto que dependendo do sistema analisado, pequenas incertezas podem afetar de forma significativa o comportamento dinâmico da estrutura.

De fato, problemas envolvendo excitações dinâmicas têm, quando comparados a problemas estáticos similares, maior número de variáveis envolvidas, diferentes formas de solução, além do que, existe a dificuldade de se quantificar algumas variáveis (como o amortecimento estrutural, por exemplo). Além disso, a solução de problemas dinâmicos é mais suscetível a erros já que se trata de uma análise bem mais complexa. Deve-se ter o cuidado, portanto, de não atribuir estes erros ao modelo (Kaminski Junior, 2007).

Na literatura existem estudos que tratam de incertezas em modelos dinâmicos e que são aplicados a várias áreas como, por exemplo, na aeronáutica, automobilística, construção civil dentre outras. Tais estudos ou pesquisas tratam tanto de métodos analíticos quanto estatísticos, teóricos e experimentais. Contudo, não se deve pensar que a quantificação de somente um tipo de incerteza, paramétrica ou não paramétrica, seja suficiente para que se tenha a possibilidade de prever o comportamento da estrutura em um nível máximo. É necessário que as incertezas mais importantes dentro desses dois tipos citados (aquelas que podem ser probabilisticamente avaliadas) sejam quantificadas e é por este motivo que

pesquisas têm sido realizadas com tal objetivo. No caso deste trabalho, o enfoque será dado às incertezas de modelo, as quais serão quantificadas considerando sistemas dinâmicos lineares homogêneos.

Diante dos trabalhos realizados na área, Soize (2000) foi quem apresentou a abordagem não paramétrica de incertezas aleatórias que é baseada na construção de modelos aleatórios incertos das matrizes de massa, amortecimento e rigidez de sistemas dinâmicos lineares e que devem ser reais, simétricas e positiva-definidas. Trata-se da obtenção direta do modelo probabilístico das matrizes aleatórias consideradas pela utilização do Método da Máxima Entropia (MME) em que somente informações disponíveis são utilizadas na construção de um problema de otimização a ser resolvido com base na maximização da entropia, neste caso considerada como sinônimo de incerteza. Tal informação disponível corresponde ao modelo médio das matrizes citadas, cuja obtenção pode ser conseguida fazendo-se uso do procedimento apresentado no artigo e que corresponde à construção de modelos de matrizes reduzidas médias. Por outro lado, o autor alerta que tal modelo não pode ser utilizado quando se trata de faixas de média frequência. Neste caso, o modelo de matriz reduzida média é proposto em Soize (1998).

Em outro estudo Soize (2001) tenta complementar a abordagem não paramétrica para sistemas dinâmicos lineares em que se considera a construção de um modelo probabilístico de matriz reduzida, cujo problema de otimização é composto pela maximização da entropia sujeita a três restrições. De maneira simplificada, tais restrições são definidas como a restrição de matriz reduzida média, a condição de existência do momento de segunda ordem e algumas características algébricas resultantes do fato de que as matrizes aleatórias são consideradas como positiva-definidas. Tais restrições são válidas para cada uma das três matrizes aleatórias consideradas, ou seja, massa, amortecimento e rigidez. Contudo, diferente dos artigos já citados – Soize (1999) e Soize (2000), em Soize (2001) – foi possível a análise de propriedades de convergência do método quando a dimensão das matrizes aleatórias tendia ao infinito, isso comprovou sua consistência além de ter permitido que parâmetros da distribuição de probabilidade das matrizes aleatórias fossem claramente definidas. Vale lembrar que tal análise é realizada na faixa de baixa frequência e para matrizes aleatórias quadradas, reais, simétricas e positiva-definidas. Resumidamente, pode-se citar que quando se tem autovalores inteiros da matriz aleatória considerada, a distribuição probabilística desta mesma matriz corresponde à Distribuição Wishart, além disso, valores limites (mínimo e

máximo) para os valores de dispersão foram determinados, dessa maneira este parâmetro pode ser fixo e independente da ordem da matriz. Tais resultados possibilitam e facilitam bastante a quantificação e propagação das incertezas em *softwares* adequados, pois já se tem a correta FDP para as simulações. Além disso, a FDP, como citado acima, tem como informações disponíveis apenas os valores da matriz reduzida média que pode ser obtida deterministicamente e o parâmetro de dispersão relacionado à matriz aleatória cujo valor no intervalo entre zero e um pode ser fixo pelo analista. O autor ainda chama a atenção para o fato de que este parâmetro de dispersão é um parâmetro global que resulta da experiência do analista. Sua justificativa para esta afirmação é que a incerteza de modelo ainda não pode ser determinada em termos de correlação entre as matrizes aleatórias consideradas, mas estudos estão sendo desenvolvidos na área para análise de alguma correlação que possa existir entre os parâmetros de dispersão das matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez associadas com a dispersão das respostas aleatórias.

Por outro lado, Soize (2003a) numa continuação aos seus estudos sobre a abordagem não paramétrica para quantificação de incertezas de modelo, trabalha para mais uma validação da teoria proposta pelo próprio autor considerando-se sistemas dinâmicos na faixa de baixa frequência de vibração. Tal validação adicional se refere ao fato de que as matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez devem ser reais, simétricas e positiva-definidas, o que constitui um novo conjunto em que estão inseridas tais matrizes, diferente dos conjuntos conhecidos como é o caso, por exemplo, do conjunto ortogonal gaussiano, um dos mais importantes na TMA. Com isso, este trabalho se dedica a uma comparação entre os dois conjuntos citados, ou seja, o conjunto ortogonal gaussiano, chamado pelo autor de GOE e o conjunto definido pela abordagem não paramétrica em que a FDP é construída através do MME e TMA, e que é denominada pelo autor de conjunto positivo-definido (CPD). Tal comparação foi realizada para dois valores de parâmetros de dispersão, 0,25 e 0,5, e segundo o próprio autor os resultados foram muito diferentes principalmente no que se refere aos obtidos para o maior valor do parâmetro de dispersão. Uma segunda análise foi realizada por Soize neste trabalho e trata da comparação entre o modelo paramétrico com parâmetro de dispersão 0,4942 e o modelo não paramétrico com os parâmetros de dispersão de 0,5 e neste caso os resultados foram parecidos para as duas abordagens quando houve a utilização do CPD. Já na utilização do GOE os resultados se diferenciaram, então o CPD é mais adequado do que o GOE para o modelo não paramétrico de incertezas aleatórias em análise de vibração de baixas frequências. A conclusão geral do trabalho valida mais uma vez a abordagem não

paramétrica proposta e prova que o conjunto positivo-definido de matrizes aleatórias realmente se adapta melhor nas análises de vibração de baixa frequência do que o GOE, principalmente no que se refere a valores mais elevados do parâmetro de dispersão, além disso, tal conjunto permite a modelagem de incertezas aleatórias para as matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez, o que não ocorre no caso do GOE, cuja modelagem só é possível para as matrizes aleatórias de massa e rigidez. Aliás, foi devido a este fato que todas as simulações realizadas neste artigo consideraram apenas a matriz rigidez como aleatória.

Em outro artigo do mesmo ano, desta vez estudando quantificação de incertezas em sistemas dinâmicos lineares na faixa de média frequência, Soize (2003b) apresentou uma abordagem alternativa para modelagem dessas incertezas aleatórias utilizando a construção não paramétrica de incertezas aleatórias para modelos de matriz reduzida, descritos em Soize (2000) e Soize (2001), ou seja, considerando-se faixas de baixa frequência de vibração, combinada com o modelo de matriz reduzida para faixas de média frequência desenvolvido em Soize (1998). E como resultado final, pode-se concluir que a nova abordagem não paramétrica com a nova matriz reduzida proposta para quantificação de incertezas em faixas de média frequência de vibração é coerente e constitui um modelo adequado para este tipo de cálculo.

Apesar de esta dissertação englobar a quantificação de incertezas epistêmicas em sistemas estruturais dinâmicos lineares homogêneo, é interessante citar o artigo desenvolvido por Chebli *et al* (2004) que valida os resultados da abordagem proposta em Soize (2000) e Soize (2001), mas considerando incertezas não homogêneas. O sistema estudado é constituído por duas estruturas simples conectadas por uma ligação complexa, totalizando-se três subestruturas. O que caracteriza a incerteza não homogênea é que o nível de incerteza é diferente de uma subestrutura para outra, podendo se dizer que no caso da ligação complexa tem-se uma incerteza maior no modelo médio, portanto, é importante calculá-la, e no caso das duas estruturas simples mencionadas acima, a incerteza é menor. Portanto, as incertezas de modelo foram impostas por uma ligação parafusada complexa representada na análise por um modelo simplificado médio e construído pela abordagem de elementos finitos. Como resultado pôde-se constatar que tal modelo não é suficientemente exato a ponto de se obter uma boa previsão experimental para frequências acima de 400 Hz, ou seja, houve a comprovação de que modelos médios de elementos finitos dão resultados confiáveis na faixa de baixa frequência, o que já tinha sido afirmado por Soize em seus trabalhos anteriores.

Contudo, com a análise dos resultados, foi comprovado que a abordagem não paramétrica proposta por Soize (2001) considerando materiais não homogêneos e faixas de baixa frequência, realmente é eficiente na quantificação de incertezas de modelo e, além disso, o experimento ainda pôde comprovar que a abordagem prevê a região de confiança que aumenta com o aumento da frequência, o que corresponde ao verdadeiro comportamento da resposta no caso da teoria proposta.

Estudos na área aeroespacial envolvendo quantificação de incertezas, tanto paramétricas quanto não paramétricas também foram realizados. Um deles foi feito por Capiez-Lernout *et al* (2006), no qual o objetivo foi analisar o papel desempenhado pelas incertezas de dados e de modelo na resposta dinâmica de sistemas mecânicos complexos considerando faixas de baixa frequência de vibração. Na verdade, dois sistemas foram analisados, um era composto pelo próprio satélite livre (faixa de frequência analisada: de 15 a 100 Hz) e o outro correspondia ao satélite acoplado em seu lançador (faixa de frequência analisada: de 5 a 54 Hz). Apesar da complexidade, a abordagem probabilística não paramétrica para matrizes reduzidas foi considerada para um contexto linear e as não linearidades locais de certas junções foram negligenciadas na faixa de frequência analisada. O parâmetro de dispersão da modelagem não paramétrica foi definido como sendo o mesmo da paramétrica para critérios de comparação entre as duas abordagens. As distribuições de probabilidade das matrizes aleatórias foram determinadas pelo MME. Os resultados obtidos nas abordagens paramétrica e não paramétrica considerando o satélite livre, foram similares para faixas de frequência menores que 25 Hz, o que indica que nesta faixa a incerteza de modelo é menor quando comparada à incerteza de dados. Outro resultado encontrado é que a média da resposta aleatória obtida pela abordagem não paramétrica e a resposta do modelo médio são bem diferentes, além disso, algumas frequências do modelo médio caíram fora do intervalo de confiança da abordagem não paramétrica, o que quer dizer que esta abordagem, além de levar em conta incertezas de dados também considera incertezas de modelo. No caso do sistema composto pelo satélite acoplado ao seu lançador, os resultados mostram que a incerteza de modelo cresce com o aumento da frequência e que a sensibilidade do modelo estudado para incertezas de dados e de modelo é mais significativa na banda de frequência de 30 a 54 Hz. Outro fato é que em 30 Hz aparece uma lacuna entre a média da resposta aleatória e a resposta do modelo médio e que aumenta conforme a frequência também cresce. Além disso, a resposta aleatória parece ser muito sensível com relação a incertezas de modelo para frequências maiores que 30 Hz. Como conclusão geral pode-se dizer que as abordagens paramétrica e não paramétrica são

complementares. A paramétrica estima a robustez com relação às incertezas de dados, já no que diz respeito à incerteza de modelo, as duas abordagens são necessárias para estimar a robustez do sistema estudado.

Surgiram então estudos com a intenção de comparar as abordagens paramétrica e não paramétrica, como é o caso de Sampaio et al (2007) que escreveu tal artigo com o objetivo de comparar as duas estratégias de modelagem de incertezas, paramétrica e não paramétrica.

Dando continuidade à este trabalho citado, Ritto *et al* (2008) discute sobre incertezas presentes na condição de contorno ao utilizar um modelo de viga de Timoshenko que está livre em uma extremidade e na outra sua rotação é restringida por uma mola de torção linear elástica. A intenção é fazer uma comparação entre as duas abordagens e discutir a respeito da capacidade de melhorar a previsibilidade da resposta do sistema. O Método dos Elementos Finitos (MEF) foi usado para discretização do sistema e o MME foi utilizado para construção das funções densidade de probabilidade nos dois modelos estudados. O primeiro considera a rigidez da mola de torção e a incerteza da mola é modelada por uma variável aleatória (abordagem paramétrica), já no caso do modelo probabilístico da matriz rigidez, a própria matriz como um todo é considerada como incerta (abordagem não paramétrica). As simulações foram realizadas considerando o mesmo parâmetro de dispersão para ambas as abordagens, porém diferentes simulações foram feitas para parâmetros iguais a 0,1 e 0,2, e para os valores máximos de 0,58 (paramétrica) e 0,96 (não paramétrica). As análises mostraram que a região de confiança para a abordagem não paramétrica é larga e inclui a paramétrica, além disso, para as duas abordagens, à medida que a frequência de vibração aumenta, a região de confiança vai se tornando cada vez mais larga, o que mostra o aumento da influência da incerteza em faixas de altas frequências de vibração e uma diminuição na previsibilidade do modelo.

Em paralelo a esses trabalhos, estudos para aumentar o conhecimento no que diz respeito à natureza das incertezas em problemas de média e alta frequência de vibração e propor modelos de validação e quantificação de incertezas em sistemas dinâmicos foram realizados. Adhikari *et al* (2007) elaborou um artigo baseado em dois estudos experimentais, um deles realizado com uma viga fixa-fixa com 12 massas colocadas sobre localizações aleatórias e outro utilizando uma placa em balanço com 10 osciladores massa-mola também colocados aleatoriamente. Tem-se então, as matrizes de massa e rigidez como aleatórias. Uma informação colocada pelos autores e que deve ser lembrada aqui decorre do fato de que as

abordagens paramétrica e não paramétrica devem ser consideradas levando-se em conta, além do tipo de incerteza que se quer quantificar, também a faixa de frequência de vibração considerada. No caso de faixas de baixa frequência de vibração, incertezas paramétricas são consideradas em detalhe, já em faixas de média frequência, incertezas paramétricas e não paramétricas devem ser quantificadas, por fim, no que se refere a faixas de alta frequência de vibração, incertezas não paramétricas devem ser determinadas.

Posteriormente, Adhikari (2007) propôs uma ferramenta geral de quantificação não paramétrica de incertezas para estruturas de sistemas dinâmicos construída conforme a abordagem não paramétrica proposta por Soize (2005b), abordagem esta baseada na TMA e no MME. O objetivo é provar que a matriz Wishart pode ser utilizada para modelagem de incertezas numa ampla faixa de frequência de vibração. A FDP das matrizes aleatórias que correspondem respectivamente às matrizes de massa, amortecimento e rigidez, foram obtidas considerando-se que tais matrizes aleatórias sejam também simétricas, positiva-definidas e o momento da inversa da matriz de rigidez dinâmica deve existir para qualquer frequência. A obtenção da FDP para as matrizes aleatórias consideradas mostrou que se apenas a média de tais matrizes está disponível, então o sistema de matrizes terá uma distribuição Wishart com parâmetros apropriados.

Na tentativa de se estudar um pouco mais sobre os parâmetros ótimos para a distribuição Wishart, e obter melhores resultados para os parâmetros da distribuição Wishart, Adhikari (2008) procedeu a uma comparação entre quatro critérios de restrições envolvendo as matrizes aleatórias e suas médias. No primeiro critério, correspondente a opção original dada em Soize (2000) e Soize (2001), considerou-se a média da matriz aleatória como sendo a mesma da matriz determinística, além disso, o desvio padrão normalizado seria o mesmo que o medido. O segundo critério leva em conta a opção de minimização do erro por mínimos quadrados proposta por Adhikari (2007) em que o autor considera que a média da matriz aleatória e a média da inversa da matriz aleatória são bem próximas da matriz determinística e sua inversa, com relação ao desvio padrão normalizado, ele também seria o mesmo que o medido. O terceiro critério constitui uma nova proposta do autor que considerou a média da inversa da matriz aleatória igual à inversa da matriz determinística e o desvio padrão normalizado sendo o mesmo que o medido. O quarto critério também foi uma nova proposta de Adhikari e traz a ideia de que a média dos autovalores da distribuição é a mesma que a dos autovalores medidos da matriz média e o desvio padrão normalizado é o mesmo do medido.

Através de exemplos numéricos foi comprovado que o terceiro critério produziu os melhores resultados, e, neste caso, as respostas estatísticas calculadas estão em melhor acordo com os resultados da simulação numérica direta. Foi notado também que as diferenças entre os quatro critérios estudados foram maiores em regiões de baixa frequência e menores nas regiões de média e alta frequência. Por fim, pode-se dizer que a matriz aleatória Wishart com seus parâmetros é recomendada para todas as aplicações práticas de dinâmica estrutural onde se espera que os sistemas de matrizes sejam grandes; e pode ser utilizada como uma ferramenta consistente e unificada de quantificação de incertezas válida para problemas de vibração de média e alta frequência, que no caso deste artigo corresponde à faixa de 800 Hz a 4000 Hz.

Em seguida, um estudo sobre a viabilidade de se adotar a matriz aleatória Wishart para representar sistemas dinâmicos derivados da perturbação do modelo foi realizado por Adhikari (2009). O autor cita que este trabalho foi o impulso para futuras investigações acerca deste assunto, já que mais estudos sobre a aplicabilidade do modelo de matriz aleatória Wishart em sistemas complexos para quantificação de incertezas devem ser realizados.

Depois de progressos no estudo de quantificação de incertezas epistêmicas, Adhikari (2010) trabalha com a possibilidade de que modelos mais simples da matriz aleatória Wishart (e que também não comprometa a precisão da previsão) sejam utilizados na quantificação de incertezas em sistemas estruturais dinâmicos complexos. Com isso, será estudada ainda mais a ideia da seleção do parâmetro adequado de matrizes Wishart. No caso, os dois novos modelos propostos foram as chamadas distribuição Wishart escalar generalizada e a distribuição Wishart diagonal generalizada. Além da proposição de novos modelos, o estudo também tem como objetivo melhorar a precisão das previsões estatísticas, simplificar as formulações analíticas e melhorar a eficiência computacional.

1.2 OBJETIVO DA PESQUISA

O objetivo principal desta dissertação consiste em construir um procedimento para quantificação de incertezas epistêmicas em modelos estruturais dinâmicos lineares com n graus de liberdade utilizando-se a abordagem não paramétrica.

Alguns objetivos secundários também serão realizados neste trabalho. O primeiro corresponde à obtenção da FDP apropriada para propagação da incerteza de modelo nas matrizes aleatórias consideradas e que corresponde à fase de modelagem estocástica da quantificação de incertezas. Tal FDP para propagação de incertezas considerando-se a abordagem não paramétrica já foi obtida segundo estudos de autores mencionados na Revisão Bibliográfica deste capítulo, porém, nesta dissertação ocorrerá um maior detalhamento da sua obtenção.

Um estudo importante também será realizado e diz respeito ao parâmetro de dispersão no sistema dinâmico e sua importância no processo de quantificação de incertezas. Serão realizadas análises a partir de respostas obtidas em simulações e experimentos onde se poderá verificar que tal parâmetro deve ser calculado corretamente para que sejam obtidas respostas de quantificação adequadas e que correspondam à realidade do sistema estudado.

Além disso, através de respostas obtidas por meio de simulações e resultados experimentais em que a matriz massa é considerada aleatória e terá sua incerteza propagada, será possível se analisar o comportamento da resposta quando se aumenta a massa no sistema considerado – neste caso representado por imãs adicionados à viga. Com isso, a incerteza referente ao modelo do sistema será aumentada, o que provocará alterações na resposta do sistema original considerado.

1.3 MOTIVAÇÃO

Incertezas são inevitáveis em projetos reais de engenharia e sua presença leva a uma maior probabilidade de falha do sistema em estudo, por isso é imprescindível que sejam estudadas técnicas ou maneiras de tornar o projeto o mais confiável possível, além de mais seguro. Nesse contexto, e considerando-se estruturas dinâmicas lineares, que corresponde ao foco deste trabalho, a quantificação das incertezas desempenha um papel chave no estabelecimento de uma maior confiabilidade do modelo numérico, já que tal confiabilidade, de acordo com Brandão (2007), está relacionada com a variabilidade das variáveis que descrevem os sistemas, sendo que essa variabilidade se apresenta nos sistemas estruturais sob a forma de incertezas. A quantificação de incertezas, neste caso, deve ser considerada

principalmente em modelos de sistemas complexos, já que tais sistemas necessitam ser ensaiados para que detalhes de complexidade possam ser revelados e analisados.

A possibilidade de modelagem de sistemas complexos com alta confiabilidade é possível, portanto, com a quantificação de incertezas presentes em sistemas reais manufaturados e que tem sua origem em projetos detalhados por engenheiros projetistas. A intenção, contudo, é fazer com que o modelo médio possa representar com fidelidade o modelo real e dessa forma contribuir para que empresas possam fazer uso do método para aumentar a confiabilidade de seus sistemas manufaturados sem que haja necessidade de testes demasiadamente longos e caros.

1.4 CONTEÚDO

Esta dissertação está dividida em oito capítulos e cinco apêndices. Os capítulos estão estruturados de maneira a formar uma sequência lógica dos passos a serem seguidos no processo de quantificação de incertezas epistêmicas. Já com relação aos anexos, eles têm um conteúdo importante para um claro entendimento do que é proposto neste trabalho.

No capítulo 1 é realizada uma revisão da literatura referente à quantificação de incertezas em modelos dinâmicos por meio da abordagem não paramétrica proposta por Cristian Soize.

Já o capítulo 2 refere-se à fase de modelagem estocástica onde se obtém a FDP para propagação da incerteza nas matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez do modelo dinâmico linear amortecido com n graus de liberdade. Um processo de otimização considerando a maximização da entropia/incerteza sujeita às restrições provenientes das informações disponíveis é resolvido de forma a se chegar à distribuição ótima de Wishart com seus parâmetros ótimos.

No capítulo 3 é apresentado o programa computacional desenvolvido pela autora tendo por base a plataforma do *software* MATLAB®. São mostrados aqui detalhes a respeito de todas as sub-rotinas do programa. Com as simulações estocásticas realizadas por meio do

MMC (Método de Monte Carlo) é possível a obtenção das respostas relacionadas à convergência do método e à FRF.

A validação do programa é realizada no capítulo 4. Para tal validação, são utilizados dados existentes na literatura para que o mesmo problema seja reproduzido na simulação. Isto torna possível a obtenção de respostas que possam ser comparadas com os resultados da mesma referência bibliográfica. A validação do programa é importante tendo em vista que o mesmo poderá ser utilizado em outras simulações realizadas nesta dissertação na certeza de que produzirá resultados satisfatórios.

A simulação estocástica referente à obtenção de resultados a serem analisados juntamente com resultados experimentais é realizada no Capítulo 5. Aqui, detalhes específicos sobre os dados inseridos no programa construído pela autora são detalhados, bem como a obtenção das matrizes médias por elementos finitos, coleta de informações e propriedades do sistema ensaiado, dentre outros. Os resultados da simulação são apresentados no Capítulo 5.

No capítulo 6 tem-se a descrição e todo o detalhamento do experimento realizado para um sistema dinâmico na faixa de frequência de 0 – 1200 Hz em que as respostas impulsivas e a FRF são obtidas. Um estudo comparativo entre as frequências naturais dessas duas respostas com frequências teóricas calculadas é realizado com o objetivo de se justificar a veracidade das informações obtidas no ensaio.

No Capítulo 7 é apresentada uma análise dos resultados obtidos na simulação estocástica detalhada no Capítulo 5 e dos resultados obtidos no experimento a que se refere o Capítulo 6.

As conclusões referentes aos cálculos e análise realizadas nesta dissertação serão apresentadas no capítulo 8, juntamente com sugestões para trabalhos futuros.

No apêndice A o estudo recai sobre o MME. Uma evolução histórica é mostrada, além de características importantes consideradas por Shannon (1948) e a proposta de Jaynes (1957a) e Jaynes (1957b) a respeito da utilização da entropia para quantificação de incertezas, estabelecendo-se assim o PME.

A Teoria da Matriz Aleatória é abordada no anexo B, ela é imprescindível no processo de modelagem estocástica para obtenção da FDP apropriada para propagação da incerteza nas matrizes aleatórias do sistema dinâmico linear estudado.

O apêndice C é correspondente ao MMC (Método de Monte Carlo). A descrição é realizada e detalhes de convergência são mostrados tendo em vista que se trata do ponto chave da simulação estocástica. É a partir da utilização desse método que as respostas estatísticas são obtidas.

O apêndice D é apresentado e nele são mostradas informações a respeito do conceito de probabilidade e as principais escolas de pensamento para que seja possível compreender o enquadramento do princípio da máxima entropia.

Por fim, no apêndice E constam as especificações da instrumentação utilizada tanto na fase de simulação estocástica para obtenção de informações, quanto no experimento realizado.

CAPÍTULO 2

MODELAGEM ESTOCÁSTICA

Na construção do modelo estocástico, o primeiro passo a se tomar está relacionado à escolha das variáveis aleatórias que serão analisadas e que, neste caso, trata-se de matrizes aleatórias a serem randomizadas. No caso desta dissertação, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez serão consideradas como matrizes aleatórias nas quais a incerteza será propagada para que seja possível a sua quantificação em cada uma dessas matrizes. Depois disso, o espaço amostral deve ser definido, ele identifica os valores que podem ser assumidos pelas matrizes aleatórias. A definição desse espaço amostral corresponde à construção da FDP para cada uma das matrizes consideradas anteriormente.

Convém dizer também que, nesta fase de modelagem, o sucesso do processo depende da utilização da FDP apropriada para cada uma das matrizes aleatórias, portanto, é imprescindível que a correta FDP de cada uma dessas matrizes seja encontrada para que sejam também eliminados os erros na análise decorrentes da utilização de uma FDP errada. Um erro neste ponto, ou seja, um erro na escolha da FDP a ser utilizada leva a sérios erros de modelagem, além do mais, cometer erros tão grosseiros não faria sentido já que a intenção é aumentar a confiabilidade do modelo adotado. Tais erros devem ser evitados independentemente da abordagem adotada ser a paramétrica ou a não paramétrica.

Um simples exemplo retirado de Sampaio *et al* (2008), página 107, será mostrado. Trata-se de um sistema estático, e o objetivo é se calcular a deflexão do sistema flexível ao se aplicar uma força estática no sistema. K e U são as Variáveis Aleatórias (VA) consideradas e

significam, respectivamente, rigidez e deflexão, sendo que:

$$U = \frac{\bar{f}}{K} \quad (1)$$

Onde \bar{f} é a força média aplicada na mola. Neste caso a FDP de cada variável aleatória considerada é a distribuição Gama. A fim de se mostrar o erro relacionado à escolha incorreta da FDP, dois gráficos serão construídos, um utilizando a FDP correta, que é a Gama e outro utilizando a FDP errada que é a Normal. Além disso, tem-se uma dispersão de valor $\delta = 0,2$, a rigidez média é dada por $\bar{K} = 3708 \text{ N/m}$ e a força média aplicada na mola corresponde ao valor de $\bar{f} = 5 \text{ N}$.

A FDP da distribuição Gama e da distribuição Normal calculada pelo MMC são mostradas nas Figuras 1 e 2 respectivamente. Foi encontrado no caso da variável aleatória K , um erro entre as duas distribuições de 6,0239, já no caso da variável aleatória U , o erro entre as distribuições fica em torno de 5,5198.

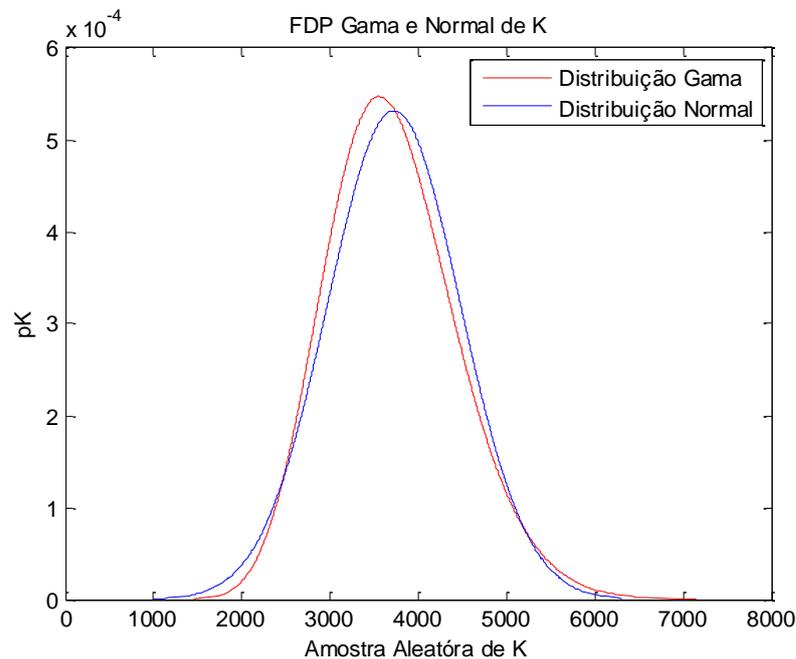


Figura 1 – FDP Gama e Normal para a variável aleatória K.

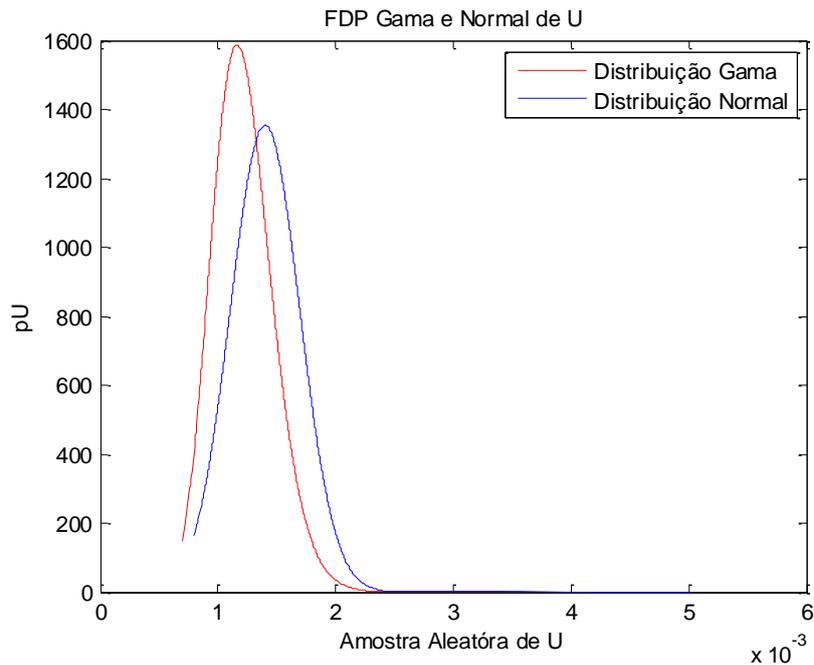


Figura 2 – FDP Gama e Normal da variável aleatória U.

Diante desses resultados pode-se ver a importância em se construir a correta FDP para propagação da incerteza referente às variáveis ou matrizes aleatórias consideradas. No caso das matrizes aleatórias deve-se citar neste momento que já existe na literatura a proposta da utilização da matriz Wishart como a correta FDP para as matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez em sistemas dinâmicos, e é esta distribuição que será adotada neste trabalho. Ela foi encontrada, no contexto da abordagem não paramétrica, por Cristian Soize em Soize (2001), e mais tarde passou a ser estudada por Adhikari que escreveu alguns artigos na tentativa de validar tal distribuição de maneira que ela pudesse ser utilizada na quantificação de sistemas dinâmicos lineares com n graus de liberdade. Os autores citados compõem a bibliografia básica deste capítulo, já que ele tem por objetivo apresentar detalhes referentes à abordagem não paramétrica proposta por Soize (2000) e Soize (2001), além da formulação em que se obteve a distribuição Wishart como a correta FDP para as matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez de sistemas dinâmicos amortecidos e seus respectivos estudos realizados por Adhikari (2007), Adhikari (2008) e Adhikari (2009).

Vale esclarecer também que nesta dissertação serão estudados sistemas dinâmicos amortecidos cuja incerteza a ser quantificada é a incerteza de modelo, também chamada de incerteza epistêmica. A quantificação tem como metodologia a abordagem não paramétrica que, por sua vez, faz uso do MME, como mencionado anteriormente.

2.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA A SER RESOLVIDO

Para a construção da FDP será considerada a equação de movimento de um sistema estrutural dinâmico linear com n graus de liberdade (gdl) e que pode ser representado no domínio do tempo como a seguir:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2)$$

ou no domínio da frequência:

$$-\omega^2 \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(\omega) + i\omega \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(\omega) + \mathbf{K} \mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad (3)$$

em que os vetores $\mathbf{u}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$, $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ representam respectivamente o vetor de deslocamento, velocidade, aceleração da massa e o vetor de força externa aplicada no sistema, todos em função do tempo. Já os vetores $\mathbf{u}(\omega)$, $\dot{\mathbf{u}}(\omega)$, $\ddot{\mathbf{u}}(\omega)$ e $\mathbf{f}(\omega)$ representam respectivamente o vetor de deslocamento, velocidade, aceleração da massa e o vetor de força externa aplicada no sistema, todos em função da frequência. $i = \sqrt{-1}$. \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são respectivamente as matrizes aleatórias $n \times n$ de massa, amortecimento e rigidez. Tais matrizes são reais, simétricas e positivo-definidas, elas pertencem ao Conjunto Positivo-Definido (CPD) proposto por Soize (2000) e estudado em Soize (2003a) e Soize (2005a), cujos detalhes podem ser vistos no Apêndice B.

Nas próximas seções, as matrizes aleatórias \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} , por simplicidade serão representadas por uma matriz aleatória geral denominada \mathbf{G} com mesma dimensão. Isto pode ser considerado visto que, de acordo com Adhikari (2007), as matrizes aleatórias do sistema dinâmico acima têm características probabilísticas similares.

Será considerado também $p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$ como sendo a FDP da matriz aleatória \mathbf{G} , que deve ser encontrada, e $\bar{\mathbf{G}}$ a matriz média de \mathbf{G} que deve ser calculada.

2.2 DEFINIÇÃO DO MODELO MÉDIO

O modelo médio corresponde à representação do modelo real a ser estudado. Ele é representado pela seguinte equação no domínio do tempo:

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \bar{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{u}}(t) + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{f}}(t) \quad (4)$$

ou no domínio da frequência:

$$-\omega^2 \bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{u}}(\omega) + i\omega \bar{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{u}}(\omega) + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}(\omega) = \bar{\mathbf{f}}(\omega) \quad (5)$$

As barras utilizadas nas Equações 4 e 5 representam valores médios.

Como visto em Soize (2000), dependendo da metodologia utilizada para construção do modelo médio das matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez, uma faixa menor ou maior de frequência pode ser considerada na análise. Neste caso, têm-se duas formas propostas para a construção de tal modelo médio: ou ele é construído por um modelo de elementos finitos que limita a faixa de frequência estudada ou ele é construído por um modelo de matriz reduzida onde o modelo definido pode ser usado para prever a resposta para todo ω em \mathbb{R} . Os detalhes sobre a construção do modelo médio nessas duas abordagens não será detalhado nesta dissertação, porém deve-se mencionar que a abordagem não paramétrica para quantificação de incertezas proposta inicialmente em Soize (2000) considera a obtenção do modelo médio por matriz reduzida já que a intenção é validar a abordagem para a mais ampla faixa de frequência possível. Vale esclarecer também que procedimentos de cálculo para obtenção de modelos de matrizes reduzidas médias são propostas considerando-se a faixa de frequência adotada na análise. Contudo, para faixas de baixa frequência de vibração, deve-se utilizar a metodologia proposta em Soize (2000), já para faixas de média frequência o modelo apresentado em Soize (1998) deve ser utilizado.

2.3 BANDA DE FREQUÊNCIA

Neste item será definida a banda de frequência considerada para a análise do modelo. Logo, para um sistema dinâmico amortecido em vibração linear na sua posição de equilíbrio estático será definida uma banda de frequência \mathbb{B} dada por:

$$\mathbb{B} = [\omega_{min}, \omega_{max}], \quad 0 < \omega_{min} < \omega_{max} \quad (6)$$

onde ω_{min} é a frequência mínima e ω_{max} corresponde à frequência máxima considerada.

2.4 RESPOSTA DO SISTEMA DINÂMICO

Aplicando a Transformada de Fourier na Equação 2, resulta:

$$-\omega^2 \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(\omega) + i\omega \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(\omega) + \mathbf{K} \mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \Rightarrow (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \Rightarrow \mathbf{H}(\omega) = (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \quad (7)$$

em que $\mathbf{H}(\omega)$ corresponde à Função Resposta em Frequência (FRF) do sistema estudado obtida para uma banda de frequência definida.

2.5 RESPOSTA DO SISTEMA DINÂMICO MÉDIO

Como já dito anteriormente, segundo Soize (2000), o modelo médio de elementos finitos só pode prever a resposta para uma faixa de frequência natural específica para a qual o modelo foi determinado, já o modelo reduzido médio permite a previsão da resposta para qualquer frequência, o que torna este modelo mais adequado para ser trabalhado na abordagem não paramétrica, já que o objetivo é obter um modelo de quantificação para a maior faixa de frequência possível. Portanto, o modelo não paramétrico das incertezas aleatórias será construído utilizando-se o MME com base nas informações disponíveis caracterizadas pelos modelos de matriz reduzida média:

$$\bar{\mathbf{H}}(\omega) = (-\omega^2 \bar{\mathbf{M}} + i\omega \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{K}})^{-1} \quad (8)$$

sendo $\bar{\mathbf{H}}(\omega)$ uma matriz $n \times n$ complexa simétrica que corresponde à FRF do modelo médio, $\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ e $\bar{\mathbf{K}}$ são as matrizes médias de massa, amortecimento e rigidez. Elas devem pertencer ao conjunto $\mathbf{M}_n^+(\mathbb{R})$, ou seja, devem ser matrizes $n \times n$ reais, simétricas e positivo-definidas.

2.6 INFORMAÇÕES DISPONÍVEIS E RESTRIÇÕES DO PROBLEMA DE OIMIZAÇÃO

A quantificação de incertezas de modelo presentes em sistemas dinâmicos lineares é

possível por meio da abordagem não paramétrica, cujo “[...] modelo de incertezas aleatórias é baseado na construção direta do modelo probabilístico das matrizes generalizadas de massa, amortecimento e rigidez” (Soize, 2000). Tal abordagem não paramétrica, na sua fase de modelagem estocástica, resolve um problema de otimização em que a entropia de Shannon, que neste caso significa incerteza, é maximizada e sujeita a restrições provenientes de informações disponíveis que se tem sobre o sistema em estudo.

A primeira informação que se tem diz respeito ao fato de que as matrizes aleatórias possuem sua distribuição de probabilidade definida por uma FDP de $\mathbf{M}_n^+(\mathbb{R})$ para $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty]$ (Soize, 2000). Isso dá origem à primeira restrição correspondente à condição de normalização.

Outra informação imprescindível na abordagem corresponde as matrizes de massa, amortecimento e rigidez médias do modelo de matriz reduzida média. Essas matrizes médias devem pertencer ao CPD, sendo assim reais, simétricas e positivo-definidas. As matrizes médias são determinísticas e devem ser calculadas por um método apropriado. Esta informação dá origem à segunda restrição do problema de otimização.

A terceira restrição está relacionada com a existência do momento das matrizes aleatórias inversas de massa, amortecimento e rigidez. Soize (2000) afirma que é necessário se introduzir uma restrição relativa à existência de momentos nas matrizes aleatórias inversas de massa, amortecimento e rigidez $(\mathbf{M}^{-1}, \mathbf{C}^{-1}, \mathbf{K}^{-1})$ para que seja possível obter um modelo probabilístico consistente e uma propriedade de convergência da resposta transiente estocástica quando a dimensão das matrizes se aproximarem do infinito. O mesmo autor ainda afirma que “como as matrizes aleatórias são quase certamente positivo-definidas, suas inversas quase certamente existem, mas esta propriedade não implica na existência de momentos”. Então, uma última restrição, a de número três é introduzida com o objetivo de se garantir a existência do momento das matrizes aleatórias inversas.

2.6.1 Primeira restrição

Esta restrição corresponde à condição de normalização, ou seja, a FDP tem soma igual a um. Tal restrição é dada por:

$$\int_{M_n^+(\mathbb{R})} p_{\mathbf{M}}[\mathbf{M}]d\mathbf{M} = 1, \int_{M_n^+(\mathbb{R})} p_{\mathbf{C}}[\mathbf{C}]d\mathbf{C} = 1, \int_{M_n^+(\mathbb{R})} p_{\mathbf{K}}[\mathbf{K}]d\mathbf{K} = 1 \quad (9)$$

2.6.2 Segunda restrição

Segundo Soize (2000) as matrizes aleatórias \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são matrizes aleatórias de segunda ordem com valores em $M_n^+(\mathbb{R})$, tal que a matriz média de \mathbf{G} deve ser igual a esperança matemática da mesma matriz aleatória, e

$$E[\mathbf{M}] = \bar{\mathbf{M}}, \quad E[\mathbf{C}] = \bar{\mathbf{C}}, \quad E[\mathbf{K}] = \bar{\mathbf{K}} \quad (10)$$

em que $E[\cdot]$ é a esperança matemática.

2.6.3 Terceira restrição

Neste caso, para um sistema amortecido, esta condição proposta e descrita logo a seguir garante a existência dos momentos da função resposta em frequência da matriz aleatória considerada. Logo, pode-se fazer, segundo Soize (2000):

$$E[\|\mathbf{M}^{-1}\|_F^{\nu_{\mathbf{M}}}] < +\infty, \quad E[\|\mathbf{C}^{-1}\|_F^{\nu_{\mathbf{C}}}] < +\infty, \quad E[\|\mathbf{K}^{-1}\|_F^{\nu_{\mathbf{K}}}] < +\infty \quad (11)$$

em que $\nu_{\mathbf{M}} \geq 1$, $\nu_{\mathbf{C}} \geq 1$ e $\nu_{\mathbf{K}} \geq 1$ são inteiros positivos e $\|\cdot\|_F$ é a norma de Frobenius.

Para a obtenção da restrição segundo esta informação disponível são necessários alguns cálculos que serão mostrados a seguir.

Como já se sabe, as matrizes aleatórias \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} de dimensão $n \times n$ são reais, simétricas e positivo-definidas. Como, por simplicidade, elas serão representadas por \mathbf{G} , então esta também é uma matriz $n \times n$ real simétrica e positivo-definida.

Uma matriz real é aquela que tem números reais como elementos. \mathbf{G} , além de real é também simétrica e positiva-definida, o que quer dizer, respectivamente que:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^t \quad (12)$$

$$\mathbf{x}^t \mathbf{G} \mathbf{x} > 0 \quad (13)$$

Se a matriz simétrica \mathbf{G} tem a propriedade da Equação 13 para todos os possíveis vetores de observações \mathbf{x} , com exceção de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ela é dita matriz positivo-definida.

Mais uma propriedade importante envolvendo matrizes refere-se a similaridade entre matrizes. Considerando-se \mathbf{G} e $\mathbf{\Psi}$ como sendo matrizes $n \times n$, diz-se que as matrizes \mathbf{G} e $\mathbf{\Psi}$ são similares se existir uma matriz $n \times n$ invertível $\mathbf{\Phi}$ tal que:

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{\Phi} \quad (14)$$

em que $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}_{n,n}$ e é uma matriz ortogonal, chamada de matriz modal, que contém os autovetores de \mathbf{G} . No caso de $\mathbf{\Psi}$, ela é uma matriz diagonal real que contém os autovalores de \mathbf{G} . Pode-se agora pré-multiplicar a Equação 14 por $\mathbf{\Phi}$ e pós-multiplicar a mesma equação por $\mathbf{\Phi}^{-1}$. Disso vem que:

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{G} \quad (15)$$

sendo $\mathbf{\Phi}$ ortogonal, ela é também invertível, portanto:

$$\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{\Phi}^t \quad (16)$$

Logo, pode-se dizer que:

$$\mathbf{G} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^t \quad (17)$$

com isso, a matriz \mathbf{G} está escrita em função dos seus autovalores e autovetores.

Outra propriedade de \mathbf{G} é que ela é diagonalizável. A matriz \mathbf{G} é diagonalizável se existem duas matrizes $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{\Psi}$ tais que $\mathbf{G} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^{-1}$, em que $\mathbf{\Psi}$ é uma matriz diagonal.

Sabendo-se que \mathbf{G} é uma matriz real e diagonalizável, pode-se determinar \mathbf{G}^k , em que k é um valor inteiro positivo. Então, elevando-se a Equação 17 à potência de ordem k , vem:

$$\mathbf{G}^k = (\mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^t)^k = (\mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^t)_1 \times (\mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^t)_2 \times \dots \times (\mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^t)_k \quad (18)$$

o índice k no lado direito da equação significa que se tem a multiplicação de k termos. Por motivo de simplificação, faz-se:

$$\mathbf{G}^k = (\mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^t)^k = \prod^k \mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi}^t \quad (19)$$

logo, depois de alguns cálculos algébricos, vem que:

$$\mathbf{G}^k = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}^k\mathbf{\Phi}^t \quad (20)$$

Neste ponto, é importante lembrar de duas definições. A primeira é a definição do traço de uma matriz quadrada que é a soma dos elementos da sua diagonal principal.

$$\text{tr}(\mathbf{G}) = G_{11} + G_{22} + \dots + G_{nn} = \sum_{i=j=1}^n G_{ij} \quad (21)$$

A segunda definição importante que deve ser citada é relacionada a norma de Frobenius, também chamada de norma de Hilbert-Schmidt. Esta norma pode ser escrita como:

$$\|\mathbf{G}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |G_{ij}|^2} \quad (22)$$

Sabendo a definição de traço dada pela Equação 21, pode-se fazer a partir da Equação 22 a seguinte complementação:

$$\|\mathbf{G}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |G_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |G_{ij}| |G_{ij}|} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{G}^t \mathbf{G})} \quad (23)$$

Sabe-se também que o traço de um produto de matrizes tem uma importante propriedade que é a sua invariância com relação à permutação cíclica dos fatores. Por exemplo, sejam três matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} , tem-se:

$$\text{tr}(\mathbf{ABC}) = \text{tr}(\mathbf{BCA}) = \text{tr}(\mathbf{CAB}) \quad (24)$$

Sabendo disso, fazendo-se $k = \nu$ e considerando-se a Equação 20 tem-se segundo Adhikari (2010) que:

$$\|\mathbf{G}^{-1}\|_F^\nu = \text{tr}(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}^{-\nu}\mathbf{\Phi}^t) = \text{tr}(\mathbf{\Psi}^{-\nu}) \quad (25)$$

Como se sabe, o traço é a soma dos autovalores da matriz considerada, portanto, considerando que os autovalores sejam representados por λ , vem:

$$\|\mathbf{G}^{-1}\|_F^\nu = \text{tr}(\mathbf{\Psi}^{-\nu}) = \lambda_1^{-\nu} + \lambda_2^{-\nu} + \dots + \lambda_n^{-\nu} \quad (26)$$

onde n é a ordem das matrizes \mathbf{G} e $\mathbf{\Psi}$.

Além disso, algumas propriedades de logaritmos devem ser lembradas. São elas:

$$\ln[a^b] = b \ln[a] \quad (27)$$

$$\ln[ab] = \ln[a] + \ln[b] \quad (28)$$

Segundo Adhikari (2007), todos os autovalores são positivos e por isso a condição apresentada na Equação 11 é satisfeita quando:

$$E[\ln[\|\mathbf{G}^{-1}\|_F^\nu]] < \infty \implies E[\ln[\lambda_1^{-\nu}] + \ln[\lambda_2^{-\nu}] + \dots + \ln[\lambda_n^{-\nu}]] = E[\ln[\lambda_1^{-\nu} \times \lambda_2^{-\nu} \times \dots \times \lambda_n^{-\nu}]] = E[\ln[\lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n]^{-\nu}] < \infty \quad (29)$$

Como o determinante de Ψ é calculado da forma:

$$\det(\Psi) = |\Psi| = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n \quad (30)$$

e como Ψ é uma matriz diagonal real que contém os autovalores de \mathbf{G} , pode-se escrever então que:

$$\det(\Psi) = |\Psi| = |\mathbf{G}| = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n \quad (31)$$

logo, aplicando-se a Equação 31 na Equação 29, vem:

$$E[\ln[\|\mathbf{G}^{-1}\|_F^\nu]] = E[\ln[(\lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n)^{-\nu}]] = E[\ln[|\mathbf{G}|^{-\nu}]] < \infty \quad (32)$$

É importante agora saber que, de uma maneira geral, para o cálculo do primeiro momento, ou seja, da média, faz-se:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(X) p_{\mathbf{X}}(X) dx \quad (33)$$

em que: \mathbf{X} é a matriz aleatória contínua, X corresponde ao valor que pode ser assumido pela matriz aleatória, $g(X)$ é uma função real de matriz real contínua e $p_{\mathbf{X}}(X)$ é a FDP da matriz aleatória em função do valor que pode ser assumido por ela.

Com isso, considerando-se a Equação 33 e o resultado da Equação 32 pode-se fazer o seguinte:

$$g(x) = \ln[|\mathbf{G}|^{-\nu}] \quad (34)$$

$$p_{\mathbf{X}}(x) = p_{\mathbf{G}}(G) \quad (35)$$

Com isso, pode-se substituir as Equações 34 e 35 na Equação 33

$$E[\ln [|\mathbf{G}|^{-\nu}]] = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln [|\mathbf{G}|^{-\nu}] p_{\mathbf{G}}(G) dG \quad (36)$$

Agora para $|\mathbf{G}| > 0$, resulta:

$$E[\ln [|\mathbf{G}|^{-\nu}]] = \int_{\mathbf{G}>0} \ln [|\mathbf{G}|^{-\nu}] p_{\mathbf{G}}(G) dG \quad (37)$$

Mas no caso desta dissertação, como o valor que pode ser assumido pela matriz aleatória \mathbf{X} é também uma matriz aleatória, então, a Equação 37 será representada da seguinte maneira:

$$E[\ln [|\mathbf{G}|^{-\nu}]] = \int_{\mathbf{G}>0} \ln [|\mathbf{G}|^{-\nu}] p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) d\mathbf{G} \quad (38)$$

Finalmente, a Equação 38 corresponde à terceira restrição do problema de otimização considerado e que será completamente formulado na próxima seção.

2.7 O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Nesta seção é mostrado o problema de otimização completo a ser resolvido na obtenção da correta FDP para as variáveis aleatórias \mathbf{M} , \mathbf{C} e $\mathbf{K}_{\mathbf{G}}$ consideradas na quantificação de incertezas não paramétricas em modelos estruturais dinâmicos. Tal problema pode ser escrito da seguinte maneira:

Maximizar:

$$S(p_{\mathbf{G}}) = - \int_{\mathbf{G}>0} p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) \ln[p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})] d\mathbf{G} \quad (39)$$

Sujeito às restrições:

$$\int_{\mathbf{G}>0} p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) d\mathbf{G} = 1 \quad (40)$$

$$E(\mathbf{G}) = \int_{\mathbf{G}>0} \mathbf{G} p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) d\mathbf{G} = \bar{\mathbf{G}} \quad (41)$$

$$E[\ln [|\mathbf{G}|^{-\nu}]] = \int_{\mathbf{G}>0} \ln [|\mathbf{G}|^{-\nu}] p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) d\mathbf{G} \quad (42)$$

onde $S(p_{\mathbf{G}})$ é a entropia de Shannon, que pode ser vista no Apêndice A. O termo $\ln[p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})]$ é o logaritmo natural da FDP de \mathbf{G} , $E[\mathbf{G}]$ é a esperança matemática de \mathbf{G} e $|\mathbf{G}|$ é o determinante de \mathbf{G} .

2.8 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

O problema de otimização é resolvido construindo-se o Lagrangeano, que segundo Adhikari (2007) é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}[p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})] = & \\ - \int_{\mathbf{G}>0} p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) \ln[p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})] d\mathbf{G} - (\mu - 1) & \left(\int_{\mathbf{G}>0} p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) d\mathbf{G} - 1 \right) - \int_{\mathbf{G}>0} \ln [|\mathbf{G}|^{-\nu}] p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) d\mathbf{G} - \\ tr \left(\Lambda \left(\int_{\mathbf{G}>0} \mathbf{G} p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) d\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}} \right) \right) & \end{aligned} \quad (43)$$

com $\mathcal{L}[\cdot]$ correspondendo ao Lagrangeano de (\cdot) , μ é um multiplicador escalar de Lagrange. Foi usado $(\mu - 1)$ na segunda restrição apenas por razões de simplificação nos próximos passos. Λ também corresponde a um multiplicador de Lagrange, mas neste caso se trata de um multiplicador matricial, ν é a ordem do momento inverso na terceira restrição e $tr(\cdot)$ representa o traço de (\cdot) .

A condição ótima correspondente ao ponto máximo é dada pelo cálculo variacional definido por:

$$\frac{\partial \mathbb{L}[p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})]}{\partial p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})} = 0 \quad (44)$$

Para resolver a integral parcial representada pela Equação 44, e já se levando em conta a definição de integrais indefinidas.

$$\int f(x) dx = F(x) \text{ se e somente se } \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (45)$$

em que $f(x)$ é uma função cuja derivada é conhecida. Logo, faz-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{L}[p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})]}{\partial p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})} &= - \left(1 \times \ln[p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})] + p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) \times \frac{1}{p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})} \right) - (\mu - 1)[1 - 0] - (\ln[|\mathbf{G}|]^{-\nu} \times 1) - \\ \text{tr}(\boldsymbol{\Lambda}[\mathbf{G} \times 1 - 0]) &= -(\ln[p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})] + 1) - (\mu - 1) - \ln[|\mathbf{G}|^{-\nu}] - \text{tr}(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G}) = -\ln[p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})] - \\ 1 - \mu + 1 - (-\nu)\ln[|\mathbf{G}|] - \text{tr}(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G}) &= -\ln[p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})] - \mu + \nu\ln[|\mathbf{G}|] - \text{tr}(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G}) = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

então,

$$\ln[p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})] = -\mu + \nu\ln[|\mathbf{G}|] - \text{tr}(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G}) = -\mu + \ln[|\mathbf{G}|^{-\nu}] - \text{tr}(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G}) \quad (47)$$

Considerando as seguintes propriedades de logaritmos e do traço:

$$\ln[a] = x \Rightarrow a = \exp\{x\} \quad (48)$$

$$\exp\{x + y\} = \exp\{x\} \exp\{y\} \quad (49)$$

$$\exp\{\ln[a]\} = a \quad (50)$$

$$\text{tr}(cA) = c \text{tr}(A) \quad (51)$$

em que $\exp\{\cdot\}$ corresponde ao exponencial $\{\cdot\}$ e c é um escalar.

Isolando $p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$, na Equação 47, segue que:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) &= \exp\{-\mu + \ln[|\mathbf{G}|^{-\nu}] - \text{tr}(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G})\} = \exp\{-\mu\} \exp\{\ln[|\mathbf{G}|^{-\nu}]\} \exp\{\text{tr}(-\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G})\} \Rightarrow \\ p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) &= \exp\{-\mu\} |\mathbf{G}|^{-\nu} \exp\{\text{tr}(-\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G})\} \end{aligned} \quad (52)$$

A Equação 52 corresponde à FDP da matriz aleatória \mathbf{G} . Para utilizá-la os multiplicadores de Lagrange devem ser encontrados o que será feito na próxima subseção.

2.8.1 Multiplicador escalar de Lagrange

Aqui o multiplicador escalar de Lagrange μ será obtido. Logo, substituindo-se a Equação 52 na Equação 40, vem:

$$\int_{\mathbf{G}>0} \exp\{-\mu\} |\mathbf{G}|^{-\nu} \exp\{\text{tr}(-\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G})\} d\mathbf{G} = 1 \quad (53)$$

Como $\exp\{-\mu\}$ é uma constante, a Equação 53 resulta:

$$\exp\{-\mu\} = \left\{ \int_{\mathbf{G}>0} |\mathbf{G}|^{\nu} \exp\{\text{tr}(-\Lambda\mathbf{G})\} d\mathbf{G} \right\}^{-1} \quad (54)$$

Neste ponto deve ser aplicada a transformada de Laplace do lado direito do resultado da equação acima.

A transformada de Laplace é um método simples que transforma um problema com os valores iniciais em uma equação algébrica a fim de se obter uma solução inicial para este problema de uma forma indireta, sem o cálculo de integrais e derivadas (Sodré, 2003).

Pode-se dizer então que se $f(t)$ é uma função real ou complexa definida para todo $t \geq 0$ e o parâmetro z é um número complexo na forma $s = \sigma + iv$ tal que para cada $\sigma > 0$ existe uma convergência da integral imprópria a seguir:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (55)$$

logo, a função $\mathcal{L}\{f(t)\}$ é a transformada de Laplace da função $f(t)$.

De acordo com Adhikari (2007), para matrizes tem-se:

$$\mathcal{L}\{F(\mathbf{X})\} = \int_0^{\infty} F(\mathbf{X}) \exp\{\text{tr}(-\mathbf{Z}\mathbf{X})\} d\mathbf{X} \quad (56)$$

em que $\mathcal{L}\{f(\mathbf{X})\}$ é a transformada de Laplace da função $f(\mathbf{X})$ que é função de uma matriz \mathbf{X} $n \times n$ simétrica positiva definida. A integral é assumida como sendo absolutamente convergente do lado direito do plano $\Re(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_r > 0$.

Como em Adhikari (2007), deve-se considerar as quatro equações seguintes:

$$f(\mathbf{X}) = |\mathbf{X}|^{\nu} \quad (57)$$

$$\nu = a - (n + 1)/2 \quad (58)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Y} \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \quad (59)$$

$$d\mathbf{X} = |\mathbf{Z}|^{-\frac{1}{2}(n+1)} d\mathbf{Y} \quad (60)$$

Então, substituindo as Equações 57 e 58 na Equação 56, vem:

$$\mathcal{L}\{|\mathbf{X}|^{a-(n+1)/2}\} = \int_{\mathbf{X}>0} |\mathbf{X}|^{a-(n+1)/2} \exp\{\text{tr}(-\mathbf{Z}\mathbf{X})\} d\mathbf{X}, \quad \Re(a) > \frac{1}{2}(n - 1) \quad (61)$$

Substituindo a Equação 59 e 60 na Equação 61, vem:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{|\mathbf{X}|^{a-(n+1)/2}\} &= \int_{\mathbf{Y}>0} \left| \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Y} \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \right|^{a-(n+1)/2} \exp \left\{ \text{tr} \left(-\mathbf{Z} \left(\mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Y} \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \right) \right) \right\} |\mathbf{Z}|^{-\frac{1}{2}(n+1)} d\mathbf{Y} = \\ &= \int_{\mathbf{Y}>0} \left| \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Y} \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \right|^{a-(n+1)/2} \exp \left\{ \text{tr} \left(-\mathbf{Z} \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Y} \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \right) \right\} |\mathbf{Z}|^{-\frac{1}{2}(n+1)} d\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (62)$$

Como:

$$\text{tr} \left(-\mathbf{Z} \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Y} \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \right) = \text{tr} \left(-\mathbf{Z}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y} \mathbf{Z}^{\frac{1}{2}} \right) = \text{tr} \left(-\mathbf{Y} \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Z}^{\frac{1}{2}} \right) = \text{tr}(-\mathbf{Y} \mathbf{I}) = \text{tr}(-\mathbf{Y}) \quad (63)$$

pode-se então substituir a Equação 63 na Equação 62 como segue:

$$\mathcal{L}\{|\mathbf{X}|^{a-(n+1)/2}\} = \int_{\mathbf{Y}>0} \left| \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Y} \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \right|^{a-(n+1)/2} \exp\{\text{tr}(-\mathbf{Y})\} |\mathbf{Z}|^{-\frac{1}{2}(n+1)} d\mathbf{Y} \quad (64)$$

Pode ser aplicada agora a seguinte propriedade dos determinantes: sejam duas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} , vale dizer que:

$$\det(\mathbf{AB}) = |\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \quad (65)$$

Então, da Equação 64 e já considerando a Equação 65, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{|\mathbf{X}|^{a-(n+1)/2}\} &= \\ &= \int_{\mathbf{Y}>0} |\mathbf{Z}|^{-\frac{1}{2}(a-(n+1)/2)} |\mathbf{Y}|^{a-(n+1)/2} |\mathbf{Z}|^{-\frac{1}{2}(a-(n+1)/2)} \exp\{\text{tr}(-\mathbf{Y})\} |\mathbf{Z}|^{-\frac{1}{2}(n+1)} d\mathbf{Y} = \\ &= \int_{\mathbf{Y}>0} \exp\{\text{tr}(-\mathbf{Y})\} |\mathbf{Y}|^{a-(n+1)/2} |\mathbf{Z}|^{-(a-(n+1)/2)} |\mathbf{Z}|^{-((n+1)/2)} d\mathbf{Y} = \\ &= \int_{\mathbf{Y}>0} \exp\{\text{tr}(-\mathbf{Y})\} |\mathbf{Y}|^{a-(n+1)/2} |\mathbf{Z}|^{-(a-(n+1)/2)-((n+1)/2)} d\mathbf{Y} = \\ &= \int_{\mathbf{Y}>0} \exp\{\text{tr}(-\mathbf{Y})\} |\mathbf{Y}|^{a-(n+1)/2} |\mathbf{Z}|^{-a+(n+1)/2-(n+1)/2} d\mathbf{Y} = \\ &= \int_{\mathbf{Y}>0} \exp\{\text{tr}(-\mathbf{Y})\} |\mathbf{Y}|^{a-(n+1)/2} |\mathbf{Z}|^{-a} d\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (66)$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{|\mathbf{X}|^{a-(n+1)/2}\} = \int_{\mathbf{Y}>0} \exp\{\text{tr}(-\mathbf{Y})\} |\mathbf{Z}|^{-a} |\mathbf{Y}|^{a-(n+1)/2} d\mathbf{Y} \quad (67)$$

como $|\mathbf{Z}|^{-a}$ é uma constante, resulta que:

$$\mathcal{L}\{|\mathbf{X}|^{a-(n+1)/2}\} = |\mathbf{Z}|^{-a} \int_{\mathbf{Y}>0} \exp\{\text{tr}(-\mathbf{Y})\} |\mathbf{Y}|^{a-(n+1)/2} d\mathbf{Y} \quad (68)$$

Considerando a função gama multivariável, cuja definição dada em Adhikari (2007) é dada por:

$$\Gamma_n(a) = \int_{\mathbf{X}>0} |\mathbf{X}|^{a-(n+1)/2} \exp\{\text{tr}\{-\mathbf{X}\}\} d\mathbf{X} \quad (69)$$

Agora considerando-se $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ na Equação 69 e comparando o resultado com a integral do lado direito da Equação 68, vem:

$$\mathcal{L}\{|\mathbf{X}|^{a-(n+1)/2}\} = |\mathbf{Z}|^{-a} \Gamma_n(a) \quad (70)$$

A Equação 70 é a resolução da integral do resultado do lado direito da Equação 54. Então, substituindo a Equação 70 na Equação 54, resulta:

$$\exp\{-\mu\} = \{|\mathbf{Z}|^{-a} \Gamma_n(a)\}^{-1} = |\mathbf{Z}|^a \{\Gamma_n(a)\}^{-1} \quad (71)$$

Considerando $\mathbf{Z} = \mathbf{\Lambda}$, a Equação 71 se torna:

$$\exp\{-\mu\} = |\mathbf{\Lambda}|^a \{\Gamma_n(a)\}^{-1} \quad (72)$$

O resultado da Equação 72 será posteriormente utilizado, juntamente com o multiplicador matricial de Lagrange que será encontrado na próxima subseção. Ambos serão substituídos na Equação 52.

2.8.2 Multiplicador matricial de Lagrange

Agora é necessário encontrar o multiplicador matricial de Lagrange $\mathbf{\Lambda}$, que pode ser calculado com a utilização da função geradora de momentos (FGM) e da função geradora de cumulantes (FGC). De acordo com Cordeiro (1999), para uma variável aleatória \mathbf{X} tais funções são definidas respectivamente por:

$$M(\text{arg}) = E[e^{t\mathbf{X}}] \quad (73)$$

$$K(\text{arg}) = \log M(t) \quad (74)$$

Segundo o mesmo autor, a função característica, representada por $\varphi(t)$, é expressa

diretamente pela FGM $M(t)$ como:

$$\varphi(\arg) = M(it) \quad (75)$$

sendo \arg o argumento da função característica e $i = \sqrt{-1}$.

Então, quando não ocorre a convergência da FGM para \arg real em um intervalo que contenha a origem, “[...] trabalha-se geralmente com a função característica que existe sempre para t real e determina univocamente a distribuição” (Cordeiro, 1999).

A função característica é uma maneira de representar a probabilidade de uma variável aleatória, assim como nos casos onde se tem uma variável aleatória discreta em que se representa a sua probabilidade pela função de probabilidade da variável, ou em casos onde a variável aleatória é contínua, em que a probabilidade pode ser representada pela sua função densidade de probabilidade (Rêgo, 2010).

Uma das vantagens de se usar a função característica é que pode-se calcular os momentos de uma variável aleatória por meio da diferenciação da função característica em vez de trabalhar com definições de momento que envolva integrais, o que torna o método mais simples. Além disso, essa função sempre existe devido ao fato de ser robusta (Rêgo, 2010).

Contudo, as funções geradoras de momento e cumulantes para uma matriz aleatória \mathbf{X} podem, então, serem reescritas como:

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = M(it) = E[e^{it\mathbf{X}}] \quad (76)$$

$$K(t) = \log M(it) = \log \varphi_{\mathbf{X}}(t) \quad (77)$$

em que:

$\varphi_{\mathbf{X}}(t)$ é a função geradora de momentos (função característica) da matriz aleatória \mathbf{X} .

$K(it)$ é a função geradora de cumulantes (segunda função característica) da matriz aleatória \mathbf{X} .

Para uma matriz aleatória \mathbf{X} contínua, segundo Rêgo (2010), a função característica é dada por:

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = E[e^{it\mathbf{X}}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} P_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (78)$$

onde $P_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ é a função densidade de probabilidade de \mathbf{X} .

De acordo com a Adhikari (2007), a função característica da matriz aleatória pode ser obtida como:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = E[\exp \{tr(i\boldsymbol{\Omega}\mathbf{G})\} p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})] = \int_{\mathbf{G}>0} \exp \{tr(i\boldsymbol{\Omega}\mathbf{G})\} p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) d\mathbf{G} \quad (79)$$

em que $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}_{n,n}$ é uma matriz simétrica.

Substituindo a Equação 52 na Equação 79, vem:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = \int_{\mathbf{G}>0} \exp \{tr(i\boldsymbol{\Omega}\mathbf{G})\} \exp\{-\mu\} |\mathbf{G}|^{\nu} \exp\{tr(-\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G})\} d\mathbf{G} \quad (80)$$

Agora, substituindo a Equação 72 na Equação 80, vem:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = \int_{\mathbf{G}>0} \exp \{tr(i\boldsymbol{\Omega}\mathbf{G})\} |\boldsymbol{\Lambda}|^a [\Gamma_n(a)]^{-1} |\mathbf{G}|^{\nu} \exp\{tr(-\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G})\} d\mathbf{G} \quad (81)$$

Como $|\boldsymbol{\Lambda}|^a [\Gamma_n(a)]^{-1}$ é constante, resulta que:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = |\boldsymbol{\Lambda}|^a [\Gamma_n(a)]^{-1} \int_{\mathbf{G}>0} \exp \{tr(i\boldsymbol{\Omega}\mathbf{G})\} |\mathbf{G}|^{\nu} \exp\{tr(-\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G})\} d\mathbf{G} \quad (82)$$

Rearranjando os termos, fica:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = |\boldsymbol{\Lambda}|^a [\Gamma_n(a)]^{-1} \int_{\mathbf{G}>0} \exp \{tr(i\boldsymbol{\Omega}\mathbf{G})\} \exp \{tr(-\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G})\} |\mathbf{G}|^{\nu} d\mathbf{G} \quad (83)$$

Os termos na integral podem ser simplificados, logo, colocando \mathbf{G} em evidência, vem,

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) &= |\boldsymbol{\Lambda}|^a [\Gamma_n(a)]^{-1} \int_{\mathbf{G}>0} \exp \{tr((i\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Lambda})\mathbf{G})\} |\mathbf{G}|^{\nu} d\mathbf{G} = \\ &|\boldsymbol{\Lambda}|^a [\Gamma_n(a)]^{-1} \int_{\mathbf{G}>0} \exp \{tr((- \boldsymbol{\Lambda} + i\boldsymbol{\Omega})\mathbf{G})\} |\mathbf{G}|^{\nu} d\mathbf{G} = |\boldsymbol{\Lambda}|^a [\Gamma_n(a)]^{-1} \int_{\mathbf{G}>0} \exp \{tr(-(\boldsymbol{\Lambda} - \\ &i\boldsymbol{\Omega})\mathbf{G})\} |\mathbf{G}|^{\nu} d\mathbf{G} \end{aligned} \quad (84)$$

Tem-se então que:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = |\boldsymbol{\Lambda}|^a [\Gamma_n(a)]^{-1} \int_{\mathbf{G}>0} \exp\{tr(-(\boldsymbol{\Lambda} - i\boldsymbol{\Omega})\mathbf{G})\} |\mathbf{G}|^{\nu} d\mathbf{G} \quad (85)$$

A integral do lado direito da Equação 85 também pode ser resolvida pela aplicação da transformada de Laplace, como ocorreu com o resultado da Equação 54. Então, levando-se em conta a Equação 56, obtém-se a mesma solução da Equação 54 para a Equação 85, que corresponde à Equação 70. Mas neste caso, ainda se deve fazer:

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{\Lambda} - i\mathbf{\Omega}) \quad (86)$$

Logo, substituindo na Equação 70, vem:

$$\mathcal{L}\{|\mathbf{X}|^{a-(n+1)/2}\} = |\mathbf{\Lambda} - i\mathbf{\Omega}|^{-a} \Gamma_n(a) \quad (87)$$

Esta é a solução final da integral do lado direito da Equação 85. Então, substituindo a Equação 87 na Equação 85, resulta:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\mathbf{\Omega}) = |\mathbf{\Lambda}|^a [\Gamma_n(a)]^{-1} |\mathbf{\Lambda} - i\mathbf{\Omega}|^{-a} \Gamma_n(a) \quad (88)$$

Simplificando vem:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\mathbf{\Omega}) = |\mathbf{\Lambda}|^a |\mathbf{\Lambda} - i\mathbf{\Omega}|^{-a} \quad (89)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas, fica:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\mathbf{\Omega}) = |\mathbf{\Lambda}|^a |\mathbf{\Lambda} - i\mathbf{\Omega}|^{-a} = |\mathbf{\Lambda}|^a |(\mathbf{\Lambda} - i\mathbf{\Omega})^{-1}|^a = |\mathbf{\Lambda}(\mathbf{\Lambda} - i\mathbf{\Omega})^{-1}|^a = |\mathbf{\Lambda}[\mathbf{\Lambda}(\mathbf{I} - i\mathbf{\Omega}\mathbf{\Lambda}^{-1})^{-1}]|^a \quad (90)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Logo,

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\mathbf{\Omega}) = |\mathbf{I} - i\mathbf{\Omega}\mathbf{\Lambda}^{-1}|^{-a} \quad (91)$$

O resultado da Equação 91 é a função característica da variável aleatória \mathbf{G} e será utilizada para o cálculo dos cumulantes em termos dos momentos da mesma variável aleatória, ou seja, será possível por meio desta equação o cálculo do primeiro momento (média ou valor esperado) de \mathbf{G} , ou seja, $\bar{\mathbf{G}}$, e a partir disso encontrar o multiplicador matricial de Lagrange.

Contudo, segundo Adhikari (2007) vem que:

$$\ln \varphi_{\mathbf{G}}(\mathbf{\Omega}) = \ln |\mathbf{I} - i\mathbf{\Omega}\mathbf{\Lambda}^{-1}|^{-a} = a(i\mathbf{\Omega}\mathbf{\Lambda}^{-1} + i\mathbf{\Omega}\mathbf{\Lambda}^{-1} + \dots) \quad (92)$$

Ainda segundo Adhikari (2007), a média de \mathbf{G} pode se obtida pela seguinte equação:

$$E(\mathbf{G}) = \left. \frac{\partial \ln \varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega})}{\partial i \Omega} \right|_{\boldsymbol{\Omega}=\mathbf{0}} \quad (93)$$

Disso resulta que:

$$E(\mathbf{G}) = a\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \quad (94)$$

Agora, levando-se em conta a Equação 41, vem:

$$E(\mathbf{G}) = \bar{\mathbf{G}} = a\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \quad (95)$$

Então:

$$\boldsymbol{\Lambda} = a\bar{\mathbf{G}}^{-1} \quad (96)$$

Com isso, o multiplicador matricial de Lagrange é encontrado e dado pela Equação 96.

2.8.3 Obtenção da FDP

A obtenção da FDP final se dá com a substituição dos multiplicadores de Lagrange na Equação 52. Com isso, substituindo as Equações 72 e 96 na Equação 52, vem:

$$p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) = \exp\{-\lambda\} |\mathbf{G}|^{\nu} \exp\{\text{tr}(-\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G})\} = |\boldsymbol{\Lambda}|^a \{\Gamma_n(a)\}^{-1} |\mathbf{G}|^{\nu} \exp\{\text{tr}(-a\bar{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{G})\} \Rightarrow p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) = |a\bar{\mathbf{G}}^{-1}|^a \{\Gamma_n(a)\}^{-1} |\mathbf{G}|^{\nu} \exp\{\text{tr}(-a\bar{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{G})\} \quad (97)$$

Pode-se agora isolar a constante a na Equação 97. Para isso se faz necessária a utilização da seguinte propriedade dos determinantes:

$$\det(k\mathbf{A}) = k^n \det(\mathbf{A}) \quad (98)$$

em que k é um número real, \mathbf{A} é uma matriz quadrada e n é a ordem da matriz considerada.

Então, do resultado da Equação 97, vem:

$$p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) = a^{an} |\bar{\mathbf{G}}^{-1}|^a [\Gamma_n(a)]^{-1} |\mathbf{G}|^{\nu} \exp\{\text{tr}(-a\bar{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{G})\} \quad (99)$$

Considerando agora uma outra propriedade dos determinantes dada por:

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A}) = [\det(\mathbf{A})]^{-1} \quad (100)$$

logo,

$$p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) = a^{an} |\bar{\mathbf{G}}|^{-a} [\Gamma_n(a)]^{-1} |\mathbf{G}|^v \exp\{tr(-a\bar{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{G})\} \quad (101)$$

A Equação 101 é a FDP final com os multiplicadores de Lagrange adequadamente substituídos. A principal conclusão que se tem a partir deste resultado é que o FDP de uma matriz aleatória só depende de sua média e da ordem da matriz (ou graus de liberdade do sistema).

Por outro lado, esta equação ainda pode passar por alguns cálculos e simplificações algébricas, o que será feito na próxima seção.

2.8.4 Cálculos algébricos e obtenção do resultado final para a FDP

Nesta seção serão realizados alguns cálculos algébricos na FDP final obtida na seção anterior. Esses cálculos trarão resultados importantes para a modelagem estocástica.

Então, da Equação 58 pode-se fazer:

$$a = v + (n + 1)/2 = \frac{2v+(n+1)}{2} = \frac{2v+n+1}{2} \quad (102)$$

Substituindo a Equação 102 na Equação 101, fica:

$$p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) = \left(\left(\frac{2v+n+1}{2} \right)^{n \left(\frac{2v+n+1}{2} \right)} \right) \left(|\bar{\mathbf{G}}|^{-\left(\frac{2v+n+1}{2} \right)} \right) \left(\left\{ \Gamma_n \left(\frac{2v+n+1}{2} \right) \right\}^{-1} \right) (|\mathbf{G}|^v) \left(\exp \left\{ tr \left(- \left(\frac{2v+n+1}{2} \right) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right) \quad (103)$$

Simplificando a equação encontrada tem-se:

$$p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) = \left[\left(\frac{2}{2v+n+1} \right)^{-n \left(\frac{2v+n+1}{2} \right)} \right] \left[|\bar{\mathbf{G}}|^{-\left(\frac{2v+n+1}{2} \right)} \right] \left[\left\{ \Gamma_n \left(\frac{2v+n+1}{2} \right) \right\}^{-1} \right] [|\mathbf{G}|^v] \left[\exp \left\{ tr \left(- \left(\frac{2v+n+1}{2} \right) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right] \Rightarrow$$

$$\left[\left(\frac{2}{2\nu+n+1} \right)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[|\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[\left\{ \Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right\}^{-1} \right] [|\mathbf{G}|^\nu] \left[\exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2}(2\nu+n+1) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right] \quad (104)$$

Agora substituindo a Equação 58 na Equação 104, vem:

$$p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) = \left[\left(\frac{2}{2\nu+n+1} \right)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[|\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[\left\{ \Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right\}^{-1} \right] [|\mathbf{G}|^{a-(n+1)/2}] \left[\exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2}(2\nu+n+1) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right] \quad (105)$$

Substituindo novamente a Equação 102 mas agora na Equação 105 e fazendo ainda mais algumas manipulações algébricas, tem-se:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) &= \left[\left(\frac{2}{2\nu+n+1} \right)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[|\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[\left\{ \Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right\}^{-1} \right] [|\mathbf{G}|^{\frac{2\nu+n+1}{2}-(n+1)/2}] \left[\exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2}(2\nu+n+1) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right] \\ &= \left[\left(\frac{2}{2\nu+n+1} \right)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[|\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[\left\{ \Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right\}^{-1} \right] [|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}[(2\nu+n+1)-(n+1)]}] \times \\ &\quad \times \left[\exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(2\nu+n+1)^{-1}} \right) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right] = \\ &= \left[\left(\frac{2}{2\nu+n+1} \right)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[|\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[\left\{ \Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right\}^{-1} \right] [|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}[(2\nu+n+1)-(n+1)]}] \times \\ &\quad \left[\exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}^{-1}}{(2\nu+n+1)^{-1}} \right) \mathbf{G} \right) \right\} \right] = \\ &= \left[\left(\frac{2}{2\nu+n+1} \right)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[|\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[\left\{ \Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right\}^{-1} \right] [|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}[(2\nu+n+1)-(n+1)]}] \times \\ &\quad \left[\exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}}{(2\nu+n+1)} \right)^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right] \quad (106) \end{aligned}$$

Como todos os termos estão sendo multiplicados, pode-se então fazer o seguinte:

$$p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) = \left[\left(\frac{2}{2\nu+n+1} \right)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[|\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[\left\{ \Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right\}^{-1} \right] [|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}[(2\nu+n+1)-(n+1)]}] \times \left[\exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}}{(2\nu+n+1)} \right)^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right] =$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{(2)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)}}{(2\nu+n+1)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)}} \right] \left[|\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[\left\{ \Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right\}^{-1} \right] \left[|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}[(2\nu+n+1)-(n+1)]} \right] \times \\
& \quad \left[\exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}}{(2\nu+n+1)} \right)^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right] = \\
& \left[(2)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[\frac{|\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)}}{(2\nu+n+1)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)}} \right] \left[\left\{ \Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right\}^{-1} \right] \left[|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}[(2\nu+n+1)-(n+1)]} \right] \times \\
& \quad \left[\exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}}{(2\nu+n+1)} \right)^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right] = \\
& \left[(2)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[\left(\frac{|\bar{\mathbf{G}}|}{(2\nu+n+1)^n} \right)^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[\left\{ \Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right\}^{-1} \right] \left[|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}[(2\nu+n+1)-(n+1)]} \right] \times \\
& \left[\exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}}{(2\nu+n+1)} \right)^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right] \tag{107}
\end{aligned}$$

Levando-se em conta a propriedade dos determinantes descrita na Equação 98 e sabendo que a soma $(2\nu + n + 1)$ é uma constante, fica:

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) &= \left[(2)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[\left| \frac{\bar{\mathbf{G}}}{(2\nu+n+1)} \right|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \right] \left[\left\{ \Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right\}^{-1} \right] \left[|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}[(2\nu+n+1)-(n+1)]} \right] \times \\
& \left[\exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}}{(2\nu+n+1)} \right)^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right] \tag{108}
\end{aligned}$$

Fazendo

$$(2\nu + n + 1) = p \tag{109}$$

em que p é um escalar positivo, pode-se então substituí-lo na Equação 108:

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) &= \left[(2)^{-\frac{n}{2}p} \right] \left[\left| \frac{\bar{\mathbf{G}}}{p} \right|^{-\frac{1}{2}p} \right] \left[\left[\Gamma_n \left(\frac{p}{2} \right) \right]^{-1} \right] \left[|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}[p-(n+1)]} \right] \times \left[\exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}}{p} \right)^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right] = \\
& \left[(2)^{-\frac{1}{2}np} \right] \left[\left| \frac{\bar{\mathbf{G}}}{p} \right|^{-\frac{1}{2}p} \right] \left[\left[\Gamma_n \left(\frac{1}{2}p \right) \right]^{-1} \right] \left[|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}(p-n-1)} \right] \times \left[\exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}}{p} \right)^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right] \tag{110}
\end{aligned}$$

Fazendo agora

$$\frac{\bar{\mathbf{G}}}{p} = \mathbf{\Sigma} \tag{111}$$

em que $\mathbf{\Sigma}$ é uma matriz. Substituindo então a Equação 111 na Equação 110, vem:

$$p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) = \left[(2)^{-\frac{1}{2}np} \right] \left[|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}p} \right] \left[\left(\Gamma_n \left(\frac{1}{2}p \right) \right)^{-1} \right] \left[|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}(p-n-1)} \right] \left[\exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{\Sigma})^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \right] \quad (112)$$

logo,

$$p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) = \left\{ (2)^{-\frac{1}{2}np} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}p} \left\{ \Gamma_n \left(\frac{1}{2}p \right) \right\}^{-1} \right\} |\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}(p-n-1)} \exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{\Sigma})^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \quad (113)$$

disso, resulta:

$$p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) = \left\{ (2)^{\frac{1}{2}np} \Gamma_n \left(\frac{1}{2}p \right) |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}p} \right\}^{-1} |\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}(p-n-1)} \exp \text{tr} \left\{ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{G} \right\} \quad (114)$$

Pode-se notar que a Equação 114 obtida por meio do processo de otimização da máxima entropia sujeita às condições mostradas na subseção (2.7) deste capítulo é a distribuição Wishart.

Portanto, pode-se fazer a seguinte afirmação: considerando que o momento inverso de ordem ν existe e apenas a média de \mathbf{G} , ou seja, $\bar{\mathbf{G}}$ é disponível, resulta que a FDP de máxima entropia/incerteza de \mathbf{G} tem a mesma distribuição da matriz Wishart com os parâmetros representados na Equação 109 e Equação 111.

2.8.5 FDP do sistema inverso de matrizes

Estudos sobre a quantificação de incertezas considerando-se, ao invés de \mathbf{G} , \mathbf{G}^{-1} também foi realizado e Adhikari (2007) obteve a seguinte FDP para as matrizes do sistema:

$$p_{\bar{\mathbf{G}}^{-1}}(\bar{\mathbf{G}}^{-1}) = \frac{r^m |\bar{\mathbf{G}}|^{-r}}{\Gamma_n(r)} |\mathbf{G}^{-1}|^{-(\nu+n+1)} \exp \{ \text{tr}(-r \bar{\mathbf{G}}^{-1} (\mathbf{G}^{-1})^{-1}) \} \quad (115)$$

Esta equação corresponde à distribuição Wishart inversa, mostrada em Adhikari (2007). O autor conclui que, se a ordem do momento inverso do sistema de matrizes existe e apenas a média de \mathbf{G} é disponível, a FDP de \mathbf{G}^{-1} segue a distribuição Wishart inversa com parâmetros:

$$m = 2(\nu + n + 1) \quad (116)$$

$$\Theta = (2\nu + n + 1) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \quad (117)$$

2.8.6 Propriedades estatísticas do sistema de matrizes

Segundo consta em Adhikari (2007), as propriedades estatísticas referentes à média (primeiro momento), ao desvio padrão (segundo momento) e ao parâmetro de dispersão das matrizes aleatórias do sistema dinâmico são dadas respectivamente por:

$$E[\mathbf{G}] = p\boldsymbol{\Sigma} = \bar{\mathbf{G}} \quad (118)$$

$$E[\mathbf{G}^2] = p\boldsymbol{\Sigma}^2 + p\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{\Sigma} + p^2\boldsymbol{\Sigma}^2 = \frac{1}{2\nu+n+1} [(2\nu+n+2)\bar{\mathbf{G}}^2 + \bar{\mathbf{G}}\text{tr}(\bar{\mathbf{G}})] \quad (119)$$

$$\delta_{\mathbf{G}} = \left\{ \frac{E\{\|\mathbf{G}-\bar{\mathbf{G}}\|_F^2\}}{\|\bar{\mathbf{G}}\|_F^2} \right\}^{1/2} \quad (120)$$

A Equação 120 foi introduzida por Soize (2000), que depois de alguns cálculos fica:

$$\delta_{\mathbf{G}} = \left\{ \frac{1}{n+1+2\nu_{\mathbf{G}}} \left(1 + \frac{(\text{tr}\bar{\mathbf{G}})^2}{\text{tr}(\bar{\mathbf{G}}^2)} \right) \right\}^{1/2} \quad (121)$$

onde $\delta_{\mathbf{G}}$ é o parâmetro de dispersão ou desvio padrão normalizado e:

$$\theta = 2\nu_{\mathbf{G}} \quad (122)$$

Para as matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez separadamente vem:

$$\delta_{\mathbf{M}} = \left\{ \frac{E\{\|\mathbf{M}-\bar{\mathbf{M}}\|_F^2\}}{\|\bar{\mathbf{M}}\|_F^2} \right\}^{1/2}, \quad \delta_{\mathbf{C}} = \left\{ \frac{E\{\|\mathbf{C}-\bar{\mathbf{C}}\|_F^2\}}{\|\bar{\mathbf{C}}\|_F^2} \right\}^{1/2}, \quad \delta_{\mathbf{K}} = \left\{ \frac{E\{\|\mathbf{K}-\bar{\mathbf{K}}\|_F^2\}}{\|\bar{\mathbf{K}}\|_F^2} \right\}^{1/2} \quad (123)$$

ou depois de algumas manipulações algébricas:

$$\delta_{\mathbf{M}} = \left\{ \frac{1}{n-1+2\nu_{\mathbf{M}}} \left(1 + \frac{(\text{tr}\bar{\mathbf{M}})^2}{\text{tr}(\bar{\mathbf{M}}^2)} \right) \right\}^{1/2}, \quad \delta_{\mathbf{C}} = \left\{ \frac{1}{n-1+2\nu_{\mathbf{C}}} \left(1 + \frac{(\text{tr}\bar{\mathbf{C}})^2}{\text{tr}(\bar{\mathbf{C}}^2)} \right) \right\}^{1/2}, \quad \delta_{\mathbf{K}} = \left\{ \frac{1}{n-1+2\nu_{\mathbf{K}}} \left(1 + \frac{(\text{tr}\bar{\mathbf{K}})^2}{\text{tr}(\bar{\mathbf{K}}^2)} \right) \right\}^{1/2} \quad (124)$$

sendo que $\delta_{\mathbf{M}}$, $\delta_{\mathbf{C}}$ e $\delta_{\mathbf{K}}$ são respectivamente os parâmetros de dispersão de \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} .

Pode-se observar que à medida que se aumenta o valor de $\nu_{\mathbf{G}}$, o parâmetro de dispersão diminui, portanto a incerteza no sistema de matrizes diminui. Isto faz com que seja possível um controle da incerteza escolhendo-se valores de $\nu_{\mathbf{G}}$ diferentes. Se os parâmetros $\nu_{\mathbf{M}}, \nu_{\mathbf{C}}, \nu_{\mathbf{K}} \rightarrow +\infty$, então, $\delta_{\mathbf{M}}, \delta_{\mathbf{C}}, \delta_{\mathbf{K}} \rightarrow 0$ e conseqüentemente $\mathbf{M} \rightarrow \bar{\mathbf{M}}, \mathbf{C} \rightarrow \bar{\mathbf{C}}, \mathbf{K} \rightarrow \bar{\mathbf{K}}$ em

probabilidade. O que se conclui disso é que os parâmetros $\nu_{\mathbf{M}}, \nu_{\mathbf{C}}, \nu_{\mathbf{K}}$ permitem que a dispersão do modelo probabilístico seja controlada.

Mas de acordo com Adhikari (2009), o parâmetro de dispersão deve ser obtido a partir de experimento físico ou computadorizado. Portanto, ao se saber o valor de $\delta_{\mathbf{G}}, \nu_{\mathbf{G}}$ pode ser calculado. Logo, substituindo-se a Equação 122 na Equação 121 e isolando θ , vem

$$\delta_{\mathbf{G}} = \left\{ \frac{1}{n+1+2\nu_{\mathbf{G}}} \left(1 + \frac{(\text{tr} \bar{\mathbf{G}})^2}{\text{tr}(\bar{\mathbf{G}}^2)} \right) \right\}^{1/2} \Rightarrow \delta_{\mathbf{G}}^2 = \frac{1}{n+1+\theta} \left(1 + \frac{(\text{tr} \bar{\mathbf{G}})^2}{\text{tr}(\bar{\mathbf{G}}^2)} \right) \Rightarrow \theta = \frac{1}{\delta_{\mathbf{G}}^2} \left\{ 1 + \frac{(\text{tr} \bar{\mathbf{G}})^2}{\text{tr}(\bar{\mathbf{G}}^2)} \right\} - (n+1) \quad (125)$$

O parâmetro de dispersão calculado deve estar dentro de um o intervalo de valores possíveis para o parâmetro de dispersão considerando-se a abordagem não paramétrica que, segundo Soize (2003a) é dado por:

$$0 < \delta < \left\{ \frac{(n_0+1)}{(n_0+5)} \right\}^{1/2} \quad (126)$$

em que $n_0 > 1$ é um inteiro que é dado e fixo e, neste caso, δ independe de n . Pode-se afirmar ainda que, em geral, as dimensões do modelo considerado são grandes e, por vezes acima de 100. Se a título de exemplo, considerar-se $n = 10$, se terá então $n_0 = 10$ que, aplicado na Equação 126 corresponderá a um alto nível de incerteza (0,856) e que, geralmente não é alcançado nas aplicações (Soize, 2003a).

Por outro lado, Adhikari (2007) também mostra as propriedades estatísticas do inverso do sistema de matrizes. São elas:

$$E[\mathbf{G}^{-1}] = \frac{2\nu+n+1}{2\nu} \bar{\mathbf{G}}^{-1} \quad (127)$$

$$E[\mathbf{G}^{-2}] = \frac{(2\nu+n+1)^2 \text{tr}(\bar{\mathbf{G}}^{-1}) \bar{\mathbf{G}}^{-1} + 2\nu \bar{\mathbf{G}}^{-2}}{2\nu(2\nu+1)(2\nu-2)} \quad (128)$$

As duas equações anteriores mostram que para a existência da média é necessário que ν seja maior que zero. No caso do segundo momento inverso, ν deve assumir um valor maior do que um. Estes fatos justificam um valor igual a ou maior que dois para ν .

Por outro lado, não é claro se o Princípio de Máxima Entropia deve ser desenvolvido com respeito a \mathbf{G} , \mathbf{G}^{-1} ou outra atribuição de \mathbf{G} , então, para evitar qualquer problema

dependente dessa informação, estudos com as duas distribuições foram realizadas para que não houvesse discrepância entre os resultados encontrados (Adhikari, 2007). Bons resultados foram encontrados para o sistema de matrizes e, neste caso, $E[\mathbf{G}] = \bar{\mathbf{G}}$. Este comportamento não foi encontrado para o caso do sistema inverso de matrizes em que uma grande diferença entre $E[\mathbf{G}^{-1}]$ e $\bar{\mathbf{G}}^{-1}$ foi observada. Neste caso $E[\mathbf{G}^{-1}]$ é bem maior que $\bar{\mathbf{G}}^{-1}$.

De acordo com Adhikari (2007), não existe nenhuma razão para que esses valores sejam exatamente iguais mas também não se espera que sejam tão diferentes. Uma solução seria aumentar o valor de ν mas isso acarretaria uma diminuição da incerteza, o que pressupõe a utilização de mais restrições do que necessário o que não deve acontecer. Com isso, se fizeram necessários mais estudos, para que este fato não se tornasse uma limitação ao uso da matriz Wishart na propagação de incertezas em sistemas dinâmicos lineares. A solução também coube a Adhikari que avaliou opções para uma distribuição Wishart ótima. Detalhes importantes sobre esses estudos serão mostrados na próxima subseção.

2.8.7 Distribuição Wishart ótima

A ideia principal nesses estudos é que a distribuição de \mathbf{G} deve ser tal que o valor de $E[\mathbf{G}]$ seja próximo ao valor de $\bar{\mathbf{G}}$ e o valor de $E[\mathbf{G}^{-1}]$ seja próximo ao valor de $\bar{\mathbf{G}}^{-1}$. Isso fará com que a distribuição resultante não seja tendenciosa à escolha de \mathbf{G} ou $\bar{\mathbf{G}}^{-1}$.

Foram testados e comparados quatro critérios para a seleção dos parâmetros mais adequados a serem utilizados na propagação de incertezas epistêmicas pela FDP Wishart. Vale lembrar que, aqui, os dados de entrada continuam sendo a média das matrizes aleatórias e o parâmetro de dispersão de cada uma delas.

Os critérios adotados podem ser resumidos como se segue, de acordo com a Adhikari (2008):

Critério 1: de acordo com Adhikari (2007) este critério foi proposto por Soize em seus artigos escritos em 2000 e 2001. Neste caso considera-se que:

$$E[\mathbf{G}] = \bar{\mathbf{G}} \quad (129)$$

$$\delta_{\mathbf{G}} = \tilde{\delta}_{\mathbf{G}} \quad (130)$$

em que $E[\mathbf{G}]$ é a média da matriz aleatória \mathbf{G} , $\bar{\mathbf{G}}$ é a média da matriz determinística, $\delta_{\mathbf{G}}$ é o desvio padrão normalizado e $\tilde{\delta}_{\mathbf{G}}$ é o desvio padrão normalizado medido.

Esta condição resulta nos parâmetros mostrados pela Equação 109, já levando-se em conta a Equação 122, e na Equação 111. No entanto, o valor de θ é calculado a partir do resultado da Equação 125.

Critério 2: foi proposto por Adhikari (2007). Matematicamente, a condição aqui é dada pela Equação 130 e pelas duas equações seguintes:

$$\|\bar{\mathbf{G}} - E[\mathbf{G}]\|_F = \text{valor mínimo} \quad (131)$$

$$\|\bar{\mathbf{G}}^{-1} - E[\mathbf{G}^{-1}]\|_F = \text{valor mínimo} \quad (132)$$

onde $\|\cdot\|_F$ é a norma de Frobenius.

Isto resulta nos parâmetros mostrados pela Equação 109, já levando-se em conta a Equação 122, e na equação dada por:

$$\Sigma = \frac{\bar{\mathbf{G}}}{\alpha} \quad (133)$$

onde:

$$\alpha = \sqrt{\theta(\theta + n + 1)} \quad (134)$$

e θ é definido como no resultado da Equação 125.

Critério 3: foi proposto por Adhikari (2008). Neste caso, a condição é dada pela Equação 130 e também pela seguinte equação:

$$E[\mathbf{G}^{-1}] = \bar{\mathbf{G}}^{-1} \quad (135)$$

O resultado neste caso corresponde à Equação 109, já levando-se em conta a Equação 122, e na equação dada por:

$$\Sigma = \frac{\bar{\mathbf{G}}}{\theta} \quad (136)$$

em que θ é definido pelo resultado da Equação 125.

Critério 4: foi proposto por Adhikari (2008). A condição aqui é dada pelas equações:

$$E[\mathbf{M}^{-1}] = \bar{\mathbf{M}}^{-1} \quad (137)$$

$$E[\mathbf{K}] = \bar{\mathbf{K}} \quad (138)$$

$$\delta_{\mathbf{M}} = \tilde{\delta}_{\mathbf{M}} \quad (139)$$

$$\delta_{\mathbf{K}} = \tilde{\delta}_{\mathbf{K}} \quad (140)$$

Aqui, considera-se que a média dos autovalores da distribuição é a mesma que os autovalores “medidos” da matriz média. Neste critério, de acordo com o autor, os parâmetros da matriz massa e rigidez são escolhidos, respectivamente, de acordo com os critérios 3 e 1. A matriz de amortecimento é obtida utilizando o critério 2. Então, este caso é uma combinação dos três critérios anteriores.

Adhikari (2008), com base nos quatro critérios acima referidos, pode mostrar por meio de simulação numérica, que o terceiro critério produz o melhor resultado.

Portanto, se a ν -ésimo ordem do momento inverso de um sistema de matriz $\mathbf{G} = \{\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}\}$ existe e apenas a média de \mathbf{G} , é disponível, a distribuição não tendenciosa de \mathbf{G} segue a distribuição Wishart, representada pela Equação 114, com parâmetros representados pela Equação 109, já levando-se em conta a Equação 122, e a Equação 136. Tais equações são mostradas novamente e este é o resultado final de modelagem estocástica.

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) = \left\{ (2)^{\frac{1}{2}np} \Gamma_n \left(\frac{1}{2}p \right) |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}p} \right\}^{-1} |\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}(p-n-1)} \exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \\ \text{com parâmetros} \\ p = \theta + n + 1 \\ \boldsymbol{\Sigma} = \frac{\bar{\mathbf{G}}}{\theta} \\ \text{em que} \\ \theta = \frac{1}{\delta_{\mathbf{G}}^2} \left\{ 1 + \frac{\{\text{tr}(\bar{\mathbf{G}})\}^2}{\text{tr}(\bar{\mathbf{G}}^2)} \right\} - (n + 1) \end{array} \right. \quad (141)$$

Como na abordagem não paramétrica ocorre a propagação da incerteza nas matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema dinâmico amortecido com n gdl, pode-se reescrever a Equação 141 da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 p_{\mathbf{G}}(\mathbf{Z}) = \left\{ (2)^{\frac{1}{2}np} \Gamma_n \left(\frac{1}{2}p \right) |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}p} \right\}^{-1} |\mathbf{G}(\mathbf{Z})|^{\frac{1}{2}(p-n-1)} \exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{Z}) \right) \right\} \\
 \text{com parâmetros} \\
 p = \theta + n + 1 \\
 \boldsymbol{\Sigma} = \frac{\bar{\mathbf{G}}}{\theta} \\
 \text{em que} \\
 \theta = \frac{1}{\delta_{\mathbf{G}}^2} \left\{ 1 + \frac{\{\text{tr}(\bar{\mathbf{G}})\}^2}{\text{tr}(\bar{\mathbf{G}}^2)} \right\} - (n + 1)
 \end{array} \right. \quad (142)$$

em $p_{\mathbf{G}}(\mathbf{Z})$ é a FDP Wishart de \mathbf{G} em função da incerteza \mathbf{Z} propagada na matriz aleatória \mathbf{G} e $\mathbf{G}(\mathbf{Z})$ é a matriz \mathbf{G} em função da incerteza \mathbf{Z} nela propagada.

CAPÍTULO 3

PROGRAMA COMPUTACIONAL

Uma vez construído o modelo probabilístico, a próxima fase do trabalho será a simulação estocástica a ser realizada tendo por base a abordagem não paramétrica para quantificação de incertezas epistêmicas. Para que tal simulação seja possível, um programa foi desenvolvido pela autora na plataforma do *software* MATLAB® e o objetivo deste capítulo é apresentá-lo em detalhes.

Tal programa tem por objetivo calcular o IC de 95% para a FRF simulada e que já leva em conta a incerteza propagada nas matrizes aleatórias consideradas, portanto, tem-se 95% de probabilidade de que a FRF representativa do modelo real, já com a incerteza inclusa, esteja neste intervalo construído.

O programa é utilizado nesta dissertação para duas simulações. A primeira corresponde a uma sistema dinâmico amortecido com 2 gdl, cujas respostas serão comparadas com as respostas do artigo Sampaio *et al* (2007) no Capítulo 4, com o objetivo de validação desse programa. A segunda simulação corresponde ao estudo de uma viga de aço com condições de contorno fixa – livre com 160 gdl, cujas respostas são comparadas com resultados experimentais no Capítulo 6.

A seguir são apresentados detalhes a respeito do programa construído, porém, não levará em conta qualquer característica específica das simulações descritas no parágrafo

anterior. O detalhamento será realizado de uma forma geral e detalhes específicos serão apresentados nos capítulos referentes a cada uma das simulações mencionadas.

3.1 SUB-ROTINAS DO PROGRAMA

O programa principal é composto por uma sequência de funções que levam às sub-rotinas de Entrada de dados, Construção da resposta do modelo médio, Cálculo dos parâmetros da FDP considerada e Simulação estocástica.

A Figura 3 apresenta um fluxograma do programa construído e, posteriormente será detalhada de uma forma geral cada uma das sub-rotinas apresentadas acima.

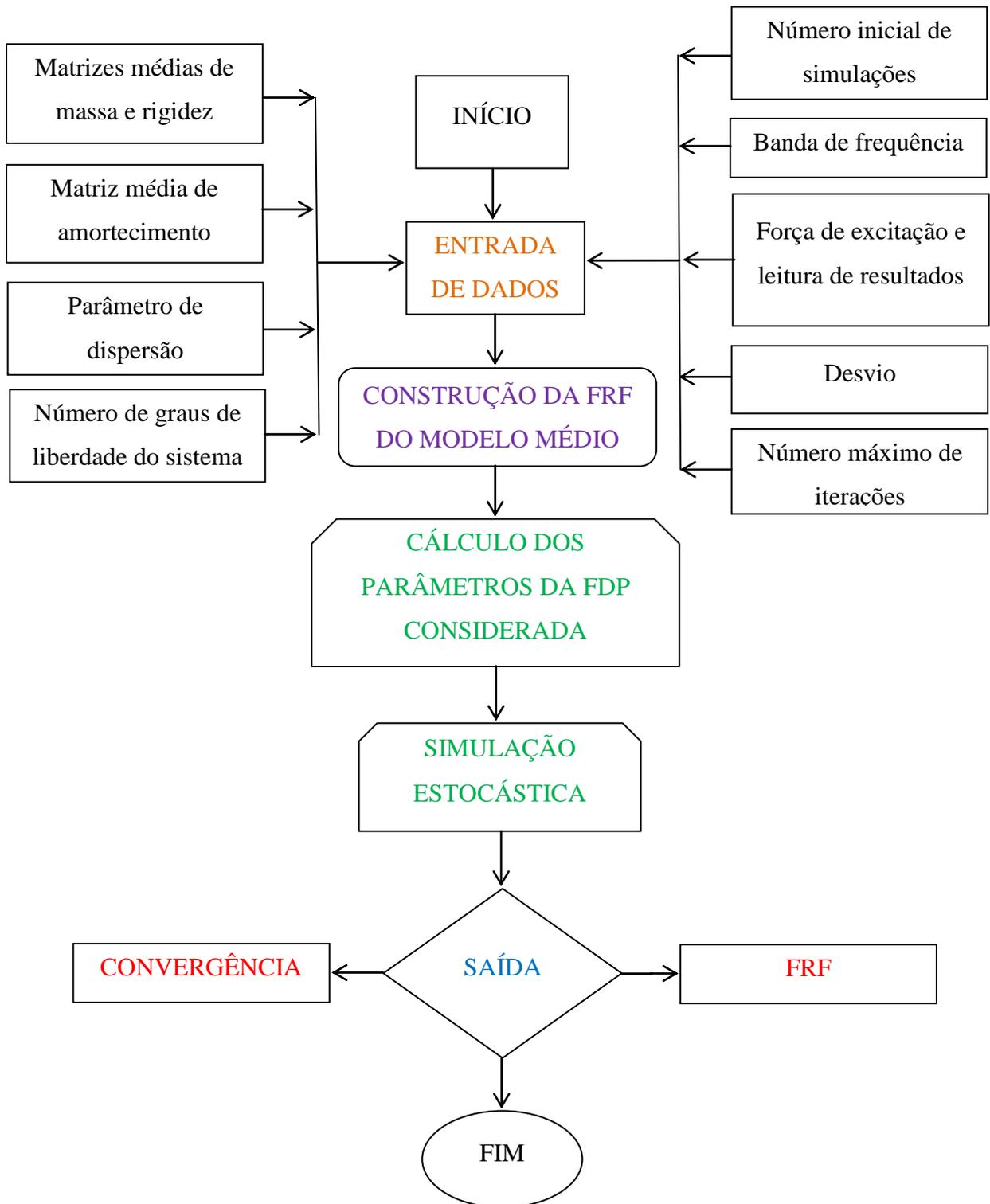


Figura 3 – Fluxograma simplificado do programa construído pela autora.

3.1.1 Sub-rotina entrada de dados

Nesta subseção é detalhado de maneira genérica cada um dos dados inseridos no programa. São eles: matrizes médias de massa, amortecimento e rigidez, o valor do parâmetro de dispersão para cada uma das simulações realizadas, o número de gdl do sistema baseado na dimensão das matrizes médias, o número inicial de simulações, a banda de frequência considerada na simulação, a força de excitação e leitura de resultados, o desvio considerado para convergência da simulação e o número máximo de iterações.

3.1.1.1 matrizes médias de massa e rigidez

As matrizes determinísticas médias de massa e rigidez, representadas respectivamente por \bar{M} e \bar{K} , no caso da simulação estocástica são obtidas pelo MEF, porém, no Capítulo 4 referente à validação, essas matrizes médias serão consideradas as mesmas do artigo base para que seja possível a comparação de resultados.

3.1.1.2 matriz de amortecimento

A matriz de amortecimento \bar{C} para a simulação foi considerada proporcional às matrizes de massa e rigidez. Por outro lado, no Capítulo 4 referente à validação, a matriz de amortecimento será considerada a mesma do artigo base para proporcionar a comparação de resultados.

3.1.1.3 parâmetro de dispersão

O parâmetro de dispersão δ deve ser devidamente calculado já que ele corresponde à informação que se tem sobre a incerteza neste tipo de análise, que é a abordagem não paramétrica. Além do que seu valor tem muita influência na resposta.

No caso desta dissertação, a quantificação de incerteza epistêmica é realizada para três e cinco valores de parâmetros de dispersão para a simulação da viga de aço e da validação respectivamente. Os valores limites para este parâmetro são definidos pela Equação 126. O IC de 95% para a FRF simulada é construída para cada caso.

3.1.1.4 número de graus de liberdade

O número de graus de liberdade n do sistema corresponde ao valor da dimensão das matrizes médias.

3.1.1.5 número inicial de simulações

O número inicial de simulações nsi considerado deve ser determinado de forma que possam ser obtidas convergências e, conseqüentemente, respostas satisfatórias para o problema em estudo. Sampaio *et al* (2008) propõe $nsi = 200$. Este número significa que ocorrerão inicialmente 200 iterações e no final delas o desvio é calculado. A partir daí, ocorrerão sempre acréscimos de 200 iterações em cada simulação realizada. O valor do desvio é calculado sempre ao término de cada uma dessas simulações até que ocorra a verificação da convergência do método segundo um desvio, ou erro, pré-determinado.

Nesta dissertação, tanto na validação quanto na simulação estocástica para comparação com resultados dos experimentos, as convergências referentes a cada um dos parâmetros são realizadas considerando-se $nsi = 200$, verificando-se a convergência. Contudo, são realizadas ainda simulações considerando-se $nsi = 600$ para que a curva de convergência seja mais bem representada e os números de simulações sejam mais bem visualizados, e são esses últimos gráficos que serão apresentados nos resultados dos respectivos estudos.

3.1.1.6 banda de frequência estudada

A banda de frequência deve ser escolhida conforme Equação 6.

3.1.1.7 força de excitação e leitura de resultados

Pode-se dizer que a força externa de excitação e as respostas são dadas, nesta dissertação, por:

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^t \quad (143)$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^t \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_n)^t \quad (144)$$

3.1.1.8 desvio

O valor do desvio é utilizado para que possa ser realizada a convergência da resposta. Tal valor é definido pelo analista.

3.1.1.9 número máximo de simulações

O número máximo de simulações *niter* a ser considerado pode ser definido arbitrariamente pelo analista. Este número funciona como um limite do número de simulações permitidas para a convergência.

3.1.2 Sub-rotina construção da resposta do modelo médio

A construção da resposta do modelo médio (FRF) é representada pela Equação 8 em que se consideram as matrizes aleatórias médias de massa, amortecimento e rigidez. Tal modelo não tem nenhum tipo de variação devido a incertezas.

3.1.3 Sub-rotina cálculo dos parâmetros da distribuição considerada

Os parâmetros devem ser calculados conforme a correta FDP a ser utilizada para propagação da incerteza nas matrizes aleatórias consideradas.

De acordo com a FDP Wishart obtida no Capítulo 2, na simulação estocástica devem ser calculados os parâmetros escalar p e matricial Σ . Entretanto, poderá ser verificado que no Capítulo 4 referente à validação do programa, será considerada a distribuição Gama, e neste caso, os parâmetros de forma α e de escala β devem ter seus valores determinados.

3.1.4 Sub-rotina simulação de Monte Carlo

A SMC inclui a geração de amostras da matriz aleatória considerada, além do cálculo do número de simulações adequado através da convergência por mínimos quadrados e o

resultado do IC de 95% da resposta.

No caso do número de simulações, ocorrerão quantas forem necessárias sendo que a convergência média quadrática é dada pela Equação 190. Maiores informações sobre o MMC pode ser verificado no Anexo C.

Como já dito anteriormente, é por meio desta simulação que se obtém o IC de 95% da FRF simulada para que se possa proceder à análise. Este intervalo de confiança é obtido calculando-se o percentil das respostas obtidas na SMC. Logo, o percentil de 2,5% e 97,5% definem os limites do IC de 95% no qual deve estar contida a FRF do modelo que represente corretamente o sistema dinâmico em estudo.

CAPÍTULO 4

VALIDAÇÃO

Este capítulo tem por objetivo principal realizar a validação do programa computacional desenvolvido pela autora na plataforma do *software* MATLAB® para a realização da simulação estocástica e que foi apresentado no Capítulo 3. Tal validação será conduzida tendo por base dados disponíveis no artigo Sampaio, *et al* (2007), cujos resultados serão comparados com os resultados gerados pelo programa desenvolvido. Tal validação é importante tendo em vista que um correto programa deve ser utilizado posteriormente no Capítulo 5 referente à simulação estocástica da viga de aço e que gerará as respostas para comparação com resultados experimentais.

Ademais, serão feitos alguns apontamentos a respeito do parâmetro de dispersão, pois neste capítulo, além do objetivo principal citado no parágrafo anterior, também será realizada uma comparação de cinco respostas simuladas para diferentes parâmetros de dispersão e será mostrada a importância em se calcular tal parâmetro corretamente já que ele constitui a única informação que se tem sobre a incerteza no problema dinâmico considerado.

Os autores em Sampaio *et al* (2007) utilizaram o procedimento apresentado em Soize (2001) obtendo-se assim a distribuição Gama para propagação da incerteza de modelo, portanto tal distribuição também será utilizada neste capítulo de validação realizada para um sistema dinâmico linear amortecido de 2 gdl. Entretanto, nas simulações que ocorrerão para

obtenção de resultados que serão comparados com os resultados experimentais, a matriz Wishart será utilizada, tendo em vista que esta foi obtida como correta distribuição para a propagação da incerteza epistêmica nas matrizes aleatórias consideradas. Um comparativo entre essas duas distribuições será realizada mais adiante.

Além disso, é importante mencionar neste ponto que apenas a matriz de rigidez terá sua incerteza propagada, as demais matrizes continuam constantes e iguais a suas matrizes médias, com isso, fica claro que o parâmetro de dispersão é válido somente para a matriz aleatória de rigidez.

4.1 INFORMAÇÕES DE ENTRADA NO PROGRAMA COMPUTACIONAL

A validação do programa desenvolvido pela autora em plataforma MATLAB® será realizada para um sistema dinâmico amortecido de 2 gdl em que a incerteza de modelo será propagada na matriz aleatória de rigidez. A seguir serão apresentadas as considerações referentes às sub-rotinas para esta validação seguindo a sequência apresentada no Capítulo 3.

4.1.1 Sub-rotina entrada de dados

Nesta subseção será detalhado cada um dos dados de entrada considerados no programa para a validação. São eles:

4.1.1.1 matrizes médias de massa, amortecimento e rigidez

As matrizes determinísticas médias são definidas como:

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (145)$$

Os dados para simulação foram retirados do artigo Sampaio *et al* (2007), a saber:

$$m_1 = 1,5 \text{ kg}, m_2 = 0,75 \text{ kg}, k_1 = 1000 \text{ N/m}, k_2 = 150 \text{ N/m}, c_1 = 0,5 \text{ N.s/m}, c_2 = 0,05 \text{ N.s/m} \quad (146)$$

logo:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 0,75 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} 0,55 & -0,05 \\ -0,05 & 0,05 \end{bmatrix}, \bar{K} = \begin{bmatrix} 1150 & -150 \\ -150 & 150 \end{bmatrix} \quad (147)$$

4.1.1.2 parâmetro de dispersão

A quantificação de incerteza epistêmica é realizada para os mesmos cinco valores de parâmetros de dispersão de Sampaio *et al* (2007). Contudo, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta_{1K} &= 0,05 \\ \delta_{2K} &= 0,1 \\ \delta_{3K} &= 0,2 \\ \delta_{4K} &= 0,3 \\ \delta_{5K} &= 0,65 \end{aligned} \quad (148)$$

Levando-se em conta a Equação 126 que determina a faixa de valores válidos para o parâmetro de dispersão, seu valor máximo, considerando $n_0 = n = 2$ nesta mesma equação, é dado por $\delta_{5K} = 0,65$. Os demais valores foram considerados arbitrariamente dentro do intervalo permitido.

4.1.1.3 número de graus de liberdade

O número de graus de liberdade do sistema (n) corresponde ao valor da dimensão das matrizes médias. Então neste caso, $n = 2$.

4.1.1.4 número inicial de simulações

O número inicial de simulações considerado é $nsi = 600$.

4.1.1.5 banda de frequência

Pela Equação 6, tem-se a seguinte faixa de frequência a ser estudada neste problema:

$$\mathbb{B} = [0,7] \text{ [Hz]} \quad (149)$$

4.1.1.6 força de excitação e leitura de resultados

Considerando a Equação 143 e Equação 144, pode-se dizer que a força externa de excitação e o deslocamento das massas são dados por:

$$\mathbf{f} = (1,0)^t \quad (150)$$

$$\mathbf{u} = (0, u_2)^t \quad (151)$$

4.1.1.7 desvio

O valor do desvio foi definido em 5%.

4.1.1.8 número máximo de simulações

O número máximo de simulações é dado por $niter = 2000$.

4.1.2 Sub-rotina construção da resposta do modelo médio

A obtenção da resposta do modelo médio é conseguida considerando-se a Equação 8, porém, de maneira simplificada pode-se considerar:

$$\bar{H}(\omega) = \frac{u_2(\omega)}{f_1(\omega)} \quad (152)$$

4.1.3 Sub-rotina cálculo dos parâmetros da distribuição considerada

De acordo com a FDP Gama apresentada no artigo Sampaio *et al* (2007), pode-se deduzir os parâmetros de forma α e de escala β como:

$$\alpha = \frac{n+1}{2 \times \delta^2} + \frac{1-i}{2} \quad (153)$$

$$\beta = 1 \quad (154)$$

4.1.4 Sub-rotina simulação de Monte Carlo

A FRF é calculada de acordo com a Equação 7, mas pode ser representada como a seguir:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{u_2(\omega)}{f_1(\omega)} \quad (155)$$

4.2 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

A seguir são apresentados os resultados referentes às curvas de convergência e ao IC de 95% da FRF, juntamente com a resposta do modelo médio construído. Para cada simulação ocorre a obtenção de dois resultados, um correspondente à curva de convergência, enquanto o outro corresponde ao IC de 95%. Esses resultados são apresentados separadamente, sendo as curvas de convergência na subseção 4.2.1 e seus respectivos IC na subseção 4.2.2. Para identificar os resultados correspondentes basta verificar o valor do parâmetro de dispersão no título da figura.

4.2.1 Curvas de convergência

As curvas de convergência obtidas pelo método de mínimos quadrados resultantes da SMC são construídas de acordo com a Equação 190 do Apêndice C. Tais curvas estão representadas nas Figuras 4 – 8 e mostram a convergência das respostas para cada um dos cinco parâmetros de dispersão considerados na análise e representados pela Equação 148.

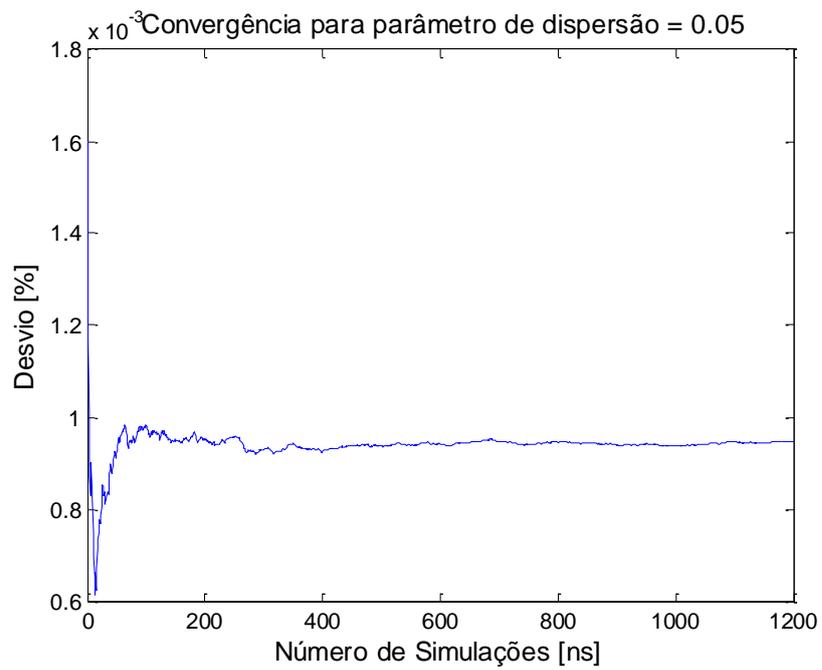


Figura 4 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_K = 0,05$.

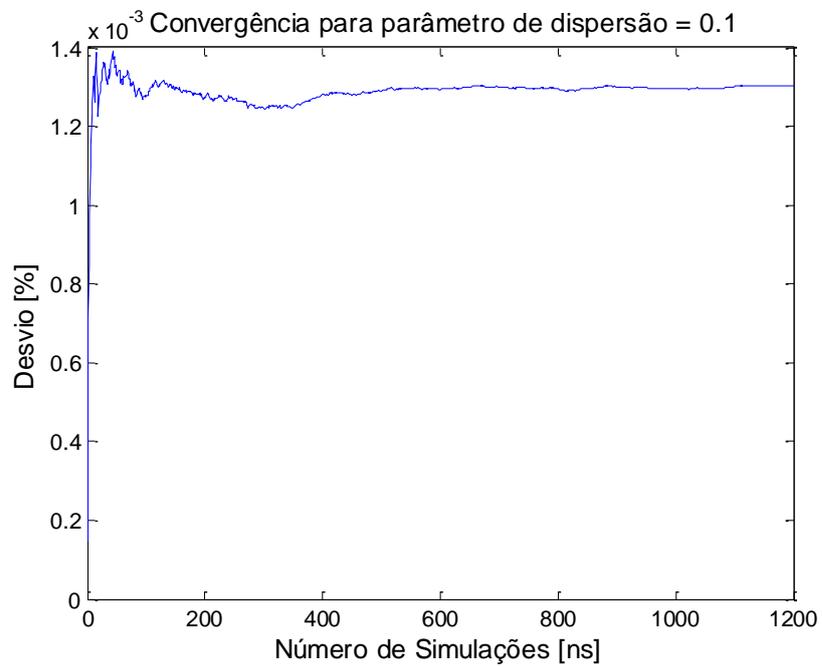


Figura 5 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_K = 0,1$.

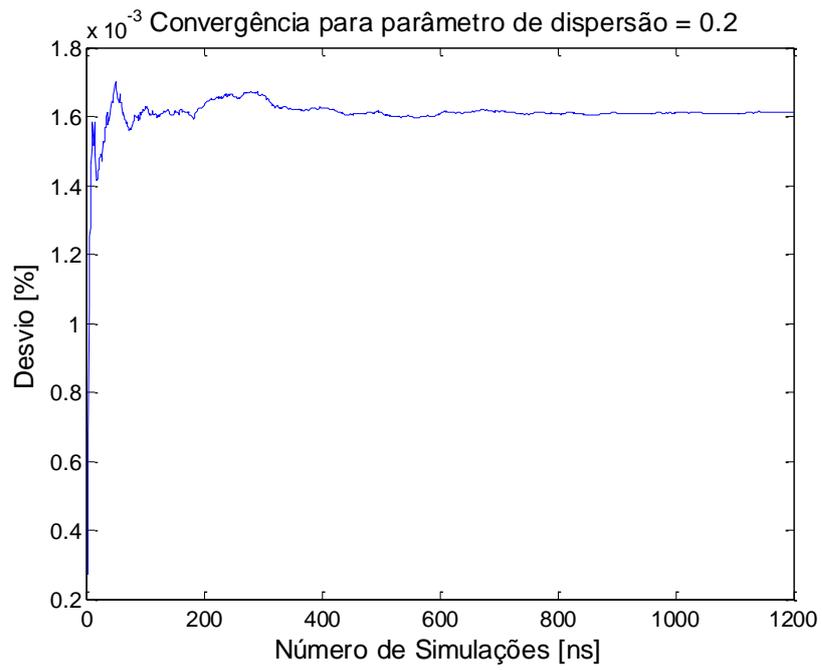


Figura 6 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_K = 0,2$.

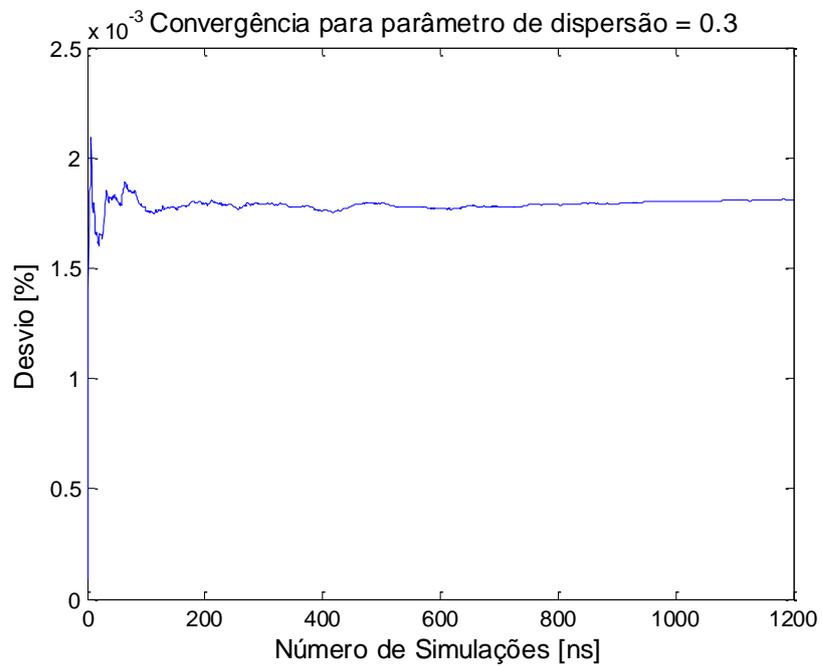


Figura 7 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_K = 0,3$.

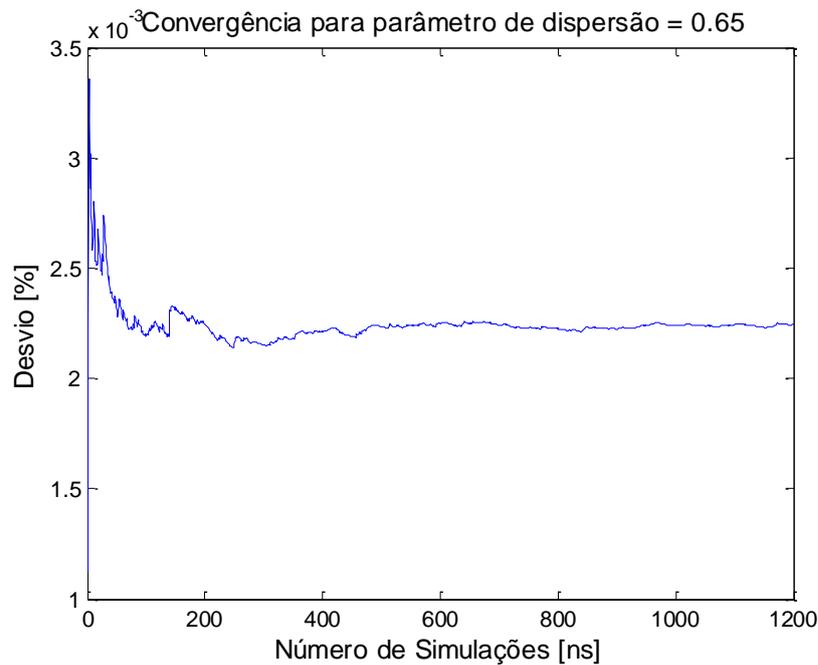


Figura 8 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_K = 0,65$.

É possível considerar, ao se observar essas respostas apresentadas, que a convergência é conseguida para um valor de 600 simulações independentemente do parâmetro de dispersão utilizado. Isso quer dizer que para este valor de número de simulações pode-se obter respostas satisfatórias para o IC de 95%.

Além disso, tal valor de $n_s = 600$ coincide com o apresentado no artigo Sampaio *et al* (2007) escolhido para validação do programa construído pela autora.

4.2.2 Intervalos de confiança

As Figuras de 9 a 18 mostram o intervalo de confiança com 95% de probabilidade de conter a FRF correta para o sistema em estudo. A validação ocorre por meio da comparação entre as respostas de Sampaio *et al* (2007) e as respostas resultantes das simulações obtidas pela autora. Em Sampaio *et al* (2007) deve-se considerar apenas as curvas “*Mean model*” e “*MRV – 95% confidence limits*”, que correspondem respectivamente às curvas de modelo médio e do resultado da modelagem não paramétrica com limite de confiança de 95%. A outra curva, correspondente à “*SRV – 95% confidence limits*”, mostrada no gráfico desta mesma fonte bibliográfica corresponde ao resultado da modelagem paramétrica não abordada nesta dissertação.

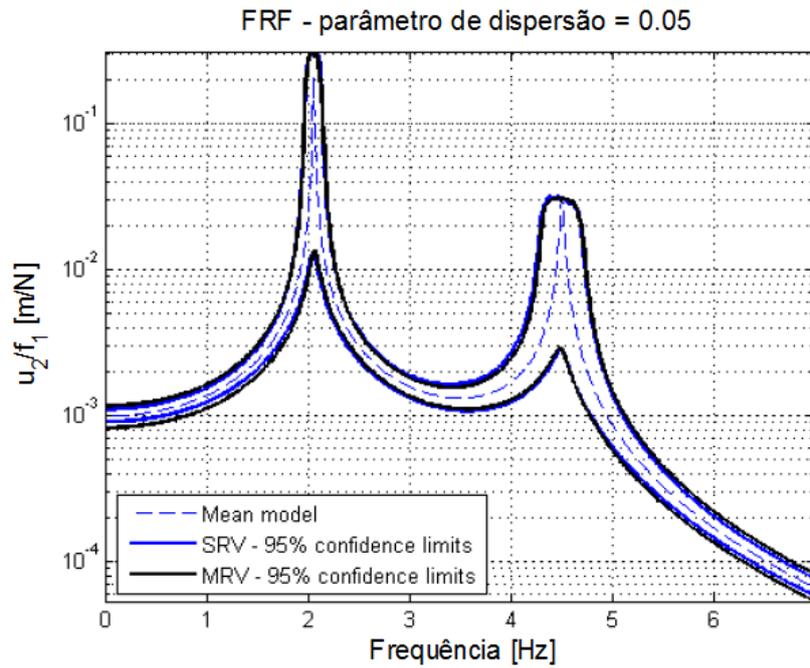


Figura 9 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_K = 0,05$.

Fonte: Sampaio et al (2007).

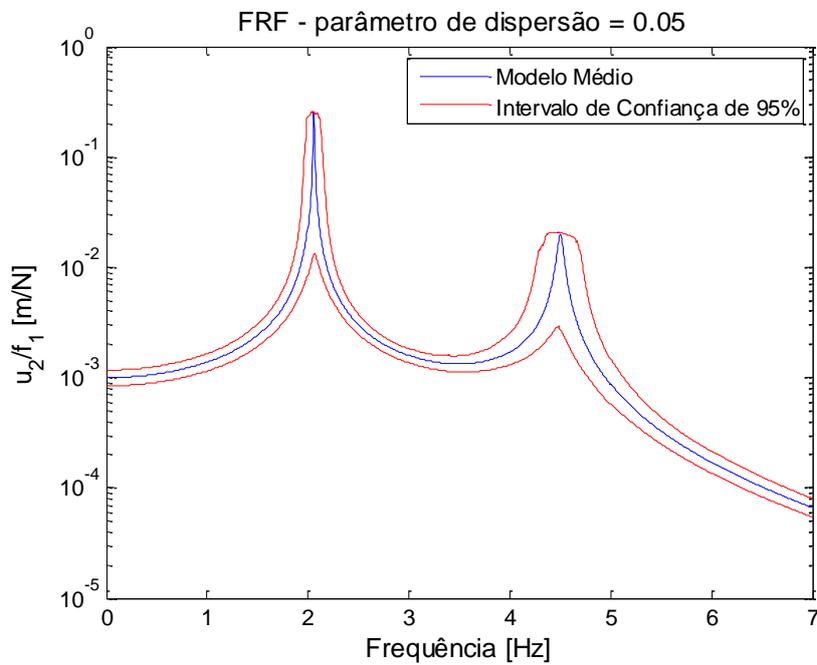


Figura 10 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_K = 0,05$.

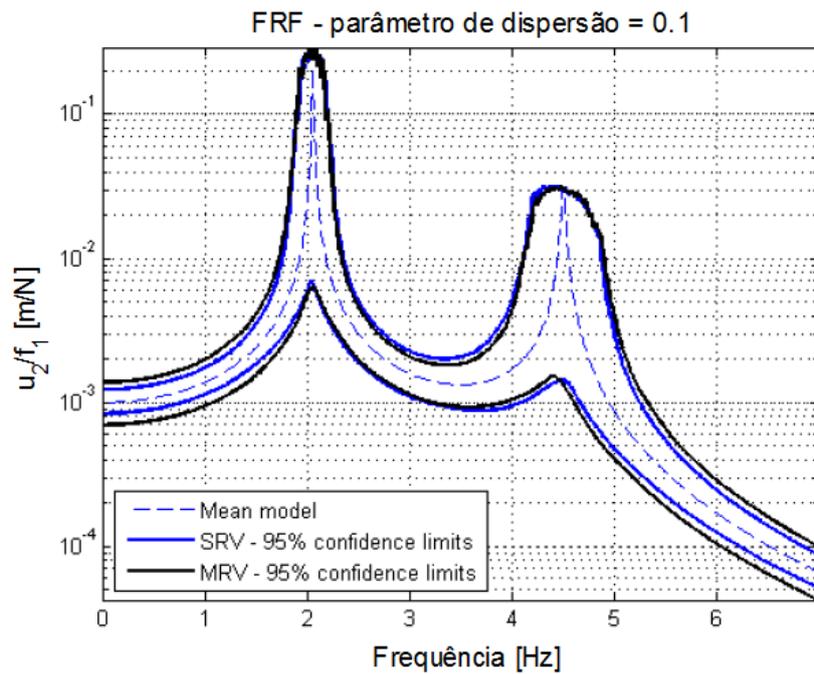


Figura 11 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_K = 0,1$.

Fonte: Sampaio et al (2007).

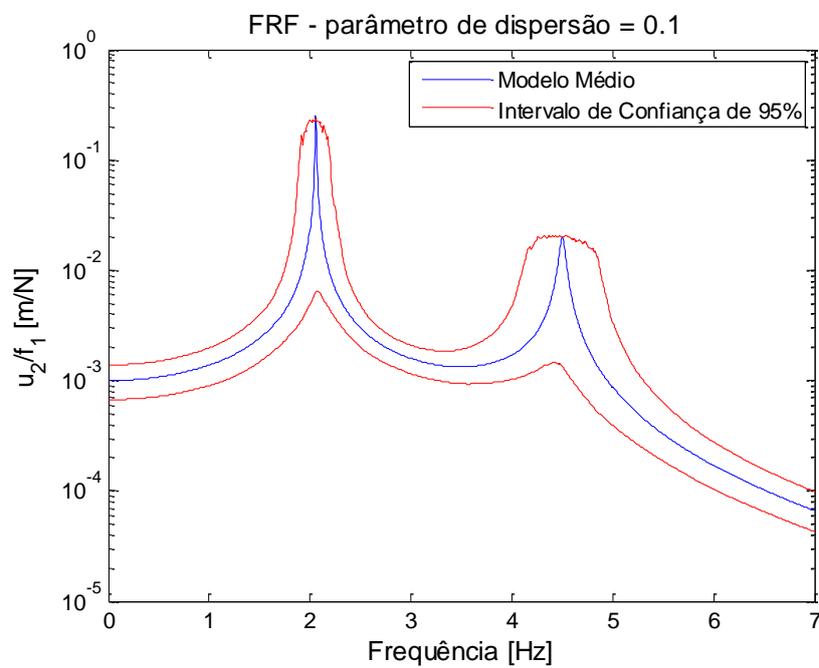


Figura 12 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_K = 0,1$.

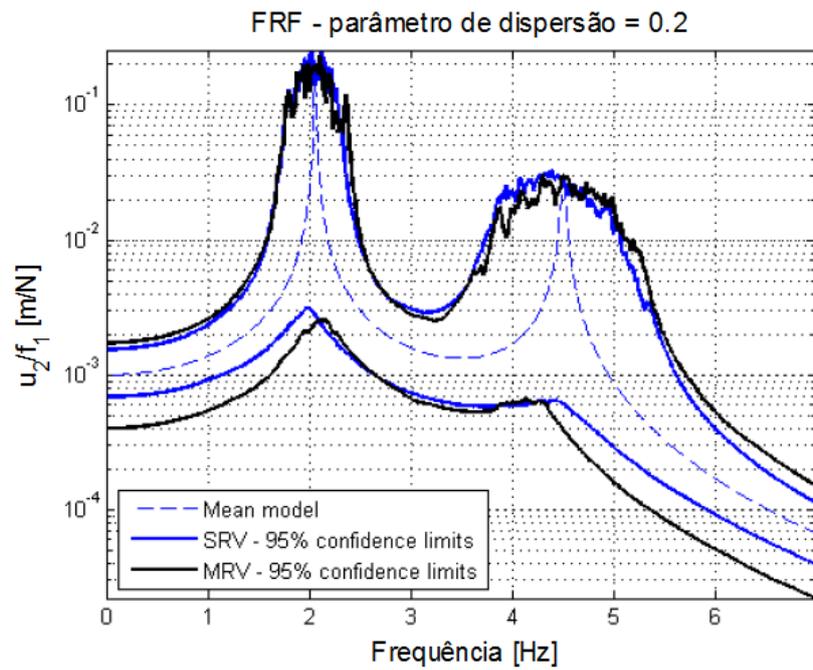


Figura 13 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_K = 0,2$.

Fonte: Sampaio et al (2007).

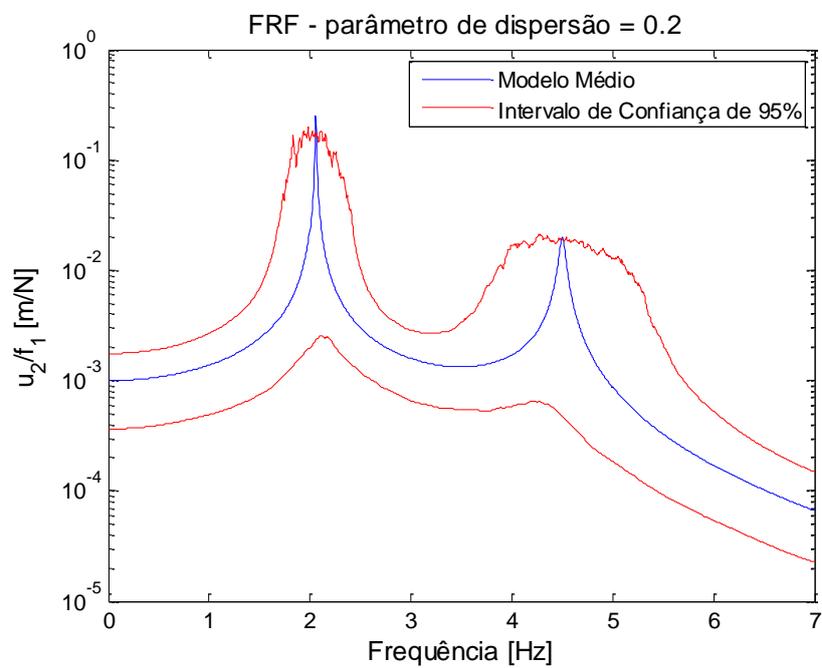


Figura 14 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_K = 0,2$.

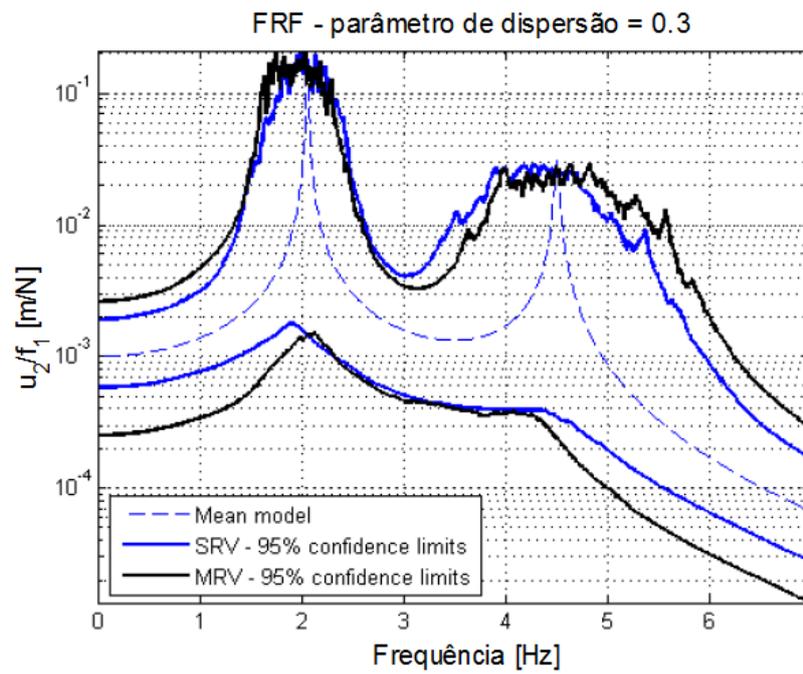


Figura 15 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_K = 0,3$.

Fonte: Sampaio et al (2007).

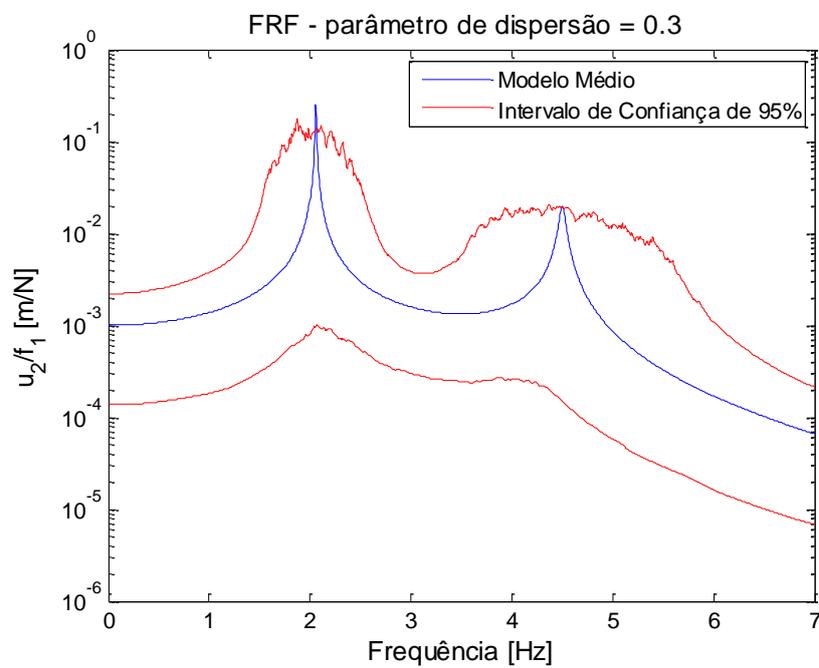


Figura 16 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_K = 0,3$.

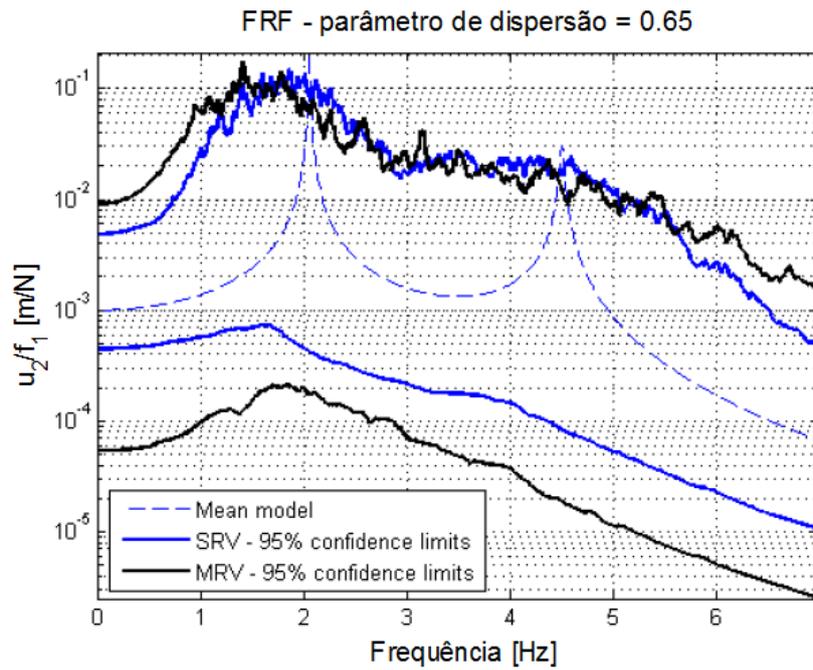


Figura 17 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_K = 0,65$.

Fonte: Sampaio et al (2007).

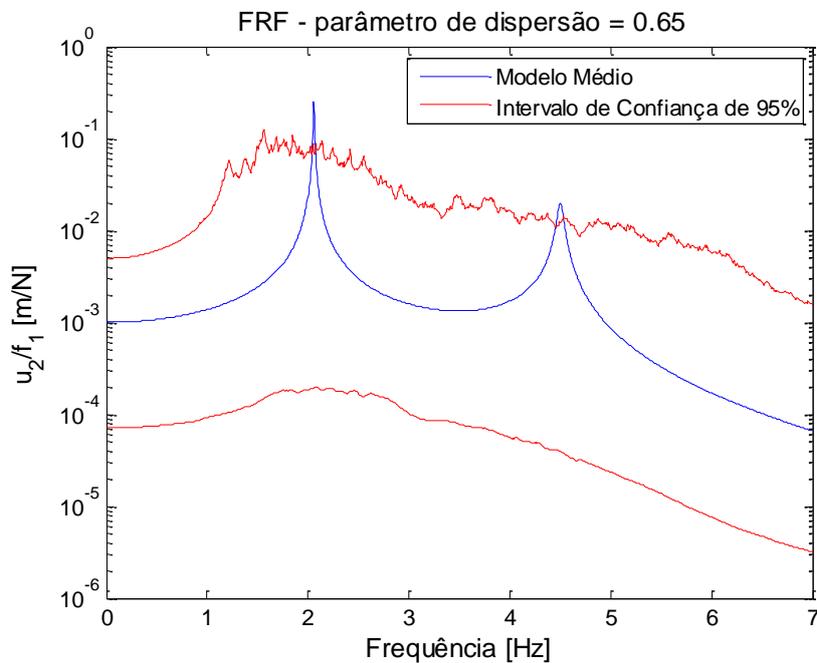


Figura 18 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_K = 0,65$.

Pode ser observado que no modelo médio construído pelo programa da autora as frequências naturais são coincidentes com as frequências do artigo Sampaio *et al* (2007) e

valem 2,055 Hz e 4,502 Hz, porém a amplitude referente à segunda frequência resultou um pouco abaixo do apresentado no artigo de referência.

Já com relação ao eixo referente a $u_2/f_1 [m/N]$, os resultados obtidos pelo programa construído pela autora se mostraram bem próximos aos de Sampaio *et al* (2007) com ressalva aos resultados para parâmetros de dispersão mais altos, no caso os valores de 0,3 e 0,65, em que ocorreu uma pequena alteração na largura da curva.

Contudo, não se esperava que as respostas obtidas pelo programa da autora resultassem em uma concordância exata já que se trata de uma simulação estocástica e as matrizes, sendo aleatórias, assumem valores aleatórios diferentes em cada simulação realizada.

Pode-se dizer, portanto, com os resultados obtidos, que houve uma boa concordância entre as respostas das simulações realizadas pelo programa construído pela autora e as respostas do artigo Sampaio *et al* (2007) no caso da FRF do modelo médio e da construção do IC de 95%.

4.3 COMPARAÇÃO ENTRE DISTRIBUIÇÕES GAMA E WISHART

A validação do programa construído pela autora e concluída neste capítulo tem por base dados e respostas consideradas no artigo Sampaio *et al* (2007) que fez uso da distribuição Gama para propagação da incerteza de modelo na matriz aleatória de rigidez, e que, da mesma forma, foi utilizada neste capítulo.

Apesar disso, as simulações estocásticas executadas para comparação com resultados experimentais utilizam a distribuição Wishart, já que esta é a distribuição correta a ser utilizada para propagação de incertezas epistêmicas no caso desta dissertação, como foi concluído no Capítulo 2 referente à modelagem estocástica. Esta troca de distribuição da Gama para a Wishart não diminui o mérito da validação alcançada neste capítulo, pois segundo Adhikari (2008), do ponto de vista analítico as duas distribuições são idênticas.

De acordo com Adhikari (2008), originalmente se diz que a diferença entre as duas distribuições está no parâmetro escalar. Nas distribuições Wishart e Gama, esses parâmetros são denominados p e α respectivamente e são também chamados de parâmetros de forma. Na primeira distribuição o parâmetro p deveria assumir valores inteiros o que não ocorre com o parâmetro α da segunda distribuição. Por outro lado, o mesmo autor menciona que esta afirmação trata-se de um equívoco, já que tal distribuição aceita todos os valores para $p > n$.

Entretanto, diferenças podem ser observadas em simulações considerando-se essas distribuições visto que as variáveis aleatórias que compõem a diagonal da matriz Wishart têm distribuição qui-quadrada, enquanto que as variáveis pertencentes à diagonal da matriz Gama seguem uma distribuição gama. Esta diferença é maior quando se tem matrizes de pequenas dimensões, o que não corresponde ao caso de sistemas dinâmicos onde se espera sempre matrizes com grandes dimensões. Sendo assim, pode-se dizer que em aplicações com estruturas dinâmicas, a diferença entre as distribuições Wishart e Gama pode ser desprezada.

Um exemplo simples foi realizado por Adhikari para se comprovar as conclusões colocadas no parágrafo anterior. Trata-se de simulações realizadas para matrizes com dimensões $n = 3$ e $n = 50$, representando, respectivamente, matrizes com pequena e com grande dimensão. Respostas gráficas foram obtidas e podem ser verificadas nas Figuras 19 e 20.

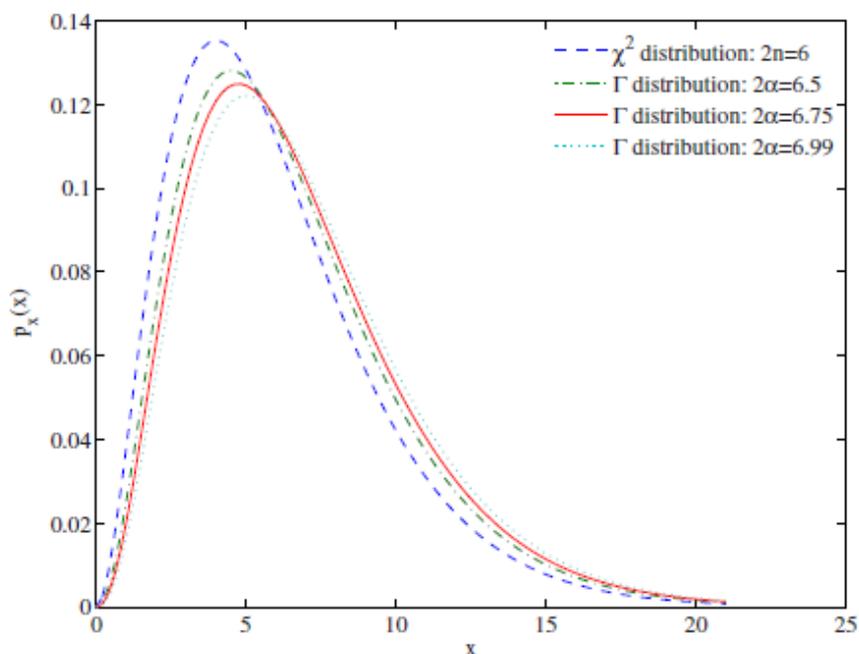


Figura 19 – Simulação para $n = 3$. Fonte: Adhikari (2008).

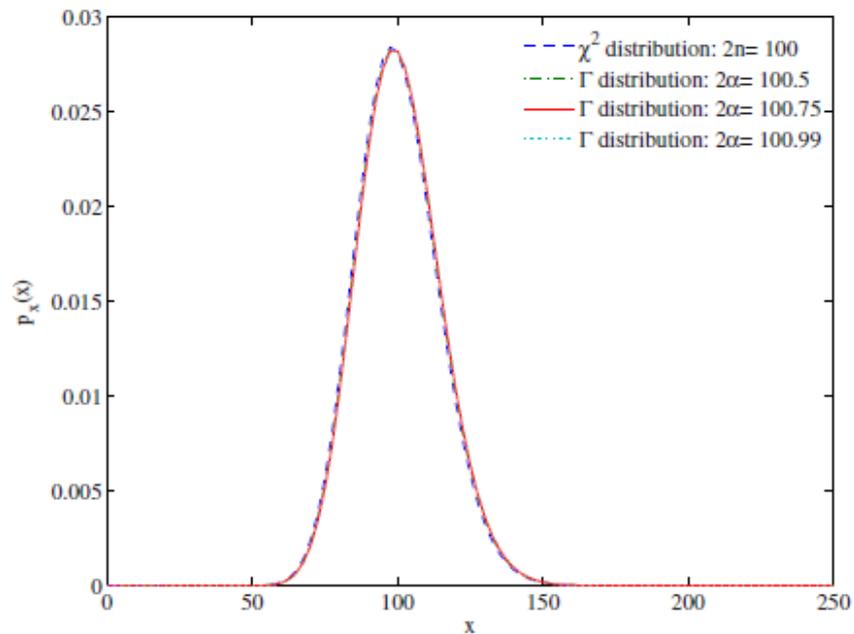


Figura 20 – Simulação para $n = 50$. Fonte: Adhikari (2008).

Na Figura 19 pode ser verificado que para as variáveis aleatórias qui-quadradas e gama, as distribuições são diferentes ao se avaliar matrizes com pequenas dimensões. Já no caso da Figura 20, onde se considera uma dimensão maior das matrizes analisadas, as diferenças entre as distribuições são inexpressivas.

4.4 CONCLUSÕES SOBRE A VALIDAÇÃO

O sistema dinâmico amortecido de 2 gdl, que teve a incerteza epistêmica propagada na matriz aleatória de rigidez, estudado neste capítulo é considerado um sistema simples, portanto não se espera que ele tenha parâmetros de dispersão altos. Apesar disso, cinco diferentes valores para o parâmetro de dispersão, inclusive o seu valor máximo permitido, foram analisados de forma que os resultados obtidos da FRF pudessem ser analisados e comparados.

Ao analisar as curvas referentes à convergência das simulações, apresentadas pelas Figuras de 4 – 8 pode-se notar uma boa convergência para um valor em torno de 600 simulações de Monte Carlo, independente do parâmetro de dispersão utilizado, o que significa que este valor é suficiente para que se possam obter resultados confiáveis para o sistema em

estudo. Além disso, tal valor de $n_s = 600$ coincide com o apresentado no artigo Sampaio *et al* (2007) escolhido para validação do programa construído pela autora.

Já no caso dos intervalos de confiança de 95%, pode-se dizer, observando-se as Figuras 9 – 18, que os resultados obtidos pelo programa construído pela autora se mostraram próximos aos de Sampaio *et al* (2007). Ademais, tomando como referência o eixo vertical nesses gráficos, é possível verificar que a região de confiança se alarga, à medida que os valores dos parâmetros de dispersão se tornam mais elevados e atinge a sua largura máxima para o máximo valor desse parâmetro que, neste caso, é $\delta_{5K} = 0,65$. Pode-se concluir ainda observando os mesmos resultados gráficos, mas agora tendo como referência o eixo horizontal, que à medida que a frequência aumenta a largura do IC também aumenta na região das frequências naturais até chegar a uma largura máxima também ao se considerar $\delta_{5K} = 0,65$. Isto significa que a incerteza no sistema aumenta com o aumento da frequência dificultando-se assim sua previsibilidade.

Logo, é evidente a diferença nas respostas obtidas no processo de quantificação da incerteza epistêmica quando se utiliza diferentes valores de parâmetros de dispersão, podendo-se então concluir que é extremamente importante determinar cuidadosamente o valor de tal parâmetro, só então a incerteza será quantificada e corresponderá à realidade do problema estudado.

Contudo, a conclusão final que se pode tirar dos resultados obtidos é que o objetivo principal exposto no início deste capítulo, que se refere à validação do programa desenvolvido pela autora, foi alcançado já que os resultados da simulação tanto os relacionados às curvas de convergência quanto aos IC construídos, apesar de uma concordância parcial com os resultados do artigo Sampaio *et al* (2007), podem ser considerados como satisfatórios. Portanto, o programa em questão produz resultados confiáveis a ponto de poder ser utilizado no Capítulo 5 referente à simulação estocástica.

CAPÍTULO 5

SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA

É nesta fase em que são geradas amostras das matrizes consideradas como aleatórias, que por sua vez terão sua incerteza propagada. O resultado é um problema determinístico para cada iteração realizada e que deve ser resolvido, e é com estes resultados que as estatísticas da resposta são encontradas. O Método de Monte Carlo, descrito no Apêndice C, e o programa construído pela autora na plataforma do *software* MATLAB®, já validado no Capítulo 4, são utilizados para tal finalidade.

São apresentados detalhes a respeito da entrada de dados no programa, a construção das matrizes médias de massa e rigidez pelo método dos elementos finitos, a construção da matriz de amortecimento e a coleta de informações a serem utilizados na simulação. Isto se faz necessário para que se cumpra o objetivo principal deste capítulo que se refere à obtenção da FRF do modelo médio e do IC de 95% da resposta por meio da simulação estocástica para quantificação de incerteza epistêmica de uma viga de aço de 200 mm com condições de contorno fixa – livre, em que a matriz massa desse sistema é considerada aleatória e terá a sua incerteza propagada, permanecendo as demais matrizes constantes e iguais a suas matrizes médias. Os resultados de tal simulação são apresentados no Capítulo 7 que trata dos resultados simulados e experimentais.

5.1 INFORMAÇÕES DE ENTRADA NO PROGRAMA COMPUTACIONAL

A simulação é realizada para um sistema dinâmico amortecido constituído por uma viga de aço de 200 mm com condições de contorno fixa – livre. A são apresentadas as considerações referentes às sub-rotinas para esta simulação seguindo a sequência apresentada no Capítulo 3.

5.1.1 Sub-rotina entrada de dados

Nesta seção será detalhada cada uma das entradas consideradas no programa no caso da simulação da viga de aço. São elas:

5.1.1.1 matrizes médias de massa e rigidez

As matrizes determinísticas médias de massa e rigidez da viga de aço estudada são construídas por elementos finitos. Para tanto se fez necessária a coleta de informações, como dimensões, massa, densidade e módulo de elasticidade da viga que foram obtidas por meio de um paquímetro digital, uma balança digital e o programa Sonelastic®. Os detalhes de especificação dos instrumentos e do programa estão contidos no Apêndice E. A obtenção dessas informações segue uma sequência de etapas que são descritas a seguir.

- ✓ Etapa 1 – Obtenção das dimensões e da massa.

As dimensões e a massa da viga foram obtidas respectivamente por um paquímetro e uma balança digital. Seus valores são dados por: comprimento de 200,000 mm, altura de 23,064 mm, espessura de 2,736 mm e massa de 137,280 g.

- ✓ Etapa 2 – Obtenção da densidade e do módulo de elasticidade.

Com relação à densidade e ao módulo de elasticidade da viga, eles foram obtidos por meio do programa Sonelastic®. Primeiramente, uma amostra da viga com dimensões apresentadas na Tabela 1 foi posicionada no dispositivo de fixação de maneira com que sua condição de contorno fosse fixa – livre. Tal dispositivo é ligado a um computador no qual se

encontra instalado o programa Sonelastic®. A configuração geral do sistema pode ser visto na Figura 19.

Tabela 1 – Dimensões e massa da amostra

<i>Dimensões e massa da amostra utilizada para o cálculo da densidade e do módulo de elasticidade</i>		
Dimensão / massa	Valor	Unidade
Comprimento total	138,59	mm
Comprimento efetivo	119,14	mm
Altura	23,04	mm
Espessura	2,69	mm
Massa	67,299	g

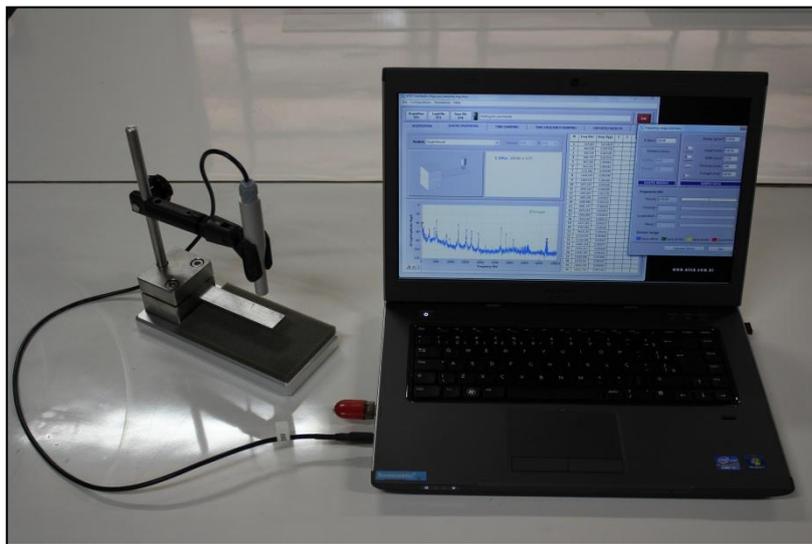


Figura 21 – Configuração geral do equipamento e software Sonelastic®.

O programa mostra diferentes módulos de elasticidade para diferentes valores de frequências, portanto se fez necessária uma simulação onde se pôde obter a frequência aproximada a ser considerada posteriormente na leitura da resposta desejada para o módulo de elasticidade. Tal simulação teve como ponto de partida o valor do módulo de elasticidade

igual a 210 GPa, com isso, obteve-se uma frequência estimada de 158,49 Hz. Então, é possível saber que o valor correto a ser calculado para o módulo de elasticidade fica em torno desse valor de frequência. A simulação pode ser vista na Figura 20.

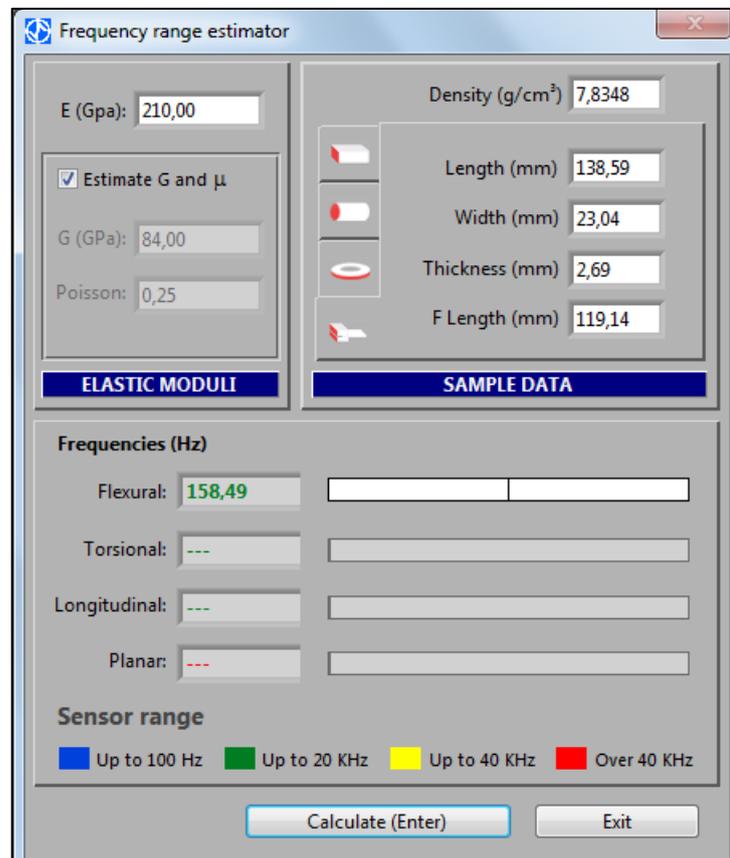


Figura 22 – Simulação para estimação da frequência adequada.

Depois disso, fez-se a aquisição do sinal por meio de uma excitação da amostra. Este sinal foi captado pelo microfone do equipamento tendo em seguida a sua representação mostrada pelo programa.

Após a inserção dos dados da amostra contidos na Tabela 1, a densidade foi calculada e corresponde ao valor mostrado na Equação 156:

$$\rho = 7,83 \text{ g/cm}^3 \quad (156)$$

Em seguida, considerando-se flexão simples, obteve-se, para uma frequência de 146,949 Hz, o módulo de elasticidade apresentado na Equação 157:

$$E = 180,65 \pm 2,37 \text{ GPa} \quad (157)$$

As configurações de aquisição e obtenção de resultados podem ser verificadas nas Figuras 21 e 22.

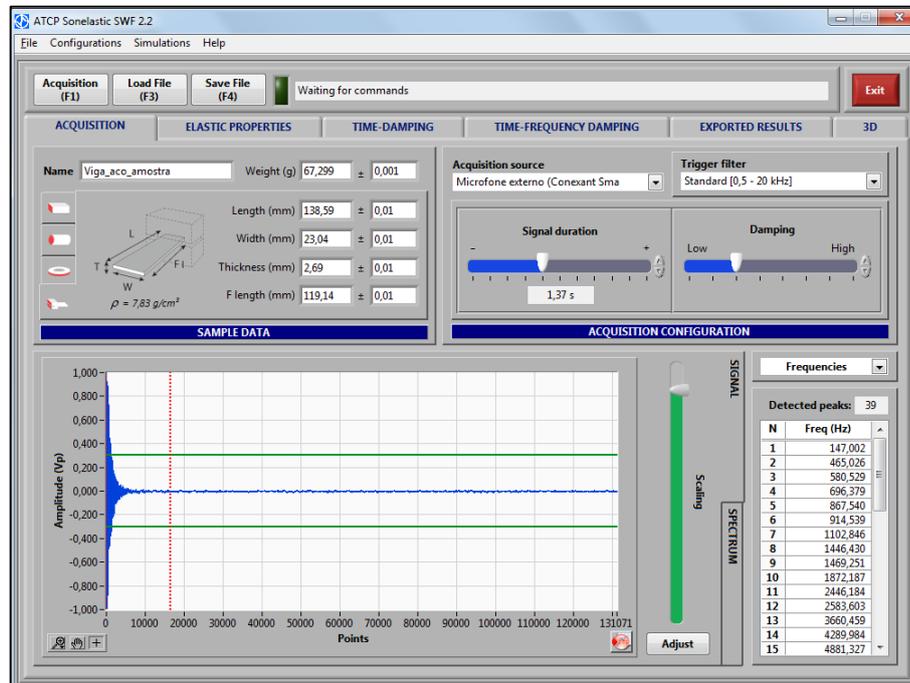


Figura 23 – Configuração de aquisição de sinal do software Sonelastic®.

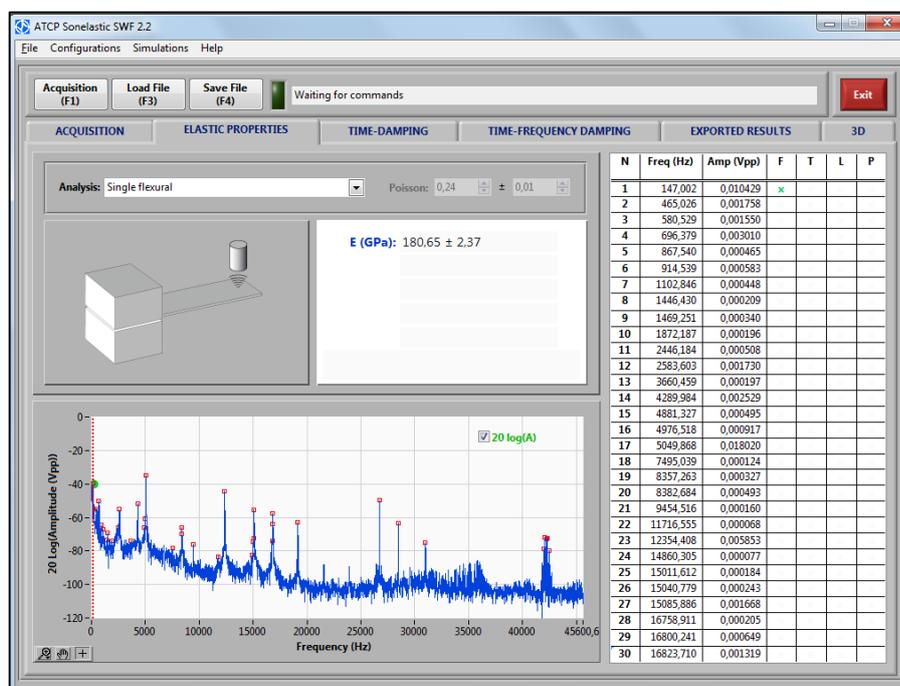


Figura 24 – Configuração da saída de resultados do software Sonelastic®.

Por fim, foi considerado na modelagem de elementos finitos as dimensões, massa e propriedades apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2 – Dimensões, massa e propriedades da viga de aço analisada.

<i>Dimensões, massa e propriedades da viga de aço</i>		
Dimensão / massa / propriedades	Valor	Unidade
Comprimento	200,000	mm
Altura	23,064	mm
Espessura	2,736	mm
Massa	137,28	g
Módulo de elasticidade	183,00	GPa
Densidade	7,830	g/cm ³

✓ Etapa 3 – Cálculo das frequências naturais por elementos finitos.

Neste ponto, fez-se necessária a definição do número de elementos para o modelo de elementos finitos a ser utilizado. Para isso, modelagens em elementos finitos foram realizadas considerando-se os dados da Tabela 2 e para quatro valores de número de elementos: 10, 20, 40 e 80. As frequências naturais relativas aos primeiros 20 modos de vibração foram obtidas em cada caso.

✓ Etapa 4 – Cálculo das frequências naturais teóricas.

As frequências teóricas foram obtidas para o caso de vibração lateral de vigas conforme descrito no capítulo 8 do livro Rao (2009) e os valores relativos aos primeiros 20 modos de vibração foram calculados para cada um dos quatro valores de número de elementos considerados: 10, 20, 40 e 80.

✓ Etapa 5 – Cálculo dos desvios relativos entre as frequências naturais obtidas

por elementos finitos e teóricas.

Os desvios relativos entre as frequências calculadas foram obtidas conforme Equação 158.

$$\text{desvio relativo} = \left(\frac{\text{freq}_{ef} - \text{freq}_t}{\text{freq}_t} \right) \times 100 \quad (158)$$

em que freq_{ef} corresponde à frequência obtida por elementos finitos, enquanto que freq_t diz respeito à frequência teórica.

Respostas gráficas foram construídas como mostra a Figura 23 e a curva referente a 80 elementos foi escolhida, pois é mais representativa para o modelo em estudo.

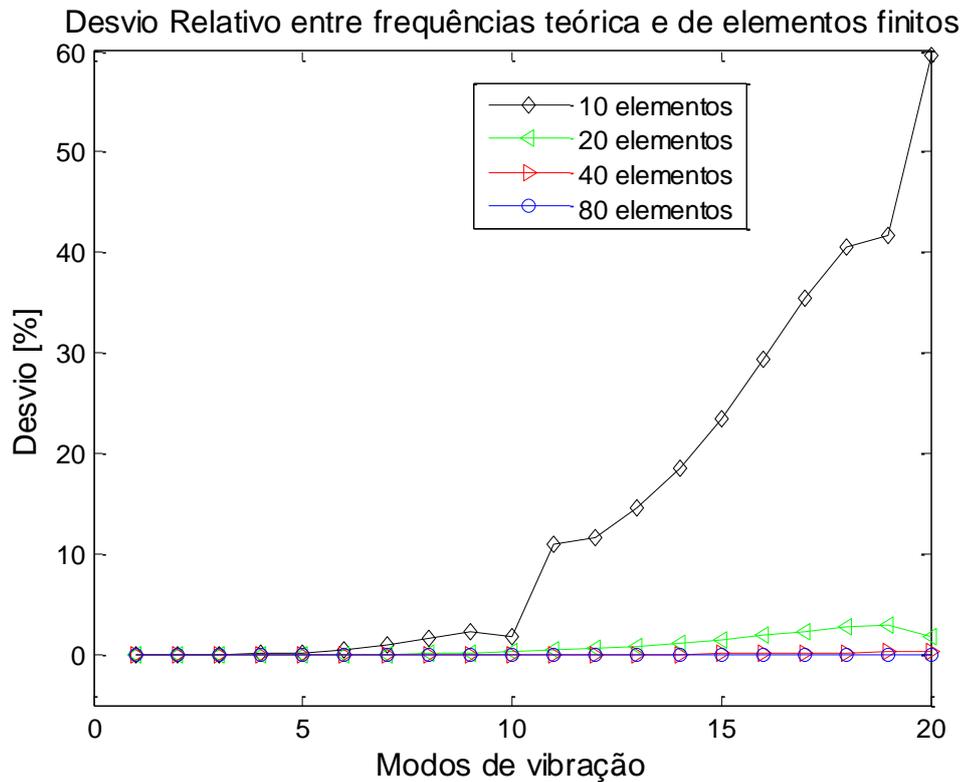


Figura 25 – Desvio relativo entre frequências teóricas e de elementos finitos.

✓ Etapa 5 – Informações finais utilizadas para o cálculo das matrizes médias.

Contudo, a viga de aço em estudo foi modelada em elementos finitos com condições de contorno fixa – livre, 80 elementos de viga de Euler – Bernoulli em um modelo com 81 nós e 160 graus de liberdade tendo por base as dimensões, massa e propriedades da Tabela 2.

5.1.1.2 matriz média de amortecimento

A matriz média de amortecimento foi considerada proporcional às matrizes de massa e rigidez, segundo a Equação 159:

$$\bar{\mathbf{C}} = coef_1 \times \bar{\mathbf{M}} + coef_2 \times \bar{\mathbf{K}} \quad (159)$$

sendo $coef_1 = 1$ e $coef_2 = 10^{-7}$.

5.1.1.3 parâmetro de dispersão

A quantificação de incerteza epistêmica neste caso será realizada para dois valores de parâmetros de dispersão que tem seus limites definidos pela Equação 126. Contudo, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta_{1\mathbf{M}} &= 0,11 \\ \delta_{2\mathbf{M}} &= 0,2 \end{aligned} \quad (160)$$

Somente a matriz massa terá a sua incerteza propagada, portanto, as demais matrizes continuam constantes e iguais a suas matrizes médias. Dessa forma o parâmetro de dispersão será válido apenas para a matriz aleatória de massa.

Vale lembrar que a faixa de valores válidos para o parâmetro de dispersão é apresentada na Equação 126, sendo que seu valor máximo, considerando $n_0 = 10$ nesta mesma equação é dado por $\delta_{\mathbf{K}} = 0,856$. Apesar disso, foram escolhidos valores menores que o valor máximo, pois não se espera que um sistema simples como o analisado neste capítulo, tenha valores de parâmetros de dispersão altos. Os valores mostrados na Equação 160 foram escolhidos arbitrariamente dentro do intervalo permitido.

5.1.1.4 número de graus de liberdade

O número de graus de liberdade do sistema para este caso corresponde a $n = 160$.

5.1.1.5 número inicial de simulações

O número inicial de simulações considerado é $nsi = 600$.

5.1.1.6 banda de frequência estudada

Pela Equação 6, tem-se a seguinte faixa de frequência a ser estudada neste problema:

$$\mathbb{B} = [0,1200] \text{ [Hz]} \quad (161)$$

5.1.1.7 força de excitação e leitura de resultados

Considerando a Equação 143 e Equação 144, pode-se dizer que a força externa de excitação e a velocidade das massas são dadas por:

$$\mathbf{f} = (0, \dots, f_{79}, \dots, 0)^t \quad (162)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = (0, \dots, \dot{u}_{159}, \dots, 0)^t \quad (163)$$

5.1.1.8 desvio

O valor do desvio corresponde a 5%.

5.1.1.9 número máximo de simulações

O número máximo de simulações considerado nesta dissertação corresponde à *niter* = 2000.

5.1.2 Sub-rotina construção da resposta do modelo médio

De maneira simplificada, pode-se dizer que a FRF do modelo médio é obtida por:

$$\bar{H}(\omega) = \frac{\dot{u}_{159}(\omega)}{f_{79}(\omega)} \quad (164)$$

5.1.3 Sub-rotina cálculo dos parâmetros da distribuição considerada

De acordo com a FDP Wishart obtida no Capítulo 2, na simulação estocástica podem-se calcular os parâmetros escalar p e matricial Σ por meio da Equação 142, ou por meio das Equações 109 e 136 respectivamente.

5.1.4 Sub-rotina simulação de Monte Carlo com a obtenção das respostas

A FRF é calculada, de maneira simplificada, como a seguir:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\dot{u}_{159}(\omega)}{f_{79}(\omega)} \quad (165)$$

5.2 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

Os resultados da simulação realizada para a viga de aço com as especificações apresentadas neste capítulo são apresentados por meio de curvas de convergência, da FRF do modelo médio e do IC de 95% da resposta FRF. Como a simulação é realizada para dois parâmetros de dispersão diferentes, como apresentado na Equação 160, as curvas citadas são obtidas considerando-se cada um deles. As respostas são apresentadas no Capítulo 7 juntamente com as respostas experimentais para que sejam analisadas em conjunto.

CAPÍTULO 6

EXPERIMENTO

De uma maneira abrangente, pode-se dizer que experimentos são realizados com o objetivo de se analisar, sob certas condições, o comportamento de um sistema para que conclusões específicas possam ser obtidas sobre ele. No caso de sistemas dinâmicos, os modelos ensaiados “[...] visam determinar as características dinâmicas da estrutura por meio de análise de sinais. Os sinais são obtidos por meio de ensaios de vibração que podem ser realizados em laboratório (modelos reduzidos da estrutura) ou em campo (estrutura real)” (Almeida, 2012 *apud* Ferreira Neto, 2005).

Além disso, pode-se fazer, para estudos de quantificação de incertezas epistêmicas, ensaios de vibração livre ou vibração forçada cujos resultados podem ser tratados no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Ainda assim, independente do modelo de ensaio adotado, convém citar que devem ser tomadas as medidas necessárias para que a coleta de dados experimentais seja feita com boa precisão, possibilitando-se dessa maneira a obtenção de resultados satisfatórios.

Neste capítulo são mostrados detalhes sobre o experimento realizado com um sistema dinâmico constituído por uma viga de aço de 200 mm na condição de contorno fixa – livre, cujos resultados são comparados com as respostas obtidas na simulação da mesma viga. Detalhes sobre dimensões, massa e propriedades dessa viga de aço podem ser verificados no

Capítulo 5, juntamente com informações a respeito da entrada de dados no programa construído pela autora e que foi utilizado para a simulação estocástica desse sistema.

É apresentada também uma comparação gráfica entre respostas impulsivas e FRF onde se poderá notar a coincidência das frequências naturais nesses ensaios. Além disso, tais valores de frequência ainda são comparados com valores de frequências teóricas com o objetivo de se comprovar a veracidade das respostas experimentais. As frequências teóricas são calculadas para o caso de vibração lateral de vigas conforme descrito no capítulo 8 do livro Rao (2009).

A resposta FRF é também utilizada no Capítulo 7, onde é analisada juntamente com os resultados produzidos pelo programa desenvolvido pela autora considerando o mesmo sistema dinâmico.

6.1 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Esta dissertação teve seus ensaios realizados no Laboratório de Vibrações Mecânicas do Instituto de Engenharia Mecânica (IEM) da Universidade Federal de Engenharia de Itajubá (UNIFEI). Esta etapa tem por finalidade a obtenção da FRF e da resposta impulsiva do sistema ensaiado, que neste caso é representado pela viga de aço já descrita.

Vale comentar que a resposta impulsiva se caracteriza pela leitura de resultados, neste caso da velocidade, em um ponto específico sem que se considere a intensidade da força de excitação aplicada ao sistema. Já o caso da FRF, a leitura da velocidade se faz no mesmo ponto de leitura da resposta impulsiva, porém, neste caso, tal valor é dividido pela intensidade da força de excitação aplicada.

6.1.1 Configurações do experimento

O ensaio foi realizado para a faixa de frequência de 0 a 1200 Hz. A propagação da incerteza ocorre na matriz aleatória de massa. Foram realizadas três diferentes configurações neste ensaio devido ao posicionamento aleatório de imãs (cada ima tem massa igual a 0,60817

g) na viga. O acréscimo dos imãs tem por objetivo demonstrar que qualquer alteração no projeto, ou neste caso, na viga em estudo, seja uma acréscimo de reforço ou fixação de equipamentos na viga por exemplo, faz com que surjam ainda mais incertezas que provocam alterações na resposta do sistema. As FRF neste caso se tornam diferentes da FRF do projeto original.

As configurações ensaiadas são:

Configuração 1: viga sem o acréscimo dos imãs.

Configuração 2: viga com acréscimo de dois imãs nas posições 95 mm e 150 mm da viga.

Configuração 3: viga com acréscimo de 4 imãs nas posições 20 mm, 60 mm, 95 mm e 150 mm da viga.

6.1.2 Descrição do experimento

Independentemente da configuração adotada, inicialmente a viga é fixada em uma de suas extremidades por um dispositivo de fixação. Posteriormente provoca-se o impulso por meio de uma esfera metálica (diâmetro de 50 mm) para se obter a resposta impulsiva, ou de um martelo de impacto instrumentado quando o objetivo é obter a FRF. Os dois casos foram realizados e são representados respectivamente pelas Figuras 24 e 25.

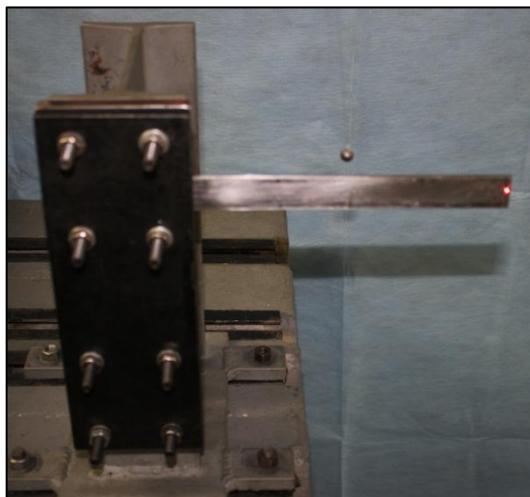


Figura 26 – Excitação da viga para obtenção da resposta impulsiva.



Figura 27 – Excitação da viga para obtenção da FRF.

Tanto no caso da utilização da esfera quanto no caso do martelo, a vibração na viga é provocada pela excitação na posição central da viga, correspondente ao comprimento de 100 mm de suas extremidades.

Já no caso da leitura de resultados, representado pelo sinal de velocidade provocado pelo movimento da viga, ele é captado pelo vibrômetro a laser em sua extremidade, ou seja, na posição de comprimento 200 mm.

Os sinais da célula de carga do martelo de impacto e do vibrômetro laser foram conectados a um analisador de sinais que mostra então as curvas da resposta impulsiva e da FRF obtidas no ensaio. A Figura 26 apresenta uma visão geral da montagem realizada.



Figura 28 – Montagem dos componentes de ensaio.

Somente a matriz massa do sistema dinâmico teve a sua incerteza propagada, e para que fosse possível realizar alguns estudos referentes ao acréscimo de massa no sistema, que

corresponde a um aumento da incerteza na matriz massa, primeiramente duas e, posteriormente quatro ímãs foram colocados em algumas posições da viga como descrito nas configurações 2 e 3 apresentadas no item 6.1.1 deste capítulo. As configurações podem ser visualizadas nas Figuras 27 e 28:



Figura 29 – Configuração do sistema com acréscimo de 2 ímãs.



Figura 30 – Configuração do sistema com acréscimo de 4 ímãs.

6.2 RESPOSTAS IMPULSIVAS E FRF OBTIDAS NO ENSAIO

Nesta seção serão apresentados os resultados do experimento para respostas impulsivas e FRF tendo em vista a necessidade de comparação dos resultados no que diz respeito às frequências naturais resultantes do ensaio com frequências teóricas calculadas. Dessa forma, como já colocado no início deste capítulo, é possível se comprovar a veracidade das respostas experimentais obtidas.

O experimento foi realizado para uma banda de frequência de 0 – 1200 Hz com uma resolução de 2 Hz, porém as respostas são apresentadas separadamente para as faixas de frequência de 0 – 800 Hz e de 800 – 1200 Hz. Esta divisão será considerada apenas para possibilitar melhor visualização dos resultados.

6.2.1 Faixa de frequência: 0 – 800 Hz

Os resultados apresentados nesta sub-seção para a faixa de frequência definida de 0 – 800 Hz correspondem aos resultados experimentais para as três configurações apresentadas no item 6.1.1 deste capítulo.

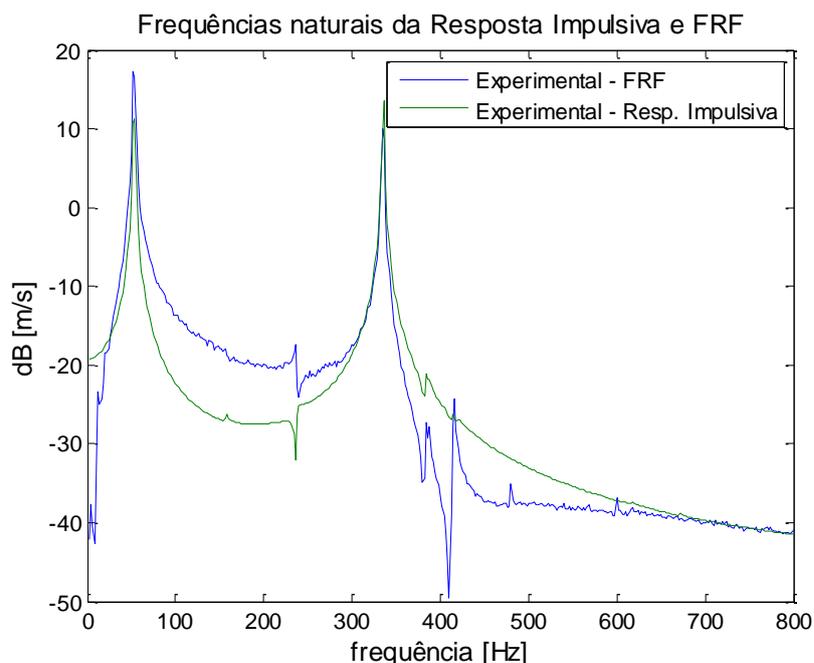


Figura 31 – FRF e Resposta impulsiva do experimento sem o acréscimo de imãs.

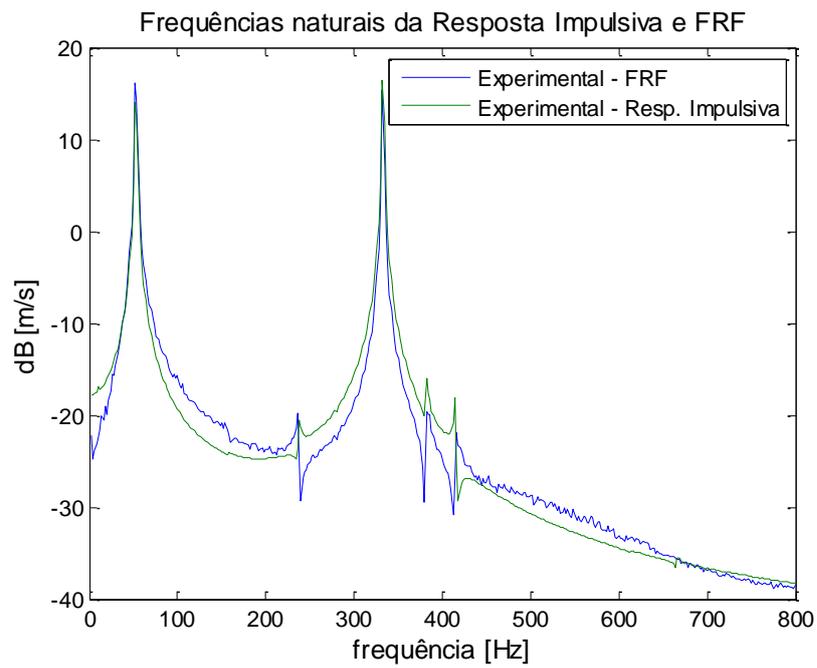


Figura 32 – FRF e Resposta impulsiva do experimento com acréscimo de dois ímãs.

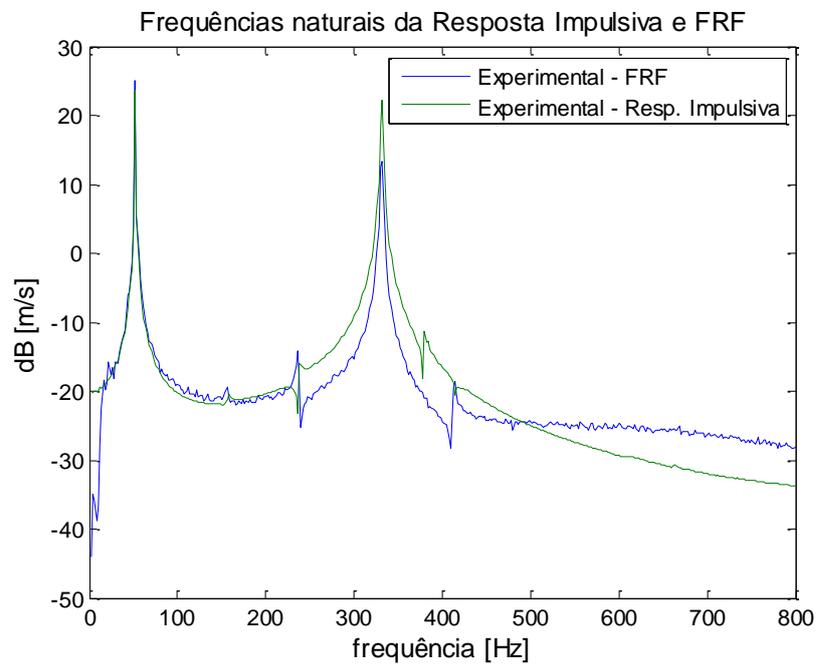


Figura 33 – FRF e Resposta impulsiva do experimento com acréscimo de quatro ímãs.

6.2.2 Faixa de frequência: 800 – 1200 Hz

Nesta sub-seção, serão apresentadas as respostas para a faixa de frequência definida de 800 - 1200 Hz que correspondem aos resultados experimentais para as três configurações apresentadas no item 6.1.1 deste capítulo.

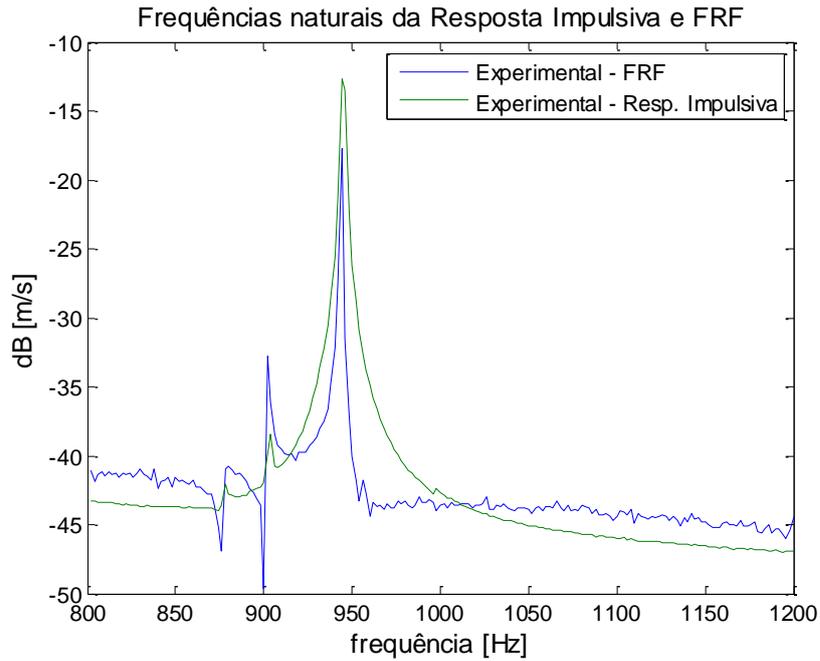


Figura 34 – FRF e Resposta impulsiva do experimento sem o acréscimo de imãs.

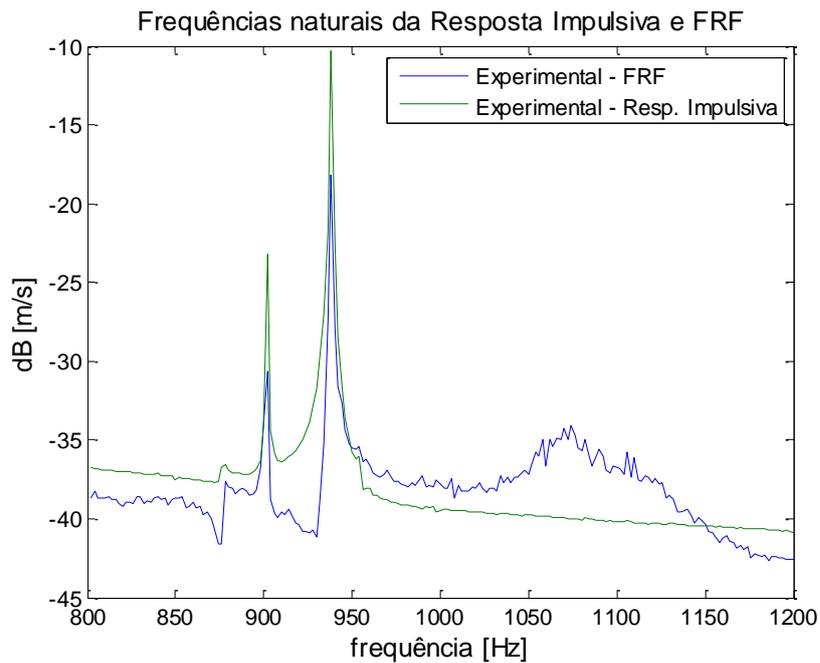


Figura 35 – FRF e Resposta impulsiva do experimento com acréscimo de dois imãs.

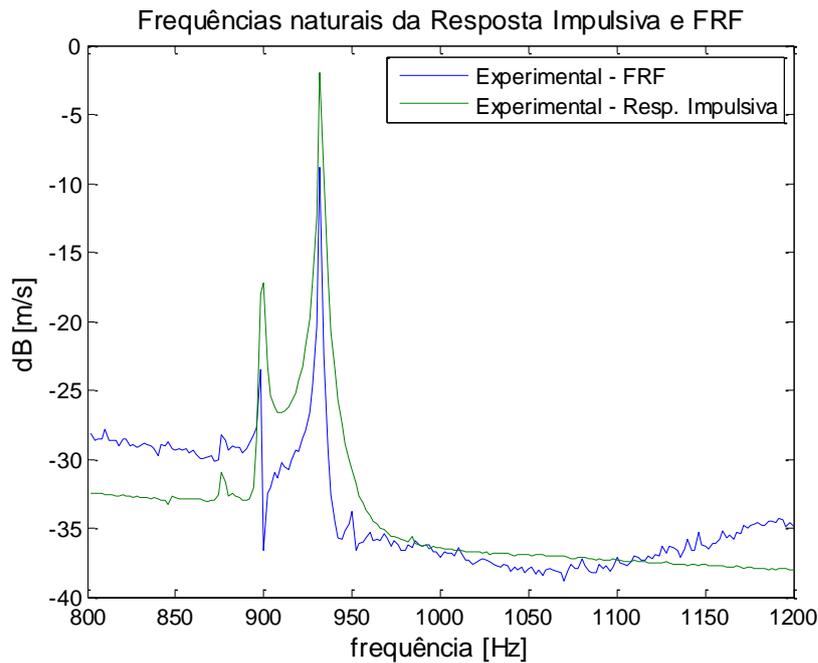


Figura 36 – FRF e Resposta impulsiva do experimento com acréscimo de quatro imãs.

6.3 FREQUÊNCIAS TEÓRICAS

As frequências teóricas são calculadas para o caso de vibração lateral de vigas conforme descrito no capítulo 8 do livro Rao (2009). Elas foram calculadas para a faixa de frequência de 0 – 1200 Hz o que resultou nos valores de 53 Hz, 335 Hz e 937 Hz para a primeira, segundo e terceira frequências naturais.

6.4 COMPARATIVO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

Nesta seção o objetivo é se fazer uma comparação entre as frequências naturais obtidas nas respostas impulsivas, FRF e teóricas. Os resultados são mostrados nas Tabelas 3 e 4 para as faixas de frequência de 0 – 800 Hz e de 800 – 1200 Hz respectivamente. Nos dois casos foram consideradas as três configurações apresentadas no item 6.1.1 deste capítulo.

Pode-se notar ao se observar a Tabela 3, que corresponde aos resultados para faixa de frequência de 0 – 800 Hz, que várias frequências naturais coincidiram em seus valores exatos,

tendo um desvio igual a 0%. Para os demais valores, o desvio calculado é bem pequeno e varia na ordem de 0,298% para o ensaio de viga sem acréscimo de imãs, para valores de até 1,194% para as demais configurações.

No caso da Tabela 4, que contém os resultados para a faixa de frequência de 800 – 1200 Hz, pode-se observar que os desvios calculados, bem como os da Tabela 3, correspondem a valores bem pequenos, sendo que dois deles resultaram em valores iguais a zero. Em geral, tais desvios variaram na ordem de 0,106% a 0,847% para as configurações de ensaio adotadas.

Tabela 3 – Valores das frequências naturais da resposta impulsiva, FRF e teóricas para faixa de frequência de 0 – 1200 Hz

<i>Frequências naturais em [Hz] para faixa de 0 – 1200 Hz</i>				
		Sem acréscimo de imãs	Com acréscimo de dois imãs	Com acréscimo de quatro imãs
Resposta Impulsiva	1ª frequência	53	52	52
	2ª frequência	336	332	331
	3ª frequência	945	938	932
FRF	1ª frequência	53	52	52
	2ª frequência	335	332	331
	3ª frequência	944	938	932
Teórica	1ª frequência	53	53	53
	2ª frequência	335	335	335
	3ª frequência	937	937	937

Tabela 4 – Comparativo entre frequências naturais da resposta impulsiva, FRF e teóricas para faixa de frequência de 0 – 1200 Hz

<i>Desvios das Frequências naturais em [Hz] para faixa de 0 – 1200 Hz</i>				
		Sem acréscimo de imãs	Com acréscimo de dois imãs	Com acréscimo de quatro imãs
Desvio [%] entre Resposta impulsiva e FRF	1ª frequência	0,000	0,000	0,000
	2ª frequência	0,298	0,000	0,000
	3ª frequência	0,106	0,000	0,000
Desvio [%] entre Resposta impulsiva e teórica	1ª frequência	0,000	1,887	1,887
	2ª frequência	0,298	0,896	1,194
	3ª frequência	0,847	0,107	0,534
Desvio [%] entre FRF e teórica	1ª frequência	0,000	1,887	1,887
	2ª frequência	0,000	0,896	1,194
	3ª frequência	0,742	0,107	0,534

6.5 CONCLUSÕES SOBRE O EXPERIMENTO

O experimento realizado com o sistema dinâmico amortecido representado por uma viga de aço de 200 mm na condição de contorno fixa – livre e na faixa de frequência de 0 – 1200 Hz foi apresentado neste capítulo de forma que o procedimento experimental e a obtenção de respostas fossem devidamente detalhados. Três configurações experimentais foram ensaiadas, sendo a primeira constituída pela viga sem o acréscimo de imãs, a segunda corresponde à mesma viga, mas com o acréscimo de dois imãs, e na terceira configuração um total de quatro imãs são acrescentados na viga. Além disso, respostas impulsivas e FRF foram calculadas.

Os resultados referentes às três configurações adotadas mostraram boa concordância já que os desvios relativos entre as curvas de resposta impulsiva e FRF resultaram bem baixos ficando na faixa de 0% a 0,298% para a primeira configuração e 0% para a segunda e terceira configurações. Como se pode notar, para a maioria das frequências naturais obtidas, houve concordância exata.

No caso dos desvios relativos às frequências naturais da resposta impulsiva e teóricas, eles também se apresentaram bem pequenos. Para a primeira configuração obteve-se os valores de 0%, 0,298% e 0,847% para a primeira, segunda e terceira frequência respectivamente. Para as demais configurações os valores variaram de 0,107% a 1,887%.

Para os valores dos desvios relativos referentes às frequências naturais da FRF e teóricas não foi diferente, apresentaram também valores baixos como nos casos descritos anteriormente. Verificam-se aqui variações entre 0,107% e 1,887% para as três configurações.

Uma observação cabe neste ponto, e se refere ao fato de que ao se observar os valores das frequências naturais de uma configuração para outra, essas frequências tem seus valores diminuídos tanto para a primeira quanto para a segunda e terceira frequências. Isto ocorre devido ao acréscimo de massa na viga que faz com a frequência da nova configuração do sistema tenha seu valor diminuído. Entretanto, tomou-se o cuidado neste experimento de se considerar imãs com uma massa pequena, isso não provocou acréscimos altos de massa na viga, portanto as variações de frequências foram pequenas.

De qualquer forma e, independente da configuração adotada, não ocorreram variações expressivas nos valores dos desvios das frequências naturais considerando-se a resposta impulsiva, FRF e teóricas, podendo-se então concluir que o ensaio realizado produz bons resultados no que diz respeito à veracidade das frequências naturais. Além disso, suas respostas são satisfatórias e podem ser utilizadas no Capítulo 7 onde serão analisadas juntamente com os resultados da simulação estocástica.

CAPÍTULO 7

RESULTADOS SIMULADOS E EXPERIMENTAIS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos nas simulações realizadas por meio do programa computacional desenvolvido pela autora detalhado no Capítulo 5, juntamente com as respostas experimentais como demonstrado no Capítulo 6. No caso das simulações, a FRF do modelo médio e os IC de 95% das respostas foram obtidos, já no caso do experimento, obteve-se a FRF do sistema ensaiado.

Nos dois casos, simulação e experimento, um sistema dinâmico constituído por uma viga de aço de 200 mm na condição de contorno fixa – livre foi considerada. Simulações foram realizadas levando-se em conta cada um dos três valores do parâmetro de dispersão, como mostra a Equação 160. Com isso, mais uma vez as respostas obtidas para cada parâmetro poderão ser avaliadas. Ademais, a distribuição Wishart foi utilizada para a propagação da incerteza na matriz massa, tendo em vista que ela foi obtida no Capítulo 2 como a correta distribuição para a propagação da incerteza epistêmica nas matrizes aleatórias do sistema dinâmico.

Por outro lado, o objetivo principal deste capítulo corresponde à análise das respostas com relação ao fato do modelo médio representar satisfatoriamente ou não o sistema real estudado no experimento, e independentemente do resultado, justificativas são apresentadas.

7.1 APRESENTAÇÃO DAS RESPOSTAS

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos nas simulações estocásticas (FRF do modelo médio e IC de 95% das respostas) e no experimento (FRF). Os dois casos foram realizados para uma banda de frequência de 0 – 1200 Hz, sendo que no experimento a resolução foi de 2 Hz. Por outro lado, tais resultados são apresentados separadamente para as faixas de frequência de 0 – 800 Hz e de 800 – 1200 Hz. Esta divisão é considerada apenas para possibilitar melhor visualização dos resultados.

7.1.1 Faixa de frequência: 0 – 800 Hz

São apresentadas a seguir as respostas para a faixa de frequência definida de 0 - 800 Hz considerando-se as três configurações apresentadas no item 6.1.1 do Capítulo 6. Tais resultados são mais uma vez divididos de acordo com o parâmetro de dispersão utilizado na análise para melhor organização do texto e para se facilitar a interpretação de resultados.

7.1.1.1 respostas para parâmetro de dispersão igual a 0,11

As respostas são apresentadas de forma que a curva de convergência mostrada é seguida pelo correspondente resultado do IC de 95% dos resultados para as três configurações consideradas na análise.

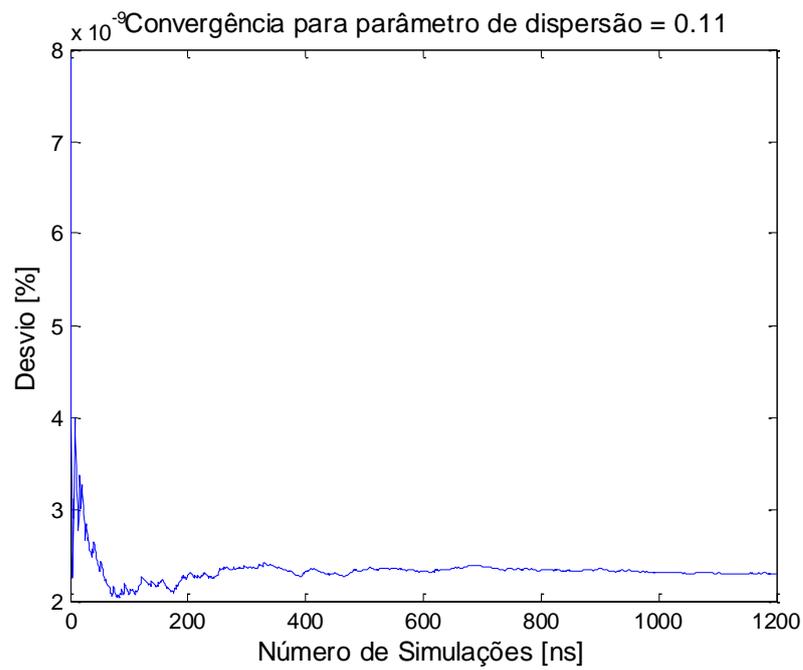


Figura 37 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_M = 0,11$. Modelo sem acréscimo de imãs.

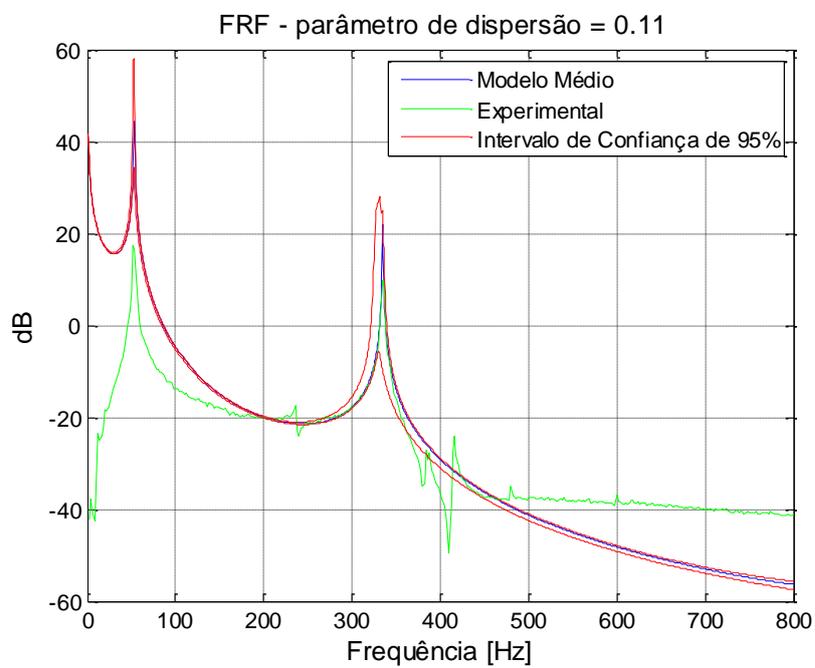


Figura 38 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_M = 0,11$. Modelo sem acréscimo de imãs.

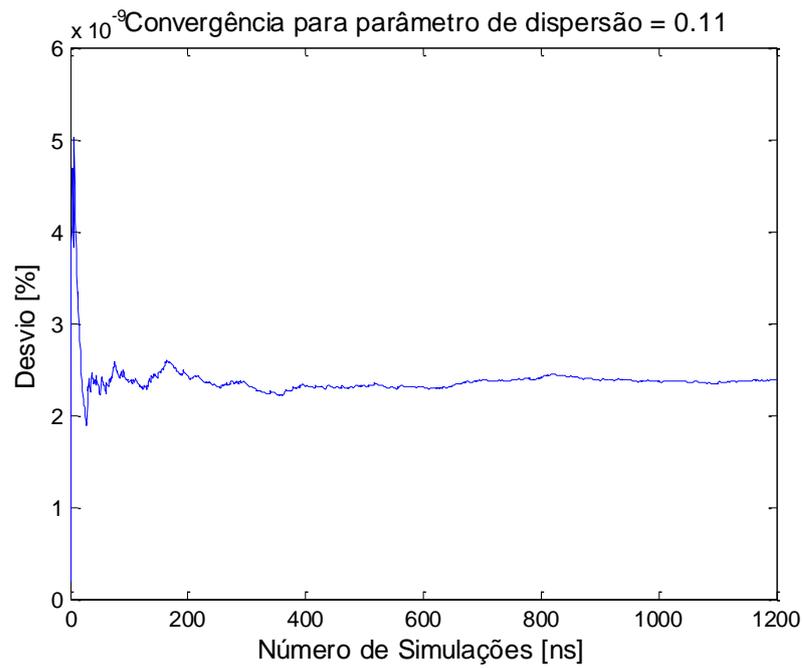


Figura 39 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_M = 0,11$. Modelo com acréscimo de 2 imãs.

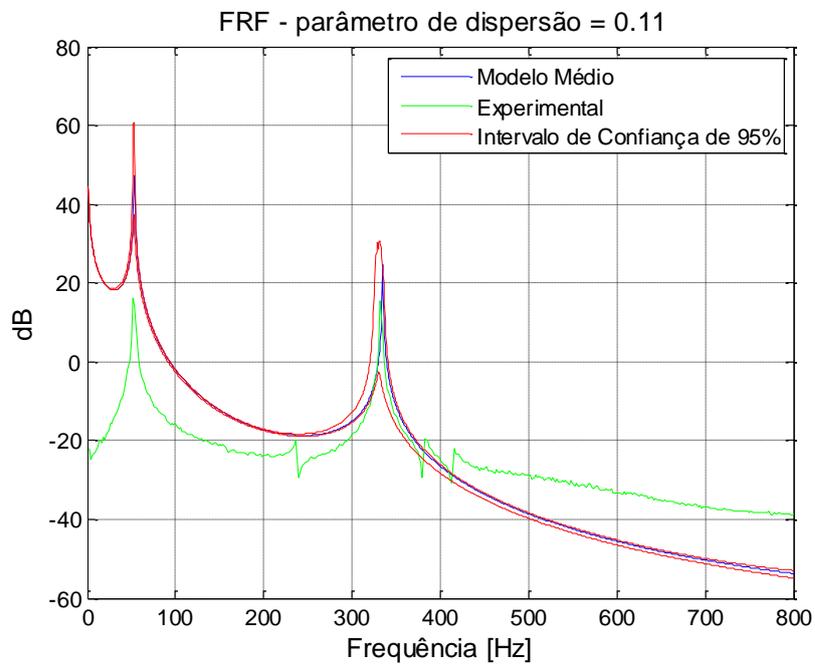


Figura 40 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_M = 0,11$. Modelo com acréscimo de 2 imãs.

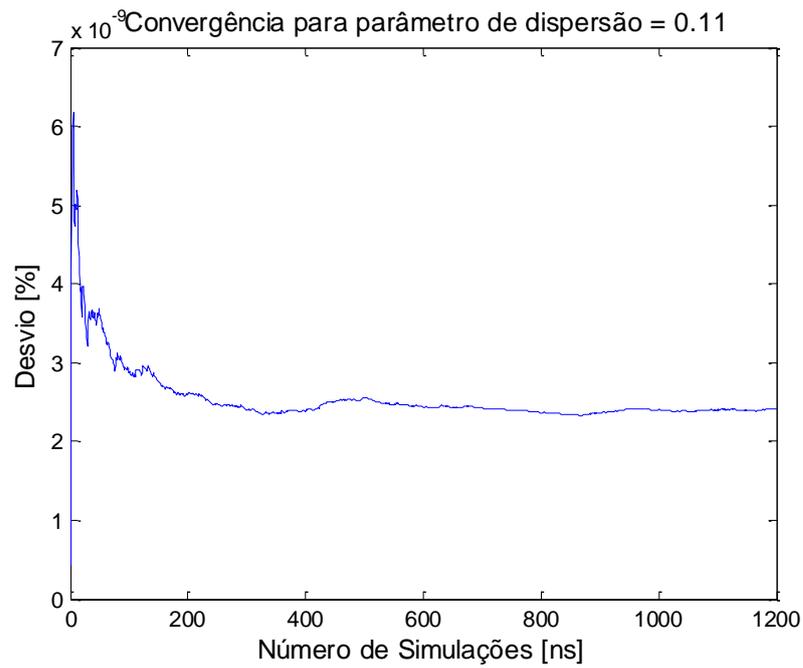


Figura 41 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_M = 0,11$. Modelo com acréscimo de quatro ímãs.

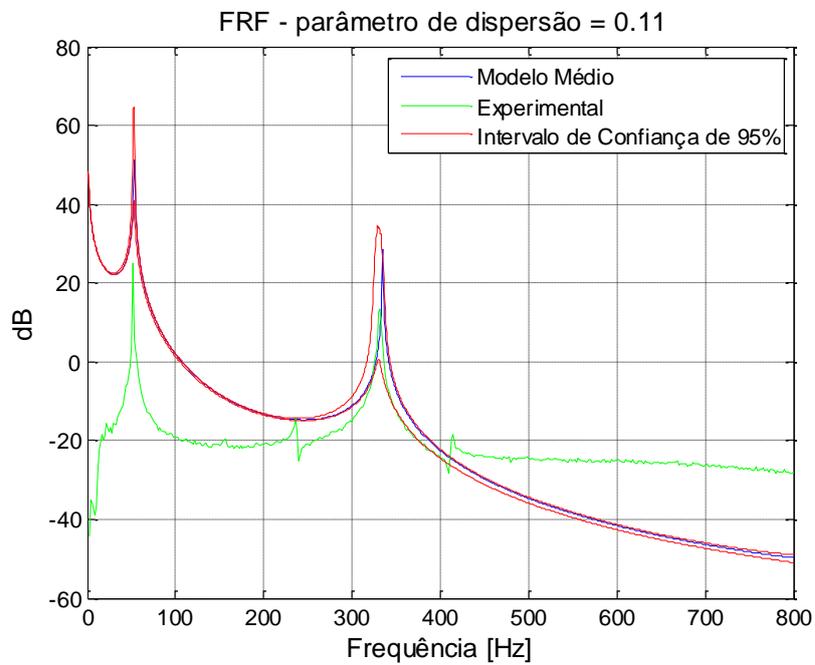


Figura 42 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_M = 0,11$. Modelo com acréscimo de quatro ímãs.

Observando-se as Figuras 37, 39 e 41, pode-se dizer que uma boa convergência é alcançada para um valor do número de simulações $n_s = 1000$.

Considerando-se agora as Figuras 40 e 42, não houve concordância entre a FRF do modelo médio e a FRF do ensaio e essas duas curvas estão em grande parte fora do IC de 95%. Por outro lado, ao se observar a Figura 38, apesar de também não haver concordância na faixa de frequência de 0 – 200 Hz devido ao ganho da FRF experimental e as FRF simuladas serem diferentes nesta faixa, pode-se dizer que a FRF do modelo médio e a FRF do ensaio concordaram bem para uma faixa aproximada de frequência de 200 a 450 Hz, permanecendo dentro do IC calculado.

De maneira geral pode-se dizer através da observação dos resultados obtidos que o modelo médio não representa bem o sistema real ensaiado em nenhuma das configurações, exceto para a faixa de frequência de 200 – 450 Hz da Figura 38. Isto se justificaria pelo fato de que em baixas frequências a quantificação da incerteza não paramétrica não é suficiente para ajustar o modelo médio à realidade do sistema estudado. Na verdade, para faixas de baixas frequências, é predominante a quantificação da incerteza paramétrica.

7.1.1.2 respostas para parâmetro de dispersão igual a 0,2

A seguir são apresentadas as respostas referentes às curvas de convergência e em seguida seus respectivos IC de 95% dos resultados para as três configurações consideradas.

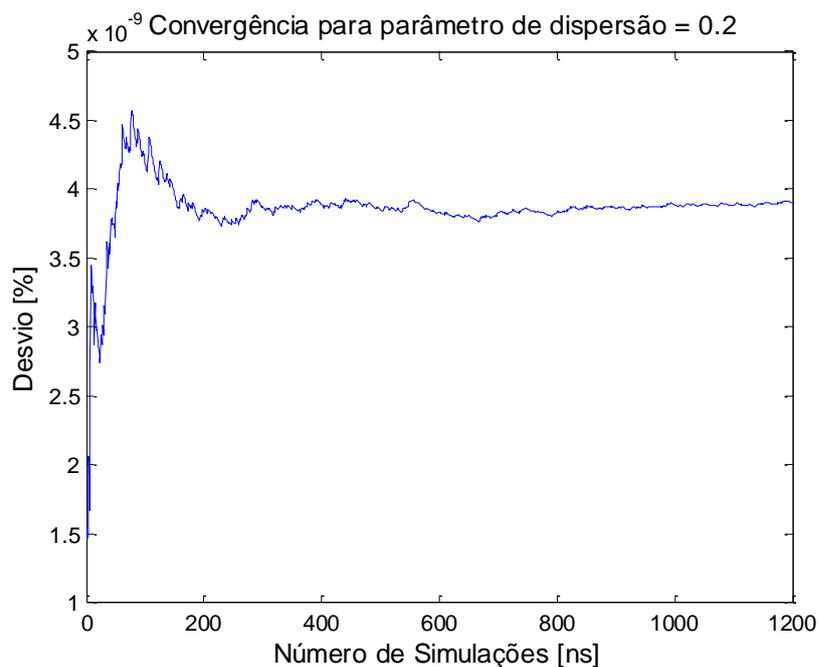


Figura 43 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_M = 0,2$. Modelo sem acréscimo de imãs.

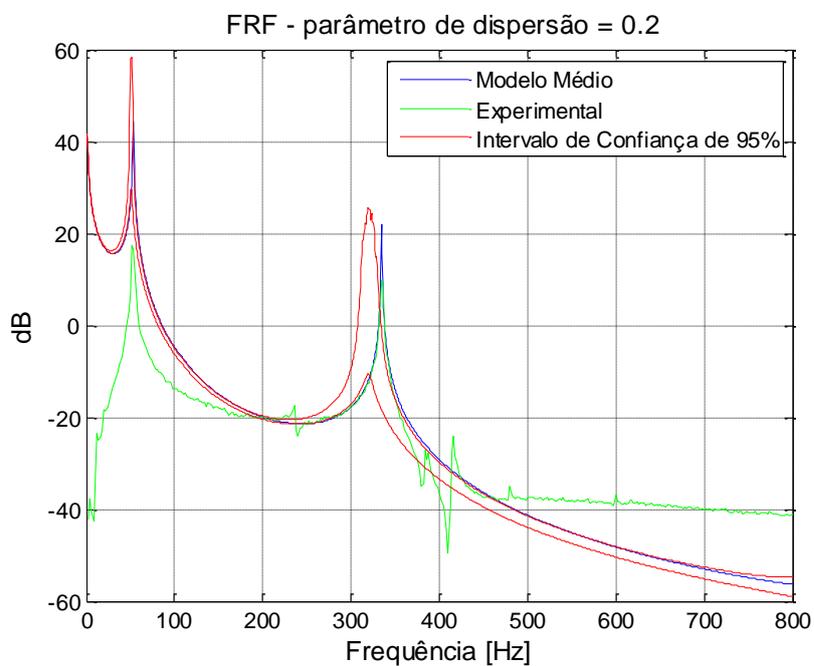


Figura 44 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_M = 0,2$. Modelo sem acréscimo de imãs.

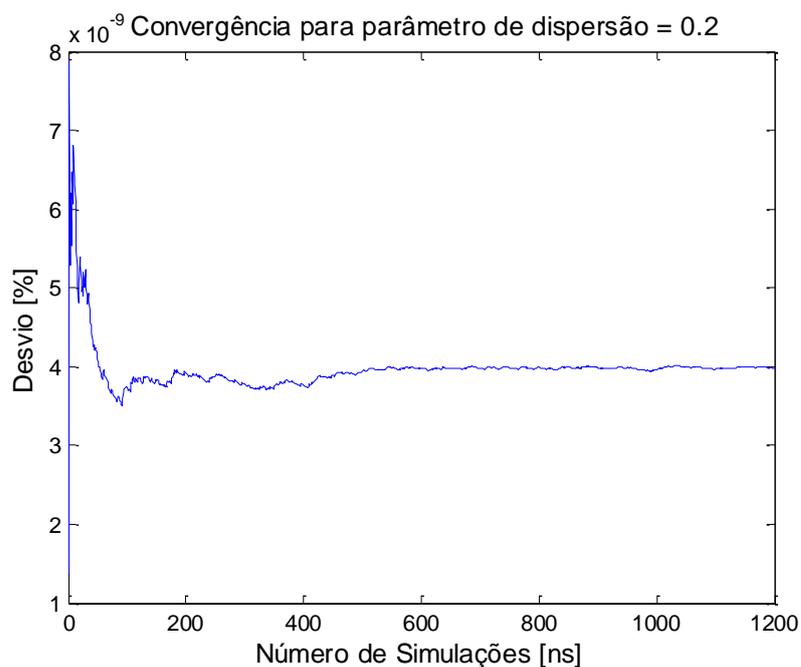


Figura 45 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_M = 0,2$. Modelo com acréscimo de 2 imãs.

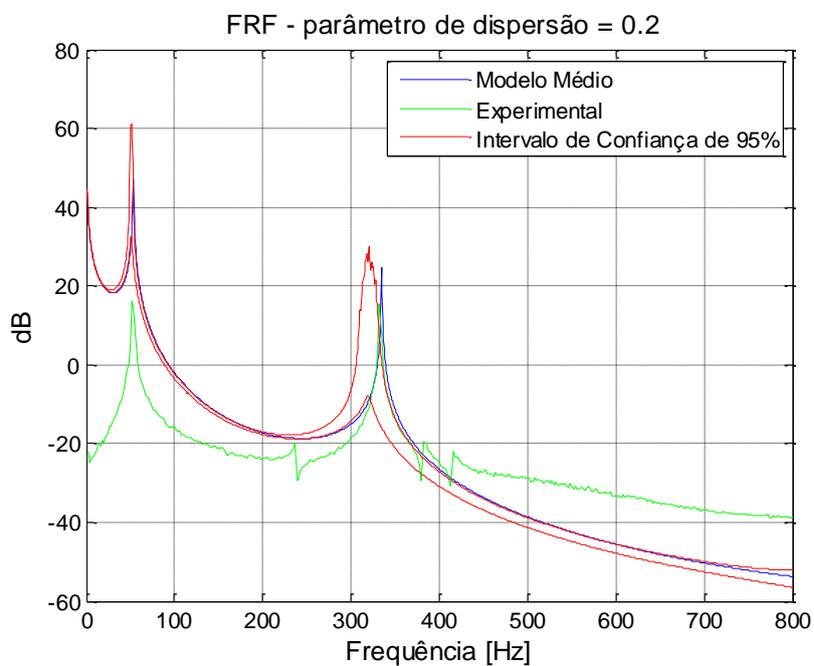


Figura 46 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_M = 0,2$. Modelo com acréscimo de 2 imãs.

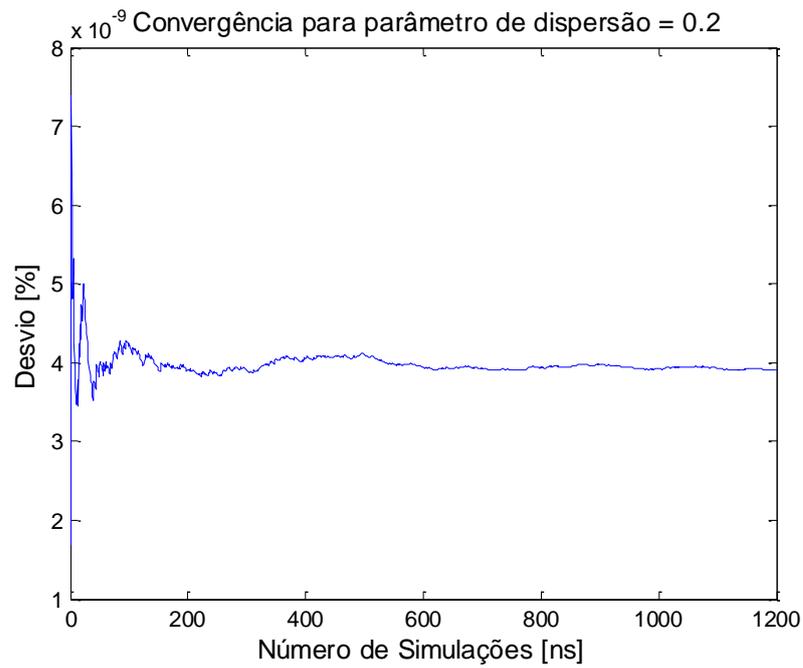


Figura 47 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_M = 0,2$. Modelo com acréscimo de quatro ímãs.

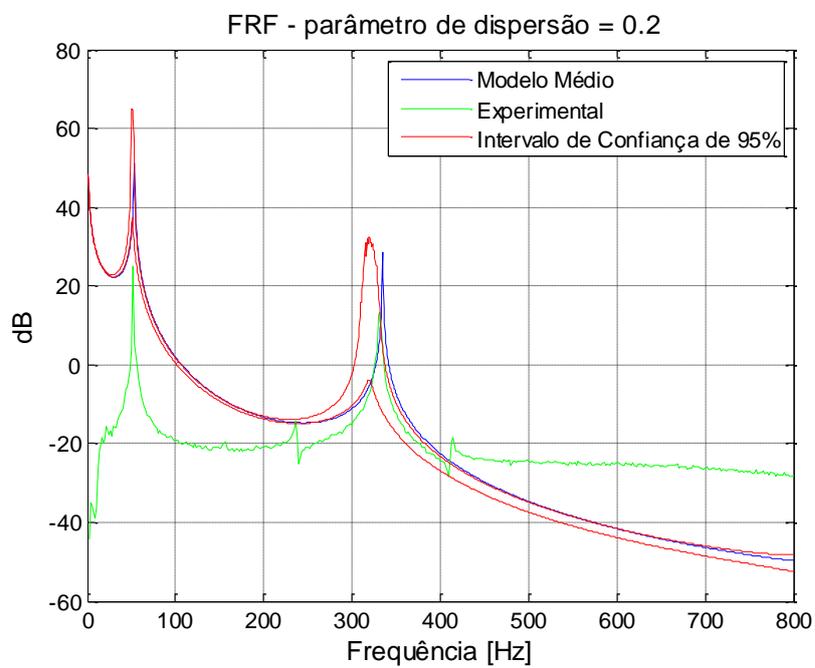


Figura 48 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_M = 0,2$. Modelo com acréscimo de quatro ímãs.

Ao se observar as Figuras 43, 45 e 47, pode-se dizer que, como no item anterior, uma boa convergência é alcançada para um valor do número de simulações $n_s = 1000$.

Levando-se em conta as Figuras 46 e 48, não houve concordância das FRF do modelo médio e do ensaio, e o comportamento de saída das curvas do IC permanece o mesmo. Por outro lado, no caso da Figura 44, apesar de também não haver concordância na faixa de frequência de 0 – 200 Hz devido ao ganho da FRF experimental e as FRF simuladas serem diferentes nesta faixa, a FRF do modelo médio e a FRF do ensaio continuam concordando para a faixa aproximada de frequência de 200 a 450 Hz, porém percebe-se a saída dessas curvas do IC de 95% calculado.

O que se pode concluir dos resultados apresentados aqui é que, de uma maneira geral, a FRF obtida para o modelo médio não representa bem o sistema real ensaiado em nenhuma das configurações. A justificativa seria a mesma do item anterior, ou seja, em baixas frequências se faz necessária uma análise paramétrica. A exceção fica por conta da primeira configuração, na faixa de frequência de 200 – 450 Hz (Figura 44). Com relação ao comportamento das duas curvas mencionadas saírem do IC de 95% calculado, isto pode ser justificado pelo valor elevado do parâmetro de dispersão para o sistema em estudo.

7.1.2 Faixa de frequência: 800 – 1200 Hz

Nesta subseção, são apresentadas as respostas para a faixa de frequência definida de 800 - 1200 Hz levando-se em conta as três configurações apresentadas no item 6.1.1 do Capítulo 6. Os resultados serão subdivididos de acordo com o parâmetro de dispersão utilizado na análise para melhor organização do texto e para se facilitar a interpretação de resultados.

7.1.2.1 respostas para parâmetro de dispersão igual a 0,11

Os resultados apresentados abaixo se referem à curva de convergência seguida pelo respectivo IC de 95% dos resultados para as três configurações consideradas.

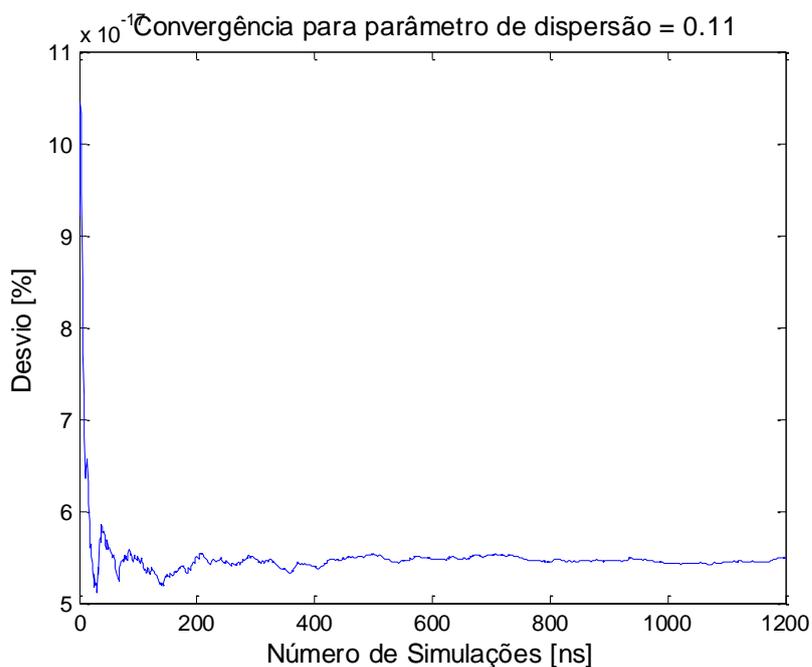


Figura 49 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_M = 0,11$. Modelo sem acréscimo de imãs.

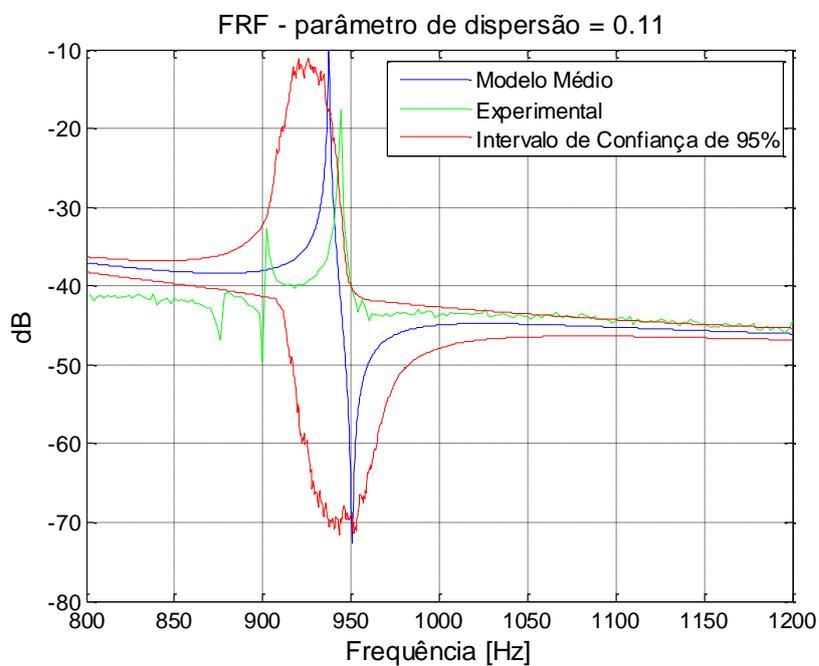


Figura 50 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_M = 0,11$. Modelo sem acréscimo de imãs.

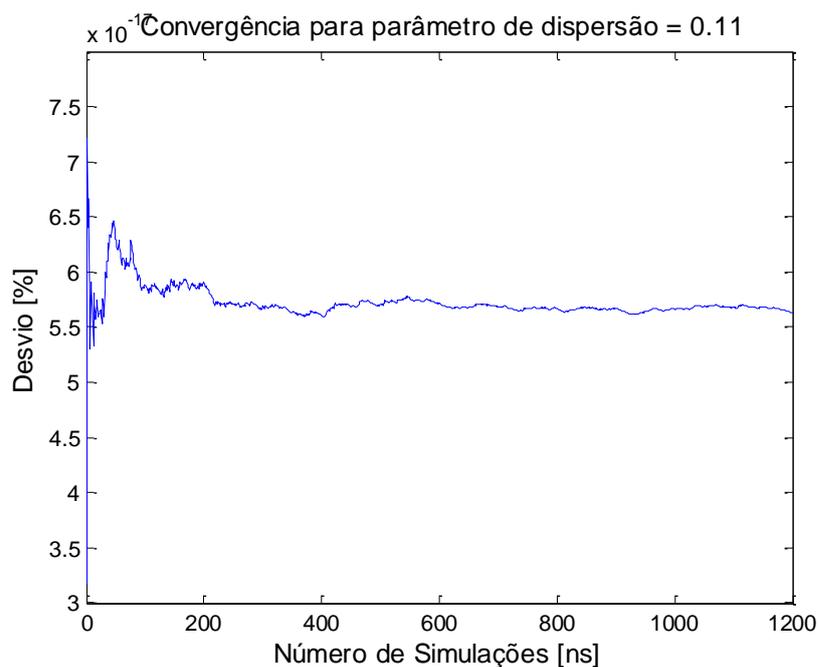


Figura 51 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_M = 0,11$. Modelo com acréscimo de 2 imãs.

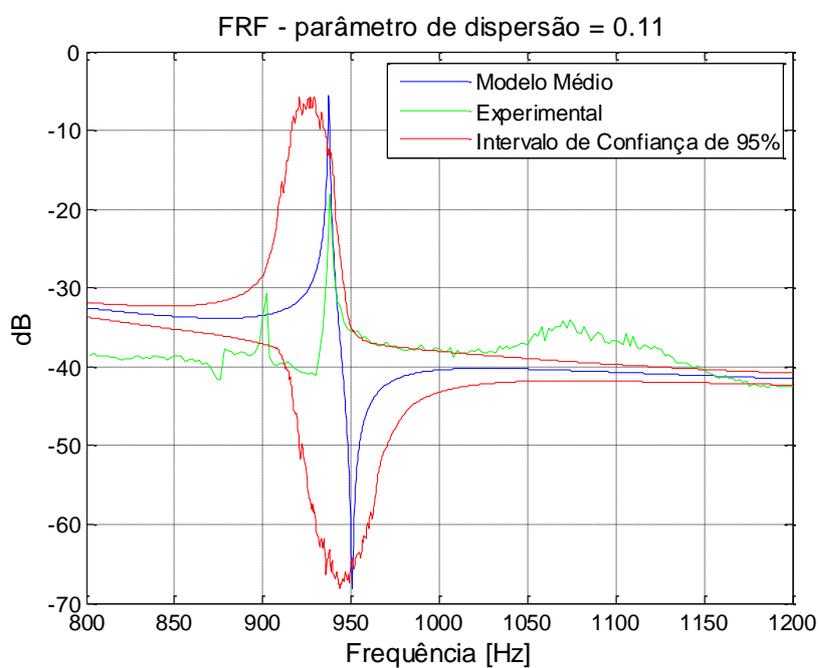


Figura 52 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_M = 0,11$. Modelo com acréscimo de 2 imãs.

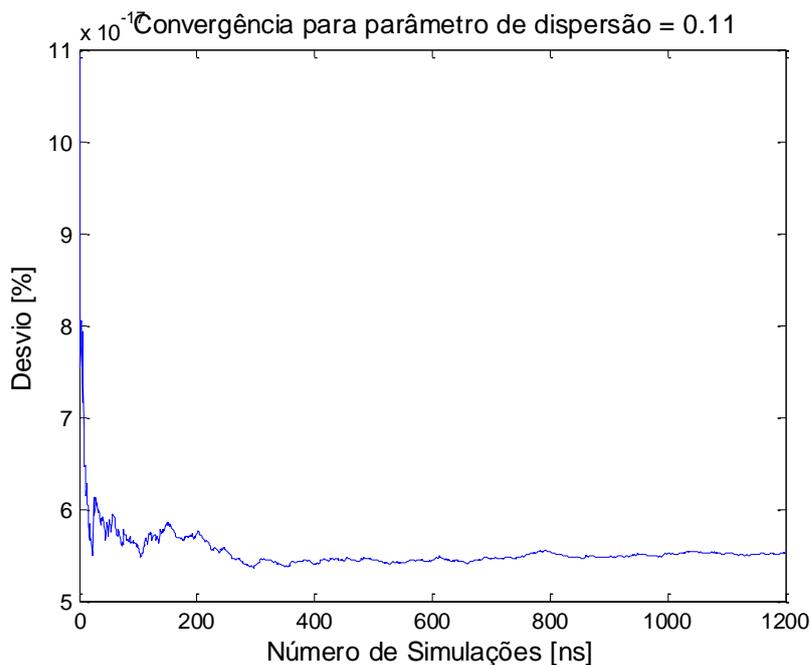


Figura 53 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_M = 0,11$. Modelo com acréscimo de quatro ímãs.

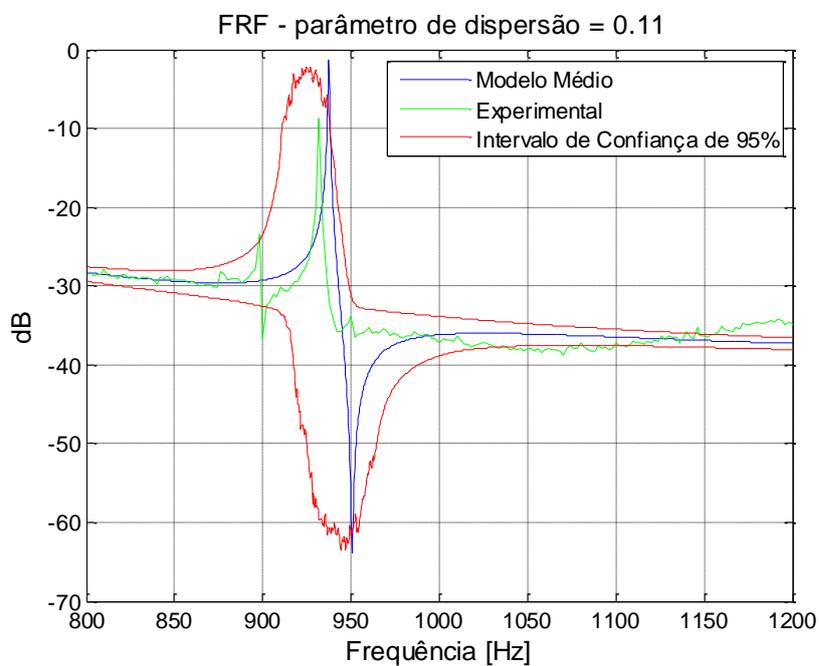


Figura 54 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_M = 0,11$. Modelo com acréscimo de quatro ímãs.

O valor do número de simulações adequado nestes resultados permanece $n_s = 1000$ ao se observar as Figuras 49, 51 e 53.

Ao se verificar as Figuras 50, 52 e 54, é possível dizer que não existe uma concordância entre a FRF do modelo médio e a FRF obtida no ensaio. Pode-se observar ainda que tais resultados permanecem parcialmente inseridos no IC de 95% obtido por meio da simulação estocástica. Entretanto, percebe-se uma maior proximidade das curvas de FRF do modelo médio e do ensaio para valores de frequência acima de aproximadamente 980 Hz e até 1200 Hz (Figura 62), sendo que a FRF do modelo médio permanece totalmente dentro do IC enquanto que a FRF do ensaio se encontra parcialmente dentro deste mesmo intervalo.

De maneira generalizada, pode-se dizer que a FRF do modelo médio não representa bem o sistema real ensaiado na faixa de frequência de 800 – 980 Hz, mas representa satisfatoriamente para a faixa de frequência de 980 – 1200 Hz, considerando-se a Figura 62, o que não ocorre nas demais configurações (Figuras 64 e 66). A justificativa se encontra no fato de que para faixas de alta frequência é predominante a quantificação da incerteza não paramétrica.

7.1.2.2 respostas para parâmetro de dispersão igual a 0,2

Os resultados apresentados correspondem à curva de convergência seguida pelo respectivo IC de 95% dos resultados para as três configurações consideradas.

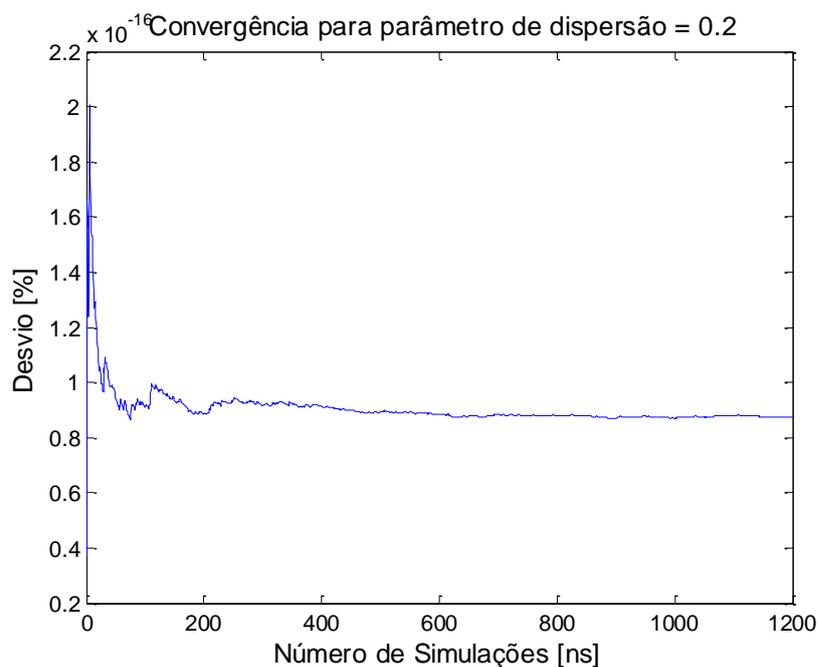


Figura 55 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_M = 0,2$. Modelo sem acréscimo de imãs.

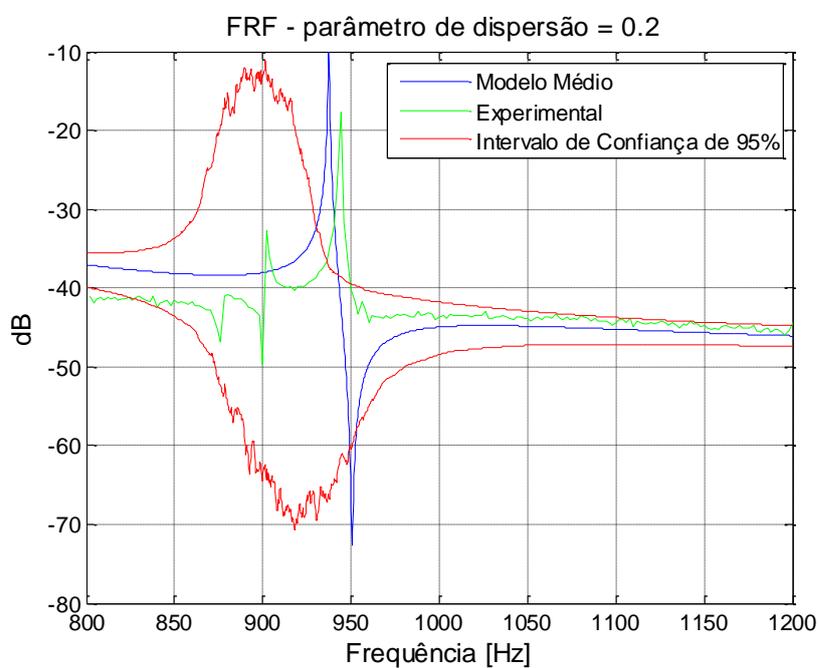


Figura 56 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_M = 0,2$. Modelo sem acréscimo de imãs.

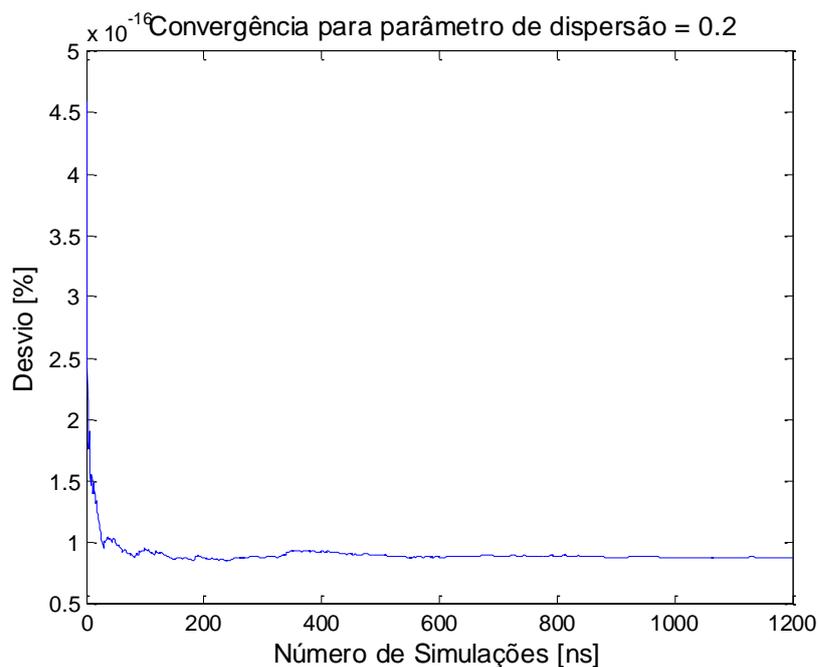


Figura 57 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_M = 0,2$. Modelo com acréscimo de 2 imãs.

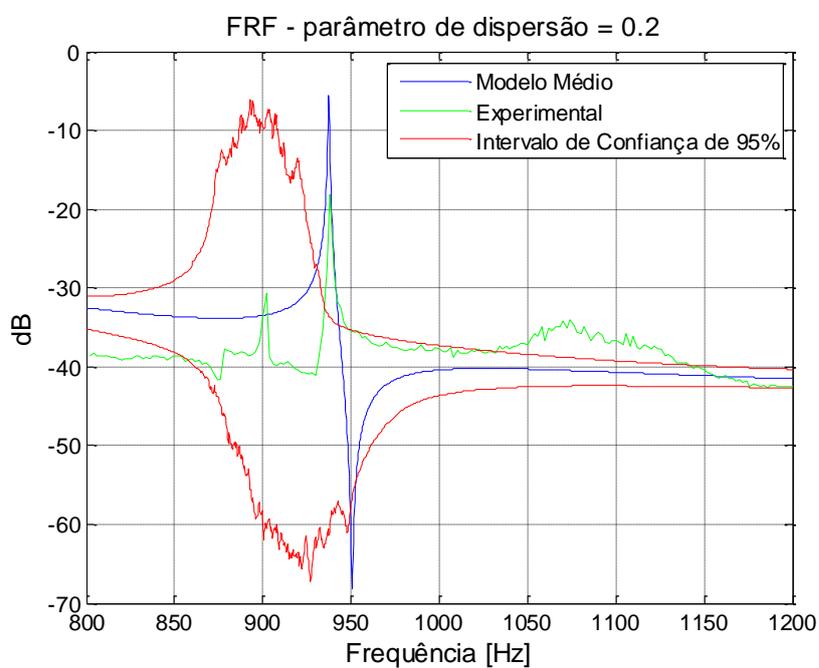


Figura 58 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_M = 0,2$. Modelo com acréscimo de 2 imãs.

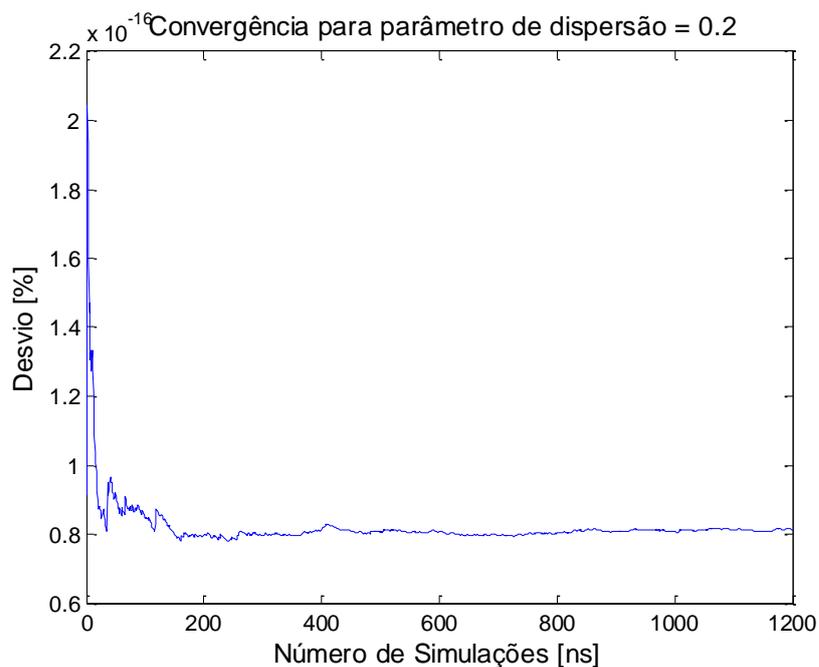


Figura 59 – Convergência para o modelo considerando-se $\delta_M = 0,2$. Modelo com acréscimo de quatro ímãs.

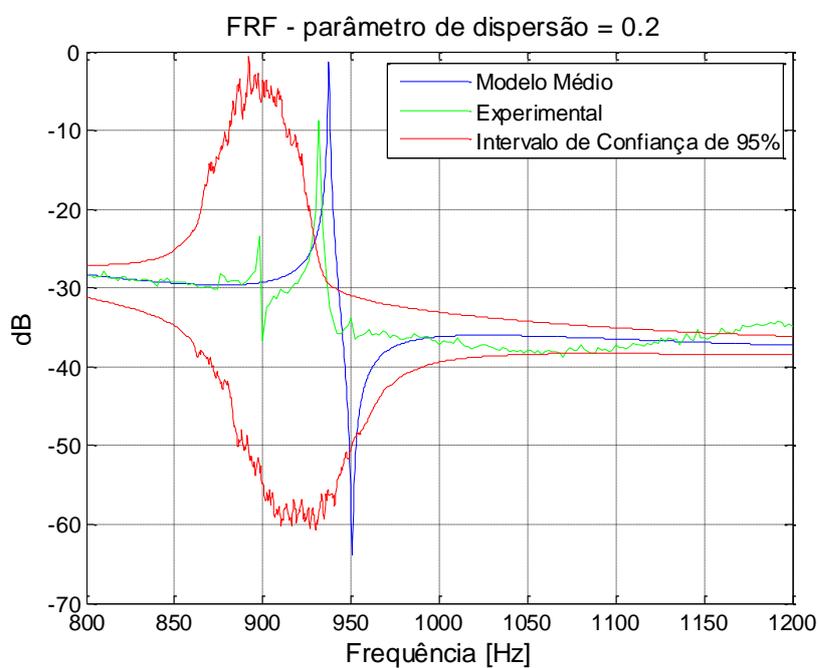


Figura 60 – FRF (receptância) para o modelo com limite de confiança de 95% e $\delta_M = 0,2$. Modelo com acréscimo de quatro ímãs.

Ao se analisar as Figuras 55, 57 e 59, percebe-se que o valor do número de simulações adequado para este caso corresponde a $n_s = 1000$.

Na faixa de frequência inferior a 980 Hz os resultados não são satisfatórios, o que ocorre também nas Figuras 58 e 60 para a faixa de frequência de 800 – 1200 Hz. Verificando-se a Figuras 56, percebe-se uma maior proximidade das curvas de FRF do modelo médio e do ensaio para valores de frequência acima de aproximadamente 980 Hz e até 1200 Hz. Além disso, neste mesmo intervalo as curvas FRF estão inseridas no IC de 95% obtido na simulação.

Em geral, pode-se dizer que a FRF do modelo médio representa satisfatoriamente o sistema real para a faixa de frequência de 980 – 1200 Hz ao se considerar a Figura 56, o que não ocorre nas demais configurações (Figuras 58 e 60). A justificativa neste caso é a mesa do item anterior, ou seja, a quantificação da incerteza não paramétrica vai se tornando cada vez mais predominante com o aumento da frequência analisada.

7.2 CONCLUSÕES SOBRE OS RESULTADOS SIMULADOS E EXPERIMENTAIS

Resultados simulados e experimentais do sistema dinâmico representado por uma viga de aço de 200 mm de comprimento na condição de contorno fixa – livre foram analisados neste capítulo. Tal sistema, durante a simulação, teve a incerteza epistêmica propagada na matriz aleatória de massa por meio da distribuição Wishart e para três valores de parâmetros de dispersão, como mostrado na Equação 160.

Primeiramente, pode-se concluir a respeito deste capítulo que ao se analisar as curvas referentes à convergência das simulações (Figuras 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59) apresentadas, que houve uma boa convergência para um valor em torno de $n_s = 1000$ simulações de Monte Carlo, independente do parâmetro de dispersão utilizado, o que significa que este valor é suficiente para que se possa obter resultados confiáveis para o sistema em estudo.

Já no caso da Figura 38, referente à obtenção do IC de 95% da resposta para a faixa de frequência de 0 – 800 Hz e sem acréscimo de imãs, pôde-se perceber uma boa concordância entre os resultados da FRF do modelo médio e experimentais para uma faixa aproximada de frequência de 200 – 450 Hz. Este resultado não é observado nas Figuras 40 e 42, que foram obtidas nas mesmas condições dos resultados apresentados na Figura 38, porém com o acréscimo de dois e quatro imãs respectivamente. O que se quer mostrar com este estudo é que a resposta do problema analisado se altera ao se acrescentar mais massa ao sistema, pois isso causa um aumento da incerteza de modelo que não foi considerada no projeto original desse mesmo sistema.

Este mesmo comportamento na faixa de frequência de 0 – 800 Hz é observado para os resultados referentes aos dois parâmetros de dispersão considerados (0,11 e 0,2), com exceção para um detalhe na Figura 44, obtida para o segundo valor desse parâmetro. No caso, o posicionamento das curvas de FRF do modelo médio e dos ensaios na faixa de frequência de 200 – 450 Hz, referente à segunda frequência natural, ficam externas ao IC de 95% calculado. Este fato pode ser justificado pelo valor do parâmetro de dispersão ser elevado para tal estudo, já que o sistema simulado corresponde a uma estrutura simples.

No caso da faixa de frequência de 800 – 1200 Hz, analisando-se a Figura 50 e 56, consideradas sem o acréscimo de imãs, pode ser observado que houve uma boa proximidade entre as FRF do modelo médio e do ensaio para faixa de frequência de aproximadamente 980 Hz até 1200 Hz. Além do que na Figura 56, essas curvas estão inseridas no IC de 95% calculado, o que não ocorre na Figura 50, comportamento observado também na Figura 44 e, portanto, se justifica da mesma maneira.

Tal comportamento na faixa de frequência de 800 – 1200 Hz não é observado nas Figuras 52, 54, 58 e 60, onde se tem o acréscimo de dois e quatro imãs respectivamente, o que se justifica da mesma maneira que na análise da faixa de frequência de 0 – 800 Hz. Não é previsto o acréscimo de massa em sistemas ao se calculá-lo originalmente, isso aumenta a incerteza de modelo no sistema e provoca alterações nas respostas dos mesmos.

Por outro lado, cabe aqui algumas observações a respeito do comportamento da resposta tendo em vista os diferentes parâmetros de dispersão considerados na análise. Com relação aos resultados obtidos para a FRF do modelo médio, FRF do ensaio e o IC de 95% na faixa de frequência 0 – 1200 Hz e sem o acréscimo de massa, que corresponde ao sistema real (Figuras

38, 44, 50 e 56), obteve-se o mesmo comportamento das respostas do Capítulo 4. Tomando-se como referência o eixo vertical nesses gráficos, é possível verificar que a região de confiança se alarga, à medida que os valores dos parâmetros de dispersão se tornam mais elevados.

Podem-se observar ainda nos mesmos resultados gráficos, mas agora tendo como referência o eixo horizontal, que à medida que a frequência aumenta a largura do IC também aumenta na região das frequências naturais. Isto significa que a incerteza no sistema aumenta com o aumento da frequência dificultando-se assim sua previsibilidade.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

8.1 CONCLUSÕES

Tendo em vista a importância e a real possibilidade em se quantificar incertezas em sistemas dinâmicos complexos, esta dissertação apresenta um procedimento, além de análises referentes ao parâmetro de dispersão e estudos sobre o comportamento da resposta do sistema, para quantificação de incertezas epistêmicas em sistemas dinâmicos lineares que tem por base a abordagem não paramétrica. Tal abordagem, por meio do método da máxima entropia, da teoria da matriz aleatória e do método de Monte Carlo, possibilita a quantificação através da propagação das incertezas de modelo nas matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez, finalizando o processo com a obtenção das respostas estatísticas necessárias.

A validação do programa desenvolvido pela autora ocorrida no Capítulo 4 foi verificada tendo por base comparações realizadas entre respostas de um sistema dinâmico com dois gdl contidas em Sampaio *et al* (2007) e resultados obtidos pela simulação no programa construído pela autora para o mesmo sistema citado. A primeira resposta obtida foi com relação à curva de convergência para a SMC e que podem ser verificadas nas Figuras 4 – 8. Nelas o valor do número de simulações foi determinado para $n_s = 600$ independentemente do parâmetro de dispersão considerado, o que significa que poderão ser obtidos resultados satisfatórios para o sistema em estudo ao se utilizar esse número de simulações na SMC. Já com relação às

Figuras 9 – 18, os resultados puderam mostrar o comportamento da resposta em função do valor do parâmetro de dispersão utilizado na simulação. Pôde-se verificar que à medida que a frequência aumenta a largura da curva, considerando-se o eixo horizontal, aumenta em torno dos picos das frequências naturais até alcançar uma largura máxima para o máximo valor do parâmetro de dispersão considerado e que vale 0,65. Além disso, à medida que se aumenta o parâmetro de dispersão a largura da curva, agora tomando como referência o eixo vertical, também aumenta, e da mesma forma que na referência horizontal, atinge a sua largura máxima para o máximo valor permitido para o parâmetro de dispersão.

O mesmo comportamento do parâmetro de dispersão referente às variações de largura nos eixos horizontal e vertical foi verificado no Capítulo 7 onde, ao se considerar um sistema composto por uma viga de 200 mm na condição de contorno fixa – livre, resultados obtidos na simulação estocástica (FRF do modelo médio e o IC de 95% dos resultados) foram apresentados juntamente com os resultados experimentais. Além disso, outras observações a respeito das análises realizadas podem ser feitas, como é o caso da Figura 44, considerada para a faixa de frequência de 0 – 800 Hz e sem acréscimo de imãs, em que se verificou que as curvas de FRF do modelo médio e dos ensaios na faixa de frequência de 200 – 450 Hz, referente à segunda frequência natural, ficaram externas ao IC de 95% calculado. Segundo análises dos resultados pode-se considerar que este fato ocorre devido ao valor do parâmetro de dispersão escolhido que pode ser elevado para este caso, uma vez que se trata de um sistema simples.

Estudos como estes são importantes na quantificação de incertezas epistêmicas, pois o comportamento da resposta pode ser observado em função da única informação que se tem sobre a incerteza do sistema dinâmico, que é o parâmetro de dispersão. Considerar parâmetros elevados aumenta sobremaneira a incerteza em um sistema, o que não faz sentido já que a ideia é que o sistema real tenha o mínimo de incerteza e não o seu valor máximo. Por outro lado, considerar valores extremamente pequenos, principalmente em sistemas muito complexos pode não ser o suficiente para que se obtenham respostas satisfatórias e condizentes com o sistema em estudo. É por isso que o cálculo cuidadoso e correto deste parâmetro é tão importante, só assim poderão ser obtidas respostas que traduzem a realidade do problema estudado fazendo com que a quantificação das incertezas epistêmicas contribua de forma eficaz no aumento da confiabilidade dos sistemas considerados na análise. Só assim,

é possível a modelagem de um sistema, mesmo que tenha alta complexidade, de forma que ele represente com fidelidade máxima o sistema real.

No Capítulo 7 resultados obtidos na simulação (FRF do modelo médio e o IC de 95%) e no experimento (FRF) podem ainda serem analisados com relação aos imãs acrescentados na viga durante o ensaio. Pode-se observar que ao se acrescentar massas na viga, representadas aqui por imãs, o comportamento da resposta é alterado e já não se pode ter mais uma boa representação do sistema real no modelo médio dentro do IC construído como ocorrem nos casos da Figura 38 (para faixa de frequência de 200 – 450 Hz) e da Figura 56 (para faixa de frequência de 980 – 1200 Hz). Este estudo é importante para se mostrar que a resposta do problema analisado se altera ao se acrescentar mais massa ao sistema, pois isso causa um aumento da incerteza de modelo que não foi considerada no projeto original desse mesmo sistema. No momento em que o sistema é projetado pelo engenheiro todas as considerações são tomadas para que se cumpra todas as especificações, suporte as solicitações e trabalhe adequadamente da maneira para a qual foi projetado. Depois do sistema pronto e em funcionamento, o acréscimo de massa, rasgos, fixação de equipamentos etc. na estrutura faz com que o sistema sofra alterações no nível de incerteza de modelo para o qual foi calculado inicialmente, o que pode trazer problemas ao sistema, inclusive relacionados à segurança.

Contudo, pode-se dizer que apesar de incertezas serem inevitáveis em projetos de engenharia, ainda assim é possível a construção de modelos numéricos com alta confiabilidade de forma que possam representar bem o sistema real. Existe a possibilidade de modelagem de sistemas complexos com alta confiabilidade, portanto, modelos médios podem representar com fidelidade o modelo real e dessa forma contribuir para que empresas possam fazer uso do método para aumentar a confiabilidade de seus sistemas manufaturados sem que haja necessidade de testes demasiadamente longos e caros. É exatamente neste contexto que se insere a quantificação não paramétrica, e por isso é tão importante a utilização deste procedimento de quantificação quando o objetivo é a modelagem numérica com alta confiabilidade.

Portanto, o objetivo principal dessa dissertação foi concluído tendo em vista que um completo procedimento para quantificação de incertezas epistêmicas foi construído. Além disso, assuntos importantes relativos à quantificação foram analisados e discutidos, como é o caso da influência do parâmetro de dispersão e as alterações obtidas nas respostas devido ao aumento da incerteza epistêmica por meio de alterações na estrutura do projeto ou acréscimo

de componentes no sistema de forma que sua massa, rigidez ou amortecimento sejam alterados. Tais estudos representam os objetivos secundários deste trabalho.

8.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

Tendo em vista todo o trabalho realizado referente ao desenvolvimento teórico, simulações e experimentos são sugeridos alguns estudos e melhorias no intuito de complementar o procedimento de quantificação de incertezas de modelo pela abordagem não paramétrica apresentada nesta dissertação.

Em primeiro lugar, podem ser realizados estudos mais aprofundados com relação ao desenvolvimento para obtenção da FDP Wishart para que o detalhamento se torne ainda mais completo.

Outro estudo interessante seria relacionado à obtenção da matriz média das matrizes aleatórias por meio do método da matriz reduzida média, que é considerada na abordagem não paramétrica originalmente proposta por Soize (2000) e Soize (2001). Os resultados obtidos por tal método poderão ser comparados com resultados considerando o método dos elementos finitos.

Estudos para obtenção do parâmetro de dispersão podem ser realizados levando-se em conta critérios teóricos e experimentais. Uma comparação entre eles pode estimar a maneira mais eficaz de calculá-lo.

Por fim, melhoramentos relacionados aos ensaios experimentais podem ser realizados. Um exemplo seria a utilização do *shaker* ao invés do martelo de impacto o que resultaria em um impulso sempre na mesma posição. Outro exemplo seria a geração aleatória para posicionamento dos ímãs na viga evitando-se assim qualquer tipo de tendência neste posicionamento. E como último exemplo, poderia se utilizar uma régua graduada como viga para minimizar erros nas medidas da localização das massas e no ponto de leitura de resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADHIKARI, S. (2007)**, “Matrix Variate Distributions for Probabilistic Structural Dynamics”, *AIAA Journal*, v. 45, no. 88, pp. 1748-1762.
- ADHIKARI, S. (2008)**, “Wishart Random Matrices in Probabilistic Structural Mechanics”, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, v. 134, no. 12, pp. 1029-1044.
- ADHIKARI, S. (2009)**, “Uncertainty in Structural Dynamics: Experimental Validation of a Wishart Random Matrix Model”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 323, pp. 802-825.
- ADHIKARI, S. (2010)**, “Generalizes Wishart Distribution for Probabilistic Structural Dynamics”, *Comput Mech*, v. 45, pp. 495-511.
- ADHIKARI, S., FRISWELL, M. I., LONKAR, K. P. (2007)**, “Uncertainty in Structural Dynamics-Experimental Case Studies on Beams and Plates”, *ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Greece, pp. 1-11.
- ADHIKARI, S., FRISWELL, M. I., LONKAR, K. P., SARKAR, A. (2009)**, “Experimental Cases Studies for Uncertainty Quantification in Structural Dynamics”, *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 24, no. 4, pp. 473-492.
- ALMEIDA, A. B. (2005)**, “O Problema Epistemológico da Probabilidade e a Contribuição de Karl Popper para o Respectivo Debate. Experimental Cases Studies for Uncertainty Quantification in Structural Dynamics”, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Trabalho, Mestrado de Filosofia e História da Ciência e Tecnologia, 63 p.

- ALMEIDA, A. B. (2009)**, *Estudos sobre Ensemble de Wishart-Tsallis de Matrizes Aleatórias*, Dissertação (Mestrado em Física), Núcleo de Pós Graduação em Física, Universidade Federal de Sergipe, 57 p., São Cristóvão.
- ALMEIDA, A. C. (2012)**, *Análise Dinâmica de uma Viga Escalonada de Euler-Bernoulli, Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko com Apoios Elásticos Variáveis*, Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 131 p., Itajubá.
- ALMEIDA, F. O. S., SOUZA, A. M. C. (2009)**, “Estudos sobre o Ensemble de Wishart de Matrizes Aleatórias”, *Scientia Plena*, v. 5, no. 5, 6 p.
- ANDRADE, H. A., KINAS, P. G. (2008)**, “Inferência em Ecologia: Comentários e um Exemplo”, *Scientia Plena*, v. 30, no. 2, pp. 147-160.
- BARRICO, C. M. C. S. (2007)**, *Optimização Evolucionária Multi-Objectivo em Ambientes Incertos – Pesquisa de Soluções Robustas*, Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica de Computadores, Especialidade em Informática), Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, 215 p., Coimbra.
- BATISTA, R. A. (2011)**, “Erros e Incertezas”, Texto, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.
- BERTUOLA, A. C., HUSSEIN, M. S., PATO, M. P. (2006)**, “Técnicas e Construções de Ensembles de Matrizes Aleatórias e Estatísticas Correlatas”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, no. 3, pp. 333-340.
- BRANDÃO, A. L. R. (2007)**, *Segurança de Estruturas em Perfis Formados a Frio*, Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, 171 p., Ouro Preto.
- CABRAL, P. (2004)**, “Erros e Incertezas nas Medições”, Disponível em: <<http://www.peb.ufrj.br/cursos/ErrosIncertezas.pdf>>, Acesso em: 13 ago. 2012.

- CADIMA, J. (2010)**, “Inferência Estatística”, Disponível em: <<http://www.isa.utl.pt/dm/mestrado/mmacb/UCs/em/acetatosInf.pdf>>, Acesso em: 13 ago. 2012.
- CAMARGOS, L. R. (2004)**, “Fundamentos para um Teoria de Expectativa Econômica”, Texto para Discussão 138, FGV, Escola de Economia de São Paulo, 57 p, agosto.
- CAMPOS, M. A., RÊGO, L. C. (2009)**, “Métodos Probabilísticos e Estatísticos para Engenharias e Ciências Exatas”, Disponível em: <<http://www.cin.ufpe.br/~lheva/estatistica/LivroProbabilidade.pdf>>, Acesso em: 14 ago. 2012.
- CAPIEZ-LERNOUT, E., PELLISSETTI, M. at al (2006)**, “Data and Model Uncertainties in Complex Aerospace Engineering Systems”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 295, pp. 923-938.
- CASTANHEIRA, A. M. (2004)**, *Avaliação da Confiabilidade de Vigas Metálicas Dimensionadas pela NBR 8800*, Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil – Área de Concentração: Construção Metálica), Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, 129 p., Ouro Preto, Minas Gerais.
- CHEBLI, H., SOIZE, C. (2004)**, “Experimental Validation of a Nonparametric Probabilistic Model of Non Homogeneous Uncertainties for Dynamic Systems,” *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 115, no. 2, pp. 697–705.
- CORDEIRO, G. M. (1999)**, “Introdução à Teoria Assintótica”, *22 Colóquio Brasileiro de Matemática*, 166 p.
- COSTA, W. U. (2004)**, “Técnicas Bayesianas para Engenharia Elétrica”, *Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Elétrica*, 18 p.
- CROVELLI, M. R. (2011)**, “Porque a Definição de Probabilidade é Importante”, Disponível em: <<http://www.mises.org.br/Article.aspx?id=1165>>, Acesso em: 27 jan. 2012.

- DEBBAH, M. (2008)**, “Random Matrix Theory for Wireless Communication”, Disponível em: <<https://www-roc.inria.fr/twiki/pub/RAP/HomeSeminars/M-Debbah.pdf>>, Acesso em: 13 ago. 2012.
- EATON, M. L. (2007)**, Multivariate Statistics: A Vector Space Approach, Institute of Mathematical Statistics – Lecture Notes-Monograph Series, Beachwood, Ohio, USA, v. 53, 512 p.
- EDELMAN, A. (2005)**, “Random Matrix Theory”, *Acta Numerica*, pp. 1-65.
- FERNANDES, C. A. B. A. (2005)**, “Gerenciamento de Riscos em Projetos: Como Usar o Microsoft Excel para Realizar a Simulação Monte Carlo”, Disponível em: <<http://www.bbbrothers.com.br/scripts/Artigos/MonteCarloExcel.pdf>>, Acesso em: 13 ago. 2012.
- FORRESTER, P. J., SNAITH, N. C., VERBAARSCHOT, J. J. M. (2003)**, “Developments in Random Matrix Theory”, *Journal of Physics: Mathematical and General*, v. 36, pp. R1-R10.
- GADELHA, A. (2004)**, “Uma Pequena História da Probabilidade”, Notas de Aula, Teoria da Probabilidade I, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 16 p.
- GUERREIRO, M. (2007)**, *Análise Diferenciada dos Componentes Independentes de Potenciais Evocados P3a e P3b*, Dissertação (Mestrado em Imagiologia Médica), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve, 215 p., Faro.
- HERRERA, L. M. M., CORONA, R. M. (2007)**, “Teoría de Matrices Aleatorias e Correlación de Series Financieras: El Caso de la Bolsa Mexicana de Valores”, *Revista de Administración, Finanzas y Economía*, v. 2, no. 2, pp. 125-135.
- HUYSE, L., VALTERS, R. W. (2001)**, “Random Field Solution Including Boundary Condition Uncertainty for the Steady-state Generalized Burgers Equation”, *NASA, ICASE Report*, no. 35, 26 p.

- IZENMAN, A. J. (2008)**, “Introduction to Random-Matrix Theory”, Disponível em: http://www.stat.osu.edu/~dmsl/Introduction_to_Random_Matrix_Theory.PDF, Acesso em: 14 ago. 2012.
- JAYNES, E. T. (1957a)**, “Information Theory and Statistical Mechanics”, *The Physical Review*, v. 106, no. 4, Pp. 620–630.
- JAYNES, E. T. (1957b)**, “Information Theory and Statistical Mechanics II”, *The Physical Review*, v. 108, no. 2, Pp. 171–190.
- JAYNES, E. T. (1978)**, “Where do we Stand on Maximum Entropy?”, *Maximum Entropy Formalism Conference*, Massachusetts Institute of Technology, 105 p.
- JAYNES, E. T. (1985)**, “Where do we Go from Here?”, *D. Reidel Publishing Company*, Arthur Holly Compton Laboratory of Physics, Washington University, 38 p.
- JAYNES, E. T. (1988)**, “The Relation of Bayesian and Maximum Entropy Methods?”, *D. Reidel Publishing Company*, Arthur Holly Compton Laboratory of Physics, Washington University, 38 p.
- JAYNES, E. T. (1996)**, “Bayesian Methods: General Background”, *Fourth Annual Workshop of Bayesian/Maximum Entropy Methods*, University of Calgary, 19 p.
- KAMINSKI JUNIOR, J. (2007)**, *Incertezas de Modelo na Análise de Torres Metálicas Treliçadas de Linhas de Transmissão*, Tese (Doutorado em Engenharia), Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 362 p., Porto Alegre, Rio Grande do Sul.
- JUNIOR, P. L. (sem data)**, “Discutindo os Conceitos de Erro e Incerteza a Partir da Tábua de Galton com Estudantes de Graduação: Uma Contribuição para Incorporação de Novas Abordagens da Metrologia ao Ensino de Física Superior”, Submetido ao CBEF, Laboratório de Ensino de Física, Instituto de Física, UFRGS, 16 p.

- KARGIN, S., YUDOVINA, E. (2011)**, “Random Matrix Theory”, Disponível em: <http://www.statslab.cam.ac.uk/~ey221/lecture_notes/random_matrices.pdf>, Acesso em: 14 ago. 2012.
- KRÜGER, C. M. (2008)**, *Análise de Confiabilidade Estrutural Aplicada às Barragens de Concreto*, Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, 157 p., Curitiba, Paraná.
- KYRIAZIS, G. A., WÖGER (1998)**, “Estatística Bayesiana e o Guia Internacional para Expressão da Incerteza de Medição”, *III SEMETRO – III Seminário Internacional de Metrologia Elétrica*, Rio de Janeiro, 6 p.
- MACEDO, R. G. (2010)**, *Análise de Propagação de Incertezas em Método de Estimação de Rigidez Estática por Dados Dinâmicos*, Dissertação (Mestre em Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 144 p., Campinas, São Paulo.
- MATOS, R. S., VEIGA, A. (2002)**, “Otimização de Entropia: Implementação Computacional dos Princípios Maxent e Minxent”, *Pesquisa Operacional*, v. 22, no. 1, pp. 37-59.
- MÉNDEZ, J. P. R. (2008)**, “Máxima Entropía”, Disponível em: <http://www.fenomec.unam.mx/pablo/seminario/maxima_entropia.pdf>, Acesso em: 4 nov. 2010.
- OBERKAMPF, W. L., HELTON, J. C. JOSLYN, C. A. at al (2001)**, “Challenge Problems: Uncertainty in System Response Given Uncertain Parameters”, *Sandia National Laboratories*, 18 p.
- RÊGO, L. C. (2010)**, “Notas de Aula do Curso ET584: Probabilidade 4”, Disponível em: <<http://www.de.ufpe.br/~leandro/AulasET5842010-1.pdf>>, Acesso em: 14 ago. 2012.

- PIRES, R. M. (2009)**, Inferência Bayesiana Objetiva e Frequentista para a Probabilidade de Sucesso, Dissertação (Mestrado em Estatística), Departamento de Estatística, Universidade Federal de São Carlos, 154 p., São Carlos, São Paulo.
- RAO, S. (2009)**, Vibrações Mecânicas, São Paulo, Pearson Education do Brasil, 424 p.
- REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA (1996)**, Lourival Câmara, Rio de Janeiro, v. 27, no. 105, pp. 1-75.
- RIBEIRO, R. S., FERREIRA, J. L. A., MENIN, E. C. G. (2007)**, “Análise Dinâmica em Modelo Reduzido de Uma Estrutura com Dois Pavimentos”, *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, v. 11, no. 1, pp. 47–58.
- RITTO, T. G., SAMPAIO, R., CATALDO, E. (2008)**, “Timoshenko Beam with Uncertainty on the Boundary Conditions”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences. & Engineering.*, v. XXX, no. 4, pp. 295–303.
- ROCHA, S. H. (sem data)**, “Probabilidade: O que é e Como Calcular – Aula 8”, Nostas de Aula, Probabilidade e Estatística, Departamento Acadêmico de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 16 p, Curitiba, Paraná.
- SAMPAIO, R., RITTO, T. (2008)**, "Short Course on Dynamics of Flexible Structures – Deterministic and Stochastic Analysis”, *Seminar on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling*, PUC-Rio, set.
- SAMPAIO, R., RITTO, T., CATALDO, E. (2007)**, “Comparison and Evaluation of Two Approaches of Uncertainty Modeling in Dynamical System”, *Mecânica Computacional*, XXVI, pp. 3078-3094.
- SANDRI, A. D. (2010)**, *Quantificação de Incertezas em Vibrações Induzidas por Vórtices*, Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 95 p., Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- SANT’ANA, M. C. (2006)**, *Uma Modelagem das Incertezas Associadas a Falhas de Causa Comum Considerando Diversidade e Envelhecimento*, Tese (Doutorado em Ciências em

Engenharia Nuclear), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 107 p., Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SHANNON, C., E. (1948), “A Mathematical Theory of Communication”, *The Bell System Technical Journal*, v. 27, pp. 379–423, 623–656.

SHARIFE, S., CRANE, M., SHAMAIE, A., RUSKIN, H. (2003), “Random Matrix Theory for Portfolio Optimization: A Stability Approach”, *Submetido ao Elsevier Science*, Dublin City University, Glasnevin, Dublin 9, Ireland, 15p.

SILVA, R. (2000), *Distribuição de Autovalores de Matrizes Aleatórias*, Dissertação (Mestrado), Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 98 p., São Paulo, São Paulo.

SODRÉ, U. (2003), “Transformada de Laplace”, Notas de Aula, Computação, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil, 43 p.

SOIZE, C. (1998), “Reduced Models in the Medium Frequency Range for General Dissipative Structural-dynamics Systems,” *European Journal Mechanics A/Solids*, v. 17, no. 4, pp. 657–685.

SOIZE, C. (2000), “A Nonparametric Model of Random Uncertainties for Reduced Matrix Models in Structural Dynamics,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 15, pp. 277–294.

SOIZE, C. (2001), “Maximum Entropy Approach for Modeling Random Uncertainties in Transient Elastodynamics,” *Journal of the Acoustical. Society of America.*, v. 109, no. 5, pp. 1979–1996.

SOIZE, C. (2003a), “Random Matrix Theory and Non-Parametric Model of Random Uncertainties in Vibration Analysis,” *Journal of Sound and Vibration*, v. 263, pp. 893–916.

SOIZE, C. (2003b), “Uncertainty Dynamic Systems in the Medium Frequency Range,” *Journal of Engineering Mechanics*, v. 129, no. 9, pp. 1017–1027.

- SOIZE, C. (2005a)**, “Random Matrix Theory for Modeling Uncertainties in Computational Mechanics,” *Journal of Sound and Vibration*, v. 194, pp. 1333–1366.
- SOIZE, C. (2005b)**, “Comprehensive Overview of a Non-Parametric Probabilistic Approach of Model Uncertainties for Predictive Models in Structural Dynamics,” *Journal of Sound and Vibration*, v. 288, pp. 623–652.
- STUDART, T. M. C., CAMPOS, J. N. B., CARVALHO, R. M. (2002)**, “Recursos Hídricos e as Incertezas Científicas: Novos Conceitos e Abordagens”, *Anais do XIV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Promovido pela Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Aracaju, Sergipe.
- UFFINK, J. (1997)**, “Can the Maximum Entropy Principle be Explained as a Consistency Requirement?”, *Anais do XIV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Department of History and Foundation of Mathematics and Science, University of Utrecht.
- VANDEPITTE, D., MOENS, M. (2011)**, “Quantification of Uncertain and Variable Model Parameters in Non-Deterministic Analysis”, *Symposium on the Vibration Analysis of Structures with Uncertainties*, pp. 15-28.

Apêndice A

MÉTODO DA MÁXIMA ENTROPIA

A.1 EVOLUÇÃO HISTÓRICA

De acordo com Jaynes (1978), desde os tempos antigos já se reconheciam intuitivamente alguns casos de aplicação do PME, e já nessa época se sabia que não se pode fugir do primeiro passo da aplicação da teoria da probabilidade que consiste na atribuição de um valor numérico de probabilidade decorrente de um julgamento inicial para que seja possível o início dos cálculos. Tal julgamento inicial tinha por base o “*Princípio da Razão Insuficiente de Laplace*” em que se atribui probabilidades iguais para dois eventos se não existe razão para pensar o contrário. Uma curiosidade referente a este princípio é que, justamente pelo nome que tem, já encontrou algumas resistências na sua utilização. Tentativas de corrigi-lo foram feitas por Keynes em 1921 renomeando-o “*Princípio da Indiferença*” e mais tarde por Bernoulli que o chamou “*Desideratum of Consistency*”. Maiores detalhes deste princípio podem ser vistos no apêndice B.

Mas o princípio de Laplace não poderia ser utilizado para resolver muitos casos de probabilidade, até que Bernoulli anunciou que se deveria conhecer o problema em estudo já que o método poderia ser aplicado apenas a alguns poucos casos e a quase nenhum lugar a não ser em jogos de azar.

Novos estudos foram sendo realizados até que Bernoulli observou a aproximação da frequência com a probabilidade para um grande número de ensaios. Tal constatação é base

para o pensamento frequentista descrito no apêndice A. Vale ressaltar neste ponto, que os estudos citados até agora são válidos para as variáveis aleatórias independentes entre si.

Propostas para soluções de problemas inversos de probabilidades, em que se encontra a probabilidade de um evento favorável tendo-se como dados o número de sucessos – que vem da distribuição de Bernoulli, o número total de casos igualmente possíveis – que resulta do Princípio da Razão Insuficiente de Laplace, e o número de ensaios, foram também estudados e um resultado importantíssimo foi conseguido por Laplace. Ele utilizou estudos de Bernoulli e Bayes obtendo o que hoje se denomina “*Teorema de Bayes*”, conseqüentemente estudado na Escola Bayesiana de pensamento e que pode ser utilizado para resolver uma grande gama de problemas. Segundo Jaynes (1978), o teorema de Bayes corresponde à única e completamente correta solução para problemas inversos. Tal teorema representa o que se chama de aprendizado por experiência já que a probabilidade anterior (ou prévia) se modifica para uma probabilidade posterior ao se obter novas evidências sobre o problema em estudo.

Mesmo diante desta grande descoberta de Laplace, o Teorema de Bayes ainda não resolvia o problema inicial proposto por Bernoulli e nem se desvinculava do Princípio da Razão Insuficiente, já que era necessário ter-se como dado a probabilidade a priori (considerada igual a $1/N$), em que N corresponde ao número total de casos igualmente possíveis. Mas tal descoberta foi um marco para os estudos da época e, apesar de alguns estudiosos saberem e reconhecerem tal importância, o trabalho de Laplace foi fortemente atacado e seu resultado totalmente recusado e ridicularizado, pois não se acreditavam que a probabilidade poderia significar um estado do conhecimento e apenas viam a probabilidade como significando frequência (Jaynes, 1978).

Posteriormente, Jaffreys ao aceitar as idéias de Laplace, publicou um livro em 1939 no qual os métodos de Laplace são reintegrados e aplicados, mas pelo fato de não ter deduzido seus princípios, também teve o mesmo tratamento de Laplace dado pelos frequentistas.

Por outro lado foi Cox quem, na intenção de construir um conjunto de regras matemáticas consistentes para se adotar a plausibilidade ao invés do raciocínio dedutivo, publicou as primeiras regras da probabilidade, as quais dizem respeito às regras da soma e do produto já conhecidas atualmente. Qualquer outra equação necessária em aplicações deve ser derivada destas duas regras. É importante ressaltar também que Cox não mencionou frequência nem experimentos aleatórios em seus estudos.

Em paralelo a esses acontecimentos, Abraham Wald, em 1950 apresentou regras gerais na tentativa de se tomar decisões a respeito de incertezas. Wald fazia parte da escola frequentista e, por coincidência, teve como solução as regras obtidas por Laplace no século XVIII, o que deu o nome de “Estratégias de Bayes”. Este fato fez com que os estudos fossem direcionados para a estatística bayesiana, sendo que boa parte tenta determinar a probabilidade a priori por meio de análises lógicas, e a parte referente à teoria amostral que continuaram a ser estudadas foram aquelas que podiam ser justificadas em termos bayesianos (Jaynes, 1978).

Por outro lado, uma diferente linha de estudos se desenvolveu na época iniciada por James Clerk Maxwell (1831-1879) com os primeiros trabalhos a respeito da análise probabilística aplicada à teoria cinética dos gases e que fez uso do Princípio da Indiferença em suas análises, passando então por Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906). Boltzmann quis estudar como as moléculas se distribuíam em um campo de força conservativo. O problema era o seguinte: considerando-se a j -ésima célula como sendo uma região R_j tão pequena que a energia E_j de uma molécula não variava apreciavelmente dentro dela, mas que ao mesmo tempo era grande o suficiente para acomodar um grande número de moléculas N_j , e dado, então N_t (número total de moléculas), E_t (energia total) e E_p (energia potencial), qual a melhor previsão que se pode fazer a respeito de N_j em R_j ? Este raciocínio de Boltzmann, neste ponto, caracteriza o início do Princípio da Máxima Entropia. A resposta para tal questão é que qualquer conjunto N_j , neste caso, concorda com as informações dadas, portanto, representam distribuições possíveis, e diante destas várias opções a mais provável é aquela que pode ser realizada de várias maneiras. Neste caso, foi proposto então um problema de maximização (otimização). Diante disso, se por um lado o método trouxe o conteúdo matemático essencial para o PME, por outro ele apenas estimou o número N_j relacionado a uma ocupação física, o que não envolve probabilidade e que não tem nada a ver com algum estado de conhecimento. Josiah Willard Gibbs (1839-1903) também deu sua colaboração no PME. Ele estabeleceu algumas propriedades que posteriormente formaram as bases dos estudos de Jaynes. Gibbs observou que a distribuição com expectativa mínima de $\log[p]$ (máxima entropia) para uma distribuição prescrita da constante de movimento tem certas propriedades desejáveis. Além disso, a partir do seu trabalho nesta área, ele conclui que as atribuições de probabilidade anterior uniforme se tratam não apenas de uma descrição do estado do conhecimento mas também de um postulado de um fato físico e que se justifica pela

concordância das previsões feitas com experimentos. Com isso, a visão frequentista toma o controle do desenvolvimento novamente (Jaynes, 1978).

Contudo, foi Claude Elwood Shannon (1916-2001) com seus estudos quem ofereceu as bases e o caminho para a solução desse tipo de problema. Como se sabe, em seu artigo de 1948, consta que no processo de comunicação, é atribuída uma probabilidade p_i para a mensagem transmitida mt_i , e a entropia S é a medida da informação. A dúvida levantada na época por Jaynes (1978) foi com relação à qual informação Shannon se referia, pois ele não disse explicitamente qual o estado de conhecimento que considerou no seu artigo mesmo esta informação sendo essencial para o entendimento da teoria. Mas depois de estudar o caso concluiu que:

[...] as diferentes mensagens consideradas devem ser o conjunto de todas aquelas que serão ou deveram ser enviadas através do canal durante sua vida útil; e, portanto o S de Shannon mede o grau de ignorância do engenheiro de comunicação quando ele projeta o equipamento técnico do canal (Jaynes, 1978).

Já as probabilidades p_i “[...] atribuídas para mensagens individuais não são medidas de frequência; elas são apenas meios para se descrever o estado de conhecimento” (Jaynes, 1978). Outro ponto esclarecedor e que deve ser citado é que a conexão entre entropia e informação se refere a uma medida da ignorância de uma pessoa cujo conhecimento sobre o objeto em estudo consiste de valores de quantidades da variável considerada, portanto não depende da personalidade da pessoa e pode ser medida em laboratório (Jaynes, 1978). Como dito em Kyriazis *et al* (1998), se duas pessoas estabelecem distribuições de probabilidade diferentes considerando que se tenha a mesma informação incompleta sobre um mensurado, então, isto só pode significar que uma dessas duas pessoas fizeram uso de mais informação do que realmente foi fornecida.

Ainda de acordo com Jaynes (1978) é importante mencionar que o Princípio da Máxima Entropia, embora seja uma ferramenta poderosa não é necessariamente uma inovação, pois sua filosofia já havia sido pronunciada por Laplace e Jaffreys e sua matemática por Boltzmann e Gibbs.

Mas foi Jaynes quem definiu as propriedades para a quantificação da entropia tendo por base os estudos publicados por Shannon.

[...] a única maneira conhecida de se construir a distribuição de probabilidade que representa honestamente um estado de conhecimento incompleto é através da maximização da entropia sujeita a todas as informações que se tem. Qualquer outra distribuição necessariamente assumiria informação que não se tem, ou entraria em contradição com as informações que se têm (Jaynes, 1985).

A partir desta descoberta, Jaynes fez inúmeros estudos a respeito dessa forma de quantificação, além de ter divulgado o PME por diversos locais onde passava. Mas o PME não foi bem aceito de início, ele sofreu várias críticas, por vezes violentas a respeito de sua conceituação e cálculo. Contudo, com o passar do tempo e com os estudos realizados, estudiosos perceberam a importância do método que passou a ser utilizado em diversas áreas na resolução dos mais variados problemas de engenharia.

A.2 DEFINIÇÃO DA ENTROPIA

O conceito de entropia vem sendo estudado há muitos anos e tem sua origem na Teoria da Informação, também chamada Teoria Matemática da Comunicação. Tal teoria está inserida no ramo da probabilidade e matemática estatística que lida com sistemas de comunicação, transmissão de dados, criptografia, codificação, além de outros assuntos.

Algumas abordagens teóricas a respeito deste tema vinham sendo desenvolvidas e no início do século XX, mais precisamente em 1924, Harry Nyquist, através do artigo intitulado “*Certain Factors Affecting Telegraph Speed*”, estabeleceu a relação que quantifica a velocidade de transmissão da inteligência por um sistema de comunicação:

$$W = c \log[nt] \quad (166)$$

onde: W é a velocidade de transmissão da inteligência, nt é o número de níveis de tensão para cada intervalo de tempo e c é uma constante.

Poucos anos depois, em 1928, Ralph Hartley publicou o artigo “*Transmission of Information*”, onde a palavra “informação” aparece como uma quantidade mensurável e a expressão definida por ele é dada por:

$$S = \log[T^u] = u \log[T] \quad (167)$$

onde: S é a quantidade medida;

T é o número de símbolos possíveis de serem distinguidos pelo usuário;

u é o número de símbolos na transmissão.

Tais contribuições formaram uma base para os estudos iniciais de Claude Elwood Shannon (1916-2001) que hoje é reconhecido como o pai da teoria da informação. Ele foi o primeiro a considerar a comunicação como um problema matemático rigorosamente embasado na estatística.

Shannon, no artigo “A Mathematical Theory of Communication” em 1948 cita que o problema fundamental da comunicação é se reproduzir em um ponto a mensagem selecionada em outro ponto de maneira exata ou aproximada.

Considerando que a mensagem atual pode ser selecionada a partir de um conjunto de mensagens possíveis, o sistema deve ser projetado para operar para cada seleção possível, não apenas para aquela que efetivamente será escolhida, mesmo porque esta é desconhecida no momento do projeto. Se o número de mensagens no conjunto é finito então esse número ou qualquer função monotônica dele pode ser considerado como uma medida da informação produzida quando uma mensagem é escolhida do conjunto. Além disso, todas as escolhas são igualmente possíveis (Shannon, 1948).

O mesmo autor ainda menciona que segundo salientado por Hartley, a escolha mais natural para se medir tal informação é a função logarítmica, e as razões pelas quais a medida logarítmica é mais conveniente podem ser resumidas, de acordo com Shannon (1948), como a seguir:

- ela é mais útil na prática. Parâmetros de importância na engenharia tendem a variar linearmente com o logaritmo do número de possibilidades.

- tal medida é mais próxima do sentimento intuitivo da medida adequada.

- é matematicamente mais adequada. Muitas das operações limitantes são simples em termos de logaritmo, mas requerem uma reafirmação grosseira em termos do número de possibilidades.

Os primeiros estudos de Shannon foram direcionados para o caso discreto em que se pode definir a quantidade a ser medida ou quanto de informação é produzida, ou ainda em que taxa a informação é produzida. Neste contexto, se for considerado um conjunto n de eventos possíveis cujas probabilidades de ocorrência p_1, p_2, \dots, p_n são conhecidas (na verdade, estas são as únicas informações sobre qual evento irá ocorrer), pode-se encontrar uma medida do quanto a “escolha” é envolvida na seleção do evento ou como se está incerto sobre o seu resultado. No caso, se tal medida existe e é chamada de $S(p_1, p_2, \dots, p_n)$, é razoável, então, que se exija dela as seguintes propriedades:

(1) S deve ser contínua em p_n .

(2) Se todas as p_n são iguais a $p_n = \frac{1}{n}$, então S deve ser uma função monotonicamente crescente de n . Neste caso, se o número de eventos possíveis n aumenta, a probabilidade de cada evento diminui em casos de eventos igualmente prováveis, então, como esta é a única informação que se tem a respeito do processo, a incerteza sobre o resultado acaba aumentando.

(3) Se uma “escolha” é dividida em duas escolhas sucessivas, a medida S original deve ser a soma ponderada dos valores individuais de S .

Foi concluído que a única formulação para a medida S que satisfaz as três propriedades citadas acima é dada por:

$$S(p_1, p_2, \dots, p_n) = -k \sum_{i=1}^n p_i \log[p_i] \quad (168)$$

com k sendo uma constante positiva e equivalente à escolha de uma unidade de medida.

A prova para a Equação 150 se encontra no Apêndice 2 em Shannon (1948) e também pode ser vista na seção 5 em Méndez (2008).

Quantidades na forma S desempenham um papel central na Teoria da Informação como medida de informação, escolha e incerteza. Tal quantidade S será chamada de entropia de um conjunto de probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n . Se x é a variável possível, então sua entropia é $H(x)$, logo x não é um argumento de uma função e sim uma indicação ou rótulo para um número para que seja possível diferenciá-lo de $H(y)$ por exemplo, onde se tem a entropia para a variável y . É interessante citar que, como em Mattos *et al* (2002), a entropia na teoria da

informação corresponde à incerteza probabilística associada a uma distribuição de probabilidade.

De acordo com Mattos *et al* (2002), Shannon derivou a medida da entropia de forma com que ela refletisse certas características desejadas. Apenas duas delas são citadas a seguir. As demais tratam de probabilidade conjunta e condicional e podem ser verificadas em Shannon (1948).

(1): $S = 0$ se, e somente se, todas as probabilidades p_i , exceto uma que tem valor unitário, são zero. Com isso, pode-se dizer que a medida S só desaparece, ou seja, só é nula quando se tem certeza sobre o resultado.

(2): Para um dado n , S é máximo e igual a $\log[n]$ quando todas as probabilidades p_i são iguais (por exemplo, $p_i = 1/n$). Isto é também intuitivamente a situação mais incerta.

No entanto, outros matemáticos demonstraram que a medida de Shannon atende também a outras propriedades de interesse e que segundo Mattos *et al* (2002) podem ser escritas como:

Propriedade 1: $S(p_1, p_2, \dots, p_n)$ é uma função duas vezes diferenciável de (p_1, p_2, \dots, p_n) .

Propriedade 2: $S(p_1, p_2, \dots, p_n)$ é simétrica em relação à permutação de (p_1, p_2, \dots, p_n) .

Propriedade 3: $S(1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ é uma função monotonicamente crescente de n .

Propriedade 4: S é uma função estritamente côncava de (p_1, p_2, \dots, p_n) .

A propriedade 1 é importante por permitir a aplicação de técnicas para maximização de funções diferenciáveis. A propriedade 2 significa que as p_i podem ter sua ordem invertida no cálculo de S que esta não se altera. A propriedade 3 quer dizer que a entropia da distribuição uniforme (máxima entropia possível) cresce quanto maior for o número de resultados possíveis n . Por último, a quarta propriedade é de especial relevância, pois permite que S tenha um único máximo global, mesmo quando sujeita a restrições lineares (Mattos *et al*, 2002).

Tais propriedades citadas permitem que a medida de entropia S também possa ser utilizada em outros contextos como em casos onde representa proporções.

Por outro lado, como pode ser visto em Shannon (1948), no caso contínuo a entropia é obtida de maneira análoga à definição dada no caso discreto. Logo,

$$S(p_1, p_2, \dots, p_n) = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log[p(x)] dx \quad (169)$$

com $p(x)$, neste caso, é chamada função densidade de probabilidade (FDP).

Para o caso de distribuição n dimensional vem,

$$S = - \int \dots \int p(x_1, \dots, x_n) \log[p(x_1, \dots, x_n)] dx_1 \dots dx_n \quad (170)$$

O mesmo autor ainda afirma que a entropia para a distribuição contínua tem a maioria das propriedades correspondentes ao caso discreto. Duas são mostradas a seguir, as demais podem ser encontradas em Shannon (1948).

Propriedade 1: Se x é limitado a um certo volume V em seu espaço, então $S(x)$ é máxima e igual a $\log V$ quando $p(x)$ é constante ($1/V$) no volume.

Propriedade 2: Com duas variáveis quaisquer x e y , tem-se:

$$S(x, y) \leq S(x) + S(y) \quad (171)$$

A igualdade só ocorre se, e somente se, x e y são independentes.

Mesmo a entropia para variáveis contínuas sendo considerada por Shannon como uma extensão da entropia para variáveis discretas, ela não é obtida de uma maneira tão simples, alguns cálculos matemáticos a mais são necessários. É citado em Uffink (1997) que a melhor maneira de se lidar com distribuições que consideram variáveis contínuas é substituindo a expressão da entropia para variáveis discretas pela chamada entropia relativa. Tal entropia também é conhecida como divergência de Kullback-Leibler ou entropia cruzada. Então, para casos contínuos, a entropia é dada por:

$$S(p_1, p_2, \dots, p_n) = - \sum_i p(x_i) \log \left[\frac{p(x_i)}{q(x_i)} \right] \quad (172)$$

em que $p(x_i)$ é a distribuição de probabilidade da variável x e $q(x_i)$ é um peso positivo determinado por um grau de conhecimento ou experiência. Em um caso especial em que

$q(x_i)$ é uma medida contável ou se $\forall i: q(x_i) = 1$, a entropia relativa, que pode ser vista na Equação 190 se torna igual à entropia absoluta representada pela Equação 168.

Esta entropia relativa tem uma extensão natural para o caso contínuo. Uma diferença importante desta entropia para a absoluta é que se ocorrer uma partição em subconjuntos (A_1, A_2, \dots, A_n) cada vez menores, a distribuição de probabilidade discreta $p(A_i)$ e o peso $q(x_i)$ são divididos simultaneamente e o logaritmo do resultado dessa divisão não diverge. Deve ser salientado ainda que ao se fazer partições com a intenção de um refinamento de S , a entropia relativa não cresce. Dessa forma, a entropia relativa pode ser definida como sendo o limite sobre o qual crescentes refinamentos são feitos desde que se considere a hipótese de que q não desapareça em nenhum conjunto A para o qual $p(A) > 0$ (Uffink, 1997). Logo, pode-se escrever, para o caso contínuo, que a entropia relativa da medida de probabilidade p com relação a um conhecimento anterior q é

$$S(p, q) = - \int \frac{\partial p}{\partial q}(x) \log \frac{\partial p}{\partial q}(x) dq(x) \quad (173)$$

onde $\partial p / \partial q$ é a derivada de Radon-Nykodim e, nesse caso, q corresponde à medida de Lebesgue. Então, a Equação 173 se reduz a

$$S(p, q) = - \int p(x) \log[p(x)] dx \quad (174)$$

que corresponde à Equação 169 de Shannon. Nesta Equação 174, $p(x)$ é a densidade de probabilidade da medida x .

Uma importante questão levantada por estudiosos e que diz respeito ao caso contínuo está relacionada à utilização da função $(-x \log x)$ ao invés de alguma outra função para a maximização da entropia. Alguns autores tentam provar que esta consideração é a única regra correta de inferência, ou seja, os autores afirmam que o PME é justificado como o único método consistente de inferência. Este e outros detalhes que valem a pena serem estudados sobre os casos contínuos podem ser verificados em Uffink (1997) e Méndez (2008).

Edwin Thompson Jaynes (1922-1998), em seu trabalho intitulado “*Information Theory and Statistical Mechanics*” datado de 1957, por meio de conceitos definidos na Teoria da Informação, “[...] fornece critérios construtivos para a criação da distribuição de probabilidade com base em um conhecimento parcial e leva a um tipo de inferência estatística chamada de

estimativa de máxima entropia”. Segundo o autor, esta é a estimativa menos tendenciosa possível sobre as informações dadas.

Como dito pelo próprio Jaynes (1957a), Shannon demonstrou que a expressão para a entropia, representada pela Equação 168 tem um significado mais profundo e completamente independente da termodinâmica, isso possibilitou uma inversão do raciocínio relacionada à mecânica estatística. De acordo com Jaynes (1957a), a teoria da entropia era construída com base em equações de movimento complementadas por hipóteses adicionais. No final era feita uma comparação dos resultados das equações com as leis da termodinâmica e a entropia era então identificada. Hoje em dia a diferença é que se faz a identificação da entropia no início da análise, a entropia é o ponto inicial, “[...] e o fato de que a distribuição de probabilidade maximiza a entropia sujeita a certas restrições se torna essencial e justifica o uso da distribuição por inferência”.

Neste contexto, foram definidas e estabelecidas algumas das principais propriedades da inferência pela máxima entropia. Segundo o próprio autor, algumas propriedades relativas à maximização da entropia já haviam sido apontados há muito tempo atrás por Gibbs, mas na época foram tomadas como “[...] observações secundárias não essenciais para a teoria e que não fornecem por si só nenhuma justificativa para os métodos da mecânica estatística” (Jaynes, 1957a).

Por outro lado, antes de se mencionar tais propriedades que constituem a base da máxima entropia, é conveniente ressaltar que diante das várias vertentes sob as quais se desenvolveu a teoria estatística, o critério da máxima entropia está inserido na escola subjetiva que coloca a probabilidade como uma expressão da ignorância humana. A probabilidade neste caso expressa a expectativa da ocorrência ou não de um evento, baseada em qualquer informação que se tenha disponível. Maiores detalhes desta escola e de outras que se desenvolveram no decorrer do tempo podem ser encontradas no Apêndice A.

A.3 PRINCÍPIO DA MÁXIMA ENTROPIA

O problema inicial na estimativa de máxima entropia está no fato de se especificar probabilidades em casos onde se tem pouca ou nenhuma informação disponível. Neste caso,

um ponto importantíssimo a se considerar é com relação à escolha das distribuições de probabilidade quando se tem duas ou mais que concordam igualmente com as informações disponíveis.

Jaynes (1957a) coloca que o ponto crucial é ter uma distribuição amostral que evite tendência e que ao mesmo tempo concorde com qualquer informação que seja dada. A definição da entropia de Shannon, representada pela Equação 168 no caso da formulação discreta, representou um grande avanço na teoria da informação. Esta descoberta, já considera o termo entropia como sinônimo de incerteza,

[...] é o critério único e não ambíguo para o “montante de incerteza” representado por uma distribuição de probabilidade discreta, que concorda com nossas noções intuitivas de que uma distribuição ampla representa mais incerteza que uma com pico mais acentuado, e satisfaz todas as outras condições que o torna razoável (Jaynes, 1957a).

A partir deste ponto, o problema colocado no primeiro parágrafo desta seção é solucionado por Jaynes (1957a) através da seguinte afirmação:

[...] ao se fazer inferências com base em informações parciais devemos usar a distribuição de probabilidade que tem entropia máxima sujeita a tudo que é conhecido. Esta é a única atribuição que podemos fazer; o uso de qualquer outra equivaleria a uma suposição arbitrária de informação que por hipótese não temos.

Neste contexto, se faz necessária a resolução (pelo método dos multiplicadores de Lagrange) de um problema de otimização.

De acordo com Jaynes (1978), diferentes tipos de informações geram também diferentes tipos de problemas matemáticos, mas existe uma importante classe de problemas, cuja solução foi dada por Gibbs na qual as restrições consistem na especificação de valores médios de certas funções $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}$, logo,

$$\sum_{i=1}^n p_i(x) f_k(x_i) = F_k \quad (175)$$

em que x é a variável discreta considerada, n é o número total de variáveis que são consideradas, m é o número de funções, $p_i(x)$ é a probabilidade de x , $f_k(x_i)$ é uma função de x onde $1 \leq k \leq m$ e F_k é um valor dado pelo problema. Tal valor F_k correspondente a

cada função considerada e diz respeito ao valor médio das observações; a maneira com que ele é obtido não é importante nesse ponto da análise, pois é um valor numérico dado ao problema de máxima entropia.

O PME fornece meios apropriados através dos quais as informações podem ser construídas dentro das probabilidades atribuídas. Se você quer apenas incorporar informação sobre a precisão com que F_k é conhecida, não é necessário nenhum modelo estrutural novo; a maneira de se fazer isto é impondo outra restrição. Além de adicionar a média probabilística $\langle f \rangle$ deve-se especificar a média probabilística ao quadrado $\langle f^2 \rangle$; ou, na verdade, qualquer número de momentos $\langle f^n \rangle$ ou funções mais gerais (Jaynes, 1978).

Então, considerando de início as variáveis discretas, é possível encontrar a distribuição de máxima entropia fazendo a maximização da equação 168 sujeita as seguintes restrições:

$$E(x) = \sum_{i=1}^n p(x_i) f(x_i) \quad (176)$$

$$\sum p(x_i) = 1 \quad (177)$$

em que $E(x)$ é o valor esperado da variável x , que pode assumir valores $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, p_i é a distribuição de probabilidade correspondente à variável x considerada e $f(x_i)$ é uma função de x . Já a Equação 177 corresponde à condição de normalização, também conhecida como restrição natural já que reflete a necessidade de que toda distribuição de probabilidade some o valor um.

Mattos *et al* (2002) apresentam o problema de otimização de uma maneira mais geral.

Maximizar p :

$$S = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \ln[p(x_i)] \quad (178)$$

Sujeita as restrições:

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1 \quad (179)$$

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) g_{ri}(x_i) = a_r, r = 1, \dots, m \quad (180)$$

$$p(x_i) \geq 0 \quad (181)$$

As m restrições representadas pela Equação 180 são chamadas restrições de consistência. Em aplicações de probabilidade cada a_r representa o momento de ordem r . Isto significa fazer $g_{ri}(x_i) = x_i^r$ ou $g_{ri}(x_i) = (x_i - \mu)^r$ em que μ é a média da distribuição considerada. Por outro lado, a_r pode significar também o momento característico da distribuição de probabilidade. Tem-se ainda $(m + 1)$ restrições lineares e, como $i = 1, \dots, n$, tem-se n restrições de não negatividade na Equação 181. Isto caracteriza um problema de programação não linear. Por outro lado, a existência do termo $\ln[p_i]$ na Equação 178 implica que a medida da entropia está definida somente para p_i maiores que zero, portanto as n restrições de não negatividade são não operantes. Com isso, o problema se torna mais simples levando-se em conta a maximização da Equação 178 sujeita apenas à Equação 179 e Equação 180, o que implica na otimização de funções não lineares sujeita apenas a restrições de igualdade. Dessa forma o método dos multiplicadores de Lagrange pode ser aplicado para solucionar o problema. Logo, $(m + 1)$ multiplicadores de Lagrange serão considerados para $(m + 1)$ restrições (Mattos *et al*, 2002).

Pode-se ainda se fazer as seguintes observações a respeito do sistema de restrições levando-se em conta a tabela abaixo:

Tabela 5 – Sistema de restrições. Fonte: Mattos et al (2002).

	n incógnitas	
Restrição natural	$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$	
Restrições de consistência	$ \begin{array}{ccccccc} p_1 g_{11} & + & p_2 g_{12} & + & \dots & + & p_n g_{1n} & = & a_1 \\ \vdots & + & \vdots & + & \dots & + & \vdots & = & \vdots \\ p_1 g_{m1} & + & p_2 g_{m2} & + & \dots & + & p_n g_{mn} & = & a_m \end{array} $	$m + 1$ equações

Como já dito anteriormente, tem-se $(m + 1)$ restrições, ou seja, $(m + 1)$ equações lineares. O número de incógnitas, que corresponde ao total de distribuições de probabilidade $p(x_i)$ e que, por sinal, dependem do número de variáveis x_i consideradas no problema, é igual a n . Com isso, de acordo com Mattos *et al* (2002) têm-se as seguintes possibilidades:

Para $m + 1 \geq n$:

- existe um número infinito de soluções ou
- existe uma única solução ou
- não existe solução factível

Para $m + 1 < n$:

- existe um número infinito de soluções ou
- não existe solução factível

Contudo, deve-se existir solução factível para que o problema de otimização possa ser solucionado. Então, considerando-se a possibilidade de resolução do problema pode-se afirmar que:

Para $m + 1 \geq n$: com pelo menos n restrições linearmente independentes, maximizar a entropia significa resolver o sistema de equações lineares formado pelas n restrições (se $m + 1 = n$) ou por um subgrupo das restrições (se $m + 1 > n$). Neste caso não se faz necessária a maximização da entropia já que a solução do sistema de restrições lineares só admite uma única solução. Dessa forma ele pode ser resolvido por meio da utilização de métodos padrões.

Para $m + 1 < n$: maximizar a entropia significa escolher uma única solução dentre um número infinito de soluções. Neste caso a resolução do sistema envolve a escolha de uma distribuição de probabilidades dentre infinitas distribuições possíveis que atendem o sistema de restrições. É neste caso, portanto, que a otimização se faz necessária, sendo que, neste caso a maximização da entropia é um problema variacional padrão e que pode ser solucionado pelo método dos multiplicadores de Lagrange.

Então, se o analista tem certa informação a respeito da variável x , o problema pode ser representado pela distribuição de probabilidade de x que tem máxima entropia e que ao mesmo tempo concorda com a informação que se tem inicialmente. Mas nem todas as informações devem ser consideradas, elas devem ser analisadas e somente aquelas que podem ser testadas, ou seja, que não têm um sentido vago, devem ser utilizadas. Com a experiência vai se tendo maior habilidade em converter informações verbais em restrições matemáticas. Pode-se dizer também que “... cada fragmento de dados que se obtém é uma nova restrição

que, se convincente, restringe as possibilidades permitidas pela nossa informação prévia” (Jaynes, 1985)

Contudo, deve-se recorrer à inferência da máxima entropia para que seja representada a falta de conhecimento sobre o sistema, de maneira que seja livre de suposições arbitrárias no que diz respeito à falta de informações (Jaynes, 1957b). Além disso, as regras matemática da teoria da probabilidade devem ser obedecidas na aplicação do método em problemas reais e isso seria violado, por exemplo, ao se considerar que a distribuição de máxima entropia faça alguma afirmação sobre frequências. De acordo com Jaynes (1978), “qualquer distribuição de probabilidade sobre algum espaço amostral permite fazer afirmativas sobre preposições ou eventos definidos dentro deste espaço. Não se pode fazer nenhuma afirmação sobre eventos que se situam fora desse espaço”.

O mesmo autor ainda diz que se costuma fazer a probabilidade em um espaço amostral como sendo o mesmo que a frequência em diferentes espaços. De fato existe uma conexão entre probabilidade em um espaço amostral S definido e a frequência em outro espaço amostral S^n , “a frequência esperada de um evento é sempre igual a sua média probabilística sob diferentes ensaios”. É importante destacar que tal conexão é demonstrada por regras matemáticas da teoria da probabilidade. Maiores detalhes sobre esta conexão e outros estudos a respeito de frequência e probabilidade podem ser encontrados em Jaynes (1978).

Vale mencionar aqui que no PME a distribuição de probabilidade contém certa informação e é razoável acreditar que, na medida em que se “coloca” informações na distribuição considerada, pode-se também “extrair” esta informação de volta, tirando-a de dentro de tal distribuição. Então, ao se aplicar a restrição da média na distribuição, pode-se obtê-la de volta fora dessa mesma distribuição. Dessa forma as restrições matemáticas terão a forma da expectativa fixada para várias quantidades sobre as quais se tem alguma informação. A entropia é sujeita a restrições que expressam propriedades que se deseja que a distribuição tenha, mas que não são suficientes para determinar tal propriedade. A demonstração desta informação pode ser verificada no subtítulo 4 em Jaynes (1985).

Apêndice B

TEORIA DA MATRIZ ALEATÓRIA

A matriz aleatória (MA) teve sua primeira aparição no artigo do matemático John Wishart (1898-1956) intitulado “The Generalized Product Moment Distribution in Samples from a Normal Multivariate Population” datado de 1928. O foco do trabalho era a obtenção de uma distribuição generalizada para a amostra considerada além do cálculo de momentos acima da quarta ordem. Neste caso a população estatística - que é o conjunto de todos os valores da variável aleatória - é definida em termos de duas ou mais variáveis aleatórias (Estatística Multivariada). O autor então consegue obter com sucesso tal distribuição e momentos com a utilização de matrizes aleatórias em seus cálculos. Mais tarde Eugene Paul Wigner (1902-1995) introduziu o conceito de Teoria da Matriz Aleatória (TMA) ao publicar seu artigo “On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices” em 1958. Neste trabalho o objetivo do autor era descrever o espectro de energia de núcleos de átomos pesados. Ele se propôs trabalhar com o que se denomina ‘ensemble’ de matrizes aleatórias e, como consta em Bertuola *et al* (2006), ele

[...] descobriu que a estatística das flutuações dos níveis desses átomos pesados, obtidos experimentalmente, coincidia com a estatística das flutuações na densidade de autovalores, obtidos a partir da diagonalização das matrizes, cujos elementos eram gerados aleatoriamente e sujeitos a uma distribuição gaussiana.

Com isso, Wigner obteve a distribuição dos autovalores (também chamados valores característicos) para conjuntos de matrizes simétricas reais que tinham dimensionalidade alta,

além de demonstrar que tal distribuição depende apenas do segundo momento dos elementos da matriz.

Vale a pena esclarecer neste ponto que um ensemble de matrizes aleatórias, como dito em Silva (2000), “[...] corresponde a um conjunto de matrizes cuja distribuição é invariante por uma certa transformação de similaridade”. De maneira mais simples, Izenman (2008) define um ‘ensemble’ como sendo uma coleção ou família de matrizes aleatórias que juntamente com sua FDP mostra o quão provável cada membro desta família pode ser observado. No caso desta dissertação, será utilizado o Conjunto Positivo-Definido definido por Soize e que será abordado na próxima seção.

Wigner e seus colegas, incluindo Freeman Dyson e Madan Lal Mehta, trabalharam e desenvolveram a TMA a ponto dela se tornar uma das mais poderosas ferramentas em física matemática (Izenman, 2008). Além disso, o assunto da TMA traz muitos desafios por não estar enquadrado dentro de assuntos chamados triviais, isso faz com que tal abordagem seja atraente a pesquisadores. Ela pode ser aplicada na resolução de problemas em diversas áreas como em estudos da estatística, nucleares, de sistemas caóticos e não caóticos, dentre outros.

Nesse contexto, Almeida (2009) diz em seu artigo que

[...] o que nos atraiu a estudar matrizes aleatórias foi a percepção que Wigner teve quando diz ser possível estudar a dinâmica do sistema a partir de um Hamiltoniano formado por números aleatórios estatisticamente independentes. A partir desse Hamiltoniano nós podemos obter seus autovalores e conseqüentemente observar o comportamento dos mesmos.

Por outro lado, no que diz respeito à Função Densidade de Probabilidade (FDP) de uma matriz aleatória, segundo Adhikari (2007), ela pode ser definida de maneira similar à definição para variável ou vetor aleatório. Então pode-se dizer, de acordo com o mesmo autor, que:

Se \mathbf{G} é uma matriz aleatória real $n \times m$, a FDP da matriz variável de $\mathbf{G} \in \mathbb{R}_{n,m}$, denominada $p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$, é o mapeamento do espaço de matrizes reais $n \times m$ em que $\mathbb{R}_{n,m} \rightarrow \mathbb{R}$.

B.1 CONJUNTO POSITIVO DEFINIDO (CPD)

De acordo com Soize (2005a), o mais importante ensemble em aplicações físicas é o Conjunto Ortogonal Gaussiano (GOE – Gaussian Orthogonal Ensemble). Nele, “os elementos são constituídos de matrizes aleatórias reais simétricas com entradas independentes estatisticamente e as quais são invariantes sob transformações lineares ortogonais”. Mas a TMA pode ser utilizada em domínios diferentes do citado anteriormente. No caso deste trabalho, como já dito anteriormente, o domínio utilizado na TMA corresponde ao chamado Conjunto Positivo-Definido (CPD) definido e estudado por Soize (2003a) e Soize (2005a). As matrizes aleatórias pertencentes ao CPD, segundo Soize, é quase certo que sejam positiva-definidas e seus valores médios são dados por matrizes positiva-definidas. Deve-se lembrar também que a matriz aleatória neste caso é definida com valores em $M_n^+(\mathbb{R})$ (matrizes reais simétricas positiva-definidas), num espaço probabilístico definido, cuja distribuição de probabilidade é construída utilizando-se o PME. Além disso, tal conjunto é utilizado para construir o modelo probabilístico das matrizes generalizadas de massa, amortecimento e rigidez considerando-se o modelo reduzido para sistemas dinâmicos sem deslocamentos de corpo rígido. As propriedades, colocadas em Soize (2005a), de tal conjunto são dadas a seguir para uma matriz aleatória \mathbf{G} . Deve-se considerar para entender as propriedades que o conjunto de matrizes $M_n^+(\mathbb{R})$, definido em Soize (2005b), corresponde ao conjunto de matrizes $n \times n$ reais simétricas e positiva-definidas. Tem-se também outros conjuntos definidos pelo autor citado e que podem ser descritos como: $M_{n,m}(\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as matrizes $n \times m$ reais; $M_n(\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ quadradas reais; $M_n^S(\mathbb{R})$ corresponde ao conjunto de todas as matrizes $n \times n$ reais simétricas e $M_n^{+0}(\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ reais simétricas semipositiva-definida. Então neste caso vale a relação:

$$M_n^+(\mathbb{R}) \subset M_n^{+0}(\mathbb{R}) \subset M_n^S(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \quad (182)$$

(a) A matriz aleatória \mathbf{G} é real, simétrica e positiva-definida:

$$\mathbf{G} \in M_n^+(\mathbb{R}) \quad (183)$$

Vale a pena recordar que uma matriz real simétrica é sempre quadrada, não necessariamente tem inversa e é igual a sua transposta, ou seja, $\mathbf{G} = \mathbf{G}^t$.

Além disso, uma matriz positiva-definida tem seus autovalores maiores que zero, é sempre quadrada, tem seu determinante diferente de zero e sempre tem inversa, ou seja, \mathbf{G}^{-1} existe, pois para que a matriz \mathbf{G} tenha inversa, basta que seu determinante seja diferente de zero, ou o posto desta matriz coincida com sua ordem. Logo, esta propriedade representada pela Equação 165 determina que a matriz \mathbf{G} tem uma inversa \mathbf{G}^{-1} que também é positiva-definida.

(b) A matriz aleatória \mathbf{G} é de segunda ordem:

$$E[\|\mathbf{G}\|_F^2] < +\infty \quad (184)$$

(c) O valor médio da matriz aleatória \mathbf{G} é tal que:

$$E[\mathbf{G}] = \bar{\mathbf{G}} \in M_n^+(\mathbb{R}) \quad (185)$$

(d) A matriz aleatória \mathbf{G} é tal que

$$E[\|\mathbf{G}^{-1}\|^2] \leq E[\|\mathbf{G}^{-1}\|_F^2] < +\infty \quad (186)$$

Maiores detalhes sobre a TMA podem ser vistos em Kargin e Yudovina (2011), Edelman (2005), Sharifi *et al* (2003) e Forrester *et al* (2003). Este último aborda o interessante assunto da história da TMA. Além desses autores, a teoria também pode ser encontrada nos trabalhos de Soize, como em Soize (2003a), Soize (2005a).

B.2 FDP DE ALGUMAS MATRIZES ALEATÓRIAS

Serão apresentadas agora as FDP das principais matrizes aleatórias que serão utilizadas neste trabalho. São elas: distribuição gama da matriz variável, distribuição Wishart, distribuição Wishart inversa. As definições apresentadas aqui foram retiradas de Adhikari (2007).

(a) Distribuição Gama da matriz variável: uma matriz aleatória \mathbf{W} $n \times n$ simétrica positiva-definida tem uma distribuição gama se sua FDP é dada por

$$p_{\mathbf{W}}(\mathbf{W}) = \{\Gamma_n(a)|\Psi|^{-a}\}^{-1} |\mathbf{W}|^{a-\frac{1}{2}(n+1)} \exp(\text{tr}\{-\Psi\mathbf{W}\}), \quad \Re(a) > \frac{1}{2}(n-1) \quad (187)$$

De maneira simplificada representa-se esta distribuição como $\mathbf{W} \sim G_n(a, \Psi)$.

(b) Distribuição Wishart: Uma matriz aleatória \mathbf{S} $n \times n$ simétrica positiva-definida tem uma distribuição Wishart com parâmetros $p \geq n$ e $\Sigma \in R_n^+$ se sua FDP é dada por:

$$p_{\mathbf{S}}(\mathbf{S}) = \left\{ 2^{\frac{1}{2}np} \Gamma_n\left(\frac{1}{2}p\right) |\Sigma|^{\frac{1}{2}p} \right\}^{-1} |\mathbf{S}|^{\frac{1}{2}(p-n-1)} \exp\left(\text{tr}\left\{-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\mathbf{S}\right\}\right) \quad (188)$$

Simplificadamente pode-se dizer que $\mathbf{S} \sim W_n(p, \Sigma)$.

Uma observação importante é que quando $p < n$, a distribuição é frequentemente chamada de anti-Wishart (Adhikari, 2008).

Segundo Adhikari (2008), as distribuições Gama e Wishart, representadas respectivamente pela Equação 187 e Equação 188, sempre resultam em matrizes simétricas e positiva-definidas. Além disso, o autor afirma que quando o parâmetro de forma a da matriz Gama é um número inteiro, a Equação 187 se torna uma distribuição Wishart. Por fim, como afirmado pelo autor, Soize propôs a distribuição Gama para trabalhos com matrizes do sistema dinâmico. Dessa forma, Adhikari fez uma comparação entre as essas duas distribuições, Gama e Wishart, já que atendiam as condições para modelagem de matrizes aleatórias provenientes de sistemas estruturais dinâmicos. De acordo com o mesmo autor tem-se que:

$$G_n(a, \Psi) = W_n(2a, \Psi^{-1}/2) \quad (189)$$

Pode-se dizer desta comparação que do ponto de vista analítico as duas distribuições são idênticas. Apenas uma pequena diferença aparece quando conjuntos de matrizes aleatórias são simulados considerando que as diagonais da matriz gama são variáveis aleatórias gama e no caso da matriz Wishart, elas são chi-quadradas. Por outro lado, para matrizes aleatórias de grandes dimensões, o que ocorre em sistemas estruturais dinâmicos, tal diferença é desprezível.

Contudo, como as duas distribuições comparadas dão resultados semelhantes para análises de matrizes aleatórias com alta dimensão, o autor adotou para seu estudo a distribuição Wishart e deu como justificativas, além dos resultados anteriores mencionados, o fato dessa distribuição ser computacionalmente muito mais simples para simular e que existe

uma vasta literatura disponível a respeito do assunto. Nesta dissertação a matriz Wishart também será adotada.

O tema da TMA é bastante extenso, portanto, outras informações podem ser obtidas, por exemplo, em Almeida (2009), Almeida et al (2009), Cadima (2010), Debbah (2008), Eaton (2007) e Herrera et al (2007).

Apêndice C

MÉTODO DE MONTE CARLO

“A simulação é um processo de reprodução do mundo real baseado num conjunto de hipóteses e modelos concebidos da realidade” (Castanheira (2004) *apud* Ang e Tang (1984)). Na engenharia a simulação pode ser aplicada para prever ou estudar o desempenho e/ou a resposta de um sistema. Com as simulações sendo repetidas até que um critério de convergência seja confirmado, ela pode ser utilizada para se avaliar alternativas de concepção de modelos e determinar a sua concepção óptima. O Método de Monte Carlos (MMC) será utilizado para que seja possível realizar as simulações e obter as respostas necessárias.

O Método de Monte Carlo surgiu oficialmente no ano de 1949 com o artigo *The Monte Carlo Method* de autoria dos matemáticos John von Neumann e Stanislaw Ulam. Segundo Ulam, o nome do método foi dado em homenagem a seu tio, que era frequentador do cassino de Monte Carlo, ao contrário do que poder-se-ia pensar em função da associação direta à natureza repetitiva e aleatória da roleta no cassino, por exemplo. Embora o método já fosse conhecido anteriormente, seu emprego de fato deu-se com o advento das calculadoras e computadores, uma vez que se trata de um método numérico (Fernandes, 2005).

O MMC está enquadrado, neste trabalho, na fase de Simulação Estocástica, ele pode ser programado e é bastante utilizado na propagação de incertezas em sistemas estruturais dinâmicos. A intenção nesta técnica é reproduzir o comportamento do sistema em estudo e obter as respostas estatísticas para análise dos resultados. São necessárias algumas

informações iniciais obtidas na fase de Modelagem Estocástica para que seja possível trabalhar com esta técnica. São elas: as variáveis ou matrizes aleatórias definidas e a correta FDP de cada uma delas. No caso desta dissertação serão quantificadas incertezas nas matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez e a correta FDP para tais matrizes é a Wishart.

Resumidamente, pode-se dizer que a Simulação de Monte Carlo (SMC) consiste nos seguintes passos:

1. Geração de n amostras das matrizes aleatórias consideradas na análise e de acordo com a FDP de cada uma delas. Em cada simulação ou interação gera-se uma amostra aleatória de cada matriz aleatória considerada, dessa forma, o número de amostras geradas corresponde ao número de simulações ou iterações realizadas, que por sua vez, tem seu valor determinado no ponto onde ocorre a convergência do método. É importantíssimo mencionar que as matrizes aleatórias determinadas devem ser independentes, ou seja, uma matriz aleatória não pode influenciar no resultado da outra.

2. Com as amostras aleatórias geradas, as funções densidade de probabilidade correspondentes são construídas e as respostas estatísticas são obtidas para análise.

O Método de Monte Carlo permite simular qualquer processo cujo andamento dependa de fatores aleatórios. Também em problemas matemáticos que não tenham a menor relação com questões aleatórias pode-se inventar um modelo probabilístico artificial que permita resolver estes problemas. Por exemplo, usando o método de Monte Carlo pode-se calcular a área de uma figura plana qualquer ou estimar quanto dura uma máquina conhecendo-se o tempo de duração de suas peças. Sendo assim, pode-se falar do método de Monte Carlo como um método universal para a solução de problemas matemáticos (Fernandes, 2005).

Como dito por Fernandes (2005), em se tratando de variáveis ou matrizes aleatórias, suas amostras são geradas a cada iteração, então,

[...] nada mais coerente que seus valores sejam obtidos através de adivinhação, por exemplo. Entretanto há dois inconvenientes para essa abordagem. O primeiro é que não é prático ficar fazendo adivinhações em centenas ou milhares de iterações para múltiplas variáveis. O segundo é que o resultado dificilmente satisfaria o modelo de distribuição de probabilidades escolhido. O que se faz então é usar um gerador de números aleatórios, que na verdade não existe, uma

vez que esses geradores seguem algoritmos, que por definição nada têm de aleatórios. Na verdade tais algoritmos são geradores de números pseudo-aleatórios (Fernandes, 2005).

Com isso, é importante entender que nas simulações aleatórias a geração das amostras aleatórias se dá a partir de uma ‘semente’, ou por um valor inicial das variáveis ou matrizes determinadas inicialmente.

É necessário gerar um número suficiente de amostras de modo que se possa fazer estatísticas da resposta, ou a determinação de uma série de momentos (média e de dispersão). O principal problema neste momento é determinar quantas simulações são necessárias para construir uma aproximação da resposta para um erro pré-definido. Para isso, é utilizado o método de convergência quadrática. De acordo com Huyse *et al* (2001), “A convergência não depende diretamente do número de variáveis do problema”.

Segundo Soize (2005b), a convergência, de acordo com a dimensão das matrizes aleatórias e o número de realizações necessárias na SMC, é dada por:

$$conv(n_s, n) = \left\{ \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \int_{\omega \in B} \|Q^n(\omega; \theta_k)\|^2 d\omega \right\}^{1/2} \quad (190)$$

em que: n é a ordem das matrizes aleatórias; n_s corresponde ao número de SMC utilizado para se construir as estatísticas da resposta; ω é a frequência na banda B ; $Q^n(\omega; \theta_k)$ corresponde à resposta do sistema estocástico calculada para cada simulação k com resultado correspondente θ_k .

Para se verificar a convergência média quadrática determina-se um erro aceitável para que o número de simulações seja verificado e, dependendo deste erro, o resultado de $conv(n_s, n)$ se modifica.

Apêndice D

PROBABILIDADE – CONCEITUAÇÃO E CÁLCULO

A palavra probabilidade deriva do Latim “*probare*” (provar ou testar) e é difícil, talvez impossível, descobrir quem ou quando tal vocábulo foi utilizado pela primeira vez. Mas de acordo com Almeida (2005) *apud* Hacking (2002), a primeira vez que a palavra probabilidade associada a uma medida surgiu em um documento escrito foi no livro IV do título “*La Logique ou l'art de Penser*” (Lógica ou Arte de Pensar) datado de 1662, cujo autor provavelmente seja Antoine Arnauld (1612 – 1694). Por outro lado e, segundo Ayres (1966), não se tem dúvidas de que o uso de “provável” antecede no tempo ao uso de “probabilidade” e que “[...] desde as mais antigas aparições, “provável” significou, conforme se dizia no século XVII, um ponto do caminho entre o falso e o verdadeiro, entre o incerto e o certo”.

“Há milhares de anos jogos de azar têm sido parte de nossa civilização. Pinturas em tumbas egípcias feitas em 3500 a.C mostram pessoas jogando uma forma primitiva de dados feitos de um osso do calcânhar de nome astragalus. Esses astragali tinham 4 faces cujas probabilidades de cair em um lançamento eram aproximadamente iguais a 0,39, 0,37, 0,12 e 0,12. Dados de 6 faces datados de 3000 a.C foram encontrados no norte do Iraque. Durante as Cruzadas vários jogos de dados foram trazidos para o Ocidente (a palavra “azar” é derivada de al zahr, que significa “dado” em árabe). O baralho moderno surgiu na França no século 14” (Gadelha, 2004).

Entretanto, na tentativa de explicar a natureza do conteúdo de “provável” e “probabilidade”, correntes probabilísticas foram se formando e, com elas, conflitos foram

surgindo. Como descrito em Ayres (1966), com estudos relacionados à área, dúvidas e perguntas iam sendo formuladas, já no século XVI, tendo como base pesquisas da verdade e da certeza, sendo conduzidas por assuntos, como por exemplo, a “medida da sorte” do jogador em jogos de azar. Nesta fase, e simbolizando a pré-história do cálculo da probabilidade, destacam-se Girolamo Cardano (1501 - 1576), Blaise Pascal (1623 - 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665). Inclusive, a origem do desenvolvimento da teoria matemática da probabilidade é atribuída a Pascal e Fermat que se correspondiam na intenção de resolverem problemas da época. Tais correspondências foram publicadas em 1679, em Toulouse.

Ainda em estudos de probabilidade relacionados a jogos de azar (baralhos e dados), vieram posteriormente os estudiosos Christian Huyghens (1629 – 1695), Pierre-Remond de Montmort (1678 - 1719), Abraham de Moivre (1667 - 1754), Jacob Bernoulli (1654 - 1705) – também conhecido por James ou Jacques Bernoulli, Pierre-Simon de Laplace (1749 – 1827), dentre outros. Por outro lado, temas relacionados, por exemplo, a proporção de nascimentos segundo o sexo da criança e a erros verificados em observações astronômicas também foram estudados e seus numerosos autores podem ser vistos em Ayres (1966).

No que tange ao significado de probabilidade sob o ponto de vista teórico ou a sua aplicação, diante dos vários e valiosos estudos realizados, existe um consenso, mas com relação à explicação do conceito existiram e ainda existem divergências. Isso provocou a formação de correntes, também chamadas por abordagens ou escolas, das quais podem ser citadas: corrente teológica, corrente clássica, corrente lógica, corrente axiomática, corrente frequencial, corrente filosófica, corrente matemática, corrente indutiva, corrente dedutiva, corrente objetiva e corrente subjetiva. Entretanto, pode-se classificar tais correntes em dois grandes grupos distintos, cada um com características próprias: a abordagem objetiva e abordagem subjetiva (que por sinal é mais ampla que a primeira), nas quais se incluem as outras correntes citadas.

Levando-se em conta tal classificação, é importante dizer que o conceito de probabilidade se desenvolveu com sentidos diferentes nessas duas abordagens e havia uma tensão constante entre elas que se prolongou por meio de vários estudiosos e cientistas até os dias atuais onde controvérsias relacionadas ao tema ainda são encontradas. Mas Jaynes (1957a) já anunciava que “[...] ambas as teorias são matematicamente idênticas, mas os conceitos é que se recusam a estarem ligados”. Além do que, segundo o mesmo autor, em

vários problemas estatísticos apresentados pela física, os dois pontos de vista devem ser aplicados, portanto são desnecessárias as discussões na tentativa de defender uma ou outra abordagem. Ademais, de acordo com Almeida (2005), “Ambas as faces são atuais e estão presentes em muitos critérios de decisão. Não sendo completamente autônomas nem antagônicas, nem sempre são equivalentes e conciliáveis. Do ponto de vista histórico, têm origens diferentes, mas percursos entrelaçados”.

A seguir serão apresentadas as duas escolas: objetiva e subjetiva, além de outras correntes importantes para este trabalho e que, como já dito anteriormente, estão inclusas nas duas primeiras. Maiores detalhes sobre o desenvolvimento histórico da probabilidade e as escolas desenvolvidas ao longo dos anos podem ser vistos em autores como: Almeida (2005), Andrade (2008), Ayres (1966), Gadelha (2004), dentre outros.

D.1 ESCOLA OBJETIVA

Nesta escola procura-se interpretar a probabilidade por uma via racional. Segundo Almeida (2005), “a probabilidade é uma propriedade da natureza, do mundo físico que poderá ser apreendida independentemente do observador”. Já Camargos (2004) afirma que tal probabilidade existe como parte da realidade externa e é conduzida por meio de arranjos experimentais.

Pode-se, neste caso

[...] definir probabilidade como sendo uma mensuração de uma característica objetiva, real e física. De acordo com esta definição objetiva, a probabilidade deveria ser concebida como algo que existe "lá fora" no mundo, e que deve ser mensurada, registrada e analisada da mesma maneira que fazemos, por exemplo, com a dureza de diferentes metais (Crovelli, 2011).

Nesta escola existe apenas uma probabilidade "correta" para qualquer evento ou fenômeno no mundo; e essa probabilidade deve ser relativamente bem mensurada pelos cientistas. Crovelli (2011) ainda cita que o cientista que trabalha com este tipo de abordagem acredita que existe uma única maneira correta e científica para se mensurar a probabilidade e seus estudos são voltados a identificar esta maneira de cálculo. Além disso, a probabilidade é

uma característica que somente é conhecida a *posteriori*, portanto os casos de eventos peculiares e sem precedentes estão fora do escopo de estudo desta escola.

As abordagens mais importantes para o contexto deste trabalho e que estão inseridas na escola objetiva, serão detalhadas mais adiante. São elas: escola clássica, escola axiomática e escola frequencial.

D.2 ESCOLA SUBJETIVA

A corrente subjetivista foi inicialmente desenvolvida por Plumpton Frank Ramsey (1903 – 1930) em 1926 com a publicação “*Mathematical Logic*” que tratava da probabilidade subjetiva e Bruno de Finetti (1906 – 1985) por meio da publicação do Teorema de Finetti em 1937 que introduziu justificativas teóricas para o uso do ponto de vista Bayesiano e também o conceito de permutabilidade. Posteriormente aos estudos de Ramsey e de Finetti, veio Leonard Jimmie Savage (1917 – 1971) que em 1954 publicou o livro “*The Foundations of Statistics*” no qual apresentou a teoria da probabilidade subjetiva da estatística bayesiana.

A interpretação da probabilidade neste caso depende de uma convicção subjetiva ou de um grau de crença que cada um ou um coletivo possa ter e manifestar (Almeida, 2005). A crença corresponde a um grau maior ou menor de incerteza. Além disso, na teoria subjetiva são permitidas diferenças de opiniões, ou seja, os indivíduos têm graus de crença diferentes com relação a uma mesma evidência, portanto, como dito em Crovelli (2011), não existe uma única probabilidade “correta” ou “objetiva” para qualquer evento que se esteja considerando.

Em Jaynes (1957a) encontra-se que esta escola traduz a probabilidade como uma expressão da ignorância humana; ela é uma expressão da expectativa de uma pessoa com relação à ocorrência ou não de um evento, baseada em qualquer informação disponível. Em outras palavras Crovelli (2011) afirmava que

[...] probabilidades são apenas mensurações das crenças do indivíduo quanto à possibilidade de que algo irá ou não irá ocorrer no mundo, de modo que não há razão pela qual os cientistas não possam legitimamente fazer uso de informações apriorísticas, de opiniões de especialistas, de informações indiretas, ou de

qualquer outra coisa que eles possam considerar relevantes para prever o resultado de um determinado evento.

De forma mais abrangente, Almeida (2005) diz que

Entre a convicção ou conhecimento profundo do que não ocorreu ou não irá ocorrer (probabilidade de valor nulo) ou, pelo contrário, que ocorreu ou que irá ocorrer (probabilidade de valor um), o valor da probabilidade (entre um e zero) traduzirá um grau de convicção ou conhecimento resultante de diversos fatores relativamente aos quais não descortinamos evidências suficientes para nos convencer definitivamente da realização ou não do acontecimento. Teríamos, assim, uma convicção ou uma certeza incompleta proporcional ao valor numérico. No entanto, o que o conceito parece pretender traduzir, adicionalmente, é a ideia que esse grau de convicção ou de certeza epistêmica é fundamentado ou justificado de um modo “sério” ou até mesmo objetivo. Não se trata, pois de mera intuição ou sugestão.

Isto pode ser justificado pelo que se observa em Camargos (2004) apud Weatherford (1982), onde se diz que Ramsey e de Finetti mostraram que, “[...] sob certas condições de racionalidade entre julgamentos comparativos dos agentes, o grau de crença pode ser representado por valores numéricos que satisfaçam aos axiomas de probabilidade”. Na primeira condição é necessária a especificação de como o grau de crença foi obtido, já a segunda é relacionada à coerência, onde diferentes graus de crença sobre uma preposição não podem entrar em conflito.

Para evitar que os graus de crença individual sejam arbitrários e também para que eles atendam aos axiomas de probabilidade, a escola subjetivista, por meio do teorema Ramsey – De Finetti introduz o conceito de coerência. Tal teorema impõe a necessidade de aceitação dos axiomas gerais de probabilidade para garantir a coerência (Almeida, 2005).

Neste contexto, tal abordagem alerta ao pesquisador o fato de que ele deve ir a campo com o intuito de coletar informações que possam ser utilizadas para melhorar a previsão daquilo sobre o qual ele estava incerto.

“Porém, uma definição subjetiva de probabilidade abre o campo da probabilidade para uma ampla variedade de diferentes métodos e maneiras de se mensurar probabilidades — algo que seria impossibilitado caso se adotasse uma definição objetiva” (Crovelli, 2011). Com esta

informação é possível concluir que não existe um método único e específico para o cálculo de probabilidades quando se leva em conta a abordagem subjetiva. Neste caso, o cientista pode utilizar o método que achar melhor ou aquele em que já se tem um histórico comprovado de previsões corretas em situações similares.

“Para os subjetivistas, o propósito da teoria da probabilidade é nos auxiliar a formar conclusões plausíveis em casos onde não existe nenhuma informação disponível para conduzir a certas conclusões, então verificações detalhadas não são esperadas” (Jaynes, 1957a).

Como se sabe, na escola objetiva, é necessário que se tenha precedentes de casos similares para o tratamento da probabilidade em um estudo atual, o que não ocorre com a abordagem subjetiva, portanto,

como a definição subjetiva não requer o uso de dados a posteriori, ela não impede — ao contrário da definição objetiva — o cálculo de probabilidades para casos peculiares. Todos os fenômenos do mundo podem, portanto, ser alvo de mensurações probabilísticas, pois o homem é ignorante ou incerto, em maior ou menor grau, quanto a praticamente tudo o que ele encontra no mundo. A definição subjetiva estimula o homem a ir a campo e mensurar sua incerteza a respeito de qualquer coisa que ele encontrar pela frente (Crovelli, 2011).

Neste caso, como dito também em Crovelli (2011),

[...] as coisas naturais não possuem uma mística "probabilidade" embutida nelas; mais especificamente, elas se comportam de acordo com as leis causais da natureza. A probabilidade no mundo real, portanto, é meramente uma mensuração da incerteza do homem quanto aos fatores causais em ação na natureza. Se o homem conhecesse cada fator causal que afeta cada evento da natureza, ele saberia o resultado de tudo antecipadamente. Ele jamais necessitaria da probabilidade, e jamais a utilizaria.

No entanto, o homem não é onisciente, e é por isso que ele utiliza a probabilidade para ajudá-lo a prever resultados — ele faz isso mensurando sua incerteza quanto aos possíveis resultados. A incerteza, no entanto, reside nele próprio, e não "lá fora" no mundo; portanto, a probabilidade é uma mensuração subjetiva da incerteza humana, e não uma mensuração de alguma coisa qualquer no mundo (Crovelli, 2011).

O ponto polêmico da teoria subjetivista pode ser sintetizado na frase provocativa proferida por de Finetti: "probabilidade não existe". De outra maneira, podemos pensar a interpretação subjetivista de probabilidade como generalização da visão medieval da probabilidade: todo indivíduo é uma autoridade sobre o que é mais provável (Camargos, 2004).

Neste caso da escola subjetiva, as abordagens mais importantes para o contexto deste trabalho e que estão inseridas nesta escola são a escola bayesiana e a abordagem da máxima entropia. A abordagem da máxima entropia traduzida pelo Princípio da Máxima Entropia pode ser vista em detalhes no Apêndice A desta dissertação, já a outra será detalhada mais adiante.

D.3 ESCOLA CLÁSSICA

A abordagem clássica, em termos cronológicos, teve seu início com o livro de Girolamo Cardano chamado "*Liber de ludo alea*" (Livro dos jogos de azar) em 1525. Depois, também com grande contribuição, veio em 1713 a publicação de Jacob Bernoulli intitulada "*Ars Conjectandi*" (Arte das Conjecturas) (publicação póstuma). O fim de tal escola é marcado por volta de 1920. Apesar disso, tal abordagem usualmente é atribuída a Laplace, que, como consta em Almeida (2005), é considerado como um dos maiores homens da ciência de todos os tempos, e cuja publicação "*Essai philosophique sur les probabilités*" datada de 1812, marca sua altíssima contribuição no desenvolvimento do cálculo de probabilidades.

Mas a abordagem proposta por Laplace em sua obra não teve uma boa aceitação na época, a começar pelo seu nome: Princípio da razão insuficiente de Laplace, também chamado por James Bernoulli de Princípio da equidistribuição da ignorância ou Princípio da indiferença segundo Keynes. Tal abordagem foi julgada por muitos estudiosos como a mais grave deficiência do conceito clássico, e que, inclusive, fez render muitas críticas por vezes pesadas e que o ridicularizavam.

Neste princípio, o problema da especificação de probabilidades quando se tem pouca ou nenhuma informação disponível seria solucionada ao se atribuir probabilidades iguais a ocorrência de dois eventos se não existisse razão para pensar o contrário (Jaynes, 1957a).

Como dito em Ayres (1966), em casos onde os eventos individuais não sejam conhecidos “[...] a equidistribuição dessa ignorância consiste em considerá-los igualmente possíveis (equipossibilidade) e, em continuação, se não existe qualquer razão em contrário que o impeça, considerá-los também igualmente prováveis (equiprobabilidade)”.

O cálculo da probabilidade neste caso pode ser traduzida simplificada em contar o número de vezes que um evento pode ocorrer e dividi-lo pelo número máximo de eventos possíveis.

Considerando um espaço amostral finito Ω formado por eventos simples (eventos formados por um único elemento do espaço, ou por um único ponto amostral) igualmente possíveis e A um evento do mesmo espaço amostral. Se A pode ser decomposto em eventos simples de Ω , então a probabilidade de ocorrência de A é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \quad (191)$$

com $0 \leq P(A) \leq 1$, onde:

$n(A)$ é o número de pontos amostrais favoráveis ao evento A .

$n(\Omega)$ é o número total de pontos amostrais ou eventos possíveis, devendo ser inteiro e positivo.

$P(A)$ é a probabilidade da ocorrência de A . Ela é determinada teoricamente, independente da realização ou não de um experimento.

Alguns pontos referentes ao cálculo devem ser ressaltados. Como dito em Ayres (1966), $n(\Omega)$ deve ser inteiro, então fica excluído o cálculo da probabilidade referente a casos contínuos a não ser que, arbitrariamente se considere intervalos que representem $n(A)$ e $n(\Omega)$. Além disso, em tal cálculo, referente a Equação 191 é necessário que se saiba de antemão os valores de casos favoráveis e casos possíveis, o que torna o cálculo bem difícil senão impossível de ser realizado e é justamente por isso que em termos práticos o método é aplicado somente a uma classe bem restrita de problemas. De outra maneira Jaynes (1957a) cita que exceto em casos onde se tem elementos que justificam simetria e que claramente se tornam eventos igualmente possíveis é que esta hipótese poderá ser justificada senão, pode parecer uma suposição arbitrária.

Outro ponto importante e que contribuiu para que a teoria de Laplace não fosse aceita, seria com relação a escolha de distribuições de probabilidade quando se tem duas ou mais que concordam igualmente com as informações disponíveis, e este fato o princípio de Laplace não abordava.

Contudo, de maneira sintetizada, pode-se dizer de acordo com Almeida (2005) que “a probabilidade, segundo a definição clássica, tem a característica de ser “a priori” ou pode ser considerada como dedutiva. É obtida a partir de axiomas ou hipóteses mentais (lógicas) e o respectivo valor é definido ou calculado sem necessidade do recurso à experiência”.

D.4 ESCOLA AXIOMÁTICA

Nesta escola o destaque foi para Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 - 1987) que desenvolveu as bases axiomáticas da probabilidade com a publicação chamada “Fundamentos da Teoria da Probabilidade” de 1933 e que estabeleceu um marco histórico, pois tal teoria constituiu um enorme avanço na área. Apesar do título desta subseção ser Escola Axiomática, Ayres (1966) afirma que a axiomática de Kolmogorov está inserida no cálculo e não na teoria de probabilidades já que não aborda questões filosóficas acerca do conceito de probabilidade. Portanto, os axiomas descritos a seguir não dizem respeito a um único modelo probabilístico, eles serão utilizados em métodos matemáticos para encontrar propriedades que serão verdadeiras em qualquer modelo probabilístico. Já a escolha do modelo a ser utilizado, que por sua vez deve satisfazer tais axiomas, é feita pelo probabilista ou estatístico.

A axiomática de Kolmogorov se sustenta, de acordo com Ayres (1966) nas seguintes bases:

1. Kolmogorov afirmava sem explicações ou justificativas que a teoria da probabilidade é uma disciplina matemática e que por isso deve ser desenvolvida sobre axiomas fundamentais exatamente como se faz na geometria ou na álgebra.
2. Tanto na imposição ou formalização da axiomática, o determinismo matemático é aplicável, de maneira correta e suficiente ao não determinismo probabilístico.
3. Kolmogorov não se ateu às especulações filosóficas acerca do conceito de probabilidade, inclusive ele próprio confessa não aplicar sua axiomática em

probabilidade de fatos concretos recorrendo assim a Teoria de R. Von Mises que lhe permite solucionar questões objetivas de situações reais.

Ayres (1966) faz algumas críticas, que o próprio autor chama de ‘reparos’ aos itens expostos anteriormente.

Para a definição axiomática da probabilidade pode-se dizer que o experimento aleatório é descrito pelo espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) que consiste do espaço amostral Ω , de uma σ -álgebra \mathcal{A} , construída a partir de Ω e de uma função de valores reais $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$. Então, sendo A um evento considerado, seus axiomas podem ser definidos como:

Axioma 1: condição de não negatividade

$$\forall A \in \mathcal{A}, P(A) \geq 0 \quad (192)$$

Axioma 2: condição de normalização arbitrária

$$P(\Omega) = 1 \quad (193)$$

Axioma 3: condição de aditividade finita

$$P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \quad (194)$$

No caso, o terceiro axioma representado pela Equação 194 ocorre para qualquer sequência finita de eventos disjuntos A_1, A_2, \dots .

Neste ponto pode-se então ser dada a definição matemática da probabilidade através dos teoremas de Kolmogorov:

Teorema 1:

$$P(\emptyset) = 0 \quad (195)$$

Teorema 2: Para qualquer sequência finita de eventos disjuntos A_1, A_2, \dots, A_n

$$P(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \quad (196)$$

Teorema 3: para qualquer evento A ,

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad (197)$$

Teorema 4: para qualquer evento A ,

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (198)$$

Teorema 5: se $A \subset B$,

$$P(A) \leq P(B) \quad (199)$$

Teorema 6: para quaisquer dois eventos A e B ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (200)$$

Se os dois eventos são mutuamente exclusivos, então o teorema 6 fica:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (201)$$

Teorema 7:

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1) \quad (202)$$

D.5 ESCOLA ORTODOXA OU FREQUENTISTA

A abordagem ortodoxa, também chamada de frequentista é uma escola de pensamento que considera a probabilidade de um evento como uma propriedade objetiva daquele evento. Segundo Andrade (2008), tal abordagem é considerada como um atributo e a partir disso é confirmada pela frequência relativa com que ocorre um evento, ou seja, a probabilidade aparece como um processo de contagem da frequência de ocorrência do evento em experimentos idênticos. No cálculo da distribuição de probabilidade, os ortodoxos acreditam estarem fazendo previsões as quais são verificáveis em todos os detalhes. Como dito em Ayres (1966),

[...] a proporção entre as ocorrências, ou seja, a razão entre o número de vezes em que o resultado se verifica e o número total, suficientemente grande, das observações processadas é um indicador valioso a futuras observações – da mesma espécie e nas mesmas circunstâncias das antecedentes –, dada a sua tendência à estabilidade.

Tal estabilidade adquire uma maior consistência à medida que se aumenta o número de observações.

De acordo com Almeida (2005) *apud* Hacking (2002), Cardano foi o autor do primeiro livro de probabilidade chamado “*Liber de Ludo Aleae*” e que foi escrito cerca de 1525 (talvez 1564) e que já teria a idéia de probabilidade como uma frequência. Mas foi Laplace em sua obra “*Essai philosophique sur les probabilités*” que, segundo Ayres (1966), registrou que a frequência relativa de certo evento se aproxima de sua probabilidade à medida que se aumenta o número de observações sucessivas e alcança um ponto situado em um intervalo extremamente pequeno onde também se inclui a probabilidade. Com isso, a frequência relativa se desvia muito pouco da probabilidade e acaba por ficar bem próximo da certeza caso o número de ensaios se torne infinito. As conclusões de Laplace são as seguintes: para um número de ensaios grande, a frequência está em um intervalo bem pequeno ao qual se situa a certeza, e para um número infinito de ensaios, tal intervalo tem medida nula e, portanto ocorre uma coincidência da frequência com a probabilidade.

Richard Von Misses, de acordo com Ayres (1966), é a maior figura da corrente frequentista o qual propôs que o conceito frequencial de probabilidade implicaria “[...] 1) a existência de um "coletivo"; 2) o processamento de observações, 3) a aleatoriedade dos resultados observacionais; 4) um valor-limite da frequência relativa”.

Neste caso, vale dizer que “[...] “coletivo” é uma sequência infinita de observações, efetivadas uniformemente, cada uma das quais define um resultado sob forma numérica” e se associa a esse conceito “[...] a característica do fenômeno de massa, o caráter de repetição dos eventos e a condição aleatória dos eventos” (Ayres, 1966).

Já no caso do grande número de observações, e ainda de acordo com Ayres (1966), o grande número está relacionado com o tipo de domínio que se estuda, onde em alguns casos pode-se ter centenas de observações e em outros até milhares. Dessa forma, entende-se por grande número o número necessário de observações suficientemente grande para se assegurar a convergência da frequência relativa para a probabilidade onde se teria um grau de convergência tão pequeno quanto o imposto por exigências de precisão. Cabe ressaltar que não se deve considerar neste caso um raciocínio com base na limitação matemática, pois ocorre aqui uma convergência estocástica e não uma limitação matemática da frequência

relativa para a probabilidade. A base disso está no fato de que a frequência é uma variável e a probabilidade é uma constante e no decorrer das sequências de observações, as frequências resultantes em cada sequência são variáveis aleatórias.

Diante do exposto, a probabilidade de um evento A pode ser colocada como segue:

Seja \mathcal{E} definido como um experimento aleatório, n como o número de ensaios (suficientemente grande) realizados deste experimento e considerando que em cada ensaio o evento A pode ou não ocorrer, tem-se que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} \quad (203)$$

em que $0 \leq P(A) \leq 1$ e

$$\frac{n(A)}{n} = fr(A) \quad (204)$$

Neste caso segue que:

$n(A)$ é o número de vezes que A ocorreu em n ensaios do experimento \mathcal{E} .

n é o número total de repetições (ensaios) do experimento \mathcal{E} sob as mesmas condições teóricas.

$fr(A)$ é a frequência relativa do evento A em \mathcal{E} .

Contudo, pode-se dizer que a probabilidade de um evento A é o valor para o qual a frequência relativa de A converge, o que significa dizer que a probabilidade é o valor em que a frequência relativa de A se estabiliza.

Um exemplo do procedimento frequentista, e que pode ser encontrado em Jaynes (1985), será dado a seguir.

Tem-se um conjunto de dados observados $D_{obs} = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$. Para esses dados é definida alguma hipótese H sobre o mundo real e a questão é decidir se ela pode ser considerada como verdadeira (na verdade, os ortodoxos agem como se H fosse verdadeira). A primeira coisa que um ortodoxo faria neste caso é definir um espaço amostral onde se “encaixaria” o conjunto de dados observados D_{obs} . Tal espaço amostral, segundo Jaynes

(1985) seria “[...] *uma coleção imaginária contendo outros conjuntos de dados* $\{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ *que se pensa terem sido observados mas não foram*”. Com isso tem-se

$$p(D_i|H), \quad 1 \leq i \leq N \quad (205)$$

que significa a probabilidade que o conjunto de dados seria observado se H fosse verdadeira. Tal probabilidade é chamada de distribuição amostral e “[...] *é interpretada como a frequência com que o conjunto de dados D_i seriam observados em longo prazo se a medição fosse feita repetidamente com H constantemente verdadeira*” (Jaynes, 1985).

A distribuição amostral é a única distribuição de probabilidade que a abordagem permite utilizar na análise e por isso a estatística ortodoxa é por vezes chamada de “teoria amostral”.

Diversas críticas surgiram também com relação à este pensamento e em vários momentos houveram tentativas de se explicar que frequência relativa e probabilidade não são sinônimas. Como dito em Rocha (sem data), a frequência relativa de um evento A é um valor associado a um fato no passado, ou seja, o evento já foi realizado. Já a probabilidade de um evento A é um valor relativo a um fato que ocorrerá no futuro, o evento ainda não se realizou. Como já dizia Almeida (2005):

o valor de uma probabilidade corresponde a uma expectativa não realizada, mas realizável, e só tem sentido até a realização do acontecimento associado; a probabilidade não “sobrevive” ao acontecimento; não há conservação de probabilidade para além do acontecimento associado.

É importante ressaltar também que a abordagem frequentista de probabilidade pressupõe que o espaço amostral seja enumerável, o que delimita o número de problemas que possam ter suas probabilidades calculadas por esta linha de pensamento. Além disso, uma grande quantidade de ensaios é necessária para se obter uma boa aproximação da frequência com a probabilidade, o que torna a aplicação do método na maioria das vezes inviável.

D.6 ESCOLA BAYESIANA

Na abordagem bayesiana a probabilidade de qualquer evento, fenômeno, proposição ou hipótese é definida como a quantificação do grau de plausibilidade (Andrade, 2008). Entende-se por plausibilidade tudo aquilo que é plausível, ou seja, tudo aquilo que é aceitável, verossímil. Na escola bayesiana é utilizada toda informação que se tem a priori juntamente com as informações que se adquire por meio de experimentos (verossimilhança). Para isso, o primeiro passo é a construção da distribuição a priori, que por sua vez é combinada com a função de verossimilhança e que resulta em uma distribuição posterior atualizada.

“De uma maneira geral, uma pessoa tem um grau de confiança anterior acerca de várias hipóteses possíveis e então modifica este grau de confiança anterior à luz de dados relevantes que coleta com o fim de chegar a um grau de confiança posterior. Os métodos de inferência bayesiana são basicamente uma descrição matemática do processo de aprendizagem” (Kyriazis *et al*, 1998).

Esta simples definição a respeito da abordagem bayesiana significa dizer que qualquer informação que se tenha a respeito do parâmetro em estudo deve ser unida a novas informações obtidas por meio de experimentos realizados (o que corresponde à verossimilhança) para que se tenha o máximo de informações possível na construção da FDP posterior.

De acordo com Costa (2004), uma das vantagens desta abordagem, além da possibilidade de inclusão da informação prévia e a capacidade de adaptação do método com novas informações obtidas, é o tratamento explícito da incerteza. Tal incerteza, que está relacionada ao parâmetro em estudo, pode assumir diferentes graus que são representados por meio de diferentes modelos probabilísticos para tal parâmetro.

No que tange a construção do intervalo de confiança, nessa abordagem ele é conseguido por meio do cálculo dos percentis de 2,5% e 97,5% da distribuição de densidade posterior para o caso de se querer um intervalo de confiança de 95%. É de extrema importância, porém, observar que a interpretação do intervalo de confiança neste caso é completamente diferente da corrente ortodoxa. Por exemplo, ao se calcular o intervalo de confiança de 95% por esta abordagem, tem-se então 95% de probabilidade de que o valor do parâmetro em estudo esteja entre o limite inferior e superior do intervalo. Esta afirmação não pode ser feita com a

utilização de outras abordagens. Além disso, pode-se indicar o valor da moda como sendo o mais provável para o parâmetro em estudo, e geralmente ele não é o centro do intervalo de confiança (Andrade, 2008).

D.6.1 Distribuição a priori ou anterior

A distribuição a priori, também chamada de distribuição anterior, corresponde à distribuição de probabilidade que se tem com relação ao objeto de interesse levando-se em conta o grau de crença ou confiança que se tem sobre o evento na ausência de quaisquer outras informações. Se o objeto de interesse é a variável aleatória X , então, a distribuição a anterior será a probabilidade de X antes de serem observados os dados mas que tem relevância no estudo realizado. Segundo Andrade (2008), tais informações podem vir tanto de trabalhos observacionais e experimentais quanto de informações científicas que não tem caráter estatístico.

É importante ressaltar aqui uma questão na polêmica discussão entre ortodoxos e bayesianos. Os primeiros “[...] alegam que, ao analisar os fragmentos de informações disponíveis para a construção da priori, a interpretação que um pesquisador dá a estas informações pode ter caráter subjetivo, o que seria condenável em uma análise científica” (Andrade, 2008). No entanto, existem algumas argumentações contra essa afirmativa:

- a. Boas distribuições a priori provêm de análises essencialmente objetivas e não subjetivas como alegam os ortodoxos. Como dito em Andrade (2008) *apud* Jaynes (2003), “Se todas as informações disponíveis são analisadas por diferentes pesquisadores, e todos eles fazem uso da mesma base de raciocínio lógico, as distribuições a priori especificadas resultam similares”.
- b. A melhor alternativa para se obter a distribuição anterior é pelo banco de dados, o que é colocado também pela abordagem ortodoxa. Mas alguns autores defendem a utilização de opiniões de especialistas no caso onde ainda não se tem informações mais específicas já que todo o conhecimento disponível deve ser incorporado à análise ao invés de ignorá-la.
- c. É possível analisar o impacto de diferentes distribuições a priori sobre as conclusões. Ela pode tanto carregar informação significativa sobre o elemento

estudado quanto carregar pouca ou nenhuma informação sobre este elemento. A Figura 61 mostra o efeito da distribuição a *priori* sobre a distribuição a *posteriori*. Como mostrado em Costa (2004), no caso da Figura 61a a verossimilhança, ou seja, a informação contida nos dados é predominante na distribuição *posterior* já que a distribuição *anterior* é quase plana e, portanto tem pouca influencia na distribuição final. A distribuição a *priori* neste caso é chamada não informativa. Com relação à Figura 61b a distribuição a *priori* tem informação suficiente para modificar a distribuição *posteriori* de maneira que esta se torna unimodal, o que faz com que ela seja chamada de informativa.

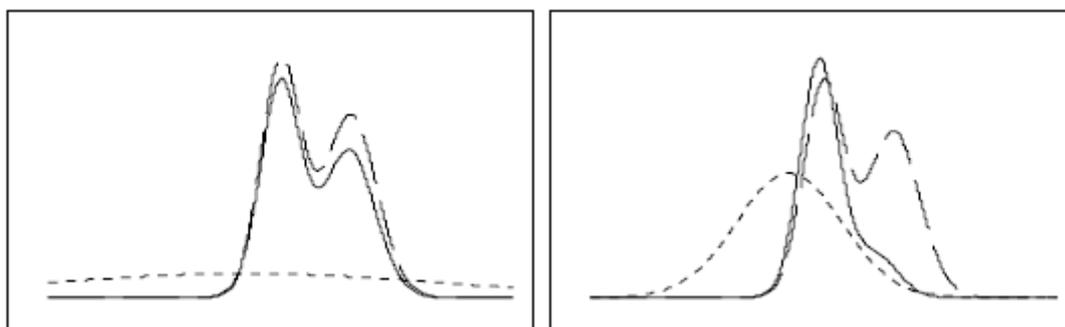


Figura 61 – Efeito da distribuição a priori. (a) priori não informativa; (b) priori informativa. priori (linha pontilhada); verossimilhança (linha tracejada); posteriori (linha cheia).

Fonte: Costa (2004).

D.6.2 Verossimilhança

A verossimilhança (ou *likelihood* ou plausibilidade) pode ser considerada como probabilidade condicional e representa a informação adicional fornecida pelos dados observados, ou seja, é utilizada para inferir sobre uma medida a partir da distribuição de probabilidade de um conhecimento anterior. O cálculo da verossimilhança começa com a proposição de uma distribuição para o fator estudado, então a densidade de probabilidade é calculada para cada valor específico que se queira. Tal valor é interpretado como sendo uma medida do quão verossímil é o valor particular do fator considerado com relação às densidades de probabilidades calculadas para outros valores específicos do mesmo fator. Um exemplo do cálculo da verossimilhança pode ser visto em Andrade (2008).

Vale colocar neste ponto que, de acordo com Andrade (2008), a escolha do modelo probabilístico é uma atribuição subjetiva e já que ambas as abordagens, ortodoxa e bayesiana, utilizam tal conceito, não é legítimo alegar que uma escola se distingue da outra quanto a subjetividade envolvida nos cálculos.

D.6.3 Distribuição a posteriori ou posterior

A distribuição *posteriori* é o grau de crença ou confiança que se tem sobre o evento tendo como base, além da informação a priori (toda informação disponível antes do estudo) também a verossimilhança (informação obtida pelo estudo realizado). Se as informações obtidas com o estudo são muito informativas a respeito do fator considerado, a probabilidade posterior será dominada pela verossimilhança, caso contrário, tal probabilidade terá o domínio da distribuição a priori.

D.6.4 Teorema de Bayes

De acordo com Jaynes (1996), o Teorema de Bayes é de longe o mais importante para a na inferência científica e foi Laplace quem redescobriu o princípio de Bayes de uma maneira mais clara e geral. O teorema de Bayes estabelece uma relação entre probabilidades condicionais. Considerando:

I = informação anterior

H = alguma hipótese (corresponde ao objeto de interesse)

D = dados

tem-se:

$$p(DH|I) = p(D|I)p(H|DI) = p(H|I)p(D|HI) \quad (206)$$

que resulta em

$$p(H|DI) = \frac{p(H|I)p(D|HI)}{p(D|I)} \quad (207)$$

Tal equação corresponde ao teorema de Bayes para $p(D|I) \neq 0$.

O teorema mostrado na Equação 189 “[...] representa o processo de aprendizagem. Ele mostra como a probabilidade anterior $p(H|I)$ muda para a probabilidade posterior $p(H|DI)$ como resultado da aquisição da nova informação D ” (Jaynes, 1985).

Uma importante propriedade da formulação de Bayes é que o teorema não depende sempre da informação total que se tem em mãos e que, se o analista tem partes dos dados, o teorema atualiza seu estado de conhecimento. Um exemplo encontrado em Jaynes (1985) pode ser citado. Considerando-se que se obtenha um dado D_1 hoje, a Equação 207 fica:

$$p(H|D_1I) = p(H|I) \frac{p(D_1|HI)}{p(D_1|I)} \quad (208)$$

Se em outro dia obtém-se um segundo dado adicional D_2 , tem-se:

$$p(H|D_2D_1I) = p(H|D_1I) \frac{p(D_2|HD_1I)}{p(D_2|D_1I)} \quad (209)$$

Fazendo $D = D_2D_1$ o resultado é a formulação correspondente na Equação 207, ou seja, a fórmula original de Bayes, o que justifica a propriedade mencionada.

Supondo agora n observações $d = d_1, d_2, \dots, d_n$ disponíveis e que θ denote os valores que podem ser atribuídos ao parâmetro mensurável D . O teorema de Bayes neste caso pode ser escrito da forma:

$$p(\theta|d) \propto p(\theta) \times I(\theta|d) \quad (210)$$

onde,

$p(\theta|d)$ é a densidade de probabilidade posterior de θ

$p(\theta)$ é a densidade de probabilidade anterior de θ

$I(\theta|d)$ é a verossimilhança de θ

A verossimilhança é numericamente igual à densidade de probabilidade dos dados de d , se θ é conhecido. Além disso, ela representa a informação adicional fornecida pelos dados (Kyriazis *et al*, 1998).

De maneira ainda mais simplificada pode-se dizer que:

$$\textit{Posterior} \propto \textit{Anterior} \times \textit{Verossimilhança} \quad (211)$$

Cabe ressaltar neste ponto que os estatísticos ortodoxos não aceitam a visão bayesiana onde se define probabilidade como uma medida de plausibilidade, por ser considerada uma visão subjetiva. Na ideologia ortodoxa, segundo Jaynes (1985), probabilidades somente podem ser atribuídas a variáveis aleatórias, pois devem ser também uma frequência e já que a hipótese H não é uma variável aleatória, as probabilidades anterior e posterior são consideradas como sem sentido. Além disso, como consequência, eles não combinam a verossimilhança com a informação à priori, já que esta é considerada com teor subjetivo. Entretanto, a abordagem bayesiana pode ser considerada a teoria de mais ampla aplicação, sendo que inclui tanto casos particulares da interpretação clássica quanto ortodoxa.

D.7 ESCOLHA DO MÉTODO ADEQUADO

Muitas vezes existe uma dúvida sobre qual método é mais apropriado para resolver o problema que se tem em mãos. Pode-se dizer que as três principais abordagens a serem consideradas na escolha são: ortodoxa, máxima entropia e Bayes. O primeiro e o terceiro método foram abordados neste apêndice, enquanto que a máxima entropia pode ser vista no Apêndice A.

O PME fornece uma maior quantidade de informação apenas porque são acrescentadas mais informações durante a aplicação do método, que são as informações prévias. Tais informações tem muita importância para o problema apesar dos ortodoxos não reconhecerem já que não se trata de frequências em um experimento aleatório.

De uma maneira mais geral pode-se dizer que a escolha entre um dos três métodos citados, está relacionada à presença ou não de ruído no problema em questão (entenda-se ruído como sendo erros). O seguinte exemplo foi dado por Jaynes (1985): se um motorista, em um cruzamento, deve olhar para fora do carro através de um meio opticamente turbulento e ele vê algo diferente a cada vez que olha para fora, sendo que na verdade não existe nenhuma diferença na situação real, então tem-se um problema mais complicado. Neste caso

o que complica é a presença do ruído, e então o método mais adequado é o ortodoxo. Se o problema tem informação prévia, então o PME é o melhor. E no caso de se ter a informação prévia e o ruído aplica-se Bayes. Logo, pode-se concluir que os resultados de ambas as abordagens, PME e a ortodoxa, estão inseridas na solução pelo método de Bayes, no limite de zero ruído e zero informação prévia respectivamente (Jaynes, 1985).

Vale ressaltar que, além de se escolher os métodos pelo critério geral acima mencionado, deve-se observar que a aplicação do teorema de Bayes dá apenas a probabilidade e não a distribuição de probabilidade, e de fato, isto é verdadeiro já que tal teorema não se faz nenhuma referência ao espaço amostral ou ao espaço de hipóteses. Como consequência, as hipóteses, os dados e as informações representam qualquer proposição com significado bem definido. Devido a isso, nenhuma probabilidade pode ser determinada por este método diretamente das informações prévias, então seria necessário utilizar outro método que transformasse a informação prévia em valores numéricos para depois sim utilizar Bayes. Por outro lado, o PME requer que primeiramente seja especificado o espaço de hipóteses que define as possibilidades a serem consideradas. Isto faz com que seja obtida a distribuição de probabilidade e não a probabilidade apenas (Jaynes, 1988).

Mais alguns detalhes sobre as diferenças entre PME e Bayes podem ser observados em Jaynes (1988).

Apêndice E

INSTRUMENTAÇÃO

Neste apêndice serão apresentados todos os instrumentos utilizados na coleta de dados e informações necessárias à realização da modelagem de elementos finitos, simulação e do experimento. São eles

(1) Martelo de impacto

Fabricante: Brüel & Kjaer

Modelo: 8202

Serial: 1291241

Célula de carga modelo 288D01 e sensibilidade 22.4 mV/N

(2) Vibrômetro laser

Fabricante: Vibrômetro OMETRON

Modelo: VQ-500-D

Faixa de frequência: 0,5 Hz à 22 kHz

Faixa de medição: 20 mm/s, 100 mm/s e 500 mm/s

Melhor resolução: 0,02 $\mu\text{m/s}/(\text{Hz}^{0,5})$



Figura 62 – Vibrômetro a laser.

(3) Analisador de sinais

Fabricante: SRS (*Stanford Research Systems*)

Modelo: SR 780

Largura de banda: 102,4 kHz

Gama Dinâmica: 90 dB



Figura 63 – Analisador de sinais.

(4) Programa Sonelastic®

Fabricante: ATCP

Modelo: SWF 2.2

Versão: 2.3 professional



Figura 64 – Programa Sonelastic®.

(5) Paquímetro digital

Fabricante: DIGIMESS

Modelo: 100.178 BL

Resolução: 0,01

Capacidade: 300 mm

(6) Balança digital

Fabricante: Shimadzu

Modelo: AUW220D

Máximo: 220 g / 82 g

Mínimo: 1 mg

e = 1 mg

d = 0,1 mg / 0,01 mg

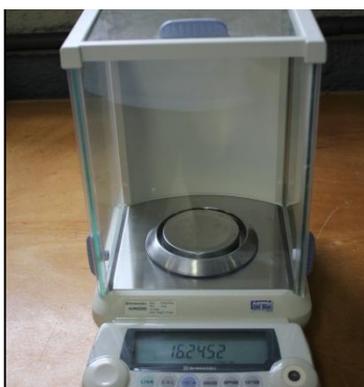


Figura 65 – Balança digital.